

Д. Е. Бурланков

ВРЕМЯ ПРОСТРАНСТВО ТЯГОТЕНИЕ



R&C
Dynamics

Д. Е. Бурланков

Время, пространство, тяготение



Москва ♦ Ижевск

2006

УДК 530.12, 531.51

Интернет-магазин

MAHES

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

Издание осуществлено в авторской редакции. Издательство не несет ответственность за излагаемые автором теоретические концепции и исторические факты.

Бурланков Д. Е.

Время, пространство, тяготение. — М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2006. — 420 с.

В монографии излагается теория, построенная на концепции абсолютности физического трехмерного пространства и времени. Дан исторический обзор воззрений на пространство и время. Разработаны физические принципы и математический аппарат динамики пространства в глобальном времени — Теория глобального времени (ТГВ), являющаяся дальнейшим развитием общей теории относительности (ОТО).

Трехмерное пространство трактуется как поле, девять уравнений которого выводятся из принципа наименьшего действия. В теории, в отличие от ОТО, гамильтониан не равен нулю, что является основой для построения квантовой теории гравитации. Решения этих уравнений для некоторых моделей пространства приводят к однородно расширяющемуся Миру, космическим вихревым полям, делая излишними гипотезы о "темной энергии" и "темной материи".

Решения ТГВ с нулевой плотностью энергии совпадают с решениями уравнений Эйнштейна в ОТО.

ISBN 5-93972-465-5

© Д. Е. Бурланков, 2006

© Институт компьютерных исследований, 2006

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Введение	12
Глава 1. Пространство, время и философия	20
1. Пространство	20
2. Ньютон. Абсолютное пространство	21
3. Натуральная философия	22
4. Катастрофа инерциальных систем	23
5. Позитивизм	24
6. Натуральная философия и позитивизм	26
7. Беркли	29
8. Инерциальные системы	31
9. Философия и конечные автоматы	33
10. Релятивизм	35
11. Причинность	37
12. Евклидова геометрия	38
13. Движение	40
14. Теория глобального времени	42
Глава 2. Классическая механика	45
1. Пространство и время в классической механике	45
2. Первый закон Ньютона	46
3. Второй закон Ньютона. Инерциальные системы.	46
4. “Материализация” инерциальной системы	47
5. Методы классической механики	49
6. Методы Лагранжа и Гамильтона	52
6.1. Метод Лагранжа	52
6.2. Метод Гамильтона	54
6.3. Уравнение Гамильтона–Якоби	55
6.4. Метод Рауса	56
7. Задача Кеплера	57
8. Динамика вращения	61

ГЛАВА 3. Риманово пространство	62
1. Кривизна	63
2. Основы римановой геометрии	67
2.1. Общепринятые соглашения	68
2.2. Тензоры в римановом пространстве	69
2.3. Симметрия тензоров	70
2.4. Ковариантное дифференцирование	73
2.5. Операторы теории поля	75
2.6. Инвариантные интегралы	76
2.7. Тензор кривизны	76
3. Двумерные поверхности	78
3.1. Двумерная сфера	79
4. Трехмерные пространства	80
4.1. Трехмерная сфера	80
4.2. Пространство Лобачевского	83
5. Отображения римановых пространств	84
ГЛАВА 4. Неинерциальные системы	85
1. Вращающаяся система	85
2. Инвариантная производная по времени	87
3. Ли-вариации	88
4. Движения римановых пространств	89
4.1. Движения двумерной сферы	91
4.2. Трехмерная сфера	92
5. Пространство B_9	92
6. Статические поля	94
6.1. Статическое поле Бьерна	95
7. Динамика Космоса	95
8. Локальная неинерциальная лаборатория	97
ГЛАВА 5. Динамика в римановом пространстве	100
1. Геодезические линии	100
2. Движение по двумерной сфере	103
3. Динамика в неинерциальной системе	104
4. Поля Киллинга и динамика	106
5. Первый закон Ньютона	106
6. Равномерное движение трехмерной сферы	107
7. Электрическое и магнитное поля на S_3	109
8. Инерциальное движение в пространстве B_9	110
9. Однородное электромагнитное поле в пространстве B_9	111

10.	Движение в поле Бьерна	113
11.	Распространение света	113
11.1.	“Рыбий глаз” Максвелла	114
12.	Распространение света вблизи Солнца	117
12.1.	Сравнение с расчетами Золднера 1801 года	119
ГЛАВА 6. Теория относительности		121
1.	Преобразования Лоренца	122
2.	Геометрия Минковского	124
3.	Мини-глобальная инерциальная система	129
4.	Движение с ускорением	130
5.	Эффект Саньяка	132
5.1.	Цилиндр Минковского	133
5.2.	Эффект Саньяка	135
5.3.	Снова парадокс близнецов	136
6.	Прецессия Томаса	137
7.	Псевдокватернионы	140
7.1.	Преобразования Лоренца при плоском движении	141
7.2.	Релятивистское вращение по окружности	143
8.	Релятивистская динамика	146
8.1.	Релятивистский атом водорода	147
8.2.	Прецессия Томаса и кинетическая энергия	149
9.	Выводы	154
ГЛАВА 7. Теория глобального времени		156
1.	Время и пространство	157
2.	Физические поля	157
3.	Принцип наименьшего действия	158
3.1.	Электродинамика	158
4.	Динамика пространства	160
4.1.	Действие динамического пространства	160
4.2.	Безразмерная запись	162
4.3.	Динамические уравнения	163
4.4.	Уравнения связей	164
4.5.	Теорема о вириале пространства	164
4.6.	Тождества Гильберга	165
4.7.	Гамильтониан	166
4.8.	Поток энергии	167
4.9.	Гравитационный поток	168
5.	Взаимодействие с вложенной материей	171

5.1.	Электромагнитное поле	171
5.2.	Пылевидная материя	173
5.3.	Идеальная релятивистская жидкость	174
6.	Решения с нулевой энергией	176
ГЛАВА 8. Решения		178
1.	Сферически-симметричные пространства	178
1.1.	Поле сферической массы	179
1.2.	Поле заряженной частицы	180
1.3.	Нестационарное поле скоростей вакуума	180
2.	Космологические задачи	181
2.1.	Динамика плоского мира	181
2.2.	Динамика сферического мира	182
2.3.	Открытая космологическая модель	183
2.4.	Решение с нулевой энергией	184
3.	Конформная динамика как «темная энергия»	185
4.	Вихревое поле	186
4.1.	Слабый принцип суперпозиции	188
4.2.	Мультипольные решения	188
4.3.	Поле с кольцевым источником	190
4.4.	Энергия	191
5.	Плоская анизотропная модель	192
6.	Однородное электрическое поле	196
7.	Динамическая модель В9	198
7.1.	Динамика пространства	198
7.2.	Динамика с однородным электромагнитным полем	199
8.	Плоские гравитационные волны	200
ГЛАВА 9. Релятивистская динамика в римановом пространстве		202
1.	Движение материальной точки	202
2.	Движение частиц в поле Бьерна	204
2.1.	Движение по окружности	206
2.2.	Вращение перигелия Меркурия	207
3.	Эффект деСиттера	208
3.1.	Вращение кольца в сопутствующем репере	208
3.2.	Вращение сферы	211
4.	Движение в поле вихревого монополя	215
5.	Движение света	217
5.1.	Гравитационное красное смещение	217

5.2.	Распространение света в плоской космологической модели	218
5.3.	Космические линзы	218
ГЛАВА 10.	Приближения	220
1.	Нерелятивистское приближение	220
2.	Динамика поля скоростей	221
3.	Приближение ОТО	223
4.	Гравитационный потенциал	224
5.	Слабые гравитационные волны	225
5.1.	Излучение гравитационных волн	227
6.	“The evil axis”	227
6.1.	Метод Ли-генерации мод	229
6.2.	Метрика и векторы Киллинга	230
6.3.	Классифицирующие операторы	232
6.4.	Ли-генерация мод	232
6.5.	Сдвиги	233
6.6.	Граничные моды	233
6.7.	Отражения	235
6.8.	Базовые моды флуктуаций	237
6.8.1.	Четные моды	237
6.8.2.	Классифицирующие операторы	239
6.8.3.	Нечетные моды	240
6.9.	Явный вид мод	242
6.9.1.	Первые четные моды ($n = 2$)	243
6.9.2.	Первые нечетные моды ($n = 3$)	244
7.	Динамика мод на трехмерной сфере	245
ГЛАВА 11.	Общая теория относительности	249
1.	Краткая история	249
2.	Вклад Гильберта	252
3.	Основные решения	253
3.1.	Метрика Шварцшильда	253
3.2.	Решение Рейснера–Нордстрема	254
3.3.	Решение Керра	254
4.	Космология	255
4.1.	Критическая плотность	256
4.2.	Гравитационные волны	257
5.	ОТО в глобальном времени	258
5.1.	Метрика Шварцшильда в глобальном времени	258

5.2.	Использование принципа эквивалентности	260
5.3.	Метрика Шварцшильда в глобальной инерциальной системе	261
5.4.	Метрика Керра в глобальном времени	262
5.5.	Общая сферически-симметричная метрика	264
6.	Техника АДМ	265
7.	В одном шаге от ТГВ	266
8.	Время	268
9.	Триумф ОТО	269
10.	Кризис ОТО	270
10.1.	Космология	270
10.1.1.	Закрытая космологическая модель	270
10.1.2.	Открытая космологическая модель	272
10.2.	Темная материя	273
10.3.	Наблюдательная астрономия	273
10.4.	Космологическая синхронизация	274
11.	Принцип общей ковариантности	275
12.	Квантовая теория	278
12.1.	Квантовая теория гравитации в ОТО	278
13.	ОТО и квантовая теория	279
13.1.	Уравнение Уилера-де Витта	279
13.2.	Петлевая теория гравитации	280
13.3.	Теория квантовых струн	281
14.	В поисках потерянного времени	282
Глава 12. Сферически-симметричный вакуум		284
1.	Теорема Биркгофа	284
2.	Динамика в ОТО	285
2.1.	Однородное решение	285
2.2.	Неоднородная модель	286
2.3.	Неинерциальная система	287
2.4.	Теорема Биркгофа	287
3.	Динамика в глобальном времени	290
3.1.	Калибровочные преобразования	292
3.2.	Общее решение	293
3.3.	Решение Фридмана	294
3.4.	Вакуумное решение	295
3.5.	Сшивание с решением Фридмана	296
3.6.	Неоднородное невакуумное решение	298
4.	Магнитные монополи	299

4.1.	Однородная задача	299
5.	Неоднородная задача	301
5.1.	Расширенная теорема Биркгофа	302
6.	Заключение	302
ГЛАВА 13. Квантовая динамика		303
1.	Квантовая теория гравитации в ТГВ	303
2.	Плотность энергии	304
3.	Квантовая модель Большого взрыва	305
3.1.	Сферическое пространство	305
3.2.	Квантовая задача	307
4.	Динамика волновых пакетов	309
4.1.	Минимальная координата квантового осциллятора	309
4.2.	Динамика космологических пакетов	312
5.	Квантовая плоская анизотропная модель	315
6.	Квантовая теория гравитации	317
6.1.	Квантовая теория малых возмущений	317
6.2.	Функциональное пространство метрик	318
ГЛАВА 14. l-анализ		320
1.	Гармонические полиномы	320
2.	l -представление	322
3.	Динамика скалярного поля	323
4.	Электродинамика	324
5.	Риманова геометрия	326
6.	Динамика пространства в ТГВ	327
7.	Динамическая структура ОТО	329
ГЛАВА 15. Физические поля на трехмерной сфере		330
1.	Операторы Ли-Киллинга на трехмерной сфере	330
1.1.	Ли-преобразования тензорных полей	331
1.2.	Классифицирующие операторы	332
1.3.	Характеристика серии	332
1.4.	Отражения	334
2.	Скалярные поля на 3-мерной сфере	334
2.1.	Четные моды	335
2.2.	Нечетные моды	336
3.	Векторные поля на 3-мерной сфере	337
3.1.	Четные моды	337
3.2.	Классифицирующие операторы	338

3.3.	Нечетные моды	339
3.4.	Классифицирующие операторы	340
4.	Спинорные поля на 3-мерной сфере	341
4.1.	Ли-вариации спинорных полей	341
4.2.	Базовые моды	342
4.3.	Оператор Паули	346
5.	Поля высших спинов	347
6.	Тензоры высшего ранга	348
6.1.	Тензор-спинорные поля	349
6.2.	Метрический спин-вектор	349
6.3.	Неприводимые тензор-спинорные поля	350
6.4.	Определяющее уравнение	351
6.5.	Оператор Казимира	352
7.	Поле тензора третьего ранга	353
7.1.	Тензоры высшего ранга	355
8.	Вектор-спинорное поле	356
8.1.	Базовые моды	356
9.	Заключение	358
ГЛАВА 16.	Кросс-геометрия	359
1.	Введение	359
2.	l -анализ	360
3.	Ковариантные производные	363
4.	Кросс-кривизна	363
5.	Кросс-метрика	364
6.	Динамическая геометрия	365
7.	Внутренние степени свободы элементарных частиц	366
ГЛАВА 17.	Аналитические вычисления	367
1.	Риманова геометрия	368
1.1.	Модуль Ricci	368
1.2.	Сферические координаты в евклидовом пространстве	369
1.3.	Трехмерная сфера	370
1.4.	Трехмерная сфера в конформных координатах	371
1.5.	Трехмерная сфера в углах Эйлера	371
1.6.	Пространство Лобачевского	372
1.7.	Двумерные поверхности	373
2.	Работа с векторными полями	374
3.	Вычисления в Общей теории относительности	376
3.1.	Модуль GenRel	376

3.2.	Метрика Шварцшильда	378
3.3.	Метрика Керра	378
3.4.	Динамическая метрика Эйнштейна-де Ситтера	379
4.	Теория глобального времени	379
4.1.	Модуль Glob	379
4.2.	Vortex	382
5.	Моды деформации трехмерной сферы	383
ГЛАВА 18. Нильс Бьерн (1865–1909)		387
1.	Работы Бьерна и эксперименты XX века	388
2.	Инерциальная система	389
3.	Всеобщая инерциальная система (1894)	390
4.	Движение тел в инерциальной системе Солнца	392
5.	Выводы	393
6.	Более общий случай движения в гравитационном поле	393
7.	Распространение света (1896)	394
8.	Изменение частоты света	395
9.	Космология (1897)	396
10.	Софус Ли	397
11.	Абсолютная инерциальная система	399
12.	Принцип наименьшего действия	400
13.	Координатные преобразования	402
14.	Гравитационная волна (1901)	404
15.	Динамика сферического мира (1903)	406
16.	Движение перигелия Меркурия (1909)	407
17.	Дальнейшая судьба	409
18.	Работы Нильса Бьерна	409
ГЛАВА 19. Заключение		411
1.	Время	411
2.	Пространство	412
3.	ТГВ и ОТО	413
Литература		415

Введение

“Движенья нет, сказал мудрец брадатый,
Другой смолчал и стал пред ним ходить.”

А. С. Пушкин

К началу XXI века учение о пространстве и времени оказалось одним из самых запутанных вопросов физики и философии. Громадный прогресс в описании свойств пространства и времени связан с *теорией относительности* — специальной и общей, — однако и наибольшая путаница в понимании сути пространства и времени привнесена именно теорией относительности.

Стройная схема абсолютных пространства и времени, определенная Ньютоном, оказалась сильно уязвимой для критики из-за множества инерциальных систем, равноправных друг с другом. Какая из них соответствует абсолютному пространству?

Созданная Эйнштейном общая теория относительности (ОТО) перевела эту проблему — принцип относительности — на уровень бесконечно малых инерциальных систем, создав схему единого четырехмерного риманова пространства-времени, в котором, однако, как в едином целом должны существовать и все прошлое и все будущее.

На сегодняшний день общая теория относительности является в научных кругах официально признанной теорией пространства и времени. Что лежит в ее основе?

- Принцип эквивалентности, принимающий, что истинно инерциальной системой является свободно падающая в гравитационном поле. Это мощный физический принцип, в основе которого лежат еще эксперименты Галилея.
- Однако из-за неоднородности гравитационного поля евклидовы инерциальные системы могут быть лишь бесконечно малыми. Поэтому

принцип относительности применим лишь к бесконечно малым системам, если мы принимаем принцип эквивалентности, но не важно, принимаем ли ОТО или другую какую-то теорию, базирующуюся на принципе эквивалентности.

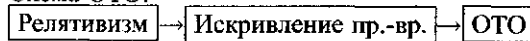
- Принцип общей ковариантности, в который сам Эйнштейн вкладывал довольно дикую идею равноправия всех наблюдателей, не только свободно движущихся, но и ускоренных, а позднейшие исследователи понимали его как тензорный закон преобразования уравнений физики при произвольных преобразованиях четырех координат — трех пространственных и времени. Это априорное утверждение о том, что время должно входить в *физическую теорию* так же, как и координаты, и фактически играть такую же физическую роль.

Основанием для этого принципа послужил лишь уровень развития математики в момент создания ОТО. Разработанная к концу XIX века риманова геометрия многомерных пространств, опиравшаяся лишь на математическую технику *ковариантного дифференцирования*, великолепно сочеталась с идеей четырехмерного риманова пространства при равноправии всех четырех координат.

Правильнее сказать, что в современной (а не эйнштейновской) трактовке этот принцип является результатом стремления описать свойства пространства и времени лишь на основе математических средств ставшей уже классической римановой геометрии.

Логическую схему перехода от классической механики к ОТО можно представить так:

Схема ОТО:



Однако еще задолго до создания теории относительности Н. И. Лобачевский, К. Гаусс, Б. Риман и ряд других ученых (в основном — математики) высказывали мысль о возможной кривизне нашего трехмерного пространства. Принцип эквивалентности, приводящий к классическим инерциальным системам лишь в бесконечно малом, при “склеивании” этих инерциальных систем с неизбежностью приводит к искривленному, риманову пространству. Но можно ли было до создания специальной теории относительности, объединившей пространство и время в пространство-время Минковского, построить теорию гравитации на основе принципа эквивалентности?

Автор проделал такой мысленный эксперимент, создав образ некоего ученого конца XIX века — Нильса Бьерна [1], — в трудах которого тео-

рия гравитации на основе принципа эквивалентности разрабатывалась при сохранении глобального времени Ньютона. Статья о Бьерне приводится в Главе 18. Остальная же часть книги посвящена изучению свойств пространства, времени и динамики, приводящего к *теории глобального времени* (ТГВ), разработанной автором в результате 40-летнего опыта работы в общей теории относительности, анализа возникающих в ОТО проблем. Но следует сказать, что только работа над статьями Бьерна привела к ясному пониманию физических основ теории, которая сначала выглядела как некая находка глобальной инерциальной системы внутри общей теории относительности.

В этой теории трехмерное пространство, описываемое метрическим тензором, является динамическим полем, подобно электромагнитному. Метрика пространства не только зависит от координат, что в общем случае приводит к его кривизне, но и от времени. С математической точки зрения последнее обстоятельство потребовало некоторого дальнейшего развития математического аппарата по сравнению с математическим аппаратом римановой геометрии — потребовалась разработка математической техники *инвариантного дифференцирования тензоров по времени*.

Схема ТГВ:



В обеих схемах кривизна (в ТГВ пространства, а в ОТО пространства-времени) обеспечивает выполнение принципа эквивалентности. Гравитационное поле как таковое отсутствует.

Каково же сходство и различие идей ОТО и ТГВ?

Начнем с общего для обеих теорий принципа эквивалентности. В ньютоновой механике свободного движения все тела, независимо от их масс, движутся равномерно и прямолинейно. Если же пространство (трехмерное пространство) является искривленным, римановым (например, трехмерной сферой, как предполагал Риман 150 лет назад), то все свободные тела в этом пространстве движутся по одним и тем же траекториям — геодезическим линиям. В проекции на какое-нибудь плоское пространство эти линии оказываются искривленными, но для всех тел одинаково, вне зависимости от массы. Если гравитацию связать с искривлением пространства, то искрив-

ление траектории тела за счет кривизны пространства будет одинаковым для всех тел вне зависимости от их масс.

Главной идеей предлагаемой теории пространства и времени — Теории глобального времени — является идея о *физическом трехмерном пространстве и глобальной инерциальной системе координат*, в которой *точки пространства* не меняют своих координат с течением времени. Однако элементарный опыт, например, с яблоком, сорвавшимся с яблони, говорит о том, что мы, сидя под яблоней, находимся в *неинерциальной системе*. Пространство движется относительно нас или мы все время (сидя под яблоней) движемся относительно пространства. В нашей *неинерциальной системе координат* имеется неоднородное *поле скоростей относительно пространства*.

Вторая идея, пришедшая из ОТО, — это переменность геометрии трехмерного пространства с течением времени. Раз у пространства имеется кривизна, она должна определяться какими-то уравнениями, а уравнения в физике, как правило, динамические.

И вот необходимым математическим аппаратом, о котором шла речь выше, являются средства *описания пространства с переменной метрикой из неинерциальных систем*. Как в римановой геометрии главным математическим средством является *ковариантная производная тензоров*, так в динамике пространства основным математическим средством является *инвариантная производная по времени*.

Использование инвариантной производной по времени позволяет записать уравнения динамики пространства в ковариантном виде, причем, как и для других физических полей, например электромагнитного, эти уравнения выводятся из принципа наименьшего действия и, следовательно, приводят к нетривиальному выражению для гамильтониана пространства и некоторой плотности энергии.

Нетривиальность гамильтониана и ненулевая плотность энергии пространства позволяют достаточно стандартным способом строить квантовую теорию гравитации, не требуя каких-то “безумных идей”. Кроме того, оказывается, что в космических масштабах динамическое пространство обладает громадными энергиями и, возможно, учет этой энергии в динамике Космоса сделает ненужными гипотезы о “темной материи”, “темной энергии” и “гигантских черных дырах” современной космологии.

Теперь о времени. В малом (бесконечно малом), как и в ОТО, пространство и время образуют многообразие Минковского. Каждый движущийся наблюдатель живет в собственном времени. Динамика пространства также совершается во времени — в *глобальном времени*, но наряду с *глобальным* временем можно положить множество собственных (местных) времен

движущихся наблюдателей. Таким образом, при глобальном времени специальная теория относительности так же естественно локально встраивается в конструкцию пространства-времени, как и в общей теории относительности.

Данная книга предполагает своим читателем не только специалиста в вопросах пространства, времени и тяготения, но и физика, пытающегося осмыслить поднимаемый круг вопросов. Поэтому при изложении математических вопросов мы, по возможности, не отсылаем читателя к известной математической литературе, а приводим необходимые выкладки.

Структура книги такова:

Сначала рассматриваются некоторые общие проблемы пространства и времени.

Во второй главе собраны необходимые для дальнейшего изложения средства классической динамики.

В третьей главе кратко излагается аппарат римановой геометрии, причем предпочтение отдается трехмерным пространствам.

Четвертая глава является наиболее важной — в ней излагается технология работы в неинерциальных системах. ОТО, сосредоточив внимание на четырехмерной геометрии, оттеснила на второстепенный план задачи, связанные с физикой в искривленных трехмерных пространствах. Движения в трехмерной сфере, однородные электромагнитные поля в трехмерном пространстве постоянной кривизны, пространство Бьянки-9 дают примеры очень интересных физических задач. Исключительно важным является неинерциальное евклидово пространство с полем скоростей Бьерна (что делать — это поле впервые появилось в его работах), представляющим поле тяготения сферической массы.

В пятой главе изучаются методы описания динамики частиц и распространение света в искривленных пространствах в инерциальных и неинерциальных системах. Наиболее важным здесь является описание отклонения света тяготеющей массой (Солнцем), в точности совпадающее с описанием этого эффекта в ОТО.

Шестая глава посвящена специальной теории относительности. Здесь наиболее интересным является описание “цилиндра Минковского” — плоского пространства с нетривиальной топологией, — в котором, например, явно представляется эффект Саньяка как результат локальности собственного пространства и времени движущегося наблюдателя.

Наконец, в седьмой главе излагаются динамические уравнения теории глобального времени, связанные с ними тождества, выражения для энергии и потока энергии. Показано, что подмножество решений со всюду нулевой

плотностью энергии обладает общей, четырехмерной ковариантностью — являются решениями общей теории относительности.

В следующей главе приводятся решения этих уравнений. Многие из решений с нулевой плотностью энергии или прямо, или при некотором преобразовании координат переходят в известные решения общей теории относительности, однако имеется множество решений с ненулевой энергией, не имеющих аналога в ОТО. Среди них следует отметить задачу о вихревом поле, которая, несмотря на общую нелинейность уравнений, обладает некоторым *слабым принципом суперпозиции*, приводящим к мультипольным решениям, обладающим огромной энергией.

Девятая глава содержит применение стандартных средств теоретической физики для описания движения тел в динамических пространствах. Здесь следует отметить задачу о прецессии де Ситтера в поле тяготеющей массы, как движение с минимальной энергией. Движение света в монопольном вихревом поле приводит к эффекту “космической линзы”.

В десятой главе рассматриваются приближенные методы. В отличие от общей теории относительности, где любое движение вынужденно рассматривается как релятивистское, в ТГВ понятия релятивистское и нерелятивистское движения (относительно пространства) абсолютны, поэтому можно сразу говорить о нерелятивистском приближении и различных релятивистских поправках. Кроме того, из-за громадной энергии пространственной кривизны в наших масштабах пространство в громадной степени является плоским и за гравитационную динамику оказывается ответственным поле скоростей — значит допустимо *приближение плоского пространства*.

В связи с обнаруженной в недавнее время крупномасштабной корреляции малых флуктуаций реликтового излучения, названной эффектом “оси зла”, рассматривается динамика флуктуаций метрики трехмерной сферы. В ТГВ тип пространства — открытое или замкнутое — никак не связан с плотностью вещества — только в ОТО существует понятие “критическая плотность”, навязанная нулевой плотностью суммарной энергии пространства и вещества, поэтому даже при малых плотностях космического вещества геометрия Мира может быть представлена трехмерной фридмановской сферой. С помощью разработанного метода Ли-генерации мод строится и полная классификация малых возмущений метрики трехмерной сферы, и алгоритм построения явного вида этих возмущений.

Одиннадцатая глава посвящена Общей теории относительности. Несмотря на существенное различие физических положений ОТО и ТГВ, последняя появилась как результат развития первой, многолетней работы в ней. Поэтому эта глава — самая большая в книге. Здесь дан алгоритм при-

ведения решений ОТО к глобальному времени. Если после этого применить алгоритм АДМ, запретив преобразование времени, уравнения Эйнштейна переходят в уравнения ТГВ с дополнительной связью: плотность энергии равна нулю. Плотность энергии пространства в ТГВ может быть положительной, отрицательной и нулевой. Решения с нулевой плотностью энергии и есть решения ОТО. Анализируются многие проблемы ОТО, пути поиска решения этих проблем, прежде всего построения квантовой теории гравитации.

В двенадцатой главе рассматривается задача, принципиально отличающаяся подходом ТГВ от подхода ОТО: сферически симметричный вакуум. В ОТО здесь царит унылое однообразие, определяемое *теоремой Биркгофа*: все вакуумные сферически симметричные решения уравнений Эйнштейна статичны и приводятся к метрике Шварцшильда, в то время как ТГВ показывает богатый динамический спектр сферически симметричных вакуумных решений.

Тринадцатая глава посвящена начальным разработкам в квантовой динамике пространства. Важнейшим моментом, отличающим квантовую теорию гравитации от, например, квантовой электродинамики, является кривизна функционального пространства геометрий. В качестве конечномерного примера квантовой динамики рассматриваются космологические модели — изотропная с ультрарелятивистским веществом и анизотропная. Обсуждается смысл квантового представления масштаба Мира.

Новые задачи требуют и развития математических адекватных методов. В четырнадцатой главе рассматривается один из таких методов — l -анализ, позволяющий анализировать число степеней свободы полей, подчиняющихся системам дифференциальных уравнений и имеющих калибровочные степени свободы. С помощью l -анализа определяется структура начальных данных динамических полей.

В пятнадцатой главе рассмотрена структура физических полей с различным спином на трехмерной сфере. Поля строятся методом Ли-генерации.

Шестнадцатая глава посвящена дальнейшему развитию математических методов. Используемая в теории глобального времени инвариантная производная по времени, конструкция, позволяющая в сложной динамической ситуации не затерять глобальное время, — является ли она некоторой частной конструкцией, *ad hoc*? В этой главе строится более общая геометрическая система — кросс-геометрия, — $(n + m)$ -мерная геометрия с n -мерной базой и m -мерным слоем, в которой переменные слоя всегда выделяются из общей системы переменных. В частности, при $m = 1$ — одномерном слое

(времени) — кросс-геометрия описывает динамическую геометрию, являющуюся математической основой теории глобального времени.

Работа и в общей теории относительности, и в теории глобального времени требует довольно объемных вычислений, в выполнении которых существенно могут помочь компьютерные программы аналитических вычислений. В семнадцатой главе представлены модули в пакете “Математика”, позволяющие проводить компьютерные аналитические вычисления в римановой геометрии и ТГВ.

Наконец, в восемнадцатой главе изложена легенда о Нильсе Бьерне [1], в которой показан путь построения нерелятивистской теории гравитации на основе представления о динамическом римановом трехмерном пространстве.

В Заключении обсуждаются существенные изменения в наших физических представлениях о пространстве и времени, вносимых Теорией глобального времени. ТГВ фактически открыла новый физический, динамический объект — трехмерное пространство — и восстановила затерявшееся в ОТО глобальное время.

ГЛАВА 1

Пространство, время и философия

Мало кто знает, как много надо знать, чтобы
знать, как мало мы знаем.

XXX

1. Пространство

Естественно-научное представление о пространстве возникает еще в древней Греции. По Эпикуру, например, Вселенная есть тела и пространство. Возникновение евклидовой геометрии приводит к представлению о том, что евклидовы свойства пространства являются его неотъемлемыми атрибутами. Более того, исключительное совершенство и изящество евклидовой геометрии создают впечатление, что для евклидовости пространства не нужно какое-либо материальное обеспечение. Совершенство евклидовой геометрии является гарантией ее реальности.

Бурное развитие науки с конца XVI века приводит к стремлению более детального понимания свойств пространства.

Рене Декарт (1596–1650), являющийся наряду с Галилеем, Ньютоном одним из основоположников науки нового времени, считал разработку понятия пространства одним из основных вопросов науки. По Декарту, *Мир* — это материальный континуум, протяженная материя, или материальное пространство.

Он тщательно обдумывает концепцию пространства, приходит к убеждению в *реальности* этого понятия [2]: "...нельзя думать, будто в пространстве, в котором ничего не воздействует на наши органы чувств, действительно ничего нет."

Он приводит более конкретные размышления по этому вопросу:

"Поэтому, если спросят: что случится, когда бог устранил тело, содержащееся в данном сосуде, и не допустит никакое другое тело проникнуть на покинутое место, то на такой вопрос должно ответить: в таком случае стороны сосуда сомкнутся. Ведь когда между телами ничего не пролегает, чтобы тела были отделены друг от друга, т.е. между ними как бы имелось расстояние и, в то же время это расстояние было бы *ничто* ..."

2. Ньютон. Абсолютное пространство

Галилео Галилей (1564–1642) экспериментально и теоретически исследовал равноускоренное движение. Христиан Гюйгенс (1629–1695) показал, что при равномерном вращении по окружности сила направлена к центру, и вывел формулу центростремительного ускорения.

Этот базис дал возможность Исааку Ньютону (1643–1727) взяться за проблему общего криволинейного движения. С точки зрения необходимых для решения этой проблемы математических методов Ньютон разработал дифференциальное и интегральное исчисления. Но с точки зрения физики нужно было дать тем количествам, для которых записывались уравнения, строгое физическое толкование.

Скорость является первой производной по времени, а ускорение — второй производной от *перемещения*. Что такое перемещение? Перемещение в *пространстве*. Не относительно каких-то других тел, а именно в пространстве. Решая самую главную задачу о движении планеты в поле тяготения Солнца, Ньютон описывает движение планеты в евклидовом пространстве, а не только изменение расстояния от Солнца до планеты.

Как и Декарт, он понимает *объективность* времени и пространства, разделяет их свойства *самих по себе*, объективные свойства, от их проявлений в эксперименте и обыденной жизни:

"Время, пространство, место и движение представляют понятия общеизвестные. Однако необходимо заметить, что эти понятия обыкновенно относятся к тому, что постигается нашими чувствами. Отсюда происходят некоторые неправильные суждения, для устранения которых необходимо выше приведенные понятия разделить на абсолютные и относительные, истинные и кажущиеся, математические и обыденные."

Ньютонова механика построена на понятиях перемещения в пространстве, скорости относительно пространства, ускорения. Если при растяжении про-

жины возникает сила ее реакции, она пропорциональна растяжению пружины *в пространстве*, в объективном пространстве, не связанном с какими-то измерениями или другими телами.

3. Натуральная философия

В “Математических началах натуральной философии” [3] Ньютон изложил свой опыт работы в физике не только как тонкого экспериментатора или мощного математика. Он ставит задачу постижения устройства Мира, не только в виде явно наблюдаемых явлений, но и его фундамента, проявляющегося в наблюдаемых явлениях лишь косвенно.

В Третьей книге Начал он формулирует этот свой опыт в виде “Правил умозаключений в физике”:

Правило 1. *Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.*

Правило 2. *Поэтому, поскольку возможно, должно приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.*

Правило 3. *Такие свойства тел, которые не могут быть ни усилены, ни ослаблены и которые оказываются присущи всем телам, над которыми возможно проводить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.*

Правило 4. *В опытной физике предположения, выведенные из совершающихся явлений помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности, или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточняются или же окажутся подверженными исключениям.*

В **Правиле 4** говорится не о свойствах, измеряемых на опыте, а о “предположениях, выведенных из опытов с помощью наведения”, теоретических абстракциях. Именно таковыми оказались у Ньютона положения об абсолютном пространстве и абсолютном времени. При этом он допускает возможность дальнейшего уточнения этих понятий.

Поучение I. *Абсолютное, истинное, математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью...*

Поучение II. Абсолютное пространство

по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным...

Поучение III. Место есть часть пространства, занимаемая телом, и по отношению к пространству бывает или абсолютным, или относительным....**Поучение IV. Абсолютное движение**

есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое, *относительное* — из относительного в относительное же. Так на корабле, идущем под парусами, относительное место тела есть та часть корабля, в котором тело находится, напр., та часть трюма, которая заполнена телом и которая, следовательно, движется вместе с кораблем. Относительный покой есть пребывание тела в той же самой области корабля или в той же самой части его трюма.

Истинный покой есть пребывание тела в той же самой части того неподвижного пространства, в котором движется корабль со всем в нем находящимся. ...

Ньютон подчеркивает, что пространственные отношения, время — это не только и не столько замеряемые величины. Это объективные атрибуты Мира, которые мы как-то пытаемся познать через их проявления, через их относительные проявления.

Ускорение, определяемое вторым законом Ньютона, есть вторая производная от перемещения в пространстве по абсолютному времени, а не по некоей, замеряемой в каком-то опыте, величине. По Ньютону, это закон природы, не зависящий от наблюдателя.

4. Катастрофа инерциальных систем

Однако развитие механики Ньютона привело к возникновению нового курьеза в понимании (или непонимании) пространства: оказалось, что множество *инерциальных систем*, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, в равной степени может претендовать на роль *абсолютного*, абсолютно покоящегося пространства: никакими локальными механическими экспериментами разыскать среди множества инерциальных пространств абсолютно покоящееся не удастся.

Это привело к возникновению *релятивизма*, который можно сформулировать так: раз мы не можем определить экспериментально абсолютное

пространство, значит, такового нет вообще. Равноправие инерциальных систем дало мощный инструмент для решения задач механики, использованный еще Гюйгенсом при исследовании законов столкновения.

Ньютон вывел равноправие всех инерциальных систем относительно законов механики, исходя из понятий “абсолютное пространство” и “абсолютное время”. Но это значит, что никакими механическими экспериментами абсолютную систему нельзя распознать среди бесконечного множества других инерциальных систем. Доказывает ли это отсутствие абсолютного пространства?

Ситуация напоминает эпизод из восточной сказки “Али-Баба и 40 разбойников”. Чтобы отметить дом, где жил Али-Баба, разбойник Ахмед поставил на воротах этого дома крестик. Но бдительная рабыня Марджана, увидев крестик, поставила такие же крестики на всех соседних домах. Когда ночью разбойники пришли, чтобы убить Али-Бабу, они увидели инвариантность домов по отношению к крестикам и не смогли совершить черное дело. Но значит ли это, что все дома были инвариантны и по отношению к Али-Бабе?

5. Позитивизм

В 1865 году Густав Кирхгоф вывел понятие *энтропии* — функции состояния газа, которая при различных термодинамических процессах в замкнутой системе может лишь возрастать или оставаться неизменной. Лучшие умы начали поиски физического смысла этой “тени энергии”. В это время молодой австрийский физик Эрнст Мах (1838–1916) начал экспериментально и теоретически разрабатывать физическую картину течения сжимаемых жидкостей (газов) со скоростями, сравнимыми со скоростью звука в данной среде. При быстротекущих процессах теплопередача между различными частями газа пренебрежимо мала и процесс оказывается *изоэнтропным* — потоки тепла отсутствуют, как это было показано Кирхгофом. Вместо того, чтобы искать смысл энтропии, Мах учел основное свойство изоэнтропных процессов — отсутствие теплопередачи — и успешно построил теорию околозвуковых и сверхзвуковых течений.

Ему понадобился не физический смысл энтропии, а влияние сохранения или изменения этой величины на физические процессы. Из этого своего успеха Мах сделал вывод, положивший основу новому философскому подходу — *позитивизму*: важен не некоторый абстрактный *физический смысл* физических величин, а их влияние на проявляющиеся в эксперименте явления. Реально существуют лишь те физические атрибуты, которые могут

быть замерены в некотором реальном или хотя бы воображаемом эксперименте.

Во второй половине XIX века интенсивно развивалась лабораторная экспериментальная физика, открывались и изучались все новые и новые физические явления: электромагнетизм, тепловое излучение тел, радиоактивность, каналовые лучи, рентгеновские лучи, оптические спектры. . . В этих экспериментах совершенно неважно было не только некоторое “абсолютное движение”, но даже вращение Земли вокруг Солнца со скоростью 30 км/с было совершенно несущественно. Исследователю проще всего было сказать: вот моя лаборатория — это абсолютная инерциальная система, — и эксперименты вполне согласовывались с таким постулатом.

Рассуждения об абсолютном пространстве Ньютона, выделение явно инерциальной системы только мешали ясному пониманию проводимых экспериментов, как после открытия квантовой механики рассуждения о связи волновых и корпускулярных свойств элементарных частиц только мешали решению множества возникших конкретных задач.

Позитивизм противостоял громоздкому и примитивному “объяснению” этих явлений с точки зрения той части науки, которую человечество к тому времени освоило — механики, прежде всего.

Для подавляющего большинства экспериментаторов (исключая Майкельсона) достаточно, чтобы пространственной базой его эксперимента была его лаборатория — ее пол, стены, потолок, установка, смонтированная на столе. Но на противоположной стороне Земного шара такая же лаборатория из-за вращения Земли вокруг своей оси движется в противоположную сторону. Неважно: *инерциальных систем — бесконечное множество*. Не волнуйтесь, занимайтесь своим делом. Все величины, связь между которыми мы определяем, мы можем измерить. Пусть философы болтают об абсолютном и относительном, а мы — работаем.

Именно такой, *позитивистский*, подход оказался полезным для бурного прогресса физики в конце XIX — начале XX веков и был поддержан, воспринят большинством физиков.

Наиболее четко позитивистский подход исповедовал Шерлок Холмс. Вот свидетельство доктора Ватсона:

“Но когда оказалось, что он ровно ничего не знает ни о теории Коперника, ни о строении солнечной системы, я просто опешил от изумления. Чтобы цивилизованный человек, живущий в девятнадцатом веке, не знал, что Земля вертится вокруг Солнца, — этому я просто не мог поверить.

— Вы, кажется, удивлены, — улыбнулся он, глядя на мое растерянное лицо.

— Спасибо, что вы меня просветили, но теперь я постараюсь как можно скорее все это забыть.

...

— Да, но не знать о солнечной системе! — воскликнул я.

— На кой черт она мне? — перебил он нетерпеливо. — Ну хорошо, пусть, как вы говорите, мы вращаемся вокруг Солнца. А если бы я узнал, что мы вращаемся вокруг Луны, много бы это помогло мне или моей работе?”

Для успешной работы в гидродинамике — расчет подъемной силы и сопротивления подводного крыла, описание разлива рек и возникновения цунами — совершенно необязательно знать, что вода состоит из молекул. Для расчета траекторий космических аппаратов совершенно не нужно знание квантовой механики. Представление о более тонких свойствах пространства, например о его кривизне, и изменении ее со временем, совершенно не нужно не только в обыденной жизни, но и при выполнении большинства физических исследований (сверхпроводимость, микроэлектроника).

Эту простую истину Мах довел до запрета поиска более глубоких представлений о Мире. Шерлок Холмс не отрицал движения Земли вокруг Солнца. Он просто говорил о ненужности этого знания в его работе.

6. Натуральная философия и позитивизм

Мах выступил с программой, целью которой было избавить физику от накопленной столетиями “метафизической чепухи”.

В черный список Маха попали и абсолютное время и абсолютное пространство: “покажи здесь, как их увидеть или замерить, тогда я их признаю”.

Основным его произведением, где проведен анализ значительного числа заблуждений в механике, накопившихся с древних времен, является “Механика” (1883) [4]. В издании 1904 г. он пишет:

Тот взгляд, что “абсолютное движение” — пустое бессодержательное и ненужное с научной точки зрения понятие, — взгляд, который двадцать лет назад вызывал у всех неприятное удивление, в настоящее время разделяется многими видными исследователями.

Положительным моментом позитивизма была критика стремления ученых *все объяснить* без какого-либо рационального выхода (“пускать деревья не качаются, тогда и ветра не будет”). Однако, как писал Ленин [5], “Мах вместе с грязной водой выплеснул и ребенка.”

Комментируя Поучения Ньютона о пространстве и времени, Мах в растерянности: вроде бы Ньютон “разделяет его позицию” (“гипотез не строю”), а сам говорит о сущностях, не замеренных в эксперименте, а полученных “наведением”:

“Кажется, как будто в приведенных выше замечаниях Ньютон находится еще под влиянием средневековой философии, будто он изменил своему намерению исследовать только *фактическое*...”

Мы совершенно не в состоянии *измерять временем* изменение вещей. Напротив, время есть абстракция, к которой мы приходим через посредство изменения вещей, потому что у нас нет никакой *определенной* меры, ибо все они между собою связаны. Мы называем равномерным такое движение, в котором равные приращения пути соответствуют равным приращениям пути другого движения, выбранного для сравнения (вращение Земли). Движение может быть равномерным относительно другого движения. Вопрос, равномерно ли движение *само по себе*, не имеет никакого смысла. В такой же мере мы не можем говорить об “абсолютном времени” (независимо от всякого измерения). Это абсолютное время не может быть измерено никаким движением и поэтому не имеет никакого ни практического, ни научного значения, никто не вправе сказать, что он что-нибудь о таком времени знает, это пустое “метафизическое” понятие.”

Сравним это рассуждение Маха с размышлениями Ньютона:

“Абсолютное время различается в астрономии от обыденного солнечного времени уравниванием времени. Ибо естественные солнечные сутки, принимаемые обычно за равные, на самом деле между собою не равны. Это неравенство и исправляется астрономами, чтобы при измерениях движений небесных светил применять более правильное время. Возможно, что не существует (в природе) такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенной точностью. Все движения могут ускоряться или замедляться, течение же абсолютного времени изменяться не может...”

Маха беспокоит то, как *он* лично будет измерять параметры каких-то движений, судить о равномерности движения. Ньютона волнует, *каковы же уравнения движений планет*, к какому времени привязаны эти уравнения.

Логика Ньютона: Планеты движутся в соответствии с некоторыми законами, в которые входит время (2-й закон Ньютона). Эти законы не могут зависеть от того, наблюдает ли за планетами г-н Мах или нет. Вопрос о наблюдении движения планет является вторичным, суждение о равномерности движения в абсолютном времени требует тщательно-го анализа наблюдений.

Логика Маха: Первичным является то, что мы наблюдаем. Упорядочивание наших наблюдений упрощается, если ввести понятие “время”, однако это просто удобное “метафизическое” понятие.

Но Мах не только философ, он еще и физик. А львиную долю физики составляют законы ньютоновой динамики для систем материальных точек, твердого тела, жидкости, газа, описывающих процессы в пространстве и времени. Что делать с громадным багажом науки в этих областях? Эту проблему Мах решает с изящной снисходительностью:

“Принципов Ньютона достаточно, чтобы без привлечения какого-нибудь нового принципа рассмотреть каждый практически возможный случай механики, будь то из области статики или динамики. Если при этом возникают затруднения, то это всегда только затруднения математического (формального), но никогда не принципиального характера.”

Хотя философские основы ньютоновой механики отдают средневековым, но пользоваться ей можно. Таким образом, дальнейший анализ механики ведется им именно на основе положений Ньютона. По возможности, в своей книге Мах избегает прямой записи второго закона Ньютона, содержащего производную по времени, рассматривая задачи, где можно воспользоваться законами сохранения (в которые, правда, входит скорость, но он не пишет ее как производную по времени перемещения в пространстве, полагая, видимо, что это просто измеряемая величина). Но там, где избежать производных или интегралов по времени не удастся (например, при описании гамильтоновой динамики), он пишет эти интегралы и производные, не обсуждая, по какому движению, признанному им за равномерное, это время определяется. Он пользуется *абсолютным временем* Ньютона, а при описании перемещений — понятием пространства.

Осуждая учение Ньютона о пространстве и времени *de jure*, Мах ими же пользуется *de facto*. Это говорит о том, что инерциальная система с трехмерным евклидовым пространством и инвариантным по отношению к наблюдателю временем является объективным элементом конструкции Мира (в локальной области, как мы увидим далее).

В этой связи несложно понять, что такое “принцип Маха”, определяющий все перемещения относительно неких бесконечно удаленных звезд (хотя система покоя их центра масс вряд ли может быть установлена какими-либо экспериментами). Геометрия этих перемещений евклидова и “принцип Маха” просто оказывается другим (более глубокомысленным) названием абсолютного пространства Ньютона.

7. Беркли

Традиционно считается, что одним из главных (или по крайней мере — первых) критиков положений Ньютона об абсолютном пространстве является Джордж Беркли (1685 — 1753). Однако, если Мах выступает в роли верховного судьи (“... Ньютон находится еще под влиянием средневековой философии. . .”), Беркли [6] пытается честно анализировать ситуацию с абсолютным пространством. Во-первых, он четко понимает сущность абсолютного пространства:

52. То, что постулируют как пространство безграничное, неподвижное, не воспринимаемое чувством, проникающее и содержащее все тела, называют абсолютным пространством. А пространство, постигаемое и определяемое через тела и поэтому являющееся объектом чувства, называется относительным, кажущимся, обыденным пространством.

И дальше рассуждает беспристрастно:

53. Итак, предположим, что все тела уничтожены. То, что остается, называют абсолютным пространством; при этом все отношения, следующие из расположения тел и расстояний между телами, исчезли вместе с телами. Кроме того, такое пространство является бесконечным, неподвижным, неделимым, не воспринимаемым чувствами, лишенным связей и различий. Другими словами, все его атрибуты отрицательны, или негативны. Таким образом, оказывается, что это есть просто ничто. Единственное несущественное затруднение состоит в том, что оно протяженно, а протяженность — положительное качество. . . Уберите из абсолютного

пространства само название, и от него ничего не останется ни в чувстве, ни в воображении, ни в интеллекте.

63. Никакое движение не может быть познано или измерено иначе как через чувственные вещи. Следовательно, поскольку абсолютное пространство никоим образом не воздействует на чувства, оно необходимо должно быть совершенно бесполезным при различении движений.

Как ему не хватает переменной кривизны в пространстве, при которой движущееся тело существенно отличается от покоящегося, а изменение геометрии пространства во времени может привести к разрушению твердых тел! Но в то время было известно только евклидово пространство, всюду тождественное само себе.

Беркли жил за 150 лет до Маха и еще допускал абстракцию, косвенно выводимые и непосредственно не наблюдаемые сущности:

71. В физике имеют место чувства и опыт, которые распространяются только на очевидные факты; в механике допускаются абстрактные понятия математиков. . .

72. Только путем размышления и рассуждения настоящие производящие причины могут быть вызволены из окружающего их мрака и в некоторой степени поняты.

По отношению к пространству он выступает как юрист: очевидно, что нечто такого рода — вроде абсолютного пространства — имеется. Но одной *протяженности* для доказательства его существования не достаточно. И пока иных доказательств нет:

63. Никакое движение не может быть познано или измерено иначе как через чувственные вещи. Следовательно, поскольку абсолютное пространство никоим образом не воздействует на чувства, оно необходимо должно быть совершенно бесполезным при различении движений. Кроме того, для движения существенны определенность или направленность, но они состоят в отношении. Следовательно, постигнуть абсолютное пространство невозможно.

64. . . . для этого было бы достаточно ввести вместо абсолютного пространства относительное, ограниченное небесами фиксированных звезд, принятыми за неподвижные.

Пожалуй, реликтовое излучение могло бы серьезно повлиять на мнение Беркли, ибо он не утверждает, а ищет.

8. Инерциальные системы

Попытка изгнания Махом (а еще ранее — Беркли) понятий абсолютного времени и абсолютного пространства, заявления о том, что это “праздные, метафизические понятия”, очень мало повлияли на математическую структуру динамики. Любой учебный курс механики или монография успешно стартуют от трехмерного евклидова пространства с неким временем, по отношению к которому записываются уравнения динамики. Проблема возникает лишь в исходной, стартовой позиции в описании пространства и времени.

Позитивизм перекочевал и в советскую науку, метафизическим катехизисом которой являлся “Материализм и эмпириокритицизм” В.И. Ленина, где главный свой гнев автор обрушивал на Маха и махизм. Например, в учебнике МГУ [7] мы читаем:

“...высказывание о точке пространства имеет смысл лишь в том случае, когда указано ее положение относительно материальных тел.

Так же как не имеет смысла говорить о пространстве самом по себе, не имеет смысла говорить о времени самом по себе. Представление о течении времени вне связи с материальными процессами является бессодержательным.”

Это же откровенный Мах, правда, приправленный заклинаниями о пространстве и времени как формах существования материи — основа т. наз. материализма. При этом упомянутое утверждение явно противоречит Ленину, который пишет:

“Признавая существование объективной реальности, т.е. движущейся материи, независимо от нашего сознания, материализм неизбежно должен признавать объективность времени и пространства, в отличие прежде всего от кантианства, которое в этом вопросе стоит на стороне идеализма, считает время и пространство не объективной реальностью, а формами человеческого созерцания...”

Другие авторы, не желавшие себя связывать с “т. наз. материализмом”, пытаясь (не очень явно) стоять на почве позитивизма, оказались в достаточно трудном положении. Одним из самых популярных курсов физики является многотомник Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Как же там определяются пространство и время? В Механике [8]:

Положение материальной точки в пространстве определяется ее радиус-вектором $\mathbf{r}$, компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами x, y, z . Производная $\mathbf{r}$ по времени t ... называется скоростью ...

Здесь совершенно неясно, что такое “время”, но ясно, что авторы понимают “пространство” как трехмерное многообразие с евклидовой метрикой (декартовы координаты можно ввести только в евклидовом пространстве). Однако:

Для изучения механических явлений надо выбрать ту или иную систему отсчета....

Что такое “система отсчета” — не разъясняется. Пространство евклидово, как было заявлено ранее, поэтому оно однородно и изотропно. Но:

По отношению к произвольной системе отсчета пространство является неоднородным и неизотропным. Это значит, что если какое-либо тело не взаимодействует ни с какими другими телами, то тем не менее его различные положения в пространстве и его различные ориентации в механическом отношении не эквивалентны.

Но в конце концов инерциальные системы просто постулируются вне зависимости от предыдущих рассуждений:

Оказывается, однако, что всегда можно найти такую систему отсчета, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время однородным. Такая система называется *инерциальной*. В ней, в частности, свободное тело, покоящееся в некоторый момент времени, остается в покое неограниченно долго.

Правда, чтобы избежать абсолютного пространства Ньютона идет апелляция к некоему “опыту”:

Опыт показывает, однако, что не только законы свободного движения будут одинаковыми в этих системах, но что они будут и во всех других механических отношениях полностью эквивалентны. Таким образом, существует не одна, а бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно.

Если в динамике Ньютона, стартующей от понятий “абсолютное пространство” и “абсолютное время”, равноправие равномерно и прямолинейно движущихся друг относительно друга систем выводится, то здесь авторы,

пытаясь избежать этих запретных в интеллектуальных кругах метафизических понятий, вынуждены апеллировать к некоторому *опыту, который показывает* ни много ни мало, как *полную эквивалентность таких систем во всех других механических отношениях*. Что это за опыт, проведенный по отношению ко *всем* механическим отношениям?

Но как только они теми или иными окольными путями добиваются до инерциальных систем, далее все идет четко и эффективно.

Эта ситуация говорит о том, что инерциальные (локальные) системы являются уже осознанным человечеством элементом конструкции Мира, в то же время более общие объективные свойства пространства и времени пока еще не поняты.

Многие авторы просто заявляют, что в основе механики лежит понятие инерциальной системы, которых бесконечное множество (аксиоматический подход — напр. [9]). До поры до времени такой подход вполне приемлем — пока мы полагаем, что пространство евклидово: евклидово пространство может двигаться само в себе прямолинейно. Но как только возникнет мысль об искривленном пространстве (см. далее), этот подход сразу заходит в тупик.

9. Философия и конечные автоматы

В 1957 году вышла работа Хомского [10] по математической лингвистике “Синтаксические структуры”, где различные языки по уровню сложности были разделены на четыре типа, начиная с типа 0, (почти) описывающего разговорные и литературные языки. Тип 1 — контекстно зависимые языки. Языки типа 2 — контекстно независимые — охватывают языки программирования (Pascal, C, Fortran и пр.). Языки типа 3 — автоматные языки.

Самое главное — Хомский установил соответствие между типом языка и автоматом, распознающим конструкции данного языка. Конструкции автоматных языков (тип 3) распознаются *конечными автоматами*. Каждое выражение этого языка должно приводить к конкретному действию, хотя последнее может вызвать некоторые другие действия. Хотя цепочки действий могут быть достаточно длинными, но при конструировании языка всегда можно определить предельную длину цепочек, изображаемых графами без рекурсии — *деревьями*.

Конечные автоматы — исключительно эффективные устройства: они управляют лифтами, банкоматами, автоматами газированной воды, телефонными аппаратами. Их эффективность настолько поражает, что многим кажется, — если бы вся человеческая деятельность строилась по принципу конечного автомата, прогресс был бы значительно более быстрым.

Контекстно свободные языки распознаются автоматами с магазинной памятью. Эти языки допускают рекурсию и нельзя заранее определить количество действий, соответствующих той или иной программе (иногда программы зацикливаются при соблюдении грамматики языка).

С точки зрения работы Хомского методологический подход позитивизма состоит в требовании, чтобы наука описывалась автоматным языком и могла реализоваться конечным автоматом.

И это верно по отношению к тем разделам человеческой деятельности, которые могут быть заранее запрограммированы. Как бы ни был сложен конечный автомат, все его реакции на внешние воздействия, на возможные ситуации программируются заранее. Все возможные проблемы (в банкомате закончилась купюра, у лифта не закрылась дверь и пр.) должны быть предусмотрены заранее.

И в науке немало действий, которые автоматизируются: вычисление погрешностей, статистическое сравнение экспериментальных результатов, автоматизация вычислений, автоматизация экспериментальных установок.

Однако наши знания о Мире, в котором мы живем, и даже знания о наших знаниях о нем принципиально рекурсивны. Что-то мы узнаем в детстве, затем те же знания в процессе учебы осмысливаются по новому и пополняются новыми. Будучи поставленным на научную основу в какой-то области знания, они опять переосмысливаются в процессе работы.

Наши знания о Мире, о его закономерностях возникли не из какого-то эксперимента, а в результате *опыта*, жизненного опыта и не только нашего, но и опыта предыдущих поколений.

Подход Ньютона к пространству, времени, движению исходит из того, что мы знаем лишь некоторую часть информации об устройстве Мира, и отражает богатый опыт самого Ньютона не только в решении ряда проблем физики, таких как вычисление движения планет, определение структуры белого цвета, но и в возникновении множества вопросов, на которые наука его времени не могла дать ответа — эти вопросы запущены в *рекурсивную разработку*. Не имея классификации Хомского, Ньютон прекрасно понимал невозможность решения принципиальных проблем науки на автоматном уровне. “Типотез не строю” — это ни в коем случае не значит отрицание возможности более глубокого проникновения в сущность явлений. Это значит, что из всего современного опыта человечества мы должны создать не окончательную, единственно верную картину мира, а лишь описать некоторый уровень рекурсии представления о нем, описав некоторые понятия схематично, понимая, что дальнейший опыт человечества эти схематичные конструкции с течением времени уточнит.

Неужели, например, можно понять его поучение о пространстве “*Абсолютное пространство* по самой своей сущности безотносительно к чему

бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным . . .” как претензию на окончательное знание свойств пространства, категорический запрет на возможность какой-либо другой геометрии пространства? Сейчас (при Ньюtone), при том уровне знаний нужно было исходить из этого. Но о самом факте существования пространства как такового Ньютон на основании своего опыта работы в натуральной философии уже говорит совершенно уверенно.

При *рекурсивном* подходе на любом уровне знаний какие-то отношения мы фиксируем схематично, полагаясь на уточнение, более детальную разработку их при дальнейшем развитии науки.

Хорошо известно, что Ньютон заявлял об абсурдности дальнего действия, передачи гравитационного взаимодействия без участия промежуточных областей, однако на уровне знаний своего времени вынужден был сформулировать закон тяготения в форме дальнего действия. “Гипотез не строю” — это заявление не о позитивизме, а об относительности наших знаний, с неизбежностью их неполноты и необходимостью дальнейшего их уточнения с большой осторожностью.

10. Релятивизм

Удивительная сила науки, проявляющаяся при строительстве зданий, кораблей, в предсказании солнечных и лунных затмений, очистке загрязненных поверхностей и т.д. приводит к мнению о безграничности возможностей, создаваемых научным знанием: возможности превращения свинца в золото, предсказания судьбы по расположению планет, к двенадцатикратному повышению урожайности. В то же время *положительная наука* — которая опирается на четко разработанные алгоритмы, — постоянно демонстрирует ограниченность своих возможностей. При этом на любом уровне развития науки имеется большой (и возрастающий с ростом знаний) объем непонятого: почему пространство трехмерно, почему динамикой управляют законы Ньютона, почему динамические уравнения выводятся из принципа наименьшего действия? Квантовая механика вроде бы разъясняет последний вопрос, но создаст новый: каков смысл волновой функции?

В науке имеется постоянный контакт рационального и иррационального. Степень того и другого определяется уровнем наших знаний. Если относиться к росту знаний как к рекурсивной процедуре, то такое единство понятого и непонятого является нормальным состоянием.

Однако постоянно в науке возникает абсолютизация непонятого, иррационального. Стремление найти *философский камень* для окончательного разрешения всех проблем. Нужна “безумная идея”, чтобы все проблемы ока-

зались решенными. И постоянно — и в средние века, и в наше время — эти иррациональные течения претендуют на владение сокровенной, глубинной, *не всем доступной истиной*.

После создания теории относительности (специальной теории относительности) появился новый фундамент для иррационального. Исчезло понятие *развитие во времени мира в целом*. Развитие можно описывать только с точки зрения какого-то наблюдателя.

На столе лежит кусочек сахара, состоящий из 10^{23} атомов. Так как температура немаленькая — $300^\circ K$ — каждый атом этого огромного множества движется в своем направлении и со своей скоростью. Можно ли что-то сказать о прошлом или будущем этого куска? У каждого атома свое прошлое и будущее, но каково прошлое или будущее всего куска — не его центра масс — точки, — а всего ансамбля из 10^{23} атомов, распределенных в объеме один кубический сантиметр?

В теории относительности это бессмысленный вопрос. И вот идут высокоинтеллектуальные построения *стрелы времени*, дерева будущего, дерева прошлого.

Дав науке исключительно сильное рациональное знание, теория относительности ненавязчиво протащила некоторые “очевидные” догмы, главная из которых — “очевидность отсутствия абсолютного времени”. Показав инвариантность локальной области пространства-времени относительно преобразований Лоренца (тоже локальных), теория относительности делает “очевидный” вывод — никакого глобального времени быть не может.

Однако рассмотрим евклидов аналог. Двумерная метрика

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \quad (1.1)$$

инвариантна относительно поворотов и вроде бы все координаты, связанные с исходными x и y ортогональным преобразованием

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.2)$$

приводят к той же метрике (1.1), следовательно, с *метрической точки зрения* исходные координаты никак не выделены по отношению к преобразованным.

Но представим себе бесконечный двумерный цилиндр, и пусть координата y направлена вдоль образующей цилиндра, а x вдоль ортогонального направления. Тогда линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ образуют на цилиндре ортогональную сетку. Однако линии $x' = \text{const}$ и $y' = \text{const}$ на цилиндре являются *винтовыми линиями* с многократными взаимопересечениями.

Исходные координаты здесь явно выделены по сравнению с повернутыми преобразованием (1.2).

То есть инвариантность метрики определяет лишь свойства *локальной инвариантности*, ничего не говоря о глобальных свойствах тех или иных координат.

И специальная теория относительности лишь показала лоренц-инвариантность локальных явлений в пространстве-времени, не внося на самом деле никакого запрета на глобальное время.

11. Причинность

Если наблюдается какое-нибудь явление, то должен быть носитель этого явления.

В астрономии свыше полутора тысяч лет господствовала геоцентрическая система эпициклов, дававшая довольно точные предсказания солнечных и лунных затмений, положения планет на небесной сфере. Теория была достаточно работоспособна. Причина ее работоспособности приписывалась совершенству кругового движения и воле Творца.

После открытия Ньютоном системы динамики материальных тел в пространстве и времени астрономические прогнозы стали несравненно более точными и их работоспособность определялась динамическими уравнениями, описывающими движение тел. Тела, движущиеся в пространстве по мере течения времени, являются *носителями* уравнений динамики, отражающих закономерности этого движения. После работ Лапласа (1749–1827), разработавшего приближенные методы небесной механики, слова *астрономическая точность* стали высшей характеристикой точности.

Основным поворотным моментом от птолемеевых эпициклов к ньютоновой динамике стала гелиоцентрическая система Николая Коперника (1473–1543), определившая мировое пространство как основной конструктивный элемент Мира, перемещения в котором подчиняются динамическим законам, открытым впоследствии Ньютоном. Поворот произошел не только в смене центрального светила. Коперник распутал эпициклы в простые круговые орбиты, проведя зависящие от времени преобразования координат. Самое главное — появилась возможность, реализованная Ньютоном, представить законы движения планет в независимом от Творца виде. Законы Птолемея движения планет по эпициклам записаны абстрактно, нигде, на бумаге, на небесах. Законы Ньютона относятся к конкретным материальным телам.

Если говорить о современной теории пространства и времени, то уравнения Эйнштейна, как и законы Птолемея, написаны на небесах, на бумаге, нигде. Подчиняющаяся им метрика четырехмерного пространства не есть динамически развивающееся поле, а определена сразу во все времена: и в сколь угодно далеком прошлом, и в сколь угодно далеком будущем.

12. Евклидова геометрия

В пространстве действует евклидова геометрия.

Я беру пластмассовый школьный прямоугольный треугольник. Замеряю линейкой длины его катетов: $c_1 = 15$ и $c_2 = 20$ сантиметров. Какова длина гипотенузы g ? Я вычисляю по *теореме Пифагора*

$$g^2 = c_1^2 + c_2^2 = 225 + 400 = 625; \quad g = 25 \text{ cm.} \quad (1.3)$$

Замеряю гипотенузу: 25 сантиметров! Как и было рассчитано. Соотношения длин в треугольнике подчиняются теореме Пифагора — одной из главных теорем *геометрии Евклида*. Длины на поверхности треугольника подчиняются евклидовой геометрии.

Однако мой треугольник не совсем школьный: два его катета штампованы из единого куска пластмассы, а гипотенуза прикрепляется защелками. Я ее открепляю, кладу треугольник на стол и опять замеряю расстояние между вершинами, которые раньше соединялись гипотенузой. Конечно, никто не сомневается, что это расстояние так и остается 25 сантиметров. Геометрия Евклида опять выполняется. Треугольник лежит на плоском столе, длины отрезков прямых на котором и углы между этими отрезками подчиняются геометрии Евклида.

Я поднимаю треугольник со стола и опять замеряю расстояние между теми точками, которые раньше соединяла гипотенуза. Ну конечно, результат тот же — 25 сантиметров. Что же сейчас обеспечивает выполнение теоремы Пифагора? Воздух, в котором находится треугольник?

Так как наши предыдущие эксперименты были *мысленные*, то и далее мы не затруднимся с замерах в резервуаре, из которого откачивается воздух. И вряд ли кто будет сомневаться, что хотя вакуум будет расти, длина между вершинами меняться не будет, сохраняя зависимость, определяемую евклидовой геометрией. Что же является носителем геометрии Евклида в вакууме?

Пространство. Все тела располагаются и перемещаются в пространстве. Пространство является трехмерным многообразием точек, которые

можно соединять отрезками прямых, между которыми можно определять углы, и все эти элементы пространства *подчиняются евклидовой геометрии*.

Пока это все, что мы знаем о пространстве, хотя многие сразу же ставят вопрос: из чего оно сделано? Из атомов или каких-либо *субатомных элементов* Станислава Лема? Понимая, что никаким напряжением мысли мы на этот вопрос сейчас ответить не сможем, а если все-таки попытаемся не ударить в грязь лицом и ответить, то выдадим умную несусузицу, лучше ограничимся теми сведениями о пространстве, которые мы *сейчас* понимаем:

- Пространство — это трехмерное многообразие точек, подчиняющееся евклидовой геометрии (является ее *объективным носителем*).
- Все тела располагаются и перемещаются в пространстве.
- Их линейные размеры (в том числе и внутри тел) определяются расстояниями между соответствующими точками пространства.

Попытки увидеть в понятии пространства нечто более значительное, чем носителя геометрии, более глубокомысленное, выводить его свойства из неких общеполитических соображений приводят к отрицанию пространства как физического объекта, как это было у Маха, как пришел к этому отрицанию выдающийся математик и философ Анри Пуанкаре (1854–1912) [11]:

Пространство может . . . подвергнуться любой деформации, и ничто не откроет нам этого, если наши инструменты испытали ту же самую деформацию. Таким образом, пространство в действительности аморфно; оно рыхлая, лишенная твердости форма, которую можно приложить ко всему; оно не имеет своих собственных слов. Заниматься геометрией — это значит изучать свойства наших инструментов, т.е. свойства твердого тела.

Однако мы увидим далее, какими колоссальными энергиями обладают деформации пространства, благодаря огромному множителю $c^4/(16\pi k)$, стоящему в выражении для действия пространства (7.6). Но и не дойдя еще до этого выражения, можно рассмотреть, по совету Пуанкаре, примеры, связанные со свойствами твердого тела, которые опровергают его мнение об “аморфности” пространства.

Растянутый кусок резины имеет большую энергию, чем свободный, потому что его собственные размеры как сплошного тела не совпадают с соответствующими размерами в пространстве.

Мысленно проделаем следующий эксперимент. Возьмем полый внутри резиновый мяч и срежем с него “шапочку”, например, по 60-й параллели. На плоском столе эта “шапочка” будет возвышаться на высоту $r(1 - \cos \vartheta)$,

где r — радиус мяча, а ϑ — угловое расстояние до полюса (пусть это будет 30°).

Придавим эту “шапочку” тяжелой книгой, чтобы она распласталась между столом и книгой, стала плоской. На это нужно затратить энергию. Если давление сверху убрать, за счет этой энергии “шапочка” сможет подняться или даже подбросить книгу. В то же время эта “шапочка” без каких-либо усилий ложится на сферу с радиусом, равным радиусу ее внутренней поверхности — если пространство деформировано так же, как и само тело.

Все тела принимают геометрические (метрические) свойства пространства, в котором они находятся.

Это был двумерный пример. Рассмотрим теперь трехмерный.

В сферическую форму залили расплавленный чугун и интенсивно охлаждают ее поверхность. Застывший чугуновый шар будет иметь внутренние напряжения. Это значит, что при разрезании его на мелкие части эти части невозможно будет сложить в шар снова без восстановления напряжений между соседними частями, без деформации этих частей. С точки зрения дифференциальной геометрии это означает, что вещество шара имеет внутреннюю кривизну, а мы пытаемся его вложить в трехмерное евклидово пространство с нулевой кривизной.

Если такой шар вложить в область пространства, имеющую точно такое же распределение кривизны, как и в самом шаре, то отдельные части соединились бы без всякого напряжения. Напряжения возникают из-за несоответствия внутренней кривизны вещества шара и кривизны пространства, в которое этот шар вложен.

Если бы пространство не обладало динамическими свойствами, играло бы только аморфную роль “меток”, оно автоматически подстроило бы свою структуру под структуру кривизны вещества напряженного шара. Однако внутренние напряжения не только в нашем виртуальном шаре, но и в тысячах уже разрушившихся от внутренних напряжений реальных изделий говорят, что с энергетической точки зрения пространство предпочитает минимально изменять свою кривизну под воздействием внешних тел.

Только слишком большой опыт общения с пространством, привычка к нему, приводят к мысли об его объективном отсутствии.

13. Движение

Такова же участь и *движения* в пространстве. Мы слишком привыкли к движению в ежедневной практике, чтобы допускать в нем что-то непонятное.

Очень интересно и поучительно рассуждение Беркли о движении:

45. Многие определяют движение как *перемещение*, забывая, что само перемещение не может быть понято без движения и должно быть определено через движение. Совершенно очевидно, что определения проливают свет на одни вещи и вновь затемняют другие. И безусловно, трудно с помощью определений сделать более ясными или лучше познаваемыми вещи, которые мы постигаем чувствами. Увлеченные тщетной надеждой этого рода, философы сделали легкие вещи очень трудными, вовлекли свой разум в трудности, которые по большей части сами же и создали.

Беркли не был механиком, он был философом. Для Ньютона движение существенно отличается от перемещения. Перемещение — это чисто геометрическое событие: некое тело перемещено в другое место. Но движение есть перемещение *во времени*. Ньютон записывал и решал дифференциальные уравнения движения тел, и, видя, что движение этих тел подчиняется найденным им уравнениям, он понимал, что это процессы в *реальном* пространстве, в *реальном* времени, а не просто записанные на бумаге формулы.

Движение в пространстве — это не только геометрия, изменение геометрического положения. Это процессы, происходящие *во времени*.

Динамику нескольких взаимодействующих тел можно описывать, например, в гамильтоновой форме. При этом канонические переменные тел, имеющих различное положение в пространстве, должны браться в единый момент времени, и уравнения Гамильтона описывают их динамику в этом общем времени, а не просто: тело *а* как-то переходит в точку пространства *А*, а тело *б* — в точку пространства *В*.

Пространство и время собраны в единый динамический комплекс, каждая составляющая которого выполняет свою функцию. Теория относительности же смешала их в единое пространство-время, где потерялись и пространство и время.

При этом справедливость следствий специальной теории относительности (в малых масштабах) проверена с громадной степенью точности. Общая теория относительности также имеет экспериментально проверенные предсказания (отклонение света Солнцем, гравитационное красное смещение, вращение перигелия Меркурия). Но нужно вспомнить, что и теория эпициклов имела значительную предсказательную силу.

Можно ли как-то распутать клубок перепутанных пространства и времени, не теряя достижений теории относительности?

Пространство является физической реальностью, а с точки зрения теоретической физики может описываться как поле. Однако в пространстве

возможно движение, и описание пространства должно допускаться и из движущейся, переменной во времени системы координат. Для этого необходимы математические средства, выходящие за рамки римановой геометрии — *динамическая геометрия*.

Если допустить возможность иметь пространству риманову структуру, с динамически меняющейся во времени метрикой, получаемая *теория динамического пространства в глобальном времени* (ТГВ — *Теория глобального времени*) полностью включает в себя решения Общей теории относительности и устраняет многие ее проблемы, возникшие из нефизичности принципа *общей ковариантности* ОТО.

Основной *физический* принцип ОТО — *принцип эквивалентности* — определяет *локальную инерциальную* систему как (бесконечно малую) лабораторию, свободно падающую в гравитационном поле. Именно этот принцип приводит в конце концов к представлению пространства как риманова пространства. Принцип же *общей ковариантности* не имеет под собой никакого объективного носителя. Он просто изящен, удобен, прост. Он появился как первое приближение в описании свойств пространства и времени, но полюбился и возвеличился, перенеся теорию пространства и времени в область чисто математическую, записанную на небесах, на бумаге, нигде, не имеющую объективного носителя. “Так устроен мир!”

Да, постижение процессов, происходящих в реальном мире, требует постижения многих объективно существующих понятий (по Беркли — определений), не постигаемых чувствами непосредственно, и Беркли возражает не против таких понятий, а против увлечения ими без надобности. (Возможно, он подверг бы сомнению и принцип *общей ковариантности*.) В случае с движением ему стоило бы решить, например, задачу Кеплера (о вращении планеты вокруг Солнца), решенную в “Математических началах” Ньютона, и все возражения о движении были бы сняты. Но, хотя математическими вопросами он занимался достаточно много, решение такой задачи не входило в круг его философских занятий.

Из этого следует далеко не новый, но немаловажный вывод, что философская точка зрения на тот или иной предмет может существенно меняться от степени погружения в этот предмет.

14. Теория глобального времени

Нить развития теории глобального времени идет от ньютоновой концепции пространства и времени. Время абсолютно. Однако уже упоминавшееся поучение Ньютона “*Абсолютное пространство* по самой своей

сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным . . . ” переходит из разряда положений, временно принятых как истинные, в разряд пересматриваемых.

Идеи Лобачевского, Римана, Клиффорда были направлены на изучение возможности пространства иметь геометрические свойства, отличные от евклидовых. Если Лобачевский и Риман [12; 13; 14] допускали в реальном, физическом мире только постоянную кривизну (хотя Риман заложил математические основы геометрии пространства более общего вида), то Клиффорд [15; 16] обсуждает проблемы пространства как трехмерного риманова многообразия с переменной кривизной, переменной не только на самом пространстве, но и во времени.

Допущение кривизны пространства сразу приводит к снятию *проблемы классического релятивизма*: говорить о равномерном и прямолинейном движении искривленных пространств общего вида и тем более их равноправии становится бессмысленным. Пространство становится единым, уникальным. Относительно него существует *абсолютное движение*, в пространстве неинерциального наблюдателя существует *поле абсолютных скоростей* — скоростей относительно инерциальной системы, которая жестко связана с точками пространства. Пространство абсолютно — но не в смысле своей неизменности, а в смысле единственности, уникальности.

При этом бесконечно малая область любого риманова пространства является евклидовой и множество равноправных инерциальных систем переходит в область бесконечно малого.

Второй шаг — это допущение переменной метрики пространства во времени. Сделав этот шаг, мы вынуждены относиться к метрике пространства как к обычному полю, например, электромагнитному. Раз метрика меняется со временем, значит, должны быть уравнения, определяющие динамику метрики.

Отыскание уравнений динамики пространства, усложненных возможностью движения координатной системы относительно абсолютных точек пространства, описываемых полем *абсолютных скоростей* $V(r, t)$, является основной задачей *теории глобального времени*. Эти уравнения должны следовать из принципа наименьшего действия, должны приводить к сохраняющемуся во времени гамильтониану. Затем нужно построить решения найденных уравнений и изучить их наблюдаемые следствия.

Эта задача и является основной в данной книге.

Мы собираемся пройти еще один рекурсивный цикл в рассмотрении проблем пространства и времени.

В заключение главы — два задания для читателя.

- 1) Опишите конечное число экспериментов, определяющих, что Земля вращается вокруг Солнца.
- 2) Опишите конечное число экспериментов, определяющих равноправие всех координатных систем — принцип общей ковариантности в общей теории относительности.

ГЛАВА 2

Классическая механика

Никакое движение не может быть познано или измерено иначе как через чувственные вещи.

Дж. Беркли

1. Пространство и время в классической механике

В классической механике рассматривается движение тел в евклидовом пространстве. Положение тел описывается *векторами*, которые можно складывать по правилу параллелепипеда. В пространстве можно ввести *декартовы координаты* (x, y, z) , в которых расстояние между двумя точками определяется по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.1)$$

В таком пространстве действует *евклидова геометрия*, пространство является трехмерным *евклидовым пространством*.

Перемещение тел совершается *во времени*. Время едино для всего пространства, для всех его точек.

Основы классической *динамики* — законов движения тел — были заложены Галилеем, изучавшим свободное падение тел, движение по наклонной плоскости, колебания маятника. Галилей ввел понятие *ускорения*.

Его работы явились базисом для создания Исааком Ньютоном механики, применимой в любых механических системах. Если Галилей работал в основном с постоянным ускорением, то Ньютон разрабатывал методику работы с переменным ускорением. В своем фундаментальном труде “Математические начала натуральной философии” (1687 г.) Ньютон формулирует как свойства пространства и времени, рассмотренные в предыдущей главе,

так и законы движения тел, определяемых дифференциальными уравнениями, в которых фигурируют первая и вторая производные от вектора перемещения в евклидовом пространстве по времени.

Именно для однозначности формулировки дифференциальных уравнений Ньюто́ну понадобился тщательный анализ пространства, перемещения в пространстве, времени. Обратим внимание на следующий важный факт: при рассмотрении динамики нескольких тел, находящихся в разных точках пространства, уравнения динамики описывают все эти тела в единый момент времени.

2. Первый закон Ньютона

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

В Поучениях перед Законами (Аксиомами) Ньютон подробно поясняет, что “покой” и “движение” — понятия абсолютные. Поэтому в Законах Ньютона речь идет именно об абсолютном покое или абсолютном движении, при этом он поясняет, как их пересчитать в относительные, если известно состояние движения тела (например, движущегося корабля), относительно которого определяется “относительное” движение.

Эта формулировка Первого закона существенно связана с евклидовостью пространства, в котором только и можно провести из любой точки в любом направлении прямые линии.

3. Второй закон Ньютона. Инерциальные системы.

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

В классической механике количество движения равно массе тела, умноженной на скорость, и второй Закон определяет ускорение как приложенную силу, деленную на массу, — независимо от скорости тела. Поэтому если к скоростям взаимодействующих тел добавить некоторую постоянную скорость, то уравнения, определяющие их относительные движения, не изменятся. Можно сказать, что, добавив постоянную скорость ко всем

телам и в каждый момент времени, мы перешли в новую *инерциальную систему* — свихидово пространство, движущееся относительно исходного, абсолютного с этой добавленной скоростью в противоположном направлении. Пересчет движения из новой системы в старую очень прост: нужно теперь из скорости каждого тела вычесть эту постоянную составляющую, и мы получим результат такой, как если бы расчет велся в исходной системе.

Для расчета *относительного* движения тел новая система столь же эффективна, сколь и абсолютное пространство, и даже может оказаться более удобной, если, например, выбрать ее так, чтобы центр масс рассматриваемой системы в ней покоился.

Эта свобода выбора инерциальной системы для решения той или иной практической задачи, продемонстрированная еще Гюйгенсом при разработке им теории удара, вошла в инструментарий классической механики как сильный математический прием и получила название *принципа относительности*. Для решения *этих* задач абсолютное пространство Ньютона просто не нужно: для каждой задачи выбирается своя удобная инерциальная система. Инерциальность ее определяется по состоянию покоя или равномерного движения в ней пробного тела.

Абсолютное пространство Ньютона становится вроде бы излишним. Для решения практических задач механики *удобнее* опираться на множество инерциальных систем.

И вот уже первый Закон Ньютона, описывающий *изначально* абсолютное движение *одного тела*, начинает трактоваться как закон, определяющий инерциальность выбранной системы. Хотя в ньютоновой механике инерциальные системы — это системы, *абсолютная скорость* которых постоянна, — так как в рамках классической механики при описании динамики тел они равноправны не только между собой, но и с *абсолютным пространством*, возникает *классический релятивизм* — сначала безразличие к существованию или отсутствию абсолютного пространства, а затем — вслед за Махом — активное его отрицание в принципе.

Однако отсутствие различия в этом круге вопросов не исключает возникновения различия в каком-либо другом.

4. “Материализация” инерциальной системы

Мы уже приводили очень туманное рассуждение Ландау и Лифшица по поводу систем отсчета и как счастливо “опыт показывает наличие среди них инерциальных систем”. Немало сделано усилий по определению понятия “система отсчета” в рамках общей теории относительности, где изначально

система отсчета отождествлялась с (четырёхмерной) системой координат. Однако очевидно, что переход от декартовой системы координат, например, к сферической не меняет свойства инерциальности системы. Значит, система отсчета — нечто отличное от системы координат (см., например, [17]).

И в теории относительности, и в классической механике материальная точка параметризуется тремя пространственными координатами и моментом времени, то есть четырьмя величинами и о четырёхмерности пространства-времени с математической точки зрения не может быть никаких дискуссий — это факт. Переход из одной инерциальной системы в другую в классической механике — это преобразование только координат, не затрагивающие времени:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V} t.$$

Как правило, говоря о движущихся системах, под ними понимают твердые тела и даже абсолютно твердые — не имеющие внутренних степеней свободы, внутренних колебаний, поэтому все скорости относительно этой системы приобретают одинаковую добавку. Более адекватным, однако, является другой алгоритм *материализации инерциальной системы*. Поместим в каждую точку пространства пылинку (в пределе — безмассовую). Покоящиеся свободные пылинки отмечают точки пространства, а расстояния между бесконечно близкими пылинками определяются метрикой пространства или, наоборот, *определяют метрику пространства*. Если в евклидовом пространстве этим частицам придать одинаковые скорости, то расстояния между частицами сохраняются и они в любой момент времени реализуют евклидово пространство. Система, связанная с этими частицами, и является *инерциальной системой* — все ее точки движутся по инерции. В отличие от традиционных инерциальных систем, связанных с движущимися абсолютно жесткими твердыми телами, определение через пылевидную материю легко переносится и на специальную теорию относительности, и на случай риманова пространства.

Этот набор безмассовых точек (в пределе — континуум) образует *равномерно движущуюся, инерциальную систему*, — безмассовую, но материальную. Пространственные координаты в ней жестко связаны с движущимися частицами — не меняются с течением времени. Назовем эту модель *материализацией инерциальной системы*.

Ускорение относительно этой системы какого-то материального тела под действием некоторой приложенной силы оказывается точно таким же, как и относительно абсолютного пространства Ньютона. Если этой силы нет, то тело относительно этой системы сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.

Здесь мы пошли навстречу Маху и все перемещения больших, макроскопических тел указываем не друг относительно друга, а относительно этих безмассовых пылинок — относительно пространства. Однако при этом каждая точка пространства уже не фикция, а некоторый объект, относительно которого можно определять положения других объектов. В частности, при выбранной системе отсчета — набора движущихся по инерции точек — можно описывать движение *одного* макроскопического тела.

5. Методы классической механики

В конце концов все сложности внутренней конструкция Мира мы узнаем по *наблюдаемым явлениям*. Вычисленную Леверрье планету Нептун увидели в телескоп. Если законы Ньютона первоначально были привязаны к евклидовому пространству, то дальнейшее развитие механики Эйлером, Д'Аламбером, Лапласом, Лагранжем, Гамильтоном привело механику к значительно более общему виду, не связанному явно со структурой пространства-времени.

“Уравнение Шредингера для частицы с массой m и зарядом $-q$ в периодическом поле ...” Приблизительно так начинались работы, на основе которых были построены тончайшие электронные приборы конца XX века. Успехи квантовой механики в XX веке ошеломляющие. Они сравнимы разве что с успехами Небесной механики в XIX веке. При этом *никто не знает* ни физической природы волновой функции, ни природы самого уравнения Шредингера. Люди *умеют ими пользоваться*.

Небесная механика не только предсказала неизвестную планету Нептун. Она дала стимул к развитию самых различных областей математики. Однако в вопросах об абсолютном или относительном пространстве она не более красноречива, чем квантовая механика или квантовая теория поля в обсуждении природы волновой функции при расчете тонких квантово-механических эффектов.

Одна из выдающихся книг по аналитической динамике “Динамические системы” Дж. Биркгофа [18] проблемам пространства и времени посвящает лишь следующие строки:

В динамике мы имеем дело с физическими системами, состояние которых в момент времени t вполне определяется значениями n вещественных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Чуть более конкретен В.И. Арнольд [9]:

Пространство и время: Наше пространство трехмерно и евклидово, а время — одномерно.

Классическая механика достигла высочайшего совершенства, просто обходя дискуссии о природе пространства и времени. В этом ее универсальность. После открытия теории относительности, существенно изменившей взгляд на пространство и время, методы классической механики стали также эффективно использоваться для расчетов релятивистских эффектов, как ранее при расчете движения поршня в паровом двигателе.

При описании свободного падения тел (сбрасываемых с Пизанской башни) Галилею достаточно было следить за изменением только одной координаты — вдоль вертикальной оси. Он показал, что в поле тяжести Земли существует универсальная величина — *ускорение свободного падения* ($g = 9.81 \text{ м/сек}^2$), и *все тела в поле тяжести Земли падают с этим ускорением*. Однако, скатывая шары с наклонных желобов, Галилей сумел изучить движения с меньшими ускорениями, определяемыми углом наклона желоба α : $a = g \sin \alpha$.

Ньютон поставил перед собой задачу описания движения планет вокруг Солнца, Луны вокруг Земли, для чего потребовалась разработка новых математических методов.

Астрономические задачи потребовали переосознать закон постоянства ускорения с более общей точки зрения. Поняв, что Луна не улетает от Земли по инерции, а удерживается на (почти) круговой орбите ускорением той же природы, что и для падающего яблока, только значительно меньшим вследствие большого удаления Луны от Земли, Ньютон формулирует *закон всемирного тяготения*, определяющий силу, с которой притягиваются тела друг к другу:

$$f = \frac{k M m}{r^2}, \quad (2.2)$$

где M и m — массы тел, r — расстояние между их центрами, а k — *гравитационная постоянная*, замеренная лишь в конце XVIII века Генри Кэвендишем (1731–1810): $k = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

Сила между телами действует по радиусу, создавая радиальное ускорение второго тела

$$a = \frac{f}{m} = \frac{k M}{r^2},$$

и не зависит от массы этого второго тела.

Теперь закон постоянства ускорения становится *частным случаем*, действующим лишь вблизи поверхности Земли. Если M — масса Земли, а R —

ее радиус, то ускорение направлено к центру Земли (вниз) и его величина $g = k M / R^2 = 9.81 \text{ м/с}^2$

Когда Кэвендиш замерил у себя в лаборатории гравитационную постоянную, он тем самым измерил и массу Земли (при известном ее радиусе и величине ускорения свободного падения), и массу Солнца M_c при известном расстоянии Земли от Солнца ($L \approx 150$ млн. км.) и центростремительном ускорении Земли при движении по своей орбите длиной $2\pi L$ за период T — один год:

$$\frac{k M_c}{L^2} = \frac{(2\pi L)^2}{T^2 L} = \frac{4\pi^2 L}{T^2};$$

$$M_c = \frac{4\pi^2 L^3}{k T^2}.$$

Однако здесь мы *приблизленно* предположили, что Земля вокруг Солнца равномерно вращается по окружности. Иоган Кеплер (1571–1630), обработав данные выдающегося датского астронома Тихо Браге (1546–1601), определил, что каждая планета вращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (первый закон Кеплера), и неравномерно: при приближении к Солнцу скорость планеты возрастает, а при удалении уменьшается, так что площадь, описываемая радиус-вектором, направленным от Солнца к планете, за равные времена получает равные приращения (второй закон Кеплера).

Решение задачи движения планеты вокруг Солнца под действием силы тяготения и составляет основную задачу первого тома “Математических начал” Ньютона. Второй закон связал ускорение с силой — постоянной или меняющейся в процессе движения тела. Для решения задач о движении тел под действием *меняющихся* сил Ньютону пришлось создать новый фундаментальный раздел математики — дифференциальное и интегральное исчисление.

Дальнейшее развитие методов динамики Эйлером, Лагранжем, Лапласом, Гамильтоном и многими другими учеными привело к созданию методов *аналитической динамики*, существенно расширяющих круг решаемых задач.

Так как сила притяжения направлена к Солнцу по радиусу, задачу более естественно решать в *сферической системе координат*. Декартовы координаты точки (x, y, z) связаны со сферическими (r, ϑ, φ) соотношениями

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Если расписать расстояние между двумя точками (2.1) в сферической системе (и предельно его упростить), то получается достаточно громоздкое выражение

$$l = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2 r_2 r_1 (\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1)}.$$

Однако в уравнениях динамики, начало которым положил Ньютон, основную роль играют не разности координат, а их бесконечно малые приращения и расстояние между двумя бесконечно близкими точками

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3)$$

в декартовой системе координат и

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.4)$$

в сферической системе.

Возникла необходимость прежде всего перейти от формулировки динамических уравнений в декартовых координатах к уравнениям в произвольных координатах. При рассмотрении, например, задачи двух тел, более удобно выделить центр масс этих тел, а затем рассматривать координаты тел относительно центра масс — то есть возникла необходимость формулировки уравнений динамики в произвольных координатах.

6. Методы Лагранжа и Гамильтона

Эта задача была решена разработкой более общих (и более абстрактных) методов Лагранжем и затем Гамильтоном.

6.1. Метод Лагранжа

Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) ввел *функцию Лагранжа* как разность кинетической T и потенциальной U энергий:

$$L = T - U.$$

Для системы n тел, нумеруемых индексом $1 \leq \alpha \leq n$, положение каждого из которых описывается тремя координатами ξ_α^i ; $1 \leq i \leq 3$, скорости

изменения которых $\dot{\xi}_\alpha^i$, кинетическая энергия записывается через метрический тензор в выбранной системе координат:

$$T = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\gamma_{ij}(\xi_\alpha) \dot{\xi}_\alpha^i \dot{\xi}_\alpha^j}{2 m_\alpha},$$

а потенциальная энергия может зависеть от всех координат.

Лагранж показал, что динамика системы описывается $3n$ уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha^i} = 0, \quad (2.5)$$

причем при произвольных преобразованиях всех $3n$ координат вид уравнений не меняется.

Уравнения Лагранжа ковариантны по отношению к изменяющимся со временем преобразованием переменных $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\tilde{\xi}^\beta, t)$. В новых переменных скорость изменения координаты ξ^α выражается так:

$$\dot{\xi}^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\gamma} \dot{\tilde{\xi}}^\gamma + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t}.$$

В уравнения Лагранжа в новых переменных войдет производная по времени от коэффициентов преобразования:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \right) = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta \partial \tilde{\xi}^\gamma} \dot{\tilde{\xi}}^\gamma + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta \partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \dot{\xi}^\alpha. \quad (2.6)$$

Последнее равенство имеет смысл, так как независимыми старыми переменными в уравнениях Лагранжа являются $\dot{\xi}^\alpha$ и ξ^β , независимыми новыми переменными являются $\dot{\tilde{\xi}}^\alpha$ и $\tilde{\xi}^\beta$, но $\dot{\xi}^\alpha$ и $\tilde{\xi}^\beta$ оказываются зависимыми.

Уравнения Лагранжа в новых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\beta} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^\beta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \dot{\xi}^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} - \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} = \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} \right) + \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \right) - \frac{\partial \dot{\xi}^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Выражение в последних скобках обращается в нуль вследствие соотношения (2.6), и мы получаем *ковариантность лагранжевой производной* по отношению к зависящим от времени преобразованиям переменных:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\beta} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha} \right). \quad (2.8)$$

6.2. Метод Гамильтона

Классическая динамика достигает своей вершины в трудах Уильяма Роуана Гамильтона (1805 — 1865). Во-первых, он показал, что уравнения Лагранжа (2.5) являются дифференциальными уравнениями, определяющими *экстремали функционала действия*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (2.9)$$

Если рассмотреть множество траекторий, соединяющих какую-то точку в момент времени t_1 с какой-то точкой в момент t_2 , то на каждой такой траектории в каждый момент времени между t_1 и t_2 определены координаты ξ_α^i и скорости $\dot{\xi}_\alpha^i$ и S имеет вполне определенное численное значение, меняющееся от траектории к траектории. *Наименьшее значение* среди всех траекторий, проходящих через заданную начальную и конечную точки, действие имеет на траектории, определяемые уравнениями Лагранжа (2.5). Это положение называется *принципом наименьшего действия*.

Но и сами уравнения Лагранжа Гамильтон привел к более глубокому виду. В уравнениях (2.5) производная по времени берется от величин

$$p_i^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha^i} \quad (2.10)$$

— *импульсов*, канонически сопряженных координатам ξ_α^i . Если скорости изменения $3n$ координат выразить через $3n$ импульсов, приняв последние за независимые переменные наряду с самими координатами (то есть число независимых переменных удваивается), то динамика системы определяется *функцией Гамильтона*

$$H(\xi_\alpha^i, p_i^\alpha) = \sum_{\alpha, i} p_i^\alpha \dot{\xi}_\alpha^i - L \quad (2.11)$$

через уравнения Гамильтона

$$\dot{\xi}_\alpha^i = \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha}; \quad \dot{p}_i^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha^i}. \quad (2.12)$$

Если гамильтониан не зависит от какой-либо переменной (ее называют *циклической*), то из уравнений Гамильтона следует, что сопряженный ей импульс в процессе динамики не меняется — является константой.

Для отдельных тел скорости выражаются через импульсы с помощью обратного метрического тензора $\gamma^{ij} \gamma_{jk} = \delta_k^i$:

$$p_i^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha^i} = \gamma_{ij} \dot{\xi}_\alpha^j; \quad \dot{\xi}_\alpha^i = \gamma^{ij} p_j^\alpha;$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \gamma^{ij} p_i^\alpha p_j^\alpha; \quad H = T + U. \quad (2.13)$$

Если некоторая функция координат и импульсов $\Phi(\xi, p)$ явно не зависит от времени, то скорость ее изменения на траектории системы определяется так:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\alpha^i} \dot{\xi}_\alpha^i + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i^\alpha} \dot{p}_i^\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\alpha^i} \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i^\alpha} \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha^i} \equiv \{H, \Phi\}. \quad (2.14)$$

Последняя конструкция называется *скобкой Пуассона* функций H и Φ . Она линейна по каждому из двух аргументов и обладает свойством *антисимметрии*

$$\{H, \Phi\} = -\{\Phi, H\}.$$

Если скобка Пуассона функции Φ с гамильтонианом равна нулю, то величина этой функции в процессе динамики системы не меняется — функция является *интегралом движения*.

В частности, вследствие свойства антисимметрии скобка Пуассона гамильтониана самого с собой равна нулю, следовательно численное значение гамильтониана (энергия) в процессе динамики не меняется. Это — *закон сохранения энергии в механике*.

6.3. Уравнение Гамильтона–Якоби

Принцип наименьшего действия (2.9) приводит к тому, что действие, вычисленное на экстремалих, оказывается функцией координат. Рассмотрим

вариацию функционала действия при бесконечно малых вариациях траекторий $\tilde{\xi}^i = \xi^i + \delta\xi^i$:

$$\delta S = \int_{t_0} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \delta \xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} \delta \dot{\xi}^i \right) dt.$$

Вследствие уравнений Лагранжа (2.5) и выражений для импульсов (2.10) подинтегральное выражение преобразуется к виду

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (p_i \delta \xi^i) dt = \sum_i p_i \delta \xi^i|_{t_1} - \sum_i p_i \delta \xi^i|_{t_0},$$

где $\delta \xi^i$ — вариации координат в моменты времени t_0 и t_1 .

Если варьировать координаты только в конечный момент времени да еще провести бесконечно малый сдвиг этого момента на dt — при этом к действию в соответствии с (2.9) добавится величина $L dt$, а вариации координат за счет сдвига по времени изменятся как $\delta \xi^i \rightarrow \delta \xi^i - \dot{\xi}^i dt$, — то окончательно выражение для вариации действия при таких условиях примет вид:

$$\delta S = \Sigma(p_i \delta \xi^i - (p_i \dot{\xi}^i) dt) + L dt = \Sigma(p_i \delta \xi^i - H(p, \xi) dt). \quad (2.15)$$

Отсюда следует, что

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}; \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Подставив теперь выражение для импульсов в гамильтониан, получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка на функцию действия $S(\xi^i, t)$ — *уравнение Гамильтона–Якоби*.

Траектория частицы является *характеристикой* этого дифференциального уравнения. Самое главное в этом методе, в отличие, например, от метода Лагранжа, состоит в том, что оно описывает не единственную траекторию с заданными начальными данными, а множество таких траекторий, заполняющих либо все пространство-время, либо некоторую область в нем.

6.4. Метод Рауса

В ряде задач представляет интерес не нахождение зависимости координат от времени, а зависимости их друг от друга — *траектория движения*,

например, зависимость от какой-то координаты ξ (не будем ставить индексов) с канонически сопряженным импульсом p . Из уравнений Гамильтона:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{d\xi_\alpha^i}{d\xi} = \frac{\xi_\alpha^i}{\xi} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha^i} / \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial p}{\partial p_\alpha^i}. \quad (2.17)$$

Если выразить выделенный импульс p из закона сохранения энергии $H = E$, то система дифференциальных уравнений траектории выражается через производные этого импульса по остальным с помощью уравнений (2.17). Это уравнения Рауса, очень полезные при нахождении траекторий.

7. Задача Кеплера

Вооружившись теперь всеми нужными средствами, применим их для нахождения траектории в задаче Кеплера, решенной Ньютоном — движение тела массы m (планеты) в поле тяготения неподвижного тела большой массы M (Солнца). Эта задача важна как опорная при обобщении классической механики.

Кинетическая энергия планеты в сферической системе координат:

$$T = \frac{m \gamma^{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)),$$

потенциальная:

$$U = -\frac{k M m}{r}$$

и функция Лагранжа пропорциональна массе планеты

$$L = m \left(\frac{\dot{r}^2 + r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)}{2} + \frac{k M}{r} \right).$$

Уравнения Лагранжа (2.5) однородны относительно функции Лагранжа, поэтому умножение или деление последней на произвольную константу не меняет уравнений. Пропорциональность функции Лагранжа массе движущегося тела, на которую можно поделить, для движения в поле тяготения говорит о независимости траектории движения тел от массы в заданном поле тяготения. Частный случай этого положения обнаружил Галилей, когда его помощник сбрасывал тяжелые ядра и более легкие пули с Пизанской башни — и было видно, что падают они практически одинаково.

Поэтому в дальнейшем будем для простоты полагать $m = 1$.
Обратный метрический тензор в сферической системе координат

$$\gamma^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

определяет гамильтониан движущегося тела (единичной массы)

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) - \frac{kM}{r} \right). \quad (2.19)$$

Угол φ в гамильтониан не входит, эта переменная циклическая, поэтому канонически сопряженный ему импульс постоянен: $p_\varphi \equiv l = \text{const}$.

Зависимость от угловых координат и сопряженных им импульсов в гамильтониан входит в виде функции только угловых координат и импульсов

$$\Phi(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta},$$

поэтому скобка Пуассона этой функции с гамильтонианом равна нулю, то есть эта величина на траектории является положительной константой $\Phi = L^2$.

Рассмотрим еще динамику по углу ϑ :

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{r^2}; \quad \dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^3 \vartheta} \cos \vartheta.$$

Если использовать свободу поворота в выборе сферической системы, чтобы в начальный момент $\vartheta = \pi/2$, $\dot{\vartheta} = 0$, то эти соотношения будут сохраняться в процессе движения и вся угловая динамика будет совершаться только за счет угла φ , в частности $L^2 = l^2$.

При этом гамильтониан окажется составленным только для двух переменных — r и φ , причем его величина тоже постоянна:

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) - \frac{kM}{r} = E. \quad (2.20)$$

Выразим отсюда p_r :

$$p_r = \sqrt{2E + \frac{2kM}{r} - \frac{l^2}{r^2}},$$

откуда получается дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial p_r}{\partial l} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{2E + \frac{2kM}{r} - \frac{l^2}{r^2}}}.$$

Переменные в нем разделяются:

$$d\varphi = \frac{-l/r^2 dr}{\sqrt{2E + \frac{2kM}{r} - \frac{l^2}{r^2}}} = \frac{d\xi}{\sqrt{2E + 2\lambda\xi - \xi^2}}; \quad \xi = \frac{l}{r}; \quad \lambda = \frac{kM}{l}.$$

В переменных (ξ, φ) это дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 + \frac{(\xi - \lambda)^2}{2} = E + \frac{\lambda^2}{2}. \quad (2.21)$$

Это есть выражение для энергии (где роль времени играет угол φ) гармонического осциллятора с минимумом потенциальной энергии при $\chi = \lambda$, решение для которого

$$\xi = \lambda + A \cos \varphi; \quad E = \frac{A^2 - \lambda^2}{2}.$$

Фаза осциллятора выбрана так, чтобы ξ было минимально при $\varphi = 0$. Так как $\xi = l/r$, то

$$r = \frac{l^2}{kM + B \cos \varphi}; \quad B = lA. \quad (2.22)$$

Энергия законоопределена и может быть положительной, нулевой или отрицательной в зависимости от $A^2 - \lambda^2$. Только при отрицательной энергии движение *финитно* — частица не может уйти на бесконечность, где ее энергия (только кинетическая) должна быть не отрицательна. В этом случае величина χ , колеблясь по закону гармонического осциллятора, не доходит

до точки $\chi = 0$, соответствующей бесконечному радиусу, а радиус при движении тела меняется между минимальным и максимальным значениями:

$$r_1 = \frac{l^2}{kM + B}; \quad r_2 = \frac{l^2}{kM - B}.$$

Через них можно выразить константы интегрирования:

$$B = kM \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}; \quad l^2 = kM \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

и траектория (2.22) запишется в виде:

$$r = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2 + (r_2 - r_1) \cos \varphi}. \quad (2.23)$$

При $\varphi = 0$, 2π косинус равен единице и радиус минимален $r = r_1$. В противоположной точке траектории ($\varphi = \pi$) $\cos \varphi = -1$ и $r = r_2$ — радиус максимален.

Это есть параметрическая запись уравнения эллипса с большой полуосью a и малой b :

$$r_1 = a - c; \quad r_2 = a + c; \quad c^2 = a^2 - b^2;$$

$$r_1 \cdot r_2 = a^2 - c^2 = b^2; \quad r_1 + r_2 = 2a; \quad r_2 - r_1 = 2c.$$

Площадь эллипса $S = \pi a b$ из второго закона Кеплера $\dot{S} = l/2$ нарастает равномерно по времени за период $T = S/l$:

$$l = b \sqrt{\frac{kM}{a}}; \quad T = \frac{2S}{l} = \frac{2\pi a b}{b} \sqrt{\frac{a}{kM}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{kM}}.$$

Возведя это выражение в квадрат, получаем *третий закон Кеплера*:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{kM}{4\pi^2}. \quad (2.24)$$

Отношение кубов больших полуосей эллипса к квадратам периодов обращения для всех планет есть константа, пропорциональная массе Солнца.

Энергия

$$E = -\frac{kM}{r_1 + r_2} = -\frac{kM}{2a} \quad (2.25)$$

— беспредельно уменьшается при уменьшении большой полуоси эллипса.

На круговых орбитах $r_1 = r_2 = a$ и радиус на траектории не меняется.

8. Динамика вращения

В дальнейшем нам еще понадобится задача об описании вращения твердого тела. Переменные для описания вращения были введены Леонардом Эйлером (1707–1783) и называются *углами Эйлера*. Выделим во вращающемся теле некоторую ось n ($n^2 = 1$), направление которой по отношению к инерциальной системе определяется двумя угловыми координатами ϑ и φ , причем в рассматриваемый момент ось лежит в плоскости (z, y) , перпендикулярной оси x . Изменение угла ϑ создает угловую скорость вдоль оси x : $\omega_x = \dot{\vartheta}$. Изменение угла φ — это вращение вокруг оси z : $\omega_z = \dot{\varphi}$. Однако тело может вращаться и вокруг самой оси, поворот вокруг которой параметризуем еще одним углом ψ . Эти три угла — ϑ , φ , ψ — и есть углы Эйлера. При изменении угла ψ угловая скорость направлена вдоль оси n . Ее компоненты

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \vartheta; \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta,$$

складываются с компонентами угловой скорости от вращения самой оси, что определяет проекции угловой скорости на декартовы оси (при $\varphi = \pi/2$):

$$\omega_x = \dot{\vartheta}; \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta; \quad \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta.$$

При произвольном угле φ нужно учесть поворот проекции оси в плоскости (x, y) :

$$\omega_x = \dot{\vartheta} + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi; \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi; \quad \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta.$$

Кинетическая энергия вращающегося шара пропорциональна квадрату угловой скорости

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2 \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\psi}. \quad (2.26)$$

Три угла Эйлера параметризуют некоторое трехмерное многообразие, точки которого фиксируют ориентацию твердого тела. Все углы изменяются в конечных пределах:

$$0 \leq \vartheta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad 0 \leq \psi \leq \pi.$$

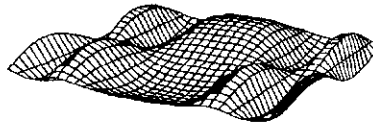
Как мы увидим далее, это многообразие есть *трехмерная сфера*.

ГЛАВА 3

Риманово пространство

Мы можем лишь опытным путем установить, какого рода то пространство, в котором мы живем.

В. Клиффорд



Ньютон полагал пространство неизменным и, хотя явно об этом не говорил, — евклидовым. Об евклидовости пространства Ньютона говорит первый Закон: свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Пространство, в котором в любом направлении можно провести прямые линии, является евклидовым.

Евклидовость пространства, в котором мы живем, была очевидностью в течение двух тысячелетий. Однако по мере развития геометрии это его свойство стало ставиться под вопрос. В XIX веке возникает дифференциальная геометрия искривленных поверхностей (Гаусс — 1827), затем неевклидова геометрия (Лобачевский — 1829, Бойяи — 1831), затем сферическая геометрия Римана и общая риманова геометрия.

Этот период изменения геометрических представлений Феликс Клейн (1849–1925) характеризует так [19]: “Здесь нашел яркое проявление один из самых примечательных законов человеческой истории, состоящий в том, что новые идеи открываются не только отдельным творцам, но что, так сказать, само время таит в себе великие идеи и проблемы и в моменты их

созревания оно ставит их (может быть, даже навязывает) осененным гениальностью умам. Так и здесь — внезапно, почти одновременно, в различных, никак не связанных друг с другом местах на свет появляется производящая полный поворот идея неевклидовой геометрии, которая в течение многих тысячелетий не приходила на ум ни одному человеку. ”

1. Кривизна

Триангуляционные измерения во время экспедиции Пикара в 1677–1681 гг. показывали выполнение следствий евклидовой геометрии с высокой точностью. В начале XIX века проблемами практической геодезии занимается Карл Фридрих Гаусс (1777–1855). Практические проблемы заставили его предельно глубоко изучить проблемы искривленных (двумерных) поверхностей. В это время он приходит к идее возможности отхода от евклидовой геометрии, однако никаких работ по этому вопросу не публикует. Но в 1827 году он пишет фундаментальную работу “Общие исследования о кривых поверхностях”, которая заложила основы новой науки — дифференциальной геометрии. В этой работе Гаусс вводит математическое выражение *кривизны поверхности*.

С совершенно другой — аксиоматической стороны — к неевклидовой геометрии приходят в 1829 г. Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) и в 1831 г. Янош Бойяи (1802–1860). Здесь важны не столько детали подхода к проблеме различных математиков, сколько возникшая возможность рассмотрения пространств с другими геометриями, отличными от евклидовой.

В свое время опыт человечества с древнейших времен говорил и о том, что поверхность Земли плоская, и только идеи и измерения Аристарха Самосского и Эратосфена около 250 г. до н. э. привели к представлению о сферичности земной поверхности. Однако эта поверхность представлялась как некоторое подмногообразие в трехмерном евклидовом пространстве.

Гаусс ввел понятие о *внутренней геометрии* поверхности, не связанной с его вложением в трехмерное пространство, характеризуя поверхность *первой квадратичной формой* — метрикой, определяющей расстояния между бесконечно близкими точками поверхности и не зависящими от способа вложения ее в трехмерное пространство и даже допускающей описание двумерной поверхности самой по себе, без какого-либо ее вложения.

Бернгард Риман (1826–1866) распространил идеи Гаусса описания свойств пространства с помощью метрики на пространства любого числа измерений, в том числе и трехмерного. И Лобачевский и Риман уже подвергают ревизии евклидовость нашего реального трехмерного пространства.

В обширной и подробной лекции 1854 года “О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии” [13] Риман обсуждает геометрию пространства:

“Мы приходим к заключению, что пространство есть частный случай трижды протяженной величины. Необходимым следствием отсюда явится то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств протяженных величин и что, напротив, те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта. В таком случае возникает задача установить, из каких простейших допущений вытекают метрические свойства пространства ...”

Более того, он обсуждает не только *локальные* свойства пространства, но и *глобальные*, в частности, выдвигая возможность компактности его (трехмерная сфера):

“Если мы припишем пространству постоянную меру кривизны, то придется допустить конечность пространства, как бы ни мала была кривизна ...”

Он четко осознает и путь выяснения этих свойств, описывая необходимость теоретического исследования сочетать с экспериментальными фактами:

“Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководствуясь фактами, которые ею объяснены быть не могут; такие же исследования, как производное в настоящей работе, именно имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки.

Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день.”

Риман пытается представить и *физические* свойства пространства. В 1876 году он пишет [14]:

“3. В любой момент во всякой точке пространства существует нечто определенное по величине и направлению (сила ускорения),

что сообщает находящейся там весовой точке — какова бы она ни была — определенное движение, складывающееся геометрически с движением, которым она уже обладает.

...

Существующую, согласно 3, в каждой точке пространства определенную по величине и направлению силу ускорения я пытаюсь объяснить движением некоей субстанции, наполняющей все бесконечное пространство...

Как математик Риман допускал только пространство постоянной кривизны, поясняя это возможностью перемещения и поворотов тел в пространстве: это возможно только в изотропном пространстве постоянной кривизны, если тела имеют такую же собственную внутреннюю кривизну и не деформируются.

Однако дальнейшие исследователи снимают это требование Римана — то ли игнорируя его математическую значимость, то ли снимая это ограничение (без обсуждения), допуская деформацию тел.

Наиболее далеко продвинулся в представлении физического трехмерного пространства не только как риманова, но и с метрикой, меняющейся во времени, Уильям Кингдом Клиффорд (1845–1879). Он не только рассматривает динамически изменяемые геометрические свойства пространства, но является первопроходцем в единой теории поля, предполагая возможность проявления материальных тел как сингулярностей пространства. В работе “Здравый смысл точных наук” (1876) [15] он пишет: “Я считаю:

- 1) что малые участки пространства действительно *аналогичны* небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно: там несправедливы обычные законы геометрии;
- 2) что это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны;
- 3) что такое изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем *движением материи*, будь она весовая или эфирная;
- 4) что в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений, подчиняющихся (возможно) закону непрерывности.”

И далее:

“...из того, что одна часть пространства, которую мы знаем, в практических вопросах оказывается во всех своих частях тождественной, ни в коем случае не следует, что все пространство всюду одинаково. ...Когда мы утверждаем, что наше пространство повсюду одно и то же, мы предполагаем, что оно обладает постоянной кривизной...”

Вот те три рода изменений кривизны в пространстве, которые мы должны признать лежащими в пределах возможного:

1. Пространство наше, быть может, действительно обладает кривизной, меняющейся от одной точки к другой, — кривизной, которую нам не удастся определить или потому, что мы знакомы лишь с небольшой частью пространства, или потому, что мы смешиваем незначительные происходящие в нем изменения с переменами в условиях нашего физического существования, последние же мы не связываем с переменами в нашем положении. Мы должны допустить, что ум, который мог бы распознать эту изменяющуюся кривизну, обладал бы знанием абсолютного положения точки. Для такого ума постулат об относительности положения потерял бы всякое значение...
2. Наше пространство, может быть, действительно тождественно во всех своих частях (имеет одинаковую кривизну), но величина его кривизны может изменяться как целое во времени...
3. Мы можем мыслить наше пространство как имеющее повсюду приблизительно однородную кривизну, но легкие изменения кривизны могут существовать при переходе от одной точки к другой, в свою очередь изменяясь во времени...

...Гипотезам, гласящим, что ...геометрический характер [пространства] может меняться во времени, быть может, суждено или не суждено сыграть большую роль в физике будущего, но мы не вправе не рассматривать их как возможные объяснения физических явлений, потому что их можно противопоставить повсюду распространенному догматическому верованию во всеобщность известных геометрических теорем — верованию, образовавшемуся благодаря столетиям непрерывного почитания гения Евклида.”

В конце XIX века начался поход на пересмотр свойств пространства. Он шел как со стороны анализа отношения к реальному, физическому пространству, так и в разработке математических методов, позволяющих не только рассуждать об этих свойствах, но и точно их описывать. Огромная заслуга в этом направлении принадлежит создателю *абсолютного дифференциального исчисления* Грегорио Риччи-Курбастро (1853–1925) и его школе.

Далее мы кратко опишем эту технику, в основном ориентируясь на нужды последующего изложения.

2. Основы римановой геометрии

В уравнениях динамики, начало которым положил Ньютон, основную роль играют бесконечно малые приращения координат и расстояние между двумя бесконечно близкими точками. В декартовой системе координат расстояние между двумя точками определяется теоремой Пифагора:

$$l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (3.1)$$

В криволинейных координатах — это также теорема Пифагора, но в бесконечно малом. Например, в сферической системе:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.2)$$

Инвариантное расстояние между бесконечно близкими точками в какой-то другой системе с координатами (ξ^1, ξ^2, ξ^3) при заданной зависимости от них декартовых координат выглядит следующим образом:

$$dl^2 = \gamma_{11} (d\xi^1)^2 + \gamma_{22} (d\xi^2)^2 + \gamma_{33} (d\xi^3)^2 + 2\gamma_{12} d\xi^1 d\xi^2 + 2\gamma_{13} d\xi^1 d\xi^3 + 2\gamma_{23} d\xi^2 d\xi^3, \quad (3.3)$$

где γ_{ij} — метрический тензор пространства. В евклидовом пространстве

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi^i} \frac{\partial x}{\partial \xi^j} + \frac{\partial y}{\partial \xi^i} \frac{\partial y}{\partial \xi^j} + \frac{\partial z}{\partial \xi^i} \frac{\partial z}{\partial \xi^j}.$$

Эти выражения достаточно громоздки, однако их запись и общие методы работы с ними могут быть существенно упрощены принятием некоторых соглашений.

2.1. Общепринятые соглашения

В классической механике время выделено и имеется три пространственных координаты x^i , индексы которых обозначаются латинскими буквами $i, j, k, \dots$, меняются от 1 до 3-х и пишутся сверху.

- Многокомпонентные поля могут иметь верхние и нижние индексы.
- Правило суммирования: если один и тот же индекс встречается вверху и внизу, это автоматически определяет суммирование по данному индексу:

$$\Gamma_{jk}^i A^k \equiv \sum_{k=1}^3 \Gamma_{jk}^i A^k.$$

- Результат суммирования не зависит от наименования индекса суммирования: $A_j^i B^j = A_k^i B^k$.
- Метрический тензор симметричен $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, имеет шесть компонент (в трехмерном пространстве): $i, j = 1 \dots 3$:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.4)$$

- Обратный метрический тензор:

$$\gamma^{ij} \gamma_{jk} = \delta_k^i,$$

где δ_k^i — единичная матрица Кронекера.

- Используется сокращенная запись производных:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j} \equiv \partial_j A^i \equiv A^i{}_{,j}.$$

- Абсолютный антисимметричный тензор $\epsilon_{[ijk]}$ меняет знак при перестановке любых двух индексов, следовательно, у него отличны от нуля только компоненты с различными индексами, равные компоненте $\epsilon_{[123]}$ со знаком плюс или минус. В декартовых координатах евклидова пространства $\epsilon_{[123]} = 1$.

2.2. Тензоры в римановом пространстве

В римановом пространстве в бесконечно малой окрестности любой точки можно найти координаты, в которых метрика представляется единичной матрицей и первые производные по любой координате от компонент метрики в этой точке равны нулю:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2; \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij}.$$

Такая система координат называется *локально декартовой* в заданной точке. Это говорит о том, что в бесконечно малом любое риманово пространство является евклидовым. Так, сферическая Земля в масштабах лаборатории или поля, значительно меньших, чем радиус Земли, имеет (приблизительно, точно — лишь в бесконечно малом) геометрию двумерной евклидовой плоскости.

Физические поля математически описываются тензорами, компоненты которых преобразуются по определенным законам при преобразовании координат. Например, выражение для длины (3.4) при замене координат $x^i(\bar{x})$, так как дифференциал преобразуется по правилу Лейбница $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$, в новых координатах имеет вид:

$$dl^2 = \gamma_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} d\bar{x}^k d\bar{x}^m = \tilde{\gamma}_{km} d\bar{x}^k d\bar{x}^m,$$

что и определяет преобразование компонент метрики при преобразовании координат как *дважды ковариантного тензора*:

$$\tilde{\gamma}_{km} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \gamma_{ij}.$$

Число индексов у компонент тензора — его *ранг*. Скаляр не имеет индексов — это тензор нулевого ранга — и при преобразовании координат его единственная компонента остается неизменной. Индексы могут быть нижними (ковариантными) и верхними (контравариантными). Преобразование компонент тензоров с верхними и нижними индексами проводится взаимно обратными матрицами. Например, для *контравариантного* (A^i) и *ковариантного* (B_i) векторов (тензоров первого ранга) преобразования взаимно обратны:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^j; \quad B_i = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{B}_k; \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} = \delta_j^k. \quad (3.5)$$

(Напомним, что по индексу i здесь идет суммирование.) Это свойство обеспечивает *свертку* тензоров по одному верхнему и одному нижнему индексам, в частности, свертка произведения контравариантного и ковариантного векторов определяет скаляр:

$$A^i B_i = \bar{A}^j \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{B}_k = \bar{A}^j \delta_j^k \bar{B}_k = \bar{A}^k \bar{B}_k \equiv (A, B).$$

Компоненты тензора в одной системе координат являются линейными и однородными функциями компонент в другой системе. Это свойство определяет понятия *нулевого тензора*:

- если *все* компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, в любой другой системе *все* его компоненты также равны нулю;
- если все соответствующие компоненты двух тензоров одинаковой структуры равны в одной системе координат, то они равны и в любой другой.

Поднятие и опускание индексов — также согласовано во всех координатных системах. Оно производится с помощью метрического тензора или обратного ему:

$$A^i{}_{jk} = \gamma^{im} A_{mj}{}^s \gamma_{sk}.$$

В частности, это дает возможность определить *скалярное произведение* векторов с одинаковым расположением индексов:

$$(A, B) = A^i B_i = \gamma_{ij} A^i B^j = \gamma^{ij} A_i B_j.$$

Так как в локально декартовой системе координат метрический тензор представляется единичной матрицей, в этой системе величины компонент тензоров не зависят от положения индексов (вверху или внизу).

2.3. Симметрия тензоров

В общем случае тензор k -го ранга в n -мерном пространстве имеет n^k компонент — каждый индекс независимо от других пробегает n значений.

Однако тензоры могут обладать свойствами *симметрии*, уменьшающими число независимых компонент. Рассмотрим дважды ковариантный тензор второго ранга a_{ij} и построим из его компонент структуру, симметричную по индексам:

$$a_{\{ij\}} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}); \quad a_{\{ji\}} = a_{\{ij\}}.$$

При преобразовании координат компоненты этой структуры преобразуются как тензор:

$$\tilde{a}_{\{ij\}} = \frac{1}{2} (\tilde{a}_{ij} + \tilde{a}_{ji}) = \frac{1}{2} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} (a_{kl} + a_{lk}) = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} a_{\{kl\}}.$$

Аналогично из него можно построить тензор, антисимметричный по индексам — компонента меняет знак при перестановке индексов:

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji}); \quad a_{[ji]} = -a_{[ij]}.$$

Эти компоненты также образуют тензор, преобразующийся при преобразовании координат по тензорным законам.

Таким образом, свойства симметрии тензора по перестановке индексов сохраняются при преобразованиях координат, то есть являются *инвариантной характеристикой тензора*.

Из построенных конструкций видно, что

$$a_{ij} = a_{\{ij\}} + a_{[ij]}$$

— дважды ковариантный тензор второго ранга, представим в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. У антисимметричного тензора индексы компонент, не равных нулю, должны быть разными, при этом при изменении порядка индексов меняется только знак: при четной перестановке знак не меняется, а при нечетной — меняется на противоположный, так что при данном наборе разных индексов независимой является одна компонента, поэтому число независимых компонент антисимметричного тензора второго ранга в n -мерном пространстве равно числу сочетаний из n по 2, то есть $n(n-1)/2$. В частности, при $n = 3$ число компонент антисимметричного тензора второго ранга равно трем — как и число компонент вектора.

Это рассуждение применимо и для антисимметричных тензоров любого k -го ранга в n -мерном пространстве, количество независимых компонент которых вследствие этого оказывается

$$N_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = N_n^{n-k}.$$

При $k > n$ антисимметричный тензор вообще не может иметь ненулевых компонент: в этом случае из n значений нельзя выбрать $k > n$ различных значений.

При $k = n$ имеется всего одна компонента — как у скаляра — и любой антисимметричный тензор n -го ранга в n -мерном пространстве представим в виде скаляра, умноженного на некоторый стандартизованный — *абсолютный антисимметричный тензор*, компонента которого $\bar{\epsilon}_{[1,2,\dots,n]} = 1$ в локально декартовой системе координат, а остальные равны ± 1 в зависимости от порядка индексов. Например, в трехмерном пространстве ненулевые компоненты этого тензора (чертой мы помечаем значение компоненты в локально декартовой системе):

$$\bar{\epsilon}_{[123]} = \bar{\epsilon}_{[231]} = \bar{\epsilon}_{[312]} = 1; \quad \bar{\epsilon}_{[213]} = \bar{\epsilon}_{[321]} = \bar{\epsilon}_{[132]} = -1.$$

При переходе к произвольным координатам:

$$\epsilon_{[123]} = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \bar{\epsilon}_{[ijk]} = J \bar{\epsilon}_{[123]} = J,$$

где J — детерминант матрицы

$$(A) = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right); \quad J = \det(A) \quad (3.6)$$

— якобиан преобразования координат.

Этот якобиан можно вычислить следующим образом. Запишем преобразование метрического тензора из локально декартовой системы, где он представляется единичной матрицей в произвольную в матричном виде:

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{\gamma}_{kl} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}; \quad (\gamma) = (A) \cdot (\bar{\gamma}) \cdot (A)^T,$$

где $(A)^T$ — транспонированная матрица преобразования (3.6), детерминант которой равен детерминанту матрицы (A) и равен J .

Используя теорему о детерминанте произведения матриц и помня, что $(\bar{\gamma}) = (1)$, обозначив детерминант метрического тензора буквой γ , получаем:

$$\gamma = J^2; \quad J = \sqrt{\gamma}. \quad (3.7)$$

Не нужно каждый раз разыскивать локально декартову систему и находить детерминант преобразований; достаточно вычислить детерминант метрического тензора.

Аналогично абсолютно антисимметричному тензору с нижними индексами определяется абсолютно антисимметричный тензор с верхними индексами. В локально декартовой системе он удовлетворяет соотношению

$$\epsilon^{[ijk]} \epsilon_{[klm]} = \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j. \quad (3.8)$$

Однако это соотношение тензорное и остается верным в любой другой системе. Из него следует, что компонента $\epsilon^{[123]} = 1/\sqrt{7}$.

Число компонент симметричного тензора второго ранга в n -мерном пространстве равно $n(n+1)/2$ вследствие разложения общего тензора второго ранга с n^2 компонент на симметричную и антисимметричную части.

Важным результатом изучения симметрии тензоров является теорема: *свертка симметричного тензора с антисимметричным тождественно равна нулю*:

$$A^{(ij)} B_{[ij]} = -A^{[ji]} B_{(ji)} = 0.$$

При свертке тензора общего вида с симметричным тензором из первого вырезается его симметричная часть, а при свертке с антисимметричным — антисимметричная часть.

Тензоры более высокого ранга могут быть симметричны или антисимметричны по группам индексов.

2.4. Ковариантное дифференцирование

Исходно физические законы формулируются в локально декартовых координатах. Как правило, в эти законы входят производные от физических величин — производные от тензоров. Как переносится операция дифференцирования из локально декартовой системы $(\bar{x}^i)$ в произвольную систему координат (x^i) ? Начнем с вектора. В локально декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^i &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} A^m \right) = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial A^m}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^m} A^m = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \left(\frac{\partial A^l}{\partial x^k} + \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial^2 \bar{x}^s}{\partial x^k \partial x^m} A^m \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Введем трехиндексную *связность*

$$\Gamma_{km}^l = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial^2 \bar{x}^s}{\partial x^k \partial x^m} = \Gamma_{mk}^l, \quad (3.10)$$

симметричную по нижним индексам, компоненты которой выражаются через первые и вторые производные старых и новых координат. Тогда выражение в правой части (3.9) — преобразованная по законам преобразования тензора *ковариантная производная*, являющаяся тензорным представителем

обычной частной производной в локально декартовой системе, — примет вид:

$$\nabla_k A^l \equiv A^l_{;k} = A^l_{,k} + \Gamma^l_{km} A^m. \quad (3.11)$$

В отличие от частной производной, сокращенно обозначаемой запятой, ковариантную производную мы будем отделять точкой с запятой.

Компоненты связности не образуют тензора: в локально декартовой системе координат все компоненты в выделенной точке равны нулю (потому ковариантная производная совпадает с частной), в других координатах — отличны от нуля.

Ковариантная производная тензора является тензорным представителем частной производной в локально декартовой системе координат, поэтому сразу можно записать правило ковариантного дифференцирования произведения тензоров (как и для обычной частной производной):

$$\nabla_m (T^i_{jk} P^{ls}_r) = P^{ls}_r \nabla_m T^i_{jk} + T^i_{jk} \nabla_m P^{ls}_r,$$

откуда несложно вывести правило ковариантного дифференцирования тензоров произвольного ранга:

$$\nabla_m T^i_{jk} = \partial_m T^i_{jk} + \Gamma^i_{ms} T^s_{jk} - \Gamma^s_{mj} T^i_{sk} - \Gamma^s_{mk} T^i_{js}. \quad (3.12)$$

Из вышеприведенных формул кажется, что для вычисления связностей нужно знать связь системы координат с локально декартовой. Однако существует другой путь для вычисления связностей. В локально декартовой системе первые производные компонент метрического тензора равны нулю, поэтому в любой другой системе координат *ковариантные производные* метрического тензора равны нулю:

$$\nabla_k \gamma_{ij} = \gamma_{ij,k} - \Gamma^s_{ki} \gamma_{sj} - \Gamma^s_{kj} \gamma_{is} = 0,$$

что можно при заданном метрическом тензоре (и, следовательно, его частных производных) рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно связностей, откуда (с учетом симметрии связностей по нижним индексам) можно выразить связности через первые производные метрического тензора:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\gamma^{is}}{2} (\gamma_{sj,k} + \gamma_{sk,j} - \gamma_{jk,s}). \quad (3.13)$$

Таким образом, задание метрического тензора как функции координат позволяет осуществить тензорный перенос производной любого тензорного поля из локально декартовой системы координат в произвольную.

2.5. Операторы теории поля

В обычной теории поля используются такие операции, как градиент функции, дивергенция и ротор вектора, оператор Лапласа. Как эти операции переносятся в искривленное пространство? Исходным здесь является следующий подход: малая область риманова пространства является почти плоской (точно — бесконечно малая). Введем в ней декартовы координаты (локально декартовы) и запишем в них упомянутые операторы в их традиционном виде. Переход в произвольные координаты совершается заменой обычных частных производных на ковариантные при учете преобразования метрического тензора.

Градиент скаляра $\nabla_i f = \partial_i f$ — выражается таким образом в любой системе координат. В этом выражении не появляется ни метрический тензор, ни связности.

Дивергенция вектора (скаляр) должна быть выражена через ковариантные производные:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla_i A^i = A^i_{;i} - \Gamma_{ji}^i A^j = A^i_{;i} + A^i \frac{(\sqrt{\gamma})_{;i}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} A^i). \quad (3.14)$$

В выражении для дивергенции от метрического тензора входит только $\sqrt{\gamma}$.

Выражение для оператора Лапласа скалярной функции прямо следует из выражения для дивергенции вектора:

$$A^i = \gamma^{ij} f_{;j}; \quad \Delta f = \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \partial_j f). \quad (3.15)$$

Ротор вектора представляется антисимметричным тензором второго ранга и в любых координатах, в любом римановом пространстве не зависит от связностей:

$$a_{[ij]} = a_{i;j} - a_{j;i} = a_{i,j} - a_{j,i}.$$

В трехмерном пространстве этот тензор имеет три компоненты, как и вектор, компоненты которого можно представить через компоненты этого антисимметричного тензора с помощью обратного абсолютного антисимметричного тензора:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})^i = \epsilon^{[ijk]} a_{j,k}. \quad (3.16)$$

Все эти формулы применимы не только в римановом пространстве, но и в евклидовом в произвольных координатах: сферических, цилиндрических и пр.

2.6. Инвариантные интегралы

При преобразованиях координат от локально декартовых к произвольным в мере интегрирования возникает якобиан преобразования J :

$$d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3 = \det \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right| dx^1 dx^2 dx^3 = J dx^1 dx^2 dx^3,$$

который, как было вычислено в (3.7), равен корню из детерминанта метрического тензора. Поэтому мера объема в локально декартовой системе выражается в произвольной системе как

$$d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3 = \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3 \equiv \sqrt{\gamma} d_3x.$$

Для инвариантности интеграла по отношению к произвольному преобразованию координат эта мера под интегралом должна умножаться на скаляр.

Исключительно важной является *теорема Гаусса*

$$\int_B \nabla_i w^i \sqrt{\gamma} d_3x = \int_B \partial_i (w^i \sqrt{\gamma}) d_3x = \oint_{\partial B} w^i \sqrt{\gamma} ds_i, \quad (3.17)$$

преобразующая интеграл в области B от дивергенции вектора в поток этого вектора через границу области ∂B .

2.7. Тензор кривизны

Если расписать коммутатор (тензор)

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) A^i = R_{jkl}^i A^j,$$

то результат в общем случае не равен нулю, а выражается через

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jk}^s \quad (3.18)$$

— *тензор кривизны пространства* (тензор Римана — Кристоффеля). Если пространство евклидово, то в нем можно ввести декартовы координаты, где связности всюду равны нулю и, следовательно, тензор R_{jkl}^i всюду равен нулю. Этот тензор математически отличает искривленное пространство от плоского.

Аналогичный коммутатор для тензора произвольного ранга содержит столько слагаемых с тензором кривизны, каков его ранг:

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T_{jm}^i = R_{skl}^i T_{jm}^s - R_{jkl}^s T_{sm}^i - R_{mkl}^s T_{js}^i.$$

В локально декартовой системе координат первые производные от метрического тензора, так же как и связности, равны нулю, но производные от связностей могут быть отличны от нуля, и тензор кривизны (3.18) выражается через вторые производные метрического тензора:

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i = \frac{\gamma^{is}}{2} (\gamma_{sl,jk} + \gamma_{jk,sl} - \gamma_{sk,jl} - \gamma_{jl,sk}). \quad (3.19)$$

В общих координатах добавляются слагаемые со связностями:

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma} R &= \sqrt{\gamma} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{il} \gamma^{jk}) \gamma_{jk,il} - \sqrt{\gamma} \mathcal{L} \\ &= \partial_i (\sqrt{\gamma} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{il} \gamma^{jk}) \gamma_{jk,l}) + \sqrt{\gamma} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $\mathcal{L}$ — квадратичная по связностям функция:

$$\mathcal{L} = \gamma^{ij} (\Gamma_{im}^k \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{km}^m). \quad (3.21)$$

Вторые производные метрического тензора входят в кривизну линейно.

Тензор кривизны обладает важными свойствами симметрии, которые можно вывести из выражения (3.19).

- Антисимметрия в первой и второй парах индексов:

$$R_{ij\,kl} = -R_{ji\,kl} = -R_{ij\,lk} = R_{ji\,lk} = R_{[ij]\, [kl]}.$$

- Симметрия по парам индексов:

$$R_{[ij]\, [kl]} = R_{[kl]\, [ij]}.$$

- Тожество Риччи:

$$R_{ij\,kl} + R_{ik\,lj} + R_{il\,jk} = 0.$$

- Дифференциальное тождество Бьянки:

$$R_{ij\,kl;m} + R_{ij\,lm;k} + R_{ij\,mk;l} = 0. \quad (3.22)$$

Наличие этих тождеств уменьшает число независимых компонент тензора кривизны, которых в n -мерном пространстве оказывается

$$N = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}. \quad (3.23)$$

Так, в двумерном пространстве он имеет всего одну компоненту (гауссова кривизна), в трехмерном — шесть.

Свертка тензора кривизны по одному верхнему и среднему нижнему индексам приводит к тензору второго ранга — *тензору Риччи*

$$R_{jl} = R_{jil}^i = R_{lj}, \quad (3.24)$$

симметричному по индексам.

Свертка тензора Риччи с метрическим тензором определяет скалярное поле — *скалярную кривизну пространства*: $\gamma^{ij} R_{ij} = R$.

Наконец, комбинация

$$G_j^i = R_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i R \quad (3.25)$$

называется тензором Эйнштейна, который удовлетворяет *тождеству Гильберта*:

$$\nabla_i G_j^i = 0, \quad (3.26)$$

которое можно получить, дважды свернув тождества Бьянки (3.22).

Почти все формулы, приведенные выше, не зависят от размерности пространства.

3. Двумерные поверхности

Метрический тензор двумерной поверхности имеет три компоненты, зависящие от двух координат:

$$dl^2 = \gamma_{11} (dx^1)^2 + 2 \gamma_{12} dx^1 dx^2 + \gamma_{22} (dx^2)^2. \quad (3.27)$$

Но имеется и два независимых преобразования координат, с помощью которых можно изменять компоненты метрики.

Например, метрика любой двумерной поверхности может быть приведена к *конформно плоскому виду*, определяемому всего лишь одной функцией координат:

$$dl^2 = f^2(x, y) (dx^2 + dy^2), \quad (3.28)$$

в котором обе координаты входят равноправно. Можно, наоборот, выделить одну из координат, приведя метрику к виду:

$$dl^2 = dx^2 + u^2(x, y) dy^2. \quad (3.29)$$

Тензор Римана — Кристоффеля у двумерных поверхностей имеет всего одну независимую компоненту $R_{[12]}^{[12]}$, а тензор Риччи, выражающийся через него алгебраически, — три компоненты, между которыми поэтому имеется линейная зависимость между компонентами тензора Риччи, выражающаяся в равенстве нулю тензора Эйнштейна для любых двумерных поверхностей.

В двумерном случае $R\sqrt{\gamma}$ является полной дивергенцией:

$$R\sqrt{\gamma} = \partial_i (\sqrt{\gamma} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{il} \gamma^{jk}) \gamma_{jk,i}) = \partial_1 \left(\frac{\gamma_{12,2} - \gamma_{22,1}}{\sqrt{\gamma}} \right) + \partial_2 \left(\frac{\gamma_{12,1} - \gamma_{11,2}}{\sqrt{\gamma}} \right),$$

поэтому интеграл по какой-то области B двумерной поверхности, имеющей границу δB , сводится к интегралу по границе

$$\int_B R\sqrt{\gamma} d_2x = \oint_{\delta B} w_i dl^i, \quad (3.30)$$

где

$$w_1 = \frac{\gamma_{12,1} - \gamma_{11,2}}{\sqrt{\gamma}}; \quad w_2 = -\frac{\gamma_{12,2} - \gamma_{22,1}}{\sqrt{\gamma}},$$

а по замкнутой поверхности (у которой граница отсутствует) при ее малой вариации величина этого интеграла не меняется — является *топологическим инвариантом*:

$$K = \frac{1}{4\pi} \oint \sqrt{\gamma} R d_2x = n. \quad (3.31)$$

Целое число $1 - n$ называется *родом поверхности*. Например, у сферы вне зависимости от радиуса, а также эллипсоида — любой поверхности, которую можно *без разрывов* непрерывно деформировать в сферу, это число равно нулю, а, например, у тора — единице.

3.1. Двумерная сфера

Наиболее наглядным, привычным и определенным неевклидовым пространством является двумерная сфера — поверхность мяча, глобуса, Земного шара, Солнца. Точка на двумерной поверхности определяется двумя координатами, например, на сфере наиболее часто применяют сферические углы ϑ — широта (правда, в математике $0 \leq \vartheta \leq \pi$, в отличие от географии, где $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$), метрика в которых для сферы радиуса r выглядит так:

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.32)$$

Очень часто применяются *конформные* координаты на сфере

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + (x^2 + y^2)/(4r^2))^2}. \quad (3.33)$$

В любых координатах единственная независимая компонента тензора Римана — Кристоффеля сферы

$$R_{[12]}^{[12]} = \frac{1}{r^2},$$

а скалярная кривизна

$$R = \frac{2}{r^2}.$$

4. Трехмерные пространства

Шесть компонент метрики трехмерного пространства (γ_{ij}), зависящие от трех координат, можно изменять преобразованием трех функций координат. Например, в трехмерном евклидовом пространстве в сферических координатах метрика имеет вид:

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.34)$$

В общем случае, используя три координатных преобразования, можно уничтожить три недиагональные компоненты метрического тензора (в общем случае — в конечной области), приведя метрику к *тридиагональному* виду:

$$dl^2 = a^2(x, y, z) dx^2 + b^2(x, y, z) dy^2 + c^2(x, y, z) dz^2.$$

В *трехмерном* пространстве тензор Римана — Кристоффеля алгебраически выражается через тензор Эйнштейна ($\epsilon_{[ijk]}$ — абсолютный антисимметричный тензор):

$$R_{kl}^{ij} = -\epsilon^{[ijs]} \epsilon_{[klm]} G_s^m, \quad (3.35)$$

поэтому равенство нулю тензора Риччи (или тензора Эйнштейна) в трехмерном случае приводит к плоскому пространству.

4.1. Трехмерная сфера

В качестве примера, полезного для дальнейшего, рассмотрим трехмерную сферу. Хотя двумерная сфера хорошо всем известна (поверхность глобуса, мяча), трехмерная сфера из-за непривычности кажется нередко чуть ли не противоречивым объектом.

Она является одним из объектов в серии n -мерных сфер. n -мерная сфера радиуса r имеет два полюса — северный и южный — и параллели — $(n-1)$ -мерные сферы с радиусами, увеличивающимися от нуля у северного полюса до r (экватор), а затем опять убывающего до нуля к южному полюсу вдоль одномерного *меридиана*. Точки на меридиане можно определять углом $0 \leq \vartheta \leq \pi$ (широта) и длина вдоль меридиана $dl = r d\vartheta$.

Метрику n -мерной сферы $d\Omega_n^2(r)$ радиуса r можно записать через метрику сферы единичного радиуса $d\omega_n^2$:

$$d\Omega_n^2(r) = r^2 d\omega_n^2; (d \cdot \eta) \omega_n^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\omega_{n-1}^2. \quad (3.36)$$

Интегрирование по всем переменным дает n -мерный объем n -мерной сферы радиуса r : $\Sigma_n(r) = r^n \sigma_n$ (последнее — объем n -мерной сферы единичного радиуса).

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1} \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \sigma_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Сфер отрицательного радиуса нет, поэтому нульмерная сфера состоит только из северного и южного полюсов. Объем ее равен числу 2. Одномерная сфера (окружность) имеет параллели в виде двух точек вдоль меридиана, и одномерный объем ее (длина) равен $2\pi r$.

Хорошо известная двумерная сфера имеет параллелями окружности, и ее 2-мерный объем (площадь) равен

$$\sigma_2 = 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi; \quad \Sigma_2(r) = 4\pi r^2.$$

У трехмерной сферы параллели и экватор — двумерные сферы. Объем 3-мерной сферы единичного радиуса

$$\sigma_3 = 4\pi \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta = 2\pi^2, \quad (3.38)$$

а сферы радиуса r : $\Sigma_3(r) = 2\pi^2 r^3$.

При необходимости этот ряд может быть продолжен и можно построить геометрические характеристики n -мерных сфер.

Метрика трехмерной сферы радиуса r в *сферических координатах* параметризуется тремя углами:

$$dl^2 = r^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)). \quad (3.39)$$

Очень часто, например, для описания вращения твердого тела, применяется параметризация трехмерной сферы углами Эйлера:

$$dl^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 (d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi). \quad (3.40)$$

Эту метрику можно привести к диагональному виду преобразованиями

$$u = \frac{\varphi + \psi}{2}; \quad w = \frac{\psi - \varphi}{2}; \quad z = \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

В этих новых переменных метрика сферы радиуса r :

$$dl^2 = r^2 \left(\frac{dz^2}{1-z^2} + z^2 du^2 + (1-z^2) dw^2 \right). \quad (3.41)$$

Если в этой метрике представить $z = \sin \vartheta$ (не эйлерова, в два раза меньшего, меняющегося от нуля до $\pi/2$), то метрика примет простой вид:

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \cos^2 \vartheta d\psi^2). \quad (3.42)$$

Наиболее общим для сферы любой размерности является *конформно плоское* представление метрики, в частности, для трехмерной сферы имеющее вид метрики плоского пространства, умноженной на *конформный множитель*

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4r^2}\right)^2}. \quad (3.43)$$

Тензор кривизны n -мерной сферы радиуса r выражается через тензор Кронекера δ_j^i , представляемого единичной матрицей:

$$R_{kl}^{ij} = \frac{1}{r^2} (\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j); \quad R_k^i = \frac{n-1}{r^2} \delta_k^i; \quad R = \frac{n(n-1)}{r^2}. \quad (3.44)$$

В частности, для 3-мерной сферы

$$R_j^i = \frac{2}{r^2} \delta_j^i; \quad R = 6/r^2. \quad (3.45)$$

Эти свойства трехмерной сферы предлагается проверить для различных приведенных выше координат (метрик) с помощью модуля Ricci в пакете Mathematica, приведенного в разделе 1.1.

4.2. Пространство Лобачевского

Пространство Лобачевского — это риманово пространство постоянной отрицательной кривизны. По ряду своих свойств оно сходно с трехмерной сферой — это однородное, изотропное пространство: как и на сфере, в нем все точки равноправны и равноправны все направления.

Заменой кругового угла на гиперболический в метрике сферы (3.32) получается метрика “плоскости Лобачевского”:

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \text{sh}^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (3.46)$$

а при аналогичной замене в метрике трехмерной сферы (3.39) получается метрика трехмерного пространства Лобачевского

$$dl^2 = r^2 (d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)). \quad (3.47)$$

Аналогичная замена в метрике (3.42) приводит к другому виду метрики пространства Лобачевского:

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \text{sh}^2 \vartheta d\varphi^2 + \text{ch}^2 \vartheta d\psi^2), \quad (3.48)$$

а также к переменным, аналогичным углам Эйлера:

$$dl^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 (d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \text{ch} \vartheta d\varphi d\psi). \quad (3.49)$$

Из конформного представления трехмерной сферы (3.43) заменой знака перед r^2 получается очень интересное представление Клейна:

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4r^2}\right)^2}. \quad (3.50)$$

Знаменатель обращается в нуль при $x^2 + y^2 + z^2 = (2r)^2$. Эта сфера представляет бесконечно удаленную сферу пространства Лобачевского, а все пространство представляется внутренними точками этой сферы.

С помощью модуля Рисси в разделе 1.1 предлагается изучить геометрические свойства пространства Лобачевского в этих различных координатах. В частности, тензор Риччи пространства Лобачевского изотропен:

$$R_j^i = -\frac{2}{r^2} \delta_j^i; \quad R = -\frac{6}{r^2}. \quad (3.51)$$

5. Отображения римановых пространств

Тензор Риччи обладает определенным свойством аддитивности: если в одних и тех же координатах заданы два пространства с метрическими тензорами γ_{ij} и $\tilde{\gamma}_{ij}$, то

$$\tilde{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + S_{jkl}^i,$$

где тензор относительной кривизны S_{jkl}^i выражается через тензор относительной связности Π_{jk}^i , выражаемый через ковариантные в первом пространстве производные от метрического тензора второго пространства:

$$S_{jkl}^i = \nabla_k \Pi_{jl}^i - \nabla_l \Pi_{jk}^i + \Pi_{jl}^s \Pi_{sk}^i - \Pi_{jk}^s \Pi_{sl}^i, \quad (3.52)$$

где Π_{jk}^i — тензор относительной связности рассматриваемых пространств:

$$\Pi_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i = \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\gamma}^{is}}{2} (\nabla_j \tilde{\gamma}_{sk} + \nabla_k \tilde{\gamma}_{sj} - \nabla_s \tilde{\gamma}_{jk}) = \\ & = -\frac{\gamma^{is}}{2} (\tilde{\nabla}_j \gamma_{sk} + \tilde{\nabla}_k \gamma_{sj} - \tilde{\nabla}_s \gamma_{jk}). \end{aligned}$$

Если, например, первое пространство евклидово и в нем выбраны декартовы координаты, то связности в нем равны нулю и тензор относительной связности равен связностям второго пространства. Однако при переходе к другим координатам (например, сферическим) его компоненты преобразуются как компоненты тензора третьего ранга. Если, например, и второе пространство евклидово и декартовы координаты первого пространства являются декартовыми координатами и второго, то в этой системе координат обе системы связностей равны нулю, а следовательно, и все компоненты Π_{jk}^i будут равны нулю, а так как это тензор — они будут оставаться нулевыми и в любой системе координат.

ГЛАВА 4

Неинерциальные системы

Фигура и движение — вот главная часть принципов, на коих покоится космология.

Ж. Д'Аламбер

В классической механике при переходе из одной инерциальной системы к другой, движущейся относительно первой со скоростью V , в каждой точке одного из пространств имеется вектор скорости движения мгновенно совпадающей точки второго пространства относительно первого — имеется *однородное поле скоростей*.

Однако даже и в евклидовом пространстве возможно движение одной координатной системы относительно другой с неоднородным (и, возможно, переменным во времени) полем скоростей.

Пространство обладает метрикой, которая может иметь кривизну и меняться со временем. Абсолютность пространства определяется неизменностью составляющих его точек, хотя расстояния между этими точками могут меняться со временем. *Пространство является материальным носителем геометрических свойств*. В бесконечно малом пространстве является евклидовым — это одно из главных его *физических* свойств.

Относительно пространства находящиеся в нем тела могут перемещаться. Совокупность некоторых тел может описываться *движущейся системой координат*, координатные точки которой перемещаются относительно пространства. В этой системе — *неинерциальной* — имеется поле скоростей относительно пространства — *поле абсолютных скоростей*.

1. Вращающаяся система

Пусть мы находимся на “чертовом колесе”, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω . Опишем свободное движение материальной точки с точки зрения вращающегося на колесе наблюдателя. Поле скоростей

вращающейся системы относительно инерциальной неоднородно:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

Скорость какой-то точки с координатами $\mathbf{r}$ во вращающейся системе относительно инерциальной системы (абсолютная скорость):

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}} - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

Лагранжиан свободной частицы состоит только из кинетической энергии:

$$L = \frac{m \bar{\mathbf{v}}^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{r}} - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}])^2.$$

Через импульс можно выразить скорость изменения радиус-вектора относительно вращающейся системы:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m(\dot{\mathbf{r}} - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]); \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

Теперь можно записать гамильтониан свободной частицы:

$$H = (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + (\mathbf{p} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - (\mathbf{r} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}]),$$

который определяет динамику:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}].$$

Подставляя сюда выражение импульса через скорость, для свободной частицы получаем:

$$\frac{d}{dt} m(\dot{\mathbf{r}} - [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]) = m \ddot{\mathbf{r}} - m [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}] = m [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}] - m [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]].$$

Последнее выражение можно сократить на массу — это значит, что закон движения свободной частицы не зависит от ее массы, и окончательно:

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2[\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}] + [\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}]] = \mathbf{w}_K + \mathbf{w}_c, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{w}_K$ и $\mathbf{w}_c$ — кориолисово и центробежное ускорения соответственно.

Наиболее существенным моментом в рассмотренной задаче является неоднородность поля скоростей относительно инерциальной системы. Как преобразуются законы динамики при переходе в неинерциальную систему в общем случае, мы и рассмотрим в следующем разделе.

2. Инвариантная производная по времени

Обозначим пространственные координаты инерциальной системы через $\bar{x}^i$, а некоторой неинерциальной системы $x^j(\bar{x}, t)$. Производные по времени, если функция зависит от координат, в различных системах, в которых сами координаты меняются во времени по отношению к координатам пространства, выражаются по-разному. Производную по времени в инерциальной системе будем обозначать символом D_t и назовем ее *инвариантной производной по времени*. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$D_t F = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + V^i \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad (4.2)$$

что и определяет инвариантную производную от скаляра (эйконала, действия) в произвольной неинерциальной системе.

Для тензорной функции выражение чуть сложнее, так как производится еще преобразование, связанное с индексами. Рассмотрим сначала преобразование контравариантного векторного поля A^i . В инерциальной системе отсчета его компоненты будем обозначать $\bar{A}^i$:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j; \quad \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \left(\frac{\partial A^j}{\partial t} + V^k \frac{\partial A^j}{\partial x^k} \right) + A^j \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right).$$

Преобразуем последнюю производную:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right) = - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^l}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^j} V^l.$$

Отсюда инвариантная производная по времени от контравариантного векторного поля выражается (одинаковым образом через обычные и ковариантные производные, так как в последнем случае все связности сокращаются):

$$D_t A^i = \frac{\partial}{\partial t} A^i - A^j \frac{\partial}{\partial x^j} V^i + V^j \frac{\partial}{\partial x^j} A^i = \dot{A}^i - A^j V_{;j}^i + V^j A_{;j}^i. \quad (4.3)$$

Аналогично для ковариантного векторного поля:

$$D_t B_i = \frac{\partial}{\partial t} B_i + V_{;i}^j B_j + V^j B_{i;j} \quad (4.4)$$

и тензора произвольного ранга:

$$D_t Q_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial t} Q_{jk}^i - V_{;s}^i Q_{jk}^s + V_{;j}^s Q_{sk}^i + V_{;k}^s Q_{js}^i + V^s Q_{jk;s}^i. \quad (4.5)$$

Она состоит из $r + 2$ составляющих, где r — ранг тензора. При $r = 0$ (скаляр) мы имеем выражение (4.2) с двумя составляющими: частной производной по времени и “переносным” членом, определяемым полем абсолютных скоростей. Для тензоров, имеющих индексы, к каждому индексу (верхнему или нижнему) добавляется слагаемое, определяемое производной поля скоростей как для контравариантного (4.3), так и для ковариантного векторного поля (4.4) в зависимости от расположения индекса.

Особо важным является выражение для инвариантной производной по времени компонент метрического тензора. Так как пространственные инвариантные производные от него равны нулю,

$$D_t \gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \gamma_{is} V^s{}_{,j} + \gamma_{js} V^s{}_{,i} + V^s \gamma_{ij,s} = \dot{\gamma}_{ij} + V_{i;j} + V_{j;i}. \quad (4.6)$$

Это преобразование определяет и инвариантную производную по времени от тензорных плотностей:

$$D_t \sqrt{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma} V^i{}_{;i} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\gamma} V^i), \quad (4.7)$$

откуда следует

$$D_t (f \sqrt{\gamma}) = \frac{\partial}{\partial t} (f \sqrt{\gamma}) + \partial_i (V^i f \sqrt{\gamma}). \quad (4.8)$$

Теперь все соотношения, полученные в инерциальной системе координат, можно перенести в неинерциальную, заменив обычную производную по времени на инвариантную.

3. Ли-вариации

Формула преобразования метрики (4.6) дает возможность изучить несколько полезных частных случаев.

Наиболее естественное приложение этой формулы для описания постоянного пространства — $D_t \gamma_{ij} = 0$ — в некоторой переменной системе координат. Формула определяет мгновенное изменение метрики $\dot{\gamma}_{ij}$ в каждой точке, связанной с этой переменной системой:

$$\dot{\gamma}_{ij} = -\gamma_{is} V^s{}_{,j} - \gamma_{js} V^s{}_{,i} - V^s \gamma_{ij,s}. \quad (4.9)$$

Для тензора произвольного ранга, постоянного в инерциальной системе, в некоторой неинерциальной системе изменение компонент во времени

определяется полем скоростей V^i :

$$\dot{Q}_{jk}^i = V_{;s}^i Q_{jk}^s - V_{;j}^s Q_{sk}^i - V_{;k}^s Q_{js}^i - V^s Q_{jk;s}^i. \quad (4.10)$$

Такая конструкция была изучена выдающимся норвежским математиком Софусом Ли (1842–1899) для бесконечно малых преобразований координат $\delta x^i = V^i dt$, называется *Ли-вариацией* тензорного поля Q_{jk}^i по полю V^i и обозначается $\delta_V Q_{jk}^i$.

Ли-вариация скалярного поля $f(x)$:

$$\delta_V f = V^i \partial_i f. \quad (4.11)$$

Для контравариантного векторного поля U^i Ли-вариация по полю V^i

$$\delta_V U^i = V^i_{;s} U^s - V^s U^i_{;s} = -\delta_U V^i \quad (4.12)$$

определяет *коммутатор* двух этих полей — конструкцию, антисимметричную по полям V^i и U^i :

$$[U, V]^i = U^s V^i_{;s} - V^s U^i_{;s} = -[V, U]^i, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \delta_U (\delta_V Q_{jk}^i) - \delta_V (\delta_U Q_{jk}^i) &= \\ &= (\delta_U \delta_V - \delta_V \delta_U) Q_{jk}^i = \delta_{[U, V]} Q_{jk}^i. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Коммутатор двух векторных полей есть также векторное поле.

4. Движения римановых пространств

Для некоторых пространств существуют такие поля скоростей, которые обеспечивают стационарность метрики, несмотря на переменность во времени системы координат. Это условие следует из (4.9):

$$-\dot{\gamma}_{ij} = \gamma_{is} V^s_{;j} + \gamma_{js} V^s_{;i} + V^s \gamma_{ij;s} = 0. \quad (4.15)$$

Если метрический тензор как функция координат задан, то эти уравнения, называемые *уравнениями Киллинга*, являются однородными линейными дифференциальными уравнениями на векторное поле V^i (*поле Киллинга*) с тремя компонентами, самих же уравнений шесть — по числу компонент метрического тензора. Система является переопределенной, она имеет решения лишь для частных случаев пространств — пространств с движениями.

Наиболее известным и важным как геометрически, так и физически является евклидово пространство. В декартовой системе координат для метрического тензора $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ имеется шесть независимых решений уравнений Киллинга: три сдвига, нумеруемых индексом s :

$$V_{(s)}^i = \delta_{is}, \quad s = 1, 2, 3,$$

и три вращения, определяемых через абсолютный антисимметричный тензор $\epsilon_{[ijk]}$:

$$V_{(j)}^i = \epsilon_{[ijk]} x^k.$$

Если $V_{(1)}^i$ и $V_{(2)}^i$ — два поля Киллинга, то их суперпозиция с произвольными постоянными коэффициентами $V^i = A V_{(1)}^i + B V_{(2)}^i$ также является полем Киллинга. Это есть следствие линейности уравнений Киллинга.

Из (4.14) следует, что и коммутатор двух полей Киллинга также является полем Киллинга. Этим в множество полей Киллинга конкретного пространства вводится антикоммутативное умножение. Тем самым множество полей Киллинга образует алгебру, носящую название *алгебры Ли*.

Поля Киллинга обладают важными дифференциальными свойствами:

1. Дивергенция поля Киллинга равна нулю.
Действительно, сворачивая (4.15) с обратным метрическим тензором, получим

$$2 V^s_{,s} + V^s \gamma^{ij} \gamma_{ij,s} = 2 V^s_{,s} + V^s \gamma_{,s} = 0; \quad \partial_s (\sqrt{\gamma} V^s) = 0.$$

2. Ковариантная производная поля Киллинга антисимметрична. Уравнение (4.15) можно представить через ковариантные производные

$$V^s_{;i} \gamma_{sj} + V^s_{;j} \gamma_{is} = V_{j;i} + V_{i;j} = 0; \quad V_{j;i} = -V_{i;j}.$$

3. В трехмерном случае ковариантная производная поля Киллинга представляется вектором, дуальным антисимметричному тензору ковариантной производной:

$$K^i = \epsilon^{[ijk]} V_{[j;k]}; \quad \text{rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{K}.$$

Этот вектор является ротором поля Киллинга. Выбрав в малой области риманова пространства декартовы координаты, мы получим обычное соотношение между векторным полем и его ротором.

В главе 10 приведены тексты модулей, позволяющих проводить вычисление рассмотренных геометрических характеристик на компьютере.

4.1. Движения двумерной сферы

В качестве второго важного примера найдем векторы Киллинга двумерной сферы с метрикой в сферических координатах:

$$\begin{aligned} dl^2 &= d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2; & \gamma_{\vartheta\vartheta} &= 1; \\ \gamma_{\vartheta\varphi} &= 0; & \gamma_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

В двумерном случае метрический тензор имеет три компоненты, поэтому уравнений Киллинга три:

$$-\dot{\gamma}_{\vartheta\vartheta} = 2 V^s{}_{,\vartheta} \gamma_{s\vartheta} + V^s \gamma_{\vartheta\vartheta,s} = 2 V^\vartheta{}_{,\vartheta} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что компонента V^ϑ зависит только от φ :

$$\begin{aligned} -\dot{\gamma}_{\varphi\varphi} &= V^s{}_{,\vartheta} \gamma_{s\varphi} + V^s{}_{,\varphi} \gamma_{\vartheta s} + V^s \gamma_{\vartheta\varphi,s} = \\ &= \sin^2 \vartheta V^\varphi{}_{,\vartheta} + V^\vartheta{}_{,\varphi} = 0. \end{aligned}$$

С учетом зависимости V^ϑ только от φ :

$$V^\varphi = f(\varphi) \operatorname{ctg} \vartheta + C; \quad V^\vartheta{}_{,\varphi} = f(\varphi).$$

Последнее уравнение

$$-\dot{\gamma}_{\varphi\varphi} = 2 V^\varphi{}_{,\vartheta} \gamma_{s\varphi} + V^s \gamma_{\varphi\varphi,s} = 2(\sin^2 \vartheta \operatorname{ctg} \vartheta f'(\varphi) + V^\vartheta(\varphi) \sin \vartheta \cos \vartheta) = 0$$

определяет уравнение на $f(\varphi)$:

$$f'' + f = 0; \quad f = A \sin \varphi + B \cos \varphi,$$

откуда получается три независимых решения уравнений Киллинга (по числу констант интегрирования):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V^\vartheta \\ V^\varphi \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= A V_{(1)} + B V_{(2)} + C V_{(3)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Коммутационные соотношения между ними:

$$[V_{(3)}, V_{(1)}] = V_{(2)}; \quad [V_{(3)}, V_{(2)}] = -V_{(1)}; \quad [V_{(1)}, V_{(2)}] = V_{(3)}.$$

4.2. Трехмерная сфера

Векторы Киллинга трехмерной сферы найдем в углах Эйлера, где метрика недиагональна:

$$dl^2 = \frac{r^2}{4} (d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi). \quad (4.17)$$

Векторы Киллинга находятся из шести уравнений Киллинга. Мы не будем подробно выводить решения этих уравнений, оставив это удовольствие для читателя. В математическом Приложении мы приводим программу подбора и проверки выполнения уравнений Киллинга. Решение шестипараметрично:

$$\begin{pmatrix} \xi^\vartheta \\ \xi^\varphi \\ \xi^\psi \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta \\ -\cos \varphi / \sin \vartheta \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta \\ \sin \varphi / \sin \vartheta \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + b_1 \begin{pmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi / \sin \vartheta \\ \cos \psi \operatorname{ctg} \vartheta \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi / \sin \vartheta \\ -\sin \psi \operatorname{ctg} \vartheta \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ = \sum_{s=1}^3 (a_s V_{(s)} + b_s W_{(s)}), \quad (4.18)$$

где векторы из групп V и W коммутируют друг с другом: $[V_{(i)}, W_{(j)}] = 0$, а внутри каждой группы они коммутируют как в группе движений двумерной сферы:

$$[V_{(i)}, V_{(j)}] = \epsilon_{[ijk]} V_{(k)}; \quad [W_{(i)}, W_{(j)}] = \epsilon_{[ijk]} W_{(k)}. \quad (4.19)$$

Как и для любого поля Киллинга, дивергенция каждого из этих полей равна нулю, а ротор обладает удивительно простым свойством:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{V}_{(i)}) = -\frac{2}{r} \mathbf{V}_{(i)}; \quad \operatorname{rot}(\mathbf{W}_{(i)}) = \frac{2}{r} \mathbf{W}_{(i)}, \quad (4.20)$$

где r — радиус сферы.

5. Пространство B_9

Общие свойства пространств лучше изучать, имея конкретные нетривиальные примеры. До сих пор в качестве примеров мы выбирали евклидово пространство и сферу. Эти пространства являются *однородными*

и *изотропными*: первое означает, что они обладают такими полями Киллинга, что сдвигами по этим полям любую точку этого пространства мы можем перевести в другую, что означает равноправие всех точек пространства, а второе определяет равноправие всех направлений в окрестности выбранной точки. Из изотропности в окрестности любой точки следует однородность пространства. Действительно, изотропность означает, что тензор Риччи пропорционален метрическому тензору (мы докажем это только для трехмерного пространства):

$$R_{ij} = f(x^k) g_{ij}; \quad R_j^i = f(x^k) \delta_j^i; \quad R = 3f.$$

Тензор Эйнштейна также пропорционален единичному:

$$G_j^i = R_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i R = -\frac{1}{2} \delta_j^i f(x^k).$$

Из тождества Гильберта следует

$$G_{j;i}^i = -\frac{1}{2} \partial_j f(x^k) = 0; \quad f = \text{const.}$$

Отсюда следует постоянство кривизны пространства $R_{ij;k} = 0$.

Однако обратное неверно: однородное пространство не обязано быть изотропным. Классификация трехмерных однородных пространств была выполнена в 1918 году итальянским математиком Луиджи Бьянки (см. [20]). По его классификации трехмерная сфера принадлежит к классу 9. Однако этот класс значительно шире. Опираясь на вычисленные для трехмерной сферы векторы Киллинга (4.18), мы построим метрику общего однородного пространства В9.

Построим репер, обратный реперу $V_{(k)}^i$:

$$\sum_{k=1}^3 V_{(k)}^i \mu_{(k)j} = \delta_j^i.$$

Его компоненты $\mu_{(k)j}$:

$$(\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, \mu_{(3)}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Метрика трехмерной сферы (4.17) может быть выражена через эти векторы:

$$\gamma_{ij} = \frac{r^2}{4} (\mu_{(1)i} \mu_{(1)j} + \mu_{(2)i} \mu_{(2)j} + \mu_{(3)i} \mu_{(3)j}).$$

Метрика общего пространства В9 получается обобщением этого выражения:

$$\gamma_{ij} = a^2 \mu_{(1)i} \mu_{(1)j} + b^2 \mu_{(2)i} \mu_{(2)j} + c^2 \mu_{(3)i} \mu_{(3)j} = \quad (4.22)$$

$$\begin{pmatrix} a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi & 0 & (a^2 - b^2) \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 & c^2 & c^2 \cos \vartheta \\ (a^2 - b^2) \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi & c^2 \cos \vartheta & c^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) \end{pmatrix}.$$

Корень из детерминанта этого тензора

$$\sqrt{\gamma} = a b c \sin \vartheta.$$

Полный объем пространства В9 равен $16 \pi^2 abc$. При $a = b = c = r/2$ метрика переходит в метрику трехмерной сферы радиуса r .

Обратный метрический тензор выражается через исходные поля Киллинга:

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{a^2} V_{(1)}^i V_{(1)}^j + \frac{1}{b^2} V_{(2)}^i V_{(2)}^j + \frac{1}{c^2} V_{(3)}^i V_{(3)}^j. \quad (4.23)$$

При этом поля $V_{(k)}^i$ перестают быть полями Киллинга этого пространства, но остаются геодезическими, а поля $W_{(k)}^i$ из (4.18) остаются полями Киллинга. Так как коммутационные соотношения полей $W_{(k)}^i$ (4.19) совпадают с коммутационными соотношениями группы вращений, пространство В9 *неявно сферически симметрично*. Это не есть группа вращений вокруг одной точки – пространство не изотропно. Однако наличие этой группы движений позволяет упрощать решение ряда физических задач.

Скалярная кривизна

$$R = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b^2 c^2} + \frac{b^2}{a^2 c^2} + \frac{c^2}{a^2 b^2} \right) \quad (4.24)$$

одинакова во всех точках пространства.

6. Статические поля

Соотношение динамики метрики (4.9) для некоторых динамических метрик, меняющихся с течением времени в инерциальной системе, позволяет оставаться неизменными, стационарными в некоторой неинерциальной системе.

6.1. Статическое поле Бьерна

Важнейший пример такого поля возник при описании работ Нильса Бьерна, и, несмотря на то что эта личность создана лишь воображением, именно это поле оказалось самым главным при описании работ Бьерна, поэтому мы сохраним за ним наименование *поле Бьерна*.

Мы материализовали инерциальную систему в евклидовом пространстве, посыпав ее порошком безмассовых и не взаимодействующих ни друг с другом, ни с другими телами пылинок, относительно которых и определяются координаты тел.

Однако в окрестности Земли, Солнца или другого сферически симметричного тела массы M равномерно рассыпанные пылинки будут падать на это тело под действием тяготения. Если эти частички рассыпали на бесконечности так, что там они покоились, образуя согласованную систему отсчета, то при приближении к массивному телу у этих пылинок появляется радиальная скорость, которую можно определить из закона сохранения энергии:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{kM}{r} = 0; \quad V^r(r) = \sqrt{\frac{2kM}{r}}. \quad (4.25)$$

Это *поле Бьерна*: пространство плоское, но в нем имеется стационарное поле абсолютных скоростей. Сев на такую пылинку, мы оказываемся в инерциальном пространстве или просто — в собственно пространстве, где поле скоростей отсутствует — все пылинки относительно пространства покоятся. Поле скоростей возникает в некоторой системе, относительно которой точки пространства (пылинки) меняют свои координаты. Это неинерциальная система.

7. Динамика Космоса

До сих пор при *материализации инерциальной системы* мы полагали массу частичек, которые мы рассыпали по пространству, равной нулю или же просто пренебрегали гравитационным притяжением между ними. Обратим теперь внимание на модель, где эти частички обладают массой — в пространстве имеется плотность этих частичек $\rho \neq 0$. Гравитационное притяжение приводит к *динамическому изменению расстояний между ними*. Выделим в пространстве сферическую область радиуса r_0 , и точки, лежащие внутри нее, будут иметь сферические координаты с радиусом $0 \leq r \leq r_0$. Наша модель однородна — плотность всюду одинакова и масса

внутри выделенной сферы

$$M(r_0) = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_0^3. \quad (4.26)$$

Для помеченных пылинок здесь все постоянно — и радиус r каждой частички, и масса внутри выделенной сферы, и плотность ρ_0 .

Рассматриваемые пылинки — это не *внешние* по отношению к пространству частички, а пылинки, принадлежащие самому пространству. Следовательно, их координаты абсолютны и с течением абсолютного времени не меняются. С другой стороны, под действием сил взаимного притяжения расстояние между ними должно меняться в соответствии со вторым законом Ньютона. Это противоречие можно снять, введя *зависящий от времени масштаб* $m(t)$, определяющий расстояние $R(t) = m(t) r$ и меняющийся по законам динамики:

$$\ddot{R} = \ddot{m} r = -\frac{k M}{R^2} = -\frac{k M}{m^2 r^2}, \quad \ddot{m} m^2 = -\frac{k M}{r^3} = -\frac{4}{3} \pi \rho_0 = -\frac{C}{2}.$$

Это дифференциальное уравнение на масштаб $m(t)$, в правой части которого стоит отрицательная константа. Его первый интеграл

$$\dot{m}^2 - \frac{C}{m} = C_1. \quad (4.27)$$

В простейшем случае константа интегрирования C_1 равна нулю и уравнение динамики масштаба принимает вид

$$m \dot{m}^2 = C; \quad m = \left(\frac{9}{4} C \right)^{1/3} t^{2/3}.$$

Масштаб является степенной функцией времени.

При этом каждая точка пространства неподвижна, однако расстояния между любыми двумя точками меняются с течением времени пропорционально изменению масштаба. Масштаб меняется от нуля до бесконечности. При масштабе, равном нулю, между любыми двумя точками пространства расстояние равно нулю. Весь мир сжат в точку. Расширение Мира от этой точки называется “Большой взрыв” — Big Bang.

Скорость удаления друг от друга точек пространства, *покоящихся* на неизменном координатном расстоянии l и переменном физическом расстоянии $L = m l$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\dot{m}}{m} (m l) = H L, \quad (4.28)$$

пропорциональна расстоянию между этими точками. Величина $H = \dot{m}/m$ — *постоянная Хаббла*. Она является константой лишь для всех точек пространства в данный момент времени, но от времени зависит:

$$H = \frac{\dot{m}}{m} = \frac{2}{3t}.$$

При t близком к нулю — моменту Большого взрыва — она бесконечна, но с течением времени расширение замедляется.

8. Локальная неинерциальная лаборатория

Бесконечно малая лаборатория — это некоторый бесконечно малый параллелепипед, малый настолько, что *пространство* внутри него является евклидовым.

Внутри лаборатории происходят различные процессы, в частности, движение. Процессы совершаются в едином для всей лаборатории *местном времени*, которое мы будем обозначать буквой $\hat{t}$.

Бесконечно малые размеры лаборатории приводят к необходимости *аналитического продолжения* евклидова пространства до бесконечного — *касательного евклидова пространства*, частью которого является пространство лаборатории. Необходимость в нем возникает, например, при поиске оси вращения, которая может лежать вне лаборатории. Поэтому вне зависимости от структуры пространства снаружи лаборатории описание движений внутри лаборатории можно вести на языке бесконечного евклидова пространства.

Евклидово пространство обладает шестипараметрической группой движений: три сдвига и три вращения. В соответствии с этой группой в лаборатории могут наблюдаться *неинерциальные элементы*:

поле вращения Ω вокруг некоторой оси;

поле ускорения g вдоль некоторого направления.

Порядок бесконечной малости лаборатории определяется не только евклидовостью пространства внутри нее, но и *однородностью* полей ускорения и вращения.

В лаборатории могут двигаться как отдельные малые (по сравнению с размерами лаборатории) тела, так и сравнимые с ней по размерам другие (бесконечно малые) лаборатории.

Вследствие бесконечно малых размеров *первичному* рассмотрению подлежат лишь *бесконечно малые скорости*. По этой же причине приращения скоростей за счет полей вращения и ускорения также бесконечно малы.

Поля вращения и ускорения внутри лаборатории, связанные с динамикой во времени, несмотря на изотропию евклидова пространства, приводят к анизотропии процессов, в частности движений, и экспериментально обнаружимы.

Поле вращения определяется направлением оси вращения и угловой скоростью. В бесконечно малой системе оно однородно и определяется для данной лаборатории единым вектором Ω .

Поле вращения создает *кориолисово ускорение* $w_K = 2[\Omega \times v]$, ортогональное полю вращения и скорости и *центробежное ускорение* $w_c = -[\Omega \times [\Omega \times (r - r_0)]]$. На оси, проходящей через точку r_0 параллельно Ω , центробежное ускорение отсутствует (ось вращения). Точка r_0 может лежать где-то в касательном пространстве и за пределами лаборатории. Поле центробежного ускорения линейно растет в зависимости от расстояния до оси вращения. Составляющая однородного ускорения в плоскости вращения (ортогональной оси вращения) смещает положение оси вращения, не меняя ее направления.

Переменное во времени поле вращения создаст также линейное по координатам поле ускорения $w_m = [\dot{\Omega} \times (r - r_0)]$, которое ортогонально вектору $r - r_0$.

Внутри *первичной* (бесконечно малой) лаборатории могут двигаться другие лаборатории. Их движение относительно исходной лаборатории может быть как равномерным прямолинейным (скорости — бесконечно малые), так и ускоренным и вращательным. В аналитической механике хорошо изучены теоремы сложения движений и вращений (см., например, [84]). Они, как правило, применяются к описанию движения твердого тела, но также применимы для описания полей вращения и ускорения внутри движущихся лабораторий.

Если некоторая лаборатория внутри данной вращается с угловой скоростью ω , то поле вращения внутри нее определяется векторной разностью

$$\Omega' = \Omega - \omega. \quad (4.29)$$

В частности, если $\omega = \Omega$, то поле вращения в движущейся системе отсутствует. Такая система называется *локальной системой без вращения*. В системе без вращения может существовать *поле ускорения*, однородное вследствие бесконечной малости размеров системы и описываемое единым

для всей лаборатории вектором g . Если внутри невращающейся системы движется без вращения, но с ускорением a другая лаборатория, то поле ускорения в ней

$$g' = g - a. \quad (4.30)$$

В частности, если $a = g$, то в последней системе отсутствует и поле ускорения (и поле вращения). Такая система называется *локально инерциальной*. Системы, движущиеся относительно нее без вращения и ускорения (равномерно и прямолинейно), не содержат неинерциальных элементов и также являются локально инерциальными системами.

В подавляющем большинстве случаев физические лаборатории, в которых проводятся эксперименты (изучение эффекта Комптона, сверхпроводимости, выращивание кристаллов), являются неинерциальными — поле тяготения создает поле ускорения. За счет вращения Земли (а также эффекта Лензе–Гирринга) возникает поле вращения. Во вращающемся вокруг Земли искусственном спутнике может присутствовать поле вращения как за счет его собственного вращения, так и за счет *прецессии де Ситтера* и поля Лензе–Гирринга–Керра вращающейся Земли.

Время во всех движущихся (с бесконечно малыми скоростями) лабораториях едино — это *местное время* t первичной лаборатории. Пространство в них также евклидово, так как однородные сдвиги и повороты не меняют метрики евклидова пространства, хотя нужно иметь в виду, что все это относится к бесконечно малым областям.

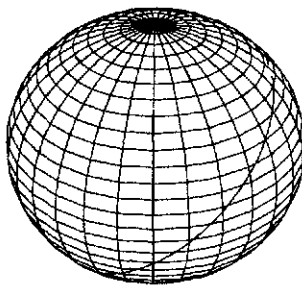
ГЛАВА 5

Динамика в римановом пространстве

Вспомните, что происходит с предметами на пароходе, попавшем в качку.

Л.Д. Ландау, А.И. Китайгородский

Что же изменится в законах динамики, если наше пространство не плоское евклидово, а риманово, искривленное, и не только искривленное, но и меняющееся со временем, да еще по нему мы движемся на качающемся пароходе?



1. Геодезические линии

Рассмотрим *свободное* движение материальной точки в инерциальном (поле скоростей отсутствует) римановом пространстве с метрическим тен-

зором $\gamma_{ij}(x)$. Потенциальная энергия тела равна нулю — движение свободное, и лагранжиан определяется только кинетической энергией:

$$L = T = \frac{m}{2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{m \gamma_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j}{2}. \quad (5.1)$$

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}; \quad \frac{d}{dt} (m \gamma_{ij}(x) \dot{x}^j) = \frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^i} \frac{m \dot{x}^k \dot{x}^j}{2}$$

массу тела можно сократить:

$$\gamma_{ij} \ddot{x}^j + \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^k \dot{x}^j.$$

В левой части выражение

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^k \dot{x}^j$$

из-за симметрии по скоростям. Переносим его в правую часть, получаем

$$\gamma_{ij} \ddot{x}^j = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^k \dot{x}^j.$$

Умножая теперь слева на обратный метрический тензор, получаем справа связность (3.10), через которую теперь выражаются ускорения. Это — уравнение движения свободного тела в искривленном пространстве:

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{kj}^l \dot{x}^k \dot{x}^j = 0. \quad (5.2)$$

Это уравнение называется уравнением *геодезической линии*.

Если от времени t перейти к новому параметру $l = l/v$; $v = \text{const}$, то в каждом слагаемом уравнения появится множитель v^2 , который можно сократить, поэтому и в этом параметре уравнение геодезической линии будет иметь тот же вид (5.2), только точкой будет определяться производная по l .

При движении тела есть еще один параметр — сохраняющаяся во время движения энергия:

$$\frac{m \gamma_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j}{2} = E.$$

Если введенный параметр v выбрать из соотношения $E = m v^2/2$, то в параметре l на геодезической линии будет сохраняться соотношение

$$\gamma_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl} = 1; \quad dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

откуда следует смысл параметра l — длина вдоль геодезической.

Свободное тело движется вдоль геодезической с постоянной скоростью — это обобщение 1-го закона Ньютона.

В зависимости от величины энергии находится *время* прохождения телом пути от одной точки к другой, но траектория движения тела от энергии не зависит.

Уравнение (5.2) определяет движение, в том числе и в плоском пространстве, в том числе и в декартовых координатах. Так как в последнем случае связности равны нулю, уравнение получается очень простым: $\ddot{x}^i = 0$. Это уравнение равномерного и прямолинейного движения. В других координатах уравнения другие, но решение их — та же прямая линия, записанная в других координатах.

Уравнение (5.2) определяет движение одной материальной точки x^i , $\dot{x}^i$ — это координаты и скорость одной точки в данный момент времени. Свободное движение *системы точек* описывается полем скоростей $u^i(x, t)$ — *геодезическим потоком*. С этой точки зрения уравнение (5.2) может быть представлено через ковариантную производную этого поля:

$$\frac{du^i}{dt} = u^j \nabla_j u^i = \frac{dx^j}{dt} \nabla_j u^i = 0. \quad (5.3)$$

Для построения геодезических потоков наиболее естественен метод Гамильтона, следующий из уравнения в частных производных Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} = 1. \quad (5.4)$$

От массы движение свободных частиц не зависит. Как и в случае плоского пространства, уравнения движения — уравнения Гамильтона:

$$p_i = \frac{\partial s}{\partial x^i}; \quad E = -\frac{\partial s}{\partial t}; \quad H = \frac{1}{2} \gamma^{ij} p_i p_j;$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \gamma^{ij} p_j \equiv u^i; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad (5.5)$$

Покажем, что эти уравнения приводят к уже выведенным уравнениям геодезической (5.2). Для этого воспользуемся локально геодезической системой, где производные метрического тензора равны нулю:

$$\frac{du^i}{dt} = \gamma^{ij} \frac{dp_j}{dt} = 0 = u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}.$$

Это то же самое уравнение.

Как и в классическом случае, изменение во времени любой функции координат и импульсов определяется скобками Пуассона, и, как в классическом случае, величина гамильтониана вдоль каждой траектории сохраняется, так как скобки Пуассона его с самим собой равны нулю.

Так как траектория не зависит ни от массы, ни от величины энергии, то для нахождения траектории удобно использовать *приведенный гамильтониан*:

$$2H = \gamma^{ij}(x) p_i p_j = 1. \quad (5.6)$$

Выражая из него одни импульсы через другие и дифференцируя по последним, находятся дифференциальные уравнения траектории.

2. Движение по двумерной сфере

В качестве первого нетривиального примера рассмотрим свободное движение по сфере радиуса r :

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

$$H = \frac{1}{2mr^2} \left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right).$$

Радиус r входит простым множителем как масса, поэтому для нахождения траекторий (зависимости между ϑ и φ) можно рассматривать сферу единичного радиуса.

Угол φ — циклическая переменная (явно не входит в лагранжиан), поэтому сопряженный ему импульс $p_\varphi \equiv l$ является константой на траектории.

$$p_\vartheta^2 + \frac{l^2}{\sin^2 \vartheta} = 1; \quad p_\vartheta = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\sin^2 \vartheta}}.$$

Уравнение траектории — с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{\partial p_\vartheta}{\partial l} = \frac{-l/\sin^2 \vartheta}{\sqrt{1-l^2/\sin^2 \vartheta}};$$

$$d\varphi = \frac{-(l/\sin^2 \vartheta) d\vartheta}{\sqrt{1-l^2/\sin^2 \vartheta}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2-\xi^2}}; \quad \xi \equiv l \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\xi = \sqrt{1-l^2} \sin(\varphi - \varphi_0) = l \operatorname{ctg} \vartheta. \quad (5.7)$$

При $l = 1$ значение $\operatorname{ctg} \vartheta = 0$; $\vartheta = \pi/2$, а угол φ меняется от нуля до 2π — это *экватор* сферы.

Траектории при других значениях l (при $l^2 < 1$) удобно рассмотреть на вложении двумерной сферы в трехмерное евклидово пространство в декартовых координатах:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta.$$

Из уравнения (5.7) при $\varphi_0 = 0$ следует линейная связь между y и z :

$$y \sqrt{1-l^2} = lz.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через ось x и начало координат под углом α к плоскости (x, y) , где интеграл движения l определяет наклон этой плоскости: $\cos \alpha = l$. При $l = 1$ угол наклона $\alpha = 0$ — экватор, как мы видели выше.

Угол $\varphi_0 \neq 0$ определяет угол поворота линии в плоскости (x, y) , через которую проходит эта плоскость. Сечение такими плоскостями сферы образует окружности на сфере — *дуги большого круга*, с помощью движения по сфере, совместимые с экватором.

3. Динамика в неинерциальной системе

Как изменятся уравнения динамики, если система координат является неинерциальной, движущейся относительно инерциальной с полем скоростей $V^i(x^j)$? Нужно обратить внимание на различие постановки вопроса

в классической динамике инерциальных систем в евклидовом пространстве, где говорилось не о поле скоростей, а о скорости движения. Фактически и там речь шла о поле скоростей, но это поле во всех точках было одинаковым — в декартовой системе, удовлетворяя соотношению $\partial_j u^i = 0$, а в произвольных координатах это соотношение переписывается через ковариантные производные:

$$\nabla_j u^i \equiv u^i_{;j} = 0. \quad (5.8)$$

Лагранжиан в неинерциальной системе выражается через скорости относительно абсолютного пространства:

$$L = \frac{1}{2} \gamma_{ij} (\dot{x}^i - V^i(x))(\dot{x}^j - V^j(x)). \quad (5.9)$$

Выражая скорости через импульсы

$$p_i = \gamma_{ij} (\dot{x}^j - V^j); \quad \dot{x}^i = \gamma^{ij} p_j + V^i,$$

строим гамильтониан

$$H = p_i \dot{x}^i - L = \frac{1}{2} \gamma^{ij}(x) p_j p_i + V^i(x) p_i. \quad (5.10)$$

Уравнения Гамильтона определяют геодезические линии:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^{jk}}{\partial x^i} p_j p_k - \frac{\partial V^j}{\partial x^i} p_j.$$

Эти уравнения в локально декартовой системе записываются как

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V^j}{\partial x^i} p_j$$

и для геодезических потоков возвращаются в произвольную систему в ковариантном виде (при γ^{ij} и V^i стационарных — постоянных во времени):

$$\frac{dp_i}{dt} = -V^j_{;i} p_j; \quad \frac{du^i}{dt} = u^j u^i_{;j} - \gamma^{ik} V_{j;k} (u^j - V^j). \quad (5.11)$$

Уравнения геодезических остаются такими же, как и в инерциальной системе, если $V_{j;k} = 0$. Из этого условия следует, что и

$$(\nabla_i \nabla_k - \nabla_k \nabla_i) V_j = -R^s_{jik} V_s = 0.$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы $R_{jik}^s = 0$ — пространство должно быть плоским. Только в плоском пространстве возможно однородное поле геодезических линий — это и есть новое евклидово пространство, движущееся относительно исходного с единой скоростью V .

Если пространство обладает кривизной, то исходная инерциальная система выделена по отношению к другим. Уравнения движения в искривленном пространстве с любым полем скоростей $V^i(x)$ отличаются от уравнений движения в инерциальной системе. В случае наличия у пространства кривизны, инерциальная система экспериментально обнаружима, принципиально отличается от неинерциальных.

4. Поля Киллинга и динамика

Некоторые пространства обладают движениями, определяемыми полями Киллинга, сдвиги по которым не меняют метрики. Как наличие движений сказывается на динамике?

Каждому полю Киллинга $\xi_{(j)}^i(x)$ можно сопоставить линейную по импульсам скалярную функцию $((j))$ — номер этого поля изменяется от 1 до k , где k — число линейно независимых полей Киллинга):

$$f_{(j)} = \xi_{(j)}^i p_i. \quad (5.12)$$

Вычислим через скобки Пуассона производную по времени этих функций:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \{H, \xi^i(x) p_i\} = \frac{1}{2} \xi^i \gamma^{kl}_{,i} p_k p_l - \xi^i_{,k} \gamma^{kl} p_k p_i = \\ &= -\frac{1}{2} (\xi^i_{,k} \gamma^{kl} + \xi^l_{,k} \gamma^{ki} - \xi^l \gamma^{ki}_{,i}) p_k p_i. \end{aligned}$$

Если $\xi^i(x)$ является полем Киллинга, то правая часть этого выражения обращается в нуль и скобка Пуассона обращается в нуль, следовательно, конструкция $\xi^i(x) p_i$ является интегралом движения.

Это частный случай *теоремы Нётер*: каждому полю Киллинга $\xi^i(x)$ соответствует интеграл движения $\xi^i(x) p_i$.

5. Первый закон Ньютона

Если пространство риманово, то первый закон Ньютона нуждается в некоторой корректировке.

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного движения по геодезической линии, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Однако в малой области риманово пространство является почти плоским и, введя в этой малой области декартову систему координат (локально декартову), мы получим равномерное и прямолинейное движения тела. Поэтому старая формулировка Первого закона Ньютона остается в силе, но только для малой области, локально.

6. Равномерное движение трехмерной сферы

Векторы Киллинга евклидова пространства определяют движения такие, что движущееся пространство остается евклидовым. Однако из шести движений евклидова пространства три (по направлению трех осей) являются равномерными и прямолинейными (инерциальными), а три — вращения — неинерциальными.

В этом плане очень интересно изучение движений трехмерной сферы — также шестипараметрических. В ней оказываются также возможны движущиеся инерциальные системы, определяемые инерциальным однородным движением пылинок. Однако они оказываются неравноправными по отношению к покоящейся системе — законы движения в них отличаются от законов движения в покоящейся системе.

По своим геометрическим свойствам трехмерная сфера принципиально отличается от двумерной. Как известно, трехмерная сфера является метрическим многообразием группы $O[3]$, а однопараметрические подгруппы являются одновременно геодезическими потоками и полями Киллинга [21]. Назовем такие поля *геотоками*.

Векторные поля (4.18) μ_α^i и ν_α^i , являющиеся одновременно полями Киллинга и геодезическими потоками, назовем соответственно *левыми* и *правыми геотоками*.

Векторы μ_α^i назовем векторами *левой группы*, а ν_α^i — векторами *правой группы*. Векторы, принадлежащие одной группе, будем называть *односторонними геотоками*, а разным — *разносторонними геотоками*.

Уравнения Киллинга линейны по полям, и любая линейная комбинация полей Киллинга — левосторонних и правосторонних — есть также поле Киллинга.

Уравнения геодезического потока

$$u^i \nabla_i u^j = 0 \quad (5.13)$$

нелинейны, и суперпозиция геодезических потоков уже не является геодезическим потоком. Пусть имеются два геотока u^i и v^i . Их сумма есть вектор Киллинга. Будет ли суммарный поток геодезическим?

$$(u^i + v^i) \nabla_i (u^j + v^j) = u^i \nabla_i u^j + v^i \nabla_i v^j + u^i \nabla_i v^j + v^i \nabla_i u^j = \\ u^i \nabla_i v^j + v^i \nabla_i u^j.$$

Так как эти поля одновременно являются и полями Киллинга, то $u_{i;k} = -u_{k;i}$ и

$$\nabla_i u^j = \gamma^{jk} u_{k;i} = -\gamma^{jk} u_{i;k};$$

$$u^i \nabla_i v^j + v^i \nabla_i u^j = -\gamma^{jk} (u^i v_{i;k} + v^i u_{i;k}) = -\gamma^{jk} \partial_k (u^i v_i).$$

Будет ли сумма геотоков геотоком — это определяется их скалярным произведением.

Теорема 1. *Если скалярное произведение двух геотоков постоянно на всем пространстве, то их сумма также является геотоком.*

Скалярные произведения геотоков внутри каждой группы постоянны:

$$(\mu_\alpha^i \mu_{i\beta}) = \delta_{\alpha\beta}; \quad (\nu_\alpha^i \nu_{i\beta}) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Это обеспечивает на основании теоремы 1 выполнение следующей теоремы:

Теорема 2. *Суперпозиция односторонних геотоков является геотоком.*

Прямой проверкой убеждаемся, что скалярное произведение любых левых и правых геотоков не является константой. Это связано с тем, что при суперпозиции геотоков мы можем распоряжаться лишь шестью константами, а множество значений скалярного произведения на сфере бесконечномерно. Исключением является постоянство скалярных произведений односторонних геотоков.

Отсюда следует

Теорема 3. *Сумма левого и правого геотоков является полем Киллинга, но не является геодезическим потоком.*

Если в каждой точке сферического пространства поместить пылинку и каждой такой пылинке придать скорость, пропорциональную одному

из полей геотоков, то вследствие геодезичности такого поля, двигаясь по инерции, частички будут двигаться вдоль этого поля и само поле скоростей с течением времени меняться не будет.

Так как такое поле скоростей является полем Киллинга, то расстояния между пылинками меняться не будут: в каждый момент времени множество пылинок реализует трехмерную сферу.

Поэтому для реализации инерциальной системы — движущейся в себе трехмерной сферы — нужно брать суперпозицию односторонних геотоков.

Однако по своим механическим свойствам такая движущаяся система отличается от покоящейся. В ней метрика, определяемая движущимися пылинками, такая же, как и неподвижная — метрика трехмерной сферы, — и поля Киллинга поэтому те же самые. Однако в движущейся системе только три геотока — односторонние со скоростью. Векторы Киллинга другой группы уже не являются геодезическими, что определимо экспериментально.

Это очень важный результат: кривизна пространства даже при наличии геодезических движений приводит к единственности абсолютного пространства. Только в евклидовом пространстве имеется вырождение, приводящее к неразличимости равномерно движущихся друг относительно друга систем, сохраняющих метрику пространства.

7. Электрическое и магнитное поля на S_3

Специфическими свойствами в искривленном пространстве обладает не только динамика материальных точек, но и другие физические процессы, например, электродинамические.

Электродинамика в евклидовом пространстве очень часто использует для рассмотрения тех или иных электродинамических процессов *постоянные, однородные* электрическое или магнитное поля. Возможны ли такие поля, если пространство является трехмерной сферой S_3 ?

Однородным поле можно представить, если оно пропорционально какому-то полю Киллинга $\mathbf{n}$ из (4.18):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e(t) \mathbf{n}; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = h(t) \mathbf{n}.$$

Уравнения Максвелла в вакууме

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} + \text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0; \quad \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} - \text{rot } \mathbf{H} = 0; \quad \text{div } \mathbf{E} = 0,$$

с учетом соотношения для ротора поля Киллинга (4.20), приводят к зависимости от времени амплитуд электрического и магнитного полей:

$$\dot{h} + \frac{2c}{r} e = 0; \quad \dot{e} - \frac{2c}{r} h = 0;$$

$$\ddot{h} + \omega^2 h = 0; \quad \ddot{e} + \omega^2 e = 0; \quad \omega = \frac{2c}{r}.$$

Если в начальный момент мы задали однородное электрическое поле E_0 , то с течением времени оно перескакивается в магнитное по гармоническому закону с частотой $\omega = 2c/r$. При этом энергия электромагнитного поля не меняется: $E^2 + H^2 = E_0^2$.

При стремлении радиуса сферы к бесконечности период колебаний $T = 2\pi r/c$ стремится к бесконечности — пространство становится евклидовым, а поля становятся стационарными.

8. Инерциальное движение в пространстве B9

В пространстве B9 поля $\mu_{(k)}^i$ из (4.18) остаются геодезическими, поэтому пылинки могут вдоль них двигаться, однако эти поля уже не являются полями Киллинга, поэтому при равномерном движении частиц метрика пространства B9 деформируется. Например, деформация метрики при сдвиге вдоль поля $\mu_{(3)} = (0, 1, 0)$ — изменяется только угол φ — метрика деформируется пропорционально разности $a^2 - b^2$:

$$\delta \gamma_{ij} = (a^2 - b^2) \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi & 0 & \cos 2\varphi \sin \vartheta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos 2\varphi \sin \vartheta & 0 & \sin 2\varphi \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Полный оборот — изменение угла φ от 0 до π — приводит к возврату к начальной метрике.

Аналогично сдвиг по полю $\mu_{(1)}$ пропорционален разности $c^2 - b^2$ и по полю $\mu_{(2)}$ — разности $c^2 - a^2$.

Поля $\nu_{(k)}^i$ остаются полями Киллинга, но перестают быть геодезическими.

Движение, например, вдоль поля $\mu_{(3)}$ с сохранением метрики возможно в частично вырожденном пространстве B9 при $b = a$ (полностью вырожденное — трехмерная сфера). Здесь наблюдается тот же эффект, что и при движении геодезического потока на сфере: метрика сохраняется, однако

в движущейся системе возникает *поле вращения*

$$\omega^i = -\frac{c}{a^2} \mu_{(3)}^i,$$

так как поля $\mu_{(k)}^i$ в общем случае пространства В9 обладают вихревой частью:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mu_{(1)} &= -\frac{a}{b c} \mu_{(1)}; \\ \text{rot } \mu_{(2)} &= -\frac{b}{c a} \mu_{(2)}; \\ \text{rot } \mu_{(3)} &= -\frac{c}{a b} \mu_{(3)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Описание динамики в движущейся по инерции системе в пространстве В9 в общем случае требует описания не только в дополнительном вихревом поле, но и при переменной метрике пространства.

9. Однородное электромагнитное поле в пространстве В9

Соотношения (5.14) позволяют построить более богатую, чем на трехмерной сфере, систему однородных электромагнитных полей. Эта задача нам пригодится в дальнейшем, поэтому выполним ее на основе методов Лагранжа–Гамильтона. Выберем векторный потенциал вдоль геодезических полей (4.21):

$$A_i(t, \vartheta, \varphi) = A_1(t) V_{(1)i} + A_2(t) V_{(2)i} + A_3(t) V_{(3)i}. \quad (5.15)$$

При этом поля $\mu_{(i)}$ нормированы так:

$$(\mu^2) \equiv \gamma^{ij} \mu_i \mu_j; \quad (\mu_{(1)}^2) = \frac{1}{4\pi a^2}; \quad (\mu_{(2)}^2) = \frac{1}{4\pi b^2}; \quad (\mu_{(3)}^2) = \frac{1}{4\pi c^2}. \quad (5.16)$$

Компоненты электрического и магнитного полей (для упрощения выражений и чтобы не путать скорость света с параметром метрики c , мы будем работать в системе единиц, где скорость света равна единице; время измеряется в метрах):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \dot{A}_1 \mu_{(1)} + \dot{A}_2 \mu_{(2)} + \dot{A}_3 \mu_{(3)}, \\ \mathbf{H} &= -\frac{a}{b c} \mu_{(1)} - \frac{b}{a c} \mu_{(2)} - \frac{c}{a b} \mu_{(3)}. \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$\begin{aligned}
 L &= \int \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi} \sqrt{\gamma} d\vartheta d\varphi d\psi = \\
 &= \frac{abc}{2} \left(\frac{1}{a^2} \left(\dot{A}_1^2 - \frac{a^2}{b^2 c^2} \right) + \frac{1}{b^2} \left(\dot{A}_1^2 - \frac{b^2}{a^2 c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\dot{A}_1^2 - \frac{c^2}{a^2 b^2} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{bc}{a} \dot{A}_1^2 - \frac{a}{bc} A_1^2 \right) + \left(\frac{ac}{b} \dot{A}_2^2 - \frac{b}{ac} A_2^2 \right) + \left(\frac{ab}{c} \dot{A}_3^2 - \frac{c}{ab} A_3^2 \right) \right). \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Это динамическая система с тремя степенями свободы с динамическими переменными A_1, A_2, A_3 и сопряженными им импульсами:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_1} = \frac{bc}{a} \dot{A}_1;$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_2} = \frac{ac}{b} \dot{A}_2;$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_3} = \frac{ab}{c} \dot{A}_3.$$

Отсюда легко выражаются скорости через импульсы:

$$\dot{A}_1 = \frac{a}{bc} p_1; \quad \dot{A}_2 = \frac{b}{ac} p_2; \quad \dot{A}_3 = \frac{c}{ab} p_3$$

и строится гамильтониан

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^3 \dot{A}_k p_k - L = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{bc} (p_1^2 + A_1^2) + \frac{b}{ac} (p_2^2 + A_2^2) + \frac{c}{ab} (p_3^2 + A_3^2) \right). \quad (5.18)$$

Гамильтониан квадратичен по динамическим переменным и импульсам и представляет сумму гамильтонианов трех независимых осцилляторов с частотами

$$\omega_1 = \frac{a}{bc}; \quad \omega_2 = \frac{b}{ac}; \quad \omega_3 = \frac{c}{ab}.$$

Динамические уравнения

$$\dot{A}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \omega_i p_i; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_i} = -\omega_i A_i$$

определяют в каждой моде периодический переход со своей частотой ω_i между электрическим и магнитным полями, но энергия при этом в каждой моде сохраняется.

10. Движение в поле Бьерна

Рассмотрим движение свободного тела в поле Бьерна (4.25). Лагранжиан состоит только из кинетической энергии, поэтому движение не зависит от массы, и ее можно положить равной единице. Так как поле скоростей радиально, запишем лагранжиан в сферической системе координат. Он выражается через *абсолютную скорость* тела — скорость относительно пространства:

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{r} - V^r(r))^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Координата φ — циклическая, сопряженный ей момент постоянен при движении:

$$p_\varphi \equiv l = r^2 \dot{\varphi}; \quad \dot{\varphi} = \frac{l}{r^2};$$

$$p_r \equiv p = \dot{r} - V^r(r); \quad \dot{r} = p + V^r(r).$$

Гамильтониан также постоянен:

$$\begin{aligned} H &= p \dot{r} - \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + V^r(r)^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{2kM}{r} \right) = E. \end{aligned}$$

Это выражение в точности совпадает с (2.20) и приводит к тем же решениям, что и при использовании гравитационного потенциала: движения по окружностям, эллипсам, параболам и гиперболам.

Учет неинерциальности системы при описании движения тел эквивалентен учету гравитационного потенциала в предположении инерциальности системы.

11. Распространение света

Распространение света описывается *уравнением эйконала*, имеющим в инерциальной системе вид

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} - \gamma^{ij} k_i k_j = 0; \quad \omega_0 = \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad \mathbf{k} = \nabla \psi. \quad (5.19)$$

Если метрика статична — не меняется со временем (пока мы рассматриваем только этот случай) — частота света на луче сохраняется. Поэтому ее

можно исключить из уравнения движения, введя $k_i = \frac{\omega}{c} p_i$. Тогда уравнение эйконала переписется в виде

$$\gamma^{ij} p_i p_j = 1.$$

Но это полностью совпадает с выражением для импульсов свободных материальных тел, движущихся в данном римановом пространстве. Поэтому свет в римановом пространстве движется по тем же траекториям, что и материальные точки — по геодезическим линиям.

11.1. “Рыбий глаз” Максвелла

В качестве нетривиальной оптической задачи рассмотрим “рыбий глаз” Максвелла. Максвелл придумал среду с переменным показателем преломления, в которой все лучи, вышедшие из одной точки, собираются в некоторой другой — идеальная фокусирующая среда. Начало координат помещается в точку, в которой показатель преломления максимален, тогда изменение показателя преломления зависит только от радиуса — среда сферически симметрична:

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + r^2/D^2}. \quad (5.20)$$

Здесь D — масштаб скорости изменения показателя преломления. Его можно положить пока равным 1,

$$k^2 = n(r)^2,$$

$$p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} = \frac{n_0^2}{(1 + r^2)^2}.$$

Для нахождения формы луча нужно выразить p_r :

$$p_r = \sqrt{\frac{n_0^2}{(1 + r^2)^2} - \frac{l^2}{r^2}};$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial p_r}{\partial l} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{\frac{n_0^2}{(1 + r^2)^2} - \frac{l^2}{r^2}}} = \frac{-l/(n_0 r^2)(1 + r^2)}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{n_0^2}(1/r + r)^2}}.$$

В числителе стоит дифференциал функции

$$\xi = \frac{l}{n_0} \left(\frac{1}{r} - r \right); \quad d\xi = -\frac{l}{n_0} \left(\frac{1}{r^2} + 1 \right),$$

а выражение под корнем в знаменателе можно преобразовать, используя

$$\left(\frac{1}{r} + r \right)^2 = \left(\frac{1}{r} - r \right)^2 + 4.$$

Дифференциальное уравнение траектории сводится к квадратуре

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - a^2 - \xi^2}};$$

$$a = 4 \frac{l^2}{n_0^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\sqrt{1 - a^2 - \xi^2}},$$

откуда

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{l \left(\frac{1}{r} - r \right)}{\sqrt{n_0^2 - 4l^2}}. \quad (5.21)$$

При замене r на $1/r$ угол $(\varphi - \varphi_0)$ просто меняет знак. Это определяет симметрию луча. Если перейти к декартовым координатам

$$x = r \cos \varphi;$$

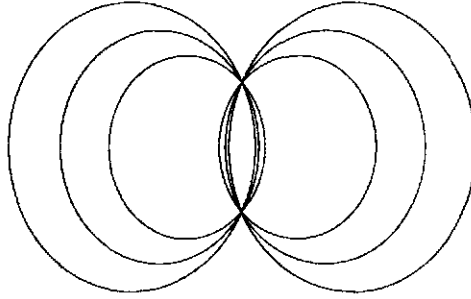
$$y = r \sin \varphi;$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

умножая (5.21) на r , получим

$$y \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{n_0^2 - 4l^2}} (1 - x^2 - y^2).$$

Это уравнения окружностей. Например, при $\varphi_0 = \pi/2$ это семейство окружностей, проходящих через точки $(0, \pm 1)$.



Выявленная симметрия говорит о том, что каждой точке с координатами (x_0, y_0) сопряжена точка $(x_1 = -x_0/(x_0^2 + y_0^2), y_1 = -y_0/(x_0^2 + y_0^2))$ и все окружности, проходящие через точку (x_0, y_0) , обязательно проходят через точку (x_1, y_1) .

Объяснение столь удивительных свойств среды с показателем преломления (5.20) простое: свет распространяется по экстремалиям *оптической длины*

$$h = \int n(\mathbf{r}) dl = \int \sqrt{n^2(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Но этот функционал есть функционал длины в свободном (с единичным показателем преломления) конформно плоском римановом пространстве с метрикой (3.43).

Таким образом, задача о распространении луча в среде с переменным показателем преломления эквивалентна задаче о распространении луча в некотором конформно плоском римановом пространстве. Все двумерные поверхности являются конформно плоскими, поэтому в двумерном случае эти задачи взаимны: распространение света по любой двумерной поверхности математически эквивалентно распространению лучей в среде с переменным показателем преломления.

В трехмерном случае конформно плоские пространства образуют лишь подмножество всех трехмерных римановых пространств. Но в любой размерности сфера является конформно плоским пространством с метрикой (3.43) и построенный Максвеллом показатель преломления (5.20) — это конформный множитель метрики сферы. Оптически сопряженные точки — это диаметрально противоположные точки на сфере, как северный и южный полюса. Все меридианы (геодезические) проходят как через северный, так и через южный полюса.

12. Распространение света вблизи Солнца

Наша система, связанная с Землей, с лабораторией на ней, является неинерциальной — вблизи Солнца имеется поле скоростей Бёрна (4.25), а само пространство плоское.

При переходе от абсолютно покоящейся системы к движущейся относительно нее с полем скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ мы должны подправить производную по времени на ковариантную:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}) \nabla \psi. \quad (5.22)$$

Волновой вектор $\mathbf{k}$ при переходе в неинерциальную систему не меняется, а частота преобразуется по закону

$$\omega_0 = \omega + (\mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{k}). \quad (5.23)$$

Уравнение эйконала при этом приобретает вид:

$$\frac{1}{c^2}(\omega + (\mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{k}))^2 - k^2 = 0. \quad (5.24)$$

В сферической системе координат

$$k_r^2 + \frac{k_\varphi^2}{r^2} - \frac{(\omega + V(r) k_r)^2}{c^2} = 0$$

ω и k_φ являются константами.

Если рассматривается стационарная задача, то можно ввести

$$k_r = \frac{\omega}{c} n; \quad k_\varphi = \frac{\omega}{c} l; \quad n^2 + \frac{l^2}{r^2} - (1 + \beta n)^2 = 0; \quad \beta = \frac{V(r)}{c} = \sqrt{\frac{2kM}{c^2 r}}.$$

Выразим отсюда n :

$$n = \frac{\beta}{1 - \beta^2} \pm \frac{\sqrt{1 - (l/r)^2(1 - \beta^2)}}{1 - \beta^2}.$$

Траектория луча находится из дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial n}{\partial l} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{1 - (l/r)^2(1 - \beta^2)}} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{1 - (l/r)^2(1 - \frac{2kM}{c^2 r})}}.$$

Переходя к переменной $\xi = l/r$, получаем

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2(1 - 2\alpha\xi)}}; \quad \alpha = \frac{kM}{c^2 l}. \quad (5.25)$$

Если положить $\alpha = 0$, это дифференциальное уравнение имеет решение

$$\xi = \frac{l}{r} = \cos \varphi.$$

При изменении φ от $-\pi/2$ до $\pi/2$ оно описывает прямую, проходящую на расстоянии l от центра тяготеющего тела.

Найдем решение уравнения (5.25) в первом порядке по α :

$$\xi = \cos(\varphi - \alpha\varepsilon(\varphi)) \approx \cos \varphi + \alpha\varepsilon \sin \varphi,$$

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = -\sin \varphi + \alpha(\sin \varphi \frac{d\varepsilon}{d\varphi} + \varepsilon \cos \varphi).$$

Возведя в квадрат и подставив в (5.25), где сохраним только линейные по α члены, получим дифференциальное уравнение для ε :

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = -\frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

которое легко интегрируется:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sin \varphi} + \sin \varphi,$$

и окончательно

$$x = \frac{p\varphi}{r} = \cos \varphi + \alpha(1 + \sin^2 \varphi). \quad (5.26)$$

Луч приходит из бесконечности и уходит на бесконечность ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). При этом φ получает малую добавку по отношению к $\pm\pi/2$, где $\sin^2 \varphi \approx 1$, а $\cos(\pm\pi/2 + \delta) \approx \pm\delta$:

$$\delta \approx 2\alpha = \frac{2kM}{Rc^2},$$

если свет двигался по траектории, проходящей на ближайшем расстоянии от тела — его радиуса R . Полный угол отклонения его от прямой складывается из отклонений слева и справа и равен

$$2\delta\varphi \approx \frac{4kM}{c^2 R}. \quad (5.27)$$

Эта формула *в точности совпадает* с формулой общей теории относительности (см. [20, стр. 397, ф. (101.8)]).

Для Солнца $\alpha = 2.25 \cdot 10^{-6}$, что даст полный угол отклонения $1.7''$.

Экспериментально отклонение было измерено во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года экспедицией под руководством А. Эддингтона. Замеренная величина лежала в интервале $0.9''$ – $1.8''$.

12.1. Сравнение с расчетами Золднера 1801 года

Нужно отметить, что отклонение света, как частиц, летящих со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек, в поле тяготения Солнца было рассчитано еще в самом начале XIX века. Однако расчет на основе уравнения эйконала фактически учитывает релятивистский характер распространения света, и поэтому нерелятивистский расчет дает окончательное выражение в два раза меньшее, чем выполненное в соответствии с выражением (5.25).

Еще в 1801 году Золднер [22] реализовал высказанное Лапласом убеждение о том, что свет вблизи тяготеющей массы (звезды, Солнца) будет искривлять свою траекторию – как комета, имеющая на бесконечности скорость c – скорость света. Расчет (сейчас) проще проводить на основе уравнения Гамильтона–Якоби для частицы с массой единица, так как траектория движения в поле тяготения от массы не зависит.

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{kM}{r}.$$

В сферической системе координат

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) - \frac{kM}{r} = \frac{c^2}{2}, \quad (5.28)$$

где l – интеграл движения момент, сопряженный углу поворота по орбите φ , а правая часть – энергия на бесконечности для частицы, движущейся со скоростью света.

Выражая отсюда p_r :

$$p_r = \sqrt{c^2 - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2kM}{r}},$$

находим уравнение траектории

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial p_r}{\partial l} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{c^2 - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2kM}{r}}}; \quad d\varphi = \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - \xi^2 + 2\alpha\xi}}; \quad \xi \equiv \frac{l}{r}; \quad \alpha = \frac{kM}{l}.$$

Полученное соотношение легко интегрируется:

$$\xi = \alpha - \sqrt{c^2 + \alpha^2} \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Бесконечному удалению частицы ($r = \infty$) соответствует точка $\xi = 0$:

$$\cos(\varphi_\infty - \varphi_0) = \frac{\alpha}{\sqrt{c^2 + \alpha^2}}.$$

Частица приходит из бесконечности (угол $\varphi_\infty = \varphi_1 = 0$) и уходит на бесконечность (угол $\varphi_\infty = \varphi_2$, который и нужно найти).

При отсутствии притягивающего центра угол меняется от нуля до π , что определяется взятием отрицательного знака у квадратного корня.

При $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_0) &= \frac{\alpha}{\sqrt{c^2 + \alpha^2}}; \quad \sin \varphi_0 = -\frac{c}{\sqrt{c^2 + \alpha^2}}; \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_0) &= \cos \varphi_2 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_0 = -\frac{\alpha}{\sqrt{c^2 + \alpha^2}}. \end{aligned}$$

В линеином приближении по малому углу отклонения φ_2

$$\cos \varphi_2 \approx 1; \quad \sin \varphi_2 \approx \varphi_2,$$

откуда

$$\varphi_2 = \frac{2\alpha}{c} = \frac{2kM}{lc}. \quad (5.29)$$

Момент l можно определить на бесконечности. Для частицы с массой 1 и скоростью c , движущейся параллельно оси, направленной на центр на расстоянии R (радиус Солнца), момент равен $l = cR$ и формула (5.29) определяет угол отклонения

$$\Delta\varphi = \frac{2kM}{Rc^2}, \quad (5.30)$$

что ровно в два раза меньше величины, определяемой выражением (5.27).

ГЛАВА 6

Теория относительности

Свойства пространства-времени являются объективными, определяемыми самой природой и не зависящими от нашего произвола.

В. А. Фок

Даже если наше пространство является искривленным, римановым, в доступной наблюдениям достаточно малой области оно в хорошей степени является евклидовым — малая область риманова пространства подчиняется евклидовой геометрии. Ведь долгое время, пока люди имели дело с расстояниями много меньшими радиуса Земли, они полагали, что Земля плоская. Поэтому, пока речь идет о не очень больших размерах, пространство можно полагать плоским. При этом в ньютоновой механике возник *парадокс Али-Бабы*: из-за равноправия уравнений динамики Ньютона во всех равномерно и прямолинейно движущихся друг относительно друга евклидовых пространствах абсолютное пространство затерялось, стало неразличимо. Пространств стало бесконечно много. Но время было едино, время было абсолютным.

Теория относительности (впоследствии получившая наименование *специальная теория относительности* — СТО) распространила этот парадокс и на время. Ее важнейшим открытием является открытие того факта, что у движущегося наблюдателя физические процессы протекают в собственном времени, отличном от времени лабораторной системы. Времен, как и пространств, стало бесконечно много.

По теории относительности написано множество популярных и глубоко научных книг, поэтому здесь мы акцентируем внимание лишь на тех явлениях СТО, которые выявляют особенности течения времени наблюдателей, движущихся как инерциально, так и с ускорением, чтобы понять — действительно ли теория относительности *запретила* глобальное время.

1. Преобразования Лоренца

В процессе создания теории относительности важную роль сыграл эксперимент Майкельсона (Альберт Майкельсон, 1852–1931), в котором он пытался определить *абсолютное движение Земли*. Мы не будем здесь описывать эксперимент в деталях — он многократно изложен в литературе, посвященной теории относительности. Важно, что Майкельсон этого движения не обнаружил, хотя Земля вращается вокруг Солнца с линейной скоростью около 30 км/с, что составляет 10^{-4} от скорости света.

Гендрик Антоон Лоренц (1853–1928) чтобы объяснить отрицательный результат эксперимента Майкельсона, предположил в 1893 году, что размеры тела, движущегося со скоростью V , в направлении движения сокращаются в $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ раз. Для объяснения эксперимента Майкельсона этой гипотезы оказалось достаточно. Однако еще ряд электромагнитных экспериментов, призванных замерить абсолютное движение Земли, также дали отрицательный результат — как будто Земля неподвижна. Анри Пуанкаре (1854–1912) в 1900-м году выдвигает мысль, что природа устроена так, что абсолютного движения в принципе нельзя обнаружить.

Поэтому Лоренц ставит задачу — не только найти изменения координат, объясняющие частный электромагнитный процесс — распространение света в эксперименте Майкельсона, — но и значительно более широкую: найти преобразования к движущейся системе, при которых уравнения Максвелла остаются неизменными. Если в движущейся системе уравнения электродинамики остаются такими же, как и в неподвижной, то никакие электромагнитные эффекты, вроде бы связанные с движением системы, не могут быть обнаружены. В 1904 году Лоренц пишет работу, в которой показывает, что для решения этой задачи нужно еще в движущейся системе преобразовывать не только координаты, но и время. Эти преобразования Пуанкаре назвал *преобразованиями Лоренца*.

В 1905 году молодой тогда Альберт Эйнштейн (1879–1955) показывает, что проблема не в уравнениях Максвелла, а в свойствах пространства и времени в (локальных) системах наблюдателей, движущихся друг относительно друга. Вместо сложных вычислений Лоренца с уравнениями Максвелла он увидел центральный результат, который содержится в преобразованиях Лоренца: постоянство скорости света в движущихся системах и необходимость преобразования времени для обеспечения этого постоянства. Свет в движущейся системе движется с такой же скоростью — универсальной скоростью c , — как и в неподвижной в любом направлении. Тогда не нужно никаких вычислений для объяснения отрицательного эксперимента

Майкельсона: времена прохождения светом различных путей в различных направлениях в точности такие же, как в неподвижной системе.

В классической механике, если какое-то движение в системе, движущейся относительно некоторой базовой системы со скоростью V , происходит в том же направлении со скоростью u' , то относительно самой базовой системы он происходит со скоростью $u = u' + V$. Этот результат с неизбежностью получается, если время в обеих системах одно и то же. Используя идею Лоренца о преобразованиях времени, Эйнштейн довольно просто получает преобразования Лоренца.

Координаты в движущейся системе будем обозначать штрихом. Преобразования дифференциалов координат и времени линейны. Преобразование координаты x (вдоль направления движения):

$$dx' = dx - V dt.$$

Неподвижная относительно движущейся системы точка $dx' = 0$ движется в базовой системе со скоростью V . Чтобы модифицировать закон сложения скоростей до сохранения постоянства скорости света, Эйнштейн пользуется идеей Лоренца о преобразованиях времени:

$$dt' = dt - \beta dx.$$

При таких преобразованиях для движения относительно базовой системы со скоростью $u = dx/dt$ скорость этого движения относительно движущейся системы будет

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u - V}{1 - \beta u}.$$

Задача — получить $u' = c$ при $u = c$, используя введенный неопределенный параметр β :

$$c = \frac{c - V}{1 - \beta c}.$$

Отсюда вычисляется $\beta = V/c^2$, и формула сложения (точнее, в данном случае — вычитания) скоростей принимает вид:

$$u' = \frac{u - V}{1 - uV/c^2}. \quad (6.1)$$

При скоростях $V \ll c$ добавкой к единице в знаменателе можно пренебречь — получается классическая формула $u' = u - V$. Если же $u = c$, то и $u' = c$ — скорость света одинакова во всех системах.

Однако при этом неподвижная система остается выделенной, неравноправной по сравнению с движущейся. Запишем преобразования координат и времени в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -V/c^2 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

Обратные преобразования от движущейся системы к неподвижной получаются через обратную матрицу, элементы которой в знаменателе содержат детерминант матрицы (обозначим его $1/\gamma^2 = 1 - V^2/c^2$):

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & V/c^2 \\ V & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Выход очевиден: преобразования симметричны (с естественной заменой V на $-V$), если детерминант матрицы преобразования равен единице, чего можно добиться, умножив преобразование и координаты и времени на $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, после чего эти преобразования принимают вид:

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z. \quad (6.2)$$

Сюда добавлено отсутствие преобразований координат в направлении, перпендикулярном движению. Это и есть *преобразования Лоренца*. Обратные преобразования

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (6.3)$$

получаются заменой $-V$ на $+V$.

При $V/c \rightarrow 0$ преобразования (6.2) переходят в свой асимптотический вид

$$t' = t; \quad x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z$$

— *преобразования Галилея*.

2. Геометрия Минковского

Исключительную важность преобразований Лоренца сразу оценил А. Пуанкаре. Он показал, что преобразования Лоренца образуют группу, сохраняющую инвариант

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (ic dt)^2. \quad (6.4)$$

Это элемент длины в четырехмерном евклидовом пространстве, три измерения в котором связаны с пространственными координатами, а четвертое определяется временем, умноженным на скорость света, да еще и на мнимую единицу.

В 1908 году математик Герман Минковский (1864–1909) показал, что преобразования Лоренца описывают геометрию многообразия совершенно нового типа — *псевдоевклидову геометрию*. Он возвел в квадрат мнимую единицу (которую Пуанкаре вставил, чтобы добиться формального равноправия всех четырех координат) и получил *инвариант преобразования Лоренца*:

$$ds^2 = (c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (6.5)$$

Введя четвертую (нулевую) координату $x^0 = ct$, он привел преобразования Лоренца к простому виду

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1); \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad (6.6)$$

где

$$\beta = \frac{V}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

— безразмерные коэффициенты.

Инвариант Минковского можно записать в виде

$$ds^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta; \quad \alpha, \beta = 0 \dots 3, \quad (6.7)$$

через *метрический тензор Минковского*

$$(\bar{g}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

определяющий метрические свойства *пространства Минковского*.

Знакоопределенность метрики допускает качественно три различных типа интервалов:

- 1) $ds^2 > 0$ — времениподобные;
- 2) $ds^2 < 0$ — пространственноподобные;
- 3) $ds^2 = 0$ — изотропные.

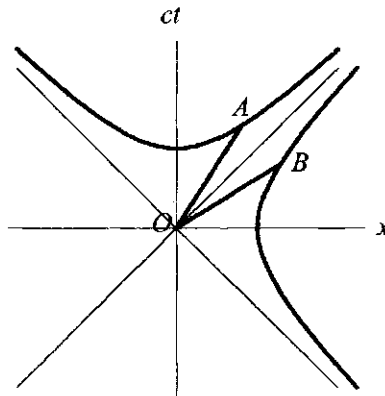


Рис. 6.1

Преобразования Лоренца меняют координаты и время одной и той же *мировой точки* при переходе из одной системы в другую, движущуюся относительно первой со скоростью V . Множество координат одной и той же точки в различных системах, движущихся с различными скоростями (вдоль оси x только), образует гиперболу (см. рис. 6.1) $(ct)^2 - x^2 = (ct_0)^2$ для времениподобного отрезка в пространстве-времени; гиперболу $x^2 - (ct)^2 = x_0^2$ для пространственноподобного отрезка и две прямые, определяющие распространение света $x = \pm ct$ для изотропного отрезка.

При учете всех трех пространственных координат (включая y и z) рассмотренные выше линии переходят в трехмерные многообразия. Изотропные направления образуют *световой конус*

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (6.9)$$

который и делит все качественно различные направления в четырехмерном пространстве.

Для времениподобных направлений — двуполостный гиперболоид с полостями внутри верхней и нижней части светового конуса

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct_0)^2$$

и для пространственноподобных — однополостный гиперболоид

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = l^2,$$

охватывающий световой конус.

Такая структура пространства определяет *принцип причинности*: в различных системах точка B , отделенная от точки O пространственно-подобным интервалом, может оказаться по времени как позже точки O , так и раньше ее. Поэтому она *не может причинно воздействовать на события в точке O* (и наоборот). Точка же A при любых преобразованиях Лоренца всегда остается по времени *позже* точки O , поэтому события в точке O могут причинно воздействовать на события в точке A . События в точке O могут причинно воздействовать лишь на верхнюю внутренность светового конуса.

Пространство Минковского изотропно локально, но неизотропно глобально: непрерывные преобразования Лоренца переводят одно пространственноподобное направление в другое (то же и для времениподобных направлений), но никаким вещественным преобразованием Лоренца нельзя перевести времениподобное направление в пространственноподобное или изотропное.

Если ввести гиперболический угол χ такой, что $\text{th } \chi = V/c$, то преобразования Лоренца (6.6) можно выразить через этот угол:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \text{ch } \chi; \quad \gamma \frac{V}{c} = \text{sh } \chi;$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \chi & \text{sh } \chi \\ \text{sh } \chi & \text{ch } \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *ортогональны*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a_0 b_0 - a_1 b_1 = 0; \quad \frac{a_1}{a_0} = \frac{b_0}{b_1}. \quad (6.11)$$

Если вектор $\mathbf{a}$ времениподобен, то ортогональный ему вектор $\mathbf{b}$ — пространственноподобен. Изотропный вектор ортогонален сам себе. Его проекции на оси ct и x одинаковы.

При отображении двумерного пространства Минковского на двумерное евклидово пространство (лист бумаги) имеются некоторые особенности (рис. 6.1). Оси ct и x *ортогональны друг другу*. Для движущегося со скоростью V тела его ось времени ct' наклонена к оси ct под углом α , так что $\text{tg } \alpha = V/c$. Пространственная ось x' движущегося тела повернута на тот же угол α к оси x , но, в отличие от евклидовой геометрии, *навстречу* своей оси времени, так что световой луч OC всегда делит угол между этими осями пополам — в этом и проявляется *инвариантность скорости света*.

Геометрия Минковского во многом подобна евклидовой геометрии, однако законоопределенность интервала вносит в геометрию свою специфику. В геометрии Минковского линейные трехмерные многообразия, ортогональные времениподобным векторам, являются трехмерными евклидовыми пространствами. Ортогональные же пространственноподобным векторам образуют трехмерное пространство Минковского, в котором повторяется то же разделение: линейные двумерные многообразия, ортогональные времениподобным векторам, являются двумерными евклидовыми пространствами (плоскостями), а ортогональные пространственно-подобным векторам образуют двумерные плоскости Минковского.

Треугольники в плоскости Минковского имеют несколько качественно различных типов:

- 1) времениподобные, все стороны которых времениподобные;
- 2) пространственноподобные, все стороны которых пространственноподобные;
- 3) смешанные, у которых одна сторона (или две) времениподобные и две (или одна) — пространственноподобные.

Первый тип интересен тем, что в нем *теорема о длине стороны треугольника*, в евклидовой геометрии, утверждающая, что длина любой стороны треугольника меньше суммы двух других сторон, утверждает прямо противоположное: *любая сторона такого треугольника короче суммы двух других сторон*.

Из варианта этой теоремы для евклидова пространства следует, что прямая линия является кратчайшей среди всех кривых, соединяющих две точки, а в геометрии Минковского следует обратное: времениподобная прямая, соединяющая две точки, является *наидлиннейшей* среди всех времениподобных кривых, соединяющих эти же точки.

Любой движущийся наблюдатель относительно себя неподвижен, поэтому интервал, который у него набегает с точки зрения другого наблюдателя за счет как течения времени, так и перемещения в пространстве, с его точки зрения растет только за счет его *собственного времени* τ :

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c d\tau. \quad (6.12)$$

Теорема о наибольшей длине прямой приводит к *парадоксу близнецов*: если один из близнецов движется по инерции — по времениподобной прямой в пространстве Минковского между двумя мировыми точками, а другой

совершает *неинерциальное* движение между этими же точками — движется по кривой в пространстве Минковского, то время, прошедшее у инерциального наблюдателя пройдет больше, чем у неинерциального. Эта теорема чисто кинематическая, даже чисто геометрическая. Она не апеллирует к физическим явлениям, связанным с ускорением у неинерциального наблюдателя, она только геометрически определяет длину прямой и кривой линий (собственное время). Часто при критике парадокса близнецов пытаются их поменять местами, но по условию задачи они явно неравноправны: лишь первый движется по инерции. Если же оба совершают инерциальное движение между двумя точками в пространстве Минковского, то они движутся по одной и той же прямой (через две точки проходит единственная прямая) и время у них проходит одно и то же.

Однако далее мы увидим, что если пространство Минковского имеет нетривиальную топологию — между двумя точками можно провести несколько прямых, — то парадокс близнецов наблюдаем и для инерциально движущихся наблюдателей, выделяя одного из них с наибольшим временем, определяющим глобальное время в этой системе.

3. Мини-глобальная инерциальная система

Равноправие инерциальных систем, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью, математически выраженное в геометрии Минковского, привело к формулировке *принципа относительности*: в пространстве-времени нет выделенного направления времени. Все направления внутри светового конуса равноправны.

Однако, когда экспериментатор работает с быстрыми частицами, либо в камере ускорителя, либо регистрируя космические лучи, он оперирует временем в своей (евклидовой) лаборатории (t). Если частица движется по отношению к лаборатории, собственное время частицы τ пересчитывается через интервал (6.12):

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}}. \quad (6.13)$$

Классическим примером проявления собственного времени является наблюдение в космических лучах π -мезонов, собственное время жизни которых, определенное в ускорителях, около 10^{-8} секунды. Даже если бы π -мезон двигался со скоростью света ($c = 3 \cdot 10^8$ м/сек.), за это время он смог бы пролететь лишь около трех метров, а рождаются они на высоте около 100 километров от поверхности Земли. Поначалу даже полагали, что

π -мезоны в космических лучах и в ускорителях — разные частицы. Однако учет различия времен, определяемого теорией относительности, ставит все на свои места: 10^{-8} секунды — это собственное время жизни τ , которому при скоростях движения, близких к скорости света, по формуле (6.13) соответствует несравненно большее время лабораторной системы. Эта формула определяет скорость частицы, живущей какое-то большое время Δt в лабораторной системе. Проходя за собственное время $\Delta\tau \approx 10^{-8}$ секунды путь $l \approx 10^5$ м, частица проходит этот путь в лабораторной системе за время

$$\Delta t = \sqrt{\Delta\tau^2 + \frac{l^2}{c^2}}.$$

При больших разностях времен скорость ее движения чуть меньше скорости света:

$$v = \frac{l}{\Delta t} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta\tau}{l}\right)^2}} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta\tau}{l}\right)^2\right).$$

При том же малом собственном времени жизни по отношению к лабораторной системе частица может пройти сколь угодно большой путь при соответственном приближении скорости движения к скорости света.

Рассматривая множество движущихся частиц, каждая из которых имеет собственное время, исследователь приводит их времена и пройденные пути в собственную, лабораторную систему, являющуюся по отношению к рассматриваемым в ней процессам *мини-глобальной системой с квазиабсолютным пространством и квазиабсолютным временем*. Теория относительности лишь определяет, что, например, в лаборатории на противоположной стороне Земли, движущейся по отношению к первой за счет вращения Земли вокруг своей оси, соотношения путей, времен и скоростей будут точно такими же.

Особенно необходимо приведение всех эффектов в *мини-глобальную систему* наблюдателя при изучении ускоренных движений.

4. Движение с ускорением

Движение с ускорением исследовано в фундаментальном труде Минцера, Торна и Уилера [23]. Они показывают, что преобразования Лоренца от координат и времени лабораторной системы в ускоренно движущуюся

с ускорением g имеет смысл лишь в пространственной области, ограниченной в направлении ускорения размерами, меньшими c^2/g . Хотя в любой реальной системе этот размер громаден, сам факт *отсутствия глобальной системы движущегося наблюдателя* очень существен.

Движение с ускорением — это непрерывное изменение скорости движения V в каждый бесконечно малый промежуток времени на некоторую величину δV в соответствии с релятивистской формулой сложения (6.1):

$$V' = \frac{V + \delta V}{1 + \frac{V \delta V}{c^2}}. \quad (6.14)$$

При $\delta V \rightarrow 0$ в линейном приближении по δV это выражение приводится к виду

$$V' \approx (V + \delta V) \left(1 - \frac{V \delta V}{c^2} \right) \approx V + \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \delta V. \quad (6.15)$$

Инвариантное равноускоренное движение — это когда в собственном времени движущегося тела приращение скорости $\delta V = a d\tau$ не зависит от момента собственного времени: a — постоянное ускорение. Тогда в лабораторной системе

$$dV = V' - V = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) a d\tau.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dV}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = a d\tau; \quad \frac{V}{c} = \text{th} \left(\frac{a\tau}{c} \right) = \text{th} \chi; \quad \chi = \frac{a\tau}{c}.$$

Постоянная интегрирования выбрана так, что $V = 0$ при $\tau = 0$.

Интегрируя теперь соотношение

$$V(\tau) = \text{th} \left(\frac{a\tau}{c} \right) = \frac{dx(\tau)}{dt(\tau)}; \quad d\tau = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2},$$

находим уравнение траектории:

$$x = \frac{c^2}{a} \text{ch} \frac{a\tau}{c}; \quad ct = \frac{c^2}{a} \text{sh} \frac{a\tau}{c}.$$

На рис. 6.2 эта траектория (псевдоокружность) представляется гиперболой.

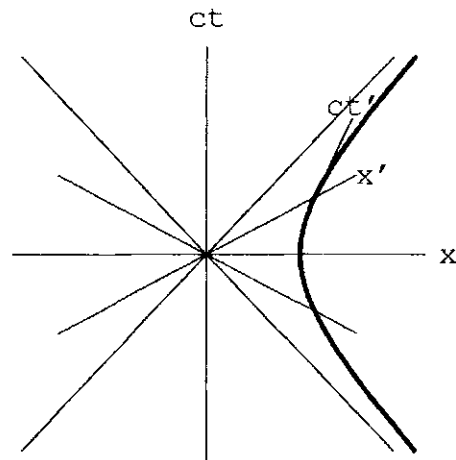


Рис. 6.2.

Ось собственного времени равноускоренного тела всегда направлена по касательной к траектории и по мере ускорения меняет свое направление в мини-глобальной системе. Ортогональные к ней в каждый момент оси собственного пространства пересекаются в одной точке (центре псевдоокружности, от которого каждая точка траектории отделена одинаковым интервалом — радиусом псевдоокружности c^2/a) и, как видно из рисунка, не покрывают все пространство-время мини-глобальной системы. Преобразованные по формулам Лоренца пространственные координаты имеют какой-то физический смысл лишь в ближайшей окрестности тела $|\Delta x| \ll c^2/a$.

Приведение всех наблюдаемых в лабораторную систему необходимо при рассмотрении эффектов, связанных с вращательным движением. Наиболее принципиальными эффектами вращательного движения являются эффект Саньяка и прецессия Томаса.

5. Эффект Саньяка

Наиболее показателен для понимания *локальности* системы (пространства и времени) неравномерно движущегося наблюдателя — эффект Саньяка. Саньяк задумал свой эксперимент как проверку формулы сложения скоростей. Во вращающейся системе в двух противоположных направлениях распространяются два луча с одинаковой скоростью c относительно неподвижного наблюдателя. Однако (по гипотезе Саньяка) во вращающейся

системе они имеют скорости $c + V$ и $c - V$ и, проходя за полный оборот один и тот же путь l , затрачивают на это разное время:

$$t_- = \frac{l}{c - V}; \quad t_+ = \frac{l}{c + V}.$$

Разность этих времен

$$\Delta t = t_- - t_+ = \frac{2lV}{c^2 - V^2} \approx \frac{2lV}{c^2} = \frac{4\pi R^2}{c^2} \Omega \quad (6.16)$$

прекрасно согласуется с экспериментально замеренной по сдвигу интерференционных полос величиной.

Казалось бы, этот результат действительно подтверждает нерелятивистскую формулу сложения скоростей. Однако эксперименты Б. Погани при распространении света в среде с некоторым показателем преломления n , относительно которой свет движется со скоростью c/n , приводят к модификации формулы (6.16) — замене в ней c на c/n :

$$\Delta t = n^2 \frac{4\pi R^2}{c^2} \Omega. \quad (6.17)$$

Величина сдвига должна увеличиваться в n^2 раз, однако эксперименты Погани показали независимость сдвига от величины показателя преломления, то есть от скорости распространяющегося сигнала.

Этот простой факт — независимость разности времен от скорости сигнала — объясняли френелевским “коэффициентом увлечения эфира”, однако именно этот результат следует из специальной теории относительности без каких-либо дополнительных гипотез.

5.1. Цилиндр Минковского

Будем полагать, что свет (или какой-то другой материальный процесс) распространяется по круговой орбите радиуса R в системе, вращающейся с угловой скоростью Ω . В описании процесса распространения принимают участие лишь две переменные: координата в направлении распространения $x = R\phi$ и время t , образуя двумерное многообразие — цилиндр Минковского. Метрика на нем индуцирована метрикой в пространстве Минковского:

$$dl^2 = c^2 dt^2 - R^2 d\phi^2 = c^2 dt^2 - dx^2; \quad dx = R d\phi, \quad (6.18)$$

то есть является метрикой двумерного пространства Минковского.

Однако это многообразие не является плоскостью Минковского — обход вдоль оси x приводит в ту же точку, то есть многообразие является цилиндром.

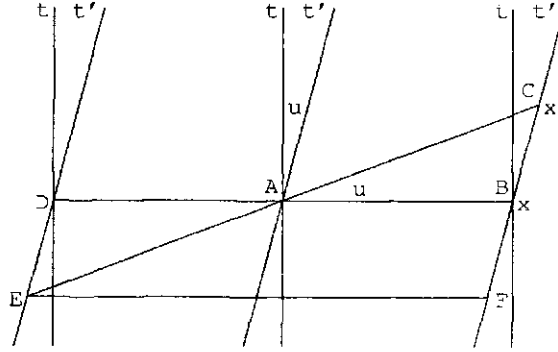


Рис. 6.3.

Отобразим его на плоскость Минковского (см. рис. 6.3). Ось времени лабораторной системы t (вдоль которой откладывается величина ct) является образующей цилиндра и на рисунке она представлена в трех экземплярах: некоторый исходный, проходящий через точку A , и два его образа, проходящие через точки B и D — при обходе цилиндра вправо и влево соответственно. Ось времени вращающейся системы t' (ct') по отношению к оси t наклонена под углом u . На евклидовом листе бумаги $\operatorname{tg} u = v/c \equiv \beta$, а на плоскости Минковского $\operatorname{th} u = \beta$. На цилиндре же ось t' образует винтовую линию, пересекая ось времени t бесконечное число раз с периодом (в лабораторной системе) $T = 2\pi/\Omega$, где Ω — угловая частота вращения.

Линия одновременности лабораторной системы — ось x . Она имеет длину $l = 2\pi R$ и лежащие на ней точки A , B и D представляют одну и ту же физическую точку.

Линия одновременности вращающейся системы — ось x' — наклонена к оси x на тот же угол u и на цилиндре также образует винтовую линию, многократно пересекая ось времени t через период:

$$\frac{c\Delta t}{2\pi R} = \frac{V}{c} = \frac{R\Omega}{c}; \quad \Delta t = \frac{2\pi R^2}{c^2}. \quad (6.19)$$

Пересечение собственной оси времени линией одновременности вращающейся системы также происходит многократно. На рисунке это отрезки BC — при сдвиге на один оборот вправо и DE — при сдвиге влево.

Угол ACB — прямой (оси t' и x' взаимно ортогональны), поэтому в треугольнике ACB сторона AB является гипотенузой, а катет

$$BC = c \Delta_1 t' = AD \operatorname{sh} u = 2\pi R \frac{R\Omega}{c}. \quad (6.20)$$

Разность во времени вращающейся системы пересечения линии одновременности x' с осью t' при сдвигах на один оборот вправо — точки C и влево — точки E определяется отрезком CF , инвариантная длина которого равна удвоенной длине отрезка BC :

$$\Delta t' = \frac{2BC}{c} = \frac{4\pi R^2}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \Omega. \quad (6.21)$$

Таким образом, собственное пространство во вращающейся системе ограничено длиной отрезка $AC = 2\pi R/\gamma$. Выход за это ограничение приводит к многозначности значения собственного времени.

5.2. Эффект Саньяка

Однако что же будет, если мы все-таки выйдем за это ограничение? Выпустим во вращающейся системе два сигнала, распространяющихся относительно нее с одинаковой скоростью w в двух противоположных направлениях.

Соответствующая картина на развертке цилиндра Минковского представлена на рис. 6.4. Сигналы испущены в точке A и вновь пересекаются с осью t' в точках K и L . Несмотря на видимое различие на евклидовом листе бумаги, на плоскости Минковского треугольники AMK и AML равны: углы обоих треугольников в вершине M прямые, сторона AM общая, а отрезки MK и ML равны. Скорость движения сигналов относительно вращающейся системы определяет равные углы KAM и MAL , гиперболический тангенс которых определяется через

$$\frac{w}{c} = \frac{KM}{AM} = \frac{ML}{AM} = \frac{\Delta x'}{c \Delta t'}. \quad (6.22)$$

Треугольник LKN равен треугольнику CEF , поэтому сдвиг во времени вращающейся системы между точками L и K (отрезок LN) равен отрезку CF , то есть определяется выражением (6.19) вне зависимости от скорости распространения сигнала w . Выражение (6.19) и определяет сдвиг по времени вращающейся системы в эксперименте Саньяка. При изменении

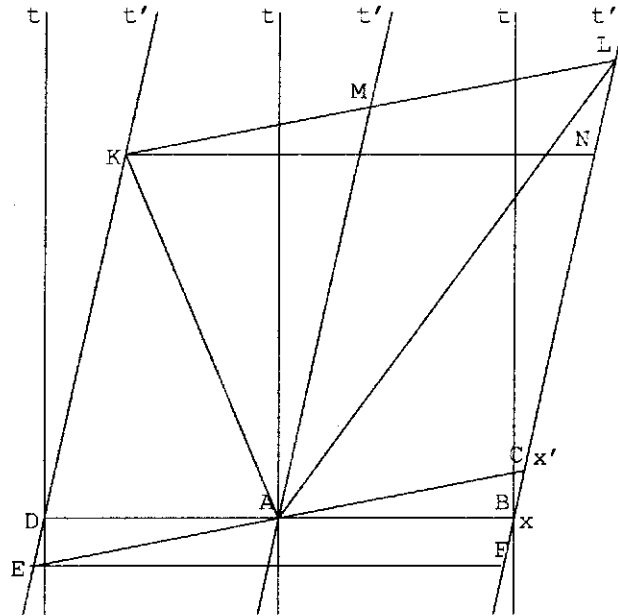


Рис. 6.4.

скорости сигналов w отрезок KL поднимается выше или ниже, оставаясь все время параллельным отрезку EC , так что сдвиг по времени оказывается независимым от этой скорости.

Вследствие этой независимости можно полагать, что рассмотрение в предыдущем параграфе отрезка одновременности в движущейся системе EC проведено для сигналов, распространяющихся с бесконечной скоростью.

Важнейший вывод для дальнейшего состоит в том, что даже в плоском пространстве Минковского у неинерциально движущегося наблюдателя пространство определено лишь в малой, локальной области.

5.3. Снова парадокс близнецов

На “цилиндре Минковского” просто демонстрируется и “парадокс близнецов”. Если один наблюдатель покоится (движется вдоль оси ct — образующей цилиндра), а другой движется равномерно относительно него

со скоростью V , то через время неподвижного наблюдателя

$$\Delta t = \frac{2\pi R}{V}$$

они встретятся, при этом у движущегося набегит время

$$\Delta t' = \sqrt{\Delta t^2 - \left(\frac{2\pi R}{c}\right)^2} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

На цилиндре Минковского покоящийся наблюдатель явно выделен: до встречи с движущимся у него проходит наибольшее время.

Таким образом, несмотря на то что метрика во всех точках цилиндра — метрика Минковского, — можно *экспериментально* выделить покоящегося наблюдателя как проживающего наибольшее время до повторной встречи с любым другим, движущимся по инерции.

6. Прецессия Томаса

Если тело равномерно движется по окружности со скоростью $V = v c$, то поворачивающееся по окружности ускорение нормально скорости.

Мы рассмотрим только плоское равномерное движение по круговой орбите, при котором меняются лишь три компоненты: (t, x, y) , поэтому любой вектор является трехмерным и из трех векторов составлен репер движущейся системы, который мы будем представлять в виде матрицы $[R]$, столбцы которой представляют реперные векторы (τ, k, n) . Чтобы отличить ее от преобразований Лоренца, левый и правый ограничители ее различны:

$$[R] = \begin{pmatrix} \tau_0 & k_0 & n_0 \\ \tau_x & k_x & n_x \\ \tau_y & k_y & n_y \end{pmatrix}.$$

Для тела, движущегося со скоростью V , будем придерживаться обозначений

$$\beta = \frac{V}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \alpha = \beta \gamma; \quad \gamma^2 - \alpha^2 = 1.$$

Если тело движется с ускорением, то за бесконечно малый отрезок времени бесконечно малое изменение скорости $d\beta = c d\alpha = c(d\beta_x, d\beta_y)$

определяет бесконечно малое преобразование репера $[R]$ преобразованием Лоренца, близким к единичной матрице $[L]_{dv} = [1] + [dv]$:

$$[dv] \equiv [W(\varphi)] d\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \sin \varphi & \beta \cos \varphi \\ -\beta \sin \varphi & 0 & 0 \\ \beta \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi. \quad (6.23)$$

Математически задача сводится к матричному дифференциальному уравнению, описывающему изменение репера движущегося тела по мере вращения по круговой орбите:

$$\frac{d[R(\varphi)]}{d\varphi} = [W(\varphi)] \cdot [R(\varphi)] \quad (6.24)$$

с начальным условием

$$[R(0)] = \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы чистого поворота

$$[U(\varphi)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

матрицу $[W(\varphi)]$ можно представить через постоянную матрицу

$$[W(\varphi)] = [U^{-1}(\varphi)] \cdot [H] \cdot [U(\varphi)]; \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

При таком представлении уравнение (6.24) приводится к виду

$$[U(\varphi)] \cdot \frac{d[R(\varphi)]}{d\varphi} = [H] \cdot [U(\varphi)] \cdot [R(\varphi)],$$

которое после введения матрицы $[L(\varphi)] = [U(\varphi)] \cdot [R(\varphi)]$ приводится для последней к матричному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d[L(\varphi)]}{d\varphi} = \frac{d[U(\varphi)]}{d\varphi} \cdot [U^{-1}(\varphi)] \cdot [R(\varphi)] + [H] \cdot [L(\varphi)] = [H + h] \cdot [L(\varphi)], \quad (6.26)$$

где $[h]$ тоже постоянная матрица

$$[h] = d[U(\varphi)]\varphi \cdot [U^{-1}(\varphi)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение определяется через собственные векторы и собственные значения матрицы

$$[H + h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

После решения уравнения (6.26) находится окончательное решение уравнения (6.24), описывающее преобразование репера тела, движущегося по окружности:

$$[R(\varphi)] = \begin{bmatrix} \gamma & \alpha \cos(\frac{\varphi}{\gamma}) & \alpha \sin(\frac{\varphi}{\gamma}) \\ \alpha \cos \varphi \gamma \cos(\frac{\varphi}{\gamma}) \cos \varphi + \sin(\frac{\varphi}{\gamma}) \sin \varphi \gamma \sin(\frac{\varphi}{\gamma}) \cos \varphi - \cos(\frac{\varphi}{\gamma}) \sin \varphi & & \\ \alpha \sin \varphi \gamma \cos(\frac{\varphi}{\gamma}) \sin \varphi - \sin(\frac{\varphi}{\gamma}) \cos \varphi \gamma \sin(\frac{\varphi}{\gamma}) \sin \varphi + \cos(\frac{\varphi}{\gamma}) \cos \varphi & & \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Временной вектор (первый столбец) изменяется очень просто: пространственная его проекция вращается с угловой скоростью движения по окружности Ω . Пространственная часть двух других столбцов описывает лоренцево растяжение и томасово вращение пространственных векторов репера.

Например, при $\gamma = 2$ в начальной точке вращения ($\varphi = 0$) эти векторы имеют пространственные проекции $(2, 0)$ (касательная) и $(0, 1)$ (нормаль). Через целый оборот ($\varphi = 2\pi$) их проекции становятся $(-2, 0)$ и $(0, -1)$, то есть оси повернутся на пол-оборота. Для наглядного представления прецессии Томаса лучше непосредственно проследить за движением пространственных проекций пространственноподобных векторов репера при движении по окружности.

При релятивистских скоростях он начинает “догонять” свою касательную, хотя и вращается значительно медленнее, попутно претерпевая “лоренцево удлинение” в зависимости от ориентации по отношению к сопутствующему реперу (касательной и нормали).

На рисунке приведены траектории вращения исходных реперных векторов при $v/c = 0.8$, $1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0.4$. Траектория вращения исходного

репера замыкается в этом случае лишь при $\varphi = 5\pi$ ($0.4 \cdot 5\pi = 2\pi$). Реперы вращаются медленнее вращения тела по окружности.

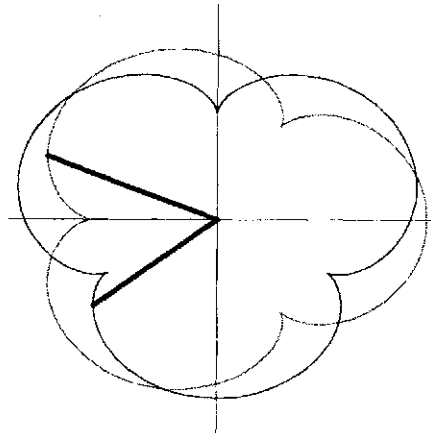


Рис. 6.5

Также на рисунке изображены положения касательной (в начальном положении — вдоль оси x — “длинный вектор”) и нормали (начально — вдоль оси y — “короткий вектор”) после одного полного оборота тела ($\varphi = 2\pi$). Они встанут на свои исходные места только после 2.5-кратного поворота по орбите ($\varphi = 5\pi$).

При малых скоростях при любом угле поворота эти векторы оставались бы параллельными исходным и их длины были бы единичными.

Но при $\gamma = 2$ в начальной точке вращения ($\varphi = 0$) эти векторы имеют пространственные проекции $(2, 0)$ (касательная) и $(0, 1)$ (нормаль). Через целый оборот ($\varphi = 2\pi$) их проекции становятся $(-2, 0)$ и $(0, -1)$, то есть оси повернутся на пол-оборота.

Таким образом, при движении тела по круговой орбите под действием центростремительного ускорения его локальное пространство не только ограничено, но и его ориентировка изменяется, поворачивается относительно глобального мини-пространства.

7. Псевдокватернионы

В специальной теории относительности для описания шестипараметрических преобразований Лоренца используются комплексные кватернионы

Ньюмена–Пенроуза [23; 27]. Однако техника работы с ними исключительно сложна. В то же время ряд принципиальных задач специальной теории относительности, такие как прецессия Томаса при движении тела по окружности, имеют дело с плоским движением, при котором преобразованиям Лоренца подвергаются только две пространственные координаты и время, тогда как нормальная к плоскости движения координата остается неизменной. В этом случае мы имеем дело с трехпараметрическими преобразованиями Лоренца в $2 + 1$ -мерном пространстве Минковского. Для описания таких преобразований не нужно вводить комплексные кватернионы, достаточно лишь слегка модернизировать технику кватернионов Гамильтона.

7.1. Преобразования Лоренца при плоском движении

Введем три псевдокватернионных орта η_0, η_1, η_2 с алгебраическими свойствами:

$$\begin{aligned}\eta_i \eta_j &= -\gamma_{ij} - \varepsilon_{ijk} \gamma^{kl} \eta_l; \\ \eta_0^2 &= -1; \eta_1^2 = \eta_2^2 = 1; \\ \eta_0 \eta_1 &= -\eta_1 \eta_0 = \eta_2; \\ \eta_0 \eta_2 &= -\eta_2 \eta_0 = -\eta_1; \\ \eta_2 \eta_1 &= -\eta_1 \eta_2 = \eta_0.\end{aligned}\tag{6.29}$$

Добавление единицы, коммутирующей со всеми ортами, приводит к алгебре псевдокватернионов

$$z = a \cdot 1 + t \cdot \eta_0 + x \cdot \eta_1 + y \cdot \eta_2\tag{6.30}$$

с нормой (не положительно определенной)

$$|z|^2 = a^2 + t^2 - x^2 - y^2\tag{6.31}$$

и обратным значением

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} (a \cdot 1 - t \cdot \eta_0 - x \cdot \eta_1 - y \cdot \eta_2).$$

Аналогично евклидову случаю псевдокватернионы с единичной нормой описывают вращения и псевдовращения в пространстве Минковского $(2+1)$. Если (n_0, n_1, n_2) — положительно или отрицательно определенный единичный вектор ($n^2 \equiv n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 = \pm 1$), то кватернион

$$\xi(\mathbf{n}, \psi) = C(\psi) + S(\psi)(n_0 \cdot \eta_0 + n_1 \cdot \eta_1 + n_2 \cdot \eta_2) = C(\psi) + S(\psi)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta})\tag{6.32}$$

описывает вращение или псевдовращение относительно оси $\mathbf{n}$, при этом два последовательных (псевдо)поворота вокруг этой оси определяют поворот вокруг этой же оси:

$$\begin{aligned} & (C(\psi_1) + S(\psi_1)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta})) (C(\psi_2) + S(\psi_2)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta})) = \\ & = (C(\psi_1)C(\psi_2) + (\mathbf{n}^2)S(\psi_1)S(\psi_2)) + (C(\psi_1)S(\psi_2) + S(\psi_1)C(\psi_2))(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}) = \\ & = C(\psi_1 + \psi_2) + S(\psi_1 + \psi_2)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

В зависимости от знака $\mathbf{n}^2$ величины C и S являются либо круговыми, либо гиперболическими косинусом и синусом.

При $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ — вращение в плоскости (x, y) — синус S обращается в нуль впервые при $\psi = \pi$, и при этом псевдокватернион описывает тождественное преобразование, т. е. поворот на 360° . Отсюда следует, что аргументом функций C и S является половинный угол. Этот вывод можно рассматривать и как результат аналитического продолжения кватернионов в евклидовом пространстве.

Преобразование самого псевдокватерниона z другим псевдокватернионом u производится в соответствии с выражением

$$z_u = u \cdot z \cdot u^{-1}. \quad (6.33)$$

Буст (преобразование Лоренца, определяемое только вектором скорости) вдоль направления, перпендикулярного пространственному двумерному единичному вектору (n_x, n_y) — нормали к траектории, описывается псевдокватернионом

$$z_\chi = \text{ch} \frac{\chi}{2} + \text{sh} \frac{\chi}{2} (n_x \eta_1 + n_y \eta_2),$$

где функции χ можно выразить через γ :

$$\text{sh} \frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}}; \quad \text{ch} \frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}; \quad \beta = \frac{v}{c} = \text{th}(\chi) = \frac{\text{sh}(\chi)}{\text{ch}(\chi)} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}. \quad (6.34)$$

С учетом этих соотношений буст, определяемый нормалью к траектории $n_x = \cos \varphi$, $n_y = \sin \varphi$, определяется псевдокватернионом:

$$z_\chi = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} (\eta_1 \cos \varphi + \eta_2 \sin \varphi), \quad (6.35)$$

а поворот в плоскости (x, y) на угол ψ — псевдокватернионом

$$z_\psi = \cos \frac{\psi}{2} + \eta_0 \sin \frac{\psi}{2}.$$

Псевдокватернион с единичной нормой определяется тремя параметрами, в качестве которых можно выбрать γ, ψ, ϕ :

$$z(\gamma, \psi, \phi) = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} (\cos \psi + \eta_0 \sin \psi) + \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} (\eta_1 \cos \phi + \eta_2 \sin \phi). \quad (6.36)$$

Мера в пространстве параметров выражается как модуль псевдокватерниона

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial z}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi = \\ &= \frac{\cos \psi d\gamma - 2(\gamma+1) \sin \psi d\psi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma+1}} + \eta_0 \frac{\sin \psi d\gamma + 2(\gamma+1) \cos \psi d\psi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma+1}} + \\ &+ \eta_1 \frac{\cos \phi d\gamma - 2(\gamma-1) \sin \phi d\phi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}} + \eta_2 \frac{\sin \phi d\gamma + 2(\gamma-1) \cos \phi d\phi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Норма этого псевдокватерниона в соответствии с (6.31) и определяет метрику в пространстве параметров:

$$\begin{aligned} dl^2 &= -\frac{d\gamma^2}{\gamma^2-1} + \frac{\gamma+1}{2} d\psi^2 + \frac{\gamma-1}{2} d\phi^2 = \\ &= -\left(\frac{d\chi}{2}\right)^2 + \text{ch}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) d\psi^2 + \text{sh}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) d\phi^2, \end{aligned} \quad (6.38)$$

если представить $\gamma = \text{ch } \chi$. Это — метрика пространства постоянной отрицательной кривизны, однако это не пространство Лобачевского, которое локально имеет евклидову метрику, а псевдориманово пространство с постоянной отрицательной кривизной.

7.2. Релятивистское вращение по окружности

Тело, вращающееся по окружности с постоянной скоростью v , испытывает центростремительное ускорение, и пространство-время в бесконечно

малой окрестности этого тела претерпевает бесконечно малое преобразование Лоренца (буст), определяемое выражением (6.35). Если тело на окружности достигло угла φ , изменение скорости равно $a dt = \mathbf{n} v \omega dt = \mathbf{n} v d\varphi$, где $\mathbf{n}$ — вектор нормали, то псевдокватернион, описывающий это преобразование:

$$\begin{aligned} w(\varphi) &= 1 + \beta \frac{d\varphi}{2} (-\eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi) = \\ &= 1 + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{d\varphi}{2} (-\eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi). \end{aligned} \quad (6.39)$$

При последующих поворотах угол меняется на величину $d\varphi$ и при повороте на конечный угол псевдокватернион преобразования определяется бесконечным произведением таких кватернионов, близких к единице с переменным углом φ .

Интегрирование проще провести, рассматривая действие этих близких к единице псевдокватернионов на псевдокватернион (6.36):

$$\begin{aligned} w(\varphi) \cdot z(\gamma, \psi, \phi) &= \left(1 + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{d\varphi}{2} (-\eta_1 \sin \varphi - \eta_2 \cos \varphi) \right) \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} (\cos \psi + \eta_0 \sin \psi) + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} (\eta_1 \cos \phi + \eta_2 \sin \phi) \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \left(\left(\cos \psi - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{d\varphi}{2} \sin(\varphi - \phi) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta_0 \left(\sin \psi + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{d\varphi}{2} \cos(\varphi - \phi) \right) \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} \left(\eta_1 \left(\cos \phi - \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{d\varphi}{2} \sin(\varphi - \psi) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta_2 \left(\sin \phi + \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{d\varphi}{2} \cos(\varphi - \psi) \right) \right). \end{aligned} \quad (6.40)$$

При сдвиге тела по круговой траектории параметр γ не меняется, а могут меняться только углы ψ и ϕ . Сравним полученное выражение с прираще-

нсм псевдокватерниона (6.36) при приращении этих углов:

$$z(\gamma, \psi + d\psi, \phi + d\phi) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} ((\cos \psi - d\psi \sin \psi) + \eta_0 (\sin \psi + d\psi \cos \psi)) + \\ + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} (\eta_1 (\cos \phi - d\phi \sin \phi) + \eta_2 (\sin \phi + d\phi \cos \phi)).$$

Эти соотношения совпадают при

$$\psi + \phi = \varphi; \quad \psi = (1 - \frac{1}{\gamma}) \frac{\varphi}{2}; \quad \phi = (1 + \frac{1}{\gamma}) \frac{\varphi}{2}. \quad (6.41)$$

Если эти значения подставить в (6.36) и обозначить

$$k = 1 - \frac{1}{\gamma}, \quad (6.42)$$

то получится псевдокватернион, определяемый двумя параметрами — константой γ , определяемой скоростью движения тела, и углом φ , равномерно изменяющимся вдоль траектории:

$$z(\gamma, \varphi) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} (\cos(k\varphi) + \eta_0 \sin(k\varphi)) + \\ + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} (\eta_1 \cos((1 - k)\varphi) + \eta_2 \sin((1 - k)\varphi)) = \\ \cos(k\varphi) z_n + \sin(k\varphi) z_\tau, \quad (6.43)$$

где

$$z_n = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} (\eta_1 \cos \varphi + \eta_2 \sin \varphi)$$

— псевдокватернион нормали к траектории, а

$$z_\tau = \eta_0 \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} (\eta_1 \sin \varphi - \eta_2 \cos \varphi)$$

— псевдокватернион касательной. Оба этих вектора имеют единичный модуль.

Если $k = 0$, то $z(\gamma, \varphi) = z_n$ указывает на нормаль, определяющую ускорение, но при $k > 0$ ПК начинает поворачиваться между касательной и нормалью пропорционально углу сдвига тела по орбите с угловой частотой прецессии Томаса

$$\Omega_T = k_T \omega = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \omega, \quad (6.44)$$

если ω — угловая частота вращения по орбите.

Введенные выше псевдокватернионы являются подмножеством комплексных кватернионов Ньюмена и Пенроуза, введенных для описания четырехмерных преобразований Лоренца, но техника работы с последними несравненно сложнее.

8. Релятивистская динамика

В динамической теории Гамильтона–Якоби энергия и импульс являются производными от действия:

$$E = -\frac{\partial s}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = \nabla s.$$

Энергия и импульс в пространстве Минковского образуют четырехмерный вектор $p_\alpha = \frac{\partial s}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 0, \dots, 3$. Координата $x_0 = ct$; компонента импульса $p_0 = -E/c$. Инвариант

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2,$$

где m — пока не определенная константа размерности массы. При $p = 0$ (тело покоится) энергия равняется

$$E_0 = m c^2. \quad (6.45)$$

При наличии импульса

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (6.46)$$

При малых импульсах

$$E = m c^2 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}} \approx m c^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2 m^2 c^2}\right) = E_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2 m}.$$

Вид добавки к энергии покоя E_0 совпадает с выражением кинетической энергии через импульс в классической механике, если константу m отождествить с массой тела. Но при этом *энергия покоя* (6.45) также выражается через массу.

Эти соотношения в 1906 году Макс Планк (1858–1947) вывел из принципа наименьшего действия для свободно движущегося тела, которое, как он показал, пропорционально собственному времени движущегося тела:

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \quad (6.47)$$

8.1. Релятивистский атом водорода

Метод Гамильтона является формально математическим методом, не привязанным к какой-то конкретной структуре пространства и времени. При наличии электромагнитного поля четырехмерный импульс корректируется четырехмерным векторным потенциалом электромагнитного поля:

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} + \frac{q}{c} A_\alpha,$$

что приводит к инварианту вектора энергии-импульса

$$\left(\nabla S - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + q c \phi \right)^2 = m^2 c^2. \quad (6.48)$$

В случае вращения легкой частицы с массой m и зарядом $-q$ вокруг массивной с зарядом $+q$ (релятивистский атом водорода) легкая частица движется в электромагнитном поле тяжелой:

$$\mathbf{A} = 0; \quad \phi = -\frac{q}{r}.$$

Записываем в сферической системе координат.

$$\frac{1}{c^2} \left(E + \frac{q^2}{r} \right)^2 - m^2 c^2 = p_r^2 + \frac{l^2}{r^2}.$$

Здесь E и l — константы, так как t и φ — циклические переменные.

Выражая из этого соотношения p_r и дифференцируя по l , находим дифференциальное уравнение траектории:

$$p_r = \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(E + \frac{q^2}{r} \right)^2 - m^2 c^2 - \frac{l^2}{r^2}}; \quad (6.49)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial p_r}{\partial l} = \frac{-\frac{l}{r^2}}{\sqrt{\frac{1}{c^2} \left(E + \frac{q^2}{r} \right)^2 - m^2 c^2 - \frac{l^2}{r^2}}}.$$

Обозначая, как и раньше, $l/r \equiv \xi$; $q^2/(lc) \equiv \alpha$, получаем

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\sqrt{(E + c\alpha\xi)^2/c^2 - m^2 c^2 - \xi^2}}.$$

Это дифференциальное уравнение также можно привести к виду закона сохранения энергии гармонического осциллятора

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - \alpha^2) (\xi - \xi_0)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{E^2}{c^2(1 - \alpha^2)} - m^2 c^2 \right),$$

где

$$\xi_0 = \frac{E\alpha}{c(1 - \alpha^2)}.$$

Его решение

$$\xi = \xi_0 + A \cos(\sqrt{1 - \alpha^2} \varphi).$$

Константа интегрирования выбрана так, чтобы ξ было максимально (а радиус минимален) при $\varphi = 0$.

При энергии, меньшей энергии покоя $m c^2$, движение финитно — радиус меняется между максимальным и минимальным значениями. Самое замечательное в этом решении, что траектории не замкнуты. Радиус вновь становится минимальным, когда аргумент косинуса станет равным 2π . Это соответствует повороту по траектории на угол

$$\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}} > 2\pi.$$

Траектория представляет из себя эллипс, поворачивающийся по направлению движения по орбите за каждый оборот на угол

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1 \right).$$

Эта задача была решена Арнольдом Зоммерфельдом (1868–1951) в 1919 году.

Представляет интерес движение по круговым орбитам

$$E = \sqrt{1-\alpha^2} m c^2; \quad \xi_0 = \frac{m \alpha c}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{l}{R}.$$

Пренебрежение α^2 под корнем приводит к нерелятивистскому соотношению

$$l^2 = m q^2 R; \quad \frac{q^2}{R^2} = \frac{m v^2}{R}; \quad l^2 = (m v R)^2.$$

Релятивистская формула имеет значительные особенности. В частности, при $R \rightarrow 0$ момент стремится не к нулю, как в нерелятивистском случае, а определяется из предельного соотношения $1 - \alpha^2 = 0$; $l = \pm q^2/c$. При этом полная энергия, включающая и массу покоя вращающейся частицы, обращается в нуль.

8.2. Прецессия Томаса и кинетическая энергия

В классической механике состояние вращения определяется изменением положения тела относительно репера с осями, параллельными неподвижным осям инерциальной системы. Так, Луна, будучи все время повернутой к Земле одной стороной, совершив один оборот по орбите вокруг Земли, с этой точки зрения совершает один оборот вокруг собственной оси.

Казалось бы, что такое определение вращения является просто общепринятым соглашением и можно было бы определить как невращающееся тело, например, Луну. Однако общепринятое определение имеет под собой объективный смысл: при вращении с сохранением ориентации собственных осей тело имеет минимальную кинетическую энергию, так как в классической динамике твердого тела имеется теорема, говорящая о том, что кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии переносного движения центра масс и вращательного движения вокруг центра масс, где вращение подразумевается относительно параллельно переносимых осей. При заданном движении тела по круговой орбите минимум кинетической энергии — при отсутствии вращения.

Существует предубеждение, что в теории относительности понятие *твёрдое тело* является недопустимым, так как скорость звука в абсолютно твёрдом теле равна бесконечности и, следовательно, больше скорости света. И в классической механике при рассмотрении, например, движущегося с ускорением гироскопа все понимают, что при ускорении могут возникать упругие колебания, распространяющиеся с конечной скоростью. Однако, если их вклад в перемещение точек тела пренебрежим по сравнению с вращением и вклад в энергию мал по сравнению с кинетической энергией, этими колебаниями можно пренебречь: на этом строится *приближение твёрдого тела* в классической механике. Формальным условием возможности такого приближения является условие $v \ll a$ — относительные скорости перемещения точек тела много меньше скорости звука a .

В теории относительности также вполне допустимо такое приближение: при $v \ll a \ll c$ влиянием упругих колебаний можно пренебречь, что и является *приближением твёрдого тела* в теории относительности.

Добавка к кинетической энергии материальной точки, движущейся с малой скоростью v относительно некоторой другой точки (центра масс), движущейся относительно лабораторной системы с релятивистской скоростью V , при разложении по степеням v/V в низших порядках имеет линейную и квадратичную составляющие. Для симметричных систем, таких как вращающееся кольцо или сфера, линейный член при вычислении интегральной кинетической энергии в среднем равен нулю, так как каждой точке, движущейся в каком-то направлении, соответствует противоположная точка, движущаяся в противоположном направлении. Поэтому в низшем приближении добавка к кинетической энергии для рассматриваемых тел пропорциональна v^2 . Так как орбитальная скорость при движении по окружности постоянна, то релятивистский коэффициент перед величиной добавочной кинетической энергии есть константа, и, чтобы не отвлекаться от сути, мы будем в дальнейшем следить за квадратом скорости относительного движения каждой точки, понимая, что для практических расчетов нужно восстановить релятивистский коэффициент.

Описание будем вести в цилиндрической системе координат с метрикой пространства Минковского

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2; \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r; \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}. \quad (6.50)$$

Кольцо малого радиуса (точно — бесконечно малого) совершает круговое орбитальное движение и одновременно вращается относительно собственной оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Точки на кольце будем отмечать координатой ψ , меняющейся от 0 до 2π .

Матрица конечного преобразования Лоренца переводит координаты подвижной системы в координаты лабораторной (или наоборот). Матрицы бесконечно малых преобразований действуют либо в движущейся, либо в лабораторной системах. Чтобы всегда было ясно, к какой системе относятся векторы и матрицы, введем различие в написании скобок, их ограничивающих. Записывая координаты в виде столбцов, будем координаты в движущейся системе ограничивать круглой скобкой, а в лабораторной — квадратной :

$$[x_{lab}] = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (x_{mov}) = \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}. \quad (6.51)$$

Матрицу преобразования Лоренца от координат движущейся системы к координатам лабораторной системы (и обратную ей) также будем записывать в несимметричном виде

$$[x_{lab}] = [L] \cdot (x_{mov}); \quad (x_{mov}) = (L^{-1}) \cdot [x_{lab}].$$

Произведения прямой и обратной матриц, в зависимости от порядка, определяют единичную матрицу либо в лабораторной, либо в движущейся системе:

$$[L] \cdot (L^{-1}) = [I]; \quad (L^{-1}) \cdot [L] = (I).$$

Последовательные преобразования Лоренца определяются произведениями матриц. В нашем представлении знак умножения может стоять только между ограничителями одного типа — либо между круглыми скобками, либо между прямыми, определяя преобразование Лоренца либо в движущейся системе, либо в лабораторной.

Так как кольцо движется в плоскости, будем учитывать только две пространственные координаты: r и φ , но, вследствие того что оси времени в неподвижной системе и в системе центра масс имеют различное направление в пространстве Минковского, к ним присоединяется еще одно направление — времени. Все эти переменные заданы в *инерциальной (лабораторной) системе*. Для описания движения внутри подвижной системы введем подвижный репер, связанный с движущимся центром масс (см. рис. 6.1): времениподобный единичный касательный вектор τ и два пространственноподобных — вектор нормали n , направленный по радиусу,

и ортогональный двум предыдущим вектор $\mathbf{b}$, контравариантные компоненты которых ($\alpha = t, r, \varphi$) образуют матрицу Лоренца:

$$[N_s^\alpha] = [\tau^\alpha, n^\alpha, b^\alpha] = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{r}\beta & 0 & \frac{1}{r}\gamma \end{pmatrix}, \quad (6.52)$$

$$g_{\alpha\beta} N_s^\alpha N_t^\beta = \bar{g}_{st} = \text{diag}(1, -1, -1),$$

где оба метрических тензора представляют метрику Минковского:

$$[g_{\alpha\beta}] = \text{diag}(1, -1, -1).$$

Относительно введенного репера координаты точки с внутренней координатой ψ на кольце радиуса h , вращающегося относительно подвижного репера с угловой скоростью Ω , определяются матрицей $[N]$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta t_\psi \\ \delta r_\psi \\ \delta \varphi_\psi \end{bmatrix} &= [N] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ h \cos(\psi + \Omega t) \\ h \sin(\psi + \Omega t) \end{bmatrix} = \\ &= h \begin{bmatrix} \beta \sin(\psi + \Omega t) \\ \cos(\psi - \Omega t) \\ \frac{\gamma}{r} \sin(\psi + \Omega t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Относительно центра масс в момент времени t точка с внутренней координатой ψ имеет следующие координаты:

$$\delta t = h \beta \sin(\psi + \Omega t); \quad \delta r = h \cos(\psi + \Omega t); \quad \delta \varphi = \frac{h}{r} \gamma \sin(\psi + \Omega t). \quad (6.54)$$

Центральной проблемой рассматриваемой задачи является различие моментов времени инерциальной системы для разных точек кольца при одном и том же значении параметра t , так как компонента репера $\mathbf{b}$ наклонна к оси времени лабораторной системы (см. рисунок).

Так как центр масс сам движется, то скорости изменения относительных координат определяются через ковариантные дифференциалы приращений:

$$Dx^i = \delta x^i + \Gamma_{jk}^i \delta x_0^j \delta x^k; \quad \tilde{v}^i = \delta \dot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}_0^j \delta x^k.$$

Для приведения координат и скоростей точек кольца к общему моменту времени параметр t для разных точек нужно брать различным, так, чтобы

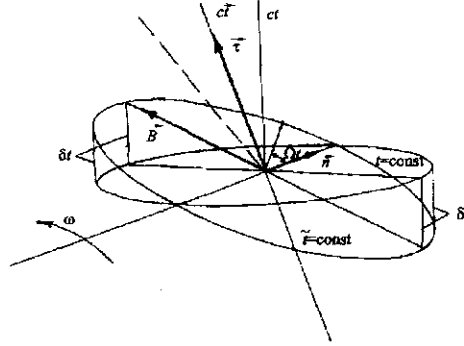


Рис. 6.6

момент наблюдения в инерциальной системе ($\bar{t}$) был одинаковым для всех точек. Полученное таким образом уравнение является трансцендентным, однако в пределе $h \rightarrow 0$ в линейном приближении по h оно решается просто:

$$t = \bar{t} - \delta t; \quad \delta t = h \beta \sin(\psi + \Omega \bar{t}). \quad (6.55)$$

При сдвиге параметра t координаты r_ψ и φ_ψ получают добавку, линейную по h , только за счет изменения времени в координате центра масс $\varphi_0 = \omega t$, поэтому при вычислении скоростей угол центра масс нужно брать уменьшенным на $\omega \delta t$:

$$v^i = (\delta \dot{x}^i - \ddot{x}_0^i \delta t) + \Gamma_{jk}^i \dot{x}_0^j (\delta x^k - \dot{x}_0^k \delta t) = \delta \dot{x}^i + \omega (\Gamma_{\varphi\varphi}^i (\delta \varphi - \omega \delta t) + \Gamma_{\varphi r}^i \delta r). \quad (6.56)$$

Радиальная и угловая скорости точки с внутренней координатой ψ в момент времени инерциальной системы, задаваемый моментом времени центра масс (с учетом того, что $\omega r = v = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$) равны:

$$v_\psi^r = \delta \dot{r} - r \omega (\delta \varphi - \omega \delta t) = -(\Omega + \frac{\omega}{\gamma}) \sin(\psi + \Omega t),$$

$$v_\psi^\varphi = \delta \dot{\varphi} + \frac{1}{r} \omega \delta r = \frac{h}{r} (\gamma \Omega + \omega) \cos(\psi + \Omega t).$$

Квадрат скорости точки на кольце с внутренней координатой ψ :

$$v_\psi^2 = v_r^2 + r^2 v_\varphi^2 = h^2 (\omega + \gamma \Omega)^2 \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \cos(2(\psi + \Omega t)) \right), \quad (6.57)$$

проинтегрированный по всему кольцу (по ψ от нуля до 2π)), определяет кинетическую энергию кольца в единый момент инерциального наблюдателя:

$$T_k = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \left(m h^2 \frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma^2} \right) \cdot \frac{(\gamma\Omega + \omega)^2}{2} = \tilde{J} \frac{\tilde{\Omega}^2}{2}. \quad (6.58)$$

Минимум квадрата скорости соответствует

$$\gamma\Omega_0 + \omega = 0; \quad \Omega_0 = -\frac{\omega}{\gamma}; \quad \tilde{\Omega}_0 = \gamma\Omega_0 = -\omega. \quad (6.59)$$

$\tilde{\Omega}_0 = \gamma\Omega_0$ — это угловая частота во вращающейся системе, так как из-за релятивистского замедления времени угловая частота здесь в γ раз больше, чем в лабораторной. В формуле (6.58) $\tilde{\Omega} = \omega + \gamma\Omega$ — угловая частота во вращающейся системе, отложенная от минимальной; именно она определяет кинетическую энергию вращения. $\tilde{J}$ — это скорректированный на лоренцево сокращение за счет орбитальной скорости момент инерции кольца во вращающейся системе.

Соотношение (6.59) формально совпадает с соответствующим нерелятивистским соотношением, однако сложение углов здесь уже не алгебраическое, а векторное.

Так как при полном обороте сам репер поворачивается на угол 2π (за время $T = 2\pi/\omega$), то при частоте собственного вращения (6.59) относительно осей инерциальной системы какая-то точка на кольце повернется на угол

$$\Delta \equiv \Omega_T T = 2\pi + \Omega_0 T = (\omega + \Omega_0) T = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \omega T; \quad \Omega_T = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \omega. \quad (6.60)$$

Это и есть выражение для частоты прецессии Томаса.

Таким образом, если, двигаясь по орбите, тело вращается с частотой томасовой прецессии, оно имеет минимальную кинетическую энергию.

9. Выводы

- Собственное пространство ускоренного тела (относительное пространство) имеет смысл лишь в малой (точно — бесконечно малой) его окрестности.
- При криволинейном движении тела это относительное пространство еще и поворачивается относительно лабораторного с томасовской угловой скоростью.

-
- Глобальные преобразования Лоренца лабораторной системы допустимы лишь при евклидовости лабораторного пространства.
 - При рассмотрении эффектов внутри лаборатории при наличии нескольких движущихся тел по отношению к этим телам время и пространство лаборатории играют роль глобальных времени и пространства.
 - Поэтому никакого *запрета* на допустимость глобального времени и глобального пространства специальная теория относительности не накладывает. Просто в рамках евклидова пространства они могут быть выделены множеством способов.

ГЛАВА 7

Теория глобального времени

Мы должны смиренно признать, что если число есть продукт одного только разума, то пространство обладает реальностью, выходящей за пределы разума, законы которой нам в полной мере не известны.

К.-Ф. Гаусс

В предыдущих главах мы выяснили, что

- Множество глобальных инерциальных систем возможно лишь при евклидовости пространства.
- Кривизна пространства однозначно фиксирует глобальную инерциальную систему.
- Описание процессов в неинерциальной системе требует использования инвариантной производной тензоров по времени.
- Преобразования Лоренца пространства и времени в общем случае определены лишь в бесконечно малой окрестности движущегося тела.
- Пространство может иметь геометрию, отличную от евклидовой, иметь общую риманову структуру.

Теперь осталось допустить, что эта риманова структура пространства может меняться во времени, и постараться отыскать законы динамики пространства.

1. Время и пространство

Теория глобального времени [28; 29] исходит из следующей концепции пространства и времени:

Пространство является материальным носителем геометрических свойств. Оно трехмерно и имеет риманову структуру.

Глобальное время — это собственное время пространства, единое для всех его точек. Оно всюду и всегда течет одинаково равномерно, само являясь мерой равномерности.

Пространство является *носителем геометрических свойств*, потому что геометрические свойства определяются метрическим тензором, шесть компонент которого являются главными полевыми переменными пространства.

Тела движутся в пространстве, динамика полей (например, электромагнитного) совершается в пространстве. Для каждой движущейся точки определена *абсолютная скорость* относительно пространства.

Относительно пространства существует абсолютное движение, или, наоборот, в некоторой системе координат существует поле скоростей пространства. Таким образом, динамика пространства описывается шестью компонентами поля метрического тензора $\gamma_{ij}(x, t)$, определяющего его геометрические свойства в заданный момент времени, и тремя компонентами поля абсолютных скоростей $V^i(x, t)$, определяющими, как каждая точка пространства в каждый данный момент движется относительно выбранной системы координат.

Пространство является *материальным* носителем геометрических свойств, потому что уравнения динамики метрического тензора и поле скоростей получаются из лагранжевых уравнений и наряду с другими полями (например, электромагнитным) определяют энергию.

Нашей задачей теперь является установление уравнений, определяющих динамику пространства. Чтобы выполнить эту задачу, мы посмотрим, как строятся динамические уравнения уже хорошо изученных полей, прежде всего — электромагнитного.

2. Физические поля

Одним из хорошо известных физических полей является электромагнитное поле. В каждый момент времени в каждой точке пространства определены поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, связанные друг с другом и своими производными

уравнениями Максвелла. Проявляются они в определенном воздействии на заряженные частицы.

Если в пространстве задана система координат x^i , то формально можно полагать электромагнитное поле заданным, если заданы поля $\mathbf{E}(x^i)$, $\mathbf{H}(x^i)$. Изменение их во времени определяется уравнениями Максвелла.

В локальной области инерциальной системы можно ввести декартовы координаты (локально декартовы координаты) с метрическим тензором в виде единичной матрицы (с точностью до вторых производных). В этой малой области (точно — бесконечно малой) уравнения всех полей, в том числе и электромагнитного, описываются, как в классической физике, в плоском пространстве в инерциальной системе в отсутствие поля тяготения. Этот физический принцип называется *принципом эквивалентности*. Название, идущее из общей теории относительности, не надо расшифровывать — что чему эквивалентно. Физическое его содержание сформулировано, а название укрепились исторически.

Переход к глобальным координатам и неинерциальной системе наблюдателя чисто технически совершается за счет замены производных по пространственным координатам на ковариантные производные, а производных по времени — на ковариантные производные по времени с учетом тензорной структуры рассматриваемых полей.

3. Принцип наименьшего действия

В классической теории поля уравнения динамики выводятся из вариационного принципа, определяемого через функционал действия, представляющего из себя интеграл по пространству и времени от разности кинетической и потенциальной энергий.

3.1. Электродинамика

Например, уравнения электродинамики (в плоском пространстве) выводятся из минимума функционала

$$S_E = \int \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi} d_3x dt. \quad (7.1)$$

Электрическая часть этого интеграла представляет кинетическую энергию, а магнитная — потенциальную со знаком "минус".

В вариационном принципе поля $\mathbf{E}(x^i)$ и $\mathbf{H}(x^i)$ полагаются не независимыми, а производными от потенциалов — скалярного $\phi(x^k, t)$ и вектор-

ного $\mathbf{A}(x^k, t)$:

$$\mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{A}); \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}. \quad (7.2)$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ определяет скорость изменения векторного потенциала $\mathbf{A}$, и квадрат этой величины определяет плотность *кинетической энергии* электромагнитного поля. Магнитное поле $\mathbf{H}$ вычисляется только по распределению векторного потенциала в пространстве в заданный момент времени, и квадрат его определяет плотность *потенциальной энергии* электромагнитного поля.

Таким образом, действие (7.1) является функционалом от электромагнитных потенциалов, рассматриваемых как *первичные функции*, а не от полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Особую роль в электродинамике играет скалярный потенциал ϕ . Его производная по времени не входит ни в электромагнитные поля, ни в действие. Такие компоненты полей называются *нединамическими*.

Наличие этого поля связано с *калибровочной инвариантностью* электродинамики: *калибровочные преобразования* потенциалов с помощью *калибровочной функции* $\chi(x^k, t)$

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (7.3)$$

не меняют ни полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (7.2), ни, следовательно, действия (7.1). Это значит, что, найдя из вариационных уравнений *экстремаль*, из нее можно построить бесконечно много других экстремалей с помощью калибровочного преобразования (7.3).

Нединамичность скалярного потенциала приводит к ряду следствий.

- Используя калибровочное преобразование (7.3), можно найти такую калибровочную функцию, чтобы ϕ равнялось нулю, по крайней мере в конечной области пространства и на конечном отрезке времени. Поле $\tilde{\mathbf{A}}$ в этой калибровке назовем *инвариантным векторным полем*. При калибровочном преобразовании (7.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \tilde{\mathbf{A}} + \nabla \chi; \quad \phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}; \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} - \nabla \chi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Таким образом, калибровочный потенциал ϕ служит для инвариантного определения производной по времени от векторного потенциала в любой калибровке. Он входит *только* в кинетическую энергию.

- Так как действие оказалось инвариантным по отношению к калибровочным преобразованиям, значит, вариация действия по калибровочной функции — по вариации потенциалов, определяемой вариацией калибровочной функции — должна обращаться в нуль тождественно. Это приводит к *тождеству* в уравнениях Максвелла.
- При переходе к гамильтонову описанию электродинамики импульс, сопряженный трехмерному векторному потенциалу (напряженность $\mathbf{E}$), определяется значением при $\phi = 0$.

Попытаемся теперь аналогичным способом построить динамику трехмерного пространства.

4. Динамика пространства

Само пространство в некоторой системе координат задается метрическим тензором $\gamma_{ij}(x^k)$ и полем абсолютных скоростей $V^i(x^k)$. Если определить уравнения, позволяющие вычислить динамику этих полей с течением времени, то формально пространство окажется многокомпонентным полем, стоящим в одном ряду, например, с электромагнитным.

Динамика пространства в ТГВ выводится аналогично уравнениям электродинамики из вариационного принципа. Лагранжиан представляется как разность кинетической и потенциальной энергий. Лагранжиан должен быть скаляром, а интегрирование должно вестись по инвариантной мере в пространстве $\sqrt{\gamma} d_3x$.

4.1. Действие динамического пространства

В электродинамике кинетическая энергия квадратична по первым производным векторного потенциала по времени. Квадратичная кинетическая энергия является простейшим видом, приводящим к нетривиальным уравнениям.

В динамике пространства также будем исходить из этого простейшего вида — кинетической энергии, квадратичной по скоростям изменения компонент метрики. Введем тензор скоростей деформации пространства:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2c} D_t \gamma_{ij} = \frac{1}{2c} (\dot{\gamma}_{ij} + V_{i;j} + V_{j;i}). \quad (7.4)$$

Поле абсолютных скоростей V^i входит в действие и может входить в него только через этот тензор. Это симметричный тензор второго ранга, по ко-

торому можно создать один линейный и один квадратичный инвариант:

$$\mu = \gamma^{ij} \mu_{ij}; \quad K = \gamma^{ik} \gamma^{jl} \mu_{ij} \mu_{kl},$$

причем квадрат линейного также квадратичен по μ_{ij} , поэтому квадратичная кинетическая энергия представима в виде:

$$T = \frac{c^4}{16\pi k} \int (\alpha K - \beta \mu^2) \sqrt{\gamma} d_3 x,$$

где α и β — неизвестные безразмерные константы, а общий множитель подставлен из соображений размерности, а также из физического представления о том, что в него должна входить гравитационная постоянная k . Статическая энергия гравитационного поля отрицательна — из этого следует гравитационное притяжение тел. В то же время экспериментально обнаружено (Тейлор и Халс, Нобелевская премия 1993 года), что гравитационное излучение уносит положительную энергию. Поэтому гравитационная энергия в целом знаконеопределенна, что обеспечивается знаком минус между двумя слагаемыми.

Процесс подбора лагранжиана никогда не является однозначным, это рекурсивный процесс: сначала выбираются произвольные допустимые константы, затем ищутся решения, а затем из анализа физического смысла полученных решений по возможности эти константы конкретизируются. Этот процесс приводит к значениям констант $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, и кинетическая энергия квадратична по производным от компонент метрики по времени:

$$T = \frac{c^4}{16\pi k} \int (\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_j^j)^2) \sqrt{\gamma} d_3 x, \quad (7.5)$$

при этом множитель перед интегралом обеспечивает размерность энергии $kg m^2 s^{-2}$ (k — гравитационная постоянная с размерностью $kg^{-1} m^3 s^{-2}$, а μ имеет размерность m^{-1}).

Потенциальная энергия, содержащая производные от компонент метрического тензора по координатам, может выражаться лишь через скалярную кривизну пространства R :

$$S = \frac{c^4}{16\pi k} \int (\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_j^j)^2 + R) \sqrt{\gamma} d_3 x dt + S_m, \quad (7.6)$$

где S_m — действие прочей материи. В уравнения динамики от него войдут компоненты тензора энергии-импульса.

4.2. Безразмерная запись

В теоретической физике принято пользоваться предельно простой системой единиц — пусть не очень удобной для расчета эксперимента, но предельно упрощающей формулы. Наиболее популярной является *планковская система единиц*, в которой в классических задачах используются *относительные единицы*:

- скорость света $c = 1$ — время измеряется в метрах; метр времени — это время, за которое свет проходит расстояние 1 метр; при переходе в обычную систему, например в СИ, нужно время в метрах делить на значение скорости света в данной системе.
- $8\pi k = 1$ — масса (m) тоже измеряется в метрах; при возврате в размерную систему единиц масса в килограммах (M) (с учетом и времени в секундах) находится из соотношения

$$M = m \frac{c^2}{8\pi k}.$$

- Энергия, как и масса, также выражается в метрах (e). Энергия в джоулях (E) восстанавливается из энергии в метрах по формуле

$$E = e \frac{c^4}{8\pi k}.$$

В квантово-механических задачах появляется постоянная Планка $\hbar$, имеющая размерность энергия–время, но так как каждый из сомножителей выражается в метрах, то в относительных единицах размерность $\hbar$ — квадратные метры. Тем самым квантово-механические задачи можно полностью обезразмерить, положив $\hbar = 1$, введя тем самым планковскую единицу длины l_0 из соотношения

$$\hbar = \frac{c^3}{8\pi k} l_0^2,$$

$$l_0 = \sqrt{\frac{8\pi k \hbar}{c^3}}.$$

При этом и длины, и время, и массы, и энергии будут безразмерные — их значения в метрах выражаются в долях l_0 (будем их обозначать теми же

символами, но с чертой сверху). Возврат к размерным единицам проводится из соотношений:

$$\begin{aligned} l &= \bar{l} \cdot l_0 = \bar{l} \sqrt{\frac{8\pi k \hbar}{c^3}}, \\ E &= \bar{E} \frac{c^4}{8\pi k} l_0 = \bar{E} c^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi k}}, \\ M &= \bar{M} \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi k}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

В дальнейшем мы будем работать в относительных единицах в классических задачах и в безразмерном виде в квантово-механических, пересчитывая в размерные величины по вышеприведенным формулам.

4.3. Динамические уравнения

В относительных единицах действие (7.6) имеет вид:

$$S = \frac{1}{2} \int (\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_j^j)^2 + R) \sqrt{\gamma} d_3 x dt + S_m. \quad (7.8)$$

Абсолютные скорости V^i входят только в кинетическую часть действия. Введя импульсы

$$\pi_j^i = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (\mu_j^i - \delta_j^i \mu_s^s),$$

варьируя действие по шести компонентам пространственной метрики, получим шесть уравнений динамики

$$\dot{\pi}_j^i = b_j^i - \frac{\sqrt{\gamma}}{2} G_j^i + \sqrt{\gamma} Q_j^i, \quad (7.9)$$

где b_j^i назовем *собственным тензорным током*

$$b_j^i = \delta_j^i \frac{\sqrt{\gamma}}{4} (\mu_l^k \mu_k^l - \mu_k^k \mu_l^l) - \partial_s (V^s \pi_j^i) + V^i_{,s} \pi_j^s - V^s_{,j} \pi_s^i,$$

G_j^i — тензор Эйнштейна пространства (трехмерного), а Q_j^i — внешний ток, получающийся вариацией действия прочей (вложенной) материи по метрическому тензору пространства — *внешний тензорный ток*.

4.4. Уравнения связей

Вариация по трем компонентам поля абсолютных скоростей V^i даст три уравнения связи:

$$\nabla_i \pi_j^i = \partial_i \pi_j^i - \Gamma_{jk}^i \pi_i^k = \sqrt{\gamma} J_j. \quad (7.10)$$

Эти уравнения линейны по скоростям V^i и их можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^i \dot{\gamma}_{ij} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_j \dot{\sqrt{\gamma}} + R_{ij} V^i + \\ \frac{1}{2} \nabla^i (V_{i,j} - V_{j,i}) = J_j. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Правая часть уравнений — *векторный источник* — получается вариацией действия прочей материи по полю скоростей, которое и для других полей входит только в производную по времени, то есть вариацией только кинетической энергии этих полей.

4.5. Теорема о вирiale пространства

Свернув по индексам уравнение (7.9) и обозначив свертку $\pi_i^i \equiv \pi$, в отсутствие внешнего тока (для чистой гравитации) получим

$$\dot{\pi} + \partial_s (V^s \pi) = -3T - \frac{1}{2} R \sqrt{\gamma} = -3T + U, \quad (7.12)$$

где T — плотность кинетической энергии, а U — потенциальной. Теорема о вирiale применима к почти стационарным полям в области, на границе которой $V^n = 0$ — отсутствуют потоки через границу. Усреднив (7.12) по времени, получим соотношение между средней потенциальной T , кинетической U и полной E энергиями:

$$U = 3T; \quad E = T + U = 4T. \quad (7.13)$$

При упомянутых условиях кинетическая энергия, а следовательно и полная, положительна.

Для определения кинетической энергии нужно знать поле абсолютных скоростей в рассматриваемой области, информацию о котором, например, в динамике Космоса могут дать видимые звезды, а теорема о вирiale позволяет вычислить полную энергию.

4.6. Тожества Гильберта

С помощью преобразований координат мы можем так или иначе изменить метрический тензор. Например, любая двумерная метрика может быть приведена к конформно плоскому виду (метрика плоского пространства, умноженная на какую-то функцию координат). Трехмерная метрика (в конечной области) может быть, например, диагонализирована — приведена к *триортогональному* виду. Однако для поддержания такого вида в последующие моменты времени, если метрика меняется, придется непрерывно проводить преобразования координат, зависящие от времени, приводящие к появлению поля скоростей.

Использование трех координатных преобразований для уменьшения динамических компонент метрического тензора приводит к некоторому избытку числа уравнений над числом динамических переменных. Это значит, что уравнения подчиняются некоторым тождествам.

Эти тождества в самом общем математическом смысле были найдены Давидом Гильбертом [30]. Пусть имеется функционал, зависящий от метрического тензора γ_{ij} и, возможно, от каких-то других полей y^α , но вариация функционала по этим полям равна нулю. Это может быть действие для полей y^α , и равенство нулю вариаций по этим полям тогда означает выполнение динамических уравнений по этим полям. В вариации функционала

$$\delta S[y^\alpha, \gamma_{ij}] = \int \left(\frac{\delta S}{\delta y^\alpha} \delta y^\alpha + \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} \delta \gamma_{ij} \right) \sqrt{\gamma} d_n x$$

первое слагаемое равно нулю. Если же вариация действия вызвана просто преобразованием координат, то она равна нулю вследствие инвариантности действия, однако второе слагаемое не равно нулю. Обозначим

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} \equiv B^{ij}.$$

Вариация метрического тензора при преобразованиях координат $\delta x^i = \xi^i(x)$ — Ли-вариация:

$$\delta \gamma_{ij} = -(\xi_{i;j} + \xi_{j;i}).$$

Подставляя ее в вариацию функционала и интегрируя по частям, получим

$$0 = \int 2 B^{ij} \xi_{i;j} \sqrt{\gamma} d_n x = 2 \int (\nabla_j (B^{ij} \xi_i) - \xi_i \nabla_j B^{ij}) \sqrt{\gamma} d_n x.$$

Первое слагаемое по теореме Гаусса переходит в поверхностный интеграл, а необходимость равенства нулю вклада в вариацию от второго при произвольности в каждой точке вариации ξ^i приводит к *тождеству Гильберта*

$$\nabla_i \left(\frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} \right) = 0. \quad (7.14)$$

В частности, для функционала Гильберта

$$S_H = -\frac{1}{2} \int R \sqrt{\gamma} d_n; \quad \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} = \frac{1}{2} G^{ij},$$

где R — скалярная кривизна n -мерного пространства, а $G^{ij} = R^{ij} - R \gamma^{ij}/2$ — тензор Эйнштейна в любой размерности тождества Гильберта принимают вид:

$$\nabla_i G_j^i = \nabla_i R_j^i - \frac{1}{2} R_{,j} = 0. \quad (7.15)$$

Это тождество выполняется для вариации потенциальной энергии трехмерного пространства, и в статическом случае — для вариации кинетической энергии при отсутствии других полей

$$\nabla_i b_j^i = 0, \quad (7.16)$$

а при наличии других полей — это относится к вариации по метрическому тензору кинетической энергии всех полей, так как туда еще входит поле скоростей V^i , но вариация по нему полной кинетической энергии равна нулю.

4.7. Гамильтониан

Гамильтониан стандартным путем получается из лагранжиана:

$$\begin{aligned} H &= \int \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} d_3x - L = \\ &= \int \left(\frac{2 \pi_j^i \pi_i^j - (\pi_i^i)^2}{\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{2} R \sqrt{\gamma} - 2 \pi_j^i V_{;i}^j \right) d_3x. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Важной его особенностью является знаконеопределенность, в результате чего оказываются возможными такие явления, как космологическое расширение.

4.8. Поток энергии

В стандартной теории поля лагранжиан зависит от некоторой (возможно, многокомпонентной) функции y^α и ее первых производных по времени и координатам $L(y_\alpha, \dot{y}_\alpha, y_{\alpha,i})$. Он определяет уравнения динамики поля y_α через уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial y_{\alpha,i}} \right) = 0.$$

Эти уравнения определяют *неразрывность потока энергии*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{y}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} - L \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\dot{y}_\alpha \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha,i}} \right) = 0$$

и определяют плотность и поток энергии

$$\epsilon = \dot{y}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} - L; \quad U^i = \dot{y}_\alpha \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha,i}}, \quad (7.18)$$

удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\partial_t \epsilon + \partial_i U^i = 0. \quad (7.19)$$

Потенциальная часть лагранжиана $\sqrt{\gamma} R$ содержит не только первые, но и вторые пространственные производные метрического тензора. В этом случае (для произвольного поля y_α) уравнения Лагранжа слегка удлиняются:

$$\frac{\partial L}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial y_{\alpha,i}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial L}{\partial y_{\alpha,ij}} \right) = 0$$

и удлиняется выражение для потока энергии

$$U^i = \dot{y}_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial y_{\alpha,i}} - \partial_j \left(\frac{\partial L}{\partial y_{\alpha,ij}} \right) \right) + y_{\alpha,j} \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha,ij}}. \quad (7.20)$$

В локально-декартовых координатах

$$\frac{\partial R \sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,k}} = 0; \quad \frac{\partial R \sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,kl}} = \sqrt{\gamma} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{ij} \gamma^{kl}).$$

Первая составляющая потока равна нулю:

$$\frac{\partial R\sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,k}} - \partial_l \left(\frac{\partial R\sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,kl}} \right) = 0,$$

так как первые производные метрического тензора в локально-декартовых координатах равны нулю. Вторая часть потока

$$\frac{\partial R\sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,kl}} \dot{\gamma}_{ij,l} = \sqrt{\gamma} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{ij} \gamma^{kl}) 2 \mu_{ij,l} = 4 \pi^{kl}{}_{,l} = 0,$$

так как обычные производные в локально-инерциальной системе переходят в ковариантные производные в произвольной системе, а $\pi^{kl}{}_{,l} = 0$ — это уравнения связей в вакууме.

Таким образом, полный поток энергии в глобальной инерциальной системе равен нулю, и плотность энергии сохраняется локально.

Это есть следствие того, что поток энергии определяется вариацией по полю скоростей, а вариация по нему равна нулю — это уравнения связей.

В неинерциальной системе в кинетической энергии каждого поля y_α появляются добавки, связанные с ковариантной производной по времени $\dot{y}_\alpha + V^z y_{\alpha,z} + \dots$, что приводит к току

$$U^i = V^i \sum_{\alpha} \frac{\partial L_{\alpha}}{\partial \dot{y}_{\alpha}} \dot{y}_{\alpha} = V^i \sum_{\alpha} \pi_{\alpha} \dot{y}_{\alpha}. \quad (7.21)$$

Если поверхность, через которую определяется поток, неподвижна относительно инерциальной системы, то в системе наблюдателя ее точки движутся со скоростями $V^i(x)$, что приводит к добавке в поток каждого поля y_{α} величины $-V^i L_{\alpha}$, так что с учетом (7.21) поток через глобально неподвижную поверхность равен

$$J = \sum_{\alpha} \oint (\pi_{\alpha} \dot{y}_{\alpha} - L_{\alpha}) V^i dS_i = \sum_{\alpha} \oint \epsilon_{\alpha} V^i dS_i, \quad (7.22)$$

что также гарантирует сохранение локальной суммарной плотности энергии всех полей, в том числе и пространства.

4.9. Гравитационный поток

Рассмотрим более подробно выражение для потока энергии пространства, связанное с потенциальной энергией $W = \int R\sqrt{\gamma} d_3x$. Сложности

с описанием гравитационного потока энергии связаны с произволом выбора системы координат. Если из математических средств выделено только локальное понятие ковариантной производной, то в локально-инерциальной системе первые производные всех компонент метрического тензора равны нулю и описание ковариантных потоков, опирающееся на локальную ковариантность, заходит в тупик. В то же время, когда речь идет о потоке энергии через поверхность, нужно определять не локально ковариантные величины, а привязанные к рассматриваемой поверхности.

Как и при определении ковариантной производной, где преобразования координат используются сначала для выбора предельно простой метрики вблизи заданной точки — локально-декартовой системы, — для описания геометрии вблизи поверхности нужно предельно упростить метрику вблизи рассматриваемой поверхности.

Выберем одну из трех координат (z) так, чтобы уравнение самой поверхности определялось уравнением $z = 0$, а метрика вблизи нее

$$dl^2 = dz^2 + \sigma_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta; \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad \sqrt{\gamma} = \sqrt{\sigma}. \quad (7.23)$$

Переменные y^1, y^2 параметризуют саму поверхность.

В этой специальной системе координат вблизи рассматриваемой поверхности (штрихом обозначаем производную по z)

$${}^{(3)}R \sqrt{\gamma} = -(\sqrt{\sigma})'' + \frac{\sqrt{\sigma}}{4} (\sigma^{\alpha\mu} \sigma^{\beta\nu} - \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}) \sigma'_{\alpha\beta} \sigma'_{\mu\nu} + \sqrt{\sigma} {}^{(2)}R. \quad (7.24)$$

Первое и последнее (см. ф. (3.31)) слагаемые в этом выражении не дают вклада в уравнения движения и могут быть отброшены. Эффективным выражением для энергии остается

$$W = \int \frac{\sigma'_{11} \sigma'_{22} - (\sigma'_{12})^2}{\sqrt{\sigma}} dy^1 dy^2 dz, \quad (7.25)$$

что приводит к выражению для плотности потока энергии через поверхность

$$U^z = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (\sigma'_{11} \dot{\sigma}_{22} + \sigma'_{22} \dot{\sigma}_{11} - 2 \sigma'_{12} \dot{\sigma}_{12}). \quad (7.26)$$

Однако при изменяющейся во времени метрике выбрать специальную систему координат вблизи поверхности невозможно. Поэтому рассмотрим связь специальных координат с произвольными, в которых

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} + \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}.$$

Производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} = & \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \sigma_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \partial x^k} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x^k} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^k} \right) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Отсюда можно выразить производную по нормали

$$\frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial z} = \frac{\partial x^k}{\partial z} \frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu} \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} - \gamma_{jl} \frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^k} - \gamma_{il} \frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} \right). \quad (7.27)$$

Максимальное упрощение общих координат состоит в том, что выд-ляется одна координата, например x^3 , задающая уравнение поверхности $x^3 = x_0^3$. Тогда из уравнений для специальных координат z, y^α

$$\gamma^{ij} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} = 1; \quad \gamma^{ij} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} = 0,$$

при условии $z = 0$ на поверхности находим при малых z :

$$z = f(x^3 - x_0^3); \quad y^\alpha = x^\alpha - \tau^\alpha(x^3 - x_0^3),$$

где обозначено

$$\sqrt{\gamma^{33}} \equiv \frac{1}{f}; \quad \frac{\gamma^{3\alpha}}{\gamma^{33}} \equiv \tau^\alpha,$$

откуда из (7.27) получаем ковариантную производную по нормали

$$D_z \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{f} (\sigma_{\alpha\beta,3} + \tau^\mu \sigma_{\alpha\beta,\mu} + \tau^\mu_{,\alpha} \sigma_{\mu\beta} + \tau^\mu_{,\beta} \sigma_{\alpha\mu}), \quad (7.28)$$

аналогичную введенной раньше ковариантной производной по времени.

Теперь из (7.26) получаем выражение для потока гравитационной энергии:

$$U^n = \frac{\sqrt{\gamma^{33}}}{\sqrt{\gamma}} (\dot{\gamma}_{11} D_z \gamma_{22} + \dot{\gamma}_{22} D_z \gamma_{11} - 2 \dot{\gamma}_{12} D_z \gamma_{12}). \quad (7.29)$$

В самом общем виде поток определяется производными от поперечно-поперечных по отношению к нормали компонент метрики. Он определяет собственно гравитационную часть потока энергии.

5. Взаимодействие с вложенной материей

Действие прочей (вложенной) материи выражается через тензорные компоненты полей, описывающих эти виды материи, пространственный метрический тензор γ_{ij} и векторное поле глобальной скорости V^i .

5.1. Электромагнитное поле

Электромагнитное поле задается двумя векторными полями $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, определяемыми производными от скалярного и векторного потенциалов. Магнитное поле представляется либо как антисимметричный тензор второго ранга, либо как дуальное ему векторное поле:

$$B_{[ij]} = A_{i,j} - A_{j,i} = \epsilon_{[ijk]} B^k;$$

$$B^i = \epsilon^{[ijk]} A_{j,k} = \frac{\epsilon^{[ijk]}}{2} (A_{j,k} - A_{k,j}).$$

В определение напряженности электрического поля входит производная по времени от векторного потенциала, которая должна быть представлена как ковариантная производная по времени:

$$\begin{aligned} \bar{E}_i &= -\partial_i \phi - D_t A_i = -\partial_i \phi - \partial_t A_i - V^j A_{i,j} - A_j V^j_{,i} = \\ &= -\partial_i (\phi + V^j A_j) - \partial_t A_i - V^j B_{[ij]} = \\ &= -\partial_i \phi_V - \partial_t A_i - V^j \epsilon_{ijk} B^k = E_i - V^j \epsilon_{ijk} B^k, \quad (7.30) \\ E_i &= -\partial_i \phi_V - \partial_t A_i. \end{aligned}$$

В неинерциальной системе роль скалярного потенциала играет конструкция

$$\phi_V = \phi + V^i A_i. \quad (7.31)$$

Калибровочное преобразование скалярной функцией χ также требует введения ковариантных производных по времени:

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} - V^j \chi_{,j}; \quad \tilde{A}_i = A_i + \chi_{,i}.$$

При этом преобразование $\tilde{\phi}_V = \phi_V - \dot{\chi}$ гарантирует неизменность $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

В уравнениях Максвелла корректируются производные по времени, заменяясь на ковариантную. В первой паре:

$$\frac{\partial B_{ki}}{\partial c t} + V^j B_{[ki],j} + B_{[kj]} V^j{}_{,i} - B_{[ij]} V^j{}_{,k} + (E_{k,i} - E_{i,k}) = 0. \quad (7.32)$$

Полный лагранжиан электромагнитного поля

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{\gamma}}{32\pi} \left(4\gamma^{ij} \hat{E}_i \hat{E}_j - (\gamma^{ij}\gamma^{kl} - \gamma^{kj}\gamma^{il}) B_{ik} B_{jl} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\gamma}}{8\pi} \left(\gamma^{ij} E_i E_j + 2\gamma^{ij} V^k E_i B_{kj} + \gamma^{ij} V^k V^l B_{ik} B_{jl} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (\gamma^{ij}\gamma^{kl} - \gamma^{kj}\gamma^{il}) B_{ik} B_{jl} \right) \end{aligned} \quad (7.33)$$

квадратичен по напряженностям электрического и магнитного полей.

Поле абсолютных скоростей в лагранжиан электромагнитного поля входит только через кинетическую энергию.

Вторая пара уравнений Максвелла определяется из вариации действия после введения вектора электрической

$$D^i = \frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial L}{\partial E_i} = \gamma^{ij} (E_i + V^k B_{kj}) = \gamma^{ij} \hat{E}_j$$

и магнитной индукции

$$H^{[ij]} = -\frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial L}{\partial B_{[ij]}} = (\gamma^{ik}\gamma^{jl} + \gamma^{il}V^j V^k - \gamma^{jl}V^i V^k) B_{kl} - (V^i \gamma^{jk} - V^j \gamma^{ik}) E_k;$$

$$\frac{\partial D^i}{\partial c t} + 2\partial_j H^{[ij]} = 0;$$

$$\epsilon^{[ijk]} H_{j,k} - \frac{\partial D^i}{\partial c t} - V^j D^i{}_{,j} - D^j V^i{}_{,j} = 0. \quad (7.34)$$

Связь с уравнениями гравитационной динамики:

$$\begin{aligned} &\gamma^{ij} E_j A_{i,k} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} E^i A_k) = \\ &= J_k^{(E)} = \frac{\delta S_E}{\delta V^k} = \frac{\sqrt{\gamma}}{4\pi} \gamma^{ij} (E_i B_{kj} + B_{ik} B_{jl} V^l). \end{aligned} \quad (7.35)$$

и тензорный в динамических уравнениях

$$J_j^i = T_j^i - V^i T_j^0 = -\rho \frac{(\dot{x}^i - V^i) \gamma_{jk} (\dot{x}^k - V^k)}{c^2 - \gamma_{kj} (\dot{x}^k - V^k) (\dot{x}^j - V^j)} \quad (7.38)$$

определяются абсолютной скоростью движущейся частицы относительно пространства $\dot{x}^i - V^i$.

Когерентные частицы — покоящиеся относительно пространства — не дают вклада в источники. Чтобы частица работала как источник в уравнениях пространства, она должна быть некогерентной — иметь ненулевую абсолютную скорость $\dot{x}^i - V^i$.

5.3. Идеальная релятивистская жидкость

В ТГВ специальная теория относительности включается локально: в бесконечно малом пространстве и время метризованы метрикой Минковского. При нахождении решений динамики пространства этот факт не играет никакой роли, так как пространство — распределенный объект и его описание проводится в глобальном времени.

Однако динамика полей, определяемых локальными уравнениями, должна быть локально релятивистски инвариантна. Уравнение Гамильтона-Якоби для свободной частицы

$$\frac{1}{c^2} (\dot{S} + V^i S_{,i})^2 - \gamma^{ij} S_{,i} S_{,j} = m^2 c^2 \quad (7.39)$$

может быть переписано в четырехмерном виде:

$$g^{\alpha\beta} S_{,\alpha} S_{,\beta} = m^2 c^2, \quad (7.40)$$

где компоненты четырехмерной метрики выражаются через трехмерную метрику и поле абсолютных скоростей.

Идеальная релятивистская жидкость описана Шютцем [31]. В основе ее лежит выражение для энтальпии, определяемой функцией σ :

$$\mu = \sqrt{g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta}}. \quad (7.41)$$

Уравнение состояния определяется зависимостью давления от энтальпии $p(\mu)$, при этом плотность вещества ρ , плотность энергии ε определяются через эту зависимость:

$$\rho = \frac{dp}{d\mu}; \quad \varepsilon = \mu \frac{dp}{d\mu} - p; \quad \varepsilon + p = \rho \mu; \quad d\varepsilon = \mu d\rho. \quad (7.42)$$

Уравнения изоэнтропной динамики жидкости определяются из принципа наименьшего действия

$$S_f = \int p(\mu) \sqrt{g} d_4x. \quad (7.43)$$

Вариация по σ приводит к закону сохранения вещества:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_{,\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho u^\alpha) = 0; \quad u^\alpha = \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_{,\alpha}}.$$

Тензор энергии-импульса жидкости определяется вариацией по метрическому тензору:

$$T_{ij} = 2 \frac{\delta S_f}{\delta g^{ij}} = 2 \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial g^{ij}} + 2 \frac{p}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g^{ij}} = (\varepsilon + p) u_i u_j - p g_{ij}. \quad (7.44)$$

В глобальном времени выражение для энтальпии

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{c^2} (\dot{\sigma} + V^i \sigma_{,i})^2 - \gamma^{ij} \sigma_{,i} \sigma_{,j}} \quad (7.45)$$

определяет поле скоростей жидкости

$$u^0 = \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_{,t}} = \frac{1}{\mu} (\dot{\sigma} + V^i \sigma_{,i});$$

$$u^i = \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_{,i}} = \frac{1}{\mu} (\dot{\sigma} V^i + (V^i V^j - \gamma^{ij}) \sigma_{,j}). \quad (7.46)$$

Особо выделим случай статической жидкости $u^i = 0$. При этом $\sigma = k(t + s(x))$. Отсюда

$$V^i + (V^i V^j - \gamma^{ij}) s_{,j} = 0; \quad s_i = \frac{V_i}{1 - V^2};$$

$$\mu = \frac{k}{\sqrt{1 - V^2}}. \quad (7.47)$$

Константа k — гравитационного равновесия — постоянна по всему телу. Энтальпия (с точностью до этой константы) в равновесии однозначно определяется параметрами пространства: полем скоростей и метрикой. Видимо, без потери общности можно принять $k = 1$.

Соотношение (7.47) ставит в однозначное соответствие состояние равновесной жидкости в данной точке с характеристиками пространства в этой точке.

Вариация действия статической жидкости по полю скоростей определяется только вариацией давления

$$\frac{\delta S_f}{\delta V^i} = \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial V^i} = \frac{\rho V_i}{(1 - V^2)^{3/2}} = \frac{(\varepsilon + p) V_i}{1 - V^2}. \quad (7.48)$$

Вариация по метрическому тензору пространства

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_f}{\delta \gamma_{ij}} &= \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{p}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\rho V^i V^j}{2(1 - V^2)^{3/2}} + \frac{p}{2} \gamma^{ij} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(\varepsilon + p) V^i V^j}{1 - V^2} + p \gamma^{ij} \right) \end{aligned} \quad (7.49)$$

определяет тензорный ток.

6. Решения с нулевой энергией

Знаконеопределенность плотности энергии пространства приводит к решениям как с положительной плотностью энергии (возможно, в каких-то областях), так и отрицательной (также, возможно, в каких-то других областях). Но также возможны решения и с нулевой плотностью энергии. Решения со всюду нулевой плотностью энергии обладают существенными особенностями.

Пусть в пространстве с метрическим тензором $\gamma_{ij}(x, t)$ и полем скоростей $V^i(x, t)$ совершается динамика полей, все компоненты которых мы обозначим $y_\alpha(x, t)$, а канонически сопряженные им плотности импульсов — $p^\alpha(x, t)$. Вариация действия

$$dS = \int (\pi^{ij} \delta \gamma_{ij} + p^\alpha \delta y_\alpha - h dt) d_3x,$$

где $h = h(\gamma_{ij}, V^i, \pi^{ij}, p^\alpha, y_\alpha)$ — совместная плотность гамильтониана пространства и находящихся в нем полей.

Здесь dt — приращение глобального времени, синхронизирующего динамику всех полей. Пусть теперь рассматривается решение, где всюду в начальный момент плотность h равна нулю. Уравнения динамики приводят к тому, что и в последующие моменты всюду будет $h = 0$.

Но для этого подмножества решений время выпало из вариации действия. При описании динамики таких полей можно уже пользоваться не глобальным временем t , а произвольной функцией $\tilde{t} = f(t, x^1, x^2, x^3)$. Для такого подмножества решения теория становится *общековариантной*.

Именно к этому подмножеству решений привели Эйнштейна поиски связи кривизны пространства с динамикой гравитации, в результате которых появилась Общая теория относительности. *Принцип общей ковариантности* упростил процесс создания самосогласованной теории, сыграл важнейшую роль в процессе ее становления, однако он ниоткуда не следует — ни из каких-то экспериментов, ни из каких-то более глубоких философских или метафизических положений.

Как, например, в самой общей теории относительности сферически-симметричные решения разыскиваются значительно проще, чем более общие и кто-то, специализировавшийся на таких решениях, мог бы объявить сферическую симметрию высшим принципом. Однако теория с этим принципом имеет лишь подмножество всех решений общей теории. Это не значит, что она неверна, неверен только принцип, ограничивающий решения заданной симметрией.

Точно так же и в динамике пространства: решения с более высокой симметрией — общековариантные — образуют лишь часть решений. Решения общей теории относительности образуют подмножество решений теории глобального времени со всюду равной нулю плотностью энергии.

ГЛАВА 8

Решения

По явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления.

И. Ньютон

Хотя речь об общей теории относительности пойдет далее, здесь пока, опираясь на рассуждения последнего параграфа предыдущей главы, скажем, что уравнения ОТО, приведенные к глобальному времени, — 10 уравнений Эйнштейна — это девять уравнений ТГВ плюс десятое уравнение $\varepsilon = 0$. Это подмножество решений ТГВ с нулевой плотностью энергии.

Поэтому некоторые решения ТГВ в точности совпадают с решениями ОТО, однако класс решений ТГВ шире, чем в ОТО.

1. Сферически-симметричные пространства

Несмотря на то что инерциальная система всегда динамична, существуют решения в глобальном времени, стационарные с точки зрения некоторой неинерциальной системы.

В сферически-симметричном стационарном случае метрика пространства приводится к виду:

$$dl^2 = dr^2 + R^2(r)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (8.1)$$

а поле скоростей радиально: $V^r = V(r)$.

Так как поле скоростей входит только в кинетическую энергию, для получения уравнений связи достаточно расписать только кинетическую энергию. Поле скоростей деформации метрики, несмотря на отсутствие зависимости от времени, вследствие наличия поля скоростей отлично от нуля

(штрихом обозначена производная по радиусу):

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{11} + 2 V' \gamma_{11} + V \gamma'_{11}) = V'; \quad \mu_1^1 = V'; \\ \mu_{22} &= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{22} + V \gamma'_{22}) = V R R'; \quad \mu_2^2 = V \frac{R'}{R} = \mu_3^3, \\ T &= \frac{1}{2} \left(\left((V')^2 + 2 \left(V \frac{R'}{R} \right)^2 \right) - \left(V' + 2 V \frac{R'}{R} \right)^2 \right) R^2 = \\ &\quad -2 V V' R R' - V^2 R'^2.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Из уравнений связи нетривиально лишь радиальное, получающееся из (8.2) вариацией по V :

$$\frac{\delta T}{\delta V} = - \left(\frac{\partial T}{\partial V'} \right)' + \frac{\partial T}{\partial V} = 2 V R R'' = 0,$$

откуда $R = a r + b$. Требование несингулярности метрики при $r \rightarrow 0$ приводит к $R = r$, и пространство оказывается плоским, поэтому потенциальную энергию и не надо вычислять — лагранжиан равен кинетической энергии.

1.1. Поле сферической массы

Для вычисления токов лучше использовать средства компьютерных аналитических вычислений, например, описанные в разделе 4 для пакета Mathematica.

Из динамических уравнений не равны нулю q_1^1 , $q_2^2 = q_3^3$, однако при выполнении первого уравнения второе выполняется автоматически вследствие тождеств Гильберта. Компонента

$$q_1^1 = \frac{V (2 r V' + V)}{r^2} = \frac{(r V^2)'}{r^2}\tag{8.3}$$

в вакууме равна нулю, откуда

$$r V^2 = \text{const} \equiv 2 k M \geq 0,$$

где k — абсолютная константа — гравитационная постоянная, а M — константа интегрирования — может трактоваться как масса тела в центре, причем она должна быть неотрицательной (в то время как в ОТО вопрос

о неотрицательности массы оброс многими искусственными гипотезами — отсутствие “голых сингулярностей” и пр.).

Радиальное поле скоростей — “поле Бьерна”

$$V^r = V = \sqrt{\frac{2kM}{r}} \quad (8.4)$$

делает это пространство неинерциальным и отличает от инерциального евклидова пространства.

1.2. Поле заряженной частицы

При наличии сферически-симметричного электростатического поля в уравнение (8.3) добавится компонента T_1^1 тензора энергии-импульса этого поля

$$q_1^1 = \frac{(rV^2)'}{r^2} = -\frac{q^2}{r^4},$$

откуда

$$V = \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{q^2}{r^2}} \quad (8.5)$$

при плоском пространстве.

Как и для вакуумного решения (8.4), это решение имеет плотность энергии, всюду равную нулю.

1.3. Нестационарное поле скоростей вакуума

Наиболее простое нестатическое сферически симметричное решение с плоским пространством без источников определяется единственным уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial t} + VV' + \frac{V^2}{2r} = 0. \quad (8.6)$$

Можно выбрать V в виде $V(r, t) = k(t)r$, тогда уравнение (8.6) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка на $k(t)$:

$$\dot{k} + \frac{3}{2}k^2 = 0; \quad k = \frac{2}{3t}; \quad V(r, t) = \frac{2r}{3t}.$$

Его можно переписать в векторном виде:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{2\mathbf{r}}{3t}, \quad (8.7)$$

инвариантно относительно переноса центральной точки. Вычислим поле скоростей в двух точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{2\mathbf{r}_1}{3t}; \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}(\mathbf{r}_2, t) = \frac{2\mathbf{r}_2}{3t}$$

и вычислим их разность

$$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \frac{2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{3t},$$

повторяющую формулу (8.7), как если бы центром была точка $\mathbf{r}_1$. Таким образом, несмотря на сферическую симметрию, решение оказывается однопородным.

2. Космологические задачи

Наиболее простыми решениями ТГВ являются космологические модели, где динамические переменные зависят только от времени, то есть с точки зрения механики — это задачи с конечным числом степеней свободы, а не задачи теории поля.

Почти все такие задачи описываются в глобальной инерциальной системе, где поле абсолютных скоростей равно нулю всюду.

2.1. Динамика плоского мира

Пространство плоское, однако расстояние между точками его может меняться за счет глобального масштаба $m(t)$, который может изменяться с течением времени:

$$dl^2 = m^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2); \quad \sqrt{\gamma} = m^3. \quad (8.8)$$

Скалярная кривизна, определяющая потенциальную энергию пространства, равна нулю, поэтому гамильтониан определяется только кинетической энергией:

$$\mu_j^i = \frac{\dot{m}}{m} \delta_j^i; \quad \mu = 3 \frac{\dot{m}}{m}; \quad H = \frac{m^3}{2} (\mu_j^i \mu_i^j - \mu^2) = -3 \dot{m}^2 m.$$

Динамику масштаба можно определить из закона сохранения энергии:

$$-3 \dot{m}^2 m = -\frac{4}{3} a^3; \quad m = a t^{2/3}. \quad (8.9)$$

Плотность энергии всюду отрицательна.

Приведем метрику (8.8) к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} dl^2 &= m^2(t) (dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) = \\ &= m^2 dr^2 + R^2(r, t) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2); \quad R(r, t) = m(t) r. \end{aligned}$$

Перейдем теперь от переменной r к переменной R :

$$dR = m dr + \frac{\dot{m}}{m} R dt; \quad m dr = dR - \frac{\dot{m}}{m} R dt$$

и обозначим

$$\frac{\dot{m}}{m} R = \frac{2R}{3t} \equiv V,$$

после чего метрика становится свклидовой, неизменной во времени, а поле скоростей принимает вид (8.7).

Одна и та же задача решена в различных координатах.

2.2. Динамика сферического мира

Очень интересной является космологическая модель трехмерной сферы с радиусом, зависящим от времени. Геометрические свойства трехмерной сферы были изложены в разделе 4.1 “Трехмерная сфера”. Метрика пространства

$$dl^2 = r^2(t) d\sigma_3^2,$$

где $d\sigma_3^2$ — метрика на трехмерной сфере единичного радиуса (3.36), определяет кинетическую энергию, пропорциональную

$$T = -3 \left(\frac{\dot{r}}{r} \right)^2 r^3.$$

Для трехмерной сферы радиуса r трехмерная скалярная кривизна (3.44)

$$R = \frac{6}{r^2}, \quad \sqrt{\gamma} = r^3$$

и гамильтониан (7.17) отрицательно определен:

$$H = -3r(\dot{r}^2 + 1). \quad (8.10)$$

Постоянство гамильтониана приводит к дифференциальному уравнению первого порядка:

$$-H = 3r(\dot{r}^2 + 1) = 3r_{\max},$$

являющемуся дифференциальным уравнением циклоиды. Это решение — вакуумное, где $r_{\max}$ — константа интегрирования. К этим уравнениям можно добавить и источники, причем если в качестве источника берется только когерентная пылевидная материя, то она дает лишь вклад в суммарную плотность энергии, то есть, не меняя характера решений, изменяет лишь константу $r_{\max}$.

В теории глобального времени динамика пространства может происходить и без материи, поэтому понятие *критическая плотность*, введенное общей теорией относительности, в ТГВ отсутствует.

2.3. Открытая космологическая модель

В предыдущем параграфе рассматривалась динамика однородного, изотропного пространства с положительной кривизной — трехмерной сферы. Однако возможна геометрия однородного, изотропного пространства с отрицательной кривизной — пространства Лобачевского (псевдосферы).

С точки зрения динамики кинетическая энергия выражается в точности как и для сферы, а выражение для потенциальной энергии меняет знак. В результате выражение для энергии сферы (8.10) переходит в

$$H = -3r(\dot{r}^2 - 1). \quad (8.11)$$

Если для сферы энергия отрицательно определена, то для сферы она закононеопределена и динамика качественно различна для решений с отрицательной и положительной энергией.

При отрицательной энергии $E = -3a$ закон сохранения энергии приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{1 + \frac{a}{r}}. \quad (8.12)$$

При стремлении r к нулю скорость стремится к бесконечности, и в окрестности $r \approx 0$ это уравнение, как и уравнение динамики сферы, переходит в уравнение динамики плоского пространства (8.9) с решением $r \sim t^{2/3}$. То есть при отрицательной энергии все три однородные,

изотропные модели допускают подход к нулевому радиусу (или масштабу) с одинаковым законом зависимости от времени.

Совершенно по-иному ведут себя решения с положительной энергией. Уравнение динамики в этом случае получается из (8.12) заменой a на $-a$:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{1 - \frac{a}{r}}. \quad (8.13)$$

Решения этого дифференциального уравнения не могут достигать точки $r = 0$. Минимально допустимое значение радиуса $r = a$.

Это уравнение решается в параметрическом виде

$$r = a \operatorname{ch}^2 \frac{\chi}{2};$$

$$\dot{r} = a \operatorname{ch} \frac{\chi}{2} \operatorname{sh} \frac{\chi}{2} \dot{\chi} = \frac{\operatorname{sh} \frac{\chi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\chi}{2}}.$$

Отсюда находится зависимость $t(\chi)$:

$$\frac{dt}{d\chi} = a \operatorname{ch}^2 \frac{\chi}{2} = \frac{a}{2} (\operatorname{ch} \chi - 1); \quad t = \frac{a}{2} (\operatorname{sh} \chi - \chi).$$

В процессе сжатия радиус уменьшается до минимального $r = a$, а затем снова происходит расширение.

При положительной энергии в открытой космологической модели сингулярность Большого взрыва отсутствует.

2.4. Решение с нулевой энергией

Большой теоретический интерес представляет решение с энергией, равной нулю. Из (8.11) получаем дифференциальное уравнение и его решения

$$\dot{r}^2 = 1; \quad r = \pm t. \quad (8.14)$$

Это решение является, например, пределом от решений с отрицательной энергией, оно также имеет сингулярность $r = 0$. Имея нулевую энергию, оно является также и решением общей теории относительности. К анализу смысла этого решения мы вернемся в соответствующем разделе главы об ОТО.

3. Конформная динамика как «темная энергия»

Рассмотрим исключительно важную и достаточно простую космологическую модель — динамику конформно плоского мира, выбрав метрику в виде

$$dt^2 = e^{2u(t,x,y,z)} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (8.15)$$

Три уравнения связей (получающиеся вариацией действия по полю скоростей) для этой метрики

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0 \quad (8.16)$$

приводят к отделению временной части от пространственной:

$$u(t, x, y, z) = v(t) + w(x, y, z). \quad (8.17)$$

Шесть динамических уравнений (получающиеся вариацией действия по метрическому тензору)

$$(2\ddot{u} + 3\dot{u}^2)\delta_j^i = (2\ddot{v} + 3\dot{v}^2)\delta_j^i = G_j^i \quad (8.18)$$

приводят не только к требованию постоянства (по координатам) скалярной кривизны, но и однородности пространства в целом. В уравнениях (8.18) G_j^i — тензор Эйнштейна трехмерного пространства.

Чисто конформная динамика требует однородности пространства.

Если, например, при построении моделей фридмановского типа пространство выбиралось однородным для простоты решения, то в чисто конформной динамике пространство оказывается однородным вследствие динамических уравнений.

Рассмотренная модель дает ответ на ряд существенно важных вопросов:

- Если какие-то материальные объекты передают свою энергию или часть ее конформной моде, это приводит к возрастанию однородности пространства.
- Возможная нелинейная перекачка энергии из гравитационных мод с положительной энергией, определяемых пространственной неоднородностью, в конформные моды приводит к затуханию этих неоднородностей.

- Так как конформная мода однородна во всем пространством в целом, то коэффициенты связи различных локальных материальных образований (пакет электромагнитных волн, например) с конформной модой, определяющие переход энергии в конформную моду, ничтожно малы и, несмотря на наличие моды с отрицательной энергией, мир с положительной энергией развивается почти независимо от этой моды.

Это решение объясняет наблюдаемую однородность расширения Вселенной, приписываемую на уровне ОТО «темной энергии».

4. Вихревое поле

Следующая задача — о вихревом поле. В целом уравнения ТГВ нелинейны, однако уравнения связей на поле скоростей линейны по этому полю. Эта задача интересна тем, что единственное уравнение связи на единственную — вихревую — компоненту поля скоростей не зависит от компонент метрического тензора и, будучи определяющим, решение обеспечивает принцип суперпозиции, представляя, в частности, серию мультипольных решений.

Метрика стационарна, осесимметрична и её можно привести к виду:

$$dl^2 = e^{w(r,\vartheta)} (dr^2 + r^2 d\vartheta^2) + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (8.19)$$

Поле абсолютных скоростей, также зависящее от r и ϑ , — поле вращения $V^\varphi = \Omega(r, \vartheta)$. Тензор скоростей деформации пространства

$$\mu_1^3 = \frac{1}{2} \Omega_{,r}, \quad \mu_3^1 = \frac{r^2}{2} e^{-w} \Omega_{,r} \sin(\omega t);$$

$$\mu_2^3 = \frac{1}{2} \Omega_{,\vartheta}, \quad \mu_3^2 = \frac{1}{2} e^{-w} \Omega_{,\vartheta} \sin(\omega t),$$

определяет импульсы

$$\pi_3^1 = \frac{r^4}{2} \Omega_{,r} \sin^3 \vartheta; \quad \pi_1^3 = \frac{r^2}{2} e^w \Omega_{,r} \sin \vartheta;$$

$$\pi_3^2 = \frac{r^2}{2} \Omega_{,\vartheta} \sin^3 \vartheta; \quad \pi_2^3 = \frac{r^2}{2} e^w \Omega_{,\vartheta} \sin \vartheta.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{r^4 c^2}{32\pi k} \left(\Omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2} \Omega_{,\vartheta}^2 \right) \sin^3 \vartheta \quad (8.20)$$

определяется только вихревым полем Ω и не зависит от метрической функции w .

Из единственной нетривиальной связи для V^φ при отсутствии источника следует уравнение на Ω :

$$\Omega_{,rr} + \frac{4}{r} \Omega_{,r} + \frac{1}{r^2} (\Omega_{,\vartheta\vartheta} + 3 \operatorname{ctg} \vartheta \Omega_{,\vartheta}) = 0. \quad (8.21)$$

Замечательно, что это линейное дифференциальное уравнение второго порядка не зависит от метрической функции $w(r, \vartheta)$.

Собственные токи

$$b_1^1 = -b_2^2 = \frac{1}{4} e^{-w} \sin(\omega t) (r^2 \Omega_{,r}^2 - \Omega_{,\vartheta}^2);$$

$$b_2^1 = r^2 b_1^2 = \frac{1}{2} e^{-w} r^2 \sin(\omega t) \Omega_{,r} \Omega_{,\vartheta};$$

$$b_3^3 = -\frac{3}{4} e^{-w} \sin(\omega t) (r^2 \Omega_{,r}^2 + \Omega_{,\vartheta}^2)$$

вместе с тензором Риччи, определяемым метрикой (8.19)

$$R_{11} = -\frac{1}{2r^2} (r^2 w_{,rr} + w_{,\vartheta\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta w_{,\vartheta});$$

$$R_{12} = \frac{1}{2r} (w_{,\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta r w_{,r});$$

$$R_{22} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \vartheta w_{,\vartheta} - w_{,\vartheta\vartheta} - 2r w_{,r}),$$

приводят к уравнениям на метрику, из которых вследствие тождеств Гильберта независимы только два, определяющие производные от функции w через вихревое поле Ω :

$$w_{,r} = \frac{r}{2c^2} (\Omega_{,\vartheta}^2 - r^2 \Omega_{,r}^2 - 2 \operatorname{ctg} \vartheta r \Omega_{,r} \Omega_{,\vartheta}) \sin^4 \vartheta;$$

$$w_{,\vartheta} = \frac{r^2}{2c^2} (\operatorname{ctg} \vartheta (r^2 \Omega_{,r}^2 - \Omega_{,\vartheta}^2) - 2r \Omega_{,r} \Omega_{,\vartheta}) \sin^4 \vartheta. \quad (8.22)$$

При выполнении этих соотношений, а также уравнения (8.21) на Ω все уравнения динамики и связи удовлетворяются.

Плотность энергии теперь выражается только через производные от Ω :

$$\varepsilon \sqrt{\gamma} = \frac{r^2 c^2}{8\pi k} (r^2 \Omega_{,r}^2 + \Omega_{,\vartheta}^2) \sin^3 \vartheta, \quad (8.23)$$

а кинетическая энергия ровно в четыре раза меньше. Это есть следствие *теоремы о вириале пространства*.

Полная энергия в некоторой области B без источников

$$E_B = 2\pi \int_B \varepsilon \sqrt{\gamma} dr d\vartheta \quad (8.24)$$

положительно определена и достигает экстремума на решениях уравнения (8.21).

Для рассматриваемой задачи выполнены все условия для применения теоремы вириала (7.13).

Для определения кинетической энергии нужно знать поле абсолютных скоростей в рассматриваемой области, информацию о котором могут дать видимые звезды, а теорема о вириале позволяет вычислить полную энергию.

4.1. Слабый принцип суперпозиции

Итак, решение задачи о нахождении стационарного вихревого поля в пространстве состоит в решении линейного дифференциального уравнения (8.21) при заданных граничных условиях, после чего уравнения (8.22) определяют метрическую функцию $w(r, \vartheta)$.

Несмотря на то что в целом задача является нелинейной, первая (главная) задача — нахождение вихревого поля $\Omega(r, \vartheta)$ — является линейной и для нее выполняется принцип суперпозиции. То есть любое поле Ω может быть представлено как суперпозиция некоторых базовых решений. Уравнения (8.22) для нахождения поля $w(r, \vartheta)$ квадратичны по производным поля Ω , и решение в целом не является суперпозицией частных решений.

4.2. Мультипольные решения

Дифференциальное уравнение (8.21) однородно по радиусу r , поэтому его частные решения можно искать в виде степенного ряда

$$\Omega(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+3}} \right) P_l(\cos \vartheta). \quad (8.25)$$

Для угловой части дифференциальное уравнение (где $x = \cos \vartheta$):

$$(x^2 - 1)P_l'' + 4xP_l' - l(l+3)P_l = 0. \quad (8.26)$$

Его решения при целых l — полиномы Гегенбауэра с $\alpha = 3/2$ — являются основой сферических функций в пятимерном пространстве. В частности, при $l = -3$ (как и при $l = 0$) решением уравнения (8.26) является константа, то есть в целом для уравнения (8.21) имеется *монопольное решение*

$$\Omega_0(r, \vartheta) = \frac{1}{r^3}. \quad (8.27)$$

Оно определяет *производящую функцию* полиномов

$$\frac{1}{(1 - 2sx + s^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)}{2} P_l(x) s^l. \quad (8.28)$$

При таком определении $P_l(1) = 1$ — как и для полиномов Лежандра.

Хотя эти полиномы хорошо известны, приведем первые пять:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = x; \quad P_2 = \frac{1}{4}(5x^2 - 1);$$

$$P_3 = \frac{1}{4}x(7x^2 - 3); \quad P_4 = \frac{1}{8}(21x^4 - 14x^2 + 1).$$

Эти полиномы ортогональны с весом $(1 - x^2)$, при этом

$$\int_{-1}^1 P_l^2(x) (1 - x^2) dx = \frac{8}{(l+1)(l+2)(2l+3)}. \quad (8.29)$$

При $x = 0$ производящая функция (8.28) принимает вид:

$$\frac{1}{(1 + s^2)^{3/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2} s^{2m},$$

что определяет значение четных полиномов при $x = 0$ (нечетные равны нулю):

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{(m!)^2(m+1)2^{2m}}. \quad (8.30)$$

Каждому *чистому* мультипольному решению $\Omega_l = a r^l P_l(\cos \vartheta)$ соответствует мультипольное решение

$$w_l(r, \vartheta) = a^2 r^{2(l+1)} \sin^4 \vartheta \frac{1}{4(l+1)} (2l \operatorname{ctg} \vartheta P_l P_{l,\vartheta} - P_{l,\vartheta}^2 + l^2 P_l^2) \quad (8.31)$$

и плотность энергии

$$\varepsilon \sqrt{\gamma} = a^2 r^{2(l+1)} \sin^3 \vartheta (P_{l,\vartheta}^2 + l^2 P_l^2). \quad (8.32)$$

Однако если вихревое поле Ω является суперпозицией мультипольных решений, то возникает интерференция и функция w не является суперпозицией функций составляющих ее монополей.

4.3. Поле с кольцевым источником

Задача о нахождении вихревого поля в математической части совпадает с задачей теории потенциала в пятимерном пространстве. Поэтому сразу можно сказать, что всюду регулярного ограниченного вихревого поля без источников не существует.

Наиболее естественным источником для вихревого поля представляется крутовой ток — тела, вращающиеся вокруг общей оси наподобие колец Сатурна. Аналогичная задача в пятимерной электростатике — поле заряженного тонкого кольца (нити) радиуса R . Задача осесимметрична, и вихревое поле вне радиусов источника может быть представлено суперпозицией мультиполей. Мультипольные коэффициенты можно найти из разложения потенциала на оси (при $\vartheta = 0$, $P_l = 1$ при всех l):

$$\Omega(z) = \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \begin{cases} \frac{Q}{R^3} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{z}{R}\right)^{2m} & z < R \\ \frac{Q}{z^3} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{R}{z}\right)^{2m} & z > R \end{cases},$$

где

$$A_m = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{2^{2m} (m!)^2}.$$

Так как на оси $z = r \cos \vartheta = 1$, то это есть разложение по четным мультиполям

$$\Omega = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m+1)!}{2^{2m} (m!)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m} P_{2m}(\cos \vartheta)$$

при $r < R$ и аналогично во внешней области. Если источник кольцевой находится в "плоскости" симметрии при $\cos \vartheta = 0$, вклад в разложение дают только четные полиномы, подставляя значение которых из (8.30), получаем при $r < R$

$$\Omega(r) = \frac{Q}{R^3} \sum \frac{(2m!)(2m+1)!}{(m+1)(m!)^4 2^{4m}} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m}.$$

Вихревое поле возрастает с ростом радиуса.

При $r > R$

$$\Omega(r) = \frac{Q}{r^3} \sum \frac{(2m!)(2m+1)!}{(m+1)(m!)^4 2^{4m}} \left(\frac{R}{r}\right)^{2m}$$

— с ростом радиуса поле убывает.

Как мы видели ранее, вращающиеся частицы, чтобы быть источниками, должны двигаться относительно пространства, т.е. относительно принятой неинерциальной системы их скорости должны быть отличными от скорости пространства.

4.4. Энергия

Для представления о космических энергиях рассмотрим следующую задачу. Шар радиуса R равномерно вращается с угловой скоростью Ω когерентно. Это значит, что на поверхности шара скорость вращения совпадает с полем абсолютных скоростей пространства, то есть вне шара поле угловых скоростей определяется монопольным решением

$$\omega(r) = \Omega \frac{R^3}{r^3}. \quad (8.33)$$

При этом плотность энергии вне шара (внутри шара поле однородно и плотность энергии равна нулю):

$$\varepsilon = \frac{9 \Omega^2 R^6 \sin^2 \theta}{r^6},$$

а полная энергия пространства вне шара (уже в размерном виде):

$$E = \frac{c^4}{16\pi k} 9 \Omega^2 R^6 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_R^\infty \frac{r^2 dr}{r^6} = \frac{R^3 \Omega^2 c^2}{2k} \equiv M c^2, \quad (8.34)$$

где за M мы обозначили эквивалентную массу (это не масса шара)

$$M = \frac{R^3 \Omega^2}{2k}. \quad (8.35)$$

Возьмем, например, шар диаметром 20 см. ($R = 0.1$ м), делающий 1 оборот в секунду ($\Omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$). Получим $M = 300\,000\,000$ кг. Для вовлечения пространства вне шара в когерентное с ним вращение нужно затратить энергию, выделяемую при аннигиляции 300 тысяч тонн вещества. Поэтому лабораторные эксперименты с вихрями в пространстве представляются не очень реальными.

Этот же пример разъясняет, почему наше пространство с высокой степенью точности евклидово: в выражении для энергии перед кривизной пространства стоит громадный численный множитель $c^4/(16\pi k)$. Это говорит о том, что малейшие отклонения от евклидова пространства требуют громадных затрат энергии.

Наше пространство (почти) евклидово не из-за красоты и изящества евклидовой геометрии, а вследствие того, что такое пространство имеет минимальную энергию.

5. Плоская анизотропная модель

Рассмотрим анизотропную космологическую задачу, где компоненты метрики зависят только от времени, но метрика не диагональна:

$$dl^2 = \gamma_{ij}(t) dx^i dx^j \equiv r^{4/3}(t) \lambda_{ij}(t) dx^i dx^j; \quad (8.36)$$

где λ_{ij} — матрица с единичным детерминантом, а $\sqrt{\gamma} = r^2$.

$$\mu_i^k = \frac{1}{2} \gamma^{kj} \dot{\gamma}_{ji} = \frac{2}{3} \frac{\dot{r}}{r} \delta_i^k + \frac{1}{2} \lambda^{kj} \dot{\lambda}_{ji}; \quad \mu_i^i = 2 \frac{\dot{r}}{r}.$$

Так как метрика от пространственных координат не зависит, потенциальная энергия в гамильтониане отсутствует:

$$T = r^2 \frac{L^2}{2} - \frac{4}{3} \dot{r}^2, \quad (8.37)$$

где величина

$$L^2 = \frac{1}{4} \lambda^{ij} \dot{\lambda}_{jk} \lambda^{kl} \dot{\lambda}_{li}$$

не зависит от масштаба r . Для вычисления L^2 нужно как-то параметризовать унимодулярную 3×3 матрицу λ_{ij} . Когда она диагональна, ее можно параметризовать двумя функциями времени:

$$A = \begin{bmatrix} e^{\frac{2}{3}\mu+2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2}{3}\mu-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{4}{3}\mu} \end{bmatrix}.$$

В общем же случае она приводится к диагональному виду ортогональной матрицей O , которую можно параметризовать углами Эйлера ϑ, φ, ψ :

$$(\gamma_{ij}) = O \cdot A \cdot O^T; \quad (\gamma^{ij}) = O \cdot A^{-1} \cdot O^T.$$

Матрица μ_j^i , определяющая кинетическую энергию:

$$(\mu_j^i) = \frac{1}{2}(\gamma^{ik}\dot{\gamma}_{kj}) = O \cdot A^{-1} \cdot \dot{\Omega} \cdot A \cdot O^T + O \cdot A^{-1} \cdot \dot{A} \cdot O^T - O \cdot \dot{\Omega} \cdot O^T, \quad (8.38)$$

где $\dot{\Omega} = \dot{O} \cdot O^T$.

Квадратичная форма, определяющая кинетическую энергию, после подстановки производных от матриц принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}\mu_j^i \mu_i^j = & \frac{\dot{\mu}^2}{6} + \frac{\dot{\nu}^2}{2} + \frac{1}{2}(\text{sh}^2(2\nu)\dot{\varphi}^2 + \\ & (\text{sh}^2(\mu - \nu)\cos^2\varphi + \text{sh}^2(\mu + \nu)\sin^2\varphi)\dot{\vartheta}^2 - \\ & - 2\text{sh}(2\mu)\text{sh}(2\nu)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\dot{\vartheta}\dot{\psi} + 2\text{sh}^2(2\nu)\cos\vartheta\dot{\varphi}\dot{\psi} + \\ & + (\text{sh}^2(2\nu)\cos^2\vartheta + (\text{sh}^2(\mu + \nu)\cos^2\varphi + \text{sh}^2(\mu - \nu)\sin^2\varphi)\sin^2\vartheta)\dot{\psi}^2). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Введением линейных комбинаций скоростей

$$l_1 = \dot{\vartheta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi; \quad l_2 = \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi; \quad l_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta \quad (8.40)$$

это выражение упрощается:

$$T_1 = \frac{r^2 L^2}{2} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\dot{\mu}^2}{3} + \dot{\nu}^2 + \text{sh}^2(\mu + \nu)l_1^2 + \text{sh}^2(\mu - \nu)l_2^2 + \text{sh}^2(2\nu)l_3^2 \right). \quad (8.41)$$

Теперь введем импульсы, канонически сопряженные углам ϑ , φ , ψ :

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2 (\text{sh}^2(\mu + \nu) \sin \varphi l_1 + \text{sh}^2(\mu - \nu) \cos \varphi l_2); \quad (8.42)$$

$$p_{\psi} = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\psi}} =$$

$$r^2 (\text{sh}^2(2\nu) \cos \vartheta l_3 - \text{sh}^2(\mu + \nu) \sin \vartheta \cos \varphi l_1 + \text{sh}^2(\mu - \nu) \sin \vartheta \sin \varphi l_2);$$

$$p_{\varphi} = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \text{sh}^2(2\nu) l_3.$$

Для выражения скоростей через импульсы найдем следующие соотношения:

$$r^2 (\text{sh}^2(\mu - \nu) \cos \varphi l_2 + \text{sh}^2(\mu + \nu) \sin \varphi l_1) = p_{\vartheta};$$

$$r^2 (\text{sh}^2(\mu - \nu) \sin \varphi l_2 - \text{sh}^2(\mu + \nu) \cos \varphi l_1) = p_{\varphi},$$

где введена линейная по импульсам функция

$$p = \frac{p_{\psi} - \cos \vartheta p_{\varphi}}{\sin \vartheta}. \quad (8.43)$$

Отсюда окончательно получим:

$$l_1 = \frac{p_{\vartheta} \sin \varphi - p \cos \varphi}{r^2 \text{sh}^2(\mu + \nu)} \equiv \frac{p_1}{r^2 \text{sh}^2(\mu + \nu)}; \quad (8.44)$$

$$l_2 = \frac{p_{\vartheta} \cos \varphi + p \sin \varphi}{r^2 \text{sh}^2(\mu - \nu)} \equiv \frac{p_2}{r^2 \text{sh}^2(\mu - \nu)};$$

$$l_3 = \frac{p_{\varphi}}{r^2 \text{sh}^2(2\nu)} \equiv \frac{p_3}{r^2 \text{sh}^2(2\nu)}$$

с соответствующим определением p_1 , p_2 и p_3 .

Коммутационные соотношения (скобки Пуассона)

$$\{p, p_{\varphi}\} = 0; \quad \{p, p_{\vartheta}\} = \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}$$

приводят к коммутационным соотношениям

$$\{p_1, p_2\} = -p_3; \quad \{p_2, p_3\} = -p_1; \quad \{p_3, p_1\} = -p_2. \quad (8.45)$$

совпадающими с коммутационными соотношениями инфинитезимальных операторов группы трехмерных вращений. Отсюда следует, что оператор квадрата момента

$$P^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \quad (8.46)$$

коммутирует с p_1, p_2, p_3 и, следовательно, с гамильтонианом, являясь, таким образом, интегралом движения.

Подставив теперь l_i , получим составляющую гамильтониана (8.41)

$$T_1 = \frac{B}{r^2} = \frac{1}{2r^2} \left(3p_\mu^2 + p_\nu^2 + \frac{p_3^2}{\text{sh}^2(2\nu)} + \frac{p_1^2}{\text{sh}^2(\mu + \nu)} + \frac{p_2^2}{\text{sh}^2(\mu - \nu)} \right) \quad (8.47)$$

и сам гамильтониан

$$H = \frac{B}{r^2} - \frac{3}{16} p_r^2 = \frac{B}{r^2} - \frac{4}{3} \dot{r}^2. \quad (8.48)$$

Функция B положительно определена и коммутирует с гамильтонианом, а потому является константой, которую запишем как $B = l^2/3$. Уравнение динамики масштаба определяется законом сохранения энергии $T = -M$:

$$T = \frac{l^2}{3r^2} - \frac{4}{3} \dot{r}^2 = -M, \quad (8.49)$$

откуда

$$\dot{r}^2 = \frac{3}{4} M + \frac{l^2}{4r^2}.$$

Решение этого уравнения

$$\sqrt{\gamma} = r^2 = lt + \frac{3}{4} M t^2. \quad (8.50)$$

Константа интегрирования выбрана так, что $\sqrt{\gamma} = 0$ при $t = 0$.

Интересно проследить и за динамикой переменных $\mu, \nu, \vartheta, \varphi, \psi$, определяющих сдвиговую деформацию метрического тензора (объединим их в набор $\xi^i, i = 1 \dots 5$) и сопряженных им импульсов η_i . Их динамика определяется функцией B :

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial B}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial B}{\partial \xi^i}.$$

Можно ввести переменную τ :

$$d\tau = \frac{dt}{r^2} = \frac{dt}{lt + 3/4 Mt^2}; \quad t = \frac{4l}{3M} \frac{e^{l\tau}}{1 - \frac{3M}{4l} e^{l\tau}}.$$

Динамика сдвиговых параметров в этой переменной не зависит от динамики масштаба r :

$$\frac{d\xi^i}{d\tau} = \frac{\partial B}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{d\tau} = -\frac{\partial B}{\partial \xi^i}.$$

6. Однородное электрическое поле

В классической физике однородное статическое электрическое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако его тензор энергии-импульса является источником в уравнениях динамики пространства, и решение в целом оказывается нестационарным.

Электрическое поле выделяет одномерную прямую вдоль поля и ортогональную ей плоскость, масштабы в которых могут меняться с течением времени независимо друг от друга:

$$dl^2 = m^2(t)dx^2 + R^2(t)(dy^2 + dz^2); \quad \sqrt{\gamma} = m R^2. \quad (8.51)$$

Пространство в каждый момент является евклидовым с нулевой кривизной, поэтому лагранжиан чистой гравитации имеет только кинетическую энергию:

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\dot{m}}{m} \right)^2 + 2 \left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} \right)^2 - \left(\frac{\dot{m}}{m} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right) m R^2 = \\ &= -(2 R \dot{m} \dot{R} + m \dot{R}^2). \end{aligned} \quad (8.52)$$

Больше не нужно никаких вычислений, связанных с кривизной четырехмерного пространства.

Электромагнитное поле определяется единственной компонентой векторного потенциала $A_x(t) \equiv A$:

$$E \equiv F_{x0} = \dot{A}; \quad F^{0x} = \frac{\dot{A}}{m^2}. \quad (8.53)$$

В лагранжиан электромагнитное поле входит через

$$L_e = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} F^{0x} F_{x0} = \frac{\dot{A}^2 R^2}{2m}.$$

Суммарный лагранжиан гравитационного и электромагнитного полей

$$L = \frac{\dot{A}^2 R^2}{2m} - 2R \dot{m} \dot{R} - m \dot{R}^2. \quad (8.54)$$

Далее идет стандартный процесс решения задачи с заданным лагранжианом. Здесь переменная A циклическая и сопряженный ей импульс является константой:

$$p_A = \frac{\dot{A} R^2}{m} = Q; \quad E = \dot{A} = \frac{m Q}{R^2}. \quad (8.55)$$

Определяя импульсы P_R , P_m через скорости, находим

$$H = \frac{m Q^2}{2R^2} + \frac{m P_m^2}{4R^2} - \frac{P_R P_m}{2R} = -M. \quad (8.56)$$

Константа $-M$ — значение гамильтониана на решении.

Гамильтониан определяет уравнения динамики. Приведем их решение. Зависимость $R(t)$ определяется соотношением:

$$(t - t_0)^2 = \frac{8R_0}{9Q^2} (2R_0 + R)^2 (R - R_0).$$

Масштаб m выражается через масштаб R :

$$m = \frac{2M}{3Q^2 R} (R^2 + 4R_0 R - 8R_0^2) + \frac{b}{R} \sqrt{\frac{R}{R_0} - 1}.$$

Здесь M , Q , R_0 , b — константы интегрирования.

Первое из этих выражений показывает, что масштаб R уменьшается от бесконечности до R_0 , а затем снова растет до бесконечности, то есть в плоскости, перпендикулярной электрическому полю, сингулярности отсутствуют.

При каком-то $R = R_1$, определяемым соотношением констант интегрирования, масштаб m обращается в нуль. Возникает сингулярность, но в отличие от фридмановской сингулярности в ОТО, где весь мир стягивается в точку, здесь весь мир стягивается в плоскость.

7. Динамическая модель В9

Метрика пространства В9 дается выражением (4.22). При переходе к динамике параметры метрики (a, b, c) становятся функциями времени.

7.1. Динамика пространства

В пространстве В9 возможно однородное поле скоростей

$$V^i(\vartheta, \varphi, \psi, t) = \omega_1(t) \mu_{(1)}^i(\vartheta, \varphi) + \omega_2(t) \mu_{(2)}^i(\vartheta, \varphi) + \omega_3(t) \mu_{(3)}^i. \quad (8.57)$$

В общем случае при $a \neq b \neq c$ реперные поля $\mu_{(s)}^i$ уже не являются полями Киллинга и создают добавки в тензор деформации пространства μ_{ij} через тензор

$$K_{ij}^{(s)} = \mu_{i,j}^{(s)} - \mu_{i,i}^{(s)}.$$

У него отличны от нуля только недиагональные компоненты:

$$K_{ij}^{(1)} \mu_{(2)}^i \mu_{(3)}^j = c^2 - b^2; \quad K_{ij}^{(2)} \mu_{(1)}^i \mu_{(3)}^j = a^2 - c^2; \quad K_{ij}^{(3)} \mu_{(1)}^i \mu_{(2)}^j = b^2 - a^2.$$

С учетом этого тензор деформации пространства имеет вид:

$$(\mu_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & \omega_3 \frac{b^2 - a^2}{2a^2} & \omega_2 \frac{a^2 - c^2}{2a^2} \\ \omega_3 \frac{b^2 - a^2}{2b^2} & \dot{b}/b & \omega_1 \frac{c^2 - b^2}{2b^2} \\ \omega_2 \frac{a^2 - c^2}{2c^2} & \omega_1 \frac{c^2 - b^2}{2c^2} & \dot{c}/c \end{pmatrix}. \quad (8.58)$$

Лагранжиан пространства оказывается чисто квадратичным по полю скоростей:

$$L = -(\dot{a}\dot{b}c + \dot{a}b\dot{c} + a\dot{b}\dot{c}) + \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \right) - \frac{a^4 + b^4 + c^4}{4abc} + \\ + \frac{a(b^2 - c^2)^2}{bc} \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{b(a^2 - c^2)^2}{ac} \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{c(a^2 - b^2)^2}{ab} \frac{\omega_3^2}{2}. \quad (8.59)$$

Вследствие этого уравнения связей — равенство нулю производных по ω_s — приводят к равенству нулю поля скоростей в динамике пустого пространства. Однако при наличии других полей (например, электромагнитного) в лагранжиане появляются линейные по ω_s слагаемые, что приводит к глобально неуничтожимым полям скоростей.

7.2. Динамика с однородным электромагнитным полем

Пространство В9 может служить базой для динамики с однородными электрическим и магнитным полями. Однородное электромагнитное поле раскладывается по метрическому реперу $\mu_{(s)i}$:

$$A_i(\vartheta, \varphi, \psi, t) = \sum_{s=1}^3 q_s(t) \mu_{(s)i}(\vartheta, \varphi).$$

При отсутствии поля скоростей лагранжиан электромагнитного поля представляется как сумма трех не связанных друг с другом мод:

$$L_q = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{bc}{a} \dot{q}_1^2 - \frac{a}{bc} q_1^2 \right) + \left(\frac{ac}{b} \dot{q}_2^2 - \frac{b}{ac} q_2^2 \right) + \left(\frac{ab}{c} \dot{q}_3^2 - \frac{c}{ab} q_3^2 \right) \right).$$

При наличии поля скоростей производная по времени заменяется на ковариантную

$$\begin{aligned} D_t q_1 &= \dot{q}_1 + \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2; \\ D_t q_2 &= \dot{q}_2 + \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3; \\ D_t q_3 &= \dot{q}_3 + \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1 \end{aligned}$$

и эти моды взаимодействуют. После выражения производных от потенциалов через сопряженные импульсы гамильтониан электромагнитного поля принимает вид:

$$\begin{aligned} H_q &= \frac{a}{2bc} (p_1^2 + q_1^2) + \frac{b}{2ac} (p_2^2 + q_2^2) + \frac{c}{2ab} (p_3^2 + q_3^2) + \\ &+ \omega_1 (p_2 q_3 - p_3 q_2) + \omega_2 (p_3 q_1 - p_1 q_3) + \omega_3 (p_1 q_2 - p_2 q_1). \end{aligned} \quad (8.60)$$

Вместе с гамильтонианом пространства он образует квадратичную форму по угловым скоростям ω_s :

$$\begin{aligned} H = H_g + H_q = H_0 - \frac{a(b^2 - c^2)^2}{bc} \frac{\omega_1^2}{2} - \frac{b(a^2 - c^2)^2}{ac} \frac{\omega_2^2}{2} - \frac{c(a^2 - b^2)^2}{ab} \frac{\omega_3^2}{2} + \\ + \omega_1 (p_2 q_3 - p_3 q_2) + \omega_2 (p_3 q_1 - p_1 q_3) + \omega_3 (p_1 q_2 - p_2 q_1), \end{aligned} \quad (8.61)$$

где H_0 — гамильтониан при нулевых угловых скоростях. Вариационные уравнения по ω_s приводят к линейным уравнениям, из которых находятся угловые скорости:

$$\omega_1 = \frac{bc(p_2 q_3 - p_3 q_2)}{a(b^2 - c^2)^2}; \quad \omega_2 = \frac{ac(p_3 q_1 - p_1 q_3)}{b(a^2 - c^2)^2}; \quad \omega_3 = \frac{ab(p_1 q_2 - p_2 q_1)}{c(a^2 - b^2)^2}.$$

Подставляя эти значения в (8.61), получим гамильтониан, не содержащий угловых скоростей, но четвертой степени по электромагнитным потенциалам и импульсам:

$$H = H_0 + \frac{bc(p_2q_3 - p_3q_2)^2}{2a(b^2 - c^2)^2} + \frac{ac(p_3q_1 - p_1q_3)^2}{2b(c^2 - a^2)^2} + \frac{ab(p_1q_2 - p_2q_1)^2}{2c(a^2 - b^2)^2}.$$

С математической точки зрения ТГВ представила четырехмерное пространство-время как расслоенное пространство с базой в виде трехмерного риманова пространства и сюрсом в виде оси времени со структурной группой сдвигов вдоль этой оси, приводящей к закону сохранения энергии.

Рассмотренный пример показывает, что это расслоение может быть нетривиальным — поле скоростей всюду здесь неустранимо.

8. Плоские гравитационные волны

В плоской гравитационной волне выделено направление распространения волны x :

$$dl^2 = dx^2 + \gamma_{11}(t, x) dy^2 + 2\gamma_{12}(t, x) dy dz + \gamma_{33}(t, x) dz^2.$$

Для получения наиболее простых уравнений нужно учесть специфику пространства двумерных метрик γ_{ij} , имеющих три компоненты. Детерминант матрицы лучше выделить в явном виде, представив, например, матрицу

$$(\gamma_{ij}) = r \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \chi + \operatorname{sh} \chi \sin \psi & \operatorname{sh} \chi \cos \psi \\ \operatorname{sh} \chi \cos \psi & \operatorname{ch} \chi - \operatorname{sh} \chi \sin \psi \end{pmatrix}; \quad \det(\gamma) = r^2. \quad (8.62)$$

Квадратичный инвариант вариации метрики

$$d\sigma^2 = \frac{1}{2} \gamma^{ij} \gamma^{kl} d\gamma_{ik} d\gamma_{jl} = \frac{dr^2}{r^2} + d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\psi^2$$

представляет геометрию пространства двумерных метрик как прямое произведение прямой, определяемой детерминантом, на двумерное пространство Лобачевского. Явный учет геометрии пространства метрик дает возможность получить уравнения динамики пространства в более простом виде. Метрика в виде (8.62), где каждая компонента зависит от (t, x) , дает две поляризации в неравноправной (полярной) параметризации. Равноправность

двух поляризаций достигается метрикой в виде:

$$dl^2 = dx^2 + r \frac{((1+u)^2 + v^2) dy^2 + 4v dy dz + ((1-u)^2 + v^2) dz^2}{1 - u^2 - v^2}, \quad (8.63)$$

где функции r , u , v зависят от (t, x) . Такой вид метрики приводит к лагранжиану

$$L = \frac{-\dot{r}^2 + r'^2}{4r} - r'' + r \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - u'^2 - v'^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

и уравнению связи в виде

$$\dot{r}' = \frac{\dot{r} r'}{2r} - 2r \frac{\dot{u} u' + \dot{v} v'}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r'^2}{r} \right) + 4r' \frac{\dot{u} u' + \dot{v} v'}{(1 - u^2 - v^2)^2} = 0, \quad (8.64)$$

откуда видно, что поле детерминанта r является нединамическим: его производная по времени определяется не сопряженным ему импульсом, а полями деформаций u и v и сопряженными им импульсами.

Интересной серией решений этой динамической задачи являются бегущие волны, когда все функции зависят от одной переменной $\eta = x - ct$. В этом случае все уравнения — и динамики и связи — сводятся к одному:

$$r'' - \frac{r'^2}{2r} + 2r \frac{u'^2 + v'^2}{(1 - u^2 - v^2)^2} = 0. \quad (8.65)$$

Это значит, что как и в решении Д'Аламбера, функции $u(x - ct)$ и $v(x - ct)$ могут быть выбраны произвольными функциями, а обыкновенное дифференциальное уравнение (8.65) определяет распределение корня из детерминанта — функцию $r(x - ct)$. Однако из-за нелинейности уравнений простой суперпозиции бегущих волн не происходит, что наблюдается лишь в линейном приближении.

ГЛАВА 9

Релятивистская динамика в римановом пространстве

Тяготеющая масса должна, изменяя метрику мира, оказывать влияние почти на все физические явления.

А.А. Фридман

ТГВ включает в себя специальную теорию относительности, определяющую локальные свойства пространства и времени.

Наряду с глобальным временем, в котором происходит развитие мира в целом, у движущегося наблюдателя события развиваются в его локальной системе в *собственном времени*.

1. Движение материальной точки

ТГВ учитывает специальную теорию относительности не только принятием собственного времени для движущихся объектов, но и релятивистским описанием движения материальных точек и света.

Локально в точке нахождения частицы пространство и время метризованы метрикой Минковского. Производные от действия частицы образуют четырехмерный вектор

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}; \quad p_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{E}{c},$$

а пространственные компоненты являются компонентами трехмерного вектора импульса.

В инерциальной системе инвариант этого вектора приводит к релятивистскому уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \gamma^{ij} S_{,i} S_{,j} = m^2 c^2.$$

Если ввести вместо действия S пропорциональную функцию $s = S/mc$, уравнение становится независимым от массы, что и выражает в самом общем виде обнаруженный Галилеем принцип независимости ускорения от массы — свободные частицы разных масс движутся по одним и тем же законам:

$$\frac{1}{c^2} \dot{s}^2 - \gamma^{ij} s_{,i} s_{,j} = 1.$$

В неинерциальной системе производная по времени заменяется на инвариантную, что для скалярной функции — действия — приводит к замене

$$D_t s = \frac{\partial s}{\partial t} + V^i \partial_i s,$$

в результате чего уравнение Гамильтона–Якоби приобретает вид:

$$\frac{1}{c^2} (\dot{s} + V^i s_{,i})^2 - \gamma^{ij} s_{,i} s_{,j} = 1. \quad (9.1)$$

Это уравнение и определяет движение свободных частиц в различных динамических римановых пространствах.

Из него следует гамильтониан движущейся частицы

$$H = \frac{1}{2} \left(\gamma^{ij} p_i p_j - \left(\frac{e}{c} + V^i p_i \right)^2 + 1 \right). \quad (9.2)$$

Уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial e} = -\frac{1}{c} \left(\frac{e}{c} + V^i p_i \right); \\ \frac{dx^i}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \gamma^{ij} p_j - V^i \left(\frac{e}{c} + V^i p_i \right); \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\frac{de}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad (9.4)$$

Из первой пары следует

$$\frac{dx^i}{d\tau} - V^i \frac{dt}{d\tau} = \gamma^{ij} p_j; \quad p_k = \gamma_{ki} \left(\frac{dx^i}{d\tau} - V^i \frac{dt}{d\tau} \right);$$

$$c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \gamma_{ij} \left(\frac{dx^i}{d\tau} - V^i \frac{dt}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^j}{d\tau} - V^j \frac{dt}{d\tau} \right) = 1,$$

откуда следует, что параметр

$$d\tau = \sqrt{c^2 dt^2 - \gamma_{ij} (dx^i - V^i dt)(dx^j - V^j dt)} \quad (9.5)$$

— релятивистский интервал.

При наличии электромагнитного поля гамильтониан корректируется векторным потенциалом электромагнитного поля A_i и зависит от отношения заряда к массе движущейся частицы $q/(mc)$. Он представляется как

$$H = \frac{1}{2} \left(\gamma^{ij} \left(p_i - \frac{q}{mc} A_i \right) \left(p_j - \frac{q}{mc} A_j \right) - \left(\frac{e}{c} - \phi + V^i \left(p_i - \frac{q}{mc} A_i \right) \right)^2 + 1 \right). \quad (9.6)$$

2. Движение частиц в поле Бьерна

Мы уже рассматривали в классической, нерелятивистской области движение частиц в поле Бьерна — в поле скоростей, создаваемом сферически симметричным телом.

Теперь мы рассмотрим ту же задачу для релятивистских частиц — с учетом теории относительности. Пространство плоское. Вследствие сферической симметрии задачи удобно работать в сферической системе координат:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Поле скоростей радиально

$$V^r = V = \sqrt{\frac{2kM}{r}}, \quad (9.7)$$

и уравнение (9.1) принимает вид

$$\frac{1}{c^2} (p_t + V p_r)^2 - \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \right) = 1.$$

Гамильтониан (9.2) представляется как

$$\mathcal{H} = \frac{1-p_t^2}{2} - \sqrt{\frac{2M}{r}} p_t p_r + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{p_r^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2}, \quad (9.8)$$

где, как и в нерелятивистском случае, введен оператор квадрата полного момента

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}, \quad (9.9)$$

коммутирующий с гамильтонианом, что позволяет провести поворот в координатах θ, φ так, чтобы траектория движения лежала в сечении $\theta = \pi/2$ при $\dot{\theta} = p_\theta = 0, \dot{\varphi} = 0$.

Циклическими переменными являются t и φ , что приводит к сохранению энергии $p_t = \epsilon$ и момента $p_\varphi = l$. При этом гамильтониан принимает вид:

$$\mathcal{H} = \frac{1-\epsilon^2}{2} \mp V \epsilon p_r + \frac{1}{2} \left(U p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} \right); \quad (9.10)$$

$$V = \sqrt{\frac{2M}{r}}; \quad U = 1 - \frac{2M}{r}.$$

Его величина равна нулю.

Выразим импульс p_r из условия равенства нулю гамильтониана (9.10):

$$p_r = \frac{\epsilon V}{1-V^2} \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 V^2 - (1-\epsilon^2 + l^2/r^2)(1-V^2)}}{1-V^2}.$$

Уравнение траектории получается дифференцированием его по моменту:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial p_r}{\partial l} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 1 + 2M/r - l^2/r^2(1 - 2M/r)}}.$$

Как и в нерелятивистском случае, после введения переменной $\xi = l/r$ и константы $\alpha = M/l$, после возведения в квадрат приведем это уравнение к виду

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 + U(\xi) = \lambda; \quad U(\xi) = \frac{\xi^2}{2} - \alpha \xi - \alpha \xi^3; \quad \lambda = \frac{\epsilon^2 - 1}{2}. \quad (9.11)$$

Оно имеет вид одномерной динамической задачи, в которой роль времени играет угол φ , а потенциальная энергия определяется функцией $U(\xi)$. Нерелятивистское движение, описываемое выражением (2.21), получается из выражения (9.11) пренебрежением в $U(\xi)$ кубическим членом.

2.1. Движение по окружности

Движению по окружности в представлении (9.11) соответствует точка равновесия — радиус не меняется, набегает только угол.

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - \alpha - 3\alpha\xi^2 = 0. \quad (9.12)$$

В отличие от нерелятивистского случая это уравнение — квадратное, то есть возможны два корня этого уравнения. Производная потенциала $U(\xi)$ в нуле отрицательна, поэтому первый корень соответствует минимуму этой функции, а второй — максимуму:

$$\xi_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 12\alpha^2}}{6\alpha}; \quad \xi_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 12\alpha^2}}{6\alpha}.$$

Эти два корня сливаются при $\alpha^2 = 1/12$ — это максимальное значение параметра α , при котором круговое движение еще возможно.

Из уравнения (9.12) можно выразить момент через радиус круговой орбиты R :

$$l^2 = \frac{MR}{1 - 3M/R}. \quad (9.13)$$

При больших радиусах это соотношение совпадает с нерелятивистским выражением $l^2 = MR$, являющимся следствием формулы классического центростремительного ускорения. Однако в отличие от классического соотношения с уменьшением радиуса момент уменьшается не монотонно, а имеет минимум при $R = 6M$ и при дальнейшем уменьшении радиуса стремится к бесконечности при $R = 3M$.

Подставив выражение для момента (9.13), выразим корни через радиус орбиты:

$$1 - 12\alpha^2 = 1 - 12\frac{M^2}{MR} \left(1 - 3\frac{M}{R}\right) = \left(1 - 6\frac{M}{R}\right)^2.$$

При движении по окружности “кинетическая энергия” в (9.11) равна нулю, и из соотношения $U(\xi_1) = \lambda$ находится энергия движущегося тела ϵ :

$$\epsilon^2 = \frac{(1 - 2M/R)^2}{1 - 3M/R}. \quad (9.14)$$

Если в классической механике энергия непрерывно убывает с уменьшением радиуса круговой орбиты, то в релятивистской она имеет минимум при $R = 6M$. При дальнейшем уменьшении радиуса до минимально возможного $R = 3M$ энергия возрастает до бесконечности. Таким образом, $R = 6M$ — это единственная устойчивая круговая орбита ([33]).

На устойчивой орбите момент $l = R/\sqrt{3}$.

2.2. Вращение перигелия Меркурия

Если в окрестности круговой орбиты (точки равновесия ξ_1) имеется малая кинетическая энергия, то точка ξ будет совершать колебания вблизи точки ξ_1 с частотой (по φ), определяемой второй производной потенциальной энергии $U(\xi)$:

$$\Omega^2 = \frac{d^2 U}{d\xi^2} \Big|_{\xi_1} = 1 - 6\alpha\xi_1 = \sqrt{1 - 12\alpha^2} = 1 - 6\frac{M}{R}.$$

Вернемся теперь к размерным переменным. Полное колебание между минимумом и максимумом совершается при повороте на угол $\Phi = 2\pi/\Omega$:

$$\Omega \approx 3\frac{kM}{Rc^2}; \quad \Phi \approx 2\pi \left(1 + 3\frac{kM}{Rc^2}\right).$$

Таким образом, за каждый оборот по орбите перигелий смещается на угол

$$\Delta\varphi = \Phi - 2\pi = 6\pi \frac{kM}{Rc^2}$$

по направлению движения по орбите. Орбита оказывается незамкнутой.

При движении по почти круговой орбите

$$\frac{kM}{R^2} = \frac{v^2}{R}; \quad \frac{kM}{Rc^2} = \frac{v^2}{c^2}.$$

Этим дано объяснение *вращению перигелия Меркурия*, зафиксированное за три столетия наблюдений со времен датского астронома Тихо Браге (1546–1601): большая ось эллиптической орбиты Меркурия за столетие

поворачивается на угол порядка 40 угловых секунд. Так как период обращения Меркурия вокруг Солнца 88 суток, то за столетие он делает 415 оборотов, так что за каждый оборот его большая полуось поворачивается на 0.1 секунды. Среднее расстояние Меркурия от Солнца 58 млн. км, при этом средняя скорость вращения 48 км/с, так что $v/c = 1.6 \cdot 10^{-4}$. Отсюда $\delta\phi = 3 \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 2.56 \cdot 10^{-8} = 0.1''$, что очень хорошо совпадает с замеренной величиной.

3. Эффект деСиттера

Примененная в разделе 8.2 технология подвижного репера для расчета дополнительного вращения при движении по круговой орбите в пространстве Минковского была разработана сначала в общей теории относительности [34; 35] еще до работ Томаса, который при описании эффектов такого рода использовал в основном последовательные преобразования Лоренца. Теперь мы применим метод подвижного репера для точного расчета эффекта при свободном движении кольца по окружности в поле Бьерна под действием только гравитационного поля.

Репер движущегося тела должен быть записан в локальном пространстве-времени этого тела, то есть необходимо работать в четырехмерной метрике пространства Бьерна — метрике Шварцшильда в глобальном времени:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dr - \sqrt{\frac{2kM}{r}} dt\right)^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (9.15)$$

Сначала нужно построить в этой метрике касательный вектор для круговой орбиты, используя соотношения для круговой орбиты в поле Бьерна 2.1.

3.1. Вращение кольца в сопутствующем репере

Ковариантные компоненты касательного вектора выражаются через импульсы вращающегося тела: l , ϵ , p_r , через r и M :

$$l = \frac{r\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-3\alpha}}; \quad \epsilon = \frac{1-2\alpha}{\sqrt{1-3\alpha}}; \quad p_r = \sqrt{\frac{2\alpha}{1-3\alpha}}. \quad (9.16)$$

Эти импульсы образуют ковариантные компоненты касательного вектора. Поднимая индексы с помощью обратного метрического тензора и подставляя вместо переменной r радиус окружности R , по которой движется центр

масс, получаем компоненты касательного вектора:

$$\tau^t = \sqrt{\frac{R}{R-3M}} = \frac{1}{\sqrt{1-3\alpha}}; \quad \tau^r = 0;$$

$$\tau^\varphi = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{M}{R-3M}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\alpha}{1-3\alpha}}.$$

Так как под корень входит $R-3M$, радиус не может быть меньше $3M$ (гравитационный радиус равен $2M$). Это совпадает с анализом круговых орбит, выполненных в [33], а также [35; 20]. Угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\tau^\varphi}{\tau^t} = \frac{\sqrt{M}}{R^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{R}. \quad (9.17)$$

Ковариантный вектор нормали направлен по радиусу:

$$n_r = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}.$$

Поднимая его индексы и строя единичный пространственно подобный вектор, ортогональный двум предыдущим, получаем из компонент этих векторов матрицу Лоренца

$$[N] = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{1-3\alpha}} & -\sqrt{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}} & \sqrt{\frac{\alpha}{(1-2\alpha)(1-3\alpha)}} \\ 0 & \sqrt{1-2\alpha} & 0 \\ \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\alpha}{1-3\alpha}} & 0 & \frac{1}{R} \sqrt{\frac{1-2\alpha}{1-3\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (9.18)$$

Взяв (укороченный за счет исключения θ при $\theta = \pi/2$) метрический тензор (9.15), найдем

$$(N^T) \cdot [g] \cdot [N] = \text{diag}(1, -1, -1)$$

— матрица $[N]$ в бесконечно малой окрестности центра кольца определяет пространство Минковского.

Теперь, когда определены координаты этих ортов для любой точки с известными координатами относительно подвижного репера, можно вычислить координаты относительно движущегося центра кольца в пространстве с метрикой (9.15):

$$\delta r = h\sqrt{1-2\alpha} \cos(\psi + \Omega t);$$

$$\delta\varphi = \frac{h}{R} \sqrt{\frac{1-2\alpha}{1-3\alpha}} \sin(\psi + \Omega t),$$

а также сдвиг по времени

$$\delta t = \sqrt{\frac{\alpha}{(1-2\alpha)(1-3\alpha)}} \sin(\psi + \Omega t) - \sqrt{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}} \cos(\psi + \Omega t); \quad (9.19)$$

По сравнению со связностями пространства Минковского в сферических координатах (в которое (9.15) переходит при $M = 0$) имеется небольшое отличие (для нужных нам связностей с пространственными индексами r и φ при $\theta = \pi/2$):

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{M}{r^2}; \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = 2M - r; \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}. \quad (9.20)$$

Скорости, скорректированные на сдвиг по времени:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \omega (\delta\varphi - \omega \delta t) = -h \left(\frac{\alpha \sqrt{2\alpha(1-2\alpha)}}{R} \cos(\psi + \Omega t) - \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-2\alpha} \left(\Omega + \frac{\sqrt{\alpha(1-3\alpha)}}{R} \right) \sin(\psi + \Omega t) \right); \\ v_\varphi &= \dot{\varphi} + \Gamma_{r\varphi}^\varphi \omega \delta r = \frac{h}{R} \sqrt{\frac{1-2\alpha}{1-3\alpha}} \left(\Omega + \frac{\sqrt{\alpha(1-3\alpha)}}{R} \right) \cos(\psi + \Omega t). \end{aligned}$$

Угловая скорость Ω в обе формулы входит в сочетании

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \Omega_0; \quad \Omega_0 = -\frac{\sqrt{\alpha(1-3\alpha)}}{R}. \quad (9.21)$$

Квадрат скорости $v^2 = v_r^2 + R^2 v_\varphi^2$, усредненный по ψ , определяет кинетическую энергию кольца (дополнительную к кинетической энергии центра масс):

$$T = (1-2\alpha) \left(\frac{h^2 \alpha^3}{2 R^2} + \frac{(1-\frac{3}{2}\alpha)}{(1-3\alpha)} \frac{h^2 \tilde{\Omega}^2}{2} \right). \quad (9.22)$$

Очевидно, что минимум кинетической энергии достигается при $\tilde{\Omega} = 0$, то есть при $\Omega = \Omega_0$, что как и в случае специальной теории относительности определяет частоту прецессии де Ситтера–Томаса:

$$\Omega_T = \dot{\omega} + \Omega_0 = \frac{\sqrt{\alpha}}{R} (1 - \sqrt{1 - 3\alpha}). \quad (9.23)$$

Отношение

$$\frac{\Omega_T}{\omega} = 1 - \sqrt{1 - 3\alpha} \approx \frac{3M}{2R} \quad (9.24)$$

в слаборелятивистском случае совпадает с величиной, вычисленной де Ситтером (см. [35; 36]).

Напомним, что мы не следим за релятивистским множителем в выражении кинетической энергии собственного вращения через квадрат скорости.

3.2. Вращение сферы

Рассмотрим теперь вращающееся по окружности сферическое (бесконечно малое) твердое тело, при этом скорость орбитального вращения может быть значительной — фактор γ превышает единицу, — и необходимы преобразования Лоренца мы будем описывать точно. В то же время скорости движения различных точек в собственной системе существенно нерелятивистские вследствие малости размеров системы. По этой причине можно пренебречь сжимаемостью тела и рассматривать его как абсолютно твердое — скорости вращательного движения много меньше локальной скорости звука. Приводимые ниже вычисления становятся точными при стремлении размеров (и скоростей в движущейся системе) к нулю.

При релятивистском описании трехмерных собственных вращений мы вынуждены возвращаться к реперу из четырех ортов — тетраде.

Так как пространственная часть метрики (9.15) есть метрика евклидова трехмерного пространства, метрику несложно переписать в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = (1 - V^2) dt^2 + 2V \frac{r dr + z dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2; \quad (9.25)$$

$$V = \sqrt{\frac{2M}{\sqrt{r^2 + z^2}}}.$$

Точки вращающегося бесконечно малого тела находятся вблизи сечения $z = 0$, а центр масс все время находится на этой гиперповерхности.

Вблизи нее (при $z \rightarrow 0$) метрика (9.25) приближенно имеет вид

$$ds^2 = (1 - V^2) dt^2 + 2V dr - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2; \quad V = \sqrt{\frac{2M}{r}}$$

и орты τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ не меняются. К этим трем ортам добавим еще неподвижный единичный орт $\mathbf{k}$ вдоль оси z . Матрица координат концов этих ортов — матрица Лоренца

$$[N(t)] = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{R}{R-3M}} & -\sqrt{\frac{2M}{R-2M}} & \sqrt{\frac{MR}{(R-2M)(R-3M)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{R-2M}{R}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \sqrt{\frac{M}{R-3M}} & 0 & \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R-2M}{R-3M}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.26)$$

Положение некоторой точки вращающегося в подвижной системе тела относительно введенного подвижного репера будем описывать зависящими от времени инерциальной системы углами Эйлера θ , φ , ψ ([8]), определяющими матрицу вращения $\{F(t)\}$ как частный случай матрицы Лоренца:

$$\{F(t)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \{E(t)\} \end{pmatrix}; \quad \{E(t)\} = \quad (9.27)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \theta \sin \psi \\ \cos \theta \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Координаты системы, связанной с вращающимся в движущейся системе телом, мы отмечаем фигурными скобками $\{ \}$.

Точка, имеющая внутри тела в координатных осях, жестко связанных с ним, декартовы координаты x_1 , x_2 , x_3 , относительно подвижного репера имеет координаты

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \{E(t)\} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

а координаты t , r , φ , z в пространстве (9.25)

$$[s] = \begin{pmatrix} t \\ r(t) \\ \varphi(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ R \\ \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + [N(t)] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}. \quad (9.28)$$

Как и в случае кольца, в один и тот же момент времени в движущейся системе различные точки кольца имеют разное время в инерциальной системе. Сдвиг по времени относительно времени центра масс в один и тот же момент времени движущейся системы определяется мгновенными координатами точки на вращающемся теле:

$$\delta t = \sqrt{\frac{\alpha}{(1-2\alpha)(1-3\alpha)}} y'(t) - \sqrt{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}} x'(t),$$

поэтому скорости при значении параметра t должны быть подправлены с точностью до первого порядка по размерам вращающегося тела по формулам (6.56):

$$v^r = \delta \dot{r} + (2M - R) \omega (\delta \varphi - \omega \delta t); \quad (9.29)$$

$$v_\varphi = \delta \dot{\varphi} + \omega \frac{\delta r}{R}. \quad (9.30)$$

Теперь, так как $\delta t = 0$, нужно вычислить квадрат скорости в единый момент глобального времени t :

$$v^2 = v_r^2 + R^2 v_\varphi^2 + v_z^2$$

в точке с неподвижными координатами внутри вращающегося тела x_1, y_1, z_1 и проинтегрировать по всем точкам вращающегося тела. Мы не будем приводить все промежуточные результаты вычислений, которые делались в пакете *Mathematica* для простейшего случая — шарового волчка, у которого все три главных момента инерции одинаковы (J).

Кинетическая энергия для такой системы не зависит от угла ψ , поэтому сопряженный ему импульс является константой. Выразив скорости изменения углов через сопряженные импульсы и подставив их в выражение для кинетической энергии, получим выражение для гамильтониана волчка в следующем виде:

$$H = \frac{J\alpha^3(1-2\alpha)}{2r^2} + K(\alpha) H_0 + H_1 + H_2. \quad (9.31)$$

Если все импульсы равны нулю, волчок совершает прецессию де Ситтера-Томаса, имея минимально возможную кинетическую энергию. При этом кинетическая энергия орбитального движения все равно имеет небольшую

добавку — минимальная кинетическая энергия вращающегося тела конечных размеров больше энергии вращающейся материальной точки на величину, определяемую его моментом инерции:

$$E_0 = \frac{J\alpha^3(1-2\alpha)}{2r^2}.$$

Следующее слагаемое имеет вид гамильтониана обычного шарового волчка

$$H_0 = \frac{1}{2J} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2 + p_\psi^2 - 2p_\varphi p_\psi \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \quad (9.32)$$

с моментом инерции, уменьшенным в

$$K(\alpha) = \frac{4 - 13\alpha + 6\alpha^2}{2(1-\alpha)(2-5\alpha)}$$

раз. При всех допустимых круговых орбитах он незначительно отличается от единицы. На устойчивой орбите ($\alpha = 1/6$), вблизи которой находится максимум этого коэффициента, $K = 36/35$. На предельной орбите ($\alpha = 1/3$) $K = 3/4$.

Слагаемые H_1 и H_2 описывают результирующее отклонение от сферичности вследствие лоренцева сокращения и кривизны пространства-времени:

$$H_1 = -\frac{3\alpha(1-2\alpha)}{4J(1-\alpha)(2-5\alpha)} ((p_\theta^2 - p^2) \cos 2\varphi + 2p_\theta p \sin 2\varphi); \quad (9.33)$$

$$p = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{\sin \theta};$$

$$H_2 = \frac{\alpha(2-23\alpha+60\alpha^2-36\alpha^3)}{4J(1-\alpha)(1-2\alpha)(2-3\alpha)(2-5\alpha)} p_\varphi^2. \quad (9.34)$$

При этом скобки Пуассона каждого добавочного слагаемого с H_0 равны нулю. Таким образом, как и в классической механике, сферический волчок оказывается вполне интегрируемой системой с тремя коммутирующими интегралами движения:

$$H, H_0, p_\psi. \quad (9.35)$$

Однако угловая переменная φ явно зависит от времени:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} - \frac{\sqrt{\alpha(1-3\alpha)}}{r},$$

что делает всю систему неавтономной в целом.

Гамильтониан (9.31) особенно просто выглядит на предельной окружности ($\alpha = 1/3$):

$$H_{lim} = \frac{3}{4J} (p_\theta \cos \varphi + \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi)^2. \quad (9.36)$$

Однако движение по этой предельной окружности нереально — орбитальная кинетическая энергия на этой орбите должна быть бесконечной.

Гамильтонианы H_0 и H_{lim} являются предельными выражениями для гамильтониана (9.31) от нерелятивистского до предельно релятивистского.

В практическом плане полученные формулы могут оказаться полезными для задач вращения спутников массивных космических тел. Наиболее существенным является то, что эти формулы являются точными для бесконечно малых тел и для их вывода совершенно необходимо *глобальное время*.

4. Движение в поле вихревого монополя

Рассмотрим нерелятивистское движение тела в поле вихревого монополя ($l = -3$) с метрикой (8.19) с метрическим полем (8.31)

$$\Omega \equiv V^\varphi = \frac{q}{r^3}; \quad w_{-3}(r, \vartheta) = \frac{9q^2}{8r^4} \sin^4 \vartheta.$$

Ограничимся случаем движения в “экваториальной плоскости” монополя $\vartheta = \pi/2$. При этом зависимость действия и всех функций от ϑ исчезает, в частности,

$$w \equiv w_{-3}(r, \pi/2) = \frac{9q^2}{8r^4}.$$

Вследствие осевой симметрии переменная φ является циклической и сопряженный ей импульс постоянен: $p_\varphi = l$.

Гамильтониан сохраняется

$$e^{-w} p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} + 2\Omega l = 2E,$$

откуда можно выразить радиальный импульс

$$p_r = e^{w/2} \sqrt{2E - \frac{2ql}{r^3} - \frac{l^2}{r^2}}.$$

Уравнение траектории получается дифференцированием этого импульса по моменту:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial p_r}{\partial l} = - \frac{\frac{l}{r^2} + \frac{q}{r^3}}{\sqrt{2E - \frac{2ql}{r^3} - \frac{l^2}{r^2}}} e^{w/2}.$$

Как в большинстве подобных задач, удобно перейти к переменной $x := l/r$; $dx := -l/r^2 dr$. Введя также параметр $\alpha = q/l^2$, последнее выражение приведем к виду:

$$d\varphi = \frac{(1 + \alpha x) dx}{\sqrt{2E - 2\alpha x^3 - x^2}} e^w.$$

Возведя в квадрат, это выражение можно переписать в виде гамильтониана одномерного движения:

$$e^w \frac{(1 + \alpha x)^2}{2} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} + \alpha x^3 \right) = E. \quad (9.37)$$

Для приведения кинетической энергии к виду кинетической энергии свободной частицы нужно провести замену переменных:

$$e^{w/2} (1 + \alpha x) dx = dy.$$

Найдем точки равновесия -- минимум "потенциальной энергии":

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{2} + \alpha x^3 \right) = x(1 + 3\alpha x) = 0.$$

Их две: $x_1 = l/r = 0$ соответствует точкам, покоящимся на бесконечном удалении от монополя. Вторая точка $3\alpha x_2 = 3q/(lr_2) = -1$ соответствует телу, вращающемуся по круговой орбите радиуса r_2 против вихревого поля с моментом количества движения

$$l = -\frac{3q}{r_2}.$$

Эта точка кругового движения неустойчива: все тела (звезды) с меньшим радиусом (большим x), вращаясь, начинают падать на центр -- захватываются монополем.

5. Движение света

Распространение света описывается уравнением эйконала как в классической, так и в релятивистской физике. Квадратичная зависимость между частотой и волновым вектором и в классической физике учитывает релятивистские соотношения для света.

В инерциальной системе уравнение эйконала имеет вид:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - \gamma^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} = 0.$$

Обычно обозначают

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = k_i. \quad (9.38)$$

В неинерциальной системе производная по времени меняется на ковариантную в соответствии с (4.2):

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + V^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right)^2 - \gamma^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} = 0$$

и уравнение эйконала принимает вид:

$$\frac{(\omega - V^i k_i)^2}{c^2} = \gamma^{ij} k_i k_j. \quad (9.39)$$

Зависимость поля скоростей от координат приводит к отклонению луча от прямой линии, однако вычисление, приведшее к выражению (5.27), было выполнено без какого-либо привлечения теории относительности.

5.1. Гравитационное красное смещение

Именно специальная теория относительности дает объяснение гравитационному красному смещению в ТГВ: по отношению к пространству покоящийся в данной системе наблюдатель движется со скоростью, определяемой абсолютной скоростью V в точке его нахождения и его собственное время замедлено по сравнению с абсолютным временем в $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ раз. В поле Бьерна, например, это и определяет

$$\frac{\delta \omega}{\omega} \approx \frac{V^2}{2c^2} = \frac{kM}{Rc^2},$$

определенное Эйнштейном в 1911 году на основании принципа эквивалентности [37].

5.2. Распространение света в плоской космологической модели

В космологических моделях почти всегда поле скоростей равно нулю — мы работаем в глобальной инерциальной системе. В плоской космологической модели с метрикой

$$dl^2 = m^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

уравнение эйконала

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{m^2(t)} \mathbf{k}^2 = 0 \quad (9.40)$$

имеет циклическими координатами x, y, z и поэтому вектор $\mathbf{k}$ постоянен, $\mathbf{k}^2 = k^2$. Поэтому частота света изменяется обратно пропорционально изменению масштаба:

$$\omega = \frac{k c}{m(t)}. \quad (9.41)$$

С ростом масштаба Мира частота электромагнитного излучения падает.

Открытие в 1963 году длинноволнового *реликтового излучения* радиоинженерами Пензиасом и Вильсоном подтвердило гипотезу о горячей Вселенной с высокотемпературным электромагнитным излучением, которое по мере расширения Вселенной уменьшало свою частоту и дошло до нас уже в радиодиапазоне.

5.3. Космические линзы

В современной космологии исключительно интересное явление представляют “космические линзы”, в которых одни и те же звезды видны двукратно и даже четырехкратно. Этот эффект говорит о том, что пространство в этой области сильно искажено, сильно отличается от евклидова — как свили на стекле. Ниже мы приведем пример распространения света в вихревом поле, где может наблюдаться удвоение объекта.

Уравнение эйконала в вихревом поле (8.19)

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 = e^{-w} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Выбрав переменные

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = 0; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\omega}{c} l; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\omega}{c} n,$$

приведем это уравнение к виду

$$(1 + l\Omega)^2 = n^2 + \frac{l^2}{r^2},$$

откуда можно выразить радиальную компоненту волнового вектора

$$n = \sqrt{(1 + l\Omega)^2 - \frac{l^2}{r^2}}.$$

Уравнение луча, как всегда, получается дифференцированием

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial n}{\partial l} = \frac{-\frac{l}{r^2} + \Omega}{\sqrt{(1 + l\Omega)^2 - \frac{l^2}{r^2}}} \approx \frac{-\frac{l}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}} + \frac{\Omega}{\left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}\right)^3}.$$

Подставим теперь поле абсолютных скоростей вихревого монополя с интенсивностью q (8.27):

$$\Omega = \frac{q}{r^3}; \quad w_{-3} = -\frac{9q^2}{8r^4} \sin^4 \vartheta \approx 0,$$

после чего уравнение луча конкретизируется:

$$d\varphi = \frac{d\frac{l}{r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{r}\right)^2}} + \frac{\frac{q}{r^3} dr}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}} = d\eta + \frac{q}{l^2} d\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}},$$

где

$$r \sin \eta = l.$$

Если луч приходит из бесконечности и возвращается на бесконечность, то

$$\varphi = \eta \pm \frac{q}{l^2}.$$

Таким образом, луч искривляется. Если источник и наблюдатель находятся в плоскости $\vartheta = \pi/2$, то один и тот же источник может быть виден дважды с угловым расстоянием между изображениями $\delta\varphi = 2q/l^2$. Это одна из моделей “космической линзы”.

ГЛАВА 10

Приближения

Астрономия не только открыла нам существование законов; она научила нас, что эти законы непреложны, что идти против них невозможно.

А. Пуанкаре

Громадный множитель $c^4/16\pi k$, стоящий перед действием пространства, приводит к колоссальным энергиям, если пространство деформируется. Поэтому в малых масштабах (таких как Солнечная система) пространство приближенно можно полагать плоским. Это и есть главная отправная точка приближенного подхода в ПТВ.

1. Нерелятивистское приближение

В низшем приближении пространство плоское и динамика частиц определяется только полем абсолютных скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. Понятие *нерелятивистское движение* абсолютно. В этом приближении уравнение Гамильтона–Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + V^i \partial_i S\right) + \frac{(\nabla S)^2}{2m} = 0; \quad \nabla S = \mathbf{p}$$

определяет гамильтониан

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + (\mathbf{V}(\mathbf{r}) \mathbf{p}). \quad (10.1)$$

Уравнения Гамильтона:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{x}_i = \frac{p_i}{m} + V_i(x); \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad \dot{p}_i = -V_{j,i} p_j. \quad (10.2)$$

Из первого

$$p_i = m(\dot{x}_i - V_i).$$

Подставляя это во второе и сокращая на m , получаем

$$\ddot{x} - V_{i,j}\dot{x}_j = -V_{j,i}(\dot{x}_j - V_j).$$

Это уравнение приводится к виду

$$\dot{\mathbf{v}} + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] = -\nabla\phi, \quad (10.3)$$

где введено

$$\phi = \frac{\mathbf{V}^2}{2}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{V}. \quad (10.4)$$

Уравнение (10.3) является обобщением уравнения движения в однородно вращающейся системе (4.1) на случай произвольного неоднородного поля скоростей.

В частности, за счет вращения Земли вокруг своей оси вблизи ее поверхности возникает дополнительное поле скоростей, на наличие которого указали в 1918 году Лензе и Тирринг [38]. Это поле дополнительно влияет на движение спутников Земли, даже если их движение описывать с точки зрения невращающейся системы координат.

На поверхности вращающейся Земли это поле в соответствии с уравнением (10.3) также приводит к дополнительным поправкам к движению тел особенно, если они обладают собственной угловой скоростью. Видимо, этим можно объяснить аномалии с летающими волчками Н. А. Козырева (1960-е годы) [39].

2. Динамика поля скоростей

Рассмотрим теперь в этом приближении динамику самого пространства.

Пока мы полагаем пространство плоским, единственной полевой переменной гравитации оказывается поле абсолютных скоростей пространства $\mathbf{V}(\mathbf{r})$.

Поле скоростей входит только в кинетическую энергию пространства. Кинетическая энергия пространства в общем виде

$$\begin{aligned} \frac{8\pi k}{c^4} T = \frac{1}{2}(\mu_j^i \mu_i^j - \mu^2) &= \frac{1}{8} \gamma^{ik} \gamma^{jl} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{kl} + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ij} (V^{i;j} + V^{j;i}) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 - \frac{\dot{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{\gamma}} V_{;i}^i + \frac{1}{8} (V_{i;j} + V_{j;i}) (V^{i;j} + V^{j;i}) - \frac{1}{2} (V_{;i}^i)^2 \end{aligned}$$

в случае плоского, статического пространства определяется последней строчкой, которая может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(V_{i;j} + V_{j;i})(V^{i;j} + V^{j;i}) - \frac{1}{2}(V_{;i}^i)^2 = \\ & = \frac{1}{8}(V_{i;j} - V_{j;i})(V^{i;j} - V^{j;i}) + \frac{1}{2}\nabla_i(V^j V_{;j}^i - V^i V_{;j}^j) - \frac{1}{2}R_{ij}V^i V^j. \end{aligned}$$

Вследствие того что пространство плоское, последнее слагаемое равно нулю, а предпоследнее может быть удалено из лагранжиана как полная дивергенция, так что в рассматриваемом приближении кинетическая энергия пространства

$$T \equiv \frac{c^4}{8\pi k}\theta = \frac{c^4}{16\pi k}\Omega^2; \quad \Omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \mathbf{V}. \quad (10.5)$$

Проекция линейных по полю скоростей уравнений связи на само поле скоростей квадратично по скорости. Из-за того что метрический тензор представляется единичной матрицей, все индексы мы можем писать снизу:

$$l_l = V_i \frac{\partial \theta}{\partial V_i} = \frac{1}{4}(V_i \Delta V_i - V_i \partial_i \mu); \quad \mu = \partial_i V_i.$$

Из свертки динамических уравнений

$$sp = \delta_{ij} \frac{\delta \theta}{\delta \gamma_{ij}}|_{\gamma_{ij}=\delta_{ij}} = -3T - 2\mu^2 - 2V_i \partial_i \mu$$

можно выразить $V_i \partial_i \mu$.

$$\Delta \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \frac{1}{2}\theta + \frac{(\operatorname{rot} \mathbf{V})^2}{2} + (4l - \frac{sp}{2}). \quad (10.6)$$

В вакууме последняя скобка равна нулю.

Далее мы покажем, что в низшем приближении потенциал ϕ из (10.4) находится из уравнения Пуассона

$$\Delta \phi = 4\pi k \rho, \quad (10.7)$$

то есть является гравитационным потенциалом Лапласа-Пуассона. Но сначала нам нужно рассмотреть роль суммарной энергии.

3. Приближение ОТО

В разделе про космические вихри мы видели, какой колоссальной энергией обладает динамическое искривленное пространство. Однако эта энергия распределена в громадных космических масштабах. Энергии, связанные с движениями планет, в масштабе, например, Солнечной системы, все равно на много порядков оказываются больше, и на таких малых масштабах, как Солнечная система, космической энергией можно пренебречь.

Вычислим энергию, связанную с космологическим расширением. Ее плотность

$$\epsilon = -\frac{3c^2}{8\pi k} \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)^2$$

пропорциональна квадрату постоянной Хаббла. Вычислим полную энергию (выразив ее через массу) расширяющегося пространства в сфере, вписанной в Земную орбиту радиуса $L = 150\,000\,000$, км (пренебрегая ее небольшим эксцентриситетом):

$$E = \frac{4}{3} \pi L^3 |\epsilon| = \frac{2c^2 L^3}{k T_H^2}.$$

Сравним ее с энергией покоя Солнца, выражаемой через его массу, которую можно вычислить из третьего закона Кеплера для движения по круговой орбите, получающегося из приравнивания ускорения свободного падения на Солнце на расстоянии L центростремительному ускорению:

$$\frac{kM}{L^2} = \frac{2\pi L^2}{T^2}; \quad M = \frac{4\pi^2 L^3}{k T^2}.$$

Отношение энергии расширяющегося пространства в сфере, вписанной в земную орбиту, к энергии покоя Солнца:

$$\frac{E}{M c^2} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{T}{T_H} \right)^2 \approx 10^{-21}.$$

Если все вещество Солнца равномерно распределить по шару, вписанному в Земную орбиту, то плотность энергии покоя этого вещества на 21 порядок больше плотности энергии пространства.

Правда, в динамике планет играет роль не энергия покоя Солнца, а энергия вращающейся Земли массой m :

$$E_t = -\frac{k M m}{2 L}; \quad \frac{E_t}{M c^2} = -\frac{k m}{2 L c^2}.$$

Величину $k m$ выразим через ускорение свободного падения на поверхности Земли и ее радиус R :

$$\frac{k m}{R^2} = g; \quad \frac{E_t}{M c^2} = \frac{g R^2}{2 L c^2} \approx 10^{-17}.$$

Но все равно отношение энергии расширяющегося пространства к энергии вращающейся Земли мало:

$$\frac{E}{E_t} \approx 10^{-4},$$

при этом мы взяли шар, вписанный в Солнечную орбиту, а не шар вокруг Земли радиусом в несколько земных радиусов, что дало бы значительно меньшую величину.

Таким образом, в динамике Солнечной системы или подобных систем энергия пространства играет ничтожную роль. Отсюда мы приходим к *приближению ОТО*: в малых масштабах плотностью энергии пространства можно пренебречь, положив ее равной нулю. Но это есть условие выделения в решениях ТГВ решений ОТО. Таким образом, *ОТО является приемлемым приближением в теории пространства в масштабах порядка Солнечной системы.*

4. Гравитационный потенциал

Вернемся к уравнению (10.6). В приближении ОТО и плоского пространства

$$T + \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = 0; \quad T = -\frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon,$$

где ε — плотность энергии всех прочих полей. Обозначая $-V^2(\mathbf{r})/2 \equiv \phi(\mathbf{r})$ и полагая выполненными уравнения связи и динамики, из (10.6) получаем уравнение на потенциал:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 4\pi k \frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{(\text{rot } \mathbf{V})^2}{2} \approx \\ &\approx 4\pi k \rho - \frac{(\text{rot } \mathbf{V})^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Вихревое поле скоростей дает отрицательную добавку к классическому уравнению Пуассона для гравитационного потенциала.

5. Слабые гравитационные волны

Однако на фоне плоского пространства возможно не только наличие поля скоростей, но и малых отклонений метрики от метрики евклидова пространства, приводящее к волновым явлениям — гравитационным волнам.

Классической работой по описанию гравитационных волн является работа Эйнштейна 1918 года, в которой он, естественно, пользовался уравнениями общей теории относительности, которые, однако, являются и приближением от ТГВ. Наиболее интересным моментом этой работы является вычисление потерь энергии динамической системой за счет гравитационного излучения.

Так как пространство на громадных масштабах в высшей степени является плоским, то вполне оправданным является метод возмущений — рассмотрение малых отклонений h_{ij} от метрики плоского пространства $\tilde{\gamma}_{ij}$:

$$\gamma_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij} + h_{ij}.$$

Описание будем вести в глобальной инерциальной системе — $V^i = 0$.

В отличие от работы Эйнштейна мы будем записывать все соотношения в ковариантных производных, тем самым избегая проблему зависимости соотношений от выбора координат, существенную в работе Эйнштейна.

Поднятие и опускание индексов, ковариантные производные определяются метрикой плоского пространства, так как учет добавок от полного метрического тензора (первого порядка малости) в уравнениях на добавки к метрике (тоже первый порядок) приводит к величинам второго порядка малости, отбрасываемым в линеаризованных уравнениях.

Так как тензор кривизны плоского пространства равен нулю, то ковариантные производные перестановочны — можно не заботиться о порядке операторов дифференцирования.

Уравнения связей налагаются на импульсы

$$\pi^{ij} = \frac{1}{4}(\dot{h}^{ij} - \gamma^{ij}\dot{h}); \quad \nabla_j \pi_i^j = \partial_t(\nabla_j h_i^j - h_{,i}) = 0,$$

где $h = \gamma^{ij}h_{ij} = h_i^i$ — шпур тензора возмущений.

$$h_{i,j}^j = h_{,i}.$$

Поэтому $\nabla_j h_i^j = h_{,i}$.

Тензор Римана–Кристоффеля в линейном приближении:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(h_{il,jk} + h_{jk,il} - h_{ik,jl} - h_{jl,ik}).$$

Тензор Риччи:

$$R_{ik} = \frac{\gamma^{jl}}{2} (h_{il;jk} + h_{jk;il} - h_{ik;jl} - h_{jl;ik}) = \frac{1}{2} (h_{ik} - \Delta h_{ik}).$$

Скалярная кривизна:

$$R = \gamma^{ik} R_{ik} = R_{ik} = \frac{1}{2} (\Delta h - \Delta h) = 0.$$

В линейном приближении скалярная кривизна пространства равна нулю вследствие уравнений связей. Этот вывод важен не только для гравитационных волн, но и для понимания проблемы плоскостности нашего мира.

В уравнениях динамики импульсы можно представить через

$$\chi_j^i = h_j^i - \delta_j^i h; \quad \pi_j^i = \dot{\chi}_j^i.$$

Линеаризованные уравнения:

$$\ddot{\chi}_j^i - \Delta \chi_j^i - \delta_j^i \Delta h + \gamma^{ik} h_{,ik} = 0. \quad (10.9)$$

Эти уравнения имеют волновой характер, однако различные компоненты здесь взаимно завязаны. Возьмем шпур этой системы уравнений и учтем, что $\chi \equiv \chi_i^i = -2h$:

$$\ddot{\chi} - \Delta \chi_i^i - 3 \Delta h + \Delta h = -2 \ddot{h} = 0. \quad (10.10)$$

Мы видим, что шпур χ имеет совершенно неволновую динамику — это уравнение как раз обеспечивает возможность однородного хэббловского расширения мира. Поэтому в переменных χ_j^i , удовлетворяющих уравнениям связи $\chi_{j,i}^i = 0$, нужно отделить шпур и выделить бесшпуровую часть, для которой динамические уравнения являются разделенными волновыми уравнениями

$$\ddot{\chi}_j^i - \Delta \chi_j^i = 0; \quad \chi_{j,i}^i = 0; \quad \chi_i^i = 0. \quad (10.11)$$

Интересно рассмотреть чисто конформную малую деформацию плоского пространства. Выделим из h_j^i шпур

$$h_j^i = \zeta_j^i + \delta_j^i \frac{h}{3}; \quad \zeta_i^i = 0.$$

Чисто конформная деформация — равенство нулю ζ_j^i . Условия связей

$$\nabla_i (h_j^i - \gamma_j^i h) = \nabla_i (\zeta_j^i - \frac{2}{3} \delta_j^i h) = 0$$

при $\zeta_j^i = 0$ (чисто конформная деформация) приводят к $h_{,j} = 0$ — одинаковости масштаба во всем пространстве. Конформная динамика возможна только как единая для всего пространства в целом. Зависимость конформного фактора от координат (неоднородность) приводит к появлению других компонент тензора h_{ij} .

Бесспиуровые компоненты ($h = 0$; $h_j^i = \zeta_j^i$) удовлетворяют волновым уравнениям

$$\square h_{ij} = -\frac{16\pi k}{c^4} T_{ij}, \quad (10.12)$$

где из T_{ij} также вырезается бесспиуровая часть.

Таким образом, гравитационные волны *распространяются со скоростью света*.

5.1. Излучение гравитационных волн

Вернемся к работе Эйнштейна 1918 года. Используя бесконечно малые преобразования координат, Эйнштейн обратил в нуль компоненты h_{00} и h_{0i} , то есть, по терминологии ТГВ, перешел в глобальную инерциальную систему и дальнейшие его вычисления могут быть записаны в виде вышеприведенных формул. Так как плотность гамильтониана квадратична по возмущениям, то десятое уравнение $H = 0$ в работе Эйнштейна в линейном приближении выполнялось автоматически — в линейном приближении он работал только с девятью уравнениями — уравнениями ТГВ.

Это значит, что, в частности, знаменитая формула Эйнштейна для потери энергии за счет гравитационного излучения [40]

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{k}{45c^5} (\ddot{\mathcal{D}}_{ij})^2. \quad (10.13)$$

относится как к ОТО, так и к ТГВ.

6. "The evil axis"

Не меньший интерес вызывает рассмотрение линейного приближения в описании динамики малых возмущений на фоне расширяющегося Мира в виде трехмерной сферы. Хотя современные оценки возможности замкнутости нашего мира очень скептически: ОТО однозначно связывает допустимый тип однородного Мира — закрытый, плоский, открытый — со значением хэббловской постоянной и средней плотностью вещества, сравниваемой с критической плотностью (11.17) (см. далее), и по всем оценкам средняя плотность вещества во Вселенной составляет около четырех процентов от критической, так что в соответствии с этим критерием ОТО Мир не

может быть замкнутым. В ТГВ динамика пространства не связана такими условиями (отражающими ограничение нулевой плотности энергии в ОТО), поэтому с точки зрения излагаемой теории Мир вполне может представлять из себя слабо деформированную трехмерную сферу.

Обнаруженный в последние несколько лет с помощью космических станций COBE и WMAP эффект регулярности по направлениям на небесной сфере очень малых флуктуаций реликтового излучения, названного феноменом “ось зла” (см. напр. [41]), прямо наводит на мысль о колебаниях системы, конечной по размерам.

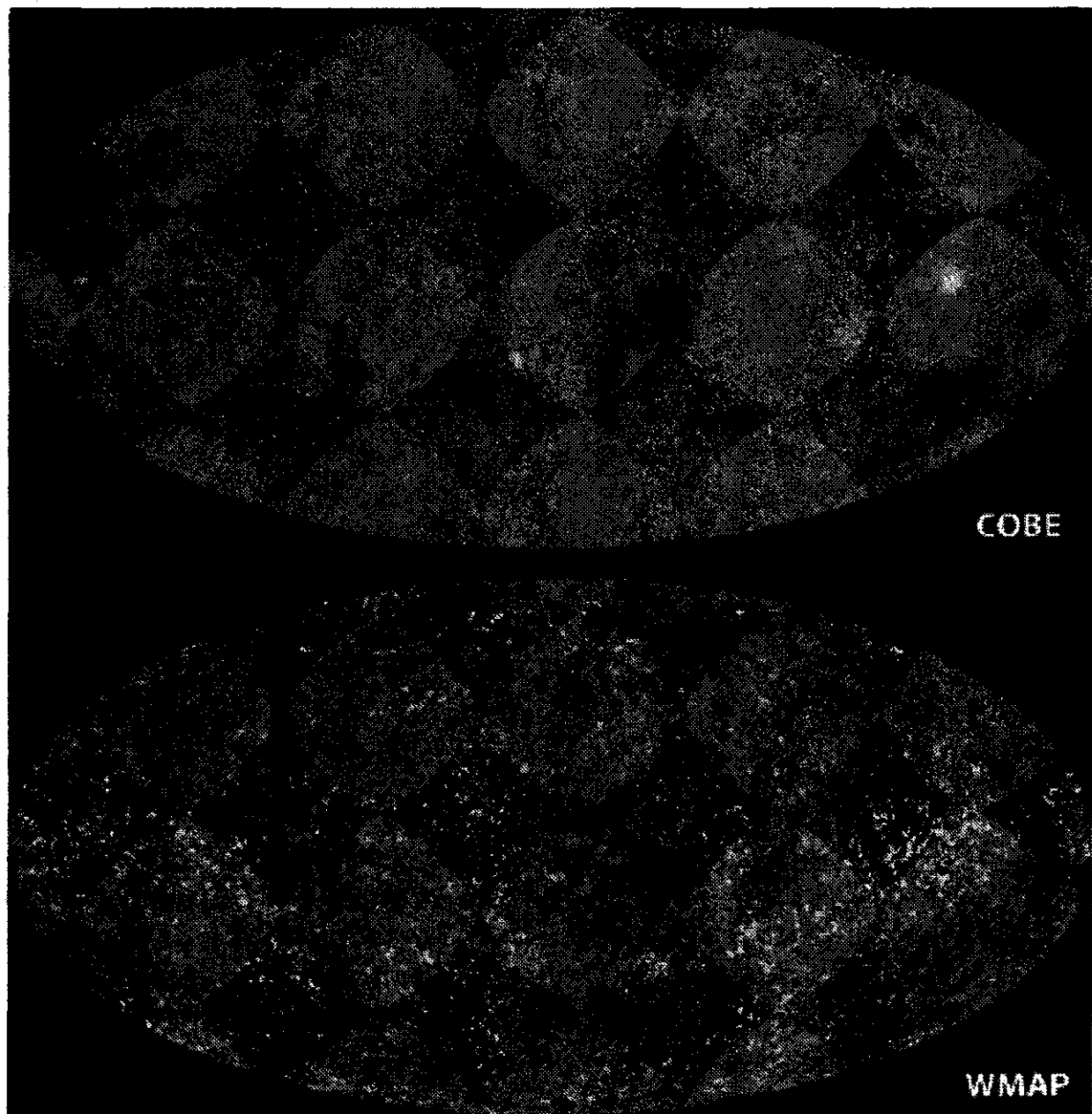


Рис. 10.1

Среди гипотез, выдвигаемых для объяснения этого феномена существует и гипотеза о модах малых колебаний сферического мира. Однако, чтобы принять или отвергнуть эту гипотезу нужно сравнить наблюдаемую картину с расчетными конфигурациями мод слабых деформаций сферы.

В пионерской работе Е. М. Лифшица по флуктуациям трехмерной сферы [42], вышедшей 60 лет назад, ставились задачи более общего характера, конкретный расчет конфигураций колебательных мод в ней отсутствует. Поэтому ставится задача явного описания мод геометрических флуктуаций трехмерной сферы, для чего разработан метод *Ли-генерации*.

6.1. Метод Ли-генерации мод

Метод *Ли-генерации* полей различной тензорной структуры на сфере состоит в следующем:

1. Выбирается система координат для предельно простого описания некоторых структур исследуемого поля (базовых полей).
2. Строятся уравнения на собственные функции базовых полей и находятся их решения.
2. Полная система решений находится Ли-вариациями базовых и вновь полученных полей полями Киллинга.

Применим этот метод для описания малых геометрических флуктуаций трехмерной сферы. Чисто тензорные структуры вариации метрики описываются шестикомпонентным симметричным тензором h_{ij} (который далее мы будем обозначать жирным шрифтом)

$$\mathbf{h} \equiv \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}, \quad (10.14)$$

бесшпуровым

$$sp = \gamma^{ij} h_{ij} = 0 \quad (10.15)$$

и с нулевой дивергенцией

$$q_j = \nabla_i (\gamma^{ik} h_{kj}) = 0. \quad (10.16)$$

В описании малых изменений геометрических свойств при вариациях метрики главную роль играет вариация тензора Риччи, также являющимся

симметричным тензором, выражающегося через вариации связностей (являющиеся тензорами):

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} \gamma^{is} (\nabla_j h_{sk} + \nabla_k h_{sj} - \nabla_s h_{jk}), \\ \delta R_{ij} &= \nabla_k \delta\Gamma_{ij}^k - \nabla_j \delta\Gamma_{ik}^k.\end{aligned}\quad (10.17)$$

С точки зрения математической физики это есть дифференциальный оператор второго порядка, действующий в пространстве тензоров $\mathbf{h}$. Моды вариаций метрики определяются как собственные векторы этого оператора, причем, привязываясь к вариациям метрики трехмерной сферы радиуса r мы их определим следующим образом:

$$\delta R_{ij}(\mathbf{h}^n) = \frac{\lambda_n}{2r^2} h_{ij}^n. \quad (10.18)$$

Явное выделение радиуса позволяет нам рассматривать лишь вариации метрики сферы единичного радиуса.

6.2. Метрика и векторы Киллинга

Для упрощения построений важно выбрать удобные координаты на сфере. Более предпочтительными, чем обычно применяемые сферические координаты, приводящие к метрике (3.39), использованные, в частности, и Лифшицем и Фоком [43] для скалярных функций, являются углы Эйлера с метрикой (3.40), так как в ней в явном виде выделены два вектора Киллинга — сдвиги по φ и ψ . Диагонализация ее приводит к метрике (3.41):

$$dl^2 = \frac{dx^2}{1-x^2} + x^2 du^2 + (1-x^2) dw^2. \quad (10.19)$$

Основным инструментом для дальнейшего являются векторы Киллинга, которых шесть на сфере, инвариантной относительно шестипараметрической группы вращений $O(4)$. Уже упомянутые сдвиги по углам Эйлера φ и ψ определяются векторами

$$V_3 \equiv \begin{pmatrix} V_3^x \\ V_3^u \\ V_3^w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad W_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (10.20)$$

Эти векторы вместе с остальными четырьмя образуют две группы (V и W) из трех векторов, которые мы сразу представим в комплексном виде:

$$V_{\pm} = e^{i(u+w)} \begin{pmatrix} \mp i \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \\ -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

и для векторов группы W :

$$W_{\pm} = e^{i(u-w)} \begin{pmatrix} \mp i \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} \\ \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}. \quad (10.22)$$

Любой вектор из группы V коммутирует с любым вектором из группы W , а внутри групп они коммутируют по правилам коммутации векторов Киллинга трехмерной группы вращений:

$$\begin{aligned} [V_+, V_-] &= 2iV_3; & [V_3, V_+] &= iV_+; & [V_3, V_-] &= -iV_-, \\ [W_+, W_-] &= 2iW_3; & [W_3, W_+] &= iW_+; & [W_3, W_-] &= -iW_-. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Коммутаторы векторов можно представить как коммутаторы дифференциальных операторов, сопоставляя каждому векторному полю a^i , компоненты которого могут зависеть от координат, дифференциальный оператор первого порядка $\hat{a} = a^i \partial_i$. Но это как раз оператор, определяющий Ли-вариацию скалярного поля (4.11).

Так как Ли-вариация тензорного поля (4.10) является тензором такого же вида, как и варьируемый тензор, и она линейна по компонентам этого тензора, каждое векторное поле порождает линейный оператор в пространстве тензоров того или иного вида. В частности, для симметричного тензора второго ранга (метрического тензора):

$$\delta h_{ij} = \xi_{,i}^s h_{sj} + \xi_{,j}^s h_{is} + \xi^s h_{ij,s} \equiv \hat{\xi} h_{ij}. \quad (10.24)$$

Это также линейный оператор в пространстве тензорных полей h . При этом коммутатор операторов, определяемых векторными полями ξ и η , равен Ли-оператору их коммутатора. Таким образом, обозначив $(\hat{V}_+, \hat{V}_-, \hat{V}_3)$,

$(\hat{W}_+, \hat{W}_-, \hat{W}_3)$ операторы Ли-вариаций тензорных полей, определяемые соответствующими полями Киллинга $(V_+, V_-, V_3), (W_+, W_-, W_3)$, получаем механизм преобразования одних решений уравнения (10.18) в другие с тем же самым λ .

Так как компоненты векторов Киллинга V_3 и W_3 есть константы, то Ли-операторы тензорных полей, определяемых этими векторами, есть просто операторы дифференцирования:

$$\hat{V}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w} \right); \quad \hat{W}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial w} \right). \quad (10.25)$$

Их собственные функции зависят от u и w как $e^{i(ku+mw)}$ с целыми значениями k и m , так что для всех компонент возмущений метрики остается пока не определенной только зависимость от x .

6.3. Классифицирующие операторы

Введем еще операторы

$$\begin{aligned} \hat{V}_{+-} &= \hat{V}_+ \cdot \hat{V}_-; & \hat{V}_{-+} &= \hat{V}_- \cdot \hat{V}_+; \\ \hat{W}_{+-} &= \hat{W}_+ \cdot \hat{W}_-; & \hat{W}_{-+} &= \hat{W}_- \cdot \hat{W}_+. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Как и соответствующий оператор в группе вращений, оператор $\hat{V}_{+-}$, например, коммутирует с оператором $\hat{V}_3$ и, естественно, с любым оператором из группы W . Поэтому операторы $\hat{V}_{+-}$, $\hat{V}_{-+}$, $\hat{V}_3$, $\hat{W}_{+-}$, $\hat{W}_{-+}$, $\hat{W}_3$ коммутируют друг с другом.

Из-за коммутационных соотношений (10.23) имеется линейная зависимость

$$\hat{V}_{+-} - \hat{V}_{-+} = 2i \hat{V}_3; \quad \hat{W}_{+-} - \hat{W}_{-+} = 2i \hat{W}_3. \quad (10.27)$$

Поэтому тензорные моды мы будем искать как собственные функции операторов $\hat{V}_3$, $\hat{W}_3$, $\hat{V}_{+-}$, $\hat{W}_{+-}$ и, конечно, $\delta \hat{R}$.

6.4. Ли-генерация мод

Все моды являются собственными векторами операторов $\hat{V}_3$, $\hat{W}_3$, так что зависимость тензоров от координат x , u , w определяется как

$$\mathbf{h}^n(x, u, w) = \mathbf{h}_{k,m}^n(x) e^{i(ku+mw)} \equiv \mathbf{h}_{k,m}^n. \quad (10.28)$$

Здесь k и m — это не тензорные индексы, а целые числа, определяющие собственные значения операторов $\hat{V}_3, \hat{W}_3$:

$$\hat{V}_3 \mathbf{h}_{k,m}^n = i \frac{k+m}{2} \mathbf{h}_{k,m}^n; \quad \hat{W}_3 \mathbf{h}_{k,m}^n = i \frac{k-m}{2} \mathbf{h}_{k,m}^n. \quad (10.29)$$

Индекс n определяет принадлежность данной моды к группе собственных векторов оператора $\delta \hat{R}$ с собственным значением λ_n .

6.5. Сдвиги

Операторы $\hat{V}_+, \hat{V}_-, \hat{W}_+, \hat{W}_-$ преобразуют моду $\mathbf{h}_{k,m}^n$ в моду с соседними значениями индексов k и m :

$$\begin{aligned} \hat{V}_+ \mathbf{h}_{k,m}^n &= c_{nkm}^1 \mathbf{h}_{k+1,m+1}^n; & \hat{V}_- \mathbf{h}_{k,m}^n &= c_{nkm}^2 \mathbf{h}_{k-1,m-1}^n; \\ \hat{W}_+ \mathbf{h}_{k,m}^n &= c_{nkm}^3 \mathbf{h}_{k+1,m-1}^n; & \hat{W}_- \mathbf{h}_{k,m}^n &= c_{nkm}^4 \mathbf{h}_{k-1,m+1}^n. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Так как векторы Киллинга не меняют метрики, то собственное значение λ_n оператора $\delta \hat{R}$ не меняется, то есть индекс n остается неизменным. Константы c_{nkm}^i связаны с выбранной нормировкой.

6.6. Граничные моды

При заданном n пространство мод является конечным, поэтому если на какую-то моду $\mathbf{h}_{k,m}^n$ многократно действовать, например, оператором $\hat{V}_+$, то новые моды будут генерироваться не бесконечно, а для какого-то значения пары (k, m) действие этого оператора даст тензор, все компоненты которого нули — нулевой тензор.

Ненулевую моду, которую оператор $\hat{V}_+$ обращает в нуль, назовем *верхней граничной модой*. Аналогично ненулевые моды, обращаемые в нуль операторами $\hat{V}_-, \hat{W}_-, \hat{W}_+$, назовем соответственно *нижней, левой и правой граничными модами*.

Пусть $\mathbf{h}_{k,m}^n$ — верхняя граничная мода, то моды $\mathbf{h}_{k+1,m-1}^n, \mathbf{h}_{k-1,m+1}^n$ и вообще при любом l (целом — положительном или отрицательном) $\mathbf{h}_{k+l,m-l}^n$ является либо верхней граничной модой, либо нулем. Действительно, $\mathbf{h}_{k+l,m-l}^n = (\hat{W}_+)^l \mathbf{h}_{k,m}^n$ (при отрицательном l) берется соответствующая степень оператора $\hat{W}_-$. Но операторы $\hat{V}$ и $\hat{W}$ коммутируют, поэтому

$$\hat{V}_+ \mathbf{h}_{k+l,m-l}^n = c \hat{V}_+ (\hat{W}_+)^l \mathbf{h}_{k,m}^n = c (\hat{W}_+)^l \hat{V}_+ \mathbf{h}_{k,m}^n = 0.$$

То есть все моды с тем же значением $k + m$ также являются либо верхними граничными, либо нулевыми. Это утверждение сразу же переносится и на нижние граничные моды.

Аналогично для левых и правых граничных мод: если $h_{k,m}^n$ является граничной, то и любая мода с тем же значением $k - m$ является либо граничной, либо равна нулю.

Пусть опять $h_{k,m}^n$ является верхней граничной модой. Каковы ее собственные значения операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{V}_{-+}$? Так как $\hat{V}_{-+} = \hat{V}_- \hat{V}_+$, а $\hat{V}_+ h_{k,m}^n = 0$, то $\hat{V}_{-+} h_{k,m}^n = 0$. Это один из важных признаков граничной моды. Аналогично нижние, левые и правые граничные моды имеют нулевые собственные значения операторов $\hat{V}_{+-}$, $\hat{W}_{+-}$, $\hat{Z}_{+-}$.

Подеиствуем теперь на верхнюю граничную моду h_{k_t, m_t}^n оператором $\hat{V}_{+-}$. Из коммутационных соотношений (10.27) следует, что

$$\hat{V}_{+-} h_{k_t, m_t}^n = (\hat{V}_{-+} + 2i\hat{V}_3) h_{k_t, m_t}^n = -(k_t + m_t) h_{k_t, m_t}^n. \quad (10.31)$$

Это же собственное значение имеет оператор $\hat{V}_{-+}$ на следующей от границы моде $h_{k_t-1, m_t-1}^n = c\hat{V}_+ h_{k_t, m_t}^n$ (так как собственные значения не зависят от множителя собственного вектора, то константу c мы будем опускать). Действительно, для любой, не только граничной моды, если $\hat{V}_{+-} h_{k,m}^n = \mu h_{k,m}^n$, то

$$\hat{V}_{-+} h_{k-1, m-1}^n = \hat{V}_{-+} (\hat{V}_- h_{k,m}^n) = \hat{V}_- (\hat{V}_+ \hat{V}_{-+}) h_{k,m}^n = \mu (\hat{V}_- h_{k,m}^n). \quad (10.32)$$

Оператор же $\hat{V}_{+-}$ на этой моде имеет собственное значение

$$\hat{V}_{+-} h_{k-1, m-1}^n = (\hat{V}_{-+} + 2i\hat{V}_3) h_{k-1, m-1}^n = \mu - (k + m - 2).$$

Таким образом, собственное значение оператора $\hat{V}_{+-}$ на верхней граничной моде равно $-(k + m)|_l$, на следующей $-(k + m) - (k + m - 2)$. Отступление от верхней границы на l шагов путем l -кратного применения оператора $\hat{V}_-$ приведет к моде $h_{k-l, m-l}^n$, собственное значение оператора $\hat{V}_{+-}$ на которой определяется суммой арифметической прогрессии

$$\begin{aligned} \mu_l = & -((k_t + m_t) + (k_t + m_t - 2) + (k_t + m_t - 4) + \\ & + \dots + (k_t + m_t - 2(l-1))) = (l+1)(k_t + m_t - l). \end{aligned} \quad (10.33)$$

Из выражения (10.33) видно, что через $l = L = k_t + m_t$ шагов мода

$$h_{k_t-L, m_t-L}^n = h_{-m_t, -k_t}^n \equiv h_{k_b, m_b}^n$$

будет нижней граничной модой, соответствующей верхней граничной моде h_{k_t, m_t}^n . Для конечности этого процесса должно выполняться условие $k_t + m_t \geq 0$. Для всех $L + 1$ (при учете верхней граничной) мод на этом пути $k - m$ остается постоянным.

Этим числом управляют операторы серии $\hat{W}$. Применяв подобную процедуру с операторами из серии $\hat{W}$ к правой граничной моде h_{k_r, m_r}^n , получаем цепочку мод длиной $S + 1$ ($S = k_r - m_r$) с постоянным значением $k + m$ от $h_{-m_r, -k_r}^n$ до h_{k_r, m_r}^n с общим числом мод $(L + 1)(S + 1)$.

При четном $k_t + m_t$ через $l = L/2 = (k_t + m_t)/2$ шагов действия оператора $\hat{V}_-$ сумма $k + m$ оказывается равной нулю, $k = -m = q = (k_t - m_t)/2$, а собственное значение μ достигает максимального значения

$$\mu_{\max} = \frac{L(L+2)}{4} = \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + 1\right). \quad (10.34)$$

Если, наоборот, это число μ известно, например μ_{00} , для моды $h_{0,0}^n$ оно определяет длину цепочки $L + 1$ вдоль направления V (по направлению изменения суммы $k + m$ при постоянной разности $k - m$).

Собственное значение $\nu_{00} = (S/2)(S/2 + 1)$ оператора $\hat{W}_{+-}$ на моде $h_{0,0}^n$ определяет длину цепочки $S + 1$ вдоль направления W (по направлению изменения разности $k - m$ при постоянной сумме $k + m$). Всего в этой генерации содержится $(L + 1)(S + 1)$ мод.

Числа L и S определяют максимальные значения чисел k и m :

$$k_{\max} = \frac{k + m}{2}|_{\max} + \frac{k - m}{2}|_{\max} = \frac{L + S}{2} \equiv n. \quad (10.35)$$

Это число характеризует изучаемую серию мод.

Пару чисел (L, S) будем называть характеристикой моды.

6.7. Отражения

Метрика (10.19) удобна еще тем, что в ней явным и нетривиальным образом определяется дискретная симметрия сферы, определяемая преобразованиями

$$\tilde{x} = \sqrt{1 - x^2}; \quad \tilde{u} = w; \quad \tilde{w} = -u. \quad (10.36)$$

Эти преобразования (будем их обозначать оператором $\hat{P}$) не меняют метрику (10.19), но преобразуют поля Киллинга. Преобразуются комбинации, определяющие векторы Киллинга:

$$u + w = \tilde{u} - \tilde{w}; \quad u - w = -(\tilde{u} + \tilde{w}).$$

Компоненты любого вектора A^i преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{A}^1 &= - \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} A^1 \right)_{x \rightarrow \sqrt{1-x^2}}; \\ \tilde{A}^2 &= A^3_{x \rightarrow \sqrt{1-x^2}}; \quad \tilde{A}^3 = -A^2_{x \rightarrow \sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}\tag{10.37}$$

Тогда векторы Киллинга преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{V}_3 &\rightarrow \hat{W}_3; \quad \hat{V}_+ \rightarrow -\hat{W}_+; \\ \hat{V}_- &\rightarrow -\hat{W}_-; \quad \hat{W}_3 \rightarrow -\hat{V}_3; \\ \hat{W}_+ &\rightarrow \hat{V}_-; \quad \hat{W}_- \rightarrow \hat{V}_+.\end{aligned}\tag{10.38}$$

Эти преобразования не меняют коммутационных соотношений. Самое главное в преобразованиях (10.36) — перестановка $u + w$ и $u - w$.

Повторное преобразование (10.36) восстанавливает исходную систему координат, поэтому квадрат оператора $\hat{P}$ является единичным оператором.

Действие оператора $\hat{P}$ на тензорное поле:

$$\begin{aligned}\hat{P} h_{11}(x) &= \frac{x^2}{1-x^2} h_{11}(\sqrt{1-x^2}); \\ \hat{P} h_{12}(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} h_{13}(\sqrt{1-x^2}); \\ \hat{P} h_{13}(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} h_{12}(\sqrt{1-x^2}); \\ \hat{P} h_{22}(x) &= h_{33}(\sqrt{1-x^2}); \\ \hat{P} h_{33}(x) &= h_{22}(\sqrt{1-x^2}); \\ \hat{P} h_{23}(x) &= h_{23}(\sqrt{1-x^2}).\end{aligned}\tag{10.39}$$

При отражениях векторы Киллинга преобразуются в соответствии с (10.38), а классифицирующие операторы следующим образом:

$$\hat{P} \hat{V}_{+-} = \hat{W}_{+-}; \quad \hat{P} \hat{V}_{-+} = \hat{W}_{-+}; \quad \hat{P} \hat{W}_{+-} = \hat{V}_{-+}; \quad \hat{P} \hat{W}_{-+} = \hat{V}_{+-}.\tag{10.40}$$

Видно, что он не коммутирует с операторами $\hat{V}_{-+}$ и $\hat{W}_{-+}$, поэтому моды как собственные функции этих операторов не являются собственными модами оператора $\hat{P}$. Если некоторая серия мод имеет характеристики (L, S) ,

то оператор $\hat{P}$ переводит ее в другую серию мод с характеристикой (S, L) , при этом максимальное значение индекса $k_{\max}$, определяемое (10.35), не меняется. Поэтому тензорные поля с неравными друг другу L и S обязательно имеют по две серии мод (две поляризации).

Заметим, что все соотношения этого параграфа относятся не только к тензорным полям, но и к полям любого типа на трехмерной сфере.

6.8. Базовые моды флуктуаций

Для того чтобы воспользоваться техникой Ли-генерации в рассматриваемой серии, нужно явно построить одно решение, а затем, действуя операторами $\hat{V}_+$, $\hat{V}_-$, $\hat{W}_+$, $\hat{W}_-$, из него сгенерировать все моды данной серии.

6.8.1. Четные моды

Вариации метрики евклидова пространства являются поперечно-поперечными, и выбранная система координат позволяет построить поперечно-поперечные флуктуации на сфере как функции только одной переменной x . Это прежде всего компонента $h_{23} = f_{23}(x)$. Зададим тензорное поле в виде

$$h_{e1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{23}(x) \\ 0 & f_{23}(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.41)$$

Вычисление вариации тензора Риччи $\delta\gamma_{23} = f_{23}(x)$ (10.17) приводит к появлению в этой вариации только одной компоненты:

$$\delta R_{23} = -\frac{(1-x^2)}{2} \left(f_{23}'' - \frac{1}{x} f_{23}' \right) + 2 f_{23}. \quad (10.42)$$

Уравнение (10.18) на собственные векторы оператора $\delta\hat{R}$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(x^2 - 1) \left(f_{23}'' - \frac{1}{x} f_{23}' \right) + 4 f_{23} = \lambda f_{23}. \quad (10.43)$$

Инвариантный скаляр из компонент h_{23} и какой-то другой $\tilde{h}_{23}$, зависящих только от координаты x , образуется с помощью метрического тензора:

$$(h_{23}, \tilde{h}_{23}) = 2 \int \gamma^{22} \gamma^{33} h_{23} \tilde{h}_{23} \sqrt{\gamma} dx = \int_0^1 \frac{f_{23}(x) \tilde{f}_{23}(x)}{x^2 (1-x^2)} 2x dx. \quad (10.44)$$

Несингулярность нормы (h_{23}^2) , а также требование, чтобы мода являлась собственным вектором оператора $\hat{P}$, требуют, чтобы решение представлялось в виде $f_{23} = x^2(1 - x^2)f(x^2)$. Для функции $f(z) = f(x^2)$ дифференциальное уравнение примет вид

$$z(z-1)f'' + 2(2z-1)f' = \frac{\lambda-12}{4}f. \quad (10.45)$$

Бесконечно удаленная точка для этого уравнения (уравнения Якоби) является регулярной, так как в ее окрестности уравнение (10.45) принимает вид

$$z^2 f'' + 4z f' = \mu f; \quad \mu = \frac{\lambda-12}{4},$$

допускающий степенное решение $f \sim z^q$ с целым q , откуда находятся собственные значения λ :

$$\mu = q(q+3); \quad \lambda = 4\mu + 12 = 4q^2 + 12q + 12. \quad (10.46)$$

При заданном q уравнение (10.45) полностью определено:

$$z(z-1)P_q'' + 2(2z-1)P_q' = q(q+3)P_q \quad (10.47)$$

и его решение будем искать в виде полинома (полинома Якоби)

$$P_q = 1 - a_1^q z + a_2^q z^2 + \dots + a_k^q z^k + \dots + a_q^q z^q.$$

Нулевой коэффициент выберем равным единице $a_0^q = 1$. Остальные коэффициенты определяются из рекуррентного соотношения

$$a_{k+1}^q = a_k^q \frac{(q-k)(q+k+2)}{(k+1)(k+2)}. \quad (10.48)$$

Первые полиномы (после подстановки $z = x^2$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; & \lambda &= 12, \\ P_1 &= 1 - 2x^2; & \lambda &= 28, \\ P_2 &= 1 - 5x^2 + 5x^4; & \lambda &= 52, \\ P_3 &= 1 - 9x^2 + 21x^4 - 14x^6; & \lambda &= 84. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Эти полиномы являются *палиндромами* — отображают действие оператора $\hat{P}$, которое для полиномов P_q выражается в замене $x^2 \rightarrow 1 - x^2$:

полиномы с четным q при такой замене не меняются, а с нечетным — меняют знак.

Скалярное произведение (10.44) из компонент h_{23} какой-то другой $\tilde{h}_{23}$ образуется с помощью метрического тензора:

$$(h_{23}, \tilde{h}_{23}) = \int_0^1 (1-z) P_q(z) P_{q'}(z) dz. \quad (10.50)$$

С этим весом полиномы друг другу ортогональны.

Вторая поперечно-поперечная четная мода h_{e2} связана с компонентами метрики h_{22} и h_{33} и диагональна. Требование равенства нулю шпура приводит к выражению с двумя функциями, зависящими только от x :

$$h_{11} = \gamma_{11} f_1(x); \quad h_{22} = \gamma_{22} f_2(x); \quad h_{33} = -\gamma_{33}(f_1(x) + f_2(x)).$$

Равенство нулю дивергенции тензора приводит к связи этих функций

$$f_2(x) = (x(1-x^2) f_1(x))'.$$

После выражения f_2 через f_1 уравнение на собственные значения (10.18) приводит к уравнению на функцию $f_1(x^2) = f[z]$, в точности совпадающему с уравнением (10.45). Таким образом, и эти решения порождаются теми же полиномами Якоби с теми же собственными значениями.

6.8.2. Классифицирующие операторы

Построенные решения h_{e1}^q, h_{e2}^q являются собственными векторами оператора $\hat{P}$ с собственными значениями ± 1 , а потому не являются собственными векторами операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$:

$$\begin{aligned} h_{e+}^q &= h_{e2}^q + (2q+3) h_{e1}^q; \\ h_{e-}^q &= h_{e2}^q - (2q+3) h_{e1}^q. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Оператор $\hat{P}$ переставляет эти моды. При этом новые моды являются собственными векторами операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{+-} h_{e+}^q &= -q(q+1) h_{e1}^q; \\ \hat{W}_{+-} h_{e-}^q &= -(q+2)(q+3) h_{e1}^q. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Следовательно, характеристика этой серии $(L, S) = 2(q, q+2)$, а максимальное значение, принимаемое индексами (k, m) , $n = 2q+2$.

Так как оператор $\hat{P}$ переставляет операторы $\hat{V}$ и $\hat{W}$, то у второй серии

$$\begin{aligned}\hat{W}_{+-} \mathbf{h}_{e2}^q &= -q(q+1) \mathbf{h}_{e2}^q; \\ \hat{V}_{+-} \mathbf{h}_{e2}^q &= -(q+2)(q+3) \mathbf{h}_{e2}^q.\end{aligned}\quad (10.53)$$

Характеристика этой серии $(L, S) = (2(q+2), q)$, а максимальная степень такая же: $n = 2q + 2$.

В каждой серии содержится различных мод $(n - \text{четное})$

$$N_n = (L+1)(S+1) = (n-1)(n+3). \quad (10.54)$$

Все они являются собственным вектором оператора $\delta \hat{H}$ на сфере (10.18) с собственным значением (10.46), выраженным через $n = 2q + 2$:

$$\lambda_n = n^2 + 2n + 4. \quad (10.55)$$

6.8.3. Нечетные моды

Простейшую нечетную моду можно выбрать в бесшпуровом виде

$$\mathbf{h}_o = \begin{pmatrix} \gamma_{11} f_1(x) & i f(x) & 0 \\ i f(x) & \gamma_{22} f_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{33} (f_1(x) + f_2(x)) \end{pmatrix} e^{iu}.$$

Требование нулевой дивергенции приводит к выражению функций f и f_2 через $f_1(x)$:

$$f = -x f_1(x); \quad f_2 = 2(1 - 2x^2) f_1(x) + x(1 - x^2) f_1'(x).$$

Все компоненты метрики определяются через функцию $f_1(x) = f_q$, удовлетворяющую уравнению

$$f_q'' + \frac{7x^2 - 3}{x(x^2 - 1)} f_q' + \frac{3 - (7 + 16q + 4q^2)x^2}{x^2(x^2 - 1)} f_q = 0.$$

Представляя ее полиномом

$$f_q = x(1 - a_1^q x^2 + a_2^q x^4 - \dots + (-1)^k a_k^q x^{2k} + \dots + (-1)^q a_q^q x^{2q}),$$

из дифференциального уравнения можно выразить связь между коэффициентами:

$$a_k^q = a_{k-1}^q \frac{(q-k+1)(q+k+3)}{k(k+2)}.$$

Первые полиномы:

$$f_0 = x;$$

$$f_1 = x \left(1 - \frac{5}{3} x^2\right);$$

$$f_2 = x \left(1 - 4 x^2 + \frac{7}{2} x^4\right);$$

$$f_3 = x \left(1 - 7 x^2 + 14 x^4 - \frac{42}{5} x^7\right).$$

Вторую нечетную моду можно получить, подействовав на найденную оператором $\hat{V}_{+-}$, и, не выделяя ее в чистом виде, можно построить собственные функции операторов $\hat{V}_{+-}$, $W P m$ следующим образом: сначала находится мода $h_1 = \hat{V}_{+-} h_0$, а затем строятся их линейные комбинации:

$$h_{o+} = h_1 + (q+3)^2 h_0; \quad h_{o-} = -(h_1 + (q+1)^2 h_0). \quad (10.56)$$

Они являются собственными функциями классифицирующих операторов со следующими собственными значениями:

	$\hat{V}_{+-}$	$\hat{V}_{-+}$	$\hat{W}_{+-}$	$\hat{W}_{-+}$
h_{o+}	$(q+1)^2 - 1$	$(q+1)^2$	$(q+3)^2 - 1$	$(q+3)^2$
h_{o-}	$(q+3)^2 - 1$	$(q+3)^2$	$(q+1)^2$	$(q+1)^2 - 1$

Характеристика определяется числом q : $(L, S) = (2q+1, 2q+5)$, а максимальная степень

$$n = \frac{L+S}{2} = 2q+3;$$

$$q = \frac{n-3}{2}.$$

Выраженное через n выражение для собственных значений нечетных мод

$$\lambda_n = n^2 + 2n + 4 \quad (10.57)$$

в точности совпадает с выражением для четных мод (10.55).

За счет двух поляризаций каждая нечетная серия содержит $2(n-1)(n+3)$ мод с одним и тем же λ_n .

6.9. Явный вид мод

Итак, собственные моды оператора Риччи:

$$\hat{R} \cdot h_{ij}^n \equiv \delta R_{ij} = \frac{1}{2r^2} \lambda_n h_{ij}^n \quad (10.58)$$

собираются в группы, характеризуемые целым числом n , начинающимся с 2. Каждая мода в группе имеет собственное значение

$$\lambda_n = n^2 + 2n + 4. \quad (10.59)$$

При каждом n имеется две серии (две поляризации) по $(n-1)(n+3)$ базисных тензоров в каждой. Они сопряжены друг с другом оператором отражения $\hat{P}$. В одной из поляризаций сумма индексов $k+m$ изменяется от $-(n+2)$ до $+(n+2)$ через 2, определяя $(n+3)$ различных комбинаций при заданной разности $k-m$, независимо принимающей значения от $-(n-2)$ до $+(n-2)$ также через 2, определяя $(n-1)$ различных значений при заданной сумме $k+m$, так что общее число функций при заданном n равно $(n-1)(n+3)$.

Для другой поляризации ситуация такая же, если заменить m на $-m$. Таким образом, всего имеется $2(n-1)(n+3)$ мод при заданном n .

Максимальное значение, которое может принимать один из индексов, например k :

$$k_{\max} = \frac{1}{2} ((k+m)_{\max} + (k-m)_{\max}) = \frac{1}{2} ((n+2) + (n-2)) = n.$$

Аналогично минимальное значение любого из индексов равно $-n$.

Например, возможные комбинации пар индексов k и m при $n=3$ для второй поляризации представляются таблицей:

$k-m$	k	m	k	m
5	2	-3	3	-2
3	1	-2	2	-1
1	0	-1	1	0
-1	-1	0	0	1
-3	-2	1	-1	2
-5	-3	2	-2	3
$k+m$	-1		1	

Для четного $n = 4$ (первая мода):

$k + m$	k	m	k	m	k	m
6	2	4	3	3	4	2
4	1	3	2	2	3	1
2	0	2	1	1	2	0
0	-1	1	0	0	1	-1
-2	-2	0	-1	-1	0	-2
-4	-3	-1	-2	-2	-1	-3
-6	-4	-2	-3	-3	-2	-4
$k - m$	-2		0		2	

Для наименьших мод $n = 2$ и в первой поляризации имеется всего пять мод ($k - m = 0$):

$$(k, m) = (2, 2) (1, 1) (0, 0) (-1, -1) (-2, -2).$$

Для второй поляризации ($k + m = 0$):

$$(k, m) = (2, -2) (1, -1) (0, 0) (-1, 1) (-2, 2).$$

6.9.1. Первые четные моды ($n = 2$)

Метод Ли-генерации позволяет получать явный вид пространственного распределения мод. Для примера приведем моды с $n=2$:

$$\mathbf{h}_{00}^{2\pm} = \begin{pmatrix} 1(1-x^2) & 0 & 0 \\ 0 & x^2(1-3x^2) & \pm 3x^2(1-x^2) \\ 0 & \pm 3x^2(1-x^2) & (1-x^2)(-2+3x^2) \end{pmatrix}, \quad (10.60)$$

$$\mathbf{h}_{1,-1}^{2-} = e^{i(u-w)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{ix^2}{\sqrt{1-x^2}} & -i\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix^2}{\sqrt{1-x^2}} & 2x^3\sqrt{1-x^2} & -x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) \\ -i\sqrt{1-x^2} & -x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) & -2x(1-x^2)^{3/2} \end{pmatrix}, \quad (10.61)$$

$$\mathbf{h}_{2,-2}^{2-} = e^{2i(u-w)} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2} & ix & ix \\ ix & -x^2(1-x^2) & -x^2(1-x^2) \\ ix & -x^2(1-x^2) & -x^2(1-x^2) \end{pmatrix}, \quad (10.62)$$

$$\mathbf{h}_{1,-1}^{2+} = e^{i(u+w)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{ix^2}{\sqrt{1-x^2}} & -i\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix^2}{\sqrt{1-x^2}} & 2x^3\sqrt{1-x^2} & -x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) \\ -i\sqrt{1-x^2} & -x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) & -2x(1-x^2)^{3/2} \end{pmatrix}, \quad (10.63)$$

$$\mathbf{h}_{2,-2}^{2+} = e^{2i(u+w)} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2} & ix & ix \\ ix & -x^2(1-x^2) & -x^2(1-x^2) \\ ix & -x^2(1-x^2) & -x^2(1-x^2)? \end{pmatrix}. \quad (10.64)$$

6.9.2. Первые нечетные моды ($n = 3$)

$$\mathbf{h}_{1,0}^{3,\pm} = e^{iu} \begin{pmatrix} \frac{x}{1-x^2} & -ix^2 & \pm(1-x^2) \\ -ix^2 & x^2(3-5x^2) & -x(1-x^2)(1-5x^2) \\ \pm(1-x^2) & -x(1-x^2)(1-5x^2) & -x(1-x^2)(4-5x^2) \end{pmatrix}. \quad (10.65)$$

Это правая граничная мода: $\hat{V}^+ \mathbf{h}_{1,0}^{3+} = (0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{0,-1}^{3,+} &= -i\hat{V}^- \mathbf{h}_{1,0}^{3,+} = \\ &= e^{-iw} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{ix^3}{\sqrt{1-x^2}} & -ix\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix^3}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x^2(1-x^2)(1-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x^2(1-x^2)(4-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \\ -ix\sqrt{1-x^2} & \frac{x^2(1-x^2)(4-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & -(1-x^2)^{3/2}(2-5x^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.66)$$

Это левая граничная мода: $\hat{V}^- \mathbf{h}_{0,-1}^{3+} = (0)$.

$$\mathbf{h}_{2,1}^{3,-} = \frac{1}{2i} \hat{V}^+ \mathbf{h}_{1,0}^{3,-} =$$

$$= e^{i(2u+w)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{ix(1-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & -3ix\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix(1-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x^2(1-x^2)(1-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & x^2\sqrt{1-x^2}(3-5x^2) \\ -3ix\sqrt{1-x^2} & x^2\sqrt{1-x^2}(3-5x^2) & -5x^2(1-x^2)^{3/2} \end{pmatrix}, \quad (10.67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{3,2}^{3,-} &= \frac{1}{5} \hat{V}^+ \mathbf{h}_{2,1}^{3,-} = \\ &= e^{i(3u+2w)} \begin{pmatrix} \frac{-x}{1-x^2} & -ix^2 & ix^2 \\ -ix^2 & x^3(1-x^2) & -x^3(1-x^2) \\ ix^2 & -x^3(1-x^2) & x^3(1-x^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.68)$$

Это правая граничная мода: $\hat{V}^+ \mathbf{h}_{3,2}^{3+} = (0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{0,1}^{3,-} &= \frac{1}{5} \hat{V}^- \mathbf{h}_{1,0}^{3,-} = \\ &= e^{iw} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{ix^3}{\sqrt{1-x^2}} & ix\sqrt{1-x^2} \\ \frac{ix^3}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x^2(1-x^2)(1-5x^2)}{\sqrt{1-x^2}} & -x^2\sqrt{1-x^2}(4-5x^2) \\ ix\sqrt{1-x^2} & -x^2\sqrt{1-x^2}(4-5x^2) & -(1-x^2)^{3/2}(2-5x^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.69)$$

Это левая граничная мода: $\hat{V}^- \mathbf{h}_{0,1}^{3-} = (0)$.

7. Динамика мод на трехмерной сфере

Мы рассмотрим чистую динамику малых деформаций трехмерной сферы без дополнительной материи — чисто геометрическую динамику.

Нет причин в этой задаче отказываться от глобальной инерциальной системы, поэтому положим $V^i = 0$. Уравнения связей при этом выполняются автоматически. Метрика сферы радиуса $r(t)$:

$$dl^2 = r^2(t) \left(\bar{\gamma}_{ij} + 2 \sum_{nkm} a_{nkm}(t) h_{ij}^{nkm} \right), \quad (10.70)$$

где $\bar{\gamma}_{ij}$ — метрика трехмерной сферы единичного радиуса, h_{ij}^{nkm} — построенные выше моды тензорных деформаций, а динамика мод сводится к определению временной зависимости амплитуд $a_{nkm}(t)$.

Тензор Риччи деформированной сферы не зависит от радиуса

$$R_{ij} = 2 \bar{\gamma}_{ij} + \sum_{nkm} \lambda_n a_{nkm} h_{ij}^{nkm}; \quad \lambda_n = n^2 + 2n + 4. \quad (10.71)$$

Множитель λ_n определен выражением (10.55) и зависит только от n . В линейном по $a_{nkm}(t)$ приближении тензор скоростей деформации

$$\mu_j^i = \frac{\dot{r}}{r} \left(\delta_j^i + 2 \sum_{nkm} a_{nkm}(t) h_j^{i nkm} \right) + \sum_{nkm} \dot{a}_{nkm}(t) h_j^{i nkm}. \quad (10.72)$$

Здесь индекс у $h_j^{i nkm}$ поднят метрическим тензором сферы единичного радиуса $\bar{\gamma}^{ik}$. Так как свертка по тензорным индексам моды равна нулю (бесшпуровые возмущения), то

$$\mu \equiv \mu_i^i = 3 \frac{\dot{r}}{r},$$

что, наконец, определяет импульсы:

$$\pi_j^i = x r^2 \dot{r} \left(-\delta_j^i + \sum_{nkm} a_{nkm}(t) h_j^{i nkm} \right) + x \frac{r^3}{2} \sum_{nkm} \dot{a}_{nkm}(t) h_j^{i nkm}. \quad (10.73)$$

Для описания динамики теперь нужно использовать уравнения (7.9), для которых нужно еще значение кинетической энергии (в линейном приближении по возмущениям) и тензора Эйнштейна сферы:

$$T = -3 x r \dot{r}^2; \quad G_j^i = \frac{1}{r^2} \left(-\delta_j^i + \sum_{nkm} \lambda_n a_{nkm} h_j^{i nkm} \right).$$

Уравнения динамики приводятся к виду

$$x r \left(-(1 + \dot{r}^2 + 2 r \ddot{r}) \delta_j^i + \sum_{nkm} h_j^{i nkm} \dot{D} a_{nkm}(t) \right) = 0, \quad (10.74)$$

вследствие бесшпуровости и линейной независимости мод распадающемуся на бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. Первая составляющая $1 + \dot{r}^2 + 2 r \ddot{r} = 0$ определяет фридмановскую динамику радиуса сферы, на которую в линейном приближении

возмущения не оказывают влияния. Первый интеграл этого уравнения определяет максимальный радиус расширения сферы:

$$r(1 + \dot{r}^2) = r_m. \quad (10.75)$$

Линейные уравнения на амплитуды возмущений с учетом этого принимают вид

$$\ddot{a}_{nkm} + 5 \frac{\dot{r}}{r} \dot{a}_{nkm} = \left(\frac{\lambda_n - 4}{r^2} + \frac{3r_m}{r^3} \right) a_{nkm}. \quad (10.76)$$

Здесь хэббловский коэффициент $H = \dot{r}/r$ обеспечивает затухание возмущений на стадии расширения.

Вдали от сингулярности при очень больших n — для высших мод возмущений — их амплитуды меняются почти по гармоническому закону с периодом порядка $r/(n+1)$, много меньшим, чем период Фридмановой циклоиды. За многие колебания амплитуды возмущений радиус почти не меняется.

В области Большого взрыва — при $t \rightarrow 0$ — решения уравнения Фридмана (10.75), определяющие динамику радиуса в параметрическом виде

$$r = \frac{r_m}{2} (1 - \cos \eta); \quad t = \frac{r_m}{2} (\eta - \sin \eta), \quad (10.77)$$

имеют асимптотику

$$r = r_m \frac{\eta^2}{4}; \quad t = r_m \frac{\eta^3}{12},$$

позволяющую явно выразить зависимость $r(t)$:

$$r^3 = \frac{9}{4} r_m t^2. \quad (10.78)$$

В этой области в правой части дифференциального уравнения (10.76) первое слагаемое ($\sim 1/r^2$) мало в сравнении со вторым ($\sim 1/r^3$). Оставляя только это последнее слагаемое, не зависящее от n , получаем для всех мод единое уравнение, определяющее динамику их амплитуд при $r \rightarrow 0$:

$$\ddot{a} + \frac{10}{3t} \dot{a} + \frac{4}{3t^2} a = 0. \quad (10.79)$$

Момент $t = 0$ определяет регулярную особую точку этого уравнения. Выбрав $a \sim t^k$, получаем алгебраическое уравнение на показатель k :

$$k^2 + \frac{7}{3}k + \frac{4}{3} = 0; \quad (3k + 4)(k + 1) = 0.$$

ГЛАВА 11

Общая теория относительности

Со времен Галилея, основоположника современной физики, никакая другая теория не меняла так радикально нашу картину макроскопического мира, как теория относительности Эйнштейна.

К. Мёллер

Несмотря на то что путь, пройденный в предыдущих главах, однозначно ведет к динамической теории пространства в глобальном времени и ничто не свидетельствует о каких-то экспериментальных или логических причинах, заставляющих отказаться от единого, глобального времени, история развития науки привела к тому, что в настоящее время господствующей теорией пространства, времени и тяготения является Общая теория относительности.

Общая теория относительности была создана в 1911–1915 годах Альбертом Эйнштейном (1879–1955), одним из создателей специальной теории относительности. Именно поэтому путь развития теории пространства и времени лежал в обобщении четырехмерной геометрии, и динамика трехмерного пространства в этих построениях затерялась.

1. Краткая история

В теории любого поля есть две стороны: как это поле влияет на другие физические процессы и как это поле формируется.

Ответ на первый вопрос Эйнштейну дал *принцип эквивалентности*: для того чтобы определить влияние гравитации на то или иное физическое явление (локальное), нужно перейти в свободно падающую систему, описать это явление как в инерциальной системе без гравитационного поля,

а затем вернуться в исходную лабораторную систему, используя преобразования изучаемых физических величин при переходе из одной движущейся системы в другую.

Отметим, однако, что эта методика применима лишь к *локальным явлениям*, таким как электродинамика, гидродинамика, уравнения которых определяются в бесконечно малой области, и неприменима к глобальным явлениям, связанным с некоторым распределенным состоянием, таким как статистическая физика, где состояние задается в некотором объеме пространства, или квантовая механика, где волновая функция также нелокальна.

Поиск ответа на второй вопрос: как же формируется гравитационное поле, занял у Эйнштейна несколько лет, и здесь ему существенно помогли два математика: Марсель Гроссман и Давид Гильберт.

Уже в 1906 году Макс Планк сформулировал принцип наименьшего действия для описания движения материальных тел в СТО:

$$S = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{c^2 - v^2} dt = \int L dt. \quad (11.1)$$

Для инерциальной системы отсюда следует первый закон Ньютона: свободные тела движутся равномерно и прямолинейно. В поле тяжести траектории тел искривляются, для чего чисто математически (из уравнений Лагранжа) требуется, чтобы лагранжиан зависел от координат. Единственная величина, которая в него входит, это скорость света c . Если она будет зависеть от координат, то траектории тел в пространстве-времени будут искривляться. При этом масса в действие входит как множитель — это значит, что искривление не будет зависеть от массы, так как в уравнениях Лагранжа общий множитель сокращается. Это объясняет открытую еще Галилеем одинаковость ускорений в поле тяжести для всех тел, независимо от их масс.

Но откуда находить эту зависимость скорости света от координат? Как ее связать с классическим гравитационным потенциалом Лапласа?

В это время Эйнштейн начинает сотрудничать с математиком Марселем Гроссманом, занимавшимся исключительно модной в то время математической теорией *исчислением Риччи* — кривизной многомерных римановых пространств. Гроссман объясняет Эйнштейну, что выражение (11.1) есть лишь частный вид общего инварианта, который в общем виде для четырехмерного пространства записывается через 10 компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ [44]:

$$S = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta}. \quad (11.2)$$

Вместо одного гравитационного потенциала Лапласа появляется 10 компонент метрики, 10 потенциалов! Эйнштейн анализирует переход к слабым гравитационным полям, рассматривая малые отклонения пространства от плоского, показывает, что при малых скоростях существенное влияние на движение частиц оказывает лишь компонента метрики g_{00} , которая и связана с гравитационным потенциалом Лапласа:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (11.3)$$

Это суть *принципа соответствия* — соответствия вновь строящейся теории классической механики, зарекомендовавшей себя как исключительно точный инструмент в небесной механике.

Потенциал Лапласа удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\phi = 4\pi k \rho. \quad (11.4)$$

Каким же уравнениям должны удовлетворять 10 компонент метрического тензора, чтобы в пределе переходить в это уравнение для единственной значимой компоненты метрики?

После четырех лет поиска, проработки различных вариантов, уходя от идей Гроссмана и вновь возвращаясь к ним, Эйнштейн формулирует наконец дифференциальные уравнения, из которых как будто можно определить метрику. Основной конструкцией, определяющей кривизну, является тензор четвертого ранга Римана–Кристоффеля, имеющий в четырехмерном пространстве 20 компонент, а свертка его по двум индексам приводит к симметричному тензору второго ранга, тензору Риччи, имеющего, как метрический тензор, 10 компонент и образованный из вторых (и менее) производных метрического тензора. Эйнштейн выдвигает тензорные уравнения

$$R_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (11.5)$$

где справа стоит тензор энергии-импульса вещества. Он показывает, что при соответствующем подборе постоянной κ в приближении слабого поля эти уравнения переходят в уравнение Пуассона (11.4).

В 1915 году Эйнштейн применяет эти уравнения для корректировки ньютоновского описания движения планет вокруг Солнца и вычисляет непонятный до этого поворот орбиты Меркурия на 40 угловых секунд в столетие, определенный за триста лет тщательных наблюдений со времен Тихо Браге. Совпадение вычисленной величины поворота с экспериментальной убеждает Эйнштейна в правильности исходных посылок и полученных уравнений (ср. п. 2.2).

К этому времени за работой Эйнштейна начинает следить патриарх математики начала XX века Давид Гильберт. Он показывает, что в общем случае уравнения Эйнштейна (11.5) несовместны: тензор энергии-импульса имеет нулевую дивергенцию $\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0$, в то время как тензор Риччи такому тождеству не удовлетворяет.

Эйнштейн в том же 1915 году корректирует теорию и формулирует 10 уравнений Эйнштейна:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \equiv G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (11.6)$$

Настоящий триумф ОТО переживает в 1919 году, когда во время полного солнечного затмения Эддингтон замеряет угловое отклонение положения звезды вблизи закрытого Луной Солнца, прекрасно совпадающее с вычислениями по теории Эйнштейна (менее двух угловых секунд — ср. п. 5.1). Теория, предсказывающая столь тонкие явления, основанная на исключительно глубоких физических принципах и использующая самые современные высоты математики, сама оказывается вершиной теоретической физики.

2. Вклад Гильберта

Давид Гильберт продемонстрировал вывод уравнений Эйнштейна из вариационного принципа [30] с действием, инвариантным относительно произвольных преобразований четырех координат:

$$S = -\frac{c^4}{16\pi k} \int R \sqrt{g} d_4x + S_m, \quad (11.7)$$

где R — скалярная кривизна четырехмерного пространства-времени, g — детерминант матрицы четырехмерного метрического тензора, константа k — замеренная Генри Кэвендишем ньютоновская гравитационная постоянная, а S_m — действие прочей материи, как и скалярная кривизна, зависящее от метрического тензора и его производных.

По теореме Гильберта, вариации действия прочей материи по четырехмерному метрическому тензору определяют компоненты тензора энергии-импульса:

$$\frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}.$$

Требование обращения в нуль вариаций полного действия (11.7) по десяти компонентам метрического тензора приводит к десяти уравнениям Эйнштейна.

При этом Гильберт показал, что вариационные уравнения удовлетворяют *тождествам Гильберта*:

$$\nabla_{\beta} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0.$$

3. Основные решения

3.1. Метрика Шварцшильда

Первое точное решение уравнений Эйнштейна пришло в конце 1915 года из германского военного госпиталя от смертельно больного известного физика Карла Шварцшильда (1873 – 1916). Метрика описывает пространство-время вне сферически симметричного тела массы M :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right)} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (11.8)$$

В коэффициенты метрики масса входит в виде единственного параметра $\alpha = 2kM/(c^2 r)$, стремящегося к нулю при $r \rightarrow \infty$, при этом метрика Шварцшильда переходит в метрику плоского пространства Минковского в сферической системе координат.

Константы, входящие в этот параметр, можно объединить в одну константу

$$r_g = 2kM/c^2, \quad (11.9)$$

имеющую размерность длины и называемую *гравитационным радиусом* тела с массой M . В коэффициенты метрики этот параметр входит в комбинации $1 - r_g/r$, мало отличающейся от единицы на больших расстояниях, но при $r \rightarrow r_g$ происходит качественное преобразование метрики: коэффициент перед dt^2 становится отрицательным. Это значит, что в этой области не может быть покоящихся тел, так как интервал для таких тел становится пространственно подобным.

Гравитационный радиус пропорционален массе тела. Максимальное значение $\alpha = r_g/r$ ограничивается радиусом тела R . Например, для Земли отношение гравитационного радиуса к радиусу Земли очень мало:

$$\frac{kM}{R^2} = g; \quad \frac{r_g}{R} = \frac{2gR}{c^2} = 7 \cdot 10^{-10}.$$

Исследованию черных дыр посвящен огромный объем литературы. Упомянем лишь одну проблему: в решении Шварцшильда M возникает как параметр интегрирования, могущий принимать как положительные, так и отрицательные значения. И этой проблеме посвящено немало литературы.

Однако в ТГВ эта константа интегрирования может быть только положительной (см. стр. 179).

Шварцшильд нашел также и “внутреннее решение” уравнений Эйнштейна, полагая это тело внутри состоящим из идеальной несжимаемой жидкости. Это второе решение Шварцшильда не было так канонизировано в литературе ОТО, так как специалисты полагают, что несжимаемой жидкости быть не может — в ней скорость звука бесконечна, а это запрещено специальной теорией относительности. Однако в задачах, где скорость звука и сжимаемость жидкости не играют большой роли, как раз для астрономических тел с малым отношением r_g/R , внутреннее решение Шварцшильда является вполне приемлемым приближением, но здесь мы его обсуждать не будем.

3.2. Решение Рейснера–Нордстрема

Это первое нетривиальное решение совместной системы уравнений Максвелла и Эйнштейна. Физически оно описывает сферически симметричные гравитационное и электромагнитное поля вне частицы с массой M и зарядом q . Как и решение Шварцшильда, оно определяется одной функцией

$$U(r) = 1 - 2 \frac{k M}{c^2 r} + \frac{q^2}{r^2},$$

но определяемой не только массой частицы M , но и зарядом q , входящим в метрику в виде q^2 , так что знак заряда на метрику не влияет:

$$ds^2 = U c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{U} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (11.10)$$

Электромагнитное поле имеет только радиальную составляющую

$$E_r = F_{01} = \frac{q}{r^2}.$$

3.3. Решение Керра

В 1963 году Патрик Керр нашел более общее вакуумное решение уравнений Эйнштейна, в которое, кроме массы, входит еще параметр a , которому

пропорционален момент количества движения вращающегося тела с массой M . При $a = 0$ это решение переходит в решение Шварцшильда [20]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{w}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + 2 \frac{r_g r a}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\varphi dt, \quad (11.11)$$

где

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr; \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta; \\ w = (r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mr a^2 \sin^2 \vartheta.$$

В 1965 году это решение было обобщено на вращающееся тело с зарядом q : оказалось, что в решении Керра нужно для этого модифицировать только функции:

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + q^2; \quad w = (r^2 + a^2 + q^2)\rho^2 + 2Mr a^2 \sin^2 \vartheta.$$

При $a = 0$ это решение переходит в решение Рейснера–Нордстрема.

4. Космология

Наибольшее влияние на науку XX века оказало полученное в 1922 году решение А. А. Фридмана (1888–1925): динамика мира в виде трехмерной сферы с радиусом, зависящим от времени [45]. Как и предыдущие космологи, Фридман рассматривал вещество, заполняющее Вселенную, как пылевидную материю без давления — “звездную пыль” — с некоторой плотностью ρ , определяемой полной массой этой пыли M и радиусом Мира r . Так как объем трехмерной сферы равен $2\pi^2 r^3$ (3.38), то плотность определяется выражением:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{2\pi^2} \frac{1}{r^3}. \quad (11.12)$$

Плотность энергии “звездной пыли” $\varepsilon = \rho c^2$.

Из уравнений Эйнштейна существенным (из-за высокой симметрии) оказывается только одно:

$$G_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon. \quad (11.13)$$

Компонента тензора Эйнштейна для трехмерной сферы (при обозначении точкой производной по ct)

$$G_0^0 = 6 \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right)$$

приводит к уравнению динамики “радиуса Мира”:

$$6 \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) = \frac{4 k M}{\pi c^2} \frac{1}{r^3}, \quad (11.14)$$

которое можно привести к виду:

$$r(\dot{r}^2 + 1) = r_m, \quad r_m = \frac{2 k M}{3 \pi c^2}. \quad (11.15)$$

Здесь r_m — максимальный “радиус Мира”, пропорциональный полной массе вещества в нем. Это дифференциальное уравнение интенсивно изучалось еще в 17-м веке Декартом, Ферма, Гюйгенсом. Решение его — циклоида. Оно довольно просто выглядит в параметрическом виде:

$$t = \frac{r_m}{2c}(\varphi - \sin \varphi); \quad r = \frac{r_m}{2}(1 - \cos \varphi). \quad (11.16)$$

С ростом параметра φ радиус совершает периодические изменения от нуля до r_m и затем опять до нуля за период 2π , а время при этом увеличивается на $\pi r_m/c$.

4.1. Критическая плотность

Есть еще более простая модель динамического развития Мира, чем модель Фридмана. Это модель Эйнштейна–де Ситтера, в которой Мир является плоским евклидовым, но масштаб расстояний, общий для всех точек пространства, зависит от времени:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - m^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Это решение может быть получено как предел решения Фридмана (11.16) при $r_m \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$:

$$\frac{ct}{r_m} = \frac{\varphi^3}{12}; \quad \frac{r}{r_m} = \frac{\varphi^2}{4}.$$

Исключая параметр φ , получаем зависимость масштаба от времени

$$m \sim \frac{r}{r_m} = k(ct)^{(2/3)}; \quad \frac{\dot{m}}{m} = \frac{2}{3t}.$$

Теперь, наоборот, из уравнения (11.13) можно найти плотность пылевидной материи:

$$6 \left(\frac{\dot{m}}{m} \right)^2 = 6 \frac{4}{9 t^2} = \frac{8\pi k}{c^2} \rho_0;$$

$$\rho_0 = \frac{c^2}{3\pi k t^2}; \quad \rho_0 m^3 = \text{const.} \quad (11.17)$$

Плотность, как и в задаче Фридмана, меняется обратно пропорционально m^3 . Она однозначно определяется только временем t , прошедшим от Большого взрыва.

Если же, как и в сферическом мире, в качестве модели вещества для плоского мира взять ультрарелятивистский газ с уравнением состояния $\epsilon = 3p$, то уравнение динамики (11.13) упростится:

$$m^2 \dot{m}^2 = a^2/4; \quad m^2 = a t.$$

Масштаб может принимать как положительные, так и отрицательные значения, но время может быть только положительным! Мир развивается не вдоль оси времени, а вдоль полуоси.

Структура пространства в целом с точки зрения ОТО жестко определяется плотностью материи. Это порождает *парадокс лишнего протона*: лишний по сравнению с (11.17) протон на кубический метр превращает плоское пространство Эйнштейна — де Ситтера в замкнутый сферический мир Фридмана.

В то же время в ТГВ космологические решения, имея в общем тот же вид, что и в ОТО, не связаны плотностью вещества, так как в ОТО суммарная плотность энергии обязана быть равной нулю, а в ТГВ — это достаточно произвольная константа интегрирования, определяемая начальными данными.

4.2. Гравитационные волны

В 1918 году Эйнштейн пишет одну из самых значительных работ “О гравитационных волнах” [40]. В этой работе он рассмотрел линеаризованные уравнения, с помощью которых описал слабые возмущения на фоне плоского пространства Минковского. В частности, он получил очень важную формулу потери энергии системой за счет гравитационного излучения, определяемого третьей производной по времени *тензора квадрупольного момента*:

$$D^{ij} = \int (3 x^i x^j - r^2 \delta^{ij}) dm,$$

выражением

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{k}{45c^5} (\ddot{D}_{ij})^2. \quad (11.18)$$

5. ОТО в глобальном времени

Космологические решения ОТО всегда исходят из метрики в виде:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{ij}(x, t) dx^i dx^j.$$

Здесь компонента метрики $g^{00} = 1$ — время глобальное, а $g^{0i} = 0$ — система глобально инерциальная.

Прочие решения ОТО также могут быть приведены к глобальному времени. Если имеется четырехмерная метрика $g_{\alpha\beta}$ в произвольных координатах x^α , для приведения ее к глобальному времени нужно преобразовать координаты (точнее — выбрать только новую временную координату $\tau = ct$) так, чтобы выполнялось условие $\bar{g}^{00} = 1$. По законам преобразования тензора

$$\bar{g}^{00} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial x^\beta} = 1. \quad (11.19)$$

Но это дифференциальное уравнение на τ оказывается уравнением Гамильтона–Якоби для траекторий движения свободно падающих материальных точек (лабораторий), общим собственным временем которых и является t . Таким образом, в глобальном времени реализуется физический принцип эквивалентности, привязывающий инерциальную систему к свободно падающей лаборатории, однако, в отличие от лифта Эйнштейна, этих лабораторий множество, и время в них синхронизировано. Тем самым принцип эквивалентности из локального превращается в глобальный.

5.1. Метрика Шварцшильда в глобальном времени

Прежде всего приведем к глобальному времени t метрику Шварцшильда (с временной переменной $\tilde{t}$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (11.20)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для выделения глобального времени записывается через компоненты обратной метрики:

$$\frac{1}{U} \left(\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} \right)^2 - U \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{\partial t}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi} \right)^2 \right) = 1,$$

где

$$U = 1 - \frac{2M}{r}.$$

Квадрат момента количества движения

$$L^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi} \right)^2$$

является сохраняющейся величиной на характеристиках этого уравнения $L^2 = l^2 = \text{const}$, так же как и

$$\epsilon = \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}},$$

при этом, принимая на бесконечности $t = \tilde{t}$, получаем

$$\frac{1}{U} - U \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 - \frac{l^2}{r^2} = 1.$$

Чтобы решение этого дифференциального уравнения покрывало все пространство — доходило до точки $r = 0$, константа l^2 должна равняться нулю, то есть l не должно зависеть ни от ϑ , ни от φ . Тогда

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\sqrt{1-U}}{U} = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{2M}{r}} \equiv u; \quad d\tilde{t} = dt - u dr.$$

Подставляя это выражение в метрику Шварцшильда (11.20), получаем внешнюю метрику тяготеющей массы в глобальном времени

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (11.21)$$

Это выражение было получено из метрики Шварцшильда в 1921 году Пенлеве [46], поставившим вопрос: если допустим произвол в преобразованиях метрики, то каково же пространство, например, в окрестности Земли на самом деле?

Между этими двумя выражениями громадная разница: в (11.21) t — это *глобальное время*, в то время как в (11.20) переменная $\tilde{t}$ — просто формальная переменная, наделенная физическим смыслом лишь в асимптотике при $r \rightarrow \infty$, но зато метрика диагональна. Различие метрик проявляется в геометрии трехмерных сечений $t = \text{const}$ (пространства). В (11.21) это плоское евклидово пространство, в то время как в (11.20) такие сечения имеют особенность на сфере $r = r_g$, внутри которой трехмерное сечение становится псевдоевклидовым.

5.2. Использование принципа эквивалентности

Метрика вокруг сферически симметричной тяготеющей массы может быть получена и без решения уравнений, с использованием принципа эквивалентности.

В работе 1911 года [37] Эйнштейн, сформулировав локальный принцип эквивалентности — в свободно падающей системе (лифте) реализуется инерциальная система, — предсказал ряд замечательных эффектов (искривление светового луча в поле тяжести, гравитационное красное смещение). Однако он рассматривал лишь однородное поле тяготения. Важно отметить, что все рассуждения в этой работе велись в неизменном (глобальном) классическом времени.

Учтем теперь неоднородность гравитационного поля. Рассмотрим сферически-симметричное тело массы M . Для описания физических явлений в окрестности этого тела введем бесконечно малые инерциальные системы, которые реализуются в свободно падающих по радиусу лабораториях (пылинках); в каждой из них — метрика Минковского:

$$ds^2 = dt^2 - \bar{d}x^2 - \bar{d}y^2 - \bar{d}z^2, \quad (11.22)$$

где $\bar{d}$ означает отсутствие глобальной соответствующей координаты и изменение ее возможно только в бесконечно малой области. Отметим, что в выражении (11.22) это ограничение наложено лишь на пространственные координаты. По времени лаборатория (локальная инерциальная система) может иметь конечную (хотя, может быть, ограниченную) протяженность.

Связывая теперь локальные координаты в лаборатории с глобальными сферическими координатами в окрестности тяготеющей массы

$$\bar{d}x = r d\vartheta; \quad \bar{d}y = r \sin \theta d\varphi; \quad \bar{d}z = dr - V dt \quad (11.23)$$

и подставляя их в (11.22), получаем выражение для метрики

$$ds^2 = (c^2 - V^2)dt^2 + 2Vdr dt - (dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (11.24)$$

Чтобы переменная t тоже была глобальной, нам нужно синхронизировать часы в различных лабораториях. Это можно сделать, если выбрать их движение таковым, чтобы на бесконечности, где пространство-время плоское, их скорость равнялась нулю — тогда эта переменная отсчитывает общее время наблюдателей, покоящихся на бесконечности, и в свободно падающих лабораториях. Из закона сохранения энергии находим

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{k m M}{r} = 0; \quad V = \sqrt{\frac{2kM}{r}}. \quad (11.25)$$

Построенная глобальная система имеет единое физическое время:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + 2\sqrt{\frac{2kM}{c^2 r}} c dt dr - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (11.26)$$

Эта метрика совпадает с (9.15). У обратного метрического тензора

$$g^{00} = 1; \quad g^{0r} = V/c. \quad (11.27)$$

Сечения $t = \text{const}$ образуют *абсолютное пространство*. В полученной метрике это плоское евклидово пространство. Единственное, что отличает полученную метрику от метрики Минковского, — это радиальное поле абсолютных скоростей Бьерна.

В то же время эта метрика переходит в диагональную метрику Шварцшильда в ОТО (11.8) при замене времени t на формальную переменную $\tilde{t}$:

$$dt = d\tilde{t} - \frac{V dr}{c^2 - V^2}. \quad (11.28)$$

5.3. Метрика Шварцшильда в глобальной инерциальной системе

Интересно в метрике Шварцшильда перейти в глобальную инерциальную (синхронную) систему. Для этого нужно теперь провести зависящее от времени преобразование пространственных координат $\tilde{x}^j(x, t)$, чтобы избавиться от недиагональной компоненты метрики $g^{0i} \equiv V^i$:

$$\tilde{g}^{0i} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial t} g^{00} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} g^{0j} = 0; \quad \frac{\partial x^j}{\partial t} \Big|_{\tilde{x}^j = \text{const}} = -V^i.$$

Продемонстрируем этот процесс на примере метрики Шварцшильда-Пэнлеве, где нужно провести преобразование радиуса с зависимостью от

времени $r(R, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= V^r = -\sqrt{2M/r}; \quad \sqrt{r} dr = -\sqrt{2M} dt; \\ r(R, t) &= (R^{3/2} - \sqrt{(9/2)Mt})^{2/3},\end{aligned}$$

что приводит к метрике в *синхронной системе отсчета* (модифицированная метрика Леметра — см. [20]):

$$\begin{aligned}ds^2 &= dt^2 - \frac{R dR^2}{(R^{3/2} - \sqrt{(9/2)Mt})^{2/3}} - \\ &- (R^{3/2} - \sqrt{(9/2)Mt})^{4/3} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = \\ &= dt^2 - \frac{R}{r(R, t)} dR^2 - r^2(R, t) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).\end{aligned}\quad (11.29)$$

Время здесь то же, что и в стационарной метрике (11.21) — глобальное, — и сечение $t = \text{const}$, как и в метрике (11.21), в любой момент времени — плоское, что очевидно при $t = 0$, а в другие моменты времени требует проверки. Это, с другой стороны, очевидно: в метрике (11.29) сечение $t = 0$ плоское, а с течением времени проводится только замена пространственных координат. Это и очень важно: *пространство* (трехмерное) остается самим собой (плоским евклидовым) с течением времени, несмотря на динамичность метрики.

5.4. Метрика Керра в глобальном времени

Уравнение Гамильтона–Якоби для метрики Керра (11.11) в координатах Бойера–Линдквиста записывается следующим образом [20]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 - \\ - \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{4Mar}{\rho^2 \Delta} \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 1,\end{aligned}\quad (11.30)$$

где $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$; $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$.

Так как коэффициенты уравнения не зависят от t и φ , то сопряженные им импульсы есть константы:

$$\tau = \epsilon t + l\varphi + f(\theta, r).$$

Из условия совпадения τ с t на бесконечности нужно, чтобы $\epsilon = 1$. Слагаемое с квадратом $l = \partial\tau/\partial\varphi$ содержит в знаменателе $\sin^2\theta$, и для избежания соответствующей сингулярности нужно положить $l = 0$. Умножив при этой подстановке (11.30) на ρ^2 , получим

$$\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2\theta - \Delta \left(\frac{\partial\tau}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta} \right)^2 - r^2 - a^2 + a^2 \sin^2\theta = 0.$$

Сокращая слагаемые с $\sin^2\theta$, получим уравнение с коэффициентами, не зависящими от θ , что вместе с условием на бесконечности определяет независимость τ от θ , так что окончательно получаем

$$\tau = t \pm u(r); \quad u(r) = \frac{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}}{\Delta}. \quad (11.31)$$

Подстановка $dt = d\tau + u dr$ меняет компоненты метрики

$$\bar{g}^{00} = 1; \quad g^{0r} = V^r = \frac{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}}{\rho^2}$$

и приводит пространственное сечение $\tau = \text{const}$ к метрике

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta\theta} &= \rho^2, \quad \gamma_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta} + \frac{2Mr(r^2 + a^2)(2Mr - \rho^2)}{\rho^2 \Delta^2}; \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}}{\rho^2} \frac{2Mar}{\Delta} \sin^2\theta; \\ \gamma_{\varphi\varphi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} a^2 \sin^2\theta \right) \sin^2\theta \end{aligned} \quad (11.32)$$

с детерминантом всюду положительным:

$$\det(\gamma_{ij}) = \rho^4 \sin^2\theta. \quad (11.33)$$

Это говорит о том, что пространство всюду имеет локально евклидов тип, в то время как в координатах Бойера–Линдквиста при радиусах, меньших гравитационного ($\Delta = 0$), пространственное сечение $t = \text{const}$ становится локально псевдоевклидовым.

Метрику (11.32) можно упрощать далее, проводя преобразования координат, не зависящие от времени. В частности, преобразованием угловой

переменной $\tilde{\varphi} = \varphi + f(r)$ пространственную часть метрики можно диагонализировать:

$$\gamma_{11} = \frac{(\rho^2)^2}{w}; \quad \gamma_{22} = \rho^2; \quad \gamma_{33} = \frac{w}{\rho^2} \sin^2 \vartheta; \quad (11.34)$$

$$w = (r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mr a^2 \sin^2 \vartheta.$$

Эта метрика имеет сингулярность только при $\rho^2 = 0$.

При этом отличны от нуля угловая и радиальная составляющие поля абсолютной скорости

$$V^\varphi = -\frac{2aMr}{w}; \quad V^r = \frac{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}}{\rho^2}. \quad (11.35)$$

5.5. Общая сферически-симметричная метрика

В ОТО, по возможности, предпочитается четырехмерная диагональная метрика. Переход к диагональной четырехмерной метрике за счет преобразования времени может быть полезен и для решения задач ГГВ как чисто математический прием.

Приведем общие формулы приведения диагональной статической сферически симметричной метрики ОТО

$$ds^2 = a dt^2 - b dr^2 - R^2(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (11.36)$$

к глобальному времени заменой диагонального времени $\tilde{t} = t + \Phi(r)$:

$$ds^2 = a(dt + f dr)^2 - b dr^2 = a dt^2 + 2a f dt dr - (b - a f^2) dr^2 =$$

$$= (1 - g V^2) + 2g V - g dr^2.$$

Здесь g — новый элемент γ_{rr} ,

$$a = 1 - g V^2; \quad a f = g V; \quad g = b - a V^2.$$

Решая эту систему, находим:

$$g = a b; \quad V^2 = \frac{1-a}{a b}; \quad g V = \sqrt{a b (1-a)}.$$

Таким образом, метрика (11.36) приводится к следующему виду в глобальном времени:

$$ds^2 = a dt^2 + 2\sqrt{a b (1-a)} dt dr - a b dr^2 - R^2(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (11.37)$$

Так как в преобразованной метрике существует квадратный корень, подкоренное выражение должно быть положительным и не каждая сферически симметричная метрика ОТО может быть переведена в глобальное время. Например, это неосуществимо для метрики Шварцшильда с отрицательной массой — решению ОТО, формально допустимому в этой теории.

6. Техника АДМ

Одним из важнейших этапов в описании динамики пространства-времени в ОТО явилась серия работ Арновитта, Дезера и Мизнера 1959 года [47], где в явном виде выделена переменная времени и показано, что динамическими переменными в ОТО являются компоненты трехмерной метрики.

Они представили десять компонент четырехмерного метрического тензора через шесть компонент метрического тензора γ_{ij} , трехмерный вектор V^i (в обозначениях ТГВ) и функцию *хода времени* $f(x, t)$:

$$g_{00} = f^2 - \gamma_{ij} V^i V^j; \quad g_{0i} = \gamma_{ij} V^j; \quad g_{ij} = -\gamma_{ij}. \quad (11.38)$$

Компоненты обратного метрического тензора:

$$g^{00} = \frac{1}{f^2}; \quad g^{0i} = \frac{V^i}{f^2}; \quad g^{ij} = \frac{V^i V^j}{f^2} - \gamma^{ij}. \quad (11.39)$$

Вариация действия Гильберта:

$$\delta S = - \int \left(G_{00} \delta f + G_{0i} \delta V^i + \frac{1}{2} G^{ij} \delta \gamma_{ij} \right) \sqrt{\gamma} f d_3 x dt. \quad (11.40)$$

Общей ковариантности соответствует равенство нулю вариации по всем полям: если вариацию по какому-либо полю оставить не равной нулю (нас интересует поле f), то после общего преобразования координат это приведет к неравенству нулю всех вариаций.

В ТГВ компонента $g^{00} = 1$ всегда и везде — это функция, определяющая ход глобального времени. Поэтому она не может варьироваться, и функция, которая умножается на эту вариацию, может быть произвольной. Это и есть плотность энергии (7.17).

Только компоненты пространственного метрического тензора γ_{ij} являются динамическими, имеющими сопряженные импульсы π^{ij} , а недиагональные элементы метрики $g^{0i} \equiv V^i$ (в ТГВ — поле абсолютных скоростей)

входят в производную по времени

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2c}(\dot{\gamma}_{ij} + V_{i;j} + V_{j;i}). \quad (11.41)$$

АДМ-представление является мостиком от ОТО к ТГВ: достаточно положить $f = 1$, $\delta f = 0$. Но в ОТО этому мешает общая ковариантность: после общего преобразования координат в новом АДМ-разбиении f опять окажется функцией координат и времени. Чтобы сохранить $f = 1$, нужно ограничиться преобразованиями координат, зависящих от времени, но не затрагивать преобразование времени. Однако следует подчеркнуть, что этот мостик формальный, на уровне уравнений. Физически ТГВ исходит из идеи пространства как материального носителя геометрических свойств и глобального времени, как собственного времени пространства.

Таким образом, вариация всех десяти компонент, определяющих четырехмерную метрику в (11.40), приводит к основному отличию формул ОТО от формул ТГВ: вариация по f приводит к дополнительному по сравнению с девятью уравнениями ТГВ уравнению

$$h = 0. \quad (11.42)$$

Плотность полного гамильтониана — пространства и вещества полностью равна нулю, и поэтому сам гамильтониан равен нулю.

Решения ОТО, таким образом, определяют подмножество всех решений ТГВ с плотностью энергии, всюду равной нулю.

7. В одном шаге от ТГВ

Динамическое АДМ-представление уравнений Эйнштейна привело к значительному прогрессу в описании пространства-времени. В этом представлении произведено расщепление (расслоение) пространства и времени на *трехмерное пространство*, метрический тензор которого оказывался основным динамическим полем, и *время*, в котором и совершалась динамика.

Вот, например, утверждение Д. Брилла и Р. Гоуди 1970 года [48]:

До недавнего времени необходимость пространственно-временной ковариантности в ОТО не подвергалась сомнению. Но, как оказалось, явное разделение пространства и времени в (3+1)-ковариантном формализме имеет большие формальные и принципиальные преимущества в ОТО; установление этого факта имеет очень важное значение.

Вершиной в описании пространства и времени с позиций Общей теории относительности является монография Мизнера, Торна и Уилера, написанная в 1974 году [23]. Тот факт, что одним из авторов этой книги является один из создателей АДМ-динамики Чарльз Мизнер, а другим — создатель геометродинамики, построенной на основе АДМ-представления, Джон Уилер, привело к направленности на динамическое описание на основе $(3+1)$ разложения метрики:

В гамильтоновом формализме Арновитта, Дезера и Мизнера... динамика геометрии принимает форму, совершенно аналогичную гамильтоновой динамике геометрии.

В монографии проведен тщательный анализ совместимости оснований ОТО с квантовыми принципами, и они делают сокрушительный для ОТО вывод:

Понятие пространства-времени несовместимо с квантовым принципом.

Геометродинамика Уилера — это множество трехмерных пространств (суперпространство), в котором, исходя из какой-то точки (начальное трехмерное пространство) в соответствии с АДМ-уравнениями, совершается динамика геометрии — переход к другим точкам суперпространства. Решение уравнений Эйнштейна — четырехмерная геометрия пространства-времени — это есть траектория в суперпространстве. Однако квантово-механический принцип неопределенности приводит к недопустимости реализации какой-либо траектории: невозможно создать пусть очень искусственный волновой пакет вблизи какой-либо конкретной траектории — конкретной конфигурации четырехмерного пространства-времени. И авторы делают вывод:

Таким образом, принцип неопределенности не позволяет нам как-то предсказать или хотя бы придать разумный смысл “детерминированной классической истории пространства, эволюционирующего во времени”. *Пространство-время невозможно предсказывать, следовательно, пространство-время не имеет смысла*, — вот что диктует квантовый принцип. Объект, являющийся центральным во всей классической общей теории относительности, — четырехмерная геометрия пространства-времени — просто не существует, если выйти за рамки классического приближения.

Эти рассуждения показывают, что концепция пространства-времени и времени не являются первичными понятиями в структуре фи-

зической теории. Эти концепции справедливы лишь в классическом приближении. Однако они теряют смысл и применимость при условиях, когда эффекты квантовой геометродинамики становятся существенными. . .

Тот факт, что пространственно-временной подход неверен, не означает, что не существует верного способа описания динамики геометрии, совместимого с квантовым принципом. Суперпространство является ключом к одному из правильных способов описания динамики.

При таком подходе динамическим объектом является трехмерное пространство, мгновенную конфигурацию описывает 3-геометрия.

Как отличается эта концепция от обычного понимания пространства-времени! Согласно обычным представлениям, геометрия пространства-времени строится из элементарных объектов или точек, называемых "событиями". Здесь же, напротив, первичной концепцией служит 3-геометрия. . .

Вся логика приводит к динамике трехмерного пространства. Но. . .

8. Время

Но в каком времени? А вот в каком:

Время в общей теории относительности имеет многострелочный характер и сильно отличается от времени в ньютоновской механике частиц, которое имеет однопараметрическую природу. . . Изучающий геометрию может свободно толкать пространственно-подобную гиперповерхность в одном месте вперед быстрее, чем в другом, пока гиперповерхность остается пространственно-подобной. Эта свобода отражена на каждой стадии интегрирования t в функции хода $N(t, x, y, z)$. . . Выбор N — дело не Природы, а человека. До тех пор пока такой выбор не сделан, динамические уравнения не могут приступить к выполнению своей роли.

Но откуда же взялись эти удивительные утверждения? Из каких-то теоретических соображений или какие-то эксперименты определяют, что динамика геометрии происходит в "многострелочном времени"?

Это -- дань принципу *общей ковариантности* (см. далее раздел 11).

Во-первых, о *многострелочности* времени. О ней вроде бы говорит специальная теория относительности. Множество движущихся наблюдателей в одной точке пространства имеют каждый свое время. Значит, динамика пространства должна описываться одинаково для всех наблюдателей, то есть в *многострелочном* времени. Но откуда это следует? Если процессы каждого движущегося (точечного) наблюдателя развиваются в его собственном времени, почему пространство не может эволюционировать в своем собственном (глобальном) времени?

Эксперименты Майкельсона, Троутона-Нобля и др., положившие начало специальной теории относительности, — это эксперименты с *электромагнетизмом*, демонстрирующие лоренц-инвариантность локальных электромагнитных полей.

Однако уравнения динамики геометрии в принципе не могут быть локально лоренц-инвариантными просто потому, что понятие геометрии пространства не может быть локальным. Самым естественным и не противоречащим никаким опытам и никаким физическим принципам является не внесение какого-либо нового понятия относительно времени, а сохранение старого, классического, ньютонова абсолютного времени, как времени, в котором и происходит динамика пространства. Множество времен движущихся наблюдателей не противоречит их динамикам в собственном времени и никак не противоречит развитию пространства в собственном глобальном времени.

9. Триумф ОТО

Идеи геометродинамики существенно пролили свет на абстрактные конструкции ОТО. Привлечение к ним идей фейнмановских интегралов в квантовой физике, казалось, вскоре решит, по крайней мере в принципе, и проблему построения квантовой теории гравитации. Успехи в космологии, связанные с обнаружением реликтового излучения, фактически подтвердившего динамическую природу пространства, также вселили большой энтузиазм в возможность описания на основе ОТО процессов в далеком прошлом — Большого взрыва.

Развиваясь теоретически в самых различных направлениях, ОТО всюду демонстрировала математическое изящество *вопросов, связанных с искривленным четырехмерным пространством-временем*, и звонок Мизнера, Торна и Уилера (пространство-время не имеет смысла) оказался заглушенным потоком все новых и новых успехов. Правда, эти успехи оказывались

связанными со все более и более усложняющейся, уходящей от анализа физических принципов математикой. Например, в 1982 году Томимацу и Сато [49] нашли исключительно сложную, но изящную серию осесимметричных вакуумных решений уравнений Эйнштейна.

Все более укреплялось мнение, что вся физика пространства-времени связана со все более усложняющейся математикой. Нужны все более и более “безумные идеи”.

В такой победоносной ситуации какой-либо критический анализ основ общей теории относительности казался совершенно неуместным, особенно после нескольких неудачных попыток такой критики, связанных не с физическими, а формальными математическими принципами (например, требование глобальной Лоренц-инвариантности).

Как писал Бонди [51]:

Если теория выглядит не столь уж неприемлемой и ее приложения весьма успешны, то интерес к ее логическому базису мал. Так, критика Беркли динамики Ньютона в свое время практически не оказала какого-либо воздействия, и даже ее воскрешение и усиление Махом двумя столетиями позднее оказало лишь незначительное влияние.

Практические приложения ОТО были далеко не столь успешны, как динамика Ньютона, но математические успехи вокруг нее были впечатляющими, и анализ ее основ действительно казался неуместным.

10. Кризис ОТО

10.1. Космология

10.1.1. Закрытая космологическая модель

Одним из наиболее известных решений общей теории относительности является уже рассмотренное ранее решение Фридмана [45]: пространство в форме трехмерной сферы с пылевидной материей. Радиус сферы в зависимости от времени меняется по циклоиде. Однако при малых сжатиях плотность вещества неограниченно возрастает и здесь уже нужно рассматривать ультрарелятивистское вещество. Прочитаем, например, описание этой ситуации в “Теории поля” Ландау и Лифшица [20]:

$p = \varepsilon/3$, тогда $\varepsilon a^4 = \text{const}$, после чего уравнения (112.7) и (112.3)

приводят к зависимости:

$$a = a_1 \sin \eta, \quad t = \frac{a_1}{c} (1 - \cos \eta). \quad (**)$$

Поскольку эти решения имеют смысл рассматривать только при очень больших значениях ε (т.е. малых a), то положим $\eta \ll 1$. Тогда $a \approx a_1 \eta$, $t \approx a_1 \eta^2 / 2c$,

$$a = \sqrt{2a_1 ct}. \quad (112.14)$$

В этом выражении скрыто очень важное физическое ограничение — время не может быть отрицательным. Момент *сотворения мира* одновременно является и моментом *сотворения времени*.

Но давайте рассмотрим не только асимптотику, а выразим связь между радиусом Мира и временем прямо из соотношений (**):

$$\sin \eta = \frac{a}{a_1}; \quad \cos \eta = 1 - \frac{ct}{a_1}; \quad a^2 + (ct - a_1)^2 = a_1^2. \quad (11.43)$$

Время и радиус мира связаны уравнением окружности! Время может меняться только от нуля до $2a_1$. Это не какое-то формальное время — это собственное время пробной частицы, у которой из всех координат меняется только время, и траектория которой в пространстве-времени времениподобна.

Не только наблюдения показывают, но и сам факт нашего существования свидетельствует о том, что в нашей Вселенной вещества больше, чем антивещества, которое аннигилировало при отделении излучения от вещества, поэтому на стадии больших радиусов действительно можно пользоваться решением для пылевидной материи. Но если бы вещества и антивещества было поровну, то момент отделения излучения от вещества превратился бы в момент исчезновения вещества; источником гравитации осталось бы только излучение с тем же уравнением состояния $\varepsilon = 3p$ и решение (11.43) оставалось бы верным всегда: *пространство-время оказалось бы ограниченным во времени*.

Такой ситуации в принципе не возникает в ТГВ — там время вне зависимости от решений меняется от минус до плюс бесконечности. Просто решения с такой геометрией и таким веществом не могут иметь нулевой энергии. Это тот достаточно редкий случай, когда решения ОТО не являются решениями ТГВ.

10.1.2. Открытая космологическая модель

Еще более интересные парадоксы ОТО возникают в открытых космологических моделях. В соответствующем разделе решений ТГВ (2.3) была рассмотрена динамика пространства без вещества, и в зависимости от знака полной энергии получалось решение либо с сингулярностью, либо без сингулярности. При наличии вещества уравнения динамики получают правую часть. Так как в изотропных космологических моделях всего одна степень свободы ($r(t)$), динамику можно определять из закона сохранения энергии. Возьмем псевдосферу радиуса $a(t)$ с ультрарелятивистским веществом

$$\varepsilon = 3p; \quad \varepsilon = \frac{q^2}{a}.$$

Уравнение постоянства энергии в ТГВ (в безразмерном виде)

$$-a \dot{a}^2 + a + \frac{q^2}{a} = 2E \quad (11.44)$$

приводится к виду

$$a^2 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = a^2 - 2Ea + q^2.$$

Левая часть положительна, для чего в правой части должно выполняться условие $E^2 > q^2$, исключающее решения ОТО ($E = 0$).

Решения же в ОТО, нарушающие это условие, опять приводят к абсурду. Снова процитируем решения из [20]:

... для зависимости $a(t)$ находим:

$$a = a_1 \operatorname{sh} \eta, \quad t = \frac{a_1}{c} (\operatorname{ch} \eta - 1).$$

Если опять рассмотреть не асимптотику, а решение в целом — псевдосферический мир с чистым излучением, — то, исключая параметр η , находим связь радиуса псевдосферы a и времени:

$$(ct - a_1)^2 = a_1^2 + a^2.$$

Область времени от нуля до $2a_1$ из пространства-времени выпала!

Но на этом парадоксы не кончаются. Устремим плотность излучения к нулю ($a_1 \rightarrow 0$). Дефект времени исчезнет, но четырехмерный мир без

вещества окажется представленным частью пространстве-времени Минковского ($a^2 = (ct)^2$):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (ct)^2 (d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)).$$

Это псевдосферическая система координат, покрывающая лишь внутренность светового конуса в пространстве Минковского.

С точки зрения ТГВ это решение описывает динамику чистого пространства с нулевой энергией, подчиняющуюся уравнениям динамики и имеющую при $t = 0$ сингулярность — Большой взрыв. Равенство нулю всех компонент *четырёхмерного* тензора кривизны не имеет какого-либо серьёзного физического значения. Это реальное решение динамики пространства в глобальном времени.

Неопределённость времени в ОТО позволяет в этой задаче перейти ко времени Минковского, в котором динамика потерялась, а решение оказалось неполным. (Автор благодарен Т. Джекобсону, обратившему внимание на эту проблему).

10.2. Темная материя

В космологии, базирующейся на общей теории относительности, существует понятие “критическая плотность”, определяющая при наблюдаемой в настоящее время относительной скорости изменения масштаба мира необходимую плотность вещества, чтобы мир был плоским — границей между закрытой и открытой моделями Фридмана (11.17). По современным астрофизическим оценкам мир в достаточной степени представляется как плоский, то есть плотность вещества должна быть близка к критической, в то же время барионное вещество составляет всего около 4-х процентов от критической плотности. Остальное списывается на возможную плотность космического нейтрино и *темную материю, темную энергию*.

В то же время в теории глобального времени динамика плоского пространства или трёхмерной сферы может вообще совершаться без материи, хотя наличие вещества, конечно же, модифицирует динамику пространства. Только требование равенства нулю суммарной плотности энергии пространства и вещества, выделяющее в ТГВ общую теорию относительности, связывает плотность вещества с динамическими параметрами пространства.

10.3. Наблюдательная астрономия

Множество вопросов ставит наблюдательная астрономия. Например, спектроскопическими методами установлено, что в спиральных галактиках

звезды действительно вращаются вокруг центра галактики. Однако должны быть огромные центростремительные силы для удержания звезд на круговых орбитах, но вещества в галактиках явно не хватает для создания таких гравитационных сил.

Даже если допустить, что в центрах спиральных галактик находятся массивные черные дыры — очень модное допущение, — то распределение скоростей к периферии галактики должно монотонно убывать, что противоречит наблюдениям.

Все это видится как проблема, когда, в соответствии с ОТО, вся динамика пространства связана только с веществом. В ТГВ решения такого вида могут существовать вообще без вещества, а звезды могут служить лишь визуализаторами вихрей пространства.

Придание пространству некоторой второстепенной, вспомогательной роли в ОТО приводит к множеству невязок космической динамики, базирующейся на ОТО с наблюдаемыми данными. Достаточно еще раз напомнить о “темной материи”.

10.4. Космологическая синхронизация

Одной из сложных проблем, возникающих в космологии, построенной на базе ОТО, является проблема изотропности нашего Мира, проявляющейся прежде всего в высокой степени изотропности реликтового излучения. Это так называемая проблема горизонта (см., например, [52]):

Суть ее сводится к вопросу: каким образом различные части Вселенной взаимодействовали между собой в начальной стадии расширения. Известно, что никакой физический процесс не может распространяться быстрее светового сигнала, поэтому в каждый момент времени от возникновения существует максимальное расстояние, называемое горизонтом, на которое этот процесс успел распространиться, а зная время отделения реликтового излучения от вещества $t \sim 10^5 - 10^6$ лет (время начала рекомбинации водорода в первичном нуклеосинтезе), мы можем определить размер горизонта в этот момент — он не больше чем vt (v — скорость света в том веществе, где этот процесс рекомбинации шел, причем $v \leq c$). Далее в рамках рассматриваемой модели было подсчитано, что масштабный фактор $a(t)$ в это время во много раз превышал размер горизонта: $a(t) > vt$, отсюда следует, что между источниками реликтового излучения, находившихся, например, на противоположных концах небесной сферы, не было никакой

причинной связи и эти источники ничего не “знали” друг о друге. Тогда спрашивается, каким образом в них могли установиться почти одинаковые условия при отделении реликтового излучения от вещества, а это излучение, как уже отмечалось, в высшей мере однородно и изотропно во всех направлениях небесной сферы.

В общей теории относительности, кажется, значительно развита термодинамика, неравновесная термодинамика, описывающие, например, потоки энергии, энтропии (см., например, [53]). Однако это процессы, связанные лишь с мировой точкой в пространстве-времени, не требующие выделения времени, определения области пространства. Но в общей теории относительности отсутствует статистическая физика, в которой описываются (квази-) равновесные состояния в некоторой области пространства, где равновесие устанавливается пусть на непродолжительном, но конечном отрезке времени.

Пусть Мир является плоским трехмерным пространством, масштаб которого меняется с течением времени (модель Эйнштейна-де Ситтера). С точки зрения ОТО это есть четырехмерное многообразие, на котором исходные координаты пространства и времени являются просто удобными, более простыми. В этом четырехмерном мире распространяется фотонный газ — реликтовое излучение — в соответствии с законами газовой динамики ультрарелятивистского газа, в различных точках четырехмерного мира температура газа существенно различается. Но оказывается, что именно на гиперповерхностях $t = \text{const}$ температура этого газа в высшей степени однородна! Что же такого специфического именно в таких координатах пространства и времени?

11. Принцип общей ковариантности

В основе ОТО лежат два принципа: физический принцип эквивалентности, фактически идущий еще от экспериментов Галилея, и принцип общей ковариантности.

Основным физическим принципом, приведшим к созданию общей теории относительности, явился принцип эквивалентности, определивший локальную инерциальную систему как свободно падающую в гравитационном поле. Взяв на вооружение этот принцип, Эйнштейн в 1911 году [37] предсказал такие важнейшие явления, связанные с гравитацией, как отклонение светового луча, гравитационное красное смещение, замедление хода времени локального наблюдателя.

Основным принципом, заведшим ОТО в тупик, является *принцип общей ковариантности*, не следующий ниоткуда: “так получилось исторически”. Этот принцип позволил на первых порах связать концы с концами на очень сложном пути построения теории гравитации на основе римановой геометрии.

Принцип эквивалентности вместе с Марселем Гроссманом привел Эйнштейна к представлению об искривленном пространстве, но так как в ту пору, благодаря слишком прямолинейному толкованию специальной теории относительности, пространства уже не было, а было только четырехмерное пространство-время, то искривленным оказалось именно оно без разделения на пространство и время.

Лоренц в 1904 году ввел для движущихся тел “местное время” и тем дал начало изучению свойств времени движущихся объектов. Однако в трактовке Эйнштейна, действительно сформулировавшего *релятивизм* как отсутствие абсолютных понятий “пространство и время”, проблема времени перешла на чисто формальный уровень:

Следовало лишь понять, что введенную Г.А. Лоренцом вспомогательную величину, названную им “местным временем”, на самом деле следует определить как “время”.

Призраки абсолютного движения и инерциальной системы координат могут быть исключены из физики и может быть построена новая релятивистская физика. . . Законы тяготения, так же как и все законы природы, должны быть сформулированы для всех возможных систем координат, в то время как законы классической механики, сформулированные Ньютоном, справедливы лишь в инерциальных системах координат.

О принципе относительности и его следствиях. Jahrb. d. Radioactiv. u. Elektronik, 1907, bf 4, 411–462.

Увидев связь однородного гравитационного поля с ускорением, почувствовав большие глубины, содержащиеся в этой связи (принципе эквивалентности), Эйнштейн, стоя на платформе воинствующего релятивизма, попытается трактовать открытый им этот мощнейший физический принцип как дальнейшее развитие своего первого детища:

Законы природы следует формулировать так, чтобы они выполнялись относительно произвольно движущихся систем координат. (1,33, с. 423).

Принцип общей ковариантности многократно подвергался критике различных исследователей.

Так, Г. Бонди, рассматривая роль ускорения в физических процессах (например, слом пружины часов при больших ускорениях) [51], пишет:

“Все это не более чем иллюстрация того, насколько физически бессмысленно любое понятие эквивалентности между инерциальными и ускоренными наблюдателями и насколько должен быть лишен смысла любой принцип общей относительности”

Большое внимание принципу общей ковариантности уделил В. А. Фок [54]. Правда, он критикует не физическую сторону — потерю разделения на пространство и время, — а чисто дидактическую, определенческую сторону принципа общей ковариантности Эйнштейна, трактовку теории как равноправие всех ускоренных наблюдателей. Но единство пространства и времени, неразличимость их поддерживает, не сомневаясь:

“Искомое обобщение ньютоновской теории тяготения должно быть ковариантным относительно произвольных преобразований координат”

Он не сомневается, что теория гравитации есть развитие теории относительности именно в эйнштейновской, а не лоренцевой трактовке:

“Существование такого единого абсолютного времени считалось само собою разумеющимся в старой физике, но отрицается в теории относительности”

И на секунду представив себе *поле Бьерна*, он сразу же отходит от искушения построить глобальную инерциальную систему:

Нельзя, например, “уничтожить” поле тяготения вокруг Земного шара: для этого пришлось бы ввести какую-то “ускоренно сжимающуюся” систему отсчета, что нелепо.

Таким образом, понятия “пространство”, “движение относительно пространства” оказались под запретом без какого-либо существенного анализа. Просто сильным оказался запрет воинствующего релятивизма.

“Мы ясно понимаем, что речь может идти только о движении одного тела относительно некоторого другого тела” —

пишет в своих известных лекциях Г. Вейль [35, стр. 275].

Но потеря пространства и времени как таковых привела к значительным затруднениям прежде всего в построении квантовой теории гравитации.

Как и при создании общей теории относительности, когда Эйнштейн констатировал существенное изменение воззрений на мир при исключительной малости наблюдаемых эффектов, так и в построении квантовой теории гравитации важнейшую роль пока играет не ее влияние на наблюдаемые явления, а построение общей непротиворечивой конструкции наших представлений о мире.

12. Квантовая теория

Светлые надежды на построение квантовой теории гравитации на основе фейнмановских интегралов в суперпространстве ([23]) довольно быстро поблекли. Оказалось, что фейнмановский интеграл можно записать, но, чтобы из него извлечь какую-либо информацию, нужно задавать для него начальное и конечное трехмерные пространства, и построенная таким образом квантовая теория гравитации изначально вынуждена формулироваться не в общековариантном виде.

Всесторонне проанализированное в [23] т. наз. уравнение Уилера-де Витта, по сути дела, выглядит как равенство нулю действия на вектор квантового состояния-гамильтониана, зависящего от метрики трехмерного пространства и сопряженных им импульсов. Все, что связано со временем, из уравнения и состояний исчезло. Исчезло время, хотя, по сути дела, оно было изгнано общей теорией относительности изначально.

12.1. Квантовая теория гравитации в ОТО

1970 г. Д. Брилл, Р. Гоуди [48]:

В настоящее время не имеется удовлетворительной строгой квантовой теории гравитационного поля. Существуют лишь разрозненные куски, собранные в двух разделах — ОТО и квантовой теории поля. Отсутствует какое-либо согласие в выборе правильного пути объединения этих разделов в единую картину.

1975 г. С. Хокинг [55]:

Несмотря на большой объем проведенной в последние 15 лет работы, ..., я, вероятно, не погрешу против истины, если скажу, что еще нет вполне удовлетворительной и непротиворечивой квантовой теории гравитации.

1979 г. Х.-Ю. Тредер [56]:

Тем не менее физический смысл квантованной гравитации остается, по-видимому, таким же проблематичным, как и прежде.

1982 г. Н. Биррел, П. Девис [57]:

В отсутствие жизнеспособной квантовой теории гравитации можно ли вообще что-либо сказать о влиянии гравитационного поля на квантовые явления?

1997 г. К. Ровелли [58]:

Проблема нахождения квантовой теории гравитационного поля и таким образом, понимания, что такое квантованное пространство-время, пока еще остаются открытыми.

2004 г. Г. Дэйт, Г.М. Хоссэн [59]:

Несмотря на приложенные огромные усилия, к сожалению, мы до сих пор не имеем полностью удовлетворительной квантовой теории гравитации.

2006 г., май. А. Аптекарь [60]:

Девяносто лет спустя наше понимание физического мира значительно богаче, но полностью удовлетворительное объединение общей теории относительности с квантовой физикой пока нас обходит.

13. ОТО и квантовая теория

Исходным физическим уравнением для построения квантовой теории любой системы является уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \hat{H} \Psi. \quad (11.45)$$

Однако равенство нулю гамильтониана в ОТО не допускает описания квантовой динамики на основе уравнения Шредингера, а приводит к независимости вектора состояния от времени, что совершенно естественно, так как время в ОТО — это не объективная реальность, с изменением которой происходит вся динамика Мира, а любая формальная переменная, формальная координата. Поэтому уравнение (11.45) переходит в уравнение

$$\hat{H} \Psi = 0. \quad (11.46)$$

13.1. Уравнение Уилера–де Витта

Гамильтониан (7.17) квадратичен по импульсам, и уравнение $\hat{H} \Psi = 0$ является некоторым уравнением в вариационных производных второго порядка на функционал, зависящий от метрики. Это уравнение — за неимением лучшего — и было провозглашено как *основное уравнение квантовой*

теории гравитации под названием уравнения Уилера-де Витта:

$$\hat{H} \Psi = \left(\int \left(\frac{2 \hat{\pi}_j^i \hat{\pi}_i^j - (\hat{\pi}_i^i)^2}{\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{2} R \sqrt{\gamma} \right) d_3 x \right) \Psi = 0, \quad (11.47)$$

где π^{ij} определяет вариационную производную по трехмерному метрическому тензору

$$\pi^{kj} \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta \Psi}{\delta \gamma_{kj}}.$$

Это уравнение не описывает квантовую динамику, Ψ не является развивающимся во времени вектором квантового состояния, определяющим вероятности процессов. Но если уравнение написано, то с ним возможны определенные математические действия, которые и определяют направление одной из ветвей современной квантовой гравитации петлевой теории гравитации.

Прекрасный обзор развития квантовой теории гравитации принадлежит Карло Ровелли [61]. Основными “реальными” кандидатами на представление квантовой теории пространства и времени считаются “Петлевая теория гравитации” и “Теория струн”.

13.2. Петлевая теория гравитации

Гамильтониан гравитации зависит только от компонент метрики *трехмерного пространства* и сопряженных им импульсов в фиксированный момент времени (какой-то четвертой координаты), так что уравнение (11.47) является *трехмерным уравнением* — и метрический тензор трехмерный, и координат три (от времени ничего не зависит) и импульсы — вариационные производные берутся по компонентам трехмерной метрики.

Но трехмерная геометрия обладает важным геометрическим соотношением — компоненты тензора кривизны (тензора Римана-Кристоффеля) алгебраически выражаются через тензор Риччи или тензор Эйнштейна (3.35). Поэтому трехмерная гравитация с соответствующими уравнениями Эйнштейна в областях, где отсутствует вещество, имеет равный нулю тензор энергии-импульса, следовательно, нулевой тензор Эйнштейна и, следовательно, нулевой тензор кривизны, то есть является в этой области куском евклидова пространства. Трехмерная гравитация не имеет собственных динамических переменных, а все изменение метрики связано с находящимся в нем веществом.

Из-за вещества или из-за исходной нетривиальной почти всюду (псевдо) евклидовой метрики пространство в целом может не являться трехмерным евклидовым пространством (или пространством Минковского), и может иметь непростую топологическую структуру. Действие чистой гравитации оказывается топологическим инвариантом, и, взяв за переменные наряду с метрическим тензором связности (формализм первого порядка), переменные можно представить в виде поля Янга–Миллса в трехмерном пространстве также с действующим топологическим инвариантом. Но при произвольных координатных преобразованиях нетривиальными оказываются топологические интегралы от векторных полей по замкнутой петле — они либо равны нулю либо (при соответствующей нормировке) являются целыми числами.

Действие в виде чистого топологического инварианта не дает никакой динамики, однако модификацией одной из констант — введением *параметра Барберо–Иммирци* в действие появляется динамика. Далее включается игра на изобретательность: нужно сконструировать комбинации, которым можно приписать какой-то смысл (квантовый оператор объема, например). Короче, поля Янга–Миллса, коммутационные соотношения и произвол в выборе дополнительных связей приводят к интересным математическим соотношениям. Математика интересная, однако имеют ли эти математические действия какое-то отношение к ОТО? Хотя некоторое сходство находится [62]:

Вместе с общей теорией относительности мы приходим к выводу, что пространство и время “родились вместе с материей” и вопрос, “что было перед этим”, больше не имеет смысла.

13.3. Теория квантовых струн

Совершенно естественно, что осознание причины равенства нулю гамильтониана в ОТО, как следствие общей ковариантности, привело к рассмотрению других задач, обладающих в некотором смысле общей ковариантностью и нулевым гамильтонианом. В середине 70-х годов, когда во всей полноте стали осознаваться проблемы в построении квантовой теории гравитации, связанные с нулевым гамильтонианом, в квантовой теории поля (в пространстве Минковского) интенсивно разрабатывалась теория струн, претендовавшая на построение единой теории всех элементарных частиц. В четырехмерном пространстве-времени развивающаяся во времени струна представляет из себя двумерную поверхность. Одним из наиболее простых функционалов, связанных с этой поверхностью, является ее двумерный объем, и оказалось, что этот функционал порождает очень интересные, не тривиальные уравнения движения и сохраняющиеся токи.

При произвольной параметризации двух измерений этой поверхности возникает такая же проблема, что и в общей теории относительности: гамильтониан (по внутренней переменной на струне, растущей во времени-подобном направлении) оказывается равным нулю вследствие свободы репараметризации. Хотя сама струна и движется в четырехмерном (но затем в связи с идеей *компактификации* в n -мерном — 26, 11-мерном) плоском пространстве Минковского, ее положение в этом пространстве задается зависимостью n координат этого пространства от двух переменных на поверхности струны. Возникает *двумерная теория поля*. Специфика рассматриваемого функционала действия — величина поверхности — приводит к тому, что уравнения этой двумерной теории поля оказываются ковариантными по отношению к конформным преобразованиям двух переменных на поверхности струны. Возникает двумерная конформная теория поля [63] с нулевым гамильтонианом. Двумерная (и только двумерная) конформная группа является бесконечномерной, что приводит к возможности фактически полностью проинтегрировать квантовый вариант струнной теории.

Возникшая (и преодоленная) на пути этого интегрирования проблема *аномалий* придала этому кругу задач существенную значимость, определяемую сложностью математических методов. В ходе решения задач квантовой теории струн существенно продвинулись математические методы работы в нетривиальных функциональных пространствах. Так, например, в упомянутой уже работе А.М. Полякова [63] был разработан практический метод интегрирования по двумерным метрикам с учетом свободы координатных преобразований и вычислен конкретный функциональный интеграл от экспоненты действия.

Интереснейшие *модельные* задачи в теории струн существенно расширили математические методы. А так как в этой теории было что-то похожее на общую теорию относительности (нулевой гамильтониан) и она представляла вариант двумерной теории поля, то это направление присвоило себе наименование *двумерной теории гравитации* [64], хотя никаких *физических* пересечений с общей теорией относительности у теории струн нет. Не видно какой-либо задачи в теории струн, которая хоть как-то приблизилась к какой-то задаче общей теории относительности.

14. В поисках потерянного времени

Значительные *математические* успехи струнной теории и загадочность квантовой геометрии в петлевой теории гравитации породили надежду у некоторой части исследователей, что верный путь найден, нужно только преодолевать и преодолевать возникающие препятствия.

Но стремление построить квантовую теорию гравитации по подобию других квантово-полевых теорий, исходя из уравнения Шредингера, явно или неявно жило. Именно произвол выбора времени в ОТО приводит к равенству нулю гамильтониана. Если время в ОТО каким-либо образом выделить, то дальнейшая техника описания динамики геометрии пространства-времени однозначно определена техникой Арновитта, Дезера и Мизнера [47], подробно проанализированной в монографии [23].

Способам разрешения и даже использования этой связи для введения некоторого "внутрикомпонентного времени" посвящено множество работ (см., например, [50; 65; 66]).

В ряде других работ предпринимается попытка введения некоторого выделенного времени в рамках ОТО путем привязки его к собственному времени некоторой среды. Явная привязка физического времени к некоторой материи проведена Ровелли и Смолиным [67], однако при такой процедуре физика мира зависит от выбранной "опорной" материи.

Особенно интересна работа Брауна и Кучара [68], где за опорную материю выбрана пылевидная материя, но так как у последней нет собственного лагранжиана, а авторы получают тензор энергии-импульса материи через лагранжиан, то предлагается некоторый процесс, в результате которого в пределе и получается время, связанное с пылью через искусственную конструкцию.

Некоторые исследователи прямо ставят задачу построения времени-подобного векторного поля, определяющего изменение времени, но так как все делается в рамках ОТО, то это поле должно оказываться динамическим, с некоторым лагранжианом, а конкретные решения нарушают общую ковариантность, создавая некоторый "эфир" (Einstein Aether) [69].

Но положим, что мы нашли достаточно простое решение или для векторного поля, или для какого-нибудь вещества, так что с этим веществом связали время, в частности время для построения квантовой теории. Однако и с учетом этого решения общий гамильтониан окажется равным нулю, и теория вернется в то же состояние неопределенности. Чтобы действительно выделить так построенное время, нужно *запретить* переход к другим временам, нужно *запретить преобразование времени*. Не является ли более естественным выделение как чего-то особого, времени, еще до нахождения решений?

ГЛАВА 12

Сферически-симметричный вакуум

Сверхновая за несколько дней рождает столько энергии, сколько Солнце излучает за несколько миллионов лет.

С. Вайнберг

Проблема динамики сферически-симметричного пространства ярко демонстрирует различие физических подходов ОТО и ТГВ. В ОТО царствует *теорема Биркгофа*, утверждающая, что вакуумное сферически-симметричное решение обязательно является статическим и представляется метрикой Шварцшильда. Таким образом, с точки зрения ОТО, например, сферически-симметричный взрыв сверхновой сопровождается только выбросом материи, никаких деформаций пространства не происходит, энергия пространства в энергетических процессах при таком взрыве никак не меняется — в ОТО даже нет такого языка.

С точки зрения ТГВ не только при взрыве сверхновой, но и в стационарном сферически симметричном пространстве идут динамические процессы.

1. Теорема Биркгофа

С самого начала в ОТО наибольшее внимание привлекали задачи со сферической симметрией. Роковую роль в этой области исследований сыграла теорема Биркгофа [70]: "любое сферически симметричное поле в вакууме является статическим" [71].

Так, в [20] про решение Шварцшильда утверждается: "... это решение справедливо не только для покоящихся, но и для движущихся масс, если

только движение тоже обладает должной симметрией (скажем, центрально-симметричные пульсации)".

Это утверждение попало и в справочник [72]: "единственным вакуумным решением со сферической симметрией является метрика Шварцшильда".

Именно на примере много изучавшейся в ОТО сферически-симметричной задачи о динамике пылевидной материи и вакуума (см., например [20]) хорошо выявляется разница двух подходов — ОТО и теории глобального времени.

2. Динамика в ОТО

Но даже с точки зрения самой ОТО сферически-симметричная динамика не так проста. Начнем с описания динамики в ОТО в синхронной системе. Метрику возьмем в виде:

$$ds^2 = dt^2 - m^2(x, t) dx^2 - R^2(x, t) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (12.1)$$

Компоненты тензора Эйнштейна для этой метрики выписаны в [20]:

$$G_0^0 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2 \frac{\dot{m}}{m} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{R^2} - 2 \frac{R''}{m^2 R} - \left(\frac{R'}{m R} \right)^2 + 2 \frac{m'}{m^2} \frac{R'}{m R}; \quad (12.2)$$

$$G_1^0 = m^2 G_0^1 = \frac{2 \dot{m} R' - m \dot{R}'}{m R}; \quad (12.3)$$

$$G_1^1 = \frac{2 \ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} - \frac{R'^2}{m^2 R^2}. \quad (12.4)$$

Уравнение, связанное с $G_2^2 = G_3^3$ при выполнении уравнений с выписанными компонентами, выполняется автоматически вследствие тождеств Гильберта.

2.1. Однородное решение

Прежде всего уравнения (12.2) — (12.4) с нулевыми правыми частями (вакуумные) имеют однородные решения, когда отсутствует зависимость от пространственной координаты x . В этом случае пространство является прямым произведением двумерной сферы на прямую — трехмерным цилиндром. Компонента (12.3) обращается в нуль автоматически, компонента (12.4) определяет динамику радиуса:

$$2 R \ddot{R} + \dot{R}^2 + 1 = 0.$$

Это уравнение после интегрирования приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$R(\dot{R}^2 + 1) = 2M, \quad (12.5)$$

где M — просто константа интегрирования. Уравнение $G_0^0 = 0$ определяет динамику масштаба m :

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{\dot{R}(\dot{R}^2 + 1)}{2R\dot{R}^2}; \quad \frac{dm}{m} = -\frac{M dR}{R(2M - R)},$$

откуда

$$m = \sqrt{\frac{2M}{R} - 1}. \quad (12.6)$$

Уравнение (12.5) совпадает с уравнением Фридмана для однородной и изотропной закрытой модели с пылью. Радиус R изменяется от 0 до $2M$ по циклоиде. При этом масштаб m изменяется от нуля при $R = 2M$ до бесконечности при $R = 0$.

Если фридмановскую трехмерную сферу из пылевидной материи разрезать по экватору (двумерной сфере) и между полученными полусферами вставить рассмотренный выше трехмерный цилиндр, то при одинаковой константе интегрирования M получится сшитая модель двух взаимодействующих сферически-симметричных пылевидных тел. Когда тела имеют нулевой радиус, равный бесконечности масштаб m определяет, что массы разошлись на бесконечное расстояние друг от друга. При увеличении радиуса масштаб уменьшается, что свидетельствует о сближении тел. При достижении максимального радиуса $R = 2M$ расстояние между телами равно нулю. После этого начинается процесс их взаимного удаления с уменьшением радиусов.

Решение все время остается сферически симметричным, а вакуумная часть претерпевает динамику, опровергая теорему Биркгофа.

2.2. Неоднородная модель

В неоднородном случае из равенства нулю компоненты (12.3) следует

$$R' = m \cdot f(x); \quad R'' = m' f + m f'; \quad \dot{R}' = f \dot{m}, \quad (12.7)$$

где f — произвольная функция только пространственной координаты x — *нединамическая функция* в решении. При этом компонента (12.4) определяет *локальное динамическое уравнение для радиуса R* :

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + 1 - f^2 = 0, \quad (12.8)$$

которое интегрируется:

$$R(\dot{R}^2 + 1 - f^2) = 2M(x). \quad (12.9)$$

Здесь $M(x)$ — вторая константа интегрирования по времени. Производная от $M(x)$ по координате x связана с компонентой G_0^0 (12.2):

$$2M'(x) = R'(\dot{R}^2 + 1 - f^2) + 2R(\dot{R}'\dot{R} - f f') = f m R^2 G_0^0. \quad (12.10)$$

Отсюда следует, что вакуумным решениям соответствует область $M = \text{const}$, а в области, содержащей пылевидную материю, M меняется.

2.3. Неинерциальная система

Связь (12.7) позволяет перейти в неинерциальную систему с переменными $(t, R, \vartheta, \varphi)$:

$$m dx = \frac{R' dx}{f} = \frac{1}{f}(dR - \dot{R} dt).$$

Подставляя это в метрику (12.1) и выражая $\dot{R}$ из (12.9), получим:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - \frac{1}{f^2} \left(dR - dt \sqrt{\frac{2M}{R} - 1 + f^2} \right)^2 - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = \\ &= \left(1 - \frac{2M}{R} \right) \frac{dt^2}{f^2} + 2 \sqrt{\frac{2M}{R} - 1 + f^2} \frac{dt dR}{f^2} - \frac{dR^2}{f^2} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Это есть общее решение для динамической сферически-симметричной метрики (12.1) с идеальной пылью ($M(x)$) или в вакууме ($M = \text{const}$) в глобальном времени, однако в области, где R монотонно зависит от x . В частности, при $f(x) = 1$ это метрика Пенлеве (9.15). Существенной особенностью этой метрики является то, что сечение $t = \text{const}$ (пространство) является плоским.

2.4. Теорема Биркгофа

Теперь мы все-таки докажем *теорему Биркгофа* и по ходу доказательства увидим и область ее применения, и ограничения.

В отличие от *теории глобального времени* ОТО не фиксирует время и любая переменная может играть роль времени. За счет преобразования

переменной, продолжающей именоваться *временем* (а мы назовем ее *квази-временем*), метрику (12.11) можно диагонализировать:

$$dt = f d\tilde{t} - u dR; \quad u = \frac{\sqrt{2M(x)/R - 1 + f^2(x)}}{1 - 2M(x)/R}. \quad (12.12)$$

После такой подстановки метрика оказывается диагональной:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M(x)}{R}\right) d\tilde{t}^2 - \frac{dR^2}{1 - 2M(x)/R} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (12.13)$$

Покажем, что соотношение (12.12) всегда интегрируемо. Перепишем его в координатах (t, x) :

$$dt = f(\dot{\tilde{t}} dt + \tilde{t}' dx) - u(\dot{R} dt + R' dx) = (f\dot{\tilde{t}} - u\dot{R}) dt + (f\tilde{t}' + uR') dx.$$

Во-первых, должны выполняться соотношения

$$f\dot{\tilde{t}} - u\dot{R} = 1; \quad f\tilde{t}' + uR' = 0.$$

Это условия обратного преобразования от метрики (12.11) к метрике (12.1):

$$\dot{R} = \sqrt{2M(x)/R - 1 + f^2(x)}; \quad u = \frac{\dot{R}}{1 - 2M(x)/R} = \frac{\dot{R}}{f^2 - \dot{R}^2}.$$

Из преобразования (12.12)

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{1 + u\dot{R}}{f}; \quad \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} = \frac{uR'}{f}.$$

Условие интегрируемости этих соотношений

$$\partial_x \left(\frac{1 + u\dot{R}}{f} \right) - \partial_t \left(\frac{uR'}{f} \right) = 0.$$

Подставляя теперь u из (12.12), получаем:

$$-\frac{f'}{f^2} \left(1 + \frac{\dot{R}^2}{1 - 2M/R} \right) + \frac{u'\dot{R}}{f} = \frac{\dot{u}R'}{f}; \quad u'\dot{R} - \dot{u}R' = -\frac{ff'}{1 - 2M/R}.$$

В левой части этого выражения не нужно брать производные по R (из-за вида конструкции они сокращаются), и, так как $\dot{f} = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial f} f' = \frac{f f'}{\dot{R}(1 - 2M/R)},$$

а это условие выполняется из (12.12). Поэтому *формально математически теорема Биркгофа всегда выполняется*.

Однако мы уже рассмотрели нетривиальное однородное решение, в котором переменная R одинакова во всем пространстве и поэтому не может служить координатой в пространстве.

Рассмотрим еще одно вакуумное решение ($M = \text{const}$) динамического уравнения (12.9) с функцией $f(x) < 1$. Решение его есть циклоида (в параметрическом виде):

$$R = R_0(1 - \cos \tau); \quad R_0 \equiv \frac{M}{1 - f^2}; \quad t = \frac{R_0}{\sqrt{1 - f^2}}(\tau - \sin \tau). \quad (12.14)$$

Видно, что в этом решении компонента метрики R имеет максимальное значение $2R_0$, но оно тоже может быть преобразовано к виду метрики Шварцшильда. Действительно, в глобальном времени оно приводится к виду (12.11) с постоянным M , из которого также видно, что R не может быть больше R_0 . Однако подстановка (12.12) приводит его к стандартному виду метрики Шварцшильда. Но функция

$$u = \frac{\sqrt{2M/R - 1 + f^2}}{1 - 2M/R}$$

при $R > R_0$ принимает чисто мнимые значения. Поэтому теорема Биркгофа верна *только при допущении комплексных преобразований координат и времени*.

Теорема Биркгофа должна быть сформулирована не как физическая теорема, утверждающая физическую статичность вакуумной сферически-симметричной метрики, а как *математическая теорема*, утверждающая о возможности найти при определенных условиях такую, возможно, комплексную функцию радиуса и времени, при выборе которой в качестве времени метрика приводится к метрике Шварцшильда. ОТО, будучи не только безразличной к выбору переменной времени, но и провозглашая эту безразличность как некий сокровенный закон природы — принцип общей

ковариантности, — приходит к столь пессимистичному выводу относительно динамики сферически-симметричных систем.

Другим хорошо известным примером является само стандартное решение Шварцшильда. В глобальном времени (метрика Пенлеве) его пространственное сечение есть плоское евклидово пространство. Несингулярную в центре модель (решение Оппенгеймера–Снайдерса [73]) можно представить как сшивку шаровой вырезки из однородного решения Эйнштейна — де Ситтера (идеальная пыль в плоском пространстве) с динамическим плоским вакуумным пространством ($f = 1$). Оно не имеет особенностей, однако при преобразовании Биркгофа (12.12) к квазивремени, в котором метрика диагональна, также возникает мнимое преобразование внутри гравитационного радиуса. Поэтому проблемы с особенностью на гравитационном радиусе возникают лишь в стандартном шварцшильдовом времени (“квазивремени”) и отсутствуют при описании в глобальном времени.

Кроме того, зависимость радиуса от пространственной координаты может быть немонотонной, либо из-за зависимости функции f от координаты x , либо из-за зависимости в решении (12.14) параметра τ от координаты x : при одном значении координаты идет сжатие, а при другом — расширение. В шварцшильдовых координатах это трактуется как некоторая проблема “каустик”, в динамическом же подходе никакой проблемы нет. Нужно сказать, что с этой точки зрения и представление в глобальном времени (12.11) не является полным.

Резюмируя, можно сказать, что теорема Биркгофа, будучи математически верной в ОТО для *части пространства*, где радиус монотонно зависит от координаты x , физического значения не имеет. Более того, мы можем сформулировать утверждение, обратное теореме Биркгофа: *все сферически-симметричные пространства динамичны* (кроме пространства Минковского). В этом легко убедиться экспериментально: отпущенный в поле Земли шарик (реализующий локальную инерциальную систему) начинает двигаться.

3. Динамика в глобальном времени

С точки зрения теории глобального времени описание динамики пространства проводится на основе принципа наименьшего действия (7.6).

Для метрики (12.1) отличны от нуля компоненты скоростей:

$$\mu_x = \frac{\dot{m}}{m}; \quad \mu_\theta = \mu_\varphi = \frac{\dot{R}}{R}, \quad \mu_i = \frac{\dot{m}}{m} + 2\frac{\dot{R}}{R}.$$

Кинетическая энергия пропорциональна

$$\frac{1}{2}(\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_i^i)^2) = -2 \frac{\dot{m}}{m} \frac{\dot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2.$$

С учетом трехмерной кривизны плотность лагранжиана равна

$$\begin{aligned} L &= \left(-2 \frac{\dot{m}}{m} \frac{\dot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} + \frac{R'^2}{m^2 R^2} \right) m R^2 = \\ &= -2 \dot{m} \dot{R} R - m \dot{R}^2 + m + \frac{R'^2}{m} \end{aligned} \quad (12.15)$$

Динамическим полям m и R канонически сопряжены плотности импульсов

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} = -2 \dot{R} R; \\ p_R &= \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = -2 \dot{m} R - 2 m \dot{R}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Из этих соотношений можно выразить скорости

$$\dot{R} = -\frac{p_m}{2R}; \quad \dot{m} = \frac{m p_m}{2R^2} - \frac{p_R}{2R}. \quad (12.17)$$

Далее стандартным образом строится плотность гамильтониана:

$$H = \dot{m} p_m + \dot{R} p_R - L = \frac{m p_m^2}{4R^2} - \frac{p_m p_R}{2R} - m - \frac{R'^2}{m} \quad (12.18)$$

и выводятся уравнения динамики

$$\begin{aligned} \dot{p}_m &= -\frac{\partial H}{\partial m} = 1 - \frac{p_m^2}{4R^2} - \frac{R'^2}{m^2}; \\ \dot{p}_R &= -\frac{\partial H}{\partial R} + \left(\frac{\partial H}{\partial R'} \right)' = \frac{m p_m^2}{2R^3} - \frac{p_m p_R}{2R^2} - 2 \left(\frac{R'}{m} \right)'. \end{aligned}$$

3.1. Калибровочные преобразования

Однако в системе существует произвол в выборе пространственной координаты x : любое (не зависящее от времени) преобразование $x = f(\bar{x})$ сохраняет вид метрики (12.1). Бесконечно малые преобразования координат приводят к Ли-вариациям этих функций (коэффициентов Ламе):

$$\bar{x} = x + \xi(x); \quad \delta m = -\xi' m - \xi m'; \quad \delta R = -\xi R'. \quad (12.19)$$

Действие с лагранжианом (12.15) инвариантно относительно таких преобразований:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\frac{\partial L}{\partial m} \delta m + \frac{\partial L}{\partial R} \delta R + \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \delta \dot{m} + \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \delta \dot{R} + \frac{\partial L}{\partial R'} \delta R' \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \delta m + \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \delta R \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial R'} \delta R - L \xi \right) \right) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \delta m + \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \delta R &= -p_m (\xi' m + \xi m') - p_R \xi R' = \\ &= -(p_m m \xi)' + (m p'_m - R' p_R) \xi, \end{aligned}$$

вследствие произвольности ξ следует связь на плотности импульсов:

$$m p'_m - R' p_R = 0. \quad (12.20)$$

Если подставить выражения для импульсов (12.16), то это соотношение примет вид:

$$p_R R' (\dot{m} R + m \dot{R}) - m (\dot{R} R)' = R(\dot{m} R' - m \dot{R}') = 0,$$

совпадающее с уравнением (12.3).

Таким образом, импульсы p_m и p_R не являются независимыми. Уже использовавшееся разрешение этой связи (12.7) можно применить для исключения переменной m :

$$m = \frac{R'}{f(x)}; \quad \dot{m} = \frac{\dot{R}'}{f(x)}. \quad (12.21)$$

При этом лагранжиан (12.15) приходит к виду

$$L = \frac{1}{f} ((1 + f^2 - \dot{R}^2) R' - 2R \dot{R} \dot{R}') = \quad (12.22)$$

$$\left(R \left(-\frac{\dot{R}^2}{f} + f + \frac{1}{f} \right) \right)' + \frac{f'}{f^2} R (1 - \dot{R}^2 - f^2). \quad (12.23)$$

В представлении (12.22) при каждом значении x имеется две (независимые при заданном x) динамические переменные $R(x)$ и $R'(x)$ с сопряженными им импульсами:

$$p_{R'} = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}'} = -\frac{2R\dot{R}}{f}; \quad p_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = -\frac{2}{f} (\dot{R} R' + R \dot{R}') = -\frac{(2R\dot{R})'}{f}. \quad (12.24)$$

Отсюда

$$p_R = \frac{1}{f} (f p_{R'})'. \quad (12.25)$$

Это соотношение согласовано с (12.20), откуда с учетом (12.21) следует

$$p_R = \left(\frac{m}{R'} \right) p'_m = \frac{p'_m}{f},$$

значит, $p_m = f p_{R'}$, но это есть следствие простой замены переменных (12.21):

$$m = \frac{R'}{f(x)}; \quad p_m = f(x) p_{R'}.$$

Функция $f(x)$ является нединамической, априорной функцией. Таким образом, импульсы, сопряженные радиусу и производной от радиуса, могут быть в каждой точке x связаны линейной, не меняющейся со временем связью. В зависимости от этой функции возникают различные динамические задачи сферически-симметричного вакуума и идеальной пыли.

3.2. Общее решение

Динамические уравнения, выводимые из лагранжиана (12.23), эквивалентны уравнениям (12.7–12.8) за исключением того, что в уравнениях Эйнштейна константа $M(x)$ должна получаться как результат интегрирования соотношения (12.10) при заданном распределении плотности пыли $\varepsilon(x)$,

а в теории глобального времени функция $M(x)$ является константой интегрирования (по времени) уравнения 12.8.

Дифференциальное уравнение (12.9) локально — не содержит производных по координате x . Его решение определяет локальные циклоиды:

$$R = \frac{M(x)}{1 - f^2(x)} (1 - \cos \tau) = R_0(x) (1 - \cos \tau); \quad (12.26)$$

$$t = \frac{M(x)}{(1 - f^2(x))^{3/2}} (\tau - \sin \tau) = T(x) (\tau - \sin \tau), \quad (12.27)$$

где константа $R_0(x)$ определяет максимальный радиус $R_{\max} = 2R_0$ при данном x , а $T(x)$ — период циклоиды при этом же значении координаты x .

Эти константы (по времени) связаны соотношением

$$R_0(x)^3 = M(x) T(x)^2; \quad 1 - f^2 = \frac{M}{R_0}. \quad (12.28)$$

Удобно также вместо функции $f(x)$ ввести угловую переменную $\eta(x)$ из соотношения

$$f(x) = \sin \eta; \quad \frac{M}{R_0} = \cos^2 \eta.$$

При этом метрический масштаб

$$m = \frac{R'}{\sin \eta}.$$

3.3. Решение Фридмана

Найдем синхронизированные решения, в которых функция $T(x) = T = \text{const}$, тогда из (12.27) следует, что параметр τ — общий для всех точек.

Из уравнения (12.28) следует динамика радиуса

$$R = T \sin \eta (1 - \cos \tau).$$

Если изначально неопределенную переменную x отождествить с углом η , то зависимость радиуса от η определяет масштаб m по формуле (12.6):

$$m = T (1 - \cos \tau).$$

Теперь все элементы метрики (12.1) определены:

$$ds^2 = T^2 (1 - \cos \tau)^2 (d\tau^2 - d\eta^2 - \sin^2 \eta (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)). \quad (12.29)$$

Пространственная часть метрики — трехмерная сфера.

3.4. Вакуумное решение

Мы уже упоминали о решении Оппенгеймера — Снайдера [73], являющимся сшивкой пылевидного шара, вырезанного из решения Эйнштейна-де Ситтера, с вакуумной метрикой (Шварцшильда-Пэнлеве). Однако модели Фридмана (с трехмерной сферой) с этой метрикой не сшиваются, так как в динамическом представлении решения Шварцшильда ($M(x) = \text{const}$, $f(x) = 1$) радиус изменяется от нуля до бесконечности, а в решении Фридмана максимальное значение радиуса конечно.

Но кроме вакуумного решения Шварцшильда-Пэнлеве из общего решения (12.26–12.27) можно получить *общее вакуумное решение*, положив функцию $M(x)$ константой M .

Из (12.27) следует

$$T(\eta) = \frac{M}{\sin^3 \eta}; \quad T' = -\frac{3M \cos \eta}{\sin^4 \eta} \quad (12.30)$$

$$R = \frac{M}{\sin^2 \eta} (1 - \cos \tau). \quad (12.31)$$

До бесконечности радиус доходит лишь при $\eta = 0$, при этом и период бесконечен.

Можно проследить геометрию пространства в различные моменты $t = \text{const}$. Тогда из соотношения (12.27) период, зависящий только от x

$$T(x) = \frac{t}{\tau - \sin \tau},$$

из (12.28) определяет

$$R_0(x) = \left(\frac{t \sqrt{M}}{\tau - \sin \tau} \right)^{2/3},$$

при этом τ параметризует ось x . Радиус вдоль оси x в этот момент времени распределен по закону

$$R(x) = R_0 (1 - \cos \tau) = \left(\frac{t \sqrt{M}}{\tau - \sin \tau} \right)^{2/3} (1 - \cos \tau).$$

Эта зависимость (по параметру τ) вместе с максимальным радиусом в каждой точке $R_{\max} = 2 R_0$ приведены на рис. 12.1.

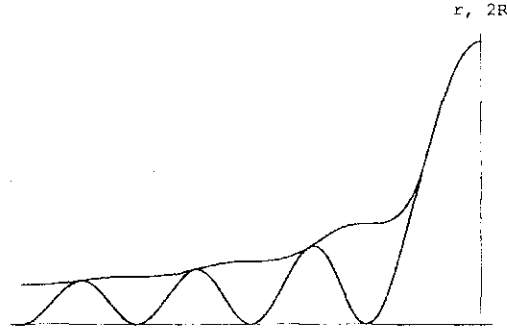


Рис. 12.1.

С ростом времени высота графиков растет по закону $t^{2/3}$, но и меняется параметризация оси x параметром τ — график сжимается. При изменении времени можно параметризовать ось x функцией $R_0(x)$, не меняющейся с течением времени. На следующих двух графиках видна динамика радиуса на интервале R_0 от 0.2 до 0.4 с ростом времени.

Видно, что с ростом времени графики растут, но сдвигаются слева, при этом вовнутрь интервала попадает все больше циклов. Растет градиент радиуса и, следовательно, растет масштаб $m = R' / \sin \eta$, так что геометрическая длина интервала непрерывно растет.

Масштаб m (12.6):

$$m = \frac{M}{\sin^3 \eta} \left(3 \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} (\tau - \sin \tau) - 2(1 - \cos \tau) \right). \quad (12.32)$$

Минимальные значения радиуса и масштаба (при заданном τ) — при $\eta = \pi/2$. В отличие от решения Фридмана, точки, где радиус всегда равен нулю, не существует. Поэтому для получения решения, продолжаемого до нуля, необходимо вакуумное решение сшивать с каким-либо невакуумным.

3.5. Сшивание с решением Фридмана

Полученное вакуумное решение можно сшить с частью динамической сферы Фридмана. Для этого на границе внутреннее (фридмановское) и внешнее (вакуумное) решения должны иметь одинаковые значения констант M , $\eta = \eta_0$ и общее значение параметра τ . Тогда граничная сфера

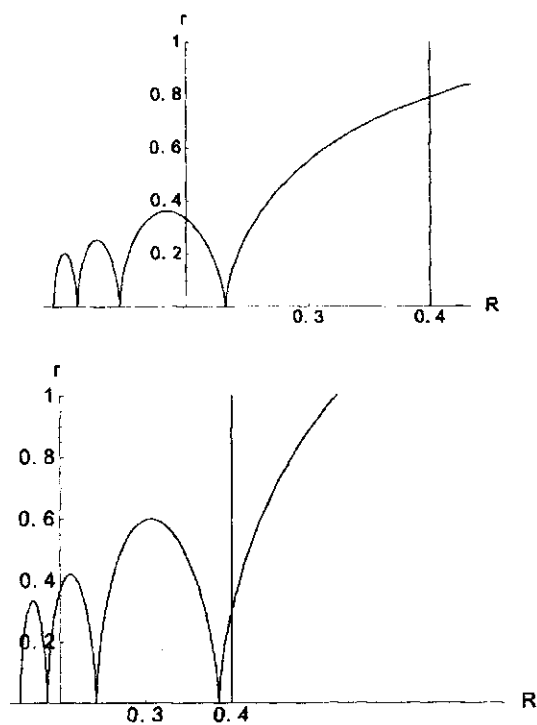


Рис. 12.2.

(двумерная) в обоих решениях движется по одному и тому же закону

$$R^0(\tau) = \frac{M}{\sin^2 \eta_0} (1 - \cos \tau).$$

Величина η_0 является параметром решения. На сфере Фридмана η возрастает от нуля до η_0 , а в вакуумной части, наоборот, убывает от η_0 до нуля. При этом во внешнем решении максимальное значение радиуса

$$R_{\max} = \frac{2M}{\sin^2 \eta}$$

и стремится к бесконечности при стремлении η к нулю.

Граничная сфера достигает максимально радиуса

$$R_{\max}^0 = \frac{2M}{\sin^2 \eta_0}.$$

Лишь при $\eta_0 = \pi/2$, когда вырезается в точности полусфера Фридмана, динамика невакуумной части происходит под сферой Шварцшильда. При других значениях параметра η_0 граница периодически “вылезает” из-под сферы Шварцшильда.

Если η_0 стремится к нулю ($f_0 \rightarrow 1$), радиус сферы Фридмана стремится к бесконечности, но из нее вырезается бесконечно малый угловой сегмент — плоский трехмерный шар, — сшиваемый со шварцшильдовым вакуумом ($f = 1$). Это — решение Оппенгеймера–Снайдера.

Возможны и более сложные составные модели. Например, вырезав из фридмановской сферы большого периода малый сегмент с углом η_1 , можно сшить его с вакуумным решением с теми же периодом и углом, а затем при угле $\eta_1 > \eta_1$ (в вакуумном решении увеличение угла соответствует уменьшению периода) сшить вакуумное решение с частью фридмановской сферы соответствующего (меньшего) периода и углом η_2 . Здесь каждая часть фридмановской сферы колеблется со своим периодом, а в соединяющем их вакуумном “рукаве” период меняется от одного значения до другого.

В случае если вырезаны сегменты из сфер одинакового периода и соединены они однородной вакуумной трубкой того же периода — мы имеем уже описанное составное решение в разделе 2.1.

3.6. Неоднородное невакуумное решение

В качестве примера неоднородной невакуумной модели приведем решение с

$$T(\eta) = T_0 / \cos \eta \quad T' = T_0 \frac{\sin \eta}{\cos^2 \eta}.$$

Масса

$$M = T_0 \frac{\sin^3 \eta}{\cos \eta};$$

$$R = T_0 \operatorname{tg} \eta (1 - \cos \tau).$$

В центре ($\eta = 0$) масса равна нулю, и к периферии ($\eta = \pi/2$) масса стремится к бесконечности. Для каждой точки пространства значение η с течением времени не меняется.

При этом масштаб m (12.6):

$$m = T_0 \sin \eta \left(\frac{\sin^3 \eta}{\cos^2 \eta} \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} (\tau - \sin \tau) - (1 - \cos \tau) \right).$$

В этой модели все части колеблются с разными периодами. В центре ($\eta = 0$) период конечен (T_0), а к периферии при стремлении массы к бесконечности и период стремится к бесконечности. В частности, возможны “перехлесты” (каустики), когда при каком-то конечном η завершился полный цикл и радиус равен нулю, а внутри идет полновесная динамика.

4. Магнитные монополи

Сферическая симметрия сохраняется, если добавить электрическое или (и) магнитное поле вдоль оси x . Этот круг задач еще более богат в ТГВ — здесь имеются решения типа магнитных монополей и столь же беден в ОТО: радиальным может быть только электрическое поле и имеется единственное решение — Рейснера–Нордстрема.

В классической теории Максвелла невозможно существование магнитных монополей — сферически симметричное радиальное поле $h = q/r^2$ на удалении от центра удовлетворяет уравнениям Максвелла, но в центре должен быть магнитный заряд, существование которого запрещено в электродинамике Максвелла. Однако в ТГВ за счет возможности нетривиальной топологии пространства возможно существование объектов, которые внешний наблюдатель воспринимает как магнитный монополь, но силовые линии магнитного поля не имеют начала и конца, то есть плотность заряда везде равна нулю. Образцом для построения решений такого типа являются “зарядовые грубки” Уилера в ОТО [74].

4.1. Однородная задача

Рассмотрим однородную метрику пространства, представляющего прямое произведение сферы S_2 с радиусом, зависящим от времени $R(t)$, на прямую с однородным масштабом, также зависящим от времени $m(t)$:

$$dl^2 = m^2(t) dx^2 + R^2(t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (12.33)$$

Сначала рассмотрим однородную задачу с электрическим полем, определяемым единственной компонентой векторного потенциала $A_x \equiv A$:

$$E_x = \dot{A} = E; \quad L_E = \frac{E^2}{2m^2} m R^2 = \frac{\dot{A}^2 R^2}{2m}.$$

Лагранжиан электромагнитного поля добавляется к однородной части лагранжиана пространства (12.15):

$$L = -2 \dot{m} \dot{R} R - m \dot{R}^2 + m + \frac{\dot{A}^2 R^2}{2m}.$$

Переменная A здесь циклическая и сопряженный импульс $q = \dot{A} R^2/m$ постоянен, так что $E = q m/R^2$.

Вариация лагранжиана по m приводит к уравнению

$$2 \ddot{R} R + \dot{R}^2 + 1 - \frac{q^2}{2 R^2} = \frac{d}{dR} \left(R \dot{R}^2 + R + \frac{q^2}{2 R} \right) = 0.$$

Пространство представляет из себя однородную трубку радиуса R , динамика которого во времени определяется дифференциальным уравнением

$$R \ddot{R}^2 + R + \frac{q^2}{2 R} = 2 R_0; \quad \dot{R} = \sqrt{\frac{2 R_0}{R} - 1 - \frac{q^2}{2 R}},$$

где R_0 — константа интегрирования (положительная).

Подкоренное выражение определяет минимальное R_1 и максимальное R_2 значения, допустимые для радиуса

$$R^2 - 2 R_0 R + q^2/2 = 0; \quad R_1 + R_2 = 2 R_0; \quad R_1 R_2 = q^2/2.$$

Решением этого дифференциального уравнения является гипоциклоида:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= R_0 - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos(\tau); \\ t(\tau) &= R_0 \tau - \frac{R_2 - R_1}{2} \sin(\tau). \end{aligned} \quad (12.34)$$

Самое примечательное в этом решении, что при наличии электрического поля радиус не доходит до нуля.

Уравнения динамики с магнитным полем полностью аналогичны уравнениям с электрическим. Магнитное сферически-симметричное поле представляется одной компонентой антисимметричного тензора, радиальная компонента которого имеет вид $h_{\vartheta\varphi}(r, t) = q \sin \vartheta/R^2$. Динамика радиуса определяется той же гипоциклоидой (12.34).

5. Неоднородная задача

Обобщим предыдущую задачу на неоднородный случай: рассмотрим функции m и R , зависящие не только от времени, но и от координаты x .

Эта задача полностью аналогична вакуумной задаче с лагранжианом (12.15), к которому добавлен лагранжиан электромагнитного поля

$$L = -2\dot{m}\dot{R}R - m\dot{R}^2 + m + \frac{R'^2}{m} + \frac{\dot{A}^2 R^2}{2m}.$$

Уравнение связи здесь такое же, как и в вакуумной задаче (12.7): $R' = f(x)m$. Это соотношение позволяет преобразовать исходные дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка по времени:

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + 1 - f^2 = \frac{q^2}{2R^2}. \quad (12.35)$$

Его также можно представить в виде:

$$\frac{d}{dR} \left(R\dot{R}^2 + (1 - f^2)R + \frac{q^2}{2R} \right) = 0. \quad (12.36)$$

Решением этого уравнения (в каждой точке x), так же как и в предыдущей задаче, является гипоциклоида:

$$R(\eta, x) = \frac{1}{1 - f^2} \left(\frac{R_1 + R_2}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos(\eta) \right); \quad (12.37)$$

$$t(\eta, x) = \frac{1}{(1 - f^2)^{3/2}} \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \tau - \frac{R_2 - R_1}{2} \sin(\eta) \right). \quad (12.38)$$

Как и в чисто вакуумной задаче, переход в инерциальную систему осуществляется переходом от радиальной переменной x к переменной R :

$$m dx = \frac{R' dx}{f} = \frac{1}{f} (dR - \dot{R} dt)$$

с единственным отличием в выражении для $\dot{R}$:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2M}{R} - 1 + f^2 - \frac{q^2}{2R^2}}.$$

Преобразованием координат эта метрика приводится к метрике Рейснера-Нордстрема.

5.1. Расширенная теорема Биркгофа

Однако в противоположность богатству задач ТГВ с радиальными электрическим или магнитным полем в ОТО царит такое же однообразие, как и в случае вакуума.

Аналогично теореме Биркгофа можно доказать и *расширенную теорему Биркгофа* в ОТО:

Сферически-симметричная система, содержащая в качестве внешнего поля только радиальное электрическое или (и) магнитное поле, всегда статична и приводится к метрике Рейснера–Нордстрема.

Все выражения для динамики метрики с электрическим или магнитным полями совпадают с вакуумными с заменой выражений $2M/R$ на $2M/R - q^2/R^2$, в частности, при диагонализации метрика приводится к виду $ds^2 =$

$$\left(1 - \frac{2M(x)}{R} + \frac{q^2}{R^2}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - 2M(x)/R + q^2/R^2} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (12.39)$$

Это и есть метрика Рейснера–Нордстрема.

Доказательство расширенной теоремы Биркгофа просто повторяет доказательство теоремы Биркгофа при выполнении указанной замены.

6. Заключение

В ТГВ имеется широкий круг сферически-симметричных задач, в то время как в ОТО они приводятся (может быть с использованием комплексных преобразований) к статическим метрикам Шварцшильда или Рейснера–Нордстрема.

В частности, магнитный монополю в ОТО обязан где-то в центре иметь магнитный заряд, что требует выхода за стандартную электродинамику Максвелла, в то время как в ТГВ в центре может находиться нигде не кончающаяся (в сферически-симметричном случае) пространственная трубка с магнитным полем, радиус которой динамически меняется во времени.

При радиальном, сферически-симметричном гравитационном коллапсе ТГВ описывает динамические процессы в пространстве, в то время как ОТО, благодаря теореме Биркгофа, предписывает пространству в этих процессах пассивную роль.

ГЛАВА 13

Квантовая динамика

Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве.

Б. Риман

1. Квантовая теория гравитации в ТГВ

Мы видели, какие сложные пути для введения квантовой теории предлагает Общая теория относительности. Проблемой в квантовой теории в первую очередь является понимание самого объекта квантования.

В ТГВ квантовая теория гравитации, как и квантовая теория других полей, например квантовая электродинамика, строится на основе уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (13.1)$$

определяющего динамику *вектора состояния* пространства (и других полей) Ψ в глобальном времени. Вектор состояния является функционалом от трехмерного метрического тензора, а с учетом трех уравнений связей при произвольном векторном поле $V^i(x)$ на произвольной метрике $\gamma_{ij}(x)$:

$$\int V^i(x) \nabla_i \left(\frac{\delta \Psi}{\delta \gamma_{ij}} \right) \sqrt{\gamma} d_3x = 0, \quad (13.2)$$

буферизирующих произвол в выборе координат, определяет вектор состояния как функционал только от пространства.

Вероятностная трактовка вектора состояния определяет вероятность той или иной конфигурации пространства, выделяет наиболее вероятную и ближайшую (вероятностную) окрестность.

Как, например, и в квантовой электродинамике, можно ставить стационарную задачу. Вследствие сохранения значения гамильтониана (энергии) имеет смысл уравнение

$$\hat{H}\Psi = E\Psi. \quad (13.3)$$

2. Плотность энергии

Мера квантовых флуктуаций при этом определяется не в некотором фиксированном пространстве, а метрикой того искривленного пространства, в котором задаются эти флуктуации:

$$dL^2 = \int \gamma^{ik}\gamma^{jl} \delta\gamma_{ij} \delta\gamma_{kl} \sqrt{\gamma} d_3x. \quad (13.4)$$

Таким образом, в отличие, например, от квантовой электродинамики, где основной проблемой (при взаимодействии с полем электронов) оказывается нелинейность, а функциональное пространство является плоским, в квантовой гравитации само функциональное пространство обладает кривизной [75].

Плотность полного гамильтониана с учетом материи отлична от нуля:

$$H = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\gamma_{kl})\pi^{kl}\pi^{ij} + \\ + \sqrt{\gamma} \left(-\frac{1}{2} {}^{(3)}R + T_0^0 + V^i T_i^0 \right) - \pi^{ij}(V_{i;j} - V_{j;i}). \quad (13.5)$$

Компоненты метрики γ_{ij} коммутируют друг с другом, так же как и компоненты импульсов π^{kl} , однако выражение для гамильтониана значительно упрощается, если ввести *аффинные импульсы*, а из них выделить еще штур π_i^i , который коммутирует (в смысле скобок Пуассона) с каждым аффинным импульсом:

$$\pi_j^i = q_j^i + \frac{\delta_j^i}{3}\pi; \quad q_i^i = 0; \quad \pi_i^i = \pi, \quad (13.6)$$

то в этих переменных (и при $V^i = 0$) гамильтониан (7.17) выглядит проще:

$$H = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(2 q_j^i q_i^j - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2} {}^{(3)}R. \quad (13.7)$$

причем метрика входит в кинетическую энергию только через $\sqrt{\gamma}$, а эта переменная коммутирует с q_j^i , которые, однако, друг с другом не коммутируют:

$$\{q_j^i(x), q_l^k(x')\} = \frac{1}{2}(\delta_l^i q_j^k - \delta_j^k q_l^i) \delta(x - x'). \quad (13.8)$$

Это — коммутационные соотношения токов группы $Sl(3)$, которые таким образом естественно возникают в динамической теории гравитации.

Эти осложнения — кривизны функционального пространства метрик — связаны с фоновой независимостью квантовой гравитации.

3. Квантовая модель Большого взрыва

В качестве пробного камня в том или ином подходе к квантовой теории гравитации (почти) всегда рассматриваются космологические задачи с конечным числом степеней свободы.

Космологические проблемы на серьезную научную основу встали после работ А.А. Фридмана по динамике изотропного мира. Ненулевой гамильтониан ТГВ позволяет обычным образом — через уравнение Шредингера — формулировать задачи квантовой космологии.

Один из наиболее простых примеров классического и квантового описания модели Большого взрыва в ТГВ мы продемонстрируем ниже.

3.1. Сферическое пространство

Рассмотрим компактную космологическую модель фридмановского типа, однородную и изотропную с пространством в виде трехмерной сферы, учитывающую из геометрии пространства только изменение радиуса r , однако, в отличие от вакуумной задачи, заполненного веществом. Наибольший интерес представляет область малых радиусов — Большого взрыва с предельно сильно сжатым веществом, представляющим из себя ультрарелятивистский газ с уравнением состояния $\epsilon = 3p$.

Лагранжиан изотропного газа выражается интегралом от давления, выражаемого как функция химического потенциала μ , в свою очередь выражаемого через

$$\mu = \sqrt{(\dot{\sigma} + V^i \partial_i \sigma)^2 - \gamma^{ij} \partial_i \sigma \partial_j \sigma}.$$

В однородном случае $\mu = \dot{\sigma}$ и лагранжиан в единице неизменяющегося (координатного) объема пропорционален физическому объему, учитываю-

щему $\sqrt{\gamma}$:

$$L = p(\dot{\sigma}) 2\pi^2 r^3. \quad (13.9)$$

Вариация действия по σ приводит к закону сохранения материи

$$\frac{d}{dt}(\rho r^3) = 0; \quad \rho = \frac{dp}{d\mu}. \quad (13.10)$$

Для ультрарелятивистской материи давление пропорционально μ^4 , что с учетом лагранжиана гравитации для этой модели приводит к полному модельному лагранжиану:

$$L = -\frac{r(\dot{r}^2 - 1)}{2} + \rho_0 \frac{\dot{\sigma}^4}{4} r^3. \quad (13.11)$$

Импульс, канонически сопряженный σ (количество материи в единице координатного объема), постоянен:

$$p_r = -r\dot{r}; \quad p_\sigma = M_r = \rho_0 \dot{\sigma}^3 r^3.$$

Выражая, как обычно, скорости через импульсы

$$\dot{r} = -\frac{p_r}{r}; \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{r} \left(\frac{p_\sigma}{\rho_0} \right)^{1/3},$$

переходим к гамильтониану

$$H = -\dot{r} p_r + \dot{\sigma} p_\sigma - L = -\frac{p_r^2 + r^2}{2r} + \frac{q^2}{2r}, \quad (13.12)$$

где константа q^2 , пропорциональная $p_\sigma^{4/3}$, характеризует сохраняющееся количество ультрарелятивистской материи.

Классическое уравнение динамики можно построить из закона сохранения энергии:

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{q^2 - 2er - r^2}. \quad (13.13)$$

Это уравнение описывает изменение радиуса между максимальным и минимальным значениями, определяемого корнями подкоренного выражения

$$r_{\max} = \sqrt{e^2 + q^2} - e. \quad (13.14)$$

Второй корень отрицательный, поэтому радиус меняется от нуля до r_{max} .

Если $q^2 \neq 0$, энергия может быть как положительной, так и отрицательной. При $q^2 = 0$ — чисто фридмановская динамика (без ультрарелятивистской материи) — энергия может принимать только отрицательные значения.

В данном разделе мы не будем вычислять квантовые эффекты, а лишь продемонстрируем эффективность шредингера подхода в квантовой теории гравитации на основе ТГВ. Здесь мы работаем в планковской системе единиц: $c = 1$, $k = 1$, $\hbar = 1$.

3.2. Квантовая задача

В квантовом гамильтониане

$$\hat{H} = -\frac{\hat{p}_r^2 + r^2}{2r} + \frac{q^2}{2r} \quad (13.15)$$

q^2 характеризует сохраняющееся количество ультрарелятивистской материи.

Волновая функция является функцией времени и радиуса сферы r , переменные разделяются. Обозначая штрихом производную по радиусу, симметризуя $\hat{p}^2/r$, получаем стационарное космологическое волновое уравнение:

$$u'' - \frac{u'}{r} + (-r^2 + q^2)u = 2rEu. \quad (13.16)$$

Вопрос о мере в функциональном пространстве требует дополнительного изучения (видимо, r^5), но так как пока мы ставим цель описания в принципе, уравнение (13.16) записано при мере в функциональном пространстве единица.

В окрестности нуля это уравнение принимает асимптотический вид

$$u'' - \frac{u'}{r} = 0,$$

с решениями в степенном виде $u = r^k$ и приводится к алгебраическому $k(k-2)=0$, так что особая точка $r=0$ является регулярной с показателями 0 и 2, а решения распадаются на два класса по поведению в окрестности нуля: как r^0 и как r^2 . Для изучения квантовой проблемы Большого взрыва представляет интерес первый класс, так как во втором плотность вероятности в нуле всегда равна нулю.

Собственные значения энергии для первых восьми таких функций при $q=0$ (материя отсутствует — динамика только пространства) и $q=1$ приведены в таблице:

n	$q=0$	$q=1$
1	-0.977722	4.42817
2	-3.05247446	-2.3182877
3	-4.16434141	-3.6338011
4	-5.03491431	-4.5990728
5	-5.77537028	-5.3970940
6	-6.43100378	-6.0924244
7	-7.02566164	-6.7165684
8	-7.57373725	-7.2876611

При $q=0$ все собственные значения энергии отрицательны, при $q \geq 1$ первые моды имеют положительную энергию. Представленные результаты получены численным интегрированием и гильбертово пространство ограничено рассмотрением восьми функций ($n=8$).

Первые шесть (ненормированных) функций для чистого пространства ($q=0$) приведены на рис. 13.1

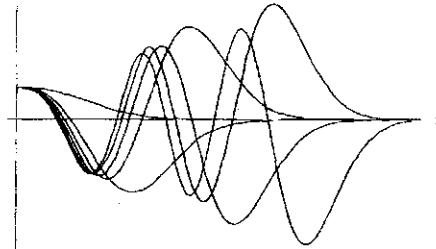


Рис. 13.1.

Вследствие ненормированности функций и небольшой их неортогональности за счет приближенного интегрирования в конечных пределах вычисляется метрическая матрица

$$M_{ij} = \int_0^{r_{\max}} u_i(r) u_j(r) dr$$

и вычисления матричных операторов проводятся с обратной матрицей $K^{ij} = M_{ij}^{-1}$. Для анализа динамики радиуса интересен оператор радиуса

$$r_j^i = \sum_{s=1}^n K^{is} \int_0^{r_{\max}} r u_s(r) u_j(r) dr.$$

При $n = 8$ собственные значения этой матрицы равны (0.51, 1.7, 2.6, 3.4, 4.2, 5.0, 5.8, 6.8).

С увеличением n (числа функций) минимальное собственное значение уменьшается, а максимальное растет, так что их произведение приблизительно остается чуть больше π . Поэтому квантовые эффекты не предотвращают Большой взрыв, а с учетом того, что постоянная Планка в системе единиц Хевисайда имеет размерность квадрата длины, приводят к гипотезе о некотором космологическом соотношении неопределенностей:

Произведение максимального и минимального радиусов Мира не меньше $\pi \hbar$.

4. Динамика волновых пакетов

При рассмотрении квантовой динамики Большого взрыва наиболее интересной квантовой величиной является радиус Мира. В описании динамики имеет смысл стартовать от состояния с минимальным математическим ожиданием радиуса. Это должна быть собственная функция оператора радиуса. Чтобы подготовить методику, рассмотрим сначала особенности собственных функций оператора координаты на хорошо изученном примере гармонического осциллятора.

4.1. Минимальная координата квантового осциллятора

Гармонический осциллятор мы будем описывать в функциях, построенных на модифицированных полиномах Эрмита, определяемых производящей функцией

$$e^{-\frac{s^2}{2} + sx - \frac{x^2}{4}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\sqrt{k!}} u_k(x). \quad (13.17)$$

Из этого представления легко находится нормировка функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x) u_l(x) dx = 0, \quad k \neq l; \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_k(x)^2 dx = \sqrt{2\pi},$$

а также матричные элементы координаты x :

$$x_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} x u_k(x) u_l(x) dx,$$

которые образуют матрицу

$$X = [x_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (13.18)$$

В подпространстве U_N , определяемом функциями $u_k(x)$ ($0 \leq k \leq N$), при нечетном $N = 2n + 1$ имеется состояние с собственным значением матрицы X , равным нулю: $\sum_{l=0}^{2n+1} x_{kl} a_l = 0$. Все нечетные компоненты этого состояния равны нулю, а четные

$$a_{2k}^n = (-1)^k \sqrt{\frac{(2n)!!(2k-1)!!}{(2n+1)!!(2k)!!}}, \quad (13.19)$$

при этом нужно помнить, что $(-1)!! = 1$.

Энергия этого состояния

$$E_{2n+1}^0 = \frac{\hbar\omega}{2} \sum_{k=0}^n (4k+1) (a_{2k}^n)^2 = \left(\frac{2}{3}n + \frac{5}{6}\right) \hbar\omega.$$

Она неограниченно растет с ростом n , поэтому при рассмотрении состояний с ограниченной энергией нужно ограничиваться конечными n .

Интересно рассмотреть дисперсию этих состояний. Так как $\langle x \rangle = 0$, то дисперсия $D = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ равна математическому ожиданию x^2 . В случае полного набора функций матрица элементов

$$(x^2)_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u_k(x) u_l(x) dx$$

должна бы являться квадратом матрицы X , поэтому в полном гильбертовом пространстве функций гармонического осциллятора дисперсия собственного состояния оператора $\hat{x}$ должна бы быть равной нулю — это состояние

должно быть квадратным корнем из δ -функции (d -функцией). Это состояние имеет бесконечную энергию.

В конечномерном случае пространства U_{2n+1} матрица (X^2) отличается от квадрата матрицы X в двух последних столбцах и строках:

$$[X^2]_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{1 \cdot 2} & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{2 \cdot 3} & \dots \\ \sqrt{1 \cdot 2} & 0 & 5 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \sqrt{(n-2)(n-1)} & 0 & 2n-1 & 0 \\ 0 & \dots & \sqrt{(n-1)n} & 0 & 2n+1 \end{bmatrix}, \quad (13.20)$$

а так как все нечетные элементы вектора a_k равны нулю, то отличие от нуля набегает только в последней строке:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left((4n+1) \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \sqrt{\frac{2n(2n-1)2n}{(2n-1)(2n+1)}} \right) = 1.$$

В любом конечномерном подпространстве дисперсия состояния с нулевой координатой равна единице! Это можно понять при изучении графика этого состояния: хотя ширина главного пика с ростом n уменьшается с одновременным ростом его высоты, однако растет число малых вторичных пиков, в результате чего дисперсия и остается неизменной.

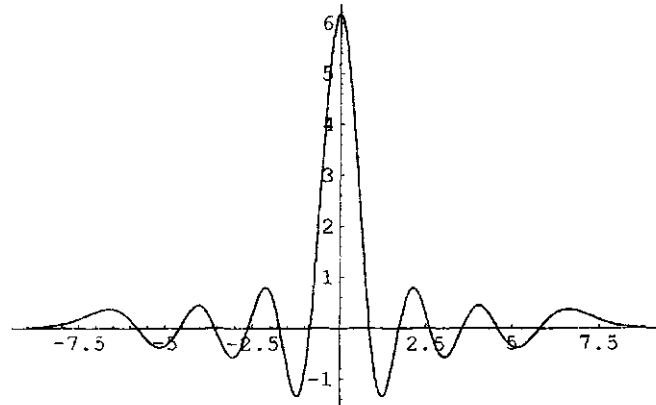


Рис. 13.2

В процессе динамики этот пакет через отрезок времени $\tau = \pi/\omega/2$ расширяется до максимального, а затем за то же время возвращается к первоначальному с полным периодом π/ω .

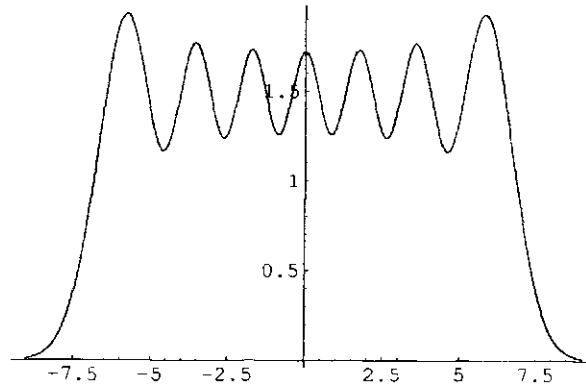


Рис. 13.3

При рассмотрении полного гильбертова пространства все, что уходит на бесконечность, становится невидимым, и мы некоторым *естественным образом* полагаем выполнение условия полноты

$$[f(x)] = f([X]); \quad [X^2] = [X] \cdot [X], \quad (13.21)$$

то есть исчезновения матрицы дисперсии. Однако при удалении ненулевого элемента на бесконечность его значение также бесконечно возрастает. Арифметика бесконечности, построенная Я. Д. Сергеевым [77], позволяет выразить этот ненулевой элемент через единицу бесконечности $\textcircled{1}$:

$$[D]_{\textcircled{1}\textcircled{1}} = \textcircled{1} + 1 \quad (13.22)$$

и показывает, что дисперсия собственных функций оператора координаты остается конечной, что, в частности, приводит к *парадоксу Гиббса* при разложении по собственным функциям.

4.2. Динамика космологических пакетов

Для задания начального волнового пакета рассмотрим конечномерное подпространство собственных функций радиуса Мира, определяемых дифференциальным уравнением (13.16). Зададимся, например, подпростран-

ством из восьми функций со значением $q^2 = 10$. По этим функциям вычисляется матрица r_k^l размерности 8×8 . Ее минимальное собственное значение равно $r_{min} = 0.9016$, а соответствующий нормированный собственный вектор раскладывается по собственным функциям гамильтониана с компонентами

$$a_k = \{0.9468, 0.2591, 0.1435, 0.0929, 0.0605, 0.0447, 0.0329, 0.0230\}.$$

Эта собственная функция имеет следующий вид, см. рис. 13.4.

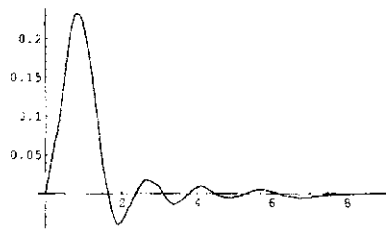


Рис. 13.4.

Она обладает положительной средней энергией $\langle E_8 \rangle = 4.35$. В отличие от осциллятора значения энергий (и соответственно частоты) ее восьми составляющих не кратны друг другу и динамика пакета неперiodична. Сначала пакет сдвигается в сторону больших масштабов и расширяется (мы приводим графики плотности вероятности на рис. 13.5)

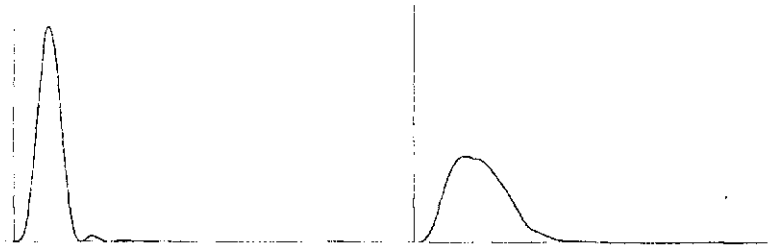


Рис. 13.5.

Затем он расщепляется на две компоненты, одна из которых начинает двигаться в сторону больших радиусов, описывая фридмановское расширение мира. Однако вторая возвращается в сторону малых радиусов и в даль-

нейшем совершает самостоятельную динамику в области малых радиусов (см. рис. 13.6).

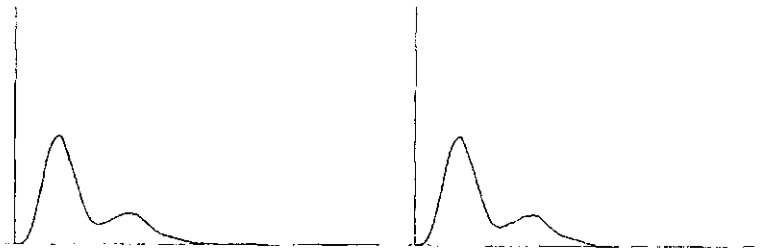


Рис. 13.6.

Эта картина заставляет переосмыслить квантовый вариант развития нашего мира. С квантовой точки зрения плотность вероятности радиуса Мира может представляться в простейшем случае следующей картиной (см. рис. 13.7).

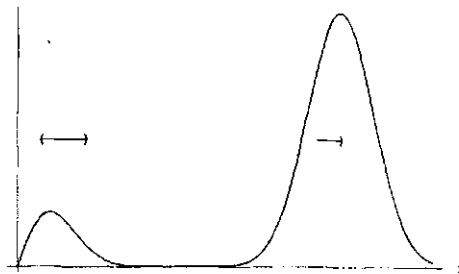


Рис. 13.7.

Имеется по крайней мере две области, где плотность вероятности отлична от нуля: правая область фридмановского расширения и левый пакет, совершающий колебания в окрестности нулевого радиуса. Оба этих пакета существуют одновременно.

С точки зрения квантовой механики в какой-либо задаче, например, твердого тела подобное поведение плотности вероятности не вызвало бы серьезных вопросов. Однако применительно к радиусу Мира — уникальной, единственной переменной — вопросы возникают. Каков же радиус Мира для нас? Если с каким-то средним значением и малыми флуктуациями вокруг него как-то можно смириться, то как трактовать одновременную вероят-

ность двух существенно различных радиусов? Что будет, если измерить радиус Мира? Произойдет редукция волнового пакета либо в область больших, либо в область малых радиусов?

Ответ состоит в том, что *радиус Мира непосредственно измерить невозможно*. Хэбл замерил его по свойствам фотонов, идущих от удаленных галактик. Эти фотоны также подчиняются квантовой теории и на их квантовое поведение, доступное нашему измерению, может влиять как область больших, так и малых радиусов, но при фиксации фотона никакой редукции волновой функции радиуса Мира не происходит.

Пусть, например, проводится эксперимент с атомами лития, имеющими по три электрона — два внутренних и один внешний, валентный (водородоподобный атом). В эксперименте проводится взаимодействие с валентным электроном, при этом внутренние имеют свою квантовую матрицу плотности, влияющую на поведение валентного электрона, но в процессе эксперимента никакой локализации этих внутренних электронов не происходит.

Подавляющее количество квантовых переменных никем не наблюдается. Их квантово-механическое поведение проявляется лишь через их влияние на малое число наблюдаемых переменных. Радиус Мира с квантово-механической точки зрения может иметь достаточно *размазанные* значения, но это может вызвать лишь специфику в наблюдаемом (или еще не наблюдавшемся) поведении наблюдаемых объектов (фотонов, космических частиц). Видимо, квантовая физика в основе своей имеет не волновую функцию, а матрицу плотности (см. [78]).

5. Квантовая плоская анизотропная модель

Для понимания геометрии неплоского функционального пространства трехмерных метрик (суперпространства) полезно рассмотреть сначала однородный случай метрики общего вида, в котором кривизна суперпространства определяется только локальной мерой в пространстве компонент метрики.

Изучим квантовый вариант рассмотренной выше однородной модели с гамильтонианом (8.48). Вследствие коммутации оператора B с гамильтонианом происходит разделение переменных: волновая функция может быть представлена как произведение:

$$\psi = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} W(r) U(\mu, \nu, \vartheta, \varphi, \psi).$$

Задача распадается на два уравнения в частных производных. Для функции $W(r)$ нужно учесть меру в пространстве компонент метрики:

$$d_6\gamma = d\Omega(\mu, \nu, \vartheta, \varphi, \psi) r^5 dr,$$

что приводит к уравнению

$$\frac{1}{r^5} \frac{d(r^5 W'(r))}{dr} + \frac{l^2}{r^2} W(r) = E W(r), \quad (13.23)$$

и для функции $U(\mu, \nu, \vartheta, \varphi, \psi)$:

$$\frac{1}{2} \left(3p_\mu^2 + p_\nu^2 + \frac{p_3^2}{\text{sh}^2(2\nu)} + \frac{p_1^2}{\text{sh}^2(\mu + \nu)} + \frac{p_2^2}{\text{sh}^2(\mu - \nu)} \right) U = \left(\frac{4l}{3} \right)^2 U. \quad (13.24)$$

В гамильтониан не входит переменная ψ , следовательно, и p_ψ является интегралом движения. Так как оператор P^2 (8.46) коммутирует с гамильтонианом, решения уравнения (13.24) строятся из функций Якоби [79], определяемых с помощью дифференциального оператора

$$\hat{L}^2(m, k) = \frac{d^2}{dx^2} + \text{ctg } x \frac{d}{dx} - \left(\frac{m - k \cos x}{\sin x} \right)^2. \quad (13.25)$$

Здесь мы рассмотрим только первое уравнение, имеющее характер уравнения Бесселя с регулярной особой точкой в нуле и иррегулярной на бесконечности.

В нуле функция ведет себя как r^β : $\beta = -2 + \sqrt{4 - l^2}$. Здесь видна физическая граница между анизотропией, определяемой величиной l^2 , слабой ($l^2 < 4$) и сильной ($l^2 > 4$). Плотность вероятности в окрестности нуля ведет себя как

$$dp = \rho dr = W^2 r^5 dr \sim r^{1 + \sqrt{4 - l^2}}.$$

При слабой анизотропии поведение регулярно, при сильной происходит коллапс.

На бесконечности характер решения зависит от знака энергии:

$$W \sim r^{-5/2} e^{\sqrt{E}r}.$$

При $E < 0$ решения имеют сплошной спектр, осциллируют. При положительных энергиях, как и в предыдущей задаче, спектр дискретен — отбираются только затухающие решения.

6. Квантовая теория гравитации

В предыдущих задачах рассматривались системы с конечным числом степеней свободы. Переходя теперь к полевым задачам, сразу предупредим, что квантовая теория гравитации здесь не будет изложена. Мы отметим лишь специфику квантовой теории гравитации по сравнению с достаточно хорошо разработанной квантовой электродинамикой.

- Физический смысл координат определен лишь после определения метрики, которая является квантовым объектом.
- Глобальная нелинейность классической теории при линейности относительно малых вариаций метрики.
- Кривизна функционального пространства метрик.
- Некоммутативность калибровочных преобразований.

6.1. Квантовая теория малых возмущений

Построенная Л. Розенфельдом [80], а затем М. Бронштейном [81], С. Гуптой [82] и др. квантовая теория слабых возмущений в пространстве Минковского, в которой калибровочными преобразованиями (бесконечно малыми преобразованиями координат) исключаются компоненты четырехмерной метрики h_{00} , h_{0i} , фактически совпадает с аналогичной квантовой теорией ТГВ. Плотность энергии в ТГВ в этом случае квадратична по возмущениям, но в линейном приближении это соответствует нулевой плотности энергии, то есть ОТО. Поэтому мы не будем здесь фактически повторять те же выкладки, что и упомянутые авторы.

Отметим, однако, квантовую задачу о малых флуктуациях трехмерной сферы, рассмотренных в главе 10. При этом к лагранжиану на сфере одновременно можно добавить лагранжиан электромагнитного поля, моды колебаний которого рассмотрены в главе 13. Это рассмотрение поможет разобраться в таких вопросах, как мера в функциональном пространстве. Кроме того, построение квантовой электродинамики на трехмерной сфере сможет рассеять некоторые мифы квантовой электродинамики, такие как релятивистская инвариантность.

Плоское пространство является пределом трехмерной сферы при радиусе, стремящемся к бесконечности, и квантовая электродинамика, получающаяся при таком предельном переходе, может не обрести релятивистскую

инвариантность. Это будет означать выделение глобальной инерциальной системы на квантовом уровне. При учете квантовой гравитации это, без сомнения, так.

6.2. Функциональное пространство метрик

В полной своей конструкции, несмотря на то что гамильтониан гравитации отличен от нуля, гамильтонова, а затем и квантовая теории гравитации оказываются нетривиальными, так как пространство метрик является искривленным. Это искривление определяется двумя составляющими: локальной кривизной пространства метрик в точке и некоммутативностью калибровочных преобразований — преобразований координат.

При вычислении кинетической энергии в однородной анизотропной космологической модели (8.37) мы увидели инвариантность меры относительно группы Sl_3 . Каждая компонента метрики не просто изменяется на произвольную величину, а вклад этого сдвига в кинетическую энергию определяется всеми другими компонентами метрики нелинейным образом, так что различные метрики получаются не сдвигом их компонент, а преобразованием группой Sl_3 . Само множество метрик в одной точке — это не плоское многообразие, а многообразие, инвариантное относительно действия этой группы — искривленное пространство.

Пространство двумерных метрик инвариантно относительно группы Sl_2 . Например, при изучении плоской гравитационной волны мы ввели расстояние в пространстве метрик — между бесконечно близкими метриками с заданным детерминантом r^2 так:

$$dl^2 = r ((\operatorname{ch} \chi + \operatorname{sh} \chi \cos \eta) dy^2 + 2 \operatorname{sh} \chi \sin \eta dy dz + (\operatorname{ch} \chi - \operatorname{sh} \chi \cos \eta) dz^2). \quad (13.26)$$

Это метрика двумерного пространства Лобачевского.

Переменные r , χ и η зависят от t и x . Мера $\sqrt{\gamma} = r$, то есть в каждой точке пространства задана такая метрика, с компонентами, зависящими от времени. При этом преобразования координат сами некоммутативны, то есть не являются простыми сдвигами в отличие от калибровочных преобразований в электродинамике:

$$\delta_1 x^i = \xi_1^i(x); \quad \delta_2 x^i = \xi_2^i(x); \quad (\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) x^i = (\xi_1^j \xi_{2,j}^i - \xi_2^j \xi_{1,j}^i) \neq 0.$$

Динамическое пространство метрик есть фактор-пространство прямого произведения искривленных пространств метрик в каждой точке по некоммутативной группе координатных преобразований.

Все это говорит о том, что квантовая теория гравитации требует серьезного развития новых математических средств. Для описания пропагаторов в суперпространстве, предложенных как основа квантовой теории гравитации в [23], необходимо математическое описание этого суперпространства и методов интегрирования в нем. Нетривиальность этой задачи видна из выполненного А. М. Поляковым интегрирования в суперпространстве двумерных метрик [63], использовавшего то обстоятельство, что все двумерные поверхности являются конформно плоскими. Ситуация с трехмерными метриками несравненно сложнее. По-видимому, необходимо сначала изучить более простые модели, например квантовую теорию глобального времени с двумерным пространством, которая, в отличие от нединамической $(2+1)$ ОТО, является динамической теорией. Техника, продемонстрированная Поляковым на струнах, как раз необходима для постановки и решения этой задачи.

Может оказаться полезной точная квантовая модель плоских гравитационных волн, где кроме решений типа бегущих волн имеется множество других решений; например, волны, бегущие навстречу друг другу, взаимодействуют, в отличие от электромагнитных волн.

Эти модели помогут понять и такие вопросы, как интегрирование по разным топологическим типам пространств (в частности, открытые, замкнутые).

При обсуждении квантовой теории глобального времени, как правило, слышишь вопрос: а эта теория перенормируема? Конечно, нельзя ответить на этот вопрос, потому что неясно еще, а что же под этим можно подразумевать. Когда Дирак создал квантовую электродинамику, он на этот вопрос не отвечал — его еще не было. Только длительная работа привела к постановке этого вопроса. Какие проблемы, эквивалентные проблеме перенормируемости квантовой теории в заданном пространстве (пространстве-времени Минковского), возникнут в квантовой теории гравитации — покажет только работа в этой области. Мы находимся еще в самой начальной стадии построения такой теории.

ГЛАВА 14

l-анализ

Все из числа
Пифагор

Обыкновенное дифференциальное уравнение k -го порядка имеет k констант интегрирования, и для постановки задачи Коши нужно задать в начальный момент k величин: функцию и ее производные, вплоть до $k - 1$ -й.

В динамике полные начальные данные для систем с n степенями свободы, описываемых системой n дифференциальных уравнений второго порядка, нужно задать $2n$ начальных значений — n координат и n скоростей или импульсов.

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют бесконечное множество констант интегрирования — функции. Как определить степени свободы функций? Как задавать начальные условия для систем дифференциальных уравнений, особенно если имеются калибровочные степени свободы или тождества? Эти вопросы являются областью изучения *l*-анализа.

Идея *l*-анализа была выдвинута Уиттексом в 1902 году при построении сферических функций [84].

1. Гармонические полиномы

Связь координат точки в декартовой и сферической системах координат

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta$$

для однородных полиномов декартовых координат степени l приводит к общему множителю r^l , умножаемому на функции только угловых переменных:

$$\sum_{k+m \leq l} C_{km}^l x^k y^m z^{l-k-m} = r^l Y(\vartheta, \varphi).$$

Число коэффициентов C_{km}^l

$$N_3^l = \frac{(l-1)(l+2)}{2} \quad (14.1)$$

мы выведем ниже.

Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

понижает степень однородного полинома на 2, и, если нас интересуют *гармонические полиномы* степени l , на N_3^l коэффициентов накладывается N_3^{l-2} уравнений, так что произвольными остаются

$$N_3^l - N_3^{l-2} = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{(l-1)l}{2} = 2l+1$$

коэффициентов. Пространство гармонических полиномов степени l имеет размерность $2l+1$. Гармоническая функция ($\Delta f = 0$) имеет вид:

$$f = r^l \sum_m C_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

где m пробегает $2l+1$ различных значений (например, от $-l$ до $+l$), а $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ — набор $2l+1$ линейно независимых функций угловых переменных — сферические функции порядка l .

Таким же образом можно вычислить число сферических функций порядка l в четырехмерном пространстве

$$N_4^l - N_4^{l-2} = (l+1)^2,$$

в пятимерном пространстве

$$N_5^l - N_5^{l-2} = \frac{(l+1)(l+2)(2l+3)}{6}.$$

Эту идею Уиттскера можно обобщить на системы функций, подчиняющихся системе дифференциальных уравнений не обязательно линейных, а также на системы функций, имеющих *калибровочные степени свободы* [85]. Её пытался применить Эйнштейн в своих последних работах (в соавторстве с Б. Кауфман) [86] при анализе “жесткости” своей релятивистской теории несимметричного поля. Подчеркивая важность такого подхода для анализа сложных систем, Эйнштейн не успел дать его систематическое изложение.

2. l-представление

Пространство множества функций n переменных бесконечномерно, и суть l -анализа состоит в разбиении этого бесконечномерного пространства на бесконечное количество конечномерных l -секторов, в каждом из которых группируются члены разложения суммарной l -й степени по переменным. В одномерном случае в каждом l -секторе находится 1 коэффициент:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

и это можно отразить разложением по степеням формального параметра t функции

$$F_1(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l = \sum_{l=0}^{\infty} N_1^l t^l,$$

имеющей при каждой степени t коэффициент единица ($N_1^l = 1$). В случае нескольких переменных, если нас интересует лишь суммарная степень по всем переменным, такие функции нужно перемножить:

$$F_n(t) = \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{l=0}^{\infty} N_n^l t^l, \quad (14.2)$$

где N_n^l обозначает число коэффициентов функции n переменных в l -секторе. Эта функция хорошо изучена в комбинаторике:

$$N_n^l = \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!l!}. \quad (14.3)$$

Приведем ее вид для низких размерностей пространства переменных:

$$\begin{aligned} N_1^l &= 1; \quad N_2^l = l+1; \quad N_3^l = \frac{(l+1)(l+2)}{2}; \\ N_4^l &= \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Степень по l связана с числом переменных, которых на единицу больше, чем максимальная степень.

Определение этой функции через (14.2) дает ряд теорем сложения для нее, не требующих ее явного вида:

$$F_n(t)F_m(t) = F_{n+m}(t).$$

В частности, при $m = 1$ получается исключительно важное для дальнейшего соотношение

$$N_{n+1}^{l+1} = \sum_{s=0}^l N_n^s. \quad (14.5)$$

Другие тождества следуют из очевидного равенства:

$$\frac{(1-t)^m}{(1-t)^n} = \frac{1}{(1-t)^{n-m}},$$

откуда

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{m!}{s! (m-s)!} N_n^{l-s} = N_{n-m}^l. \quad (14.6)$$

Например, при $m = 1$:

$$N_n^l - N_n^{l-1} = N_{n-1}^l,$$

а при $m = n$, $l > 0$

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{n!}{s! (n-s)!} N_n^{l-s} = 0.$$

Если функция подчиняется дифференциальному уравнению порядка k , то k -кратное дифференцирование переводит коэффициенты из сектора l в сектор $l - k$ и на количество коэффициентов в этом секторе уменьшает число коэффициентов в секторе l .

Если функция имеет калибровочные степени свободы k -го порядка (функция изменяется k -ми производными калибровочной функции), то число коэффициентов в секторе l уменьшается на число коэффициентов калибровочной функции в секторе $l + k$. Это и есть основные правила использования l -анализа в системах дифференциальных уравнений с калибровочными степенями свободы.

3. Динамика скалярного поля

Продemonстрируем использование l -анализа в описании лагранжевой динамики полей. Пусть, например, имеется скалярное поле в n -мерном пространстве, зависящее еще от времени (N_{n+1}^l компонент в l -секторе)

с лагранжианом, содержащим первые производные. Варьируя лагранжиан, получаем на этом поле дифференциальное уравнение второго порядка, уменьшающее число компонент в l -секторе на N_{n+1}^{l-2} . В l -секторе остается

$$N_{scal}^l = N_{n+1}^l - N_{n+1}^{l-2}$$

компонент. Если сюда добавить и отнять N_{n+1}^{l-1} , то структура

$$N_{scal}^l = (N_{n+1}^l - N_{n+1}^{l-1}) + (N_{n+1}^{l-1} - N_{n+1}^{l-2}) = N_n^l + N_n^{l-1}$$

приобретает вид двух полей (исходное поле — сектор l и производные по времени — сектор $l-1$).

Наличие калибровочных преобразований (первого порядка) уменьшает число компонент исходного поля и добавляет тождества первого порядка на уравнения. Если уравнения второго порядка, то тождества по отношению к полю имеют третий порядок.

Классическим полем с калибровочной степенью свободы является электромагнитное поле.

4. Электродинамика

В теории поля все компоненты полей зависят от четырех переменных — трех пространственных координат и времени ($n = 4$).

Электромагнитные поля описываются 4-векторным потенциалом, однако при наличии калибровочной степени свободы $\delta A_\alpha = \partial_\alpha \chi$. При этом калибровочном преобразовании часть коэффициентов потенциалов в l -м секторе может быть уничтожена коэффициентами из $l+1$ -го сектора калибровочной функции χ , так что калибровочно независимых коэффициентов остается

$$\begin{aligned} n_l &= 4 N_4^l - N_4^{l+1} = 4 \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6} - \frac{(l+2)(l+3)(l+4)}{6} = \\ &= \frac{(l+2)(l+3)(4l+4-l-4)}{6} = \frac{l(l+2)(l+3)}{2}. \end{aligned}$$

При $l = 0$ все коэффициенты калибровочно устранимы — векторный потенциал локально ненаблюдаем.

При $l = 1$ (первые производные потенциала) имеется 6 неустраиваемых коэффициентов — это компоненты векторов напряженностей электромагнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Однако они не являются свободными полями, на них

накладываются

$$6 N_4^{l-1} - n^l = 6 \frac{l(l+1)(l+2)}{6} - \frac{l(l+2)(l+3)}{2} = \frac{(l-1)l(l+2)}{2}$$

ограничений. При $l = 2$ (первые производные от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$) их четыре — это первая пара уравнений Максвелла. Динамические уравнения Максвелла (вторая пара) — дифференциальные уравнения 2-го порядка по потенциалам и первого порядка по напряженностям. Они получаются вариацией действия по четырём потенциалам. Вариация действия по калибровочной функции приводит к дифференциальному первого порядка тождеству на эти уравнения ($\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$), так что уравнения с тождеством дают

$$\begin{aligned} eq_l &= 4 N_4^{l-2} - N_4^{l-3} = 4 \frac{(l-1)l(l+1)}{6} - \frac{(l-2)(l-1)l}{6} = \\ &= \frac{(l-1)l(4l+4-l+2)}{6} = \frac{(l-1)l(l+2)}{2}. \end{aligned}$$

Вторая пара уравнений Максвелла совпадает по l -структуре с первой.

Отсюда можно вычислить l -структуру начальных данных Коши в электродинамике:

$$\begin{aligned} k_l &= n_l - eq_l = \frac{l(l+2)(l+3)}{2} - \frac{(l-1)l(l+2)}{2} = \\ &= \frac{l(l+2)(l+3-l+1)}{2} = 2l(l+2). \end{aligned}$$

Степень l равна уменьшенной на единицу размерности пространства, следовательно, начальные данные задаются в трехмерном пространстве. Низшая степень $l = 1$, при которой имеется 6 коэффициентов, — компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в данной точке. Однако они не являются свободными (в начальных данных):

$$6 \frac{l(l+1)}{2} - 2l(l+2) = l(3l+3-2l-4) = l(l-1) = 2 \frac{(l-1)l}{2}.$$

Это два свободных (без тождеств) дифференциальных уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho,$$

где ρ — заданная в пространстве функция.

5. Риманова геометрия

Одной из важнейших областей применения l -анализа является риманова геометрия. Метрика n -мерного риманова пространства имеет $n(n-1)/2$ компонент, но ее исходная l -структура $n(n-1)/2 N_n^l$ редуцируется производными от n функций преобразований координат:

$$\begin{aligned} M_n^l &= \frac{n(n+1)}{2} \frac{(n+l-1)!}{(n-1)! l!} - n \frac{(n+l)!}{(n-1)! (l+1)!} = \\ &= \frac{n(l-1)(n+l-1)!}{2(n-2)! (l+1)!}. \end{aligned}$$

В отличие от электродинамики здесь в нуль обращается число коэффициентов при $l=1$ — *первые производные метрического тензора в точке полностью устранимы координатным преобразованием*. Это важнейший результат, позволяющий ввести локально декартову систему координат в окрестности любой наперед заданной точки.

При $l=0$ результат отрицательный: $M_n^0 = -n(n-1)/2$. Преобразований в нулевом секторе больше, чем компонент метрики. Они позволяют привести метрику к некоторому стандартному виду (единичная матрица — локально декартова система координат), при этом остается локальная группа преобразований, не меняющих метрику, — $n(n-1)/2$ -параметрическая группа локальных вращений.

Первые неустранимые компоненты появляются при $l=2$ — вторые производные метрического тензора. Их

$$M_n^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \quad (14.7)$$

Это число независимых компонент тензора кривизны. В одномерном пространстве их нет — все одномерные пространства плоские. В двумерном пространстве имеется всего одна компонента — тензор Римана-Кристоффеля, тензор Риччи — все они выражаются через скалярную кривизну. В трехмерном пространстве компонент тензора кривизны шесть — как и у тензора Риччи, через который и выражаются все компоненты тензора кривизны (3.35). В четырехмерном пространстве компонент тензора кривизны 20, а тензора Риччи 10.

Свободная функция в n -мерном пространстве имеет $N_n^1 = n$ первых производных — по числу переменных в пространстве. Однако производных

тензора кривизны меньше на

$$\begin{aligned} B_n = n M_n^2 - M_n^3 &= \frac{n^3(n^2 - 1)}{12} - \frac{(n - 1)n^2(n + 1)(n + 2)}{24} = \\ &= \frac{(n - 2)(n - 1)n^2(n + 1)}{24}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Это количество тождеств Бьянки в n -мерном пространстве:

$$R_{kl;m}^{ij} + R_{lm;k}^{ij} + R_{mk;l}^{ij} = 0. \quad (14.9)$$

В двумерном пространстве их нет — единственная компонента тензора Римана–Кристоффеля (скалярная кривизна) является свободной функцией. В трехмерном пространстве тождеств Бьянки три, и они все содержатся в тождествах Гильберта.

6. Динамика пространства в ТГВ

В теории глобального времени полевыми переменными являются шесть компонент метрического тензора и три компоненты поля абсолютных скоростей, зависящие от четырех переменных, то есть исходно имеется $9 N_4^l$ компонент в каждом l -секторе. Однако эти поля могут изменяться тремя координатными преобразованиями, так что инвариантных комбинаций в каждом l -секторе

$$\begin{aligned} n_l = 9 N_4^l - 3 N_4^{l+1} &= 9 \frac{(l + 1)(l + 2)(l + 3)}{6} - 3 \frac{(l + 2)(l + 3)(l + 4)}{6} = \\ &= \frac{(l + 2)(l + 3)(2l + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Вариация действия по этим девяти полям приводит к девяти дифференциальным уравнениям второго порядка, а наличие трех калибровочных преобразований приводит к трем дифференциальным тождествам среди этих уравнений уже третьего порядка, так что всего в l -м секторе имеется ограничений

$$\begin{aligned} eq_l = 9 N_4^{l-2} - 3 N_4^{l-3} &= \\ = 9 \frac{(l - 1)l(l + 1)}{6} - 3 \frac{(l - 2)(l - 1)l}{6} &= \frac{(l - 1)l(2l + 5)}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому произвол выбора остается для компонент, связанных уравнениями

$$k_l = n_l - eq_l = \frac{(l+2)(l+3)(2l+1)}{2} - \frac{(l-1)l(2l+5)}{2} = 3(l^2 - 2l - 1)$$

компонент в l -м секторе.

Как и в предыдущих примерах, степень по l для компонент, связанных уравнениями, равна двум, что говорит о том, что эти компоненты задаются в трехмерном пространстве, а распространение решений на четыре переменные (развитие во времени) берут на себя уравнения. Число k_l и определяет l -структуру данных Коши в ТГВ.

При $l = 0$ $k_0 = -3$, что говорит об уже обсуждавшемся факте: координатными преобразованиями метрический тензор в одной точке может быть приведен к единичной матрице, и еще остаются локальные вращения, не меняющие метрики.

При $l = 1$ $k_1 = 6$. Однако это не все динамические переменные:

$$k_l - 6N_3^{l-1} = 3(l^2 + 2l - 1) - 6\frac{l(l+1)}{2} = 3(l-1).$$

Это три свободные функции в двумерном пространстве (на границе рассматриваемой области), образованные из вторых производных динамических полей.

l -анализ не указывает, что это за конструкции, он инвариантен к тому или иному представлению полей. Что это за данные, видно из уравнений поля: с помощью преобразования трехмерных координат в какой-то момент времени можно привести метрику, например, к диагональному виду. Для поддержания такого вида метрики и в последующем приходится проводить преобразования координат, зависящие от времени, то есть с неизбежностью возникает поле абсолютных скоростей: в общем случае диагонализовать метрику с течением времени в инерциальной системе (где координаты точек пространства с течением времени не меняются) невозможно. Тогда в качестве динамических переменных выступают три компоненты диагонализированной метрики и их производные по времени — шесть функций в трехмерном пространстве.

Уравнения связей являются дифференциальными уравнениями второго порядка на поле скоростей в пространстве, не содержат производных по времени. Поэтому для нахождения поля скоростей нужно задать их на границе рассматриваемой области. Если трехмерное пространство компактно, замкнуто — граница отсутствует, — эти дополнительные степени свободы исчезают.

7. Динамическая структура ОТО

Динамическая структура ОТО существенно отлична. Полевыми переменными являются 10 компонент метрического тензора четырехмерного пространства-времени, а в качестве калибровочного поля выступают четыре четырехмерных преобразований координат, оставляя инвариантных переменных

$$n_g = 10 N_4^l - 4 N_4^{l+1} = (l-1)(l+2)(l+3).$$

Уравнений Эйнштейна 10, но на них наложены четыре тождества Гильберта, так что в целом связей на динамические компоненты

$$eq_g = 10 N_4^{l-2} - 4 N_4^{l-3} = (l-1)l(l+3).$$

Данные Коши имеют структуру

$$k_g = n_g - eq_g = 2(l-1)(l+3).$$

Это также функции трех переменных (степень по l равна двум). В отличие от ТГВ нетривиальными оказываются компоненты, образованные из вторых производных четырехмерного метрического тензора. Их (при $l = 2$) имеется 10. Однако эти функции не свободны:

$$10 \frac{(l-1)l}{2} - 3(l-1)(l+3) = 3(l-2)(l-1) = 6 \frac{(l-2)(l-1)}{2},$$

то есть

$$k_g = 10 \frac{(l-1)l}{2} - 6 \frac{(l-2)(l-1)}{2}.$$

На эти 10 функций наложены 6 дифференциальных уравнений первого порядка.

В отличие от ТГВ в ОТО данные Коши (в заданный момент времени) подчиняются еще шести дифференциальным уравнениям первого порядка, которые необходимо решить для однозначного описания динамики.

ГЛАВА 15

Физические поля на трехмерной сфере

Многообразия с постоянной мерой кривизны могут быть характеризованы также тем свойством, что фигуры могут перемещаться в них без растяжения и сжатия.

Б. Риман

В разделе 6 были построены моды малых флуктуаций метрики трехмерной сферы как собственные векторы линейного оператора малых возмущений тензора Риччи. Фактически же это собственные моды поля тензора второго ранга с нулевыми шпуром и дивергенцией. Метод построения этих мод — Ли-генерация, изложенный в разделе 6.1, применим к тензорам любой размерности.

1. Операторы Ли-Киллинга на трехмерной сфере

Ли-вариация любого тензорного поля (4.10), определяемая векторным полем V^i , является линейным оператором в пространстве данного тензора. Если имеется еще какое-то векторное поле U^i , то эти два поля порождают некоторое третье векторное поле — их коммутатор (4.13). Так как этим полям (после умножения их на некоторую бесконечно малую константу ϵ) можно придать смысл бесконечно малого преобразования координат

$$\tilde{x}^i = x^i - \epsilon V^i(x),$$

а коммутатору — смысл разности преобразований в разной последовательности преобразований координат полями V^i и U^i , при этом Ли-операторы имеют смысл преобразования поля той или иной тензорной размерности при таких преобразованиях координат, то коммутатор Ли-операторов, определяемых полями V^i и U^i , должен равняться Ли-оператору, определяемому

коммутатором этих полей. Если, например, два векторных поля коммутируют (их коммутатор равен нулю), то и коммутируют операторы Ли, порожденные ими в поле тензоров любой размерности.

Поэтому метод Ли-генерации мод, строящийся на векторных полях Киллинга трехмерной сферы, распространим на любые тензорные поля. Мы сначала рассмотрим скалярное векторное и спинорное поле (поле тензора второго ранга уже описано в разделе 6).

Основным инструментом в методе Ли-генерации являются векторы Киллинга, которых шесть на трехмерной сфере. Они разбиваются на две коммутирующие группы: V и W (см. раздел 6.1). Метрика выбирается в виде (10.19). Любой вектор из группы V коммутирует с любым вектором из группы W , а внутри групп они коммутируют по правилам коммутации векторов Киллинга трехмерной группы вращений:

$$\begin{aligned} [V_+, V_-] &= 2iV_3; & [V_3, V_+] &= iV_+; & [V_3, V_-] &= -iV_-; \\ [W_-, W_+] &= 2iW_3; & [W_3, W_+] &= iW_+; & [W_3, W_-] &= -iW_- \end{aligned} \quad (15.1)$$

1.1. Ли-преобразования тензорных полей

При бесконечно малом преобразовании координат $\tilde{x}^i = x^i - \epsilon \xi^i(x)$ происходит соответствующая Ли-вариация любого тензорного поля. Например, для тензора третьего ранга T_{ij}^m :

$$\delta_\xi T_{ij}^m = -\xi_{,s}^m T_{ij}^s + \xi_{,i}^s T_{sj}^m + \xi_{,j}^s T_{is}^m + \xi^s T_{ij,s}^m \equiv \hat{\xi} T_{ij}^m. \quad (15.2)$$

Это линейный оператор в пространстве тензорных полей T_{ij}^m . При этом для тензорных полей любой структуры коммутатор операторов, определяемых векторными полями ξ и η , равен Ли-оператору их коммутатора. Этим определяется единство приложения метода к полям произвольной тензорной структуры.

Таким образом, обозначив $(\hat{V}_+, \hat{V}_-, \hat{V}_3), (\hat{W}_+, \hat{W}_-, \hat{W}_3)$ операторы Ли-вариаций тензорных полей, определяемые соответствующими полями Киллинга $(V_+, V_-, V_3), (W_+, W_-, W_3)$, получаем механизм преобразования одних мод в другие при сохранении метрики пространства.

Так как компоненты векторов Киллинга V_3 и W_3 есть константы, то Ли-вариация тензорных полей, определяемых ими, есть просто операторы дифференцирования:

$$\hat{V}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w} \right); \quad \hat{W}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial w} \right), \quad (15.3)$$

а так как рассматриваемые моды являются их собственными функциями, то зависимость всех их компонент от координат (x, u, w) на сфере имеет вид $f(x) e^{i(ku + mw)}$.

1.2. Классифицирующие операторы

Как и для тензорных возмущений, введем еще операторы

$$\begin{aligned}\hat{V}_{+-} &= \hat{V}_+ \cdot \hat{V}_-; & \hat{V}_{-+} &= \hat{V}_- \cdot \hat{V}_+; \\ \hat{W}_{+-} &= \hat{W}_+ \cdot \hat{W}_-; & \hat{W}_{-+} &= \hat{W}_- \cdot \hat{W}_+.\end{aligned}\quad (15.4)$$

Как и соответствующий оператор в группе вращений, оператор $\hat{V}_{+-}$, например, коммутирует с оператором $\hat{V}_3$ и, естественно, с любым оператором из группы W . Поэтому операторы $\hat{V}_3$, $\hat{W}_3$, $\hat{V}_{+-}$, $\hat{W}_{+-}$ коммутируют и друг с другом.

Из-за коммутационных соотношений (15.1) имеется линейная зависимость этих операторов с операторами $\hat{V}_3$ и $\hat{W}_3$:

$$\hat{V}_{+-} - \hat{V}_{-+} = 2i\hat{V}_3; \quad \hat{W}_{+-} - \hat{W}_{-+} = 2i\hat{W}_3. \quad (15.5)$$

Поэтому тензорные моды мы будем искать как собственные векторы операторов $\hat{V}_3$, $\hat{W}_3$, $\hat{V}_{+-}$, $\hat{W}_{+-}$:

$$\hat{V}_{+-} f_{k,m} = -\mu_{k,m} f_{k,m}; \quad \hat{W}_{+-} f_{k,m} = -\nu_{k,m} f_{k,m}. \quad (15.6)$$

1.3. Характеристика серии

Оператор $\hat{V}_+$ увеличивает индексы k и m на единицу, а оператор $\hat{V}_-$ соответственно их уменьшает. Если какая-то мода f_{km} является собственной модой оператора $\hat{V}_{-+}$, то и мода $f_{k+1,m+1} = \hat{V}_+ f_{km}$ является также собственной модой этого оператора, но с другим собственным значением:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{+-} f_{k+1,m+1} &= \hat{V}_+ \hat{V}_+ \hat{V}_- f_{k,m} = \hat{V}_+ (\hat{V}_- \hat{V}_+ + 2i\hat{V}_3) f_{k,m} = \\ &= \hat{V}_+ (-\mu_{k,m} + k + m) f_{k,m} = -\mu_{k+1,m+1} f_{k+1,m+1}.\end{aligned}\quad (15.7)$$

Отсюда

$$\mu_{k+1,m+1} = \mu_{k,m} - k - m. \quad (15.8)$$

Далее

$$\begin{aligned}\mu_{k+2,m+2} &= \mu_{k+1,m+1} - k - m - 2 = \mu_{k,m} - 2k - 2m - 2; \\ \mu_{k+3,m+3} &= \mu_{k,m} - 3k - 3m - 6.\end{aligned}$$

Если провести l сдвигов оператором $\hat{V}_+$, то

$$\mu_{k+l+,m+l+1} = \mu_{k,l} - (l+1)(l+k+m). \quad (15.9)$$

Если $\hat{V}_+ f_{k+l+,m+l+1} = 0$ — такая мода называется *граничной*, — то и $\mu_{k+l+,m+l+1} = 0$, то есть число l определяет длину цепочки мод от заданной $f_{k,m}$ вверх, в сторону одновременного увеличения k и m . Например,

$f_{k,m}$	0	$f_{-2,-2}$	$f_{-1,-1}$	$f_{0,0}$	$f_{1,1}$	$f_{2,2}$	0
$\hat{V}_{+-}$		0	4	6	6	4	
$\hat{V}_{-+}$		4	6	6	4	0	

где l — длина цепочек от $f_{0,0}$ вправо и влево, то есть всего на этой линии $2l+1$ ненулевых мод. Цепочку, включающую моду с нулевым собственным значением оператора $\hat{V}_3$, назовем *четной*, и выражение (15.10) определяет через собственное значение оператора $\hat{V}_{+-}$ полное число элементов в направлении действия операторов $\hat{V}_+$ и $\hat{V}_-$.

Число ненулевых элементов в последовательности при сдвиге операторами $\hat{V}_+$ и $\hat{V}_-$ $L_v = 2l+1$, где число l определяет собственное значение оператора $\hat{V}_{+-}$ на моде $\hat{V}_3 f = 0$:

$$\hat{V}_{+-} f_{0,0} = l(l+1). \quad (15.10)$$

Возможны и *нечетные* цепочки, содержащие моды с полуцелыми значениями оператора $\hat{V}_3$, включающие моду $\hat{V}_3 f_{1,0} = \frac{i}{2} f_{1,0}$, например:

$f_{k,m}$	0	$f_{-2,-3}$	$f_{-1,-2}$	$f_{0,-1}$	$f_{1,0}$	$f_{2,1}$	$f_{3,2}$	0
$\hat{V}_{+-}$		0	5	8	9	8	5	
$\hat{V}_{-+}$		5	8	9	8	5	0	

Максимальное по модулю собственное значение оператора $\hat{V}_{+-}$ равно квадрату числа l^2 , а число элементов в этой цепочке определяется четным числом $L_v = 2l$.

Все эти соотношения остаются справедливыми и для операторов $\hat{W}_{+-}$, $\hat{W}_{-+}$.

Таким образом, любая серия определяется двумя целыми числами: L_v и соответствующим числом L_w , а общее число элементов в серии равно $L_v \cdot L_w$.

1.4. Отражения

Рассмотренные в разделе 6.1 отражения не меняют коммутационных соотношений. Самое главное в преобразованиях (10.36) — перестановка $u + w$ и $u - w$.

2. Скалярные поля на 3-мерной сфере

Скалярные поля достаточно подробно разобраны и без использования рассмотренной техники (см., например, [54]). Их рассмотрение полезно для составления единой картины различных полей на трехмерной сфере и для проверки новых методов уже известными. Хотя вследствие отсутствия какой-либо пространственной структуры скалярного поля соответствующую процедуру можно проводить в любой координатной системе на сфере, для единства описания скалярных, векторных и тензорных полей мы будем работать в той же системе координат с метрикой (15.62).

На скалярном поле проще всего проследить методику Ли-генерации мод. Как собственные функции операторов $\hat{V}_3$, $\hat{W}_3$ моды имеют вид

$$h_{km} = f(x) e^{i(ku + mw)}. \quad (15.11)$$

Действие на эту моду оператора, например $\hat{V}_+$ определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \hat{V}_+ h_{km} = & -\frac{i}{2} \left(\sqrt{1-x^2} f'(x) + \left(m \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - k \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) f(x) \right) e^{i((k+1)u + (m+1)w)}. \end{aligned}$$

Действие операторов $\hat{V}_{+-}$, $\hat{V}_{-+}$, V_3 на любую функцию $f(x, u, w)$ связано с действием оператора Лапласа:

$$\hat{V}_{+-} + \hat{V}_3^2 - i \hat{V}_3 = \hat{V}_{-+} + \hat{V}_3^2 + i \hat{V}_3 = \frac{1}{4} \Delta. \quad (15.12)$$

Это же относится и к операторам серии W .

Этот момент очень важен: обычно полагается, что ищутся собственные моды того или иного оператора. Из приведенного соотношения видно, что искомые моды являются собственными модами геометрических операторов самого пространства и оказываются собственными модами, например,

оператора Лапласа лишь в силу того, что он инвариантен относительно движений сферы.

2.1. Четные моды

Теперь нужно найти простейшие — *базовые* — моды. Простейшим является поле, зависящее только от координаты x : $h_{00} = f(x)$. Действие оператора Лапласа определяет дифференциальное уравнение на функцию $f(x)$:

$$-\Delta f(x) - \lambda f = (x^2 - 1)f'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f' - \lambda f = 0. \quad (15.13)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка формально даже с четырьмя регулярными особыми точками: $0, \pm 1, \infty$, однако переходом к переменной $z = x^2$ оно переводится в уравнение класса Фукса. В окрестности нуля его асимптотика

$$f'' + \frac{1}{x} f' = 0$$

приводит к степенному решению $f = x^k$ с соотношением $k^2 = 0$. Поэтому решение может быть представлено полиномом по $z = x^2$ (полиномы Якоби):

$$f_q = 1 - a_1^q x^2 + a_2^q x^4 - \dots + a_q^q x^{2q}.$$

На бесконечности основным является старший член x^{2q} , что определяет константу λ_q :

$$\lambda_q = 4q(q+1) = n(n+2),$$

где q — степень полинома по $z = x^2$, а n — степень по x : $n = 2q$.

Подстановка полинома в уравнение (15.13) приводит к рекуррентному соотношению на коэффициенты:

$$a_k = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k)}{k^2},$$

что позволяет построить базовую функцию любого порядка.

Первые три полинома

$$f_0 = 1; \quad f_1 = 1 - 2x^2; \quad f_3 = 1 - 6x^2 + 6x^4.$$

Вследствие наличия симметрии отражения эти полиномы являются *парными*: при замене $x^2 \rightarrow 1 - x^2$ четные полиномы не меняются, а нечетные меняют знак.

Действие операторов $\hat{V}_{+-}$, $\hat{V}_{-+}$, $\hat{W}_{+-}$, $\hat{W}_{-+}$ на эти функции одинаково:

$$\hat{V}_{-+} f_q = -2q(q+1); \quad \hat{W}_{-+} f_q = -2q(q+1), \quad (15.14)$$

что приводит к числу функций $N = (2q+1)^2 = (n+1)^2$ в серии, порожденной из полинома f_q операторами $\hat{V}_+$, $\hat{V}_-$, $\hat{W}_+$, $\hat{W}_-$.

2.2. Нечетные моды

Нечетные моды порождаются функциями с полуцелым собственным значением операторов $\hat{V}_3$, $\hat{W}_3$. Простейшей такой функцией является $f(x)e^{iu}$. Уравнение на собственные функции оператора Лапласа приводит к слегка отличному дифференциальному уравнению на функцию $f(x)$:

$$-e^{-iu} \Delta (f(x)e^{iu}) - \lambda f(x) = (x^2 - 1)f'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f' + \left(\frac{1}{x^2} - \lambda\right) f = 0. \quad (15.15)$$

Решениями этого дифференциального уравнения являются полиномы нечетных степеней

$$f_{Oq} = x(1 + a_1^q x^2 + a_2^q x^4 + \dots + a_q^q x^{2q}).$$

коэффициенты которых находятся из рекуррентного соотношения

$$a_k^q = -a_{k-1}^q \frac{(q-k+1)(q+k+1)}{k(k+1)}, \quad (15.16)$$

а собственные значения определяются тем же выражением по степени полинома n , что и для четных функций:

$$\lambda_q = (2q+1)^2 - 1 = n(n+2).$$

Первые полиномы:

$$f_{O1} = x;$$

$$f_{O2} = x\left(1 - \frac{3}{2}x^2\right);$$

$$f_{O3} = x\left(1 - 4x^2 + \frac{10}{3}x^4\right).$$

Операторы $\hat{V}_{+-}$, $\hat{V}_{-+}$, $\hat{W}_{+-}$, $\hat{W}_{-+}$ на функция $h = f_{Oq}(x)e^{iu}$ действуют уже по-разному.

3. Векторные поля на 3-мерной сфере

Наиболее удобным инвариантным оператором второго порядка в трехмерном пространстве является оператор

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = -\lambda \mathbf{A}, \quad (15.17)$$

при этом $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Ли-вариация векторного поля A^i по заданному векторному полю V^i :

$$\delta_V A^i = V^j \partial_j A^i - A^j \partial_j V^i. \quad (15.18)$$

Для того чтобы воспользоваться техникой Ли-генерации для векторных полей, нужно явно построить одно решение, а затем, действуя операторами $\hat{V}_+$, $\hat{V}_-$, $\hat{W}_+$, $\hat{W}_-$, из него сгенерировать все моды данной серии.

3.1. Четные моды

Простейшие векторные моды можно взять в следующем виде — отлична от нуля только компонента по одному из полей Киллинга:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (0, f_a(x), 0); \\ \mathbf{b} &= (0, 0, f_b(x)). \end{aligned} \quad (15.19)$$

Подстановка в уравнение (15.17) приводит к дифференциальным уравнениям на функции $f_a(x)$ и $f_b(x)$:

$$(x^2 - 1) f_a'' + \frac{5x^2 - 3}{x} f_a' + (4 - \lambda) f_a = 0. \quad (15.20)$$

$$(x^2 - 1) f_b'' + \frac{5x^2 - 3}{x} f_b' + (4 - \lambda) f_b = 0. \quad (15.21)$$

Точка $x = 0$ для этих уравнений является регулярной особой точкой, и $f = 1$ является решением обоих уравнений с $\lambda = 4$. Бесконечно удаленная точка также является регулярной, поэтому решение можно искать в виде полинома по x^2 степени q (по x четные степени, максимальная x^{2q}), определяющей собственное значение λ : на бесконечности оба уравнения имеют вид

$$x^2 f'' + 5x f' + (4 - \lambda) f = 0$$

и для старшей степени полинома это приводит к алгебраическому уравнению

$$\lambda = 2q(2q - 1) + 10q + 4 = 4(q + 1)^2. \quad (15.22)$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов полиномов

$$f_a = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_q x^{2q};$$

$$f_b = 1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \dots + b_q x^{2q}$$

определяют дифференциальные уравнения (15.20, 15.21):

$$a_k = -a_{k-1} \frac{(q+1)^2 - k^2}{k(k+1)}; \quad (15.23)$$

$$b_k = -b_{k-1} \frac{(q+1)^2 - k^2}{k^2}, \quad (15.24)$$

что позволяет сгенерировать полиномы любого порядка. Первые четыре пары:

q	P_a^q	P_b^q
0	1	1
1	$1 - 3\frac{x^2}{2}$	$1 - 3x^2$
2	$1 - 4x^2 + 10\frac{x^4}{3}$	$1 - 8x^2 + 10x^4$
3	$1 - 15\frac{x^2}{2} + 15x^4 - 35\frac{x^6}{4}$	$1 - 15x^2 + 45x^4 - 35x^6$

Полиномы P_a^q и P_b^q связаны соотношением

$$P_b^q = \frac{1}{2x} (x^2 P_a^q)'. \quad (15.25)$$

3.2. Классифицирующие операторы

Базовые векторы (15.19) не являются собственными векторами операторов $\hat{V}_{+-}$, $\hat{W}_{+-}$. Собственными векторами этих операторов являются векторные поля

$$\mathbf{h}_+^q = (0, (q+1) f_a^q, f_b^q) \quad (15.26)$$

и

$$\mathbf{h}_-^q = (0, -(q+1) f_a^q, f_b^q). \quad (15.27)$$

Действие на них операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$ представлено в таблице

	V_{+-}	V_{-+}	W_{--}	W_{++}	λ
h_{+}^0	2	2	0	0	4
h_{-}^0	0	0	2	2	4
h_{+}^1	6	6	2	2	16
h_{-}^1	2	2	6	6	16
h_{+}^2	12	12	6	6	36
h_{-}^2	6	6	12	12	36
h_{+}^q	$(q+1)(q-2)$	$(q+1)(q-2)$	$q(q+1)$	$q(q-1)$	$4(q+1)^2$
h_{-}^q	$q(q+1)$	$q(q+1)$	$(q+1)(q+2)$	$(q+1)(q+2)$	$4(q+1)^2$

Таким образом, в q -м секторе каждой моды содержится $(2q+1)(2q+3)$ различных мод, порожденных операторами $\hat{V}_{-}$, $\hat{V}_{+}$, $\hat{W}_{+}$, $\hat{W}_{-}$.

Переобозначим $2q = n$ — по высшей степени полинома. Для четных n имеется две поляризации с собственным значением

$$\lambda_n = (n+2)^2 \quad (15.28)$$

и в каждой поляризации содержится $(n+1)(n+3)$ мод, то есть общее число мод с одинаковым λ_n равно

$$N_n = 2(n+1)(n+3). \quad (15.29)$$

3.3. Нечетные моды

Базовая нечетная мода содержит множитель $e^{i\alpha}$ и поэтому должна иметь и компоненту a_x :

$$\mathbf{a} = (f_1(x), f_a(x), f_b(x)) e^{i\alpha}. \quad (15.30)$$

Требование $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ приводит к соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = i f_a + \frac{(x f_1(x))'}{x} = 0,$$

поэтому здесь тоже можно выделить две независимые моды:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (i f_1(x), f_a(x), 0) e^{i\alpha}; \\ f_a &= \frac{(x f_1(x))'}{x}; \\ \mathbf{b} &= (0, 0, f_b(x)) e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (15.31)$$

Чтобы эти векторы были собственными векторами положительно определенного оператора $-\text{rot rot}$, функции $f_1(x)$ и $f_b(x)$ должны удовлетворять соотношениям

$$(x^2 - 1)(f_1'' + \frac{3}{x}f_1') + (1 - \lambda)f_1 = 0, \quad (15.32)$$

$$(x^2 - 1)f_b'' + \frac{5x^2 - 1}{x}f_b' + (\frac{1}{x^2} + 4 - \lambda)f_b = 0. \quad (15.33)$$

Подстановками $f_1 = (1 - x^2)f(x)$; $f_b = xf(x)$ оба уравнения сводятся к одному для функции $f(x)$:

$$(x^2 - 1)f'' + \frac{7x^2 - 3}{x}f' + (9 - \lambda)f = 0. \quad (15.34)$$

Точки $x = 0$ и $x = \infty$ являются регулярными особыми точками этого уравнения, и функция $f(x)$ представляется полиномом:

$$f(x) = 1 + a_1x^2 + \dots + a_kx^{2k} + \dots + a_qx^{2q}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (15.34), находим рекуррентные формулы для коэффициентов:

$$a_k = -a_{k-1} \frac{(q - k + 1)(q - k + 2)}{k(k + 1)}. \quad (15.35)$$

Первые полиномы:

$$f_0 = 1; \quad f_1 = 1 - 2x^2; \quad f_2 = 1 - 5x^2 + 5x^4.$$

Собственные значения:

$$\lambda_q = (2q + 3)^2. \quad (15.36)$$

3.4. Классифицирующие операторы

$$\mathbf{h}_+^q = (0, (q + 1)f_a^q, f_b^q); \quad (15.37)$$

$$\mathbf{h}_-^q = (0, -(q + 1)f_a^q, f_b^q); \quad (15.38)$$

	V_{-+}	V_{+-}	W_{-+}	W_{+-}	λ
h_+^0	0	1	3	4	9
h_-^0	3	4	0	1	9
h_+^1	3	4	8	9	25
h_-^1	8	9	3	4	25
h_+^2	8	9	15	16	49
h_-^2	15	16	8	9	49
h_+^q	$(q+1)^2-1$	$(q+1)^2$	$(q+2)^2-1$	$(q+2)^2$	$(2q+3)^2$
h_-^q	$(q+2)^2-1$	$(q+2)^2$	$(q+1)^2-1$	$(q+1)^2$	$(2q+3)^2$

Таким образом, в q -м секторе каждой моды содержится $(2q+2)(2q+4)$ различных мод, порожденных операторами $\hat{V}_+$, $\hat{V}_-$, $\hat{W}_+$, $\hat{W}_-$.

Переобозначим $2q+1 = n$. Для нечетных n имеется две поляризации с собственным значением

$$\lambda_n = (n+2)^2 \quad (15.39)$$

и в каждой поляризации содержится $(n+1)(n+3)$ мод, то есть общее число мод с одинаковым λ_n равно

$$N_n = 2(n+1)(n+3). \quad (15.40)$$

Эти выражения совпадают с выражениями для четных мод (15.28) и (15.29), то есть являются универсальными вне зависимости от четности числа n .

4. Спинорные поля на 3-мерной сфере

4.1. Ли-вариации спинорных полей

Введем теперь специальные обозначения: будем обозначать Ли-вариации скалярного поля по полям Киллинга малыми буквами:

$$\hat{v}_+ = V_+^i \partial_i;$$

$$\hat{v}_- = V_-^i \partial_i;$$

$$\hat{v}_3 = V_3^i \partial_i.$$

Рассмотрим теперь многокомпонентное поле $y_\alpha(x, u, w)$; $\alpha = 1, \dots, m$.

Представим теперь Ли-вариации этих полей с помощью Ли-операторов скалярных полей, но добавим еще постоянные матрицы A_α^β , перемешивающие компоненты:

$$\begin{aligned} \hat{V}_+ \cdot y_\alpha &= \hat{v}_+ \cdot y_\alpha + A_\alpha^\beta y_\beta; \\ \hat{W}_+ \cdot y_\alpha &= \hat{w}_+ \cdot y_\alpha + B_\alpha^\beta y_\beta. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Чтобы сохранялась коммутационная структура операторов группы O_4 , матрицы должны коммутировать, как и Ли-операторы:

$$[\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_-] = 2i \mathbf{A}_3. \quad (15.42)$$

В случае двухкомпонентного поля одна серия этих матриц (выберем $\mathbf{B}$) должна быть нулевой и нетривиальным оказывается выражение второй серии матриц через матрицы Паули $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \sigma$.

Таким образом, операторы $\hat{W}_i = \hat{w}_i$, а $\hat{V}_i = \hat{v}_i + \frac{1}{2} \sigma_i$ представляют Ли-вариации двухкомпонентного (спинорного) поля.

Переходя опять к $\pm$ операторам

$$\hat{V}_+ = \hat{v}_+ + \mathbf{A}_+; \quad \hat{V}_- = \hat{v}_- + \mathbf{A}_-,$$

где введены матрицы

$$\mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

получаем полный инструментарий для использования метода Ли-генерации спинорных мод.

4.2. Базовые моды

Все моды должны быть собственными модами операторов $\hat{V}_3$ и $\hat{W}_3$. Представив спинор в виде

$$s = \begin{Bmatrix} f_1(x) e^{i(k_1 u + m_1 w)} \\ f_2(x) e^{i(k_2 u + m_2 w)} \end{Bmatrix}, \quad (15.43)$$

подействуем на него операторами $\hat{V}_3$ и $\hat{W}_3$ и подберем коэффициенты k_1, m_1, k_2, m_2 так, чтобы $\hat{V}_3 \cdot s = i k s$ и $\hat{W}_3 \cdot s = i m s$.

Из этих соотношений эти коэффициенты связываются с собственными значениями k и m :

$$m = \frac{k_1 - m_1}{2} = \frac{k_2 - m_2}{2}; \quad k = \frac{k_1 + m_1 + 1}{2} = \frac{k_2 + m_2 - 1}{2},$$

откуда, наоборот, можно выразить коэффициенты через эти собственные значения:

$$k_1 = k + m - \frac{1}{2}; \quad m_1 = k - m - \frac{1}{2}; \quad k_2 = k + m + \frac{1}{2}; \quad m_2 = k - m + \frac{1}{2}.$$

Следует отметить важную особенность: $k + m$ всегда полуцелое число. Поэтому простейшими базовыми модами являются моды с $(k = 0, m = \frac{1}{2})$ и с $(k = \frac{1}{2}, m = 0)$. Назовем моды с $k = 0$ и генерируемые ими серии s_a , а серии, генерируемые модой с $m = 0$, модами типа s_b .

Базовый спинор типа s_a имеет вид

$$s_a = (f_1(x) e^{-i w}, f_2(x) e^{i u}). \quad (15.44)$$

Оператор $\hat{W}_{-+}$, не содержащий матриц, не перепутывает компоненты, и уравнение на собственные векторы

$$\hat{W}_{-+} s + \lambda s = 0 \quad (15.45)$$

приводит к двум независимым дифференциальным уравнениям на функции $f_1(x)$, $f_2(x)$.

Найдем сначала спинор, являющийся собственным вектором оператора $\hat{W}_{-+}$ с нулевым собственным значением, что приводит к дифференциальным уравнениям на функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) f_1'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f_1' - \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} f_1 &= 0; \\ (x^2 - 1) f_2'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f_2' - \frac{3x^2 - 1}{x^2} f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Регулярные при $x = 0$ и $x = \pm 1$ решения этих уравнений: $f_1 = \sqrt{1 - x^2}$; $f_2 = x$. Представив теперь спинор в виде

$$s_a = (\sqrt{1 - x^2} f_1(x) e^{-i w}, x f_2(x) e^{i u}), \quad (15.46)$$

найдем функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из уравнения на собственные значения (15.45), приводящего к дифференциальным уравнениям на эти функции:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) f_1'' + \frac{5x^2 - 1}{x} f_1' - \lambda f_1 &= 0; \\ (x^2 - 1) f_2'' + \frac{5x^2 - 3}{x} f_2' - \lambda f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений, регулярные при $x = 0$ и $x = \pm 1$ представимы в виде четных по x полиномов:

$$f_1 \equiv P a^q = 1 + a_1^q x^2 + \dots + a_k^q x^{2k} + a_q^q x^{2q},$$

при этом коэффициенты a_k для функции f_1 находятся из рекуррентного соотношения

$$a_k^q = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k+1)}{k^2}.$$

Первые полиномы:

$$\begin{aligned} Pa_0 &= 1, \\ Pa_2 &= 1 - 3x^2, \\ Pa_3 &= 1 - 8x^2 + 10x^4, \\ Pa_4 &= 1 - 15x^2 + 45x^4 - 35x^6. \end{aligned}$$

Для функции f_2 рекуррентное соотношение слегка отличается:

$$a_k^q = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k+1)}{k(k+1)}.$$

Первые полиномы:

$$\begin{aligned} Qa_0 &= 1, \\ Qa_2 &= 1 - \frac{3}{2}x^2, \\ Qa_3 &= 1 - 4x^2 + \frac{10}{3}x^4, \\ Qa_4 &= 1 - \frac{15}{2}x^2 + 15x^4 - \frac{35}{4}x^6. \end{aligned}$$

Собственные значения оператора $\hat{W}_{-+}$ для обеих серий одинаковы при одинаковом q :

$$\lambda_q = q(q+2).$$

Они определяют длину порождаемых ими цепочек при действии операторами $\hat{W}_+$, $\hat{W}_-$:

$$L_q = 2(q+1).$$

Однако в общем случае спинор

$$s = s_a = (\sqrt{1-x^2} Pa_q(x) e^{-i w}, ax Qa_q(x) e^{i u})$$

с произвольным множителем a во второй компоненте не является собственным вектором оператора $\hat{V}_{+-}$. Уравнение

$$\hat{V}_{+-} \cdot s + \mu s = 0$$

приводит к системе алгебраических уравнений

$$(q+1)^2 + a = \mu \cdot 1; \quad (q+1)^2 + (q+1)^2 a = \mu a,$$

из которых определяется $a = \pm(q+1)$ и соответственно $\mu_+ = (q+1)(q+2)$, а $\mu_- = q(q+1)$, порождая соответствующие цепочки вдоль направления V длинами $2q+3$ и $2q+1$.

Теперь рассмотрим базовый спинор типа s_b , имеющий вид

$$s_b = (f_1(x), f_2(x) e^{i(u+w)}). \quad (15.47)$$

Как и для спинора типа s_a , находим нулевой собственный вектор оператора $\hat{W}_{-+}$:

$$s_{b0} = (a, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{i(u+w)}),$$

а затем представляем общий базовый вид

$$s_b = (a f_1(x), f_2(x) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{i(u+w)}). \quad (15.48)$$

Чтобы он был собственным вектором оператора $\hat{W}_{-+}$ с собственным значением $-\lambda$, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$(x^2 - 1) f_1'' + \frac{3x^2 - 1}{x} f_1' - 4\lambda f_1 = 0, \quad (x^2 - 1) (f_2'' + \frac{3}{x} f_2') - 4\lambda f_2 = 0.$$

Это также полиномы степени q :

$$f_1 = P b_q = 1 + a_1^q x^2 + \dots + a_k^q x^{2k} + \dots + a_q^q x^{2q},$$

при этом коэффициенты a_k находятся из рекуррентного соотношения

$$a_k^q = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k)}{k^2}.$$

Для второй функции рекуррентное соотношение также слегка отличается:

$$a_k^q = -a_{k-1} \frac{(q-k+1)(q+k)}{k(k+1)}.$$

Собственные значения ν оператора $\hat{W}_{-+}$ также определяются только степенями полинома q : $\nu_q = q(q+1)$, определяя в этом направлении цепочку длиной $2q+1$ мод.

Чтобы спинор (15.48) был собственным вектором оператора $\hat{V}_{+-}$ с собственным значением $-\mu$, константа a должна быть либо $1/n$ (в этом случае $\mu = (q+1)^2$), либо $a = -1/(q+1)$, определяя $\mu = q^2$.

Таким образом, в серии s_b также имеется две поляризации с размерами $2(q+1)(2q+1)$ и $2q(2q+1)$.

4.3. Оператор Паули

Квадратичный оператор $\hat{V}^2 = \hat{V}_+ \hat{V}_- + V_3^2$ коммутирует с любым оператором $\hat{V}_i$ и $\hat{W}_i$. Так как $\hat{V}_i = \hat{v}_i + \mathbf{A}_i$, при этом $\mathbf{A}_i^2 \sim 1$, то оператор

$$\hat{p} = \frac{1}{i} (A_p \hat{v}_- + A_m \hat{v}_+ - 2 A_3 \hat{v}_3) \quad (15.49)$$

также оказывается инвариантным.

Он является линейной комбинацией операторов дифференцирования по координатам, выражающейся через матрицы

$$\mathbf{b}^x = \begin{pmatrix} 0 & i e^{-i(u+w)} \\ -i e^{i(u+w)} & 0 \end{pmatrix}; \quad (15.50)$$

$$\mathbf{b}^u = \begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} e^{-i(u+w)} \\ \sqrt{1-x^2} e^{i(u+w)} & -x \end{pmatrix}; \quad (15.51)$$

$$\mathbf{b}^w = \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2} & -x e^{-i(u+w)} \\ -x e^{i(u+w)} & -\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}, \quad (15.52)$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям матриц Паули

$$\mathbf{b}^u \cdot \mathbf{b}^w = i \mathbf{b}^x; \quad \mathbf{b}^w \cdot \mathbf{b}^x = i \mathbf{b}^u; \quad \mathbf{b}^x \cdot \mathbf{b}^u = i \mathbf{b}^w. \quad (15.53)$$

Квадрат каждой такой матрицы равен единичной. Через эти матрицы оператор Паули (15.49) выражается так:

$$\hat{p} = \frac{1}{i} (\sqrt{1-x^2} \mathbf{b}^x \partial_x + \frac{1}{x} \mathbf{b}^u \partial_u + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbf{b}^w \partial_w). \quad (15.54)$$

Вследствие того что собственные значения оператора Лапласа на трехмерной сфере $\lambda_n = (n+1)^2 - 1$, определяющиеся целым числом n , не

являются квадратом целого числа, на сфере не может быть оператора, квадрат которого равен оператору Лапласа. Однако оператор Паули все-таки приводит к оператору Лапласа через соотношение

$$\hat{p}^2 + 2\hat{p} = -\Delta; \quad (\hat{p} + 1)^2 = 1 - \Delta. \quad (15.55)$$

Оператор $\hat{p}$ вследствие этого коммутирует со скалярным оператором Лапласа. Собственные значения оператора $\hat{p} + 1$ равны $\pm(n + 1)$.

5. Поля высших спинов

Применение метода Ли-генерации мод для описания мод скалярного, векторного, спинорного полей показало, что моды этих полей группируются в серии, характеризуемые целым числом l , содержащие по две поляризации, переводимые одна в другую оператором отражения. В каждой поляризации моды различаются двумя целыми числами k и m и число мод в поляризации однозначно связана со спином s , принимающим целые или полуцелые значения

$$N = (l + 1)(l + 1 + 2s) \quad (15.56)$$

компонент. Преобразование отражения переводит моды одной поляризации в моды второй. Серии скалярного поля при отражениях переходят в себя.

Однако метод является дедуктивно-индуктивным: общие соотношения для используемых операторов выводятся из методов дифференциальной геометрии, однако конкретные соотношения, такие как явная геометрическая структура мод, собственные значения используемых операторов, находятся прямым вычислением (использовался пакет "Математика"). По результатам рассмотрения полей простейшей структуры составлена следующая таблица размеров поляризаций и серий:

Поле	s	N в поляризации	N в серии
Скалярное	0	$(l + 1)^2$	$(l + 1)^2$
Спинорное	$\frac{1}{2}$	$(l + 1)(l + 2)$	$2(l + 1)(l + 2)$
Векторное	1	$(l + 1)(l + 3)$	$2(l + 1)(l + 3)$
Тензорное	2	$(l + 1)(l + 5)$	$2(l + 1)(l + 5)$

Она и приводит к *предполагаемому* общему соотношению $N = (l + 1) \times (l + 1 + 2s)$ для числа мод в поляризациях полей с различным спином.

При этом возникают два общих вопроса:

- Какова общая структура неприводимых полей с целым спином?

- Какова общая структура неприводимых полей с полуцелым спином?

В теории полей (классических и квантовых) спин, как правило, связывается с генераторами групп вращения и группы Лоренца (см., например, [87; 88]).

6. Тензоры высшего ранга

С помощью метрического тензора все индексы тензорного поля можно опустить. В трехмерном пространстве абсолютно антисимметричный тензор $\epsilon^{[ij]k}$, свернутый по двум индексам с тензором k -го ранга, приводит к тензору $k - 1$ -го ранга, если по сворачиваемой паре индексов исходный тензор не симметричен. Поэтому *неприводимые* тензорные поля в трехмерном пространстве и, в частности, на трехмерной сфере, симметричны по всем индексам (см. [87]).

Симметричный по всем индексам тензор k -го ранга в трехмерном пространстве имеет $(k + 1)(k + 2)/2$ независимых компонент. Свертка с обратным метрическим тензором приводит к тензору $k - 2$ -го ранга, имеющему $k(k - 1)/2$ компонент, которые при условии неприводимости исходного тензора должны обращаться в нуль, что оставляет

$$\frac{(k + 1)(k + 2)}{2} - \frac{k(k - 1)}{2} = 2k + 1 \quad (15.57)$$

независимых компонент симметричного тензора k -го ранга.

Это выражение показывает, что такое поле обладает спином k .

Понижение ранга тензора также можно произвести с помощью операции дивергенции

$$d^{i_1, \dots, i_{k-1}} = \nabla_i h^{i_1, \dots, i_{k-1}, i} = 0, \quad (15.58)$$

приводящей к тензору $k - 1$ -го ранга, имеющему $2k - 1$ компонент. Но так как его компоненты связаны с первыми производными исходного тензора, а операция дифференцирования понижает степень l на единицу, число независимых компонент *неприводимого* тензора в трехмерном пространстве определяется уже l -анализом соотношения

$$Q_n^l = (2k + 1) N_3^l - (2k - 1) N_3^{l-1} = \\ (2k + 1) \frac{(l + 1)(l + 2)}{2} - (2k - 1) \frac{l(l + 1)}{2} = (l + 1)(l + 2k + 1). \quad (15.59)$$

Это выражение совпадает с размером l -й поляризации по формуле (15.56) при подстановке $k = s$.

6.1. Тензор-спинорные поля

Для описания неприводимых тензорных спиноров нужно учесть дополнительные возможности воздействия на поле комбинациями матриц Паули.

6.2. Метрический спин-вектор

В [75] при выводе оператора Паули были введены подвижные матрицы Паули

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^x &= \begin{pmatrix} 0 & i e^{-i(u+w)} \\ -i e^{i(u+w)} & 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{b}^u &= \begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} e^{-i(u+w)} \\ \sqrt{1-x^2} e^{i(u+w)} & -x \end{pmatrix}; \\ \mathbf{b}^w &= \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2} & -x e^{-i(u+w)} \\ -x e^{i(u+w)} & -\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

с алгебраическими соотношениями

$$\mathbf{b}^u \cdot \mathbf{b}^w = i \mathbf{b}^x; \quad \mathbf{b}^w \cdot \mathbf{b}^x = i \mathbf{b}^u; \quad \mathbf{b}^x \cdot \mathbf{b}^u = i \mathbf{b}^w.$$

Квадрат каждой матрицы равен единичной матрице.

Введя матрицы ковариантного дифференцирования спиноров

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= -\frac{i}{2\sqrt{1-x^2}} \mathbf{b}^x; \\ \Gamma_u &= \Gamma_w = -\frac{i}{2} (x \mathbf{b}^u + \sqrt{1-x^2} \mathbf{b}^w) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

можно определить ковариантную производную так, чтобы для всех подвижных матриц Паули она равнялась нулю:

$$\nabla_i \mathbf{b}_j = \partial_i \mathbf{b}_j + [\Gamma_i, \mathbf{b}_j] = 0.$$

При этом ковариантная производная от простого двухкомпонентного спинора u определяется как

$$\nabla_i u = \partial_i u + \Gamma_i \cdot u. \quad (15.60)$$

Подвижные матрицы Паули образуют ковариантно постоянный ковариантный спин-вектор — метрический спин-вектор

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbf{b}^x + x \mathbf{b}^u + \sqrt{1-x^2} \mathbf{b}^w \quad (15.61)$$

с обобщенной ковариантной производной, равной нулю:

$$\nabla_j \mathbf{q}_i = \partial_j \mathbf{q}_i - \Gamma_{ji}^k \mathbf{q}_k + [\Gamma_j, \mathbf{q}_i] = 0.$$

Метрический спин-вектор определяет метрический тензор

$$\frac{1}{2} \text{Spur}(q_i q_j) = \gamma_{ij}. \quad (15.62)$$

Поднятие индексов определяет ковариантно постоянный контравариантный спин-вектор

$$\mathbf{q}^i = \sqrt{1-x^2} \mathbf{b}^x + \frac{1}{x} \mathbf{b}^u + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbf{b}^w. \quad (15.63)$$

Его ковариантная производная также равна нулю:

$$\nabla_j \mathbf{q}^i = \partial_j \mathbf{q}^i + \Gamma_{jk}^i \mathbf{q}^k + [\Gamma_j, \mathbf{q}^i] = 0.$$

Равны нулю и его Ли-вариации тензорами Киллинга с учетом добавок постоянных матриц.

6.3. Неприводимые тензор-спинорные поля

Общее тензор-спинорное поле представимо двумя экземплярами симметричного тензора k -го ранга. Свертка с метрическим спин-вектором приводит к тензор-спинору ранга $k-1$, так что условие неприводимости от такой свертки в трехмерном пространстве оставляет

$$2 \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \right) = 2k+2 = 2s+1 \quad (15.64)$$

независимых компонент, что позволяет определить спин этого поля как $s = k + 1/2$ или, наоборот, $k = s - 1/2$.

Условие нулевой дивергенции

$$\nabla_i h^{i^1, \dots, i^{k-1}, i} = 0 \quad (15.65)$$

опять требует использования l -анализа:

$$\begin{aligned} Q_k^l &= 2(k+1) \frac{(l+1)(l+2)}{2} - 2k \frac{l(l+1)}{2} = \\ &= (l+1)(l+2k+2) = (l+1)(l+2s+1), \end{aligned} \quad (15.66)$$

что также приводит к выражению (15.56).

6.4. Определяющее уравнение

Для скалярных сферических функций их число в n -мерном пространстве определялось через дифференциальное уравнение второго порядка. Это было уравнение Лапласа в $n + 1$ -мерном пространстве. Однако l -анализ безразличен к явному виду уравнения, для него важен лишь порядок дифференциального уравнения и размерность пространства. Поэтому, рассчитывая число функций под определяющим уравнением, можно подразумевать уравнение Д'Аламбера для скалярных функций на сфере. Время добавляется как $n + 1$ -я координата, а соотношение

$$N_{n+1}^l - N_{n+1}^{l-2} = N_n^l + N_n^{l-1}$$

определяет данные Коши для этой задачи: решение в $n + 1$ -мерном пространстве полностью определено, если в n -мерном пространстве (при $t = \text{const}$) задано начальное распределение функции (N_n^l) и ее производной по времени (N_n^{l-1}). В двумерном пространстве $N_2^l = l + 1$ и $2l + 1 = N_2^l + N_2^{l-1}$.

В трехмерном пространстве

$$N_3^l + N_3^{l-1} = \frac{(l+1)(l+2)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} = (l+1)^2.$$

Скалярные функции имеют одну поляризацию, к которой и принадлежат обе составляющие — одна как функция, другая как производная.

Для полей с ненулевым спином имеется две поляризации, и определяющее уравнение должно включать обе поляризации. Например, уравнение Максвелла является не дифференциальным уравнением второго порядка, а системой дифференциальных уравнений первого порядка, что с точки зрения l -анализа не эквивалентно. Для решения уравнения Максвелла нужно решить систему для двух векторных полей с нулевой дивергенцией

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial ct} = 0; \quad \text{rot } \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct} = 0. \quad (15.67)$$

При этом вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ принадлежат различным поляризациям. Дивергенции двух векторных уравнений (15.67) также равны нулю.

При подключении времени (вместо построения сферы в четырехмерном пространстве) все компоненты векторов зависят от четырех переменных. С точки зрения l -анализа имеется два трехкомпонентных вектора в четырехмерном пространстве с двумя скалярными связями и следующей из этого l -структурой

$$n_q = 6 \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6} - 2 \frac{l(l+1)(l+2)}{6} = \frac{(l+1)(l+2)(2l+9)}{3},$$

подчиняющихся уравнениям (за вычетом двух дифференциальных первого порядка тождеств) с l -структурой

$$n_e = 6 \frac{l(l+1)(l+2)}{6} - 2 \frac{(l-1)l(l+1)}{6} = \frac{l(l+1)(2l+7)}{3}.$$

Разность структур компонент и уравнений определяет l -структуру решений:

$$n_M = n_q - n_e = 2(l+1)(l+3) \quad (15.68)$$

в точном совпадении с формулой (15.56), удвоенной из-за двух поляризаций.

Для любого поля со спином s , не равным нулю, полагая число компонент $2(2s+1)$ и учитывая, что соотношения дивергенции приводят к тензору со спином, на единицу меньшим, определяя l -структуру компонент

$$\begin{aligned} n_q &= (2s+1) \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6} - (2s-1) \frac{l(l+1)(l+2)}{6} = \\ &= \frac{(l+1)(l+2)(2l+6s+3)}{3}, \end{aligned}$$

а l -структура определяющего дифференциального уравнения первого порядка на эти компоненты уменьшена на единицу

$$n_e = \frac{l(l+1)(2l+6s+1)}{3},$$

находим l -структуру решений:

$$n_s = n_q - n_e = (l+1)(l+1+2s) \quad (15.69)$$

в полном соответствии с формулой (15.56) для двух поляризаций.

Таким образом, находимые методом Ли-генерации моды обеспечивают полноту разложения любого (неприводимого) тензорного или тензор-спинорного поля. При этом и структура серий мод и определяющее уравнение для полей с ненулевым спином существенно отличаются от таковых для скалярного поля.

6.5. Оператор Казимира

Для нахождения базовой моды в тензорных полях используется оператор Казимира — квадратичный отрицательно определенный оператор

$$\hat{K} = \hat{V}_1^2 + \hat{V}_2^2 + \hat{V}_3^2 + \hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2 + \hat{W}_3^2.$$

Если поле не зависит от углов u и w (нулевая базовая мода), то действие на него операторов $\hat{V}_3$ и $\hat{W}_3$ дает нуль и

$$\hat{K} = \hat{V}_+ \hat{V}_- + \hat{W}_+ \hat{W}_- = \hat{V}_- \hat{V}_+ + \hat{W}_- \hat{W}_+ = \hat{V}_{+-} + \hat{W}_{+-} = \hat{V}_{-+} + \hat{W}_{-+}. \quad (15.70)$$

Действие операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$ на нулевую моду

$$\hat{V}_{+-} \cdot \mathbf{h}_{,00}^n = \frac{L_V(L_V + 2)}{4}; \quad \hat{W}_{+-} \cdot \mathbf{h}_{,00}^n = \frac{L_W(L_W + 2)}{4}, \quad (15.71)$$

при этом для поля со спином s длины L_V и L_W связаны соотношением

$$L_W = L_V \pm 2s, \quad (15.72)$$

так что собственное значение оператора Казимира λ_q^s при действии на нулевую моду $\mathbf{h}_{(s)00}^n$ поля со спином s

$$\hat{K} \mathbf{h}_{(s)00}^n = \lambda_q^s \mathbf{h}_{(s)00}^n$$

определяется спином s и целым числом q :

$$\lambda_q^s = q(q+1) + (q+s)(q+s+1) = (2q(q+1) + s^2 + 2qs + s). \quad (15.73)$$

Его значения для низших s и q представлены в таблице:

s/q	1	2	3	4	5
0	0	4	12	24	40
1	2	8	18	32	50
2	6	14	26	42	62
3	12	22	36	54	76
4	20	32	48	68	92

7. Поле тензора третьего ранга

Одним из способов проверки выражения (15.56) является прогноз на еще не изученное поле с последующей проверкой. Ближайшим к рассмотренным уже полям с целочисленным спином является поле тензора третьего ранга (спин 3).

Ли-оператор такого поля, генерируемый векторным полем V^s , определяется как

$$\hat{V} \cdot h_{ijk} = V^s h_{ijk,s} + V_{,i}^s h_{sjk} + V_{,j}^s h_{isk} + V_{,k}^s h_{ijs}. \quad (15.74)$$

Основная задача в построении полей методом Ли-генерации состоит в разыскании базового поля. При целом спине — это поля, не зависящие от углов u и w , то есть имеющие вид $h_{ijk} = h(x)_{ijk}$.

Для этого поля условия бесщупровости и нулевой дивергенции

$$\gamma^{jk} h_{ijk} = 0; \quad \gamma^{jk} \nabla_j h_{kil} = 0 \quad (15.75)$$

связывают компоненты $h_{311} = f(x)$, $h_{322} = f_2(x)$ и $h_{333} = f_3(x)$

$$\begin{aligned} f_2 &= x^2 (x^2 - 1) (x (x^2 - 1) f'(x) + (5x^2 - 1) f(x)); \\ f_3 &= (x^2 - 1)^2 (x (x^2 - 1) f'(x) + (5x^2 - 2) f(x)). \end{aligned} \quad (15.76)$$

Воздействуя на тензор, у которого все, кроме этих компонент, равны нулю (назовем такой тензор тензором типа “а”: $h = a$) оператором Казимира (15.70), получаем уравнение на собственные значения функции $f(x)$:

$$\frac{x^2 - 1}{2} f'' + \frac{9x^2 - 3}{2x} f' + 12f = \lambda f. \quad (15.77)$$

При $x \rightarrow \infty$ подстановка $f = x^{2q}$ определяет собственные значения:

$$q(2q - 1) + 9q + 12 = \lambda_q = 2q^2 + 8q + 12. \quad (15.78)$$

Это выражение в точности совпадает с общим выражением для собственных значений оператора Казимира (15.73) при $s = 3$. Таким образом, базовые моды образуются четными полиномами по x степени $2q$ и, действительно, образуют серии мод поля со спином 3.

Вторая серия образована компонентами $h_{211} = f_1(x)$, $h_{222} = f_2(x)$ и $h_{233} = f_3(x)$, выражающимися через некоторую функцию $f(x)$:

$$f_1 = \frac{f(x)}{x^2(1-x^2)}; \quad f_2 = f(x) - x f'(x); \quad f_3 = f(x) + \left(\frac{1}{x} - x\right) f'(x). \quad (15.79)$$

Воздействуя на тензор, у которого все, кроме этих компонент, равны нулю (тензор типа “b”: $h = b$) оператором Казимира (15.70), получаем другое уравнение на собственные значения функции $f(x)$:

$$\frac{x^2 - 1}{2} f'' + \frac{x^2 + 3}{2x} f' + 4f = \lambda f. \quad (15.80)$$

При $x \rightarrow \infty$ подстановка $f = x^{2q+4}$ определяет собственные значения:

$$\lambda_q = 2q^2 + 8q + 12.$$

Это выражение совпадает как с (15.78), так и с общим выражением для собственных значений оператора Казимира (15.73) при $k = 3$. Таким образом, базовые моды образуются двумя сериями четных полиномов по x степени $2(q+2)$ и из них генерируются серии мод поля со спином 3.

Собственными векторами операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$ являются линейные комбинации тензорных полей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с одинаковыми λ :

$$\mathbf{h}^q = \mathbf{a}^q + k \mathbf{b}^{q+2}.$$

Уравнения на собственные векторы двух коммутирующих операторов

$$\hat{V}_{+-} \cdot \mathbf{h}^q = -\mu \mathbf{h}^q;$$

$$\hat{W}_{+-} \cdot \mathbf{h}^q = -\nu \mathbf{h}^q$$

приводят к двумерному матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} q^2 + 4q + 6 & 6 \\ 3/2 q^2 + 6q + 6 & q^2 + 4q + 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Отсюда $k_{\pm} = \pm(1 + q/2)$, собственные значения $\lambda_{-} = n(n+1)$, $\lambda_{+} = (n+3)(n+4)$. У операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$ собственные значения $q(q+1)$ и $(q+3)(q+4)$ либо $(q+3)(q+4)$ и $q(q+1)$ соответственно.

7.1. Тензоры высшего ранга

Таким образом, поле симметричного бесшпурового тензора третьего ранга с нулевой дивергенцией полностью укладывается в общую систему полей на трехмерной сфере как поле со спином 3.

Аналогично для базовых мод тензоров более высокого ранга условия бесшпуровости и нулевой дивергенции приводят к двум цепочкам связи компонент (слегка различным для тензоров четного и нечетного ранга):

$$h_{...311} \rightarrow (h_{...333}, h_{...322}) \rightarrow \dots,$$

где функции справа от стрелочки выражаются через функцию слева и ее производную, так что компоненты базового тензора $(2l+1)$ -го ранга определяются некоторой функцией $f(x)$ и ее производными до l -го порядка. Таких нетривиальных цепочек всегда две, что и приводит к двум поляризациям.

8. Вектор-спинорное поле

Поле со спином $3/2$ как вектор со спинорными компонентами достаточно подробно рассматривалось в работах по квантовой теории поля (см. [89; 90]). В частности, если имеется некоторый векторный спинор h^i , то условием его неприводимости является равенство нулю двухкомпонентного скаляра свертки

$$u = q_i h^i = 0. \quad (15.81)$$

Это условие, а также условие нулевой дивергенции

$$\nabla_i q^i = 0 \quad (15.82)$$

определяют *неприводимый* векторный спинор.

8.1. Базовые моды

Как всегда, отправной точкой в построении полной системы мод является построение простейшей, базовой моды. Прежде всего она должна быть собственным вектором операторов $\hat{V}_3$, $\hat{W}_3$. Выбор

$$h_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-x^2}{-x\sqrt{1-x^2}} e^{i(u+w)} & \frac{x^2}{x\sqrt{1-x^2}} e^{i(u+w)} \end{pmatrix} f(x) \quad (15.83)$$

приводит к вектор-спинору с нулевыми дивергенцией и сверткой с метрическим спин-вектором.

Этот вектор-спинор является собственным вектором оператора

$$\begin{aligned} & (2\hat{V}_{+-} + \hat{W}_{+-}) \cdot h = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-x^2}{-x\sqrt{1-x^2}} e^{i(u+w)} & \frac{x^2}{x\sqrt{1-x^2}} e^{i(u+w)} \end{pmatrix} \frac{3}{4} \hat{D} \cdot f(x), \end{aligned} \quad (15.84)$$

где $\hat{D} \cdot f$ — дифференциальный оператор

$$\hat{D} \cdot f = (x^2 - 1) f'' + \frac{7x^2 - 3}{x} f' + \frac{32}{3(x^2 - 1)}. \quad (15.85)$$

Собственные функции этого дифференциального оператора

$$\frac{3}{4} \hat{D} \cdot f = \lambda f$$

— полиномы степени q с собственными значениями

$$\lambda = 3q^2 + 9q + 8 \quad (15.86)$$

и рекуррентным соотношением для коэффициентов

$$a_k = -\frac{(q-k+1)(q+k+2)}{k(k+1)} a_{k-1}. \quad (15.87)$$

Первые полиномы

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & \lambda &= 8, \\ P_1 &= 1 - 2x^2, & \lambda &= 20, \\ P_2 &= 1 - 5x^2 + 5x^4, & \lambda &= 38, \\ P_3 &= 1 - 9x^2 + 21x^4 - 14x^6, & \lambda &= 62. \end{aligned}$$

Однако вектор-спинор (15.83) не является собственным вектором операторов $\hat{V}_{+-}$, $\hat{W}_{+-}$ по отдельности. Поэтому нужно найти второй вектор-спинор с тем же собственным значением. Его можно построить, например, так:

$$\mathbf{h}_a^q = \hat{W}_{+-} \mathbf{h}_b^q + (q+2)(q+3) \mathbf{h}_b^{nq}. \quad (15.88)$$

Комбинация $\mathbf{h}_q^n = \mathbf{h}_a^q - (2q+3) \mathbf{h}_b^q$ является собственным вектором операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$ и также первоначального оператора $2\hat{V}_{+-} + \hat{W}_{+-}$ с собственными значениями

$$\begin{aligned} \hat{W}_{+-} \cdot \mathbf{h}_q^n &= (q+2)(q+3) \mathbf{h}_q^n; & \hat{V}_{+-} \cdot \mathbf{h}_q^n &= (q+1)^2 \mathbf{h}_q^n; \\ (2\hat{V}_{+-} + \hat{W}_{+-}) \cdot \mathbf{h}_q^n &= (2(q+1)^2 + (q+2)(q+3)) \mathbf{h}_q^n = (3q^2 + 9q + 8) \mathbf{h}_q^n. \end{aligned} \quad (15.89)$$

Последнее собственное значение, естественно, совпадает с (15.86).

Собственные значения операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$ определяют длины цепочек в направлениях V и W :

$$L_V = q+1; \quad L_W = q+4, \quad (15.90)$$

определяя количество мод в серии как

$$N_q = (L_V + 1)(L_W + 1) = (q+2)(q+5) = (l+1)(l+1+3), \quad (15.91)$$

если обозначить $q+1 = l$, снова подтверждая выражение (15.56).

Полученные моды являются собственным вектором ротора, определяемого независимо для каждой спинорной компоненты:

$$\text{rot } \mathbf{h}_{,q}^n = 2(q+2) \mathbf{h}_{,q}^n. \quad (15.92)$$

Для второй поляризации собственные значения операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$ меняются местами.

Таким образом, прямое построение мод вектор-спинорного поля подтверждает полученные ранее общие соотношения.

9. Заключение

Полученные неприводимые моды различных полей на трехмерной сфере могут быть использованы для построения, например, квантовой электродинамики не в пространстве Минковского, а с трехмерной сферой некоторого фиксированного радиуса r в роли пространственной базы. Переход к пределу $r \rightarrow \infty$ переведет пространство и время в пространство Минковского, что поможет лучше понять свойства обычной квантовой электродинамики, например, релятивистскую инвариантность.

Но для этого необходимо разработать математическую технику разложения *произведений* неприводимых мод на неприводимые.

ГЛАВА 16

Кросс-геометрия

Имеется огромное различие между тем, рассматривать ли теорию как окончательную или как несовершенную ступень, через которую она проходит в процессе своего развития.

Л. Розенфельд

1. Введение

Общая теория относительности рассматривает пространство и время как единое четырехмерное многообразие с римановой структурой. Никакой дополнительной структуры, выделяющей, например, время, в ОТО нет. Теория глобального времени в этом четырехмерном римановом многообразии выделяет время и пространство. Это требует дополнительных математических средств, главным из которых явилась *инвариантная производная* по времени. Что это за конструкция? Является ли она искусственной натяжкой, созданной *ad hoc*, чтобы решить временно возникшие затруднения, или же является частным случаем более общей математической конструкции?

Современная математика работает с понятием *расслоенные пространства*.

Если в современной теории расслоенных пространств (см., напр., [91]) основное внимание уделяется топологическим свойствам, то в кросс-геометрии основным объектом изучения являются локальные поля, связанные с расслоениями: метрика, ее производные в слое, кросс-поля и кросс-кривизна.

Геометрическое расслоение определяется двумя пространствами:

- 1) m -мерное риманово пространство слоя Y , параметризуемое m координатами y^α , $\alpha = 1, \dots, m$. Допустимые координатные преобразова-

ния в слое

$$\tilde{y}^\alpha = F^\alpha(y^1 \dots y^m). \quad (16.1)$$

- 2) n -мерное риманово базовое пространство, параметризованное n координатами x^i , $i = 1, \dots, n$, поля в котором (в частности, метрический тензор) могут зависеть как от координат базы, так и от координат слоя. Преобразование координат базы может зависеть от координат слоя:

$$\tilde{x}^i = f^i(x^1 \dots x^n; y^1 \dots y^m); \quad i = 1, \dots, n. \quad (16.2)$$

Исходной схемой в построении геометрических расслоений является локально тривиальное расслоение в отдельных координатах в окрестности какой-то точки: и в слое и в базе заданы только метрические тензоры $g_{\alpha\beta}(y)$ и $\gamma_{ij}(x, y)$ соответственно. При преобразовании координат базы (16.2) зависимость координат базы от координат слоя приводит к возникновению n m -компонентных кросс-полей

$$V_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}. \quad (16.3)$$

В общей схеме кросс-геометрии уже рассматриваются три поля:

- 1) метрика слоя $\sigma_{\alpha\beta}(y)$;
- 2) метрика базы $\gamma_{ij}(x, y)$;
- 3) кросс-поле $V_\alpha^i(x, y)$, уже не связанное соотношением (16.3).

Если геометрия слоя — это геометрия m -мерного риманова пространства, то в пространстве базы имеются два поля — метрика и кросс-поле, — которые, однако, могут быть упрощены за счет преобразования координат (16.2) более широкого, чем преобразования в римановой геометрии. Каковы структуры, не уничтожаемые этими преобразованиями?

Количественный ответ на этот вопрос дает l -анализ.

2. l -анализ

В базовом пространстве мы имеем поле метрического тензора с $n(n+1)/2$ компонентами и кросс-поле с n m компонентами, зависящие от $n+m$ переменных x^i , y^α , то есть каждая компонента имеет в l -й степени N_{n+m}^l коэффициентов.

При преобразовании координат преобразования тензоров, калибровочных полей определяются через *первые производные* от n функций, определяющих преобразование координат (16.2), так что количество независимых коэффициентов в l -й степени определяется разностью

$$\begin{aligned} S_{nm}^l &= \left(\frac{n(n+1)}{2} + nm \right) N_{n+m}^l - n N_{n+m}^{l+1} = \\ &= \frac{n(n-2m+1)}{2} \cdot \frac{(n+m+l-1)!}{(n+m-1)!l!} - n \frac{(n+m+l)!}{(n+m-1)!(l+1)!} = \\ &= \frac{n((n-1)(l-1) + 2ml)(n+m+l-1)!}{2(n+m-1)!(l+1)!}. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Анализ этого выражения начнем со случая $m = 0$, описывающего базовое пространство как чисто риманово. Число компонент в l -м секторе при этом

$$r_l = S_{n0}^l = \frac{n(n-1)(l-1)(n+l-1)!}{2(n-1)!(l+1)!}. \quad (16.5)$$

При $l = 0$ величина $r_0 = -n(n-1)/2$ отрицательная. Это значит, что имеется избыточное число преобразований над числом коэффициентов метрического тензора, достаточное для приведения его к некоторому стандартному виду (единичной матрице или метрике Минковского) и еще остается $n(n-1)/2$ преобразований, не меняющих этого вида. Эта разность определяет размерность локальной группы вращений (или локальной группы Лоренца).

При $l = 1$ число компонент $r_1 = 0$ — это значит, что преобразованиями координат можно уничтожить все первые производные метрического тензора в одной выбранной точке. Этот факт играет важнейшую роль в римановой геометрии, позволяющую перенести его в произвольную систему в виде равенства нулю ковариантной производной метрического тензора.

При $l = 2$ имеется, наконец, положительное число компонент

$$r_2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \quad (16.6)$$

Это есть число независимых компонент тензора Римана-Кристоффеля в римановом n -мерном пространстве, образуемого из вторых производных метрического тензора. Если бы все эти компоненты были независимыми функциями, то при $l = 3$ их частные производные по n направлениям определили

бы $n r_2$ независимых компонент, однако выражение

$$r_3 = \frac{n^2 (n^2 - 1) (n + 2)}{24}$$

меньше, значит, их разность определяет число дифференциальных *тождеств Бьянки*, которым подчиняются компоненты тензора Римана–Кристоффеля (n_{RC}):

$$n_{RC} = n r_2 - r_3 = \frac{n^2 (n^2 - 1) (n - 2)}{24}. \quad (16.7)$$

При $m > 0$ размерность нулевого сектора S_{nm}^0 не изменяется. Это значит, что преобразованиями координат (16.2) в какой-либо избранной точке можно уничтожить все компоненты кросс-поля.

В следующем, первом порядке разложения

$$S_{nm}^1 = \frac{n m (n + m)}{2} = \frac{n(n + 1)}{2} m + n \frac{m(m - 1)}{2}. \quad (16.8)$$

Первое слагаемое здесь представляет частные производные от метрического тензора $\gamma_{ij}(x, y)$ по m переменным слоя y^α , не уничтожаемых преобразованием (16.2), а второе определяет неуничтожаемые первые производные кросс-поля, которое, в соответствии с этим выражением, имеет структуру $F_{\{\alpha\beta\}}^i$, содержащую один значок координат базы, и антисимметрична по двум индексам слоя.

Сравним теперь расслоения с какой-то размерностью слоя m и со слоем, имеющим размерность на единицу больше:

$$\begin{aligned} S_{n,m+1}^l - S_{n,m}^l &= \frac{n(n + 2m + 1)}{2} \frac{(n + m + k - 1)!}{(n + m)! (k - 1)!} = \\ &= \left(\frac{n(n + 1)}{2} + n m \right) N_{n+m+1}^{l-1}. \end{aligned} \quad (16.9)$$

В больших скобках здесь стоит число компонент метрического тензора и кросс-поля, а множитель N_{n+m+1}^{l-1} означает, что это производные от функций $n + m + 1$ переменных $(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n, y^{n+1})$, то есть увеличение размерности слоя на единицу добавляет к независимым переменным пространства меньшей размерности *производные по добавленной переменной* как дополнительные независимые переменные.

3. Ковариантные производные

В определении ковариантных производных отправным пунктом являются *раздельные координаты* в рассматриваемой точке — все компоненты кресс-поля в этой точке равны нулю. Ковариантность выражений для производных различных тензорных полей по координатам базы и слоя при преобразовании переменных базы через самих себя $\tilde{x}(x)$ и аналогичных преобразованиях в слое $\tilde{y}(y)$ обеспечивается аппаратом ковариантного дифференцирования римановой геометрии.

При более широких преобразованиях координат базы (16.2) раздельные координаты в окрестности выбранной точки являются выделенными. Именно в раздельных координатах ковариантные производные тензоров различного ранга принимаются за исходный образец и при общем преобразовании координат (16.2) модифицируются возникающим кресс-полем до тензора. Для скалярного поля это

$$\nabla_\alpha f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} + V_\alpha^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \equiv f_{,\alpha} + V_\alpha^s f_{,s}, \quad (16.10)$$

а для векторного с учетом преобразования, связанного с индексом:

$$\nabla_\alpha A^i = \partial_\alpha A^i + V_\alpha^s A^i{}_{,s} - V_{\alpha,s}^i A^s. \quad (16.11)$$

Для тензора общего ранга с индексами как базового пространства, так и слоя — (p, q) -тензора, — где p — число индексов базового пространства, а q — число индексов слоя:

$$\nabla_\alpha T_{j\nu}^{i\mu} = \partial_\alpha T_{j\nu}^{i\mu} + V_\alpha^s \partial_s T_{j\nu}^{i\mu} - V_{\alpha,s}^i T_{j\nu}^{s\mu} + V_{\alpha,j}^s T_{s\nu}^{i\mu} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu T_{j\nu}^{i\gamma} - \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma T_{j\gamma}^{i\mu}, \quad (16.12)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ — связности в слое, определяемые метрикой слоя $\sigma_{\alpha\beta}(y)$.

Применение наряду с обычными ковариантными производными по координатам базы, определяемым метрическим тензором базы γ_{ij} и соответствующими связностями, введенные ковариантные производные по координатам слоя обеспечивают ковариантность тензорных выражений с производными по отношению к общим преобразованиям координат базы (16.2).

4. Кресс-кривизна

Как видно из (16.8), в первых производных кресс-поля возникает конструкция, не уничтожимая координатными преобразованиями (16.2). Обна-

ружить ее проще всего через вторые ковариантные производные по координатам слоя от скалярного поля:

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha f(x, y) = \partial_\beta (\nabla_\alpha f) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (\nabla_\mu f) + V_\beta^j \partial_j (\nabla_\alpha f). \quad (16.13)$$

Здесь $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ — связности в слое. Из-за их симметрии по нижним индексам они сокращаются в конструкции

$$(\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) f(x, y) = F_{\beta\alpha}^i f_{,i}, \quad (16.14)$$

где

$$F_{\beta\alpha}^i = -F_{\alpha\beta}^i = \partial_\beta V_\alpha^i - \partial_\alpha V_\beta^i + V_\beta^j V_{\alpha,j}^i - V_\alpha^j V_{\beta,j}^i \quad (16.15)$$

— *кросс-кривизна*, как раз и выражающаяся через первые производные кросс-поля.

Для векторного поля

$$(\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) A^i = F_{\beta\alpha}^j A^i_{,j} - F_{\beta\alpha,j}^i A^j \quad (16.16)$$

и для произвольного (p, q) -тензора число слагаемых равно $p + q + 1$:

$$\begin{aligned} & (\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) T_{j\nu}^{i\mu} = \\ & = F_{\beta\alpha}^k T_{j\nu,k}^{i\mu} - F_{\beta\alpha,k}^i T_{j\nu}^{k\mu} + F_{\beta\alpha,j}^k T_{k\nu}^{i\mu} + R_{\sigma\beta\alpha}^\mu T_{j\nu}^{i\sigma} - R_{\nu\beta\alpha}^\sigma T_{j\sigma}^{i\mu}. \end{aligned} \quad (16.17)$$

Здесь $R_{\sigma\beta\alpha}^\mu$ — тензор кривизны риманова пространства слоя и число слагаемых, содержащих его, равно числу индексов слоя (q).

Так как тензор кросс-кривизны определяется первыми альтернированными производными кросс-поля, он подчиняется *тождествам Якоби*:

$$\begin{aligned} & \nabla_\alpha F_{[\beta\gamma]}^i + \nabla_\beta F_{[\gamma\alpha]}^i + \nabla_\gamma F_{[\alpha\beta]}^i = \partial_\alpha F_{[\beta\gamma]}^i + \partial_\beta F_{[\gamma\alpha]}^i + \partial_\gamma F_{[\alpha\beta]}^i + \\ & + V_\alpha^j F_{[\beta\gamma]}^i + V_\beta^j F_{[\gamma\alpha]}^i + V_\gamma^j F_{[\alpha\beta]}^i - V_{\alpha,j}^i F_{[\beta\gamma]}^j - V_{\beta,j}^i F_{[\gamma\alpha]}^j - V_{\gamma,j}^i F_{[\alpha\beta]}^j = 0. \end{aligned} \quad (16.18)$$

Из-за антисимметрии по индексам слоя все слагаемые со связностями слоя сокращаются.

5. Кросс-метрика

Метрика базы $\gamma_{ij}(x, y)$ и метрика слоя $\sigma_{\alpha\beta}(y)$ могут определить метрику кросс-произведения как единого $n + m$ -мерного риманова пространства

(кросс-метрику). Она определяется с точностью до произвольного (с математической точки зрения) постоянного множителя k . Сначала строится метрика в раздельной системе координат (кросс-поле обращено в нуль)

$$ds^2 = \gamma_{ij}(x, y) dx^i dx^j + \frac{1}{k} \sigma_{\alpha\beta}(y) dy^\alpha dy^\beta, \quad (16.19)$$

а затем она переносится в произвольную систему координат кросс-полями:

$$g^{\alpha\beta} = k \sigma^{\alpha\beta}; \quad g^{\alpha i} = -k \sigma^{\alpha\beta} V_\beta^i; \quad g^{ij} = \gamma^{ij} + k \sigma^{\alpha\beta} V_\alpha^i V_\beta^j. \quad (16.20)$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{k} \sigma_{\alpha\beta} + \gamma_{ij} V_\alpha^i V_\beta^j; \quad g_{i\alpha} = \gamma_{ij} V_\alpha^j; \quad g_{ij} = \gamma_{ij}. \quad (16.21)$$

Несмотря на математическое объединение базы и слоя в единое $n + m$ -мерное риманово пространство, в любой точке базы слой сохраняет свою индивидуальность, которая может быть явно выражена приведением в этой точке к раздельной системе координат.

Слой может быть представлен как единым римановым пространством, так и прямым произведением нескольких римановых пространств с размерностями $m_{(s)}$, с метриками и координатами, помечаемыми еще одним индексом — номером слоя:

$$d\tau_{(s)}^2 = \sigma_{\alpha\beta}(y_{(s)}) dy_{(s)}^\alpha dy_{(s)}^\beta; \quad \alpha, \beta = 1..m_{(s)}. \quad (16.22)$$

Метрика кросс-произведения может определяться некоторыми из них со своими масштабными факторами $k_{(s)}$ — положительными или отрицательными.

6. Динамическая геометрия

Одной из важнейших областей приложения кросс-геометрии является *динамическая геометрия* n -мерного риманова пространства — размерность слоя при этом равна единице, а переменной слоя является *время*.

Спецификой этого случая по сравнению со слоями большей размерности является отсутствие напряженностей расслоения $F_{[\alpha\beta]}^i$ — в одномерном случае антисимметричные конструкции отсутствуют, — и поэтому кросс-поле может быть уничтожено преобразованиями координат не только в окрестности одной точки, но и в конечной области базового пространства или даже во всем пространстве — тем самым совершается переход в глобальную инерциальную систему координат.

Методы кросс-геометрии позволяют рассматривать базу и слой (пространство и время) как единое $n + 1$ -мерное риманово пространство, а если в выражении (16.19) положено $k = -1$, то локальная метрика приводится к метрике Минковского, тем самым согласуя кросс-геометрическое описание времени и пространства (при размерности $n = 3$) с аппаратом теории глобального времени.

Сменив еще общий знак перед метрикой (16.19) для согласования с принятыми в настоящее время обозначениями, получаем четырехмерную метрику кросс-геометрии пространства-времени:

$$g^{00} = 1; \quad g^{0i} = V^i; \quad g^{ij} = V^i V^j - \gamma^{ij}; \quad (16.23)$$

$$g_{00} = 1 - \gamma_{ij} V^i V^j; \quad g_{0i} = \gamma_{ij} V^j; \quad g_{ij} = -\gamma_{ij}. \quad (16.24)$$

Эта метрика совпадает с четырехмерным представлением метрики пространства-времени в ТГВ. Таким образом, динамическая геометрия, выделяющая время в четырехмерном представлении пространства-времени, является лишь частным случаем более общей теории.

7. Внутренние степени свободы элементарных частиц

В современных физических моделях пространства и времени, пытающихся учесть внутреннюю структуру элементарных частиц, значительной популярностью пользуется идея *компактификации*: рассматриваются пространства размерности больше четырех (26, 11) и конструируется некоторый механизм, по которому в макроскопической физике проявляется лишь четыре измерения. Кросс-геометрия позволяет изначально, без какого-либо механизма компактификации, рассматривать не только динамику трехмерного пространства в глобальном времени, но и подключать к их кросс-метрике метрику слоев с какими-то дополнительными внутренними переменными элементарных частиц, включая или не включая их геометрические свойства в геометрию пространства и времени, в то же время расширяя число переменных для полей в пространстве и времени (например, поля Дирака).

Если, например, слоем является сфера S_2 с группой преобразований SO_3 локально изоморфной группе Su_2 , то поля в пространстве со значениями в слое будут отражать эту симметрию.

ГЛАВА 17

Аналитические вычисления

Луна и Солнце побледнели,
созвездья форму изменили,
движенье сделалось тягучим,
и время стало как песок.

Д. Харис

В конце XX века в связи с компьютерной революцией появились системы аналитических вычислений, позволяющие переложить на компьютеры существенную часть вычисления сложных выражений. Это прежде всего системы *Reduce*, *Derive*, *Form*. В последнее время большую популярность приобрели системы *Maple*, *MathLab*, но особенно большое распространение во всем мире приобрела система *Mathematica*, созданная физиком-теоретиком Стефеном Вольфрамом.

Вычисления в римановой геометрии связностей, тензора кривизны, в ТГВ — ковариантных производных по времени, — будучи в принципе не сложными, требуют вычисления и суммирования большого числа различных компонент, и проведение этой работы с проверкой правильности результата требует достаточно много времени. Эта рутинная работа при проведении ее вручную отвлекает внимание от физической сути изучаемого объекта. Автоматизация вычислений позволяет не только ускорить их, но и просмотреть множество вариантов, выбрать удобные координаты, общий вид метрики и т.д.

Здесь мы не будем приводить какие-либо основы работы с этим пакетом, порекомендуем лишь наряду с оригиналом [92] очень содержательную книгу [93], а также пособие [94]. А далее будем вести изложение, полагая, что читатель владеет необходимыми основами, хотя, разбирая или используя предлагаемый материал, он может совершенствовать свое мастерство.

Мы приведем модули для работы с римановыми пространствами (в основном трехмерными) и векторными полями в них, а также модуль полу-

чения уравнений ТГВ и модули для нахождения мод деформации трехмерной сферы.

1. Риманова геометрия

1.1. Модуль Ricci

Модуль Ricci вычисляет тензор Риччи трехмерного пространства по заданной метрике. Приводим его комментированный текст на языке Mathematica.

Комментарии даются внутри скобок со звездочками:

(* Комментарий *)

Их наличие или отсутствие не влияет на работу модуля, однако они позволяют понять его структуру.

```
Ricci[coords_, mtr_] := Module[{DG, ss, zz, cs1},
  (* Считывание обозначений координат *)
  Do[x[i] = coords[[i]], {i, 3}];

  (* Вычисление корня из детерминанта gd *)
  DG = Det[mtr] // Simplify;
  ss = Solve[zz^2 == DG, zz];
  gd = zz /. ss[[2]];

  (* Обратный метрический тензор g^{ij}=hh[i,j] *)
  HH = Inverse[mtr];
  Do[Do[hh[i,j]=HH[[i,j]];gg[i,j]=
    mtr[[i,j]],{j,3}],{i,3}];

  (* Вычисление связностей \Gamma^i_{jk}=cs2[i,j,k] *)
  Do[Do[Do[cs1[i,j,k]=D[gg[i,j],x[k]]+D[gg[i,k],x[j]]-
    D[gg[j,k],x[i]]//Simplify,{k,3}],{j,3}],{i,3}];
  Do[Do[Do[cs2[i,j,k]=Sum[hh[i,s] cs1[s,j,k]/2,{s,3}]
    // Simplify,{k,3}],{j,3}],{i,3}];

  (* Свертка \Gamma^j_{ij}=cs[i] *)
  Do[cs[i]=Sum[cs2[j,i,j],{j,3}]]//Simplify,{i,3}];

  (* Вычисление тензора Риччи R_{ij}=ricci[i,j] *)
  Do[Do[ricci[i,j]=
```

```

Sum[D[cs2[k,i,j],x[k]],{k,3}]-D[cs[i],x[j]] +
Sum[Sum[cs2[k,i,j]cs2[l,k,l]-cs2[k,l,i]cs2[l,k,j]]//
Simplify,{l,3}],{k,3}],{j,3}],{i,3}];

(* Подъем индекса у тензора Риччи R^i_j=ric[i,j] *)
Do[Do[ric[i,j] = Sum[hh[i,s]ricci[s,j] //
Simplify,{s,3}],{j,3}],{i,3}];

(* Скалярная кривизна rs *)
rs = Sum[ric[i,i],{i,3}];

(* Сборка тензора Риччи в матрицу (R^i_j)= *)
(* Rij[[i,j]] *)
Rij = Array[ric,{3,3}]/Simplify
(* Эта матрица и выводится как результат работы *)
(* модуля *)
] (* Конец модуля *)

```

Для получения геометрических характеристик риманова пространства нужно задать наименования координат и метрический тензор в зависимости от них. После работы модуля выводится тензор Риччи для заданной метрики.

Для решения различных задач модуль Ricci достаточно запустить один раз, меняя лишь входные данные. Модуль лучше держать в отдельном файле, который после запуска модуля можно закрыть.

В Mathematic'e есть механизм *пакетов расширения*, однако пакет скрывает результаты всех промежуточных вычислений. При запуске модуля на глобальном уровне (просто из файла) мы можем после его выполнения для заданной метрики посмотреть:

- корень из детерминанта $\sqrt{\gamma} = gd$;
- обратный метрический тензор $\gamma^{ij} = hh[i,j]$ либо в виде матрицы HH;
- связности $\Gamma_{jk}^i = cs2[i,j,k]$;
- скалярную кривизну $R = rs$.

1.2. Сферические координаты в евклидовом пространстве

Метрика евклидова пространства в сферической системе координат

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Компоненты метрического тензора зависят от координат, однако тензор кривизны и тензор Риччи должны быть равны нулю.

```
(* Определяем метрический тензор *)
GG={{1,0,0},{0,r^2,0},{0,0,r^2 Sin[u]^2}}

(* Проверяем его правильность *)

GG // MatrixForm

(* Обращаемся к модулю Ricci, *)
(* указывая координаты и метрический тензор *)
Ricci[{r, u, w}, GG] // Simplify
```

Действительно, результат работы программы

$$\{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\}$$

говорит о том, что пространство плоское.

Однако и в этом случае модуль может быть полезен, например, для вычисления связностей в сферической системе координат:

```
Array[cs2, {3, 3, 3}]
```

1.3. Трехмерная сфера

Трехмерная сфера радиуса r в сферических координатах

$$dl^2 = r^2(du^2 + \sin^2 u (dv^2 + \sin^2 v dw^2)).$$

```
(* Определяем метрический тензор *)
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}];
gg[1, 1] = r^2;
gg[2, 2] = r^2 Sin[u]^2;
gg[3, 3] = r^2 Sin[u]^2 Sin[v]^2;

(* Проверяем визуально его правильность *)
GG = Array[gg, {3, 3}];
GG // MatrixForm

(* Обращаемся к модулю Ricci, *)
```

(* указывая координаты и метрический тензор *)
 Ricci[{u, v, w}, GG]

Результат — тензор Риччи трехмерной сферы R_j^i

$$\left\{ \left\{ \frac{2}{r^2}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{2}{r^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{2}{r^2} \right\} \right\}$$

можно представить в виде матрицы

%//MatrixForm

Интересно также посмотреть скалярную кривизну, вызвав переменную *rs*.

1.4. Трехмерная сфера в конформных координатах

Трехмерная сфера радиуса r в стереографической проекции на трехмерное евклидово пространство — в конформных координатах

$$dl^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/f^2; \quad f = 1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4r^2}.$$

В пакете “Mathematica”:

f = 1 + (x^2 + y^2 + z^2)/(4r^2)
 GG = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}/f^2

(* Проверяем его правильность *)

GG // MatrixForm

(* Обращаемся к модулю Ricci, *)
 (* указывая координаты и метрический тензор *)
 Ricci[{x, y, z}, GG]

1.5. Трехмерная сфера в углах Эйлера

Трехмерная сфера радиуса r в углах Эйлера $\{\vartheta, \varphi, \psi\}$:

$$dl^2 = \frac{r^2}{4} (d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi)$$

В пакете “Mathematica”:

```
(* Определяем метрический тензор *)
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}];
gg[1, 1] = r^2/4;
gg[2, 2] = r^2/4;
gg[3, 3] = r^2/4;
gg[2, 3] = r^2Cos[tt]/4;
gg[3, 2] = r^2Cos[tt]/4;

(* Проверяем его правильность *)

GG // MatrixForm

(* Обращаемся к модулю Ricci, *)
(* указывая координаты и метрический тензор *)
Ricci[{tt, u, w}, GG] // Simplify
```

Здесь интересно посмотреть обратный метрический тензор:

```
HH//MatrixForm
```

Во всех трех последних примерах результат работы модуля Ricci — список компонент тензора Риччи сферы радиуса r — одинаков:

$$\left\{ \left\{ \frac{2}{r^2}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{2}{r^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{2}{r^2} \right\} \right\}.$$

Это говорит о том, что во всех трех случаях описывается сфера в различных координатах.

1.6. Пространство Лобачевского

Трехмерная псевдосфера (пространство постоянной отрицательной кривизны) в угловых координатах получается из метрики обычной сферы заменой синуса угла вдоль меридиана на гиперболический синус:

```
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}];
gg[1, 1] = r^2;
gg[2, 2] = r^2 Sinh[u]^2;
gg[3, 3] = r^2 Sinh[u]^2 Sin[v]^2;
GG = Array[gg, {3, 3}];
GG // MatrixForm
Ricci[{u, v, w}, GG]
```


$$\left\{\left\{-\frac{2}{r^2}, 0, 0\right\}, \left\{0, -\frac{2}{r^2}, 0\right\}, \left\{0, 0, -\frac{2}{r^2}\right\}\right\}.$$

В конформных координатах Клейна метрика псевдосферы имеет почти такой же вид, как и у обычной сферы с заменой r^2 на $-r^2$:

$$dl^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/f^2; \quad f = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4r^2}.$$

$$f = 1 - (x^2 + y^2 + z^2)/(4r^2)$$

$$GG = \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}/f^2$$

(* Проверяем его правильность *)

GG // MatrixForm

(* Обращаемся к модулю Ricci, *)

(* указывая координаты и метрический тензор *)

Ricci[{x, y, z}, GG]

Результат

$$\left\{\left\{-\frac{2}{r^2}, 0, 0\right\}, \left\{0, -\frac{2}{r^2}, 0\right\}, \left\{0, 0, -\frac{2}{r^2}\right\}\right\},$$

как и в предыдущем примере.

1.7. Двумерные поверхности

Модуль Ricci можно использовать и для определения характеристик кривизны двумерных поверхностей, записав их метрику как часть метрики трехмерного пространства — прямого произведения данной двумерной поверхности на прямую.

```
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}];
f = a^2 + x^2 + y^2
gg[1, 1] = (a^2 + y^2)/f
gg[2, 2] = (a^2 + x^2)/f
gg[1, 2] = -x y/f
gg[2, 1] = -x y/f
gg[3, 3] = 1
```

```
GG = Array[gg, {3, 3}];
GG // MatrixForm
Ricci[{x, y, z}, GG] // Simplify
% // Simplify
```

Что это за поверхность?

2. Работа с векторными полями

Важную роль в физике играет не только метрический тензор, но и векторные поля, прежде всего — поле абсолютной скорости, а также поля Киллинга, геодезические потоки и др. Мы приводим ряд модулей для работы с векторными полями, но при необходимости они могут быть легко модифицированы для вычисления каких-то других характеристик векторных или тензорных полей.

Перед запуском векторных модулей нужно задать метрику и запустить модуль Ricci, чтобы задать координаты и вычислить необходимые геометрические характеристики.

Модуль Killing вычисляет уравнения Киллинга (4.15), точнее, Ли-вариации метрического тензора по векторному полю Vels (4.9):

```
Killing[Vels_] := Module[{DG, ss},
  Do[Do[
    kil[i, j] =
    Sum[D[Vels[[s]], x[i]] gg[s, j] + D[Vels[[s]], x[j]] gg[i, s] +
      Vels[[s]] D[gg[i, j], x[s]],
      {s, 3}], {j, 3}], {i, 3}];
  Array[kil, {3, 3}] // Simplify
]
```

Модуль Commut вычисляет Ли-коммутатор двух векторных полей (4.13):

```
Commut[vel1_, vel2_] :=
Module[{},
  Do[com[i] =
    Sum[vel1[[s]] D[vel2[[i]], x[s]] - vel2[[s]] D[vel1[[i]], x[s]]
      {s, 1, 3}], {i, 1, 3}] // Simplify;
  Array[com, 3] // Simplify
]
```

Модуль CovDif вычисляет ковариантную производную векторного поля Vels:

```

CovDif[Vels_] := Module[{DG, ss},
  Do[Do[cov[i,j]=D[Vels[[i]],x[j]]+
    Sum[cs2[i,j,k]Vels[[k]],
      {k, 3}], {j, 3}], {i, 3}];
  Array[cov, {3, 3}] // Simplify
]

```

Модуль Geodes проверяет, не является ли векторное поле Field геодезическим потоком:

```

Geodes[Field_] := Module[{DG, ss},
  Do[zz[i] =
    Sum[Field[[k]](D[Field[[i]], x[k]] +
      Sum[cs2[i,j,k]Field[[j]], {j, 3}]), {k, 3}] //
    Simplify, {i, 3}];
  ZZ = Array[zz, 3]
]

```

Следующий модуль вычисляет дивергенцию векторного поля V:

```

Div[V_] := Module[{},
  Sum[D[V[[i]] gd, x[i]], {i, 3}]/gd // Simplify
]

```

Далее можно вычислить ротор векторного поля:

```

Rot[V_] := Module[{vl},
  Do[vl[i] = Sum[gg[i, j]V[[j]], {j, 3}], {i, 3}];
  rr[1] = (D[vl[2],x[3]]-D[vl[3],x[2]])/gd//Simplify;
  rr[2] = (D[vl[3],x[1]]-D[vl[1],x[3]])/gd//Simplify;
  rr[3] = (D[vl[1],x[2]]-D[vl[2],x[1]])/gd//Simplify;
  Array[rr, 3]
]

```

Здесь вычисляется векторное произведение двух векторных полей:

```

Pr[V1_, V2_] := Module[{l1, l2, rr},
  Do[l1[i] = Sum[gg[i, j]V1[[j]], {j, 3}], {i, 3}];
  Do[l2[i] = Sum[gg[i, j]V2[[j]], {j, 3}], {i, 3}];
  rr[1] = (l1[2]l2[3]-l1[3]l2[2])/gd // Simplify;
  rr[2] = (l1[3]l2[1]-l1[1]l2[3])/gd // Simplify;
  rr[3] = (l1[1]l2[2]-l1[2]l2[1])/gd // Simplify;
  Array[rr, 3]
]

```

Здесь вычисляется скалярное произведение двух векторных полей:

```
Scal[V1_, V2_] := Module[{},
  Sum[Sum[gg[i, j] V1[[i]] V2[[j]], {j, 3}], {i, 3}] // Simplify
]
```

Использование этих модулей достаточно очевидно, но перед их использованием каждый модуль должен быть запущен.

3. Вычисления в Общей теории относительности

3.1. Модуль GenRel

Модуль Ricci легко модифицируется для четырехмерных вычислений простой заменой в суммировании предела 3 на 4. Кроме того, в самом конце программы полезнее выводить тензор Эйнштейна вместо тензора Риччи:

```
(* Тензор Эйнштейна G^i_j=R^i_j- *)
(* \delta^i_j R/2=gij[i,j] *)
Do[Do[gij[i, j] = ric[i, j]-
If[i == j, rs/2, 0], {j, 4}], {i, 4}];
(* Сборка тензора Эйнштейна в матрицу *)
(* (G^i_j)=Einstein[[i,j]] *)
Einstein = Array[gij, {4, 4}] // Simplify
(* Эта матрица и выводится *)
(* как результат работы модуля *)
```

Текст модуля теперь выглядит так:

```
GenRel[coords_, mtr_] := Module[{DG, ss},
  (* Считывание обозначений координат *)
  Do[x[i] = coords[[i]], {i, 4}];

  (* Вычисление корня из детерминанта gd *)
  DG = Det[mtr] // Simplify;
  ss = Solve[z^2 == DG, z];
  gd = z /. ss[[2]];

  (* Вычисление обратного метрического *)
  (* тензора g^{ij}=hh[i,j] *)
  HH = Inverse[mtr];
  Do[Do[hh[i, j] = HH[[i, j]], {j, 4}], {i, 4}];
```

```

(* Вычисление связностей \Gamma^i_{jk}=cs2[i,j,k] *)
Do[Do[Do[cs1[i, j, k] = D[gg[i, j], x[k]] +
  D[gg[i, k], x[j]] - D[gg[j, k], x[i]] //
  Simplify, {k, 4}], {j, 4}], {i, 4}];
Do[Do[Do[cs2[i, j, k] =
  Sum[hh[i, s] cs1[s, j, k]/2, {s, 4}]
  // Simplify, {k, 4}], {j, 4}], {i, 4}];

(* Свертка \Gamma^j_{ij}=cs[i] *)
Do[cs[i] = Sum[cs2[j, i, j], {j, 4}] //
  Simplify, {i, 4}];

(* Вычисление тензора Риччи R_{ij}=ricci[i,j] *)
Do[Do[ricci[i, j] =
  Sum[D[cs2[k, i, j], x[k]], {k, 4}] - D[cs[i], x[j]] +
  Sum[Sum[cs2[k, i, j] cs2[l, k, l] -
  cs2[k, l, i] cs2[l, k, j]] //
  Simplify, {l, 4}], {k, 4}], {j, 4}], {i, 4}];

(* Подъем индекса у тензора Риччи R^i_j=ric[i,j] *)
Do[Do[ric[i, j] = Sum[hh[i, s] ricci[s, j] //
  Simplify, {s, 4}], {j, 4}], {i, 4}];

(* Скалярная кривизна rs *)
rs = Sum[ric[i, i], {i, 4}];

Rij = Array[ric, {4, 4}] // Simplify

(* Тензор Эйнштейна G^i_j=R^i_j-\delta^i_j R/2= *)
(* gij[i,j] *)
Do[Do[gij[i, j] = ric[i, j] -
  If[i == j, rs/2, 0], {j, 4}], {i, 4}];
(* Сборка тензора Эйнштейна в матрицу *)
(* (G^i_j)=Einstein[[i,j]] *)
Einstein = Array[gij, {4, 4}] // Simplify
(* Эта матрица и выводится как *)
(* результат работы модуля *)
] (* Конец модуля *)

```

Неполнота этого модуля в задачах общей теории относительности состоит в том, что в нем не вычисляется тензор Римана–Кристоффеля. В трехмерном случае он имеет шесть компонент, которые алгебраически выражаются через шесть компонент тензора Риччи. В четырехмерном же случае он имеет 20 компонент, а тензор Риччи 10, поэтому нужно дополнительное вычисление десяти компонент тензора Вейля.

Однако для составления или проверки уравнений общей теории относительности он оказывается вполне достаточным.

При обращении к нему в списке переменных нужно задавать четыре символа и матрица метрики должна иметь размерность 4×4 .

Приведем несколько важных для общей теории относительности примеров.

3.2. Метрика Шварцшильда

```
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 4}], {i, 4}];
gg[1, 1] = 1;
gg[2, 2] = -1;
gg[3, 3] = -r^2;
gg[4, 4] = -r^2 Sin[v]^2;
GG = Array[gg, {4, 4}];
GG // MatrixForm

GenRel[{t, r, v, u}, GG]
```

Выводимый в результате работы программы тензор Эйнштейна имеет все компоненты нулевыми.

3.3. Метрика Керра

```
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 4}], {i, 4}];
ro = 1 + r^2 - z^2;
w = (1 + r^2)ro + M r z^2;
DD = 1 + r^2 - M r;
gg[1, 1] = 1 - M r/ro;
gg[2, 2] = -ro/DD;
gg[3, 3] = -ro/(1 - z^2);
gg[4, 4] = -w/ro z^2;
gg[4, 1] = M r z^2/ro;
gg[1, 4] = gg[4, 1];
GG = Array[gg, {4, 4}];
```

```
GG // MatrixForm

GenRel[{t, r, z, u}, GG]
```

Тензор Эйнштейна также нулевой.

3.4. Динамическая метрика Эйнштейна-де Ситтера

```
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 4}], {i, 4}];
gg[1, 1] = 1;
gg[2, 2] = -m[t]^2;
gg[3, 3] = -m[t]^2;
gg[4, 4] = -m[t]^2;
GG = Array[gg, {4, 4}];
GG // MatrixForm
```

```
GenRel[{t, x, y, z}, GG]
```

в результате работы выдает тензор энергии-импульса идеальной жидкости, который должен стоять в правой части уравнений Эйнштейна:

$$G_0^0 = \frac{3 m'[t]^2}{m[t]^2} = \varepsilon; \quad G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = \frac{m'[t]^2 + 2 m[t] m''[t]}{m[t]^2} = -p,$$

где p — давление, а ε — плотность энергии.

4. Теория глобального времени

Вычисление уравнений ТГВ осуществляется модулем Glob.

4.1. Модуль Glob

Модуль Glob предназначен для составления уравнений связи и динамики пространства в теории глобального времени.

Первая часть этого модуля повторяет содержимое модуля Ricci. Однако в заголовке модуля к формальным параметрам добавлено поле абсолютных скоростей — список $\{V^1[x], V^2[x], V^3[x]\}$ с указанием зависимости компонент от координат.

```
Glob[coords_, GlobalVel_, mtr_] :=
  Module[{DG, ss, zz, cs1},
```

```

(* Считывание обозначений координат *)
Do[x[i] = coords[[i]], {i, 3}];

(* Вычисление корня из детерминанта gd *)
DG = Det[mtr] // Simplify;
ss = Solve[zz^2 == DG, zz];
gd = zz /. ss[[2]];

(* Обратный метрический тензор  $g^{ij}=hh[i,j]$  *)
HH = Inverse[mtr];
Do[Do[hh[i,j]=HH[[i,j]];gg[i,j]=
  mtr[[i,j]],{j,3}],{i,3}];

(* Вычисление связностей  $\Gamma^i_{jk}=cs2[i,j,k]$  *)
Do[Do[Do[cs1[i,j,k] =
  D[gg[i,j],x[k]]+D[gg[i,k],x[j]]-
  D[gg[j,k],x[i]]//Simplify,{k,3}],{j,3}],{i,3}];
Do[Do[Do[cs2[i,j,k]=Sum[hh[i,s] cs1[s,j,k]/2,{s,3}]
  // Simplify,{k,3}],{j,3}],{i,3}];

(* Свертка  $\Gamma^j_{ij}=cs[i]$  *)
Do[cs[i]=Sum[cs2[j,i,j],{j,3}]]//Simplify,{i,3}];

(* Вычисление тензора Риччи  $R_{ij}=ricci[i,j]$  *)
Do[Do[ricci[i,j]=
  Sum[D[cs2[k,i,j],x[k]],{k,3}]-D[cs[i],x[j]]+
  Sum[Sum[cs2[k,i,j]cs2[l,k,l]-
  cs2[k,l,i]cs2[l,k,j]]//
  Simplify,{l,3}],{k,3}],{j,3}],{i,3}];

(* Подъем индекса у тензора Риччи  $R^i_j=ric[i,j]$  *)
Do[Do[ric[i,j] = Sum[hh[i,s]ricci[s,j]] //
  Simplify,{s,3}],{j,3}],{i,3}];

(* Скалярная кривизна rs *)
rs = Sum[ric[i,i],{i,3}];
(*=====*)
(* Уравнения связей и динамики пространства *)

(* Скорости деформации  $\mu_{ij}=\mu[i,j]$  *)

```



```

Do[Do[mu[i, j] = (D[gg[i, j], t] +
  Sum[(gg[s, j]D[GlobalVel[[s]], x[i]] +
    gg[i, s]D[GlobalVel[[s]], x[j]] +
    GlobalVel[[s]]D[gg[i, j], x[s]]),
    {s, 3}]/2 // Simplify, {j, 3}], {i, 3}];

(* Поднятие индекса mu^i_j=muh[i,j] *)
Do[Do[muh[i,j]=
  Sum[hh[i,s]mu[s,j],{s,3}],{j,3}],{i,3}];

(* Свертка mu^i_i=ms;
ms = Sum[muh[s, s], {s, 3}] // Simplify;

(* Плотности импульсов pi^i_j=pi[i,j] *)
Do[Do[pi[i,j]=(muh[i,j]-If[i==j, ms, 0])gd/2//
Simplify, {j,3}],{i,3}];

(* Уравнения связей \pi^j_{i;j}=links[i] *)
Do[lnks[i]=Sum[D[pi[j,i],x[j]]-
  Sum[pi[j,k]cs2[k,i,j],{k,3}] //
  Simplify, {j, 3}], {i, 3}];

(* Плотность кинетической энергии *)
Ekin=Sum[Sum[pi[i,j]muh[j,i],{j,3}],{i,3}]/
Simplify;

(* Вклад кинетической энергии *)

(* в динамические уравнения *)
Do[Do[q[i,j]=D[pi[i,j],t]+
  Sum[D[GlobalVel[[s]]pi[i,j],x[s]]+
    pi[i,s]D[GlobalVel[[s]], x[j]]-
    pi[s,j]D[GlobalVel[[i]], x[s]], {s, 3}]-
    If[i==j, Ekin/2,0]//Simplify, {j,3}], {i,3}];

(* Динамические уравнения eqs[i,j] *)
Do[Do[eqs[i, j] =
  2q[i,j]+(ric[i,j]-If[i==j, rs/2, 0])gd//Simplify,
  {j,3}], {i, 3}];

```

```

(* Гамильтониан Н *)
H=2 Sum[Sum[muh[i,j]pi[j,i],{i,3}],{j,3}]-LL //
Simplify;

(* Лагранжиан LL *)
LL = Ekin + rs gd/2 // Simplify
] (* Конец модуля *)

```

Как результат работы модуля выводится лагранжиан (результат работы последнего оператора).

4.2. Vortex

Здесь мы приведем в качестве примера получение уравнений для космических вихрей (8.19). Персменную ϑ мы обозначаем идентификатором tt , а $\varphi - fi$.

```

Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}]
W = E^w[r, tt];
gg[1, 1] = W;
gg[2, 2] = W r^2;
gg[3, 3] = r^2 Sin[tt]^2;
GG = Array[gg, {3, 3}];
GG // MatrixForm

Glob[{r, tt, fi}, {0, 0, V[r, tt]}, GG]

```

Как непосредственный результат работы модуля выдается лагранжиан LL.

Выведем уравнения связей (lnks) и динамики (eqs):

```

Lnk = Array[lnks, 3] // Simplify
Eq = Array[eqs, {3, 3}] // Simplify

z12 = eqs[1, 2] 2/r
z11 = 4 eqs[1, 1]

```

Комбинируя уравнения, находим производные метрической функции $w[r, tt]$ по ее аргументам:

```

zz1 = 2 z12 Cos[tt] + z11 Sin[tt] // Simplify

ss=Solve[zz1==0, D[w[r,tt],r]]
w1=D[w[r,tt],r]/.ss[[1]] //Simplify

```

```

zz2 = 2 z12 Sin[tt]-z11 Cos[tt] // Simplify
ss=Solve[zz2==0, D[w[r,tt],tt]]
w2=D[w[r,tt],tt]/.ss[[1]] //Simplify

```

Задавая различный вид метрики, а также поле абсолютных скоростей, с помощью модуля Glob находятся уравнения динамики и связей для различных физических задач ТГВ.

5. Моды деформации трехмерной сферы

Прежде всего напомним модуль вычисления вариаций тензора Риччи по заданным возмущениям метрики (10.17). Аргументом является матрица 3×3 возмущений h :

```

Approx[h_] := Module[{dgd, dg, ds},
  Do[Do[
    Do[dgd[i,j,k] =
      D[h[[k,i]],x[j]]+D[h[[k,j]],x[i]]-
      D[h[[i,j]],x[k]]-
      2Sum[cs2[s,i,j]h[[k,s]],{s,3}]]//Simplify,
      {k,3}],{j,3}],{i,3}];
    Do[Do[Do[
      dg[i,j,k]=Sum[hh[i,s]dgd[j,k,s]/2,{s,3}]] //
      Simplify,
      {k,3}],{j,3}],{i,3}];
    Do[ds[i]=Sum[dg[k,i,k]]//Simplify,{k,3}],{i,3}];
    Do[Do[
      dR[i,j] = -D[ds[i],x[j]] +
      Sum[D[gd dg[k,i,j],x[k]]/gd +
      cs2[k,i,j]ds[k]]//Simplify,{k,3}]-
      Sum[Sum[(cs2[s,k,i]dg[k,s,j] +
      cs2[s,k,j]dg[k,s,i]),
      {k,3}],{s,3}],{j,3}],{i,3}];
    Array[dR,{3,3}]
  ]

```

Модуль использует метрику и связности пространства, для вычисления которых нужно запустить определенный выше модуль Ricci, предварительно определив метрику сферы (10.19):

$$GG = \left\{ \left\{ \frac{1}{1-x^2}, 0, 0 \right\}, \{0, x^2, 0\}, \{0, 0, 1-x^2\} \right\}.$$

В результате работы модуля

```
Ricci[{x,u,w},GG]
```

выдается тензор Риччи трехмерной сферы

$$\{\{2, 0, 0\}, \{0, 2, 0\}, \{0, 0, 2\}\},$$

а все геометрические объекты (связности и пр.) запоминаются.

Ли-оператор в пространстве поля тензора второго ранга (10.24) может быть определен модулем

```
KillT[V_, T_] := Module[{i, j},
  Do[Do[
    kT[i, j] =
      Sum[V[[k]]D[T[[i, j]], x[k]] + D[V[[k]], x[i]]T[[k, j]]
        D[V[[k]], x[j]]T[[i, k]]
        , {k, 3}] // Simplify, {j, 3}], {i, 3}];
  Array[kT, {3, 3}]
]
```

с двумя параметрами V — векторное поле — и T — тензор второго ранга. Он возвращает также тензор второго ранга.

Теперь нужно определить векторы Киллинга (10.21, 10.22):

$$V_p = e^{i(u+w)} \left\{ -\frac{1}{2} i \sqrt{1-x^2}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}, -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \right\},$$

$$V_m = e^{i(-u+w)} \left\{ \frac{1}{2} i \sqrt{1-x^2}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}, -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \right\},$$

$$W_p = e^{i(u-w)} \left\{ -\frac{1}{2} i \sqrt{1-x^2}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}, \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \right\},$$

$$W_m = e^{i(-u-w)} \left\{ \frac{1}{2} i \sqrt{1-x^2}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}, \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \right\},$$

$$V_3 = \{0, 1, 1\}/2 \quad W_3 = \{0, 1, -1\}/2.$$

Далее определяются операторы $\hat{V}_{-+}$ и пр. с использованием описанного выше модуля KillT, определяющего Ли-вариацию по векторным полям Киллинга любого дважды ковариантного тензорного поля h :

```
Vmp[h_] := KillT[Vm, KillT[Vp, h]]
```

```

Wmp[h_] := KillT[Wm, KillT[Wp, h]]
VP[h_] := KillT[Vp, h]
VM[h_] := KillT[Vm, h]
WP[h_] := KillT[Wp, h]
WM[h_] := KillT[Wm, h]
VP[h_] := KillT[Vp, h]
VM[h_] := KillT[Vm, h]
WP[h_] := KillT[Wp, h]
WM[h_] := KillT[Wm, h]
Vpm[h_] := KillT[Vp, KillT[Vm, h]]
Wpm[h_] := KillT[Wp, KillT[Wm, h]]
vho[n_] := Vmp[ho[n]]/(n + 2)^2 + ho[n] // Simplify
who[n_] := Vmp[ho[n]]/(n + 2)^2 + ho[n] // Simplify
VV[f_] := KillT[V3, f]
WW[f_] := KillT[W3, f]
VPM[ff_] := Vpm[ff] + m ff // Simplify
VMP[ff_] := Vmp[ff] + m ff // Simplify
WPM[ff_] := Wpm[ff] + m ff // Simplify
WMP[ff_] := Wmp[ff] + m ff // Simplify

```

Далее определяются базовые моды.

Четные моды. Сначала определяются полином (играющий роль полинома Лежандра в сферических функциях):

```

wf[n_] := Module[{a, k, f}, a = 1; f = 1;
Do[a = -a (n - k + 1) (n + k + 2) / (k (k + 1)) x^2; f = f + a, {k, n}];
f
]

```

определяющий две базовые моды:

```

dgs[n_] := Module[{f, f2}, f = wf[n];
f2 = D[x(1 - x^2)f, x] // Simplify;
h11 = f / (1 - x^2);
h22 = f2 x^2;
h33 = -(f + f2) (1 - x^2);
{{h11, 0, 0}, {0, h22, 0}, {0, 0, h33}}
]

```

и

```

dgd[n_] := Module[{f}, f = wf[n] x^2 (1 - x^2);
{{0, 0, 0}, {0, 0, f}, {0, f, 0}}
]

```

Собственными векторами операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$ являются их линейные комбинации:

```
ud[n_] := dgs[n] + (2 n + 3) dgd[n]
```

```
uu[n_] := dgs[n] - (2 n + 3) dgd[n]
```

Нечетные базовые моды.

Полином для нечетных базовых функций содержит только нечетные степени:

```
fo[n_] := Module[{a, k, f}, a = x; f = x;
  Do[a = -a((n - k + 1)(n + k + 3))/(k(k + 2)) x^2; f = f + a, {k, n}];
  f
]
```

Через него определяется мода:

```
ho[n_] := Module[{f}, f = fo[n];
  h11 = f/(1 - x^2);
  f2 = 2(1 - 2 x^2) f + x(1 - x^2) D[f, x] // Simplify;
  h22 = f2 x^2;
  f1 = -x f;
  h33 = -(f + f2)(1 - x^2) // Simplify;
  {{h11, i f1, 0}, {i f1, h22, 0}, {0, 0, h33}} \e^{i u}
]
```

с помощью которой и результата воздействия на нее оператора $\hat{V}_{+-}$ определяются собственные векторы операторов $\hat{V}_{+-}$ и $\hat{W}_{+-}$:

```
od[n_] := Module[{f, f1}, f = ho[n];
  f1 = Vpm[f];
  ood = (f(n + 3)^2 + f1)/4 // Simplify;
  oou = -((n + 1)^2 f + f1)/4 // Simplify;
  {ood, oou} e^{(-i u)} // Simplify
]
```

Задавая параметр n , получаются четные или нечетные базовые моды h выбранной поляризации нужного порядка.

Действие на них оператором Approx

```
Approx[h] -> h // Simplify
```

показывает, что они являются собственными векторами этого оператора.

Действие теперь на эту моду операторами $\hat{V}_+$, $\hat{V}_-$, $\hat{W}_+$, $\hat{W}_-$ приводит к построению всех мод данной поляризации. На всех полученных таким образом модах собственное значение оператора Approx одинаково.

ГЛАВА 18

Нильс Бьерн (1865–1909)

Утверждение, что произведение пространства на время является всегда наименьшей величиной, нам кажется неправильным.

Ф. М.-А. Вольтер

На наше представление о структуре пространства и времени, выраженное в концепции “общая теория относительности” (ОТО), существенное влияние оказала последовательность прохождения концептуальных барьеров: сначала при активнейшем участии Альберта Эйнштейна создается специальная теория относительности (СТО), объявившая об отсутствии абсолютного времени, а затем тот же Альберт Эйнштейн при участии математиков Гроссмана и Гильберта создает общую теорию относительности (ОТО). Несмотря на то что физические объекты у этих теорий различны, авторское единство привело к сильнейшему влиянию идей релятивизма на теорию гравитации, которая оказалась как бы обобщением СТО.

Парадокс истории создания общей теории относительности состоит в том, что ее экспериментальная база была создана более 300 лет назад, в легендарных экспериментах Галилея по наблюдению падения пуль и ядер, сброшенных с Пизанской башни. Для осознания *принципа эквивалентности* не нужен был эксперимент Майкельсона–Морли или тончайшие эксперименты Этвеша. СТО понадобилась только для того, чтобы ребром поставить вопрос: что такое *инерциальная система*? Эйнштейн поставил этот глубочайший вопрос лишь в 1911 году [37].

Могла ли теория гравитации строиться на нерелятивистской основе? Принцип эквивалентности как представление о том, что в свободно падающей системе все свободные тела не испытывают ускорения и движутся равномерно и прямолинейно, известен был задолго до Эйнштейна. Итак, предположим, что. . .

Совершенно неожиданно в наши руки попала подшивка рукописного журнала *Archiv for Naturvidenskab*, издававшегося в 1888–1909 гг. группой норвежских школьных учителей. С ней нас ознакомила Анна Флоренс, правнучка Нильс Бьёрна, учителя математики в сельской школе.

Нильс Бьёрн (Nils Bjern, 1865–1909) окончил университет в Христиании, где, в частности, слушал лекции Софуса Ли. Однако в университете не было духа гонки за какими-то научными открытиями, и Нильс с удовольствием начал преподавать математику в сельской школе. Был дружен с Вильгельмом Бьёркнесом, заинтересовавшим его проблемами гидродинамики, и Нильс написал несколько работ по течению вязкой жидкости, однако, принципиально не желая принимать участие в "европейской научной гонке", не стал направлять их в журналы, а вместе с несколькими учителями своей и ближайших школ организовал свой рукописный журнал *Archiv for Naturvidenskab*, в издании которого активно участвовали ученики, также писавшие статьи для журнала.

Тематика журнала была самая разнообразная: бабочки, туманы, рунические письмена, но печатались также работы по физике и математике. И вот в этом журнале обнаружился удивительный цикл статей Н. Бьерна, в которых гравитация предстает в совершенно непривычном виде с точки зрения физики XX века.

1. Работы Бьерна и эксперименты XX века

В основных своих работах Бьёрн предсказал все экспериментальные факты, считающиеся проверкой ОТО.

- 1) Искривление светового луча в поле тяжести. Проверено экспериментально в 1919 году.
- 2) Изменение частоты света при переходе между точками с различными гравитационными потенциалами. Проверено Паундом и Реббкой в 1959 году.
- 3) Расширение Вселенной (Фридман, Хаббл).
- 4) Уменьшение частоты света при расширении Вселенной.
- 5) Гравитационное излучение энергии. Замерено Тейлором и Халсом. Нобелевская премия 1993 года.
- 6) Расчет угловой скорости вращения перигелия Меркурия.

Несмотря на малость этих эффектов, их описания совпадают в теории Бьёрна и ОТО не только в первом порядке, но и в точных формулах. Это говорит о том, что *принцип эквивалентности*, лежащий как в основе теории Бьёрна, так и ОТО, является определяющим физическим принципом теории гравитации.

Нужно, правда, отметить, что величина замеренного Паундом и Ребб-кой гравитационного красного смещения не совпадает с величиной, рассчитанной Бьёрном, но из его формул правильное выражение получается, если учесть специальную теорию относительности. Так же и относительно потерь энергии за счет гравитационного излучения — Бьёрн рассчитал только плоскую (нелинейную) гравитационную волну; лишь линеаризация и учет связи с материей дадут формулу Эйнштейна, косвенно проверенную Пензиасом и Вильсоном.

Короче говоря, для полного совпадения с результатами ОТО в его теорию нужно добавить специальную теорию относительности, что он успел сделать лишь в последней своей работе о движении перигелия Меркурия.

2. Инерциальная система

В 1891 году Нильс Бьёрн печатает работу “Инерциальная система внутри мяча”, в которой он, в частности, пишет:

Мне подарили небольшой мячик, с помощью которого я демонстрирую своим ученикам различные физические явления, в частности, движение свободно брошенного тела по параболе. Но у мяча есть дефект: при его отливке внутрь его попал то ли камешек, то ли кусочек каучука, и, если мячик потрясти, слышен стук. Ученики про него знают и называют его “хозяином”. Однажды при демонстрации полета мяча один ученик спросил: “А хозяин тоже летит по параболе?” Я, не задумываясь, ответил “конечно”. Однако вопрос застрял в моей голове, и я несколько дней непрерывно размышлял о происходящем внутри мяча во время его полета. Я проводил вычисления, а также вспомнил, что в каком-то задачнике читал задачу о полете снарядов, где в решениях рекомендовалось перейти в свободно падающую систему, в которой все снаряды движутся равномерно и прямолинейно. Значит, и с точки зрения одного из них все другие движутся равномерно и прямолинейно. Значит, и во время полета моего мяча “хозяин” относительно стенок движется равномерно и прямолинейно или покоится.

Но ведь это значит, что внутри мяча реализуется инерциальная система. А мы, стоя на земле, находимся в неинерциальной системе. И это легко проверить, отпустив тот же мячик: он не останется в покое, а будет равноускоренно падать.

С математической точки зрения это есть следствие одинаковости ускорения свободного падения для всех тел, независимо от их массы.

Физически же это значит, что только внутри ядра или мяча, совершающего свободный полет, реализуется действительно инерциальная система.

Далее он пытается вывести из этого соображения некоторые следствия, но серьезные результаты достигнуты им лишь в работе 1894 года.

3. Всеобщая инерциальная система (1894)

Через три года, в 1894 году, Нильс Бьёрн, увлеченный восхитившей его идеей, печатает совершенно зрелую работу "Всеобщая инерциальная система", в которой сделаны важнейшие выводы о структуре пространства.

При отсутствии гравитационного поля абсолютная инерциальная система (абсолютное пространство Ньютона) представляет из себя неизменное евклидово пространство. Все законы физики "привязаны" к этому абсолютному пространству. Так как в ключевом законе механики, втором законе Ньютона, центральным объектом является ускорение, то в некоей евклидовой системе, движущейся равномерно и прямолинейно по отношению к абсолютной, законы механики оказываются точно такими же, как и в абсолютной. Возникает понятие множества инерциальных систем.

Однако при наличии гравитационного поля абсолютное пространство перестает быть евклидовым, и скорость относительно него в некотором евклидовом пространстве оказывается неоднородной, зависящей от точки. Гравитация снимает возможность множества равноправных глобальных инерциальных систем, оставляя таковой только одну.

Он рассматривает Солнце и строит вокруг него поле скоростей относительно инерциальной системы.

Итак,

“инерциальная система — это свободно падающий полый мяч. Но если рассмотреть его в гравитационном поле Солнца, то более удаленная от Солнца и более приближенная к нему части мяча имеют различные ускорения, а также ускорения боковых точек, направленные к центру Солнца, слегка непараллельны. Одинаковость ускорения в неоднородном гравитационном поле соблюдается лишь в бесконечно малой области. Поэтому евклидовы инерциальные системы существуют лишь в бесконечно малом. Всеобщая инерциальная система не является евклидовой и состоит из множества согласованно летящих по инерции мячей.”

Для описания распределенных физических систем приходится строить непрерывную совокупность бесконечно малых систем. Математическим аппаратом для построения такой совокупности является уравнение Гамильтона–Якоби. Для свободно падающих в гравитационном потенциале $\phi(\mathbf{r})$ мячей выписывается уравнение для действия S :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + m\phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (18.1)$$

Скорость движения инерциального мяча отсюда

$$\mathbf{V} = \frac{\nabla S}{m}.$$

В статическом случае $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ и уравнение после введения функции $s = S/m$ принимает вид

$$\frac{(\nabla s)^2}{2} + \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (18.2)$$

Поле скоростей

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \nabla s; \quad V^2 = \sqrt{-2\phi} \quad (18.3)$$

он называет *полем абсолютных скоростей*.

“Гравитационное поле делает инерциальную систему единственной”, — пишет Бьёрн. — “Единственное поле абсолютных скоростей, найденное из уравнений (18.2) и (18.3) при неоднородном

потенциале $\varphi(r)$, не допускает преобразований Галилея от одной инерциальной системы к другой. Такое преобразование допустимо лишь в малой области, где абсолютную скорость можно считать постоянной, и с точки зрения механики равномерно движущиеся (в малом) системы оказываются равноправными. Но во всем пространстве поле абсолютных скоростей оказывается единственным.

Самое главное, я понял: ранее в физике рассматривались системы, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно абсолютной инерциальной системы; при наличии гравитационного поля таких систем просто нет.

Лишь в случае отсутствия гравитационного потенциала абсолютная скорость постоянна во всем пространстве и все равномерно движущиеся системы оказываются равноправными для механических движений.”

Далее Бьери рассматривает Солнце как сферическое тело массы M , полагая, что s зависит только от радиуса:

$$\phi = -\frac{kM}{r}; \quad V = V_r = \sqrt{-2\phi} = \sqrt{\frac{2kM}{r}}. \quad (18.4)$$

На бесконечности поле абсолютных скоростей равно нулю.

Пространство вне Солнца с полученным полем абсолютных скоростей автор называет *инерциальной системой Солнца*.

4. Движение тел в инерциальной системе Солнца

То, что введенная система является эффективным физическим инструментом, автор демонстрирует на примере описания движения тел в инерциальной системе Солнца как движения свободных частиц. Описание ведется на лагранжевом языке. Для свободного тела (с единичной массой — так как от массы закон движения не зависит) в сферической системе координат

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{r} - V)^2 + r^2 \dot{\phi}^2). \quad (18.5)$$

Импульсы

$$p_r \equiv p = \dot{r} - V; \quad p_\phi \equiv l = r^2 \dot{\phi} = \text{const} \quad (18.6)$$

определяют гамильтониан:

$$H = \dot{r} p + \dot{\phi} l - L = \frac{\dot{r}^2 - V^2}{2} + \frac{l^2}{2r^2} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) - \frac{kM}{r} = E. \quad (18.7)$$

Последнее выражение в точности совпадает с гамильтонианом частицы в сферическом гравитационном поле и определяет движение по коническим сечениям.

5. Выводы

В конце работы он подводит итоги.

- 1) Классические евклидовы инерциальные системы имеют бесконечно малые размеры.
- 2) Всеобщая инерциальная система не является евклидовой и не связана с каким-либо объемным твердым телом.
- 3) Общая мировая евклидова система является неинерциальной, что определяется заданным в ней полем абсолютной скорости, определяемым гравитационным потенциалом.
- 4) Задание поля абсолютных скоростей равносильно заданию гравитационного потенциала.

6. Более общий случай движения в гравитационном поле

В следующей работе этого же года Бьёрн рассматривает более общий случай гравитационного потенциала. Если имеется произвольное абсолютное поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, связанное с гравитационным потенциалом соотношением (18.2), то движение свободной частицы в этом поле описывается лагранжианом

$$L = \frac{(\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V})^2}{2}; \quad \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}; \quad (18.8)$$

$$H = \mathbf{p} \dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{V(r)^2}{2} = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \phi(r).$$

И в общем случае описание полем абсолютной скорости эквивалентно описанию гравитационным потенциалом — гамильтониан одинаков.

7. Распространение света (1896)

Однако Нильс Бьёрн понимает, что понятие *инерциальная система* значительно шире, чем *гравитационный потенциал*, оказывающий воздействие лишь на механические системы. Он начинает заниматься распространением света в движущихся системах, находясь при этом на классических ньютоновых позициях абсолютного пространства и абсолютного движения. Он полагает, что в абсолютной инерциальной системе уравнение эйконала имеет известный вид

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 = 0; \quad \omega_0 = \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad \mathbf{k} = \nabla \psi. \quad (18.9)$$

При переходе от абсолютно покоящейся системы к движущейся относительно нее со скоростью $\mathbf{V}$ производные по координатам не меняются, а производные (от скаляра) по времени приобретают “переносную” добавку

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla. \quad (18.10)$$

Поэтому при переходе от абсолютно покоящейся системы к движущейся у луча волновой вектор $\mathbf{k}$ не меняется, а частота преобразуется по закону

$$\omega_0 = \omega + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}). \quad (18.11)$$

Бьёрн изучает дисперсионное уравнение в системе, имеющей абсолютные скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$:

$$\frac{1}{c^2}(\omega + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}))^2 - \mathbf{k}^2 \stackrel{\text{def}}{=} 2h(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (18.12)$$

Из теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка следует, что для лучей (характеристик) существует некоторый параметр τ , в котором характеристики параметрически задаются уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}}. \quad (18.13)$$

В сферически симметричном случае с полем (18.4)

$$h = \frac{1}{2} \left(k_r^2 + \frac{k_\varphi^2}{r^2} - \frac{(\omega + V(r) k_r)^2}{c^2} \right) = 0. \quad (18.14)$$

Отсюда

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial h}{\partial k_r} = k_r \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{V\omega}{c^2}; \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{k_\varphi}{r^2}, \quad (18.15)$$

а ω и k_φ являются константами.

Величину k_r можно выразить из соотношения (18.14):

$$k_r^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - 2 \frac{\omega}{c} \frac{V}{c} k_r + \frac{k_\varphi^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0;$$

$$k_r = \frac{\frac{V\omega}{c^2} - \sqrt{1 - \frac{k_\varphi^2}{r^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}; \quad \frac{dr}{d\tau} =$$

$$k_r \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{V\omega}{c^2} = \sqrt{1 - \frac{k_\varphi^2}{r^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{k_\varphi^2}{r^2} \left(1 - \frac{2kM}{rc^2}\right)}.$$

Эти выражения определяют дифференциальное уравнение траектории луча:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{r^2}{k_\varphi} \sqrt{1 - \frac{k_\varphi^2}{r^2} \left(1 - \frac{2kM}{rc^2}\right)}. \quad (18.16)$$

Нильс Бьёрн предсказывает искривление светового луча в поле тяготения! Отклонение луча от прямой определяется максимальным значением величины

$$\frac{2kM}{rc^2}$$

при r , равным радиусу Солнца, и, вычислив эту величину, Бьёрн пишет, что эффект в поле Солнца ничтожно мал и на наблюдаемую картину неба практически не сказывается.

Однако обратим внимание, что эта формула в точности совпадает с формулой общей теории относительности (см., например, [20]).

8. Изменение частоты света

В выражении (18.11) величина ω является константой, но физической частотой — в инерциальной системе — является величина ω_0 — в инерциальной системе, — которая различна в разных точках.

Отмечая это обстоятельство, Бьёрн получает эффект, называемый в наше время *гравитационным красным смещением*.

Следует при этом отметить, что Бьёрн, не знакомый еще с понятием собственного времени (до создания СТО), полагает, что в эксперименте проявляется изменение ω_0 , так что при правильном (с точки зрения ОТО) дисперсионном соотношении (18.12) вычисляемые им поправки не совсем корректны.

9. Космология (1897)

Бьёрн уже пришел к выводу о неевклидовости абсолютного пространства, однако элементарные соображения — наличие поля скоростей — приводят его к мысли о нестатичности пространства.

Он ищет простую задачу, где абсолютное пространство описывается явно. В 1897 году он рассматривает пылевидную (звездную) материю, распределенную с однородной плотностью ρ . Вследствие гравитационного притяжения эта система не может быть статической, но все пылинки движутся инерциально (в поле тяготения). Для расчета их движения выделим среди них некую точку — “центр Мира”. Другая точка на расстоянии r от этого центра движется под действием силы притяжения массы внутри сферы радиуса r :

$$M = \frac{4}{3}\pi \rho r^3. \quad (18.17)$$

Из закона сохранения энергии, как и в задаче о сферическом теле,

$$V^2 = \frac{2kM}{r} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Так как при движении масса внутри сферы не меняется, это выражение можно рассматривать как дифференциальное уравнение, решение которого

$$r^3 = \frac{9kM}{2}t^2. \quad (18.18)$$

Скорость удаления какой-либо звезды от “центра” в каждый момент пропорциональна расстоянию до него и направлена от центра:

$$v = \frac{2}{3t} r, \quad \mathbf{v} = \frac{2}{3t} \mathbf{r}. \quad (18.19)$$

Если, например, скорость Солнца $\mathbf{v}_0$, то скорость звезды относительно Солнца

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \frac{2}{3t} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (18.20)$$

— как если бы Солнце было этим выделенным центром.

Таким образом, роль “центра Мира” может играть любая звезда: движение относительно нее таково, как если бы она была этим покоящимся центром. В частности, при $\mathbf{r} = 0$ скорость движения равна нулю — свободно отпущенное тело относительно заданной точки покоится — выполняется Первый закон Ньютона. При этом все точки равноправны. Это множество звезд с расстояниями, меняющимися по закону (18.18), реализует *нестатистическую всеобщую инерциальную систему*.

Для объяснения изменения расстояния между звездами приходится вводить масштаб, зависящий от времени:

$$r(t) = m(t) \cdot \bar{r}; \quad m(t) = (t/t_0)^{2/3}, \quad (18.21)$$

где $\bar{r}$ неизменное (угловое) расстояние между звездами.

Таким образом, инерциальная система в этой задаче построена в явном виде и ее геометрические свойства оказываются динамическими.

Владея техникой описания движения света, Бьерн демонстрирует изменение частоты свободно распространяющегося света при изменении масштаба мира. Дисперсионное соотношение:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mathbf{k}^2}{m^2(t)}.$$

Так как система инерциальная, то ω является абсолютной частотой. Вследствие однородности пространства $\mathbf{k}$ постоянен и частота оказывается обратно пропорциональной масштабу.

10. Софус Ли

В 1899 году выходит работа: “Софус Ли, Нильс Бьерн. Динамика пространства.” Работа написана одним Бьерном и опубликована все в том же рукописном журнале *Archiv for Naturvidenskab*. Во Введении он подробно рассказывает о роли Софуса Ли в создании этой работы:

Карл Бьёркнес, с которым я часто общался, благодаря моей дружбе с Вильгельмом, и который с большим интересом относился к моим работам, нередко говорил, что их обязательно нужно показать

Софусу Ли. Когда осенью 1898 года Ли вернулся в Норвегию, Бьёркнесу удалось договориться о моей встрече с профессором. Однако меня предупредили, что из-за плохого состояния здоровья профессор сможет мне уделить не более одного часа.

Мы приехали к нему мрачным осенним утром. Профессор был хмур, лицо его было опухшим и отливало синеватым оттенком. Однако встретил меня он достаточно приветливо и даже сделал вид, что вспомнил меня как студента. Мы уселись в кресла, и он приготовился слушать. Я начал излагать ему свои мысли по поводу замены гравитационного потенциала полем абсолютных скоростей, об искривлении луча полем Солнца. Он слушал все более и более внимательно. Когда я рассказал о космологической задаче, он вскочил с кресла, несколько минут ходил по комнате и наконец воскликнул:

"Я всегда говорил Феликсу [видимо, Клейну], что наш мир не может быть всюду плоским, как евклидовы треугольники! Вы ведь тоже идете от евклидова Мира, у Вас меняется только общий масштаб. Но звезды на небе расположены неоднородно. А значит, и этот масштаб в разных частях Мира будет меняться по-разному. Но это значит, что будут меняться все компоненты квадратичного риманова элемента пространства. Вот для чего нужна новая теория, которую я сейчас разрабатываю!"

Уже давно прошел назначенный час. Ли грозно отверг намски домашних на необходимость закончить встречу. Нас пригласили к обеду. Профессор почти ничего не ел, сидел тихо, весь погруженный в себя и как бы светился каким-то внутренним светом. Лицо его порозовело, пропала болезненная синева.

После обеда он совершенно спокойно, даже не мне, а скорее себе сформулировал, что же нужно делать:

1. Пространство является римановым, описываемым римановой квадратичной формой.
2. Зависимость элементов квадратичной формы пространства от времени должна определяться из принципа наименьшего действия, куда, в отличие от теории Лапласа, должны входить производные по времени.
3. Но это значит, что эти уравнения должны иметь волновые решения и в лагранжиан должна входить константа, определяющая скорость гравитационной волны.

4. Преобразование к абсолютной инерциальной системе координат, где поле абсолютной скорости всюду равно нулю, требует зависимости новых координат от времени.
5. Нужно построить формулы преобразования тензоров от абсолютной инерциальной системы к неинерциальной.

Он не только сформулировал эти вопросы, но почти по всем набросал пути поиска ответов. Когда мы, уже вечером, прощались, он мне сказал: "Это Вам задание на неделю. Ровно через неделю приезжайте ко мне, посмотрим, что получилось. А мне неделя тоже нужна: я теперь знаю, на что нужно направлять мою новую теорию. Феликс лопнет от зависти."

К глубочайшему сожалению, ни через неделю, никогда больше мы не смогли с ним встретиться. В следующий раз я увидел его лишь на похоронах.

В этой и последующих работах я попытаюсь реализовать идеи, высказанные профессором Ли во время той единственной встречи. Я смотрел на свои работы, как на забаву, и никак не ожидал такого бурного интереса к ним от заслуженного профессора.

11. Абсолютная инерциальная система

Первое, о чем шел разговор, — об абсолютной инерциальной системе.

"Общепринято считать, что инерциальная система представляет из себя неизменное евклидово пространство, — говорил профессор Ли. — Я не знаю, поняли ли Вы, что Вы показали совершенно другие свойства пространства. Во-первых, оно динамично. Его риманова квадратичная форма зависит от времени, и, хотя в вашей работе меняется только масштаб — это следствие однородности задачи, — в общем неоднородном случае должны меняться все компоненты. То есть общая инерциальная система может иметь тензор Кристоффеля, не равный нулю."

На мой вопрос, как это может быть, профессор ответил: "Ну, например, наш мир может оказаться трехмерным сферическим пространством Римана. Все направления равноправны, но куда бы Вы не пошли, пройдя одно и то же расстояние в любом направлении, Вы вернетесь в ту же точку с противоположной стороны. Если радиус этой сферы очень большой, то мир нам кажется плоским. Как

Землю мы воспринимаем плоской. Однако радиус Мира должен быть несравненно больше радиуса Земли. А самое главное, как Вы показали, он зависит от времени. Мы с Вами пока не знаем, как вычислить эту зависимость, но сегодня мы должны разработать принципы, на основании которых эта зависимость может быть получена.

Зависимость римановой квадратичной формы от времени неизбежна для того, чтобы в каждой точке инерциальной системы выполнялся первый закон Ньютона, но в более жесткой форме, только с одним требованием: покоящееся тело остается в покое. О равномерном движении в общем случае и говорить не приходится, разве что в бесконечно малом, где все пространства являются плоскими. Именно внутри Вашего мяча первый закон Ньютона выполняется полностью.

Мы с Вами спокойно сидим в креслах, но наша система не является инерциальной. Я отпускаю карандаш, но он не сохраняет состояние покоя. С точки зрения Вашего поля абсолютной скорости в инерциальной системе это поле равно нулю во всех точках. Поэтому проблема распадается на две части: построение теории в общей инерциальной системе и пересчет всех результатов в произвольную систему. Вторая часть с точки зрения математики является чисто технической (в основном благодаря моим работам)."

12. Принцип наименьшего действия

Далее собеседники перешли к обсуждению уравнений динамики пространства во всеобщей инерциальной системе.

Профессор настойчиво утверждал, что динамика римановой квадратичной формы должна определяться из принципа наименьшего действия Гамильтона. Видно было, что к этому принципу он относится с особым вниманием.

"Функция Лагранжа для различных полей представляется как разность плотностей кинетической и потенциальной энергии."

Построение кинетической энергии собеседники начали с изучения размерности. Размерность гравитационной постоянной $[kg^{-1} \cdot m^3 \cdot c^{-2}]$. Лагранжиан имеет ту же размерность, что и энергия $[kg \cdot m^2 \cdot c^{-2}]$, которую для получения размерности плотности лагранжиана нужно разделить на m^3 :

$[kg \cdot m^{-1} \cdot c^{-2}]$. Произведение последней на гравитационную постоянную имеет размерность $[m^2 c^{-4}]$, то есть размерность квадрата производной по времени от масштаба $[c^{-2}]$, умноженного на квадрат некоторой скорости.

“Это, без сомнения, скорость распространения гравитации!” — воскликнул профессор. — “Я слышал, что она значительно превышает даже скорость света, но она не бесконечна. Гравитация также может распространяться в виде волн. Назовем эту скорость U . Теперь мы можем сконструировать выражение для кинетической энергии. Моя новая работа, над которой я начал работать, называется “Вариация инвариантных интегралов”. Она посвящена составлению интегралов, инвариантных по отношению к координатным преобразованиям. Из инвариантности при бесконечно малых преобразованиях следуют интересные дифференциальные тождества. Однако пока эта теория у меня имела чисто абстрактный характер. Вы предоставили великолепную область ее приложения.”

В результате обсуждения авторы приходят к выражению для плотности кинетической энергии (мы записываем его в современных обозначениях с использованием верхних и нижних индексов):

$$T = \frac{U^2}{2k} ((g^{ij}g^{kl} - g^{ik}g^{jl})\dot{g}_{ik}\dot{g}_{jl}) \cdot \sqrt{\det(g)}, \quad (18.22)$$

при этом Софус Ли настаивал именно на знаке “минус”, утверждая, что знак “плюс” дал бы только колебательные решения, а не бесконечное расширение, как это имело место в космологической задаче Нильса Бёерна.

“Теперь нужно правильно записать плотность потенциальной энергии. Здесь моя новая работа дает почти однозначный ответ. Она должна быть пропорциональна скаляру пространственной кривизны.”

Таким образом, авторы приходят к выражению для действия динамики пространства в инерциальной системе:

$$S_g = \frac{U^2}{2k} \int ((g^{ij}g^{kl} - g^{ik}g^{jl})\dot{g}_{ik}\dot{g}_{jl} + q U^2 R) \sqrt{g} d^3x dt, \quad (18.23)$$

где q — пока не определенная константа.

“Вам я задаю довольно сложную задачу. Срок — неделя. Нужно, как и в электродинамике, построить решение для плоской волны,

где все компоненты римановой квадратичной формы зависят от времени и только от одной из координат. Если бы пространство было двумерно – Вы это сделали бы легко. Я помню, как Вы быстро считали вторую гауссову квадратичную форму по первой.” – Софус Ли действительно вспомнил меня как студента. В дифференциальной геометрии я ориентировался очень свободно. – “Вам нужно взять $dl^2 = m^2(x, t) dx^2 + A^2(x, t) dy^2 + B^2(x, t) dz^2$ и вычислить гауссову кривизну этой формы. Если Вы положите $A = 0$ – Вы получите двумерную поверхность, для которой Вы все легко вычислите. Аналогично, если положить $B = 0$. Ваш окончательный ответ должен переходить в эти частные случаи. Но нужно вычислить еще взаимовлияние A и B . Ладно, на неделю у Вас и без этого работы много, я подумаю сам, как упростить вычисления. Дело в том, что в любой момент времени можно выбрать координату x так, чтобы коэффициент m обратился в единицу. Но установить $m(x, t) = 1$ можно только после вариации.”

Это задание полностью я не выполнил до сих пор, но вслед за этой работой я непременно займусь гравитационной волной.

13. Координатные преобразования

Затем собеседники обсудили перевод результатов в неинерциальную систему координат общего вида.

Обозначим пространственные координаты инерциальной системы через $\bar{x}^i$, а некоторой произвольной системы $x^j(\bar{x}, t)$.

Преобразования пространственных переменных x^i могут зависеть от времени. При этом появляется вектор абсолютной скорости, а квадратичный риманов элемент преобразуется так:

$$V^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}; \quad g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \bar{g}^{kl}. \quad (18.24)$$

Производные по времени, если функция зависит от координат, в различных системах выражаются по-разному. Производную по времени в инерциальной системе авторы называют полной производной по времени. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + V^i \frac{\partial F}{\partial x^i}. \quad (18.25)$$

Для тензорной функции выражение чуть сложнее, так как производится еще преобразование, связанное с индексами, однако именно эти преобразования введены и изучены Софусом Ли и в наше время носят название Ли-вариаций. При бесконечно малом преобразовании координат от инерциальной системы $x^i = \bar{x}^i + \xi^i(x, t)$ тензор, напримср, третьего ранга Q_{jk}^i приобретает Ли-вариацию

$$\delta_\xi Q_{jk}^i = \xi_{,s}^i Q_{jk}^s - \xi_{,j}^s Q_{sk}^i - \xi_{,k}^s Q_{js}^i - \xi^s Q_{jk;s}^i.$$

При возврате в инерциальную систему $\xi^s = -V^s dt$, и преобразование выражается через поле абсолютных скоростей V^s и его пространственные производные, которые добавлением и вычитанием соответствующих связностей приводятся к ковариантным (современное обозначение точкой с запятой):

$$\frac{d}{dt} Q_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial t} Q_{jk}^i - V_{;s}^i Q_{jk}^s + V_{;j}^s Q_{sk}^i + V_{;k}^s Q_{js}^i + V^s Q_{jk;s}^i. \quad (18.26)$$

Например, для контравариантного векторного поля A^i

$$\frac{d}{dt} A^i = \frac{\partial A^i}{\partial t} - A^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + V^j \frac{\partial A^i}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial t} - V_{;j}^i A^j + V^j A_{;j}^i. \quad (18.27)$$

Аналогично для ковариантного векторного поля

$$\frac{d B_i}{dt} = \frac{\partial B_i}{\partial t} + V_{;i}^j B_j + V^j B_{i;j}. \quad (18.28)$$

Особо важным является выражение для ковариантной производной по времени компонент метрического тензора. Так как пространственные ковариантные производные от него равны нулю,

$$\frac{d g_{ij}}{dt} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + V_{;i}^j + V_{j;i}. \quad (18.29)$$

Теперь все соотношения, полученные в инерциальной системе координат, можно перенести в произвольную, заменив частную производную по времени на полную. Это, в частности, определяет добавку от поля абсолютной скорости к кинетической энергии в лагранжиане.

Аналогичную замену производных по времени необходимо проводить и при записи уравнений или лагранжианов других полей.

14. Гравитационная волна (1901)

Наконец только более чем через два года после памятной беседы с Софусом Ли Н. Бьёрн завершает работу о плоской гравитационной волне, что позволило ему уточнить коэффициенты в действии (18.23).

Для квадратичной формы

$$dl^2 = m(x, t)^2 dx^2 + A(x, t)^2 dy^2 + B(x, t)^2 dz^2$$

в инерциальной системе кинетическая энергия выражается так:

$$\begin{aligned} T &= 2 \left(\left(\frac{\dot{m}}{m} \right)^2 + \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \left(\frac{\dot{B}}{B} \right)^2 - \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right)^2 \right) m A B = \\ &= -4(\dot{m}(\dot{A}B + A\dot{B}) + m\dot{A}\dot{B}). \end{aligned}$$

Вычисление скалярной кривизны сложнее. После многих попыток я наконец понял, что имел в виду профессор Ли, когда говорил о возможности в какой-то момент времени положить коэффициент $m(x, t)$ равным единице. Это можно сделать, но так как при этом подразумевается преобразование координаты x от инерциальной системы, зависящее от времени, то необходимо ввести поле абсолютной скорости $V_x(x, t) \equiv V$, так что полные производные по времени (при $m = 1$) будут выглядеть так:

$$\frac{dm}{dt} = V'; \quad \frac{dA}{dt} = \dot{A} + V A'; \quad \frac{dB}{dt} = \dot{B} + V B'.$$

Но зато существенно упростится вычисление гауссовой кривизны:

$$R\sqrt{g} = -2(A''B + AB'' + A'B').$$

Для такой волны лагранжиан, описываемый формулой (18.23), принимает вид:

$$\begin{aligned} L &= -4 \left\{ V' \left[(\dot{A} + V A') B + A (\dot{B} + V B') \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\dot{A} + V A')(\dot{B} + V B') \right\} - q(A''B + AB'' + A'B'). \end{aligned}$$

Три вариации (по A , B и V) определяют три дифференциальных уравнения. Однако нас интересует ответ в инерциальной системе,

где $V = 0$, поэтому, положив это соотношение верным после вариации, получим три уравнения на две функции A и B (при $q = 4$):

$$\ddot{A} - A'' = 0; \quad \ddot{B} - B'' = 0; \quad \dot{A}' B + A \dot{B}' = 0.$$

Первые два уравнения определяют функции A и B как волновые решения — произвольные функции от $x - U t$.

Последнее уравнение устанавливает связь между этими двумя функциями (A и B) как функций одной переменной:

$$A'' B + A B'' = 0.$$

Это уравнение довольно просто решается, если ввести параметризацию $A = F e^{\psi}$; $B = F e^{-\psi}$, что приводит к уравнению

$$F'' + (\psi')^2 F = 0.$$

Профессор Ли говорил, что мы определяем действие с точностью до безразмерного множителя, поэтому выведенное ранее выражение можно разделить на четыре, что удобнее сделать, введя полные производные по времени от элементов римановой квадратичной формы в виде

$$w_j^i = \frac{g^{ik}}{2U} (\dot{g}_{kj} + V_{k;j} + V_{j;k}).$$

При этом действие принимает выражение

$$S = \frac{U^4}{2k} \int (w_j^i w_i^j - (w_j^j)^2 + R) \sqrt{g} d_3 x dt. \quad (18.30)$$

(Напоминаю, мы используем современные обозначения ковариантных производных и суммирования по индексам. — Д. Б.).

“Численный множитель перед этим выражением должен находиться из рассмотрения связи с материальными полями,” — говорил профессор Ли. Эта связь как раз устанавливается методами его новой теории “Вариация инвариантных интегралов”, которую он надеялся вскоре закончить.

Аналогичное волновое решение в ОТО приведено в книге [23].

15. Динамика сферического мира (1903)

В этой работе получены решения для динамики сферического мира, найденные в ОТО А.А.Фридманом почти через 20 лет.

Объясняя мне, что такое неплоское пространство, Софус Ли привел пример трехмерной сферы. Я уже научился вычислять гауссову кривизну трехмерных пространств. В частности, для трехмерной сферы радиуса r она равна $6/r^2$. Профессор упрекал меня, что я все отталкиваюсь от плоского пространства, и у меня появилась идея рассмотреть динамику трехмерного сферического пространства с радиусом, зависящим от времени. Несложно вычислить и кинетическую энергию. Как и для плоского случая

$$\dot{g}_{ij} = \frac{2\dot{r}}{r} g_{ij},$$

откуда, при учете, что мера объема $\sqrt{g} = 2\pi^2 r^3$, плотность лагранжиана равна

$$L = \frac{6\pi^2 U^2}{k} (r\dot{r}^2 - r),$$

а плотность гамильтониана

$$H = \frac{6\pi^2 U^2}{k} (r\dot{r}^2 + r).$$

Так как система имеет всего одну степень свободы, то вся динамика определяется из закона сохранения энергии:

$$r\dot{r}^2 - r = r_m, \quad (18.31)$$

где r_m — константа интегрирования, имеющая смысл максимально возможного значения радиуса.

Это дифференциальное уравнение легко решается. Его решение хорошо известно — это циклоида радиуса $r_m/2$. В таком мире радиус (и все масштабы) увеличивается от нуля до r_m , а затем снова уменьшается до нуля.

Это решение вряд ли имеет какое-то практическое значение, но интересно в познавательном плане для изучения возможных конфигураций нашего мира, который, как я это понял почти десять лет назад, обязан быть не статичным.

16. Движение перигелия Меркурия (1909)

В конце 1908 года Нильс Бьёрн пишет работу, в которой выясняет, что дает для его теории только что созданная теория относительности. Прежде всего он полагает, что скорость гравитационной волны, входившая в его уравнения как неопределенная константа и, как полагал Софус Ли, значительно бо́льшая скорости света, должна равняться последней.

Однако центральной частью этой работы, вышедшей в весеннем выпуске журнала *Archiv for Naturvidenskab* за 1909 год, является учет изменения, внесенного теорией относительности в динамику материальной точки, в соответствии с которым Бьёрн полагает, что частица движется по принципу минимума собственного времени, однако расписывает этот принцип не очень стандартно. Он ищет параметрическую зависимость координат $x^i(\tau)$ и времени $t(\tau)$ от собственного времени:

$$\tau = \int_A^B \frac{c^2 d\tau^2}{c^2 d\tau^2} d\tau = \int_A^B \frac{c^2 dt^2 - (d\mathbf{r} - \mathbf{V}(r) dt)^2}{c^2 d\tau^2} d\tau. \quad (18.32)$$

Вместо нахождения экстремалей собственного времени, он ищет экстремали пропорционального ему действия $S = -c^2 \tau/2$ с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}(r)\dot{t})^2 - c^2 \dot{t}^2) = -\frac{c^2}{2}, \quad (18.33)$$

где точкой обозначена производная по τ .

Возьмем поле абсолютных скоростей сферической массы: $V_r \equiv V = \sqrt{2kM/r}$ и распишем лагранжиан в сферических координатах:

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{r} - V\dot{t})^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - c^2 \dot{t}^2). \quad (18.34)$$

Так как коэффициенты лагранжиана не зависят от t и φ , то время и угол — циклические координаты и сопряженные им импульсы (ε и l) постоянны на траекториях:

$$p_\varphi = l^2 \dot{\varphi}; \quad \dot{\varphi} = \frac{l}{r^2},$$

$$p_t = V \dot{r} - (c^2 - V^2) \dot{t}; \quad \dot{t} = \frac{c^2 \varepsilon - V \dot{r}}{c^2 - V^2}.$$

Подставляя эти выражения в лагранжиан (для свободной частицы совпадающий с гамильтонианом), получаем:

$$2L = \frac{\dot{r}^2 - c^2 \varepsilon^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \frac{l^2}{r^2} = -c^2,$$

откуда

$$\left(\frac{dr}{dc\tau}\right)^2 + \left(1 + \frac{l^2}{c^2 r^2}\right) \left(1 - \frac{2kM}{rc^2}\right) = \varepsilon^2. \quad (18.35)$$

Выразив $d\tau$ через $d\varphi$, из закона сохранения момента

$$d\tau = \frac{r^2 d\varphi}{l},$$

после замены переменной $x = l/(cr)$ и обозначения $kM/(lc) \equiv \alpha$ уравнение (18.35) приводится к виду

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + W(x) = \varepsilon^2 - 1; \quad W(x) \equiv x^2 - 2\alpha x - 2\alpha x^3. \quad (18.36)$$

Это уравнение имеет вид закона сохранения энергии при одномерном движении материальной точки в потенциальном поле $W(x)$. Роль времени здесь играет угол φ .

Важно отметить, что выражение (18.36) в точности совпадает с выражением для движения материальной точки в поле Шварцшильда.

Круговому движению соответствует точка в минимуме функции $W(x)$, точка x_0 (время-угол растет, а радиус не изменяется):

$$\frac{dW}{dx} = 2x - 2\alpha - 6\alpha x^2; \quad x_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 12\alpha^2}}{6\alpha}.$$

Рассматривая траектории, близкие к окружности, он изучает малые колебания траектории вблизи круговой орбиты. Их частота (по углу φ):

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 W}{dx^2} = 1 - 6\alpha x_0 = \sqrt{1 - 12\alpha^2}. \quad (18.37)$$

Классический подход соответствует пренебрежению добавкой $12\alpha^2$: $\Omega = 1$, $T = 2\pi$. Период колебания в точности совпадает с периодом обращения, и траектория движения — замкнута (эллипс).

Однако теория относительности вносит поправки. Частота уменьшается, период колебаний оказывается больше 2π , и точка описывает эллипс, поворачивающийся по направлению вращения. Угловая скорость колебаний между минимумом и максимумом радиуса $\Omega \approx 1 - 3\alpha^2$ меньше единицы и за каждый оборот угол перигелия увеличивается на величину

$$\delta\phi = 6\pi\alpha^2.$$

Этим дано объяснение *вращению перигелия Меркурия*, зафиксированного Леверье, проанализировавшего результаты трех столетий наблюдения со времен датского астронома Тихо Браге: большая ось эллиптической орбиты Меркурия за столетие поворачивается на угол порядка 40 угловых секунд.

17. Дальнейшая судьба

28 мая 1909 года Нильс Бьёрн трагически погиб в горах на глазах у своих учеников. Журналы хранились в семьях некоторых учителей и учеников. Бурное развитие теории относительности в XX веке привело к тому, что, даже когда работы Бьёрна в провинциальном журнале попадали в руки физика, тот с улыбкой откладывал их в сторону (как говорит Анна Флоренс), и в конце концов они оказались забытыми.

Она была удивлена интересом, вызванным у меня работами Нильса Бьёрна, которые она мне показала. Мой интерес объяснялся просто. В течение последних десяти лет я нашел в общей теории относительности тот узловый момент, который был утерян в процессе создания теории под парадигмой относительности: *глобальное время*, которое прекрасно вписывается в математическую структуру ОТО.

18. Работы Нильса Бьерна

Всего 14 работ, все опубликованы в журнале *Archiv for Naturvidenskab*.

- 1) О плоском течении вязкой жидкости, 1888.
- 2) О вихрях в вязкой жидкости, 1889.
- 3) Инерциальная система внутри мяча, 1891.
- 4) Всеобщая инерциальная система, 1894.

- 5) Движение тел в инерциальной системе, 1894.
- 6) Световой луч в поле тяготения, 1895.
- 7) Изменение частоты света в поле тяготения, 1896.
- 8) Динамика космоса, 1897.
- 9) Динамика пространства (совместно с Софусом Ли), 1899.
- 10) Уравнения электродинамики в неинерциальной системе, 1900.
- 11) Гравитационная волна, 1901.
- 12) Динамика сферического мира, 1903.
- 13) Движение жидкости в поле тяготения, 1904.
- 14) О вращении перигелия Меркурия, 1909.

ГЛАВА 19

Заключение

Я не знаю, чем я представляюсь миру, но самому себе я представляюсь ребенком, который играет на берегу моря и радуется, когда находит несколько гладких камешков или раковину, в то время как великий океан истины лежит перед ним неисследованный.

Ньютон

1. Время

Возвращение глобального времени многими воспринимается как некоторый шаг назад по сравнению со смелыми преобразованиями теории относительности.

Однако наряду с этим *консервативным* шагом теория глобального времени внесла в физику новый динамический объект — пространство. Этот объект имеет достаточно очевидный физический смысл: метрический тензор пространства определяет расстояния. Даже Беркли в своей критике абсолютного пространства Ньютона отмечал “единственное положительное свойство” пространства — протяженность, но так как она всюду однородна, то ее как бы и нет, полагал он. Динамическое же риманово пространство обладает совершенно очевидными наблюдаемыми свойствами: если через зону большой кривизны протащить твердое тело из зоны малой кривизны (или наоборот), это тело разрушится.

Но более того, ТГВ не вернулось от множества времен теории относительности к единому времени. Единое время (собственное время пространства) является объективной реальностью, но наряду с ним каждый *движущийся относительно пространства наблюдатель* живет в своем времени, определяемом преобразованиями Лоренца.

Это, конечно, тоже шаг назад, от Эйнштейна к Лоренцу. Не случайно не затихает спор о приоритете создания специальной теории относительности. Если из этого спора убрать ненаучные соображения, предмет спора все равно есть: Лоренц в 1904 году открыл множество “местных времен” движущихся наблюдателей, но не отказывался от абсолютного пространства и времени. Эйнштейн в следующем, 1905 году создал именно *релятивизм*, выдвинув тезис замены понятия “местное время” на “время”. Ведя речь только о точечных наблюдателях, апеллируя лишь к электромагнитным явлениям, являющимся локально лоренц-инвариантными, он смело объявляет такую ситуацию всеобщим законом. Релятивизм в том виде, в каком он господствует сейчас, открыл, объявил Эйнштейн, а преобразования Лоренца и “местное время” движущихся наблюдателей годом ранее открыл Лоренц.

2. Пространство

В отличие от общековариантных уравнений общей теории относительности, уравнения динамики пространства описывают развитие мира во времени с помощью динамических уравнений, как и для других полей, например, электромагнитного. Для последнего можно записать и очень изящные общековариантные уравнения, однако возможность явной динамической записи показывает, что это физическое поле, развивающееся во времени, обладающее плотностью энергии и ненулевым гамильтонианом. То же относится и к пространству, только по своей функции — определения “протяженности” — пространство в принципе не может быть локально лоренц-инвариантным.

Нам, конечно, проще, когда все поля имеют одинаковые свойства, но вряд ли могут быть какие-либо общие запреты на разнообразие Мира.

Теория глобального времени фактически выяснила *материальность* пространства. Как и другие виды материи, оно обладает плотностью энергии, изменение его во времени описывается динамическими уравнениями.

В теории относительности создается иллюзия, что в понимании времени нет никакой проблемы: просто одна из переменных, наподобие координаты, равноправная с ней. Тем самым мы теряем наши имеющиеся знания о времени. При описании динамических уравнений, например уравнений Максвелла, мы перестаем замечать, что они описывают изменение во времени поля *сразу во всем пространстве*, в точках, разделенных значительными расстояниями. При этом принцип причинности, не допускающий передачи каких-либо сигналов с помощью этого электромагнитного поля, не нарушается. Кулоновское поле вокруг заряда существует *мгновенно*, хотя оно и распределено в пространстве.

Динамика пространства синхронизована во времени и удивительное постоянство температуры реликтового излучения именно на гиперповерхностях постоянства космологического (глобального) времени есть результат не каких-то уникальных начальных данных, а того, что термализация излучения происходит в пространстве с течением времени.

3. ТГВ и ОТО

При этом, хотя в метафизическом и даже физическом планах ТГВ и ОТО выглядят как антиподы, они вполне естественно дополняют друг друга. Громадная энергия деформируемого пространства сказывается лишь на громадных космических масштабах, а в масштабах таких, как Солнечная система, где, в отличие от масштабов лаборатории, кривизной пространства пренебрегать нельзя, но зато космическая энергия проявляется слабо, ОТО является некоторым естественным приближением — девять выражений равны нулю, а десятое (плотность энергии) — *почти* равно нулю, так что в не очень больших космических масштабах уравнения Эйнштейна *почти* выполняются.

Но невыполнение их на больших масштабах приводит к множеству проблем в астрофизике, опирающейся на ОТО: нехватка плотности вещества до критической восполняется “темной энергией”, которая, однако, совсем не темная и свободно пропускает свет.

Правда, как писал Эйнштейн, исключительно большие принципиальные различия могут приводить к очень слабым наблюдаемым эффектам. Но принципиальное различие где-то скажется и существенно.

Самым принципиальным различием в основах является потеря в ОТО понятия времени, приведшая к неизбежному физическому последствию — нулевому гамильтониану.

- В ОТО динамика пространства завязана с плотностью материи вследствие равенства нулю суммарной плотности энергии. Это порождает проблему “лишнего протона”: лишний по сравнению с критической плотностью протон на кубический парсек превращает плоское пространство Эйнштейна-де Ситтера в замкнутый сферический мир Фридмана. В ТГВ, как мы показали, пространство может быть замкнутым вообще без вложенной материи — за счет энергии самого пространства.
- Проблема горизонта в окрестности Большого взрыва в ТГВ просто отсутствует, потому что основу динамики составляет не пылевидная или ультрарелятивистская материя, а само пространство, динамика которого совершается за счет собственных уравнений динамики.

- Включение в общую динамику космической материи динамики самого пространства, обладающего, как было показано огромной плотностью энергии, возможно, покажет, что именно она определяет вращение галактик, космические линзы и пр.; видимые звезды, возможно, лишь визуализируют динамику самого пространства.
- В ТГВ гамильтониан отличен от нуля, что приводит к эффективной гамильтоновой и квантовой механике.
- ОТО фактически приспособлена лишь для описания процессов в бесконечно малых объемах — движения точечных частиц, световых лучей, а также локальных полей — гидродинамики, электромагнитного поля. Однако физика распределенных объектов, состояние которых задается в объеме — квантовая теория, статистическая физика, — не определены вследствие неопределенности понятия “стационарность”, требующего задания сечения $t = \text{const}$ четырехмерного пространства. В ТГВ время предопределено, все состояния задаются в момент $t = \text{const}$. Проблемы нет.
- Схема построения последовательных приближений в ТГВ прозрачна, так как время на всех шагах вычислений одно и то же, а далее последовательно уточняются поля абсолютных скоростей, за ними метрика пространства и т. д.

Благодарности

Автор прежде всего благодарен своим друзьям, с которыми он обсуждал проблемы в процессе создания теории: В.Н. Дутышеву, В.А. Муравьеву, А.С. Гаревскому, В.В. Васькину. На начальной стадии развития теории значительную роль сыграли дискуссии с Л.Д. Фаддеевым и С. Чандрасскаром.

Большую роль сыграли обсуждения с Л.Н. Липатовым, А.А. Белавиным, С.Н. Вергелесом, Э.А. Кураевым, О.В. Теряевым, В.Н. Первушиным, Ю.С. Владимировым, Г.Б. Малыкиным, В.В. Кочаровским, С.А. Пастоном, В.А. Франке, Д. Бриллом и Т. Джекобсоном, переписка с В.Л. Гинзбургом.

Большую поддержку в процессе работы над теорией оказали также К.П. Бражник и П.К. Бражник, К.М. Добродеев, В.Р. Фидельман.

Литература

1. Д. Е. Бурланков. УФН **174**, вып. 8, 899–910, 2004
2. Р. Декарт. *Избранные произведения*. — М., 1950.
3. Ис. Ньютон. *Математические начала натуральной философии*. Пер. с латинского А. Н. Крылова. — Петроград, 1915.
4. Эрнст Мах. *Механика*. — Ижевск: НИЦ РХД, 2000.
5. В. И. Ленин. *Материализм и эмпириокритицизм*. — М.: ИПЛ, 1965.
6. Дж. Беркли. *О движении*. Сочинения, сс. 361–388. — М.: Мысль, 1978.
7. А. Н. Матвеев. *Механика и теория относительности*. — М.: Высшая школа, 1986.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Механика*. — М.: Наука, 1958.
9. В. И. Арнольд. *Математические методы классической механики*. — М.: Наука, 1974.
10. N. Chomsky. *Syntactic Structures*. — Mouton and Co, 1957.
11. А. Пуанкаре. *Последние мысли*.
12. Н. И. Лобачевский. *Полн. собр. соч.*. — т. 1–5. — М.: Гостехиздат, 1946–1951.
13. В. Riemann. Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen, Bd. **13**, 133–152 (1868). [Перевод: Сб. ст. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М: Мир, 1979. — 18–33.]
14. Б. Риман. *Сочинения*. — М.–Л.: Гостехиздат. — 471–473, (1948).
15. В. Клиффорд. *О пространственной теории материи*. — В сб. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М: Мир. — 36–37 (1979)
16. В. Клиффорд. *Здравый смысл точных наук*. — В сб. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М: Мир. — 38–47 (1979)

-
17. Ю. С. Владимиров, Н. В. Мицкевич, Я. Хорски. *Пространство, время, гравитация*. — М.: Наука, 1984.
 18. Д. Биркгоф. *Динамические системы*. — Ижевск: РХД, 1999.
 19. Ф. Клейн. *Лекции о развитии математики в XIX столетии*. — М.: Наука, 1989.
 20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Теория поля*. — М.: Наука, 1988.
 21. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия*. — М.: Наука, 1979.
 22. J. Soldner. In *Berliner Astronomisches Jahrbuch 1804*. — 161. — Akademie-Verlag. — Berlin, 1801.
 23. C. W. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler. *Gravitation*. — San Francisco: Freeman, 1974. [Перевод: Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. *Гравитация*. — М.: Мир, 1977.]
 24. К. Мёллер. *Теория относительности*. — М.: Атомиздат, 1975. [C. Möller. *The theory of relativity*. — Oxford: Claredon press, 1972.]
 25. Г. Б. Малыкин, Г. В. Пермитин. *Томасовская прецессия, Физическая энциклопедия*. — Т. 5. — с. 123. — М.: Рос. энциклопедия, 1998.
 26. И. Ю. Кобзарев. *Относительности теория. Физическая энциклопедия*. — Т. 3. — С. 493. — М.: Рос. энциклопедия, 1992.
 27. R. Penrose, W. Rindler. *Two-Spinors Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge University Press. 1986. [Перевод Р. Пенроуз, В. Риндлер. *Спиноры и пространство-время*. — М.: Мир, 1987.]
 28. D. E. Burlankov. *Procs. Int. Conf. BGL-4*, p.75, N. Novgorod-Kiev, 2004.
 29. Д. Е. Бурланков. *Динамика пространства*. — Нижний Новгород: Издательство ННГУ, 2005.
 30. D. Hilbert. *Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen*, 3, 395, 1915.
 31. B. F. Schutz. *Phys. Rev. D* 4, 3559–3566, 1971.
 32. D. E. Burlankov. *arXiv: gr-qc/0406112*, 2004.
 33. С. Чандрасекар. *Математическая теория черных дыр*. — М.: Мир, 1986. [S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. — Oxford Univ. Press, 1983.]

-
34. W. De Sitter. *Month. Not. Roy. Astr. Soc.*, **78** 3, 1917.
35. Г. Вейль. *Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности*. — М.: Янус, 1996. [H. Weyl. *Raum, Zeit, Materie*, Berlin: Springer-Verlag, 1923.]
36. С.Н. Вегелес. *Лекции по теории гравитации*. — М.: МФТИ, 2001.
37. А. Einstein. *Ann. Phys.* **35**, 898–908, 1911. [Русский перевод: А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов*. — т. 1. — 165–174. — М.: Наука, 1966.]
38. J. Lense, H. Thirring. *Physik. Zeitschr.* **19**, 156, 1918.
39. Н. А. Козырев. *Избранные труды*. — Л.: ЛГУ, 1991.
40. А. Einstein. *Sitz. preuss. Akad. Wiss.* **1**, 1, 154–167, 1918. Русский перевод: А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов* т. 1. — 631–646. — М.: Наука, 1966.
41. K. Land and J. Magueijo. arXiv: astro-ph/0502237, 2005.
42. Е. М. Лифшиц. *ЖЭТФ*, **16**, 587, 1946.
43. V. Fok. *Zs. f. Physik*, **98**, 145, 1935; [см. В. А. Фок. *Избранные труды*. — с. 159–171. — Л.: СПбУ, 2003].
44. А. Einstein, M. Grossmann. *Z. Math. und Phys.*, **62**, 225–261, 1913. [Русский перевод: А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов*. — т. 1. — 227–266. — М.: Наука, 1966.]
45. А. Friedman. *Zs. Phys.* **10**, 376, 1922. [Перевод: Сб. ст. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*. — М.: Мир. — 320–329. — 1979.]
46. P. Painlevé. *C.R. Acad. Sci. (Paris)* **173**, 677, 1921.
47. R. Arnovitt, S. Deser, C.W. Misner. *Phys. Rev.*, **116**, 1322, 1959.
48. D.R. Brill, R.H. Gowdy. *Rep. Progr. Phys.*, **33**, 413, 1970.
49. A. Tomimatsu, H. Sato. *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1344, 1972.
50. C. W. Misner. *Phys. Rev.* **186**, 1319, 1969.
51. Г. Бонди. *Необходима ли “Общая относительность” для эйнштейновской теории гравитации?*, в кн. *Астрофизика, кванты и теория относительности*. — 469–497. — М.: Мир, 1982.
52. Б. М. Барбашов, В. Н. Первушин, Д. В. Проскурин. *Эккурс в современную космологию*. — ЭЧАЯ. — **34**. — Вып. 7. — 2003.

-
53. Р. Толмен. *Относительность, термодинамика и космология*. — М.: Нука, 1974. [R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. — Oxford, 1934.]
54. В. А. Фок. *Теория пространства, времени и тяготения*. — М.: ГИФМЛ, 1961.
55. S. W. Hawking. *Commun. math. Phys.*, **43**, 199, 1975.
56. Х.-Ю. Тредер. *Физический смысл квантования гравитационных полей*, в кн. *Астрофизика, кванты и теория относительности*. — сс. 469–497. — М.: Мир, 1982.
57. N. D. Birrell, P. C. W. Davies. *Quantum fields in curved spaces*. — Cambridge: CUP, 1982. [Перевод: Н. Биррелл, П. Девис. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*. — М.: МИР, 1984.]
58. C. Rovelli. *Loop Quantum Gravity*, *Liv. Rev. Relat.* **1**, 1, 1998; arXiv: gr-qc/9710008.
59. G. Date, G. M. Hossain. *Genericity of Big Bounce in isotropic loop quantum cosmology*, 2004; arXiv: gr-qc/0407074.
60. Abhay Ashtekar. *Gravity, Geometry and the Quantum*. — arXiv: gr-qc/0605011 v1, 1 May 2006.
61. C. Rovelli. *Notes for a brief history of quantum gravity*. — arXiv: gr-qc/0006061, 2000.
62. A. Ashtekar, M. Bojowald, and J. Lewandowski. *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**. — 233–268, 2003.
63. А. М. Поляков. *Квантовая геометрия бозонных струн*, в сб. *Инстантоны, струны и конформная теория поля*. — сс. 386–393. — М.: Физматлит, 2002. [A. M. Polyakov. *Phys. Lett.* **103B**, 207–210, 1981.]
64. D. Gross, A. Migdal. *Non perturbative two dimensional quantum gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 635, 1990.
65. K. J. Kuchar. *Math. Phys.* **13**, 768, 1972.
66. J. W. York. *Journ. Math. Phys.* **14**, 456, 1973.
67. C. Rovelli, L. Smolin. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 446, 1994.
68. J. D. Brown, K. V. Kuchar. *Phys. Rev.* **D51**, 5600, 1995.

-
69. C. Eling, T. Jacobson and D. Mattingly. *Einstein-aether theory in Deserfest*, J. Liu, K. Stelle, and R. P. Woodard (World Scientific, 2006) arXiv: gr-qc/0410001.
70. G. D. Birkhoff, R. Langer. *Relativity and Modern Physics* Cambridge: Harvard Univ Press, 1923.
71. Дж. Л. Синг. *Общая теория относительности*. — М.: ИЛ, 1963. [J. L. Synge. *Relativity: the General Theory*. — Amsterdam: North-Holland Publ Co., 1960.]
72. *Точные решения уравнений Эйнштейна* под ред. Э. Шмута. — М.: Энергоиздат, 1982. [*Exact solutions of the Einsteins field equations*. — Berlin, 1980.]
73. J. R. Oppenheimer, H. Snyder. *Phys. Rev.* **56**, 455, 1939. [Русский перевод в кн. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*. — 353. — М.: МИР, 1979.]
74. C. Misner, J. Wheeler. *Ann of Phys.*, **6**, 525, 1957.
75. Д. Е. Бурланков. *ЖЭТФ* **51**, 842, 1966.
76. D. E. Burlankov. arXiv: gr-qc/0406110v1, 2004.
77. Я. Д. Сергеев. *Arithmetic of infinity*, Edizioni Orizzonti Meridionali, CS, 2003.
78. К. Блум. *Теория матрицы плотности и ее приложения*. — М.: Мир, 1983.
79. Н. Я. Виленкин. *Специальные функции и теория представления групп*. — М.: Наука, 1965.
80. L. Rosenfeld. *Ann. Phys.* — **5**. — 113. — 1930.
81. М. П. Бронштейн. *ЖЭТФ* **6**. — 195. — 1936.
82. S. Gupta. *Proc. Phys. Soc.* — **A65**. — 161. — 1952.
83. J. Hartle. *Lectures*. — Les Houches, 1992.
84. Е. Т. Whittaker. *Math. Ann.*, LVII, 333, 1902; Е. Т. Whittaker, G. N. Watson. *A course of modern analysis*, Cambridge, 1927 [Перевод: Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. *Курс современного анализа*. — Т. 2. — М. 1963.]
85. Д. Е. Бурланков. *ТМФ* **39**. — 16. — 1979.
86. A. Einstein, B. Kaufman. *Ann. Math.* **62**. — 128. — 1955. Русский перевод: А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов* Т. 2. — 835. — М.: Наука, 1966.

87. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. *Представления группы вращения и группы Лоренца*. — М.: ГИФМЛ, 1953.
88. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. *Квантовая электродинамика*. — М.: Наука, 1969.
89. Н. Ф. Нелипа. *Физика элементарных частиц*. — М.: ВШ, 1977.
90. W. Rarita, J. Schwinger. *Phys. Rev.*, **60**. — 61. — 1941.
91. Д. Хьюзмоллер. *Расслоенные пространства*. — М.: Мир, 1970. [D. Husemoller. *Fibre Bundles*, McGraw-Hills. — NY, 1966].
92. S. Wolfram. *The Mathematica Book*, Cambridge University Press, 1998.
93. Е. М. Воробьев. *Введение в систему "Математика"*. — М.: "Финансы и статистика", 1998.
94. В. А. Муравьев, Д. Е. Бурланков. *Практическое введение в пакет Mathematica*. — Нижний Новгород: ННГУ, 2000.

Бурланков Дмитрий Евгеньевич

ВРЕМЯ, ПРОСТРАНСТВО, ТЯГОТЕНИЕ

Дизайнер В. В. Ботя

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерный набор и верстка Д. В. Пинкратов

Корректор Г. Г. Тетерина

Подписано в печать 03.11.2006. Формат 60 × 84¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,41. Уч. изд. л. 24,11.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Тираж 200 экз. Заказ №1850.

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500-295

Типография ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.

ISBN 5-93972-465-5



9 785939 724654