В. Д. ЧИСТЯКОВ

СБОРНИК СТАРИННЫХ ЗАДАЧ

ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ С ИСТОРИЧЕСКИМИ ЭКСКУРСАМИ И ПОДРОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

В. Д. ЧИСТЯКОВ

СБОРНИК СТАРИННЫХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ С ИСТОРИЧЕСКИМИ ЭКСКУРСАМИ И ПОДРОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ВЫСШЕГО, СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР
МИНСК 1962

ПРЕДИСЛОВИЕ

Опыт показывает, что использование старинных задач на уроках и внеклассных занятиях вызывает интерес к математике, побуждает детей к самостоятельному творчеству, проявлению инициативы и смекалки, дает естественный повод для небольших исторических экскурсов о их составителях, которые, как правило, были крупнейшими математиками своей эпохи, и о состоянии математических дисциплин далекого прошлого.

Автор будет весьма признателен тем, кто сообщит о замеченных в настоящей книге недостатках и поделится своим опытом использования старинных задач по элементарной математике в процессе преподавания. Письма направлять по адресу: г. Минск, ул. Кирова, 24. Издательство Министерства высшего, среднего специального и профессионального образования БССР, редакция естественно-математической литературы.

Автор

Часть первая

ТЕКСТЫ СТАРИННЫХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАЧИ ВАВИЛОНА

1. За длину окружности вавилоняне принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π, которым пользовались вавилоняне.
2. Разделить прямой угол на три равные части.
3. Для определения площади четырехугольника вавилоняне брали произведение полусумм противоположных сторон. Выяснить, для каких четырехугольников эта формула точно определяет площадь.

ЗАДАЧИ ЕГИПТА

4. **Задача из папируса Райнда.** Найти число, если известно, что от прибавления к нему $\frac{2}{3}$ его и вычитания от полученной суммы ее трети получается число 10.
5. **Задача из Акмимского папируса.** Некто взял из сокровищницы $\frac{1}{13}$. Из того, что осталось, другой взял $\frac{1}{17}$, оставил же он в сокровищнице 150. Сколько было в сокровищнице первоначально?

6. **Задача из папируса Райнда.** У семи лиц по семи кошек; каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?
7. **Задача из Московского папируса.** Определить длину сторон прямоугольника, если известно их отношение и площадь фигуры.
8. **Задача из папируса Райнда.** Египтяне, заменяя площадь круга площадью равновеликого квадрата, брали за сторону последнего $\frac{8}{9}$ диаметра круга. Найти отсюда приближенное значение для π.
9. **Задача из Московского папируса.** Определить объем квадратной усеченной пирамиды, если ее высота равна 6, сторона нижнего основания 4, верхнего 2.
10. **Задача из папируса Райнда.** Для вычисления площади равнобедренного треугольника египтяне брали половину произведения основания на боковую сторону. Вычислить в процентах, как велика ошибка, если основание равнобедренного треугольника 4, а боковая сторона 10.
11. **Задача из папируса Райнда.** Для вычисления площади равнобокой трапеции египтяне брали произведение полусуммы оснований на боковую сторону. Вычислить в процентах погрешность, если нижнее основание 6, верхнее 4, боковая сторона 20.

ЗАДАЧИ ГРЕЦИИ

12. **Задача Метродора.**

Здесь погребен Диофант, и камень могильный
При счете искусном расскажет нам,
Сколь долог был его век.

Велением бога он мальчиком был шестую часть
своей жизни;
В двенадцатой части затем пришла его светлая
юность.
Седьмую часть жизни прибавим — пред нами очаг
Гименея.
Пять лет протекли, и прислал Гименей ему сына.
Но горе ребенку! Едва половину он прожил
Тех лет, что отец, как скончался несчастный.
Четыре года страдал Диофант от утраты такой
тяжелой
И умер, прожив для науки. Скажи мне,
Скольких лет достигнув, смерть восприял Диофант?

13. **Задача из «Греческой антологии».**
— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?
— Вот сколько,— ответил философ,— половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще три женщины.

14. **Задача из «Арифметики» Диофанта.** Найти три числа так, чтобы наибольшее превышало среднее на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ наименьшего, чтобы среднее превышало меньшее на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ наибольшего и чтобы наименьшее превышало число 10 на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ среднего числа.

15. **Задача из «Арифметики» Диофанта.** Решить систему

$$\begin{cases} x + y = 10; \\ x^2 + y^2 = 68. \end{cases}$$

16. **Задача Архимеда.** Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$$

17. **Задача Гипсикла Александрийского.** Доказать, что в арифметической прогрессии с четным числом членов сумма членов второй половины превышает сумму членов первой половины на число, кратное квадрату половины числа членов.
18. **Задача Никомаха.** Показать, что если разбить ряд всех нечетных чисел на группы, в которых число членов будет возрастать как ряд натуральных чисел, то сумма членов каждой группы будет равна кубу числа членов.
19. **Задача Евклида.** На данной конечной прямой AB построить равносторонний треугольник.
20. **Задача Евклида.** Разделить произвольный угол на две равные части.
21. **Задача Евклида.** Построить параллелограмм, стороны которого наклонены под данным углом так, чтобы он был равновелик данному треугольнику.
22. **Задача Евклида.** В данный круг вписать треугольник, равноугольный данному треугольнику.
23. **Задача Паппа Александрийского.** Дана точка D на биссектрисе угла. Провести через эту точку прямую линию так, чтобы отрезок ее внутри угла имел данную длину.
24. **Задача Диофанта Александрийского.** Катет прямоугольного треугольника есть точный куб, другой катет представляет разность между этим кубом и его стороной (т. е. первой степенью), а гипотенуза есть сумма куба и его стороны. Найти стороны.

Архимед (около 287—212 до н. э.)

25. Задача Герона. Определить площадь треугольника, если даны три его стороны: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

26. Задача Архимеда. Цилиндр, в основании которого большой круг шара, а высота — диаметр этого шара, имеет объем, равный $\frac{3}{2}$ объема, и поверхность, равную $\frac{3}{2}$ поверхности шара.

27. Задача из «Греческой антологии».

Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает:
«Что так тебя огорчило, ответствуй немедля!»
«Яблок я нес с Геликона немало,— Эрот отвечает,—
Музы, отколь ни возьмись, напали на сладкую ношу.
Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа, а Клио
Пятую долю взяла. Талия — долю восьмую.
С частью двадцатой ушла Мельпомена. Четверть взяла Терпсихора,
С частью седьмою Эрато от меня убежала.
Тридцать плодов утащила Полимния. Сотня и двадцать
Взяты Уранией; триста плодов унесла Каллиопа.
Я возвращаюсь домой почти что с пустыми руками.
Только полсотни плодов мне оставили музы на долю».

28. Задача из «Греческой антологии». Три грации имели по одинаковому числу плодов и встретили 9 муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из муз и каждой из граций стало по одинаковому числу плодов. Сколько было плодов у каждой из граций до встречи с музами?

Евклид (III до н. э.)

29. **Задача из «Греческой антологии».**

Вот Полифема циклопа из меди статуя отлита.
Руку, уста и единое око ваятель сделал на диво,
Скрывши в них трубы: водой великан истекает как будто.
Хитрое в трубах устройство: ведущая в руку способна
Весь водоем до краев через три дня наполнить.
Оку — достаточно дня, а устам и всего лишь две пятых,
Вместе все три водоем скоро ли могут наполнить?

30. **Задача из «Греческой антологии».** Ослица и мул шли бок о бок с тяжелой поклажей на спине. Ослица жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься? — ответил ей мул.— Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей». Сколько мешков несла ослица и сколько нес мул?

31. — Хроноса [бог времени] вестник, скажи, какая часть дня миновала?
— Дважды две трети того, что прошло, остается.
[У древних греков день делился на 12 часов.]

32. **Задача Пифагора.** Сумма любого числа последовательных нечетных чисел, начиная с единицы, есть точный квадрат.

33. **Задача Пифагора.** Всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов.

34. **Задача Пифагора.** С именем Пифагора связано правило для вычисления сторон прямоугольного треугольника в целых числах. Согласно этому правилу за меньший катет принимается нечетное число. Если возвести его в квадрат, вычесть единицу и остаток

Пифагор (около 580—500 до н. э.)

разделить пополам, получим больший катет. Прибавив к полученному результату единицу, найдем гипотенузу.

Требуется, во-первых, доказать справедливость этого правила; во-вторых, пользуясь этим правилом, составить таблицу сторон прямоугольных треугольников в целых числах.

35. **Задача Архимеда (из трактата «О шаре и цилиндре»).** Поверхность шарового сегмента равна площади круга, имеющего радиусом прямую, которая проведена от вершины сегмента, служащей ему основанием.

36. **Задача Архимеда (из трактата «Леммы»).** Если круг описан около квадрата, а другой в него вписан, то описанный круг вдвое больше вписанного.

37. **Задача Архимеда (из трактата «О шаре и цилиндре»).** Найти шар, имеющий объем данного конуса или цилиндра.

38. **Задача Архимеда (из трактата «О шаре и цилиндре»).** Отрезать от шара плоскостью такой сегмент, чтобы отношение его объема к объему конуса, имеющего основание и высоту сегмента, было данное.

39. **Задача Архимеда (из трактата «О спиралях»).** Найти сумму квадратов n первых чисел натурального ряда.

40. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Требуется число 100 разделить два раза так, чтобы бóльшая часть его от первого деления была вдвое более меньшей части от второго деления и чтобы бóльшая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.

41. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти два числа, сумма которых 20, а произведение 96.

42. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти два числа, отношение которых 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5.

43. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти три числа, если дано, что произведение суммы первых двух на третье есть 35, суммы первого с третьим на второе — 27, а суммы второго с третьим на первое — 32.

44. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа.

45. **Задача Диофанта (из трактата «Арифметика»).** Найти три числа так, чтобы суммы всех трех и каждых двух были квадратами.

46. **Задача Паппа Александрийского (из трактата «Математические коллекции»).** Показать, что в кругах площади подобных сегментов относятся как квадраты хорд, служащих им основаниями.

47. **Задача об удвоении куба.** Требуется построить ребро куба, который по объему был бы в два раза больше данного куба. Выполнить построение при помощи «вставок» (см. указания).

48. **Задача о трисекции угла.** Требуется произвольный угол разделить на три равные части. Выполнить построение способом Архимеда при помощи циркуля и передвижной линейки с двумя отметками (см. указания).

49. **Задача о квадратуре круга.** Построить квадрат, площадь которого была бы равновелика площади данного круга. Решить задачу приближенно при помощи «треугольника Бинга» (см. указания).

50. **Задача Аполлония.** Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.

51. **Задача Архимеда (из трактата «Измерение круга»).** Архимед доказал: 1) каждый круг равновелик прямоугольному треугольнику, если радиус равен одному из катетов, а выпрямленная окружность равна другому катету; 2) круг относится к квадрату своего диаметра, как 11 к 14.

Покажите, что оба положения Архимеда тождественны с современным правилом вычисления: площадь круга равна $\frac{22}{7}r^2$

52. **Задача Архимеда (из трактата «Исчисление песчинок»).** Назвать некоторые числа, не только превосходящие число песчинок в куче, равной земному шару, но даже число песчинок в куче, равной всей Вселенной.

ЗАДАЧИ КИТАЯ

53. В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов.

54. Имеется поле шириною в 2 ли, длиною в 3 ли. Спрашивается каково поле?

55. **Сокращение дробей.** Имеется $\frac{49}{91}$. Спрашивается, сколько получится, если сократить?

56. **Сложение дробей.** Имеется $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. Спрашивается, сколько получится, если их сложить?

57. **Вычитание дробей.** Имеется $\frac{3}{4}$, вычти $\frac{1}{3}$. Спрашивается, каков остаток?

58. **Сравнение дробей.** Имеется $\frac{8}{21}$, $\frac{17}{50}$. Спрашивается, которая из дробей больше и на сколько больше?

59. Деление дробей. Имеется 7 человек, делится [между ними] $8\frac{1}{3}$ цяня. Спрашивается, сколько получит [каждый] человек?

60. Умножение дробей. Имеется поле шириною в $\frac{4}{5}$ бу, длиною в $\frac{5}{9}$ бу. Спрашивается, каково поле?

61. Общее измерение полей. Имеется поле шириною в $18\frac{5}{7}$ бу, длиною в $23\frac{6}{11}$ бу. Спрашивается, каково поле?

62. Измерение треугольного поля. Имеется треугольное поле шириною в $5\frac{1}{2}$ бу, прямою длиною в $8\frac{2}{3}$ бу. Спрашивается, каково поле?

63. Задача из трактата «Девять отделов искусства счета». Пять волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов стоят 8 таэлей. Сколько стоит отдельно вол и баран?

64. Задача из трактата «Начала искусства вычисления». Определить стороны прямоугольного треугольника, если известны его площадь и периметр.

65. Имеется амбар. Ширина 3 чжана, длина 4 чжана 5 чи; наполняющее его просо составляет 10 000 ху. Спрашивается, какова высота амбара?

66. Задача о бамбуке из девяти колен. Имеется бамбук из девяти колен. Объем трех нижних колен 4 шэна, четырех верхних колен 3 шэна. Спрашивается, каковы объемы двух средних колен, если объем каждого [колена] отличается от соседних на равную [величину]?

67. Задача о слитках золота. *Имеется 9 слитков золота* и 11 слитков серебра, их взвесили, вес как раз совпал. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на 13 ланов. Спрашивается, каков вес слитка золота и слитка серебра, каждого в отдельности?

68. **Задача о рысаке и кляче.** Рысак и кляча движутся от Чаньаня к княжеству Ци, которое удалено от Чаньаня на 3000 ли. В первый день рысак пробегает 193 ли, каждый следующий день пробегает на 13 ли больше. Кляча в первый день пробегает 97 ли, каждый последующий день пробегает на половину ли меньше. Рысак первым достиг княжества Ци, повернул обратно и в некотором месте встретил клячу. Спрашивается, через сколько дней они встретились и сколько ли пробежала каждая лошадь?

69. **Задача о буйволах и баранах.** Пять буйволов и 2 барана стоят 10 ланов, 2 буйвола и 5 баранов стоят 8 ланов золота. Спрашивается, сколько стоят буйвол и баран?

70. Из трех бочек риса одинаковой емкости похищено тремя ворами некоторое количество риса. Общее количество его было неизвестно, но выяснилось, что в первой бочке остался 1 го риса, во второй — 1 шинг 4 го и в третьей — 1 го. Пойманные воры показали: первый, что он отсыпал рис из 1-й бочки при помощи лопаты, второй, что он пользовался деревянным башмаком, а третий — миской, причем они соответственно брали из 2-й и 3-й бочек. Лопата, башмак и миска найдены на месте преступления. При обмере их оказалось, что емкость лопаты 1 шинг 9 го, башмака — 1 шинг 7 го, миски — 1 шинг 2 го. Требуется узнать, сколько похитил каждый вор. При этом известно, что 10 го = 1 шингу, 10 шингов = 1 тау, 10 тау = 1 ши.

71. **Задача Сунь-цзы.** Найти число, которое при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 дает остаток 3, наконец, при делении на 7 — остаток 2.

72. **Задача первая о снопах различных урожаев.** Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу зерна. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу зерна. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу зерна. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая?

73. **Задача вторая о снопах различных урожаев.** Двум снопам хорошего урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам плохого урожая не хватает до 1 доу соответственно по 1 снопу среднего урожая, плохого урожая, хорошего урожая. Спрашивается, сколько зёрна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожаев?

74. **Задача третья о снопах различных урожаев.** Два снопа урожая *А*, 3 снопа урожая *Б*, 4 снопа урожая *В* превышают по весу дань: вес 2 снопов урожая *А* превышает дань на вес 1 снопа урожая *Б*, вес 3 снопов урожая *Б* на вес 1 снопа урожая *В*, вес 4 снопов урожая *В* на вес 1 снопа урожая *А*. Спрашивается, каков вес каждого из снопов урожаев *А, Б, В*?

75. Продали 2 буйвола, 5 баранов, купили 13 свиней, осталось 1000 циней. Продали 3 буйвола, 3 свиньи, купили 9 баранов, как раз хватило. Продали 6 баранов, 8 свиней, купили 5 буйволов, не хватило 600 цяней. Спрашивается, сколько стоят буйвол, баран и свинья?

76. **Задача об общем колодце.** У 5 семей имеется общий колодец. Чтобы достать до поверхности воды, 2 веревкам семьи *А* недостает 1 веревки семьи *Б*. 3 веревкам семьи *Б* недостает 1 веревки семьи *В*, 4 веревкам семьи *В* недостает 1 веревки семьи *Г*, 5 веревкам семьи Г недостает 1 веревки семьи *Д*, 6 веревкам семьи *Д* недостает 1 веревки семьи *А*. Спрашивается, какова глубина колодца и какова длина каждого куска веревки?

77. **Задача Лю Хуэя.** На холме растет сосна неизвестной высоты. Внизу на равнине подставлены два шеста, каждый высотой в 20 футов (a), на одной прямой с деревом и на расстоянии друг от друга в 50 шагов ($в$). Верхушка дерева и конец первого шеста образуют прямую с точкой на земле, расположенной в 7 шагах и 4 футах позади шеста (c). Верхушка дерева образует опять-таки прямую линию с концом заднего шеста и точкой на земле в 8 шагах и 5 футах позади шеста (d). Требуется узнать высоту сосны (x) и расстояние от переднего шеста до холма (y).

78. **Задача о водоеме.** Имеется водоем со стороной в 1 чжан. В центре его растет камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина воды и какова длина камыша? [1 чжан=10 чи.]

79. **Задача о бамбуке (№ 13 из девятой книги).** Высота бамбука 1 чжан. Вершину его согнули так, что она касается земли на расстоянии 3 чи от корня. Спрашивается, какова высота после сгибания?

80. **Задача о двух путешественниках.** Два человека находятся в одном месте. Норма ходьбы *А* есть 7, норма ходьбы *Б* есть 3. *Б* идет на восток. *А* идет

10 бу на юг, а затем идет по косому направлению на северо-восток до встречи с *Б*. Спрашивается, какой путь прошел каждый из них, *А* и *Б*?

81. **Задача о двери.** Имеется дверь, высота которой больше ее ширины на 6 чи 8 цуней. Наибольшее растояние между углами [диагонали] 1 чжан. Спрашивается, каковы ширина и высота двери?

82. **Задача о городе, обнесенном квадратной стеной.** Имеется город в виде квадрата со стороной неизвестного размера, в центре каждой стороны находятся ворота. На расстоянии 20 бу от северных ворот имеется столб. Если пройти от южных ворот 14 бу и повернуть на запад, пройти еще 1775 бу, то можно увидеть столб. Спрашивается, какова сторона города?

83. **Задача на объем конуса.** Имеется конус. Обвод основания 3 чжана 5 чи, высота 5 чжанов 1 чи. Спрашивается, каков объем?

84. **Задача об усеченном конусе.** Имеется круглое тин [усеченный конус]. Нижний обвод 3 чжана, верхний обвод 2 чжана, высота 1 чжан. Спрашивается, каков объем?

85. **Задача о квадрате, вписанном в прямоугольный треугольник.** Имеется горизонтальный катет в 5 бу, вертикальный катет в 12 бу. Спрашивается, какова сторона квадрата, вписанного в этот треугольник?

86. **Задача о человеке, столбе и столбиках.** Столб отстоит от человека на неизвестном расстоянии. Поставлены 4 столбика, которые удалены друг от друга на 1 чжан. Пусть два столбика находятся слева от наблюдателя, сам же он находится у правого последнего столбика и наблюдает столб на расстоянии в 3 цуня от правого переднего столбика. Спрашивается, на сколько удален от человека столб?

87. **Задача о высоте горы.** Гора расположена на запад от столба. Высота ее неизвестна. Она удалена от столба на 53 ли. Высота столба 9 чжанов 5 чи. В 3 ли к востоку от него стоит человек и наблюдает вершину столба на одном уровне с вершиной горы. Уровень зрения человека расположен на высоте 7 чи. Спрашивается, какова высота горы?

88. **Задача о глубине колодца.** Диаметр колодца 5 чи, глубина неизвестна. У верхнего края колодца поставлен шест в 5 чи. Вершина шеста наблюдается на одном уровне с границей воды и стены, а на диаметре откладывается 4 цуня. Спрашивается, какова глубина колодца?

ЗАДАЧИ ИНДИИ

89. Из четырех жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвертый — вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132. Сколько дал первый?

90. Если некоторое число умножить на 5, от произведения отнять его треть, остаток разделить на 10 и прибавить к этому последовательно $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ первоначального числа, то получится 68. Как велико число?

91. **Задача Сридхары.** Пятая часть пчелиного роя сидит на цветке кадамба, одна треть на цветках силиндха. Утроенная разность двух последних чисел направилась к цветам кутая. И осталась еще одна пчелка, летающая взад и вперед, привлеченная чудесным ароматом жасмина и пандануса. Скажи мне, очаровательная, сколько всех пчел?

92. **Задача Ариабхаты.** Два светила находятся на данном расстоянии (d) друг от друга, движутся одно к другому с данными скоростями (v_1, v_2). Определить точку их встречи.

93. **Задача из Бахшалийской рукописи.** Найти число, которое от прибавления 5 или отнятия 11 обращается в полный квадрат.

94. **Задача Бхаскара-акария.** Показать, что

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

95. **Задача Ариабхаты.** Определить число ядер треугольной кучи.

96. **Задача Брамагупты.** Найти высоту свечи, зная длины теней, бросаемых гномоном (вертикальным шестом) в двух различных положениях, при условии, что дано расстояние между гномонами.

97. **Задача Бхаскара-акария.** Найти прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза выражалась бы тем же числом, что и площадь.

98. Старинное индийское правило гласит, что надо разделить диаметр круга на 15 равных частей и взять 13 таких частей для стороны квадрата, равного [приблизительно] кругу. Определить приближение для π, получающееся в этом случае, и оценить в процентах ошибку с точностью до 3-го десятичного знака.

99. **Задача Ариабхаты.** Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

100. **Задача Брамагупты.** Показать, что произведение двух сторон треугольника, деленное на длину перпендикуляра, опущенного на третью сторону из про-

тивоположной вершины, равно диаметру описанного круга.

101. В четырехугольнике, диагонали которого взаимно перпендикулярны, корень квадратный из суммы квадратов двух противоположных сторон равен диаметру круга, описанного около четырехугольника.

102. **Задача Брамагупты.** Квадрат хорды, перпендикулярной к диаметру, деленный на учетверенный любой отрезок диаметра и сложенный с тем же отрезком, равняется диаметру.

103. **Задача Брамагупты.** Меньший из отрезков диаметра, пересеченного перпендикулярной хордой, равен полуразности диаметра и корня квадратного из разности квадратов диаметра и хорды.

104. Некто сказал своему другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя», на что последний ответил: «Если ты мне дашь только 10 рупий, я стану вшестеро богаче тебя». Спрашивается, сколько было у каждого?

105. Решить в общем виде квадратное уравнение $ax^2 + bx = c$.

106. Корень квадратный из половины пчелиного роя полетел к кусту жасмина. Восемь девятых роя остались дома. Одна пчелка полетела за трутнем, обеспокоенная его жужжанием в цветке лотоса, куда он попал вечером, привлеченный приятным ароматом, и не может оттуда выбраться, так как цветок закрылся. Скажи мне число пчел роя.

107. Найти число, которое, будучи умножено на 12, по прибавлении к своему кубу равняется ушестеренному квадрату самого себя, увеличенному тридцатью пятью.

108. Решить уравнение $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$. (Решается элементарно.)

109. Найти высоту кругового сегмента, если известны диаметр круга и основание сегмента.

110. Решить в рациональных числах уравнение

$$ax + by + c = xy.$$

111. **Задача Бхаскары.** Красавица со сверкающими глазами, ты, знающая истинный метод обращения, назови мне число, которое, умноженное на 3, сложенное с $\frac{3}{4}$ произведения, разделенное на 7, уменьшенное на $\frac{1}{3}$ частного, умноженное на самое себя, уменьшенное на 52 после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, будет равняться 2.

112. **Задача Бхаскары.**

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько ты скажешь
Обезьян там было в роще?

113. **Задача Бхаскары.** Скажи мне, сколько обезьян в стае, если квадрат пятой части, уменьшенной тремя, спрятался в пещере и только одна осталась на виду, взобравшись на дерево.

114. **Задача Бхаскары.** Посреди сражения яростный сын Притхи схватил некоторое число стрел, чтобы убить Карну; половину их он употребил на собственную защиту, а учетверенное количество квадратного корня — против лошадей; 6 стрел пронзили возницу Салью, 3 других прорвали зонтик Карны, разбили его лук и знамя и только одна последняя пронзила ему голову. Сколько было стрел у Арджуны [сына Притхи]?

115. Задача Бхаскары. Удесятеренный корень квадратный из стада лебедей полетел по направлению к озеру, заметив, что сгущаются тучи. Однако восьмая часть всех лебедей скрылась в ненюфарах [цветущие водяные растения] и только три части безмятежно плещутся в волнах. Скажи мне, юная девушка с пышной прической, сколько всех лебедей?

116. Решить уравнение $y^2 = ax^2 + 1$, которое позднее в Европе стало называться уравнением Пеля.

117. Задача о тополе (Бхаскары).
На берегу реки рос тополь одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол надломал.
Бедный тополь упал. И угол прямой
С теченьем реки его ствол составлял.
Запомни теперь, что в том месте река
В четыре лишь фута была широка.
Верхушка склонилась у края реки.
Осталось три фута всего от ствола,
Прошу тебя, скоро теперь мне скажи:
У тополя как велика высота?

118. Задача о лотосе (Бхаскары).
Над озером тихим, с полфута размером,
Высится лотоса цвет.
Он рос одиноко. И ветер порывом
Отнес его в сторону. Нет
Больше цветка над водой.
Нашел же рыбак его ранней весной
В двух футах от места, где рос.
Итак, предложу я вопрос:
Как озера вода здесь глубока?

119. Задача Бхаскары. Зная длины m и n двух палок бамбука, вертикально воткнутых в землю на известном расстоянии, вычислить длину перпендикуляра к земле, опущенного из точки пересечения соединяющих конец одной палки с основанием другой, и отрезков между основанием этого перпендикуляра и основаниями палок.

120. Задача Парамадисвара (комментатора Ариабхаты). Найти число, которое, будучи умножено на 3, а затем разделено на 5, увеличено на 6, после чего из него извлечен корень квадратный, отнята единица и результат возведен в квадрат, дает 4.

АРАБСКИЕ ЗАДАЧИ

121. Разделить число 10 на такие две части, разность которых есть 5.

122. Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 3, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 4.

123. Задача Бега-Эддина. Заиду обещана награда в виде большей из двух частей, дающих в сумме 20, произведение же этих частей 96. Как велика награда?

124. Задача Аль-Хорезми. Решить квадратные уравнения:

1) $5x^2=40x$;

2) $\frac{25}{9}x^2=100$;

3) $10x=x^2+21$;

4) $x^2=12x+288$;

5) $x^2 + 20\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}x$;

6) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$.

125. Задача Ал-Кархи. Найти число, которое от умножения на $3+\sqrt{5}$ дает единицу.

126. Задача Омара Хайяма. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}.$$

127. Задача Ал-Кархи. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ xz = y^2; \\ xy = 10. \end{cases}$$

128. Задача Аль-Хорезми. В равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 и основанием 12 вписать квадрат.

129. Задача Ал-Каши. Копье стояло в воде отвесно и высовывалось наружу на три локтя. Ветер отклонил его и погрузил в воду таким образом, что его вершина стала находиться на поверхности воды, а основание не изменило своего положения. Расстояние между первоначальным местом его появления и местом его исчезновения в воде — пять локтей. Мы хотим узнать длину копья.

130. Задача Ал-Кархи. Найти площадь прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру.

131. Задача Бега-Эддина. По данным высоте h и радиусам r и R нижнего и верхнего оснований усеченного конуса найти высоту соответствующего полного конуса.

132. **Задача Бега-Эддина.** Требуется найти число, которое, будучи умножено само на себя, сложено с двумя, затем удвоено, вновь сложено с тремя, разделено на 5, наконец, умножено на 10, в результате дает 50.

133. **Задача Аль-Хорезми.** Найти такое число, что если отнять от него $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ его, то в остатке будет 8.

134. **Задача Ал-Кальсади.** Найти число, которое, будучи взято семь раз и сложено с ушестеренным числом, дает 25.

135. **Задача Ал-Кальсади.** Найти число, одна треть и одна четверть которого составляет 21.

РУССКИЕ ЗАДАЧИ

136. Четыре плотника у некоего гостя нанялись двора ставити. И говорит первый плотник так: только б де мне одному тот двор ставити, я бы де его поставил един годом. А другой молвил: только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в два года. А третий молвил: только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в три года. А четвертый так рек: только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в четыре года. Ино все те четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Ино, сколь долго они ставили, сочти мне.

137. **Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»).** Некий торговец купил 112 баранов старых и молодых, дал 49 рублёв 20 алтын, за старого платил по

15 алтын и по 2 деньги, а за молодого по 10 алтын, и ведательно есть, колико старых и молодых баранов купил он.

138. Задача Эйлера. Преобразовать

$$\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}.$$

139. Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»). Спросил некто учителя: скажи, сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына. Учитель ответил: если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня учеников 100. Спрашивается, сколько было у учителя учеников?

140. Задача о гусях. Летело стадо гусей, навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей», а те ему отвечают: «Нет, нас не сто гусей, а если бы нас было еще столько, сколько есть, да еще полстолько, да четверть столько, да еще ты, один гусь с нами, тогда нас было бы ровно сто гусей». Сколько их было?

141. Задача Гольдбаха. Всякое нечетное число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. Проверьте это на примере нескольких двузначных чисел.

142. Задача Эйлера. Каждое четное число, начиная с четырех, можно разбить на сумму двух простых чисел. Проверьте это на примере нескольких двузначных чисел.

143. Задача Эйлера. Можно ли поочередно обойти все семь мостов города Кенигсберга [теперь Калининград], соединяющих районы этого города с остро-

Эйлер (1707—1783)

вом на реке Прегель, проходя по каждому только по одному разу (рис. 1)?

144. Задача Эйлера (из учебника «Введение в алгебру»). Две крестьянки принесли на рынок 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала второй: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой?

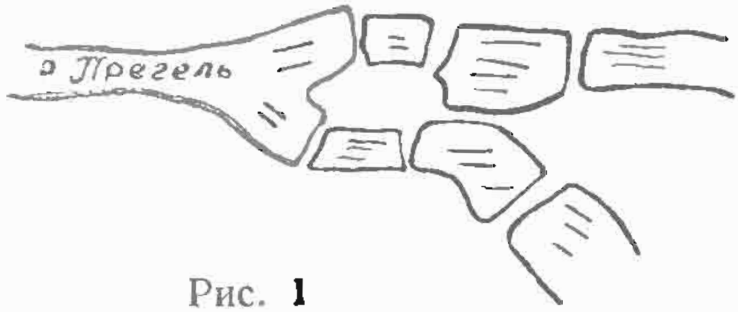


Рис. 1

145. Задача Л. Н. Толстого. В рассказе Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно?» крестьянину отводилось столько земли, сколько он успевал обежать в течение одного дня. По какому контуру ему выгоднее было бежать: по квадратному, шестиугольному [правильный шестиугольник] или по кругу? *Указание:* при равенстве периметров этих фигур какая имеет большую площадь?

146. Задача Л. Н. Толстого. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

Л. Н. Толстой (1828—1910)

147. Задача Л. Н. Толстого. На противоположных стенах комнаты определенной длины и ширины сидят муха и паук, муха — на полтора аршина от пола, паук — на полтора аршина от потолка. Какое между ними кратчайшее расстояние, которое мог бы проползти паук, чтобы достать муху?

148. Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»). Егда же кто можаше во едину вервь, которая долготы 5 аршин, связати 100 копий, и ведательно есть, колико таковых же копий возможно связати другою вервью, яже долготою есть $7\frac{1}{2}$ аршин [предполагается, что пучки копий имеют в сечении очертания круга].

149. Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»). Окрест некоего града бяше водный ров, имеющий внешнее окружение 440 аршин, широта же его 14 аршин, и ведательно есть, колико аршин имать по внутреннему окружению.

150. Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»). Случися некоему человеку к стене лествицу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обрете лествицу долготою 125 стоп. И ведати хощет, колико стоп сея лествицы нижний конец от стены отстояти имать.

151. Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»). В некоем кладязе поставлена лествица долготою 41 стопа, а кладязь широтою во все страны по 9 стоп. И ведательно есть, колику оный кладязь глубину имяше.

152. Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»). Некий превысокий господин восхоте некое яблоко, суще в *диаметре 9 стоп* [*футов*], *позлатити* сусальным золотом, его же всякий листок в долготе 4-х

АРЇѲМЕТЇКА, ПРАКТЇКА
ИЛИ ДѢЯТЕЛНАЯ.

Что есть арїѳметїка;

Арїѳметїка или числителница, есть художество честное, независтное, и всѣм удобопонятное, многополезнѣйшее, и многохвалнѣйшее, от древнѣйших же и новѣйших, в разная времена явлшихся изряднѣйших арїѳметиков, изобрѣтенное, и изложенное

Колико губа есть арїѳметїка практїка;
Есть сугуба

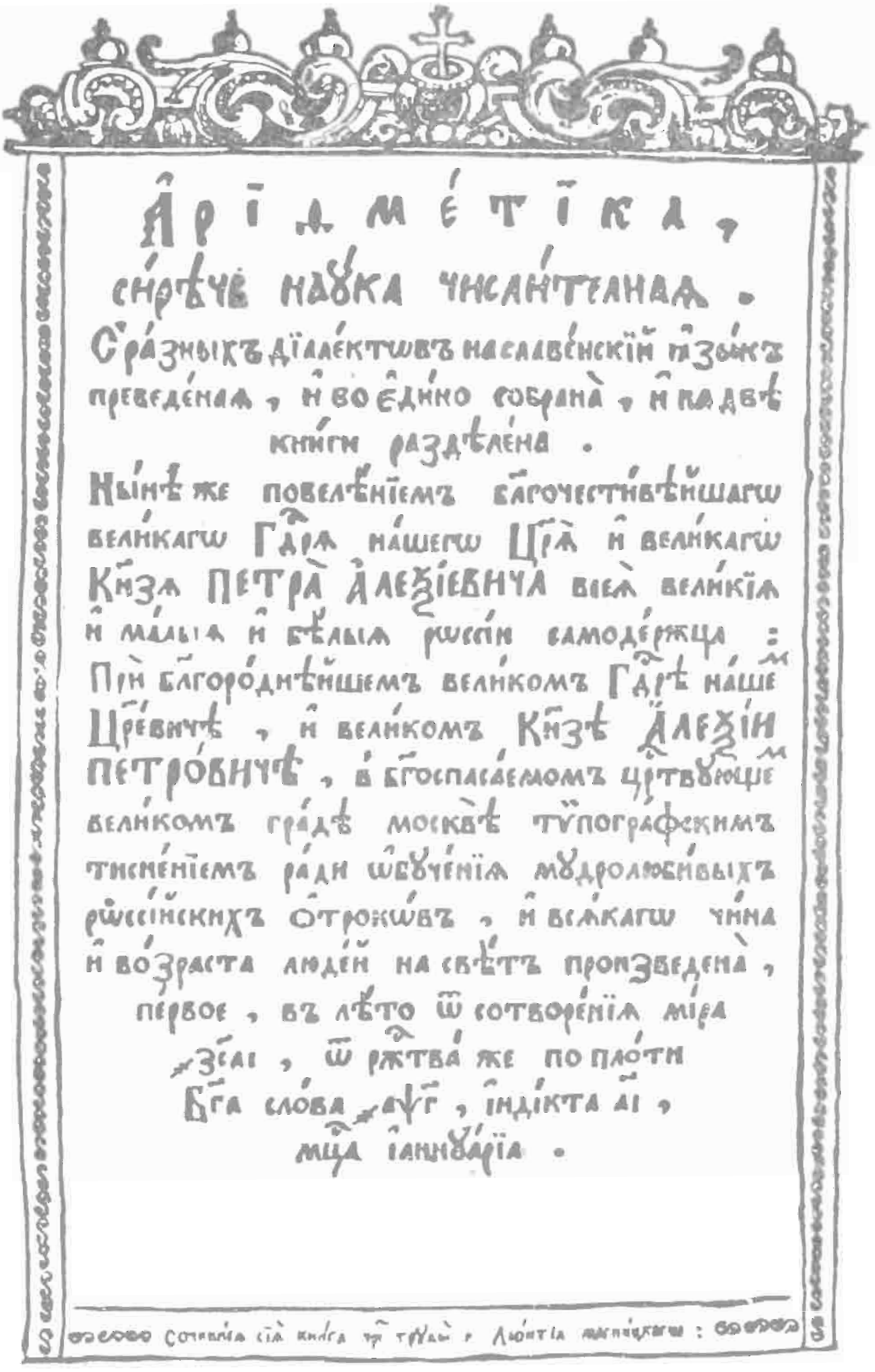
1 Арїѳметїка полїтика, или гражданская.
2 Арїѳметїка логїстика, не ко гражданству токмо, но и к движенїю небесных кругов принадлежащая.

Титульный лист из „Арифметики" Магницкого цоль [дюймов], а в широте 2-х цоль. И ведательно есть, колико золота таковых листов на позолоту пойдет.

153. **Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»).** Послан человек из Москвы на Вологду, и велено ему в хождении своем совершати на всякий день по 40 верст; потом другий человек в другий [на следующий] день послан в след его, и велено ему идти на день 45 верст, и ведательно есть, в коликий день постигнет [догонит] второй первого.

154. **Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»).** Некий человек продаде коня за 156 рублев, раскаявся же купец нача отдавати продавцу глаголя: яко несть мне лепо взяти сицевого коня недостойного таковые высокие цены; продавец же предложи ему иную куплю глаголя: аще ти мнится велика цена сему коню быти, убо купи токмо гвоздие их же сей конь имать в подковах своих ног, коня же возьми за тою куплею в дар себе. А гвоздей во всякой подкове по шести, и за один гвоздь даждь ми едину полушку, за другой же две полушки, а за третий копейку, и тако все гвозди купи. Купец же, видя толь малу цену и коня хотя в дар себе взяти, обещася тако цену ему платити, чая не больше 10 рублев за гвоздие дати. И ведательно есть: коликим купец он проторговался?

155. **Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»).** В некоей единой мельнице были трои жерновы, и едины жерновы в нощеденствие могут смолоти 60 четвертей, а другие в толикое же время могут смолоти 54 четверти, третьи же в толикое же время могут смолоти 48 четвертей, и некий человек даде жита 81 четверть желая в скорости оно смолоти и насыпа на все три жерновы, и ведательно есть,



Арїѳметїка,
сирѣчь наука числителная.
С разныхъ дїалектѡвъ на славенскїй языкъ
преведеная, и во едино собрана, и на двѣ
книги раздѣлена.
Нынѣ же повелѣнїемъ благочестивѣйшагѡ
великагѡ Гдрѧ нашегѡ Црѧ и великагѡ
Кнѧзѧ Петра Алеѯїевича всеѧ великїѧ
и малыѧ и бѣлыѧ рѡссїи самодержца:
При благороднѣйшемъ великомъ Гдрѣ нашемъ
Цревичѣ, и великомъ Кнѧзѣ Алеѯїи
Петровичѣ, в богоспасаемомъ црьствующемъ
великомъ градѣ москвѣ тѵпографскимъ
тисненїемъ ради ѡбученїѧ мудролюбивыхъ
рѡссїйскихъ отрокѡвъ, и всѧкагѡ чина
и возраста людей на свѣтъ произведена,
первое, въ лѣто ѿ сотворенїѧ мїра
҂зсаі, ѿ рж҃тва же по плоти
Бга слова ҂аѱг, індикта аі,
мца іаннуарїа.

Сочинисѧ сїѧ книга чрезъ труды Леонтїа Магницкагѡ:

Первая страница из „Арифметики" Магницкого в колико часов оно жито может смолотися и колико на всякие жерновы достоит мельнику насыпати?

156. **Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»).** Некий великий господин приказал себе шатер сделать в его же окружении на земли 120 стоп, сверх же до земли 32 стопы, и когда к делу шатра того тонкого сукна взято, которое ценой по 2 рубли аршин, в ширину же $2\frac{1}{2}$ аршина, ведательно есть, колико аршин того сукна пошло и в коликую цену той шатер стал?

157. **Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики», 1811).** Капитан на вопрос, сколько имеет в команде своей людей, ответствовал, что $\frac{2}{5}$ его команды в карауле, $\frac{2}{7}$ в работе, $\frac{1}{4}$ в лазарете да 27 человек налицо; спрашивается число людей его команды.

158. **Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики»).** Собака усмотрела в 150 саженях зайца, который перебегает в 2 минуты по 500 сажен, а собака в 5 минут — 1300 сажен. Спрашивается, в какое время собака догонит зайца?

159. **Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики»).** Куплено сукна полторажды полтретья аршина, заплачено полчетвертажды полпята рубли. Спрашивается, сколько должно заплатить за полсемажды полдевята аршина того же сукна?

160. **Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики»).** Крестьянин менял зайцев на домашних кур, брал за всяких двух зайцев по три курицы; каждая курица снесла яиц третью часть числа всех куриц. Крестьянин, продавая яйца, брал за каждые девять яиц по стольку копеек, сколько каждая курица яиц снесла, за которые выручил он 24 алтына; спрашивается число кур и зайцев.

161. Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики»). Веселый француз пришел в трактир с неизвестною суммою своего богатства, занял у содержателя столько денег, сколько у себя имел; из сей суммы издержал 1 рубль. С остатком пришел в другой трактир, где опять, занявши столько, сколько имел, издержал в оном также 1 рубль; потом пришел в третий и четвертый трактир, учинил то же, наконец, по выходе из четвертого трактира не имел ничего; спрашивается количество его денег.

162. Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики»). Четыре путешественника: купец с дочерью да крестьянин с женою — нашли без полушки 9 алтын да лапти, из которых крестьянке дали грош без полушки да лапти, а остальные деньги разделили между собой так: купеческая дочь взяла вполтора больше крестьянина, а купец—вполтретья больше крестьянина. Спрашивается, сколько которому досталось?

163. Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики). У приезжего гасконца оценили богатство: модный жилет с поношенным фраком в три алтына без полушки, но фрак вполтретья дороже жилета; спрашивается каждой вещи цена.

164. Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики»). Нововыезжей в Россию французской мадаме вздумалось ценить свое богатство в чемодане: новой выдумки нарядное фуро и праздничный чепец а ля фигаро; оценщик был русак, сказал мадаме так: богатство твоего первое фуро вполчетверте дороже чепца фигаро; вообще ж стоят не с половиною четыре алтына, но настоящая им цена только сего половина; спрашивается каждой вещи цена, с чем француженка к россам привезена.

165. **Задача Е. Д. Войтяховского (из «Курса чистой математики»).** Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 коп., за другую 2 коп., за третью 4 коп. и т. д. По истечению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 35 коп. Спрашивается число его ран.

166. **Задача С. А. Рачинского.** Путем устных вычислений найти быстро результат выражения

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

167. **Задача народная.**
Шли семь старцев.
У каждого старца по семи костылей,
На всяком костыле по семи сучков,
На каждом сучке по семи кошелей,
В каждом кошеле по семи пирогов,
А в каждом пироге по семи воробьев.
Сколько всего?

168. **Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»).** Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, а с женою выпьет ту же кадь в 10 дней. И ведательно есть, в колико дней жена его особенно выпьет ту же кадь.

169. **Задача Л. Ф. Магницкого (из «Арифметики»).** Некий человек нанял работника на год, обещав ему дать 12 рублей и кафтан. Но тот по случаю, проработав 7 месяцев, восхотел уйти и просил достойную плату с кафтаном. Ему дали по достоинству 5 рублей и кафтан. Какой цены был оный кафтан?

ЗАДАЧИ ЗАПАДНОЙ ЕВРОПЫ

170. **Задача Паскаля.** Найти общий признак делимости на произвольное число.

171. **Задача Озанама.** Трое хотят купить дом за двадцать шесть тысяч ливров. Они условились, что первый даст половину, второй — одну треть, а третий — одну четверть. Сколько даст каждый?

172. **Задача Ньютона.** Разделить

$$y^4 - 3\frac{1}{2}\ a^2y^2 + 3a^2y - \frac{1}{2}a^4 \text{ на } y^2 - 2ay + a^2.$$

173. **Задача Леонардо Пизанского.** Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько у каждого?

174. **Задача Региомонтана.** Решить уравнение

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 25.$$

175. **Задача Кардана.** Найти построением положительный корень уравнения

$$x^2 + 6x = 91.$$

176. **Задача Виета.** Решить уравнение $x^2 + px + q = 0$ подстановкой $x = y + z$.

177. **Задача Безу.** Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается, за какую сумму он ее купил?

178. **Задача Ферма.** Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\div\!\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ \text{то}\ \frac{S}{S-a_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

179. Задача Лейбница. Показать, что

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}.$$

180. Задача Кардана. Перемножить

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}).$$

181. Задача Декарта. Решить уравнение

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0.$$

182. Задача Леонардо да Винчи. Если два равных круга пересекаются друг с другом, то прямая, проходящая через точки их пересечений, будет в любой части своей длины находиться на одинаковых расстояниях от того и другого центра.

183. Задача Кардана. Построить общую касательную к двум данным окружностям.

184. Задача Региомонтана. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

185. Задача Тарталья. На данном отрезке AB при помощи данного раствора циркуля (не равного AB) и линейки построить равносторонний треугольник.

186. Задача Штейнера. Если соединить точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ с точкой F — пересечения ее непараллельных сторон, то большее основание разделится пополам линией EF.

187. Задача Ньютона (из «Всеобщей арифметики», 1707). Дана конечная прямая BC, в концах которой проведены под данными углами ABC и ACB две прямые BA и CA. Найти высоту AD их точки пересечения A над данной линией BC.

188. Задача Валлиса. Показать алгебраически и геометрически, что из прямоугольников одинакового периметра квадрат имеет наибольшую площадь.

Франсуа Виет (1540—1603)

189. Задача Ньютона (из «Всеобщей арифметики», 1707). Двенадцать быков съедают $3\frac{1}{3}$ югера пастбища за 4 недели; 21 бык съедает 10 югеров такого же пастбища за 9 недель; сколько быков съедят на 24 югерах за 18 недель?

190. Задача Ньютона (из «Всеобщей арифметики», 1707). Некий торговец каждый год увеличивает на одну треть свое состояние, уменьшенное на сто фунтов, которые ежегодно затрачивает на свою семью. Через три года он обнаруживает, что его состояние удвоилось. Спрашивается, сколько у него было денег вначале?

191. Задача Наполеона. Данную окружность с данным положением центра разделить на равные части при помощи одного циркуля, не прибегая к линейке.

192. Задача Софии Жермен. Доказать, что каждое число вида a^4+4 есть составное $(a>1)$.

193. Задача Пуассона. Некто имеет 12 пинт вина и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда, один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается, каким образом налить 6 пинт в сосуд в 8 пинт?

194. Задача Алкуина (из сборника «Задачи для изощрения ума»). Борзая мчится за зайцем, которого отделяет от нее расстояние в 150 футов. Прыжок зайца равен 7 футам, прыжок борзой за то же время равен 9 футам. Во сколько прыжков борзая догонит зайца?

195. Задача Леонардо Пизанского. Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых 3 воробьев заплачена 1 монета, за каждые 2 горлицы — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

Лейбниц (1646—1716)

196. Задача Адама Ризе (из трактата „Die Coss“). Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по одной трети ваших денег, и я приобрету лошадь». Наконец, третий говорит первым двум: «Дайте мне только по четверти ваших денег, и лошадь будет моя». Теперь спрашивается, сколько денег было у каждого?

Ньютон (1643—1727)

Часть вторая

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЭКСКУРСЫ, УКАЗАНИЯ И ПОДРОБНЫЕ РЕШЕНИЯ

ВАВИЛОН

В древнем Вавилоне математика зародилась задолго до нашей эры. Вавилонские памятники в виде глиняных плиток с клинописными надписями хранятся в различных музеях мира, в том числе в ленинградском Эрмитаже и московском Музее изобразительных искусств. Найдено сорок четыре глиняных таблицы — своеобразная математическая энциклопедия древних вавилонян. В них даны достаточно удобные способы решения ряда практических задач, связанных с земледелием, строительством и торговлей.

Научные достижения древних вавилонян заключаются в следующем:

1. Вавилоняне были основоположниками астрономии. Полученные ими данные о продолжительности основных циклов и периодов в планетной системе обладают довольно большой точностью, так, например, вавилонский лунный месяц отличается от принятого современной астрономией всего лишь на 0,4 сек.

2. Вавилоняне создали шестидесятиричную систему счисления, в основе которой лежало не число 10, как у нас, а число 60. Они создали систему мер и весов, в которой каждая последующая мера больше предыдущей в 60 раз. Отсюда ведет начало наше деление мер времени — часа, минуты, секунды — на 60 частей, круга — на 360°.

3. Вавилоняне решали уравнения второй степени и некоторые виды уравнений третьей степени, причем последние — при помощи специальных таблиц.

Есть основания предполагать, что математика древних вавилонян оказала влияние на математическую культуру закавказских народов, в особенности на армянскую, содействовав ее исключительно раннему расцвету.

1. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равняется радиусу, следовательно,

$$2\pi R = 6R,$$

откуда

$$\pi = \frac{6R}{2R} = 3.$$

2. Древние вавилоняне умели строить равносторонний треугольник, а с его помощью делить прямой угол на три равные части. Пусть дан прямой угол ABC (рис. 2). Требуется разделить этот угол на три равные части. Для этой цели на отрезке BD стороны BA построим треугольник BED. Тогда угол CBE и будет составлять одну

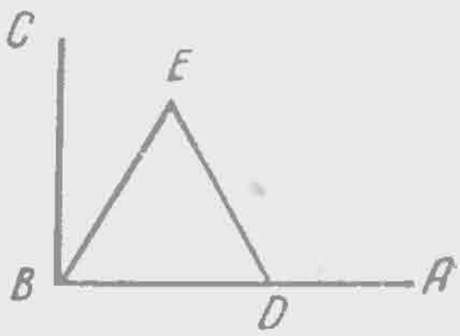


Рис. 2

треть данного прямого угла. Остается только разделить пополам угол EBD, и задача будет решена.

3. Согласно условиям задачи площадь четырехугольника

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2},$$

где a, b и c, d — две пары противоположных сторон. Положим, $a = b$ и $c = d$, тогда четырехугольник превращается в прямоугольник и площадь его $S = ac$.

ЕГИПЕТ

Вторым после Вавилона культурным центром глубокой древности был Египет (занимал примерно ту же территорию, что и современный Египет). В этой «стране пирамид» за много тысяч лет до нашей эры возводились гигантские сооружения в виде храмов и пирамид. Некоторые из этих памятников сохранились до настоящего времени. Различные строительные работы, а также земледелие, основанное на искусственном орошении, рано вызвали потребность в математических познаниях и особенно в геометрии.

Математические правила, нужные для земледелия, астрономии и строительных работ, древние египтяне записывали на стенах храмов или на «папирусах», лентообразных свитках из особого писчего материала растительного происхождения.

В Британском музее хранится так называемый «папирус Райнда», расшифрованный профессором А. Эйзенлором в 1877 году.

Рукопись относится к периоду 2000—1700 лет до нашей эры. В ней содержится 84 задачи, причем большинство из них арифметического характера.

Московский папирус относится к 1850 году до нашей эры. Он был приобретен русским собирателем Голенищевым в 1893 году, а в 1912 — перешел в собственность московского Музея изобразительных искусств. Этот редкий, весьма ценный памятник глубокой древности был изучен советскими учеными — академиками В. А. Тураевым и В. В. Струве.

В этом папирусе решается задача на вычисление объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями.

Оказывается, как показала расшифровка папирусов, египтяне еще четыре тысячи лет назад решили ряд практических задач по арифметике, алгебре, геометрии, причем в арифметике пользовались не только целыми числами, но и дробями.

4. Решение задачи сводится к решению уравнения

$$x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10.$$

Откуда $x=9$.

5. В рукописи дробная часть ответа $172\frac{21}{32}$ дается в виде суммы дробей, числители которых равны 1, а именно

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}.$$

Древнеегипетский писец

6. Здесь имеется пять членов геометрической прогрессии со знаменателем 7: 7, 49, 343, 4201, 16807. Теперь подсчитаем сумму

$$S_5 = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{16807 \cdot 7 - 7}{7 - 1} = \frac{7(16807 - 1)}{6} =$$

$$= \frac{7 \cdot 16806}{6} = 7 \cdot 2801 = 19067.$$

7. Обозначив через x и y искомые длины сторон, сводим задачу к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}; \\ xy = S. \end{cases}$$

Перемножив эти уравнения, получим

$$x^2 = \frac{m}{n} \cdot S, \quad x = \sqrt{\frac{m}{n} \cdot S}.$$

8. Из условия задачи имеем

$$\left(\frac{8}{9} d\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Тогда

$$\pi = \frac{8^2 \cdot d^2 \cdot 4}{9^2 \cdot d^2} = \frac{64 \cdot 4}{81} = 3{,}16.$$

9. Египтяне решали эту задачу по формуле

$$V_{\text{ус. пир}} = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2),$$

где h — высота пирамиды, a и b — соответственно нижнее и верхнее основания.

После подстановки числовых значений получим

$$V_{\text{ус. пир}}=\frac{6}{3}\left(16+4+\sqrt{16\cdot 4}\right)=2(16+4+8)=56.$$

Сам автор в XIX веке до нашей эры эту задачу решал так: «Задача решить пирамиду (сбоку приложен чертеж) как если бы было сказано: 4 — внизу, 2 — наверху. Делай, как делается: квадрат 4 дает 16. Удвоенное 4 дает 8. Делай, как делается: квадрат 2 дает 4. Сложи 16, сложи 8, сложи 4, что дает 28. Делай, как делается: возьми одну треть от 6, что составляет 2. Делай, как делается: возьми 28 дважды, что составит 56. Это есть 56. Ты найдешь это правильным».

10. По египетскому способу $S_1=\frac{bc}{2}$, где b — основание, а c — боковая сторона равнобедренного треугольника. Обозначив высоту треугольника через h, найдем:

$$h=\sqrt{c^2-\frac{b^2}{4}}=c\sqrt{1-\left(\frac{b}{2c}\right)^2}.$$

Точное значение площади выразится формулой

$$S_2=\frac{bc}{2}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2c}\right)^2}=S_1\sqrt{1-\left(\frac{b}{2c}\right)^2}.$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{2c}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{2\cdot 10}\right)^2}=0{,}98,$$

т. е. ошибка равна 2%.

11. По египетскому способу $S_1=\frac{a+b}{2}c$, где a — нижнее основание трапеции, b — верхнее, а c — боковая сторона. Обозначив высоту трапеции через h, получим

$$h = c\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}.$$

Точное значение площади выразится формулой

$$S_2 = S_1\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2},$$

откуда

$$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1-\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}.$$

Теперь остается подставить данные числовые значения и произвести элементарный подсчет.

ГРЕЦИЯ

Принято считать, что первыми учителями древних греков были египтяне. Еще в VII веке до нашей эры при фараоне Псаметихе иностранным путешественникам был открыт свободный доступ в Египет. Этим широко пользовались ученые древней Греции, совершавшие традиционные путешествия в «страну пирамид» для изучения науки и культуры. Примерно с IV века до нашей эры древние греки стали на путь самостоятельных изысканий по математике и достигли в этом направлении значительных успехов, особенно по геометрии. В III веке до нашей эры древнегреческая геометрия достигла своего апогея в работах древнегреческого ученого Евклида, написавшего тринадцать книг по геометрии, объединенных общим названием «Начала». Это — величественный памятник древнегреческой математической культуры.

В трудах Евклида логическая сторона геометрии была доведена до очень высокого уровня, который был превзойден только на рубеже XIX и XX веков в трудах немецкого математика Давида Гильберта и его школы.

Древние греки интересовались не только вопросами элементарной геометрии (тогда этого термина не было), но и заложили прочные основы высшей геометрии (работы Аполлония, Архимеда и др.).

Значительных успехов в теории чисел достигли Пифагор и его ученики. Пифагор — крупнейший древнегреческий математик и философ V века до нашей эры. В области философии был идеалистом, проповедовал мистику, согласно которой «числа управляют миром». Ему приписывают открытие «теоремы Пифагора» и ряда других теорем.

В области алгебры, в частности в решении неопределенных уравнений, много сделал Диофант, живший на рубеже II и III веков нашей эры в Александрии, почему его и называют иногда Диофантом Александрийским. Он улучшил алгебраические методы путем введения первых буквенных алгебраических обозначений и символического изображения уравнений.

Самое значительное сочинение Диофанта — это его «Арифметика», которая дошла до нас в шести книгах. Однако полагают, что их было 13. По содержанию «Арифметики» Диофанта можно судить о состоянии алгебры у древних греков.

12. Условие задачи приводит к уравнению

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{2}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x.$$

Решая это уравнение, получим $x=84$. Следовательно, Диофант умер 84 лет.

О жизни Метродора, составителя данной задачи, ничего не известно, даже нет сведений о времени его рождения и смерти. В историю математики он вошел как автор интересных задач, составленных в стихах. Задачи Метродора входили в рукописные сборники и имели в свое время большое распространение.

13. Задача сводится к уравнению

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x.$$

Решая это уравнение, получим $x=20$. Следовательно, школу Пифагора посещают 20 человек, что и нужно было найти.

«Греческая антология» состоит из задач, составленных в стихотворной форме, главным образом гекзаметром, которым, как известно, написаны знаменитые поэмы Гомера «Илиада» и «Одиссея». Особенно в большом ходу эти задачи были в X—XIV веках.

14. Исходя из условий задачи, составим систему

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{3} z; \\ y - z = \frac{1}{3} x; \\ z - 10 = \frac{1}{3} y. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x = 45, \ y = 37\frac{1}{2}, \ z = 22\frac{1}{2}.$$

15. Диофант эту систему решал так: из уравнения $x + y = 10$ имеем $\frac{x+y}{2} = 5$. Положим теперь

$$\frac{x-y}{2} = z.$$

Сложив последние два уравнения, получим

$$x = 5 + z.$$

Произведя вычитание этих же уравнений, будем иметь

$$y = 5 - z.$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = (5+z)^2 + (5-z)^2,$$

или

$$x^2 + y^2 = 50 + 2z^2.$$

Принимая во внимание второе уравнение данной системы, получим

$$68 = 50 + 2z^2, \text{ или } 2z^2 = 18.$$

Откуда

$$z^2 = 9, \quad z = 3.$$

Следовательно, $x = 8$, $y = 2$.

16. Приводим решение самого Архимеда, данное им в своем трактате «О квадратуре параболы».

Задача ставится так: найти сумму членов бесконечно убывающей прогрессии $a + b + c + d + \ldots$, знаменатель которой равен $\frac{1}{4}$. Из определения прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{4}$ имеем

$$b = \frac{a}{4}; \quad c = \frac{b}{4}; \quad d = \frac{c}{4} \text{ и т. д.}$$

Или

$$a = 4b; \; b = 4c; \; c = 4d \text{ и т. д.}$$

Далее

$$b + c + d + \ldots + \frac{1}{3}(b + c + d + \ldots) =$$

$$= \left(b + \frac{b}{3}\right) + \left(c + \frac{c}{3}\right) + \left(d + \frac{d}{3}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{4}{3} b + \frac{4}{3} c + \frac{4}{3} d + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3}(4b + 4c + 4d + \ldots) = \frac{1}{3}(a + b + c + \ldots).$$

Откуда

$$b + c + d + \ldots = \frac{1}{3} a.$$

Прибавляя к обеим частям полученного равенства первый член прогрессии a, будем иметь

$$a + b + c + d + \ldots = \frac{4}{3} a.$$

Следовательно,

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots=\frac{4}{3},$$

что и нужно было найти.

(Решите эту задачу обычным путем, применяя формулу бесконечно убывающей прогрессии.)

Автором решенной задачи является величайший математик и физик всех времен Архимед Сиракузский (287—212 до н. э.). Его жизнь овеяна легендой, согласно которой он один в течение двух лет при помощи изобретенных им машин оборонял Сиракузы от римских полчищ, блокировавших город с суши и моря. Это он — изобретатель знаменитого «архимедова винта» и «архимедовых рычагов». Это он открыл известный закон гидростатики, известный под названием «закона Архимеда». Это он — автор многих оригинальных трактатов, которые вошли золотым фондом в сокровищницу мировой науки.

В ряде работ Архимед пользуется методами, которые весьма близки к современным методам высшей математики, основанным на теории пределов.

17. Арифметическую прогрессию с четным числом членов можно записать так:

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots,\ a_{2n}.$$

Найдем теперь сумму первой половины всех ее членов

$$S_1=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Сумма второй половины

$$S_2=\frac{a_{n+1}+a_{2n}}{2}\cdot n.$$

Составим теперь разность полученных сумм:

$$S_2-S_1=\frac{a_{n+1}+a_{2n}-a_1-a_n}{2}\cdot n.$$

Так как

$$a_n = a_1 + dn - d,$$

$$a_{n+1} = a_1 + dn,$$

$$a_{2n} = a_1 + 2dn - d$$

(где d — разность арифметической прогрессии), тогда

$$S_2 - S_1 = \frac{a_1 + dn + a_1 + 2dn - d - a_1 - a_1 + dn - d}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{2dn}{2}\cdot n = dn^2.$$

Следовательно,

$$S_2 - S_1 = dn^2,$$

что и требовалось установить.

Эта задача принадлежит греческому ученому Гипсиклу Александрийскому, жившему во II веке до нашей эры. Ему принадлежит XIV книга «Начал» Евклида (III до н. э.). Гипсикл является автором многих интересных задач.

18. Действительно, непосредственной проверкой устанавливаем, что если разбить ряд нечетных чисел на группы, так как этого требует условие задачи, т. е.

$$1+(3+5)+(7+9+11)+(13+15+17+19)+\ldots, \text{ то}$$

$$1=1^3,$$

$$3+5=8=2^3,$$

$$7+9+11=27=3^3,$$

$$13+15+17+19=64=4^3 \text{ и т. д.}$$

Теперь установленному факту дадим общее доказательство. Число членов в $n-1$ первых групп составляет

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Последнее число в $n-1$ группе равно $n(n-1)-1$. Тогда первое число в n-й группе будет

$$n(n-1)-1+2=n(n-1)+1=n^2-n+1,$$

а последнее число этой же группы

$$n^2-n+1+2(n-1)=n^2+n-1.$$

Следовательно, сумма членов n-й группы равна

$$\frac{n^2-n+1+n^2+n-1}{2}\cdot n=n^3,$$

что и требовалось доказать.

Автором этой задачи является древнегреческий ученый I века нашей эры Никомах из Геразы. Задача взята из его трактата «Введение в арифметику», который долгое время служил учебником по элементарной математике.

19. Приняв A за центр, опишем окружность AB радиусом, равным данному отрезку (рис. 3). Далее, приняв B за центр, опишем другую окружность тем же радиусом. Обозначив одну из точек пересечения окружностей через C и соединив ее прямыми с A и B, получим треугольник ABC, который, как легко проверить, и есть искомый.

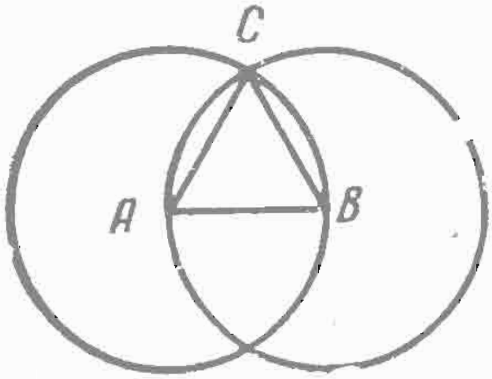


Рис. 3

20. Пусть ABC — данный произвольный угол. Возьмем на стороне AB произвольную точку D (рис. 4). Далее, на стороне AC построим отрезок $AE=AD$. Точки D и E соединим прямой. Теперь на отрезке DE построим равнобедренный треугольник DEH (задача 19). Соединим A и H прямой, которая и будет делить данный угол пополам.

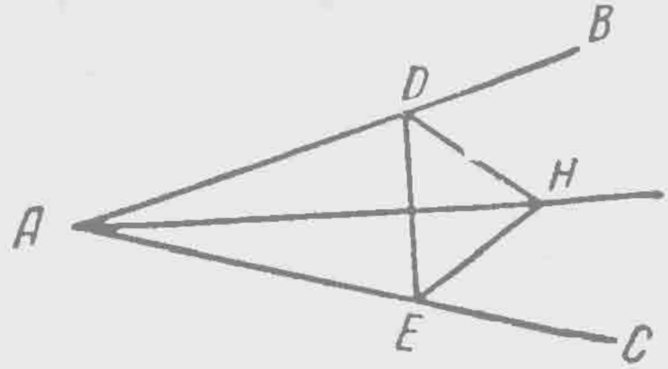


Рис. 4

21. Пусть ABC — данный треугольник, а α — данный угол. Для решения задачи делим BC в точке D пополам и строим при точке D угол, равный α

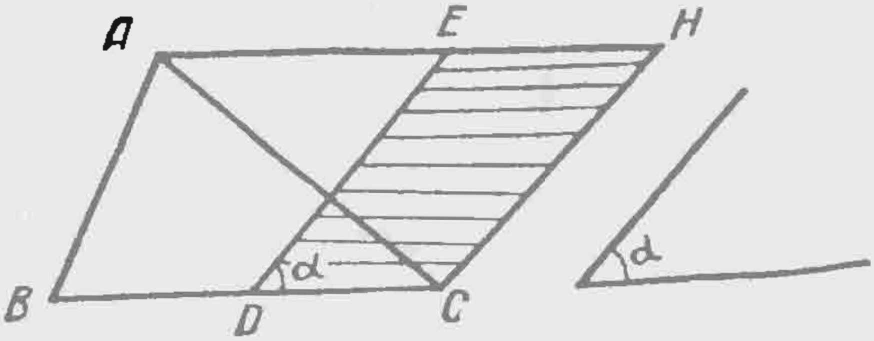


Рис. 5

(рис. 5). Далее, через C проводим прямую, параллельную прямой DE, а через точку A — прямую AH, параллельную AC, тогда полученный параллелограмм $DEHC$ и будет искомым (докажите это!).

22. На окружности данного круга берем произвольную точку A и в ней проводим касательную DE (рис. 6). Далее строим угол EA_1C_1, равный углу β, и угол

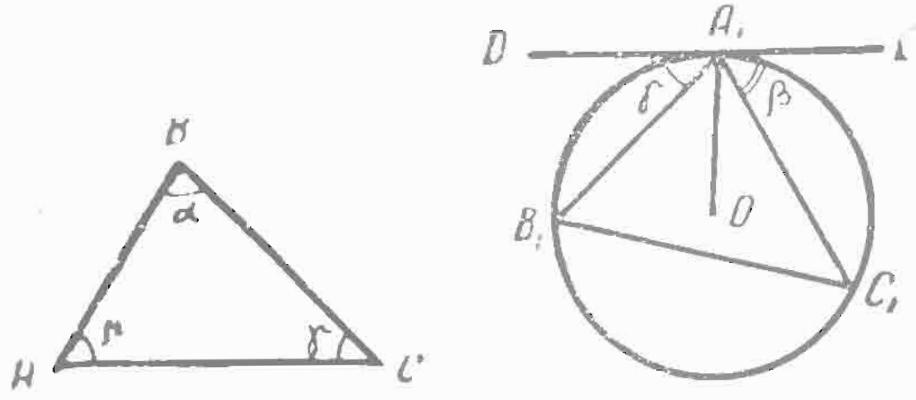


Рис. 6

DA_1B_1, равный углу γ. После соединения точек B_1 и C_1 прямой получаем треугольник $A_1B_1C_1$, который и будет искомым (докажите!).

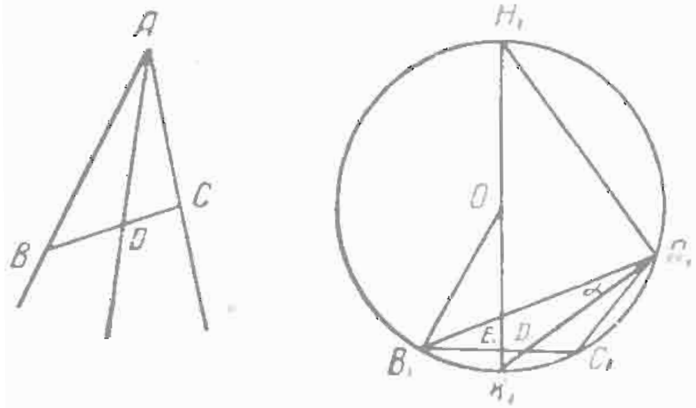


Рис. 7

23. Согласно условию задачи даны угол, биссектриса его и точка на ней. Требуется построить отрезок BC (рис. 7), чтобы он имел заданную длину.

Для этого сначала построим треугольник $A_1B_1C_1$ в произвольном положении. В этом случае придется строить треугольник по заданному основанию, противолежащему углу и биссектрисе. Пусть B_1C_1— сторона произвольного расположения, равная отрезку BC. Опишем на этом отрезке дугу, вмещающую данный угол α. Далее, из середины E_1 хорды B_1C_1 восставим перепендикуляр K_1E_1. Таким образом, задача сводится к построению хорды K_1A_1 с таким расчетом, чтобы $D_1A_1=DA$. Для этих целей рассмотрим треугольники $E_1K_1D_1$ и $A_1K_1H_1$. Они, как легко видеть, подобны и, следовательно,

$$\frac{K_1D_1}{H_1K_1} = \frac{E_1K_1}{K_1A_1},$$

или

$$K_1D_1 \cdot K_1A_1 = H_1K_1 \cdot K_1E_1.$$

Имея в виду, что $K_1A_1 = K_1D_1 + D_1A_1$, получим

$$(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = H_1K_1 \cdot E_1K_1.$$

Так как C_1K_1 является катетом прямоугольного треугольника $H_1C_1K_1$, не обозначенного на чертеже, тогда

$$H_1K_1 \cdot E_1K_1 = C_1K_1^2.$$

Следовательно, будем иметь

$$K_1D_1^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = C_1K_1^2.$$

Введем обозачения:

$$K_1D_1 = x,$$

$$A_1D_1 = p,$$

$$C_1D_1 = q.$$

Тогда

$$x^2 + px = q.$$

Построив x по данному уравнению, не представляет труда построить треугольник $A_1B_1C_1$ с его биссектрисой A_1D_1. Действительно, раствором циркуля $K_1D_1 = x$ найдем точку D_1. Соединив точки K_1 и D_1 и продолжив полученный отрезок до пересечения с окружностью, найдем точку A_1. Таким образом, нужный треугольник $A_1B_1C_1$ построен. Теперь остается на стороне данного угла отложить $AB = A_1B_1$ и провести BD.

Папп Александрийский, последний великий геометр древний Эллады, жил во второй половине IV века нашей эры.

Папп — автор замечательного сочинения «Математические коллекции», написанного им в 8 книгах. Однако до нас дошли только последние 6 книг и небольшой отрывок из второй книги.

В «Математических коллекциях» дан оригинальный свод важных открытий древнегреческих математиков по геометрии и арифметике. Сочинение содержит много заметок о древнегреческих математических трактатах, которые до нас не дошли.

24. Сам Диофант решал эту задачу так. Положим, что гипотенуза есть $x^3 + x$, а катет $x^3 - x$. Тогда второй катет найдется по теореме Пифагора

$$\sqrt{(x^3 + x)^2 - (x^3 - x)^2} = x^3,$$

или

$$2x^2 = x^3.$$

Тогда $x = 2$. Следовательно, гипотенуза равна 10, первый катет — 6, второй — 8.

25. Герон решает эту задачу по своей формуле

$$S_\Delta = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}};$$

$$S_\Delta = 84 \text{ (кв. ед.)}.$$

Древнегреческий ученый Герон Александрийский жил около III—II века до нашей эры. О его жизни имеются отрывочные сведения. Известно, что он был выдающимся ученым-инженером. Занимался вопросами геодезии, т. е. науки, которая изучает размеры и форму Земли, дает приемы изображения земной поверхности на планах и картах, устанавливает способы измерения на местности.

26. Имея в виду условия задачи, получим для объема цилиндра (рис. 8)

$$V_ц = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi R^3\right) = \frac{3}{2} V_{шар}.$$

Из тех условий задачи полная поверхность цилиндра

$$S_ц = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 =$$

$$= \frac{3}{2} (4\pi R^2) = \frac{3}{2} S_{шар}.$$

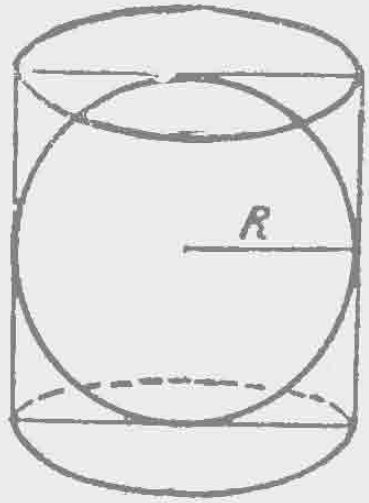


Рис. 8

Задача взята из трактата Архимеда «О шаре и цилиндре».

Эта задача пользовалась у самого Архимеда особым вниманием и любовью. Он даже завещал начертать шар, вписанный в цилиндр, на камне своего могильного памятника, что и было выполнено его родственниками.

30. Обозначив через x поклажу ослицы, а через y — поклажу мула, сводим задачу к системе уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} y + 1 = 2(x - 1); \\ y - 1 = x + 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x - y = 3; \\ y - x = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x = 5, \ y = 7.$$

31. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{4}{3}x + x = 12,$$

откуда

$$x = 5\frac{1}{7} \text{ дня.}$$

32. По-видимому, в школе Пифагора эта задача решалась геометрически. Единица представлялась в виде квадратов, а последовательные числа — „гномонов", т. е. фигур Г-образной формы (рис. 9), состоящих из нечетного числа квадратов (единиц).

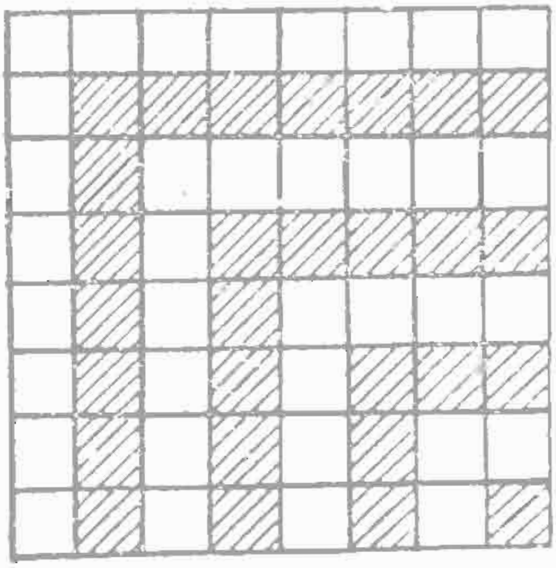


Рис. 9

$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=4+5=3^2,$$
$$1+3+5+7=9+7=16=4^2$$

и т. д.

Алгебраически эта задача решается очень просто. Последовательность нечетных чисел, начиная с единицы, представляет собой арифметическую прогрессию.

$$1, \ 3, \ 5, \ 7, \ldots, (2n+1).$$

Число членов этой прогрессии равняется $n+1$. Сумма всех членов указанной прогрессии будет

$$S = \frac{(1+2n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2.$$

33. В школе Пифагора эта задача решалась геометрически. Действительно, если от квадрата отнять гномон (рис. 9), представляющий нечетное число, в остатке получится квадрат, т. е.

$$2n+1=(n+1)^2-n^2.$$

34. Пусть меньший катет $a=2n+1$. Больший катет находится по правилу

$$b=\frac{(2n+1)^2-1}{2}=2n^2+2n.$$

Прибавив к полученному результату единицу, найдем гипотенузу

$$c=2n^2+2n+1.$$

Для прямоугольного треугольника должна выполняться теорема Пифагора $a^2+b^2=c^2$, т. е. должно иметь место равенство

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2.$$

Это равенство является тождеством, в чем легко убедиться, если раскрыть скобки в левой и правой частях.

Теперь, пользуясь „правилом Пифагора", составим таблицу сторон прямоугольных треугольников в целых числах.

n	a	b	c
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
и т. д.			

35. Поверхность шарового сегмента вычисляется по формуле

$$S=2\pi Rh,$$

где R — радиус шара, h — высота сегмента.

Если l будет прямая, соединяющая вершину сегмента с окружностью основания, то $l^2 = 2Rh$; тогда $S = \pi l^2$.

36. $S_{\text{опис}} = \pi R^2$; $S_{\text{впис}} = \pi r^2$; $r = \frac{a}{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — сторона квадрата.

$$S_{\text{опис}} = \frac{\pi a^2}{2}; \quad S_{\text{впис}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Следовательно, $S_{\text{опис}} = 2S_{\text{впис}}$, что и требовалось доказать.

37. $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$;

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \quad \text{Откуда } R = \sqrt[3]{\frac{r^2 h}{4}}.$$

$$V_{\text{ц}} = \pi r^2 h; \ \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 h; \ R = \sqrt[3]{\frac{3}{4} r^2 h}.$$

38. Объем сферического сегмента ABC равен объему сферического сектора $ABCO$ без объема конуса AOC (рис. 10). Следовательно,

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi r^2}{3}(R - h) = \pi r^2\left(h - \frac{R}{3}\right).$$

Если данное отношение равно n, то

$$\frac{\pi r^2\left(h - \frac{R}{3}\right)}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = n.$$

После известных упрощений получим

$$\frac{3h - R}{h} = n.$$

Откуда

$$h = \frac{R}{3-n}.$$

Из полученного результата видно, что n должно быть меньше трех.

39. Результат, полученный Архимедом, записывается в современных обозначениях формулой

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2= \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

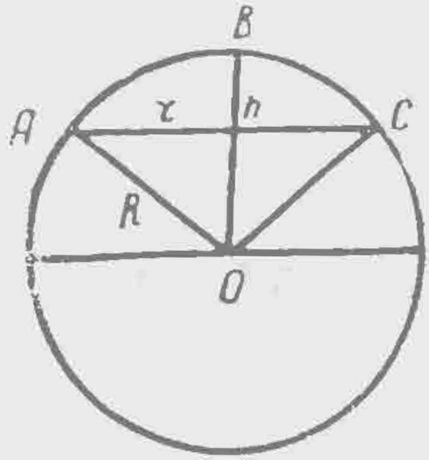


Рис. 10

Эта формула получается из рассмотрения очевидного тождества

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1.$$

Действительно, давая для n значения 1, 2, 3, ..., n, получим:

$$1^3-0^3=3\cdot1^2-3\cdot1+1;$$
$$2^3-1^3=3\cdot2^2-3\cdot2+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot3^2-3\cdot3+1;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$n^3-(n-1)^3=3\cdot n^2-3\cdot n+1.$$

После сложения будем иметь:

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-3(1+2+3+\ldots$$
$$+n)+n;\ n^3=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-\frac{3(n+1)n}{2}+n;$$

$$3(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2)=n^3-n+\frac{3(n+1)n}{2};$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6};$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Сам Архимед пришел к своему результату, исходя из геометрических соображений, выраженных им в следующих словах: «Если взять линии в каком угодно количестве и каждая превосходит следующую на избыток, равный меньшей из всех (рис. 11), и если взяты в том же числе, как первые, другие линии, из которых каждая равна большей из линий первого ряда, то сумма всех квадратов на линиях, равных большей, сложенная с квадратом на большей и сложенная с площадью, заключенной между меньшей из линий и линией, составленной из всех неравных линий, равна утроенной сумме квадратов, построенных на неравных линиях».

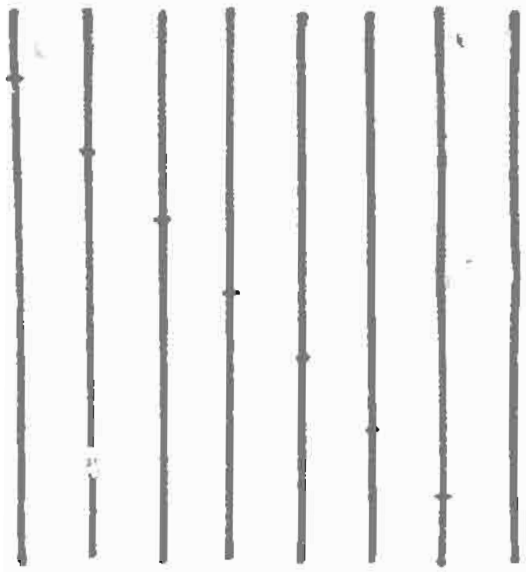


Рис. 11

В современных обозначениях сказанное можно записать так:

$$n\cdot n^2+n^2+(1+2+3+\ldots+n)=$$
$$=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2).$$

Откуда после некоторых упрощений получим

$$n^2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2),$$

или окончательно будем иметь

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

40. Приводим рассуждения самого Диофанта. Обозначим меньшую часть от второго деления через x, тогда бо́льшая часть от первого деления будет $2x$. Найдем теперь меньшую часть от первого деления. Она будет равна $100-2x$. Следовательно, бо́льшая часть второго деления равняется $300-6x$. Ясно, что обе части от второго деления должны составить 100, т. е.

$$x+(300-6x)=100,$$

откуда $x=40$.

Следовательно, результат первого деления будет: меньшая часть — 20, бо́льшая часть — 80. Результат второго деления: меньшая часть — 40, бо́льшая часть — 60.

41. Решение самого Диофанта. Обозначим разность двух искомых чисел через $2x$, тогда большее из них равняется $10+x$, а меньшее — $10-x$. Следовательно, их произведение согласно условию должно равняться 96, т. е.

$$(10+x)(10-x)=96,$$

или

$$100-x^2=96,$$

откуда

$$x^2=4.$$

Следовательно, $x=2$. Тогда искомые числа будут 12 и 8.

42. Вопрос сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3; \\ \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = 5. \end{cases}$$

После возведения в квадрат первого равенства получим

$$\frac{x^2}{y^2} = 9,$$

или, прибавив по единице к левой и правой частям равенства, найдем, что

$$\frac{x^2 + y^2}{y^2} = 10,$$

откуда

$$x^2 + y^2 = 10y^2.$$

Тогда второе равенство системы можно представить так:

$$\frac{10y^2}{x + y} = 5,$$

или

$$10y^2 = 5(x + y).$$

Имея в виду, что $x=3y$ (согласно первому равенству системы), получим

$$10y^2 = 5(3y + y),$$

$$10y^2 = 20y.$$

Откуда $y=2$, следовательно, $x=6$.

43. Вопрос сводится к решению системы

$$\begin{cases} (x+y)\,z = 35; \\ (x+z)\,y = 27; \\ (y+z)\,x = 32. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$xz - xy = 8.$$

Складывая полученное уравнение с третьим, будем иметь

$$xz = 20.$$

Но тогда $xy=12$ и $yz=15$.
Умножая $xz=20$ на $yz=15$, получим

$$xyz^2 = 20 \cdot 15,$$

или

$$12z^2 = 20 \cdot 15.$$

Откуда $z=5$.
Следовательно, $x=4$, $y=3$.

44. Решение самого Диофанта. Представим первое число в виде произведения x на куб некоторого числа, например на $2^3=8$, т. е. первое число будет $8x$. Положим второе число равным x^2-1. Ясно, что одно из условий задачи будет выполнено: произведение искомых чисел, сложенное с первым, равняется кубу некоторого числа. В самом деле, проверяя это, получим

$$8x\,(x^2-1)+8x = 8x^3.$$

Далее, надо, чтобы выполнялось и другое условие, т. е. чтобы произведение искомых чисел, сложенное со вторым, равнялось также кубу некоторого числа. Для этого требуется, чтобы

$$8x(x^2 - 1) + x^2 - 1$$

было кубом некоторого числа.

Полагая, что куб этого числа равняется $(2x-1)^3$, мы получим уравнение, из которого можно найти x:

$$8x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (2x - 1)^3,$$

откуда

$$x = \frac{14}{13}.$$

Следовательно, первое число будет $8 \cdot \frac{14}{13} = \frac{112}{13}$, а второе число — $\left(\frac{14}{13}\right)^2 - 1 = \frac{27}{169}$.

Заметим, что данная задача принадлежит к числу неопределенных, однако во втором уравнении Диофант выбирает число так, чтобы в получаемом кубическом уравнении уничтожились члены с кубом неизвестного.

45. Решение самого Диофанта. Положим, что сумма всех трех чисел $\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}=x^2+2x+1=(x+1)^2$. Положим далее, что $\mathrm{I}+\mathrm{II}=x^2$, тогда $\mathrm{III}=2x+1$. Пусть теперь $\mathrm{II}+\mathrm{III}=x^2-2x+1=(x-1)^2$. Тогда получим, что $\mathrm{I}=4x$, а $\mathrm{II}=x^2-4x$. Далее $\mathrm{I}+\mathrm{III}=6x+1$ должно быть квадратом некоторого числа, например $11^2=121$. Тогда для определения x получим уравнение

$$6x + 1 = 121,$$

откуда $x=20$.

Имея это в виду, получим:

$$\mathrm{I}=80,\ \mathrm{II}=320,\ \mathrm{III}=41.$$

46. Обозначим площади сегментов через σ и σ_1, площади секторов через S и S_1, а площади треугольников, дополняющих сегменты σ и σ_1 до секторов S и S_1, через Σ и Σ_1 (рис. 12). Пусть далее a и a_1— основания сегментов, r и r_1— радиусы сегментов, тогда

$$\sigma = S - \Sigma,$$
$$\sigma_1 = S_1 - \Sigma_1.$$

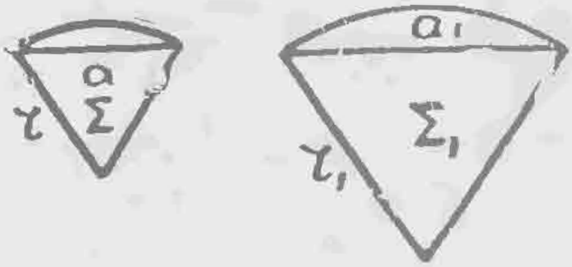


Рис. 12

Из подобия треугольников будем иметь

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Далее

$$\frac{S}{S_1} = \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Откуда

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{S}{S_1},$$

или

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{\Sigma_1}{S_1},$$

$$\frac{S}{\Sigma} = \frac{S_1}{\Sigma_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{S-\Sigma}{\Sigma}=\frac{S_1-\Sigma_1'}{\Sigma_1},$$

или

$$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\sigma_1}{\Sigma_1},$$

или

$$\frac{\sigma}{\sigma_1}=\frac{\Sigma}{\Sigma_1}.$$

На основании предыдущего окончательно получим

$$\frac{\sigma}{\sigma_1}=\frac{a^2}{a_1^2}.$$

47. Происхождение задачи об удвоении куба связано, по-видимому, с естественным желанием древних ученых обобщить легко решаемую задачу об удвоении квадрата, т. е. о построении квадрата, который превосходил бы данный по площади в два раза.

Трудности, связанные с решением задачи об удвоении куба, дали повод к возникновению легенд о происхождении этой задачи. В качестве примера приводим одну из этих легенд. Она принадлежит Эратосфену (276—194 до н. э.), знаменитому греческому математику, астроному и философу. Вот, что он рассказал о причинах, побудивших рассматривать задачу об удвоении куба.

Однажды на острове Делосе, что находится в Эгейском море, вспыхнула эпидемия чумы. Жители этого острова обратились к знаменитому дельфийскому оракулу, который служил при храме Аполлона в Дельфах (Дельфы — общегреческий религиозный центр в Фокиде, у подножия горы Парнас), за помощью и советом.

Чтобы прекратить страдания людей, ответил оракул, надо снискать милость богов, а для этого надо удвоить золотой жертвенник Аполлону (богу Солнца), имеющий форму куба.

Жители Делоса поспешили скорей отлить из золота два таких жертвенника, какой был установлен в храме Аполлона и поставили один сверх другого, думая, что проблема удвоения кубического жертвенника ими решена.

Однако чума не прекращалась. Тогда они опять обратились к оракулу с недоумевающим вопросом: «Почему же не прекращается чума, ведь мы удвоили золотой жертвенник всесильному Аполлону?» На это им оракул якобы ответил: «Нет, вы не решили поставленной задачи! Надо было удвоить жертвенник, не изменяя его кубической формы».

Не в состоянии решить эту задачу так, как требовал оракул, делосцы обратились за помощью к знаменитому математику и философу Платону. Но он уклончиво ответил им: «Боги, вероятно, недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией».

Однако сам Платон не сумел решить указанной задачи циркулем и линейкой. С того времени эта задача и стала именоваться «делосской» (иногда ее неправильно называют «делийской»).

Древние греки сравнительно легко решили задачу на удвоение квадрата. Для этого надо было уметь строить при помощи циркуля и линейки корень квадратный из двух. Действительно, если сторона данного квадрата равняется a, а сторона искомого квадрата — x, то согласно условию задачи будем иметь

$$x^2 = 2a^2,$$

откуда

$$x = a\sqrt{2}\,.$$

Следовательно, в качестве x надо взять диагональ данного квадрата, которая по теореме Пифагора как раз и будет равняться $a\sqrt{2}$ (рис. 13).

Обобщая задачу об удвоении квадрата, древние греки, по-видимому, перешли к рассмотрению задачи об удвоении куба и также стремились решить ее при помощи циркуля и линейки. Оказалось, что решение задачи об удвоении куба сводится к построению циркулем и линейкой корня кубического из двух. Действительно, если ребро данного куба положить равным a, а ребро искомого куба — x, то согласно условию задачи будем иметь

$$x^3 = 2a^3,$$

откуда

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Однако все старания построить $\sqrt[3]{2}$ циркулем и линейкой не увенчались успехом. И трудно сказать, как долго еще продолжались бы эти попытки, если бы, наконец, в первой половине XIX века не было доказано, что при помощи одних только циркуля и линейки $\sqrt[3]{2}$ построить нельзя.

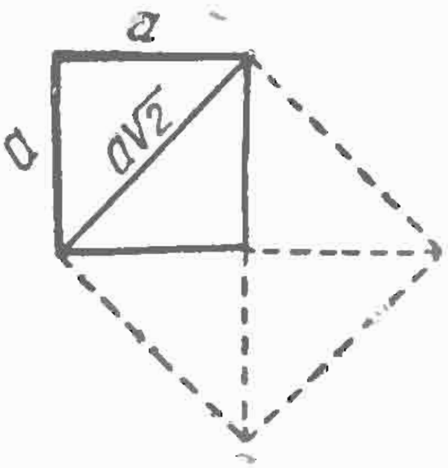


Рис. 13

Чтобы иметь хотя бы некоторое представление о разрешимости и неразрешимости задач на построение, ограничимся следующим небольшим замечанием. Прежде всего напомним, что при помощи циркуля и линейки можно сравнительно легко построить выражения:

$$a + b,\ a - b,\ \frac{ab}{c},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{a^2 + b^2},\ \sqrt{a^2 - b^2},$$

где a, b, c суть данные или найденные отрезки. Если решение задачи сводится к последовательному выполнению конечного числа этих операций, то задача оказывается разрешимой при помощи циркуля и линейки. Если же решение некоторой задачи не ограничивается последовательным выполнением указанных выше операций в конечном числе, то такую задачу при помощи циркуля и линейки решить невозможно. Задача об удвоении куба и является примером такой задачи, которую нельзя решить, прибегая только к циркулю и линейке, т. е. путем проведения окружностей и прямых линий.

Современными средствами, выходящими за пределы школьного курса математики, доказано, что *кубическое уравнение с рациональными коэффициентами, не имеющее рациональных корней, не может быть разрешимо в квадратных радикалах, т. е. ни один из корней этого уравнения не может быть построен при помощи циркуля и линейки.*

Доказательство этой теоремы можно прочитать, например, в книге Б. И. Аргунова и М. Б. Балка «Геометрические построения на плоскости». М., Учпедгиз, 1955, стр. 214—217.

Выше было показано, что задача об удвоении куба сводится к решению кубического уравнения

$$x^3-2a^3=0,$$

где a — ребро данного куба, x — искомое ребро удвоенного куба.

Приняв для простоты длину ребра данного куба за 1, получим уравнение $x^3-2=0$. Это уравнение с рациональными коэффициентами, как легко убедиться, не может иметь рациональных корней. Следовательно, по предыдущей теореме задача об удвоении куба не может быть решена при помощи циркуля и линейки.

Первым из ученых, кто открыто высказал мнение, что точное построение отрезка, равного $\sqrt[3]{2}$, посредством циркуля и линейки неосуществимо, был знаменитый французский ученый Р. Декарт (1596—1650). В 1637 году он высказал предположение, что вообще кубический корень из некубического рационального числа есть иррациональность, не приводящаяся к конечному числу действий извлечения квадратного корня.

Строгое доказательство неразрешимости задачи об удвоении куба при помощи циркуля и линейки было дано французским математиком П. Венцелем в 1837 году.

Одним из первых древнегреческих геометров, сделавшим значительный шаг в решении задачи об удвоении куба путем привлечения к циркулю и линейке дополнительных средств, был Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.).

Решение стереометрической задачи, какой является делосская задача об удвоении куба, Гиппократ Хиосский свел к рассмотрению планиметрической задачи, заключающейся в двух средних пропорциональных между двумя данными отрезками, из которых второй в два раза больше первого, т. е. к нахождению таких двух отрезков x и y, которые, будучи «вставлены» между двумя данными a и $2a$, составили бы вместе с ними геометрическую прогрессию: $a, x, y, 2a$.

Поскольку $a, x, y, 2a$ — геометрическая прогрессия, то

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}.$$

Откуда $x^2=ay$ и $y^2=2ax$. Следовательно, $x^4=a^2y^2=2a^3x$, или $x^3=2a^3$. Выходит, что x и есть ребро искомого куба, превосходящего по объему данный куб с ребром a в два раза.

Ясно, что при помощи циркуля и линейки «вставки» x и y найти нельзя, так как противное приводило бы к построению циркулем и линейкой $x=\sqrt[3]{2}$, что, как указывалось выше, выполнить невозможно.

Оказывается, «вставки» x и y можно найти, если воспользоваться «дополнительными» средствами в виде специально изготовленных приборов (механизмов). Оригинальные и весьма простые приборы для механического нахождения «вставок» x и y по двум заданным отрезками a и $2a$ предложили Платон и Эратосфен. Прибор Платона состоит из двух обыкновенных прямоугольных плотничьих наугольников, а само построение основано на лемме: *во всякой прямоугольной трапеции* (рис. 14) *с перпендикулярными диагоналями отрезки диагоналей образуют геометрическую прогрессию*

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OA}=\frac{OA}{OD}.$$

(Докажите!)

Построение «вставок» x и y, нужных для решения задачи об удвоении куба, проводится следующим образом. Берутся две взаимно перпендикулярные прямые m и n, пересекающиеся в точке O (рис. 15). На прямой m вправо от точки O отложим отрезок $OC=a$ (a — сторона куба, подлежащего удвоению). На прямой n вниз от точки O отложим отрезок $OD=2a$. Теперь берем два прямоугольных плотничьих наугольника (на чертеже они заштрихованы) и расположим их так, как показано на рисунке, т. е. чтобы катет первого наугольника проходил через точку C, которая считается данной, а вершина его находилась на прямой n; чтобы катет второго наугольника проходил через точку D, которая также считается данной, а вершина находилась бы на прямой m; остальные два катета того и другого наугольника должны соприкасаться.

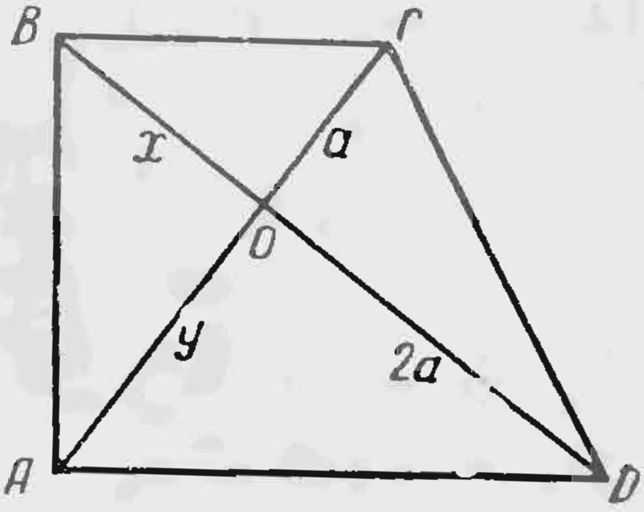


Рис. 14

При таком расположении двух наугольников по данным точкам C и D найдем на прямых m и n точки A и B. Тогда $OB=x$, а $OA=y$. По лемме

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a},$$

откуда

$$x^3=2a^3.$$

Следовательно, $x=OB$ и есть построенное ребро удвоенного куба, что и нужно было сделать.

Прибор Эратосфена носит название «мезолябия», что в переводе означает «уловитель», т. е. уловитель двух средних величин («вставок»), из которых одна составляет искомую сторону удвоенного куба.

Мезолябий Эратосфена состоит из двух параллельно расположенных реек m и n, расстояние между которыми равняется удвоенной стороне куба, т. е. $2a$. К этим рейкам прикреплены три равных

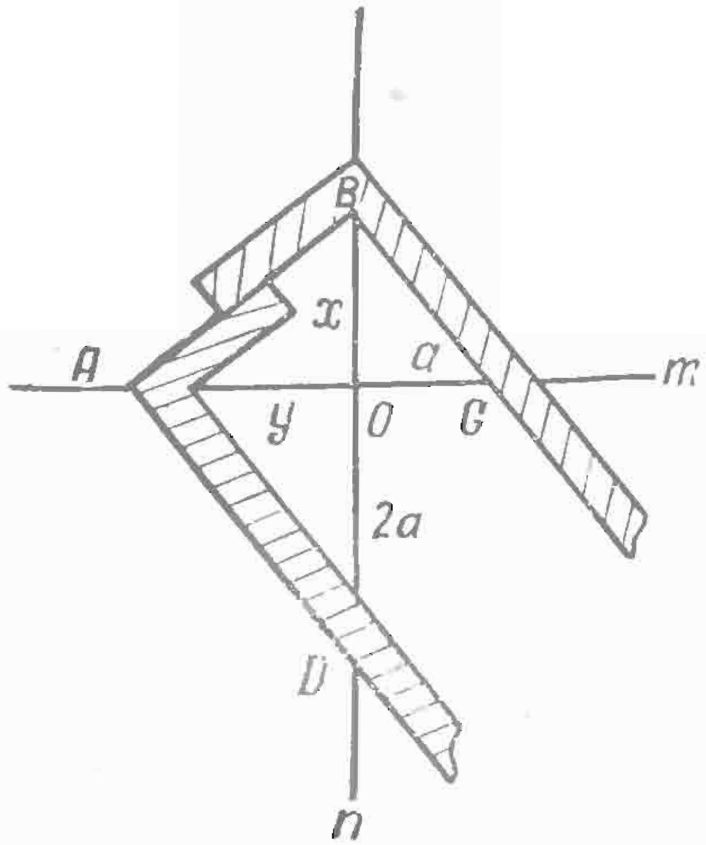


Рис. 15

прямоугольных треугольника, из которых один, самый левый, смонтирован неподвижно, а другие два могут перемещаться вдоль пазов, устроенных в рейках, причем на верхнюю рейку опираются равные катеты, а на нижнюю — их противоположные вершины (рис. 16).

На катете HD самого правого подвижного треугольника откладываем отрезок $DQ=a$. Теперь двигаем подвижные треугольники с таким расчетом, чтобы точки пересечения катета одного треугольника с гипотенузой следующего за ним (M и N) расположились бы на одной прямой с E и Q. Тогда из рассмотрения соответствующих подобных треугольников получаем

$$\frac{a}{NC} = \frac{NC}{MB} = \frac{MB}{2a}.$$

Обозначая NC через x и MB через y, будем иметь

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Следовательно, $x = NC$ и будет найденной величиной искомого ребра удвоенного куба. Делосская задача решена.

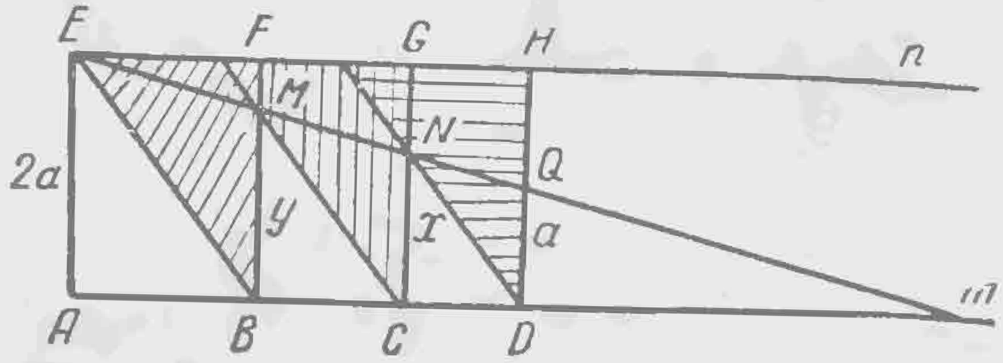


Рис. 16.

48. Древнегреческие ученые проявили много тонкого остроумия для изобретения разного рода механизмов, с помощью которых они без особого труда делили произвольный угол на три равные части. Но перед ними всегда стоял вопрос: почему трисекция угла, легко выполняемая при помощи специально изготовленных механизмов, не поддается разрешению при помощи циркуля и линейки? И вообще, разрешима ли эта задача в общем виде при помощи этих классических чертежных инструментов?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, приведем некоторые рассуждения. Обозначим данный угол, который требуется разделить на три равные части, через 3α. Рассмотрим $\cos 3\alpha$. По известным формулам тригонометрии

$$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha - \sin\alpha\cdot\sin 2\alpha =$$
$$= \cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - \cos\alpha\cdot\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

или

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Умножая левую и правую части полученного равенства на 2, имеем

$$2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha.$$

Пусть теперь $2\cos 3\alpha = a$ и $2\cos\alpha = x$, тогда

$$a = x^3 - 3x,$$

или

$$x^3 - 3x - a = 0. \qquad (1)$$

Чтобы доказать, что задача о трисекции угла неразрешима в общем виде при помощи циркуля и линейки, достаточно указать хотя бы один угол, который нельзя разделить при помощи циркуля и линейки. Путем несложных рассуждений покажем, что таким свойством обладает, например, угол в 60°. Действительно, полагая $3\alpha = 60°$, получим $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$, и уравнение (1) примет вид

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \qquad (2)$$

В алгебре доказывается, что рациональными корнями уравнения (2) могли бы быть $+1$ и -1, но ни то, ни другое указанному уравнению не удовлетворяет. Выходит, что уравнение (2) не имеет рациональных корней и, следовательно, по известной «теореме неразрешимости» угол в 60° нельзя разделить на три равные части при помощи циркуля и линейки. Заметим: из того, что угол в 60° не может быть разделен на три равные части при помощи циркуля и линейки, вытекает, что угол в 20°, а следовательно, и угол в 40° не могут быть построены указанными инструментами. Отсюда вытекает важное следствие: правильный девятиугольник, восемнадцатиугольник и т. д. не могут быть построены циркулем и линейкой.

Далее, для a уравнения (1) можно было бы указать еще бесчисленное множество значений, для которых уравнение (1) неразрешимо в квадратных радиакалах, и, следовательно, существует бесчисленное множество углов, трисекция которых не может быть выполнена при помощи циркуля и линейки.

Итак, если пользоваться только циркулем и линейкой, задача о трисекции угла в общем виде неразрешима.

Древним ученым, как указывалось выше, была известна трисекция прямого угла при помощи циркуля и линейки. Возможность этой трисекции можно подтвердить и теоретически. Действительно, положив $3\alpha=90°$, получим, что $a=0$, и уравнение (1) примет вид

$$x^3 - 3x = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет корни $0, \sqrt{3}, \sqrt{-3}$. Таким образом, ненулевые корни выражены в квадратных радикалах. Следовательно, угол в 90° можно разделить циркулем и линейкой на три равные части.

Аналогичными рассуждениями можно было бы показать, что теми же средствами и угол в 45° можно разделить на три равные части.

Необходимо добавить, что трисекция при помощи циркуля и линейки возможна для бесчисленного множества углов, например для углов вида $\frac{\pi}{2^n}$, где n — целое положительное число (рекомендуется доказать самостоятельно).

Р. Декарт был первым ученым, который высказал продположение, что трисекция произвольного угла не может быть выполнена при помощи циркуля и линейки, если последняя не имеет никаких отметок. Строгое же доказательство неразрешимости задач о трисекции произвольного угла впервые было дано в 1837 г. П. Венцелем.

Оригинальное и вместе с тем чрезвычайно простое решение задачи о трисекции угла при помощи циркуля и подвижной линейки с двумя отметками дал Архимед. Как это делается, покажем на конкретном примере. Пусть требуется произвольно взятый острый угол ABC разделить на три равные части. Для этого из вершины данного угла B, как из центра, произвольным радиусом R опишем окружность (рис. 17). Точки пересечения сторон данного угла с окружностью обозначим через D и E. Теперь берем подвижную линейку с двумя точечными отметками F и G, причем длина отрезка $FG=R$, и прикладываем ее к точке E так, чтобы F и G оказались на одной прямой с точкой E и чтобы F находилась на окружности, а G — на продолжении стороны BA. Тогда угол EGD и будет составлять одну треть заданного угла ABC.

Докажем это. Обозначим для краткости углы на чертеже цифрами *1, 2, 3, 4, 5*. Надо доказать, что угол *5* составляет третью часть угла *1*, т. е.

$$\angle 5 = \frac{1}{3} \angle 1.$$

Действительно, $\angle 1 = \angle 5 + \angle 2$ (свойство внешнего угла треугольника), но $\angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ (свойство внешнего угла треугольника). Далее, $\angle 5 = \angle 4$

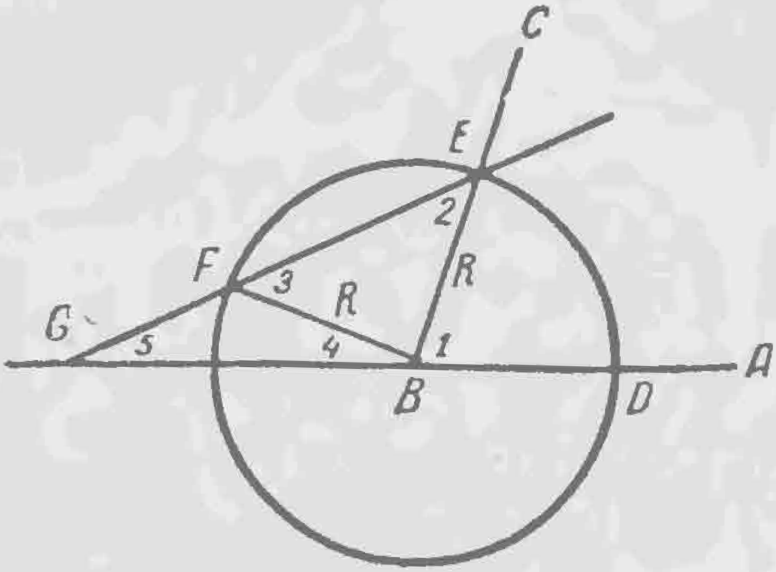


Рис. 17

(свойство равнобедренного треугольника). Тогда $\angle 3 = 2\angle 5$. Из треугольника BEF, поскольку он равнобедренный, $\angle 3 = \angle 2$. Учитывая предыдущее равенство, будем иметь

$$\angle 1 = \angle 3 + \angle 5 = 2\angle 5 + \angle 5 = 3\angle 5.$$

Следовательно, $\angle 5 = \frac{1}{3} \angle 1$, что и требовалось доказать.

Изыскание все новых и новых решений задачи о трисекции угла не пропало даром. Оказалось, что задача о трисекции угла *тесно* прымыкает к задачам алгебры и тригонометрии. Так, еще в XV веке самаркандский ученый Ал-Каши применил трисекцию угла к составлению весьма точных тригонометрических таблиц, нужных для вычислительной математики и астрономии. Применяя некоторый прием приближенного численного решения кубического уравнения, он по известному значению sin3° производит вычисление sin1°. Далее, в XVI веке знаменитый французский математик Ф. Виет на основе трисекции угла находит тригонометрическое решение кубического уравнения в так называемом его неприводимом случае.

Другие весьма оригинальные, но довольно сложные способы решения задачи о трисекции угла дали ученые Декарт, Ньютон, Клеро, Шаль и др. Все эти решения обычно основаны на отыскании точек пересечения конического сечения с окружностью. Попытки найти новые красивые решения задачи о трисекции угла продолжаются и в настоящее время (например, при помощи номографии).

49. Попытки древнегреческих ученых решить задачу о квадратуре круга путем проведения прямых и окружностей так и не увенчались успехом. Оно и понятно почему. Дело в том, что задача о квадратуре круга так же, как и задачи об удвоении куба и трисекции угла, оказывается не разрешимой при помощи циркуля и линейки.

Еще в 1755 году Парижская Академия наук ввиду бесплодности усилий математиков, а еще более нематематиков, пытавшихся решить задачу о квадратуре круга, вынесла решение впредь не принимать на рассмотрение работ, касающихся квадратуры круга, а также трисекции угла и удвоения куба. Это несколько охладило пыл «квадратурщиков».

Окончательный удар попыткам решить задачу о квадратуре круга при помощи циркуля и линейки был нанесен лишь во второй половине XIX века. Немецкому математику Ф. Линдеману в 1882 году удалось, наконец, доказать, что задача о квадратуре круга не разрешима при помощи указанных средств.

Доказательство Линдемана чрезвычайно трудное и выходит далеко за пределы школьного курса математики. Оставляя в стороне рассуждения Линдемана о невозможности решения квадратуры круга, мы ограничимся следующими весьма краткими замечаниями.

Пусть дан круг радиуса R. Требуется построить квадрат, равновеликий этому кругу. Обозначим сторону искомого квадрата через x, тогда

$$x^2 = \pi R^2,$$

откуда

$$x = R\sqrt{\pi}.$$

Таким образом, вопрос о построении квадрата, равновеликого данному кругу, сводится к построению произведения данного отрезка R на данное число $\sqrt{\pi}$, причем это построением надо провести при помощи циркуля и линейки, т. е. путем проведения конечного числа окружностей и прямых линий.

При помощи циркуля и линейки можно всегда построить произведение данного отрезка R на рациональное число (целое или дробное), но далеко не всегда можно указанными средствами построить произведение данного отрезка на число иррациональное. Это возможно в некоторых случаях, например, если иррациональное число равняется $\sqrt{2}$ или $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; тогда $R\sqrt{2}$ находится как сторона квадрата, вписанного в круг радиуса R, а $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ — как сторона правильного двенадцатиугольника, вписанного в круг радиуса R, причем, как известно, вписать правильный двенадцатиугольник в круг не составляет трудности, после того как в круг вписан правильный шестиугольник.

В теории геометрических построений установлено, что данный отрезок R можно умножить при помощи циркуля и линейки на вещественное число лишь только в том случае, если это вещественное число может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, разрешимого в квадратных радикалах. Число, которое не может являться корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, принято называть *трансцендентным* числом. Следовательно, при помощи циркуля и линейки нельзя построить произведение данного отрезка R на число трансцендентное. Таким образом, чтобы доказать неразрешимость задачи о квадратуре круга при помощи циркуля и линейки, необходимо установить невозможность указанными средствами построить произведение данного отрезка R на число $\sqrt{\pi}$, а для этого достаточно показать, что $\sqrt{\pi}$ или π есть число трансцендентное.

Заслуга Ф. Линдемана как раз и заключается в том, что он впервые в мировой науке вполне строго доказал, что π есть число трансцендентное, и тем самым окончательно установил невозможность решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки. Вот почему Ф. Линдемана называют «победителем числа π» а еще лучше — «победителем задачи о квадратуре круга».

В заключение заметим, что изучение арифметической природы числа π исторически шло в следующем направлении. В 1761 году немецкий математик И. Ламберт первый показал, что число π есть число иррациональное. Позднее французский математик А. Лежандр установил, что квадрат π есть также число иррациональное. Наконец, в 1882 году Ф. Линдеман доказал знаменитую теорему, согласно которой, как указывалось выше, число π есть число трансцендентное, т. е. оно не может служить корнем какого-нибудь алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Выше было показано, что задача о квадратуре круга не разрешима при помощи циркуля и линейки, однако она становится вполне разрешимой, если специально для нее расширить средства построения, если воспользоваться некоторыми специальными кривыми (например, квадратрисой). Средствами циркуля и линейки можно решить задачу о квадратуре круга только приближенно.

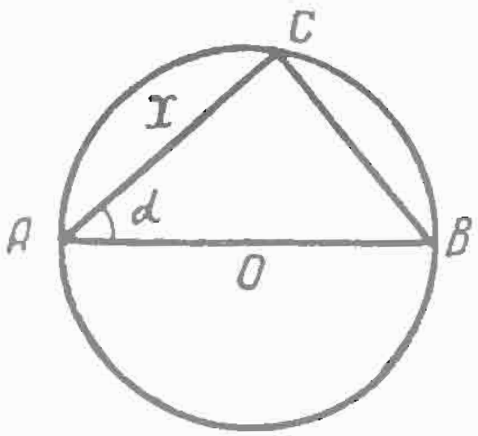


Рис. 18

Ниже приведем одно из приближенных решений задачи о квадратуре круга, основанное на использовании «треугольника Бинга». Этот способ был предложен в 1836 году русским инженером Бингом и очень удобен для практических целей. Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в круг, квадратура которого находится с таким расчетом, чтобы наибольшая сторона треугольника была диаметром. Обозначим угол CAB через α, а хорду AC через x (рис. 18). Подберем угол α так, чтобы отрезок x был стороной квадрата, равновеликого данному кругу. Для этой цели воспользуемся соотношением

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2R},$$

где R — радиус круга.

Так как площадь квадрата со стороной x должна быть равновелика площади круга, то будем иметь $x^2 = \pi R^2$, или $4R^2\cos^2\alpha = \pi R^2$, откуда $\cos^2\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886$. По таблицам находим $\alpha = 27°36'$.

Итак, проводя в данном круге хорду под углом $27°36'$ к диаметру, мы сразу получаем искомую сторону квадрата, равновеликого данному кругу. Легко догадаться, что рассмотренный треугольник ABC и есть «треугольник Бинга».

50. Автором задачи является знаменитый греческий ученый III века до нашей эры Аполлоний Пергский. Его сочинения составляют значительную часть математической литературы древних. Особенно прославился Аполлоний своим трактатом «Конические сечения» в 8 книгах (одна из них считается утерянной).

Решение задачи, выполненное самим Аполлонием, до нас не дошло, однако оно упоминается некоторыми древними авторами (Папп). По-видимому, сам Аполлоний, чтобы решить задачу в общем виде, рассматривал ее отдельные частные и предельные случаи:

1) построить окружность, проходящую через три данные точки;

2) построить окружность, касающуюся трех данных прямых;

3) построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых;

4) построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных пересекающихся прямых;

5) построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой;

6) построить окружность, касающуюся данной окружности и проходящую через две данные точки;

7) построить окружность, касающуюся трех данных окружностей, проходящих через одну общую точку.

Полное иследование показывает, что если задача Аполлония имеет конечное число решений, то их не более 8. (Более подробные указания даны в книге Б. И. Аргунова и М. Б. Балка «Геометрические построения на плоскости». М., Учпедгиз, 1957, стр. 161—165.)

51. 1) $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$.

2) $\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{11}{14}$.

Откуда

$$\frac{\pi}{4} = \frac{11}{4}; \quad \pi = \frac{44}{14}; \quad \pi = \frac{22}{7}.$$

Таким образом, площадь круга, по Архимеду, как и теперь, равняется $\frac{22}{7} r^2$.

52. **Решение самого Архимеда.** «Ты знаешь, конечно,— говорит Архимед, обращаясь к царю Гелону,— что под Вселенной большинство астрономов подразумевает шар, центр которого находится в центре Земли, а радиус образуется расстоянием между центрами Земли и Солнца. В своем сочинении против астрономов Аристарх Самосский пытается опровергнуть это и доказать, что Вселенная составляет кратное этой величины. Он приходит к выводу, что звезды и Солнце неподвижны, тогда как Земля вращается вокруг Солнца по кругу, в центре которого стоит Солнце. Согласимся, что диаметр сферы неподвижных звезд относится к диаметру Вселенной, понимаемой в том смысле, как это понимает большинство астрономов [т. е. солнечной системы], как этот последний — к диаметру Земли. Я утверждаю, что если бы существовала песочная куча даже величиной в Аристархову звездную сферу, то и в этом случае я могу привести число, даже превышающее число песчинок в такой воображаемой сфере.

Предлагаю следующее:

1) *Окружность Земли — 3 миллиона стадий* [стадия равна нынешним 185 метрам].

Как тебе известно, были попытки доказать, что окружность Земли составляет около 3 000 000 стадий, но я превзойду предшественников и приму для нее в десять раз большее число.

2) *Солнце больше Земли, а Земля больше Луны.*

В этом я согласуюсь с большинством астрономов.

3) *Поперечник Солнца не более чем в 30 раз превышает поперечник Луны.* [Здесь поперечник преуменьшен. На самом деле диаметр Солнца почти в 400 раз больше диаметра Луны.]

4) *Диаметр Солнца больше, нежели сторона тысячеугольника, вписанного в наибольший круг небесной сферы.*

Это я принимаю по Аристарху, который считает, что видимые размеры Солнца составляют $\frac{1}{720}$ размеров зодиакального круга. Я и сам измерял угол, под которым видно Солнце, но точное измерение этого угла не легко произвести, ибо ни глаз, ни рука, ни измерительные приборы недостаточно надежны. Но здесь не место об этом распространяться. Достаточно только знать, что этот угол меньше, чем $\frac{1}{164}$ и больше, чем $\frac{1}{300}$ прямого угла.

На основании допущений 2 и 3 диаметр Солнца меньше, чем 30 земных диаметров. Поэтому [по допущению 4] периметр тысячеугольника, вписанного в один из наибольших кругов небесной сферы, меньше, чем 30 000 земных диаметров. Но если это так, то диаметр Вселенной (т. е. согласно Аристарху — солнечной системы) меньше 10 000 земных диаметров; ибо только для правильного шестиугольника диаметр равен $\frac{1}{3}$ периметра, а для всякого многоугольника диаметр меньше $\frac{1}{3}$ периметра.

По первому предположению, окружность Земли меньше 3 миллионов стадий; стало быть, диаметр меньше 1 миллиона стадий, так как диаметр окружности меньше $\frac{1}{3}$ длины ее. Стало быть, также и диаметр Вселенной меньше, чем 10 000 миллионов стадий.

Допустим теперь, что песчинки до того малы, что 10 000 таких песчинок составляют лишь величину одного макового зерна. Я приму диаметр макового зерна в $\frac{1}{40}$ дюйма. В одном из моих опытов уже 25 маковых зерен, положенных рядом по прямой, заняли дюйм, но я желаю обеспечить все доказательство против всяких возражений.

У нас [греков] существуют названия чисел лишь до мириады [$10\,000=10^4$]. Считаем мы, однако, и до 10 000 мириад [$10^4 \cdot 10^4=10^8$]. Чтобы пойти еще далее, примем 10 000 мириад [10^8] за единицу второго порядка, и возьмем ее снова 10 000 мириад раз, то получим $10^8 \cdot 10^8=10^{8\cdot 2}$, или единицу третьего порядка. Точно так же можем взять 10 000 мириад раз полученную единицу третьего порядка и получим единицу четвертого порядка [$10^{8\cdot 3}$] и т. д. $10^{56}=10^{8\cdot 7}$ будет представлять единицу восьмого порядка, 1 же есть единица первого порядка.

Теперь вычислим, сколько в шаре песчинок, мириада которых занимает объем макового зерна? По нашему предположению, диаметр макового зерна равняется $\frac{1}{40}$ дюйма, но по известному геометрическому положению объемы шаров относятся, как кубы их диаметров, стало быть, как $1^3 : 40^3 = 1:64\,000$. Итак, шар одного дюйма в диаметре содержит 64 000 маковых зерен, или 64 000 мириады, т. е. $64 \cdot 10^8$, что меньше, чем $10 \cdot 10^8 = 10^9$ песчинок. Шар 100 дюймов в диаметре относится к шару 1 дюйма в диаметре [по объему], как $100^3 : 1^3$, или $10^6 : 1$. Итак, песочный шар 100 дюймов в диаметре, очевидно, содержит не более $10^6 \cdot 10 \cdot 10^8$ песчинок.

Шар 10 000 дюймов в диаметре содержит не более $10^{21}=10 \cdot 10^4 \cdot 10^{16}$, т. е. десяти мириад единиц нашего третьего порядка.

Но так как стадия меньше 10 000 дюймов, то ясно, что песочный шар с диаметром в стадию содержит менее 10 мириад единиц третьего порядка.

Точно таким же образом найдем, что шар с диаметром в 10^2 стадий содержит меньше, чем $1000 \cdot 10^{8\cdot 3}$ песчинок.

В 10^4	. . . . . .	$10 \cdot 10^{8\cdot 4}$
„ 10^6	. . . . . .	$10^6 \cdot 10 \cdot 10^{8\cdot 4}$
„ 10^8	. . . . . .	$10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8\cdot 5}$
„ 10^{10}	. . . . . .	$1000 \cdot 10^{8\cdot 6}$

Но 10^{10} есть 10 000 миллионов стадий. А так как диаметр Вселенной меньше 10 000 миллионов стадий, стало быть, Вселенная содержит песчинок менее, нежели $1000 \cdot 10^{8 \cdot 6}$. Далее, диаметр Аристарховой сферы неподвижных звезд заключает в себе столько раз диаметр Вселенной [10 000 миллионов стадий], сколько раз в этом последнем содержится диаметр Земли [1 миллион стадий], то выходит, что сфера Аристарха [неподвижных звезд] относится к сфере Вселенной, как $10^{12}:1$, а стало быть, содержит песчинок менее, чем 1000 мириад единиц восьмого порядка [$1000 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 7} = 10^{63}$].

Это, царь Гелон, может показаться невероятным толпе и всем, не сведующим в математике, но те, которые обладают математическими познаниями и умеют размышлять о расстоянии и величине Земли, Солнца, Луны и всего мироздания, признают это за доказанное. Поэтому я счел не неуместным предпринять это исследование».

КИТАЙ

Китайская культура, включая и математику, древнего происхождения. Ее истоки уходят в седую старину. Многие важнейшие открытия в науке и технике, сделанные китайскими учеными, значительно опередили открытия в других странах, а также в странах Западной Европы.

Впервые в истории мировой техники китайскими учеными изобретен компас (III до н. э.), сейсмограф (II) и спидометр. Задолго до европейцев китайский народ научился изготовлять селитру для получения пороха (X). Еще в VII веке до нашей эры китайские умельцы из народа владели секретом производства фарфора. Известно также, что Китай — родина первого шелка, замечательных красителей и лаков. В XI веке кузнец Би Шен изобрел книгопечатание подвижными буквами (литерами), которое по идее мало чем отличается от современного.

В Китае родилась описательная астрономия, т. е. наука о небесных телах и календаре. Уже в глубокой древности китайские ученые вели систематические наблюдения за небом, за положением и движением небесных светил. Еще в IV веке до нашей эры китайский астроном Ши Шэнь составил первый известный звездный каталог (перечень), в котором дано описание 800 звезд. В Европе аналогичный каталог был составлен около II века нашей эры (каталог Гиппарха).

Свои наблюдения китайские астрономы проводили в специально оборудованных помещениях, называемых обсерваториями, оснащенных остроумными приборами собственного изготовления. Древним памятником китайской астрономии в настоящее время является Пекинская обсерватория с ее старинным оборудованием, построенная на окраине города Пекина в 1279 году.

Много сделали древнекитайские ученые в области математики. Особенно большой вклад они внесли в решение наиболее тонких вопросов арифметики и алгебры, т. е. науки, изучающей действия над величинами, выраженными буквами, независимо от числового значения этих величин.

53. Китайцы решали эту задачу при помощи такого рассуждения: «Если бы в клетке были только одни фазаны, то число их ног было бы 70, а не 94. Таким образом, 24 ноги, которые оказались лишними, принадлежат кроликам — по две ноги на каждого. Откуда заключаем, что кроликов было 12, а фазанов 23».

54. Составитель рекомендует эту задачу решать по такому правилу: «Перемножь количество ли ширины и длины, получишь площадь в ли. Умножь на 375, это и будет количество му».

Надо иметь в виду, что

1 ли = 300 бу,

1 му = 240 кв. бу,

1 цин = 100 му.

У китайцев единицей измерения площади служил не квадрат, а прямоугольник в $15 \cdot 16 = 240$ кв. бу;

1 бу (по-русски означает «шаг») принимался равным 6 чи и составлял приблизительно 1,33 м. В настоящее время в Китае 1 бу=5 чи=1,6 м. 1 кв. ли=300 бу·300 бу=90 000 кв. бу=375 му.

Откуда искомая площадь равняется:

$$2 \text{ ли} \cdot 3 \text{ ли} = 6 \text{ кв. ли} = 6 \cdot 375 \text{ му} = 2250 \text{ му} = 22 \text{ цина } 50 \text{ му}.$$

Данная задача взята из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах», который был составлен еще до начала нашей эры. Этот трактат сыграл большую роль в развитии древней математики в Китае и долгое время был обязательным пособием для подготовки к экзаменам по математике. Трактат представляет собой своеобразную справочную книгу (энциклопедию) для людей различных профессий, включая землемеров, астрономов, чиновников различных ведомств. Трактат состоит из задач и правил к этим задачам, имеющим прикладное значение.

55. Задача взята из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах». Составитель трактата при решении данной задачи рекомендует руководствоваться правилом: «То, что можешь разделить пополам, раздели пополам, если нельзя разделить пополам, то установи количество числителя и знаменателя, из большего вычти меньшее; продолжай взаимно уменьшать до тех пор, пока не получатся равные [числа]; на это равное число и сократи».

В древнем Китае вычисления производились на счетной доске, где числа изображались с помощью счетных палочек. Термин «установи» (фу чжи) употреблялся в том смысле, что данные количества надо расположить на счетной доске, а затем уже применять к ним действия согласно указанному выше правилу. К сожалению, в трактате нет описания счетной доски и не даются правила четырех арифметических действий: сложения, вычитания, умножения, деления. По-видимому, все это считалось в то время широко известным.

В правиле сокращения дробей дан древнекитайский вариант алгоритма Евклида для определения общего наибольшего делителя двух чисел.

Как известно, в VII книге «Начал» Евклида (предложение 2) алгоритм для нахождения общего наибольшего делителя двух чисел a и b (причем $a>b$) дается в следующем виде: из a вычитаем b последовательно столько раз, чтобы остаток r_1 был меньше b; аналогично поступаем с b и r_1, пока не получим остаток $r_2<r_1$; затем такую же операцию производим с r_2 и r_1 и т. д., пока не получим два остатка $r_{n-1} < r_{n-2}$ таких, что меньший содержится в большем целое число раз. Это правило можно записать так:

$$
\begin{aligned}
&a - qb = r_1,\\
&b - q_1 r_1 = r_2,\\
&r_1 - q_2 r_2 = r_3,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&r_{n-3} - q_{n-2}\cdot r_{n-2} = r_{n-1},\\
&r_{n-2} = q_{n-1}\cdot r_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Последний наименьший остаток r_{n-1} и есть общий наибольший делитель чисел a и b.

Как это видно, сам Евклид для нахождения О.Н.Д. пользовался методом *последовательного вычитания* так, как он давал его в геометрической форме для отрезков a и b.

В настоящее время для чисел a и b способ последовательного вычитания Евклида заменяем способом *последовательного деления*. Однако китайцы еще в глубокой древности алгоритм Евклида в его первоначальной форме применяли не только к отрезкам, но и к любым двум натуральным числам.

Необходимо заметить, что китайцы О.Н.Д. называют «равным количеством» (дэн-шу). Именно этот термин и употребляется в вышеприведенном китайском правиле сокращения дробей.

Руководствуясь китайским правилом сокращения дробей, получаем, что $\frac{49}{91} = \frac{7}{13}$.

О.Н.Д. числителя 49 и знаменателя 91 находится при помощи таких вычислений:

$$\begin{array}{rl} 91 & (a)\\ -\,49 & (b)\\ \hline 42 & (r_1) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 49 & (b)\\ -\,42 & (r_1)\\ \hline 7 & (r_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 42 & (r_1)\\ -\,7 & (r_2)\\ \hline 35 & (r_3)\\ -\,7 & \\ \hline 28 & (r_4)\\ -\,7 & \\ \hline 21 & (r_5)\\ -\,7 & \\ \hline 14 & (r_6)\\ -\,7 & \\ \hline 7 & (r_7)\\ -\,7 & \end{array}$$

Следовательно, О.Н.Д. (49, 91) равен 7. На это число и надо сократить данную дробь.

56. Задача взята из трактата «Математика в девяти книгах». Сложение дробей там рекомендуется производить по следующему правилу: «Числитель поочередно умножь на знаменатель, сложи — это делимое. Перемножь знаменатели — это делитель. Если делитель больше делимого, то обозначь делитель. Если их знаменатели одинаковы, то прямо складывай».

Из только что указанного правила видно, что при приведении дробей к общему знаменателю автор древнекитайского трактата в качестве общего знаменателя дробей берет просто *произведение* знаменателей этих дробей, а не их общее наименьшее кратное, как это делается в настоящее время. Выражение «объедини делимое и делитель», по-видимому, надо понимать как требование составить дробь $\frac{a}{b}$ при условии, что a — делимое, а b — делитель.

В процессе «объединения», конечно, если это возможно, сократить a и b на их общий наибольший делитель. Если же $a > b$, то необходимо выделить целую часть, т. е. представить дробь $\frac{a}{b}$ в виде $A\frac{a_1}{b}$, где $Ab + a_1 = a$. В том случае, когда $a < b$ и Н.О.Д. $(a, b) = 1$ в указанном правиле говорится: «Если делитель больше делимого, то обозначь делитель».

57. Задача взята из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах». Для вычисления дробей в трактате дается такое правило: «Числители поочередно умножь на знаменатели, из большего вычти меньшее, остаток есть делимое. Перемножь знаменатель — это делитель. Объедини делимое и делитель».

58. Задача взята из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах», в котором сравнение дробей дается согласно следующему правилу: «Числители поочередно умножь на знаменатели, из большего вычти меньшее, остаток будет делимым. Перемножь знаменатели — это делитель. Объедини делимое и делитель — это будет то, насколько одна [дробь] больше другой».

59. Задача взята из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах» и решается по такому правилу: «Количество людей возьми в качестве делителя, количество цяней — в качестве делимого. Объедини делимое и делитель. Если имеются дроби, то приведи их к общему знаменателю. Если еще

имеются дроби, то таким же образом приведи их к общему знаменателю».

Смысл этого старинного китайского правила заключается в сведении деления дробных количеств к делению целых.

Согласно этому правилу задача решается так: приводим целое (делимое) и дробь (делитель) к общему знаменателю:

$$7=\frac{21}{3} \text{ и } 8\frac{1}{3}=\frac{25}{3}.$$

Тогда деление двух дробей сводится к делению целых чисел 25 и 21, что дает $\frac{25}{21}=1\frac{4}{21}$ (цяня).

60. Задача взята из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах», где для ее решения имеется такое правило: «Знаменатель перемножь—это делимое. Объедини делимое и делитель».

61. Задача взята из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах», где для ее решения имеется правило: «Знаменатель каждой дроби умножь на ее целую часть, прибавь к этому числитель, перемножь — это делимое. Перемножь знаменатели — это делитель. Объедини делимое и делитель».

Руководствуясь этим правилом, даем решение данной задачи:

$$\frac{18\cdot7+5}{7}\cdot\frac{23\cdot11+6}{11}=\frac{131}{7}\cdot\frac{259}{11}=\frac{131\cdot259}{7\cdot11}=\frac{33\ 929}{7\cdot11}=$$

$$=440\frac{7}{11} \text{ бу}=1 \text{ му } 200\frac{7}{11} \text{ бу}.$$

62. Задача из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах», в котором для измерения треугольных полей дается такое правило: «Половину ширины умножь на прямую длину».

Здесь необходимо заметить, что под названием «прямой длины» древние китайцы понимали высоту треугольника. Тогда согласно правилу задача решается легко:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 5\frac{1}{2}\right)\cdot 8\frac{2}{3}=\frac{10+1}{2\cdot 2}\cdot\frac{24+2}{3}=\frac{11}{4}\cdot\frac{26}{3}=$$

$$=\frac{286}{12}=23\frac{10}{12}=23\frac{5}{6}\text{ (бу).}$$

63. Решение задачи сводится к рассмотрению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x+2y=10; \\ 2x+8y=8. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x=1\frac{7}{9},\quad y=\frac{5}{9}.$$

Следовательно, один вол стоит $1\frac{7}{9}$ таэля, а один баран — $\frac{5}{9}$ таэля.

Древнейший математический трактат «Девять отделов искусства счета» («Киу-Чанг») составлен в глубокой древности. Трактат состоит из математических правил и разного рода задач на приложение этих правил. Здесь имеются задачи прикладного характера, относящиеся к землемерию и вычислению объемов.

64. Условия задачи приводят к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a+b+c=P; \\ a^2+b^2=c^2; \\ ab=2S, \end{cases}$$

где a, b и c — стороны, P — периметр, S — площадь данного треугольника.

Из 2-го и 3-го уравнений имеем

$$(a+b)^2 = 4S + c^2.$$

Откуда

$$(P-c)^2 = 4S + c^2.$$

Решая относительно c, получим

$$c = \frac{P - 4S}{2P}.$$

Учитывая первое уравнение, будем иметь

$$a + b = \frac{P^2 + 4S}{2P}.$$

Присоединяя к этому уравнению 3-е, значения a и b определим как корни квадратного уравнения

$$x^2 - \frac{P^2 + 4S}{2P}x + 2S = 0.$$

Трактат «Начала искусства вычисления» опубликован в 1593 году. На заглавном листе этого сочинения изображен императорский герб в виде дракона. Важнейшие правила, вероятно, для лучшего запоминания даются в стихотворной форме. По-видимому, это сочинение в свое время было принято как учебное руководство в школах по элементарной математике. Содержание книги дает хорошую картину состояния китайской математики вплоть до конца XVI века.

65. Задача взята из древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах». Для решения ее в трактате дается правило: «Установи, что количество чи в 10 000 ху проса, ссыпанного в амбар, есть делимое. Перемножь ширину и длину — это делитель Делимое и делитель объедини, получишь высоту в чи».

66. Задача взята из трактата «Математика в девяти книгах». Для решения задачи составитель трактата приводит правило: «4 шэна, разделенные на 3 нижних колена, составляют нижний коэффициент; 3 шэна, разделенные на 4 верхних колена, составляют верхний коэффициент. Из большего нижнего коэффициента вычти верхний меньший, остаток есть делимое. Сумму половин 4 колен и 3 колен вычти из 9 колен, остаток является делителем. Объедини делимое и делитель, получишь искомое количество в шэнах, т. е. на столько отличается каждая ступень от соседней. Нижний коэффициент, т. е. 1 с малой половиной шэна, есть объем второго снизу колена».

Согласно этому правилу можно провести и сами несложные вычисления:

1) $\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$ — разность между «верхним» и «нижним» коэффициентами, что составляет делимое.

2) $9-\frac{4}{2}-\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$ — составляет делитель.

3) $\frac{7}{12}:\frac{11}{2}=\frac{7}{66}=d$, т. е. то число, на какое отличается каждая ступень от соседней.

4) Тогда восьмое колено будет составлять $\frac{4}{3}=$ $=1\frac{1}{3}$ шэна.

Теперь без труда можно найти в шэнах и другие восемь колен.

67. Составитель трактата «Математика в девяти книгах» данную задачу рекомендует решать по правилу: «Предположим, что вес слитка золота 3 цзиня, тогда вес слитка серебра $2\frac{5}{11}$ цзиня, недостаток равен 49 в правой строке. Предположим, что вес слитка золота 2 цзиня, тогда вес слитка серебра $1\frac{7}{11}$ цзиня. Избыток 15 в левой строке. Каждый знаменатель умножь на количества, содержащиеся в этих строках. Избыток и недостаток умножь крест-накрест на предположенные нормы, сложи — это делимое. Сложи избыток и недостаток — это делитель. Объедини делимое и делитель, получишь вес слитка золота. Знаменатель умножь на делитель, раздели на него делимое, получишь вес слитка серебра. Сократи, получишь искомую дробь».

Самого решения в трактате не дается. Руководствуясь приведенным правилом, решение задачи можно выполнить при помощи таких рассуждений.

Прежде всего заметим, что 1 цзинь=16 ланам, а 1 лан=24 чжу. Обозначим теперь вес слитка золота через x, а вес слитка серебра через z; задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 9x = 11z; \\ 13+8x+z = 10z+x. \end{cases}$$

Будем решать эту систему правилом двух ложных положений.

Первое ложное положение: $x_1=3$ цзиням. Тогда

$$z_1 = \frac{9}{11} = \frac{9\cdot 3}{11} = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11} \text{ (цзиням).}$$

Находим теперь «недостаток в первой строке», который обозначим через y_1:

$$y_1 = \left(\frac{13}{16} + 8\cdot 3 + 2\frac{5}{11}\right) - \left(10\cdot 2\frac{5}{11} + 3\right) =$$

$$= 27\frac{47}{11\cdot 16} - 27\frac{96}{11\cdot 16} = -\frac{49}{11\cdot 16}.$$

Второе ложное положение: $x_2=2$ цзиням. В этом случае $z_2 = 1\frac{7}{11}$ цзиня и «избыток в левой строке» будет

$$y_2 = \left(\frac{13}{16} + 1\frac{7}{11} + 8\cdot 2\right) - \left(10\cdot 1\frac{7}{11} + 2\right) =$$

$$= 18\frac{79}{11\cdot 16} - 18\frac{64}{11\cdot 16} = \frac{15}{11\cdot 16}.$$

Далее предполагается, что y_1 и y_2 вместе с x_1 и x_2 записаны по китайскому способу

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix},$$

где левая колонка составляет по-китайски «левую строку», а правая колонка — «правую строку». Из этой таблицы согласно правилу получаем

$$x = \frac{2\cdot\frac{49}{11\cdot 16} + 3\cdot\frac{15}{11\cdot 16}}{\frac{49}{11\cdot 16} + \frac{15}{11\cdot 16}} = \frac{2\cdot 49 + 3\cdot 15}{49+15} =$$

$$= \frac{143}{64} = 2\frac{15}{64} \text{ (цзиня).}$$

Следовательно, $x=2$ цзиням 3 ланам 18 чжу.

Вес слитка серебра определяется очень просто. Для этого делимое 143 надо разделить на произведение делителя 64 и знаменателя $\frac{11}{9}$. Тогда получаем

$$z = \frac{x}{\frac{11}{9}} = \frac{143}{\frac{11}{9}\cdot 64} = \frac{13\cdot 9}{64} = \frac{117}{64} = 1\,\frac{53}{64}\ \text{(цзиня)}.$$

Следовательно, окончательно $z=1$ цзиню 13 ланам 6 чжу.

68. Составитель трактата «Математика в девяти книгах» для решения этой задачи предлагает такое правило: «Предположим, что через 15 дней, тогда недостаток равен 337 с половиной ли. Предположим, что через 16, тогда избыток равен 140 ли. Избыток и недостаток умножь крест-накрест на предположенные количества, сложи — это делимое. Сложи избыток и недостаток — это делитель. Объедини делимое и делитель, получишь искомое количество дней. Если разделится не до конца, то сократи на общий делитель и обозначь делитель».

За n целых дней рысак пробежит

$$193 + (193 + 13) + (193 + 2\cdot 13) + \ldots + [193 + (n-1)\,13] = 193n + 13 + 2\cdot 13 + \ldots + (n-1)13 = 193n + 13[1+2+\ldots + (n-1)] = 193n + 13\,\frac{n(n-1)}{2}\ \text{(ли)}.$$

За это же число дней кляча пробежит

$$97 + \left(97 - \frac{1}{2}\right) + \left(97 - 2\,\frac{1}{2}\right) + \ldots + \left[97 - (n-1)\,\frac{1}{2}\right] = 97n - \frac{1}{2}[1+2+\ldots + (n-1)] = 97n - \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}\ \text{(ли)}.$$

За указанное число дней рысак и кляча пробегут вместе

$$193n + 13\,\frac{n(n-1)}{2} + 97n - \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= 290n + \left(13 - \frac{1}{2}\right)\frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= 290n + 6\,\frac{1}{4}\,(n^2 - n) \quad \text{(ли)},$$

что должно составить 6000 ли.

Далее, придерживаясь указанного выше правила, задачу продолжаем решать методом двух ложных положений.

При $n = 15$ недостаток равен $6000 - 5662\,\frac{1}{2} = 337\,\frac{1}{2}$ (ли); при $n = 16$ избыток составляет $6140 - 6000 = 140$ (ли).

Обозначая время встречи через x и предполагая, что на протяжении дня скорости не менялись, получим

$$x = \frac{15 \cdot 140 + 16 \cdot 337\,\frac{1}{2}}{140 + 337\,\frac{1}{2}} = 15\,\frac{135}{191} \text{ (дня).}$$

Теперь не составляет большого труда найти, сколько ли пройдут рысак и кляча за $15\,\frac{135}{191}$ дня.

Из анализа решения последней задачи видно, что составитель трактата должен владеть формулой суммирования арифметической прогрессии

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2},$$

хотя в самом трактате она и не упоминается.

69. Эта задача в трактате «Математика в девяти книгах» решается правилом «фан-чэн», с которым мы познакомимся дальше.

Очевидно, вопрос сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10; \\ 2x + 5y = 8. \end{cases}$$

70. Эта задача на неопределенное уравнение, которое надо решать в целых числах. В современных обозначениях задача решается так. Пусть x — число, выражающее, сколько раз отсыпали рис лопатой; y — число, выражающее, сколько раз отсыпали рис башмаком; z — число, выражающее, сколько раз отсыпали рис миской. Тогда условия задачи приводят к системе уравнений

$$19x + 1 = 17y + 14 = 12z + 1.$$

Откуда получается неопределенное уравнение

$$19x = 12z, \quad x = \frac{12z}{19}.$$

Поскольку x, y, z суть целые числа, можно положить, что

$$z = 19t.$$

Тогда получаем неопределенное уравнение

$$17y + 13 = 228t.$$

Беря для t наименьшее целое значение, при котором y будет целым, т. е. $t=14$, получим:

$$x = 168, \ y = 187, \ z = 266.$$

Следовательно, первый вор похитил 3 ши 1 тау 9 шингов 2 го, второй — 3 ши 1 тау 7 шингов 9 го и третий — 3 ши 1 тау 9 шингов 2 го.

Задача взята из старинного китайского трактата «Девять отделов искусства счета».

71. Сам Сунь-цзы решает свою задачу по такому правилу: «При делении на 3 остаток есть 2, поэтому возьмите 140. При делении на 5 остаток есть 3, поэтому возьмите 63. При делении на 7 остаток есть 2, поэтому возьмите 30. Сложив их вместе, получим 233. Из этого легко вычтите 210, и мы получим ответ».

Необходимо заметить, что задачу Сунь-цзы можно решить простыми приемами. Действительно, задача Сунь-цзы сводится к системе

$$\begin{cases} x = 3y + 2; \\ x = 5z + 3; \\ x = 7u + 2, \end{cases}$$

или

$$3y + 2 = 5z + 3 = 7u + 2.$$

Откуда

$$3y = 7u; \ y = \frac{7u}{3}.$$

Полагая $u = 3t$, где t — некоторое целое число, получим

$$y = 7t.$$

Тогда

$$x = 21t + 2.$$

Следовательно,

$$21t + 2 = 5z + 3, \text{ или } 21t - 5z = 1.$$

Путем подбора находим одну пару корней последнего неопределенного уравнения: $t = 1$, $z = 4$.

Общие формулы корней этого уравнения будут

$$t=1+5q;$$

$$z=4+21q,$$

где $q=0, 1, 2, \ldots$

Так как $x=21t+2$, то $x=23+105q$, где $q=0, 1, 2, \ldots$ Наименьшее значение x будет при $q=0$, т. е. $x=23$; при $q=1$ $x=128$; при $q=2$ $x=233$; при $q=3$ $x=338$ и т. д.

72. Задача взята из восьмой книги трактата «Математика в девяти книгах». Для решения этой задачи (самого решения в трактате не приводится) составитель сочинения рекомендует правило «фан-чэн»: «Расположи 3 снопа хорошего урожая, 2 снопа среднего урожая, 1 сноп плохого урожая, составляющие их 39 доу зерна с правой стороны. Расположи посредине и слева количества снопов урожаев в таком же порядке, как и с правой стороны. Числа среднего столбца умножь на количество снопов хорошего урожая в правом столбце и образуй остатки. И еще раз так же образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов среднего урожая в среднем столбце. И снова образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов плохого урожая в левом столбце. Верхнее число есть делитель, нижнее число есть делимое, делимое для искомого количества снопов плохого урожая. Чтобы найти делимое для среднего урожая, нижнее составляющее среднего столбца умножь на делитель и вычти делимое для плохого урожая. Остаток объедини с количеством снопов среднего урожая, это и будет делимое для среднего урожая. Чтобы найти делимое для хорошего урожая, нижнее составляющее количество правого

столбца также умножь на делитель, исключи делимые для плохого урожая и среднего урожая, объедини остаток с количеством снопов хорошего урожая, это и будет делимое для хорошего урожая. Все делимые объедини с делителем, получатся искомые количества в доу».

Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39; \\ 2x + 3y + z = 34; \\ x + 2y + 3z = 26. \end{cases}$$

В китайской записи выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Далее согласно правилу проводятся следующие преобразования этой таблицы:

1) Числа среднего столбца умножь на количества снопов хорошего урожая в правом столбце и образуй остатки. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix}$$

2) И еще раз так же образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов среднего урожая в среднем столбце.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

3) И снова образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до количества снопов плохого урожая в левом столбце.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

4) Верхнее число (36) есть делитель, нижнее число (99) есть делимое для искомого количества снопов плохого урожая.

5) Чтобы найти делимое для среднего урожая, нижнее составляющее среднего столбца умножь на делитель и вычти делимое для плохого урожая. Остаток объедини с количеством снопов среднего урожая, это и будет делимое для среднего урожая.

Таким образом, «делимое» для y будет

$$\frac{24 \cdot 36 - 99}{5} = A.$$

6) Чтобы найти делимое для хорошего урожая, нижнее составляющее количества первого столбца также умножь на делитель, исключи делимое для первого урожая и среднего урожая, объедини остаток с количеством снопов хорошего урожая, это и будет делимое для хорошего урожая.

В соответствии с этим «делимое» для x будет

$$\frac{39 \cdot 36 - 99 - 2A}{3} = B.$$

7) Все делимые объедини с делителем, получатся искомые количества в доу. Следовательно, будем иметь

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ (доу)},$$

$$y = \frac{A}{36} = 4\frac{1}{4} \text{ (доу)},$$

$$x = \frac{B}{36} = 2\frac{3}{4} \text{ (доу)}.$$

73. К этой задаче автор трактата «Математика в девяти книгах» дает два правила.

Первое правило: «Составь таблицу «фан-чэн», установи для каждого то, чего не хватает. По способу «чжэн-фу» вычисляй».

Пользуясь современными обозначениями, сводим задачу к системе уравнений

$$\begin{cases} 2x = 1 - y; \\ 3y = 1 - z; \\ 4z = 1 - x, \end{cases}$$

или к канонической форме

$$\begin{cases} 2x + y = 1; \\ 3y + z = 1; \\ 4z + x = 1. \end{cases}$$

Соответствующая таблица «фан-чэн» будет

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

С самого начала уже в таблице имеются нули (пустые места).

Второе правило — «чжэн-фу», т. е. правило сложения и вычитания отрицательных чисел: «Если одинакового названия, то вычитается, если разного названия, то прибавляется; если положительное без пары, то становится отрицательным, если отрицательное без пары, то становится положительным».

Это правило для вычитания в современных символах может быть записано так:

$$(\pm a) - (\pm b) = \pm (a - b);$$
$$(\pm a) - (\mp b) = \pm (a + b);$$
$$0 - (+b) = -b;$$
$$0 - (-b) = +b.$$

Для сложения правило формулируется так: «Если разного названия, то вычитается, если одинакового названия, то прибавляется; если положительное без пары, то становится положительным,

Ее каноническая форма

$$\begin{cases} 2x - y = 1; \\ 3y - z = 1; \\ 4z - x = 1. \end{cases}$$

Соответствующая таблица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

75. В трактате «Математика в девяти книгах» к задаче дано такое правило: «Составь таблицу «фан-чэн». Установи, что 2 буйвола, 5 баранов положительны. 13 свиней отрицательны, остаток цяней положителен. Еще установи, что 3 буйвола положительны, 9 баранов отрицательны, 3 свиньи положительны. Еще установи, что 5 буйволов отрицательны, 6 баранов положительны, 8 свиней положительны, недостаток цяней отрицателен. Вычисляй по способу «чжэн-фу».

Если через x, y, z обозначим соответственно стоимость буйвола, барана и свиньи, тогда условия задачи приводят нас к системе

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13z + 1000; \\ 3x + 3z = 9y; \\ 6y + 8z = 5x - 600, \end{cases}$$

где 1000 — остаток цяней от продажи 2 буйволов, 5 баранов и покупки 13 свиней; 600 — недостаток цяней от продажи 6 баранов, 8 свиней, покупки 5 буйволов.

76. К задаче в трактате «Математика в девяти книгах» дается такое правило: «Составь таблицу «фан-чэн», вычисляй по способу «чжэн-фу». Других указаний к рассматриваемой задаче не имеется.

Данная задача, как легко видеть, сводится к системе из 5 линейных уравнений с шестью неизвестными. Эту систему можно записать так:

$$\begin{cases} 2x + y = m; \\ 3y + z = m; \\ 4z + u = m; \\ 5u + v = m; \\ 6v + x = m. \end{cases}$$

Здесь неизвестными являются x, y, z, u, v, m. Причем согласно ответам m берется с таким расчетом, чтобы целые положительные значения x, y, z, u, v были бы наименьшими.

Основная матрица полученной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m & m & m & m & m \end{pmatrix}$$

Преобразованная матрица с нулями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 721 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 76m & m & m & m & m \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$v = \frac{76}{721} m, \ u = \frac{1}{721} \cdot \frac{721m - 76m}{5} = \frac{129}{721} m,$$

$$z = \frac{148}{721} m, \ y = \frac{191}{721} m, \ x = \frac{265}{721} m,$$

причем m нужно положить равным 721.

77. Много сделал для развития прикладной геометрии крупнейший китайский математик III века Лю Хуэй, автор многих сочинений по математике. Вопросам прикладной геометрии он посвятил целый трактат под названием «Математика морского острова», написанный сначала как десятая глава комментария к древнейшей книге «Математика в девяти книгах» и издававшийся позднее в виде отдельной книги. Несколько странное название книги объясняется тем, что в ней решаются различные задачи на определение расстояний до недоступных предметов, расположенных на острове, причем точка наблюдения находится вне его. Кроме того, имеется задача на вычисление недоступных высот, расположенных на острове, наблюдение над которыми ведется из точек, расположенных также на острове.

Лю Хуэй решает эту задачу согласно правилу, которое можно выразить следующими двумя формулами:

$$x = \frac{bl}{d+c} + e, \ y = \frac{bc}{d-c},$$

где x — высота сосны; y — расстояние переднего шеста до холма; a — высота каждого шеста; b — расстояние между шестами; c — расстояние точки, расположенной позади шеста и находящейся на одной прямой с концом переднего шеста и верхушкой дерева, от основания шеста; d — расстояние точки, расположенной позади второго шеста (заднего) и находящейся на одной прямой с концом второго шеста и верхушкой дерева, от основания шеста; e — число, которое «отмеряет основание дерева» от верха переднего шеста (рис. 19).

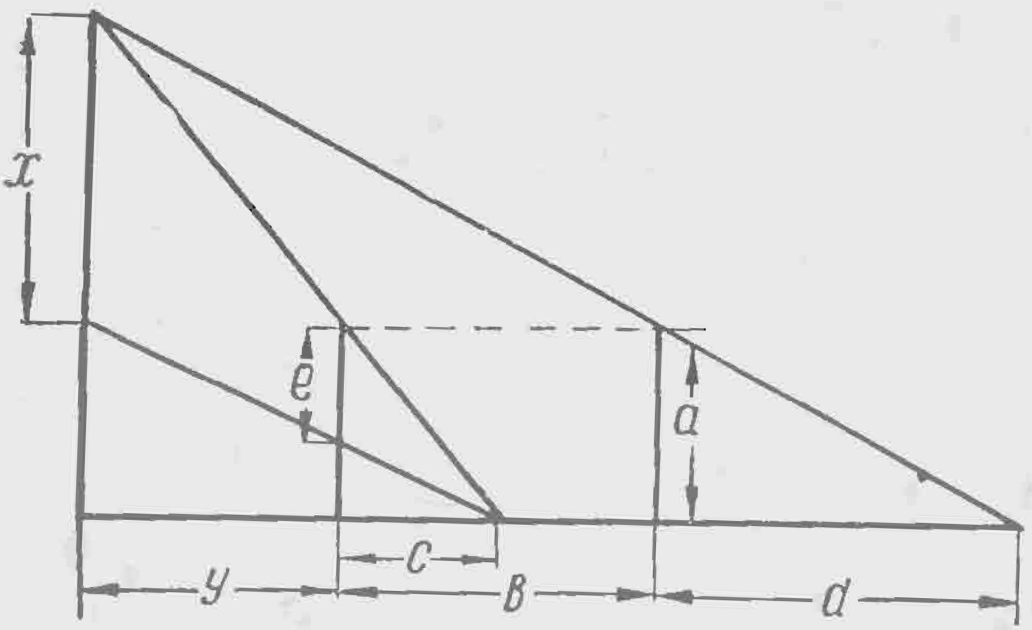


Рис. 19

Необходимо заметить, что многие задачи Лю Хуэя сложны. Решение своих задач он давал обычно в виде правил, основанных главным образом на рассмотрении подобных треугольников. Ввиду практической ценности эти задачи получили позднее широкое распространение не только в самом Китае, но и далеко за его пределами.

78. Трудно указать время, когда впервые китайский народ стал пользоваться «законом о катетах и гипотенузе», т. е. теоремой Пифагора. Но достоверно известно, что теоремой Пифагора китайцы пользовались очень давно. Как свидетельствуют летописи, для прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5 теорема Пифагора была известна в древнем Китае около 2200 лет до нашей эры.

В «Математике в девяти книгах» теорема Пифагора употребляется под видом правила «гоу-гу». Согласно этому правилу можно по известной гипотенузе и одному известному катету находить другой неизвестный катет, а также гипотенузу, если известны оба катета.

Правило «гоу-гу» формулируется так: «Умножь сам на себя каждый из катетов, сложи, извлеки из этого квадратный корень, это и будет гипотенуза. Так же: умножь сам на себя вертикальный катет, вычти из умноженной самое на себя гипотенузы, извлеки из остатка квадратный корень, это и будет горизонтальный катет. Так же: умножь сам на себя горизонтальный катет, вычти из умноженной самое на себя гипотенузы, извлеки из остатка квадратный корень, это и будет вертикальный катет».

Термины «гоу» и «гу» обозначают катеты прямоугольного треугольника, причем «гоу»— горизонтальный, обычно меньший катет, а «гу»— вертикальный и обычно больший катет. В буквальном переводе «гоу» означает «крюк», а «гу» — «ребро», «связка».

Правило «гоу-гу» применяется ко всем 24 задачам девятой книги трактата «Математика в девяти книгах», поэтому и сама девятая книга называется «Гоу-гу».

В трактате «Математика в девяти книгах» для решения предложенной задачи дается правило: «Половину стороны водоема умножь самое на себя, надводную часть в 1 чи умножь самое на себя, вычти это из первого, остаток раздели на удвоенную надводную часть камыша, получишь глубину воды. Прибавь количество чи надводной части, получишь длину камыша».

Самого решения в трактате не дается. Это решение легко выполнить в общем виде при помощи таких рассуждений.

Обозначим длину водоема через $2a$, длину камыша через c (рис. 20). Задача заключается в нахождении b и c. Руководствуясь китайским правилом, находим формулы для определения искомых величин:

$$b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)},$$

$$c = b + (c - b) = \frac{a^2 + (c - b)^2}{2(c - b)}.$$

Самого вывода правила не дается, поэтому трудно сказать, каким путем древнекитайские математики установили последние формулы. Однако к этим формулам можно легко прийти обычными рассуждениями. Исходя из условий задачи и применяя правило «гоу-гу», т. е. теорему Пифагора, получаем систему

$$\begin{cases} b = c - k; \\ b^2 = c^2 - a^2, \end{cases}$$

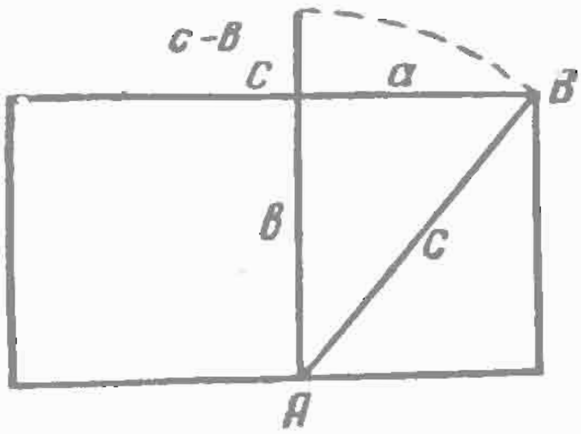


Рис. 20

где для краткости через k обозначена известная нам надводная часть, равная $c - b$. Решая эту систему, будет иметь

$$b = \frac{a^2 - k^2}{2k}$$

и

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k},$$

где $k = c - b$.

Лю Хуэй в комментариях к «Математике в девяти книгах» довольно убедительно объясняет, каким путем древние китайцы получили правило, сводящееся к двум последним формулам. Он считает, что эти формулы, записанные в словесной форме, получены на основе геометрических соображений По-видимому, древнекитайские ученые в данном конкретном случае пользовались таким чертежом (рис. 21).

Прежде всего, по правилу «гоу-гу» имеем

$$a^2 = c^2 - b^2.$$

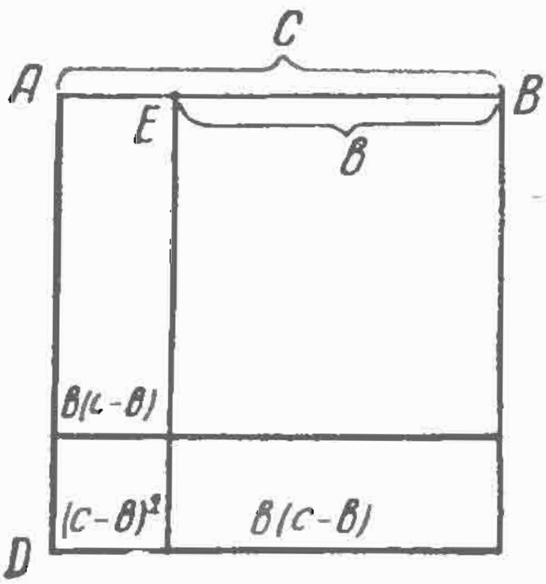


Рис. 21

Далее, из рассмотрения чертежа получается

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)^2 + \\ + 2b(c-b),$$

или

$$a^2 = (c-b)^2 + 2b(c-b),$$

откуда

$$b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)}.$$

79. Задача взята из трактата «Математика в девяти книгах». Там для решения этой задачи приводится правило: «Расстояние от корня умножь само на себя, объедини с высотой. То, что получится, вычти из высоты бамбука, возьми половину остатка, это и будет высота после сгибания».

Самого решения автор задачи не приводит. Однако это решение можно реставрировать. Действительно, обозначив через b высоту бамбука после сгибания, через c — согнутую часть, через a — расстояние точки касания вершины бамбука до его основания (корней) (рис. 22), получим для нахождения b формулу

$$b = \frac{b + c - \frac{a^2}{b+c}}{2},$$

которая следует из таких рассуждений (по правилу «гоу-гу»):

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c = (b + c) - b,$$

$$c^2 = [(b + c) - b]^2 =$$

$$= (b + c)^2 - 2b(b + c) + b^2.$$

Откуда

$$a^2 + b^2 = (b+c)^2 - 2b(b+c) + b^2,$$

$$a^2 = (b + c)^2 - 2b(b + c),$$

$$2b(b + c) = (b + c)^2 - a^2,$$

$$b = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2(b + c)},$$

$$b = \frac{b + c - \frac{a^2}{b + c}}{2}.$$

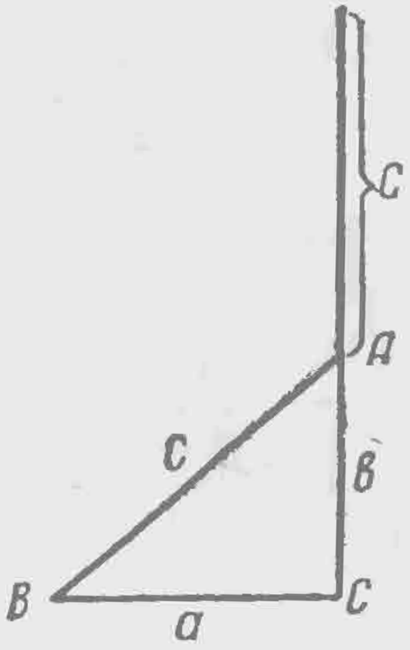


Рис. 22

Последняя формула и выражает древнекитайское правило для вычисления высоты бамбука после сгибания.

Если воспользоваться комментариями Лю Хуэя, то задача допускает и геометрическое решение. Для этой цели воспользуемся чертежом (рис. 23).

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)^2 + 2b(c - b) =$$
$$= (b + c)^2 - 2b(b + c),$$

следовательно, получаем:

$$a^2 = (b + c)^2 - 2b(b + c); \; b = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2(b + c)},$$

откуда

$$b = \frac{b + c - \frac{a^2}{b+c}}{2},$$

что и нужно по древнекитайскому правилу.

80. Эту задачу древнекитайский математик в трактате «Математика в девяти книгах» рекомендует решать по такому правилу: «7 умножь само на себя, 3 тоже умножь само на себя, сложи и возьми половину. Возьми это в качестве нормы ходьбы *А* по косому направлению. Вычти из 7, умноженного само на себя, норму ходьбы по косому направлению, остаток является нормой ходьбы на юг. 3 умножь на 7, это норма ходьбы *Б* на восток. 10 бу ходьбы на юг умножь на норму ходьбы А по косому направлению, 10 бу умножь на норму ходьбы *Б* на восток, каждое есть делимое. Объедини делимое и норму ходьбы на юг, получишь для каждого количество пройденного».

Пользуясь этим правилом, задачу можно решить довольно просто.

1) Находим сначала норму ходьбы *А* «по косому направлению»:

$$\frac{7^2 + 3^2}{2} = 29.$$

2) Находим норму ходьбы *А* на юг:

$$7^2 - \frac{7^2+3^2}{2} = 20.$$

3) Норма ходьбы на восток будет:

$$7 \cdot 3 = 21.$$

4) Находим «делимое»: $10 \cdot 29$ и $10 \cdot 21$.

5) *А* прошел «по косому направлению» путь:

$$\frac{10\cdot 29}{20}=\frac{29}{2}=14\frac{1}{2}\ (\text{бу}).$$

6) *Б* прошел на восток путь:

$$\frac{10\cdot 21}{20}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}\ (\text{бу}).$$

Обычным путем задача решается так: обозначим через x путь, пройденный *Б* на восток, через y — путь, пройденный *А* на юг (причем по условию задачи $y=10$ бу), через z — путь, пройденный *А* «по косому направлению», т. е. по диагонали полученного прямоугольного треугольника (рис. 24). Тогда

$$x^2+10^2=z^2,$$

$$\frac{x}{z+10}=\frac{3}{7}.$$

Откуда

$$z=\frac{7}{3}x-10.$$

Далее

$$x^2+10^2=\left(\frac{7}{3}x-10\right)^2,$$

или

$$x^2+100=\frac{49}{9}x^2-\frac{2\cdot 7\cdot 10}{3}x+100,$$

$$40x^2-3\cdot 2\cdot 7\cdot 10x=0,$$

$$2x^2-21x=0,$$

$$x(2x-21)=0,$$

$$2x - 21 = 0,$$

$$x = 10\frac{1}{2} \text{ (бу)}.$$

Теперь находим z:

$$z = \frac{7}{3} \cdot \frac{21}{2} - 10 = \frac{49}{2} - 10 = \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2} \text{ (бу)}.$$

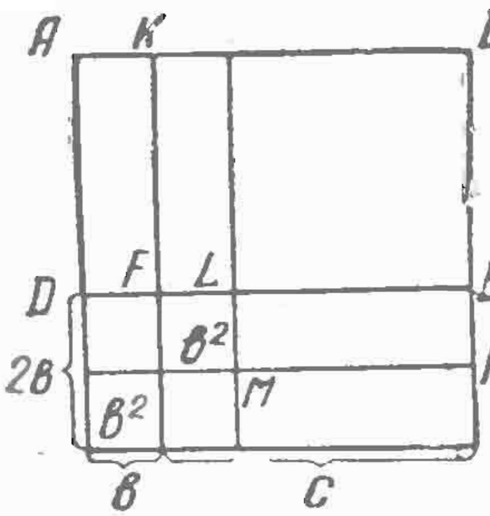


Рис. 23

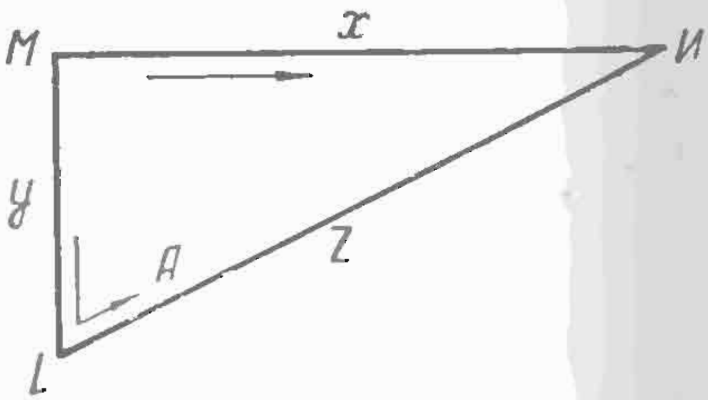


Рис. 24

81. К задаче, как всегда, дается готовое правило: «1 чжан умножь сам на себя, это «ши», половину избытка умножь самое на себя, удвой, вычти из «ши», возьми половину остатка, извлеки квадратный корень из него, из полученного вычти половину излишка, это и будет ширина двери. Прибавь половину излишка, это и будет высота двери».

Если обозначить ширину двери через x, а длину ее через y, далее положить, что $y - x = m$ («избыток»), а диагональ двери d, то задача сводится к рассмотрению системы

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2; \\ m = y - x. \end{cases}$$

Для определения x получаем квадратное уравнение

$$2x^2 + 2mx + m^2 - d^2 = 0.$$

Решая это уравнение обычным приемом, получим

$$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{m^2 - d^2}{2}} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{2d^2 - m^2}{4}} =$$

$$= -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}.$$

Так как древнекитайские ученые отрицательных корней не рассматривали, то ширина двери у них получалась

$$x = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} - \frac{m}{2}.$$

А это и есть то, о чем говорит вышеприведенное правило для определения x.

Интересно заметить, что после определения x величину y легко было бы найти из уравнения

$$y = x + m,$$

но согласно древнекитайскому правилу для определения y дается формула

$$y = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} + \frac{m}{2}$$

что является положительным корнем уравнения

$$2y^2 - 2my + m^2 - d^2 = 0.$$

82. Древнекитайское правило к этой задаче гласит: «Количество бу, пройденное от северных ворот, умножь на удвоенное количество бу, пройденное на запад, это делимое. Сложи с количеством бу, пройденным от южных ворот, это дополненный делитель. Извлеки квадратный корень, это и будет сторона города».

Эту задачу можно иллюстрировать чертежом (рис. 25). Пользуясь обозначениями чертежа, задачу можно свести к решению квадратного уравнения

$$x^2 + (k + l_1)x - 2kl_2 = 0.$$

83. В трактате «Математика в девяти книгах» для решения этой задачи дано правило: «Обвод основания умножь сам на себя, умножь на высоту, разделив на 36, возьми 1 раз».

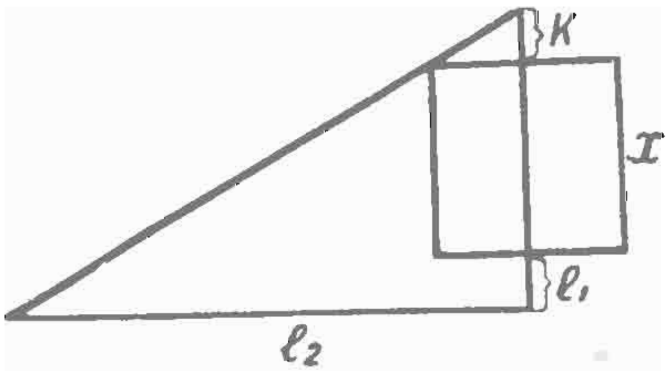


Рис. 25

Таким образом, объем конуса древние китайцы вычисляли по формуле

$$v = \frac{h}{3} \cdot \frac{c^2}{4\pi},$$

полагая, что $\pi = 3$.

84. Древние китайцы решали эту задачу по такому правилу: «Перемножь верхний и нижний обводы, умножь каждый сам на себя, все это сложи, умножь на высоту, раздели на 36, возьми 1 раз».

Следовательно, объем усеченного конуса в древнем Китае находился по формуле

$$v = \frac{(Cc + C^2 + c^2)h}{36},$$

или, полагая $\pi=3$, получим

$$v = \frac{h}{3} \cdot \frac{Cc + C^2 + c^2}{4\pi},$$

где C и c — длины окружностей нижнего и верхнего оснований, а h — высота.

85. Древнекитайское правило к этой задаче гласит: «Сложи горизонтальный и вертикальный катеты, это делитель, перемножь горизонтальный и вертикальный катеты, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь сторону квадрата в бу».

86. Задачу можно иллюстрировать чертежом (рис. 26). Решая эту задачу, китайский ученый, по-видимому, рассматривал два подобных треугольника $\triangle SAD$ и $\triangle ECD$. Откуда делался вывод,

что
$$\frac{AS}{CD} = \frac{AD}{EC},$$

или

$$x = AS = \frac{AD \cdot CD}{EC}.$$

Подставляя данные задачи, получаем словесную формулу

$$x = \frac{1 \text{ чжан} \times 1 \text{ чжан}}{3 \text{ цуня}}.$$

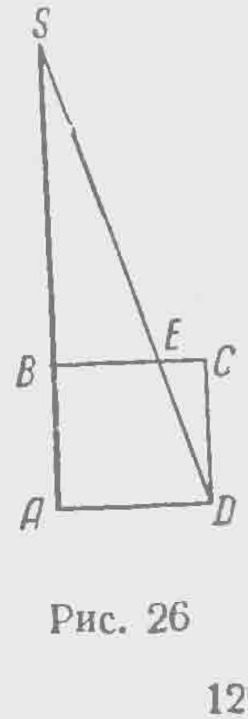


Рис. 26

На основании этого древние китайцы давали такое правило: «Умножь 1 чжан сам на себя, это делимое. Три цуня есть делитель. Объедини делимое и делитель».

87. К своему правилу для решения этой задачи древние китайцы, видимо, пришли из рассмотрения подобных прямоугольных треугольников (рис. 27): $\triangle AKN$ и $\triangle NLF$. Откуда

$$\frac{AK}{KN} = \frac{NL}{LF},$$

или

$$\frac{x - ND}{BD} = \frac{ND - FE}{DE}.$$

Следовательно,

$$x = ND + \frac{(ND - FE)\,BD}{DE}.$$

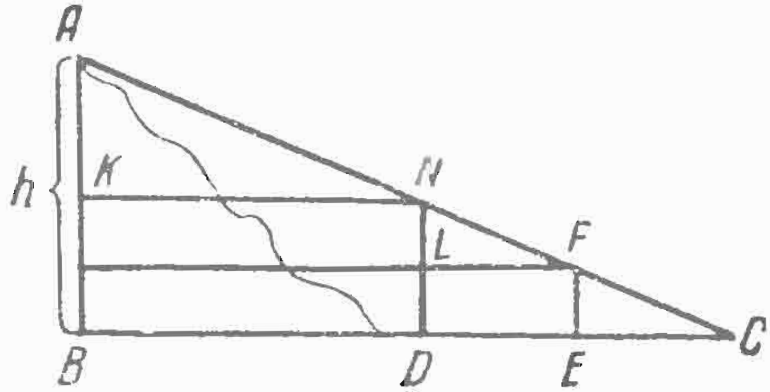


Рис. 27

Эта формула дала повод сформулировать древнекитайское правило, которое и дается в трактате «Математика в девяти книгах» в качестве пояснения к рассматриваемой задаче: *«Из высоты столба* вычти высоту уровня зрения 7 чи, остаток умножь на 53 ли, это делимое. Расстояние, на которое удален человек от столба в 3 ли, есть делитель. Объедини делимое и делитель. То, что получится, прибавь к высоте столба, это и будет высота горы».

88. Надо иметь в виду, что 1 чжан=10 чи=100 цуням. Для составления нужного правила решения древнекитайские математики, по всей вероятности, рассматривали два подобных прямоугольных треугольника (рис. 28): $\triangle ABF$ и $\triangle FCD$.

Откуда получали

$$\frac{AB}{BF}=\frac{x}{FC},\quad x=FC\cdot\frac{AB}{BF},\quad x=\frac{AB(BC-BF)}{BF}.$$

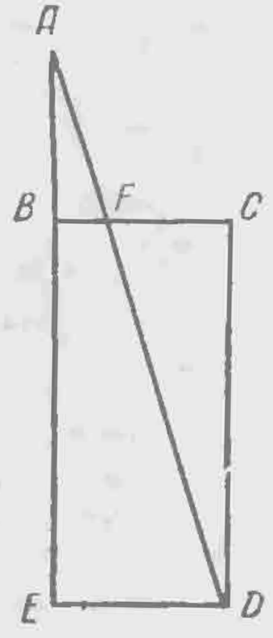


Рис. 28

Последняя формула давала возможность вывести правило, которое и дается в трактате: «Из 5 чи, диаметра колодца, вычти 4 цуня, что откладывается на диаметре. Остаток умножь на 5 чи, высоту шеста, это делимое. Четыре цуня, что откладываются на диаметре, есть делитель. Объедини делимое и делитель, получишь искомое количество в цунях».

ИНДИЯ

Индия имеет большую и богатую самобытную культуру, истоки которой уходят в седую древность. Много тысяч лет тому назад, еще до нашей эры, в Индии строились оросительные каналы, городские водосточные системы, строились многоэтажные здания из хорошо обожженного кирпича. В далеком прошлом индийцы владели искусством керамического производства (производство изделий из обожженной глины), умело пользовались гончарным кругом, успешно развивали ювелирное дело (изготовление изделий из драгоценных камней и металлов).

Еще в глубокой древности в Индии были накоплены большие знания в области грамматики, астрономии и других наук.

Наибольших успехов индийские ученые достигли в области математики. Они явились основоположниками арифметики и алгебры, в разработке которых пошли дальше греческих ученых. Достижения индийских ученых в области арифметики и алгебры оказали сильное влияние на развитие восточной, а затем и европейской математики.

Величайшим достижением древнеиндийской математики является прежде всего открытие позиционной системы счисления, состоящей из десяти индийских цифр, включая и знак нуль, называемый по индийски «сунья», что дословно означает «ничто». Интересно заметить, что в первоначальном начертании нуль изображался точкой и лишь спустя много веков — в виде маленького кружка. Кто первый из индийских ученых стал употреблять десятичную систему, неизвестно. Однако есть основание думать, что эта система была изобретена в начале I века нашей эры. Что касается первого употребления знака нуля, то этот замечательный факт относится ко II веку нашей эры.

Наиболее известными индийскими математиками являются А р и а б х а т а (конец I в.), Б р а м а г у п т а (VII) и Б х а с к а р а (XII).

Индийские математики далекого прошлого любили состязаться на публичных народных собраниях. По этому поводу один индийский автор VII века, заканчивая свою книгу, писал: «Подобно тому как солнце затмевает своим блеском звезды, так мудрец затмевает славу других людей, предлагая и особенно решая на народных собраниях математические задачи».

89. Эта задача взята из Бахшалийской рукописи, найденной в 1881 году при раскопках в Бахшали в северо-западной Индии. Рукопись выполнена на березовой коре и относится к III или IV веку нашей эры. Ученые установили, что эта рукопись является неполной копией более древних рукописей.

Автор рукописи предлагает решать данную задачу «правилом предположения», в его частном виде, когда искомое предполагается равным единице (методом приведения к единице). Рассуждение ведется следующим образом. Пусть неизвестное равняется единице, тогда первый дал 1, второй — 2, третий — 6, четвертый — 24. Сумма пожертвований будет составлять 33. Теперь разделим 132 на 33. Это и будет искомый результат, т. е. представляет то число, которое дал первый.

90. Задача взята из трактата «Венец астрономического учения» («Сидданта-сиромани»), выдающегося индийского математика XIII века Бхаскара-акария (родился в 1114 г., год смерти неизвестен). Приставка «акария» означает «мудрец», «ученый». Вся вводная часть указанного выше астрономического трактата состоит из арифметики — «Лиловати» (прекрасная) — и алгебры — «Виджа ганита» (вычисление корней). Лиловати, как полагают многие историки математики,— дочь Бхаскары, которой он и посвящает арифметическую часть своего сочинения.

Сам Бхаскара данную задачу решает «методом предположения». Вот его рассуждения. Предположим, что искомое число равняется 3, тогда по условию задачи $3 \cdot 5 = 15$, одна треть от 15 равна 5. Поскольку $15 - 5 = 10$, то при делении 10 на 10 получим единицу. Если теперь к единице прибавить

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ от 3, тогда получим $1+1+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=$ $=\frac{17}{4}$, что меньше 68 в 16 раз.

Следовательно, искомое число равняется $3\cdot16=48$.

91. Задача приводит к уравнению

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+3\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x\right)+1=x.$$

Решая это уравнение, получим $x=15$. Следовательно, всего было 15 пчел.

Задача взята из трактата «Сущность вычисления» («Ганитасара») индийского математика Сридхара, жившего в промежутке VI—X веков (время жизни точно не установлено). Сридхара является автором многих интересных задач, которые широко использовались индийскими математиками последующих времен.

92. Обозначим через x путь, пройденный до встречи одним светилом, тогда время, необходимое ему для прохождения этого пути, будет $\frac{x}{v_1}$.

За это время второе светило пройдет путь $d-x$ и затратит на него время $\frac{d-x}{v_2}$. Теперь составим уравнение

$$\frac{x}{v_1}=\frac{d-x}{v_2}.$$

Откуда

$$x=\frac{dv_1}{v_1+v_2}.$$

Задача взята из трактата «Ариабхатиам» известного индийского математика конца V — начала VI века Ариабхаты. Этот трактат посвящен астрономии и математике. В математической части своего сочинения Ариабхата дает ряд правил по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии, нужных для астрономии и в первую очередь для составления астрономических таблиц. Ариабхата является автором многих интересных задач по элементарной математике, одна из которых и приводится.

93. Согласно условию задачи будем иметь

$$\begin{cases} n+5=x^2; \\ n-11=y^2. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$16=x^2-y^2,$$

или

$$16=(x+y)(x-y).$$

Откуда

$$\mathrm{I}\begin{cases} x+y=8; \\ x-y=2; \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} x+y=16; \\ x-y=1. \end{cases}$$

Решая первую систему, получим

$$x=5,\ y=3.$$

Следовательно, искомое число $n=20$.

Решая вторую систему, имеем

$$x=\frac{17}{2},\quad y=\frac{15}{2}.$$

Следовательно, $n=67\frac{1}{4}$.

Задача взята из рукописной арифметики, выполненной на березовой коре. Она найдена при раскопках в местечке Бахшали, расположенном в северо-западной части Индии. Эта «Арифметика из Бахшали», как принято называть находку, относится к VII или VIII веку нашей эры. Полагают, что она составлена по более ранним источникам, относящимся к III или IV веку. Рукопись состоит из арифметических и алгебраических правил и ряда задач на приложение этих правил.

94.
$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=$$
$$=\sqrt{2+3+5+2\sqrt{2\cdot 3}+2\sqrt{2\cdot 5}+2\sqrt{3\cdot 5}}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

Эта задача взята из трактата «Венец астрономического учения» («Сидданта-сиромани») Бхаскара-акария.

95. Данная задача является задачей на суммирование так называемых треугольных чисел вида $\frac{n(n+1)}{2}$.

Давая n значения 1, 2, 3, 4 ..., получим ряд «треугольных чисел»: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 ... Обратив внимание, что сумма двух рядом стоящих «треугольных чисел» всегда представляет точный квадрат, и обозначив любое «треугольное число» через T, будем иметь

$$T_n+T_{n-1}=n^2,$$
$$T_{n-1}+T_{n-2}=(n-1)^2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$T_3-T_2=3^2,$$
$$T_2-T_1=2^2.$$

Сложив все эти равенства, получим

$$T_n+2(T_{n-1}+T_{n-2}+\ldots+T_2)+T_1=n^2+$$
$$+(n-1)^2+\ldots+3^2+2^2,$$
$$T_n+2(T_{n-1}+T_{n-2}+\ldots+$$
$$+T_2)+T_1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1,$$

$$2(T_n + T_{n-1} + \ldots + T_2 + T_1) = T_1 + T_n + \\ + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1.$$

Имея в виду, что $T_1 = 1$, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, получим:

$$T_n + T_{n-1} + \ldots + T_2 + T_1 = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right],$$

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6},$$

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+4)}{6},$$

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Задача взята из трактата Ариабхаты «Ариабхатиама».

96. Пусть h — высота гномона, a и b — длина его тени в двух различных положениях, d — расстояние между основанием гномона в первом положении и основанием его во втором положении (рис. 29).

Обозначив через x искомую высоту свечи, из подобия треугольников, легко усматриваемого из чертежа, получим

$$\frac{x}{x-h} = \frac{a+b+d}{d}.$$

Откуда

$$x = \frac{h(a+b+d)}{a+b} = \\ = h\left(1 + \frac{d}{a+b}\right).$$

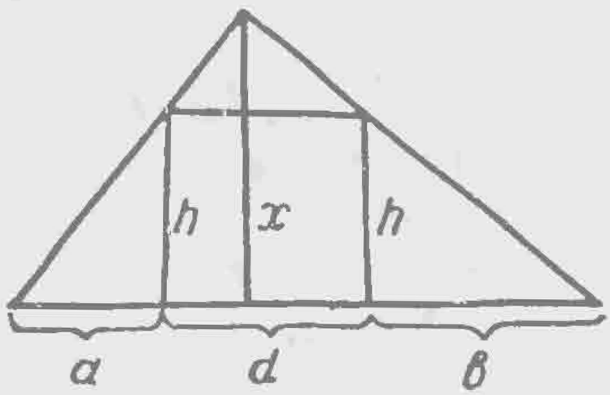


Рис. 29

Автор этой задачи — крупнейший индийский математик и астроном Брамагупта (родился в 598 г.). Для потомства сохранился только один его астрономический трактат под названием «Брамаспутта-сиданта» («Пересмотр системы Брамы»), написанный в 628 году. Трактат состоит из 20 книг, из которых математические — XII и XVIII книги. XII книга содержит арифметику, а XVIII — алгебру. В арифметической книге имеется ряд глав, посвященных вопросам геометрии, в том числе и только что решенная задача.

97. Сам Бхаскара задачу решал так. Напишем тождество

$$[(m^2+n^2)x]^2=[(m^2-n^2)x]^2+(2mnx)^2$$

и примем за гипотенузу

$$(m^2+n^2)x,$$

а за катеты

$$(m^2-n^2)x \text{ и } 2mnx.$$

Имея в виду условия задачи, получим

$$(m^2+n^2)x=mnx^2(m^2-n^2),$$

или

$$m^2+n^2=mn(m^2-n^2)x.$$

Откуда

$$x=\frac{m^2+n^2}{mn(m^2-n^2)}.$$

Теперь без труда вычислим катеты искомых треугольников, а следовательно, и найдем и сами треугольники.

Эта задача взята из трактата Бхаскара-акария «Венец системы».

98. Обозначив диаметр круга через d, будем иметь

$$\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{13}{15}d\right)^2.$$

Откуда

$$\pi = \frac{676}{225},$$

или $\pi = 3{,}00(4)$. Погрешность около 4,3%.

Задача взята из древнего индийского сборника «Сулва-сутра» («Правило веревки»), который является самым старым памятником индийской геометрии, дошедшим до нашего времени. «Сулва-сутра» представляет своеобразную инструкцию о построении жертвенников, в которой и дается весьма ценный геометрический материал в его приложении, т. е. материал, связанный с описанием форм жертвенников, их размерами и необходимой ориентацией относительно стран света.

В настоящее время известны три таких сборника. Авторами этих сборников являются Богдайана (V или VII до н. э.), Котиайана и Анастамба (IV и V до н. э.).

Судя по этим сборникам, можно сделать вывод, что по меньшей мере в VIII веке до нашей эры индийским ученым была уже известна теорема о квадрате гипотенузы (теорема Пифагора), т. е. задолго до Пифагора.

В «Сулва-сутра» эта теорема формулировалась так: «Веревка, проведенная наискось в продольном квадрате (прямоугольнике), образует то же, что образует вместе каждая отдельная из мер: продольных и поперечных».

Если древнегреческие ученые пытались решить проблему о превращении данного круга в равновеликий квадрат (квадратура круга), то индийские математики в своих «Сулва-сутрах» решают часто обратную задачу, конечно, приближенно, о превращении данного квадрата в равновеликий ему круг.

В «Сулва-сутрах» дается «правило Катнайаны»: «Надо разделить диаметр на 15 равных частей и взять 13 таких частей для стороны квадрата, равного (приблизительно) кругу. Это правило Катиайаны и составляет содержание рассмотренной выше задачи.

99. Пусть у 1-го лица будет a вещей и m монет, а у 2-го лица — b вещей и p монет. Тогда, обозначив через x ценность вещи, будем иметь уравнение

$$ax + m = bx + p.$$

Решая относительно x, получим

$$x = \frac{p - m}{a - b}.$$

100. Надо доказать, что $\frac{ac}{h} = BE$, где BE — диаметр описанной окружности (рис. 30).

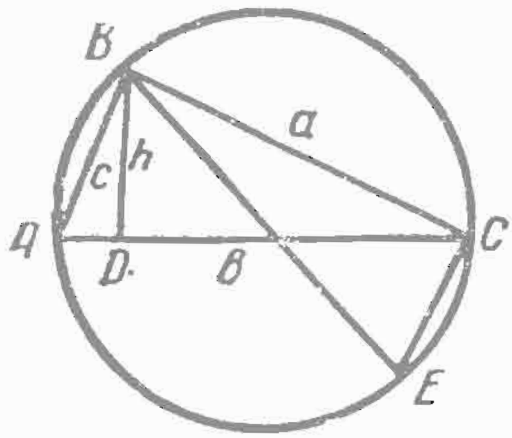


Рис. 30

Рассмотрим треугольники ADB и BCE, которые подобны.

Получим

$$c : h = BE : a.$$

Откуда

$$\frac{ac}{h} = BE.$$

101. Надо доказать, что

$$a^2 + b^2 = D^2 \text{ и } c^2 + d^2 = D^2,$$

где D — диаметр описанной окружности (рис. 31).

Еще в древности Архимеду было известно, что

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = D^2.$$

Далее, по теореме Пифагора

$$m^2 + p^2 = a^2 \text{ и } n^2 + q^2 = b^2.$$

Следовательно,

$$a^2 + b^2 = D^2.$$

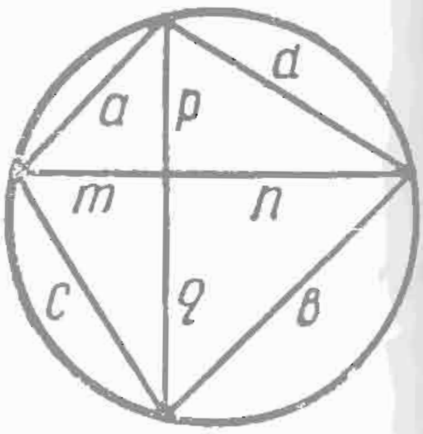


Рис. 31

Аналогично $m^2 + q^2 = c^2$ и $n^2 + p^2 = d^2$. Следовательно, $c^2 + d^2 = D^2$.

102. Надо доказать, что $\frac{AB^2}{4a}+a=D$, где D — диаметр круга (рис. 32). В самом деле,

$$AC^2=ab, \qquad (1)$$

$$AC=\frac{AB}{2}, \qquad (2)$$

$$b=D-a. \qquad (3)$$

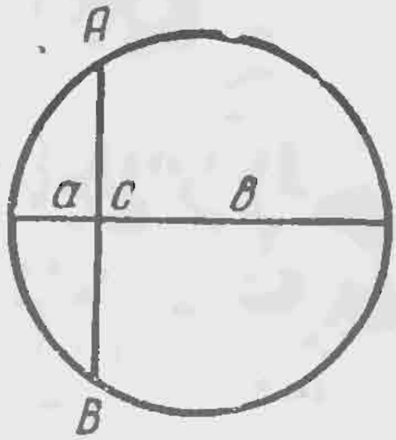


Рис. 32

Тогда равенство (1) на основании (2) и (3) примет вид

$$\frac{AB^2}{4}=a(D-a),$$

или

$$\frac{AB^2}{4}+a^2=Da. \qquad (4)$$

Разделив левую и правую части равенства (4) на a, получим окончательно

$$\frac{AB^2}{4a}+a=D.$$

103. Надо доказать, что $a=\frac{1}{2}\left(D-\sqrt{D^2-AB^2}\right)$.

$$AB^2=4aD-4a^2$$

(см. предыдущую задачу).

Далее, легко видеть, что

$$D^2-4aD+4a^2=D^2-AB^2,$$

$$(D-2a)^2=D^2-AB^2,$$

$$D-2a=\sqrt{D^2-AB^2},$$

$$a=\frac{1}{2}\left(D-\sqrt{D^2-AB^2}\right).$$

104. Решение Бхаскары. Пусть у первого будет $2x-100$ рупий, а у второго — $x+100$ рупий. Ясно, что первое условие будет выполнено. Имея в виду второе условие, получим

$$6(2x-110)=x+110.$$

Решая это уравнение, получим $x=70$.

Следовательно, у первого было $140-100=40$ (рупий), у второго — $70+100=170$ (рупий).

105. Решение Бхаскары. Умножив обе части уравнения $ax^2+bx=c$ на $4a$, получим

$$4a^2x^2+4abx=4ac.$$

Далее, прибавим к обеим частям равенства по b^2:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2+4ac.$$

Так как левая часть обращается в квадрат, то

$$2ax+b=\sqrt{b^2+4ac}.$$

Откуда $$x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}.$$

Что касается отрицательных значений корней, то Бхаскара замечает, что «люди не одобряют отвлеченных отрицательных чисел».

106. Решение Бхаскары. Полагая, что число пчел роя $2x^2$, получим уравнение

$$2x^2=x+\frac{16}{9}x^2+2,$$

или

$$2x^2-9x=18.$$

Откуда

$$x=6 \text{ и } 2x^2=72.$$

107. Решение Бхаскары. Решение задачи приводит к уравнению

$$x^3+12x=6x^2+35,$$

или

$$x^3 + 12x - 6x^2 = 35.$$

Вычитая из обеих частей равенства 8, будем иметь

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27,$$

$$(x - 2)^3 = 27,$$

$$x - 2 = 3 \text{ и } x = 5.$$

Значения других двух корней Бхаскара не дает (комплексные корни он не рассматривает).

Исходное кубическое уравнение можно было бы решить несколько иначе и так же элементарно. Ниже дается это решение:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0,$$

$$x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x + 7x - 35 = 0,$$

$$x^2(x - 5) - x(x - 5) + 7(x - 5) = 0,$$

$$(x - 5)(x^2 - x + 7) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$x - 5 = 0 \text{ и } x^2 - x + 7 = 0.$$

Решая первое, найдем $x_1 = 5$; решая второе, найдем x_2 и x_3.

108. Решение Бхаскары.

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999,$$

$$x^4 - 11x^3 + 11x^3 - 121x^2 + 119x^2 - 1309x +$$
$$+ 909x - 9999 = 0,$$

$$x^3(x - 11) + 11x^2(x - 11) + 119x(x - 11) +$$
$$+ 909(x - 11) = 0,$$

$$(x - 11)(x^3 + 11x^2 + 119x + 909) = 0.$$

Получаем два уравнения:

$$x - 11 = 0 \text{ и } x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0.$$

Решая первое уравнение, найдем $x_1 = 11$ (вот этот корень и дает Бхаскара). Решая второе уравнение, найдем еще два корня, которые Бхаскара не рассматривал. Найдем эти корни:

$$x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0,$$
$$x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 18x + 101x + 909 = 0,$$
$$x^2(x + 9) + 2x(x + 9) + 101(x + 9) = 0,$$
$$(x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0.$$

Получаем еще два уравнения: $x+9=0$ и $x^2 + 2x + 101 = 0$. Решая первое, найдем $x_2 = -9$. Решая второе уравнение, найдем остальные два корня x_3 и x_4, которые будут мнимыми.

109. Решение Бхаскары. Если обозначить длину диаметра CD через d, основание сегмента AB положить равным a, а искомую высоту CE считать равной x (рис. 33), тогда

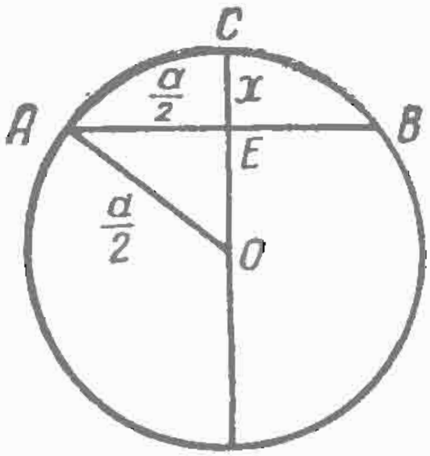


Рис. 33

$$\frac{a^2}{4} = x(d - x) = xd - x^2,$$

или

$$x^2 - xd + \frac{a^2}{4} = 0,$$

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - a^2}}{2},$$

$$x_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{2}, \quad x_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{2}.$$

110. Решение Бхаскары.

$$ax + by + c = xy,$$
$$c = xy - ax + by,$$
$$ab + c = xy - ax - by + ab,$$
$$ab + c = y(x - b) - a(x - b) = (x - b)(y - a).$$

Чтобы получить x и y в рациональных числах, надо положить $x = b + n$, тогда

$$y = a + \frac{ab + c}{n}.$$

111. Индийские математики пользовались еще одним арифметическим приемом, который они очень любили и широко применяли. Это — «правило обращения», или «правило инверсии». Суть его заключается в следующем: если нужно найти число, которое после ряда операций приводит к некоторому известному числу, то для этого необходимо над этим последним числом произвести в обратном порядке все обратные операции.

Решение данной задачи заключается в том, что, начиная с числа 2, производят обратные действия в обратном порядке:

$$(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196; \quad \sqrt{196} = 14;$$

$14 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} = 84$; $84 : 3 = 28$. Это и есть искомое число.

112. Эту задачу сам Бхаскара решал примерно так: если обозначим число всех обезьян через x, то задача сведется к решению уравнения:

$$\frac{x^2}{64} + 0 \cdot x + 12 = 0 \cdot x^2 + x + 0.$$

После приведения к одному знаменателю и упрощения получим

$$x^2-64x=-768.$$

Прибавляя к обеим частям квадрат 32, будем иметь

$$x^2-64x+32^2=-768+1024.$$

После извлечения квадратного корня получаем

$$x-32=16.$$

«В данном случае,— говорит Бхаскара,— отрицательные единицы первой части таковы, что единицы второй части меньше их, а потому последние можно считать и положительными и отрицательными, и получаем двойное значение неизвестного: 48 и 16».

113. Задача сводится к решению уравнения

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x.$$

Его корнями будут $x_1=50$ и $x_2=5$. В заключение Бхаскара делает такое замечание: «Так как $\frac{1}{5}\cdot 5-3$ есть число отрицательное, то годится только первое решение».

Но комментатор Бхаскары Кришна-Бхатта говорил: «Если бы по условию вопроса было сказано: $\frac{1}{5}$ часть стаи вычитается из 3, то второе решение, а не первое удовлетворяло бы условию».

114. Уравнение, удовлетворяющее условию задачи, следующее:

$$\frac{x}{2}+4\sqrt{x}+6+3+1=x.$$

После упрощения получаем

$$x^2-104x+400=0,$$

откуда

$$x = 52 \pm \sqrt{52^2-400}.$$

Следовательно,

$$x = 52 \pm 48.$$

Таким образом, имеется два корня: $x_1=100$ и $x_2=4$, причем непосредственной проверкой можно убедиться, что условию задачи удовлетворяет только первый корень.

115. Задача сводится к уравнению

$$x = 10\sqrt{x} + \frac{1}{8}x + 6.$$

Откуда получается квадратное уравнение

$$u^2 = 10u + \frac{1}{8}u^2 + 6,$$

где $u = \sqrt{x}$.

После небольших упрощений получим уравнение вида

$$7u^2 - 80u - 48 = 0.$$

Пользуясь формулой Бхаскары, получим

$$u = \frac{80+\sqrt{6400+1344}}{14},$$

или

$$u = \frac{80+88}{14} = \frac{168}{14} = 12.$$

Следовательно,

$$x_1 = u^2 = 144.$$

Второй корень x_2 Бхаскара не берет, так как он соответствует отрицательному значению u, кроме того, дает дробное значение для x, что не соответствует действительности (дробное число лебедей быть не может).

116. Если воспользоваться современной символикой, то индийцы решали уравнение Пеля так: сначала, пользуясь произвольными числами x_1, y_1, x_2, y_2, определяли b_1 и b_2 с таким расчетом, чтобы выполнялись равенства:

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2,$$

$$ax_2^2 + b_2 = y_2^2,$$

или

$$y_1^2 - ax_1^2 = b_1,$$

$$y_2^2 - ax_2^2 = b_2.$$

Путем умножения последних двух уравнений получали

$$(ax_1x_2 + y_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1) = b_1b_2.$$

Положив $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, а тогда и $b_2 = b_1$. последнее уравнение приводили к виду

$$a(2x_1y_1)^2 + b_1^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2.$$

Разделив на b_1^2, окончательно имели

$$a\left(\frac{2x_1y_1}{b_1}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}\right)^2,$$

Следовательно,

$$x = \frac{2x_1y_1}{b_1}; \quad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}.$$

Так индийские ученые получали решение в рациональных числах, удволетворяющих данному уравнению.

Давая x_1 и y_1 произвольные значения, они добивались иногда того, что решения были в целых числах.

117. Задача поясняется рис. 34, согласно которому тополь AB сломлен в точке C на высоте 3 футов, и верхушка D в новом положении отстоит от основания A на 4 фута. Требуется узнать высоту тополя.

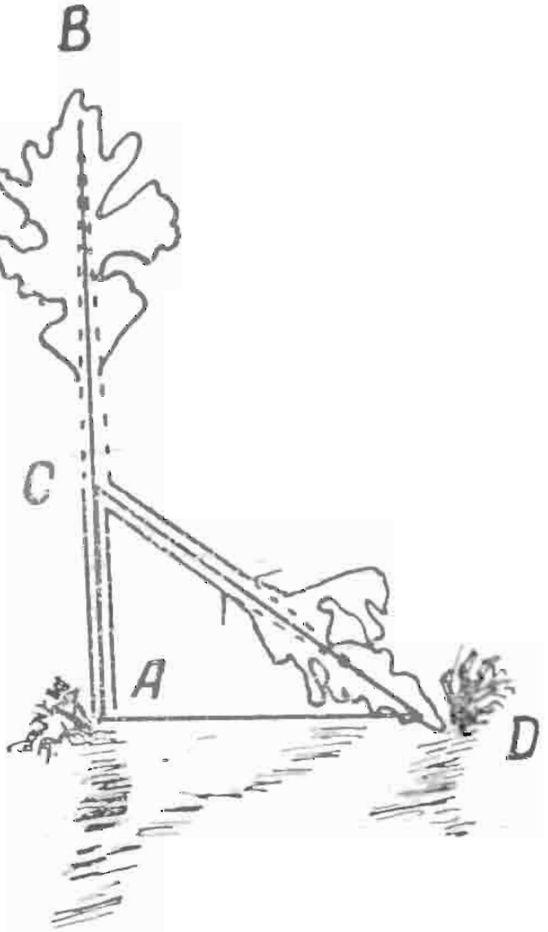


Рис. 34

Решение:

$$AB = AC + CD = AC + \sqrt{AC^2 + AD^2} =$$

$$= 3 + \sqrt{9+16} = 3 + 5 = 8 \text{ (футов)}.$$

118. Согласно рис. 35 задачу можно сформулировать так: «Цветок лотоса, основание которого C при отвесном положении стебля возвышалось над водою на $\frac{1}{2}$ фута, порывом ветра отклонился на 2 фута от прежнего положения (считая по поверхности во-

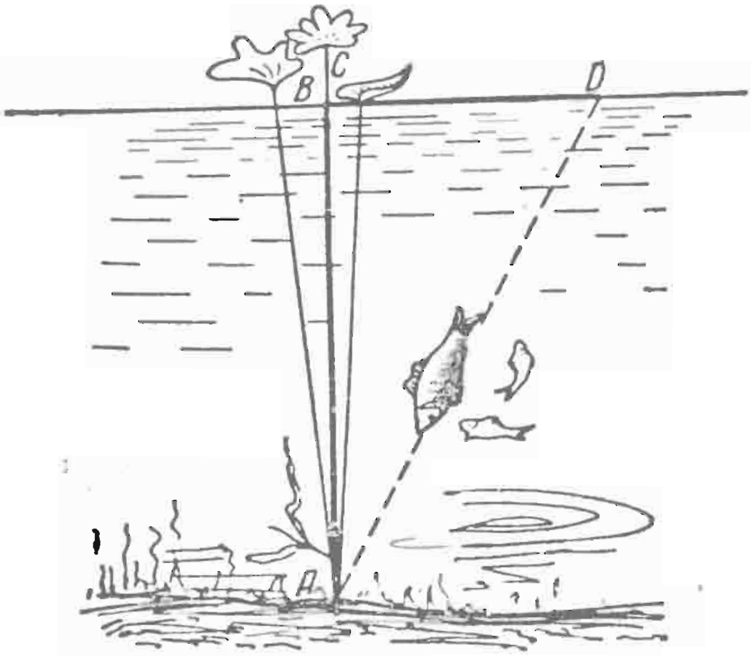


Рис. 35

ды); при этом вершина цветка оказалась на уровне воды. Определить глубину озера в этом месте, т. е. длину отрезка AB».

Решение:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+2^2,$$

или

$$x^2+x+\frac{1}{4}=x^2+4,$$

откуда

$$x+\frac{1}{4}=4.$$

Следовательно,

$$x = 3\frac{3}{4} \text{ (фута)}.$$

119. Обозначая через h длину перпендикуляра, через d — расстояние между основаниями палок, через x и y — отрезки на d (рис. 36), правило Бхаскары можно записать так:

$$h = \frac{mn}{m+n}, \quad x = \frac{dm}{m+n}, \quad y = \frac{dn}{m+n}.$$

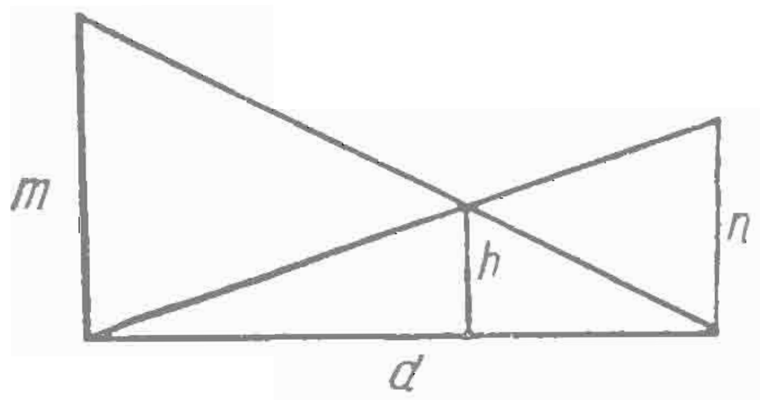


Рис. 36

120. Следуя «правилу обращения», получим:

$$\sqrt{4} = 2;\ 2+1=3;\ 3^2=9;\ 9-6=3;$$

$$3 \cdot 5 = 15;\ 15:3=5.$$

Пять и составляет искомое число.

«Правило обращения», которым пользовались индийские ученые, стало широко известно и за пределами Индии. Позднее им стали пользоваться сначала в странах арабского халифата, а потом и в Европе.

АРАБЫ

Под «арабской» культурой надо понимать главным образом культуру народов, покоренных арабами. В этом свете первое место в развитии математики в странах Арабского халифата (государства, завоеванные арабами) на протяжении более 500 лет, с IX по XVI век, неизменно принадлежало ученым народов Средней Азии и Закавказья и прежде всего таджикам, узбекам, азербайджанцам.

В области арифметики среднеазиатским ученым принадлежит усовершенствование позиционной шестидесятеричной системы счисления, в которой за основание принято число 60; открытие десятеричных дробей, а также распространение десятеричной позиционной системы счисления.

К крупнейшим среднеазиатским математикам, прославившим своими открытиями себя и свой народ, принадлежат узбекский ученый Аль-Хорезми (IX), таджикский ученый Абу-ль-Вафа (X), таджикский ученый-энциклопедист Авиценна (XI), узбекский математик Аль-Бируни (XI), таджикский ученый, математик, поэт и философ Омар Хайям (XII), азербайджанский ученый Насирэддин Туси (XIII), узбекский астроном и математик Улугбек (XV).

121. Задача решается довольно просто. Если меньшую часть обозначить через x, то бóльшая часть будет $x+5$. Согласно условию задачи $2x+5=10$. Откуда $x=5$. Следовательно, меньшая часть будет $2\frac{1}{2}$, а большая — $7\frac{1}{2}$.

Автором этой задачи является иранский математик XV века Бега-Эддин, составитель трактата «Сущность искусства счисления» («Колластал-Хисаб»), из которого и взята данная задача.

122. При помощи современных буквенных обозначений задача решается так. Пусть

$$M = 9n + 1,$$

$$M^2 = 81n^2 + 18n + 1 = (\text{число, кратное } 9) + 1.$$

Аналогично

$$N = 9n + 8,$$

$$N^2 = 81n^2 + 114n + 64 = (\text{число, кратное } 9) + 1.$$

Прежде чем решать эту задачу, учащимся сообщается тождество

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Автором данной задачи является великий таджикский ученый-энциклопедист Авиценна (Абу-Али Ибн-Сина), много сделавший для процветания науки. Родился Авиценна в бухарском селении Афшана. Уже в молодости стал видным ученым и овладел многими профессиями. Он был крупным астрономом, замечательным математиком, видным химиком и одаренным врачом-исследователем. Авиценна обобщил достижения своих современников и предшественников, а также ставил и разрешал новые математические проблемы (задачи). Большую роль для развития математической науки сыграли комментарии Авиценны к геометрическим сочинениям Евклида, известным под общим названием «Начала».

Авиценна во многих вопросах науки был новатором, за что подвергался гонениям. Его заключали в тюрьмы, книги его сжигались на кострах.

Историки рисуют Авиценну как человека, веровавшего в непобедимую силу разума, как борца против слепой веры в религиозные догмы и авторитет богословов. До нас дошло только одно математическое сочинение Авиценны, посвященное арифметике. Оно входит в состав его медицинского трактата «Извлечение», хранится в Лейденской библиотеке в Англии.

123. Сам Бега-Эддин решал эту задачу при помощи таких рассуждений: обозначим одно число через $10-x$, тогда другое число будет $10+x$, а их произведение будет

$$100 - x^2 = 96.$$

Откуда

$$x^2 = 4 \text{ и } x = 2.$$

Следовательно, бо́льшая часть составляет $10+2=12$, которую и должен получить Заид.

124. Решая эти квадратные уравнения обычным путем, получим:

1) $x = 8$;

2) $x = 6$;

3) $x_1=7;\ x_2=3;$

4) $x_1=24;\ x_2=-12;$

5) $x_1=9;\ x_2=\frac{9}{4};$

6) $x=12;\ x_2=-19.$

Эта задача взята из трактата «Хасиб ал-джебр ва-мукабала», выдающегося алгебраиста первой трети IX века Аль-Хорезми (Мухаммед бен-Муса аль-Хорезми), родом из Хорезма (ныне Хорезмская область Узбекской ССР, расположенная в низовьях Аму-Дарьи и занимающая основную часть Хорезмского оазиса).

Аль-Хорезми — автор многих математических трактатов, из которых наибольшую славу имеют два: один по алгебре, из которого взята предложенная задача, а другой — по арифметике.

Свой замечательный трактат по алгебре Аль-Хорезми написал около 830 года и предназначал его в качестве учебного руководства по алгебре для юношества.

Необходимо заметить, что термин «алгебра» как международное название науки произошел от слова «алджебр», т. е. от наименования математического трактата «Хасиб ал-джебр ва-мукабала».

Интересно отметить также, что слово «халгоритм», употребляемое ныне в смысле общего решения любой математической задачи, произошло от латинизированного имени «Аль-Хорезми».

125. Сам Ал-Қархи задачу решал так: на основании условия задачи

$$x(3+\sqrt{5})=1,$$

или

$$3x+x\sqrt{5}=1,$$

откуда

$$3x+\sqrt{5x^2}=1.$$

Далее, последнее уравнение можно представить так:

$$\sqrt{5x^2}=1-3x.$$

Возведя в квадрат, получим

$$5x^2=(1+3x)^2=1-6x+9x^2.$$

Откуда

$$4x^2-6x+1=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, будем иметь

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}.$$

За искомое число Ал-Қархи берет корень

$$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

Обычным приемом задача Ал-Қархи решается очень просто. Действительно, из искомого уравнения $x(3+\sqrt{5})=1$ сразу имеем

$$x=\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

Ал-Қархи (Абу Бекра Мухаммед Бен-Гассан ал-Қархи)— крупнейший среднеазиатский математик XI века. Он является автором многих математических трактатов, из которых до нас дошли только два: первый под названием «Все известное в математике» («Қафил фил Хисаб»), второй —«Аль-факри», обширное сочинение по алгебре, причем является продолжением первого. Второе сочинение озаглавлено «Аль-факри» в честь тогдашнего правителя, покровителя наук Факр аль-Мулька, умершего в 1017 году.

126. Сам Омар Хайям решал задачу так. Положим $\frac{1}{x}=z$, тогда данное уравнение примет вид:

$$z^2+2z=\frac{5}{4}.$$

Прибавляя к левой и правой частям по единице, получим

$$z^2+2z+1=\frac{9}{4},$$

или

$$(z+1)^2=\frac{9}{4}.$$

Откуда

$$z+1=\frac{3}{2}, \text{ или } z=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$x=2.$$

Автором решенной задачи является таджикский ученый, математик, поэт и философ Омар Хайям (1048—1122), еще в молодости проявивший особую склонность к математическим наукам. В своем крупнейшем сочинении «Алгебра» он подробно рассматривал решение линейных и квадратных уравнений, а также геометрическое построение корней кубического уравнения. Омар Хайям впервые дал способы решения кубических уравнений и положил начало приложению алгебры к геометрии.

Омар Хайям известен также своими знаменитыми четверостишиями (рубаи), которые полны неподдельного лиризма, глубокого социального и философского смысла.

127. Приводим решение самого Ал-Кархи. Из последнего уравнения

$$y=\frac{10}{x}.$$

Тогда из второго уравнения с учетом полученного соотношения

$$z=\frac{100}{x^3}.$$

Следовательно, первое уравнение данной системы примет вид

$$x^2+\frac{100}{x^2}=\frac{10\,000}{x^6},$$

или

$$x^8+100x^4-10\,000=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно x^4, получим

$$x^4 = -50 + \sqrt{12\,500}.$$

Следовательно,

$$x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{12\,500} - 50}}.$$

128. Прежде всего найдем высоту данного треугольника ABC (рис. 37).

$$BG = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Далее, из подобия треугольников ABC и DBE находим

$$\frac{x}{8 - x} = \frac{12}{8},$$

где x — сторона искомого квадрата.

Откуда $x = 4\frac{4}{5}$.

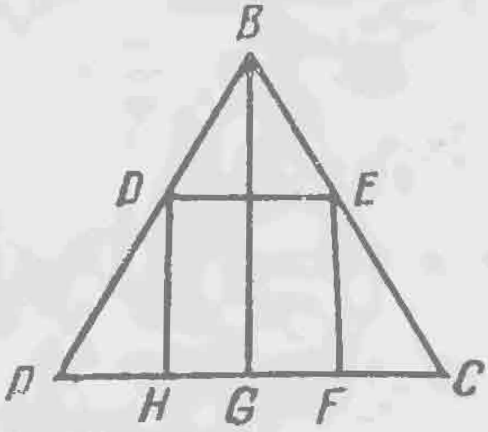


Рис. 37

129. Из прямоугольного треугольника BED (рис. 38) имеем:

$$(x - 3)^2 + 5^2 = x^2,$$

$$x^2 - 6x + 9 + 25 = x^2,$$

$$6x = 34,$$

$$3x = 17,$$

$$x = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3} \text{ (локтей).}$$

Ал-Каши (Джамшид Гияс-эддин ал-Каши) — крупнейший иранский математик, составитель двух знаменитых трактатов: «Ключа арифметики» и «Трактата об окружностях» (переведены на русский язык в 1956 году Б. А. Розенфельдом под редакцией В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича). Даты рождения и смерти точно неизвестны. Полагают, что он родился в третьей или начале последней четверти XIV века. Он был не только математиком, но и видным врачом. По свидетельству историков, руководил крупнейшей обсерваторией в Самарканде, построенной узбекским астрономом Улугбеком (1394—1449), внуком Тимура.

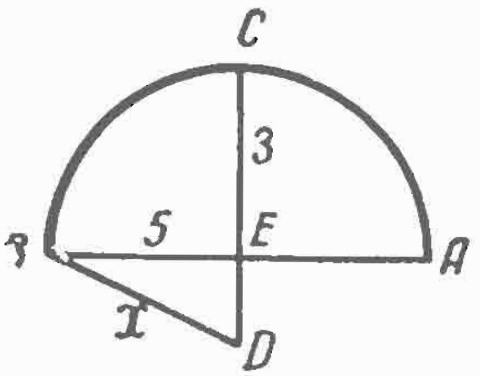


Рис. 38

В «Трактате об окружностях» Ал-Каши дает приближенное вычисление числа π с 17 верными десятичными знаками, поражая современных ученых методикой расчетов, проводимых с чрезвычайной экономностью и с небывалой до тех пор тщательностью.

130. Обозначим ширину прямоугольника через x, тогда длина его будет $2x$, а площадь — $2x^2$, периметр — $6x$.

Согласно условию задачи

$$2x^2 = 6x,$$

а следовательно, $x = 3$ и искомая площадь равняется 18 кв. единицам.

131. Из рассмотрения треугольников (рис. 39) находим

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R},$$

$$x(R-r) = rh, \ x = \frac{rh}{R-r}.$$

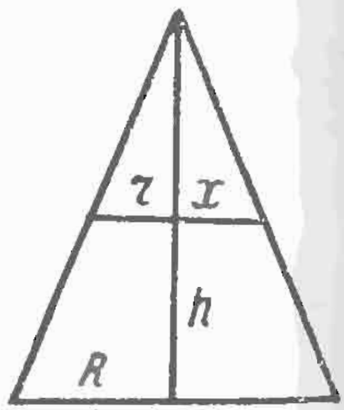


Рис. 39

Следовательно,

$$x + h = \frac{Rh}{R-r}.$$

132. Решение дается «методом обращения»:

$$50:10=5;\ 5\cdot 5=25;\ 25-3=22;\ 22:2=11;$$

$11-2=9$; $\sqrt{9}=3$, что и будет служить ответом.

133. Эту задачу Аль-Хорезми решал по формуле «фальшивого правила», проводя следующие рассуждения. Пусть искомое число равняется 12, тогда остаток будет равен 5, вместо 8, т. е. на 3 меньше. Если же положить число равным 24, тогда остаток будет равен 10, вместо 8, т. е. на 2 больше. Тогда

$$\frac{3\cdot 24+12\cdot 2}{3+2}=19\frac{1}{5}.$$

134. Решение дается «фальшивым правилом».

Ученые Арабского халифата еще в XIII веке «фальшивому правилу» придали удобное механическое истолкование под названием «метода чашек весов». Так, арабский математик Ибн-Албанна (1222) в своем трактате «Талкис» писал: «Метод чашек весов — геометрический и состоит в том, что ты берешь весы указанной формы и кладешь известную величину над точкой опоры. На одну из чашек кладешь произвольное число, прибавляешь к нему, что дано тебе прибавить (или вычесть). Полученный результат сравни с тем, что находится над точкой опоры. Если ты попал правильно, то чашка весов дает известную величину. Если же ты не попал, заметь погрешность над чашкой, если результат велик, и под чашкой, если результат мал. Затем положи на другую чашку другое, произвольно выбранное число, и поступай подобным же образом. После этого умножь погрешность каждой из чашек на число, положенное на другую чашку. Если обе погрешности положительны или обе отрицательны, вычитай меньшую из большей, а также меньшее произведение из большего и раздели разность произведений на разность погрешностей. Если же одна погрешность положительна, а другая отрицательна, раздели сумму произведений на сумму погрешностей».

Само решение приводится в таком виде. Положим вместо x какое-нибудь произвольное число, хотя бы 6 (первая чашка). Тогда согласно условию задачи получим

$$7\cdot6+6\cdot6=78.$$

Сравнивая полученное число с данным (25), найдем погрешность

$$78-25=53.$$

Положим теперь вместо x какое-нибудь другое произвольное число, например 1 (левая чашка). Тогда

$$7\cdot1+6\cdot1=13,$$

а вторая погрешность будет

$$13-25=-12.$$

Применяя к найденным числовым значениям правило, сформулированное Ибн-Албанной, получим

$$x=\frac{53\cdot1+12\cdot6}{53+12}=1\frac{12}{13},$$

что и составляет нужный ответ.

135. Эту задачу в своем арифметическом трактате «Раскрытие тайн науки Габар» Аль-Кальсади решает «методом чашек весов».

Пусть $x=12$ (первая чашка), тогда первая погрешность будет 14. Если же $x=14$ (левая чашка), то вторая погрешность будет 7. Следовательно,

$$x=\frac{14\cdot24-7\cdot12}{14-7}=36,$$

что и составляет окончательный результат.

РОССИЯ

136. Составитель рукописи решает задачу так: за 12 лет первый плотник построит 12 дворов, второй — 6 третий — 4 и четвертый — 3. Следовательно, за 12 лет все они вместе построят 25 дворов. Таким образом, все четыре плотника вместе один двор построят за $175\,\frac{1}{5}$ дня.

$$\frac{365\cdot 12}{25}=175\,\frac{1}{2}\,(\text{дня}).$$

Рассмотренная задача взята из старинной русской арифметической рукописи XVIII века, состоящей из арифметических правил, подкрепленных многочисленными примерами и задачами. Рукопись состоит из следующих статей:

1) «Статья торговая» — содержит большое количество примеров на вычислеиие цены товара, прибыли от продажи и т. д.

2) «Статья о нечести во всяких овощах и товарах» — включает задачи на правила смешения; в ней рассматриваются задачи на вычисление цены смесей и на расчеты сплавов золота, серебра и меди.

3) «Статья меновая в торгу»— посвящена задачам на определение количества товара известной стоимости, подлежащего обману на известное количество другого товара, стоимость которого также известна.

4) «Статья складная торговая»— заключает в себе задачи на так называемое «правило товарищества», которое в настоящее время в школах не изучается.

В рукописи много места отведено математическим развлечениям из занимательных примеров и задач.

137. Эта задача взята из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого, впервые напечатанной в 1703 году. При решении этой задачи надо иметь в виду, что алтын равен 3 копейкам, а деньга — $\frac{1}{2}$ копейки.

Приводим решение самого Л. Ф. Магницкого: «Придет: старых 100, а молодых 12, а изобрети сице.

46 копеек за старого,

$\frac{30}{16}$ за молодого.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}112\\30\end{array}\\ \hline 3360\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{r}4960\\3360\end{array}\\ \hline 1600\end{array}$$

Вся цена

Бери через 16 : 100 толико старых».

Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) был преподавателем Математико-навигацкой (мореходной) школы, организованной Петром I, согласно его указу от 14 января 1701 года. Настоящая фамилия Магницкого другая. Магницким он стал называться по приказанию Петра I, который был восхищен его знаниями, притягивавшими к себе всех любознательных подобно магниту.

Арифметику Магницкий определял в следующих словах:

«Арифметика, практика или деятельная. Что есть арифметика? Арифметика, или числительница, есть художество честное, независтное и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена являвшихся изряднейших арифметиков изобретенное и изложенное».

Само сочинение называлось так: «Арифметика, сиречь [то есть] наука числительная, с разных диалектов на словянский язык переведенная и во едино собрана и на две книги разделена. Сочинися сия книга через труды Леонтия Магницкого».

«Арифметика» Магницкого — это первый учебник на Руси, где рассматривается индийская система нумерации, известная в литературе под названием арабской. Учебник содержит много задач и примеров, причем ряд задач дается в занимательной форме. Магницкий, стремясь придать арифметике увлекательный характер, пользуется стихами и символическими (иносказательными) рисунками.

Например, книга начинается символической картинкой, на которой изображен храм мудрости. На высоком пьедестале, к которому ведут ступени из арифметических действий, сидит сама ученая мудрость в виде женщины в венце и с большим ключом ко всем наукам в правой руке.

Символический рисунок из «Арифметики» Магницкого

Хотя учебник и называется «Арифметикой», его можно рассматривать как энциклопедию (справочную книгу) по элементарной математике. В этом учебнике, кроме арифметики, разбираются вопросы из алгебры, геодезии (наука об измерении земли) и навигации (наука о мореплавании).

Высокую оценку «Арифметике» Магницкого дал в свое время великий русский ученый М. В. Ломоносов (1711—1765), который называл ее «вратами учености» и знал наизусть.

«Арифметика» Магницкого как учебник была в школьном употреблении почти до середины XVIII века.

138. Леонард Эйлер (1707—1783) — друг М. В. Ломоносова, крупнейший математик всех времен.

Родился Эйлер в небольшом швейцарском городке Базеле. Первоначальное образование получил у своего отца. Свои познания в области математики совершенствовал под руководством крупнейшего швейцарского математика Иоганна Бернулли. По поводу этих занятий в своей автобиографии Эйлер говорил следующее:

«Хотя в частных уроках он мне отказал наотрез ввиду своей занятости, однако он дал мне весьма благоприятный совет, состоящий в том, чтобы я сам принимался за некоторые трудные математические книги и штудировал их со всем усердием, а если я встречу какое-нибудь препятствие или затруднение, он позволял мне свободно приходить к нему каждую субботу пополудни и любезно разъяснял мне все трудности. Это настолько достигло желательной цели, что когда он устранял передо мной одно препятствие, тотчас же исчезали десять других, а это, разумеется, наилучший метод, чтобы добиться счастливых успехов в математических науках» (из биографии Эйлера, написанной сыном под диктовку отца в 1767 году. «Записки Академии наук», т. 6, 1865, стр. 75—76).

В 19 лет Эйлер написал диссертацию об осиастке кораблей, за что был премирован Парижской Академией наук. В 20 лет он был адъюнктом Петербургской Академии наук, а в 23 года—профессором кафедры физики. Когда ему исполнилось 26 лет, он стал членом Петербургской Академии наук.

Эйлер отличался исключительной работоспособностью. Его вычислительные способности заменяли счетную машину. Так, в 1735 году он в три дня выполнил большую вычислительную работу, которая была посильна только большому коллективу квалифицированных счетных работников и то в течение нескольких месяцев. Зато от перенапряжения он ослеп на один глаз

Всего Эйлером написано 865 оригинальных работ, что составляет несколько десятков томов. Научные интересы Эйлера весьма разнообразны. Он сделал замечательные открытия буквально по всем разделам элементарной и вычислительной математики, в области механики и астрономии. Эйлер — автор замечательного руководства по алгебре «Полное введение в алгебру» (1770), которое явилось образцом для составления современных учебников по этому предмету.

Эйлер прожил в России в общей сложности более 30 лет. Умер в Петербурге 18 сентября 1783 года.

139. Эту задачу Магницкий решает «фальшивым правилом», которому он в своей «Арифметике» отводит особое место.

Предположим, во-первых, что учеников было 24 (первое предположение). Тогда согласно условию задачи сосчитаем, что составляет столько, да полстолько, да четверть столько, да еще один, и получится всего учеников

$$24+24+12+6+1=67.$$

По условию же задачи учеников должно быть 100, следовательно, их недостает $100-67=33$ (первая погрешность).

Предположим теперь, во-вторых, что учеников было 32 (второе предположение), тогда в итоге получим

$$32+32+16+8+1=89,$$

а до 100 недостает 11 (вторая погрешность). Далее по формуле получим

$$\frac{33\cdot 32-24\cdot 11}{33-11}=36 \text{ (учеников)}.$$

140. Задача заимствована из арифметики Румовского (1760), где она решена «фальшивым правилом».

141—142. В первой половине XVII века петербургский академик Гольдбах (1690—1764) в письме к своему другу, петербургскому академику Эйлеру, высказал следующее предложение, носящее название «проблемы Гольдбаха»: *доказать, что всякое нечетное число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел.*

Вот что писал по этому поводу сам Гольдбах: «Вот моя задача тоже. Возьмем наудачу какое-нибудь нечетное число. Ну, 77. Его можно разбить на три слагаемых: $77=53+17+7$, и все эти три слагаемые снова простые числа. Возьмем другое, опять совсем наудачу,— 461, и тут $461=449+7+5$, и эти три слагаемые снова простые числа. А можно то же число разбить на три простых слагаемых и другим способом: $257+199+5$. И так далее. Теперь вполне для меня ясно: всякое нечетное число, большее 5, можно разбить на сумму трех слагаемых, которые являются простыми числами. Но как доказать это? Любая проба дает такой результат, но ведь никакой человеческой жизни не хватит взять да перебрать подряд все нечетные числа. Нужно какое-то общее доказательство, а не такие пробы».

Эйлер ответил, что это предложение совершенно правильное, но строгого доказательства этому предложению он дать не мог. Со своей стороны Эйлер высказал новое предложение («проблема Эйлера»): *каждое четное число, начиная с четырех, можно разбить на сумму двух простых чисел.* Но это утверждение он тоже доказать не мог.

Заметим, что если бы удалось решить проблему Эйлера, то из нее, как очевидное следствие, вытекала бы справедливость проблемы Гольдбаха. Действительно, любое нечетное число, большее 5, можно представить в виде $2N+1=3+$ $+2(N-1)$, где $2(N-1)\geqslant 4$. Если только проблема Эйлера верна, то четное число $2(N-1)$ разобьется на сумму двух простых чисел. Но тогда нечетное число $2N+1$ разобьется на сумму трех простых слагаемых, и проблема Гольдбаха будет выполняться для всякого нечетного числа, начиная с 7.

Но обратное утверждение, оказыватся, не выполняется, т. е. из решения проблемы Гольдбаха нельзя сделать заключения о справедливости утверждения Эйлера. Таким образом, проблема Эйлера значительно труднее проблемы Гольдбаха, что позднее и подтвердилось.

Около двух столетий проблема Гольдбаха оставалась нерешенной, несмотря на упорное стремление лучших математиков этих времен. Создалось даже впечатление о бессилии человеческого ума в разрешении указанной проблемы.

Только в 1930 году молодому советскому ученому Л. Г. Шнирельману (1905—1938) удалось указать верный путь подхода к решению проблемы Гольдбаха. Он доказал «теорему Шнирельмана»: *Существует постоянная k, такая, что каждое натуральное число, большее, чем 1, может быть представлено в виде суммы не более k простых чисел т. е. для любого натурального* $N(N>1)$

$$N = p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

где p — либо простые числа, либо нули.

Если удастся доказать, что $k=3$, то проблема Гольдбаха будет доказана. Усилиями многих математиков постоянная k была доведена до 67, а в настоящее время до 20. До нужной тройки остается еще далеко!

В 1937 году в ученом мире произошло событие чрезвычайной важности, совершенно неожиданное для всех математиков мира. Наш советский ученый Герой Социалистического Труда академик И. М. Виноградов (род. 1891) доказал проблему Гольдбаха для достаточно больших нечетных чисел: *любое нечетное число, начиная с некоторого достаточно большого, есть сумма трех простых чисел.*

Другими словами, среди натуральных чисел существует такое достаточно большое число, за которым всякое нечетное число является суммой трех простых чисел.

Проблему Гольдбаха в указанном выше смысле И. М. Виноградов доказал очень сложным путем, пользуясь очень тонким аппаратом современной математики.

И. М. Виноградов доказал теорему Гольдбаха для достаточно больших нечетных чисел, т. е. для нечетных чисел, больших некоторого большого числа N_0. Какое значение N_0? На этот вопрос ответил советский математик К. Г. Бороздкин, который доказал, что

$$N_0 \geqslant e^{e^{16,038}},$$

где e — основание натуральных логарифмов, причем $e=2,7182\ldots$

Чтобы доказать теорему Гольдбаха полностью, надо значительно снизить найденное К. Г. Бороздкиным число и тогда непосредственно проверить все меньшие числа. Непосредственную проверку проблемы Гольдбаха проводили Г. Кантор, Абри, Хауснер и др. Проверка показала, что для всех натуральных чисел до 9 000 000 проблема Гольдбаха для четных и нечетных чисел верна.

Метод Виноградова, с помощью которого он решил проблему Гольдбаха, оказался недостаточным для решения проблемы Эйлера о представлении четных чисел в виде суммы двух простых чисел.

Проблема Эйлера остается не решенной до настоящего времени. Не решена до сих пор и проблема Гольдбаха для четных натуральных чисел (сам Гольдбах такую задачу не ставил), хотя из теоремы Виноградова следует, что всякое достаточно большое четное число есть сумма четырех простых чисел (установите самостоятельно).

143. Эту задачу сформулировал в 1759 году Леонард Эйлер и тогда же решил ее, доказав, что пройти последовательно все семь кенигсбергских мостов по одному разу невозможно. Условия задачи Эйлера о кенигсбергских мостах равносильны требованию одним росчерком вычертить фигуру (рис. 40). Советуем убедиться в этом самим.

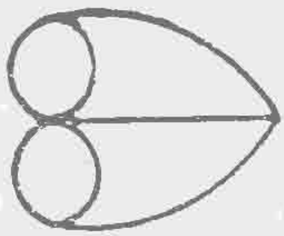


Рис. 40

144. Наиболее остроумный способ решения этой задачи таков. Предположим, что вторая крестьянка имела в m раз больше яиц, чем первая. Поскольку обе крестьянки выручили одинаковые суммы, то первая крестьянка должна продавать свои яйца дороже, чем вторая, в m раз. Если бы перед началом торговли они поменялись новым количеством яиц, то первая крестьянка, имея яиц в m раз больше и продавая их в m раз дороже, выручила бы в m^2 раз больше, чем вторая. Откуда

$$m^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}.$$

Следовательно,

$$m = \frac{3}{2}.$$

Разделив 100 яиц в отношении 3:2, находим, что первая крестьянка имела 40, а вторая—60 яиц.

Эту задачу можно решить и алгебраическим путем, для чего стоит только обозначить через x число яиц у первой крестьянки. Тогда у второй крестьянки число яиц будет $100-x$. Откуда первая крестьянка продала свои яйца по цене

$$\frac{15}{100-x} \text{ (крейцеров)},$$

а вторая — по $6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}$ (крейцеров).

Так как выручка одинакова, то

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x},$$

или

$$x^2 + 160x - 8000 = 0.$$

Откуда $x_1 = 40$, $x_2 = -200$. Следовательно, у первой крестьянки было 40 яиц, у второй — 60.

146. Сам Л. Н. Толстой, по свидетельству проф. А. В. Цингера, решал задачу при помощи следующих рассуждений: «Если большой луг полдня косила вся артель и полдня пол-артели, то ясно, что в полдня пол-артели скашивает $\frac{1}{3}$ луга. Следовательно, на малом лугу остался нескошенным участок в $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Если один косец в день скашивает $\frac{1}{6}$ луга, а скошено было $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, то косцов было 8».

«Толстой,— вспоминал А. В. Цингер,— всю жизнь любивший фокусные, не слишком хитрые задачи, эту задачу знал от моего отца еще с молодых лет. Когда об этой задаче пришлось беседовать мне с Толстым — уже стариком, его собственно восхитило то, что задача делается гораздо яснее и прозрачнее, если при решении пользоваться самым примитивным чертежом (рис. 41).

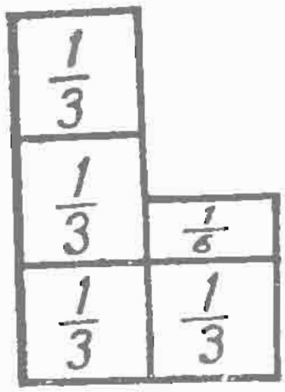


Рис. 41

Ниже приводим алгебраическое решение задачи. Пусть x — число косцов артели, y — размер участка, скашиваемого одним косцом за 1 день. Заметим, что y — вспомогательное переменное — вводится исключительно для облегчения решения задачи, от него потом освобождаются. Далее выразим через x и y площади большого и малого луга. Площадь большого луга равняется $\frac{xy}{2}+\frac{xy}{4}=\frac{3xy}{4}$. Площадь малого луга — $\frac{xy}{4}+y=\frac{xy+4y}{4}$. Из того, что большой луг по условию больше малого в 2 раза, будем иметь

$$\frac{3xy}{4}:\frac{xy+4y}{4}=2,$$

или

$$\frac{3xy}{xy+4y}=2.$$

После сокращения на y получим

$$\frac{3x}{x+4}=2, \text{ откуда } x=8.$$

147. Об этой задаче упоминается в дневнике секретаря Л. Н. Толстого Валентина Булгакова «Л. Н. Толстой в последний год жизни» (1957, стр. 402): «Очень увлекается сегодня привезенной Татьяной Львовной из Кочетов задачей «О мухе и пауке», всем ее задает и спрашивает решение... Надо сказать, что задача эта решается не сразу и не просто».

Пусть длина комнаты 7 аршин, ширина — 6, высота — 4. Предположим, что муха сидит на большой стене на расстоянии двух аршин от угла, а паук — на противоположной стене — на расстоянии одного аршина от ближайшего к нему угла (рис. 42). Эту задачу лучше всего решать графически. Сделаем развертку комнаты (рис. 43) и соединим отрезками прямой точку, где сидит паук, с точкой, где сидит муха. Ясно, что решений будет три по числу различных разверток. Действительно, паук может ползти или только по стенам, или только по стенам и потолку, или по стенам и полу. Поскольку расстояния от мухи до пола и от паука до потолка одинаковы, то пути через пол и потолок равноценны. Следовательно, для этих двух путей и берется общая развертка (рис. 43).

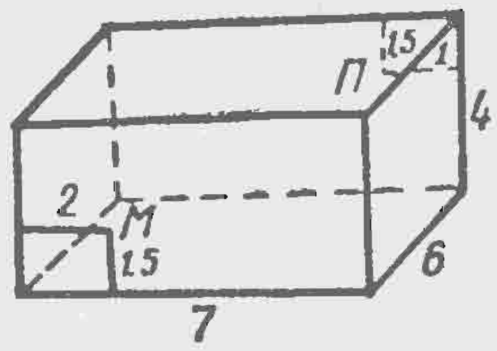


Рис. 42

Пользуясь разверткой и применяя теорему Пифагора, получим:

$$M\pi_1 = \sqrt{197} \approx 14{,}04;$$
$$M\pi_2 = \sqrt{116} \approx 10{,}77;$$
$$M\pi_3 = \sqrt{145} \approx 12{,}04.$$

Следовательно, из трех возможных решений наименьшее *будет 10,77 аршина, что и будет служить* ответом задачи.

154. Скупой купец действительно проторговался. Он за 24 подковных гвоздя должен был заплатить $1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{23}$ полушек, что составит 41 787 руб. $3\frac{3}{4}$ коп.!

165. Вопрос сводится к решению уравнения

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{x-1}=65\,535,$$

или

$$\frac{2^{x-1}\cdot 2-1}{2-1}=65\,535.$$

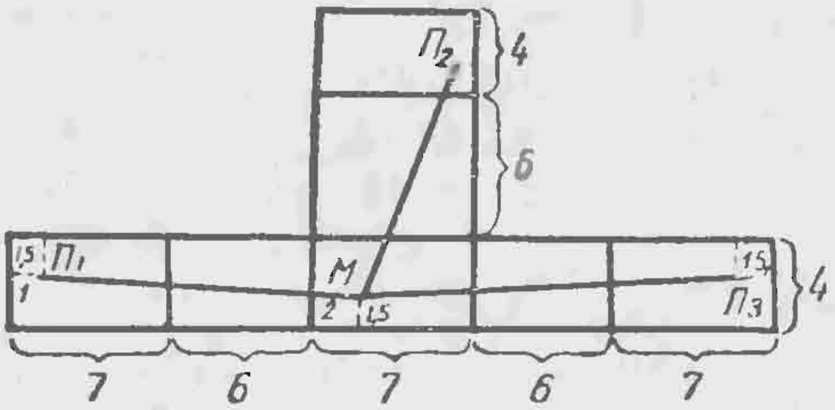


Рис. 43

Откуда после некоторых упрощений

$$2^x-1=65\,535,$$

или

$$2^x=65\,536.$$

Путем испытаний находим $x=16$.

166. Приведенное выражение, составляющее «задачу Рачинского», запечатлено на классной доске в картине художника Богданова-Бельского «Трудная задача». На картине также изображен Рачинский с группой учеников, решающих вышеприведенный устный пример.

Устное решение примера основано на свойстве:

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

Так как

$$10^2+11^2+12^2=100+121+144=365,$$

то

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=\frac{2\cdot 365}{365}=2.$$

Любопытно заметить, что С. А. Рачинский работал одно время в университете в качестве профессора естественных наук. Затем он покинул университетскую кафедру и сделался рядовым учителем сельской школы, где уделял большое внимание решению нестандартных задач и устному счету.

168. Решение этой задачи очень простое. Человек (муж) выпивает в день $\frac{1}{14}$ кади, а вместе с женой — $\frac{1}{10}$ кади. Следовательно, в день жена выпивает $\frac{1}{10}-\frac{1}{14}=$ $=\frac{1}{35}$ кади. Таким образом, всю кадь жена выпивает за 35 дней.

169. За год работник должен был получить 12 рублей и кафтан, т. е. за каждый проработанный месяц ему должны начислять 1 рубль и $\frac{1}{12}$ стоимости кафтана. За проработанные 7 месяцев работник должен был бы получить 7 рублей и $\frac{7}{12}$ стоимости кафтана, а получил 5 рублей и кафтан. Следовательно, $\frac{5}{12}$ стоимости кафтана соответствуют 2 рублям. Следовательно, цена кафтана была

$$2:\frac{5}{12}=\frac{2\cdot 12}{5}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}\ \text{(рубля)}.$$

170. Сформулированная выше задача взята из трактата Паскаля, носящего название «Особенности делимости чисел».

Паскаль решает эту задачу при помощи следующих рассуждений. «Пусть,— говорит он,— при делении 10 на число A получается остаток r_1, при делении $10r_1$ на A — остаток r_2, при делении $10r_2$ на A — остаток r_3 и т. д. Если данное число, например, четырехзначное, будет иметь вид $MCDU$, где M, C, D и U — цифры тысяч, сотен, десятков и единиц, то общий признак делимости этого числа на A следующий.

Если $U+Dr_1+Cr_2+Mr_3$ делится на A, то на A делится и число $MCDU$.

В самом деле, пусть

$$10 = Aq_1 + r_1,$$

$$10r_1 = Aq_2 + r_2,$$

$$10r_2 = Aq_3 + r_3.$$

Тогда

$$U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3 = U + D(10 - Aq_1) +$$

$$+ C(10r_1 - Aq_2) + M(10r_2 - Aq_3) =$$

$$= U + 10D + 10C\,(10 - Aq_1) +$$

$$+ 10M\,(10r_1 - Aq_2) - \text{кр.}A =$$

$$= U + 10D + 100C + 100M(10 - Aq_1) - \text{кр.}\,A =$$

$$= U + 10D + 100C + 1000M - \text{кр.}\,A.$$

Что и нужно было установить!»

Блез Паскаль (1623—1662) — знаменитый французский математик и физик, обнаруживший блестящие математические дарования уже в раннем возрасте. Шестнадцати лет он делает очень важное открытие в геометрии, которое принесло ему мировую известность. Восемнадцати лет Паскаль сконструировал собственный арифмометр. В дальнейшем Паскаль с успехом занимался вопросами гидростатики и открыл знаменитый закон, носящий его имя, о давлении жидкости на стенки сосуда. Паскаль успешно занимался и так называемой «высшей математикой», изучаемой в высших учебных заведениях. Вместе с французским математиком Ферма он является основоположником современной теории вероятностей, изучающей с математической точки зрения случайные события в настоящем и будущем.

171. Решается задача при помощи следующих рассуждений: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$ составляет 26 000. Откуда $\frac{1}{12}$ составляет 2000, следовательно, первый даст 12 000, второй — 8000 и третий — 6000 ливров.

Французский математик Жак Озанам (1640—1717) — составитель четырехтомного учебного пособия «Курс математики» и сборника задач, из которого и взята данная выше задача.

172.

$$\begin{array}{l|l}
y^4-3\frac{1}{2}a^2y^2+3a^3y-\frac{1}{2}a^4 & y^2-2ay+a^2 \\ \cline{2-2}
-\underline{y^4\pm 2ay^3\mp a^2y_2} & y^2+2ay-\frac{a^2}{2} \\
\quad 2ay^3-4\frac{1}{2}a^2y^2+3a^3y & \\
-\underline{2ay^3\pm 4a^2y^2\mp 2a^3y} & \\
\quad \frac{1}{2}a^2y^2+a^3y-\frac{1}{2}a^4 & \\
-\underline{\frac{1}{2}a^2y^2\mp a^3y\pm\frac{1}{2}a^4} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

Эта задача взята из «Всеобщей арифметики» Исаака Ньютона (1642—1727), величайшего английского математика и физика всех времен.

Исаак Ньютон был сыном английского арендатора, умершего еще до рождения сына. Он рано полюбил учебу и особенно самостоятельные занятия и изобретения. Еще школьником он изобрел солнечные часы. Учился в Кембриджском университете, где поражал учителей своими математическими способностями. Со временем он стал профессором этого университета. С 1703 года был президентом Лондонского королевского общества, которое объединяло крупнейших ученых того времени.

Исаак Ньютон является автором замечательного трактата «Математические начала натуральной философии» (1687), где изложены знаменитые законы Ньютона в области механики и ряд других открытий.

Трактат «Всеобщая арифметика» был написан Ньютоном в 1707 году, алгебраический метод нашел в нем современную символику и изложение.

На памятнике Ньютону, поставленном на его могиле в Лондоне, имеется такая надпись:

«Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, который почти божественной силой своей впервые объяснил с помощью своего математического метода движение и форму планет, приливы и отливы океана. Он первый исследовал разнообразие световых лучей и проистекающую отсюда особенность цветов, каких до того никто даже не подозревал... Пусть смертные радуются, что в их среде жило такое украшение человечества».

173. Условия задачи приводят к системе

$$\begin{cases} x+7=5(y-7); \\ y+5=7(x-5). \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x=2\frac{2}{17}, \quad y=9\frac{14}{17}.$$

Следовательно, первый имел $2\frac{2}{17}$ динария, а второй — $8\frac{14}{17}$ динария.

Задача взята из «Книги абака» итальянского математика рубежа XII и XIII веков Леонардо Пизанского (Фибоначчи), который родился около 1180 года в городе Пизе (откуда и название Пизанский).

Леонардо Пизанский написал несколько сочинений на математическом языке, из которых самое замечательное — «Книга абака», опубликованное в 1202 году.

В предисловии к этому сочинению он писал: «Отец мой родом из Пизы, служил синдиком в таможне в Бужи, в Африке, куда он меня взял с собою для изучения искусства считать. Удивительное искусство считать при помощи только девяти индусских знаков мне так понравилось, что я непременно захотел познакомиться с тем, что известно об этом искусстве в Египте, Греции, Сирии, Сицилии и Провансе. Объехав все эти страны, я убедился, что индусская система счисления самая совершенная и превосходит алгоритм и метод Пифагора. Изучив основательно эту систему и все к ней относящееся, прибавив свои собственные исследования и почерпнутое из «Начал» Евклида, я решил написать это сочинение».

«Книга абака» представляет собой трактат по арифметике и алгебре, в котором дан свод арифметических и алгебраических знаний того времени, и состоит из 15 глав.

Решая задачу о капиталах нескольких лиц, предложенную придворным философом, Леонардо Пизанский впервые в Европе высказал идею отрицательного числа в виде долга.

Величайшая заслуга Леонардо Пизанского перед наукой заключается в том, что он первый познакомил европейских ученых с алгеброй и с индийской системой счисления.

174. Эту задачу сам Региомонтан решал двумя способами.

Первый способ. Уравнение преобразуется к виду

$$10x = x^2 + \frac{100}{27}.$$

Откуда

$$x = 5 - \sqrt{21\frac{8}{27}}.$$

Второй способ. Положив $\frac{x}{10-x} = y$, получим

$$y + \frac{1}{y} = 25.$$

Откуда

$$y = \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}.$$

Теперь без особого труда находится искомый корень x. Необходимо заметить, что в обоих случаях Региомонтан берет корни со знаком минус.

Региомонтан (1436—1476) — известный немецкий ученый (настоящие имя и фамилия его Иоганн Мюллер).

Региомонтан знаменит своими работами по тригонометрии и переводами классических трактатов древнегреческих ученых. Особенно большой известностью пользуется его трактат «О треугольниках всех видов», опубликованный после его смерти в 1533 году. В этом трактате Региомонтан впервые в Европе рассматривал тригонометрию как самостоятельную науку, обособленную от астрономии.

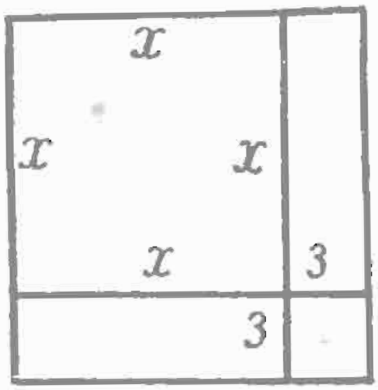


Рис. 44

175. Сам Кардан решал эту задачу таким образом. Пользуясь чертежом (рис. 44), имеем

$$x^2 + 2\cdot 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2.$$

Согласно условию

$$x^2 + 6x = 91.$$

Из этих двух уравнений вытекает

$$(x+3)^2 = 91 + 9 = 100.$$

Откуда $x+3=10$. Следовательно, $x=7$.

(Рекомендуется эту задачу решить обычным приемом по формуле квадратного уравнения.)

Знаменитый итальянский математик Джеронимо Кардан (1501—1576) — составитель научного трактата «Великое искусство, или об алгебраических правилах», изданного им в 1545 году. В трактате впервые была опубликована формула решения кубического уравнения, заимствованная им у другого итальянского математика Тарталья (ок. 1499—1557). В этом же сочинении Кардан излагает также решение уравнения 4-й степени, которое впервые дал его ученик Феррари (1522—1565).

Большой заслугой Кардана является то, что он ввел в алгебру действия над комплексными числами, изучаемые в школах.

Кроме математики, Кардан много занимался медициной, которую он даже преподавал, и философией. В своих философских произведениях Кардан призывал к знанию, основанному на опыте.

176. Решение Виета заключалось в следующем. Вводя подстановку $x = y + z$, данное уравнение он сводил к следующему:

$$y^2 + y(2z + p) + z^2 + pz + q = 0.$$

Пользуясь произвольностью z, положим, что коэффициент при y первой степени равен нулю, т. е. $2z + p = 0$, откуда

$$z = -\frac{p}{2}.$$

Тогда

$$z^2 + pz + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4}.$$

Имея полученное в виду, преобразуем уравнение:

$$y^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0,$$

или

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Откуда

$$y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Следовательно,

$$x = y + z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

177. Предположим, что лошадь куплена за x пистолей, тогда при продаже некто потерял $\frac{x^2}{100}$ пистолей. Следовательно, согласно условию задачи

$$x - \frac{x^2}{100} = 24.$$

Решая полученное квадратное уравнение, получим два результата:

$$x_1 = 40 \text{ и } x_2 = 60.$$

Таким образом, некто купил лошадь за 40 или 60 пистолей.

Решенная задача составлена французским математиком Этьеном Безу (1730—1783). Его перу принадлежат исследования по общей теории алгебраических уравнений (1779), а также известная теорема Безу о делимости алгебраического многочлена на разность $x-a$, где a — корень многочлена. Безу является также автором многих учебников, написанных для средней школы.

178. $S = \frac{a_1}{1-q}$, где q — знаменатель прогрессии.

Так как $q = \frac{a_2}{a_1}$, тогда $S = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{a_1}} = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2}$.

Откуда

$$\frac{S}{S - a_1} = \frac{\frac{a_1^2}{a_1 - a_2}}{\frac{a_1^2}{a_1 - a_2} - a_1} = \frac{a_1^2}{a_1^2 - a_1^2 + a_1 a_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

что и требовалось доказать.

Пьер Ферма (1601—1665) — крупнейший французский математик XVII века. По происхождению сын мелкого торговца. В молодости получил юридическое образование и стал адвокатом. В Тулузе, где он занимался адвокатурой, стал советником парламента и в этой должности, не отмеченной никакими особыми событиями, он и провел всю свою жизнь. Математикой занимался исключительно из любви к ней. Именно в математических исследованиях он находил для себя настоящий отдых. Эти математические занятия и привели его к крупнейшим открытиям почти во всех областях математических наук. Ферма вел обширную переписку с крупнейшими учеными того времени, в которой давал глубокий анализ и критику существующих математических теорий и сообщал свои исследования и задачи. Ферма много сделал по части обоснования и дальнейшего развития высшей математики (дифференциального исчисления и аналитической геометрии). Его именем названы несколько теорем современной арифметики (теории чисел). Одна из них, называемая «великой теоремой Ферма», гласит: «Уравнение $x^n + y^n = z^n$ неразрешимо в целых числах ни при каких натуральных значениях $n \geqslant 3$».

Эта теорема, несмотря на простоту ее формулировки, до сих пор еще полностью не разрешена.

179. Преобразуем первое и второе слагаемое к виду $a+ib$. Для первого слагаемого

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} = \sqrt{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+2i\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2+2i\sqrt{\frac{3}{4}}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Для второго слагаемого таким же путем найдем

$$\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Откуда искомая сумма

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6},$$

что и требовалось установить.

Автором этой задачи является крупнейший немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) родом из Лейпцига, сын нотариуса и профессора морали. В родном городе поступил в университет, где изучал юридические науки и самостоятельно—философский материализм. Математика привлекла его своей логикой. Еще в детстве, имея пристрастие к чтению научных трактатов, изучил труды Аристотеля и Декарта. Кроме научной работы, Лейбниц занимался государственной деятельностью в качестве дипломатического посланника в Париже. В 1673 году был в Англии, где продемонстрировал Королевскому обществу арифмометр собственной конструкции, изобретенный им после ознакомления с арифмометром Паскаля. После возвращения в Париж он вскоре был избран членом Королевского общества.

Одновременно с Ньютоном и независимо от него Лейбниц дал современную разработку математического анализа — дифференциального и интегрального исчисления, изучаемого в высших учебных заведениях и частично в средней школе.

Лейбниц положил начало теории определений, которая возникла при решении систем уравнений первой степени со многими неизвестными. Кроме того, Лейбниц много трудился по исследованию свойств кривых и по разложению функций в ряды, где достиг также замечательных результатов.

180. $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=(5+i\sqrt{15})(5-i\sqrt{15})=$

$$=25-i^2\cdot 15=25-(-1)\cdot 15=25+15=40.$$

181. Данное уравнение

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$$

можно представить так:

$$x^4-4x^3-19x^2+76x+30x-120=0,$$

или

$$x^3(x-4)-19x(x-4)+30(x-4)=0,$$

откуда $x_1=4$.

Остальные корни находятся из уравнения $x^3-19x+30=0$. Чтобы найти эти корни, представим последнее уравнение в виде

$$x^3-3x^2+3x^2-9x-10x+30=0,$$

или

$$x^2(x-3)+3x(x-3)-10(x-3)=0,$$

откуда $x_2=3$, а остальные два корня находятся из уравнения

$$x^2+3x-10=0.$$

Решая это уравнение обычным путем, найдем: $x_3=2$, $x_4=-5$.

Рене Декарт (1596—1650) — крупнейший французский математик и философ XVII века, составитель знаменитого трактата «Геометрия» (1637), где впервые в истории науки был изложен координатный метод, с которым учащиеся частично знакомы по теме «Функции и графики». Координатный метод позволил Декарту вместе с Ферма создать аналитическую геометрию, которая рассматривает вопросы геометрии с точки зрения алгебраических уравнений.

Декарт улучшил теорию уравнений путем введения удачной символики. Он, например, первый стал обозначать неизвестные через x, y, z, отдавая предпочтение z. Декарту принадлежит так называемый «метод неопределенных коэффициентов», который сейчас находит широкое применение.

Декарт родился в Турине и принадлежал к старинному дворянскому роду. Воспитание получил в иезуитской коллегии, где много занимался естественными науками и философией.

В философии и математике он придерживался так называемого аналитического метода, согласно которому каждую задачу надо разлагать на ее составные части и затем от самого простого и легкого продвигаться к более сложному. Умер Декарт в Швеции, куда за год до смерти был приглашен шведской королевой Христиной, с которой раньше вел философскую переписку.

182. Постарайтесь эту задачу решить самостоятельно.

Задача взята из трактата «О преобразовании» титана научной мысли эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519). В указанном трактате да Винчи занимался вопросами преобразования одного тела в другое без убавления или возрастания материала. По его убеждению, нет должной достоверности там, «где нельзя приложить ни одной из математических наук». Он был глубоко уверен, что любой спор должна решить математика, ибо только она способна «налагать молчание на языки спорщиков».

183. Решение имеется у А. П. Киселева в его учебнике геометрии (первая часть). Впервые полное решение этой задачи дал известный итальянский математик Джеронимо Кардан.

184. Пусть ABC — данный треугольник. Проведем через его вершины прямые, параллельные противоположным сторонам, получим треугольник MKP, у кото-

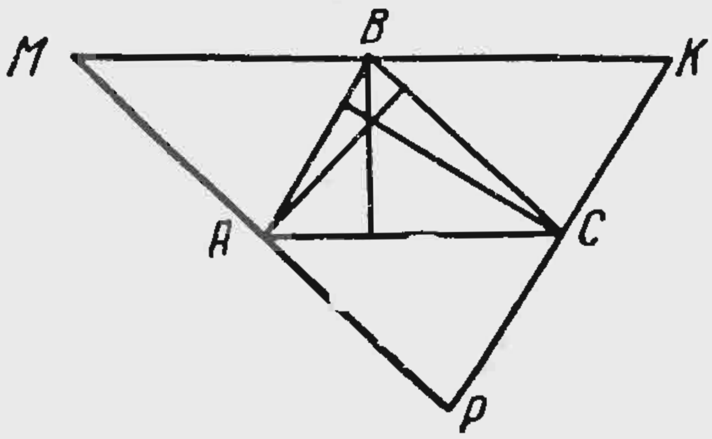


Рис. 45

рого точки A, B и C будут серединами соответствующих сторон (рис. 45). Высоты данного треугольника будут перпендикулярными к сторонам полученного треугольника, восставленны в их серединах. А такие перпендикуляры пересекаются в одной точке (проверить, почему). Следовательно, высоты данного треугольника пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

185. Из точки A данным радиусом на прямой AB делаем засечку D (рис. 46). Далее, из точки B тем же радиусом на той же прямой AB делаем другую засечку C. Затем на отрезке CB строим равносторонний треугольник CKB, а на отрезке AD—равносторонний треугольник ADH. Точка пересечения сторон BK

и AH — точка M — дает третью вершину искомого треугольника AMB.

Эту задачу впервые предложил видный итальянский математик Николо Тарталья (ок. 1499—1557). Математику Тарталья изучил самостоятельно. Также самоучкой он овладел в совершенстве

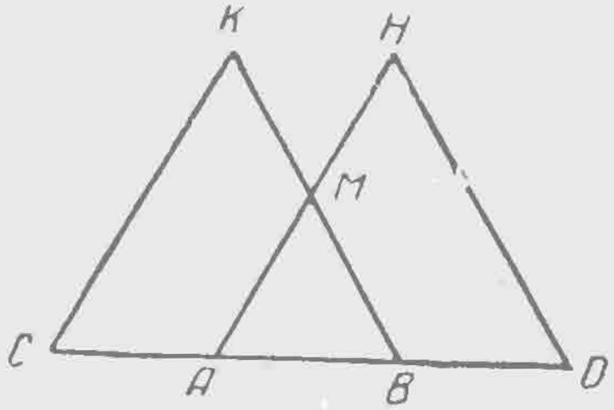


Рис. 46

греческим и латинским языками. В области математики он открыл способ решения кубических уравнений вида

$$x^3 + px^2 = q,$$

где p и q — положительные числа.

Живя в Венеции, давал торговцам уроки математики. Впоследствии в разных городах Италии читал лекции по алгебре, геометрии и механике. Был участником многих математических диспутов, из которых он, как правило, выходил победителем.

186. Из рассмотрения соответствующих подобных треугольников (рис. 47) будем иметь

$$\frac{AM}{DH} = \frac{KM}{KH}, \quad (1) \qquad \frac{MB}{HC} = \frac{KM}{KH}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получим

$$\frac{AM}{DH} = \frac{MB}{HC}, \text{ или } \frac{AM}{MB} = \frac{DH}{HC}. \qquad (3)$$

Аналогично находим, что

$$\frac{AM}{MB} = \frac{HC}{DH}. \qquad (4)$$

Умножив равенства (3) и (4), получим

$$AM^2 : MB^2 = 1.$$

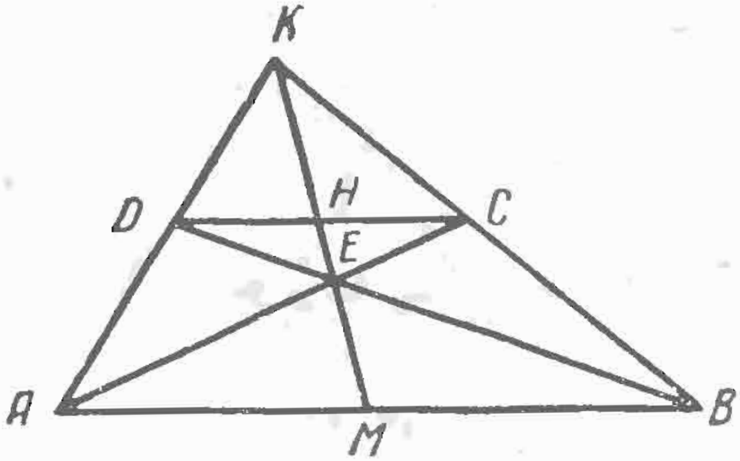


Рис. 47

Следовательно, $AM=MB$, что и требовалось доказать.

Автор этой задачи — крупнейший швейцарский геометр Яков Штейнер (1796—1863) — является одним из основоположников современной геометрии (проективной), изучаемой на математических специальностях высших учебных заведений. Он создал «геометрию линейки», в которой излагаются методы решения многих задач на построение при помощи одной только линейки. Приведенная и решенная выше задача — одна из таких.

187. Сам Ньютон эту задачу решал так. Положите $BC=a$, $AD=y$ (рис. 48). Так как угол ABD дан, то дано будет (по таблицам синусов или тангенсов) отношение между линиями AD и BD, которое положить равным d к l. Итак, $d:l=y:BD$, откуда

$$BD = \frac{ly}{d}.$$

Точно так же, поскольку дан угол ACD, будет и отношение между AD и CD, которое положите d к f, так что

$$DC = \frac{fy}{d}.$$

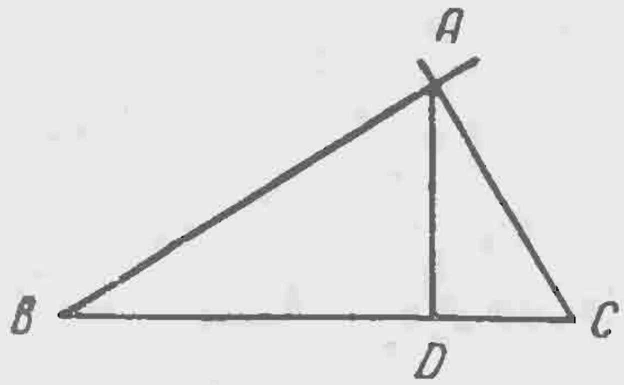


Рис. 48

Но

$$BD + DC = BC,$$

т. е.

$$\frac{ly}{d} + \frac{fy}{d} = a.$$

Преобразуя это уравнение посредством умножения обеих сторон на d и деления на $l+f$, вы получите

$$y = \frac{ad}{l+f}.$$

Эта задача взята из книги Исаака Ньютона «Всеобщая арифметика, или книга об арифметических синтезе и анализе» (имеется русский перевод со статьей и комментариями А. П. Юшкевича, издан АН СССР, 1948).

188. *Решение алгебраическое.* Обозначим через p

полупериметр прямоугольника, а через x одну из сторон его, тогда для площади S будем иметь формулу

$$S = x(p - x),$$

или

$$x^2 - px + S = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}.$$

Ясно, что x будет действительным только при $S \leqslant \frac{p^2}{4}$, причем наибольшее значение для S будет $\frac{p^2}{4}$, т. е.

$$S_{\max} = \frac{p^2}{4}, \quad \text{когда} \quad x = \frac{p}{2}.$$

Следовательно, из всех прямоугольников одинакового периметра квадрат имеет наибольшую площадь, что и требовалось установить.

Решение геометрическое. На полупериметре p рассматриваемых прямоугольников, как на диаметре, построим полуокружность (рис. 49). Далее диаметр разделим на два отрезка x и $p - x$ и в точке деления к диаметру восставим перпендикуляр, тогда его длина численно будет равна $\sqrt{S}$, так как должно выполняться равенство

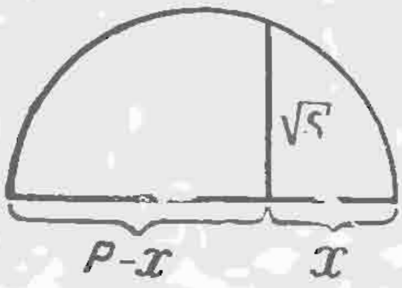


Рис. 49

$$(p - x)\,x = S.$$

Ясно, что S достигнет максимума тогда, когда длина указанного выше перпендикуляра будет равна радиусу, т. е. когда

$$S = \frac{p^2}{4},$$

а это возможно тогда, когда

$$p - x = x, \text{ или } x = \frac{p}{2},$$

т. е. когда данный прямоугольник будет квадратом.

Автором рассмотренной задачи является виднейший английский математик Джон Валлис (1616—1703) — профессор Оксфордского университета, составитель многих трактатов по математике. Валлис много работал по вопросам научного обоснования геометрии как дедуктивной науки, вытекающей из ранее предпосланных аксиом. В частности, ему принадлежит оригинальная попытка доказать аксиому параллельности и свести ее таким образом в разряд теорем. Это ему удалось сделать путем введения другой аксиомы, которая известна под названием «аксиомы Валлиса»: *для всякой фигуры существует подобная ей фигура любых размеров.*

189. Решение Ньютона. «Если 12 быков за 4 недели поедают $3\frac{1}{3}$ югера, то в силу пропорциональности 36 быков за 4 недели, либо 16 быков за 9 недель, либо 8 быков за 18 недель поедят 10 югеров травы, предполагая, что трава перестает расти. Но так как трава растет, то 21 бык за 9 недель съест лишь 10 югеров травы; значит, трава, которая выросла на 10 югерах за последующие 5 недель, сможет прокормить в течение 9 недель избыток 21 быка над 16 быками, или 5 быков, либо, что то же самое, $\frac{5}{2}$ быка в течение 18 недель. Прирост травы за 14 недель (избыток 18 над первыми 4) может аналогичным образом прокормить 7 быков в течение 18 недель, ибо 5 недель : 14 неделям $=\frac{5}{2}$ быка : 7 быкам. Прибавьте поэтому этих 7 быков, которых сможет прокормить один лишь прирост травы, к 8, которых прокормила бы трава без прироста по истечении четырех первых недель; сумма будет 15 быков. Наконец, если 10 югеров могут прокормить 15 быков в течение 18 недель, то в силу пропорциональности 24 югера смогут прокормить за это же время 36 быков».

Остановимся на *алгебраическом решении* этой задачи. Обозначим через y вспомогательное неизвестное, означающее, какая доля первоначального запаса травы прирастает на 1 югере в течение недели. Тогда на первом лугу в течение недели прирастает травы $3\frac{1}{3}y$, а в течение 4 недель — $3\frac{1}{3}y\cdot 4 = \frac{40}{3}y$ того запаса, который первоначально на нем имелся. Следовательно, 12 быков в течение 4 недель съели столько травы, сколько занимает луг площадью в $3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y$ югеров. Далее легко подсчитать, что 1 бык в 1 неделю съедает столько травы, сколько занимает луг площадью

$$\left(3\frac{1}{3}+\frac{40}{3}y\right):48=\frac{10+40y}{144}\ (\text{югеров}).$$

Теперь находим площадь участка, содержащего запас травы для прокормления 21 быка в течение 9 недель. Она составляет $10+90y$ югеров, так как недельный прирост на 1 югер — y, 9-недельный прирост на 1 югер — $9y$ и 9-недельный прирост на

10 югеров — $90y$. Таким образом, площадь, достаточная для прокормления 1 быка в течение 1 недели, составляет

$$\frac{10+90y}{9\cdot 21}=\frac{10+90y}{189}\ (\text{югера}).$$

Так как нормы прокормления должны быть одинаковыми, то

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}.$$

Откуда находим

$$y=\frac{1}{12}.$$

После этого площадь луга, нужная для прокормления 1 быка в течение 1 недели, выразится числом

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+40\cdot\frac{1}{2}}{144}=\frac{5}{54}\ (\text{югера}).$$

Обозначая через x искомое число быков, которых может прокормить третий луг в течение 18 недель, получим уравнение

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54},$$

решив которое, найдем $x=36$.

Следовательно, третий луг в течение 18 недель может прокормить 36 быков.

190. Решение Ньютона. «Чтобы решить вопрос, заметьте, что в нем содержатся в скрытом виде некоторые предложения, которые все должны быть выявлены и выражены.

Словесно	Алгебраически
У торговца имеется состояние	x
из которого он в первый год затрачивает 100 фунтов	$x-100$
Остаток он увеличивает на одну треть	$x-100+\frac{x-100}{3}$, или $\frac{4x-400}{3}$
Во второй год он опять тратит 100 фунтов и остаток увеличивает на одну треть	$\frac{4x-400}{3}-100$, или $\frac{4x-700}{3}$ $\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$, или $\frac{16x-2800}{9}$
В третий год он опять тратит 100 фунтов и остаток также увеличивает на одну треть причем оказывается вдвое богаче, чем был вначале	$\frac{16x-2800}{9}-100$, или $\frac{16x-3700}{9}$ $\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$, или $\frac{64x-14800}{27}$, $\frac{64x-14800}{27}=2x$

Таким образом, вопрос выражается уравнением,

$$\frac{64x-14\,800}{27}=2x,$$

приведя которое, мы найдем x.

Умножьте уравнение на 27, и вы получите

$$64x-14\,800=54x,$$

вычтите из обеих сторон $54x$ и останется $10x-14\,800=0$, или $10x=14\,800$; разделив на 10, вы найдете, что $x=1480$. Таким образом, состояние торговца вначале, а также его последующая прибыль или доход были равны 1480 ф.»

191. Эту задачу любил Наполеон I, который, как известно, окружал себя учеными, интересовался математикой. Чтобы решить задачу Наполеона, надо при помощи циркуля от произвольной точки A данной окружности отложить на этой окружности три точки B, C и D при условии $AB=BC=CD=r$, где r — радиус данного круга (рис. 50). Поскольку AC — сторона вписанного в круг треугольника, то она равняется $r\sqrt{3}$. Из точек A и D, которые, как легко сообразить, являются концами диаметра AD, радиусом, равным AC, засекаем дуги, пересекающиеся в точке M. MO и будет искомым раствором циркуля, который разделит окружность на четыре равные части.

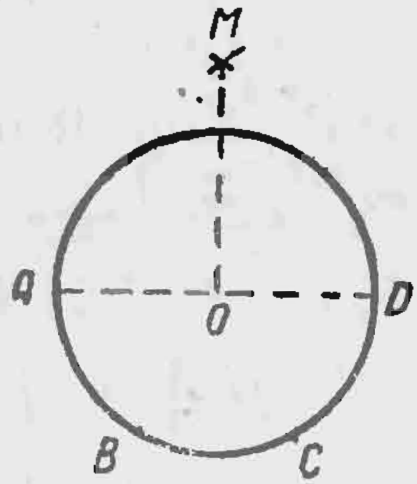


Рис. 50

Действительно, $OM=\sqrt{AM^2-AO^2}=\sqrt{3r^2-r^2}=$ $=r\sqrt{2}$ является стороной вписанного в круг квадрата, вершины которого делят данный круг на четыре равные части. Сами вершины вписанного в круг квадрата получить очень легко. Для этого стоит только раствором циркуля, равным AM, отложить на окружности последовательно четыре точки.

192. Доказательство состоит из следующих рассуждений:

$$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-4a^2=$$
$$=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2+2a)(a^2+2-2a),$$

где $a^2+2+2a\neq 1$ и $a^2+2-2a=(a-1)^2+1\neq 1.$

Таким образом, a^4+4 имеет два различных делителя, отличных от него самого и единицы. Следовательно, это число составное, что и нужно было доказать.

Задача принадлежит французской женщине-математику Софии Жермен (1776—1831), удостоенной премии Парижской Академии наук за мемуар о колебании упругих пластинок.

193. Задача имеет два решения.

Первое решение

12	8	5
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

Второе решение

12	8	5
12	0	0
7	0	5
0	7	5
0	8	4
8	0	4
8	4	0
3	8	1
11	0	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

Этой задачей еще в молодости занимался знаменитый французский математик Симеон Денюс Пуассон (1781—1840).

«Эта задача,— заявил Пуассон,— определила мою судьбу. Я решил, что непременно буду математиком».

Время показало, что Пуассон сдержал свое слово. Пуассон, действительно, стал математиком с мировым именем. Он был членом и корреспондентом многих зарубежных академий, европейских и американской и, в частности, почетным членом Петербургской Академии наук.

194. Задача решается путем несложных вычислений, выполняемых в уме: $9-7=2$; $150:2=75$ (прыжков).

Алкуин (около 735—804) — среднеазиатский ученый, учитель императора Карла Великого, автор сборника «Задач для изощрения ума». Задачи Алкуина составлены в форме загадок с занимательным содержанием и фабулой. Алкуин был образованным человеком своего времени. Кроме математики, он занимался философией, риторикой и грамматикой.

195. Пусть x — число воробьев, y — число горлиц и z — число голубей. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x+y+z=30; \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+2z=30. \end{cases}$$

Исключая z, получим

$$10x+9y=180,$$

или

$$y=20-\frac{10}{9}x.$$

Полагая $x=9$, получим $y=10$ и $z=11$.

196. Пусть x — количество денег у первого,
y — « « у второго,
z — « « у третьего.

Тогда вопросы сводятся к решению системы

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}(y+z)=12; \\ y+\frac{1}{3}(x+z)=12; \\ z+\frac{1}{4}(x+y)=12. \end{cases}$$

Откуда

$$x = 3\frac{9}{17}, \quad y = 7\frac{13}{17}, \quad z = 9\frac{3}{17}.$$

Адам Ризе (1492—1559) — известный немецкий математик, автор известного алгебраического трактата «Die Coss» (1524).

ОТВЕТЫ

1. 3. **4.** 9. **5.** $172\frac{21}{32}$. **6.** 19 067. **8.** 3,16. **12.** 84-х лет. **13.** 28. **14.** 45; $37\frac{1}{2}$; $22\frac{1}{2}$. **15.** $x = 8$; $y = 2$. **16.** $\frac{4}{3}$. **24.** 10; 6; 8. **25.** 84 кв. единицы. **27.** 3360. **28.** Число, кратное 12. **29.** $\frac{6}{23}$ дня. **30.** Ослица несла 5 мешков, мул — 7. **53.** Фазанов 23, кроликов 12. **54.** 22 цина 50 му. **55.** $\frac{7}{13}$. **56.** $2\frac{43}{60}$. **57.** $\frac{5}{12}$. **58.** Первая; на $\frac{43}{1050}$. **59.** $1\frac{4}{21}$ циня. **60.** $\frac{4}{9}$ бу. **61.** 1 му $200\frac{7}{11}$ бу. **62.** $23\frac{5}{6}$ бу. **63.** $1\frac{7}{9}$ таэля; $\frac{5}{9}$ таэля. **65.** 2 чжана. **66.** $1\frac{29}{66}$; $1\frac{22}{66}$; $1\frac{15}{66}$; $1\frac{8}{66}$; $1\frac{1}{66}$; $\frac{60}{66}$; $\frac{53}{66}$; $\frac{49}{66}$; $\frac{39}{66}$ шэна. **67.** Вес слитка золота 2 цзиня 3 лана 18 чжу; вес слитка серебра 1 цзинь 13 ланов 6 чжу. **68.** Через $15\frac{135}{191}$ дня; рысак пробежит $4534\frac{46}{191}$ ли, кляча — $1465\frac{145}{191}$ ли. **69.** Буйвол стоит $1\frac{13}{21}$ лана, баран — $\frac{20}{21}$ лана. **72.** $9\frac{1}{4}$; $4\frac{1}{4}$; $2\frac{3}{4}$ доу. **73.** $\frac{9}{25}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{4}{25}$ доу.

74. $\frac{17}{23}$; $\frac{11}{23}$; $\frac{10}{23}$ даня. **75.** Буйвол стоит 1200, баран — 500, свинья — 300 цяней. **76.** Глубина колодца 7 чжан 2 чи 1 цунь; длина веревок — 2 чжана 6 чи 5 цуней, 1 чжан 9 чи 1 цунь, 1 чжан 4 чи 8 цуней, 1 чжан 2 чи 3 цуня, 7 чи 6 цуней. **78.** Глубина воды 1 чжан 2 чи; длина камыша 1 чжан 3 чи. **79.** $4\frac{11}{12}$ чи. **80.** *Б* прошел на восток $10\frac{1}{2}$ бу, *А* прошел по косому направлению $14\frac{1}{2}$ бу, когда догнал его. **81.** Ширина 2 чи 8 цуней, высота 9 чи 6 цуней. **82.** 250 бу. **83.** $1735\frac{5}{12}$ чи. **84.** $527\frac{7}{9}$ чи. **85.** $3\frac{9}{17}$ бу. **87.** 164 чжана 9 чи с большой частью цуня. **89.** 4. **90.** 48. **91.** 15. **92.** $x=\frac{v_1\cdot d}{v_1+v_2}$. **93.** 20; $67\frac{1}{4}$. **95.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **96.** $h\left(1+\frac{d}{a+b}\right)$. **121.** $2\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2}$. **123.** 12. **125.** $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. **126.** 2. **129.** $5\frac{2}{3}$ локтя. **130.** 3. **131.** $\frac{Rh}{R-r}$. **133.** $19\frac{1}{5}$. **136.** $175\frac{1}{5}$ дня. **137.** Старых 100, молодых 12. **139.** 36. **145.** По кругу. **146.** 8. **147.** 10,77 аршина. **148.** 225. **149.** 352 аршина. **150.** 44 стопы (фута). **151.** 40 стоп (футов). **152.** $458\frac{2}{7}$. **153.** 8 дней. **154.** За гвозди надо уплатить 41 787 р. $3\frac{3}{4}$ к. **156.** 192 аршина; 384 руб. **157.** 420. **158.** 15 минут. **159.** 232 р. 5 к. **160.** 12 зайцев и 18 кур. *161. $93\frac{3}{4}$ коп. 162. Крестьянин получил 5 коп., дочь купца —* $7\frac{1}{2}$ коп., купец — $12\frac{1}{2}$ коп. **163.** $6\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$ коп. **164.** $1\frac{1}{2}$;

$5\frac{1}{4}$ коп. **165.** 16. **166.** 2. **167.** 137 256 предметов. **168.** 35 дней. **169.** $4\frac{4}{5}$ руб. **171.** 12 000; 8000; 6000 ливров. **172.** $y^2 + 2ay - \frac{a^2}{2}$. **173.** $2\frac{2}{17}$; $2\frac{14}{17}$ динария. **174.** $5 - \sqrt{21\frac{8}{27}}$. **175.** 7. **176.** $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. **177.** 40 или 60 пистолей. **180.** 40. **181.** 4; 3; 3; —5. **189.** 36. **190.** 1480 фунтов. **194.** После 75 прыжков. **195.** 9 воробьев, 10 горлиц, 11 голубей. **196.** $3\frac{9}{17}$; $7\frac{13}{17}$; $9\frac{3}{17}$ флорина.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 2

Часть первая

Тексты старинных задач по элементарной математике

Задачи Вавилона 3
Задачи Египта 3
Задачи Греции 4
Задачи Китая 14
Задачи Индии 20
Арабские задачи 25
Русские задачи 27
Задачи Западной Европы 39

Часть вторая

Исторические экскурсы, указания и подробные решения

Вавилон 46
Египет 48
Греция 52

Китай 94
Индия 132
Арабы 152
Россия 161
Западная Европа 174
Ответы 197

Василий Дмитриевич Чистяков

Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями

Редактор *Шалковская А.*
Художественный редактор *Кононов А.*
Технический редактор *Моргунова Г.*
Корректоры *Макацевич Ж.*, *Липец С.*

АТ 04389. Сдано в набор 12.I 1962 г. Подпис. к печ. 9/X-1962 г. Бумага 70×108/32. Печ. л. 6,375(8,734). Уч.-изд. л. 7,6. Изд. № 320. Заказ 47.
Тираж 26 700 экз. Цена 23 коп.

Издательство Министерства высшего, среднего специального и профессионального образования БССР

Типография Издательства Министерства высшего, среднего специального и профессионального образования БССР
Минск, Кирова, 24

В. Д. ЧИСТЯКОВ

СБОРНИК СТАРИННЫХ ЗАДАЧ

ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ С ИСТОРИЧЕСКИМИ ЭКСКУРСАМИ И ПОДРОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ