Ф. Диаку, Ф. Холмс

НЕБЕСНЫЕ ВСТРЕЧИ

ИСТОКИ ХАОСА И УСТОЙЧИВОСТИ

R&C Dynamics

R&C
Dynamics

Florin Diacu and Philip Holmes

CELESTIAL ENCOUNTERS

The Origin of Chaos and Stability

PRINCETON UNIVERSITY PRESS · PRINCETON, NEW JERSEY

Флорин Диаку и Филип Холмс

НЕБЕСНЫЕ ВСТРЕЧИ

Истоки хаоса и устойчивости

Перевод с английского Н. А. Зубченко
Под редакцией А. В. Борисова

R&C Dynamics
РХД
Москва • Ижевск

2004

УДК 521

Диаку Ф., Холмс Ф.

Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, 304 стр.

Эта книга предназначена для тех, кто интересуется основами хаоса. Авторы прослеживают всю историю попыток решить задачи небесной механики, впервые сформулированные в «Началах» Исаака Ньютона. Они знакомят нас с людьми, идеи которых привели к возникновению богатой науки, называющейся нелинейной динамикой.

При представлении современной теории динамических систем модели, лежащие в ее основе, описываются с помощью иллюстраций: на языке геометрии, придуманном Пуанкаре. Помимо этого, авторы размышляют о процессе созидания в математике и той роли, которую в нем играют случайные встречи, политика и даже обстоятельства.

Для широкого круга читателей.

ISBN 5-93972-323-3

http://rcd.ru

Марине
и Разван Диаку,
за их тепло
и любовь

Памяти Роберта Монтага Холмса,
1903–1995,
который сам того не зная,
подтолкнул своего сына
к этому странному пути

И сообщите при этом, олимпийские музы,
что прежде всего зародилось.

Прежде всего во Вселенной Хаос зародился...

— Гесиод «Теогония», II, 114–116

Нередко понимание природы уравнения
невозможно без детального понимания его решений.

— Фримен Дайсон

Оглавление

Предисловие и благодарности

Происхождение этой книги достаточно необычно. Первый ее автор, Флорин Диаку, – румынский эмигрант, который в настоящее время живет в Западной Канаде, где преподает математику в университете Виктории. Перед отъездом в Германию, незадолго до революции 1989 года, он работал школьным учителем. В свободное же время он занимался проблемами небесной механики, и эти исследования стали темой его диссертации, представленной на соискание ученой степени в Гейдельбергский университет. В 1992–1993 гг., через год после того как Флорин Диаку поселился в Виктории, он преподавал выпускникам курс по динамическим системам, во время которого вывешивал изображения странных аттракторов и прочих хаотических объектов на двери своего кабинета. Благодаря этим картинкам к нему захаживали студенты из разных областей науки, желавшие потолковать о хаосе. Они нередко просили его порекомендовать какую-нибудь популярную книгу, и, поскольку очевидного варианта не существовало, Флорин Диаку подумал о том, чтобы написать такую книгу самому, что, помимо всего прочего, помогло бы ему усовершенствовать свой английский, т. к. при написании математических статей используется весьма ограниченный лексический запас.

Он подумывал о книге для неспециалистов, желая описать те идеи и людей, которые произвели на него самое сильное впечатление в выбранной им области науки. Он обучал студентов с весьма ограниченными познаниями в математике, а потому, возможно, сумел бы передать большой аудитории некоторые из своих идей, а также чувство восторженности, которое он испытывал к данному предмету. Такие книги, как *Chaos – Making a New Science*[1] Джеймса Глейка и *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*[2] Йена Стюарта, уже познакомили широкую аудиторию с некоторыми современными учеными и текущими вопросами, но, на его взгляд, они, в некотором смысле, были зданиями без

[1] Хаос – создание новой науки. – *Прим. перев.*

[2] Играет ли Бог в кости? Математика хаоса. – *Прим. перев.*

фундамента. Несмотря на существование столь привлекательных повествований, видимо, по-прежнему оставалось место для книги, в рамках которой можно было бы углубиться в историю и математические основы более узкой, но центральной проблемы в области хаоса и теории динамических систем: задачи n-тел. Большая часть этой истории, судя по всему, не является общеизвестной. Даже на замечательной выставке, посвященной хаосу, во *Дворце Открытий* в Париже, недалеко от Сорбонны, где преподавал Анри Пуанкаре, обнаруживаешь, что данное явление было открыто якобы в 1960-е годы.

Приехав в Корнельский университет вскоре после прибытия в Монреаль для продолжения своих научных исследований, Флорин Диаку встретил Филипа Холмса. Холмс не был специалистом по небесной механике, но работал с динамическими системами на протяжении двадцати лет. (Хотя считается, что в настоящее время небесная механика является небольшим разделом теории динамических систем, эта книга покажет, что своими корнями данная теория уходит именно в небесную механику.) Завершив к началу 1994 года первый черновой вариант своей книги, Флорин Диаку попросил Филипа Холмса прочитать его и сделать свои замечания. Тот согласился и через некоторое время вернул рукопись, испещренную пометками, сделанными красными чернилами. Тогда Флорин Диаку предложил Холмсу стать соавтором этой книги. Сначала Холмс сопротивлялся. Какой вклад он мог внести, не считая стилистических корректив? Однако и его не устраивали опубликованные работы, популяризирующие последние открытия в теории динамических систем, и с течением времени он понял, что вполне способен сделать свой вклад в объяснение некоторых математических понятий, образующих суть его собственного исследования. Вот так и возникла эта книга.

История открытия хаоса Анри Пуанкаре и изменения его публикации после получения им премии, учрежденной королем Швеции и Норвегии, Оскаром II, уже была рассказана в замечательной книге Ивара Петерсона *Newton's Clock: Chaos in the Solar System*[3]. Пересказывая ее в первой главе, мы используем последние результаты исторических исследований и, кроме того, делаем попытку представить более глубокое понимание теории дифференциальных уравнений и геометрического подхода к их изучению, изобретенного Пуанкаре. Петерсон, в первую очередь, сосредотачивается на истории достижений в астрономии, связанной с динамикой Солнечной системы. Нас же в большей степени

[3]Часы Ньютона: хаос в Солнечной системе. — *Прим. перев.*

интересуют математические основы *небесной механики* и *теории динамических систем* вообще, которые, как мы увидим, достаточно сильно отличаются друг от друга. В этой главе мы вводим понятие *фазового пространства* — математической вселенной, в которой обитают динамические системы, — и объясняем некоторые инструменты, необходимые для его анализа. Во второй главе мы описываем их более подробно, объясняя аналитические, геометрические и символические методы, созданные американскими математиками Джорджем Биркгофом и Стефеном Смейлом.

В третьей главе мы возвращаемся к вдохновившим Пуанкаре проблемам небесной механики, описывающим теорию сингулярностей и столкновений. Несмотря на то, что эти события могут представляться невероятными в Солнечной системе во время нашей жизни, в более долгосрочной истории Вселенной они играют важную роль. Более того, они необходимы для правильного понимания строения фазового пространства для задачи n-тел. (Действительно, летом 1994 года, когда мы работали над этой книгой, обломки кометы Шумейкера–Леви столкнулись с Юпитером, о чем подробно рассказывали в новостях.) Эта глава начинается со стокгольмской лекции Пенлеве (который тоже имел связи в Швеции) и через работу фон Цейпеля подводит нас к самым последним достижениям.

Четвертая глава сосредоточена на устойчивости. Мы вновь возвращаемся к Даламберу, Лапласу, Лагранжу и Пуассону. Затем мы покидаем Францию и отправляемся на восток: в Румынию и Россию, — чтобы познакомится со Спиру Аретю и Александром Михайловичем Ляпуновым. Во время этого путешествия мы прослеживаем все более подробные ряды, приближающие решения, найденные за два века, и противоречивые выводы относительно устойчивости, к которым они привели. Спор об устойчивости продолжался до 1950-х–1960-х годов, поэтому пятая глава посвящена работе, которая его разрешила. Мы описываем КАМ-теорию (или теорию Колмогорова–Арнольда–Мозера) — одну из самых влиятельных (и, безусловно, самых цитируемых) совокупностей результатов в классической механике. Благодаря этому мы видим тесную связь хаоса и устойчивости, существующую в наших математических моделях Вселенной.

В этой книге мы преследуем двойную цель. Во-первых, мы хотим рассказать читателю о некоторых исторических достижениях в небесной механике и теории динамических систем и посредством этого попытаемся воссоздать социальную и интеллектуальную среду, в которой жили их авторы. Во-вторых, мы надеялись поглубже объяснить математические идеи и методы, которые эти первопроходцы оставили нам и на основе которых мы выстроили свои собственные вклады — куда менее значительные. Эта книга предназначается каждому, кто слышал о хаосе и хочет узнать побольше о теории и возникновении этого предмета, а также о людях, его создавших. Несмотря на существование популярных примеров хаоса, включающих игры и игрушки в магазинах подарков, имеющихся в каждом аэропорте, это, прежде всего, *математическая* теория. Мы надеемся, что широкий круг читателей сочтет истории, лежащие за этими идеями, столь же интересными и волнующими, сколь таковыми считаем их мы, и что это подтолкнет их к изучению скрытых аспектов математики. Соответственно, мы написали не традиционное историческое исследование и не обзор новых идей, предназначенный исключительно для наших коллег-ученых и исследователей. Наш подход, возможно, даже приведет некоторых из них в уныние, а почему — мы объясним ниже.

На что походила бы наша жизнь, не будь в ней места для мечты, и какими были бы наши мечты, не имей мы воображения? Во многих отношениях ученые — ничуть не меньшие мечтатели, чем художники, композиторы, писатели или поэты. Подобно многим из вышеперечисленных, полет фантазии ученых начинается с реальности нашего мира. Не являются исключением из этого правила и математики, разве что от всех остальных ученых они отличаются тем, что их мечты, по крайней мере в принципе, поддаются стопроцентной проверке. Прочим ученым приходится полагаться на ненадежные гипотезы, неясные допущения или несовершенные наблюдения и эксперименты. Математик же, приняв основные аксиомы, может оперировать точными понятиями и определениями, и поэтому все, что он построит с помощью своего воображения и умений, опирается на прочный фундамент. Каждый математик стремится возводить идеальные конструкции, согласующиеся с духом и требованиями его области. В этом заключается одновременно великая сила и великое ограничение математики: она является буквально миром в самой себе.

Тем не менее, математики — люди, поэтому побуждения к исследованию и многие их идеи приходят из внешнего мира: из проблем и явлений повседневной жизни. Какой бы сухой и технической ни казалась теорема, побуждение к ее формулировке и идеи, использованные для ее доказательства, возникли отчасти в житейском опыте ее создателя: из, на первый взгляд, случайных разговоров с друзьями и знакомыми в не меньшей степени, чем из изучения какого-то определенного «реального» явления. Мы надеемся передать хоть что-то из этого взаимодействия случайных событий и встреч в личной жизни математиков, их озарений и сделанных ими вкладов. Математика — это международный язык, а занятия ею — дело, в равной степени, коллективное и личное. Наше повествование позволит нам посетить много разных стран и культур, и мы увидим, какое влияние на формирование данного предмета оказали политические и социальные факторы.

Любой студент, бьющийся на сложным доказательством или анализом, должно быть, задумывался над тем, откуда великие учителя прошлого брали свои идеи. Увы, такие подробности редко попадают в опубликованные статьи и даже в историческую литературу. Иногда их можно встретить в письмах, дневниках и личных бумагах, но зачастую они теряются, когда человек умирает. Мы хотели не только показать, каким образом были связаны различные открытия «постфактум», в рамках более обширного мира математики, но и указать их источники в мире людей. Сделать это было достаточно легко в отношении наших современников, которые появляются на страницах этой книги. Если мы не знали, откуда взялась та или иная идея или какие-то подробности доказательства, то вопрос, отправленный по электронной почте, или телефонный звонок, обычно помогали разрешить сложившуюся ситуацию (или найти несколько противоречивых вариантов ее разрешения). Сложнее было раскрывать истории тех, кого уже нет с нами. Череда времён затянула все подробности, и порой нам мало что удавалось разыскать помимо голых фактов, связанных с датами и местами.

Пытаясь оживить эти личности, мы иногда освещали те уголки, которые при обычном историческом изыскании обыкновенно остаются в тени. Тогда как бо́льшая часть нашего повествования прочно базируется на документально зафиксированных исторических фактах, мы создали ряд сцен и разговоров, об истинности которых мы не имеем прямых свидетельств. В основном, мы строили их на основе аналогий с подобными, зафиксированными в документах событиями из жизни связанных с ними людей. В отличие от мечтаний математиков, эти наши фантазии проверить невозможно (как, впрочем, невозможно и фальсифицировать их). Мы надеемся, что они помогут читателю более высоко оценить математическое творение и, в конечном итоге, саму математику. В примечаниях, приведенных после основного текста книги, мы четко обозначаем такие отрывки, а также указываем источники тех событий, которые зафиксированы документально.

Решив написать о корнях теории динамических систем с точки зрения небесной механики и задачи n-тел, мы намеренно ограничились математическими основами данного предмета. Мы заранее приносим свои извинения тем читателям, которые не найдут в нашей книге информацию по своим специальностям или прикладным областям. Динамические системы представляют собой настолько быстро растущую область, что в любом случае в рамках данной книги мы не смогли бы сделать полный ее обзор. Наше время и наша энергия, увы, ограничены!

Многие люди оказали нам свою помощь при реализации этого проекта: некоторые поделились ценной информацией, другие читали рукопись (или значительные ее части), не позволяя нам вдаваться в крайности, делая поправки, указывая на наши упущения и требуя от нас более понятного выражения своих мыслей. Мы в неоплатном долгу перед Карлом Андерсоном, Томом Арчибальдом, Владимиром Игоревичем Арнольдом, Марком Баннар-Мартином, Или Барцой, Марком Шапероном, Аленом Шенсине, Катариной Анастасией Конли, Скоттом Крегом, Мариной Диаку, Габором Дамокосом, Робертом Гарбером, Джозефом Джервером, Робертом Гристом, Арлин Гринберг, Холли Ходдер, Рут Холмс, Мартой Мари Джексон, Крисом Джонсом, Джоном Мазером, Ричардом Мак-Гихи, Василем Миоком, Юргеном Мозером, Жаком Пестром, Крисом Филлипсом, Мэрином Филлипсом, Джоном Филлипсом, Биллом Ридом, Дональдом Саари, Жан-Клодом Саутом, Яковом Синаем, Стефеном Смейлом, Даной Шламиук, Норбертом Шламиуком, Карлом Симоном, Гарри Ти, Статисом Томпаидисом, Фердинандом Ферхюльстом, Богданом Верджинским, Джихонгом Ша и Смилкой Здравковской. Мы приносим извинения всем, кого, по невнимательности, не упомянули в данном списке.

Мы также хотели бы поблагодарить нашего редактора, Тревора Липскома, и его коллег из Princeton University Press, особенно Элис Келапрайс, которая тщательно отредактировала рукопись. Кроме того, мы выражаем благодарность Крису Бресту, который превратил наши черновые наброски в четкие рисунки.

В течение некоторого времени из всего, что ушло на написание этой книги, Филип Холмс получал поддержку от Фонда памяти Джона Симона Гуггенхейма. И, наконец, без электронной почты и редактора TEX этот долгосрочный проект так и остался бы всего лишь мечтой.

Виктория, Британская Колумбия, и Принстон, Нью-Джерси
Апрель 1996 г.

К читателю

Некоторые части этой книги, в которых мы представляем основные математические инструменты, необходимые для ясного и строго описания хаоса, являются чисто техническими. Такие разделы в тексте мы пометили, добавив к их подзаголовкам звездочку. Читатель, интересующийся лишь историческим обзором, может пропустить эти части, по крайней мере при первом чтении, и перейти к последующим. Эти разделы не требуют более детального знания, но для их понимания читателям, незнакомым с развиваемыми идеями, придется затратить больше времени и упорства.

1.

Великое открытие — и ошибка

Вполне возможно, что на ближайшие пятьдесят лет это открытие станет источником, из которого более скромные исследователи будут добывать свои материалы.

— Джордж Дарвин о шедевре Пуанкаре *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*[1]

Анри Пуанкаре отодвинул стул и встал. Ему нужно было немного пройтись. Стоял прекрасный весенний день: звуки и ароматы, проникавшие через открытое окно его кабинета, пробудили в нем беспокойство и необъяснимый оптимизм. Особых причин для радости не было, т. к. его работа, судя по всему, совсем остановилась. Разве можно было поверить в то, о чем говорили результаты его расчетов? Несмотря на то, что каждый последующий шаг доказательства логически следовал из предыдущего (как никак, он выстраивал их сам и неоднократно проверял), он не мог постигнуть то, что получалось в итоге. Впервые он взялся за эту задачу десять лет назад и постоянно к ней возвращался, но какое-то жизненно важное понимание по-прежнему отсутствовало. И пока он его не найдет, он не сможет дописать последнюю главу своей книги.

Преодолеть такого рода препятствия иногда помогает перерыв. Он пойдет прогуляться. Неважно куда. Главное — освободить ум и понаблюдать за окружающим миром. В конце XIX века, как, впрочем, и сегодня, Париж являл собой очаровательную смесь парков, истории, памятников культуры и романтики. Так что во время прогулки он найдет, на что посмотреть и о чем подумать. Через час-другой он вернется к своей работе со свежими силами.

[1] «Новые методы небесной механики» (фр.) — Здесь и далее по основному тексту прим. перев.

Несмотря на свою необычайную одаренность, Пуанкаре в течение многих лет жил как все прочие парижские буржуа. Его знакомые и коллеги видели в нем уважаемого профессора и члена общества, любящего мужа и внимательного отца. И только он сам, отрываясь от научных изысканий, понимал, насколько сложно делить свое время между преподаванием, административными обязанностями и семьей.

Прогулка по Парижу

Жюль Анри Пуанкаре родился 29 апреля 1854 года в Нанси, где его отец был уважаемым врачом. Раньше в городе Нанси находилась резиденция герцогов Лотарингских, а сейчас здесь располагается правительство департаментов Мерт и Мозель. Город расположен на северо-востоке Франции, на реке Мерт и канале Марна-Рейн, в 175 милях к востоку от Парижа. Родители Анри родом из Лотарингии, поэтому семья Пуанкаре в течение некоторого времени проживала в этой области. Их предок, Жан Жозеф Пуанкаре, был *conseiller au bailliage* (судебным приставом) в Нёфшато, где и умер в 1750 году. Один из его сыновей, Жозеф Гаспар Пуанкаре, преподавал математику в расположенном неподалеку Коллеж де Бурмон.

Столь дальнее родство с математикой не подготовило семью к появлению Пуанкаре. Это был не по годам развитой ребенок, который быстро обогнал своих одноклассников по всем предметам. Его обучение было прервано франко-прусской войной, однако во время оккупации (1870–1873) он быстро выучился свободно говорить по-немецки, для чего ему не понадобились никакие специальные уроки. Любовь к математике возникла у Пуанкаре в пятнадцатилетнем возрасте. Как только он погружался в задачу, никто и ничто не могло отвлечь его от нее.

В 1873 году Пуанкаре закончил школу с самыми высокими оценками и поступил в престижную Политехническую школу в Париже, где ему удавалось слушать лекции по математике, не делая при этом никаких записей. Сначала он занялся горным делом и геофизикой: в 1876 году его даже приняли в Высшую государственную школу горного дела, но очень скоро он забросил технику и начал подготовку к получению докторской степени в Парижском университете в 1878 году. Степень доктора философии он получил за поразительно короткое время – всего один год. В его диссертации «Интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с несколькими независимыми переменными» был рассмотрен сложный технический вопрос. Этой работе суждено было стать отправной точкой великого множества статей и книг, определивших целые новые области математики и изменивших другие. Любопытно отметить, что на вступительном экзамене по черчению, который Пуанкаре сдавал при поступлении в Политехническую школу, он получил ноль баллов, вследствие чего для его зачисления пришлось делать особое исключение. Человек, которому суждено было ввести новый геометрический подход к динамике, был практически не способен нарисовать понятную картинку.

Мы изобразили Пуанкаре, бьющегося над очередной задачей, весной 1897 года. К сорока пяти годам, профессор Парижского университета и член Академии наук, он был уже знаменит и уважаем в интеллектуальном мире. Он опубликовал свыше трехсот научных работ, книг и статей не только по математике, но и по физике и философии. Один из последних научных «универсалов», он мог постигнуть и выдвинуть фундаментальные идеи в нескольких различных областях. Его влияние на математику и естественные науки было огромным.

Пуанкаре наслаждался прогулкой. Он попытался полностью освободить свои мысли от математики. Ноги сами привели его к Сене. Увидев Эйфелеву башню, он вспомнил об ее торжественном открытии, произошедшем во время Парижской выставки 1889 года. Для его карьеры тот год был не менее важен, чем для карьеры Густава Эйфеля, т. к. именно тогда Пуанкаре получил премию, учрежденную королем Швеции и Норвегии Оскаром II за работу, представленную в этой главе: его статью по динамике задачи трех тел.

Для той выставки Эйфель построил самую высокую конструкцию в мире. Более века спустя она превратилась для всего мира в символ Парижа. Парижанам она поначалу не нравилась, да и в наши дни многие жители этого города от нее не в восторге. Создается впечатление, что это неземное творение подавляет слишком многие памятники, воплощающие более тонкую красоту и имеющие куда большую архитектурную ценность. Чаще всего, турист, приехав в столицу Франции, прежде всего отправляется к Эйфелевой башне. Остров Сите с Собором Парижской Богоматери, Елисейские Поля, охраняемые Триумфальной аркой и Площадью Согласия, Опера, сад Тюильри и Лувр, Монмартр и Латинский квартал остаются в тени великой башни. На своих четырех ногах она самым бесстыдным образом возвышается над толпами народа.

Проект и дерзость Эйфеля достойны восхищения, но Пуанкаре просто не мог одобрить подобное творение. Прочно стоящий на ногах и уважаемый как математик, как профессор и как гражданин, он не рискнул

Илл. 1.1. Анри Пуанкаре (Любезно предоставлена Институтом Миттаг-Леффлера)

бы выступить в поддержку противоположного мнения, чтобы не выглядеть нелепо в глазах своих соотечественников. Оставаясь в рамках своей профессии, математик имеет мало шансов показаться смешным. Каким бы удивительными ни казался окончательный результат, если математик сможет показать, что каждое утверждение появляется как следствие логического рассуждения, то он редко подвергается риску показаться смешным. В изящных искусствах, архитектуре или литературе, где суждение субъективно и важную роль играют неконтролируемые критерии, изменение настроения общества может разрушить человеку карьеру. Зачастую это лишь вопрос везения. Иногда — вопрос умения (или неумения) выбрать подходящий социально-исторический момент. В математике такие несчастливые события происходят редко, хотя выбор определенного времени, случайности и настроение общественности оказывают свое влияние, которое, впрочем, трудно различимо.

Пуанкаре был одним из очень немногих своих современников, которые знали о каждом достижении в математике вплоть до своего времени и могли логическим путем его вывести. В наше время большое количество исследований и информации сделали это невозможным: каждый математик, да и любой другой ученый, заключен в ограниченный мир и почти не сведущ в вопросах прогресса и проблем, выходящих за рамки его собственной области. Сегодня, на самом важном собрании, проходящем каждые четыре года, — Международном конгрессе математиков — участники не всегда понимают даже *названия* докладов, не связанных с их собственной специальностью.

Гуляя, Пуанкаре вдруг осознал, что вспоминает прошлых мыслителей и те шутки, которые сыграла с ними судьба. Гаусс, самый знаменитый математик первой половины XIX века, не публиковал открытую им *неевклидову геометрию,* т. к. боялся «насмешек» своих современников. Гаусс знал, что они не поймут, что заставило его отказаться от «столь разумных» аксиом Евклида. Несколько лет спустя Янош Больяи, молодой трансильванский офицер, отец которого тоже работал над этой проблемой, развил аналогичные идеи и опубликовал их. Больше того, он написал об этом Гауссу. В ответе на это письмо немецкий математик изложил свои ранние мысли. И все же сегодня Гаусса цитируют куда чаще. По иронии судьбы работа Больяй почти не получила признания, став известной лишь через несколько десятилетий после его смерти. На ум Пуанкаре пришли и другие примеры: Галуа, в возрасте двадцати одного года погибший на дуэли, оставил после себя небольшую статью, которую Французская Академия наук оценила лишь полвека спустя. Сегодня *теория Галуа* является самостоятельной областью математики.

Возвращаясь по парижским улицам домой, Пуанкаре мысленно вернулся к своей задаче. Быть может, его подход был слишком консервативен? Нет, он должен следовать логике. Его мысли вновь обратились к тому, что его окружало. И хотя прогулка его, казалось, ни к чему не привела, откровение было подобно вспышке молнии. *Теперь* он понял. Он вдруг очень живо представил следствия полученного им восемь лет назад результата о неустойчивости некоторых движений ограниченной задачи трех тел. Его рассуждения и расчеты были абсолютно правильны. Он попросту не мог принять то, что они подразумевали. Теперь он понял, что задача, которую он хотел представить в своей книге, обобщающей половину его исследований, в действительности, демонстрирует неожиданное и странное поведение. Он не знал, как его назвать, и в тот момент не осмелился глубже о нем задуматься, но перед его глазами промелькнула новая земля. Несмотря на всю невероятность этого для его четких и прямых убеждений, ему надо будет как-то с этим примириться.

В оставшейся части данной главы мы опишем подоплеку этого пугающего понимания. Для этого нам придется заглянуть в несколько областей математики и естественных наук, т. к. через сто лет мы нашли не только название этого странного поведения, которое Пуанкаре осознал в тот день в Париже. Оно превратилось в новый образ мышления. Мы назовем его *хаосом*.

Понимание Ньютона

Что же произошло в разуме Пуанкаре в тот момент? Чтобы понять это, нам придется вернуться на более чем два века назад, в середину лета 1687 года, когда сэр Исаак Ньютон опубликовал свой шедевр: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*[2]. Главной целью путешествия в столь отдаленное прошлое является стремление проследить ключевое понятие в развитии математики и физики — понятие *дифференциального уравнения*. Зачатки дифференциальных уравнений были известны уже в конце XVI века шотландскому математику Джону Неперу — изобретателю логарифмов. (Его фамилия происходит от сочетания «na pier» [нет равных], означающего *свободный человек.*) Однако именно Ньютон поставил дифференциальные уравнения на то центральное место, которое они занимают в науке в настоящее время. Он не только показал способ выражения с их помощью физических задач, но и создал основные математические инструменты, необходимые для их решения.

[2] Математические принципы натуральной философии. – *Прим. перев.*

Principia написаны достаточно сложным стилем. Идеи, предложенные Ньютоном, трудно понять неподготовленному человеку, причем сам Ньютон заявлял, что написал книгу в подобном стиле намеренно: «Чтобы избежать придирок тех, кто мало что смыслит в математике». Его основным вкладом в физику является идея связи тяготения с динамическим поведением Солнечной системы: ее эволюцией во времени. До выхода в свет труда Ньютона многие полагали, что тяготение действует исключительно на тела, расположенные вблизи поверхности Земли. Предположив, что его действие распространяется на всю Вселенную, Ньютон понял, что движение Луны, приливы и отливы, а также опережение равноденствий можно объяснить тяготением. Выводы, сделанные в этой книге, мгновенно создали Ньютону прочную репутацию в научном мире.

Несмотря на всю важность влияния, которое *Principia* оказали на физику, их долгосрочные следствия, которые делают эту работу знаменитой даже через три столетия после ее первой публикации, связаны с вкладом, сделанным в математику. Центральным моментом этого вклада является *дифференциальное и интегральное исчисление* — темы, образующие курс, который проходят многие первокурсники в современных университетах (столь ненавистный для некоторых), и лежащие в основе практически всей современной науки и техники. Однако крайне сложно увидеть в *Principia* сходство с современным учебником по исчислению. Обозначения, используемые Ньютоном, кажутся современному читателю старомодными. Современные ученые испытывают сложности, связанные с пониманием языка его геометрии. Традиционный формализм более близок к предложенному Готфридом Вильгельмом фон Лейбницем, которые считается соавтором исчисления (и с которым Ньютон ожесточенно спорил о научном приоритете). По иронии судьбы, новый подход к дифференциальным уравнениям, созданный Пуанкаре, который мы опишем ниже, по своему духу в некоторых отношениях более близок к подходу Ньютона, т. к. по своей природе является геометрическим. Многие математики «мыслят картинками», даже если не используют их в своей опубликованной работе. Такой подход мог бы обеспечить более привлекательный доступ для студента, но ему еще только предстоит попасть в учебники для первокурсников.

Вообще говоря, Ньютон дал способ получения математических моделей, которые могли бы описать многие другие физические процессы. Помимо небесной механики — изучения движений небесных тел — он заложил основы теоретической механики как таковой, создав теорию, необходимую для объяснения и объединения наблюдений Кеплера, Галилея и других ученых. Подобно аксиоматическому подходу к геометрии Евклида, теоретическая механика пытается объяснить множество различных явлений с помощью нескольких основных законов. Исчисление является центральным моментом такого подхода, и Ньютон воспользовался им, чтобы создать и анализировать те математические объекты, которые мы сейчас называем *дифференциальными уравнениями*. Что такое дифференциальное уравнение, и в чем состоит его важность? На нескольких последующих страницах мы оторвемся от Пуанкаре и Ньютона, чтобы исследовать это понятие.

Язык законов природы

Математика является особенно полезным языком для выражения законов физики, подобных тем, которые, по предложению Ньютона, должны управлять движениями гравитирующих тел. Однако здесь следует проявить осторожность. На протяжении веков математики превратили многие обычные слова в названия своих собственных специальных концепций и конструкций. Это усложняет нашу задачу: иногда мы подразумеваем обычный смысл какого-то слова, со всеми его значениями, а иногда нам нужно только его техническое, «математическое» значение. В своей книге мы будем обозначать такое техническое употребление, выделяя соответствующее слово или фразу *курсивным шрифтом*.

Дифференциальное уравнение — одно из самых полезных математических «выражений». Это способ связи скоростей изменения *переменных*, описывающих состояние (физической) системы, с текущими значениями этих переменных. Для иллюстрации возьмем простой пример: падающий мяч. Допустим, что мы бросаем мяч из окна вниз, так что он сразу начинает падать. В любой момент падения мяча его *состояние* можно описать с помощью двух *переменных*: положения, или высоты, h, и скорости v. Эти величины называются переменными, потому что по мере падения мяча с течением времени они изменяются. Их представляют в виде *функций времени*, принимающих значения $h(t)$ и $v(t)$. Заключенная в скобки t говорит об их зависимости от времени, которое обычно обозначается именно этой буквой. Графики, описывающие ежемесячные изменения уровня безработицы или процентных ставок, служат примерами таких функций времени. В нашем случае основной предпосылкой является то, что функции h и v существуют и могут быть найдены при *решении* соответствующего дифференциального уравнения, что мы и опишем ниже.

Обе эти переменные необходимы для определения состояния мяча. Благодаря ньютоновой механике, нам известно, что скорость изменения импульса мяча равна силам, действующим на него из-за тяготения, сопротивления воздуха, ветра и всего, с чем он столкнется на своем пути вниз. Импульс является произведением массы на скорость, но в данном случае масса не изменяется, поэтому мы можем сказать, что *быстрота изменения скорости,* — называемая *ускорением,* — умноженная на массу, равна силам, действующим на мяч. (Это основа знаменитого уравнения $F = ma$, входящего в курс физики для первокурсников.) В свою очередь, *скорость* есть ни что иное, как *быстрота изменения положения*. Если допустить, что мяч достаточно тяжел, чтобы можно было пренебречь влиянием воздуха, и падает по свободной траектории, то остается только гравитационная сила. Согласно гравитационной теории Ньютона, вблизи поверхности Земли эта сила равна произведению массы мяча, m, на постоянную, традиционно обозначаемую g. Таким образом, мы получаем отношения:

$$\text{быстрота изменения положения} = \text{скорость},$$
$$\text{быстрота изменения импульса} = \text{гравитационная сила},$$

или, в специальных обозначениях, придуманных Лейбницем и используемых сегодня:

$$\frac{d}{dt}h = v$$
$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg.$$

Первое уравнение представляет собой просто-напросто определение скорости, второе — формулировку одного из законов движения Ньютона. Обозначение d/dt означает «быстрота изменения». Если говорить буквально, то в первом уравнении, например, $(d/dt)h$ обозначает отношение приращения (dh) переменной h к промежутку времени dt, за который это приращение произошло. (В физике и некоторых отраслях техники для выражения скорости изменения до сих пор используется обозначение, принятое Ньютоном: буква с точкой над ней — $\dot{h}$, $\dot{v}$.) Отрицательный знак во втором уравнении означает, что сила тяжести направлена вниз, тогда как высоту и скорость мы обычно измеряем в направлении вверх. Поскольку масса постоянна и с течением времени не изменяется, во втором уравнении ее можно было бы сократить. Как мы очень скоро увидим, эти два отношения определят функции h и v единственным возможным образом, как только мы определим значения $h(t_0)$ и $v(t_0)$ обеих переменных в момент времени $t = t_0$, когда мяч отпускают.

Это первое и последнее дифференциальное уравнение, которое мы записываем в таком виде, т. к. благодаря подходу, изобретенному Пуанкаре, мы можем создать прекрасный геометрический образ этого уравнения и тем самым вообще избежать использования формул. Наблюдая за падающим мячом, мы оцениваем его высоту и скорость в некоторый момент времени и, вероятно, можем предсказать, когда он упадет на землю. В нашем восприятии данной ситуации перемешивается все: положение, скорость и время. Чтобы их разделить, нужно перейти от физического пространства, в котором падает мяч, к математическому *фазовому пространству* или *пространству состояний*, в котором мы представляем дифференциальное уравнение, описывающее движение мяча. Фазовое пространство не является пространством в том же смысле, что и населяемый нами трехмерный мир: оно лишь пользуется указанием физического пространства, чтобы представить величины, описывающие состояние мяча, в графическом виде. Как мы видели раньше, каждое состояние характеризуется положением h и скоростью v, зависящими от времени. Фазовое пространство разделяет эти величины, изображая траекторию движения мяча в виде кривой, описывающей его положение и скорость в каждый момент времени.

На рисунке 1.1 *a* горизонтальная ось изображает высоту, а вертикальная ось — скорость. Здесь фазовым пространством является плоскость страницы. Положительные скорости соответствуют подъему мяча (брошенного вверх), а отрицательные — его падению вниз, к земле. Стрелки показывают направление течения времени. Предположим, что мяч падает из состояния покоя с высоты в 20 метров (точка a_0). Он движется по кривой a_0, a_1, чтобы удариться о землю (0 метров) со скоростью $-19,81$ м/с. Сброшенный с высоты 25 метров, он движется от b_0 к b_1 к земле со скоростью $-22,15$ м/с. Брошенный вверх с земли с той же скоростью ($+22,15$ м/с), он движется из точки b_2 и попадает в точки b_2, b_0, b_1, сначала поднимаясь до 25 метров, а затем опускается по той же самой траектории в фазовом пространстве, что и мяч, сброшенный с этой высоты. На рисунке 1.1 *a все* возможные движения мяча изображены в виде *семейства* кривых. Слово «семейство» означает, что все кривые получены из одного дифференциального уравнения.

Эти кривые в фазовом пространстве являются параболами (парабола — это одно из конических сечений греческой математики, изображенное на рис. 1.5 *d* ниже). Однако их не следует путать с параболическими

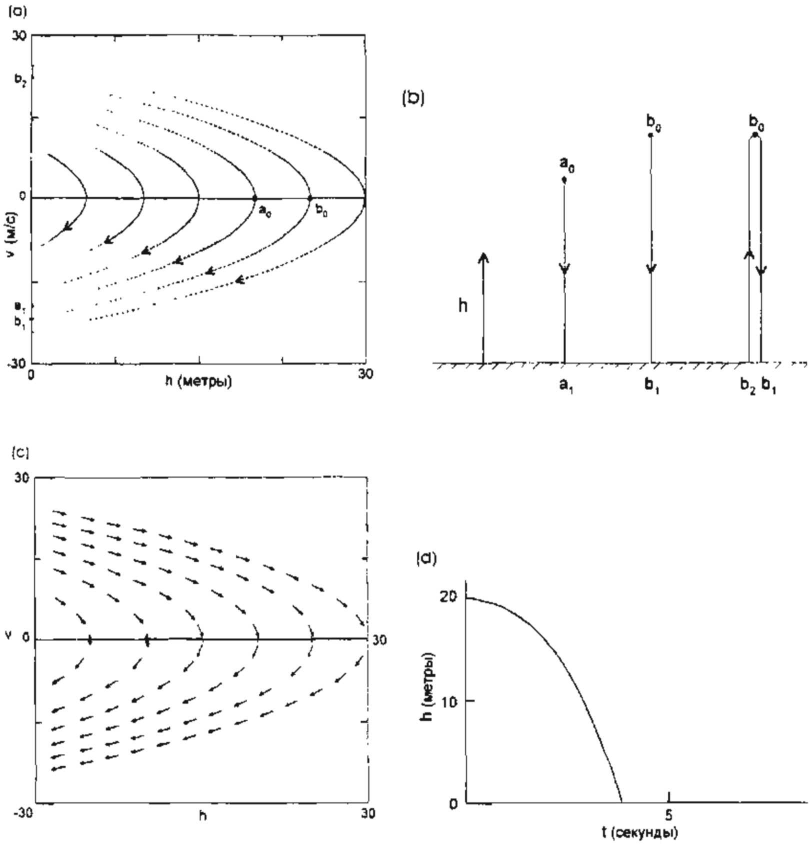


Рис. 1.1. (a) Двумерное фазовое пространство падающего мяча; (b) некоторые соответствующие движения в физическом пространстве; (c) векторное поле; (d) положение $h(t)$ как функции времени.

траекториями, которые описывают мячи, брошенные под углом в физическом пространстве: все движения в нашем фазовом пространстве соответствуют вертикальному падению мячей или подбрасывание их вертикально вверх и возвращению назад по той же траектории в физическом пространстве: смотрите рис. 1.1 *b*. Мы говорим, что такая система имеет *одну степень свободы*, т. к. существует только одно направление движения мяча и только один мяч. Каждая степень свободы предполагает наличие двух измерений в фазовом пространстве: одно — для положения, второе — для скорости. Чтобы представить движение мяча, брошенного под углом, нам понадобилось бы фазовое пространство с четырьмя измерениями: два для положения (по вертикали и по горизонтали) и два для соответствующих составляющих скорости (по вертикали и по горизонтали), т. к. в этом случае по мере движения вверх или вниз мяч движется еще и в сторону. В данном случае мы говорим о существовании *двух степеней свободы*. Двум мячам потребовалось бы еще одно удвоение числа размерностей фазового пространства, т. к. для каждого из них необходимы две переменные положения и две переменные скорости. В общем случае, как положение, так и скорость, являются *векторами*, каждый из которых имеет *n составляющих*, причем каждая составляющая — это функция времени, определяющая соответствующую величину в данном направлении. Мы не можем (без труда) нарисовать рисунки с четырьмя или более измерениями, но мы можем вывести некоторые их свойства.

Здесь следует отметить, что это дифференциальное уравнение является простейшей возможной моделью объекта, брошенного вертикально вверх или падающего вниз. Таким образом, законы Ньютона успешным и практичным образом объяснили знаменитый (и, возможно недостоверный) опыт, во время которого Галилей одновременно сбросил шары различной массы с падающей Пизанской башни и обнаружил, что все они достигли земли в одно и то же время. Вспомним, что масса во втором из уравнений, приведенных выше, сократилась: ускорение падающего предмета не зависит от его массы. Однако эта модель не включает эффекта «второго порядка», например, сопротивления воздуха. Как все теории и модели, она дает идеализированное и упрощенное представление реальности. Физика существует, главным образом, потому, что ученые научились пренебрегать несущественной информацией, сосредоточиваясь на сути. В основную модель можно включить дополнительные эффекты, если такая необходимость существует. Чтобы точно предсказать движение пера или падающего листа, нам понадобилось бы учесть силы действия воздуха, в котором данный предмет парит.

Модели реальности

Модели играют центральную роль в науке. При изучении сложностей генетики биологи разводят целые поколения дрозофил и изучают их мутации. Дрозофила служит моделью других, более высокоразвитых организмов. Ученые надеются, что она содержит ключевые аспекты, вследствие чего ее относительная простота обеспечит лучшее понимание генетики в целом. Точно также дифференциальные уравнения ньютоновой механики служат *моделями* таких физических явлений, как падающие мячи или, в более глобальном смысле, движение планет. Подобные модели являются *аппроксимацией* (приближением) к реальным явлениям. Теория упругости способна предсказать напряжение в ферме моста до нескольких процентов, но не все модели настолько точны: дифференциальные уравнения, моделирующие нейронные сети, являются, скорее, метафорой реальной системы. Метафоры — понятие литературное, и это сравнение вполне уместно. В том же смысле, в каком поэт У. Х. Оден говорил о «вторичных мирах» искусства, музыки и литературы, дифференциальные уравнения населяют вторичный математический мир, посредством которого мы надеемся лучше понять свой собственный «реальный» мир. Именно поэтому они подвержены всем правилам чисто математического мира, а для их решения можно использовать все его инструменты и методы. Далее мы продолжаем исследовать некоторые из них.

Каким образом были получены кривые, изображенные на рис. 1.1? Путем *решения* или *интегрирования* дифференциального уравнения, которое мы записали раньше в вербально-символическом виде. Как мы уже отмечали, чтобы добиться этого, Ньютон и Лейбниц придумали интегральное исчисление. Благодаря интегрированию, уравнения, которые связывают величины, характеризующие быстроту изменения разных параметров, превращаются в формулы, которые выражают положения и скорости мяча в каждый момент времени: с помощью этой операции получаются вышеописанные функции h и v. Грубо говоря, для нахождения значений $h(t)$ и $v(t)$ по истечении конечного промежутка времени нужно суммировать (проинтегрировать) все бесконечно малые изменения, которые происходят с течением времени. Мы опишем этот процесс с точки зрения геометрии.

Выражение быстроты изменения эффективным образом связывает с каждой точкой фазового пространства стрелку, обозначающую (своей длиной) скорость и (своим углом) направление, в котором происходят изменения положения и скорости. Совокупность всех этих стрелок, называемых векторами, образует *векторное поле* (см. рис. 1.1 c). Чтобы решить дифференциальное уравнение, мы начинаем с точки, например a_0, и движемся по стрелкам, создавая кривую, которая в каждой точке касается векторного поля, определенного этим дифференциальным уравнением. Стоя на плоскости фазового пространства, можно представить, как делаешь шаг в направлении вектора, лежащего у твоих ног, причем ширина шага пропорциональна длине вектора. Затем этот же процесс повторяется для вектора, исходящего из конечной точки предыдущего, и т. д. Если шаги делать короче, а их число больше, то многоугольная траектория, которая получается в итоге, приближается к гладкой кривой.

Так, подобно ветру, который оставляет воспоминание о себе в колышущемся пшеничном поле, или течению реки, несущему клочья пены и сплавной лес и местами оставляющему свидетельства своего существования, векторное поле ведет отдельные решения дифференциального уравнения, начинающиеся в каждой точке фазового пространства, к образованию общего *фазового портрета*. Полная картина, которая получается в результате, является *общим решением* или *потоком* данного дифференциального уравнения. Траектории, изображенные на этой картине, называются *кривыми решения, орбитами* или *траекториями*. Семейство парабол на рисунке 1.1 *a* является одним примером общего решения. Мы также встретим множество других. Наконец, траекторию в фазовом пространстве можно построить и как функцию времени: график, демонстрирующий высоту мяча в каждый момент времени (см. рис. 1.1 *d*).

Ньютон счел свое открытие настолько важным, что опубликовал его в виде анаграммы, которая в расшифрованном виде гласила: *Data aequatione quotcumque fluentes quantitae involvente fluctiones invenire et vice versa,* или: *Если известны уравнения, содержащие сколь угодно много текущих величин, то поток может быть определен, и наоборот.* В этом утверждении выражена связь дифференциальных уравнений с геометрическим изображением потока. Слово «поток» вызывает в памяти термин Ньютона *текучий,* который он использовал в отношении динамически изменяющейся величины; быстроту изменения, которая сейчас называется *производной,* он называл *флюксией*.

Решить дифференциальное уравнение означает найти его общее решение: его поток. Иногда для этого достаточно всего одной кривой, начинающейся в определенной точке, например, в точке a_0 на рисунке 1.1. Затем мы говорим о решении *задачи с начальными условиями* для дифференциального уравнения. Именно такой подход принят в учебнике по исчислению; его автор ожидает, что в ответ студент даст формулу, содержащую значения переменных состояния (положения и скорости) в каждый момент времени, если даны конкретные начальное положение и скорость. К сожалению, класс уравнений, которые можно решить явно и получить такие формулы, очень мал. (Об этом большинство учебников по исчислению умалчивают: людям не особенно нравится узнавать, что метод, на изучение которого они потратили столько труда, не особенно полезен!) Используя геометрический подход Пуанкаре, мы, напротив, пытаемся найти качественные свойства решения, *не требуя формулы, выражающей это решение*. Такие качественные методы применимы к гораздо более обширному классу дифференциальных уравнений.

Но сначала мы должны убедиться, что решение существует: что переменные данной задачи действительно можно представить в виде функций времени, даже если мы не можем найти для них явные формулы. В некоторых случаях может не получиться гладкой кривой, в каждой точке которой существует касательный вектор, принадлежащий к данному векторному полю. Векторы также могут противоречить друг другу, так что бывает невозможно двигаться по стрелкам непрерывным образом. При таких обстоятельствах нарушается *свойство существования*, а изучать несуществующие объекты не имеет смысла. Может случиться и так, что через данную точку мы можем провести две или более гладкие кривые, имеющие касательные векторы в каждой точке, и векторы опять-таки берутся только из векторного поля, определенного данным дифференциальным уравнением (см. кривые $r_{-1}r_0r_1$ и $s_{-1}s_0s_1$ на рис. 1.2). В этом случае мы говорим, что *свойство единственности* не удовлетворяется.

Вопросы типа *существования* и *единственности* в теории дифференциальных уравнений являются фундаментальными. Большой класс векторных полей удовлетворяет обоим этим свойствам и включает поля, моделирующие физические процессы. Благодаря этому счастливому стечению обстоятельств физика обладает потрясающей способностью к предсказаниям. Представим на одно мгновение, что могло бы случиться, если бы в задаче с начальными условиями, моделирующей процесс, который происходит в ядерном реакторе, не выполнялось условие единственности. Тогда для данных входных значений нельзя было бы определить, какая реакция происходит: безопасная, которая ведет, например, к возникновению равновесия при желаемых условиях работы, или опасная, способная вызвать ядерную катастрофу. В нашем более скромном примере с падающим мячом модель, неспособная предсказать траекторию его движения или время полета из начального положения и его скорость, была бы мало полезной.

Все, конечно же, не так просто, как может показаться на первый взгляд. Дифференциальные уравнения служат моделями в таких различных областях, как: физика, химия, биология, социология, экономика и психология. Их поведение может очень сильно отличаться. Даже базовые вопросы существования и единственности, которые для некоторых классов уравнений не представляют сложности, для других остаются без ответа. Например, еще не доказано, что *уравнения Навье–Стокса*, моделирующие движение несжимаемой жидкости типа воды в трехмерном физическом пространстве, удовлетворяют свойству *глобального существования*. Несмотря на то, что мы нашли много особенностей их *возможных* решений, мы до сих пор не знаем, существуют ли эти решения в полной общности.

По таким вопросам между математиками и физиками нередко возникает полемика. Последних обычно не сильно волнуют вопросы существования. Для них уравнение — это, прежде всего, способ получения тех свойств решений, которые необходимы для понимания и предсказания физических явлений. Это совершенно разумно и естественно. Но математиков, в первую очередь, занимают вопросы существования и единственности, и лишь утряся эти моменты, они переходят к изучению свойств решений. Причины, которые ими движут, тоже ясны. Их, прежде всего, интересуют математические объекты и, по понятным причинам, они настороженно относятся к тем вещам, которых может и не быть. (В мире математической логики *любое* утверждение, касающееся подобных объектов, является истинным, т. к. оно основано на том, что не существует.) Если пренебречь столь фундаментальными вопросами, то вполне можно прийти к ошибочным физическим выводам. Однако, что касается случаев типа уравнений Навье–Стокса, образующих надежно установленную модель, специалисты мало сомневаются в том, что решения существуют, и большинство считает, что однажды вопрос существования будет решен. При этом могут появиться тонкие свойства решений с доселе неизвестным физическим смыслом. А до тех пор, видимо, разумно *допускать*, что решения существуют, и тратить время на изучение их свойств, относящихся к разным областям применения.

Такие вопросы требуют внимания как математиков, так и физиков. Они являются центральными для *прикладной математики* (области с плохо определенной границей), лежащей между *чистой математикой* (неземным царством аксиом и теорем) и реальным беспорядочным миром, в котором мы живем. Специалисты по прикладной математике, в основном, занимаются построением и анализом математических моделей. Лучшая работа в их области свободно переходит от областей практического применения к чисто математическим вопросам и обратно — истинный «перенос технологии» между реальным и вторичными мирами.

Мы упоминали о концепции *глобального существования*. Чтобы понять ее, вспомним, что каждая кривая решения на рис. 1.1 образована точкой, представляющей состояние системы, движущейся во времени. Глобальное существование предполагает, что кривая определяется для каждого момента времени в прошлом, настоящем и будущем. Это не обязательно означает, что траектория в фазовом пространстве начинается из бесконечности и возвращается в бесконечность. Это может быть замкнутая петля, вокруг которой состояние перемещается бесконечно часто, повторяя пройденный путь снова и снова, подобно петле $q_0q_1q_2$ на рисунке 1.2. Это пример *периодической орбиты*. Возможно, наиболее знакомыми примерами таких движений являются годовое обращение Земли вокруг Солнца и месячное вращение Луны вокруг Земли.

В противоположность концепции глобального существования можно поставить понятие *локального существования*. Это означает лишь то, что кривая существует в течение некоторого короткого промежутка времени вблизи начального момента (например, небольшой отрезок $p_{-1}p_1$ вблизи p_0 на рис. 1.2 пересекается решением в столь короткий промежуток времени). Дифференциальные уравнения небесной механики, с которыми мы будем работать, обыкновенно удовлетворяют гипотезам локального существования, но, как мы увидим в третьей главе, глобальное существование не всегда для них справедливо. Глобальное существование предполагает локальное существование, но обратное верно не всегда.

Другим важным свойством, на которое мы полагаемся, является *непрерывность решений относительно начальных условий*. Грубо говоря, это значит, что траектории, имеющие близкие начальные условия (данные), остаются близкими, по крайней мере, в течение некоторого времени; см. кривые c_0c_1 и d_0d_1 на рис. 1.2 с близкими начальными условиями c_0 и d_0. Это свойство тоже справедливо для всех дифференциальных уравнений. Однако если мы запросим, чтобы глобально определенные решения с близкими начальными условиями оставались близкими на протяжении *всего* времени, то мы потребуем достаточно редкое свойство, называемое *устойчивостью;* см. кривые e_0e_1 и f_0f_1 на рис. 1.2. При изучении дифференциальных уравнений устойчивость тоже является фундаментальным понятием. Она возникла из традиционной задачи небесной механики — устойчивости Солнечной системы — и получила систематическое развитие в работе Александра Ляпунова в конце XIX века. В четвертой главе мы вернемся к этой концепции и обсудим ее более подробно.

Пока что все наши примеры и объяснения излагались в двумерном фазовом пространстве: плоскости. Если бы мы были ограничены двумя переменными состояния для каждой задачи, то мы не ушли бы дале-

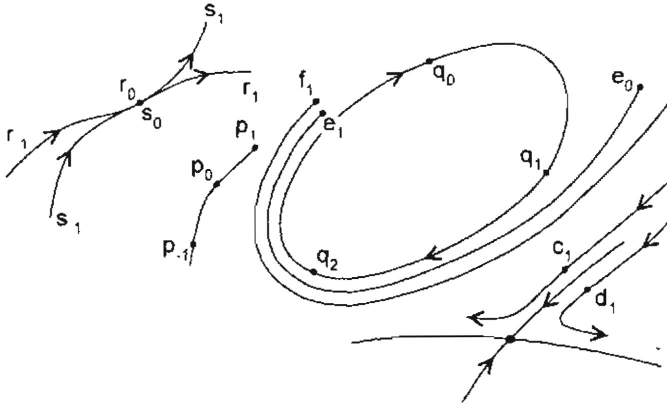


Рис. 1.2. Еще одно двумерное фазовое пространство, иллюстрирующее отсутствие единственности, локальное и глобальное существование, непрерывную зависимость от начальных условий и устойчивость Объяснение приведено в тексте

ко. К счастью, дифференциальные уравнения также можно определить и в более общих абстрактных пространствах. Такое обобщение применимо не только к пространствам, число измерений в которых превышает два, его можно продлить и на абстрактные геометрические объекты, называемые *дифференцируемыми многообразиями* Первое естественное обобщение связано с трехмерным пространством. На него можно распространить все определения и выводы, связанные с существованием, единственностью и непрерывной зависимостью решений дифференциальных уравнений в плоскости. Мы можем производить обобщение для пространств с бóльшим числом измерений· четырьмя, пятью и даже 7058. Не имеет значения, сколько их будет, пока их число конечно. Такие пространства лежат за пределами нашего физического воображения. Мы не можем представить даже четырех- или пятимерные предметы, но по аналогии с одним, двумя и тремя измерениями мы можем сделать в их отношении полезные выводы.

Изучение таких многомерных фазовых пространств – это не просто игра, придуманная математиками. Это может показаться парадоксальным, но большинство динамических задач, возникающих в физике и технике, легче решать в фазовых пространствах с числом измерений, превышающим три, или на дифференцируемых многообразиях. Мы уже указали, что четыре измерения (два для составляющих положения и два для составляющих скорости) необходимы для описания состояния мяча, брошенного под произвольным углом. Для описания состояния палки, которая, будучи брошенной, переворачивается в воздухе, нам также понадобились бы угловые переменные, описывающие ее положение, и связанные с ними угловые скорости. Самая простая возможная модель автомобиля требует порядка пятнадцати положений и пятнадцати скоростей для описания относительных движений тела, колес и компонентов подвески: фазового пространства с тридцатью измерениями. По мере движения мяча, палки и машины по траекториям в нашем трехмерном мире, их математические модели эволюционируют в пространстве состояний с неземным числом измерений.

Миры многообразий

Что такое *дифференцируемое многообразие?* Давайте вновь начнем с двух измерений. Двумерное дифференцируемое многообразие — это геометрический объект, локальным приближением которого является часть плоскости, подобная маске из папье-маше, в которой маленькие плоские клочки бумаги накладываются друг на друга, создавая гладко-искривленную поверхность. Примером такого двумерного многообразия служит поверхность сферы: вокруг каждой точки можно найти небольшую окрестность, которую вполне можно приблизительно представить в виде плоского участка. (С точки зрения математика, сфера представляет собой только двумерную поверхность без внутреннего сплошного шара.) Хотя планета, на которой мы живем, представляет собой шар, мы обычно воспринимаем ее как плоскую поверхность, и наши местные атласы дорог основаны именно на этом удобном приближении. В действительности же людям понадобились тысячи лет, чтобы понять, что Земля — это не плоскость. Другим классическим и важным примером двумерного многообразия является *тор* (математическое название поверхности бублика). Окрестность любой точки тора тоже можно приблизительно представить небольшим кусочком плоскости. В локальном смысле тор, сфера и плоскость неотличимы друг от друга: чтобы оценить их кривизну и строение в целом, нужно «выйти за их пределы». (Представьте, каким образом инопланетная цивилизация, живущая на тороидальной планете, могла бы обнаружить ее форму.) На рисунке 1.3 изображены эти три общеизвестных примера. А вы можете привести другие? Термин «дифференцируемое» означает, что рассмат-

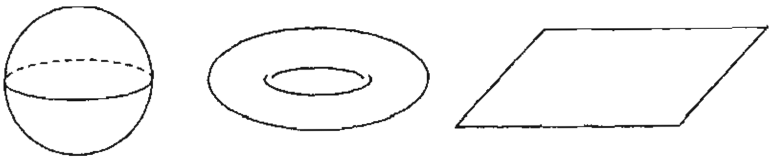


Рис. 1.3. Сфера, тор и плоскость

риваемое многообразие является гладким, вследствие чего на нем можно производить (дифференциальное) исчисление.

Аналогичным образом, для любого числа k, превышающего два, можно определить понятие k-мерного многообразия. Для k, равного трем, например, необходимо, чтобы небольшой кусочек вокруг любой точки многообразия был подобен небольшому кусочку нашего обычного трехмерного пространства. Обратите внимание, что в общем случае многообразие невозможно полностью или *целиком* приблизить с помощью соответствующего *плоского* пространства, на котором его моделируют. Сферу невозможно развернуть на плоскости, и, в действительности, она отличается от последней: например, у сферы нет границ (нет краев), но, несмотря на это, она конечна. Прямые линии и плоскости, которые мы изучаем в старших классах на уроках геометриях, а также окружающее пространство нашего повседневного опыта служат примерами плоских или *евклидовых* пространств с одним, двумя и тремя измерениями соответственно.

На дифференцируемом многообразии типа сферы можно определить дифференциальное уравнение. Тогда им будет ограничиваться векторное поле. Это означает, что с каждой точкой сферы связан вектор, расположенный в плоскости, касательной к сфере в этой точке. Чтобы решить задачу с начальными условиями на сфере, нужно найти на ней гладкую кривую, имеющую в каждой точке касательный вектор, принадлежащий векторному полю (см. рис. 1.4). Векторные поля на торах мы обсудим в главе 5.

Мы уже видели, что для описания физических ситуаций могут понадобиться многомерные фазовые пространства, но зачем нам нужна заведомая сложность в виде дифференцируемых многообразий? Основная причина состоит в том, что их использование действительно может облегчить решение дифференциальных уравнений, *сокращая* размерность их фазовых пространств. Ньютонова механика обнаруживает множество *неизменных величин* или *постоянных движения:* свойств динамических

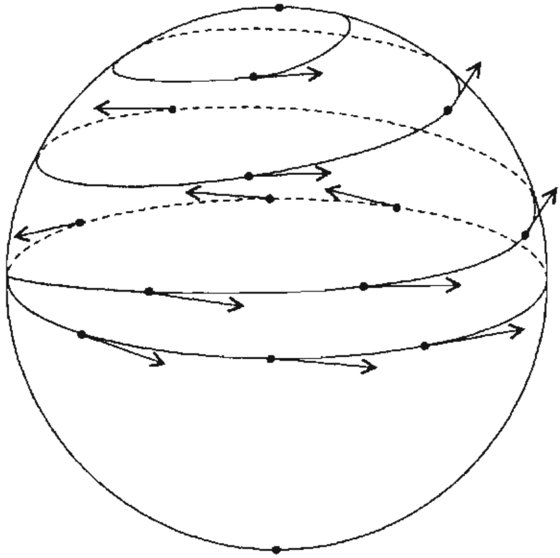


Рис. 1.4. Векторное поле на сфере и некоторые кривые его решений

систем, которые, казалось бы, должны изменяться, но на самом деле сохраняют свои начальные значения на протяжении всей эволюции системы. При этом они связывают переменные состояния неизменными (алгебраическими) отношениями, ограничивая их областями фазового пространства, описанными соответствующими алгебраическими уравнениями. Эти области, как правило, являются дифференцируемыми многообразиями.

Хорошим примером служит *кинетический момент* твердого тела, например, палки, падающей в пространстве. Из ньютоновых законов движения следует, что если на тело не действуют силы вращения (*вращающие моменты*), то величина его кинетического момента останется неизменной. Именно этим эффектом пользуется защитник в американском футболе, когда при передаче паса он придает мячу вращение с целью обеспечения его устойчивости. Для определения кинетического момента тела в трехмерном (физическом) пространстве нам нужны три составляющие, скажем, a_1, a_2 и a_3. Ограничение постоянной величины предполагает, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \text{const}$, а это как раз уравнение, определяющее двумерную сферу в трехмерном пространстве. Уравнения твердого тела можно решать в этом сокращенном фазовом пространстве, а не в большем трехмерном пространстве состояний. В пятой главе мы опишем этот метод редукции более подробно. И даже когда подобная редукция невозможна для всех решений, на гладких многообразиях меньших размерностей все равно могут существовать некоторые частные множества орбит, которые могут послужить основой для наших попыток построить полный фазовый портрет.

Изучение многообразий является важной частью *топологии* — области математики, которая занимается внутренними свойствами объектов, сохраняющимися при искажениях размера или формы. Не случайно, что именно Пуанкаре был одним из изобретателей топологии, или «analysis situs» — изучения положения, как ее тогда называли. Теперь, когда мы описали некоторые понятия топологии и теории дифференциальных уравнений, давайте вновь обратимся к Пуанкаре и попытаемся понять его мысли.

Задача n-тел

Так какая же задача занимала Пуанкаре на протяжении столь длительного времени? Он трудился над одним из самых древних мечтаний человечества: он хотел понять движение небесных тел — Солнца, планет и лун нашей Солнечной системы. Первая полная математическая формулировка этой задачи появилась в труде Ньютона *Principia.* Поскольку за движение планет и звезд отвечало тяготение, Ньютону пришлось выразить гравитационные взаимодействия в дифференциальных уравнениях.

Сначала Ньютон принял как само собой разумеющееся то, что большинство небесных тел можно смоделировать в виде материальных точек. Рассмотрим случай двух тел. Согласно закону тяготения Ньютона, сила, действующая на каждое тело, прямо пропорциональна произведению масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами этих тел, причем действует она по прямой линии, соединяющей эти тела. Таким образом, гравитация действует на тела, считающиеся сплошными сферами, точно так же, как она действовала бы на материальные точки, имеющие те же массы, что и эти сферы, и расположенные в их центрах. На этом допущении Ньютон построил всю свою теорию и только перед самой ее публикацией осознал, что это допущение требует обоснования. Отыскание строгого математического доказательства теоремы отняло у него некоторое время, вследствие чего публикацию *Principia* пришлось отложить. Однако этот фундаментальный результат позволил сформулировать знаменитую *задачу n-тел* — один из самых важных вопросов в историческом развитии как математики, так и физики.

Неформально физическую задачу можно сформулировать следующим образом: даны только настоящие положения и скорости группы небесных тел; нужно предсказать их движения на все будущее время и вывести их из всего прошлого времени. Если быть более точными, рассмотрим n материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ в трехмерном (физическом) пространстве. Допустим, что между каждой парой частиц действует ньютонова сила притяжения. Тогда, если в некоторый «настоящий» момент времени t_0 для каждой частицы известны начальное положение в пространстве и начальная скорость, нужно определить положение каждой частицы в каждый будущий (или прошлый) момент времени. На языке математики это означает найти глобальное решение задачи с начальными условиями для дифференциальных уравнений, описывающих задачу n-тел. Когда n равно двум, эта задача называется задачей двух тел, или *задачей Кеплера*, в честь Иоганна Кеплера, немецкого астронома, законы которого, интерпретирующие астрономические наблюдения Тихо Браге, вдохновили Ньютона на создание гравитационной модели. (См. рис. 1.5.)

Дифференциальные уравнения задачи двух тел решаются просто. Можно доказать, что траектория движения одной частицы относительно другой всегда совпадает с *коническим сечением*. (Сечения, называемые коническими, имеют такое название, т. к. получаются при разрезании конуса под различными углами, как на рис. 1.5 *c*.) Это означает, что описываемая в физическом пространстве орбита может быть кругом, эллипсом, параболой, ветвью гиперболы или прямой линией.

На первый взгляд эти уравнения могут показаться нерешаемыми: полное описание состояния каждой частицы требует три переменные положения и три составляющие скорости, т. к. обе частицы движутся в трехмерном физическом пространстве. Следовательно, фазовое пространство имеет дважды шесть, т. е. двенадцать измерений. Мы говорим, что система обладает шестью *степенями свободы*: по одной для каждой из переменных положения, необходимых для ее описания. Как можно анализировать решения, извивающиеся в двенадцатимерном пространстве?

Здесь нам на помощь приходят различные законы сохранения ньютоновой механики. Во-первых, поскольку силы действуют только по линии, соединяющей частицы, когда-то начавшие двигаться в плоскости, эти частицы навсегда останутся в этой же плоскости. Поэтому для каждой частицы нам нужны только две переменные положения и две состав-

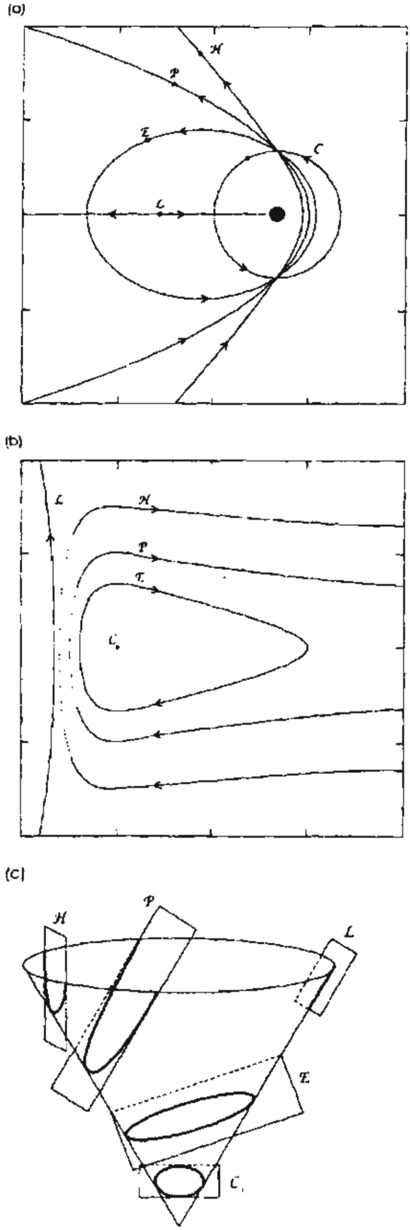


Рис. 1.5. Задача двух тел: (a) несколько возможных движений гравитирующей частицы относительно другой частицы в физическом пространстве, (b) те же движения, представленные в фазовом пространстве. Конические сечения получаются при разрезании конуса под разными углами. Здесь буквой C обозначен круг, E — эллипс, P — парабола, H — гипербола, L — линейный отрезок

ляющие скорости, или всего восемь переменных. Кроме того, сохраняется также *импульс* — сумма произведений массы частицы и ее скорости, так что положение центра масс не меняется относительно тел (он лежит где-то на линии, соединяющей частицы, ближе к более тяжелому телу). Таким образом, нам нужно лишь определить *относительное* положение одной частицы по сравнению с другой, вследствие чего число переменных сокращается до двух переменных положения и двух переменных скорости, или двух степеней свободы. Наконец, отсутствие вращающих моментов означает, что кинетический момент тоже сохраняется. Именно вследствие этого эффекта балерина или фигурист вращается быстрее, когда прижимает к себе обе руки: вращательное и радиальное движения связаны и каждое из них определяет другое. Таким образом, из всех уравнений остаются два, описывающие быстроту изменения расстояния между частицами и их относительную скорость вдоль соединяющей их линии. Остается всего одна степень свободы.

Полное решение задачи Кеплера первым дал швейцарский математик Иоганн Бернулли в 1710 году. Имя Бернулли, происходящее из Антверпена, часто появляется в математике и физике. По меньшей мере восемь членов семьи Бернулли, принадлежащие к трем поколениям, сделали важные вклады в науку. Иоганн родился в Базеле в 1667 году, а в 1705 году стал профессором в университете в своем родном городе, сменив на этом посту своего старшего брата Якоба. Даниил, один из сыновей Иоганна, знаменит своими вкладами в механику жидкости и кинетическую теорию газов.

Как ни печально, задача двух тел оказалась единственной легкой задачей среди всех задач n-тел. Для n, превышающих два, несмотря на огромные затраченные усилия, ни один случай не получил полного решения. Эта задача даже стала темой для бесед в модных парижских салонах, вызвав интерес таких персон, как Вольтер и мадам де Ментенон. Большинство великих математиков XVIII–XIX веков бились над определяющими ее дифференциальными уравнениями, но не могли намного продвинуться вперед, хотя и сделали важные вклады в математику и теорию дифференциальных уравнений в процессе реализации своих попыток. Чуть позже у нас будет возможность изучить некоторые их достижения.

Премия короля Оскара

«Дана система из произвольно большого числа материальных точек, взаимодействующих друг с другом по законам Ньютона. Попытайтесь представить (при условии, что никакие две точки никогда не столкнутся) координаты каждой точки в виде рядов от переменной, которая является некоторой известной функцией времени и для всех значений которой ряд сходится равномерно.

Казалось бы, эту задачу, решение которой значительно расширило бы наше понимание Солнечной системы, можно решить с помощью аналитических методов, которые в настоящее время имеются в нашем распоряжении. Мы можем, по меньшей мере, предположить это, т. к. незадолго до своей смерти Лежен Дирихле сообщил своему знакомому геометру [Леопольду Кронекеру], что обнаружил метод интегрирования дифференциальных уравнений механики и что, применяя этот метод, ему удалось продемонстрировать устойчивость нашей планетарной системы абсолютно строгим образом. К сожалению, об этом методе нам известно лишь то, что отправной точкой данного открытия, судя по всему, стала теория малых колебаний. Тем не менее, мы почти наверняка можем предположить, что этот метод базировался не на длинных и сложных расчетах, а на развитии фундаментальной и простой идеи, которую можно надеяться найти в процессе упорного и глубокого исследования.

Если же по завершении конкурса эта задача все-таки останется нерешенной, то премия также может быть присуждена за труд, в котором какая-либо другая задача механики будет рассмотрена в вышеобозначенном духе и получит полное решение».

Так звучало объявление, опубликованное в *Acta Mathematica,* том 7, за 1885–86 гг. Густав Миттаг-Леффлер, выдающийся стокгольмский математик и главный редактор недавно основанного журнала, сделал смелый шаг. Он убедил короля Швеции и Норвегии Оскара II учредить крупную денежную премию и подготовить медаль для вручения первому ученому, который получит глобальное общее решение задачи n-тел, и отметить (посредством вручения награды) шестидесятый день рождения короля 21 января 1889 года.

После ряда споров о трудностях, с которыми будет сопряжена попытка добиться того, чтобы самые выдающиеся математики мира согласились работать вместе, было создано международное жюри, состоявшее из берлинского ученого Карла Вейерштрасса (бывшего учителя Миттаг-Леффлера), французского математика Шарля Эрмита и самого

Илл. 1.2. Густав Миттаг-Леффлер (Любезно предоставлено Институтом Миттаг-Леффлера)

Миттаг-Леффлера. Это жюри поставило четыре задачи, из которых нас касается только первая, процитированная выше, хотя интересно отметить, что четвертая задача относилась к группе фуксовых функций, над которыми также работал Пуанкаре.

Сделаем небольшое отступление, чтобы объяснить ряд технических терминов, которые будут неоднократно повторяться на страницах этой книги. При *разложении в ряд* или *приближении* решение (дифференциального уравнения) мы ищем в виде бесконечной суммы *членов*, каждый

Илл. 1.3. Король Швеции и Норвегии Оскар II. (Любезно предоставлено библиотекой университета Упсалы)

Илл. 1.4. Карл Вейерштрасс. (Любезно предоставлено Институтом Миттаг-Леффлера)

из которых является решением более простого вспомогательного уравнения. Первый член дает грубое приближение, сумма первого и второго — более точное и т. д. Если поправки снижаются до нуля и сумма всех членов конечна, мы говорим, что ряд *сходится*. В данном контексте каждый член является еще и функцией времени, поэтому, если ряд сходится для всего времени — будущего и прошлого, — значит он *сходится равномерно*. *Теория малых колебаний* включает уравнения, порождающие приближения первого порядка, так называемые линеаризованные уравнения. Ряды в небесной механике первыми использовали Лаплас и Лагранж, которых мы встретим в четвертой главе, где также обсудим линеаризацию.

Последним сроком подачи работ на конкурс было назначено 1 июня 1888 года. Денежная премия в 2 500 крон выдающейся не была (она соответствовала приблизительно одной третьей годовой зарплаты Миттаг-Леффлера), но престиж этой награды в то время был ничуть не меньше престижа Нобелевской премии в наши дни. Как только объявление о конкурсе было опубликовано, вся тяжелая артиллерия математического мира направила свои орудия на задачу n-тел. Многие люди хотели ее решить, но, в конечном итоге, попытались это сделать лишь пять из двенадцати человек, подавших свои заявки на участие в конкурсе.

Достижение Пуанкаре

Когда Анри Пуанкаре услышал о премии, учрежденной королем Оскаром, ему только что исполнился тридцать один год. Хотя он уже имел прочную репутацию и приобретал международную известность, он отлично понимал, что, получи он эту премию, его карьера сделает огромный скачок вперед. Задача, несомненно, чрезвычайно сложна, но попытаться все же сто́ит. Такие шансы выпадают не часто, и вторая такая возможность может представиться лишь через много лет.

Стояла дождливая ночь, и он очень устал. Пора было ложиться спать. Будучи психологически неподготовленным к новости, которую он только что получил, он не знал, сто́ит ли ему браться за эту задачу. Пять лет назад он потерпел неудачу в подобном конкурсе. Эссе, которое он показал для получения того Гран-при, сочли недостаточно хорошим. Но на этот раз все обстояло иначе. Он чувствовал себя более сильным и лучше подготовленным; однако какое-то смутное беспокойство не покидало его.

Решение сложного вопроса всегда сопряжено с определенным риском. К нему нужно приложить знание, умение и новые идеи, а также подготовиться к огромному объему работы. Недостаточно просто быть умным и уметь создавать новые идеи, обладать хорошей интуицией вкупе с аналитическим и синтетическим мышлением; огромную важность здесь имеет везение. Кроме того, нужно обладать силой и упрямством. После ночи горького разочарования, когда кажется, что из-за простой формальности, которую ты проглядел в самом начале, месяцы работы стали бессмысленны, на утро все равно нужно вставать полным сил и начинать все заново с еще большим энтузиазмом. Гораздо проще придерживаться знакомой территории и работать лишь в тех областях, к которым ты давно привык. Мало кто набирается смелости и стойкости, чтобы исследовать неизвестное.

Лежа в кровати и все никак не засыпая, Пуанкаре размышлял о своей жизни, о счастье, об успехе. Он доверял своей способности понимать, но усталость заметно снизила его привычный оптимизм. Впоследствии он напишет: «Жизнь – это лишь краткий эпизод между двумя вечностями смерти, но даже в этом эпизоде сознательная мысль длилась и будет длиться лишь одно мгновение. Мысль — не более чем вспышка света в длинной ночи. Но эта вспышка — все». Он так и не решил, примет ли этот вызов, когда, наконец, погрузился в сон.

Проснувшись следующим утром, он принял решение. Он попробует. Это был единственный возможный выбор. Он знал, что должен сделать это.

Небесная механика уже давно была любимым предметом Пуанкаре. Еще ребенком он любил наблюдать за ночным небом с заднего двора своего дома. Он выучил названия созвездий и был очарован блужданием планет. На улице было так тихо. Прохладный и свежий аромат летних цветов будил приятные чувства. Он чувствовал себя маленьким, но при этом защищенным, т. к. ощущал себя частью чего-то гораздо большего. Обыденные проблемы казались пустячными: звезды появились задолго до его рождения и, что бы он ни сделал, они останутся и после его смерти.

В своей первой математической работе по небесной механике, опубликованной в 1883 году, Пуанкаре рассмотрел несколько частных решений задачи трех тел. Через год свет увидела вторая его статья. Несмотря на их глубину и важность, эти вклады нельзя было счесть прорывами. Вопрос, за который могли присудить премию, потребовал бы нечто гораздо большее, однако благодаря своей предыдущей работе Пуанкаре уже обрел некоторое понимание данного предмета. Ему всегда хотелось продолжить его изучение, но на первый план постоянно выходили другие задачи, поэтому ему никогда не хватало времени, чтобы вернуться к небесной механике. И все же в процессе своей работы он развил новые подходы к дифференциальным уравнениям, и они могли оказаться полезными для этой задачи. Ему казалось, что интуитивно он знает, с какой стороны к ней подойти.

Тем не менее, начало было трудным. Пуанкаре быстро достиг границы известного. У него были некоторые идеи насчет того, что делать дальше, но предварительные расчеты показали, что это путь в никуда. Прошло несколько недель, а нового подхода все не было. Математика, необходимая для работы с этой задачей, еще не была создана. Чтобы двигаться дальше, он должен был создать ее сам. Он понимал, что на это уйдет уйма времени. Успеет ли он к последнему сроку подачи работы на премию? На этот вопрос ответить было сложно, но другого пути, судя по всему, не было: по крайней мере, он его не видел.

Начались месяцы и месяцы упорной работы. Он много раз отказывался от своих попыток, но возобновлял их снова и снова. По прошествии двух лет он уже не откладывал задачу: он работал над ней непрерывно. Задача была великолепна, и Пуанкаре сумел возвести огромное здание. Он создал новую математику исключительно для того, чтобы применить ее к задачам трех и n-тел. Он изобрел понятие *интегральных инвариантов,* которыми он воспользовался, чтобы доказать *теорему о возвращении,* которую мы опишем позднее. Он разработал новый подход к периодическим решениям и устойчивости, включая идею *характеристических показателей,* которые в настоящее время являются стандартными инструментами в динамике. Некоторые из полученных им результатов были неожиданными и противоречили его интуиции. Другие он не мог доказать полностью, но был уверен в их правильности. Он получил массу двусмысленных и неполных результатов, далеких от ясности, которой он требовал от себя и своей работы. К сожалению, решения исходной задачи по-прежнему не было видно, а каждый шаг вперед давал ему все более ясное понимание того, какой далекой должна быть окончательная цель.

Из переписки, впоследствии опубликованной в *Acta,* ясно, что Миттаг-Леффлер поддерживал своего друга Анри Пуанкаре в некоторые моменты этого периода и даже предлагал ему представить ответы на другие вопросы, поставленные жюри. Но Пуанкаре весь свой талант сосредоточил на первой задаче.

На третий год кое-что начало вырисовываться. Задача трех тел раскрыла одну из своих тайн. Пуанкаре доказал, что других равномерных первых интегралов, помимо известных, не существует. Это означало, что задачу трех тел невозможно решить с помощью некоторых количественных методов. Говоря на языке нашего предыдущего обсуждения, ее невозможно свести к задаче более низкой размерности: для полного описания даже ограниченной задачи трех тел, которую мы обсудим позднее, потребуется две степени свободы. Теорема Пуанкаре стала усовершенствованием аналогичного результата, который в 1887 году опубликовал немецкий математик Эрнст Генрих Брунс. Кроме того, Пуанкаре обнаружил и объяснил множество других свойств, среди которых, как ему показалось, он нашел доказательство устойчивости для ограниченной задачи трех тел. Лишь позднее он осознал ошибочность этого доказательства и, попытавшись исправить его, пришел к еще более поразительному открытию.

Он чувствовал, что этих результатов достаточно, т. к. теперь он понимал, что вопрос был гораздо более сложным, чем кто-либо ожидал. Математикам нужно было изменить сам образ своих мыслей и подход к динамическим задачам такого типа. Количественные методы, ищущие явные формулы и интегралы, были слишком слабы. Он стоял перед гигантской дверью, ведущей в таинственный мир. Он открыл ее и остановился на пороге, заглядывая внутрь. Впервые за все прошедшие месяцы он расслабился. «Эта задача станет неисчерпаемым источником результатов для будущих поколений, — подумал он. — Для одного меня это слишком много. Я могу лишь сделать еще несколько шагов внутрь этого мира, на которые уйдет вся моя оставшаяся жизнь. Теперь, я, по крайней мере, понимаю, что эту задачу не решить в одиночку. Нашему поколению не под силу ее объять».

Пуанкаре решил описать свое исследование. Он уже не думал о премии; он должен был просто обнародовать свои результаты. Все, а не только те, кто работает над задачей n-тел, должны понять новую точку зрения, которую он развил. Количественные аналитические методы хороши лишь отчасти. *Помимо этого нужно начать мыслить качественно и образно!* Самый быстрый способ распространить эти идеи — подать свою работу на конкурс, какой бы незаконченной и несовершенной она ни была. В тот же вечер он набросал план своей будущей рукописи. Семнадцатого мая 1888 года она была подана на конкурс.

По правилам конкурса заявленные на участие работы не содержали имени автора и опознавались только по эпиграфу. Вспомнив свой детский восторг от ночного неба, Пуанкаре выбрал *Nunquam praescriptos transibunt sidera fines:* Ничто не выходит за пределы звезд.

Двадцать первого января 1889 года Жюль Анри Пуанкаре получил премию за его замечательный вклад в понимание задачи n-тел и связанные с ней фундаментальные вопросы динамики.

Les méthodes nouvelles... [3]

Менее чем через год о прорыве Пуанкаре узнал весь мир. Некоторые детали еще требовали доработки, но, на-

[3] Новые методы... (фр.)

конец, статья была подготовлена к публикации. Она была огромной. Печатная версия, которая, в конце концов, появилась в тринадцатом томе *Acta Mathematica* за 1890 год, содержала 270 страниц — размер небольшого учебника. И, в сущности, она представляла собой первый набросок огромного труда в трех томах, который Пуанкаре написал впоследствии. В конце этой главы мы опишем историю этой статьи и ее публикации более подробно; пока же достаточно сказать, что после ее появления имя Пуанкаре стало вехой в математике.

Важность и ценность новой математической двери, открытой в статье «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique»[4], неоценимы. Ее успех придал Пуанкаре новые силы и энтузиазм. Он решил написать по этой теме книгу и тут же приступил к работе, вознамерившись развить и обобщить идеи, которые он выдвинул в труде, получившем премию. В 1892 году появился первый том *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Вслед за ним, всего через год, свет увидел второй том этого труда. В первом томе автор рассматривал *периодические решения* и *несуществование равномерных интегралов,* а также *асимптотические решения* задачи трех тел. Здесь же содержались и первые теоремы о *непрерывной зависимости решений от параметра.* Центральным вопросом второго тома были методы, основанные на рядах теории возмущения, созданные Ньютоном, Гильденом, Линдстедтом и Болином, и их приложения к задаче трех тел.

Третий и заключительный том книги вышел в свет не так быстро, как первые два. Работу Пуанкаре по качественным методам задерживали другие проекты. Более того, его настороженность по отношению к некоторым своим новым открытиям сделала его осторожным. Основными вопросами, рассмотренными в последнем томе, стали *интегральные инварианты, устойчивость в смысле Пуассона, периодические орбиты второго рода* и так называемые *двояко-асимптотические решения,* которые он представил в своей работе, завоевавшей премию.

Чуть позднее мы рассмотрим некоторые из вышеперечисленных тем, но в данный момент нас интересуют *двояко-асимптотические решения.* Они появляются в заключительной главе *Les méthodes nouvelles...*, и именно их поведением был озадачен Пуанкаре в начале нашего повествования. Почти десять лет он пытался понять их. Чтобы оценить все сложности, с которыми он столкнулся и которые, в конечном итоге, преодолел, нужно вернуться к теории дифференциальных уравнений. Три следующих раздела написаны достаточно сухим языком и изобилу-

---

[4]Задача трех тел и уравнения динамики (фр.).

ют техническими терминами, но они необходимы, если мы хотим дать четкое описание того, что математик подразумевает под термином «хаос». Читатель при желании может пропустить эти разделы и возобновить чтение с «Ящика Пандоры», а затем вернуться к пропущенному, чтобы познакомиться с деталями.

Неподвижные точки*

Вспомним, что решение дифференциального уравнения можно представить кривой на плоскости, в пространстве с бóльшим числом измерений или на многообразии. В частном случае эта кривая представляет собой точку. Если провести аналогию с поверхностью реки, то такой точкой будет центр водоворота. Однажды попав в сердце водоворота, деревянная щепка обречена оставаться там вечно, если тип течения не изменится. Однако это не единственная возможная конфигурация: *неподвижная точка* может демонстрировать несколько различных форм; некоторые из них изображены на рисунке 1.6. Такая орбита называется также *неподвижной точкой* потока, или *положением равновесия* дифференциального уравнения. В этих точках не происходит изменений, поэтому их скорости равны нулю, а переменные дифференциального уравнения остаются постоянными.

Как явствует из рисунка 1.6 *b*, вокруг неподвижной точки могут существовать *замкнутые* или *периодические* орбиты. Некоторые решения могут стремиться к ней или удаляться от нее подобно спиралям, как на рисунке 1.6 *a*, или напрямую, как на рисунке 1.6 *c*. Может также случиться, что все орбиты в окрестности стремятся к равновесию (так называемый *устойчивый узел,* изображенный на рис. 1.6 *d*) или удаляются от него в случае *неустойчивого узла,* как на рисунке 1.6 *e*. Ситуация, изображенная на рис. 1.6 *c*, когда две орбиты приближаются, две удаляются, а все прочие проходят мимо, называется *седловой точкой.*

Соседние решения могут достичь равновесия только за бесконечное время. Решение либо пребывает в состоянии равновесия вечно, либо асимптотически стремится к нему. Кроме того, поскольку в состоянии равновесия скорость снижается до нуля, орбиты, проходящие вблизи седловой точки, проводят в ее окрестности долгое время, после чего расходятся на дальнее расстояние: представьте судьбу двух точек, которые в начале находились рядом друг с другом, но на противоположных сторонах от единственной кривой, приближающейся к седлу (точки a_0

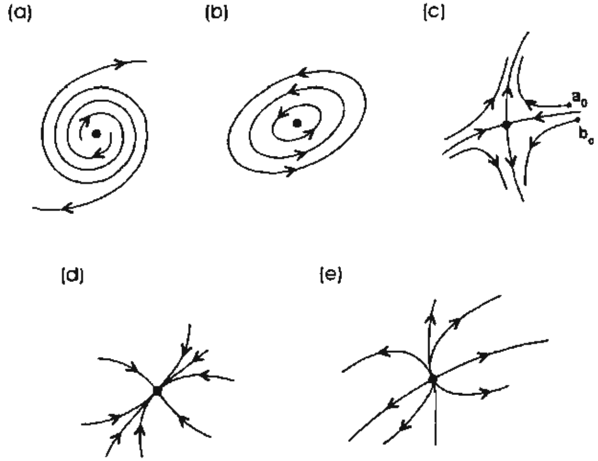


Рис. 1.6. Возможное поведение потока вблизи неподвижной точки: (a) неустойчивый фокус, (b) устойчивая эллиптическая точка, (c) седловая точка, (d) устойчивый узел, (e) неустойчивый узел

и b_0 на рис. 1.6 *c*). Последняя кривая называется *сепаратрисой,* т. к. она разделяет траектории с различным будущим. (Отмечая, что для достижения равновесия решению дифференциального уравнения требуется бесконечно долгое время, необходимо еще раз подчеркнуть, что мы описываем *математическую модель:* идеализацию и упрощение физической реальности. В реальном мире, по причине трения, движение обычно прекращается через конечное время.)

Каков же физический смысл равновесного состояния? Как мы уже отметили, эти состояния соответствуют процессам, свойства которых не меняются с течением времени. Например, равновесным состоянием можно считать как частицу, пребывающую в покое (упавший мяч на рис. 1.1), так и частицу, движущуюся с постоянной скоростью равномерно и прямолинейно. Еще два примера равновесий представлены маятником, находящимся в покое в самом верхнем или самом нижнем положении (см. рис. 1.7). Ясно, что маятник, который состоит из тяжелой гири, прикрепленной к жесткому стержню, и который можно увидеть в дедушкиных часах, навсегда останется в нижнем положении, если только он находился в нем изначально и на него не действуют внешние силы.

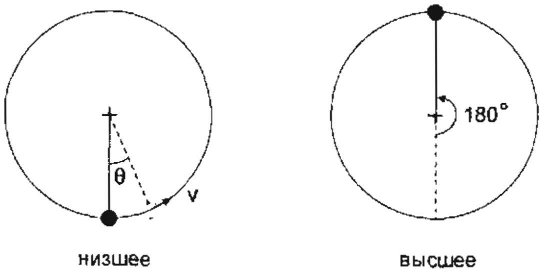


Рис. 1.7. Два равновесных положения маятника

На самом деле то же можно сказать и о конфигурации, когда маятник находится в наивысшем положении, хотя нам и сложно представить, каким образом на практике можно привести маятник в подобное перевернутое состояние и удержать его там без какой-либо поддержки. Любое малое отклонение приведет к его падению в одну или другую сторону. К этому вопросу обращается понятие устойчивости в теории дифференциальных уравнений. В первом случае мы говорим, что равновесное положение *устойчиво*, а во втором называем его *неустойчивым*. Устойчивость существует тогда, когда ни одно решение не выходит из окрестности равновесия, как на рис. 1.6 *b* и 1.6 *d*. Устойчивость, подобно бриллиантам, вечна: она связана с долгосрочным поведением решений. Если решение устойчиво, то соседние решения остаются вблизи него постоянно. Неустойчивость возникает, когда, по меньшей мере, одна орбита выходит из состояния равновесия, даже если, в конечном счете, она вернется в ту же окрестность; см. рис. 1.6 *a* и 1.6 *c*. Более подробно мы обсудим устойчивость в четвертой главе.

Задача Пуанкаре касалась траекторий, стремящихся к положениям равновесия и удаляющихся от них, и периодическим орбитам. По такой *асимптотической орбите* двигался бы спутник, намеревающийся остановиться в точке, где взаимоуничтожаются гравитационные притяжения Земли и Луны. Пуанкаре изучал *плоскую ограниченную задачу трех тел* — частный случай классической задачи трех тел, в которой все тела движутся в одной и той же плоскости, и масса одного из них очень мала по сравнению с двумя другими. Последние, соответственно, движутся по эллипсам решаемой задачи двух тел, как если бы более легкого тела не было вообще. Пуанкаре, фактически, сосредоточился на частном случае круговых орбит, для которого можно перейти к вращающейся системе координат, относительно которой два бóльших тела кажутся неподвижными. Тогда положение и скорость третьего тела можно определить с помощью всего двух координат, т. е. получившаяся система имеет две степени свободы. На рисунке 1.8 изображены два больших тела, m_1 и m_2, вращающиеся вокруг общего центра масс, с которым связана система координат. Положение маленького тела, m_3, задается двумя расстояниями между частицами q_1 и q_2.

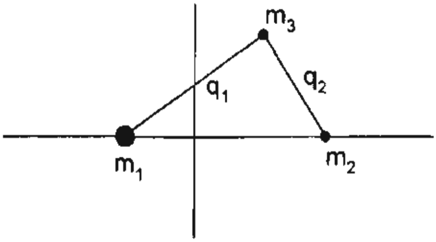


Рис. 1.8. Плоская ограниченная задача трех тел

Вычисления Пуанкаре показали, что для этой системы вокруг некоторых равновесий могут возникнуть *двоякоасимптотические* орбиты. Это кривые, покидающие состояние равновесия и затем асимптотически возвращающиеся к нему с течением времени, как показано на рис. 1.9 *a*. В последнем томе «Новых методов...» Пуанкаре назвал такие орбиты *гомоклиническими,* т. к. они *входят* и *выходят* от одного и того же предела. Кривую, соединяющую два разных равновесия, он назвал *гетероклинической* (рис. 1.9 *b*). На последнем рисунке мы, в сущности, приводим фазовый портрет для маятника, изображенного на рис. 1.7. Его состояние описывают две переменные: θ — угол, который стержень образует с вертикалью, и ν — угловая скорость стержня с гирей. Два состояния равновесия, о которых мы говорили выше, представлены устойчивой неподвижной точкой $(\theta, \nu) = (0, 0)$, окруженной периодическими орбитами, соответствующими малым колебательным движениям, и неустойчивой неподвижной точкой $(\theta, \nu) = (180°, 0)$, соответствующей наивысшему или верхнему положению равновесия. (Последнее появляется дважды: при $(180°, 0)$ и $(-180°, 0)$, т. к. оба этих случая представляют одну и ту же точку в физическом пространстве, что мы увидим ниже.)

В математической идеализации, приводящей к дифференциальным уравнениям, поток которых изображен на рис. 1.9 *b*, мы рассматриваем

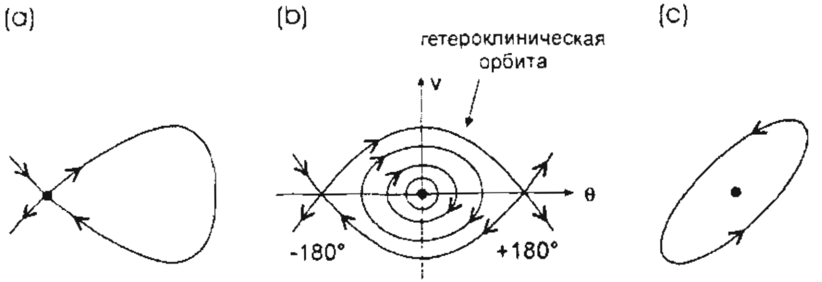


Рис. 1.9. Рисунок 1.9. Гомоклиническая (a), гетероклиническая (b) и периодическая (c) орбиты

«идеальный» маятник, который не теряет энергию из-за трения в шарнире или из-за сопротивления воздуха. Если заставить его совершать колебательное движение с некоторой амплитудой, то это движение он будет совершать вечно. Само по себе тяготение действует как восстанавливающая сила: будучи отпущенным из любого положения между состояниями равновесия, маятник падает, набирая скорость, а затем поднимается в противоположную сторону до того же уровня, где на мгновение он вновь приходит в состояние покоя, прежде чем повторить колебание в обратную сторону. Таким образом, все эти орбиты являются замкнутыми. Гетероклиническая орбита соответствует движению, при котором груз, бесконечно мало смещенный из своего неустойчивого верхнего положения, падает вниз, набирая кинетическую энергию, которую он впоследствии отдаст, когда возвращается в ту же самую точку, откуда началось его падение, на что у него уходит бесконечно долгое время.

Первые возвращения*

Вспомним, что периодическая орбита, подобная изображенной на рисунке 1.9*c*, несмотря на фазовый портрет, аналогичный портрету гомоклинической орбиты, имеет другой смысл. Во-первых, на этой орбите нет равновесных точек, и, во-вторых, для полного прохождения контура состоянию требуется конечное время, после чего это прохождение повторяется бесконечное число раз. На гомоклинической кривой состояние движется из неподвижной точки в отдаленном прошлом и не возвращается в нее до бесконечно далекого момента в будущем, проходя по кривой только однажды.

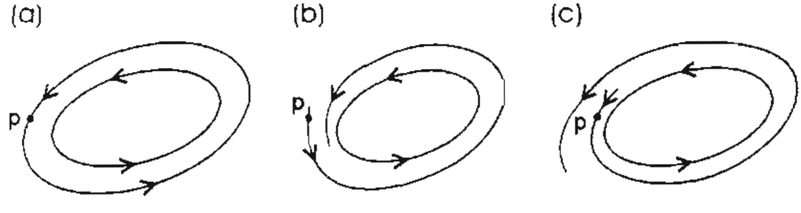


Рис. 1.10. Три возможных типа поведения кривой решения вне периодической орбиты

Анализ Пуанкаре начался с периодической орбиты. Из-за непрерывности решений относительно начальных условий кривые, начинающиеся в точках, близких к периодической орбите, должны оставаться близкими к ней на протяжении определенного промежутка времени. Возьмем, например, точку p, расположенную не на периодической кривой, но достаточно близко к ней, так что кривая решения, проходящая через p, не уйдет в сторону, пока весь путь не будет пройден (см. рис. 1.10). Как ведет себя эта орбита? У нас есть три возможных варианта: (1) кривая, проходящая через p, может быть замкнута, как на рисунке 1.10*a*, и вечно находиться на некотором расстоянии от периодической орбиты; (2) она может приближаться к периодической орбите по спирали или (3) удаляться от данной периодической траектории опять-таки по спирали, как на рисунках 1.10*b* и 1.10*c*. В случае приближения орбите, проходящей через p, потребуется бесконечно много циклов, чтобы действительно достигнуть периодическую орбиту, и, аналогично, удаляющейся орбите необходимо бесконечно много циклов «в прошлом».

Это, действительно, все возможные варианты. Какое-то иное поведение могло бы наблюдаться, если бы кривая, проходящая через p, пересекла саму себя или другие кривые решения или же если бы она слишком быстро покинула окрестность замкнутой кривой. Но в первом случае нарушается свойство единственности, а второй – противоречит непрерывности решений относительно начальных условий. Если кривая решения начинается достаточно близко к замкнутой орбите, она должна сделать, по крайней мере, несколько проходов в этой же окрестности.

Пуанкаре нашел более простой способ рассмотрения таких орбит. Он изобразил *секущую плоскость* D, проходящую через любую точку периодической орбиты, чтобы D не содержала состояний равновесия; это показано на рисунке 1.11. Здесь D – это *трансверсальная* секущая плоскость к периодической орбите и близлежащим кривым. *Трансверсальная* означает, что плоскость проходит точно поперек кривых решения, а не по касательной к ним. Возьмем точку q на поперечном сечении, где его пересекает замкнутая траектория, и проследуем по орбите в направлении, заданном стрелой движения времени в будущее. Естественно, что далее мы пересекаемся с поперечным сечением D в той же точке q. Продолжая движение по периодической орбите, мы еще раз встречаем сечение D. Эта встреча вновь происходит в q. Повторяя этот процесс, мы все время попадаем в одну и ту же точку q поперечного сечения D.

Что происходит, если мы выходим из точки вне замкнутой кривой, скажем o? Сначала мы встречаем поперечное сечение в o_1, во второй раз в o_2, в третий раз в o_3 и т.д., с каждым проходом приближаясь к периодической орбите (или удаляясь от нее). Пуанкаре осознал, что гораздо проще изучать именно такие последовательности точек, а не всю кривую решения. Аналогия становится ясной. Если точки $o_1, o_2, \ldots o_n$ на сечении D расположены в возрастающем к периодической орбите порядке, как на рисунке 1.11, то закручивающиеся спиралью орбиты ведут себя, как показано на рисунке 1.10 b и наоборот.

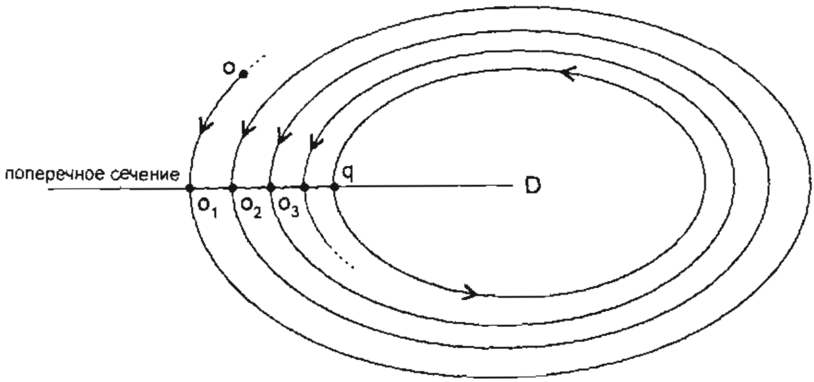


Рис. 1.11. Отображение первого возвращения

Поведение орбит, возвращающихся к сечению, описывается так называемым *отображением Пуанкаре* или *отображением первого возвращения*. Это функция, сопоставляющая каждой точке D ее единственный образ или итерацию: точку, в которую решение возвращается в следующий раз. Если эту функцию обозначить за F, то первую итерацию F в точке o_1 можно записать как $F(o_1) = o_2$, вторую – как $F(F(o_1)) =$

$= o_3$ и т.д. Тогда отображение можно представить в виде отношения ввод-вывод: если известно настоящее положение o_n, оно предсказывает следующую встречу $F(o_n) = o_{n+1}$ с секущей плоскостью. Каждая итерация означает еще один проход по траектории. Бесконечная совокупность $(o_1, o_2, o_3, \ldots)$ всех итераций F в точке o_1 называется *орбитой* отображения Пуанкаре через o_1.

Рассмотрим это важное отображение подробнее. Прежде всего, отметим, что двумерная задача, описывающая строение кривых на плоскости, сводится к одномерной задаче — изучению точек, отображенных на линии. Точка q на периодической орбите становится неподвижной точкой для отображения первого возвращения. На самом деле такое положение представляется *дискретным* (т. е. состоящим из точек, а не из непрерывных линий) только на первый взгляд. Если взять точку r_1, близкую к o, то получится другая последовательность точек отображения, $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots,$ стремящаяся к q. Совокупность итераций всех точек на отрезке, соединяющем r и o, приводит к тому, что множество точек на секущей плоскости D превращается в непрерывный отрезок. Таким образом, геометрическое изучение отображения первого возвращения, на первый взгляд, напоминает исследование кривых, изображающих решения основного дифференциального уравнения. Любое множество точек, образующее гладкую кривую, отображенную на саму себя с помощью F, называется *инвариантной кривой*. Кривые решения, представленные в этой главе ранее, являются примерами инвариантных кривых. Если взять любую совокупность начальных условий на такой кривой и проследить за решениями, проходящими через эти точки, к их образам с помощью итерации F, то с кривой сойти не удастся.

Существует, тем не менее, важное отличие между кривыми, описывающими решения дифференциального уравнения, и инвариантными кривыми, полученными из отображений первого возвращения. Как мы уже видели, кривые решения дифференциальных уравнений не пересекаются друг с другом из-за свойства единственности (в противном случае точка их пересечения имела бы два возможных варианта будущего и прошлого, подобно кривым $r_{-1}r_0r_1$ и $s_{-1}s_0s_1$ на рис. 1.2). Однако орбиты отображений представляют собой последовательности точек, напоминающие ту, что проходит вдоль сечения на рисунке 1.11, так что это замечание не относится к инвариантным кривым первого возвращения. Они, действительно, могут пересекаться друг с другом трансверсально.

Отображения Пуанкаре также можно определить в фазовых пространствах с большей размерностью. Для кривых, определяющих решения дифференциального уравнения в трехмерном пространстве, поперечное сечение имеет два измерения, равно как и соответствующее отображение первого возвращения. Отображение Пуанкаре всегда сокращает размерность фазового пространства на единицу.

Общее представление о хаосе*

Несколько следующих абзацев могут показаться сложными, но благодаря им мы попытаемся хотя бы немного проникнуть в разум Анри Пуанкаре и показать, каким образом многообразия, описанные выше, используются для понимания строения фазового пространства. (Таким образом нам легче будет оценить, насколько естественным для него было введение в топологию и прикладную динамику новых идей.) Тем не менее, мы признаем, что читатель, подходящий к этим идеям впервые, может предпочесть пропустить подробности; как никак, сам Пуанкаре смог примириться с ними лишь через много лет! Для этих читателей мы сообщаем, что изображение «хаоса» в представлении Пуанкаре напоминало нижеследующий рисунок 1.14. Переплетенные кривые на этом рисунке представляют решения дифференциальных уравнений, приближающихся к частному периодическому решению (p) в будущем (s) и в прошлом (u). Точки их пересечения соответствуют решениям, которые задерживаются как в отдаленном прошлом, так и в далеком будущем, но между ними способны исполнять «хаотический» танец.

Чтобы составить правильное представление о деталях открытия Пуанкаре, вернемся к уравнению, описывающему движение маятника с рисунка 1.7, но добавим один новый эффект. Предположим, что его стержень подвергается периодическим встряхиваниям, придающим ему цепочку импульсов, подобно тому, как ребенок, двигая ногами, может усилить колебания качели и раскачать ее. В данном случае закон, управляющий движением маятника, изменяется во времени. Это по-прежнему второй закон Ньютона, но, с позиций маятника, восстанавливающая гравитационная сила зависит от времени. Так что теперь для полного описания состояния системы нам нужны три величины: ее угловое положение, θ, ее скорость, v, и само *время* t. Эти три координаты описывают *расширенное* фазовое пространство. Если периодическое движение мало, то «верхнее» и «нижнее» равновесие сохраняются в виде малых периодических движений, так что в трехмерном фазовом пространстве они будут выглядеть примерно как на рисунке 1.12b. Обратим внимание, что на этом рисунке, как и на рисунке 1.9 *b*, дважды появляется неустойчивое движение: вблизи $\theta = 180°$ и $\theta = -180°$. Обе эти кривые соответствуют одному и тому же движению в физическом пространстве, так как углы 180° и −180° определяют одно и то же: обернемся ли мы на пол-оборота влево или вправо, в конечном итоге, мы все равно займем положение спиной вперед относительно начального.

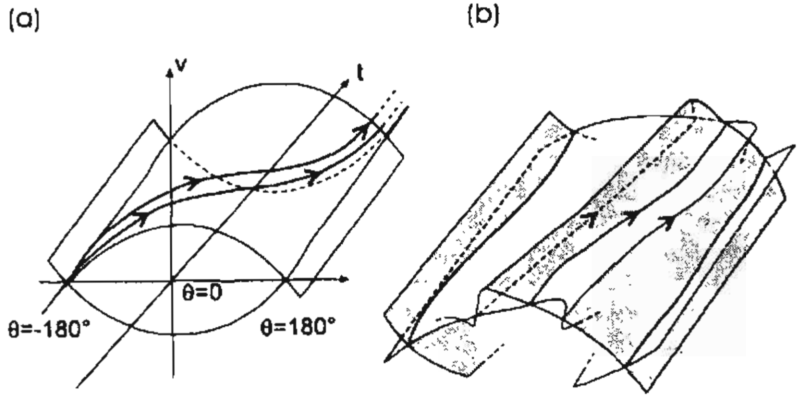


Рис. 1.12. Трехмерное фазовое пространство маятника: (a) без периодических встряхиваний, (b) с периодическими встряхиваниями

В действительности, Пуанкаре изучал ограниченную задачу трех тел, изображенную на рисунке 1.8, но его система с двумя степенями свободы имела постоянную величину. Вследствие этого, как мы уже видели, ее решения ограничивались трехмерным многообразием. На нем они выглядят весьма похожими на решения уравнения более простого маятника. Действительно, в окончательном варианте своей получившей премию работы сам Пуанкаре использовал этот маятник в качестве наглядного примера.

Возвращаясь к маятнику, сосредоточимся на верхнем (неустойчивом) движении и на мгновение предположим, что периодическая сила перестала действовать, и маятник возвращается в равновесное состояние. В расширенном фазовом пространстве это имеет вид прямой линии (рис. 1.12 *a*). Если груз сместить, скажем влево, и придать ему *в точности* нужную начальную скорость, он сделает один оборот и вновь приблизится к неустойчивому равновесию, на что у него уйдет бесконечно много времени. Полное множество таких движений образует двумерное *устойчивое многообразие*. Существует также и двумерное *неустойчивое многообразие,* заполненное орбитами, зародившимися в положении неустойчивого равновесия бесконечно много времени назад (для математиков время может двигаться назад не менее успешно, чем вперед, поэтому мы можем сказать «орбиты, приближающиеся к равновесию, по мере движения времени к минус бесконечности»).

В случае невозмущенного маятника энергия сохраняется. Вследствие этого система является симметричной: ее поведение в прошлом тождественно ее поведению в будущем. Это значит, что устойчивое и неустойчивое многообразия гладко объединяются, образуя поверхностную петлю, исходящую из неустойчивого равновесия и возвращающуюся в него, как показано на рисунке 1.12 *a*. В действительности, таких поверхностей две: одна соответствует орбитам, в которых маятник поворачивается по часовой стрелке, а вторая – орбитам, в которых маятник поворачивается против часовой стрелки.

Эти устойчивые и неустойчивые многообразия сохраняются, хотя и в деформированном виде, когда в игру вновь вступает периодическая сила. На рисунке 1.12 *b* мы попытались предположить, как это происходит. Энергия уже не постоянна, так как мы раскачиваем маятник, вследствие чего будущая судьба или прошлая история траектории очень сильно зависит от времени, с которым она приближается к неустойчивому движению. Произвольно малые перемены могут привести к тому, что грузик маятника пройдет верхнюю точку или отклонится назад. Это отражается в том, что теперь два наших многообразия сморщиваются и расщепляются. Они продолжают пересекаться только на тех отдельных орбитах, для которых синхронизация такова, что, в среднем, получаемая энергия точно уравновешивает расходуемую, и решение может вернуться в начало. (Чтобы доказать, что такие «уравновешенные» траектории существуют, необходимо провести расчет, в котором уравнение энергии усредняется вдоль орбит.) Картинка быстро усложняется, и именно в этом случае *реальную* помощь может оказать идея с секущей плоскостью и отображением возвращения.

Но прежде чем рассматривать сечение, мы должны представить фазовое пространство иначе, чем изображено на рисунке 1.12, где мы представили время в виде линии, вечно продолжающей свой бег, что, вероятно, кажется естественным для (человеческого) ума. Однако в ограниченном мире маятника время в движении стержня присутствует только явно, и поэтому вполне может быть периодическим. Если движение повторяется с циклом продолжительностью в T секунд, то состояние, определенное тремя величинами θ, v и t, неотличимо от состояния, определенного θ, v и $t+T$ или θ, v и $t-T$. Это значит, что орбиты, многообразия и все остальное на рисунке 1.12 *b* тоже носят периодический характер с периодом T, и поэтому в нашем фазовом пространстве достаточно включить лишь одну «рамку» длительности T по прямой времени, как показано на рисунке 1.13 *a*. В этом периодическом фазовом пространстве мы изображаем орбиту с начальным условием (θ_0, v_0) в момент времени $t = 0$ и проходим по ней один цикл до (θ_1, v_1) в момент времени $t = T$. Тогда поведение орбиты во время следующего цикла получается, если выйти из (θ_1, v_1) при $t = 0$ и пройти по орбите еще один цикл до (θ_2, v_2). Этот процесс можно повторять бесконечно.

С точки зрения топологии, мы *отождествляем* сечения при $t = 0$ и $t = T$, рассматривая их как одну плоскость, поэтому орбиты или поток дифференциального уравнения создают на этой плоскости отображение возвращения Пуанкаре P, как в примере на рисунке 1.11, на котором отображение создавалось на линии сечения D. Как и в том примере, орбита дифференциального уравнения (кривая) превращается в последовательность отдельных точек для отображения. (См. рис. 1.13 *b*.) P переносит (θ_0, v_0) в (θ_1, v_1), (θ_1, v_1) в (θ_2, v_2) и т. д., так что теперь двумерные устойчивое и неустойчивое многообразия рисунка 1.12 становятся инвариантными кривыми для отображения Пуанкаре (представьте, что поверхности рисунка 1.12 разрезаются плоскостями с рисунка 1.13). Эти две кривые мы обозначим буквами s и u, соответственно. *Инвариантный* означает, что образ при отображении, $P(c)$, любого кусочка c кривых s или u, лежит на s или u, соответственно.

Повторяясь с точным периодом T, (неустойчивое) периодическое движение выглядит как неподвижная точка отображения, которую мы назовем p. Кривые s и u принадлежат к (двумерным) устойчивому и неустойчивому многообразиям этого периодического движения, поэтому расположенные на них точки движутся в направлении p под действием P и обратного ему P^{-1}, соответственно. Как мы отметили, из-за периодически изменяющейся силы мы обыкновенно ожидаем, что устойчивое и неустойчивое многообразия будут сморщиваться и расщепляться, вследствие чего s и u будут выглядеть на сечении как две отдельные кривые в отличие от единой гладкой кривой, характеризующей невозмущенный маятник с сохраняющейся энергией. И все же, как мы видели, в случае некоторых особых траекторий эти кривые все равно будут пересекаться. Как и в невозмущенном случае, они разделяют траектории, которые «входят» и «выходят» из неустойчивого верхнего

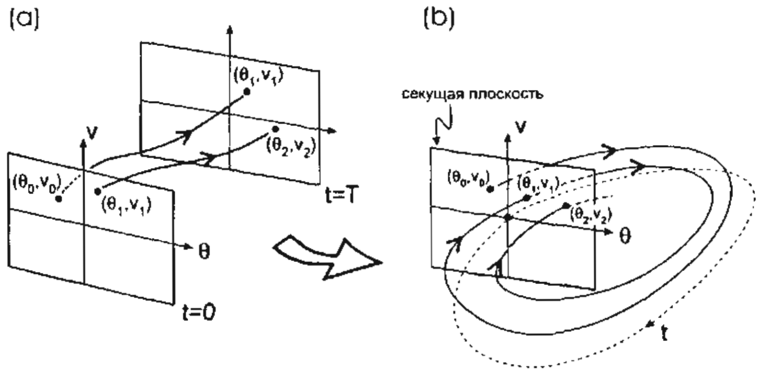


Рис. 1.13. (a) Периодическое фазовое пространство и (b) секущая плоскость и отображение Пуанкаре

равновесия, соответствуя движениям, когда маятник совершает (большие) колебания назад и вперед или полные обороты.

Вот теперь мы готовы к тому, чтобы описать те явления, которые Пуанкаре пытался понять, когда мы наблюдали за ним во время его прогулки. Проведя вычисления, он пришел к выводу, что в задаче трех тел аналоги кривых s и u пересекаются трансверсально в точке q_0. Как мы уже говорили, точка p неподвижна, отображение P оставляет ее неизменной, но, начинаясь в q_0, P генерирует орбиту, состоящую из отдельных точек $P(q_0) = q_1$, $P(q_1) = q_2$, ..., если время движется вперед, и $P^{-1}(q_0) = q_{-1}$, $P^{-1}(q_{-1}) = q_{-2}, \ldots$, если время движется назад. (Каждая из этих точек – образов q под действием P – определяется двумя координатами; строго говоря, следовало бы записать $q_n = (\theta_n, v_n)$.) Поскольку с течением времени все точки на s движутся к p, последовательность q_n приближается к p при n, стремящимся к бесконечности, и, аналогично, последовательность q_{-n} приближается к p при n, стремящимся к бесконечности. Гомоклиническая точка пересечения q_0 принадлежит как к s, так и к u, поэтому мы заключаем, что *одна трансверсальная гомоклиническая точка создает бесконечно много трансверсальных гомоклинических точек*. Это и есть «двоякоасимптотические» точки Пуанкаре.

Есть и кое-что еще. Наряду с образами и прообразами q_0, отображение переносит образы и прообразы ее окрестности и, в частности, дуг, содержащихся в кривых s и u. Теперь эти кривые *ориентированы:* они имеют определенное направление — ближе или дальше от своего начала в неподвижной точке p, — которое на рисунке 1.14 *a* обозначено стрелками. Отображение Пуанкаре сохраняет ориентацию, вследствие чего при пересечении s с u в точке q_0 слева направо их образы точно так же пересекутся в каждой точке q_n. Соединяя небольшие дуги вблизи этих точек, чтобы получились кривые, мы видим, что должно быть, как минимум, одно дополнительное пересечение r_n между каждой точкой q_n и ее образом q_{n+1}. Эти две бесконечные последовательности q_n и r_n называются *первичными гомоклиническими орбитами;* мы изобразили их на рисунке 1.14 *a*. Они соответствуют движениям возмущенного маятника, грузик которого совершает один проход и возвращается в неустойчивое верхнее состояние.

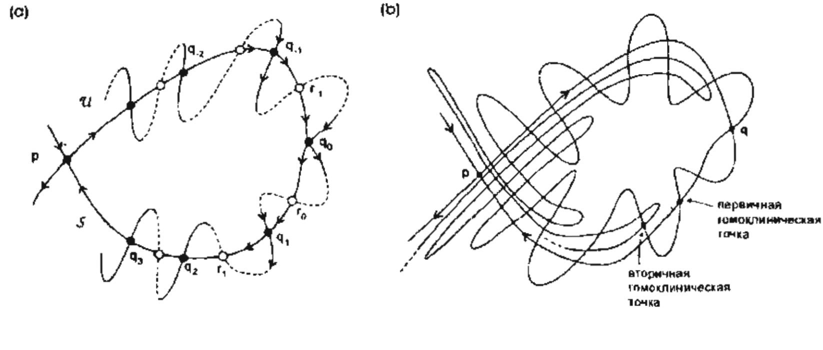


Рис. 1.14. Первое (a) и второе (b) приближение к гомоклинической сети

Более того, как видно из нашего рисунка, небольшие дуги u и s между первичными гомоклиническими точками отображаются все ближе и ближе к p при прямой и обратной итерации P, соответственно. Приближаясь к этой седловой точке, они попадают под влияние ее неустойчивого растягивающего поведения. Вследствие этого наши маленькие петли растягиваются вдоль направлений кривых u (при прямой итерации) и s (при обратной итерации), как показано на рис. 1.4 *b*. Это приводит к ряду других пересечений и возникновению *вторичных гомоклинических орбит,* соответствующих двойному обороту маятника перед возвращением в положение равновесия.

Вот теперь мы на территории математика и можем повторять этот аргумент до бесконечности, получая третичные и четвертичные гомоклинические орбиты, да и вообще орбиты любого преходящего (или геологического) типа! Таким образом, мы находим бесконечное множество гомоклинических орбит, каждая из которых содержит бесконечную последовательность гомоклинических точек. Начав с единственной точки пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий s и u, мы нашли бесконечно много бесконечных семейств таких точек, связывающих кривые в *гомоклиническую сеть* — своего рода паутину или решетку, которую Пуанкаре, проявляя большее понимание и осторожность, нежели мы сами, не пытался нарисовать. Каждая ниточка этой паутинки — дуга, принадлежащая к s или u, вследствие чего эти ниточки разделяют орбиты, которые, в конечном итоге, проходят слева или справа от седловой точки p в будущем или зародились по разные стороны от нее в прошлом. Из-за бесконечно большого числа сепаратрис, расположенных на конечном участке фазового пространства, предсказать судьбу орбиты, начинающейся при любом известном начальном условии, практически невозможно.

В заключительном томе «Новых методов. . . », в начале раздела 397, Пуанкаре описывает гомоклиническую сеть: «Если попытаться представить фигуру, образованную [устойчивыми и неустойчивыми многообразиями] и их бесконечно многими пересечениями, каждое из которых соответствует двоякоасимптотическому решению, то эти пересечения образуют своего рода решетку, ткань или сетку с бесконечно малыми ячейками. Ни одна из двух кривых не должна вновь пересечь саму себя, но должна изгибаться вдоль самой себя очень сложным образом, чтобы пересечься со всеми ячейками сетки бесконечно много раз».

Как мы увидим в следующей главе, бесконечная совокупность гомоклинических точек и переплетенные сепаратрисы — это еще не все. Многое еще только предстояло открыть, но *гомоклиническая сеть* Пуанкаре, судя по всему, послужила первой математической демонстрацией явления, теперь называемого [redacted]

Ящик Пандоры

Пуанкаре был настолько поражен своим открытием, что принять возможность существования гомоклинической сети он смог лишь через некоторое время. Десятью годами ранее он первым сумел оценить сложность задачи n-тел. Как мы очень скоро увидим, в своем труде, получившем премию, он уже указал на возможность существования трансверсальных гомоклинических орбит, но тогда он не стал даже пытаться понять, к чему может привести их существование. Открытие, описанное Пуанкаре в третьем томе «Новых методов...», означало, что когда-либо решить данную задачу полностью вряд ли удастся. Поиски общего решения представлялись безнадежными для него, его современников и даже для будущих поколений. Кроме того, нелегко было принять и идею хаоса. Подобная концепция противоречила всей философии его жизни.

Дифференциальные уравнения, включая и те, которые моделируют физические явления, описывают детерминистические процессы. Свойства существования и единственности гарантируют, что при известном начальном условии решение является полностью определенным. Настоящее предсказывает будущее, по крайней мере, в отношении математической модели. Единственная проблема заключается в том, чтобы найти (или приблизить) это решение. В этом отношении работа Пуанкаре не внесла никаких изменений, но он показал, что во многих случаях шанс найти явные решения равняется практически нулю и что, будь они найдены, они были бы очень чувствительны к начальным условиям. Как он мог объяснить своим современникам, что их количественные методы зачастую сталкивались бы с непреодолимыми препятствиями и что детерминизм не предполагает точного предсказания? Кто бы принял это? Как он мог убедить научный мир в том, что через достаточно длинные промежутки времени гравитационное движение всего трех небесных тел может стать не менее непредсказуемым, чем погода?

Интеллектуальная обстановка в конце XIX века носила агрессивный и оптимистический характер. Почва для переворота в науке и технике была подготовлена. Великие международные выставки вроде той, для которой была построена башня Александра Густава Эйфеля, убедили общественность в том, что интеллект и изобретательность человека способны решить все социальные и экономические проблемы. На горизонте маячил новый век. Оговорки Пуанкаре не могли отклонить за горизонт рог изобилия, из которого рекой лились научные открытия. Его работа противоречила настроению того времени, и ее принятие многими учеными представлялось маловероятным. Возможно, Пуанкаре и сам до конца не понял глубины следствий своих выводов и всех их тонкостей. Он был зрелым исследователем с хорошей репутацией в научном мире и не желал открывать этот ящик Пандоры. Он нашел его, и этого было достаточно. Его философия не позволила ему пойти дальше.

В действительности, только в 1980-х годах с распространением персональных компьютеров и терминалов с графическими дисплеями научная общественность приняла хаос как повсеместно распространенное явление.

Мы искренне считаем, что все произошло именно так. Документально подтвержденное событие, произошедшее несколько лет спустя, служит доказательством справедливости нашего предположения: рождение *специальной теории относительности.* Пуанкаре располагал всеми данными и предпосылками к тому, чтобы создать эту теорию самостоятельно. Известно, что у него тоже возникала идея релятивистских аксиом, но они показались настолько необычными и противоречащими здравому смыслу ученого, что он отказался от них с самого начала. А Альберту Эйнштейну, служащему Швейцарского патентного бюро, молодому и совершенно неизвестному в высоких научных кругах, терять было нечего. Он рискнул и добился успеха. Однако многие исследователи пробовали сделать то же самое, но терпели неудачу. Их имена и теории стерлись из памяти, и Пуанкаре отлично это знал.

Заключительный том «Новых методов небесной механики» вышел в свет в 1899 году. Пуанкаре не дал графического представления вышеописанной гомоклинической сети. Он просто отметил в конце книги, что эта картинка слишком сложна, чтобы ее можно было нарисовать, и добавил, что эти факты дают нам четкое представление о том, насколько сложны большинство задач динамики.

Ошибка Пуанкаре

Пока что история кажется достаточно простой; это именно тот ее вариант, который принимают большинство ученых. Однако последние свидетельства говорят о том, что все было далеко не так просто. За аккуратными отчетами традиционных повествований скрывается необычная цепочка событий. Сейчас мы опишем то, что известно на сегодняшний день.

В письме, адресованном Миттаг-Леффлеру, от 16 июля 1887 года, когда он усердно работал над вопросом, за который была обещана премия, Пуанкаре заявил, что доказал устойчивость ограниченной задачи трех тел. «В этом частном случае, – пишет он, – я нашел строгое доказательство устойчивости и метод наложения точных пределов на элементы третьего тела... Теперь я надеюсь, что мне удастся подступиться и к общему случаю, и что до первого июня я если и не найду полного решения этого вопроса (на что у меня мало надежды), то, по крайней мере, получу достаточно полные результаты, которые и представлю на конкурс».

Нам не совсем понятно, о какой устойчивости говорит Пуанкаре. Данное письмо было опубликовано в *Acta Mathematica* только после его смерти. В сноске, сделанной редактором (которым, скорее всего, все еще был Миттаг-Леффлер), выдвинуто предположение, что Пуанкаре ссылается на свою *теорему о возвращении*, которая присутствует в опубликованной работе и которую мы обсудим в четвертой главе. Однако это кажется невероятным, поскольку Миттаг-Леффлер уже знал, что теорема о возвращении применима и в гораздо более общих случаях. Следовательно, правомерно подозрение, что притязание на нахождение устойчивости описывает совсем другую ситуацию, а именно, явление, которое считают открытием Дирихле. Такое выражение устойчивости соответствовало бы вопросу в той его постановке, за ответ на которую полагалась премия.

Вейерштрасс, рецензент работы Пуанкаре, в своем докладе Миттаг-Леффлеру утверждает: «Я ничуть не сомневаюсь, заявляя, что данный научный труд заслуживает премии. Вы можете сказать своему королю, что эту работу нельзя считать воистину дающей полное решение задачи, предложенной нами, но при этом она настолько важна, что *ее публикация откроет новую эру в истории небесной механики* [курсив авторов]. А значит, цель его величества, которую он ставил, объявляя состязание, можно считать достигнутой».

С другой стороны, Вейерштрасс был, видимо, очень болен, когда оценивал работу. На самом деле, его доклад по поводу научного труда Пуанкаре был подан уже после того, как король одобрил вручение награды. В письме, адресованном своему другу и бывшей ученице Соне Ковалевской (с которой мы встретимся в пятой главе), немецкий математик писал: «Как судья, я не смог исправить некоторые возможные ошибки в работе Пуанкаре, но я представил аннотации королю, попросив, чтобы журнал *Acta Mathematica* напечатал их в том же выпуске, что и труд Пуанкаре».

Эти оговорки так и не появились в журнале. Выполняя свои функции редактора, Миттаг-Леффлер добавил вместо них примечание, в котором говорилось, что из-за плохого здоровья Вейерштрасса публикация его рецензии оказалась невозможной. Помимо научного труда Пуанкаре, тринадцатый выпуск *Acta Mathematica* содержит еще лишь одну статью другого французского математика, Поля Аппеля, который получил вторую премию за свою работу над одной из остальных задач, предложенных жюри. Статья Аппеля сопровождалась рецензией, которую написал третий судья конкурса, Шарль Эрмит.

Возникает несколько вопросов. Почему не опубликовали рецензию Вейерштрасса? Что случилось с устойчивостью, о доказательстве которой Пуанкаре говорил в 1887 году? В печатном варианте опубликованного труда об этом нет ни слова. Что скрывается за этой историей?

Теперь нам известно, что в мае 1888 года Пуанкаре представил на конкурс работу, в которой, по его утверждению, он доказал некоторые случаи устойчивости для ограниченной задачи трех тел. Статья подверглась рецензии Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса, причем первый приехал в Германию, чтобы они смогли прочитать все статьи вместе. В январе 1889 года статья была награждена премией, и ее начали готовить к публикации в *Acta Mathematica*. Длительный процесс типографского набора и печати продолжался с апреля по ноябрь 1889 года. За это время Эдвард Фрагмен, редактор *Acta*, которого Миттаг-Леффлер назначил главным рецензентом всех публикаций и который тогда редактировал научный труд Пуанкаре, подготавливая его к публикации, поднял вопросы о некоторых неясных отрывках (некоторые из них касались малых знаменателей, которые мы обсудим в пятой главе). Миттаг-Леффлер передал эти вопросы Пуанкаре, который начал было отвечать на них и писать подробные примечания, чтобы добавить их к основному тексту в виде приложения. Затем, где-то осенью, Пуанкаре понял, что сделал серьезную ошибку в другой части статьи. Тридцатого ноября он отправил Миттаг-Леффлеру телеграмму, в которой просил немедленно прекратить печатать статью вплоть до прихода письма, объясняющего эту ошибку.

В своей книге «Часы Ньютона» (1994 г.) Иварс Петерсон утверждает, что Фрагмен *нашел* ошибку Пуанкаре. В этом он солидарен со всеми остальными авторами, включая Мультона, которого мы цитируем ниже. Однако сейчас нам кажется более вероятным, что, привлекая внимание автора к другим моментам статьи, Фрагмен, прежде всего, «позволил [Пуанкаре] обнаружить и исправить серьезную ошибку [*importante erreur*]», о чем и говорится во введении к исправленной статье. В письме к Миттаг-Леффлеру от 1 декабря 1889 года Пуанкаре говорит именно о том, что он «[сказал Фрагмену] о сделанной им ошибке», а не наоборот. Он умолчал о том, что это была за ошибка; его прямые ответы на вопросы Фрагмена касаются других второстепенных моментов. Тем не менее, рассматривая открытие и исследование копии оригинальной напечатанной версии статьи с аннотациями Пуанкаре, мы можем описать сущность этой ошибки.

Вспомним обсуждение того, как расщепляются устойчивое и неустойчивое многообразия седловой точки маятника, когда он подвергается периодическим возмущениям, как показано на рисунках 1.12*b* и 1.14. Пуанкаре понял, что возмущения сдвигают аналогичные невозмущенные инвариантные кривые в задаче трех тел, и создал ряды, приближающие их положения и раскладывающиеся по степеням малого параметра.

Он справедливо заметил, что возмущенные кривые должны продолжать пересекаться, т. к. иначе, если бы одна из них полностью располагалась «внутри» другой, то при повторяющемся отображении не сохранялись бы площади, что, в свою очередь, привело бы к нарушению закона сохранения энергии. Он рассмотрел разные возможности и с помощью хитроумных расчетов возмущения исключил их все, придя к выводу, что возмущенные кривые должны точно совпадать друг с другом. Если бы это было так, это означало бы, что соответствующая двумерная инвариантная поверхность потока запирает решения, аналогично сепаратрисе в случае с невозмущенным маятником на рисунке 1.12 *а*. Однако Пуанкаре не признал возможность трансверсального пересечения этих кривых и сопутствующего ему явления хаотических движений. Вследствие этого он сделал ошибочный вывод об устойчивости.

Это была не единственная проблема, с которой столкнулся Миттаг-Леффлер. Вскоре после объявления о присуждении премии, но еще до обнаружения ошибки, другой ученый и соредактор *Acta,* астроном Хью Гильден заявил, что в статье, опубликованной двумя годами раньше, он предвосхитил (преждевременное) притязание Пуанкаре на доказательство устойчивости. Узнав об этом от Миттаг-Леффлера, Пуанкаре ответил, что счел статью Гильдена трудной для чтения и неубедительной, но, на его взгляд, в ней отсутствовало доказательство сходимости некоторых рядов. Судя по всему, «физический» подход Гильдена был недостаточно строг, чтобы удовлетворить Пуанкаре или Эрмита, к которому Гильден тоже обращался. (В другой статье, опубликованной в *Acta* через несколько лет после смерти Гильдена и после внесения поправок в свою собственную работу, Пуанкаре суждено было доказать, что, на самом деле, подход Гильдена был ошибочным.)

Притязания Гильдена привели к возникновению в Шведской Академии наук неприятных споров, которые Миттаг-Леффлеру так и не удалось до конца успокоить. На протяжении некоторого времени полемика не утихала. Уже в 1904 году, после спора об истории небесной механики, Хьюго Бухгольц, бывший ученик Гильдена, опубликовал статью в защиту работы своего научного руководителя. В ней он признает, что Пуанкаре действительно доказал расхождение асимптотических рядов в некоторых случаях, но утверждает, что это не лишает законной силы притязания Гильдена на приоритет в других случаях. Он также признает, что статья Гильдена сложна для восприятия, что подтверждает и Ричард Мак-Гихи (см. следующий раздел), который попытался понять ее совсем недавно, но особого успеха не достиг. Как бы там ни было, с приближением весны 1889 года и утиханием всей полемики была обнаружена «настоящая» ошибка.

Мы можем представить разочарование, которое испытал Пуанкаре, когда осознал суть своей ошибки. В письме, которое мы уже цитировали выше, он пишет: «Я не скрою от вас горе, которое эта ошибка причинила мне». Создать совершенно новый взгляд на динамику и проглядеть такую очевидную вещь! И все же такое часто случается при исследованиях: скрытое и очевидное переплетаются, знакомого встречается немного, поэтому подобные ошибки возникают гораздо чаще, чем можно себе представить. Вот почему новые математические и научные идеи и статьи, описывающие их, перед публикацией подвергаются интенсивному рецензированию и критике других ученых. При обнаружении ошибок исследователю приходится проглотить свою гордость и попытаться исправить их. Это широко распространенная, почти типичная процедура. Однако в данном случае премия уже была вручена, поэтому ставки были невероятно высоки.

Под огромным давлением морали и общественности Пуанкаре исправил свою ошибку за несколько следующих месяцев. Внесенная корректива полностью изменила характер его статьи, да и весь курс небесной механики и теории динамических систем. Он понял, что пересекающиеся инвариантные кривые не запирают орбиты отображения, что такая система, на самом деле, может оказаться в высшей степени неустойчивой, и что доказательство этого, фактически, вытекает из трансверсального пересечения кривых, соответствующих гомоклинической орбите, как мы описывали ранее. После включения в статью объяснений других моментов, указанных Фрагменом, исправления ошибки и приведения поразительных выводов, следующих из нее, сто пятьдесят восемь ее страниц превратились в двести семьдесят. В январе 1890 года, ровно через год после получения премии, Пуанкаре представил исправленный вариант рукописи, которой суждено было появиться в *Acta* в том виде, какой известен нам сейчас. Во введении, очевидно по просьбе Миттаг-Леффлера, Пуанкаре признает, что обязан Фрагмену, но суть своей ошибки не объясняет. Тем временем, он возместил журналу 3 585 крон 63 эре, потраченных на печать оригинальной статьи, тем самым потратив куда большую сумму, чем полученная им премия.

Значительно измененная статья Пуанкаре была отпечатана между апрелем и октябрем 1890 года и опубликована позднее в том же году, хотя на титульной странице так и осталась дата вручения премии: 21 января 1889 года. Данная статья стала важным шагом к первому примеру хаоса. За несколько месяцев, последовавших за обнаружением Пуанкаре своей ошибки, он получил воистину замечательные результаты, демонстрирующие его изобретательность и всеобъемлющее понимание. Ясно, что история математики вынесла вердикт в пользу исправленной статьи, но факт остается фактом: премию Пуанкаре получил за раннюю статью, содержавшую ошибку. Безусловно, многие ценные идеи и результаты, представленные в первом варианте, остались неизменными. На самом деле, как в 1912 году писал Форест Рей Мультон, современник Пуанкаре, профессор Чикагского университета и знаменитый исследователь:

> «За последнее время не раз отмечалось, что оригинальный научный труд Пуанкаре по задаче трех тел, за который автор получил премию короля Оскара II, содержал ошибку и что опубликованная статья отличается от той, что была представлена для участия в конкурсе изначально. К сожалению, после некоторых подобных заявлений оставалось впечатление, кстати сказать ошибочное, будто первое исследование было неправильным и практически не имело ценности. Оригинальный научный труд действительно содержал ошибку, которую обнаружил стокгольмский ученый Фрагмен, но она повлияла лишь на рассмотрение существования асимптотических решений; и, исправив эту часть, Пуанкаре не сделал ни малейшей попытки скрыть факты и выразил свою искреннюю признательность Фрагмену.
>
> Хотя ошибку и можно счесть неудачной, нет ни малейшего сомнения в том, что даже несмотря на ее существование, будь она общеизвестна в то время, премия была вручена правильно. Даже если пропустить все части, на которые повлияла ошибка, этот научный труд все равно останется таким, равный которому по оригинальности, полученным результатам и по степени ценности открытой им области найти крайне сложно. Есть очень мало ученых, даже с очень хорошей репутацией, которые за всю свою жизнь создали бы больше действительно нового и ценного, чем то, что было правильным в оригинальном исследовании, представленном на конкурс Анри Пуанкаре».

Удивительная находка

Джурсгольм – это небольшой, тихий городок в нескольких милях к северу от Стокгольма. Он являет собой приятное место, недалеко от пролива и достаточно далеко от суеты крупных городов. Утром над городком часто висит туман, позволяющий вдохнуть соленый морской воздух. За последние сто лет некоторые улицы Джурсгольма немного изменились. Узкие переулки пропитаны духом истории.

Огромная вилла, почти дворец, служит пристанищем для исследовательского института математики. Раньше в этом великолепном здании жил Густав Миттаг-Леффлер, именем которого этот институт назван сегодня. В 1985 году Ричард Мак-Гихи из университета Миннесоты в Миннеаполисе провел в этом величественном заведении часть своего субботнего отпуска. Он заинтересовался жизнью и работой Хуго фон Цейпеля (с которым мы встретимся в третьей главе) и нашел полезными документы, которые сохранил Миттаг-Леффлер. Переписка Миттаг-Леффлера хранилась в отдельных папках в алфавитном порядке, включая откопированные через копировальную бумагу ответы. Шведский математик определенно знал, как сохранить свои бумаги для будущих поколений.

Однако некоторые архивные документы не были ни упорядочены, ни занесены в каталог. Однажды Мак-Гихи открыл запылившуюся коробку, в которой лежало несколько копий тринадцатого тома *Acta*, — того, в котором была опубликована статья Пуанкаре, получившая премию. Интуитивно он почувствовал, что это может оказаться интересным, и поэтому взял одну копию и обстоятельно ее изучил. Его ждал сюрприз. Ради вящей убедительности он взял тринадцатый том из обычной библиотеки. При сравнении двух копий он окончательно убедился в справедливости своего подозрения. Два напечатанных текста статьи Пуанкаре отличались друг от друга.

До случайного открытия Мак-Гихи широкие научные круги не ведали, что оригинальная рукопись, содержавшая результат по устойчивости, на самом деле была опубликована как тринадцатый том *Acta Mathematica*. Об этом знали несколько человек, в частности, Юрген Мозер (с которым мы встретимся в пятой главе) и шведский математик Леннарт Карлесон, чье замечание и побудило Мак-Гихи к изучению архива. Печать статьи закончилась к середине ноября 1889 года, и предварительные копии разошлись среди выдающихся математиков и астрономов. Но как только Пуанкаре сообщил о своей ошибке, Миттаг-Леффлер тут же прекратил рассылку, отозвал все напечатанные экземпляры, а впоследствии заменил их теми, которые мы находим в библиотеках сегодня и которые содержат исправленный вариант статьи. Мак-Гихи случайно наткнулся на несколько экземпляров отозванного тома, которые, вероятно, не были уничтожены по недогляду секретаря. (На одном из них стоит надпись на шведском языке: «Весь тираж уничтожен. М.Л.».) После этой находки библиотекари более внимательно обследовали архив, и копия оригинального текста, к которой прилагались ответы Пуанкаре на вопросы Фрагмена, помогла нам воссоздать события, описанные в предыдущем разделе.

Решение заменить номер журнала после его публикации необычно для главного редактора научного журнала. История науки не должна подвергаться тем же ревизиям, что и политическая история при тоталитаризме. Но, наверное, причины, подвигнувшие Миттаг-Леффлера на подобный поступок, можно понять. Во-первых, он должен был защитить репутацию премии, журнала и самой науки в глазах нематематиков. Это не так-то просто, если учесть, что большинство ученых — плохие математики. Он также должен был защитить свое положение лидера шведской математики, человека со связями в высшем обществе и советника короля.

Достаточно сложно и, наверное, нечестно выносить суждение относительно событий вековой давности, о которых мы не имеем полной информации. Можно было бы поднять вопрос об этике в науке, но нельзя забывать, что Пуанкаре получил вполне заслуженную награду, а Миттаг-Леффлер не имел своим намерением скрыть сделанную ошибку от научного мира. Это неординарное событие привносит в наше повествование оттенок человечности, и мы все также высоко ценим положительное влияние премии короля Оскара и вклада Пуанкаре, без которого современная математика была бы совсем другой.

Густав Миттаг-Леффлер сыграл ключевую роль в мире математики, перекинув мост из девятнадцатого века в двадцатый. В предыдущие триста лет в математике господствовали французы, немцы и англичане, а шведской математики практически не было. Благодаря своим связям, Миттаг-Леффлер сумел создать математическую школу, найти средства для привлечения в свою страну известных ученых и заложить основы одного из лучших математических журналов. И, действительно, очень приятно видеть, как за короткий промежуток времени после появления Миттаг-Леффлера такая маленькая страна смогла взрастить так много исключительных математиков. Должно быть, этот человек был убежден в справедливости и необходимости своего поступка, целью которого было защитить его мечты и амбиции в момент политической угрозы, нависшей над всеми его значительными достижениями.

Наше повествование об открытии Анри Пуанкаре хаоса в модели Солнечной системы Исаака Ньютона почти завершилось. Несмотря на то, что Пуанкаре продолжал возвращаться к проблемам небесной механики и динамики по окончании своего великого трактата по небесной механике, у него появились другие интересы, в частности, он написал восхитительные и понятные книги о природе математического творчества и научном рассуждении. Его избрание в 1908 году во Французскую Академию наук было, фактически, основано на литературном качестве этих популярных эссе.

В течение следующих тридцати лет лишь очень немногие ученые могли или хотели развивать открытия, которые Пуанкаре сделал в динамике. Некоторые идеи Пуанкаре подхватили и раскрыли такие выдающиеся математики, как Адамар и Картан, но они, в основном, проигнорировали хаос. Он противоречил господствующему оптимистическому настрою с его желанием контролировать мир природы. Что касается физики, то перевороты в лице теории относительности и квантовой механики быстро вытеснили всяческий интерес научного сообщества к классической механике Ньютона. В математике же начала свое продолжительное царствование программа строгой аксиоматизации Давида Гильберта, изначально противоречащая интуитивному подходу Пуанкаре. И все же Анри Пуанкаре посеял зерно переворота, не менее важного, чем те, что создали современную физику. В следующих главах мы познакомимся с некоторыми людьми, которые продолжили его работу в двадцатом веке. Мы также вернемся назад во времени и вспомним более ранние открытия, а также продолжим свою историю.

2.

Символическая динамика

Важность, которую Биркгоф придавал символизму в динамике, становится очевидной в свете того, что его последние статьи связаны с поиском общего символизма, характеризующего динамическую систему.

— Марстон Морс

По прибытии на факультет Джордж Биркгоф нашел в своем почтовом ящике письмо. Он уже давно ожидал его и потому горел желанием немедленно прочесть. Пытаясь умерить свой пыл, он вышел из приемной и открыл конверт лишь в своем кабинете. Дрожащими руками он развернул письмо и прочел первое предложение.

Ему едва удалось сдержать радостный вопль. Он — счастливчик. Гарвардский университет предложил ему место профессора. Теперь его будущее материально обеспечено, и у него будет достаточно времени и спокойствия, чтобы продолжить свое исследование. Он уже несколько лет надеялся на это, но теперь, когда его мечта стала реальностью, ему с трудом верилось в это.

Когда Джордж Дэвид Биркгоф получил это письмо в Принстоне, ему было двадцать семь лет. Хотя на тот момент он работал в Принстонском университете лишь на временной должности, руководство не хотело терять столь многообещающего молодого человека. Узнав об интересе, проявленном к нему Гарвардом, декан факультета, на котором работал Биркгоф, предложил ему место ассистирующего профессора. Двумя годами ранее, в 1909 году, Биркгоф поступил сюда на место наставника, аналогичное должности инструктора в других университетах. Теперь, добившись такого продвижения по службе, он получал заслуженное им признание. Тогда он решил остаться в Принстоне. А предложение Гарварда он рассмотрит на следующий год. В конце концов, в 1912 году Биркгоф вообще перебрался в Кембридж (Массачусетс).

Начало карьеры неподвижной точки

Биркгоф родился в голландской семье в Оверизеле (штат Мичиган) в 1884 году. С 1896 по 1902 год он учился в институте Льюиса, а затем еще год в Чикагском университете. Степень бакалавра он получил в 1905 году в Гарварде. Через два года, по возвращении в Чикаго, он получил степень доктора философии по математике с отличием (summa cum laude). В своей диссертации он рассмотрел асимптотический характер решений некоторых линейных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Это исследование не только положило начало замечательной карьере самого Биркгофа, но и заложило основы целой школы динамических систем в Соединенных Штатах.

Биркгоф питал огромное уважение к достижениям Пуанкаре. Он тщательно изучил работы французского математика по динамике. Первый важный результат Биркгофа, который прославил его на весь мир, своими корнями уходит в последнюю статью Пуанкаре «Sur un théorème de géométrie»[1], опубликованную в 1912 году в итальянском журнале *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

После перенесенной им болезни и операции в 1908 году Пуанкаре, казалось, полностью выздоровел. Однако в 1911 году у него возникло предчувствие, что его жизнь близится к завершению. Девятого декабря он представил для публикации в *Rendiconti* неоконченную рукопись. В сопровождающем рукопись письме к редактору он выразил свое беспокойство относительно проблемы, над которой он работал на протяжении двух последних лет, написав, что «в моем возрасте, я, наверное, уже не смогу ее решить, а полученные результаты, которые могут вывести исследователей на новый и неожиданный путь, кажутся мне слишком многообещающими, несмотря на заблуждения, в которые они меня ввели, чтобы я решился бесполезно забросить их».

В этой последней работе Пуанкаре выдвинул (без доказательств) следующий результат: *сохраняющее площадь отображение кольца, переносящее точки ограничивающих его кругов в противоположных направлениях, имеет, по крайней мере, две неподвижные точки.* Чтобы объяснить это утверждение, рассмотрим *кольцо A* — область плоско-

[1] «Об одной геометрической теореме» (фр.).

Илл. 2.1. Джордж Дэвид Биркгоф (Любезно предоставлено Американским математическим обществом)

сти, расположенную между двумя концентрическими окружностями C_1 и C_2, т. е. плоское кольцо, изображенное на рисунке 2.1. Затем определим *отображение* кольца A на само себя. Как и при рассмотрении отображений Пуанкаре в первой главе, отображение A — это функция, сопоставляющая каждой точке A некоторую другую единственную точку A. Например, на рисунке 2.1 точке a может быть сопоставлена точка b. Мы можем сказать, что отображение переносит точку a в точку b или что b является *образом* a под действием данного отображения. Помимо этого, точка c может быть сопоставлена самой себе, и тогда мы говорим, что c — это *неподвижная точка*, т. к. она не переносится под действием отображения. Под действием отображения каждой точке кольца A сопоставляется ее образ. Пуанкаре предположил, что данное отображение *непрерывно*, имея в виду, что образы соседних точек тоже располагаются поблизости друг от друга. Таким образом, кольцо можно представлять в виде резинового листа: отображение деформирует его, но не разрывает.

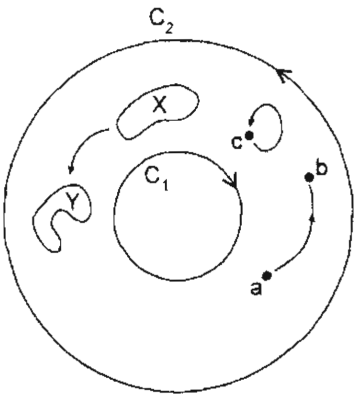


Рис. 2.1. Теорема Биркгофа о неподвижной точке

К данному отображению предъявляются еще два требования. Во-первых, оно должно *сохранять площадь*, т. е. образ любой области — это другая область с той же площадью, что и исходная. На рисунке 2.1, например, область X переносится в область Y, площади которых равны. Это неизменно для любой области в пределах A. Требование сохранения площади может казаться ограничивающим, но примерами таких отображений изобилует классическая и небесная механика, т. к. это свойство связано с сохранением таких физических величин, как энергия и импульс. Мы уже видели, сколь важную роль это свойство сыграло в научном труде Пуанкаре, получившем премию. Второе требование состоит в том, чтобы точки C_1 переносились вокруг C_1 в одном направлении (скажем, по часовой стрелке), а точки C_2 переносились вокруг C_2 в противоположном направлении (против часовой стрелки), как показывают стрелки на рисунке 2.1: в обоих случаях граничные точки остаются на границе. Выдвинув эти гипотезы, в которых мало что говорится непосредственно о том, что же отображение делает с точками внутри кольца, Пуанкаре заявил, что существуют, как минимум, *две неподвижные точки*.

На самом деле, Пуанкаре знал, как показать, что если отображение имеет одну неподвижную точку, то оно непременно имеет и вторую, но он не мог продемонстрировать для начала существование хотя бы одной неподвижной точки. Эта, на первый взгляд, абстрактная проблема была тесно связана с небесной механикой. Существование неподвижной точки, в случае его истинности, помогло бы ему установить, что в задаче трех тел бесконечно много периодических орбит. Он изучал функцию, которую мы сейчас называем отображением Пуанкаре, порожденным дифференциальным уравнением, описывающим данную задачу (см. главу 1).

Тема периодических орбит вызывала у Пуанкаре особый интерес. Их изучение являлось косвенным подходом к проблеме устойчивости и способом понять соседние траектории. Он придавал этому вопросу чрезвычайную важность и возвращался к нему на протяжении всей жизни. В «Новых методах...» он прокомментировал это следующим образом: «Судя по всему, данный факт не может вызывать какой бы то ни было практический интерес. В самом деле, вероятность того, что начальные условия движения будут точно соответствовать начальным условиям периодического решения, равна нулю. Но может случиться так, что они будут отличаться совсем чуть-чуть, что и происходит как раз в тех случаях, к которым старые методы уже не применимы. В этом случае периодическое решение можно успешно принять в качестве первого приближения или, если выражаться словами Гильдена, в качестве промежуточной траектории». В контексте периодических решений гипотеза о неподвижных точках отображения кольца была единственным этапом движения по данному пути, т. к. (и мы уже показали это в первой главе) неподвижные точки отображений Пуанкаре соответствуют периодическим орбитам лежащего в основе дифференциального уравнения.

Пуанкаре скончался в июле 1912 года, и тем же летом его последняя статья попала в Принстонский университет. За несколько месяцев Биркгоф сумел не только понять изложенные в ней идеи, но и доказать гипотезу Пуанкаре. В конце октября Биркгоф выступил перед Американским математическим обществом с сообщением, озаглавленным «Доказательство геометрической теоремы Пуанкаре». Сегодня этот результат носит название теоремы Пуанкаре–Биркгофа о неподвижной точке.

Биркгоф не раз возвращался к идеям и статьям Пуанкаре; в частности, он останавливался на гомоклинической сети. В своей книге «Динамические системы», опубликованной в 1927 году, он доказал существование бесконечно многих периодических орбит в дополнение к бесконечным множествам гомоклинических точек, которые мы обсудили в первой главе. Его аргументы отличаются тонкостью, и им достаточно трудно следовать. Мы не станем приводить их здесь, а перейдем сразу ко второй половине двадцатого века, чтобы описать замечательную идею, которая значительно упростила изучение сетей и дала возможность более глубоко понять представление хаоса по Пуанкаре.

На пляже в Рио

Нобелевской премии по математике не существует. Альфред Нобель, изобретатель динамита, был практиком, ценившим науку и литературу; он даже сам писал художественные произведения. Чистую математику он, очевидно, уважал куда меньше, предпочитая награждать достижения в более практических областях. Слухи о том, что Густав Миттаг-Леффлер будто бы завязал интрижку с женой Нобеля, что и привело к исключению математики из числа предметов, за которые вручают Нобелевскую премию, беспочвенны, т. к. Нобель никогда не был женат. И все же существует ряд свидетельств, указывающих на личную неприязнь между этими людьми.

Самым главным знаком отличия в математике служит медаль Филдса, учрежденная канадским математиком Джоном Чарльзом Филдсом — бывшим почетным президентом Международного союза математиков и профессором университета Торонто, который завязал близкие дружеские отношения с Миттаг-Леффлером, когда приезжал в Европу. Именно благодаря Филдсу мы располагаем информацией об этом математике и шведском промышленнике. Важную роль в учреждении этой награды после кончины Филдса в 1932 году сыграл Дж. Л. Синг, коллега Филдса по университету в Торонто (и племянник ирландского драматурга Дж. М. Синга). Касательно исключения математики из перечня предметов, за достижения в которых присуждается Нобелевская премия, сорок лет спустя он писал: «Я должен упомянуть здесь о том, что сказал мне Филдс и в чем я впоследствии убедился, побывав в Швеции, а именно: Нобель ненавидел математика Миттаг-Леффлера и решил исключить математику из числа областей, за выдающиеся достижения в которых присуждается Нобелевская премия».

Премия крайне редко появляется из области, которую она награждает; как правило, дары, из которых складываются подобные награды, приходят из далеких от данной области источников, как это было в случае с Нобелем. Поэтому не случайно финансовое вознаграждение, которое человек получает вместе с медалью Филдса, совсем небольшое, особенно по сравнению с Нобелевскими премиями. Начиная с 1936 года, эта медаль вручалась раз в четыре года лицам, не достигшим сорока лет, на Международном конгрессе математиков. Существует широко распространенное убеждение, что, если исследователь не достиг исключительных результатов в математике до сорока лет, он вряд ли сделает это впоследствии. Конечно, бывают и исключения: Карл Вейерштрасс, один из реставраторов математического анализа, с которым мы познакомились в первой главе, где он выступал в роли члена жюри призового комитета, в течение четырнадцати лет работал школьным учителем. Признание в математических кругах он получил лишь во второй половине своей долгой жизни.

Илл. 2.2. Медаль Филдса

В 1966 году одним из четырех обладателей медали Филдса, имена которых объявили на Конгрессе в Москве, стал Стефен Смейл из Калифорнийского университета в Беркли. Медаль он получил за доказательство одной из топологических гипотез Пуанкаре. Топология, в которую Пуанкаре внес значительный вклад, — это область математики, работающая с геометрическими объектами, которые остаются инвариантными к действию *гомеоморфизмов* Что это значит? Возьмем геометрический объект, например, круг. Топология не проводит различия между кругами, эллипсами или любыми другими *простыми замкнутыми кривыми.* («Простая» означает, что это кривая не пересекает саму себя.) Все они представляют один и тот же топологический объект. В топологии можно растягивать, сжимать, изгибать или деформировать объекты, но, как правило, нельзя разрезать или склеивать их друг с другом. Если разрез допускается, в случае с кругом, например, то только для образования *узла,* получить который иным способом невозможно, и с условием, что концы разреза будут склеены вновь. С позиций топологии, круг, эллипс и нить с узлами, концы которой соединены, — это все «круги» (См. рис. 2.2.)

Тополог подобен муравью: передвигаясь по кругу, он видит лишь локальную структуру и не способен оценить, каким образом целое располагается в трехмерном пространстве. Однако круг, у которого нет начала и нет конца, и отрезок линии, у которого они есть, *считаются* разными топологическими категориями. Аналогично, двумерная сфера отличается от двумерной плоскости, как мы отмечали при обсуждении многообразий в первой главе. В принципе, можно описать сферы с любым числом измерений. Гипотеза Пуанкаре (слишком техническая, чтобы ее можно было описать в этой книге) касалась n-мерных сфер, и Смейл доказал ее для любого числа измерений, равного пяти или превышающего пять. Доказательство для случая с четырьмя измерениями было получено совсем недавно, а случай трех измерений не доказан до сих пор. Это основная недоказанная гипотеза в топологии, если не во всей математике.

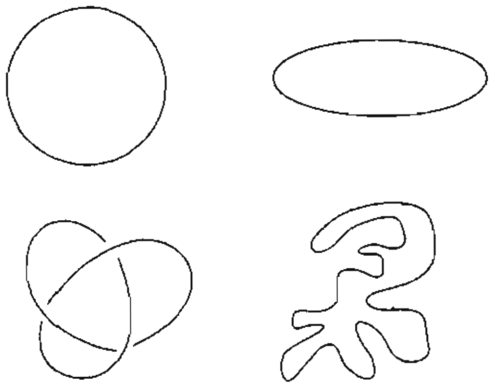


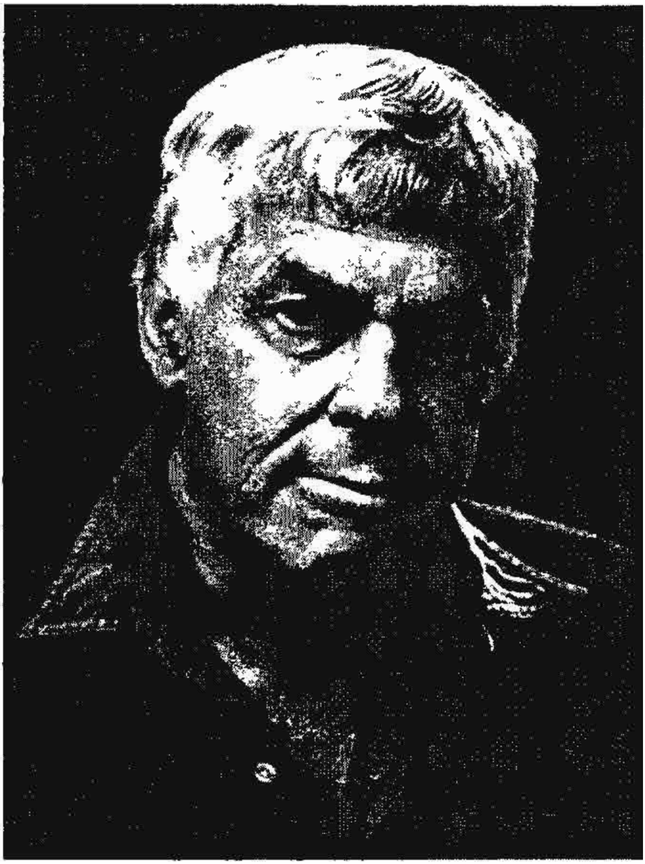
Рис. 2.2. Четыре топологических круга

Однако наша история — о динамике, и гипотезу, касающуюся сфер, мы упомянули только для того, чтобы проиллюстрировать, как в одном уме могут встретиться разные области математики. На самом деле, когда Смейл получал награду, он уже не интересовался топологией, как таковой. Чуть раньше он переключился на теорию динамических систем и работал над итерациями отображений. Эту теорию Смейл считал важной не только из-за той роли, которую отображения первого возвращения играют в изучении дифференциальных уравнений, но и потому, что изучение отображений позволяет создать теорию, параллельную теории дифференциальных уравнений и в некоторых отношениях более простую. Он надеялся найти способ переноса результатов из одной теории в другую. В более общем смысле, благодаря своей ранней, чисто топологической работе, он получил новый и мощный взгляд на старые проблемы динамики.

В конце декабря 1959 года Смейл ушел с временной должности, которую занимал в Принстоне, и уехал в Бразилию вместе со своей женой Кларой и их двумя детьми: Лаурой, которой было два с половиной года, и шестимесячным Натом. Маурисио Пейксото пригласил его провести часть второго года постдокторских исследований в IMPA — Институте чистой и прикладной математики в Рио-де-Жанейро. Работа Пейксото по структурной устойчивости (глава 4) в то время еще не была широко известна, да и сам Институт был совсем скромным и размещался в небольшом старом здании в пригороде Ботафого. (В последующие годы там произойдут значительные изменения, особенно когда в Бразилию вернется Жакоб Палис, учившийся вместе со Смейлом.)

Как только семья устроилась в Рио, в квартире офицера военно-воздушных сил, который бежал из страны после неудавшейся попытки совершить государственный переворот, Смейл начал пропадать по утрам на пляжах с блокнотом и ручкой. Он зачастил на пляж Леме, расположенный неподалеку от куда более знаменитого пляжа Копакабаны. Нередко к нему присоединялся Элон Лима — его друг из IMPA. Большинство людей не способны работать в общественных местах, но Смейл обнаружил, что для него не составляет труда сосредоточиться на своем занятии. Кроме того, возможность время от времени искупаться и бриз с Атлантики позволяли ему долго оставаться свежим.

Он еще не был знаком с «Новыми методами...» Пуанкаре и не знал о том, что его затянет в гомоклинические сети, описанные в конце этой книги. В тот момент он работал над одним дифференциальным уравнением. Немногим раньше он выдвинул гипотезу о строении неподвижных точек, периодических орбитах и их устойчивых и неустойчивых многообразиях для структурно устойчивых или «типичных» дифференциальных уравнений и отображений. (Структурную устойчивость мы обсудим в четвертой главе.) В частности, ему казалось, что такие системы должны обладать только конечными множествами периодических орбит в любой ограниченной области их фазовых пространств. Если бы в конечной области содержалось бесконечно много периодических точек, то некоторые из них должны были бы заполнять эту область как угодно плотно, и тогда любое малое изменение отображения, безусловно, разрушило бы столь хрупкую структуру. На самом деле, Пейксото уже доказал истинность этого для дифференциальных уравнений с двумерными фазовыми пространствами, подобными изображенным на рисунках 1.1–1.2, 1.6. и 1.9–1.10.



Илл. 2.3. Стефен Смейл. (Фотография Г Пола Бишопа, мл.)

На этом этапе Норман Левинсон из Массачусетского технологического института предложил Смейлу изучить уравнение *ван дер Поля,* описывающее колебания электрического контура под действием периодически изменяющегося входного напряжения. Это уравнение, названное в честь голландского ученого, работавшего в «Электрических лабораториях компании Филлипс», в некоторых отношениях напоминает уравнение, моделирующее поведение периодически возмущаемого маятника, который, как мы видели в первой главе, может иметь хаотические решения.

Мэри Картрайт и Джон Литлвуд из Кембриджского университета, которые во время Второй мировой войны занимались разработкой радара, показали, что уравнение ван дер Поля может иметь бесконечно много сосуществующих периодических решений, а также решений, который Биркгоф назвал «разрывно рекуррентными». В их подходе присутствовали и физика, и математика; в статье, где описан полученный ими математический результат, они отмечают, что их вера в него в течение некоторого времени опиралась исключительно на экспериментальные данные, полученные при испытании электрических контуров, проведенном ван дер Полем и его коллегой ван дер Марком. Левинсон упростил эту задачу и продолжил ее изучение в статье, опубликованной в 1949 году в журнале *Annals of Mathematics*.

Тем не менее, это частное уравнение, и оно может быть очень особенным; гипотеза Смейла все равно могла оказаться истинной для «большинства» случаев, но Левинсон считал, что она может привести к нахождению контрпримера. На самом деле, если бы Смейл знал о работе Пуанкаре, то у него бы уже появился контрпример. Однако диапазон исследовательских работ огромен: если читать все относящиеся к определенному вопросу статьи, то времени на оригинальное исследование просто не останется. Ученым зачастую приходится полагаться на случайные разговоры и намеки, отпускаемые на конференциях, чтобы выбрать правильное направление исследования. Как бы там ни было, через несколько лет Смейл очень подробно ознакомился и с «Новыми методами. . . », и с работой Биркгофа.

Будучи топологом, Смейл привык понимать отношения, связывающие математические объекты, через картинки. Стимулом для его интуиции служили рисунки, которые он впоследствии переводил на строгий аналитический язык. Статья Левинсона, в которой, в сущности, рассматривается отображение Пуанкаре уравнения ван дер Поля, но почти нет картинок, стала для него стимулом к рисованию полосок, к их сжиманию, растягиванию, изгибанию и последующему пересечению друг с другом или наложению друг на друга, как в детской игре. Это было не просто, но он с радостью погрузился в это занятие.

Ученые нередко находятся в таком настроении во время трудной работы. Исследование требует от них колоссальных затрат энергии, времени и посвящения. Им невозможно заниматься долго в отсутствие энтузиазма. Если из открытия убрать любопытство и радость, то от него мало что останется. Преимущество математики состоит в том, что она является неистощимым источником задач, к которым можно подходить по очереди, образуя мост к неизменной недостижимой цели. Возможно, счастливым человека делает как сама цель, так и достижения, которых он добивается на пути к ней. С этой точки зрения, чувства ученого, посвятившего себя математике, весьма напоминают чувства человека, глубоко верующего в Бога.

Подкова Смейла*

Смейл сосредоточился на конкретной части отображения Пуанкаре уравнения ван дер Поля. Он попытался идеализировать или упростить его. После первой итерации своего отображения он получил рисунок, напоминающий завиток, наложенный на квадрат. Квадрат представлял множество начальных условий для данного уравнения. Завиток изображал соответствующие состояния цикл спустя: их образы под действием отображения Пуанкаре. Летом 1960 года, когда Смейл рассказывал об этом вопросе в Беркли, Ли Нойвирт спросил: «А почему бы Вам не привести этот рисунок к такому виду?» — и нарисовал на доске чертеж. Смейл так и сделал. Рисунок Нойвирта был несколько проще и приятнее для глаза, нежели тот, что получался для уравнения ван дер Поля. Смейла же, в первую очередь, интересовали общие свойства дифференциальных уравнений, поэтому он мог позволить себе вносить такие эстетические изменения. Сначала он сжал квадрат по горизонтали, потом растянул по вертикали и, наконец, изогнув, вернул его на место так, чтобы он пересекся с исходным квадратом, как показано на рисунке 2.3. Получившаяся форма навела на мысль о названии: *подкова.* Вторая итерация данного изображения вновь подразумевала сжатие, затем растяжение и, наконец, изгиб, но теперь уже образа, имеющего форму подковы. Смейл получил картинку, изображенную на рисунке 2.4. В конце этой главы (рис. 2.9) мы покажем, как это изображение возникает в окрестности *любой* поперечной гомоклинической точки.

В этом и двух последующих разделах мы изучим динамику отображения, имеющего форму подковы, несколько подробнее. Как и в аналогичных технических разделах первой главы, некоторые читатели могут счесть наши доводы и построения слишком сложными, но мы хотели бы попросить их попытаться понять эти вещи, — прибегая к помощи карандаша и бумаги в тех случаях, когда одного зрительного представления явно недостаточно. Те же, кто решит пропустить эти части, могут возобновить чтение с раздела «Колебания и вращения».

Смейла интересовало множество точек, которые навсегда останутся в квадрате. В это множество должны войти все периодические, а также рекуррентные решения, упомянутые выше. Чтобы получить его, из квадрата нужно было исключить все точки, образы которых под действием отображения окажутся за его пределами не только после первой итерации, но и после *любой итерации, как прямой, так и обратной*. При первой итерации за пределы квадрата выходит его часть, сгибаемая в «дугу», поэтому Смейл сосредоточился на других его частях, образы которых накладываются на квадрат или *пересекают* его. Таким образом ему удалось избежать сложного анализа точек в изогнутой дуге, и он смог сосредоточиться на более простом поведении, связанном с растяжением и сжатием. Как мы увидим, это возымело весьма богатые последствия.

Если представить, что квадрат — это тонкий резиновый лист, который можно взять, изогнуть и вернуть на место, станет ясно, что пересечение его первого образа с исходным квадратом будет состоять из двух вертикальных полос, как показано на рисунке 2.3. Пересечение второго образа с исходным квадратом дает четыре более тонкие вертикальные полоски, которые, в свою очередь, содержатся в двух предыдущих полосках. (См. рис. 2.4.)

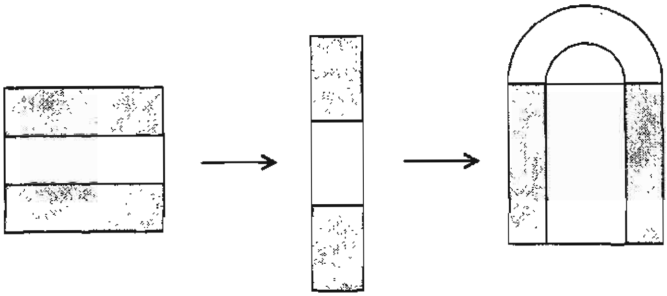


Рис. 2.3. Процесс сжатия, растяжения и изгибания для первой итерации отображения, описывающего подкову Смейла

Продолжая этот процесс, при третьей итерации Смейл получил новый, более сложный образ, пересекающийся с исходным квадратом по восьми вертикальным полоскам. Все восемь полосок, попарно, входят в предыдущие четыре и, соответственно, в исходные две. При итерации по данному сценарию число полос удваивается на каждом этапе, причем каждая пара новых полосок тоньше полос предыдущего поколения. После четырех итераций получается 16 полос (2 в четвертой степени), после пяти — 32, а после двадцати — 1 048 576 (2 в двадцатой степени). После бесконечно большого числа итераций остается так называемое *канторово множество* вертикальных отрезков. Исходный квадрат вытянулся по вертикали и сжался по горизонтали, превратившись в бесконечную нить, накрученную на саму себя бесконечно много раз. Нарисовать эту нить невозможно, каким бы тонким ни было острие нашего карандаша, но ее можно представить и сделать вывод об ее свойствах.

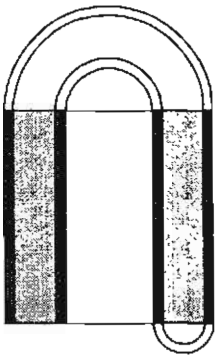


Рис. 2.4. Вторая итерация отображения порождает изогнутую подкову

Это необычное множество названо в честь Георга Кантора, немецкого математика девятнадцатого века, который придумал его, когда пытался понять концепцию соответствия между бесконечными множествами. Немного погодя мы остановимся на теории множеств поподробнее и в третьей главе вновь встретимся с канторовыми множествами. На протяжении многих лет их считали чисто абстрактными конструкциями, но теперь, благодаря отображению Пуанкаре и топологической выдумке Смейла, канторово множество естественным образом появилось из дифференциального уравнения.

Бесконечное множество вертикальных отрезков включает все точки, которые по-прежнему находятся в квадрате после прямых итераций отображения. Где же они появляются в исходном квадрате? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно рассмотреть обратные образы, получающиеся при времени, текущем назад в дифференциальном уравнении. Теперь полосы растягиваются по горизонтали и сжимаются по вертикали, так что получается рисунок 2.5. Очевидно, что *прообраз* канторова множества вертикальных отрезков — это канторово множество горизонтальных отрезков. Если в таком отрезке выбрать начальное условие, то его будущие прообразы навсегда останутся в квадрате.

Мы отмечали, что Смейл интересовался точками, которые *навсегда* остаются в квадрате, что означает их нахождение там как при прямой, так и при обратной итерации. Как видно из рисунка 2.5, средние части горизонтальных отрезков отображаются за пределы квадрата при первой обратной итерации. Теперь их нужно убрать, равно как и все прочие точки, выпадающие за пределы квадрата после любой обратной итерации. Однако эта информация уже присутствует на рисунке 2.4, хотя и в неявном виде! Мы говорили, что канторово множество вертикальных

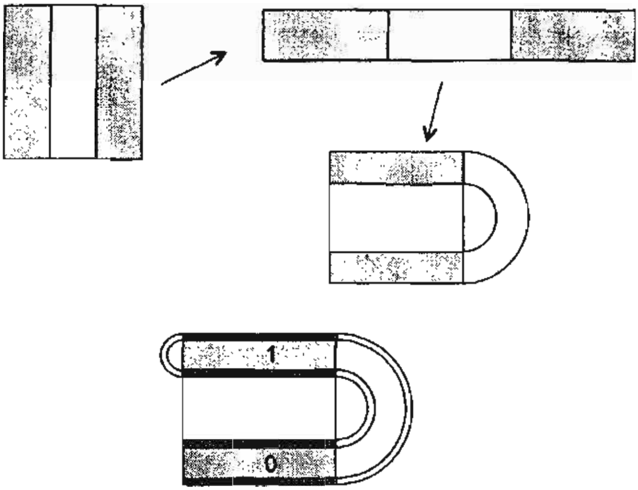


Рис. 2.5. Обратная итерация изображения

линий содержит точки, которые по-прежнему остаются в квадрате после произвольно большого числа прямых итераций, так что они никогда не выйдут за его пределы и под действием *обратной* итерации. Очевидно, что множество точек в исходном квадрате, которые никогда не выйдут из него ни при прямой, ни при обратной итерации, принадлежит *как* к вертикальному, *так* и к горизонтальному канторовому множеству. Мы назовем это множество Λ.

Вероятно, проще всего представить Λ, если сначала нарисовать области, которые остаются внутри квадрата при одной прямой и одной обратной итерации. Они представлены пересечением самых широких вертикальных и горизонтальных полос, закрашенным светло-серым цветом на рисунках 2.4 и 2.5, так что это четыре квадрата, расположенные в углах исходного квадрата. Множество, остающееся в квадрате после двух прямых и двух обратных итераций, получается при пересечении более узких полос этих рисунков, которое дает шестнадцать более маленьких квадратов, содержащихся (по четыре квадрата) в четырех квадратах, получившихся после первого этапа. На рисунке 2.6 эти квадраты закрашены в серый цвет. При каждой последующей итерации число квадратов возрастает в четыре раза, а их размеры уменьшаются, пока, в бесконечном пределе, не получится облако точек. Первые три этапа изображены

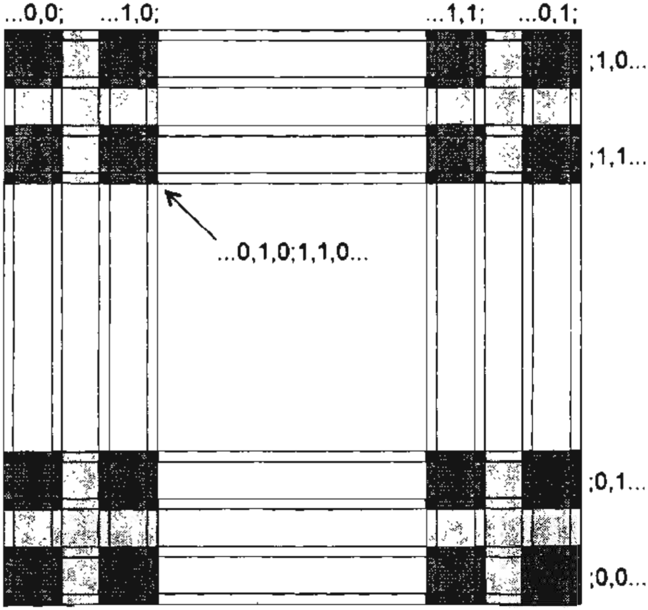


Рис. 2.6. К облаку точек Λ

на рисунке 2.6, где 64 самых маленьких квадрата закрашены в черный цвет.

Мы обнаружили, что обманчиво простое отображение, изгибающее квадрат в подкову и накладывающее ее обратно на квадрат, создает бесконечное канторово множество захваченных точек. Если это для вас не достаточно удивительно, то затем происходит нечто действительно замечательное. Смейл понял, что он может привязать к каждой точке в Λ код или адрес, который не только описал бы ее местоположение, но и содержал бы всю ее историю, включая будущее, под действием итерации отображения.

Обозначим две широкие горизонтальные полосы на рисунке 2.5 символами 0 и 1. Предположим, что x — это любая точка в Λ. Мы определяем ее адрес как бесконечную последовательность нулей и единиц в соответствии со следующим правилом: если после k итераций образ остается в полосе 0, то на k-м месте мы записываем 0; если же он находится в полосе 1, то на этом месте мы записываем 1. На каждом этапе он должен находиться в той или иной полосе, т. к. в противном случае он покинул бы квадрат при следующей итерации. Это же правило справедливо и для обратных итераций: если какая-то точка находилась на полосе пять итераций назад, то на пятое место мы ставим 1. Таким образом, чтобы узнать, куда попала наша точка после двадцати итераций или где она была тридцать итераций назад, мы просто смотрим на нужную цифру в последовательности. Если вообразить, что наш взгляд неподвижен, а последовательность (кадр за кадром) записана на кинопленку, то достаточно прокручивать эту пленку вперед или назад, словно мы смотрим фильм. Каждая (прямая) итерация отображения просто сдвигает всю последовательность на одну позицию влево; обратные же итерации сдвигают ее вправо. Как правило, начало или центр последовательности отмечается постановкой точки с запятой непосредственно перед нулевой позицией, так что если a_k обозначает k-ю позицию, то центральная часть последовательности имеет вид $(\ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Эта последовательность, бесконечная в обе стороны, необходима, т. к. интересующее нас отображение и дифференциальные уравнения одинаково хорошо движутся как вперед, так и назад.

Местоположение точки выводится из соответствующей последовательности путем рассмотрения поведения прямых и обратных итераций, изображенных на рисунках 2.4 и 2.5. Например, точка, последовательность которой имеет центральную часть $(\ldots, 0, 1, 0; 1, 1, 0, \ldots)$, находится на верхней полоске 1, что (в соответствии с рисунком 2.4) означает, что сама точка должна лежать в нижней подполосе верхней полосы, т. к. после растяжения отображение переворачивает эту полосу сверху вниз. Однако вторая итерация этой точки лежит в нижней полосе 0, а это значит, что на предыдущем этапе (после первой итерации) она лежала в *верхней* части 1. Раскручивая действие отображения еще раз, мы видим, что данная точка принадлежит к пятой из самых узких горизонтальных полос на рисунке 2.6, если считать снизу вверх. Аналогичное рассуждение позволяет заключить, что эта точка находится в четвертой (считая слева) из самых узких вертикальных полос. Соответствующий квадрат, один из 64, закодированный с помощью всех возможных центральных последовательностей из 6 позиций, обозначен на этом же рисунке. Принцип расположения различных символьных адресов проще всего понять с помощью рисунков, поэтому мы призываем читателя взять блокнот, цветные карандаши и немного порисовать.

Таким образом Смейл связал свое отображение в форме подковы с отображением сдвига σ, которое действует на множество бесконечных символьных последовательностей. (Идея сдвигов восходит к Бернулли, о котором мы упоминали в первой главе). Смейл, фактически, показал, что отображение в форме подковы идеально соответствует отображению сдвига: любое свойство первого справедливо для второго, и наоборот. Таким образом он свел изучение подковы к изучению сдвигов на последовательностях символов. Как мы увидим, это оказалось не просто любопытным совпадением, а явилось истинным прогрессом.

Математики нередко продвигаются вперед, доказывая, что задача, которую они пытаются решить, на самом деле, является лишь завуалированной другой задачей, которую уже решил кто-то другой. (На самом деле это не обман: зачастую, чтобы показать соответствие этих задач, приходится немало потрудиться!) В данном случае это оказалось весьма полезным, т.к. свойства отображения сдвига были хорошо известны. Они относятся к теории, называемой *символической динамикой*. Но то была не единственная причина для радости. Ключевым свойством отображения сдвига является его *хаотический характер*. Мы вкратце объясним, что это значит, а затем дадим точное определение хаоса. Мы считаем это очень важным, т.к. за последние десять или двадцать лет понятием хаоса злоупотребляли не только обычные люди, но даже ученые как в математике, так и за ее пределами. Многие иррегулярные или беспорядочные явления, только лишь в силу их неустойчивости, непериодичности или какого-то еще симпатичного и несложного для понимания поведения, описывались как хаотические. Несмотря на то, что мы имеем полное право называть какую-нибудь вещь так, как нам вздумается, если мы наделим одним и тем же именем несколько сотен разных объектов, ничего, кроме путаницы, мы не добьемся.

В новых областях, которые развиваются быстро и беспорядочно, очень сложно остановиться на нужной терминологии быстро и эффективно. Не всегда бывает ясно, какие аксиомы и определения приведут к самым полезным результатам. Тем не менее, главная причина злоупотребления понятием *хаоса*, вероятно, состоит не в этом, а, скорее, в интригующих и экзотических коннотациях этого названия. «Теорию хаоса» именовали «новой наукой», делая на нее чрезмерно высокие ставки. Аналогичные притязания делались и в отношении *теории катастроф*, пока она не обрела более скромное место и значение в науке. И хотя название *хаос* остается экзотическим по сей день, оно уже начало утрачивать некоторые из своих наименее обоснованных коннотаций. Теперь, когда фондовые агенства уже не торопятся поддержать связанные с хаосом предложения, возможно, пришла пора сесть и заново обдумать терминологию. Наверное, лучше всего оставить это занятие (наряду с тщательным возведением основ) математикам, а физики и другие ученые, занимающиеся прикладными науками, пусть поддерживают в них дух деятельности, проверяя их новые определения и результаты на практике. Именно так были созданы *исчисление* и *теория вероятностей*, которые сегодня служат инструментами для столь многих ученых, работающих вне математики. Истинная *теория хаоса* могла бы пойти по тому же пути. А до тех пор мы предпочли бы менее нагруженное, хотя и более неуклюжее, название: *теория динамических систем.*

Сдвиги на символах*

Символическая динамика родилась приблизительно в начале двадцатого века в труде Жака Адамара. В тридцатые годы она получила дальнейшее развитие благодаря Марстону Морсу и Густаву Арнольду Хедлунду, которые применили ее к *вариационному исчислению* и *дифференциальной геометрии.* Символическая динамика сыграла очень важную роль в развитии теории динамических систем, а также в других областях математики. Представляя этот предмет здесь, мы ограничимся теми свойствами отображения сдвига, которые связаны с подковой Смейла, хотя, на первый взгляд, может показаться, что мы покинули мир динамики. А сейчас просим читателя посмотреть на символическую динамику как на своеобразную математическую игру. С подковами же и хаосом мы свяжем ее позднее.

Обозначим за Σ множество всех возможных бесконечных последовательностей, образованных нулями и единицами. Первый вопрос: «Как измерить расстояние между двумя элементами Σ?» Предположим, что $(\ldots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$ и $(\ldots, r_{-2}, r_{-1}; r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots)$ — это две такие последовательности, в каждой из которых каждый элемент s_n и r_n (для всех целых чисел n) принимает значение 0 или 1. Две такие последовательности равны тогда и только тогда, когда $\ldots, s_{-2} = r_{-2},\ s_{-1} = r_{-1};\ s_0 = r_0,\ s_1 = r_1,\ s_2 = r_2, \ldots,\ s_2 = r_2, \ldots,\ s_n = r_n, \ldots$, что означает равенство *всех* соответствующих элементов. Две последовательности считаются близкими, если равны их центральные части ($s_j = r_j$ для всех j между $-N$ и N). Чем длиннее совпадающая часть элементов (чем больше N), тем ближе последовательности. Например, последовательности

$$(\ldots 0, 1, 0, 1, 1; 1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

и

$$(\ldots 0, 1, 0, 1, 1; 1, 0, 1, 1, 0, \ldots)$$

ближе друг к другу, чем последовательности

$$(\ldots 0, 1, 0, 0, 0; 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$$

и

$$(\ldots 0, 1, 1, 0, 0; 1, 1, 0, 1, 1, \ldots).$$

В первой паре совпадают шесть центральных элементов, тогда как в последней — лишь четыре.

Следующий вопрос: «Что такое периодическая последовательность?» Это такая последовательность, в которой конечный блок переменных повторяется вечно. Например, периодической является последовательность $(\ldots, 1, 1, 0, 1, 1, 0; 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots)$, в которой после каждой пары единиц появляется нуль. Через три сдвига влево последовательность возвращается в саму себя. В данном случае период равен трем. Аналогично, последовательность $(\ldots, 0, 0, 0, 1, 1; 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, \ldots)$ имеет период пять. Таким образом во множестве Σ можно построить бесконечно много периодических последовательностей.

Несложно увидеть, что отображение сдвига σ, действующее на периодическую последовательность, порождает периодическую орбиту. Возьмем, например, последовательность

$$S_0 = (\ldots, 1, 0, 1, 0; 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$$

и применим к ней отображение сдвига. После первой итерации получается следующая последовательность

$$S_1 = (\ldots, 1, 0, 1, 0, 1; 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$$

(вспомним, что мы сдвигаемся влево, что равносильно переносу центральной точки с запятой на одну позицию вправо). Вторая итерация σ дает $(\ldots, 1, 0, 1, 0, 1, 0; 1, 0, 1, 0, \ldots)$, или снова S_0, третья – снова S_1 и т. д. Последовательности S_0 и S_1 чередуются при каждой итерации σ, порождая периодическую орбиту. Таким образом мы также обнаружили, что означает *периодическая орбита* отображения сдвига. Вместо аналогии с фильмом можно представить диапроектор с круглой каруселью, который, показав все фотографии об отпуске вашего соседа, возвращается в начало круга и проходит его заново. В общем, орбита любой последовательности под действием отображения сдвига представляет собой совокупность всех последовательностей, полученных путем сдвига исходной последовательности вправо или влево на любое желаемое число позиций. Для периодических последовательностей это конечное множество, подобное тому, что состоит из S_0 и S_1, но как мы увидим, для «большинства» последовательностей оно бесконечно. Картинки никогда не повторяются.

Чтобы представить, каким образом такой простой символический механизм может объять хаос, предположим, что мы несколько раз подбрасываем монетку, при каждом подбрасывании отмечая, выпал ли *орел* или *решка*. Обозначив орла нулем, а решку единицей, мы создаем случайную последовательность нулей и единиц. Но эта последовательность, как и любая случайная последовательность, полученная любым подобным образом, также принадлежит к Σ. Таким образом, наряду со всеми периодическими последовательностями, Σ содержит много последовательностей, которые вполне могли бы быть выбраны случайным образом. Следовательно, Σ содержит орбиты, которые никогда не повторяются, но исполняют хаотический танец.

Последнее понятие, которое необходимо прояснить, — это понятие *плотности*. Представить его не так-то просто. Мы начинаем с геометрического примера. Вообразите кривую C, изображенную на листе бумаги P. Обычно кривую C окружает огромное «пространство», и лист P содержит очень много точек, расположенных далеко от C. Однако на самом деле (теоретически) возможно построить кривую, проходящую почти через *все* точки, расположенные в плоскости бумаги. В этом случае мы говорим о плотности C в P. Каким-то образом C должна изогнуться так, чтобы заполнить почти весь лист P. (Можете ли вы представить, как это возможно? В пятой главе мы приведем примеры таких кривых на кольцах и торах.) Аналогичным образом орбита отображения сдвига σ будет называться *плотной в множестве* Σ, если для *любой* данной последовательности в Σ эта орбита содержит точку, расположенную произвольно близко к данной последовательности. Двигаясь по этой плотной орбите, к *каждому* элементу Σ можно подойти сколь угодно близко.

Теория множеств — это раздел математики, изучающий совокупности объектов или *элементов*, называемые *множествами*, и пытающийся установить истины о множествах, независимо от природы элементов, образующих их. Теория множеств приобрела дурную репутацию, когда во время падения «Новой Математики» ее навязали невинным детям. Тем не менее, формулировка плотности в рамках теории множеств, обобщающая вышеописанные свойства, раскроет другие аспекты этого понятия, поэтому краткий экскурс в этот абстрактный мир просто необходим.

Орбиту отображения σ и кривую C можно рассматривать как множества, содержащиеся в более крупных множествах Σ и P, соответственно. Грубо говоря, множество является плотным в некотором другом множестве, если элементы первого множества очень хорошо приближают элементы второго множества. Для любого элемента второго множества можно найти такой элемент первого множества, который расположен произвольно близко к нему. Классическим примером является множество *рациональных чисел*, входящее во множество всех *вещественных чисел*. Множество рациональных чисел включает все числа, которые можно записать в виде дроби: $1/3$, $7/4$, $2/5$ и т. д. Но рациональные числа не включают все возможные вещественные числа. Оставшиеся вещественные числа — это множество иррациональных чисел, образованное числами, которые невозможно записать в виде дроби: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-1$, π и т. д. (Осознание существования таких чисел было великой победой греческой математики.) Плотность множества рациональных чисел во множестве вещественных чисел означает, что *любое* вещественное число можно сколь угодно близко представить с помощью рационального числа. Например, $\sqrt{2}$ можно представить как 1,41=141/100, но более точным приближением является 1,4142=14 142/10 000, а еще более точным — 1,414214=1 414 214/1 000 000. Эту последовательность приближений можно продолжать бесконечно, и каждое следующее приближение улучшает предыдущее. Следовательно, рациональные числа являются плотными в вещественных. На прямой вещественных чисел можно изобразить сходимость последовательности рациональных приближений к иррациональному числу, как на рисунке 2.7.

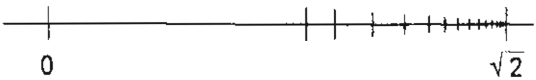


Рис. 2.7. Рациональные числа, приближающиеся к $\sqrt{2}$

Символы, обозначающие хаос*

Теперь мы можем вновь войти в мир *хаоса*, не боясь сорваться, т. к. под нами натянута страхующая сеть математической строгости. Хотя однозначно принятого математического определения хаотического отображения не существует по сей день, большинство специалистов согласны, что *хаос* характеризуется следующими свойствами:

1. Чувствительной зависимостью от начальных условий.
2. Существованием, по меньшей мере, одной плотной орбиты.
3. Плотностью множества периодических орбит.

Эти свойства не являются независимыми: в некоторых случаях (1) и (2) предполагают (3).

Мы перечислили свойства в порядке их практической важности, но их смысл гораздо проще понять в обратном порядке. Начиная с плотности множества периодических орбит, мы покажем, что отображение сдвига обладает каждой из указанных особенностей. Пользуясь определением расстояний между последовательностями, приводимым ранее, мы можем без труда получить периодические орбиты (последовательности), сколь угодно близкие к любой данной последовательности. Допустим, что мы имеем последовательность $S = (\ldots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \ldots)$, и рассмотрим периодическую последовательность $T = (\ldots, s_{-1}, s_0, s_{-1}; s_0, s_{-1}, s_0, \ldots)$. Два средних элемента этих последовательностей совпадают. Более точным приближением служит последовательность $R = (\ldots, s_0, s_1, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_{-2}, s_{-1}, \ldots)$, четыре центральных элемента которой совпадают с четырьмя центральными элементами данной последовательности. Теперь основная мысль очевидна: периодическая последовательность создается путем копирования блока длины $2n$ из середины последовательности, для которой желательно найти приближение, и последующего повторения этого блока до бесконечности в обоих направлениях. Чем больше n, тем точнее приближение. Предела возможного значения n не существует, пока эта величина остается конечной. Таким образом выражается плотность отображения сдвига.

Затем мы устанавливаем существование одной плотной орбиты. Мы построим такую последовательность, что соответствующая орбита отображения сдвига будет содержать точки, близкие к *каждому* элементу Σ. Определим последовательность символов S^* как

$$S^* = (\ldots; \quad \underbrace{0, 1}_{\textit{блоки длины один}}, \quad \underbrace{0,0,0,1,1,0,1,1}_{\textit{блоки длины два}}, \quad \underbrace{0,0,0,0,0,1,\ldots,}_{\textit{блоки длины три}} \quad \ldots).$$

Последовательность S^* строится следующим образом. Сначала мы записываем все возможные блоки длины один, что просто означает 0 и 1. Затем мы записываем все блоки длины два: $0, 0$, затем $0, 1$, и $1, 0$, и $1, 1$. Этот процесс мы продолжаем до бесконечности, добавляя блоки длины три, четыре и т.д., присоединяя друг к другу все конечные последовательности. Тем не менее, результирующая бесконечная последовательность все равно имеет начало. Чтобы сделать ее бесконечной в обоих направлениях, нужно просто развернуть ее копию в обратную сторону и склеить две получившиеся последовательности в середине. Мы построили последовательность, в которой встречаются все возможные (конечные) подпоследовательности любой длины.

Если приложить немного воображения, станет ясно, что мы ищем именно эту последовательность. Действительно, поскольку итерация отображения сдвига тождественна перемещению последовательности вдоль самой себя, вследствие чего фокус внимания перемещается на ее дальние части, а S^* содержит все конечные последовательности, *некоторая* итерация σ, приложенная к S^*, создает последовательность, совпадающую с любой данной последовательностью по любому желаемому количеству центральных элементов. Это доказывает, что для любой данной последовательности в Σ существует итерация S^* под действием σ, совпадающая с данной последовательностью сколь угодно точно. Мы показали, что свойство (2) имеет место быть.

Наконец, мы подошли к самой важной характеристике или показателю хаотического поведения: чувствительности к начальным условиям. В глазах многих именно в этом заключается сущность хаоса. Что это значит? Вспомните о непрерывности решений дифференциальных уравнений по отношению к начальным условиям, описанной в первой главе. Там сказано, что орбиты, начавшиеся вблизи друг друга, останутся близкими *на некоторое время*. Все интересующие нас системы подчиняются этому условию. Кроме того, мы ввели одно понятие, которое может показаться аналогичным: устойчивость, которая требует, чтобы орбиты, начавшиеся поблизости, *навсегда* оставались близкими друг к другу. Чувствительная зависимость от начальных условий не противоречит непрерывности, но никак не согласуется с устойчивостью. Только на *короткие* промежутки времени мы можем гарантировать, что орбиты, начавшиеся вместе, останутся вместе. Чтобы быть уверенным, что близкое соседство продлится дольше, необходимо найти решения с еще более близкими начальными условиями.

Но если чувствительность продолжит преобладать, то почти для всех орбит этот временной промежуток будет достаточно коротким. Через некоторое время решения разделятся и впредь будут вести себя по разному. На рисунке 2.8 некоторые кривые подходят друг к другу близко, после чего быстро расходятся. Если вспомнить рисунок 1.6 c, то все происходит так, словно фазовое пространство унизано седловыми

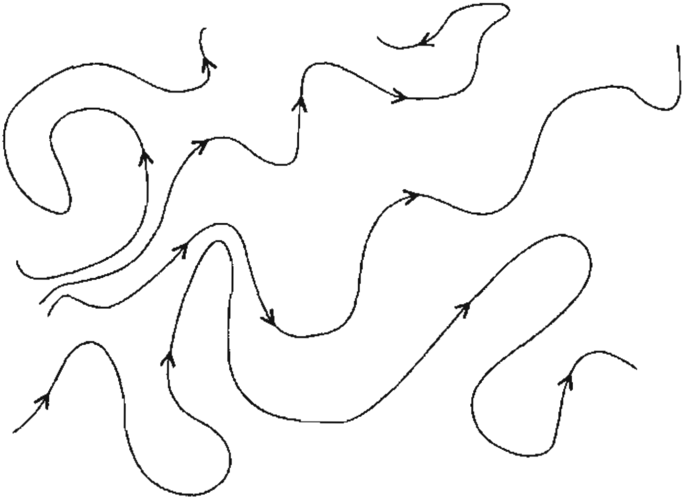


Рис. 2.8. Чувствительная зависимость от начальных условий

точками, неустойчивые сепаратрисы которых разводят соседние орбиты. Фактически, это и есть случай подковы Смейла: бесконечно многие периодические орбиты относятся к седловому типу.

Свойство чувствительности решений к начальным условиям понял, по крайней мере, отчасти, Джеймс Клерк Максвелл. В 1873 году знаменитый шотландский математик и физик написал труд, в котором указал, что, когда микроскопические возмущения порождают макроскопические перемены, предсказать будущие события, в сущности, невозможно. Чувствительная зависимость – это математически точный способ выражения в высшей степени неустойчивого и неповторяемого характера поведения системы. Это свойство имеет далеко идущие последствия. В действительности, замечания Максвелла были изложены в Кембриджском университете в ходе более общей дискуссии о свободе воли и детерминизме. Около тридцати лет спустя эти идеи отзовутся в труде Пуанкаре «Наука и Метод».

Данное свойство мы можем ощутить в своей повседневной жизни. Некоторые люди знают, что если они выедут из дома в определенное время утром, то шоссе будет относительно свободно, и они успеют добраться до работы вовремя. Но если они выедут хотя бы на пять минут позднее обычного, плотный поток транспорта задержит их на лишние полчаса. Небольшое изменение начальных условий приводит к большой перемене длительности поездки.

Другой (к данному моменту ставший классическим) пример чувствительной зависимости получил название «эффект бабочки». В 1972 году метеоролог Эдвард Лоренц обратился к Американской ассоциации продвижения науки с темой «Предсказуемость: приводит ли взмах крыльев бабочки в Бразилии к началу торнадо в Техасе?» Он, конечно же, говорил не о том, что крошечная сила бабочки может напрямую *вызвать* торнадо. Он, скорее, понимал внутреннюю неустойчивость атмосферы (или, точнее, уравнений, ее моделирующих) как усиливающую малую причину до размеров большого следствия.

Несложно увидеть, что отображение сдвига обладает свойством чувствительной зависимости. Предположим, что две последовательности, S и R, близки друг к другу. Это означает, что их центральные $2n$ элементов совпадают для некоторого большого числа n. И все же, после n итераций σ, примененных как к S, так и к R, мы можем получить две далекие друг от друга последовательности, т. к. их $(n + 1)$-й и $-(n + 1)$-й элементы могут отличаться. Например, четыре центральных элемента $S = (\ldots 0, 1, 0, 1; 1, 0, 0, 1, 1, \ldots)$ и $R = (\ldots, 0, 1, 0, 1; 1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ совпадают. После двух итераций мы имеем $S = (\ldots, 0, 1, 1, 0; 0, 1, 1, \ldots)$, а $R = (\ldots, 0, 1, 1, 0; 1, 0, 0, \ldots)$. Сдвинутые последовательности отличаются нулевой позицией. Последовательности S и R близки друг к другу, но уже две итерации σ их разделяют. Этот факт устанавливает свойство (1): чувствительную зависимость отображения сдвига от начальных условий. Мы доказали, что отображение сдвига является хаотическим в точном смысле нашего определения.

Ранее мы отмечали, что Смейл продемонстрировал «идеальное соответствие» между отображением подковы, действующим на точки в канторовом множестве Λ, и отображением сдвига, действующим на последовательности в Σ. Как и в топологии, идеальное соответствие является *гомеоморфизмом* — непрерывным преобразованием один в один. Смейл должен был показать, что каждый элемент Σ соответствует только одной точке в Λ и наоборот. Это было сделано следующим образом. Сначала он взял конечные последовательности длины, скажем, шесть, и показал, что каждая из них соответствует одному из $2^6 = 64$ квадратов рисунка 2.6, как мы доказали выше. Затем он увеличил длину n этих последовательностей и заметил, что соответствующие квадраты сжимаются в точки по мере приближения n к бесконечности. Чтобы доказать непрерывность, он должен был показать, что соседние точки в Λ соответствуют соседним последовательностям в Σ. Однако эти свойства неявно присутствуют в самом определении последовательности как «адреса» или местоположения точки: например, все последовательности с центральным блоком $(\ldots, 0, 1, 0; 1, 1, 0, \ldots)$ лежат в пределах квадрата, отмеченного этой последовательностью на рисунке 2.6; все последовательности с центральным блоком $(\ldots, 1, 0, 1, 0; 1, 1, 0, 1, \ldots)$ лежат в одном из четырех, еще меньших, квадратов, расположенных внутри него, и т. д.

Эта связь между подковой и отображением сдвига стала одним из крупнейших вкладов Стефена Смейла в теорию динамических систем. Точно также можно связать отображение Пуанкаре вблизи трансверсальной гомоклинической орбиты и отображение подковы. На рисунке 2.9 показано, каким образом после достаточно большого числа итераций отображения рисунка 1.14, тонкий прямоугольник R растягивается, сжимается и изгибается в форме подковы H. Из этого рисунка ясно, что подкова, отображение Пуанкаре вблизи гомоклинической орбиты и отображение сдвига — это, в сущности, всего лишь разные способы описания одного и того же явления: *хаоса*. На рисунке 2.9 также показано, как подкова выглядит в трехмерном фазовом пространстве дифференциального уравнения по мере того, как поток сжимается и растягивается, подобно тесту в руках пекаря. Почти три четверти века понадобилось разуму человека, чтобы связать эти идеи и начать нормально переключаться с аналитической формулировки на геометрическую и символическую. С точки зрения математики, безусловно, легче всего понять и работать с отображением сдвига. На самом деле, очень легко вывести свойства типа вышеописанных, причем сами описания настолько прозрачны, что название *хаос* кажется неоправданным. Этот факт свидетельствует о мощи символической динамики и математики вообще, в которой можно связать, на первый взгляд, разные идеи и показать их тождественность.

Так, проблема гомоклинической сети, над которой Пуанкаре бился в конце девятнадцатого века, продолжала раскрывать свои тайны через результаты, полученные Смейлом в 1960-х годах. Последние формулировки полного результата описывают ее как *теорему Пуанкаре–Биркгофа–Смейла*. Она стала краеугольным камнем в изучении нелинейной динамики.

В качестве примечания к этой истории интересно отметить, что после шестидесяти лет, разделивших работу Пуанкаре и труд Смейла, публикация была отложена еще на некоторое время. Хотя Смейл, в сущности, создал подкову и ее символическую динамику во время своего пребывания в IMPA в 1960 году, первую статью по этой теме он напи-

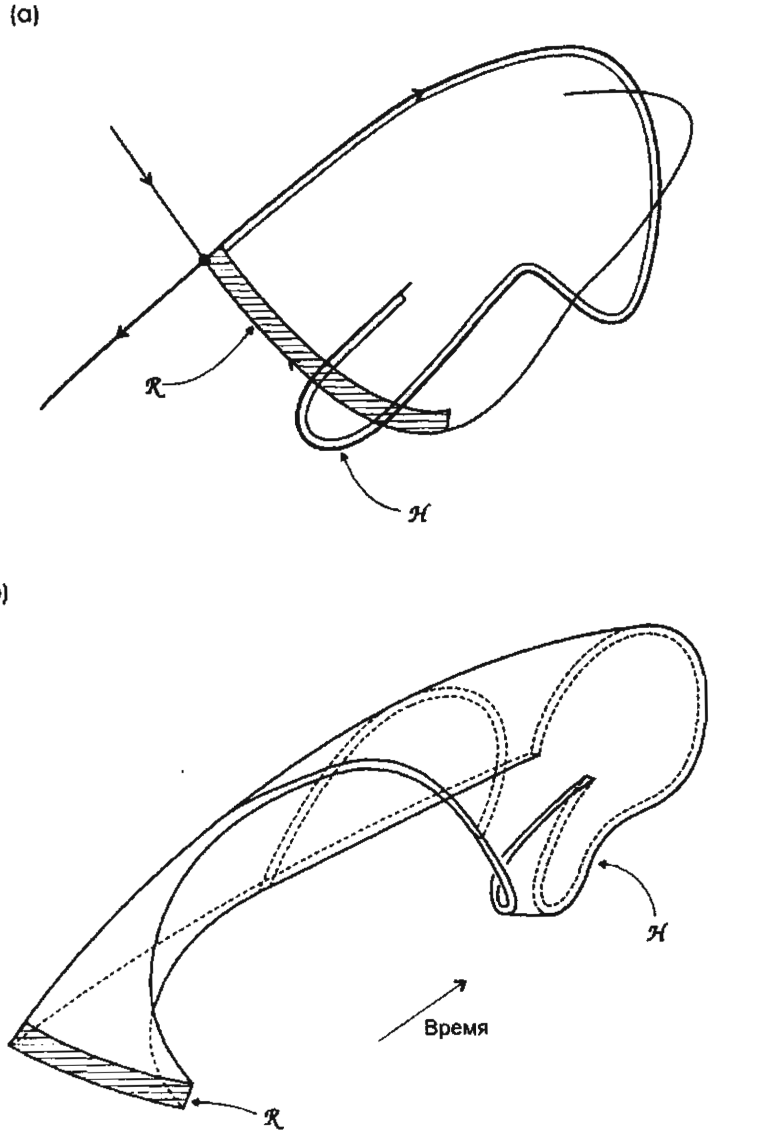


Рис. 2.9. Трансверсальные гомоклинические точки предполагают подковы: (а) на отображении, (b) в дифференциальном уравнении

сал лишь в конце 1961 года. Сначала ему нужно было завершить другие работы по дифференциальной топологии — теме, интересовавшей его ранее. Сама же статья, со скромным названием «Диффеоморфизмы с многими периодическими точками», увидела свет лишь в 1965 году, причем даже тогда она появилась в труде, посвященном дифференциальной и комбинаторной топологии, который, вероятно, прочли очень немногие специалисты по динамике.

Колебания и вращения

Между Пуанкаре и Смейлом самым выдающимся математиком в области динамических систем был Джордж Биркгоф. Перебравшись в Гарвард, он занялся решением еще более сложных задач, нежели задача о неподвижных точках. Он стал специалистом по исследованию, проведенному в динамике Пуанкаре, и попытался понять наиболее тонкие моменты, которые не смог разрешить его предшественник. Среди них были загадочные явления, происходящие вблизи трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки для отображения первого возвращения. Как мы описали в первой главе, Пуанкаре осознал, что это приводит к гомоклинической сети, но, по его собственному признанию в «Новых методах...», он не мог ни нарисовать ее, ни описать ее свойства.

В 1927 году Биркгоф опубликовал свой шедевр — «Динамические системы». Как мы уже отмечали, в этой книге он доказал, что в любой окрестности трансверсальной гомоклинической точки существует бесконечно много гомоклинических орбит. В символическом описании, придуманном Смейлом, они соответствуют лишь *части* бесконечного множества периодических последовательностей. Вследствие этого в некоторых статьях и книгах, включая текст, одним из соавторов которого является один из авторов этой книги, гомоклиническая сеть называется *теоремой Смейла–Биркгофа*. Но не упомянуть в этой связи имени Пуанкаре — это все равно, что отрубить корни дерева и восхвалять одни лишь плоды его. В ряде новых трудов этот результат носит название «теоремы Пуанкаре–Смейла». Но нам все же кажется, что наиболее справедливо включать в название все три имени, что мы и сделали.

На самом деле Биркгоф сделал в эту проблему куда бóльший вклад, чем представляют себе большинство специалистов по динамическим системам. В 1935 году он опубликовал еще одну книгу под названием *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*[2]. В четвертой главе этой

[2]«Новые исследования по динамическим системам» (фр.).

книги он рассмотрел дальнейшие следствия трансверсального пересечения инвариантных многообразий. Однако каким-то образом эта книга попала в тень предыдущей, и мало кто ее прочитал. Смейл фактически переоткрыл и формализовал многие результаты, содержащиеся в этой более поздней работе Биркгофа.

Тем не менее, этот факт нисколько не умаляет замечательное понимание данной темы Стефеном Смейлом. Вооружившись правильно выбранным формализмом и «языком» символической динамики, Смейл смог продвинуться намного дальше своего предшественника. Открытием *подковы* мы обязаны, прежде всего, Смейлу, т. к., несмотря на то, что некоторые идеи, стоящие за этим отображением, и попытки найти символический язык, можно увидеть в работах Биркгофа, этот автор не сумел подобрать нужных (математических) слов, чтобы полностью ее описать.

Символическая динамика оказывается полезной далеко не только в этом конкретном случае. Сейчас мы приведем пример того, как эта методика используется непосредственно в задаче трех тел, которая как-никак была для Пуанкаре первым стимулом. На протяжении долгого времени исследователи, занимавшиеся небесной механикой, искали пример так называемого *колебательного решения,* т. е. орбиты, которая почти убегает в бесконечность, но постоянно возвращается. Построить график такой функции несложно; один из подобных графиков изображен на рисунке 2.10. Мы просто рассматриваем колебания, которые усиливаются на каждом этапе. Поскольку функция снова и снова принимает как малые значения, так и произвольно большие, она не имеет предела по мере приближения времени к бесконечности. Говоря обыденным языком, она не может решить, что она, в конце концов, хочет сделать. Безусловно, мы можем нарисовать все, что пожелаем, но вопрос: «Существуют ли орбиты задачи трех тел со столь безумным поведением?» — останется без ответа.

Этот вопрос может показаться глупым, но ответ на него был бы очень важен для классификации решений задачи n-тел по их асимптотическому поведению. В следующей главе мы более глубоко изучим этот вопрос. Каждая наука стремится к классификации и организации своего знания, и математика здесь не является исключением. Асимптотические свойства решений дифференциального уравнения (т. е. поведение систем после долгого, долгого времени) можно рассматривать лишь в теории. Ни один компьютер не способен следить за орбитами бесконечно долго, поэтому унести нас в бесконечность способна только мысль. Специалисты по небесной механике хотели знать, живут ли такие колебательные создания среди прочих, более ручных типов решений, которые они уже нашли.

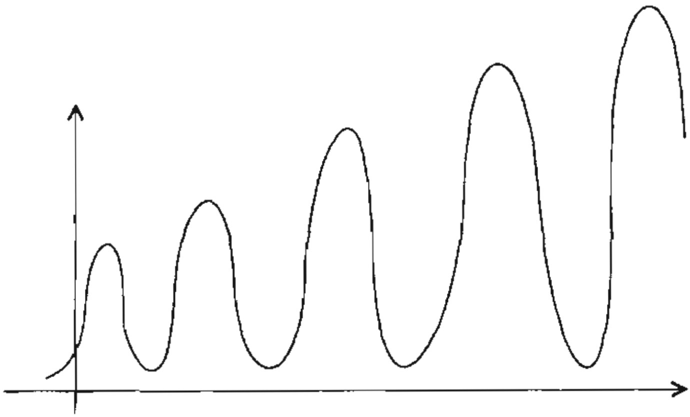


Рис. 2.10. Колебательная функция

В 1961 году русский математик К. Ситников доказал, что такое решение действительно существует. Вероятно, он узнал об этой задаче от А. Н. Колмогорова, с которым мы встретимся в пятой главе, хотя сам Ситников в то время работал в области топологии и не был учеником Колмогорова. Ситников рассмотрел две частицы, A и B, с равной массой, названные *основными*, которые движутся по эллипсам друг вокруг друга в плоскости, подчиняясь законам Кеплера. Затем он взял третью частицу C очень маленькой массы, настолько малой, что ее гравитационное поле не оказывало влияния на движения A и B. Начальные условия были выбраны таким образом, чтобы C постоянно ограничивалась линией l, перпендикулярной плоскости основных тел и проходящей через их центр масс, как показано на рисунке 2.11. В этом случае горизонтальные составляющие гравитационного действия A и B на C точно уничтожают друг друга, так что C может двигаться лишь вверх и вниз по вертикальной линии. Это еще один вариант *ограниченной задачи трех тел*, отличающийся от того, над которым работал Пуанкаре (где все три тела лежат в одной плоскости; см. рис. 1.8).

Ситников показал, что если выбраны подходящие начальные условия, то движение таково, что частица сначала поднимается над плоскостью основных тел, а затем опускается ниже нее, увеличивая пройденное расстояние с каждым колебанием. При каждом прохождении через плоскость ее энергия немного увеличивается из-за движений A и B, так что она может преодолеть бóльшее расстояние, прежде чем будет оттянута назад. Основные же тела постоянно пребывают в невозмущенном движении по неподвижным эллипсам, обеспечивая бесконечный запас энергии, который позволяет возвратно-поступательным движениям возрастать без ограничений. Тем не менее, C каждый раз возвращается назад, вследствие чего ее движение не имеет предела в бесконечном времени.

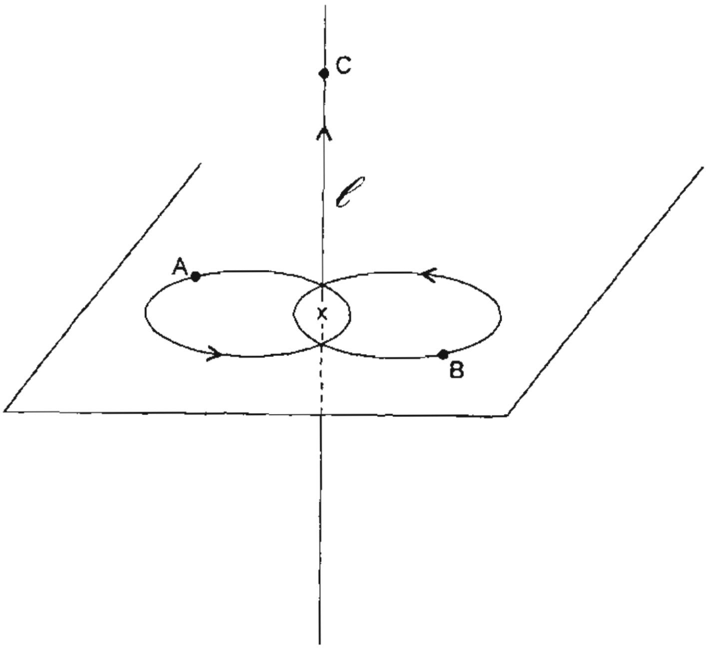


Рис. 2.11. Задача Ситникова

Несколько лет спустя другой русский математик, В. М. Алексеев, ученик Колмогорова, вернулся к примеру Ситникова и с помощью символической динамики показал, что в этой задаче может быть получено *любое* решение в зависимости от выбора начальных условий. Более того, он доказал, что это остается истинным даже для частицы C, имеющей конечную массу. Здесь *любое* понимается в том смысле, что множество решений полностью соответствует множеству бесконечных последовательностей символов, состоящих из *любых* натуральных чисел, а не только нуля и единицы, как в случае с подковой. Как это происходит?

Идея проста. Сосчитайте, сколько вращений основные тела совершают между двумя последовательными прохождениями C через плоскость, содержащую A и B. Затем постройте последовательность, бесконечную в обе стороны, приписывая каждому элементу этой последовательности соответствующий номер. Например, возьмите последовательность $(\ldots, s_{-2}, s_{-1}: s_0, s_1, s_2, \ldots) = (\ldots, 5, 3; 2, 7, 1 \ldots)$. Число 2 находится на месте s_0, поэтому до первого прохождения C через плоскость основные тела совершают два вращения. Поскольку 7 соответствует s_1, между первым и вторым прохождением C через плоскость произойдет 7 вращений. Точно также мы определяем одно вращение между вторым и третьим прохождением C через плоскость и т. д. Аналогичным образом мы продолжаем работать с прошлым, в случае с отрицательными элементами, определяя, что непосредственно перед нулевым прохождением через плоскость было три вращения. Поскольку орбитальные периоды A и B не меняются, возможность включить в последовательность любые целые числа говорит о том, что амплитуду колебаний можно сделать произвольно большой. Вся сложность заключается в установлении соответствия между вращениями основных тел, прохождениями C через плоскость и последовательностями символов. Замечательно, что для *любой* выбранной нами последовательности существует соответствующая орбита частицы C.

Эта краткая история повествует о причастности к главной проблеме небесной механики двух русских математиков. Интересно отметить, что, особенно со времен Второй мировой войны, советская математика шла по своему собственному пути, получая множество очень ценных результатов, но оставаясь, по большей части, в изоляции. Холодная война и советская политика, с одной стороны, языковой барьер и отсутствие готовых переводов, с другой, создали на несколько десятилетий почти непреодолимую пропасть между западной и советской научными культурами. Советские научные журналы, попадающие на Запад, часто содержали лишь немногие детали и только частные результаты; западных же журналов в большинстве советских научных заведений не было. И хотя математика интенсивно развивалась в обоих регионах, отсутствие общения приводило к возникновению параллельных вселенных. Многие западные исследователи испытали крайне неприятное удивление, когда после просачивания новостей узнали, что некоторые их результаты несколькими годами ранее были получены советскими математиками. Безусловно, истинным было и обратное.

Многие западные математики пытались предотвратить эту растрату энергии, отправляясь в Советский Союз и в страны Восточного блока каждый раз, когда у них появлялась такая возможность, причем им везло настолько, что они получали визы. Смейл был одним из ученых, ездивших в Москву, чтобы установить контакт между двумя мирами. С другим таким путешественником мы познакомимся в пятой главе. Обратные визиты организовать было гораздо сложнее, и случались они крайне редко. После того как некоторые математики из-за железного занавеса использовали эти возможности для отказа от своей партии, ограничения на выезд из страны стали еще жестче.

Сегодня, после распада Советского Союза и «переворотов» в бывших странах Восточного блока, все изменилось. Но, как и в более глобальных сферах политики и экономики, не все эти перемены были к лучшему. Многие представители более молодого поколения восточных математиков эмигрировали на Запад, мгновенно создав на рынке труда колоссальную конкуренцию для молодых западных ученых. Если же рассматривать данную ситуацию более фундаментально, в мире произошел явный сдвиг талантов в сторону Западной Европы и Северной Америки. В настоящее время в бывших коммунистических странах образовался серьезный пробел, который только осложняет проблема нахождения источника финансовой поддержки для их университетов и научно-исследовательских институтов.

Все эти события невозможно было предвидеть, когда Ситников, Алексеев и Смейл получали свои результаты. Слепое соревнование последовавших лет, вероятно, уже никогда не повторится. Достижения в математике могли бы быть совсем другими, если бы это соперничество было более открытым. В заключительной главе этой книги мы увидим, как хрущевская «оттепель» и последовавшее за ней приоткрытие Запада возымели замечательное влияние на работу, по крайней мере, одного советского математика — А. Н. Колмогорова. Более грандиозные перевороты конца восьмидесятых–начала девяностых годов двадцатого века, быть может, возымеют еще более важные последствия.

В наши дни символическая динамика используется во многих областях. Сложно представить, каким было бы развитие исследования динамических систем без этого ценного метода, да и во многих других областях математики и компьютерной науки символическая динамика не осталась без дела. В компьютерной науке она используется в теории кодирования и составлении алгоритмов хранения и передачи данных. Кроме того, символьные методы стали важными инструментами во множестве других областей прикладной науки и техники, особенно сейчас, когда стало ясным превалирование хаоса. В 1991 году, например, в Йельском университете состоялась конференция по символической динамике, проведенная в честь Роя Адлера из Научно-исследовательских лабораторий компании IBM. Эта конференция собрала 139 участников из тринадцати стран, среди которых были не только специалисты по чистой и прикладной математике, но и физики, программисты и электротехники из университетов и промышленных предприятий.

Новая наука?

Мы совершили путешествие в самое сердце хаоса, *новой науки,* как бы выразились авторы некоторых популярных статей. Но действительно ли это новая наука? Рассказанная нами история противоречит этому утверждению. Хаос открыл Пуанкаре, частично исследовал Биркгоф, и глубже понял Смейл. Хаос, родившийся в 1880-х годах, вряд ли можно назвать новой наукой. Множество других достижений двух последних десятилетий, даже полученных независимо, в некотором смысле все равно зависят от достижений этих основателей. Все разнообразные описания и представления хаоса, в конечном счете, сводятся либо к символической динамике, либо к одному из более тонких критериев, полученных математиками позднее. Все, что стоит за этим, вероятно, носит спекулятивный характер и вряд ли имеет большую научную ценность. Ни смутное понятие «иррегулярный», ни точное понятие «неустойчивый» не означают «хаотический».

На самом деле, мы сомневаемся, что хаос можно и должно называть наукой вообще. В «Словаре Вебстера для учащихся колледжа» (издание 1992 года) термин «наука» определяется как «область знания или изучения, работающая с фактами или истинами, систематически организованными и демонстрирующими действие общих законов». Хотя методы, созданные для изучения хаоса, возможно, подходят под данное определение, они все же являются частью уже установившейся науки — математики. Точнее, они являются частью математической теории динамических систем, и не такой уж большой частью. Они ни в коем случае не составляют новую науку в том смысле, в котором наукой является экология или вычислительная техника. Использование данного термина кажется, по большей части, литературной гиперболой.

А как же насчет более скромного притязания на теорию хаоса? Увы, даже здесь мы видим некоторую ошибочность названия. *Теория,* как правило, обращается к ограниченному диапазону явлений, давая законы и модели, с помощью которых эти явления можно описать. Именно такими являются теория относительности и квантовая теория, лежащие в основе современной физики. В противоположность этим теориям хаос охватывает неопределенную совокупность *методов,* предназначенных для *анализа* дифференциальных уравнений и других динамических систем. Символическая динамика, отображения Пуанкаре и прочие описанные нами инструменты ничего не сообщают нам о мире *непосредственно;* они, скорее, помогают нам понять и проанализировать следствия *других* теорий и моделей. Можно сказать, что хаос не является теорией, т. к. имеет слишком много областей применения.

Тем не менее, признание того, что хаос существует и даже распространен в наших детерминистических моделях мира, изменило наше мышление, и, с этой точки зрения, хаос, возможно, сделал больше, чем теория или даже новая наука. Принятое многими мнение о распространенности хаоса в наших детерминистических моделях мира было революционным шагом. Он привел к новой философии, свежему взгляду на явления, эволюционирующие во времени или даже в пространстве. Он влияет почти на каждую область науки и технологии, подталкивая исследователей к изобретению новых методов и концепций. Он придал новую остроту литературе, искусству и культуре вообще и даже утонченным областям критической теории. Он затрагивает почти все отрасли деятельности человека: от запуска спутников до телевизионной рекламы и популярных книг и фильмов вроде «Парка Юрского периода». Нравится это нам или нет, но хаос стал частью нашей жизни.

Старая парадигма, связанная с циклами, регулярностью и периодичностью, не была вытеснена — она получила новое истолкование. Сейчас ее можно рассматривать как первое приближение к более богатому и сложному видению Вселенной. Миф предков о вечном возвращении уже нельзя будет рассказать практически таким же образом. В лучшем случае мы можем сохранить идею возвращения (в смысле эргодической теоремы Пуанкаре, которую мы обсудим в четвертой главе), но на точное повторение мы надеяться не должны. Возможно, в этом и состоит разумный компромисс между порядком и хаосом.

3.

Столкновения и прочие сингулярности

Интеллектуальная деятельность Пенлеве отличалась исключительной широтой, силой и эффективностью в услужении у почти пророческого ума. Лишь несколько лет понадобилось ему, чтобы самым замечательным образом преуспеть в математике, механике и политике.

— Рене Гарнье

Камергер вошел в аудиторию и объявил: «Его Величество, Король!» Присутствующие встали, их негромкое перешептывание стихло. Все глаза обратились к двери. Никто не шевельнулся.

Тишину нарушили тяжелые шаги высокого седого человека, и весь зал взорвался аплодисментами. Король Швеции и Норвегии Оскар II входил в одну из крупнейших аудиторий Стокгольмского университета. Замечательное событие: король присутствует на вводной лекции в одном из самых престижных учебных заведений своей страны.

Сколько президентов, премьер-министров или глав государств — действующих или бывших — обращали внимание на публичную лекцию в каком-нибудь университете? (Мы сейчас говорим не о политических компаниях или событиях высокой научной политики, типа вручения почетных степеней себе или другим, а об обычных лекциях для студентов.) Сложно назвать хотя бы одного. Пришло ли Его Королевское Величество в тот день ради такого ординарного события? В одном смысле, *да*; в другом — *нет*. Один мотив, стоящий за присутствием короля, следует искать в его собственной личности; другой же лежит в личности лектора: предстоящее выступление представляло собой нечто большее, чем *обычная* лекция.

Король Швеции и Норвегии Оскар II был одним из самых замечательных правителей Скандинавии. Получив образование у историка Ф. Ф. Карлсона, Оскар взошел на престол в 1872 году после смерти его старшего брата Карла XV. Он был прекрасным оратором, поэтом и покровителем искусств и наук. Его глубокое уважение к культуре, которое, вероятно, он перенял у своего бывшего наставника, было главной причиной учреждения им премий вроде той, которую получил Пуанкаре, как мы рассказывали в первой главе. Кроме того, в 1882 году Оскар обеспечил финансовую поддержку для основания журнала *Acta Mathematica,* в котором появилась статья Пуанкаре, и для присуждения наград отдельным математикам. Король также имел привычку время от времени приглашать в Стокгольм некоторых из наиболее выдающихся европейских художников и ученых. В тот день, 2 октября 1895 года, король Оскар должен был прослушать первую из серии лекций, которые читал приезжий математик.

Когда аплодисменты стихли, председатель начал процесс представления. После обычных приветствий, адресованных королю, он представил своего выдающегося гостя: «Профессор Поль Пруден Пенлеве из Парижского университета!» Зал во второй раз взорвался аплодисментами, когда к кафедре подошел молодой человек и повернулся лицом к аудитории. Осенью 1895 года Пенлеве еще не было и тридцати двух лет. Он был известен как превосходный оратор. Курсы, которые он вел на факультете естественных наук, нередко были переполнены. Его эрудиция сочеталась с естественной и прямой манерой изложения материала, которая не менялась даже в официальном контексте публичной лекции. Слушать его было истинным удовольствием.

«Ваше Величество, — начал Пенлеве, — поскольку Ваше Величество было столь добрым, что почтило своим присутствием эту лекцию, мой первый долг состоит в том, чтобы выразить мои почтение и благодарность Вашему Величеству за огромную честь быть приглашенным в Стокгольм для рассказа о последних достижениях в анализе... Как отметило Ваше Величество, главной целью этого курса является теория трансцендентов и, в частности, формальных трансцендентов, определенных дифференциальными уравнениями. Мне хотелось бы описать то центральное место, которое эта теория занимает в исследовании последних лет. Это позволит мне в некоторой степени обосновать дух и направление современной математики».

Вводные формальности были выполнены, и Пенлеве вошел в мир науки. Он начал с Ньютона и Лейбница, затем перешел к законам Кеплера и показал, как идея дифференцирования привела к созданию закона

Илл. 3.1. Поль Пенлеве. (Любезно предоставлено Национальным центром научных исследований, Париж)

тяготения и появлению задачи n-тел. Наконец, он кратко описал работу Бернулли, Эйлера, Клеро, Даламбера и других первых исследователей в области дифференциальных уравнений.

В огромной, битком набитой аудитории мало кто из слушателей основательно знал эти предметы. Несмотря на это, уравновешенный и изящный стиль Пенлеве захватил всех его слушателей. Понимать его было несложно. Сущность сложного материала он представлял без скучных математических подробностей. В зале не было слышно ни шепота, ни дыхания; слушатели стремились впитать в себя каждое слово и наслаждаться каждым предложением. Они были зачарованы.

Взрыв аплодисментов заполнил зал, когда Пенлеве закончил. Сам король выразил восхищение: гордый своим решением пригласить Пенлеве в Стокгольм, он поднялся и довольно улыбнулся, демонстрируя свое одобрение. Открытие прошло блестяще, равно как и двадцать две последующие лекции.

Исключительный человек

Как гласило второе предложение первой лекции Пенлеве, целью его курса было изучение так называемых трансцендентов, определенных дифференциальными уравнениями. Чтобы понять эту достаточно техническую формулировку, прежде всего, мы должны объяснить понятие *сингулярности* решений дифференциальных уравнений. Для этого мы вернемся к метафоре с текущей водой, описанной в первой главе. Там мы предположили, что векторное поле, определенное дифференциальным уравнением, напоминает течение реки, переносящее по своей поверхности сплавляемые деревья (отдельные решения). Иногда палку или ветку может прибить к берегу или выбросить на него; аналогом в векторном поле является то, что в какой-то конкретный момент времени решение покидает фазовое пространство – оно буквально прекращает свое существование. Несколько просторечно мы говорим, что *оно уходит в бесконечность в конечное время,* т. к. нередко оно перестает существовать, становясь произвольно большим: решение убегает в бесконечность. Кроме того, оно может встретить препятствие в фазовом пространстве. В нашем примере с падающим мячом, изображенным на рисунке 1.1, физическим препятствием является поверхность Земли при $h = 0$. Более того, разрешаются только положительные значения высоты (положения), поэтому фазовое пространство представлено не всей плоскостью, а лишь правой полуплоскостью, соответствующей *всем* скоростям (положительным и отрицательным) и всем положительным значениям высоты. В данном случае линия $h = 0$ – это «берег реки», когда при падении вниз мяч ее достигает, решение перестает быть определенным. (Мы могли бы добавить модель, описывающую, как мяч отскакивает от земли. Однако это потребовало бы рассмотрения вопросов, связанных с упругостью мяча и динамикой удара, и вынесло бы нас за рамки нашего «простого» ньютонова мира.)

Сингулярности также могут возникнуть в отдельных точках фазового пространства, как показано на рисунке 3.1 *а*. Вообще, если решение не определяется для всех значений переменной времени t и вместо этого останавливается в некоторый конечный момент времени t^*, то мы называем t^* *сингулярностью* соответствующего решения.

Такую сингулярность математики называют *регуляризуемой*, подразумевая, что решение можно продолжить за момент времени t^*. В этом случае мы говорим, что сингулярность является устранимой. Палка вновь продолжает плыть по течению, пока не встретит новое препятствие: новую сингулярность. Существенной (трансцендентной) Пенлеве назвал неустранимую сингулярность. По определению, решение невозможно продолжить за неустранимую сингулярность t^*. В задаче n-тел сингулярности возникают, когда происходят столкновения двух или более частиц, как мы увидим совсем скоро. Если движения сталкивающихся частиц можно продолжить после столкновения имеющим смысл образом, то сингулярность является устранимой; в противном случае, она трансцендентная.

В своих стокгольмских лекциях французский математик представил сложную тему сингулярностей и, в частности, трансцендентов. В аналогии с рекой все кажется простым, но в случае с дифференциальными уравнениями сингулярности могут создать немало проблем. Пенлеве классифицировал много разных случаев, создал новые методы для их изучения и нашел немало интересных результатов. В качестве центральной области применения он рассмотрел задачу n-тел. Естественно, первым возникал следующий вопрос: «Действительно ли в этой классической задаче возникают сингулярности и, если да, каков их физический смысл?»

Очевидным примером сингулярности в задаче n-тел является *двойное столкновение*. В момент времени t^* две частицы совпадают, имея общие координаты положения. Множество точек в фазовом пространстве, имеющих две одинаковые координаты, называется *гиперплоскостью*. В частности, когда фазовое пространство – это плоскость, гиперплоскость – это всего лишь прямая линия, вроде $h = 0$ на рисунке 1.1 *а*. Этот простой случай имеет место только в задаче с прямолинейно действующей центральной силой, когда одно тело движется к центру или от него по неподвижной линии. Что касается падающего мяча, двумя координатами фазового пространства являются положение и скорость движущейся частицы относительно центра. Поскольку в законе гравитационного притяжения Ньютона сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, а при столкновении расстояние между частицей и центром равно нулю, сила становится бесконечной, а уравнения, описывающие движение, более не имеют смысла. Следовательно, линия с нулевой координатой положения, определяющая столкновение, служит препятствием для орбит в плоском фазовом пространстве. Когда орбита достигает ее, очевидного способа продолжиться за эту линию или соскользнуть с нее для орбиты не существует (см. рис. 3.2).

То же самое происходит при двойных столкновениях двух любых частиц, а также при тройных, четверных и более столкновениях. Препятствия в фазовом пространстве создают также *одновременные столкновения.* Примером такого столкновения служит *парное двойное столкновение,* при котором в одной точке физического пространства сталкиваются две частицы, тогда как в какой-то другой точке одновременно с ними сталкиваются две другие частицы. Хотя такие события очень маловероятны, мы должны их понимать, если хотим получить *полное описание задачи n-тел.* Более того, подобно камню, брошенному в воду, от которого расходятся круги, столкновения влияют на структуру фазового пространства во всей окрестности сингулярных точек.

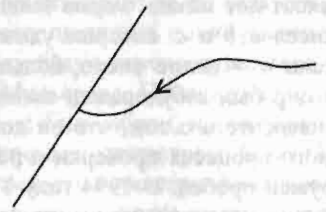


Рис. 3.2. Орбита, достигающая гиперплоскость, которая определяет столкновение в задаче с центральной силой, действующей прямолинейно

Мы частично ответили на поставленные выше вопросы. Мы привели примеры сингулярностей, и нам известен их физический смысл. Но, как обычно бывает в науке, каждый ответ создает новые вопросы. Сейчас мы должны спросить, являются ли столкновения существенными или всего лишь устранимыми сингулярностями. Кроме того, мы можем поинтересоваться, являются ли столкновения единственно возможными сингулярностями в задаче n-тел. Это сложные задачи, и Пенлеве не смог полностью решить их в ходе своих лекций. Он частично ответил на второй вопрос, доказав, что в *задаче трех тел единственными сингулярностями являются столкновения.* Он попытался обобщить этот результат на более чем три тела, но потерпел неудачу. Тогда он выдвинул гипотезу.

Гипотезы стимулируют развитие математики. Занимаясь исследованием, математики порой интуитивно чувствуют, что знают правильный ответ на вопрос, но, несмотря на многочисленные попытки, не могут его доказать. Тогда они, как правило, выдвигают *гипотезу*, т. е. ясно формулируют, каким, по мнению автора, должен быть правильный ответ на поставленный вопрос. Чем дольше гипотеза остается без доказательства или опровержения, тем известнее она может стать. Гипотезы особенно важны, если от их прояснения зависят ключевые результаты развития какой-либо области. Попытки решить такие задачи могут стимулировать рост целого раздела математики или привести к появлению новых ее разделов. Мы уже упоминали о гипотезе об n-мерных сферах Пуанкаре, отметив, что главной нерешенной гипотезой в топологии остается трехмерный случай.

Возможно, самой знаменитой гипотезой во всей математике является Последняя Теорема Ферма, названная в честь Пьера де Ферма, французского юриста, который записал ее на полях книги (и заявил, что доказал ее) более трехсот лет назад. Ферма заявил, что не существует (ненулевых) целых чисел a, b и c, которые удовлетворяли бы уравнению $a^n + b^n = c^n$, если n — целое число, большее двух. В 1993 году весь математический мир был взбудоражен заявлением Эндрю Уайлса из Принстонского университета о том, что он доказал теорему Ферма, но в ходе утомительного процесса проверки и рецензирования в доказательстве был обнаружен пробел. В 1994 году Уайлсу и его бывшему ученику Ричарду Тейлору удалось восполнить этот пробел. За восемь лет, проведенных в борьбе с этой задачей, Уайлс ввел важные новые идеи, которые выходят далеко за рамки частного случая Ферма. Сделав это, он сблизил геометрию с теорией чисел. Этот факт свидетельствует об еще одной ценной особенности гипотез: они притягивают внимание к частным областям, концентрируя на них усилия талантливых людей, но свет, который проливает полученное ими решение, нередко освещает куда больше, чем конкретная задача.

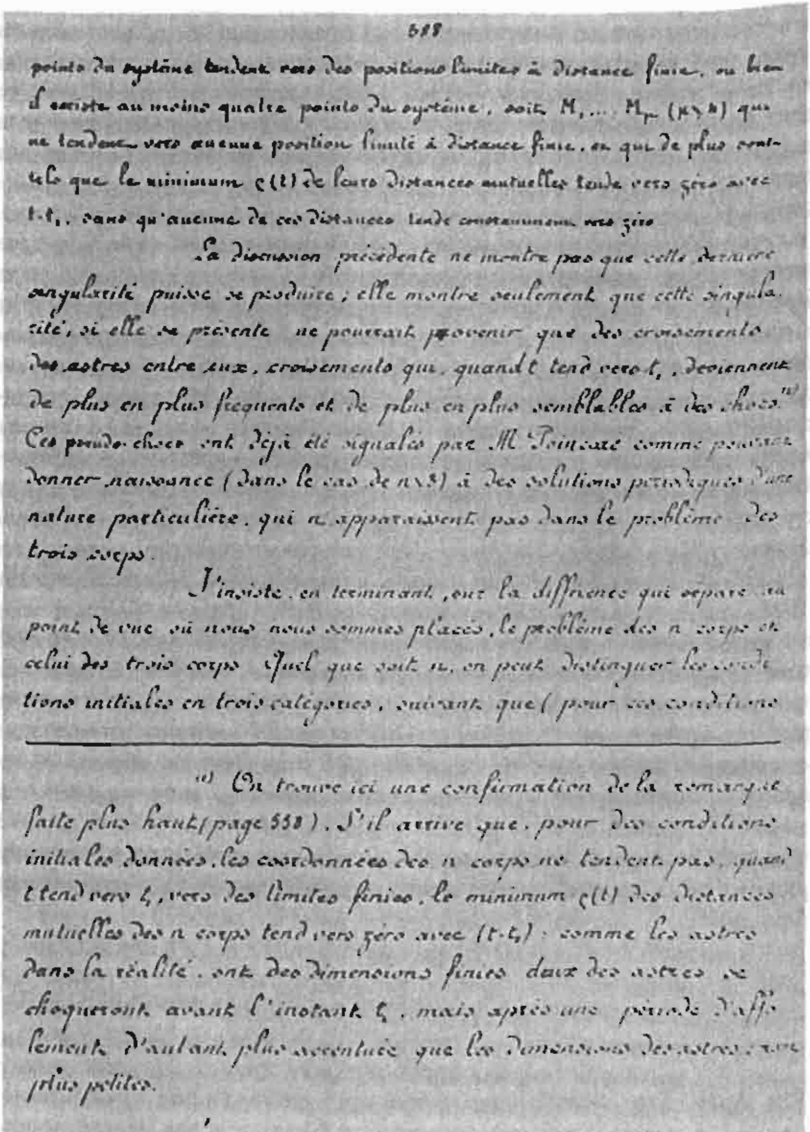
Гипотеза Пенлеве касается сингулярностей, отличных от столкновений. Она гласит, что для n, *больших трех, существуют решения с сингулярностями, не обусловленными столкновениями*. На предпоследней, пятьсот пятьдесят восьмой странице своей рукописи Стокгольмских лекций, написанной скрупулезным почерком, Пенлеве в одном предложении выразил свою идею относительно того, как может появиться это решение. Частицы совершали бы резкие колебания, приближаясь к столкновению, после чего рассеивались бы перед тем, как подойти к другому столкновению еще ближе, и этот сценарий повторялся бы вновь и вновь в конечный промежуток времени. Однако он не смог доказать, что такой сложный танец действительно может происходить в задаче n-тел.

Пенлеве больше ничего не сказал о движении и добавил только, что ранее Пуанкаре упоминал о таких возможных *псевдостолкновениях;* но где и в каком контексте не ясно, т. к. никакой ссылки Пенлеве не дает. Быть может, эта идея так и не была опубликована, а лишь возникла в разговоре двух парижских математиков. Тем не менее, сегодня эта гипотеза носит имя Пенлеве, и за прошедшие сто лет она послужила стимулом для многих достижений, которые мы рассмотрим в этой главе.

Вскоре после Стокгольмских лекций деятельность Поля Пенлеве начала выходить за пределы математики. В 1897, когда слушалось дело Дрейфуса, он вошел в политику и, не забрасывая математики, достиг высших уровней французского правительства. Будучи избран депутатом пятого парижского округа и переизбран в 1914 году, он стал министром общественного образования в 1915–1916 годах при правительстве Аристида Бриана. Двадцатого марта 1917 года Пенлеве получил должность военного министра и в сентябре того же года стал премьер-министром. В ноябре того же года ему пришлось покинуть этот пост из-за конфликта с «левыми». В 1924 году, будучи председателем палаты депутатов, после отставки Александра Мильерана, Пенлеве баллотировался на пост президента Франции. Он не был избран, но на период с апреля по ноябрь 1925 года вновь стал премьер-министром. В октябре и ноябре того года он также занимал должность министра финансов. Между 1926 и 1929 годами должность военного министра вновь попала в руки Пенлеве при правительстве Аристида Бриана и Раймона Пуанкаре (младшего двоюродного брата Анри). В 1927 году Кембриджский университет наградил его званием *Doctor Honoris Causa.* В 1928 году Пенлеве вновь был избран депутатом; его переизбрание состоялось в 1932 году, а с 1930 года до самой смерти в 1933 году Пенлеве служил министром воздушных сил при трех различных правительствах. Его могила находится в Пантеоне, рядом с могилами других политических, военных и научных лидеров Франции.

Столкновение или уход в бесконечность

Во время вводной лекции Пенлеве в углу аудитории сидел двадцатидвухлетний студент. Увиденное и услышанное произвело на него глубокое впечатление. Хотя он понял далеко не всю лекцию, ей суждено было возыметь решающее влияние на его жизнь. Молодого человека звали Эдвард Хуго фон Цейпель. Внук немецкого эмигранта, рожденный в Швеции, он любил математику и астрономию,



558

points du système tendent vers des positions limites à distance finie, ou bien il existe au moins quatre points du système, soit $M_1, \ldots M_p$ $(p \geq 4)$ qui ne tendent vers aucune position limite à distance finie, et qui de plus sont tels que le minimum $\rho(t)$ de leurs distances mutuelles tende vers zéro avec $t-t_1$, sans qu'aucune de ces distances tende constamment vers zéro.

La discussion précédente ne montre pas que cette dernière singularité puisse se produire; elle montre seulement que cette singularité, si elle se présente ne pourrait provenir que des croisements des astres entre eux, croisements qui, quand t tend vers t_1, deviennent de plus en plus fréquents et de plus en plus semblables à des chocs[1]. Ces pseudo-chocs ont déjà été signalés par M. Poincaré comme pouvant donner naissance (dans le cas de $n \geq 3$) à des solutions périodiques d'une nature particulière, qui n'apparaissent pas dans le problème des trois corps.

J'insiste, en terminant, sur la différence qui sépare, au point de vue où nous nous sommes placés, le problème des n corps et celui des trois corps. Quel que soit n, on peut distinguer les conditions initiales en trois catégories, suivant que (pour ces conditions

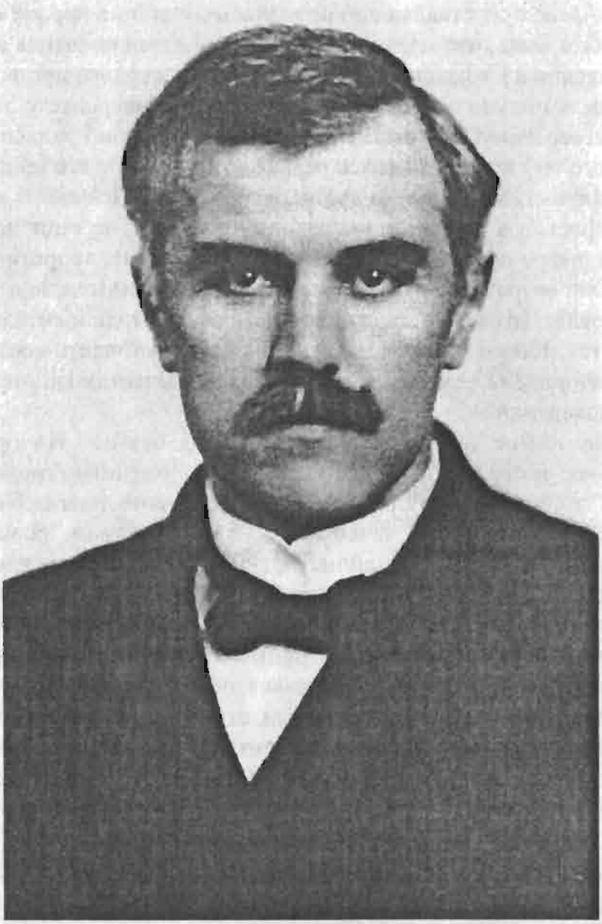
---

[1] On trouve ici une confirmation de la remarque faite plus haut (page 558). S'il arrive que, pour des conditions initiales données, les coordonnées des n corps ne tendent pas, quand t tend vers t_1, vers des limites finies, le minimum $\rho(t)$ des distances mutuelles des n corps tend vers zéro avec $(t-t_1)$: comme les astres dans la réalité, ont des dimensions finies deux des astres se choqueront avant l'instant t_1, mais après une période d'affolement d'autant plus accentuée que les dimensions des astres sont plus petites.

Илл. 3.2. Гипотеза Пенлеве, из рукописи его Стокгольмских лекций. (Любезно предоставлено Национальным центром научных исследований, Париж) а курс Пенлеве представлял собой удачное сочетание первой со второй. Очень может быть, что идея изучения задачи n-тел посетила его во время нахождения в Стокгольме Пенлеве. Через несколько лет, в 1904 году, фон Цейпель получил степень доктора наук в университете Упсалы, защитив диссертацию по теме периодических решений задачи трех тел. После этого ему предоставилась редкая возможность: его пригласили на учебу в Париж, который в то время был научной Меккой. В июне 1904 года он приехал в роскошную столицу Франции, где смог прослушать курсы Пуанкаре по небесной механике и Пенлеве по теоретической механике. Они возродили его интерес к сингулярностям задачи n-тел. Его заинтриговала возможность существования бесстолкновительных сингулярностей. Каким образом должна была бы выглядеть соответствующая траектория? О чем думали его учителя, выдвигая гипотезу о столь бурном поведении?

Исследование начинается, когда что-то неясно. На протяжении большей части своей жизни мы идем по проложенным тропам и узнаем лишь то, что испытали и объяснили другие люди. Но природа наделила нас бесценным качеством — любопытством, родовой тягой к неизвестному. За два миллиона лет эволюции люди трансформировали этот дар природы в высокоорганизованную интеллектуальную деятельность, которую сегодня мы называем исследованием. Мы научились изыскивать разные методы, применять их в различных областях жизни, а недавно и науки; стремиться понять каждую тонкость. Тем не менее, именно этот первозданный стимул — любопытство — дает нам силу преодолевать трудные моменты в нашем поиске понимания. Именно эта сила двигала Эдвардом фон Цейпелем в первое десятилетие двадцатого века.

В сентябре 1906 года фон Цейпель уехал из Парижа и вернулся в Швецию. Он приехал домой, набравшись научного опыта, готовый к сражению с трудными задачами. Он хотел пойти дальше, чем это удалось Пуанкаре и Пенлеве, и вознамерился довести до конца решение вопроса сингулярности. Через два года после возвращения, в мае 1908 года, он опубликовал статью на французском языке со скромным названием «О сингулярностях задачи n-тел». Менее чем на четырех страницах он утверждал и доказывал, что *для того, чтобы решение имело бесстолкновительную сингулярность, необходимо, чтобы движение данной системы стало неограниченным в конечное время.* Грубо говоря, полученный им результат гласил, что если решение сингулярно, то оно должно приводить либо к столкновению, либо к уходу в бесконечность в конечное время.



Илл. 3.3. Хуго фон Цейпель. (Любезно предоставлено библиотекой университета Упсалы)

Чтобы прояснить это, выразим вышеописанное другими словами. Фон Цейпель заявил, что если все расстояния между частицами остаются конечными, то единственно возможными сингулярностями являются столкновения. Поэтому для возникновения бесстолкновительной сингулярности расстояние между, по крайней мере, двумя частицами должно стать неограниченным. Оно не обязано быть бесконечным через разделение частиц навсегда; частицы могут совершать колебания вперед-назад, так чтобы с каждым последующим колебанием амплитуда увеличивалась, становясь неограниченной, почти как в ограниченной задаче трех тел Ситникова, описанной во второй главе. Но, чтобы квалифицировать это как сингулярность, все это должно происходить в конечный промежуток времени. Следует отметить, что фон Цейпель не доказал, что бесстолкновительные сингулярности *действительно* существуют. Он лишь описал, что должно происходить, *если* они существуют. Его результат говорил о том, что в отсутствие вышеописанного поведения все сингулярности — это обязательно столкновения. Прогресс в математике, как и в других науках, обычно происходит маленькими шагами, вроде этого. Фон Цейпель установил связь между бесстолкновительными сингулярностями и колебательными решениями, показав, что они неразрывно связаны, и поэтому достаточно изучить хотя бы одно из этих явлений.

У этого результата интересная история. В 1920 году французский астроном Жан Шази опубликовал в *Comptes rendus hebdomadaires* статью, в которой он притязает на этот же результат без доказательства и ссылки на фон Цейпеля. Очевидно, что Шази не знал о статье от 1908 года. В первом издании 1941 года книги Аурела Уинтнера «Аналитические основы небесной механики» присутствует ссылка на статью фон Цейпеля, но сказано, что в доказательстве есть белые пятна и его справедливость сомнительна. Подробное доказательство было дано в 1970 году, когда Ганс Шперлинг из Центра по космическим полетам им. Маршалла в Хантсвилле, используя идею, аналогичную идее фон Цейпеля, преодолел все трудности этой задачи. Казалось, что данный вопрос закрыт. Однако, как мы описывали ранее, в 1985 году Ричард Мак-Гихи из университета Миннесоты провел часть своего субботнего отпуска в Институте Миттаг-Леффлера вблизи Стокгольма. Он нашел статью фон Цейпеля, которая была опубликована в малоизвестном шведском журнале, хранящемся в институтской библиотеке, и внимательно ее прочитал. Мак-Гихи понял, что доказательство фон Цейпеля на самом деле было правильным и перевел его на язык современной математики, более доступный для сегодняшних специалистов. В 1986 году он опубликовал статью, в которой установил истину и приоритет фон Цейпеля в получении данного результата.

После 1910 года интересы фон Цейпеля мало-помалу переместились в область более практических аспектов небесной механики, связанных с астрономией. Он написал статью о методах теории возмущений, применил свое знание к изучению движения астероидов и комет и, в конце концов, обратился к астрофизическому изучению строения и эволюции звезд. В 1915 году фон Цейпель был избран в Шведскую Королевскую Академию наук, а через четыре года — назначен профессором астрономии в университет Упсалы. В 1920 году Миттаг-Леффлер попросил фон Цейпеля написать статью для памятного выпуска *Acta Mathematica,* посвященного жизни и работе Пуанкаре. Фон Цейпель написал семидесятипятистраничную статью о работе французского математика в небесной механике. Это факт свидетельствует о высокой оценке фон Цейпеля, т. к. статьи в этот выпуск журнала писали только избранные: Аппель, Адамар, Лоренц, Пенлеве, Планк и Вин. С 1926 по 1935 год фон Цейпель был председателем Шведского астрономического общества, а с 1931 по 1948 год возглавлял Национальный комитет по астрономии. В 1930 году его карьера увенчалась вручением премии Моррисона Нью-Йоркской Академии наук за вклад, сделанный в теорию строения и эволюции звезд.

Теорема фон Цейпеля сыграла фундаментальную роль в истории гипотезы Пенлеве, несмотря на то, что являлась ранней работой и находилась за пределами основной области его более зрелого исследования. Многие люди полагали, что эта теорема является хорошим аргументом *против* существования бесстолкновительных сингулярностей. Каким образом «замкнутая» система частиц может получить достаточную энергию, чтобы стать неограниченной в конечное время? (Здесь есть важное отличие от ограниченной задачи трех тел Ситникова, в которой неограниченным источником энергии служат устойчиво вращающиеся по орбите основные тела, т. к. мы предположили, что третье, малое, тело на их движение не влияет.) Ответить на этот вопрос было сложно, и после Шази внимание, направленное на эту задачу, сместилось к другим. В шестидесятых годах к этой теме вновь обратились два американских математика: Дональд Саари (в настоящее время профессор Северозападного университета) и его бывший научный руководитель Гарри Поллард (из университета Пурду). Приблизительно в то же время группа ученых, занимавшихся совсем другим вопросом, провела численные эксперименты. Мы опишем эти попытки, а потом вернемся к работе Полларда и Саари.

Компьютерные игры

Первые цифровые компьютеры были гигантскими. В 1950-е–1960-е годы богатые североамериканские университеты тратили огромные суммы денег на их создание и приобретение. По сравнению с современными персональными компьютерами и автоматизированными рабочими местами, чудовища тех лет занимали целые комнаты и работали в тысячи раз медленнее. Но они появились, и многие ученые считали это чудесным. Однако с этим соглашались не все: по сей день некоторые консерваторы против использования вычислительной техники, и время от времени на двери того или иного кабинета можно увидеть дерзкую надпись: «Зона, свободная от компьютеров». В то время у многих существовало глубокое подозрение в отношении компьютеров, особенно это касалось специалистов с математических факультетов. Выдающимся примером этого служит тот факт, что после смерти Джона фон Неймана его бывшие коллеги из Института перспективных исследований в Принстоне на много лет полностью очистили свои здания от компьютеров. Помимо огромного вклада, который фон Нейман внес в математику вообще, он был одним из создателей первых цифровых машин.

Тем не менее, несмотря на столь суровую оппозицию, находились энтузиасты, желавшие использовать компьютеры с самого начала. В частности, астрономы и специалисты по небесной механике поняли, что компьютерные модели уравнений Ньютона и задачи n-тел могут вывести их куда дальше, чем трудоемкие расчеты вручную, которыми они ограничивались прежде.

В 1966 году одним из таких энтузиастов был Виктор Себехей. Его главные интересы лежали в области небесной механики, а вопрос, к которому он решил подойти с помощью численных методов, был далеко не нов. Эрнст Мейссель, бывший студент Якоби, уже предложил изучение следующей задачи в 1893 году, в разговоре с Карлом Бурро. (На самом деле, судя по записям Мейсселя, он выполнил обширные вычисления по этой и аналогичным задачам, скорее всего еще до 1893 года). Рассмотрим три частицы, массы которых пропорциональны трем, четырем и пяти, расположенные в вершинах пифагорейского треугольника (прямоугольного треугольника со сторонами, равными трем, четырем и пяти единицам длины); см. рисунок 3.3. Если предположить, что частицы подчиняются ньютонову закону притяжения, каким будет их поведение в будущем, если отпустить их из этих начальных положений с нулевыми начальны-

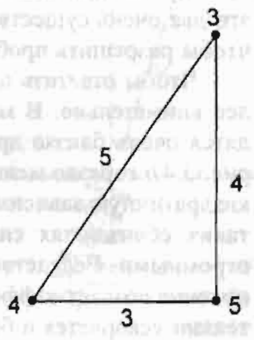


Рис. 3.3. Пифагорейская задача трех тел

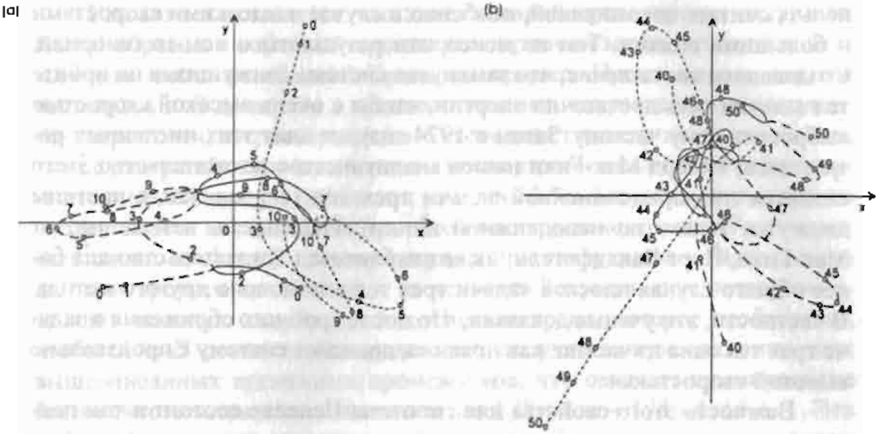
ми скоростями? В 1913 году эту задачу с помощью численных методов исследовал Бурро, но без особого успеха. Его вычисления, выполненные вручную, не могли зайти далеко, а потому он не сделал сколько-нибудь важных выводов.

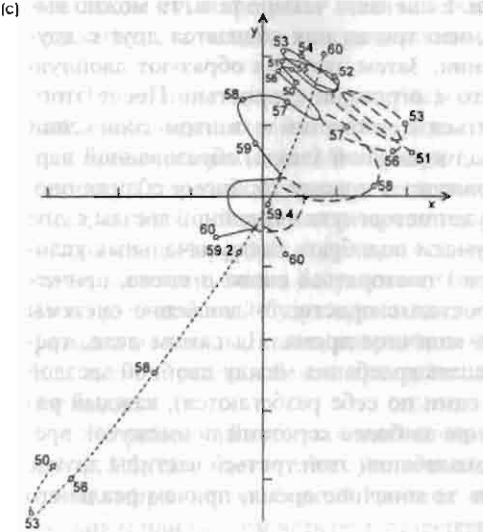
Себехей отправил Майлса Стэндиша в Йельский университет для выполнения вычислений. Позднее в тот же год их продолжили Спинелли, Лекар и сам Себехей в Институте космических наук NASA в Нью-Йорке. В то же время Л. Станек, под руководством Эдуарда Штифеля, изучал эту проблему в ETH, Федеральном технологическом институте, в Цюрихе. Глазам этих людей открылось нечто поразительное. После некоторого сложного поведения две частицы образовали двойную звезду (т. е. начали вращаться по орбите близко друг вокруг друга), а третья – была исторгнута с огромной скоростью. Результаты некоторых из этих расчетов приведены на рисунке 3.4.

Как часто бывает в научном исследовании, инициаторы этих расчетов искали нечто совсем другое. Они искали периодические решения. Вместо них они обнаружили поведение, которое мы только что описали. Для них оно было даже более интересным, т. к. проливало свет на вопрос образования двойных звезд. К гипотезе Пенлеве (которой они в то время не интересовались) их работа имела отношение постольку, поскольку одна частица отлетает с высокой скоростью в сторону от двух других. Почему это происходит и *почему это свойство важно?* Оказалось, что это два очень существенных вопроса, на которые необходимо ответить, чтобы разрешить проблему бесстолкновительной сингулярности.

Чтобы ответить на первый вопрос, посмотрим на рисунок 3.4 *b* более внимательно. В момент, близкий к $t = 41$, все три частицы находятся очень близко друг от друга (обратите внимание, что масштаб на рис. 3.4 *b* гораздо меньше, чем на рис. 3.4 *c* и 3.4 *d*). Учитывая обратноквадратичную зависимость ньютонова закона притяжения, ясно, что при таких сближениях силы, действующие между частицами, становятся огромными. Вследствие этого тройное сближение без тройного столкновения создает «эффект рогатки», из-за которого третья частица значительно ускоряется и быстро исчезает из окрестности двойной звезды.

После 1973 года Йорг Вальдфогель из ETH продолжил численные исследования общей плоской задачи трех тел. В его примерах частица всегда убегала. И чем ближе тела подходили к тройному столкновению, тем выше была скорость убегающего тела. Однако компьютерные модели не могут заменить математическое доказательство. Точность численных схем, в которых непрерывные процессы, описываемые дифференциальными уравнениями, заменяются дискретными цифровыми шагами,





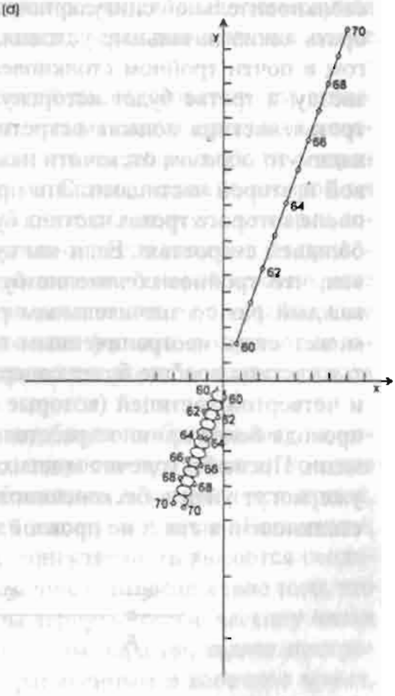


Рис. 3.4. Вычисления пифагорейской задачи с помощью численных методов. Орбиты трех частиц изображены с помощью сплошных, пунктирных и штриховых линий. На рисунках (a), (b), (c) и (d) представлены движения с моментов времени $t = 0$ до $t = 10$, $t = 40$ до $t = 50$, $t = 50$ до $t = 60$ и $t = 60$ до $t = 70$, соответственно

нельзя считать несомненной, особенно в случае с высокими скоростями и большими силами. Тем не менее, *эти результаты о чем-то говорили.* Создавалось впечатление, что замкнутая система движущихся по орбите тел *может* дать достаточно энергии, чтобы с очень высокой скоростью выбросить одну частицу. Затем в 1974 году, не зная этих численных результатов, Ричард Мак-Гихи нашел аналитическое доказательство этого свойства для прямолинейной задачи трех тел (случая, когда частицы движутся только по неподвижной линии). Год спустя, независимо от Мак-Гихи, Йорг Вальдфогель также опубликовал доказательство для более общего случая плоской задачи трех тел с помощью другого метода. В частности, эти ученые доказали, что после тройного сближения в задаче трех тел одна из частиц, как правило, покидает систему с произвольно высокой скоростью.

Важность этого свойства для гипотезы Пенлеве состоит в той подсказке, которую оно дает для построения решения, приводящего к бесстолкновительной сингулярности. Если взять четыре тела, то можно выбрать такие начальные условия, что три из них сблизятся друг с другом в почти тройном столкновении. Затем два тела образуют двойную звезду, а третье будет исторгнуто с огромной скоростью. После этого третья частица должна встретиться с четвертой и в этом сближении каким-то образом отскочить назад к двойной звезде, образованной первой и второй частицами. Это приведет к новому тройному сближению, после которого третья частица будет исторгнута из двойной звезды с еще бóльшей скоростью. Если мы сумеем подобрать такие начальные условия, что тройное сближение будет повторяться снова и снова, причем каждый раз со значительным ростом скорости, то движение системы может стать неограниченным в конечное время. На самом деле, третья частица вообще будет совершать колебания между двойной звездой и четвертой частицей (которые сами по себе разбегаются), каждый раз проходя более длинное расстояние за более короткий промежуток времени. После бесконечно многих колебаний этой третьей частицы другие уже могут уйти в бесконечность за конечное время, причем реального столкновения так и не произойдет.

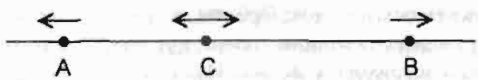


Рис. 3.5. Частицы *A* и *B* движутся в противоположных направлениях, а *C* совершает колебания между ними

Вам может показаться, что этот сценарий противоречит интуиции. Каким образом в конечный промежуток времени может произойти бесконечное число колебаний? Приведем пример. Предположим, что две частицы A и B движутся в противоположных направлениях с растущими скоростями, а третья частица C совершает между ними колебания, тоже с растущей скоростью, причем после каждого колебания она достигает одной из двух других частиц (см. рис. 3.5). Допустим, что скорость увеличивается настолько быстро, что при первом колебании C проходит расстояние от A до B за одну секунду, при следующем — за полсекунды, при третьем колебании — за четверть секунды, при четвертом — за одну восьмую секунды и т. д. Полное время, которое необходимо, чтобы A и B достигли бесконечности, получается при сложении всех вышеописанных временных промежутков, что означает суммирование бесконечного множества слагаемых: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$ Эта сумма называется *геометрической прогрессией*, причем можно доказать, что после суммирования всех слагаемых получится 2. В этом случае движение становится неограниченным всего через две секунды после начала.

Более простым примером бесконечной последовательности событий, происходящих в конечное время, служит математическая идеализация отскакивания мяча. Мяч бросают так, что он ударяется о пол через секунду. Отскочив на высоту, несколько меньшую, чем та, с которой он упал, он вновь отскакивает через полсекунды, затем через четверть секунды и т. д. Через две секунды и бесконечного числа отскоков он приходит в состояние покоя. Безусловно, (бесконечно многие) отскоки в конце этого ряда событий будут происходить на расстояния, не превышающие размера молекулы, атома, кварка или что еще физики придумают дальше, так что реальный мяч прекратит движение после конечного числа отскоков.

Возможно ли добиться движения, подобного изображенному на рисунке 3.5, если достаточно увеличивать скорости при каждом проходе слева направо и наоборот? Тройное сближение в задаче n-тел при n, большем или равном четырем, разрешает такое увеличение. (Вспомните, что Пенлеве показал, что для $n = 3$ все сингулярности являются столкновениями: теперь же мы видим, что это происходит вследствие того, что нет четвертой частицы, которая могла бы вернуть третью частицу назад для новой встречи с двойной звездой). Таким образом, задача построения решения, которое становится неограниченным в конечное время, состоит в том, чтобы показать, что данный сценарий, описанный для четырех или более тел, действительно может иметь место. Единственное, что мы можем контролировать, — так это начальные условия. Как мы можем быть уверены, что начальные положения и скорости можно выбрать так, что третье тело должно будет снова и снова возвращаться к двойной звезде? Что если сближение с двойной звездой или с четвертой частицей приведет к движению третьей в другом направлении? Здесь-то и заключается следующая сложность доказательства рассматриваемой гипотезы.

Как поймать кролика

Возрождением интереса к проблеме бесстолкновительных сингулярностей мы обязаны Дональду Саари и Гарри Полларду. Последний был научным внуком Биркгофа, т. к. его научным руководителем был Дэвид Уиддер, бывший студент Биркгофа в Гарвардском университете. Поллард был блестящим и плодотворным математиком, полным идей, которые он умел использовать. В 1966 году он заинтересовался *асимптотическим поведением* решений задачи n-тел, когда время стремится к бесконечности, т. е. в виде орбит после очень долгого времени. Саари, который в то время учился у Полларда, искал тему для своей диссертации. Зная об интересе своего руководителя, он решил заняться изучением асимптотического поведения решений по мере их приближения к сингулярности и с энтузиазмом принялся за эту работу. По написании диссертации он объединился с Поллардом с целью усовершенствования ряда полученных результатов. Это привело к публикации двух замечательных статей и стало началом длинной истории.

Карьеры ученых, а следовательно, и сама наука, развиваются благодаря как заранее намеченному плану, так и счастливой случайности. Причем гораздо чаще это связано не с тщательным планированием своей жизни, а с удачей оказаться в нужном месте в нужное время. Защитив диссертацию, Саари получил степень доктора наук и был принят на факультет астрономии Йельского университета. В этом окружении он мог развивать свой талант, продолжать свои исследования и публиковать статьи. Затем, в 1968 году, ему предложили стать ассистирующим профессором в Северозападном университете. Он принял это предложение, которое обещало стать постоянным, начав академическую деятельность, которая впоследствии привела его к выдающейся карьере. В 1970 году Саари стал вести курс по своим результатам, связанным с задачей n-тел, на котором, помимо всех прочих, присутствовал аспирант Карл Симон. Через год Карл принял предложение Морриса Хирша о работе в Беркли. Там по конспектам лекций Саари он организовал аналогичный курс. Среди его слушателей в Беркли оказался Джозеф Джервер – молодой человек, впоследствии сыгравший важную роль в объяснении задачи бесстолкновительных сингулярностей (но произошло это лишь через несколько лет). Все эти фигуры еще появятся в нашей истории, сведенные друг с другом благодаря случаю.

Летом 1971 года Саари выступал на симпозиуме в Сальвадоре (Бразилия), где и представил проблему бесстолкновительных сингулярностей. Среди слушателей были Юрген Мозер и Ричард Мак-Гихи. Как мы увидим позднее, Мак-Гихи тоже сделает очень важный вклад в эту область. А Мозер, один из величайших математиков современности, принимая почетную степень в Бохуме в 1990 году, скажет, что «задача бесстолкновительных сингулярностей – одна из самых важных проблем, оставшихся в математике двадцатого века». Интерес к данному предмету продолжал расти.

Замечательное свойство, которое Саари доказал в 1971 году, обобщило теорему фон Цейпеля. Грубо говоря, он показал, что *если, при стремлении времени к сингулярности, конфигурация частиц в пространстве изменяется медленно, то данная орбита непременно приводит к столкновению.* Это означает, что для бесстолкновительной сингулярности частицы *должны* совершать быстрые колебания. Это предсказывали некоторые ученые, начиная с Пенлеве; другие сомневались в возможности такого поведения, но никто не мог доказать истинность первого или второго. Может ли система создавать столь быстрые колебания и в то же время производить неограниченное решение в конечное время? Как могут избежать столкновения частицы при их сближении? Несмотря на успех Саари, создавалось впечатление, что проблема все больше усложняется. Вопросы множились быстрее, чем ответы, но мало-помалу некоторые элементы головоломки стали вставать на свои места.

Другая проблема, над которой размышлял Саари, касалась решений, свободных от бесстолкновительных сингулярностей. Как мы отмечали ранее, Пенлеве доказал, что в задаче трех тел все сингулярности обусловлены столкновениями. В 1973 году Саари показал, что если n частиц движутся по линии, то первая встреченная ими сингулярность непременно является столкновением. Затем он доказал, что если решение не приближается к множественному сближению, то возможности бесстолкновительных сингулярностей просто не существует.

Об ученых вообще и особенно о математиках сложено немало шуток. Одна из них звучит так. «Как математик ловит кролика?» Ответ: «Он ловит двух и отпускает одного из них». Во многих случаях эта шутка

Илл. 3.4. Дональд Саари (Любезно предоставлено Д. Саари)

недалека от истины. Некоторые задачи кажутся настолько сложными, что любые попытки их решить заканчиваются неудачей. После этого математик делает шаг назад, чтобы рассмотреть более общую проблему, включающую трудный вопрос и, возможно, много других второстепенных деталей, и пытается решить именно ее. Как ни странно, во многих случаях эта хитрость срабатывает.

Саари решил подойти к сингулярностям с иных позиций. Он использовал тактику охоты на кролика. Он задал вопрос: насколько велико множество решений с сингулярностями во множестве *всех* решений задачи n-тел. Этот вопрос возник в его голове после того, как он доказал гипотезу Литлвуда, которую мы немного погодя опишем подробно. Ответ на новую задачу должен был не объяснить исходную проблему, а дать лучшее понимание того, сколько решений со столкновительными и бесстолкновительными сингулярностями можно ожидать. Но каким образом определяется размер множества решений? К счастью, математика, необходимая для этого, уже существовала. Она называется (достаточно естественно) *теорией меры,* и сначала мы представим несколько идей, которые помогут нам понять результат Саари.

Мы привыкли измерять многое, каждый раз с точностью, соответствующей данной ситуации. Мы можем пользоваться длинами, площадями, объемами, покуда измеряемые объекты имеют «соответствующий вид». Проблема становится более сложной, когда дело доходит до более сложных, чем обыденные предметы, примеров. Какова длина береговой линии Норвегии? Сначала можно было бы вычислить грубое приближение, но полученный результат изменится, если мы учтем фьорды. Приглядевшись поближе, мы увидим, что эти фьорды содержат еще более мелкие фьорды и т. д. Мы всегда сможем найти еще более точную длину, если будем огибать маленькие бухточки и мысочки, затем валуны, камни и гальку. . . Какова же тогда *истинная* длина береговой линии Норвегии? Мы понимаем, что определенного ответа на этот вопрос не существует, а теперь мы даже можем задуматься о том, конечна ли эта длина вообще!

Проблема длины береговой линии нашла решение в теории *фракталов*. Мы не ставим перед собой цели описать данный предмет, который привел к появлению многих томов прекрасных и странных компьютерных изображений, пытающихся показать поведение объектов все в более малых масштабах. Нам лишь нужно знать, что означает высказывание типа: множество имеет *положительную меру Лебега* или *нулевую меру Лебега*. Имя принадлежит Анри Лебегу, определившему это понятие в начале двадцатого века. Грубо говоря, нулевая мера множества M в пространстве данной размерности означает, что если в этом пространстве взять произвольную точку, то принадлежность выбранной точки к M бесконечно невероятна (хотя и не является невозможной). Напротив, если множество M имеет положительную меру, существует конечная возможность того, что данная точка принадлежит к M. Мы приведем несколько примеров множеств, содержащихся в одномерном пространстве. Ради простоты, мы примем, что это пространство – отрезок $[0, 1]$, т. е. все вещественные числа между 0 и 1, включая конечные точки; см. рисунок 3.6.

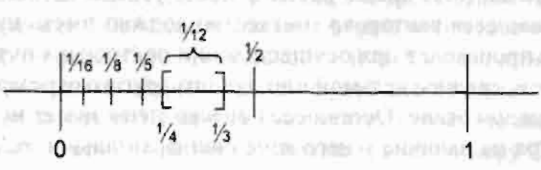


Рис. 3.6. Множества в интервале $[0, 1]$

Сначала возьмем отрезок, содержащийся в $[0,1]$, например, $[1/4, 1/3]$: все числа от $1/4$ до $1/3$. Его мера Лебега равна $1/3 - 1/4 = 1/12$ — положительному числу: всего одной двенадцатой полной длины. Можно показать, что любой отрезок, не являющийся чистой точкой, имеет положительную меру Лебега, значение которой равно длине этого отрезка. Затем возьмем множество, образованное тремя точками $\{A, B, C\}$; оно будет иметь нулевую меру Лебега: каждая точка имеет нулевую меру, да и сумма конечного числа таких точек имеет нулевую меру ($3 \times 0 = 0$). Если мы выбираем случайную точку, то наши шансы наткнуться на заранее определенную точку равны нулю. Теперь рассмотрим множество бесконечно многих точек $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$. Оно тоже имеет нулевую меру Лебега, хотя это и не столь очевидно. В этих случаях мера Лебега совпадает с обычным понятием длины, так что интуитивно нам представляется разумным, что множество *точек*, неважно, как много их там содержится, должно иметь нулевую длину.

Перейдем теперь к более сложному примеру. Мы определим *канторово множество*, аналогичное множеству Λ, описанному в связи с подковой Смейла. Для этого возьмем отрезок $[0,1]$ и уберем из него среднюю треть: открытый отрезок $(1/3, 2/3)$ (т. е. средний отрезок за исключением конечных точек $1/3$ и $2/3$). Оставшееся множество образовано двумя отрезками $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$; см. рисунок 3.7. Теперь уберем из каждого отрезка средний открытый отрезок, равный одной третьей. Новое множество состоит из четырех более маленьких отрезков, длина каждого из которых равна $1/9$. Повторяя эту процедуру, мы получаем восемь еще более маленьких отрезков и т. д. Итерируя данный процесс неопределенно долго, мы получаем так называемое *стандартное канторово множество*. Оно включает все, что осталось после удаления из отрезка $[0,1]$ всех «средних третей». Если вычислить меру Лебега удаленных отрезков (всех бесконечно многих), мы найдем, что их сумма равна 1. (Как в вышеописанной задаче с колебаниями, сюда также входит суммирование геометрической прогрессии.) Поскольку мера Лебега для отрезка $[0,1]$ также равна 1 и мы убрали из него множество меры 1, оставшееся канторово множество должно иметь нулевую меру. То же самое происходит при осуществлении построения путем удаления средней пятой, средней седьмой или любого другого отрезка постоянной длины на каждом этапе. Оставшееся облако точек имеет нулевую «длину», несмотря на наличие у него конечной фрактальной размерности.

Существуют также и другие типы канторовых множеств. Допустим, что мы сначала удалили среднюю треть, как и раньше, но затем из двух оставшихся отрезков мы убрали только по средней девятой части ($9 =$

$= 3^2$). Из каждого из четырех оставшихся отрезков мы удалили по средней двадцать седьмой части ($27 = 3^3$) и т. д. Складывая длины всех удаленных отрезков, мы получаем число, *меньшее* единицы. В этом случае остающееся в конце канторово множество имеет *положительную* меру Лебега. С точки зрения интуиции, на каждом этапе мы удаляли все более маленькие отрезки, так что оставалось больше. В обоих случаях канторово множество представляет собой облако несвязанных точек, но во втором случае это «более плотное» облако. Вот мы и получили противоречащий интуиции случай совокупности *точек* с конечной «длиной»! Такие плотные канторовы множества появятся вновь в связи с теорией Колмогорова–Арнольда–Мозера, представленной в пятой главе.

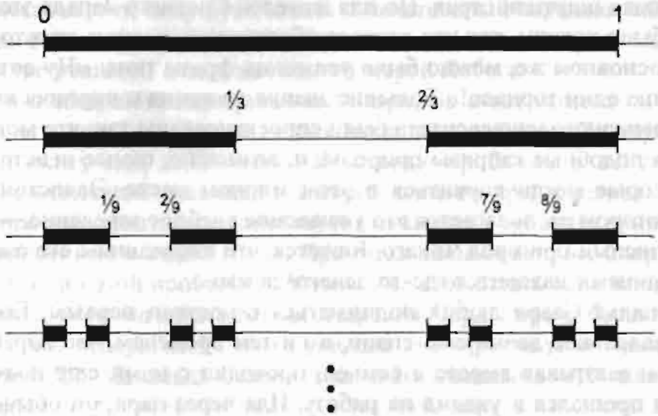


Рис. 3.7. Построение канторова множества

Мера Лебега линейного отрезка на плоскости равна нулю, но полный квадрат в плоскости (независимо от того, насколько он мал) имеет положительную меру Лебега. Хотя диск в трехмерном пространстве имеет нулевую меру Лебега, сплошная сфера в пространстве имеет положительную меру Лебега. В плоскости и в пространстве также существует несколько экзотических примеров, аналогичных канторовым множествам на отрезке. Не всегда бывает легко сразу же сказать, имеет ли какое-то множество нулевую или положительную меру Лебега.

Обратите внимание на то, что мы точно определили меру *Лебега*, т. к. существует много других мер, которые носят имена других математиков. Существует также абстрактная *мера*, обобщающая их все. Мера

Лебега является наиболее распространенной; в простых случаях она совпадает с нашими обычными понятиями длины, площади и объема.

Теорию меры можно применять к различным объектам, а не только к частям линий, плоскостей и физического пространства. В их число входят и множества решений дифференциальных уравнений. Правомерен вопрос: какова мера Лебега подмножества решений, обладающих каким-то частным свойством, например, приближением к столкновению. Очень скоро мы вернемся к этому вопросу.

Мера успеха

Спиралевидный торнадо быстро приближался. Он образовался на прериях за озером Мичиган, достаточно близко, чтобы люди ощутили страх. Но для жителей Среднего Запада это событие не было редким, так что всерьез обеспокоились лишь некоторые из них. В основном же, можно было услышать фразы типа: «Ну вот, предрекли еще один торнадо!» Большие здания из камня и кирпича кампуса Северозападного университета были спроектированы так, что могли выдержать подобные капризы природы, и, возможно, самые неистовые из тех, которые могли случиться в этом мирном месте. Эванстон — город, в котором располагается это уважаемое учебное заведение, — тихий и живописный пригород Чикаго. Кажется, что последний с его оживленными улицами находится где-то далеко-далеко.

Дональд Саари любил подниматься с постели первым. Его жена и две маленькие дочки еще спали, а он тем временем мог поработать. Затем он завтракал вместе с семьей, проводил с ними еще полчасика, а потом прощался и уходил на работу. Идя через парк, он обычно размышлял о своих исследованиях или о лекции по дифференциальной геометрии, которую должен был читать. Ему нравилось начинать свой день именно так. Но в то утро он не смог прогуляться как обычно. Дул слишком сильный ветер, поэтому он решил доехать до кампуса на машине. Проведя все утро за расчетами, он совершенно не заметил полуденного торнадо. Его мысли закрутил совсем другой вихрь. Он наконец-то понял, что происходит в некоторых столкновительных сингулярностях. Он был близок к написанию заключительного предложения в истории, занимавшей его в течение нескольких лет.

Все началось в туманную ночь осенью 1968 года, когда Саари поступил на работу в Северозападный университет. Ему нравилось читать перед сном что-нибудь легкое, и в тот день он взял из библиотеки популярное собрание статей Д. Литлвуда «Математическая смесь». Возможно, каждый математик когда-то изучал эту небольшую книгу. В ней описаны занимательные истории из студенческих лет и различные события из жизни Литлвуда, который наряду с Г. Х. Харди господствовал в британской математике в первой половине XX века.

Мы уже упоминали о работе Литлвуда по уравнению ван дер Поля, однако его интересы имели куда больший масштаб. Одна из глав его книги рассказывает о том, как ее автор доказал интересное свойство задачи n-тел, упоминая также, что множество начальных условий, ведущих к двойным столкновениям, имеет нулевую меру Лебега во множестве всех решений. Как мы отметили, это значит, что подобные столкновения очень невероятны, хотя и не невозможны. Почти любой вариант выбора начальных условий приведет к решениям без столкновений. Сноска, имеющаяся в том старом издании и отсутствующая в более новых, рассказывает, полушутя, какой замечательный парадокс получился бы, будь вероятны тройные столкновения, в смысле их прохождения на множестве решений с положительной мерой Лебега.

Это примечание заинтриговало Саари, но в тот момент он не воспринял его всерьез. Однако через несколько месяцев Литлвуд опубликовал книгу под заголовком «Некоторые проблемы в действительном и комплексном анализе», в которой один из предложенных открытых вопросов касался меры множества начальных условий, приводящих к столкновениям в задаче n-тел. Прочитав данный вопрос, Саари вновь задумался над этой проблемой. У него уже зародилась идея возможного решения, и он хотел начать без промедления. Терять время было некогда. Он знал, что теперь, когда книга увидела свет, другие тоже примутся за эту задачу. Для Дональда Саари гонка за доказательством началась в тот же вечер.

После бессонной ночи, к утру, ему показалось, что он добился своего. Он отправился в университет на лекцию, где рассказал некоторым своим коллегам и аспирантам о том, что он решил одну из задач Литлвуда. В полдень он почувствовал себя невероятно уставшим и пошел домой, чтобы вздремнуть. Но, проснувшись, он испытал огромное разочарование. Он осознал, что его доказательство неполное. Он упустил случай *вырожденных центральных конфигураций* — понятие, которое мы подробно обсудим в четвертой главе. Поддавшись эйфории открытия, он поверил, что ему удалось найти уловку, чтобы преодолеть эту трудность, но теперь он понял, что его расчеты ошибочны. Эту проблему решить оказалось труднее, чем он полагал. Он начал признавать существование некоторых реальных препятствий.

На следующий день он поведал другим, что поспешил со своим заявлением о решении задачи. У него нет доказательства, по крайней мере, пока нет. Но один из его коллег, Карл Симон, не услышал о том, что Саари пошел на попятную. Поэтому на всех конференциях и лекциях в других университетах Симон рассказывал, что Дон Саари доказал гипотезу Литлвуда о задаче *n*-тел. Через несколько месяцев Саари начал получать письма от выдающихся ученых, которые просили прислать им препринты его статьи — статьи, которой не было в природе.

Саари попал в очень щекотливое положение. Хотя он продолжал упорно работать, полного доказательства у него по-прежнему не было. Тем временем, он отказался от своей первой идеи и пробовал решить эту гипотезу другими способами. К счастью, предложение Эдуарда Штифеля, пригласившего его провести некоторое время в ЕТН в Цюрихе, позволило ему спрыгнуть с крючка, по крайней мере, ненадолго. Он упаковал чемодан и отправился в Швейцарию, надеясь закончить доказательство там и по возвращении ответить на письма с просьбой прислать препринты.

В Цюрихе Саари сосредоточил все свои усилия на гипотезе Литлвуда, и, наконец, она ему уступила. Но на этот раз он ничего никому не сказал. Он хотел обрести полную уверенность. Для этого ему требовалось понять еще несколько деталей. Вернувшись в Эванстон, он снова проверил каждую строчку. Он навсегда запомнил тот решающий и бурный, но не из-за торнадо, день.

Между 1971 и 1973 годами Дональд Саари опубликовал три статьи, в которых он, в сущности, доказал, что *в задаче n-тел множество начальных условий, приводящих к столкновениям любого типа, имеет нулевую меру Лебега.* Так разве не стоит изучать после этого столкновения? Если тот факт, что столкновения происходят между всеми возможными орбитами крайне невероятен, разве не следует математикам направить свое внимание на другие вопросы? Поверхностный ответ утвердителен, но более глубокие размышления приводят к противоположному мнению. Сейчас мы объясним причины этого.

Столкновения важны не столько сами по себе, сколько потому, что они являются *сингулярностями.* В окрестности сингулярности очень сильно меняется строение фазового пространства, поэтому решения, которые не заканчиваются в сингулярностях, а просто приближаются к ним, скорее всего, поведут себя странно. Мы уже наблюдали это в численных моделях пифагорейской задачи, изображенной на рис. 3.4. В некотором смысле, точка столкновения соответствует бесконечно глубокому колодцу в фазовом пространстве. По мере сближения тел потенциальная (гравитационная) энергия превращается в кинетическую, и их относительные скорости очень сильно возрастают, становясь тем больше, чем теснее сближение. Множество этих решений, которые проскальзывают и колеблются под действием сингулярностей, имеет положительную меру Лебега, и ими уже нельзя пренебречь. Надлежащее понимание сингулярностей также помогает понять и эти орбиты.

Через несколько лет Саари вернулся к идее, возникшей у него в ту ночь, в начале его карьеры. Он усовершенствовал свою раннюю работу по гипотезе Литлвуда, показав, что множества решений, ведущих к столкновениям, образуют *многообразия* более низкой размерности. С одной стороны, это значит, что столкновения имеют нулевую меру Лебега; с другой, этот факт обеспечивает их более геометрическое понимание. Саари, наконец, доказал, что *в задаче четырех тел все решения с сингулярностями имеют нулевую меру Лебега.* Это говорит о том, что в данном случае бесстолкновительные сингулярности тоже редки. Мы до сих пор не знаем, насколько велико множество бесстолкновительных сингулярностей в задаче n-тел при $n > 4$, но многие считают его также пренебрежимо малым.

Саари по-прежнему не знал, возможны ли бесстолкновительные сингулярности в действительности. Эта проблема вновь захватила его внимание много лет спустя, когда он стал научным руководителем нового аспиранта из Китая, Джихонга Ша. Мы коротко опишем это событие и последовавшее за ним плодотворное сотрудничество.

Интересно, что исследовательские интересы Саари включали еще один явно отличный предмет: *математическую экономику.* Он применял теорию динамических систем к проблемам экономики и политики. Например, он доказал, что проблема пропорционального распределения мест в американском Конгрессе в Палате представителей порождает математический хаос. Это означает, что какой бы метод ни был выбран, всегда останутся штаты, имеющие преимущество и не имеющие оного. Справедливого распределения мест добиться невозможно.

В настоящее время Дональд Саари заведует кафедрой математики Артура и Глэдис Панко (Pancoe) в Северозападном университете, что особенно уместно, т. к. спонсор этой кафедры, Артур Панко, получил степень магистра в 1951 году, защитив научный труд по трансцендентам Пенлеве.

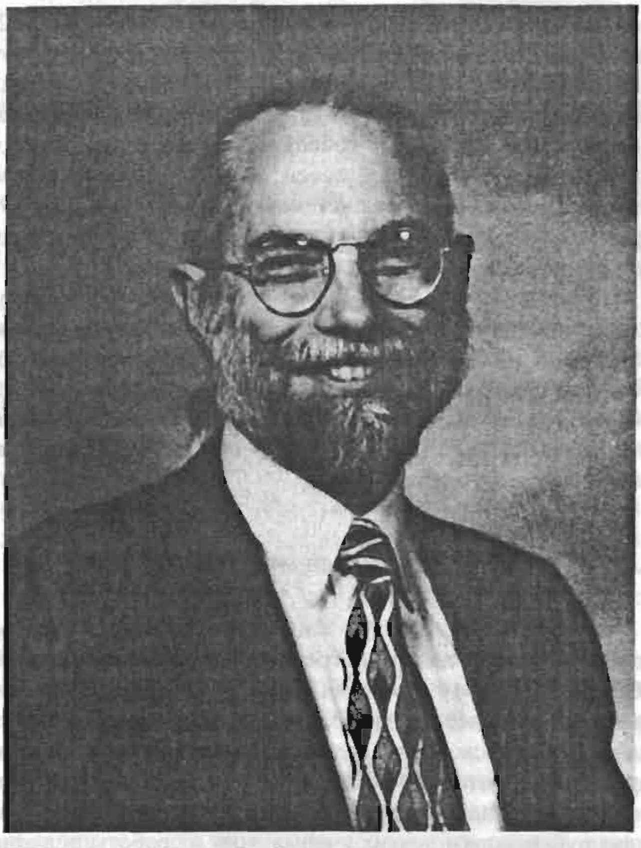
Регуляризующие столкновения

Приглашение выступить на Международных математических конгрессах — немалая честь. Как мы говорили во второй главе, эти конгрессы происходят лишь один раз в четыре года. Они охватывают все области математики и принимают несколько тысяч математиков из почти всех стран мира. Мало кому из ученых выпадает шанс представить свою работу столь обширной аудитории единомышленников. Летом 1978 года такой конгресс проходил в Хельсинки, и одним из приглашенных к выступлению был Ричард Мак-Гихи. Его выступление касалось нового метода анализа столкновительных сингулярностей в небесной механике.

История этого прорыва начинается с 1970 года, когда Мак-Гихи начал работать с решениями тройного столкновения прямолинейной задачи трех тел, в которой, как отмечалось выше, материальные точки движутся по прямой линии. Он осознал, что сначала нужно понять простые случаи, а уж потом подходить к более сложным. Более простые задачи становятся отличной испытательной базой для создания новых методов и идей. Прямолинейная задача трех тел, хотя и является простейшей среди задач n-тел при $n > 2$, все равно достаточно сложна и даже сегодня понята не полностью.

В 1964 году Мак-Гихи посчастливилось получить предложение о работе в Институте Куранта на базе Нью-Йоркского университета. Несмотря на то, что Мак-Гихи родился и вырос в Сан-Диего, он успел привыкнуть к неприятному влажному климату Среднего Запада за те четыре года, которые провел в аспирантуре в Мэдисоне (штат Висконсин). Так что перспектива прожить в Нью-Йорке целый год его не пугала. Он с радостью присоединился к знаменитой группе исследователей в Институте Куранта. Для двадцатишестилетнего калифорнийца эта среда подходила как нельзя лучше, и время, проведенное в институте, сыграло решающую роль в его будущей карьере. Его первой важной встречей стала встреча с математиком Юргеном Мозером — одним из создателей КАМ-теории, которой посвящена пятая глава. В тот год Мозер читал лекции по задаче Ситникова, рассмотренной во второй главе. Он описывал результаты, которые получил по хаотическим колебаниям Алексеев. Вскоре после этого Мак-Гихи попал на лекцию одного из аспирантов Мозера, Говарда Якобовица, который описывал статью по *регуляризации* тройных столкновений в задаче трех тел, опубликованную Карлом Людвигом Зигелем в журнале *Annals of Mathematics* почти тридцатью годами раньше.

Регуляризовать столкновение — значит продолжить движение за точку коллапса посредством упругого отскока без потери или приобретения энергии. Случай двойных столкновений еще в первое десятилетие двадцатого века рассмотрел финн шведского происхождения Карл Сундман, опубликовав окончательное решение в 1912 году в *Acta*



Илл. 3.5. Ричард Мак-Гихи. (Любезно предоставлено Ричардом Мак-Гихи)

Mathematica. Он показал, что подобное продолжение движения за точку столкновения возможно всегда. Зигель же задался вопросом: что произойдет, столкнись *три* частицы? Возможно ли продолжить движение за точку коллапса осмысленным образом? Зигель показал, что в общем случае это невозможно. Точнее, он доказал, что почти для всех значений масс невозможно найти *аналитическое* решение, проходящее через тройное столкновение. (*Аналитичность* — это техническое свойство, имеющее отношение к способу определения функций, описывающих решение: другие подробности не имеют значения в данном контексте.)

Мак-Гихи решил поработать над задачей Ситникова (рис. 2.11). За пару лет он получил несколько важных результатов благодаря тому, что изобрел замечательное преобразование, придающее дифференциальному уравнению, которое описывает частицу C, более явную форму. Эти новые переменные «устраняют особенности» решения по мере того, как оно убегает в бесконечность. В своей книге «Устойчивые и хаотические движения в динамических системах», опубликованной в 1973 году, Мозер, рассказывая о некоторых из этих результатов, использует преобразование Мак-Гихи.

Но главным интересом Мак-Гихи оставалась проблема регуляризации. Он был заинтригован результатом Зигеля, но не видел связи между этим результатом и реальной динамикой движения планет. «Столкновения небесных тел не являются упругими, – размышлял он. – Так зачем думать о том, что случится после столкновения?» Он задавался вопросом о том, как следует сформулировать эту задачу, чтобы она имела реальный физический смысл.

Небесный бильярд

Чарльз Конли был научным руководителем Мак-Гихи в Висконсинском университете. Наряду со Стефеном Смейлом и Юргеном Мозером, Конли был одной из самых влиятельных фигур в теории динамических систем на Западе в 1960–1970 гг. Он был необычайно щедр и свободно делился своими идеями, благодаря чему дал старт многим математическим карьерам. Многие из его учеников сделали важные вклады в математику. В нескольких случаях он поспособствовал публикациям других ученых, хотя их работы родились из его собственных идей.

В 1970 году Конли заинтересовался тройными столкновениями. Он поддерживал связь с Мак-Гихи, и, когда последний начал работать в Нью-Йорке, они объединили свои усилия. После ряда обсуждений они сформулировали точный вопрос: *«Является ли движение частиц при столкновении непрерывным по отношению к начальным условиям?»*

Мы отмечали, что научное исследование начинается тогда, когда что-то неясно. Но невозможно найти ответ, не задав вопроса. Часто сформулировать нужный вопрос все равно, что сделать полдела. Этот вопрос был воистину фундаментальным. Помимо всего прочего, он имел абсолютный смысл в контексте движения планет. Говоря на языке физики, он подразумевал: «Является ли траектория столкновения предель-

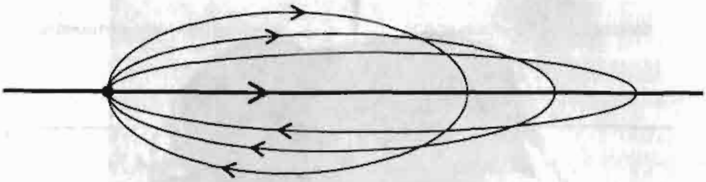


Рис. 3.8. Прямолинейная орбита – это предельный случай эллиптического движения

ным случаем среди орбит, которые приближаются к столкновению, но избегают его?» Истинность этого утверждения уже была установлена для двойных сближений. Частицы в задаче двух тел могут столкнуться *только,* если движение прямолинейно. Во всех остальных случаях, как показал Иоганн Бернулли, тела движутся по эллиптическим, параболическим или гиперболическим траекториям. Упругий отскок можно рассматривать как естественный предел последовательности эллипсов, которые становятся все более и более плоскими, постепенно вырождаясь в линию, как показано на рисунке 3.8. Строгое математическое доказательство этого факта дал в 1971 году другой ученик Конли, Роберт Истон. В методе Истона использована «математическая хирургия», топологическая техника. Этот метод основан на преобразованиях, которыми пользовался итальянский математик Тулио Леви-Чивита во втором десятилетии двадцатого века.

Эта работа показала, что с точки зрения физики уместен вопрос не о том, возможно ли (аналитически) продолжить движение за точку столкновения, а о том, можно ли продолжить его так, чтобы близлежащие орбиты стали на него похожими. Теперь полезно вернуться к примеру с рекой и подумать о потоке, огибающем камень, находящийся в ее центре. Все линии потока гладко разделяются, чтобы обогнуть камень с обеих сторон, за исключением одной центральной линии, которая направлена прямо на камень и приводит к «столкновению». Поэтому в небесной механике Конли и Мак-Гихи задали вопрос: «Встраиваются ли сингулярные орбиты тройного столкновения в окружающую их среду в фазовом пространстве таким образом, чтобы надлежащим образом сцепиться с траекториями, приближающимися к таким столкновениям?»

Истон работал с двойными столкновениями. А как же быть с тройным сближением? Конли пришла в голову блестящая мысль. Он предложил сравнить задачу трех тел с игрой в бильярд. Любой опытный игрок

Илл. 3.6. Чарльз Конли. (Любезно предоставлено Катариной Конли)

в пул знает, что если одновременно столкнуть три шара, то их поведение после столкновения предсказать сложно. Однако четкое представление о происходящем в данном случае, — скорее, результат опыта, нежели доказанный факт. Конли же хотел перевести это интуитивное знание в точное математическое утверждение. Он представил три шара, расположенные на одной линии, как показано на рисунке 3.9, и предложил следующую пару мысленных экспериментов.

Сначала мы ударяем по шару A в положительном направлении к неподвижным шарам B и C. A сталкивается с B и возвращается в отрицательном направлении, а B движется вправо и сталкивается с C. После этого второго столкновения B также возвращается, следуя по траектории A, а C движется в положительном направлении, удаляясь

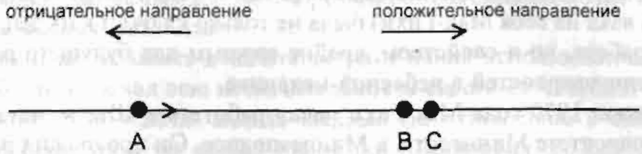


Рис. 3.9. Расположение бильярдных шаров Конли, предположившее, что тройное столкновение нерегуляризуемо по отношению к близлежащим траекториям

от A и B. Происходит качественное изменение конфигурации: вначале шары B и C стоят рядом, но после двух двойных столкновений рядом оказываются шары A и B, а шар C удаляется от них. Произошел обмен парами.

Затем Конли представил, что шары B и C поменяли местами, так что теперь шар C лежит между шарами B и A. Поскольку до этого шары B и C находились рядом и по-прежнему лежат вблизи друг от друга, начальные условия изменились мало. Однако, повторяя игру с новыми начальными положениями, мы видим, что теперь шар C покидает исходную пару с B и образует новую пару с A, а шар B откатывается в сторону.

Мак-Гихи сразу понял, о чем это говорит. Конечные движения шаров B и C в двух этих случаях были совершенно разными, несмотря на очень малое изменение начальных условий. (Для еще меньших изменений следует поместить шары B и C еще ближе друг к другу, чтобы два двойных столкновения приблизились к тройному.) Это полностью доказывало чувствительную зависимость решений от начальных условий. Конли также заметил, что это может означать нерегуляризуемость тройного столкновения, поскольку два решения, приближающиеся к тройным столкновениям (начавшиеся почти в одной и той же точке фазового пространства), после тройного сближения ведут себя настолько по-разному.

Игра в пул по прямой линии подала идею, но теперь Мак-Гихи и Конли должны были решить эту же задачу, учитывая силы притяжения между шарами, а не просто рассматривая упругие удары. Сначала они попытались ответить на вопрос о регуляризуемости прямолинейной задачи трех тел. Мак-Гихи должен был доказать, что если частицы приблизятся к тройному столкновению, то центральная частица покинет одну пару и образует другую. Конли должен был позаботиться об остальном. В то время они не знали, что *лемма* (тот этап доказательства, который взял на себя Мак-Гихи) была не только ключом к их запланированной работе, но и свойством, крайне важным для будущего развития теории сингулярностей в небесной механике.

Осенью 1970 года Мак-Гихи начал работать в Школе математики при университете Миннесоты в Миннеаполисе. Он продолжил работать над задачей Ситникова и начал думать о лемме, связанной с регуляризацией тройных столкновений. В отношении первого предмета он продвинулся весьма значительно, но его попытки решить вторую задачу показали лишь то, насколько сложна она была в действительности. Они применил несколько идей, надеясь хоть сколько-нибудь проникнуть в проблему, и даже вернулся к преобразованиям, которые Тулио Леви-Чивита использовал пятьюдесятью годами раньше для регуляризации двойных столкновений. Но все его попытки пошли крахом. Прошел уже год, а у него все еще не было решения.

Более нетерпеливый, чем Чарльз Конли, человек уже мог бы впасть в отчаяние. Он уже закончил свою часть работы и ждал доказательства леммы. Он уже сделал наброски статьи, оставив место для вклада Мак-Гихи. Все доказательство базировалось на этом отсутствующем результате: без него продолжать было невозможно. Теперь Мик-Гихи чувствовал напор с двух направлений. С одной стороны, ему нужна была публикация: ни одному университету не нужен ученый, который не может добиться определенного успеха в исследовании. С другой стороны, ему было очень неприятно и неудобно заставлять ждать своего бывшего научного руководителя. Но, несмотря на непрерывную работу, он никак не мог найти выход из лабиринта поставленной перед ним задачи.

Говорят, что удача сопутствует сильным. Однажды он вспомнил об одной хитрости, которой воспользовался в предыдущей своей работе. В 1965 году, будучи аспирантом, он заинтересовался нахождением *поперечного сечения* для отображения Пуанкаре в ограниченной задаче трех тел (см. рис. 1.11). Он умудрился найти его и проанализировать и решил отправить полученный результат в научный журнал. Но надежда увидеть свою собственную публикацию была недолгой. Еще во время написания статьи он обнаружил ссылку на статью, опубликованную в двадцатые годы учеником Биркгофа. Работа, на которую у Мак-Гихи ушел год, оказалась не новой, т. к. этот вопрос уже был разрешен в более ранней статье. Теперь же, шесть лет спустя, он понял, что в сочетании с методом, использованным в задаче Ситникова, его идея могла сработать в отношении вопроса регуляризации. Он нашел несколько новых преобразований, обобщивших предыдущие. И этот метод действительно оказался тем самым ключом к решению. Сегодня он носит название *преобразования Мак-Гихи.*

Прочитав рукопись доказательства и поняв использованные в нем идеи, Конли осознал всю незначительность своего собственного вклада в решение этой задачи. Всегда щедрый по отношению к своим коллегам и студентам, он позвал Мак-Гихи и попросил его опубликовать статью самостоятельно. Статья, единственным автором которой значился Мак-Гихи, появилась в 1974 году в европейском журнале *Inventiones Mathematicae.*

Идея Мак-Гихи состояла во введении новой системы координат, которая «уводит в бесконечность» сингулярность, обусловленную тройным столкновением, позволяя нам вырезать точку сингулярности и вставить на ее место гладкое многообразие. Уточним это. Тройное столкновение соответствует некоторой точке в фазовом пространстве (вроде камня в течении реки), где останавливается орбита. Увести эту точку в бесконечность — все равно, что посмотреть на нее под микроскопом с бесконечным оптическим увеличением. Мак-Гихи увидел следующее: деформированная сфера с четырьмя рогами, уходящими в бесконечность, и с точками, удаленными на их концах. Мы изобразили это на рисунке 3.10. Полученную поверхность Мак-Гихи назвал *многообразием столкновений.*

Далее Мак-Гихи приступил к изучению потока на многообразии столкновений. Хотя прямого физического смысла это многообразие не имеет, знать о нем — значит понимать, как ведут себя решения *вблизи* тройного столкновения по мере их закручивания вокруг рогатой сферы. Это является следствием непрерывности решений по отношению к начальным условиям. Орбиты, которые приближаются к этой странной сфере, должны вести себя аналогично орбитам на ней, по крайней мере, в течение некоторого времени, подобно тому, как в задаче двух тел траектории на сжатых эллипсах очень похожи на траектории при упругом отскоке. Поток закручивается вокруг многообразия столкновений вертикально вверх и имеет всего две неподвижные точки, которые теперь мы можем назвать северным полюсом N и южным полюсом S. Тройное столкновение происходит, когда траектория в фазовом пространстве «прибывает» в S, а тройное разбегание — когда траектория «покидает» N.

Более того, преобразование Мак-Гихи замедляет время и скорости вблизи сингулярности, так что орбите требуется бесконечное количество (фиктивного) времени, чтобы достигнуть южного полюса S. Момент столкновения заменяется бесконечно длинным промежутком времени,

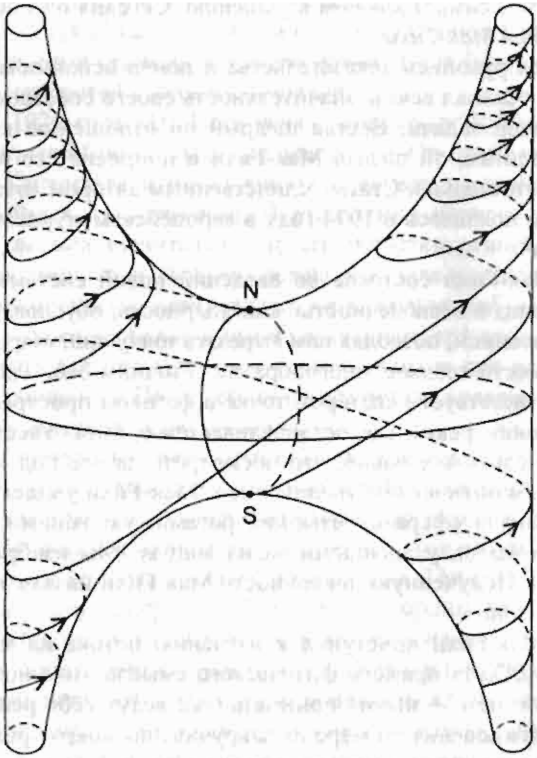


Рис. 3.10. Одна из возможных конфигураций потока на многообразии столкновений прямолинейной задачи трех тел

а (фиктивная) скорость в момент удара падает до нуля. Эти искаженные переменные дают более крупную и более подробную картину того, что происходит вблизи тройного столкновения. Это странное многообразие чрезвычайно полезно для изучения столкновительных орбит и траекторий, проходящих вблизи от столкновительных; оно помогает понять предельное поведение сталкивающихся частиц и строение траекторий, приближающихся к тройному столкновению и удаляющихся, не коснувшись его.

С помощью этого поразительного геометрического построения было открыто много новых свойств. Одно из них связано с тем, что частица, приближающаяся к тройному столкновению, отлетает с огромной скоростью, как и предсказывали результаты численных исследований, полученные в шестидесятые годы. В своей статье Мак-Гихи использовал многообразия столкновений, чтобы показать, что для некоторых особых значений масс тройное столкновение невозможно регуляризовать. В следующей статье он утверждает, что на самом деле это справедливо для всех масс, кроме множества с нулевой мерой. Это разрешило вопрос, который вознамерились изучить Мак-Гихи и Конли.

Самой важной особенностью этого метода является широкий диапазон его применимости. С его помощью многие другие широко известные свойства получили новые, более изящные доказательства. Этот метод распространяется на все вопросы, связанные со столкновениями задачи n-тел, и на многие другие исследования сингулярностей в теории дифференциальных уравнений. Сегодня трудно даже представить изучение сингулярностей в небесной механике без использования преобразований Мак-Гихи.

Как мы уже отмечали, Чарльз Конли дал старт научной карьере многих математиков: он и его ученики разработали множество важных геометрических и алгебраических методов в теории динамических систем, и работа Мак-Гихи — это лишь один из подобных примеров. Другими примерами служат «изолированные инвариантные множества» и «показатели Конли». Сейчас они используются как в традиционных, так и в автоматизированных доказательствах тонких свойств дифференциальных уравнений. Однако, когда Конли спросили о самом естественном языке для описания структуры фазовых портретов, он, как считается, сказал что-то вроде: «Для меня самым естественным языком для обсуждения структуры фазовых портретов по-прежнему остается английский».

Встречи на конференции

Следующий шаг к доказательству гипотезы Пенлеве сделали Ричард Мак-Гихи и Джон Мазер из Принстонского университета. Они воспользовались новым методом многообразий столкновения. Их сотрудничество оказалось довольно неожиданным. Оба математика интересовались этим вопросом, но познакомились только летом 1974 года на Баттельской конференции, проводившейся в небольшом живописном местечке недалеко от Сиэтла. (То, что они не встречались раньше, особенно удивительным не было; поражало то, что произошло потом.)

Хотя Мак-Гихи пытался продемонстрировать существование бесстолкновительной сингулярности еще когда работал над задачей тройного столкновения, завершить доказательство он не смог. Мазер узнал об этом вопросе совсем из другого источника: из разговора со своим коллегой Эдом Нильсоном в 1965 году. В 1930-х годах в Принстонском университете Джон фон Нейман закладывал основы *теории операторов,* и эта задача возникла как особое свойство некоторого вида функций. Чтобы понять такую функцию, нужно было знать размерность множества сингулярностей, что, в свою очередь, было связано с тем, действительно ли существуют бесстолкновительные сингулярности. Несмотря на разную мотивацию, Мазер и Мак-Гихи стремились к одной и той же цели.

В Баттеле Чарльз Конли познакомил Мазера и Мак-Гихи. Они тут же начали обсуждать свои интересы, надеясь когда-нибудь поработать вместе. Но уже в тот вечер оба поняли, что у них есть ответы на вопросы собеседника. Их дискуссия продолжилась на следующий и последующий дни. Все это напоминало мозаику, в которой у каждого игрока были кусочки, которых недоставало другому. Менее чем за неделю они составили нечто целое. В последний день конференции Джон Мазер показал Мак-Гихи черновой вариант их совместной статьи, которую они впоследствии опубликовали в трудах Баттельской конференции.

Каков же был результат, который они получили за ту неделю? Они доказали, что в *прямолинейной задаче четырех тел* существует траектория, которая в конечное время становится неограниченной. Это не разрешило гипотезу Пенлеве, поскольку их бесстолкновительная сингулярность получается только после прохождения через двойные столкновения. (Из вышеописанного результата Саари уже было ясно, что первая сингулярность, которая имеет место в прямолинейной задаче, должна быть столкновением.) С помощью *регуляризации* они продлили решение за эти столкновения. С физической точки зрения это означает, что движение после упругого удара продолжается без потери или приобретения энергии. После бесконечно большого числа таких двойных столкновений достигается бесстолкновительная сингулярность.

Этот процесс изображен на рисунке 3.11. Нужным образом выбираются массы m_1, m_2, m_3, m_4, а начальные положения и скорости берутся такими, чтобы m_1 и m_2 находились рядом, образуя двойную систему. Частица m_3 совершает колебания между частицей m_4 и этой парой. Столкновения m_2 с m_3 и m_3 с m_4 регуляризуются посредством упругих ударов, происходящих в последовательные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ После каждого тройного столкновительного сбли-

Рис. 3.11. Пример Мазера и Мак-Гихи

жения m_1, m_2 и m_3 частица m_3 отскакивает с намного более высокой скоростью в направлении m_4. Столкновение с m_4 вновь возвращает m_3 к паре и т. д.

Последовательность моментов столкновений сходится к конечному значению t^* при k, стремящемся к бесконечности. По мере того как это происходит, пара стремится к минус бесконечности (т. е. к левому «концу» бесконечной линии), m_4 уходит к плюс бесконечности (т. е. к правому «концу» этой линии), а m_3 продолжает двигаться взад и вперед между ними. Тем временем, расстояние между m_1 и m_2 уменьшается, а потенциальная энергия, потраченная парой, превращается в кинетическую энергию частицы m_3. Таким образом, скорость m_3 может расти достаточно быстро, чтобы совершать движения назад-вперед за уменьшающиеся промежутки времени. Создание и проверка этого, на первый взгляд, простого сценария потребовали вливания новых идей и достаточно сложных техник.

Вообще-то сам Пенлеве говорил о том, что бесстолкновительная сингулярность может произойти в ситуации, аналогичной той, которую описали Мазер и Мак-Гихи. При этом Пенлеве рассмотрел не прямолинейный случай как таковой, а движения, близкие к линии. В его случае двойных столкновений можно было бы избежать. Но каким образом?

В 1978 году Роберт Шелдон, ученик Говарда Якобовица, опубликовал статью, в которой доказал, что *если* решение задачи четырех тел действительно имеет бесстолкновительную сингулярность, полученную без встречи с двойными столкновениями, то конфигурация всей системы должна асимптотически стремиться к прямой линии. Но, несмотря на несколько попыток доказать существование такого решения, у нас по-прежнему нет примера, который продемонстрировал бы истинность гипотезы Пенлеве в задаче четырех тел.

От четырех тел к пяти

Знаменитый открытый вопрос подобен богатой залежи минералов: каждый стремится ее разведать. Так было и с гипотезой Пенлеве. После примера Мазера – Мак-Гихи техника с использованием многообразия столкновений, судя по всему, стала именно тем ключом, которого недоставало для открытия решения. Для получения желаемой сингулярности нужно было использовать несколько сближений с тройным или более многочисленным столкновением. Но работа Шелдона и его неспособность найти бесстолкновительные сингулярности в задаче четырех тел навели на мысль о том, что нужны, как минимум, пять тел.

Увеличение числа частиц означает увеличение числа переменных и размерности фазового пространства, а следовательно, и возрастание сложности вычислений. А решение работать с плоской или пространственной задачей вместо прямолинейной предполагает еще больший рост числа переменных. Любая попытка подражания доказательству прямолинейной задачи четырех тел приводила к тем же проблемам с двойными столкновениями. Следующим шагом, позволявшим оставить все сложности на уровне решаемости, должна была стать плоская задача пяти тел.

Джозеф Джервер, которого несколькими страницами ранее мы оставили слушать лекции Карла Симона в Беркли, поступил на работу в университет Рутгерса в 1983 году. До этого он в течение некоторого времени преподавал на Гавайях, где у него было предостаточно времени для рыбалки и размышлений на математические темы. Он часто вспоминал об этих годах в Нью-Йорке, когда, будучи аспирантом в Колумбийском университете, он решил старую гипотезу Римана. Это произошло достаточно неожиданно. Одно из заключительных домашних заданий на курсе, который он посещал, было действительно сложным. Никто из его сокурсников не мог с ним справиться, но Джервер через несколько суток нашел доказательство. Его научный руководитель и другие члены факультета были просто поражены этим.

Те бурные дни остались в далеком прошлом, т. к. теперь Джервер трудился над гораздо более сложным вопросом: гипотезой Пенлеве. Узнав об этой проблеме в 1970 году на курсе Карла Симона в Беркли, он время от времени возвращался к ней. Узнав об интересе Джервера к этой задаче, Симон написал об этом полном энтузиазма студенте Дональду Саари, после чего между Саари и Джервером завязалась переписка. Однажды, оказавшись недалеко от Чикаго, Джервер заглянул к Дону в его рабочий кабинет в кампусе Северозападного университета. Они очень плодотворно провели субботу, проговорив о задаче n-тел.

К 1984 году Джерверу казалось, что он уже близок к получению доказательства этой гипотезы, и, чтобы сохранить приоритет, он решил опубликовать статью. В этой статье он привел эвристический пример плоской задачи пяти тел, в которой могла возникнуть сингулярность без предварительного столкновения. У него пока не было полного доказательства, которое можно было бы опубликовать. В качестве аргумента он мог предложить более сотни страниц приблизительных вычислений. Сложно сказать, были ли они верными. Почти никто не готов потратить недели на проверку того, содержат ли нескончаемые листы бумаги с буквами и цифрами без каких-то новых методов или идей правильное доказательство. Джервер и сам был недоволен своим доказательством, поэтому он решил исключить расчеты и ограничиться рядом оригинальных качественных аргументов в поддержку своей основной идеи.

Сценарий Джервера был таким: рассмотрим пять частиц в плоскости с массами $m_1, \ldots, m_5$, причем $m_3 = m_4$, m_2 больше, чем m_3, но имеет тот же порядок величины, m_1 намного меньше, чем m_2, а m_5 намного меньше, чем m_1. Возьмем начальные положения, как показано на рисунке 3.12. Сначала m_1 располагается на приблизительно круглой орбите с центром m_2; m_3 и m_4 расположены намного дальше. Частицы m_2, m_3 и m_4 расположены примерно в вершинах тупоугольного треугольника, который медленно расширяется, но при этом сохраняет свою форму. Тем временем, m_5 быстро движется по этому треугольнику, по очереди приближаясь к каждому из четырех других тел, причем ее скорость намного больше, чем скорость m_1.

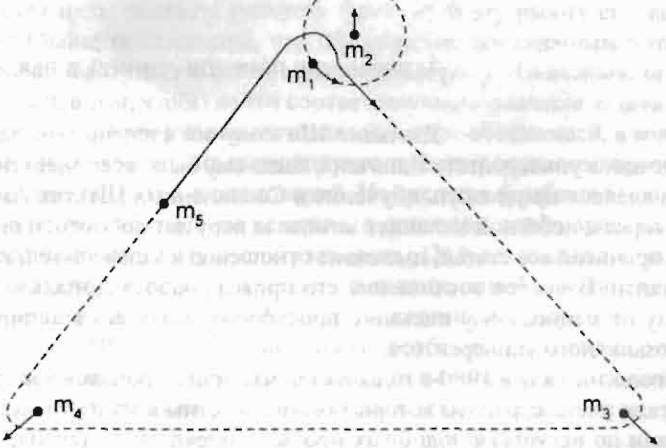


Рис. 3.12. Эвристический пример Джервера бесстолкновительной сингулярности в плоской задаче пяти тел

Каждый раз, когда m_5 проходит рядом с m_2, она приобретает небольшое количество кинетической энергии. В результате этого m_1 опускается на более низкую орбиту вокруг m_2, такую, что средняя кинетическая энергия m_1 на ее орбите возрастает примерно на столько же, на сколько и кинетическая энергия m_5. Небольшая часть кинетической энергии m_5 передается m_2, m_3 и m_4, что приводит к дальнейшему расширению треугольника, но скорость m_5 увеличивается настолько, что время, необходимое для каждого обхода треугольника, уменьшается, несмотря на увеличение траектории движения. Последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ моментов времени, отмечающих огибания треугольника, сходится в конечной величине t^*, при которой m_5 пройдет бесконечное число раз вокруг треугольника. Тем временем, треугольник станет бесконечно большим. Механизм, создающий это быстрое расширение, обусловлен (как вы уже, вероятно, догадались) повторяющимися приближениями m_1, m_2 и m_5 к тройному столкновению.

К сожалению, Джервер не смог доказать, что этот правдоподобный сценарий действительно имеет место в задаче пяти тел. Не ясно, как можно заставить m_5 проходить при каждом огибании треугольника в нужном месте через нужный угол, лишь задавая соответствующие начальные условия. Чтобы сократить огромное количество вычислений, нужно было сделать что-то еще. Но в то время он не смог понять, что именно.

Завершение поисков длиной в век

Джихонг Ша получил степень бакалавра по астрономии в университете Наньчана, когда ему было всего девятнадцать лет, и надеялся продолжить обучение в Соединенных Штатах Америки. Его интерес к небесной механике возник за пару лет до этого, и он с упоением прочитал все статьи, имеющие отношение к задаче n-тел, которые смог найти. В особое восхищение его привела работа Дональда Саари, поэтому он написал ему письмо с просьбой принять его в аспирантуру Северозападного университета.

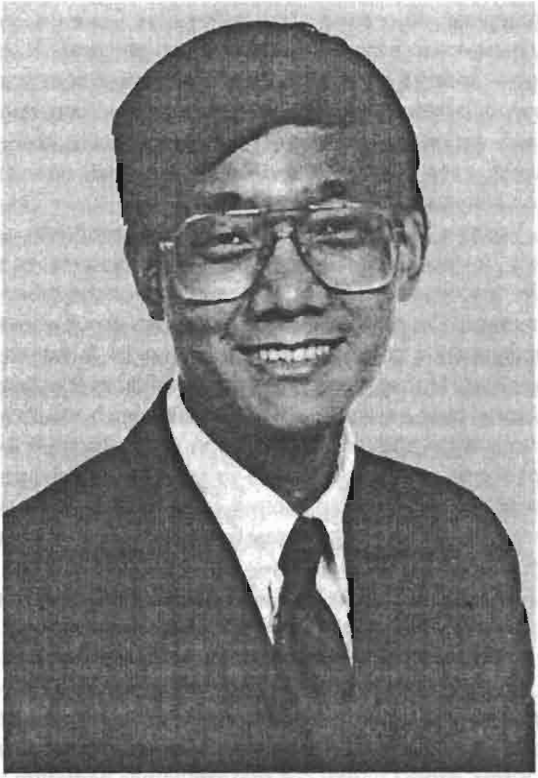
После того как в 1980-е годы Китай частично открылся Западу, американские ученые, работы которых были известны в этой стране, иногда получали по нескольку подобных просьб в месяц от студентов, желающих поступить в аспирантуру. Принять каждое из этих писем к действию или даже лично ответить на них не представлялось возможным. У Ша был бы хоть какой-то шанс, если бы он сначала поучился где-нибудь в Северной Америке, но его желание работать с Саари в Эванстоне было столь сильным, что он решил попробовать еще раз. На этот раз ему повезло. Саари — добрый и теплый человек, полный понимания и заботы о тех, кому нужна помощь. Он пообещал подумать, чем сможет помочь. Через несколько месяцев Ша приехал в Северозападный университет и лично познакомился с Дональдом Саари, который впоследствии стал его научным руководителем и другом.

Путь из Китая в Северную Америку и, в конечном итоге, в кампус Эванстона не отличался легкостью для молодого человека вроде Джихонга Ша, но через некоторое время он приспособился к своему новому окружению. Он попросил всех называть его Джефом, т. к. большинство американцев с трудом выговаривали и запоминали имя, данное ему при рождении. После получения степени доктора философии Ша намеревался вернуться в Китай. Он знал, насколько сложно будет получить университетскую должность в Северной Америке. В американских университетах часто считается, что из-за языкового барьера доктора философии иностранного происхождения становятся плохими преподавателями, поэтому китайским студентам бывает особенно трудно получить такую работу.

Итак, Ша приступил к работе. Он отличался умом и готовностью посвятить исследованию двенадцать-четырнадцать часов в сутки, семь дней в неделю. Более того, теперь перед ним стояла замечательная математическая цель: доказать гипотезу Пенлеве. В эту работу его, конечно же, ввел Саари, понимавший, что Ша обладает достаточным потенциалом, чтобы обратиться к столь сложному вопросу. Изначально его идея заключалась в том, чтобы найти соответствующее решение задачи шести тел. Хотя сначала эта идея представлялась многообещающей, в конечном итоге она не сработала из-за некоторого трансверсального пересечения орбит на многообразии столкновений. Из численной работы было совершенно ясно, что искомое им решение, в конечном счете, продемонстрирует бесстолкновительную сингулярность. Однако аналитическая процедура оказалась неверной, а Саари никогда не принял бы диссертацию, в которой «доказательством» служил бы численный аргумент.

В то лето Ша понял, что некоторые особенности, которые он хотел сохранить из задачи шести тел, останутся неизменными в задаче пяти тел определенного типа. Он тут же набросал доказательство, но его детали были скучны, и на их завершение ушли бы годы.

Некоторые научные руководители дают своим аспирантам задачи и оставляют их работать самостоятельно; другие предпочитают более тесное сотрудничество, чувствуя, что это наилучший способ передать



Илл. 3.7. Джеф Ша. (Любезно предоставлено Джефом Ша)

свои знания и опыт. В данном случае сотрудничество оказалось наиболее продуктивным. Ша было не занимать смелости в его наивном желании покорить самые опасные высоты. Саари, за плечами которого лежал математический опыт длиною в жизнь, пытался немного обуздать его и не дать наделать ошибок. В процессе работы Ша всплыли несколько других родственных вопросов, на которые был дан ответ. Ряд из них помог решить Саари. В соавторстве они написали замечательную статью о некотором типе асимптотического поведения в прямолинейной задаче n-тел. В течение всего этого времени Ша продолжал работать над вопросом бесстолкновительной сингулярности.

В это время в Северозападный университет приехал с лекцией Гарри Поллард. Саари знал, что его бывший научный руководитель просто мечтает увидеть решение гипотезы Пенлеве. На вечере, который он устроил в честь Полларда, Саари познакомил его с Ша. Поллард был приятно удивлен тем, что этот молодой человек уже достаточно близок к получению доказательства, но, к сожалению, до выхода статьи в свет Поллард не дожил. Через несколько недель после этого визита состояние его здоровья ухудшилось. Через несколько месяцев у него случился апоплексический удар, вскоре после которого он скончался.

Глубоко огорченный смертью Полларда, Ша вернулся к работе с еще большим энтузиазмом. Не он один мечтал решить эту задачу. Она служила целью для нескольких поколений математиков, пирамидой, строившейся в течении девяноста лет, и он, Джихонг Ша, был близок к тому, чтобы положить последний камень. Какое чувство могло быть более отрадным?

В 1987 году Ша объявил, что доказал гипотезу Пенлеве. Он выступил с докладом на эту тему в Принстонском университете, и Чарльз Фефферман, награжденный медалью Филдса, уговорил его отослать статью для публикации в главный математический журнал: *Annals of Mathematics*. Ша написал препринт обьемом почти в сто страниц и отправил его нескольким специалистам. Параллельно, следуя совету Феффермана, он представил статью для публикации.

Оставалось только ждать. Ша знал о неуклюжести стиля своего изложения. Выражать идеи было крайне сложно, и он очень не любил записывать что-либо, а английский язык казался ему самым сложным в мире. Он не стал обосновывать утверждения, которые интуитивно представлялись ему очевидными. Он был слишком неопытен, чтобы понять, что именно такой стиль ненавидят рецензенты. Будь он постарше, он потратил бы куда больше времени на отшлифовку статьи и тем самым сэкономил бы месяцы неопределенности и нервного напряжения для себя и работы для рецензентов.

Через два года он получил весьма двусмысленный ответ. Рецензенты не могли решить, правильно ли его доказательство. Но, как бы там ни было, задача была слишком важна, чтобы допустить публикацию ее решения в том виде, в каком на данный момент оно было представлено. По меньшей мере, одно важное утверждение приводилось без убедительного доказательства, а несколько других были выражены крайне неуклюже и неясно. Такую статью ни при каких обстоятельствах нельзя было публиковать в главном математическом журнале.

Подобные трудности ни в коем случае нельзя считать необычными для исследователя. Когда ученый погружается в самую суть технических деталей, он практически не способен встать на место читателя и дать ясное и безупречное представление своей темы с самого начала. В этом и состоит одна из причин использования системы рецензирования для повышения качества научных публикаций.

Тем временем Ша уехал из Эванстона. Поначалу он намеревался вернуться в свой родной город Наньчан и преподавать там, но, когда ему предложили занять должность лектора и ассистирующего профессора математики Бенджамена Пирса в Гарвардском университете, он решил принять это предложение и остаться в США. Он продолжал заполнять пробелы и совершенствовать свою статью. Некоторые люди, с трудом верившие в то, что студент способен решить такую знаменитую задачу, начали сомневаться в правильности доказательства, но Ша не терял уверенности. Он представил исправленный вариант статьи на рассмотрение Джона Мазера, который был редактором *Annals*. Мазер решил взять на себя ответственность за принятие решения о том, публиковать статью или нет, но где было взять время, чтобы прочитать столь сложную работу с необходимой тщательностью? Тогда он решил организовать в Принстоне семинар, на котором он еженедельно будет представлять часть доказательства Ша. Что могло быть полезнее для него и его учеников, чем подобная затея? Он знал, что не прогадает, даже если в доказательстве обнаружится ошибка. Иногда ошибки позволяют узнать много больше.

Семинар продолжался всю осень 1991 года. Он стал прекрасной возможностью для некоторых принстонских аспирантов войти в лабораторию математического творчества, в сложный, но прекрасный предмет. В конце семестра Мазер вынес свой вердикт: доказательство верно. Письмо, в котором сообщалось, что его статья принята к публикации, было, наверное, самым замечательным подарком, который когда-либо получал Джеф Ша. Летом 1992 года статья была напечатана в *Annals of Mathematics*.

Когда Ша, наконец, получил уведомление о принятии его статьи к публикации, в Гарварде его уже не было. В 1991 году он перебрался в Технологический институт Джорджии. Атланта нравилась ему больше. Институт динамических систем оказался прекрасным местом работы для человека, которому едва исполнилось двадцать девять лет. Его жена могла продолжить учебу и не платить огромные деньги за обучение в Гарварде. Это место подошло обоим, и Ша знал, что может взяться за другие сложные задачи. Но он скучал по Эванстону, и осенью 1994 года вернулся туда, чтобы занять должность профессора в Северозападном университете. В следующей главе мы опишем часть его работы в Атланте, а теперь посмотрим, каким образом Джеф Ша доказал гипотезу Пенлеве.

Быть может, неудивительно, что он рассмотрел *пространственную* задачу пяти тел. Несмотря на возросшее число переменных, он упростил анализ, установив некоторые симметрии. Он взял две пары тел с равными массами $m_1, \ldots, m_4$ и добавил пятую частицу m_5 меньшей массы по сравнению с другими (см. рис. 3.13). Парные тела движутся по сильно эксцентрическим орбитам в двух параллельных плоскостях, причем нижняя пара движется по часовой стрелке, а верхняя — против часовой стрелки, с равными и противоположно направленными угловыми скоростями. Движение малой, пятой частицы ограничивается линией, перпендикулярной этим плоскостям и проходящей через общий центр масс, так что полный кинетический момент данной системы относительно этой линии равен нулю.

Поведение малой частицы необходимо для получения бесстолкновительной сингулярности, т. к. она совершает колебания между двумя парами, создавая неограниченное движение в конечное время. Эту часть сценария мы опишем подробнее. Допустим, что частица m_5, поднимающаяся снизу, пересекает линию, соединяющую m_3 с m_4, непосредственно перед тем, как эти частицы максимально сблизятся: в этом случае m_3, m_4 и m_5 близки к тройному столкновению. Тело m_5 поднимается немного выше линии, соединяющей m_3 и m_4, а частицы m_3 и m_4 располагаются максимально близко друг к другу. Затем m_5 испытывает сильную тягу назад. Она снова пересекает линию m_3m_4, когда эти точечные массы начинают расходиться. Это разделение уменьшает удерживающую силу, которая действует на маленькую частицу, вследствие этого быстро движущуюся вниз к другой двойной системе. В то же время из-за эффекта действия-противодействия пара m_3m_4 движется вверх относительно плоскости нижней пары. Теперь встреча повторяется (в зеркальном отражении) для нижней пары m_1m_2. При итерации этой процедуры с возрастающими приближениями и, соответственно, более высокими ускорениями для m_5 две пары вынуждены убежать в бесконечность за конечное время.

Каким бы простым не казался этот сценарий, его очень сложно реализовать из-за действия гравитационных законов Ньютона. Поскольку движение должно стать неограниченным в конечное время, ускорение маленькой частицы становится бесконечно большим. Для создания требуемого эффекта рогатки материальные точки в каждой паре должны подходить друг к другу все ближе и ближе, вследствие чего сложно гарантировать отсутствие двойных столкновений. Здесь для исключения «плохих» множеств решений на каждом этапе неявным образом используется строение устойчивых и неустойчивых многообразий точек столк-

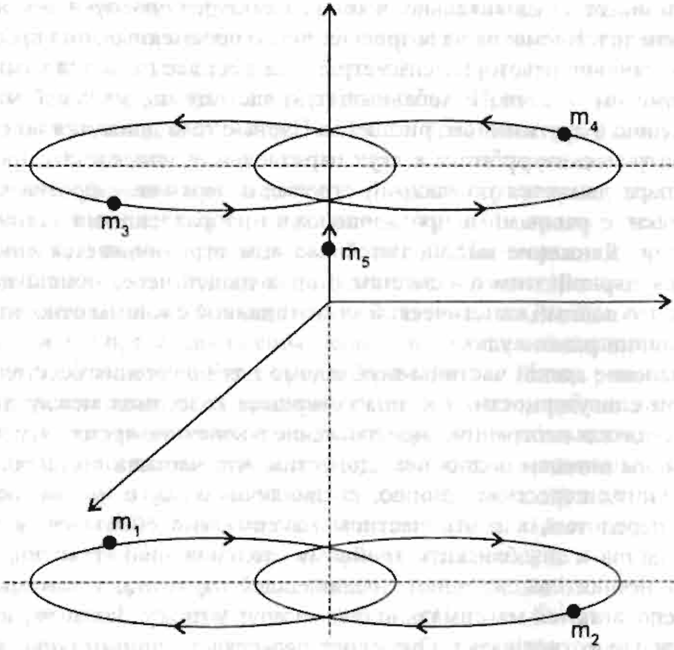


Рис. 3.13. Пример Ша бесстолкновительной сингулярности

новения. Под «плохими» подразумеваются множества решений, приводящих к столкновениям при следующей встрече, или для которых m_5 прибывает в неправильное время; такие решения исключаются из множества возможных решений. Помимо точной «наводки» m_5, на каждом этапе нужно немного сократить угловые скорости пар с тем, чтобы встречи могли стать достаточно близкими. Все это требует максимально осторожного обращения. Повторив этот процесс для бесконечно многих встреч, мы получаем канторово множество начальных условий, которые приводят к решениям с описанным выше поведением.

Каким образом можно исключить бесконечно много неподходящих множеств и все равно остаться не с пустыми руками? Ша должен был показать, что на каждом этапе «выживает» конечный набор решений. Читатель вспомнит, что аналогичное, но более простое построение мы использовали во второй главе, когда строили канторово множество точек, которые никогда не покинут подкову Смейла (рис. 2.6). Ранее в этой главе мы также описали построение канторова множества (рис. 3.7). Подобное построение в этом более сложном случае использовал и Ша. Вообще-то канторовы множества распространены в данном предмете: в ранее описанном коллинеарном примере Мазера и Мак-Гихи также присутствует канторово множество начальных условий с желаемым поведением.

Таким образом, Джеф Ша показал, что *существуют* такие начальные условия, при которых можно избежать столкновений, а пары убегут в бесконечность за конечное время. Он продемонстрировал редкую способность к преодолению, с одной стороны, технических трудностей, и к оперированию, с другой стороны, обширной математикой. Он ввел ряд новых идей, но, в первую очередь, его доказательство служит удивительным примером коллективных научных усилий. Он использовал все, что знал о задаче n-тел, включая множество результатов и методов, созданных до него. Почти век ушел на возведение здания, поддерживающего этот замечательный вывод. Теорема Ша стоит на его вершине, но без камней, заложенных его предшественниками, не было бы самого здания.

Летом 1993 года совместное заседание Канадского и Американского математических обществ проводилось в университете Британской Колумбии в Ванкувере. Этот шанс был использован для представления первой награды Блюменталя, которая должна была присуждаться каждые четыре года в знак признания выдающихся достижений в математике. В комитет, присуждающий эту награду, вошли Воган Джонс из Беркли (который в 1990 году сам получил медаль Филдса), Роберт Ленглендс из Института перспективных исследований в Принстоне и Центра математических исследований в Монреале, Грегори Маргулис из Йельского университета, Питер Мей из Чикагского университета и Уилфрид Шмид из Гарварда. Первым новую награду получил Джихонг Ша за доказательство гипотезы Пенлеве.

ЧАСТНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ СИММЕТРИИ

Одной из задач, которую Ша рассмотрел в процессе доказательства существования бесстолкновительных сингулярностей, был случай *равнобедренного* движения. Важная часть его анализа основывалась на том, что происходит, когда частица приближается к одной из двойных пар. В течение всего решения Ша подсистемы частиц m_3, m_4, m_5 и m_1, m_2, m_3 описывают равнобедренные треугольники. Под этим мы подразумеваем, что формы треугольников с тремя массами в вершинах таковы, что две их стороны всегда имеют равные длины. Размер треугольника может изменяться со временем, но равенство длин остается, т. к. m_5 лежит на вертикальной линии, а пары симметрично движутся вокруг нее, в результате чего происходит точное уравновешивание горизонтальных составляющих сил. К счастью, бóльшую часть анализа равнобедренной задачи трех тел уже проделали другие исследователи, и Ша мог продолжить эту работу.

Существуют две равнобедренные задачи трех тел: пространственная, которая интересовала Ша, и более ограниченная плоская, в которой все три частицы движутся в неподвижной плоскости. Плоская задача подвергалась интенсивному изучению с конца девятнадцатого века, а пространственную равнобедренную задачу, как мы обсудили ранее, в 1961 году в поисках примера колебательных решений рассмотрел Ситников. Он доказал, что если две частицы равной массы движутся по эллиптическим орбитам в плоскости, а третья частица, масса которой пренебрежимо мала, движется по оси симметрии, перпендикулярной к плоскости двух других (как показано на рис. 2.11), то можно подобрать такие начальные условия, чтобы маленькая частица совершала колебательные движения вверх-вниз, а ее движение стало бы неограниченным по мере роста амплитуды колебаний. Это был первый пример колебательного движения в задаче n-тел, но в данном случае — в отличие от решений, которые искал Ша, — для того чтобы это движение стало неограниченным, требовалось бесконечное время.

Юрген Мозер, с которым мы ранее встречались в институте Куранта, рассмотрел задачу Ситникова, и обобщения, предложенные к ней Алексеевым, в более обширном контексте. Он искал не только колебательные решения, но хотел описать любые возможные типы поведения маленькой частицы. В 1973 году он опубликовал книгу «Устойчивые и хаотические движения в динамических системах». В этой книге он показал связь возможных решений задачи Ситникова с отображением сдвига, которое использовал Смейл (это мы описали во второй главе). С любым отображением сдвига он связал некоторое решение и наоборот. Грубо говоря, это означает, что маленькая частица на оси симметрии способна двигаться любым определенным нами образом. Мы должны лишь выбрать подходящие начальные условия. Как мы уже видели, это можно сделать с помощью символической динамики.

Самые последние результаты в равнобедренной задаче трех тел касаются, прежде всего, решений тройного столкновения и почти тройного столкновения. Роберт Девани из Бостонского университета в 1980 и 1982 годах рассмотрел плоский случай, а Ричард Мекель (еще один ученик Конли) из университета Миннесоты с 1984 года работал над пространственным случаем. Оба ученых использовали преобразования Мак-Гихи и качественный анализ потока на многообразии столкновений и вблизи него. В их статьях выдвинуто предположение о том, что движение общей задачи трех тел вблизи тройного столкновения является хаотическим в смысле, описанном во второй главе. Это свидетельствует о том, насколько сложно точно выбрать такие начальные условия, при которых произойдет какое-то конкретное желаемое движение.

Роджер Брук из Техасского университета выполнил ряд численных исследований равнобедренной задачи трех тел в 1979 году. Дальнейшие аналитические результаты получили Иригойен, Лакомба и Лоско в 1980 году, а также Симо и Мартинез в 1988. Но, несмотря на все эти статьи, некоторые из которых раскрыли замечательные и интересные свойства, равнобедренная задача на сегодняшний день далека от полного понимания.

Идея, пришедшая за ужином

Это был день, полный интересных выступлений, и, как это часто происходит на конференциях, обсуждения продолжались еще долгое время после последнего выступления. Заседание Американского математического общества, проходившее в 1985 году в Анагейме, в Калифорнии, свело исследователей из всех областей математики. Во время таких событий часто зарождается сотрудничество, люди из разных областей обмениваются идеями, говорят о вопросах, которые интересуют всех, и уезжают домой более информированными и мудрыми, чем были, когда приехали.

В тот вечер Джозеф Джервер отправился ужинать с несколькими другими учеными. Некоторых он знал и раньше, а с другими познакомился на этой конференции. Ресторан, в который они отправились, был милым и спокойным местечком, где горели свечи, готовили вкусную еду и подавали хорошее вино. Они говорили о самых разных вещах: общих друзьях, научной политике, и, конечно, математике. Обычный вопрос в таких случаях звучит так: «Над чем вы работаете?» Каждый рассказывал свою историю, описывал свои проблемы, сложности и достижения. Джервер завел разговор о гипотезе Пенлеве. Очень скоро он завладел всеобщим вниманием, т. к. эту задачу без труда можно было описать на понятном всем языке. Он объяснил свои попытки выжать доказательство из задачи пяти тел и привел причины, побуждавшие его верить в то, что это сработает.

Он произвел впечатление на всех присутствующих. Нечасто доводится узнать о девяностолетней задаче, которую так просто описать и все же так сложно решить. Некоторые из сидящих за столом начали обдумывать историю Джервера, а другие продолжили беседовать о своем. Вдруг Скотт Браун спросил: «А почему бы вам не попытаться построить решение, имеющее некоторого рода вращательную симметрию?» На некоторое время все замолчали, а потому у Джервера загорелись глаза. «Да, — ответил он, — это потрясающая идея! Я непременно попробую сделать это».

Возвращаясь в свой отель, Джервер размышлял о том, как использовать симметрию, которую предложил Браун, для усовершенствования его примера пяти тел. В ту же ночь он приступил к работе с вычислениями. Пока что было неясно, приведет ли это к чему-то важному, но он на это надеялся. С нетерпением ожидая возвращения домой, что позволило бы ему сравнить свои записи с предыдущими вычислениями, Джервер чувствовал, что он как никогда близок к решению задачи, занимавшей его на протяжении последних пятнадцати лет.

В течение следующих месяцев он предпринимал все новые и новые попытки, но каждый раз чего-то не хватало. Несколько раз ему казалось, что он, возможно, достиг цели. На горизонте возникал лучик надежды, но его, подобно облаку, всегда закрывала ошибка. Наконец, Джервер осознал, что способа получить бесстолкновительный пример в рамках задачи пяти тел не существует. Это был горький момент. Он чувствовал себя изможденным. Задача становилась навязчивой, поэтому он решил отложить ее и отдохнуть.

Однако это было не так-то просто сделать. Однажды утром он проснулся с новой идеей. А почему, собственно, он так привязался к задаче пяти тел? Вращательная симметрия одинаково хорошо применяется к любому количеству частиц. Почему бы не увеличить их число и не дать себе больше свободы? Это потребует дополнительных вычислений, но вполне может сработать. Он начал все заново, посвятив вычислениям огромное количество времени и энергии. На этот раз он не сдался. Борьба с задачей и с самим собой возобновилась.

Затем в 1987 году появились новости. В Принстоне с лекцией доказательства гипотезы Пенлеве должен был выступать Джихонг Ша, и Джервер увидел объявление об этом событии. Кто был этот человек? Джервер никогда о нем не слышал и поначалу не хотел верить в это. Ему было сложно принять тот факт, что кто-то опередил его. После некоторого размышления он подумал: «Это ведь лишь объявление. Кто знает, верно ли доказательство?» Он решил позвонить Дону Саари, который должен был быть в курсе дел. Как только Джервер узнал, что Ша — ученик Саари, он понял, что гонка завершилась. Но, как бравый солдат, отрезанный от основных сил, он продолжал бороться, пытаясь убедить себя, что ничего не изменилось. И, наконец, ему улыбнулась удача: через несколько месяцев он нашел другое доказательство.

В январе 1989 года Джервер представил свою статью для публикации в *Journal of Differential Equations*. В ноябре того же года статья была принята к публикации, а в январе 1991 года появилась в журнале. Несмотря на то, что статья Джервера была опубликована раньше статьи Ша, во введении к ней Джервер прямо признает приоритет Ша как приведшего первый пример бесстолкновительной сингулярности в задаче n-тел. Тем не менее, работа Джервера является первым подходом к плоскому случаю.

В небесной механике сам факт существования определенного вида решения, возможно, не так интересен, как детали его построения, поэтому мы опишем пример Джервера. Он взял $3N$ частиц в плоскости, с начальными положениями, изображенными на рисунке 3.14. Чтобы пример работал, число N нужно выбрать достаточно большим. $2N$ частиц расположены N парами по почти круговым траекториям и имеют равные массы. Центр массы каждой пары расположен в одной из вершин правильного многоугольника. Другие N тел имеют малые равные массы и быстро движутся от одной пары к другой, как показывают стрелочки на рисунке 3.14. Приближаясь к паре, каждая маленькая частица забирает ее кинетическую энергию и передает ей некоторый импульс, вынуждая пару двигаться по меньшей траектории, и в то же время увеличивает расстояние от пары до центра многоугольника.

Продолжая это процесс для достаточно большого числа частиц и выбирая соответствующие значения масс и начальных скоростей, можно показать, что размер данной конфигурации увеличивается после каждого сближения маленькой частицы с парой. Последовательность промежутков между каждыми двумя сближениями сходится к конечной величине, а диаметр всей системы становится неограниченным в конечное время. Это говорит о существовании бесстолкновительной сингулярности.

Прежде чем поставить точку в этой истории, мы должны упомянуть о замечательном понимании этой проблемы человеком, который

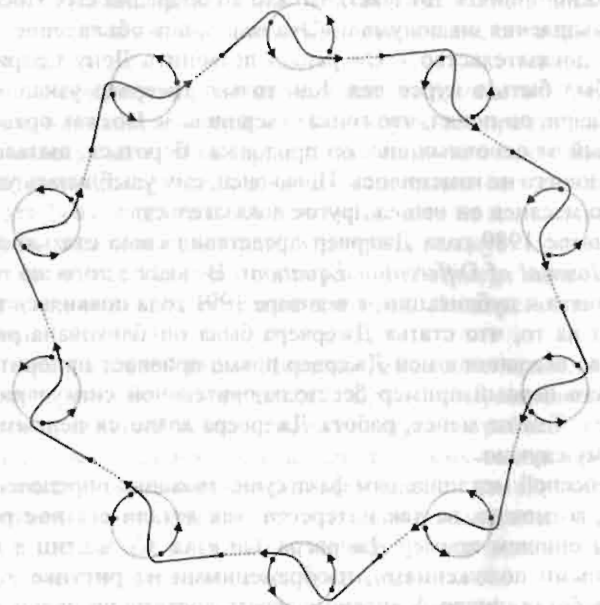


Рис. 3.14. Пример Джервера с вращательной симметрией в плоскости

не опубликовал ни слова в литературе по небесной механике. Мы говорим о Роберте Ф. Уильямсе, специалисте по топологии и динамике, который сейчас работает в Техасском университете в Остине. Задолго до Ша и Джервера он предположил, каким образом можно было бы построить решения с бесстолкновительными сингулярностями, но так и не развил свою мысль. Это произошло на ранее упоминавшейся конференции, которая проводилась в 1971 году в университете Байя в старейшем бразильском городе Сальвадоре — месте с прекрасными церквями, площадями и садами. В то время Уильямс работал в Северо-западном университете. Во время перерыва на кофе, после выступления его коллеги Дональда Саари на тему бесстолкновительных сингулярностей, Уильямс сказал Ричарду Мак-Гихи и тем, кто стоял поблизости, что бесстолкновительная сингулярность может иметь место в решении такого типа, которое двадцатью годами спустя описал Джеф Ша. Мак-Гихи не захотел принять это предложение и убедил Уильямса, что на его идее далеко не уедешь. Через несколько минут Уильямс предложил другой пример, очень похожий на тот, к которому в итоге пришел Джервер, но опять не получил одобрения. В то время все были склонны полагать, что бесстолкновительных сингулярностей не существует. Свойство быстрого расхождения после тройного сближения еще не открыли. Поскольку его предложение встретили без энтузиазма, Уильямс больше не думал об этой задаче, хотя впоследствии обрел широкую известность, благодаря своей работе по странным аттракторам и заузленным периодическим орбитам в хаотических динамических системах другого рода.

Крайне сложно сравнивать два доказательства гипотезы Пенлеве, найденные Ша и Джервером. Каждое из них интересно и ценно по-своему. Ша создал новое направление, используя сложный математический аппарат и внеся в небесную механику новые идеи. Статья Ша подверглась самому внимательному прочтению, и сегодня ни у кого не возникает сомнений в ее правильности. Джозеф Джервер в своей работе сумел преодолеть сложности этой хитрой задачи с помощью классических инструментов математики девятнадцатого века. Быть может, его статью несколько сложнее читать из-за огромного количества расчетов, но Джервер вызывает восхищение своим упорством в их проведении. Оба они достигли замечательных побед в старой и сложной области, где трудно добиться новых важных результатов.

Однако даже сегодня гипотеза Пенлеве не исчерпана полностью. Построение Ша можно обобщить на n частиц для любого $n > 5$, но нет никакой надежды адаптировать его к задаче четырех тел. Вопрос о существовании в этом случае бесстолкновительных сингулярностей по-прежнему остается открытым. С другой стороны, попытки доказать эту гипотезу обогатили классическую механику и математику новыми методами и идеями, которые уже используются в других областях. Как обычно бывает с большинством хороших вопросов, гипотеза Пенлеве оставила за собой целый мирок интеллектуальных достижений, и мы видим ее наследие как прекрасный образец научной культуры, созданный совместными усилиями нескольких поколений.

4. Устойчивость

Устойчива ли Солнечная система? Строго говоря, ответ неизвестен до сих пор, и все же этот вопрос привел к очень глубоким результатам, которые, быть может, имеют бóльшую важность, нежели ответ на исходный вопрос.

— Юрген Мозер

Вечер казался вполне обычным. После ужина Жан Лерон, как правило, прочитывал свою корреспонденцию и, если позволяло время, отвечал на некоторые из многочисленных просьб, которые он получал. Он сидел за столом и писал, когда в комнату вошел слуга с серебряным подносом, на котором лежали визитная карточка и письмо.

«О нет, только не это, — воскликнул его господин, распечатав письмо. — Еще одна рекомендация на одного из этих «молодых талантов» от представителей высшего общества». Он повернулся к слуге: «Пожалуйста, скажите, что я не могу его принять».

Жан Лерон Даламбер, великий математик, был склонен к уединению. Он не любил лесть и не стал бы находиться в одной комнате с человеком только потому, что он богат, или имеет высокий социальный статус. Будучи незаконнорожденным сыном аристократа, он на горьком опыте узнал, что знатные люди далеко не всегда отличаются богатством духа. Вскоре после его рождения мать оставила его на ступенях небольшой часовни Сен-Жан-ле-Рон в Париже. Его приемные родители окрестили его как Жана Лерона, а он позднее добавил к своему имени Даламбер.

Рекомендательные письма, пришедшие в тот день, были написаны для молодого человека восемнадцати лет из Бомон-ан-Ож в Нормандии. В них несколько влиятельных персон превозносили математический гений этого молодого человека и просили Даламбера принять его и оказать помощь. Они, должно быть, мало что знали о характере знаменитого математика, иначе они не послали бы подобные рекомендации. Мнение малоинформированных людей не произвело впечатления на Жана Лерона. Достаточно хорошо его личность отражает событие, которое произошло в его жизни несколько позже.

Фредерик Великий предложил Даламберу самую престижную должность, о которой в то время мог мечтать ученый: президентство в Берлинской Академии наук. Любой счел бы за честь принять ее, но только не Даламбер. В письме, где он отказывался от этого назначения, Жан Лерон рассказал, как поначалу он, подобно большинству других людей, жаждал почестей и богатства, но пришел к тому, чтобы отказаться от всего этого. Взамен он получил идеальное здоровье и душевное спокойствие, которые, на его взгляд, являются единственными наградами, коих должен желать философ.

Инцидент с талантливым молодым человеком вскоре стерся из памяти Даламбера. Однако через несколько дней он получил длинное и впечатляющее эссе по общим принципам механики, подписанное именем, которое показалось ему знакомым: Пьер Симон. Задумавшись на несколько секунд, он вспомнил, что это тот самый юноша с рекомендациями от влиятельных людей. «Этому человеку не нужны рекомендации! — подумал он с улыбкой. — Он отлично знает, как представиться». Без промедления Даламбер отправил молодому человеку ответ, в котором предложил встретиться на следующий день.

Стремление к порядку

Существует стремление к вечности, которое время от времени выражает каждый человек. Независимо от того, насколько тщетным нам это может представляться, мы все же стремимся продлить свою жизнь как можно дольше. Первым требованием для этого является безопасность, уверенность в том, что наш мир не опасен. Мы надеемся, что наши города будут в безопасности, а наши страны не станут воевать. Мы хотим, чтобы наши дети росли в мире и счастье. В более общем смысле мы верим, что наша окружающая среда не претерпит радикальных перемен.

С тех самых пор как человечество узнало, что его домом является маленькая уязвимая планета в большой Солнечной системе, ученые задались вопросом относительно длительности ее существования. Мы полностью зависим от энергии Солнца; расстояние до него оказалось идеальным для зарождения и развития жизни. Будь оно чуть меньше или больше, и жизнь, в известном нам виде, на голубой планете могла не появиться вообще.

И все же давным-давно астрономы заметили, что движение Земли и других планет не является идеально правильным и периодическим. Это вызвало у них вопрос: а будет ли Земля вечно двигаться по своей орбите вокруг Солнца? Может ли она покинуть свою настоящую окрестность и сместиться дальше в Солнечную систему или, что еще хуже, столкнуться с каким-нибудь другим крупным телом вроде астероида или кометы? Сегодня мы располагаем многочисленными свидетельствами того, что столкновения с предметами среднего размера имели место в прошлом, вызывая изменения климата и погоды, достаточно резкие, чтобы стереть с лица Земли динозавров. Летом 1994 года осколки кометы Шумейкера–Леви столкнулись с Юпитером. В окрестности этой планеты астрономы недавно обнаружили комету Свифта–Туттля; предварительные расчеты, основанные на оценках ее орбитальных элементов, говорят о вероятности столкновения этой кометы с Землей в двадцать втором веке, равной 1 : 40. Чего еще мы можем ожидать в будущем?

За века до появления столь определенного свидетельства подобные вопросы привели математиков к понятию *устойчивости* — фундаментальной концепции в изучении природы. В принципе, устойчивость относится к явлениям возмущения. Если в динамической системе произойдут небольшие изменения, сохранит ли она свое состояние? Тем не менее, существуют десятки определений устойчивости, каждое из которых имеет отличное значение, зависящее от контекста. Многие из них взаимосвязаны; некоторые предполагают другие или вытекают из них. В конце второй главы мы упоминали теорему Пуанкаре о возвращении, представляющую слабый тип устойчивости, когда мы просим только лишь, чтобы система время от времени повторяла свое поведение. Через несколько страниц мы вновь вернемся к этому. На рисунке 1.6 в первой главе мы изобразили фазовые портреты устойчивого и неустойчивого равновесий и описали более строгое и более прямое понятие устойчивости в контексте задачи о маятнике, который занимает вертикальное нижнее или перевернутое верхнее положение. Сейчас мы рассмотрим устойчивость, которая, с физической точки зрения, может оказаться наипростейшей для понимания, но, с позиций математики, возможно, будет самой сложной: устойчивость планет на их орбитах вокруг Солнца.

Говорят, что Солнечная система является устойчивой, если между телами, входящими в нее, не происходит столкновений и если ни одна планета ни при каких обстоятельствах не может ее покинуть. В терминах задачи n-тел это означает, что в данной системе не существует сингулярностей, и что никакая частица не покинет ее даже в бесконечном будущем или прошлом. (Как только мы переходим от физической Солнечной системы к математической вселенной задачи n-тел, мы забываем о том, что Земле всего четыре или пять миллиардов лет. Точечные массы, обращающиеся по орбитам, в идеальном мире дифференциальных уравнений могут обращаться по ним вечно.) Это достаточно слабое определение устойчивости. Оно требует только лишь ограниченности и постоянства. Ясно, что катастроф быть не должно, но ничего не говорится о том, насколько близко к своим настоящим орбитам должны находиться планеты. (Кроме того, задача n-тел не обращает никакого внимания на то, что Солнце, в конечном итоге, истощит свое ядерное топливо и раздуется в красного гиганта, попутно спалив Землю дотла.)

Единственный способ рассмотреть этот вопрос с математической точностью состоит в том, чтобы записать и изучить уравнения, описывающие ньютонову модель Солнечной системы: задачу десяти тел, одно из которых (Солнце) имеет большую массу, а девять других — маленькие. Мы находим, что планеты обращаются вокруг Солнца по *почти* эллиптическим орбитам. Почему же эти орбиты не являются эллипсами? В рамках модели Ньютона это объясняется тем, что орбита каждой планеты находится под некоторым влиянием движения других планет, вследствие чего она описывает не идеальный эллипс, а фигуру, близкую к нему. Естественно, что задача n-тел такого типа называется *планетарной задачей*.

Таким образом, становится ясно, что до Ньютона сколь-нибудь строгого изучения устойчивости Солнечной системы быть не могло. Вообще-то, первые результаты, относящиеся к данному вопросу, появились почти через век после выхода в свет *Principia*. Однако общий вопрос устойчивости, не связанной с Солнечной системой, возник задолго до этого, еще в античные времена.

Греческие натурфилософы Аристотель и Архимед подходили к этой проблеме с двух различных точек зрения. Первый рассматривал ее с позиций кинематики. Взяв в качестве примера коромысло весов и предметы, лежащие на их плоских чашах, он размышлял о том, какие силы могут нарушить состояние равновесия и какие движения могут произойти вследствие их воздействия. Архимед же исповедовал геометрическую точку зрения. Его исследования падающих тел продемонстрировали важность формы предметов и положений их центров тяжести. Оборачиваясь назад, сейчас можно было бы сказать, что Аристотель изучал эту проблему с позиций эксперимента (хотя на практике он, возможно, никогда и не проводил опытов), а Архимед занимался построением математической модели. В то время самого понятия устойчивости еще не было. Судя по всему, первым термин «stabilitas» использовал в своем стихотворении «De Rerum Natura» (О природе) латинский поэт Лукреций. Этот термин появляется в отрывке, где он говорит об устойчивости света и тяжелых предметов.

Греки и римляне обитали в физическом мире, где господствовало трение. Все полагали, что для того чтобы тело продолжало двигаться, к нему нужно приложить какую-нибудь силу. И только в «Диалоге о двух науках» (1638) Галилей ввел идеализацию в виде гладких тел, свободных от трения. Возможно также, что Галилей был первым «физиком», проведшим тщательные опыты. Его работа по шарам, скатывающимся по наклонным плоскостям, стала вкладом в формулировку ньютоновых законов движения. Примерно в то же время прояснились и разделились концепции равновесия и устойчивости. Торричелли, изобретатель барометра и молодой современник Галилея, очевидно, первым четко описал *неустойчивые* равновесия. До того времени основное внимание было приковано к статическому равновесию. Впоследствии Гюйгенс, интересовавшийся маятниковыми часами, ввел динамические идеи, но все эти первые исследователи, очевидно, думали об устойчивости по отношению к *конечным* возмущениям. А бесконечно малым возмущениям, столь важными для современных исследований устойчивости, пришлось ждать изобретения исчисления в конце семнадцатого века.

Мы уже видели в первой главе, что открытие хаоса Пуанкаре возникло из его попыток доказать полную его противоположность — устойчивость. Как часто бывает в математике и науке вообще, нечто новое появляется тогда, когда ищешь что-то совсем другое. Понятие устойчивости было важно не только само по себе, но действовало как катализатор для научного прогресса. В этом смысле можно сказать, что это понятие вдохновило и создало революцию хаоса.

Теперь пора рассказать историю более ранних попыток доказать устойчивость задачи n-тел.

Маркиз и император

Пьер Симон представил свой первый научный труд на рассмотрение Французской Академии наук, когда ему было всего двадцать четыре года. В его статье содержался замечательный результат, касающийся планетарной задачи, т. к. в ней он утверждал, что Солнечная система устойчива.

Рожденный в 1749 году в крестьянской семье в Бомон-ан-Ож (департамент Кальвадос, Нормандия), Пьер Симон быстро обнаружил свой незаурядный талант к математике. Он посещал курсы в военной академии Бомона и, судя по всему, некоторое время даже преподавал там. Именно в это время Пьер познакомился с несколькими состоятельными людьми, которые оказали ему протекцию, оценив его редкую способность к точным наукам. В возрасте восемнадцати лет, благодаря рекомендации и влиянию Даламбера, он уже был профессором в Парижской Военной школе. Впоследствии Пьера Симона назначили на кафедру в знаменитую Высшую нормальную школу. Он пережил Революцию и правление Наполеона, а после восстановления монархии при Луи XVIII он стал маркизом де Лапласом. Его положение во французской науке восемнадцатого века можно сравнить лишь с положением Лагранжа.

В отличие от Даламбера, личность Лапласа была достаточно сложной. С одной стороны, на протяжении всей своей жизни он стремился скрыть свое низкое происхождение, но, с другой стороны, он помог многим молодым беднякам, пытавшимся попасть в математику. Он был силен и настойчив в науке, но слаб в общественной жизни и был склонен принимать титулы и почести, даже если он их не заслуживал. Далеко не всегда он признавал и то, что некоторыми вещами он обязан другим, например, Лагранжу, до работы которого мы вот-вот дойдем.

К 1785 году Лаплас уже был полноправным членом Французской Академии наук. В тот год произошло одно событие, которое изменило его жизнь, повернув ее к политике. Выполняя свои обычные академические обязанности, он как-то раз экзаменовал шестнадцатилетнего кандидата, который с самого начала произвел на него впечатление. Подростка звали Наполеон Бонапарт. Впоследствии, когда Наполеон пришел к власти, и отчасти из-за этого, Лаплас получил богатство и влияние. Но несмотря на то, что он перебрался в высшие круги общества, он всю жизнь продолжал работать в математике с тем же успехом и энтузиазмом, что и в юности.

Интересы Пьера Симона отличались обширностью. Он выполнил фундаментальную работу по теории вероятностей и обобщил ее в своем великом труде «Аналитическая теория вероятностей» и, между делом, написал великолепное эссе по законам случайности. Нас же больше всего интересует его шедевральный пятитомник под названием «Трактат по небесной механике». За двадцать шесть лет, которые он потратил на его написание, Лаплас собрал в нем все важные достижения в этой области со времен Ньютона и включил множество новых идей и результатов.

Кстати, именно Лаплас ввел термин «небесная механика». Для тех, кто не в состоянии понять все детали и абстракции этого колоссального труда, Лаплас написал *Exposition du système du monde*, которая оказалась одной из самой успешных популярных книг, которые когда-либо были напечатаны.

Император Бонапарт и сам разбирался в математике; некоторые результаты в элементарной геометрии по сей день носят его имя. Вскоре после появления «Трактата» он пригласил Лапласа к себе, чтобы обсудить некоторые содержащиеся в нем идеи. Главная цель книги заключалась в объяснении (через ньютоново притяжение) существования всей Солнечной системы и явлений, в ней происходящих. Лаплас был атеистом и никогда не упоминал имени Бога в отличие от всех более ранних статей и книг по данному предмету, начиная с Галилея и Кеплера. Наполеон же был великим солдатом, привыкшим побеждать. Он обладал властью, большинство людей его боялось, а потому он ставил себя превыше всех людей. На этот раз ему захотелось взять верх над Лапласом, поэтому он напал на него: «Ты написал эту огромную книгу об устройстве мира, ни разу не упомянув имени Создателя Вселенной!»

В обществе Лаплас порой мог высказаться двусмысленно, но, когда дело касалось науки, он всегда говорил прямо. Он никогда не отказывался от того, за что выступал. Книга его базировалась на одной аксиоме: частицы материи притягиваются друг к другу в соответствии с законом тяготения. С помощью этой гипотезы он мог объяснить все. Тем не менее, абсолютная откровенность в подобных обстоятельствах могла навлечь на него серьезные неприятности. И все же, осознавая опасность, он дал прямой и честный ответ: «Сир, *эта* гипотеза мне не понадобилась».

Наполеон внимательно посмотрел в глаза Лапласу. Старый ученый взглянул на императора с достоинством и гордостью. В этот момент ничто в мире не смогло бы поколебать Пьера Симона. После некоторого неловкого молчания Бонапарт поменял тему разговора. (Впоследствии, когда император рассказал об этом разговоре Лагранжу, тот, говорят, заметил: «Но это же чу́дная гипотеза; она объясняет многое».)

Первым важным вкладом Лапласа стал его научный труд об устойчивости, написанный в 1773 году. Центральная теорема этой статьи содержит следующее утверждение: *в приближении эксцентриситетов в виде ряда первой степени главные оси планет не имеют вековых членов.* Что означает этот технический язык? *Главная ось* планеты определяется как отрезок AB на рисунке 4.1. Это наидлиннейшая прямая, соединяющая две точки эллипса, образующего орбиту этой планеты.

Илл. 4.1. Пьер Симон Лаплас. (Любезно предоставлено Готье-Вийар, Париж)

Как мы отметили, в присутствии более чем двух тел длина этого отрезка обычно изменяется со временем. Орбита — это непостоянный эллипс, размер которого может меняться. Если это изменение слишком велико, траектория планеты может стать неограниченной.

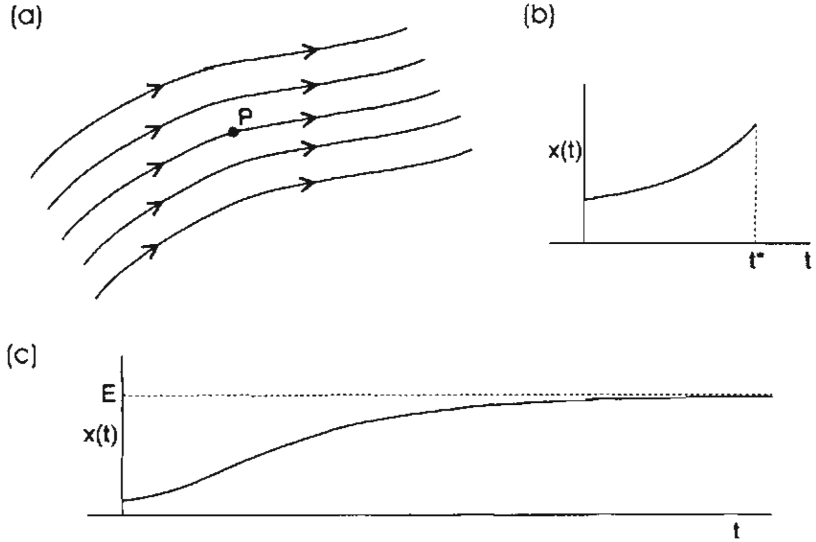


Рис. 3.1. Орбита C останавливается в точке P. На орбите C точка P соответствует сингулярности t^*. На (a) изображен фазовый портрет, на (b) – сингулярное решение как функция времени. На (c), напротив, изображено другое решение, которое приближается к точке равновесия

Прежде чем продолжить обсуждение, остановимся на существенней разнице между решением, имеющим сингулярность, и решением, стремящимся к точке равновесия потока, как показано в первой главе. Рисунки 3.1a и 1.6 говорят о том, что оба решения заканчиваются в определенной точке, однако эти изображения фазового пространства не показывают явно тот факт, что первое решение останавливается в конечное время, а второе затрачивает бесконечное время, чтобы достигнуть своего предела в точке равновесия. Чтобы почувствовать разницу, нужен график решения как функции времени, изображенный на рисунках 3.1 *b* и *c*. В одном случае кривая останавливается в момент времени t^*, в другом — она определена в течение всего времени.

Чтобы объяснить, что для Пенлеве означал трансцендент, сначала следует отметить, что могут возникать «кажущиеся» сингулярности. В нашей метафоре палку может прибить к берегу только для того, чтобы немедленно отбросить ее обратно из-за особой формы береговой кромки.

Главная ось определяет размер эллипса, а *эксцентриситет* характеризует его форму, он описывает, насколько она близка к форме круга или далека от нее. Большие значения эксцентриситета соответствуют длинным и плоским эллипсам. Взять приближение эксцентриситета в виде ряда первой степени означает дать его приблизительную оценку. Приближение в виде ряда второй степени обычно дает более точную оценку, чем приближение в виде ряда первой степени, но менее точную, чем приближение в виде ряда третьей степени и т. д. Подобный метод называется *теорией возмущений*, т. к. мы берем известное решение более простой, но аналогичной задачи и постепенно видоизменяем его, чтобы максимально приблизить к истинному решению, которое мы не можем вычислить точно. Чтобы использовать методы теории возмущения, нужно иметь маленький параметр, через который будет проводиться разложение в ряд. В данном случае, естественно, был выбран эксцентриситет — малое отклонение от круговых орбит. Мы помним, что большая часть работы Пуанкаре, описанной в первой главе, была связана с приближениями рядов и их сходимостью.

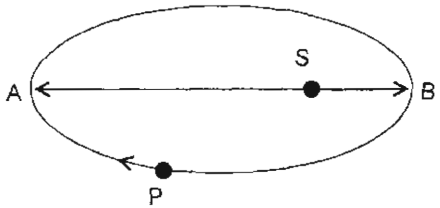


Рис. 4.1. Главная ось AB планеты P — это главная ось эллипса, который считается ее орбитой вокруг Солнца S

Вековые члены обозначают линейный (или иногда более быстрый) рост временно́й переменной в некоторых выражениях. Поскольку нас интересует поведение по мере того, как время уходит в бесконечность, вполне может случиться так, что выражения, содержащие такие члены, не останутся ограниченными. Если в *точном* расчете, а не в приближении степенного ряда, *не* появится вековых членов, мы можем сделать вывод об устойчивости, т. к. все величины, характеризующие (возмущенный) эллипс, остаются постоянными. Если же появляются вековые члены, то в результате может получиться как устойчивость, так и неустойчивость. Если говорить точнее, то устойчивость мы получим в том случас, когда эти члены каким-то образом спрячутся и сократятся, так что окончательные выражения остаются ограниченными. В противном случае система будет неустойчивой. Как бы то ни было, приблизительная оценка не может дать окончательного ответа на данный вопрос.

Теперь становится ясным статус результата, полученного Лапласом. Показав, что в первом приближении вековые члены отсутствуют, он не столько доказал устойчивость, сколько не сумел продемонстрировать неустойчивость в решениях данной математической модели. Более того, даже если бы он сумел доказать устойчивость, то она относилась бы не к самой Солнечной системе, а к задаче n-тел.

И все же это был важный результат в небесной механике. До этого времени научное сообщество не выражало ясного мнения по поводу устойчивости. Ньютон, Эйлер и другие, пытаясь понять орбиту Луны, сталкивались с серьезными проблемами. Полагая, что движение планет сопряжено с еще более сложными проблемами, они даже не пытались ставить более общий вопрос устойчивости. Постановка этого вопроса стала возможна благодаря подробным вычислениям Лапласа и тому, что он посеял семена общего метода. Таким образом, создание Лапласом методов теории возмущений имело огромную историческую важность: он проложил путь, по которому с тех пор прошли многие. Вероятно, самым важным следствием этого метода было открытие Нептуна в середине девятнадцатого века после предсказаний Адамса и Леверье.

Музыка сфер

Следующий вклад был сделан раньше, чем ожидали. В 1774 году на картине возник Жозеф Луи, граф де Лагранж. Он родился в Турине в 1736 году, был итало-французского происхождения. Он был старше Лапласа на тринадцать лет, но их истории удивительно похожи. Жозеф Луи вынужден был рано начать работать, т. к. в результате некой глупой финансовой аферы его отец потерял все свое состояние. В возрасте шестнадцати лет Лагранжа назначили профессором геометрии в Туринской артиллерийской школе. За четыре года он написал и отправил Леонарду Эйлеру статью по *изопериметрическим свойствам* (свойства двух или более геометрических фигур, имеющих одинаковый периметр). В этой статье он представил идеи, которые впоследствии развил в основы *вариационного исчисления*. Сегодня оно выросло в отдельную область математики. Затем Лагранж стал директором научного отдела Королевской академии в Берлине, и, в конце концов, был избран в Институт Франции, который сменил Французскую Академию наук.

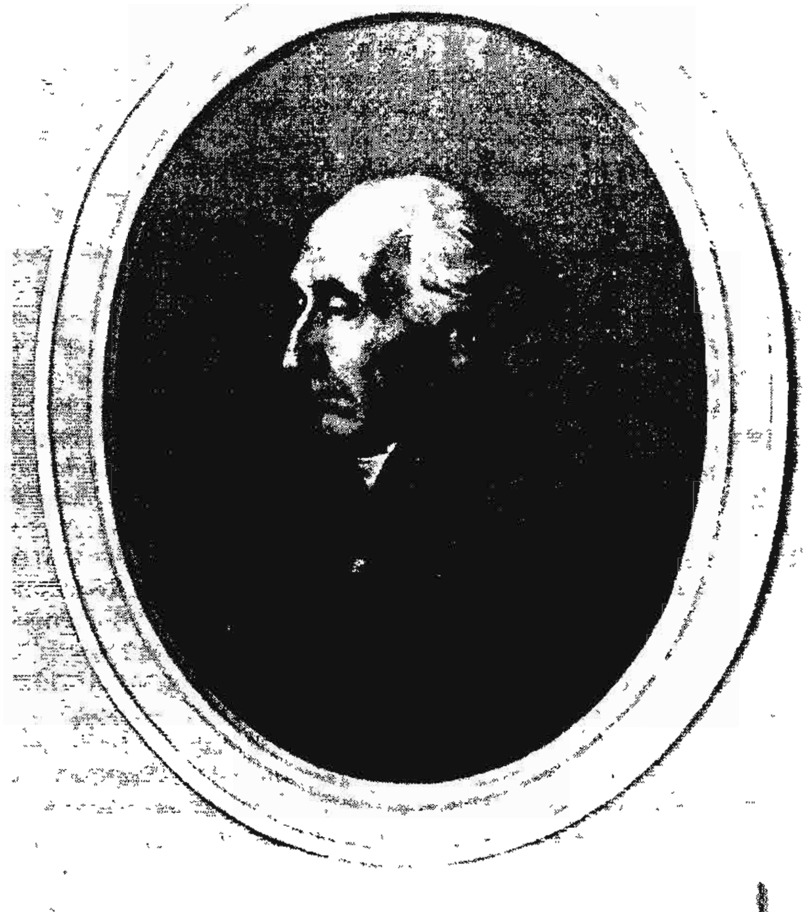
Жизнь и карьера Лагранжа были столь же успешны, что и у более молодого Лапласа. Но, что самое главное, у Жозефа Луи всегда находилось доброе слово для каждого: знакомого и незнакомого. Несмотря на свое собственное положение, он помогал многим нуждающимся. Он не жаловался на то, что Лаплас не отдает ему должного за вклады, сделанные им в его работу. Помимо математики он интересовался очень многим, т. к. обладал эрудицией мыслителя и созерцателя, пытающегося понять мир как единое целое. Он ни к кому не испытывал неприязни, а сердце его было столь же огромно, сколь и его знание.

Очень рано Жозеф Луи заинтересовался проблемами небесной механики. Он был аналитиком и первым ввел в изучение математики аналитический язык в противоположность геометрическим методам, унаследованным от греков и использованным Ньютоном в своем труде *Principia*. В разное время Лагранж работал над задачей трех тел, некоторые решения, связанные с состояниями равновесия которой, носят его имя, как мы увидим в конце этой главы. Много лет он посвятил этой и другим задачам небесной механики.

В 1764 году, когда ему было всего двадцать восемь лет, он завоевал гран-при Парижской Академии наук за научный труд по либрации Луны. С Земли кажется, что Луна всегда обращена к нашей планете одной стороной; ее обратную сторону мы увидели лишь тогда, когда ее сфотографировали первые космические спутники. Но на самом деле, небольшие повороты влево или вправо заставляют ее показать немного больше половины себя: около 60% всей ее поверхности. Эти колебания называются *либрацией*. Лагранжу удалось объяснить это явление с помощью ньютонова закона притяжения.

Вторую премию Академии наук он выиграл в 1766 году, решив еще более сложную задачу. Он объяснил некоторые неравенства в задаче шести тел, определяемой Солнцем, Юпитером и четырьмя крупнейшими спутниками Юпитера: Ио, Европой, Ганимедом и Каллисто, — единственными известными в то время. В 1772 году Лагранж получил еще одну премию Парижской Академии наук за труд по задаче трех тел. База для подхода к вопросу устойчивости была готова. В 1774 году Лагранж за него взялся.

Работая над сложной задачей, Лагранж стремился полностью посвятить себя ей. Это было особенно сложно, т. к. повседневные события и обязанности, неизбежные в его положении, постоянно нарушали столь необходимое ему уединение. На одном из крупных приемов, кото-



Илл. 4.2. Жозеф Луи Лагранж. (Любезно предоставлено Готье-Виллар, Париж)

рый как-то раз давал Фредерик Великий. Жозеф Луи, как обычно, витал в облаках. Уже много недель его мысли были сосредоточены на задаче устойчивости, но ему никак не удавалось преодолеть некоторые технические сложности. В сияющих, залитых светом свечей, залах с ним здоровались и желали побеседовать многие люди, и, в силу своей природной вежливости, он никому не отказывал. Ему очень хотелось сосредоточиться на своих размышлениях, но, к сожалению, данное место для этого явно не подходило. Наконец, камергер объявил о начале концерта. Лагранж улыбнулся. Именно этого момента он и ждал.

Один из его друзей увидел, как на его лице появилось довольное выражение, и спросил: «Вы действительно *настолько* любите музыку?» Жозеф Луи не смог сдержать смеха. «Да, — ответил он. — Я люблю ее, потому что она дает мне возможность остаться одному. Я слышу три первых такта; с четвертым я забываю обо всем; я полностью отдаюсь своим мыслям, ничто мне не мешает, и именно так я решил не одну сложную задачу».

Тот вечер не стал для Лагранжа исключением. Он погрузился в тишину музыки, получив возможность исследовать внутренний мир своего разума и уединившись в своем частном процессе открытия. Он вспомнил нерешенные моменты задачи и стал погружаться в нее все глубже и глубже, постепенно приближаясь к ответу. К концу концерта он сделал важный шаг вперед. Лагранж с нетерпением ожидал возвращения домой, где он мог сделать несколько окончательных расчетов.

Между 1774 и 1776 годами Лагранж расширил результат, полученный Лапласом в отношении устойчивости, следующим образом. Он доказал, что *для приближений эксцентриситетов эллипсов (задающих орбиты планет) любого порядка, для приближений синуса угла взаимных наклонений любого порядка и для возмущений первого порядка по массам Солнечная система устойчива в смысле отсутствия вековых членов* Это утверждение отличается еще большей техничностью и сложностью, чем высказывания Лапласа, и мы даже не станем пытаться объяснить его полностью. Смысл его состоит в том, что приближения *любых* порядков к эксцентриситетам включались вместе с другими более точными оценками и что все делалось относительно приближения первого порядка, полученного при возмущении масс. В приближениях рядами Лагранж использовал *три* малых параметра: эксцентриситет, наклонения плоскостей орбит и отношение масс планет к массе гораздо большего Солнца.

Этот новый подход позволил обобщить результат Лапласа путем использования более точных приближений в более мелком масштабе, нежели тот, что использовал маркиз. Тем не менее, новый подход не решил задачу полностью: эти оценки обеспечили улучшенную, но не идеальную модель физической реальности. И все же это был замечательный результат, говоривший о том, что Солнечная система действительно может быть устойчивой.

Небесной механикой Лагранж продолжал интересоваться на протяжении всей жизни. Последнее достижение побудило его к изучению движения Луны и возмущений комет. Он написал ряд научных работ, за которые получил другие премии. Кроме того, он продолжал развивать в механике аналитические методы более общего характера и в 1788 году опубликовал свой шедевр «Аналитическая механика». Решение об этом предприятии он принял еще в девятнадцатилетнем возрасте. В этой книге он впервые вводит идею о том, что механика — это четырехмерная геометрия, в которой используются три пространственные координаты и одна временна́я. Эта оригинальная точка зрения известна всем с тех пор, как Эйнштейн положил ее в основу своей теории относительности. Помимо этого, Лагранж создал методы теории возмущений, которые Лаплас использовал для вычисления устойчивости, и сделал их общедоступными. Вообще-то свои идеи он описывал более ясно, чем это делают многие авторы современных учебников. Немецкий физик Эрнст Мах описал «Аналитическую механику» как «громадный вклад в экономию нашего мышления», а Уильям Роуан Гамильтон, с которым мы познакомимся в следующей главе, назвал ее «научной поэмой». Тем не менее, ввиду нашей общей темы, забавно узнать, что Лагранж гордился тем, что свел механику к чистому анализу и что его великая книга не содержала ни одной цифры.

Если говорить кратко, то метод теории возмущений работает следующим образом. Предположим, что у нас есть дифференциальное уравнение, которое можно решить полностью, получив явные формулы для решений как функций времени (см. главу 1), а мы хотим решить другое уравнение, «близкое» к данному в том смысле, что его векторное поле является немного измененным по сравнению с исходным. Естественно, мы ожидаем, что решения второго уравнения тоже будут близки к тем, которые мы уже нашли. Каждое такое решение будет содержать *параметры,* число которых будет равно размерности пространства состояний и которые будут определяться начальными условиями рассматриваемого частного решения. Для исходной задачи все они остаются постоянными; в сущности, они представляют подходящую суперпозицию фундаментальных решений, необходимую для соответствия данным начальным условиям.

Метод возмущений Лагранжа позволяет этим параметрам изменяться со временем, причем ключевым допущением служит то, что они делают это *медленно,* т. к. разница между новой задачей и исходной очень мала. (Таким образом, этот метод иногда парадоксально называется *вариацией постоянных*!) Он часто позволяет нам выразить решения в виде произведения быстрых колебаний и медленного дрейфа, и можно вывести уравнение для медленно изменяющихся членов, усредняя накопленные возмущения, созданные быстрыми колебаниями. Эти усредненные уравнения обычно проще исходных, поэтому их можно решить, а их решение — использовать для получения более точного приближения «истинного» поведения, чем то, что дает исходное невозмущенное решение. В контексте небесной механики быстрыми колебаниями могут быть годовые обращения планет вокруг Солнца и дрейф — прецессия (медленное вращение) эллиптической орбиты, которая осталась бы неподвижной во Вселенной двух тел.

Научный талант Лагранжа, как и Лапласа, очень ценил Наполеон Бонапарт. Император считал Жозефа Луи «величайшей пирамидой математических наук». Лагранжа назначили сенатором, графом Империи и, наконец, Великим офицером Почетного легиона. За его многочисленные достижения он получил полное признание не только в научных кругах, но и во всем обществе. К сожалению, в личной жизни он был счастлив не всегда. Его первая жена умерла в молодости, а жениться повторно Жозеф Луи не стремился. Два последующих десятилетия его жизни были отмечены продолжительными периодами депрессии, которые, возможно, были вызваны непрерывной работой. А затем произошло чудо. Юная дочь астронома Лемонье была так тронута несчастьем Лагранжа, что попросила его жениться на ней. Жозеф Луи, которому к тому времени исполнилось пятьдесят шесть лет, осознал всю серьезность такого шага и жертву, приносимую молодой женщиной, но, в конце концов, согласился. Вопреки всем ожиданиям их брак оказался потрясающе счастливым. Он преобразил оставшиеся двадцать лет жизни Лагранжа.

Несмотря на потрясение, вызванное чрезмерным террором, который последовал за Революцией, Лагранж активно пытался усовершенствовать университетское образование во Франции. В 1794 году он основал учебное заведение, впоследствии ставшее знаменитой Политехнической школой. Он также преподавал и в Нормальной школе, где ему ассистировал Лаплас.

Весной 1813 года Лагранж заболел. Понимая, что конец близок, он созвал своих ближайших друзей, чтобы попрощаться с ними. Он спокойно объяснил, как он наблюдал постепенное уменьшение своих физических и умственных сил и как чувствовал, что постепенно уходит без боли или сожалений. «Смерть — это единственный абсолютный покой для тела, — сказал он. — Я хочу умереть; да, я хочу умереть и чувствую удовольствие от этого, но моя жена этого не хочет. В такие моменты мне хочется, чтобы у меня была не такая хорошая жена, чтобы она прикладывала меньше усилий для возрождения моих сил, чтобы она позволила мне спокойно уйти из жизни. Я сделал карьеру, я кое-чем прославился в математике. Я никогда и ни к кому не испытывал ненависти, я не сделал ничего дурного, и я с радостью уйду из жизни...»

Два дня спустя, утром десятого апреля 1813 года, Жозеф Луи Лагранж навсегда закрыл глаза. Его оплакивали многочисленные друзья, Франция и научный мир. Тело его покоится в Пантеоне, рядом с телами других великих государственных деятелей и героев войны. Но вселенная его идей жива по сей день.

Вечное возвращение

Исследования устойчивости Солнечной системы не закончились со смертью Лагранжа. В 1809 году другой французский математик, Симеон Дени Пуассон, сделал еще один шаг вперед. Он доказал, что *главные оси планет не содержат чисто вековых членов в возмущениях второго порядка по массам*. Пуассон предложил немного более точное приближение, чем Лагранж, и в бóльшей степени подтвердил устойчивость, но и он не решил задачу до конца.

Симеон Дени Пуассон принадлежал к новому поколению французских математиков, которым суждено было возвестить о великих достижениях в анализе девятнадцатого века. Когда появился результат по устойчивости, ему было двадцать восемь лет, и он находился на грани того, чтобы стать лидером в теории дифференциальных уравнений. Подобно своим предшественникам, Лапласу и Лагранжу, его вкус к математическому исследованию сочетался с равным талантом к физике. Он сделал ряд вкладов в математическую физику, гидродинамику, электростатику, магнетизм, баллистику и теорию упругости. Знаменитое дифференциальное уравнение в частных производных, которое сегодня носит его имя, используется в изучении звездной динамики. Если поменять знак одной из постоянных этого уравнения, то получится модель, используемая в физике плазмы. (Этим наблюдением мы обязаны русскому математику А. К. Власову, который стал одним из учителей Колмогорова, как мы увидим в пятой главе.) Это же уравнение появляется в теории упругости и механике жидкости, что замечательным образом демонстрирует объединяющую силу математики.

Помимо этого, Пуассон предложил новое определение устойчивости, отличающееся от определения Лапласа и Лагранжа. Его предше-

Илл. 4.3. Симеон Дени Пуассон. (Любезно предоставлено архивами «Springer-Verlag», Берлин)

ственники требовали, чтобы главные оси эллипсов оставались в рамках некоторых пределов. Дени Пуассон так не считал. Он сказал, что движение системы частиц устойчиво, если ее конфигурация снова и снова возвращается в окрестность начального положения. Хотя в этом смысле устойчивыми являются и точки равновесия вроде тех, что изображены на рисунках 1.6 b и d, это определение гораздо более обширно и включает другие движения, устойчивость которых не столь очевидна. Определение устойчивости Пуассона стало отправной точкой для теоремы Пуанкаре о возвращении, о которой мы упоминали в конце второй главы.

Прежде чем оставить французскую математику и перевести наше повествование в Восточную Европу, опишем устойчивость в смысле Пуассона. Как мы упоминали в первой главе, первая часть последнего тома «Новых методов...» рассматривала именно такое движение.

Одним из главных результатов, которые описывает в этом разделе Пуанкаре, является его *теорема о возвращении.* Как мы видели в первой главе, она появилась еще в его научном труде, получившем премию и опубликованном в *Acta.* Для задачи трех тел эта теорема звучит следующим образом. Предположим, что в данный момент три гравитирующие частицы занимают некоторые начальные положения. Допустим, что столкновений не происходит и все движения остаются ограниченными. Тогда, после достаточного промежутка времени, частицы вернутся крайне близко к своим начальным положениям, если, вообще, не точно в них. Но поскольку однажды они вернулись в начальные положения, этот же аргумент мы можем использовать, чтобы заключить, что частицы должны возвращаться в положения, близкие к этим начальным, *бесконечно* часто. Пуанкаре показал, что это свойство справедливо для всех, кроме пренебрежимо малого множества начальных условий, т. е. за исключением множества с нулевой мерой Лебега.

Этот важный результат, использованный также в кинетической теории газов, впоследствии породил целую область математики, названную *эргодической теорией,* в которую очень важный вклад внес Джордж Дэвид Биркгоф. Как мы упоминали ранее, этому предмету Пуанкаре посвятил почти половину третьего тома своего труда. Несмотря на это, идею, которая стоит за доказательством теоремы о возвращении, достаточно легко понять, поэтому мы вкратце ее опишем.

Рассмотрим емкость, наполненную водой, как показано на рисунке 4.2, и предположим, что жидкость находится в непрерывном движении. Обозначим за V_0 объем воды в некоторый начальный момент времени t_0. В некоторый более поздний момент времени t_1 молекулы, которые ранее находились в V_0, перейдут в новую область, V_1. Но V_1 может иметь совсем другую форму, нежели V_0, однако, покуда вода — это несжимаемая жидкость, объемы двух этих областей должны быть равными. В последовательные моменты времени, $t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$, эти молекулы будут занимать другие положения, $V_2, V_3, \ldots, V_n, \ldots$. Мы утверждаем, что в некоторый (конечный) момент времени t_m соответствующий ему обьем V_m, который займут молекулы воды, должен частично совпасть или *пересечься* с начальной областью V_0. Если этого не произошло, то все обьемы $V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n, \ldots$ должны быть раздельными (на математическом языке, *разделенными*), вследствие чего полный объем, в котором движется наша капля жидкости, продолжил бы расширяться и, в конце концов, превысил бы объем емкости, в которой содержится. (Это доказательство от противного — широко распространенный в математике трюк.)

В вышеприведенном рассуждении мы вообще не использовали фактическую меру начального объема V_0, поэтому мы можем взять его сколь угодно большим или малым. Если объем V_0 очень мал, то факт наличия общих точек у V_m и V_0 означает, что некоторые молекулы должны вернуться близко к своим начальным положениям, хотя на это у них может уйти очень много времени. Именно этот вывод был сделан в теореме о возвращении. В нашем «доказательстве», чтобы представить фазовое пространство, мы использовали трехмерную емкость с водой, но данный аргумент можно точно также применить к n-мерному фазовому пространству любой динамической системы при условии, что n-мерный аналог объема *сохраняется* потоком дифференциальных уравнений или итераций отображения. Как мы отметили, объем фазового пространства, как правило, *сохраняется* для небесных и механических систем благодаря законам сохранения ньютоновой механики.

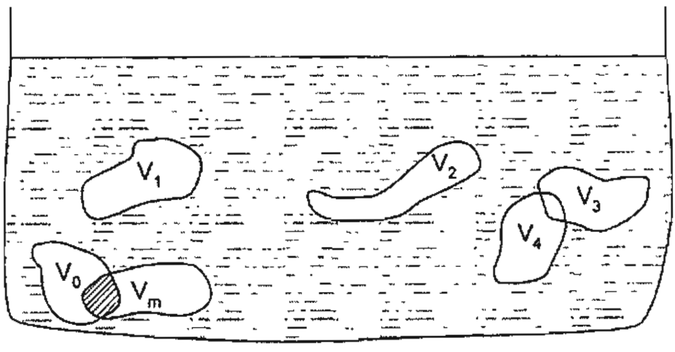


Рис. 4.2. Доказательство теоремы о возвращении

Интересно отметить, что в исправленном варианте своего научного труда, опубликованном в *Acta*, Пуанкаре использовал теорему о возвращении, чтобы вывести существование бесконечно многих гомоклинических орбит из одной. Сама же теория появилась в обоих вариантах его работы.

Теперь нужно сделать одно важное замечание. Мы предположили, что объем V_0 положителен. Если же он имеет нулевую меру Лебега, то наше рассуждение теряет смысл, т. к. объем, в котором движется капля нулевого размера, не растет. На самом деле, если идеализировать молекулы воды, рассматривая их как точки, то можно утверждать, что существуют некоторые точки, которые никогда не возвращаются в окрестность своего начального положения. Вследствие этого правильная формулировка теоремы о возвращении должна исключить множество начальных условий с нулевой мерой Лебега. Однако эта необходимость нисколько не умаляет ценности полученного результата, т. к. множество случаев, которые нужно исключить, имеет пренебрежимо малый размер.

В современной терминологии мы говорим, что свойство рекуррентности является *свойством общего положения*, подразумевая под этим, что ему удовлетворяют почти все решения. Это была еще одна новаторская точка зрения, которой мы обязаны Пуанкаре. До него все полагали, что всего *один* пример, противоречащий некоторому правилу, опровергает его. Пуанкаре с этим не согласился. Его не волновали даже *бесконечно многие* примеры, противоречащие какому-либо правилу, если их появление маловероятно. Кому до них есть дело, если их мера пренебрежимо мала по сравнению с огромным количеством всех возможностей и если все другие следуют этому правилу? Центральная задача теории динамических систем в наши дни состоит в нахождении таких общих свойств математических объектов и событий в фазовом пространстве.

Озарение Пуанкаре становится еще более замечательным, когда мы понимаем, что в то время понятия меры еще не было. Очевидно, что он интуитивно его почувствовал и смог использовать в «Новых методах. . .» Согласно Иммануилу Канту, понятие без интуиции пусто, а интуиция без понятия слепа. Если верить немецкому философу, то Пуанкаре делал свои открытия с закрытыми глазами. Но как же хорошо он видел!

Возмущая мир

Война продолжалась. После многовекового господства османов Румыния провозгласила свою независимость. То была тяжелая зима, но хорошие новости о сражениях на Балканском фронте, на юге Дуная, доходили даже до внутренних районов страны. Мало кто сомневался, что румынская армия близка к окончательной победе.

Утро тридцать первого января 1878 года поначалу казалось таким же, как все остальные. Люди в Бухаресте стояли в очередях за газетами, надеясь прочитать о новых успехах в этой борьбе за защиту их столь юной и хрупкой свободы. Но их ожидал большой сюрприз. Основная статья передовицы была не о войне. Заголовок сообщал о культурной победе: Спиру Аретю стал первым румынским математиком, получившим степень доктора математических наук в Париже. Накануне молодой человек успешно защитил докторскую диссертацию. В то время такие события были редки; число докторских степеней во всех областях было невелико, поэтому естественно, что степень, первая в своем роде, получила особое внимание и была сочтена причиной для гордости всей нации. Действительно, на следующий день газета *Românul* сравнила достижение Аретю с недавней победой румынской армии у Плевера.

На протяжении более тысячи лет три княжества, образующие современную Румынию, помогали защищать центральную и западную Европу от вторжений из Азии и Османской империи. Румынам приходилось беспрестанно бороться за право жить на своей собственной земле. Наконец, такое положение вещей подходило к концу.

Пока же Румыния обороняла одни из ворот на Восток, центральная и западная Европа переживала культурный и интеллектуальный расцвет. Первые учебные заведения, дающие высшее образование, возникли уже в одиннадцатом веке в Болонье и в двенадцатом веке в Париже и Оксфорде. А самые ранние румынские университеты были основаны только в девятнадцатом веке. Столкнувшись в борьбе за выживание с такими сложностями, румыны высоко ценили культуру и считали ее первым благом своей нации. (Старая румынская пословица гласит: «Ai carte, ai parte», что значит: «Будешь учиться — будешь лучше жить».) Именно отсюда произрастало чувство гордости и важности, связанное с первой докторской степенью по математике в стране.

В настоящее время докторскую степень по математике ежегодно получает более тысячи человек в Соединенных Штатах и Канаде и, вероятно, столько же в Европе, поэтому нам, возможно, трудно будет представить, каким образом достижение Аретю могло вызвать бурю радости у целого народа. Румыны были счастливы одному только событию. Кто знал тему диссертации? Обычным людям важен был сам факт, а не его содержание. Но некоторые, прочитавшие в тот день газеты, осознали также, что Аретю, помимо всего прочего, потряс мир науки. Он первым высказал и обосновал серьезные сомнения относительно устойчивости Солнечной системы.

В двадцатишестилетнем возрасте Спиру Аретю представил в Сорбонну диссертацию на тему «О неизменности главных осей орбит, описываемых планетами». Несмотря на сухое и ни о чем не говорящее название, эта замечательная работа на шаг обошла научный труд Пуассона. Аретю доказал, что *если взять приближение ряда третьей степени по массам, то в значениях главных осей планет появляются вековые члены*, тем самым сделав вывод, в точности противоположный заключениям

Лапласа, Лагранжа и Пуассона. Вычисления Аретю показали, что *главные оси орбит, описываемых планетами, не обязательно ограничены во времени.*

Как мы уже намекнули, это утверждение еще не говорит о неустойчивости, т. к. не ясно, насколько велико может быть изменение осей. Однако из этого высказывания было понятно, что орбиты планет могут с течением времени изменять свои формы и размеры.

Свой результат Аретю получил, рассмотрев еще более точное, чем у Пуассона, приближение. Естественно, что другие тоже пробовали сделать это, но столкнулись, как им показалось, с непреодолимыми техническими трудностями. До 1878 года успехов удалось добиться лишь Луивиллю и Пюисье в 1841 году, а также Тиссерану в 1876 году, который значительно упростил длинное доказательство Пуассона. Тиссеран воспользовался идеей Якоби из знаменитой статьи по исключению узлов, которая стала важным шагом к пониманию задачи трех тел.

Румынский математик также применил все эти хитрости с целью упрощения задачи. Говоря современным математическим языком, он осуществил *редукцию гамильтоновой системы с симметрией,* используя постоянные движения для снижения числа независимых уравнений, которые требовалось решить. Как мы предположили при обсуждении многообразий в первой главе, это позволило ему сократить размерность фазового пространства, в результате чего он смог «протолкнуть» вычисления к приближению третьего порядка. Об этой методике мы подробнее поговорим в пятой главе. На данном этапе Аретю обнаружил, что в формулах, описывающих главные оси планет, *появляются* вековые члены. Он добился успеха там, где все его предшественники потерпели неудачу.

Спиру Аретю немедленно предложили должность профессора в университете Гренобля. Однако он почувствовал, что больше нужен Румынии, и его патриотизм вкупе с гордостью, вызванной принадлежностью к вновь независимому народу-победителю, побудил его вернуться в Бухарест — «маленький Париж», как до Второй мировой войны этот прекрасный город называли в Европе. Он поступил на факультет Бухарестского университета, и его влияние сыграло важную роль в создании престижа этого учебного заведения. Он помог многим студентам начать карьеру и заложил фундамент сильной математической школы. Однако это был всего лишь один аспект его общественной жизни.

После возвращения на родину Аретю занялся политикой и добился почти таких же успехов, каких двумя десятилетиями спустя добился во Франции Пенлеве. Члена партии либералов, его в совсем молодом возрасте назначили министром образования. Этот пост он занимал несколько

Илл. 4.4. Спиру Аретю. (Коллекция Ф. Диаку)

раз, при разных правительствах, и основал в этой должности национальную систему начального образования. Он выступал за создание школы в каждой деревне, за доступность культуры для всех детей, за поиски и продвижение талантливых студентов и за убеждение политиков и инвесторов в том, что хорошая система образования является предпосылкой здоровой экономики. Аретю также произвел реформу средних и высших учебных заведений, приспособив французскую модель к румынской реальности. Благодаря своему влиянию и связям, он открыл дверь многим молодым ученым, которые впоследствии получили докторские степени в Париже. Пользуясь благоприятным политическим климатом между Румынией и Францией в конце века, Аретю сделал свой вклад в богатый культурный обмен между двумя этими народами.

Будучи министром, он снискал необычайную популярность, т. к. находил время, чтобы посетить школы в далеких деревнях, побеседовать с учителями и попытаться помочь как идеями, так и денежными средствами. Обычно он ездил один, без предварительного предупреждения, в обыкновенной одежде, не как официальное лицо, а как друг, пытаясь понять реальное положение дел в сельском образовании.

Это глубокое погружение в общественную жизнь не оставило Аретю ни времени, ни душевного спокойствия, которые были необходимы для повторения его ранних достижений в науке. Хотя он и продолжал заниматься математикой, его результаты уже не были столь впечатляющими. Тем не менее, в 1910 году он опубликовал интересную и оригинальную книгу под названием *Mécanique sociale*[1]. Эта работа была попыткой объединить его математические знания с огромным опытом социальных вопросов путем применения методов, используемых в механике, к математическим моделям общества. С этой точки зрения его можно считать пионером в области социологии.

На некоторое время о математической работе Аретю почти забыли. Когда дело касалось вопроса устойчивости, его подробные вычисления возмущений проводились в последнюю очередь. Его неокончательный результат говорил о том, что приближения степенных рядов не дают *определенных ответов, и, как мы видели*, вскоре после этого Пуанкаре развил качественный подход. Тем не менее, в первом томе *Leçons sur la mécanique céleste*[2] Пуанкаре отдал должное вкладу Аретю. Более того, благодаря связи с *проблемой малых знаменателей,* теорема Аретю может считаться составляющей фундамента, на котором зиждется величественное здание КАМ-теории, описанное в пятой главе. В 1958 году Жан Меффрой, профессор механики в Монпелье, пересмотрел идеи Аретю и с помощью более новых методов не только установил существование вековых возмущений третьего порядка, но и нашел их аналитические выражения.

Спиру Аретю скончался в возрасте шестидесяти одного года, в тот же год, что и Анри Пуанкаре, оставив после себя хорошую систему образования — модель, которой могут гордиться все остальные румынские интеллектуалы. В знак уважения к тем вкладам, которые он сделал в небесную механику, Международный астрономический союз (IAU) назвал его именем лунный кратер. В центре Бухареста, на Университетской площади, стоит памятник человеку со свитком в руках. Этот памятник

[1] «Социальная механика» (фр.).

[2] «Лекции по небесной механике» (фр.).

сохранился, несмотря на бомбардировки города во время двух мировых войн и сражения двух революций. На пьедестале начертано имя: *Спиру Аретю.*

Насколько устойчивое устойчиво?

Статус задачи об устойчивости Солнечной системы в конце девятнадцатого века Пуанкаре обобщил в статье, опубликованной в 1898 году. Несмотря на ряд исторических неточностей, эта статья является полезным обзором для неспециалистов. «Люди, интересующиеся положением дел в небесной механике, но способные следить за ним лишь издали, — пишет Пуанкаре, —

> должны испытывать некоторое удивление, видя, сколько раз была доказана устойчивость Солнечной системы. Первым данный факт установил Лагранж, вновь устойчивость продемонстрировал Пуассон, с тех пор мы видели еще несколько доказательств, да и они не последние. Были ли старые доказательства недостаточны, или это новые избыточны? Удивление этих людей, безусловно, только удвоится, если однажды им скажут, что математик с помощью строгого доказательства может показать неустойчивость Солнечной системы. Это действительно могло бы произойти; и в этом не было бы противоречивости, да и старые доказательства не утратили бы своей ценности. Дело в том, что они, фактически, являются последовательными приближениями и потому не претендуют на строгое заключение элементов орбит в узкие рамки, за которые те никогда не смогут выйти».

После этой тщательно проведенной оценки Пуанкаре не стал обманывать ни научный мир, ни себя чрезмерным упором на важность применения математики на практике. Он хорошо знал, что вся эта работа была обращена исключительно к идеализированной *математической модели,* предложенной Ньютоном. А вот дать ответ на вопрос о том, насколько хорошо эта модель представляет реальность, — было куда сложнее. В 1891 году в другой популярной статье по задаче трех тел Пуанкаре написал: «Один из вопросов, которым больше всего занимались исследователи, связан с устойчивостью Солнечной системы. Это, честно говоря, вопрос скорее математический, нежели физический. Даже если бы кто-то сумел найти общее и строгое доказательство, он все равно не смог бы заключить, что Солнечная система вечна. На самом деле, она может находиться под управлением сил, отличных от ньютоновых». В этом, как и во многом другом, его слова оказались пророческими: всего около четверти века спустя Эйнштейн предложил общую теорию относительности.

Качественный век

Статья Аретю увидела свет почти в конце одной из эпох в математике. Заканчивалось двухвековое господство *количественных методов.* Работа Брунса по первым интегралам задачи *n-тел* стала предвестником конца. Несколько лет спустя научный труд Пуанкаре, награжденный премией, стал началом века *качественных подходов.* Он начался с дифференциальных уравнений, где со временем привел к возникновению *геометрической теории динамических систем,* но очень скоро стал входить и в другие области математики. Казалось, что старые методы и идеи достигли своего предела в различных областях науки. Их центральная роль в прогрессе и развитии перестала быть центральной. Новые идеи появились как раз вовремя.

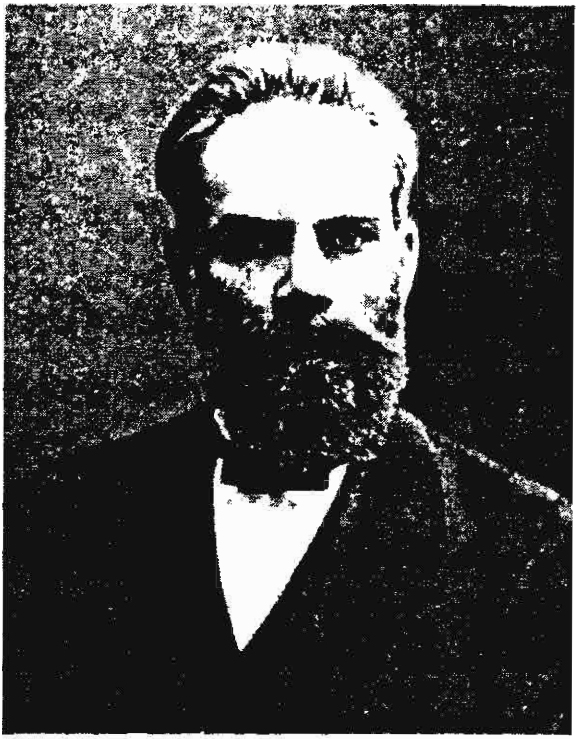
До последнего десятилетия девятнадцатого века цель заключалась в получении точных результатов, нахождении формул, которые дали бы точные численные предсказания, интегрировании уравнений и получении полных решений. Математики вроде Леопольда Кронекера полагали, что Бог сотворил мир, используя целые числа, и, следовательно, к целым числам можно свести все. В некоторой степени это было продолжением идеи, которой придерживалась греческая философская школа Пифагора, стремившегося объяснить все через правильные многоугольники: пять идеальных твердых тел. Действительно, как только у нас появляется язык, набор инструментов, у нас появляется и соблазн попытаться подстроить мир под наш метод. Однако природа не так проста, как ее пытаются представить подобные системы, и динамика здесь не является исключением. Множество задач, которые можно «полностью» решить, до унылого мало. Физические явления в большинстве своем нелинейны, а некоторые даже хаотичны. Теперь мы понимаем, что за исключением пренебрежимого малого класса, большинство дифференциальных уравнений не имеет явного решения. Но, следуя за Пуанкаре, математики осознали, что они по-прежнему могут исследовать свойства решений, *даже если и не могут найти сами точные решения.* В этом и заключается суть качественных методов.

Типичным примером является устойчивость. Если мы не можем найти решение дифференциального уравнения в виде явной формулы или хотя бы оценить разумное приближение к ней, то мы все равно можем попытаться определить, устойчивы ли некоторые виды орбит, о которых мы знаем лишь то, что они существуют, но не можем точно описать их. На подобные вопросы часто *можно* получить ответ, и цель качественной теории динамических систем заключается в том, чтобы найти методы и результаты, способные помочь в решении таких задач.

Несмотря на двести лет попыток решить вопрос об устойчивости Солнечной системы, первая попытка создания воистину общей математической теории устойчивости была предпринята лишь в конце девятнадцатого века русским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым. Может показаться странным, что люди пытались решить научную задачу, не имея необходимых инструментов и даже единого определения того, что нужно сделать, но открытие в науке, да и в других сферах жизни, зачастую происходит в отсутствие организации. Хотя в наших учебниках об этом не пишут, строгие математические утверждения обычно формулируются лишь после многочисленных неудач и частных успехов в определении и решении особых случаев. Итак, общее определение устойчивости решения обычного дифференциального уравнения появилось только в докторской диссертации Ляпунова, представленной к защите в Харькове в 1892 году и опубликованной год спустя. В 1907 году увидел свет французский перевод этой огромной работы, а ее идеи уже давно использовались повсеместно, но на английском языке диссертация вышла только в 1992 году, в *International Journal of Control*.

Склонность к математике обычно проявляется в раннем возрасте, и, в большинстве своем, работающие математики получают докторские степени, самое позднее, к двадцати пяти–тридцати годам. Ляпунов был исключением. Он написал свою диссертацию к тридцати пяти годам. Но сразу после ее публикации его признали одним из ведущих математиков своего времени.

Александр Михайлович Ляпунов родился 26 мая 1857 года в Ярославле. В 1880 году он закончил Санкт-Петербургский университет, где учился у Пафнутия Чебышева (в честь которого названо множество функций — многочлены Чебышева, — которые в наши дни широко используются в компьютерном моделировании потоков жидкости). После получения докторской степени Ляпунова сразу же назначили профессором Харьковского университета (на Украине), а через десять лет он был избран членом Санкт-Петербургской Академии наук. Он не часто



Илл. 4.5. Александр Михайлович Ляпунов. (Любезно предоставлено издательством «Наука», Москва)

публиковал свои работы, но все его результаты ложились в основу новых направлений. Ляпунов любил уединение, поэтому став академиком и освободившись от преподавательских обязанностей, он почти все свое время посвятил исследованиям. Его редкие появления на публике, помимо университета, приходились на концерты, которые давал его брат Сергей, композитор и собиратель народных песен, который в течение некоторого времени дирижировал Санкт-Петербургским императорским хором. Смерть Ляпунова была сколь неожиданна, столь и трагична. В 1918 году от туберкулеза скончалась его жена. Он не смог вынести боль от ее утраты и застрелился в тот же день. Все попытки его спасти ни к чему не привели. Три дня спустя он умер.

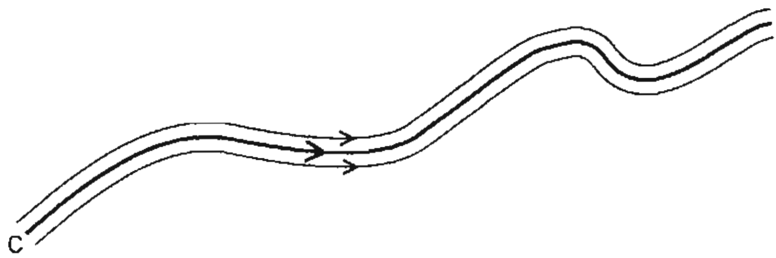


Рис. 4.3. Устойчивость орбиты C в смысле Ляпунова

Докторская диссертация Ляпунова служит отправной точкой для современной теории устойчивости. Этому фундаментальному понятию он дал простое и строгое определение. Рассмотрим дифференциальное уравнение и частное решение в фазовом пространстве типа того, что изображено на рисунке 4.3 кривой C. Мы говорим, что это решение *устойчиво*, если все прочие решения этого уравнения, начинающиеся вблизи C, постоянно остаются вблизи нее. Другими словами, в фазовом пространстве существует (узкая) полоса, содержащая кривую C, такая, что *каждая* кривая решения, имеющая точку в пределах этой полосы, навсегда останется в пределах этой полосы. Это утверждение значительно обобщает понятие устойчивости неподвижной точки или положения равновесия, введенное в первой главе, т. к. определение Ляпунова применимо к *любому* решению: устойчивому, периодическому или более экзотическому.

Это определение может показаться аналогичным определению непрерывной зависимости потока от начальных условий. Но между ними есть очень важное отличие. Свойство непрерывной зависимости требует только, чтобы решения оставались близкими друг к другу *на протяжении некоторого времени*. Чем ближе друг к другу начнутся два решения, тем дольше они останутся вместе, но это, как правило, справедливо только для конечного промежутка времени. Устойчивость требует, чтобы *все решения, близкие к устойчивой орбите в некоторый момент времени, оставались вблизи нее вечно*. Эта устойчивость гораздо строже устойчивости Пуассона, которая требует только случайных возвращений и не исключает хаотическое поведение в промежутках между ними.

Сказать, что решение *неустойчиво* в смысле Ляпунова, значит заявить, что полосы, описанной выше, не существует. Независимо от того, насколько близко к кривой C мы начнем другую орбиту, она покинет другую окрестность (т. е. любую полосу) C по истечении конечного промежутка времени. На рисунке 4.4 приведен пример, в котором сразу несколько орбит покидают полосу. Однако, чтобы сделать вывод о неустойчивости, достаточно найти *одну* такую орбиту.

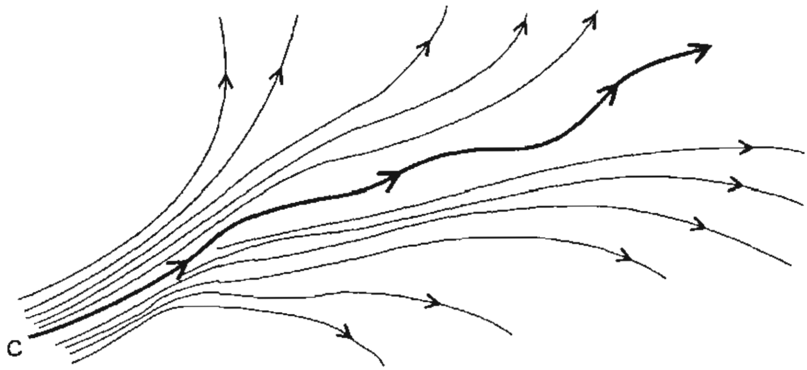


Рис. 4.4. Неустойчивость орбиты C в смысле Ляпунова

Устойчивость — свойство, которым решения дифференциальных уравнений обладают редко, и даже в случае наличия такого свойства его существование обычно трудно доказать. Устойчивость в смысле Ляпунова, в некоторой степени, тоже является «хорошим» свойством, т. к. говорит о ясности физического явления, описываемого соответствующим решением.

Устойчивость решения, соответствующего неравновесному решению x, обычно изучается путем рассмотрения уравнения, отличного от нужного нам, фактическим решением которого является x. Это может показаться странным, и все же на самом деле это совершенно естественно. Вычитая $x(t)$ из величины, определенной в исходном уравнении, мы получаем второе дифференциальное уравнение, для которого изменяющееся во времени x стало положением равновесия. Гораздо проще рассматривать то, что происходит в окрестности равновесия, нежели то, что происходит вблизи возможно сложного, зависящего от времени решения. Этот простой прием показывает, что изучение устойчивости *произвольного* решения данного дифференциального уравнения можно свести к изучению устойчивости *равновесия* родственного дифференциального уравнения. Таким образом, наша задача сводится к созданию теории устойчивости для равновесных положений.

Эта хитрость, которая работает потому, что мы сосредоточились всего на одном решении, значительно упрощает нашу задачу. Чтобы увидеть это, рассмотрим определение устойчивости Ляпунова в этом новом контексте. Решения, которые начинаются вблизи точки равновесия E, должны будут оставаться вблизи нее на протяжении всего будущего времени, как изображено на рисунке 4.5: в новом уравнении полоса, включающая орбиту C, превратилась в небольшой диск или шар, окружающий E. Далее, эти возмущенные решения в общем случае не являются положениями равновесия, поэтому они склонны блуждать вокруг E, хотя всегда остаются вблизи нее. В некоторых случаях с течением времени они могут приблизиться к положению равновесия. Когда это происходит, мы говорим об *асимптотической устойчивости*. Асимптотическая устойчивость предполагает устойчивость в смысле Ляпунова, но не наоборот. Обратите внимание на рисунки 1.6 *d* и 4.5 *a*, где орбиты постоянно циркулируют поблизости, но не приближаются к неподвижной точке.

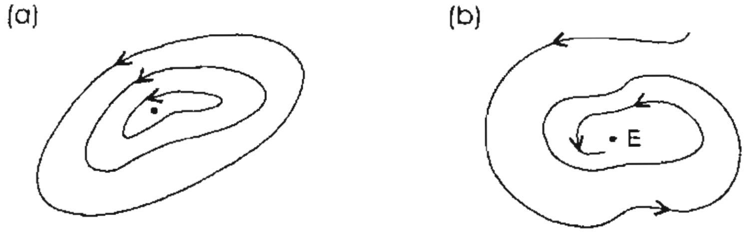


Рис. 4.5. a) Устойчивость в смысле Ляпунова, b) асимптотическая устойчивость для решения, соответствующего положению равновесия

Условие устойчивости (вечного пребывания в малой окрестности равновесия) в определении асимптотической устойчивости совершенно необходимо. На рисунке 4.6 приведен пример равновесия E, которое является *неустойчивым*, хотя, в конечном счете, к нему приближается каждое решение. Рассматривая небольшую окрестность E, мы видим, что *некоторые* решения ее покидают; несмотря на то, что впоследствии они возвращаются, они не остаются вблизи равновесия постоянно, как того требует определение устойчивости Ляпунова. В этом случае E не является асимптотически устойчивой, т. к. она вообще не является устойчивой. Это свидетельствует о том, что наше определение имеет здравый физический смысл: если рассматриваемой величиной является, например, температура химической реакции, то нас вряд ли утешит знание

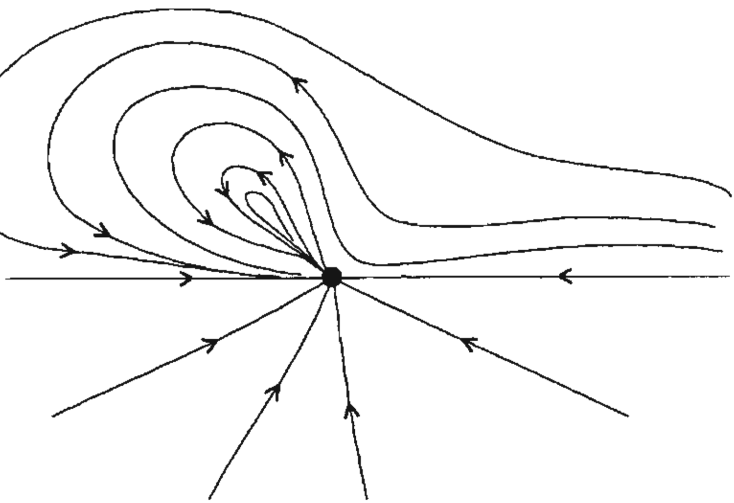


Рис. 4.6. Пример неустойчивого равновесия, к которому стремятся все решения

того, что, в конце концов, она понизится, если перед этим она превысит точку плавления материала, из которого изготовлена емкость.

Линеаризация и ее пределы

Вполне естественно начинать изучение устойчивости с положений равновесия простейших видов дифференциальных уравнений: линейных. Это уравнения, определенные линейными функциями. Линейность — это замечательное и до опасного соблазнительное свойство математической модели: замечательное, потому что оно хорошо понятно и с ним легко работать, а соблазнительное, потому что убеждает нас моделировать любые процессы как линейные, так чтобы мы с легкостью решали результирующие уравнения.

Как мы уже описали во второй главе, отображение или функция — это правило, сопоставляющее каждому «вводу» уникальный «вывод». Если вводится вещественное число, то правило может звучать как *умножение на* 6 (т. е. x превращается в $6x$), *деление на* 4 (x превращается в $x/4$) или *получение обратной величины* (x переходит в $1/x$). Грубо говоря, функция является *линейной*, если при удвоении входящего параметра удваивается и выходящий. Таким образом, первые два примера, приведенные выше, линейны, а последний — нет. Если линейная функция имеет постоянные коэффициенты (они не изменяются со временем), то соответствующее дифференциальное уравнение можно решить полностью, а явные формулы решений можно представить в виде понятных функций.

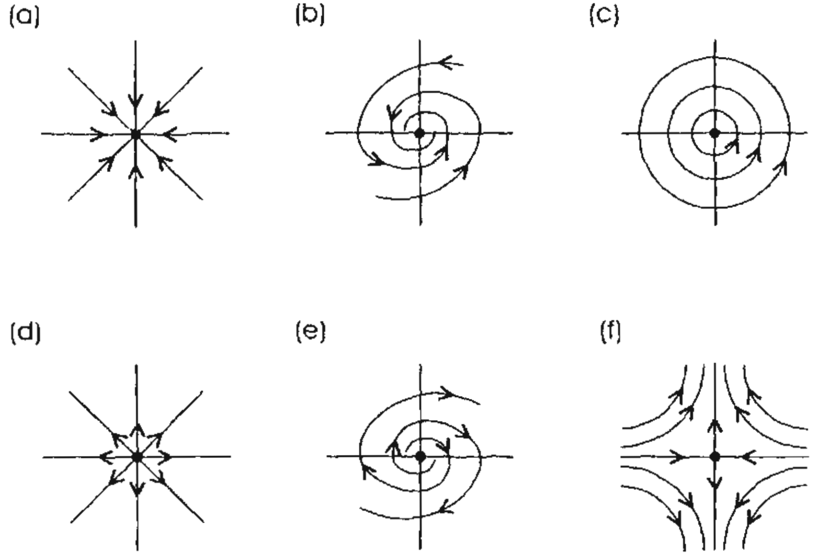


Рис. 4.7. Все случаи поведения вблизи точки равновесия двумерной линейной системы: (a) и (b) асимптотически устойчивые случаи; (c) нейтрально устойчивый случай; (d), (e) и (f) неустойчивые случаи

Для точек равновесия (двумерных) линейных систем мы располагаем тремя основными возможностями:

1. *Асимптотическая устойчивость*, когда все орбиты в окрестности точки равновесия притягиваются к ней (см. рис. 4.7 *a* и *b*).
2. *Устойчивость*, иногда в целях отличия от (1) называемая нейтральной устойчивостью, когда положение равновесия окружают периодические орбиты (см. рис. 4.7 *c*).
3. *Неустойчивость*, когда, по меньшей мере, одна орбита покидает равновесие (см. рис. 4.7 *d*, *e* и *f*).

За исключением множества с нулевой мерой, все двумерные линейные системы принадлежат к одному из этих типов.

Это фундаментальный результат в теории дифференциальных уравнений, но его без труда можно было бы отнести к слишком специальным, чтобы серьезно к нему относиться, утверждая, что большинство физических явлений описываются *нелинейными* уравнениями, вследствие чего линейный случай не столь значителен. Это было бы ошибкой. В конце шестидесятых–начале семидесятых русский математик Д. М. Гробман и американец Филип Хартман независимо друг от друга доказали, что, за исключением случая (2) нейтральной устойчивости, вблизи любого из своих равновесий нелинейная система качественно ведет себя точно также, как *ее соответствующая линеаризация*. Что это значит? Очень скоро мы дадим геометрическое объяснение, но сначала нужно показать, что подразумевает понятие линеаризации нелинейной функции, отображения или дифференциального уравнения.

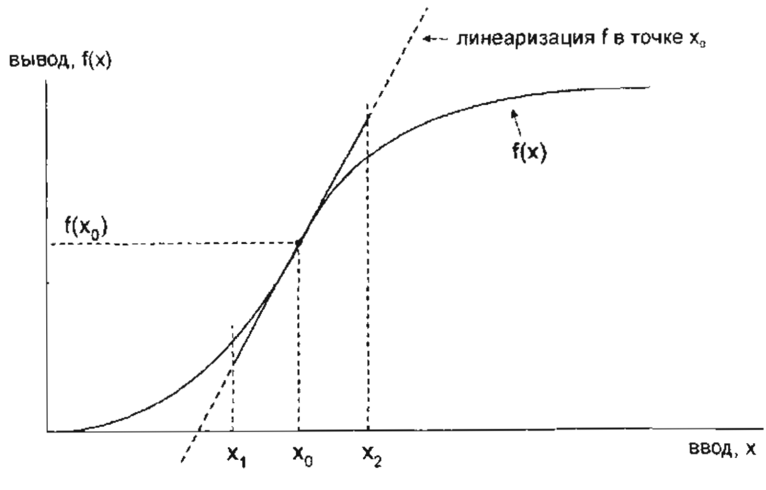


Рис. 4.8. Нелинейная функция и ее линеаризация в точке

Для этого рассмотрим функцию одной переменной, чтобы можно было нарисовать график для ее представления, как на рисунке 4.8. Здесь «вводом» служит вещественное число на горизонтальной оси, а «выводом» — соответствующее число на вертикальной оси: график является геометрическим эквивалентом таблицы вроде тех, которые используют служащие для вычисления налогов с продаж, которые нужно прибавить к стоимости товара. Налог с продаж (в отличие от налога на прибыль) – это линейная функция: если стоимость товара повышается в два раза, в два раза увеличивается и налог с продаж. На рисунке 4.8 мы, напротив, изобразили нелинейную функцию, которая могла бы представлять показания электронного усилителя. На уровнях небольших входных параметров коэффициент усиления мал; он растет в диапазоне средних значений, достигает точки насыщения и приближается к предельному значению. Соответствующая такой функции кривая поднимается медленно, затем быстрее и, наконец, становится почти горизонтальной. И это лишь один из примеров: нелинейные функции могут принимать почти *любой* вид при условии, что для каждого входного параметра имеется только одно выходное значение (график не должен «раздваиваться»). Линейная функция была бы представлена просто прямой линией. Следовательно, с помощью линейных функций и дифференциальных уравнений мы способны описать лишь очень ограниченный мир, поэтому для изучения многих природных явлений нам необходимы нелинейные модели и методы.

Однако предположим, что нас интересует поведение функции лишь в ограниченном диапазоне входных значений вблизи некоторой нужной нам точки x_0, которая, возможно, представляет условие, при соблюдении которого должен работать рассматриваемый прибор. Тогда, если график не делает поворота или не совершает резких колебаний, мы можем аппроксимировать его в виде короткого отрезка прямой линии, *касающейся* его в точке x_0. Эту *линеаризацию* f мы также изобразили на рисунке 4.8. Если входные значения достаточно близки к x_0, оставаясь, скажем, между x_1 и x_2, то линеаризованная функция служит достаточно хорошим приближением к «истинной» нелинейной функции.

Этой тактикой можно воспользоваться при изучении нелинейных дифференциальных уравнений вблизи точек равновесия. Функции, определяющие векторное поле, линеаризуются в точке равновесия, в результате чего получаются линейные уравнения, которые можно классифицировать, как на рисунке 4.7. Хартман и Гробман показали, что для полной нелинейной системы структуры, изображенные на рисунках 4.7 *a*, *b*, *d*, *e* и *f*, не изменяются *вблизи положения равновесия*. Такими же остаются и интересующие нас качественные характеристики. Орбиты могут изогнуться иначе, но сохраняют свойство приближения к равновесию в случае (1) (рис. 4.7 *a* и *b*) или наличия, по меньшей мере, одной орбиты, покидающей положение равновесия, в случае (3) (рис. 4.7 *d*, *e* и *f*).

Хотя саму эту идею в качестве систематического подхода к получению качественной информации из нелинейной системы предложил еще Пуанкаре, строгое ее доказательство смогли дать только Гробман и Хартман. Вообще-то, она выглядит довольно естественной, т. к. вблизи точки равновесия разница между линейной и нелинейной системами мала, как и разница между прямой линией и кривой графика на рисунке 4.8. Вряд ли можно ожидать, что небольшое изменение поставит с ног на голову четкие структуры, изображенные на рисунках 4.7 *a*, *b*, *d*, *e* или *f*. Безусловно, в случаях неустойчивости, например, *d*, *e* и *f*, как только решение покинуло окрестность точки равновесия, линеаризованные уравнения становятся бесполезными, и мы должны вернуться к полностью нелинейной системе. Линеаризация служит лишь хорошим *локальным* приближением.

Однако совершенно иначе обстоят дела со случаем (2). В этом случае даже при малейшем возмущении дифференциального уравнения орбиты могут не замкнуться, и структура рисунка 4.7 *c* может превратиться в любую из форм, изображенных на рисунках 4.7 *b* или *e*. Орбиты, которые ранее циркулировали без увеличения или уменьшения, должны продолжать циркулировать, но теперь они могут постепенно двигаться по спирали внутрь или наружу. В зависимости от того, в какую сторону наше возмущение подтолкнет задачу, может произойти одно из двух: устойчивость превратится в асимптотическую устойчивость или в неустойчивость. В таком случае мы говорим, что линеаризация не определяет поведение нелинейного уравнения, и на самом деле не существует надежного алгоритма определения того, что происходит в такой щекотливой ситуации.

Ляпунов действительно предложил метод определения устойчивости или неустойчивости, но он заключается в нахождении функции с определенными свойствами, которые надежно сцепляются со свойствами дифференциального уравнения. Данная функция определяет, во входящем или выходящем направлении поток пересекает небольшую сферу, окружающую положение равновесия. В первом случае мы получаем устойчивость, во втором — неустойчивость. К сожалению, эту геометрически простую идею сложно реализовать: простого рецепта для нахождения *функций Ляпунова* не существует, поэтому данный метод иногда оказывается сложнее доказательства устойчивости или неустойчивости другими способами. Тем не менее, в настоящее время никаких других способов, столь же общих, сколь метод Ляпунова, нам не известно.

Другим важным результатом работы Александра Михайловича было определение для функций (и, в частности, для решений дифференциальных уравнений) некоторых *характеристических чисел*, которые сейчас называют *показателями Ляпунова.* Они определяют скорость роста или затухания решений линеаризованного уравнения *в различных направлениях* в фазовом пространстве, обобщая характеристические показатели периодических решений, которые Пуанкаре ввел в своем научном труде, получившем премию. Они представляют большой интерес для современного исследователя не только потому, что определяют устойчивость отдельных решений (когда их можно вычислить), но и потому, что положительные показатели, обозначающие рост, также свидетельствуют о присутствии хаоса.

Диссертация Ляпунова открыла новую область. Задачу устойчивости отделили от конкретного изучения Солнечной системы и сделали частью теории дифференциальных уравнений, совершенно независимой от ее происхождения. Преимущество нового метода заключалось в том, что его можно было применить ко *всем* дифференциальным уравнениям. Таким образом, он обращался к широчайшему диапазону вопросов из многих областей науки. Два решения, соответствующие положениям равновесия маятника, которые мы обсудили в первой главе (см. рис. 1.7), теперь были строго определены как, соответственно, устойчивое и неустойчивое. Помимо этого был дан ответ на многие другие более сложные вопросы, а *теория устойчивости* превратилась в самостоятельную субдисциплину.

За век, прошедший с момента публикации докторской диссертации Ляпунова, его оригинальные идеи были значительно распространены и привели к созданию новых концепций и методов. Сегодня они находят применение не только в механике и физике, но и в химии, теоретической биологии и практически во всех областях прикладной науки и техники. Оригинальный вопрос об устойчивости Солнечной системы превратился в богатую междисциплинарную науку, ответвления которой достигли самых неожиданных уголков знания. Он также создал почву, в которой выросли корни *хаоса.*

Устойчивость моделей

Понятие устойчивости по Ляпунову относится к одной орбите и пучку решений, расположенных в непосредственной близости от нее. Все они являются решениями данного, неизменного дифференциального уравнения; отличаются только их начальные условия. Чтобы понять, обладает ли поток дифференциального уравнения в целом свойством устойчивости к внешним возмущениям функций, его определяющих, была необходима новая идея. Она возникла в 1930-х годах в работе двух других русских математиков, А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина. Она называется *структурной устойчивостью* и является частью *теории бифуркаций,* которая своими корнями тоже уходит в изучение Пуанкаре ограниченной задачи трех тел. В некоторых переводах русской литературы структурно устойчивые системы называются «coarse» или «rough»[3] (*grossires*), а взаимно дополняющие, структурно неустойчивые или бифуркационные системы — «fine»[4].

Для понимания таких концепций *структурной устойчивости* и *бифуркации* мы вновь обратимся к метафоре потока на поверхности реки. На этот раз вообразим, что поток зависит от внешнего *параметра* — некоторой величины, которая выражает изменение, происходящее извне самой системы. Можно, например, представить водопад в отдаленных горах, где берет начало наша река, или ветер, который дует перпендикулярно течению, оказывая влияние на его ход. Ради простоты возьмем в качестве единственного внешнего параметра скорость ветра. Грубо говоря, поток называют *структурно устойчивым,* если его структура остается качественно неизменной независимо от небольших изменений в скорости ветра. Если же структура меняется, то значения скорости ветра, при которых происходят эти изменения, называют *бифуркационными значениями.* Рассмотрим два примера.

На рисунке 4.9 *a* поток (скажем, в отсутствие ветра) образован параллельными линиями. Когда появляется ветер, линии становятся слегка изогнутыми, но качественная структура рисунка не меняется (рис. 4.9 *b*). Под этим мы подразумеваем, что не появляется никаких новых качественных характеристик, например, водоворота. Если такая ситуация продолжается для *любого* малого изменения параметра, то мы говорим, что поток *структурно устойчив* при начальном значении этого параметра — в нашем случае нулевой скорости ветра.

Теперь мы можем представить любые возможные картинки в фазовом пространстве. Например, предположим, что для отрицательных значений параметра поток содержит точку устойчивого равновесия, к которой все соседние орбиты сходятся спирально, как на рисунке 4.10 *a*. Для положительных значений соседние траектории удаляются по спирали от точки равновесия к (небольшой) замкнутой кривой, окружающей теперь неустойчивое равновесие, как на рис. 4.10 *b*. Однако далекие орбиты по-прежнему закручиваются внутрь. В целом, картинка почти не изме-

[3] «Грубые», «крупные» (англ.). Термины «грубость» и «грубые системы» до сих пор используются в российской математике, в основном «горьковской школой». — *Прим. ред*

[4] «Тонкие» (англ.).

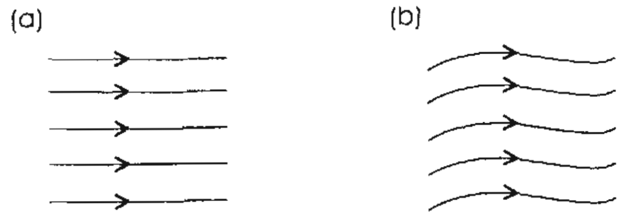


Рис. 4.9. Структурно устойчивый поток (a) до и (b) после возмущения. Качественного изменения поведения не происходит

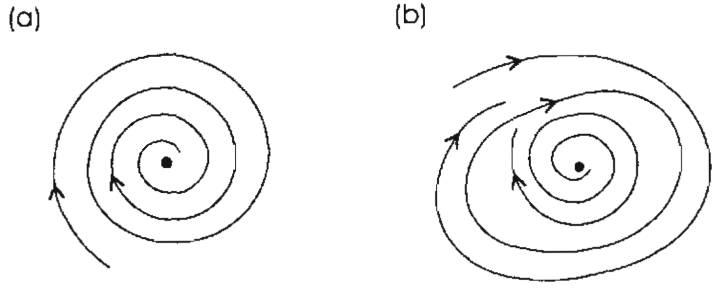


Рис. 4.10. Бифуркация Хопфа, демонстрирующая фазовые портреты (a) до и (b) после рождения предельного цикла

нилась; произошло *местное* изменение. Граничный случай, или *точка бифуркации*, разделяющая два портрета, является *структурно неустойчивой*.

Качественное изменение, которое произошло, понятно: в случае (a) рисунка 4.10 колебания затухают с течением времени; в случае (b) они выходят на малую периодическую орбиту. В точке бифуркации, соответствующей нулевому значению параметра, равновесие вырождается: его линеаризация напоминает рисунок 4.7*c*, но нелинейные члены обуславливают слабо устойчивое движение по спирали. По мере изменения параметра размер периодической орбиты увеличивается. Эта частная бифуркация носит имя немецкого математика Эберхарла Хопфа. Вообще-то она входит в теорию, разработанную сначала Пуанкаре, а позднее Андроновым и его соратниками для двумерных систем. В 1942 году Хопф распространил эту теорию на дифференциальные уравнения с произвольно большим числом измерений. Бифуркации Хопфа происходят в моделях многих разновидностей систем. Двумя абсолютно разными примерами таких бифуркаций служат самопроизвольные колебания в электронных и акустических контурах, приводящие к неприятным шумам обратной связи в аудиоусилителях, а также «вибрация переднего колеса» в шасси самолета.

Причины важности понятия структурной устойчивости имеют практический характер. Структурно устойчивые потоки отличаются силой; поэтому небольшие изменения внешних параметров не окажут на них надлежащего воздействия. Если некоторое явление описывается с помощью структурно устойчивого потока, значит, его поведение отличается упругостью и сопротивлением к изменениям окружающей среды. Перед лицом перемены все множество решений гибко приспосабливается к ней, демонстрируя только небольшие модификации, которые не изменяют его основного характера.

Структурно устойчивые потоки придают определенную силу математическим моделям, в которых происходят. Измерения никогда не бывают абсолютно точными, поэтому всегда нужно помнить об ошибке измерения. Если бифуркация происходит при каком-то значении, измеренном нами, мы не можем сказать, какому типу поведения соответствует данная физическая ситуация. Если поток структурно устойчив, то мы можем гарантировать качественную точность в окрестности измеренных данных.

Теория катастроф, достаточно молодая область математики, вызвавшая множество споров и чрезмерную активность журналистов в первые годы своего существования, приспособила понятие структурной устойчивости к своим собственным целям. В этом случае нас также интересует, каким образом качественные свойства функций зависят от внешних параметров.

Структурная устойчивость и бифуркация остаются центральными моментами теории динамических систем и имеют важные следствия, выходящие за пределы математики. Они уже нашли применение в исследовании сердца, в эмбриологии, лингвистике, оптике, психологии, гидродинамике, экономике, физике элементарных частиц, геологии и многих других областях.

Планеты в равновесии

С вопросами устойчивости в небесной механике связано важное понятие *центральной конфигурации.* В 1767 году шестидесятилетний Леонард Эйлер опубликовал исследование задачи трех тел. В своей работе он в явном виде получил целый класс периодических решений. Он доказал, что если три частицы произвольных (конечных) масс изначально расположить на одной линии, как показано на рисунке 4.11, так что отношение AB/BC будет иметь некоторое значение, заданное сложной формулой, зависящей от масс, и если частицам задать подходящие начальные скорости, то они будут двигаться периодическим образом по эллипсам, постоянно сохраняя коллинеарную конфигурацию. Более того, отношение AB/BC расстояний, измеренных вдоль вращающейся линии AC, останется неизменным на протяжении всего движения. Это достаточно поразительно, поскольку, как мы уже отметили, добавление третьего тела в задачу двух тел обычно возмущает кеплеровы эллиптические орбиты и даже может вызвать хаос.

В 1772 году Лагранж переоткрыл эйлеровы решения задачи трех тел и нашел второй важный класс орбит. Он показал, что если в начальный момент времени три частицы расположены в вершинах равностороннего треугольника и если, опять-таки, взять подходящие начальные скорости, то материальные точки будут периодическим образом двигаться по эллипсам, как на рисунке 4.12, всегда сохраняя свою равностороннюю конфигурацию. Треугольник изменит свой размер и ориентацию в процессе движения частиц по орбитам, но все равно останется равносторонним. Неудивительно, что такие решения называются *лагранжевыми*.

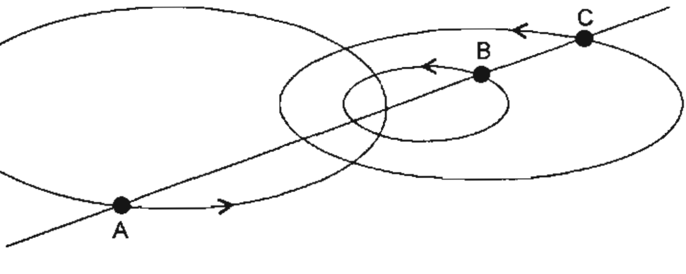


Рис. 4.11. Эйлеровы решения задачи трех тел

Существует три вида коллинеарных решений, которые соответствуют различным способам расположения трех точек на линии, и два вида решений треугольного типа, которые соответствуют двум разным ориентациям треугольника в пространстве. В обоих случаях, если тела расположить в виде коллинеарной или равносторонней конфигурации, а начальные скорости положить равными нулю, частицы будут двигаться к их общему центру масс и одновременно достигнут в этой точке в конечное время тройного столкновения. Это предельный случай, когда эллиптические орбиты вырождаются в линейные отрезки, а решение перестает быть периодическим.

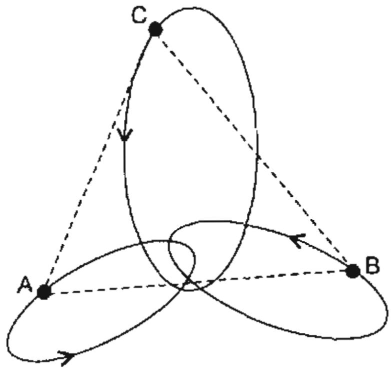


Рис. 4.12. Лагранжевы решения задачи трех тел

В этих особых решениях все материальные частицы исполняют тождественный танец, так что неизученными остаются все девять степеней свободы, которыми обладают наши три тела. Движения происходят на инвариантном подмногообразии более низкой размерности, типа, описанного в первой главе. Как мы уже отмечали, инвариантные многообразия могут образовать своего рода костяк, помогающий нам понять фазовое пространство целиком. В третьей главе мы также видели, как Ша и Джервер с помощью таких симметрий построили свои примеры бесстолкновительных сингулярностей.

Чтобы увидеть связь между устойчивостью и этими довольно специальными классами эйлеровых и лагранжевых решений задачи трех тел, предположим, что они двигаются по *круговым* орбитам и изучим эти орбиты во вращающихся координатах. В данном случае мы привязаны к системе отсчета наблюдателя, вращающейся так же, как линия или треугольник, в которой мы не ощущаем движения частиц, что очень напоминает ситуацию, когда едешь в машине и наблюдаешь за поездом, который движется с такой же скоростью по железной дороге параллельно автомобилю. Мы видим три тела в стационарных положениях. В обоих случаях они представляют положения равновесия в новых координатах, а значит, мы можем исследовать устойчивость этих положений. Вообще-то, для должным образом выбранных (и более сложных) координат, решения можно рассматривать как положения равновесия, даже если орбиты представить не эллипсами, а окружностями. В любом случае такие положения равновесия называют *центральными конфигурациями*.

Существует еще один способ рассмотрения этих решений. Возьмем задачу двух тел (например, движение Земли по эллипсу вокруг Солнца) и предположим, что в гравитационном поле этих тел движется третье тело с меньшей массой (космический корабль). Малое тело не оказывает влияния на движение больших, но его движение определяется обоими большими телами. Это ограниченная задача трех тел того типа, с которым мы встречались уже несколько раз. Существует пять частных положений, которые малое тело может занимать в плоскости эллиптических орбит, описываемых крупными телами. Эти положения называются *точками либрации* и обозначаются L_1, L_2, L_3, L_4 и L_5 (см. рис. 4.13). Это классическое обозначение, в котором буква L была выбрана в честь Лагранжа. Термин «либрация» происходит от латинского слова *libratio,* означающего «равновесие». В астрономии это слово встречается в двух значениях. В данном случае имеется в виду, что когда частица пребывает в точке либрации, то она находится *в равновесии,* в состоянии покоя во вращающейся системе отсчета, причем центробежные силы и гравитационные силы притяжения двух больших тел взаимоуничтожаются От этого же корня происходит и слово «equilibrium»[5]. Другое значение этого термина применяется в отношении *либрации Луны* – колебательного движения, над которым также работал Лагранж. Как мы ранее упоминали в этой главе, либрация по долготе поочередно открывает и закрывает восточную и западную границы видимой стороны Луны.

Если рассмотреть две большие массы, а малую поместить в одну из их точек либрации, то получатся эйлерова и лагранжева конфигурации. При этой новой расстановке проще изучать устойчивость точек либрации, нежели устойчивость решений Эйлера-Лагранжа, но этот метод, безусловно, работает только для малой третьей массы. Сегодня нам известно, при каких условиях точки либрации устойчивы; это свойство зависит от относительных величин масс больших тел. Примером устойчивой точки либрации в астрономии Солнечной системы служат троянцы – скопление астероидов, движущееся вокруг Солнца примерно по той же орбите, что и Юпитер, и образующее равносторонний треугольник с этими двумя гораздо более крупными небесными телами. Кроме того, в лагранжевых точках системы Земля–Луна астрономы обнаружили скопления космической пыли. Ученые предлагали использовать

[5] Равновесие (англ.)

устойчивость этих точек для создания из окружающих их областей «парковок» для будущих космических станций или для постройки колоний в космосе.

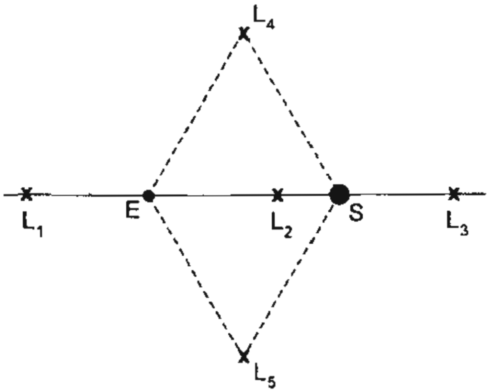


Рис. 4.13. Пять точек либрации

Как мы видели на рисунке 4.13, существует пять классов центральных конфигураций для задачи трех тел: два равносторонних (одна на каждое возможное расположение равностороннего треугольника, в вершинах которого находятся частицы) и три коллинеарных (одна на каждое возможное расположение трех частиц на линии). Как ни странно, мы мало что знаем о числе классов центральных конфигураций для задачи n-тел при $n > 3$. Мы даже не знаем, конечно или бесконечно их число и должно ли их быть бесконечно много; мы не знаем, образуют ли они множество *отдельных точек* (т. е. точек, между которыми положительное расстояние) или *континуум* (т. е. непрерывную область фазового пространства). В этой области работали многие люди; интересующийся читатель найдет их имена в разделе «Примечания» после пятой главы.

В 1912 году Карл Сундман открыл интересное свойство задачи трех тел. Он показал, что если три частицы сталкиваются одновременно, то они непременно должны стремиться к образованию центральной конфигурации. Другими словами, перед столкновением частицы приближаются либо к равностороннему треугольнику, либо к коллинеарной конфигурации эйлерова типа. Таким образом, вышеупомянутые инвариантные множества являются своего рода скоростной автострадой к тройным столкновениям. Было доказано, что в задаче n-тел это свойство истинно в том смысле, что одновременное столкновение любого подмножества k частиц стремится к множеству центральных конфигураций, образованных этими k частицами. К сожалению, поскольку это множество центральных конфигураций может оказаться континуумом, мы не знаем, стремится ли столкновительная орбита к частной центральной конфигурации или совершает колебания между несколькими конфигурациями, не останавливаясь ни на одной из них.

Более того, в 1983 году Дональд Саари доказал, что большой класс решений задачи n-тел, который рассеивается в бесконечность, делает это, стремясь к центральным конфигурациям по мере расхождения тел. (Например, если три неколлинеарные частицы рассеиваются в бесконечность, то, чем дальше они отойдут друг от друга, тем ближе они подойдут к углам равностороннего треугольника.) Этот результат проливает некоторый свет на космологическую проблему движения галактик. Несмотря на его, на первый взгляд, частную природу, понятие центральных конфигураций остается важной темой в современной небесной механике.

В этой и предыдущей главах мы проследили процесс зарождения и увидели некоторые ответвления двух фундаментальных понятий в теории динамических систем: хаоса и устойчивости. Мы увидели, как поиск устойчивости Пуанкаре привел его к открытию хаоса. Анализ Смейла на основе символической динамики, описанный во второй главе, показал, что такой детерминистический хаос во многих отношениях невозможно отличить от действительно случайного процесса. Его отличительной особенностью является чувствительная зависимость от начальных условий: хаотические орбиты в долгосрочном периоде эффективно непредсказуемы. Устойчивость по Ляпунову, описанная выше, напротив, означает неизменное поведение или регулярное, предсказуемое повторение. К данному моменту читатель может подумать, что эти два свойства являются взаимоисключающими, если не в высшей степени противоположными. Почему же тогда мы связали их в подзаголовке своей книги, если хаос возникает лишь случайно, в стремлении к устойчивости? Мы сделали это, чтобы показать, что на самом деле они тесно переплетаются совершенно неповторимым образом в некоторых динамических системах — почти интегрируемых гамильтоновых системах классической механики. Именно этим проблемам мы посвятим заключительную главу нашей книги. Мы познакомимся с триумвиратом Колмогорова, Арнольда и Мозера — тремя математиками, создавшими теорию, которая связывает хаос и устойчивость.

5.
КАМ-теория

Цель динамики можно сформулировать следующим образом: дать полную характеристику всей совокупности движений динамических систем по их качественным свойствам.

— Джордж Дэвид Биркгоф

Амстердам, 1954 год. Заключительный день Международного математического конгресс почти закончился. Осталась последняя пленарная лекция. Чести произнести заключительные слова удостоился «Евклид теории вероятностей», человек, создавший аксиоматическую основу для решения задач, связанных с азартными играми и случайностью, объединив их с теорией меры — русский математик Андрей Николаевич Колмогоров.

Тема лекции была достаточно неожиданной. Колмогоров не собирался обсуждать вероятности. В программе было заявлено такое название его лекции: «Об общей теории динамических систем и классической механике». Мало кто из слушателей знал, что именно в этой области Колмогоров трудился в предыдущие годы.

Оратора представили, и зал поприветствовал его аплодисментами.

> «Для меня явилась неожиданностью необходимость сделать доклад на заключительном заседании Конгресса в этом большом зале, который был ранее мне известен более как место исполнения великих произведений мировой музыки под управлением Менгельберга. Доклад, который я подготовил, не учитывая перспективы столь почетного его положения в программе нашего Конгресса, будет посвящен довольно специальному кругу вопросов. Моей задачей будет выяснение путей применения основных концепций и результатов современной общей метрической и спектральной теории динамических систем классической механики. Мне кажется, впрочем, что вы-

> бранная мною тема может иметь и более широкий интерес как один из примеров рождения новых неожиданных и глубоких связей между различными частями классической и современной математики.
>
> В своем знаменитом докладе на Конгрессе 1900 г. Гильберт говорил, что единство математики, невозможность ее распадения на независимые друг от друга ветви вытекают из самого существа нашей науки. Наиболее убедительным подтверждением правильности этой мысли является возникновение на каждом этапе развития математики новых узловых пунктов, где при решении вполне конкретных проблем оказываются необходимыми и вступают в новое переплетение понятия и методы самых различных математических дисциплин.»

Колмогоров был мыслителем, возводившим мосты между различными областями математики и видевшим связи, которые до него не видел никто. Он обладал глобальным видением науки, но также знал и как проникнуть в самые мелкие подробности решаемых им задач. Во вводных замечаниях он выразил свой общий взгляд на математику и, в то же время, подготовил почву для одного из самых замечательных достижений математики двадцатого века: создания КАМ-теории. Аббревиатура КАМ сложена из первых букв фамилий Колмогорова, Арнольда и Мозера – трех математиков, заложивших основы этой теории между 1954 и 1963 годами. Их работе и посвящена эта глава.

УПРОЩАЙ И РЕШАЙ

Андрей Николаевич Колмогоров родился в Тамбове в России двадцать пятого апреля 1903 года. Его отец, Николай Матвеевич Катаев, сын священника, был агрономом. Его мать, Мария Яковлевна Колмогорова, дочь маршала Якова Степановича Колмогорова, умерла в родах, и маленького мальчика воспитала ее сестра, Вера. Когда Андрею исполнилось шесть лет, он с тетей переехал в Москву. Именно там он пошел в школу и, с небольшими перерывами, провел всю свою жизнь.

Детство и отрочество Колмогорова были отнюдь не легкими. Первая мировая война и кровавые события, последовавшие за большевистской революцией, террор гражданской войны и пришедший ей на смену голод, множество трагических последствий борьбы за власть между красной и белой армиями стали частью жизни молодого человека. Сразу после революции, в 1919–1920 годах, чтобы заработать себе на жизнь, он трудился на железной дороге. Но несмотря на эти лишения и тяготы юности ориентированного на науку подростка, Андрей Николаевич умудрился поступить на физико-математический факультет Московского университета и в 1920 году начать там учебу.

Его первый учебный год был отмечен присутствием трех замечательных русских математиков: Н. Н. Лузина и А. К. Власова, у которых он слушал курсы по теории функций и проективной геометрии, и В. В. Степанова, проводившего семинар по тригонометрическим рядам. Увидев в Колмогорове талантливого студента, Лузин предложил ему поработать над исследованием вместе.

Колмогоров обладал природным чутьем к математике, и в этой академической среде быстро развились его умения. Во время первого года обучения, в возрасте восемнадцати лет, он завершил изучение тригонометрических рядов, а еще год спустя опубликовал вторую статью по дескриптивной теории множеств. Третья статья, датированная 2 июня 1922 года, принесла ему истинное научное признание. В ней он привел первый пример тригонометрического ряда, который расходится почти везде. Это позволило дать ответ на один очень важный вопрос, связанный с рядами Фурье, которые полезны не только в чистом анализе, но и во многих областях прикладной математики. Вообще-то, тонкости рядов Фурье различных видов функций и скорости их сходимости должны были сыграть важную роль в КАМ-теории где-то через сорок лет. Закончив университет в 1925 году, Колмогоров начал работать с теорией вероятностей и уже через несколько лет создал себе репутацию.

Интеллектуальные интересы и вклады Колмогорова не ограничивались математикой. Еще до дебюта в точных науках он написал исторический труд о средневековой Новгородской области. Затем, узнав, что профессорам истории необходимо несколько аргументов в защиту каждого его утверждения, он решил, что математика — более простая наука, т. к. для любой теоремы достаточно одного доказательства. Однако он не отказался от своих многочисленных интересов; напротив, они расширились, включив множество научных областей: генетику, поэтику (теорию и практику поэзии), стратиграфию (область геологии, занимающуюся расположением камней в слоях). Аналогичным разнообразием интересов отличалась и его математическая работа. Он внес фундаментальный вклад не только в теорию вероятностей, классическую и небесную механику, но и в явно не связанные с ними области, как-то: топология, математическая логика и алгоритмическая теория сложности. Три тома его избранных работ называются «Математика и механика», «Теория ве-

Илл. 5.1. Андрей Николаевич Колмогоров. (Любезно предоставлено издательством «Наука», Москва)

роятностей и математическая статистика» и «Теория информации и теория алгоритмов». Крайне редко такое изобилие талантов встречается у одного человека.

Чтобы понять революционные идеи, которые Колмогоров представил на Конгрессе в Амстердаме, сначала следует ввести несколько понятий, от которых он отталкивался и которые мы используем в своем описании. Во-первых, это понятие *гамильтоновой системы* дифференциальных уравнений, или *уравнений динамики,* как в своем научном труде и в книге «Новые методы. . . » их назвал Пуанкаре.

Это понятие является фундаментальным для изучения динамики и механики вообще; его корни, как и многое другое, используемое очень широко, уходят в исследование задачи трех тел. Вообще-то, название «гамильтониан» не имеет исторического обоснования, т. к. уравнения этого вида рассматривали уже Лагранж и Пуассон за много лет до Гамильтона. (Кстати говоря, как заметил Клиффорд Трусделл, первым человеком, записавшим «уравнения Ньютона» в том виде, в каком они сейчас известны нам, был не Ньютон, а Леонард Эйлер.) Тем не менее, эта терминология отдает должное вкладам, которые внес в механику ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон. Быть может, не напрасно это название принято только среди математиков и физиков, т. к. эти же системы уравнений по-прежнему носят старое наименование *уравнений динамики* в других кругах ученых, которые занимаются прикладными науками, временами используя их в своих исследованиях. Большинству математиков Гамильтон больше известен как изобретатель кватернионов — обобщения идеи комплексных чисел — и как ученый, сделавший много вкладов в алгебру. Помимо этого, он разработал единый подход к проблемам геометрической оптики и динамики, используя *вариационное исчисление.*

Главной составляющей гамильтоновой механики служит выражение уравнений движения в изящной симметричной форме через функцию (ее частные производные), называемую гамильтонианом. В оригинальной формулировке Ньютона основными переменными состояния являются координаты положений тел. Как мы видели в первой главе, скорости, необходимые для описания полного состояния, определяются «во вторую очередь», как скорости изменения положений. В гамильтоновых уравнениях на смену скоростям приходят *импульсы:* произведения скоростей и масс тел. Положения и импульсы занимают равные позиции. И те, и другие появляются в гамильтоновой функции, иногда называемой просто *гамильтонианом,* которая в общем случае представляет собой полную энергию рассматриваемой механической системы. Как таковая, она связывает между собой переменные дифференциального уравнения, которые пригодятся нам позднее, когда мы будем сокращать размерность фазового пространства. Разным задачам соответствуют разные гамильтонианы. Один гамильтониан описывает задачу n-тел, другой — движение маятника, третий соответствует динамике «идеальной» жидкости и т. д. Если у нас есть теория, в которой рассматриваются *произвольные* гамильтонианы, то полученные результаты можно применить ко всем частным проблемам, которые включает эта теория: к проблемам динамики.

Фундаментальная тенденция математики состоит в том, чтобы поднять концепции до более высоких уровней абстракции. Чтобы понять причину этого, поставим следующий *простой вопрос*. Что проще вычислить: два яблока плюс три яблока равно пяти яблокам; два стула плюс три стула равно пяти стульям или просто $2 + 3 = 5$? Ответ очевиден. Как только мы добились абстракции, численной формулировкой оперировать гораздо проще. Избыточная информация исключена. (Были ли яблоки зрелыми? Были ли у стульев подлокотники?) Формула $2 + 3 = 5$ применима ко всем возможным объектам, какие только можно придумать. Символическая операция выполняется на более высоком уровне абстракции. Мы настолько привыкли работать с числами, что уже не замечаем важности и выгод этого процесса. Однако для осознания этого этапа человечеству потребовались сотни тысяч лет.

Исторические исследования лингвистики говорят о том, что у первобытных народов, как правило, имелось одно понятие для *одного дерева*, другое понятие для *двух деревьев* и третье понятие для *трех и более деревьев*. На данном этапе люди еще не определили понятие *числительного*. Они не понимали, что деревья, равно как фрукты, камни и любые другие объекты, могут иметь общую характеристику: группирование по *одному, двум, трем* или *более*. То же самое произошло с понятием *листа*. В языке некоторых современных аборигенов есть слово для каждой разновидности листа, но нет понятия самого листа. В практическом смысле это совершенно правильно. В природе не существует абстрактного листа; в ней встречаются только конкретные его разновидности: дубовый лист, лист вяза, березовый лист, лист рябины и т. д. *Лист* есть продукт, изобретенный нашим умом: абстракция.

Эти примеры демонстрируют важную роль, которую абстракция играет в нашем мышлении. Хорхе Луис Борхес рассказывает историю о Фунесе, молодом человеке, которого в качестве проклятия наделили совершенной памятью. Фунес не знал абстракции, да и не нуждался в ней, т. к. точно мог вспомнить все подробности того, как выглядело небо и облака при рассвете в каждый конкретный день или на что был похож запах и вкус фрукта, который он съел много лет назад. В конце концов, он умирает, не успев постареть, сокрушенный тяжким грузом своих воспоминаний. Гораздо проще отказаться от цветных излишних подробностей, сохраняя только существенные понятия и оперируя ими. Можно было бы сказать, что прогресс, по крайней мере, научный прогресс, основан на способности определять не относящуюся к делу информацию, а затем пренебрегать ею в своего рода созидательной амнезии. Именно этот подход постоянно и успешно используется в математике, и уравнения

Гамильтона — это лишь один из множества примеров. Безусловно, не следует путать подобное упрощение и идеализацию с полным пониманием, и читатель должен помнить, что мы занимаемся лишь созданием и анализом *математических моделей* физических явлений. Модель — это не реальность, независимо от того, насколько она полезна для оперирования фактами, которые мы изначально пытаемся понять.

Как только у нас появляется абстрактная концепция типа *листа,* далее ее полезно подразделить и категоризовать, например, в данном примере на вечнозеленые и опадающие листья. Возвращаясь к гамильтоновым системам, скажем, что их традиционно подразделяют на *интегрируемые* (которые также именуют *полностью интегрируемыми*) и *неинтегрируемые.* Интегрируемые системы «решаемы» в том смысле, что их общие решения получаются явно, в виде формул, содержащих известные функции. Это системы, для которых описанная в первой главе анаграмма Ньютона «о возможности определения потока» реализуется практически. Но несмотря на то, что подобных систем бесконечно много, они все же очень редки, так как в пространстве *всех* гамильтоновых систем они занимают множество нулевой меры. Они являются исключениями. Однако почти все системы, которые описываются в учебниках, относятся к разряду интегрируемых, так как только их можно без труда объяснить и только о них можно задать задачи на дом. Неинтегрируемыми называются системы, которые невозможно решить с помощью стандартных методов. Несмотря на оптимизм учебников, почти все гамильтоновы системы относятся именно к этому запутанному классу.

Главный вопрос, к которому Колмогоров обратился в Амстердаме, звучал так: «Что происходит с решениями интегрируемой системы, если уравнения немного изменяются из-за небольшого возмущения, сохраняющего гамильтонову структуру?» Этот вопрос был поставлен в связи с поведением частного класса орбит, которые на протяжении более ста лет занимали умы Дирихле, Вейерштрасса и Пуанкаре — так называемых *квазипериодических решений.* Чтобы понять, что они из себя представляют, и лучше описать как вопрос, так и ответ, данный на него КАМ-теорией, мы вновь обратимся к динамике Солнечной системы.

Квазипериодические движения*

Первый закон Кеплера гласит, что планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам. Немецкий математик пришел к такому выводу после многолетних наблюдений, расчетов и сравнения. Строго говоря, он ошибался. Его инструменты были слишком грубыми, чтобы предоставить ему оценки, достаточно точные для понимания того, что он нашел лишь первое приближение траектории движения Марса — планеты, в отношении которой он получил большинство своих данных. Наблюдая за Меркурием и Венерой, можно было бы скорее увидеть, что их орбиты фактически представляют собой эллипсы с медленной прецессией: орбиты, формы которых при каждом прохождении практически не отличаются от эллиптических, но свойства которых постепенно эволюционируют во времени. Это показано на рисунке 5.1.

С помощью закона тяготения Ньютона, как описано в первой главе, можно доказать, что движение одной-единственной планеты вокруг Солнца действительно было бы эллиптическим, если бы мы могли пренебречь влиянием других планет. Однако их влияние не является пренебрежимо малым, и возмущение, создаваемое им, приводит к прецессионному эллипсу. С этой точки зрения неадекватность инструментов Кеплера была случайной. Открой он истинную сложность движения планет, и такого простого закона могло бы не быть, а единственная полностью решаемая задача n-тел ньютоновой механики лишилась бы столь чудесной иллюстрации. К счастью, точность наблюдений развивалась параллельно теории возмущений, образование которой мы проследили в четвертой главе, в работе Лапласа и Лагранжа. Как Иварс Петерсон отметил в своей книге «Часы Ньютона», нам повезло, что Солнечная система проста настолько, чтобы первые приближения работали хорошо, и при этом сложна настолько, чтобы соблазнить нас пойти дальше.

В Солнечной системе отклонение планет от эллиптических орбит чрезвычайно мало. При прецессии наивысшее отклонение демонстрирует Меркурий: крошечное значение, равное всего сорока трем угловым секундам за век. Это означает, что после сотен оборотов вокруг Солнца *перигелий* этой планеты (точка траектории движения небесного тела, ближайшая к Солнцу) продвигается вперед менее, чем на одну угловую минуту. Именно столь малая величина отклонения делает теорию возмущения столь мощным инструментом для изучения планет. В этой главе мы увидим, как Колмогоров, Арнольд и Мозер вслед за Лапласом и Пуанкаре занялись возмущением интегрируемой системы для определения динамики нерешаемой, неинтегрируемой системы, близкой к предыдущей.

В прецессионном эллипсе, типа изображенного на рисунке 5.1, могут иметь место две ситуации: либо кривая замкнется через некоторое время, так что орбита фактически станет периодической, хотя и с пе-

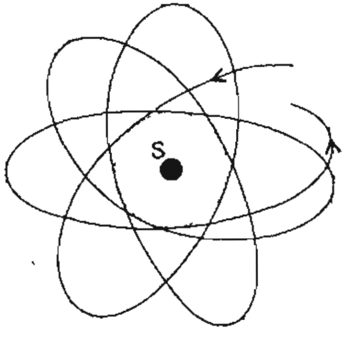


Рис. 5.1. Орбита планеты вокруг Солнца со значительно преувеличенной прецессией

риодом, измеряемым многими «годами», либо она не замкнется никогда. В последнем случае траектория плотно закручивается внутри кольца, образованного пунктирными кругами. Как описано во второй главе, плотность означает, что если следовать по орбите в течение достаточно долгого времени, то к любой точке в кольце можно подойти сколь угодно близко. Орбита, которая описывает это плотное движение, называется *квазипериодической* Квазипериодическая орбита просто никогда не становится периодической. Она снова и снова проходит бесконечно близко к положению, которое она занимала перед началом какого-то предыдущего оборота, но эта траектория никогда больше не повторяется. Она служит примером плотной кривой, как мы и обещали во второй главе.

Остаток этого раздела, а также следующий опять-таки будут несколько техническими, т к. мы попытаемся описать строение инвариантных торов и решения, закручивающиеся вокруг них Возможно, читатель предпочтет пропустить их при первом чтении и продолжит с раздела «Письма, потерянное решение и политика».

А теперь представим, каким образом могла бы появиться такая квазипериодическая орбита, но не в кольце в пространстве физической конфигурации (в данном случае в плоскости движения планеты), а в фазовом пространстве. Вообще, оно имеет высокую размерность, так как содержит скорость или импульс, а также координаты положения всех тел в данной системе, как мы описывали в первой главе. Но, как и прежде, мы можем взять многообразие, на котором происходит квазипериодическое движение, и исследовать его отдельно В простейшем случае

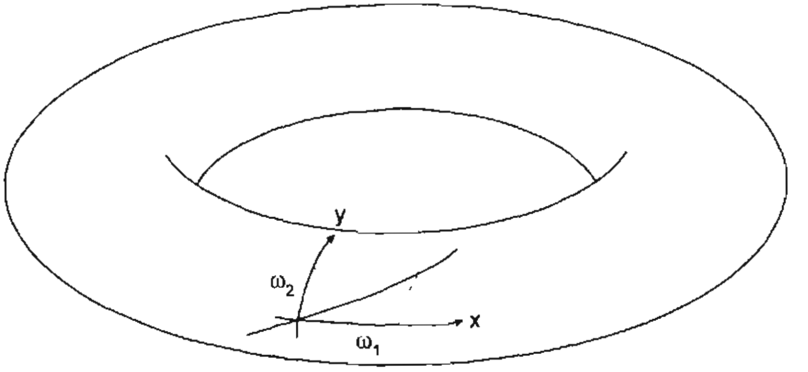


Рис. 5.2. Квазипериодическая орбита на торе плотно заполняет поверхность На торе мы выбираем координаты x и y

это двумерный *тор* поверхность бублика или баранки. Мы опишем это движение, выбрав координаты на торе как те, что изображены на рисунке 5.2. В каждой точке орбита — это линия, наклоненная под углом, заданным отношением двух чисел: ω_2/ω_1. Физический смысл этого отношения состоит в том, что оно представляет *отношение частот*, связывающее два периода в движении планеты: ее основной орбитальный период и медленную прецессию ее перигелия. Если это отношение является рациональным числом (дробью), то орбита замыкается и является периодической; в противном случае она вечно закручивается и плотно заполняет тор.

Чтобы увидеть это, сначала нужно понять, каким образом поток, заданный параллельными линиями, наклоненными под углом ω_2/ω_1, на плоскости, можно отождествить с потоком на квадрате, а затем, каким образом поток на этом квадрате можно отождествить с потоком на торе. Первый этап показан на рисунке 5.3, второй — на рисунке 5.4. Опишем их подробно.

Определим поток на плоскости со всеми орбитами, параллельными XY: прямой линии, наклоненной под углом ω_2/ω_1; см. рисунок 5.3 *a*. Это равномерное *поступательное движение* — постоянный параллельный поток, напоминающий поток на поверхности идеализированной прямой реки. Предположим, что ω_2 относится к ω_1 как $2/1$ Частная орбита XY, с наклоном 2, пересекает сеть из квадратов в точках $\ldots O_{-2}, O_{-1}, O_0, O_1, O_2, \ldots$, как показано на рисунке Теперь мы

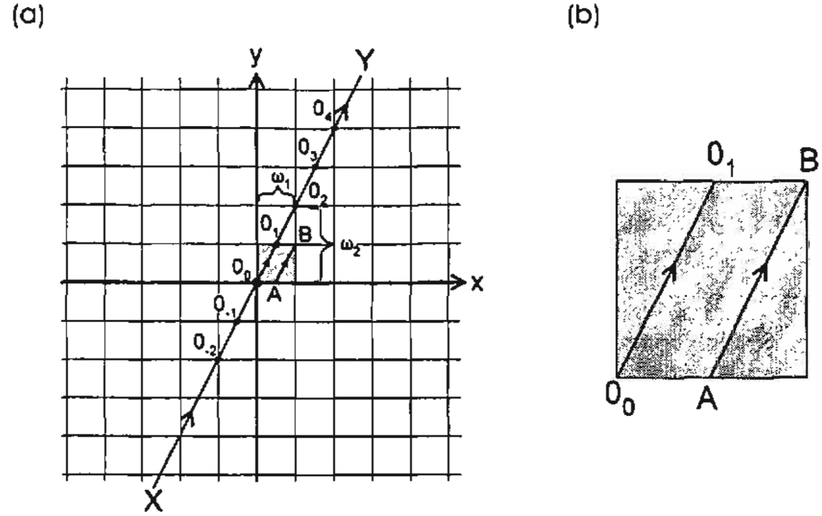


Рис. 5.3. Отождествление (a) потока на плоскости с (b) потоком на квадрате

хотим «свернуть» эту бесконечную орбиту XY (только часть которой изображена на рисунке) в один квадрат единичного размера, скажем, заштрихованный квадрат на рисунке 5.3 *a*. Орбита XY пересекает этот квадрат по отрезку O_0O_1, который начинается в левом нижнем углу и выходит вверху в центре. Следующий квадрат орбита пересекает по отрезку O_1O_2 из центра нижней части квадрата в правый верхний угол. В следующем квадрате O_2O_3 точно повторяет путь O_0O_1 через серый квадрат (из левого нижнего угла до средней точки верхней линии), а в следующем O_3O_4 повторяет путь O_1O_2 во втором квадрате. Если внимательно посмотреть на *все* квадраты, которые пересекает орбита XY, мы увидим только эти две разновидности чередующегося поведения. Поэтому всю орбиту можно представить внутри одного закрашенного квадрата, а не рисовать целую плоскость: все, что нужно для этого сделать, – наложить второй квадрат на первый (закрашенный) и скопировать траекторию; получившаяся картинка будет содержать полную информацию. Рисунок 5.3b показывает, каким образом орбита XY представлена в закрашенном квадрате. «Концы» второго отрезка орбиты мы обозначим за A и B.

На первый взгляд, мы совсем забросили тор, но сейчас мы к нему вновь вернемся. Склеив стороны MB и O_0N квадрата, изображенного

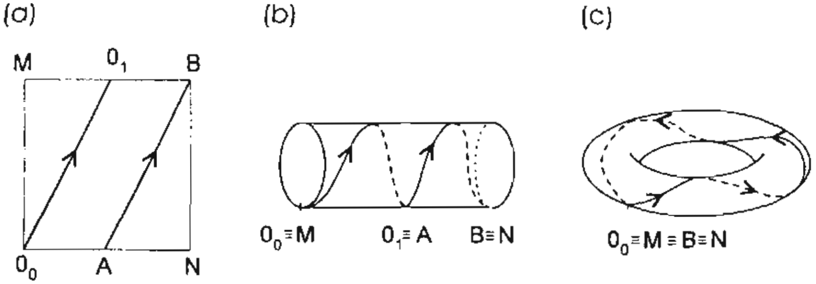


Рис. 5.4. Эквивалентность потока на квадрате и потока на торе, полученная путем отождествления противоположных сторон квадрата

на рисунке 5.4 *a*, мы получаем цилиндр. Точки M, O_1 и B *отождествляются* с точками O_0, A и N, соответственно. В результате этого два отрезка орбиты O_0O_1 и AB превращаются в одну спираль, которая, как изображено на рисунке 5.4 *b*, дважды огибает цилиндр. Затем мы сгибаем цилиндр и склеиваем его круглые концы, получая тор с четырьмя тождественными точками O_0, B, M и N. Теперь спираль на цилиндре превратилась в замкнутую спираль на торе. Она замыкается, т. к. в квадрате началась в точке O_0 (левом нижнем углу) и закончилась в B (правом верхнем углу), а в процессе склеивания все четыре угловые точки квадрата были отождествлены в одну точку. Это говорит о том, что при наклоне $\omega_2/\omega_1 = 2/1$ соответствующая кривая на торе порождает периодическую орбиту. То же самое происходит при наклоне, заданном *любым* рациональным числом, но в этом случае получившаяся спираль может обогнуть тор много раз, прежде чем, наконец, замкнется.

Вообще-то геометрия, по которой орбита огибает тор, точно отражает это рациональное число. В вышеприведенном примере, где $\omega_2/\omega_1 = 2/1$, или, что эквивалентно, $\omega_1/\omega_2 = 1/2$, орбита делает один полный обход (по длине) вокруг отверстия в «бублике» и два обхода (меридионально) через это отверстие. В общем случае, если рациональное отношение частот выражается как $\omega_1/\omega_2 = m/n$, орбита до замыкания делает m продольных и n меридиональных обходов. Попробуйте таким образом обернуть кусочек веревки вокруг бублика и соединить его концы (например, для $m = 2$, $n = 3$). Съешьте бублик (без веревки), и, покуда m и n больше единицы и не имеют общих делителей, вы увидите, что ваша мокрая веревка завязана узлом. Этот узел не связан с нашим повествованием напрямую, но он проливает интересный свет на топологию. Оборачивая нашу орбиту вокруг тора, мы превратили простую прямую линию в узел!

Положение вещей становится совершенно другим, если отношение ω_1/ω_2 является иррациональным числом (т. е. числом, которое нельзя представить в виде дроби). В этом случае орбита на торе замкнуться не может, т. к. если она начинается в левом нижнем углу (координата $(0, 0)$ — начало плоскости), то она никогда не пройдет через угол любого другого квадрата. Чтобы это сделать, ей пришлось бы подняться на некоторое целое число n, сместившись на m квадратов вправо. Поскольку ее уклон иррационален, она на это не способна. Следовательно, она никогда точно не повторит свою траекторию через закрашенный квадрат с рисунка 5.3, поэтому для представления всей орбиты нужно скопировать бесконечно много различных отрезков орбиты. Эти копии, по сути, заполнят весь квадрат. В свою очередь, каждая траектория плотно заполнит тор. В этом случае мы имеем *квазипериодическую* орбиту на торе.

Возмущая торы*

Центральный вопрос, к которому Колмогоров обратился в своем выступлении в Амстердаме, был связан с возмущением инвариантных торов. Чтобы увидеть, что эта проблема естественна, нужно объяснить одно замечательное свойство интегрируемых гамильтоновых систем. Будучи выраженным в подходящих координатах, *почти каждое* решение лежит на некотором представителе семейства вложенных торов, о чем свидетельствует рисунок 5.5.

Как мы отметили в первой главе, для гамильтоновой системы с n степенями свободы фазовое пространство имеет $2n$ измерений, поэтому двумерные торы, изображенные на рисунке 5.5, в общем случае могут рассматриваться лишь метафорически. Однако существует ситуация, для которой эта картинка правильна в буквальном смысле: сохраняющая энергию система с двумя степенями свободы. Здесь читатель должен вспомнить наш рассказ о постоянных движения и сокращении числа измерений в первой главе. Обозначим две координаты положения и две координаты скорости или импульса за q_1, q_2 и p_1, p_2 соответственно. Гамильтониан (в данном случае полная энергия) — это функция четырех зависящих от времени переменных, которую можно записать как $H = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. H также называют *интегралом движения*

Далее, H остается постоянным по мере эволюции решения: $H = H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h = \text{const}$. Это уравнение означает, что четыре координаты связаны постоянным отношением, хотя сами они изменяются с течением времени, так что если нам известны три из них, то четвертую мы всегда сможем найти. Таким образом, как только выбраны начальные условия, решение гамильтоновых уравнений становится ограниченным трехмерным *многообразием энергии*, которое локально напоминает кусочек нашего обычного трехмерного пространства. В этом случае рисунок 5.5 точно описывает строение каждого многообразия энергии для интегрируемой системы.

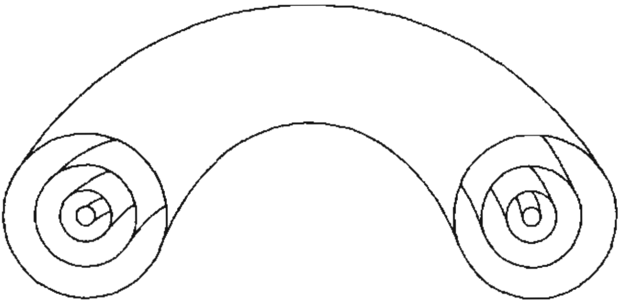


Рис. 5.5. Семейство вложенных торов, расслаивающих многообразие энергии

Первая постоянная движения, полная энергия $H = h$, позволила нам сократить размерность на единицу: с четырех измерений до трех, – выбрав определенный уровень энергии. Заполнение результирующего трехмерного многообразия энергии вложенными двухмерными торами соответствует существованию помимо H второго интеграла, который можно записать как $K = K(q_1, q_2, p_1, p_2) = k$. Для каждого неизменного h мы получаем картинку, напоминающую рисунок 5.5. Если, помимо этого, мы задаем неизменную величину k, то мы определяем еще одно отношение, связывающее четыре наши переменные или, в сущности, три, которые остались после использования H. Каждое значение k соответствует одному тору из непрерывного их семейства. Для этого интегралы H и K должны быть *независимы* друг от друга, так как они должны обеспечивать различную информацию о нашей системе.

Ограниченное тором поведение решений, как мы увидели, отличается простотой: все они являются либо периодическими орбитами, которые характеризуются рациональным отношением частот m/n, либо квазипериодическими орбитами, возникающими, если это отношение выражено иррациональным числом. Поскольку для определения частного тора нужно задать две величины, или два *параметра*, h и k, мы говорим о двупараметрическом *семействе торов.* Каждая точка в фазовом пространстве лежит на некотором торе в некотором многообразии энергии. Мы говорим, что торы *расслаивают* это многообразие подобно тому, как листы или страницы составляют книгу. Именно это и подразумевается под полной интегрируемостью системы с двумя степенями свободы. Как мы уже видели в первой главе, одно из главных достижений научного труда Пуанкаре, завоевавшего премию, заключалось в доказательстве несуществования в ограниченной задаче трех тел дополнительных интегралов определенного типа.

Мы говорили об *отношении частот.* Грубо говоря, интегрируемая система с двумя степенями свободы может демонстрировать два типа движения, каждое из которых будет иметь свой собственный характеристический период или временной масштаб. Когда они связаны рациональным числом, мы говорим, что результирующие периодические орбиты лежат на *резонансном* торе, а когда их связь иррациональна, то эти орбиты лежат на *нерезонансном* торе. Обычно бывает так, что по мере изменения параметров h или k (например, при выборе других уровней энергии) соответствующие им торы из резонансных превращаются в нерезонансные.

В это, наверное, труднее поверить, но тем оно и замечательно, что понятие интегрируемости распространяется на любое число n степеней свободы. (В некоторых случаях оно распространяется даже на бесконечно большое число степеней свободы.) Если существует n независимых постоянных движения, то можно найти n-параметрические семейства n-мерных торов, заполняющие фазовое пространство, причем на каждом торе поток будет периодическим или квазипериодическим.

Возвращаясь к случаю с двумя степенями свободы, можно показать, что если отношение частот ω_1/ω_2 изменяется невырожденным образом по мере изменения параметров h и k, то множество нерезонансных торов имеет положительную меру Лебега. (Крайне сложно дать определение понятию *«невырожденный»,* не вдаваясь в технические подробности; грубо говоря, это означает, что отношение частот должно уменьшаться или увеличиваться гладко по мере «движения» по торам при увеличении k и h. В этом смысле большинство гамильтоновых систем являются невырожденными.) С другой стороны, множество резонансных торов имеет нулевую меру, но является плотным во множестве всех торов. Эти множества торов являются не раздельными, но тесно переплетенными, так что рядом с каждым иррациональным тором существует рациональный и наоборот. Данная ситуация в точности аналогична ситуации с множествами рациональных и иррациональных чисел на прямой вещественных чисел. Хотя оба множества плотные, первое имеет нулевую меру, а второе — положительную.

Что же происходит, если мы берем полностью интегрируемую систему с двумя степенями свободы и совсем немного возмущаем ее? Разрушатся ли все инвариантные торы? Интуиция подсказывает нам, что такой исход вероятен. Гамильтониан изменится, хотя решения по-прежнему останутся на трехмерном многообразии. Однако возмущенная система может и не остаться полностью интегрируемой, и, в отсутствие функции, аналогичной K, не будет ничего, что далее ограничивало бы решения двумерными многообразиями. Таким образом, можно ожидать, что торы разрушатся, позволив решениям свободно блуждать на трехмерном многообразии энергии. Как ни странно, Колмогоров заявил как раз обратное. Он сказал, что *большинство нерезонансных торов подвергнутся небольшой деформации, но не распадутся, если возмущение будет достаточно мало.*

Смысл выражения «большинство» в данном предложении заключается в том, что все резонансные и некоторые нерезонансные торы (образующие множество с положительной мерой) на самом деле разрушатся даже при малейшем возмущении, но это множество, тем не менее, очень мало по сравнению с множеством сохраняющихся нерезонансных торов. Более того, по мере того как величина возмущения берется все меньше и меньше, уменьшается и множество нерезонансных торов, которые разрушаются. Как показал пример «плотного» канторова множества с положительной мерой Лебега в третьей главе, разрушенные торы аналогичны точкам в отрезках, удаленных из этого множества, а сохранившиеся торы соответствуют точкам, оставшимся в самом канторовом множестве. Вокруг каждой сохранившейся части существуют остатки разрушенных торов, но множество сохранившихся все же имеет положительную меру.

Несмотря на то, что Колмогоров в том же (1954) году опубликовал доказательство своего утверждения в общих чертах, всех его подробностей он так и не дал. У Мозера и Арнольда ушло восемь лет на публикацию полных и строгих доказательств, независимо друг от друга и в разной модификации. Во введении к одной из своих собственных статей Арнольд характеризует идею Колмогорова как «. . . простую и новаторскую. . . , представляющую собой сочетание классических и, по сути, новых методов, решение двухсотлетней задачи, ясную геометрическую картину и чрезвычайную широту охвата — все это достоинства данной работы. Недостаток же ее заключается в том, что полные доказательства так и не были опубликованы».

Прежде чем перейти к обсуждению вкладов, сделанных этими двумя математиками, давайте попытаемся поглубже понять смысл и следствия результата, представленного в Амстердаме. Откуда происходит данная задача? Почему она столь важна?

Письма, потерянное решение и политика

В 1870 году, когда Соня Ковалевская познакомилась с Карлом Вейерштрассом, ей только-только исполнилось двадцать лет. Вейерштрасс же в свои пятьдесят пять считался величайшим аналитиком своего времени. Он заведовал математической кафедрой в Берлинской Королевской политехнической школе, куда Соня приехала учиться из своей родной Москвы. Попытавшись попасть в сферу деятельности, которая в ту пору была исключительно мужской, она вынуждена была преодолевать серьезные препятствия, не самым последним из которых был запрет на посещение некоторых курсов. Научная жизнь не была рассчитана на свободы женщин. В Геттингене, например, когда докторскую степень впервые должна была получить женщина, некоторые члены Университетского совета заявили, что «она потом захочет стать профессором, а после этого вообще не посовестится и выступить кандидатом в ученый совет!» Пытаясь умерить оппозицию своих коллег, математик Давид Гильберт ответил: «Но, дорогие мои господа, ученый совет — это все же не турецкая баня [*Badeanstalt*]!»

Из-за неважного здоровья Вейерштрассу приходилось читать свои лекции сидя, а какой-нибудь способный студент сопровождал их, делая записи на доске. Тем не менее, Вейерштрасс считался первоклассным преподавателем, и курсы его всегда были полны слушателей. Ковалевской не разрешили посещать его публичные лекции, но Вейерштрасс очень скоро узнал об этой решительной и энергичной девушке и устроил для нее частные уроки. Они встречались каждое воскресенье у него дома, и раз в неделю он приходил к ней. Дружба, начавшаяся таким образом, продолжалась более двадцати лет и закончилась лишь по причине мучительной и преждевременной смерти этой замечательной женщины.

Через несколько лет после окончания учебы Ковалевскую назначили профессором Стокгольмского университета, где она занималась исследованием вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. В общем случае уравнения движения такого тела имеют три степени свободы, а его ориентация задается тремя углами: широтой, долготой и углом вращения. В то время были известны лишь два полностью интегрируе-

Илл. 5.2. Соня Ковалевская (Любезно предоставлено Институтом Миттаг-Леффлера)

мых случая В первом — когда тело свободно вращается в пространстве в отсутствие тяготения — сохраняются три составляющие кинетического момента и энергии это приводит к так называемым *уравнениям Эйлера* Во втором случае тело имеет симметрию детского волчка, являясь поверхностью вращения вроде той, которую можно выточить на токарном станке В данном случае, благодаря симметрии, сохраняются две составляющие кинетического момента, и при условии сохранения энергии система по-прежнему остается интегрируемой: это называется *волчком Лагранжа.*

Ковалевская нашла третий полностью интегрируемый случай, когда моменты инерции тела связаны друг с другом определенным образом. Этот *волчок Ковалевской* по сей день считается слишком сложным для включения в большинство учебников — факт, говорящий о ее блестящем уме и творческих способностях. За свою статью по этому волчку в 1888 году она получила премию Бордена Французской Академии наук, причем комитет удвоил обычный размер премии, признав неординарность ее достижения. В начале нашей эпохи она стала ведущей женщиной-математиком, завоевав уважение и доверие своих многочисленных коллег мужского пола. Ее коллега, Густав Миттаг-Леффлер, обращался к ней за советом, когда подбирал комиссию, которая должна была определить обладателя премии короля Оскара. Помимо своей математической работы, она написала роман «Вера Воронцова» о том, что она еще в детстве пережила в России.

Несмотря на всю важность вкладов, внесенных Ковалевской в механику, мы вспомнили историю Сони Ковалевской и Карла Вейерштрасса по другой причине. Дружба этих двух неординарных людей вылилась в длительную переписку, в которой можно найти корни многих математических идей. В частности, читая письма Вейерштрасса, начинаешь понимать образ его мышления и работы. Это совсем не похоже на чтение его математических статей. Научные статьи, особенно по математике, представляют только конечный продукт. Они скрывают само создание, путь к конечному результату, надежды и сомнения, страсть, движение в ложном направлении и ошибки, разочарования. Все это присутствует в письмах. Они изображают человеческий разум, стоящий за абстрактными теоремами. Они показывают неудачные попытки, результаты которых никогда не публиковались. Они позволяют нам проследить не всегда гладкий процесс изобретения.

Именно в этой переписке зародился наш вопрос. Пятнадцатого августа 1878 года Вейерштрасс написал, что нашел формальное разложение в ряд квазипериодических решений задачи n-тел и теперь работает над доказательством сходимости таких рядов. К сожалению, на тот момент все его попытки оказались тщетными. Тем не менее, он продолжал верить в сходимость этих рядов. Его убежденность обуславливалась двумя причинами. Одна из них основывалась на голой интуиции — чувстве, приобретенном благодаря многолетнему опыту и подсказывавшем ему, хоть и без ясной логической основы, как должны обстоять дела. Но была и вторая причина. Некоторые свидетельства в пользу данного предположения оставил другой влиятельный математик.

В 1858 году Лежен Дирихле рассказал своему ученику Леопольду Кронекеру, что обнаружил новый общий метод решения всех задач механики. Дирихле был преемником Гаусса в Геттингенском университете. Он был известен как человек, которому можно доверять, и как очень уважаемый математик. Его работа, связанная, главным образом, с теорией чисел, является моделью строгости и правильности. Поэтому его притязания следовало принять всерьез. К сожалению, Дирихле скончался вскоре после того, как сделал это заявление, не оставив никаких письменных доказательств. Кронекер и прочие заподозрили, что этот метод должен быть связан с приближениями рядов к решениям типа тех, которые Вейерштрасс рассмотрел позднее, и что Дирихле нашел инструмент для доказательства их сходимости.

Теперь мы гораздо полнее можем понять, почему Вейерштрасс предложил премию, учрежденную королем Оскаром, за решение задачи n-тел в виде сходящегося степенного ряда, как мы рассказывали в первой главе. Потерпев неудачу сам, но осознавая всю ценность такого метода для математики, Вейерштрасс надеялся дать стимул для решения этой задачи молодым математикам и, сделав это, открыть метод Дирихле. Он знал, что многие вопросы, остающиеся без ответов, могут получить их благодаря новому открытию этого метода, особенно это касалось вопросов, связанных с устойчивостью Солнечной системы. Как мы видели из рассказа об открытии хаоса в первой главе, его уверенность была щедро вознаграждена, хотя и не в том отношении, в котором он ожидал.

Более века прошло после первой постановки этого вопроса, и теперь Колмогоров, по сути, заявлял, что решил эту фундаментальную задачу. Однако он не знал о неопубликованных идеях Вейерштрасса и Дирихле, а его путь к этой задаче был совершенно иным. Семена его интереса были посеяны еще в детстве, когда он читал учебник по астрономии Фламмариона. Его мечта — понять одну из величайших тайн Вселенной — возродилась несколько десятилетий спустя, когда, уже будучи признанным ученым, он нашел два новых источника информации. Одним из них была спектральная теория динамических систем Джона фон Неймана, содержавшаяся в книге «Математические основы квантовой механики», написанной на немецком языке в 1932 году; а вторым — статья киевских ученых Николая Крылова и Николая Боголюбова (опубликованная в 1937 году в журнале *Annals of Mathematics*), в которой общие понятия и методы теории меры применялись к динамическим системам.

Оригинальный вопрос, к которому обратился Колмогоров, был связан с тем, какие эргодические множества, в смысле, определенном Крыловым и Боголюбовым, действительно существуют в потоках дифференциальных уравнений, описывающих классическую механику, и какие из них имеют положительную меру. Грубо говоря, *эргодическое множество* — это часть потока, которую невозможно разложить с точки зрения динамики. Оно образует самостоятельную категорию, и любая попытка разделить это множество и изучить его составляющие обречена на провал. Оно неразрывно связано, как правило, с некоторой плотной орбитой. Примером служит инвариантное канторово множество подковы Смейла, описанное во второй главе. Если эргодическое множество Λ имеет положительную меру, то его присутствие приобретает важность и им нельзя пренебречь.

Мы не станем более подробно распространяться о том, как этот специфический вопрос переводится на язык математики, и заметим только, что он вышел далеко за пределы задачи об инвариантных торах. Как часть подхода к нему, Колмогоров начал изучать возмущения интегрируемых систем и обнаружил сохранение инвариантных торов. Оригинальный вопрос остается без ответа и по сей день, но это не имеет к нам отношения; сейчас ответ на него мало кого интересует. Результаты, полученные Колмогоровым, оказались гораздо более важными, чем тот, с которого он начал свои поиски. В. И. Арнольд, который был учеником Колмогорова, заметил, что эта ситуация напоминает открытие Америки Колумбом, первоначальной задачей которого было найти западный путь в Индию.

После Амстердамского конгресса интересы Колмогорова на некоторое время переключились на *теорию размерности* и *мощность множеств*, но в конце пятидесятых он снова вернулся к динамическим системам. В 1957–1958 годах он провел в Москве курс лекций, во время которого просмотрел результаты по торам. Кроме того, он устроил семинар, на котором физики и математики обсудили различные вопросы, включая магнитные поверхности и удержание плазмы. В этой области сохранение торов означает целостность «магнитной бутылки», которая должна удерживать реакцию синтеза. Сам Колмогоров прочитал лекцию по задаче трех тел, причем нам ясно, что к этому времени он и его коллеги отлично понимали всю важность физических следствий этой теоремы.

Таковы были некоторые из научных мотиваций интереса Колмогорова к данной задаче. Однако в Советском Союзе того времени существовали еще и другие, более серьезные влияния на работу. Жизнь

Колмогорова не была легкой. У него было трудное детство и юность, и, несмотря на то, что в конце 1920-х–начале 1930-х годов ему удалось побывать за границей, проведя некоторое время в Геттингене и во Франции, большую часть своей жизни он провел в тени сталинского террора — в период, когда погибли более двадцати миллионов советских граждан. В 1940 году он сам был очень близок к тому, чтобы спровоцировать существующий режим, когда опубликовал статью по статистическому обоснованию наследственных законов Менделя. Эта статья привела в ярость влиятельного генетика, Т. Д. Лысенко, ложные теории которого поддерживали официальные власти. Лысенко и его коллега, математик Е. Кольман, осудили работу Колмогорова в статьях, где заявили, что «биологические законы не похожи на математические» и в качестве доказательства привели цитаты из трудов Энгельса и Ленина. Тем не менее, Колмогорову, который с 1939 года был членом Академии наук, повезло больше, чем некоторым. (Природу этого везения можно понять из такого факта: во время Второй мировой войны Сталин приказал выдать всем членам Академии наук по одеялу, т. к. температура в здании Академии в зимние месяцы держалась на точке замерзания воды.)

В 1953 году смерть диктатора привела к появлению в душе Колмогорова надежды. Он и некоторые его коллеги вновь обрели возможность выезжать за границу; вообще-то, он был одним из четырех членов советской делегации, прибывших на конгресс в Амстердам, о чем мы рассказывали в начале этой главы. Снова появилась возможность общаться с зарубежными учеными и жить, не боясь быть высланным в один из трудовых лагерей в Сибири. Несмотря на всю свою ограниченность и мелкость по сравнению с правами и свободами граждан Запада, хрущевская «оттепель» послужила важным этапом для советских интеллектуалов. Она оказала глубочайшее влияние и на жизнь Колмогорова. Он смог посещать и последующие встречи, например, Международный конгресс, проводившийся в Стокгольме в 1962 году, и даже провел целый семестр в Париже. Десятилетний период, последовавший за 1953 годом, оказался самым продуктивным в его жизни.

Таким образом, Андрей Николаевич Колмогоров поставил вопрос об инвариантных торах и сформулировал свою теорему об их сохранении под действием возмущения. С помощью другой терминологии и новых методов он вернулся к задаче, которую рассматривали еще Дирихле и Вейерштрасс. Но был ли адекватен набросок доказательства Колмогорова? Была ли столь старая задача решена сразу, одним человеком, в схватке один на один? Это было бы слишком хорошо, чтобы быть правдой.

Переживания из-за доказательства

Юрген Мозер снова и снова перечитывал доказательство, пытаясь понять все незаписанные детали. Он удивлялся, почему они явно не сформулированы в статье, т. к. вовсе не находил их очевидными. Редактор *Mathematical Reviews*, журнала, оказывающего полезную услугу публикацией кратких аннотаций технических статей, попросил его написать краткий обзор этой статьи. Мозеру это задание удавалось с трудом, хотя обычно это довольно простое дело. Он предпочел бы избежать внутренней борьбы с самим собой, но, раз уж он взялся за это, он должен довести дело до конца.

Статья, лежавшая перед ним на столе, представляла собой опубликованный вариант выступления Колмогорова на Конгрессе в Амстердаме. Мозер уже просмотрел несколько других статей, на которые ссылался этот русский математик. Отсутствующие подробности теоремы об инвариантных торах должны были быть там, но он никак не мог убедить себя в полноте доказательства Колмогорова. Недоставало доказательства сходимости некоторых рядов — основы всего построения. Сначала он счел ошибочным свое собственное рассуждение, подумав, что, скорее всего, это утверждение очевидно и что это просто *он* не может его постигнуть. Это вызвало у него еще более страстное желание понять все. Он пробовал снова и снова, но тщетно. Через несколько дней он понял, что ничего здесь не ясно. Все его попытки проникнуть в суть лишь создали новые трудности. На первый взгляд, они казались непреодолимыми. Они представлялись сложными и после самых смелых хитроумных попыток справиться с ними.

С другой стороны, Колмогоров был широко известным и уважаемым ученым, а Мозер, которому было двадцать с небольшим и который совсем недавно получил свою ученую степень, пока вообще не имел какой-либо репутации. Но его совесть требовала, чтобы он дошел до сути задачи. Не составляло никакого труда позволить сомнениям померкнуть в лучах славы великого русского математика, написать хвалебный обзор и вернуться к своему собственному исследованию. И все же он не поддался этому искушению. Убедившись, что очевидное доказательство сходимости отсутствует, Мозер написал резюме статьи, опубликованное в одном из номеров *Mathematical Reviews* за 1959 год, в котором отметил, что доказательство сходимости для него выглядит неубедительно. Обзор заканчивался похвалой результата, который последовал бы из статьи Колмогорова, если бы вопрос был решен полностью.

Тем не менее, эта проблема продолжала беспокоить Мозера. Он не счел ее закрытой, после того как отправил свое резюме в журнал. Он хотел понять, было ли утверждение Колмогорова правильным. Его любопытство по отношению к статусу данного результата и его доказательства вытеснило интерес ко всем другим задачам, над которыми он работал. Он стал почти одержим им.

Однажды, направляясь в свой рабочий кабинет в Массачусетском технологическом институте в Кембридже, Мозер вдруг вспомнил дискуссию, имевшую место шестью или семью годами ранее. Тогда он все еще был в Германии, в Геттингенском университете, и скоро должен был уехать из Европы в Соединенные Штаты, где в Нью-Йоркском университете ему назначили стипендию Фулбрайта. В конце семинара он подошел к оратору, Карлу Людвигу Зигелю, чтобы задать ему несколько дополнительных вопросов по теме, которой тот коснулся во время лекции.

В те годы Зигель был одним из ведущих математиков мира. Как и Колмогоров, он внес важный вклад в те области математики, которые явно не имели ничего общего друг с другом, а полученные им результаты до сих пор нередко цитируют в таких областях, как теория чисел и небесная механика. Он был одним из немногих немецких ученых, вернувшихся в эту страну по окончании Второй мировой войны.

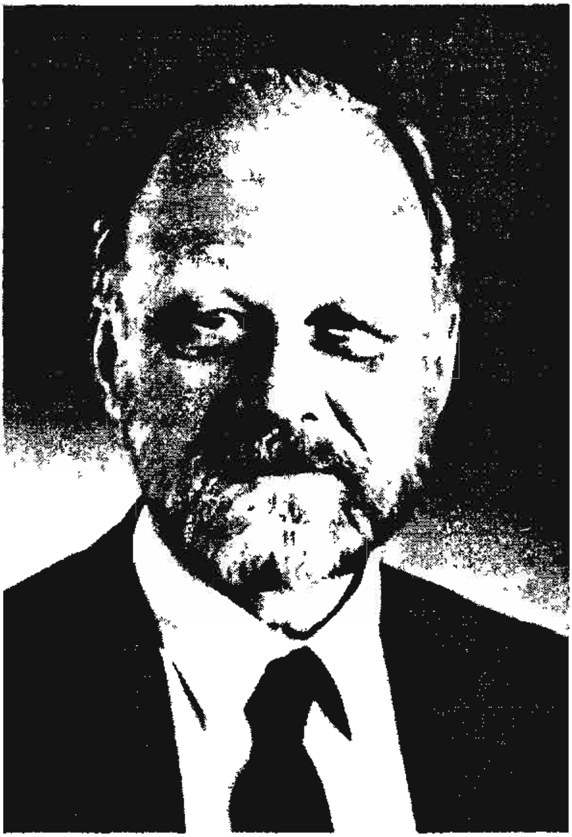
Сам Юрген Мозер приехал в Геттинген в 1947 году, в возрасте девятнадцати лет, из Восточной Пруссии — Кенигсберга, оккупированного советскими войсками. В регионе, ранее принадлежавшем Германии, была установлена коммунистическая власть, и этот прекрасный балтийский город, в котором много лет жил и работал Эйлер, был переименован в Калининград. Судя по всему, Мозер сделал правильный выбор, эмигрировав в Федеральную Республику Германию. Для начала он приступил к написанию диссертации под руководством Франца Реллиха, но в 1950 году в Геттинген из Принстона вернулся Зигель, и Мозер стал посещать его лекции по теории чисел. Мощная математика, высокие стандарты и строгий стиль, который проповедовал Зигель, произвели на юношу глубокое впечатление. Реллих помог Мозеру добиться права на написание примечаний к лекциям Зигеля по небесной механике, которые впервые были опубликованы на немецком языке в 1956 году, через год после преждевременной кончины Реллиха. (Эта книга была посвящена его памяти.) Таким образом, хотя интересы Мозера и разошлись с интересами его первого наставника, он все же весьма обязан пониманию и щедрости Франца Реллиха. Зигель же, в свою очередь, быстро признал талант своего нового ученика, и они начали работать вместе уже с 1951 года, причем Мозер продолжал писать свою диссертацию под руководством Реллиха.

Дискуссия с Зигелем в Геттингене, о которой вспомнил Мозер, касалась задачи того же типа, которую теперь рассматривал Колмогоров. Зигель сказал что-то вроде: «Этот вопрос кажется мне очень важным», — но тогда Мозер еще не был готов понять следствия этого заявления. Теперь он осознал, что именно эта причина лежит в основе его одержимости данной задачей. Подсознательно ощущая сходство этих двух вопросов, он вспомнил замечание Зигеля, ставшее для него стимулом к изучению данного вопроса.

Мозер доверял суждению Зигеля о важности данной задачи, а теперь еще один авторитетный ученый из этой области, Колмогоров, взялся за нее и зашел даже дальше Зигеля. Это убедило Мозера, что эту задачу стоит изучать. И все же, несмотря на эту уверенность, он хотел знать, *почему* все обстоит именно так: что заставило этих людей счесть данную задачу важной? В любом случае, его математический вкус и любопытство заставляли его разрешить вопрос об инвариантных торах, независимо от его важности. В течение трех следующих лет ему удалось добиться и того, и другого: решить задачу и понять ее огромную важность.

Тем временем, Мозер вернулся в Институт Куранта в Нью-Йоркском университете, где ему назначили первую стипендию Фулбрайта. На этот раз у него была уже постоянная работа, поэтому он мог полностью сосредоточиться на задаче об инвариантных торах. Он обсудил ее с некоторыми другими учеными и даже несколько раз встретился с Зигелем, т. к. его бывший научный руководитель постоянно ездил из Европы в Северную Америку и обратно. Но никто не мог оказать ему сколь-нибудь ощутимую помощь в этом одиноком путешествии к вершине того, что напоминало непокоренную и опасную гору. Он должен был покорить вершину в одиночку.

Летом 1961 года кое-что начало проясняться. Мозер достиг вершины. Он понял, что теорема Колмогорова действительно правильна. Теперь доказательство выглядело полным и прозрачным. Применив идею, которая внезапно осенила его, Мозер нашел метод быстрой сходимости. Но он не стал праздновать победу сразу. Сначала он должен был убедиться, что все части подходят друг к другу, так как ошибки обычно возникают там, где их меньше всего ожидаешь. Он хотел перепроверить все несколько раз. Он должен был сделать перерыв, отложить доказательство на некоторое время, чтобы потом посмотреть на него свежим взглядом и оценить ясным умом.



Илл. 5.3. Юрген Мозер (Любезно предоставлено Ю. Мозером)

Следующие шесть месяцев он потратил на запись своей работы и тщательную шлифовку ее представления. Он не спешил. Он хотел объяснить все понятным языком, облегчить понимание читателя, позволить оценить доказательство неспециалистам Это было не просто, но он не пожалел времени, и у него все получилось

Люди вроде Мозера встречаются редко. Любой, кто понимает важность такого результата, послал бы свою статью для публикации в один из главных журналов, в *Annals of Mathematics*, в *Inventiones* или в *Acta*

Mathematica, стремясь тут же получить международную известность. Любой, кроме Юргена Мозера. В феврале 1962 года он представил свою статью под скромным названием «Об инвариантных кривых отображений кольца, сохраняющих площадь»[1] для публикации в журнале *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen,* представляющем собой неизвестное издание, содержащее также статьи по физике и другим естественным наукам. В том выпуске журнала сразу после статьи Мозера вообще шло ботаническое исследование леса вблизи Геттингена.

Но бриллианты сверкают, где бы на них ни упал свет. Об этой статье узнали несколько влиятельных ученых и, прежде всего, сам Зигель, который переслал ее для публикации в Геттингенскую Академию. Специалисты, познакомившиеся с ней, быстро оценили ее важность, и вскоре после этого Мозер получил широкую известность. Тогда ему было тридцать четыре года.

В том же 1962 году Мозер получил значительную стипендию Слоана и решил потратить ее на поездку в Советский Союз. Ранее, в этом же году, он встречался с Колмогоровым и некоторыми его учениками на Международном конгрессе в Стокгольме, а теперь хотел поближе познакомиться с ними и с их работой. Русские отнеслись к нему гостеприимно, и Мозер очень плодотворно пообщался с ними. В Москве в частных беседах с Колмогоровым и другими учеными он обсудил теорему об инвариантных торах, хотя официально читал лекцию по другой теме. По этому случаю он вновь встретился с одним из учеников Колмогорова, Владимиром Игоревичем Арнольдом, который переводил лекцию Мозера. Обладая весьма скромными познаниями в русском языке, Мозер все же с удивлением заметил, что во время лекции перевод Арнольда иногда опережал его собственные высказывания.

Блестящий ученик Колмогорова, Арнольд сам интересовался теоремой об инвариантных торах. Независимо от Мозера и примерно в то же время, он решил ту же задачу по-другому, использовав несколько иные гипотезы. К описанию работы Арнольда мы вернемся позднее.

Внимательный к общественному и политическому окружению, Мозер был приятно удивлен, когда увидел прочное, положительное развитие советской математической школы и особенно то, каким образом талантливую молодежь поощряли к развитию их умений. Но он увидел и темную сторону коммунистического режима. С. П. Новиков, в наше время знаменитый тополог, а тогда никому не известный двадцатипяти-

[1] *On Invariant Curves of Area-Reserving Mappings of an Annulus.*

летний юноша, попросил Мозера отвезти на Запад статью и отослать ее коллегам в Принстоне. В Советском Союзе работу Новикова не оценили, и он боролся за признание. Его единственной надеждой оставалась публикация в западном журнале с хорошей репутацией. Для советского ученого это было невозможно без разрешения Коммунистической партии. Ответа же на заявление такого рода можно было ждать годами, после чего приходил, как правило, отказ. Мозер рискнул бросить вызов советским властям и выполнил желание Новикова. Статья появилась в *Annals of Mathematics*. В 1970 году Новиков стал одним из обладателей медали Филдса, о чем объявили на Международном математическом конгрессе в Ницце.

Карьера Мозера быстро шла вверх. В Институте Куранта была идеальная атмосфера, и он оставался там еще восемнадцать лет, а в 1967–1970-х годах занимал пост директора этого института. В этот период он внес важный вклад в небесную механику, спектральную теорию, вариационное исчисление, дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциальную геометрию и комплексный анализ. В 1980 году он получил предложение от знаменитого Швейцарского технологического института Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) в Цюрихе. Ностальгия по его прежней жизни в Европе привела к тому, что он согласился стать заведующим кафедрой, а впоследствии и директором местного математического института.

Юрген Мозер награждался многочисленными премиями, медалями и знаками отличия, причем список этот далек от полноты. В 1967 году ему присудили премию Американского математического общества и Общества промышленной и прикладной математики, учрежденную в честь Джорджа Биркгофа. С 1983 по 1986 год он был президентом Международного союза математиков и возглавлял комиссию по присуждению медалей Филдса на конгрессе 1986 года в Беркли. В январе 1989 года по случаю присуждения ему степени *Doctor Honoris Causa* Рурским университетом в Бохуме (одновременно с двумя другими немецкими математиками Грауертом и Реммертом) почетная лекция Мозера касалась вопроса устойчивости в небесной механике. Вопрос, который он представил как наиважнейший в современном математическом исследовании, был связан с существованием бесстолкновительных сингулярностей задачи n-тел. (В то время статус доказательства Ша, описанного в третьей главе, еще не был ясен.) А совсем недавно Мозер получил премию Вольфа по математике за 1994–1995 год[2].

[2]Юрген Мозер скончался 17 декабря 1999 г. — *Прим. ред.*

Закручивающие отображения*

Основным результатом статьи Мозера 1962 года является *теорема о закручивании*. Сейчас мы опишем этот результат и при этом объясним причину такого ее названия. Для этого мы должны вернуться к рисунку 5.5 и рассмотреть расслоение трехмерного многообразия постоянной энергии инвариантными торами.

Вспомним, что отображение Пуанкаре мы получали, взяв поперечное сечение потока и отметив точки первого возвращения в это сечение, как показано на рисунках 1.11 и 1.13 в первой главе. В настоящем случае это значит, что на многообразии энергии мы берем плоскость, пересекающую инвариантные торы перпендикулярно. Каждый тор пересекается с этой плоскостью по окружности, поэтому сечение вложенных торов содержит бесконечно много окружностей с общим центром. (Они могут и не быть *точными* окружностями с точки зрения геометрии, но, как мы уже видели, для тополога любая простая замкнутая кривая на плоскости — это окружность.) Каждый тор соответствует окружности и наоборот.

В случае с невозмущенной интегрируемой системой каждая орбита потока ограничивается тором. Это значит, что орбита пересекает поперечное сечение на окружности, соответствующей данному тору. Продолжая движение по орбите (путем итерации отображения первого возвращения), мы попадаем на поверхность сечения в другой точке той же окружности. Таким образом, при итерации отображения первого возвращения точки на каждой окружности движутся вокруг нее.

Таким образом, вместо того чтобы изучать поток на инвариантных торах, размерность данной задачи можно сократить на единицу и рассмотреть отображения, которые просто вращают концентрические окружности вокруг их центра, причем каждая окружность поворачивается на разный угол. Каждая окружность инвариантна: точки, которые на ней начинаются, остаются на ней и далее. Выбрав в качестве границ внешнюю и внутреннюю окружность, Мозер рассмотрел кольцо, подобное тому, что изображено на рисунке 5.6, и задался вопросом, что происходит с окружностями внутри этого кольца при приложении возмущения.

Данную задачу можно редуцировать еще дальше до рассмотрения класса так называемых *закручивающих отображений*, которые поворачивают окружности на угол, увеличивающийся с увеличением радиуса. Таким образом, маленькая окружность поворачивается на меньший угол, чем большая. Это вытекает из допущения о том, что отношение частот невырождено и изменяется по мере увеличения второго интеграла K и поперечного движения через торы, изображенные на рисунке 5.5. В результате этого кольцо закручивается, как и предполагает терминология. Точки на окружностях, соответствующих торам с рациональными отношениями частот, поворачиваются на рациональные углы, и мы говорим о рациональных или *резонантных* окружностях. Точно также иррациональные или *нерезонансные* окружности соответствуют торам, несущим орбиты с иррациональными отношениями частот. Теперь исходный вопрос касательно возмущения интегрируемой системы звучит так: *«Если скручивающее отображение слегка изменить, сохранятся ли окружности? Могут ли точки, расположенные сначала на одной окружности, переместиться на другую?»*

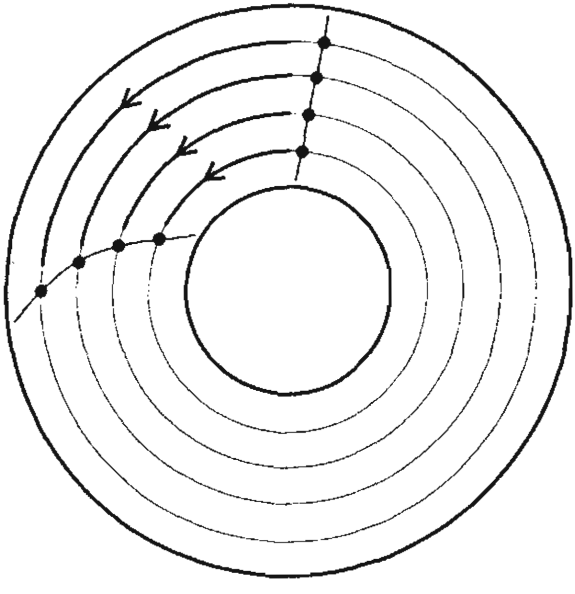


Рис. 5.6. Закручивающее отображение, определенное в кольце

Вспомним, что геометрическая теорема Пуанкаре, которую, как мы описали в начале второй главы, доказал Биркгоф, также касалась отображений, определенных в кольце. Однако Пуанкаре и Биркгофа интересовало сохранение изолированных неподвижных и периодических точек, тогда как Мозер занимался сохранением целых инвариантных окружностей: целых торов, заполненных орбитами.

Будучи переведенным в термины потока на инвариантных торах, ответ на вышепоставленную задачу дает частичное объяснение теоремы Колмогорова. Мозер показал, что при определенных условиях, включая требования того, чтобы закручивающее отображение сохраняло площадь, чтобы возмущение было достаточно мало и тоже сохраняло площадь и чтобы тор был «в достаточной степени иррационален», сохраняется, по меньшей мере, одна нерезонансная инвариантная окружность. (Как мы отметили во второй главе, сохранение площади предполагает, что отображение переносит любой участок кольца в другой участок той же площади, как и происходило в случае отображений, рассматриваемых Пуанкаре и Биркгофом.) Возможно, что сама окружность претерпит небольшую деформацию, но точки на ней не смогут переместиться на другие окружности в процессе итерации данного отображения. Вообще-то, результат Мозера предполагает даже нечто большее: сохраняются *все* нерезонансные окружности, соответствующие торам с достаточно иррациональными отношениями частот. Очень скоро мы расскажем об этом кое-что еще.

Хотя и несколько отличающийся от исходного утверждения Колмогорова, вывод Мозера мог быть сделан путем наложения на возмущающую функцию некоторой более слабой гипотезы, например, более гибких условий, при которых делается данный вывод. Следовательно, это самостоятельный результат, имеющий преимущество наличием ясного и строгого доказательства.

Самым главным вкладом Мозера в эту задачу было построение итерационного процесса, который сходится очень быстро. Быстрая сходимость крайне важна для преодоления влияния так называемых *малых делителей* или *малых знаменателей*. С самого зарождения теории возмущения, на протяжении почти двух столетий, эти делители создавали все проблемы. С ними боролись Пуанкаре, Вейерштрасс и многие другие, но первым создаваемые ими трудности реально преодолел Мозер.

Как и при обычном арифметическом делении, делители представляют собой элементы, на которые делятся некоторые коэффициенты. Если они произвольно малы, в зависимости от величины делимого коэффициента, выражения, которые получаются в результате, могут быть очень большими. Если разделить 1 на 0,0001, получится 10 000. В данном случае делителем является число 0,0001; но если делитель еще меньше, то результат получится намного больше. Доказывая сходимость бесконечного ряда, необходимо показать, что следующие друг за другом члены этого ряда становятся все меньше и меньше со скоростью, достаточной для того, чтобы их сумма была конечной. Если членами ряда становятся такие большие числа и их размер невозможно контролировать, то данный ряд вряд ли сойдется.

К сожалению, методы теории возмущений, при которых квазипериодические решения выражаются в виде бесконечных рядов, неизбежно содержат малые делители. Примером тому служат движения Юпитера и Сатурна вокруг Солнца. Юпитер поворачивается на 299, а Сатурн — на 120,5 угловых секунд в сутки. Если частоты этих планет обозначить за ω_{Jup} и ω_{Sat} (числа, пропорциональные 299 и 120,5), то величина $2\omega_{\text{Jup}} - 5\omega_{\text{Sat}} (= -4,5)$ очень мала по сравнению с каждой из отдельных частот планет. Выражения вроде последнего выступают в качестве знаменателей в ряду, описывающем квазипериодические решения скручивающего отображения и вследствие этого порождают малые делители. Лаплас и Лагранж сталкивались с малыми знаменателями, и эти вычисления, включая связанные с резонансом Юпитера–Сатурна, описываются на многих страницах «Небесной механики» Лапласа.

На первый взгляд, ожидать сходимости ряда безнадежно. Однако если возмущающие функции достаточно гладки, то *числители* членов данного ряда также уменьшаются по величине по мере движения ко все более высокому порядку. Сходимость же определяется как раз величиной членов как таковых, а следовательно, и *относительными* скоростями уменьшения их числителей и знаменателей. Здесь и появляется понятие достаточно иррационального отношения частот. Как мы отметили, произвольно малых знаменателей избежать невозможно, т. к. произвольно близко к каждому иррациональной окружности существует рациональная. Однако если для иррационального отношения ω_1/ω_2 можно получить близкое приближение только в виде дробей m/n с очень большими целыми числами m и n, то оказывается, что числители уменьшаются быстрее знаменателей, в результате чего наш ряд сходится, а это предполагает сохранность соответствующей ему окружности.

Приручив задачу малых делителей, Мозер дал ответ на старый вопрос, который безуспешно пытались решить многие его предшественники. Большие идеи почти всегда отличаются прямотой и простотой, и понимание Мозера обладает обоими этими качествами. На этом его работа не прекратилась. Он продолжил браться за сложные вопросы в других областях математики с таким же чутьем. Все, кто следил за достижениями Мозера, восхищались той естественности, с которой его идеи вытекают из контекста исследования. Чтение одной из его статей напоминает восхождение на опасную гору по самому безопасному и наиболее живописному пути. Как только вы взобрались на вершину, ваши усилия будут вознаграждены величественными видами. А открыл и отметил эти тропы Юрген Мозер.

ОДАРЕННЫЙ УЧЕНИК

Андрей Николаевич Колмогоров оторвал взгляд от рукописи и посмотрел на своего ученика. «Молодой человек, — четко сказал он, — вы решили тринадцатую проблему Гильберта!» Сердце Владимира Игоревича Арнольда забилось быстрее обычного.

В своей пленарной лекции на Международном математическом конгрессе, состоявшемся в 1900 году в Париже, великий немецкий математик Давид Гильберт обозначил несколько тем и конкретных областей, которые он считал особенно важными для будущего развития математического исследования. Он составил список из двадцати трех конкретных вопросов: гипотез и задач, содержавших сущность этого предмета. В истории математики Гильберт, наверное, более всего известен своей поддержкой *формализма:* убежденности в том, что можно доказать внутреннюю согласованность всех утверждений теории чисел, а в конечном счете, и анализа в целом, — надежда, которая, в конце концов, погибла в 1931 году, когда была сформулирована знаменитая теорема Курта Геделя о неполноте. Тем не менее, список проблем Гильберта оказал сильное влияние на определение направлений математического исследования (кое-кто даже полагает, что это влияние было чрезмерно сильным). Хотя на попытки решить эти проблемы была потрачена уйма энергии, некоторые из них остаются нерешенными по сей день.

В 1956 году, в момент вдохновения, русский юноша достиг того, что безуспешно пытались достигнуть многие другие люди на протяжении более пятидесяти лет. Владимиру Игоревичу Арнольду только-только исполнилось девятнадцать лет, когда он показал своему учителю решенную им проблему Гильберта. Надеясь дать своим ученикам стимул к глубокому исследованию, Колмогоров на одном из своих семинаров обозначил «редукцию» — упрощение задачи, — которую он нашел для тринадцатой проблемы Гильберта. На саму эту редукцию он потратил много месяцев работы, а потому никак не ожидал, что однажды один из его студентов положит перед ним решение этой задачи. Сама задача выходит за рамки нашего повествования, и мы не станем ее описывать, разве что отметим, что Арнольд преуспел там, где потерпели неудачу

Илл. 5.4. Владимир Игоревич Арнольд. (Любезно предоставлено С. Здравковской)

многие более старшие люди, и он был в том возрасте, когда большинство его сверстников еще только заканчивают среднюю школу.

С того времени никто не сомневался, что Арнольд станет математиком. Ему повезло родиться как раз в то время, когда этот путь для него открылся. Он был сыном еврейки, а потому не смог бы поступить в Московский университет, будь жив Сталин. Смерть советского вождя в 1953 году, за которой последовало послабление политической ситуации, продолжавшееся вплоть до ввода советских войск в Чехословакию в 1968 году, дала ему как раз достаточно времени для получения научных степеней и должности профессора на факультете математики и механики Ему действительно повезло, так как он достиг нужного возраста в единственный открытый период в Советском Союзе за более чем семьдесят лет его существования. Арнольд знал, как использовать эти ценные годы наилучшим образом.

После успеха с проблемой Гильберта Колмогоров предложил своему ученику выбрать собственную тему исследования. Колмогоров, вообще, исповедовал весьма либеральный подход к обучению: он разрешал своим студентам работать над самостоятельно выбранной ими темой, требуя лишь сообщать ему, если они получат какие-нибудь интересные результаты. (Однако вкусы его были вполне определенны: когда впоследствии Арнольд изучал сокращения сердца, Колмогоров обескуражил его, заметив: «Это задача не является одной из классических, над которыми нужно работать». Математическая физика была гораздо важнее!) Во время занятий он уделял мало времени фундаментальным доказательствам, демонстрируя лишь *наиболее существенные моменты: суть проблемы.* Пробелы же в доказательстве студенты должны были заполнять самостоятельно, дома. Этого же подхода Колмогоров придерживался и в своем собственном исследовании. Он редко заботился о том, чтобы сесть и записать все подробности. Он чувствовал всю краткосрочность жизни и предпочитал провести ее, созидая, а не присваивая. Эту точку зрения разделяют очень немногие математики, так как она может привести к поверхностности. Более того, из-за нее может возникнуть и серьезная путаница, как это обнаружил Мозер, читая «доказательство» результата, касающегося торов.

Подобное поведение большинства математиков, безусловно, было бы сопряжено с опасностью, так как в этом случае было бы сложно провести различие между доказанными теоремами, недоказанными (но истинными) утверждениями, ложными заявлениями и гипотезами. Огромное большинство опубликованных математических статей правильны и надежны, в отличие от других областей науки, в которых статус новых открытий порой бывает неясным. Это завидное положение вещей основано на «нормальных» математиках, которые тщательно разрабатывают и проверяют каждую мелочь. Однако в исключительных случаях неординарная способность к созиданию сопровождалась более непринужденным подходом. Такой подход не помешал Колмогорову достигнуть успеха, причем он ни в коей мере не был поверхностным. Яков Синай, который еще студентом вместе с Арнольдом посещал курс и семинар Колмогорова в 1956–1957 годах, вообще отмечает, что всем участникам было ясно, что Колмогоров *знает, как заполнить все пробелы* в своем доказательстве результата, касающегося торов, с одним возможным исключением, но и это, по его убеждению, тоже было возможно. Оно касалось одной технической детали, связанной с мерой сохраняющихся торов. В самом деле, и Мозер, и, как мы увидим, Арнольд могли предоставить отсутствующие подробности для этого шага и получить независимые доказательства целого.

Получив поддержку Колмогорова, Арнольд не стал дожидаться других советов. Он тут же приступил к работе над еще одной задачей, связанной с той, которую он только что решил. Он захотел определить, *можно ли представить некоторую функцию на кривой в виде суммы функций ее координат.* Чтобы объяснить это, предположим, что у нас есть функция f, определенная на плоскости и принимающая значения на этой плоскости (как ввод, так и вывод являются двумерными). Таким образом, f имеет две выходные координаты: f_1 и f_2. Если мы выберем неподвижную кривую на плоскости и *ограничим* f этой кривой (т. е. рассмотрим значения этой функции только на данной кривой, пренебрегая всеми прочими), то при каких условиях мы сможем записать f_1 и f_2 в виде сумм функций плоских входных координат x_1 и x_2? Сначала Арнольд рассмотрел более простой случай, когда неподвижная кривая является кругом. Он быстро понял, что данный вопрос предполагает изучение итераций отображений на круге. Затем он осознал, что путем редукции эту задачу можно свести к задаче инвариантности торов. Это было действительно удивительно, так как он начал с области, на первый взгляд, не связанной с теорией динамических систем, и умудрился построить мост между двумя этими областями.

Затем Арнольд приступил к рассмотрению самой задачи об инвариантных торах и в 1961 году получил полные доказательства утверждений Колмогорова, используя гипотезы, отличающиеся от гипотез Мозера. (Арнольд принял аналитические возмущения, а Мозер – достаточно гладкие возмущения.) Некоторые из этих результатов были представлены на конференциях математиков и астрономов в Москве летом и осенью 1961 года; тогда же увидели свет и статьи, касавшиеся «модельных задач». Впервые полный результат для систем с многими степенями свободы был опубликован в «Докладах Академии наук СССР» в следующем году и по времени совпал с публикацией статьи Мозера в *Nachrichten*. Название статьи Арнольда «О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем» четко отражает ее место в трехсотлетней истории, которую мы описали в этой книге. В этой связи достаточно иронично звучит еще одно высказывание Арнольда по поводу того, что «двухсотлетний промежуток времени от Гюйгенса и Ньютона до Римана и Пуанкаре представляется мне математической пустыней, заполненной одними вычислениями».

После этого более пространные статьи, опубликованные в английском варианте «Успехов математических наук» за 1963 год, представили подробности этих доказательств и сделали Арнольда одним из создателей КАМ-теории. Обратите внимание, что мы не говорим о «КАМ-теореме», так как это все-таки теория, содержащая несколько отдельных результатов, самыми ранними из которых являются результаты Колмогорова, Арнольда и Мозера. Теперь появилось множество технических усовершенствований и обобщений, так как КАМ-теория остается очень активной областью исследования.

Хаос диффундирует

Второй важный вклад в классическую механику, вероятно, с еще более поразительными и неожиданными физическими следствиями был сделан в 1964 году, когда Арнольд открыл удивительное явление, которое теперь носит его имя: *диффузию Арнольда.* До тех пор пока он не создал первый (пусть и несколько искусственный) пример, его научный руководитель Колмогоров был полностью убежден в том, что подобное поведение крайне невероятно в гамильтоновых системах. Как мы увидим, это свойство дополняет результаты по устойчивости, полученные в рамках КАМ-теории. Оно предполагает присутствие частной разновидности хаоса с крайне неустойчивыми орбитами, поэтому неудивительно, что Колмогоров не особенно спешил принять возможность его существования, пока Арнольд не доказал, что оно действительно может иметь место.

Диффузия Арнольда связана с возможно хаотическим поведением орбит, которые изначально лежат на резонансных торах и на некоторых нерезонансных торах, которые разрушаются при приложении малого возмущения. В примере, изображенном на рисунке 5.5, эти торы находятся между «устойчивыми» нерезонансными торами, которые *не* разрушаются малыми возмущениями. Таким образом, орбиты, которые изначально находятся на резонансных торах, не могут убежать из области между двумя соседними устойчивыми торами: они остаются «в ловушке» между двумя этими поверхностями. Следовательно, этот пример с двумя степенями свободы позволил предположить, что некоторую разновидность устойчивости будут проявлять *все* орбиты. Колмогоров полагал, что это также должно быть справедливо для торов с еще более высоким числом измерений в системах с тремя или более степенями свободы. Арнольд с этим не согласился.

Прежде чем приступить к описанию диффузии Арнольда, нам сто́ит более подробно исследовать случай с двумя степенями свободы, изображенный на рисунке 5.5. Мы опишем его поведение с помощью отображения Пуанкаре на кольце, получающемся при поперечном сечении в многообразии постоянной энергии. Строение невозмущенного отображения интегрируемой системы приводилось на рисунке 5.6. Как мы видели, оно представляет собой простое закручивание, причем каждая окружность инвариантен, а ее точки поворачиваются посредством отображения на больший или меньший угол, в зависимости от радиуса окружности. Вспомним, что КАМ-теория предполагает, что после возмущения большинство окружностей с иррациональными отношениями частот сохраняются в виде инвариантных кривых, хотя и в слегка искаженной форме. Промежуточные рациональные окружности и некоторые иррациональные разрушаются.

Как правило, рациональные окружности распадаются на дискретные множества периодических точек, некоторые из которых являются устойчивыми, а другие относятся к седловому типу. И, опять-таки, обычно устойчивые и неустойчивые многообразия последних пересекаются трансверсально, так что гомоклинические точки, которые получаются в результате, создают именно тот тип хаоса, который мы исследовали в первой и второй главах. Тем не менее, каждое такое множество периодических точек с его пересекающимися многообразиями, гомоклиническими сетями и хаотическими орбитами заперто между двумя соседними инвариантными окружностями, которые сохраняются, в результате чего мы имеем своего рода сосуществование порядка и хаоса. Строение одной из таких *резонансных полос* мы пытаемся проиллюстрировать рисунком 5.7. Предположительно, именно такую картинку Пуанкаре посчитал слишком сложной для изображения, и, как и во многом другом, он был прав. На своем наброске мы изображаем только первый этап бесконечной последовательности периодических точек и устойчивых и неустойчивых многообразий, которые «упакованы» в гомоклинические сети между каждой парой сохраняющихся инвариантных окружностей. И, как мы уже видели, сохраняется бесконечное канторово множество окружностей.

Таким образом, читатель должен попытаться представить бесконечно много таких полос, соответствующих пробелам в канторовом множестве типа того, что изображено на рисунке 3.7, с окружностями, разделяющими их, подобно точкам в канторовом множестве. Как мы и обещали в конце четвертой главы, хаотические и устойчивые движения тесно переплетаются между собой. Первые являются хаотическими в том смыс-

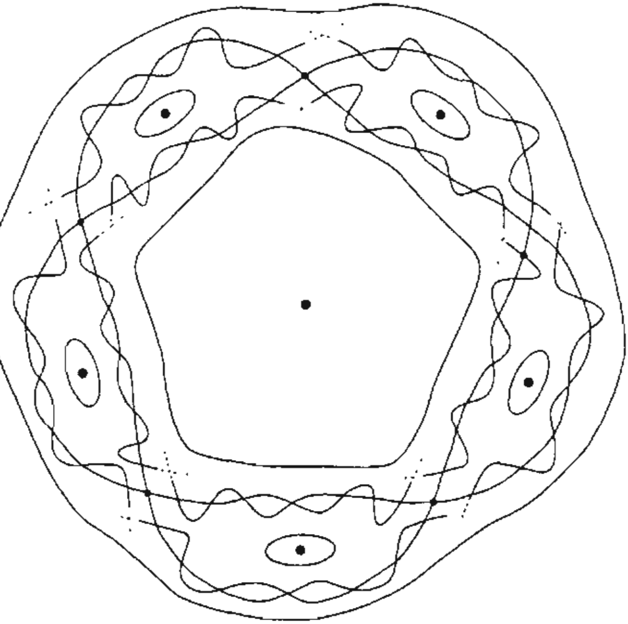


Рис. 5.7. Сосуществование устойчивости и хаоса в возмущенном отображении кольца

ле, что иррегулярно циркулируют в пределах каждой полосы, колеблясь с бóльшими или меньшими периодами вблизи неустойчивых седловых точек, но они упорядочены в том смысле, что не могут убежать из полосы, в пределах которой они начались. Если смотреть издалека, то этот тип хаоса представляется слабым. На этой основе можно описать диффузию Арнольда, намного более странную и сильную.

Как мы уже видели, в случае с консервативной системой полная энергия остается постоянной на орбитах, вследствие чего решения ограничиваются энергетическим многообразием, размерность которого на единицу меньше размерности полного фазового пространства. Следовательно, система с тремя степенями свободы, имеющая три переменные положения и три переменные импульса, имеет семейство пятимерных многообразий энергии. Каждое из этих многообразий содержит трехмерные торы, так что в общем случае существуют три независимые частоты. Естественно возникает вопрос: «Служат ли эти торы преградами на многообразии энергии, которые решения пересечь не могут, коими явно служат двумерные торы в трехмерном случае, изображенном на рисунке 5.5?»

Мы не можем рисовать картинки в пространствах с числом измерений, превышающим три, поэтому мы воспользуемся аналогией, использующей объекты с меньшим числом измерений. Предположим, что до возмущения резонансные и нерезонансные торы были концентрическими окружностями, лежащими в плоскости, и допустим, что фазовое пространство было трехмерным, как на рисунке 5.8. После возмущения резонансные и некоторые из нерезонансных окружностей разрушаются, а большинство нерезонансных окружностей лишь слегка деформируются, но остаются замкнутыми кривыми. Данный пример отличается от примера, приведенного на рисунке 5.7, тем, что в этом случае «разрушенные орбиты» уже не запираются между замкнутыми кривыми, так как теперь они могут покинуть плоскость и свободно двигаться в пространстве. Сохранившиеся окружности, будучи одномерными, не могут разделять различные области трехмерного пространства.

Фактически, в своей оригинальной статье, представленной на конкурс, который мы описали в первой главе, Пуанкаре уже осознал, что существование гладких инвариантных поверхностей в системах с более чем двумя степенями свободы еще не означает устойчивость. В этих фазовых пространствах с бóльшим числом измерений, безусловно, достаточно «места», чтобы орбиты проскользнули мимо торов, так же как мы можем выйти за пределы круга, нарисованного на тротуаре. Тогда возникает вопрос: «Пользуются ли какие-нибудь орбиты реального дифференциального уравнения этой возможностью покинуть область, в которой они зародились, и если да, то как они ведут себя после этого?»

Арнольд нашел пример, который утвердительно отвечал на первый из этих вопросов. Более того, он показал, что поведение убегающих орбит является «очень хаотическим» в смысле, который мы сейчас попытаемся объяснить. В своем примере он рассмотрел три степени свободы и двумерные торы с трехмерными «усами». Он обобщил случай с двумя степенями свободы, изображенный на рисунке 5.5, в следующем смысле. В этом случае резонансные двумерные торы разрушаются, образуя одномерные периодические орбиты (окружности), которые появляются на отображении Пуанкаре рис. 5.7 в виде периодических точек с устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Для трех степеней свободы резонансные трехмерные торы частично разрушаются, образуя двумерные торы.

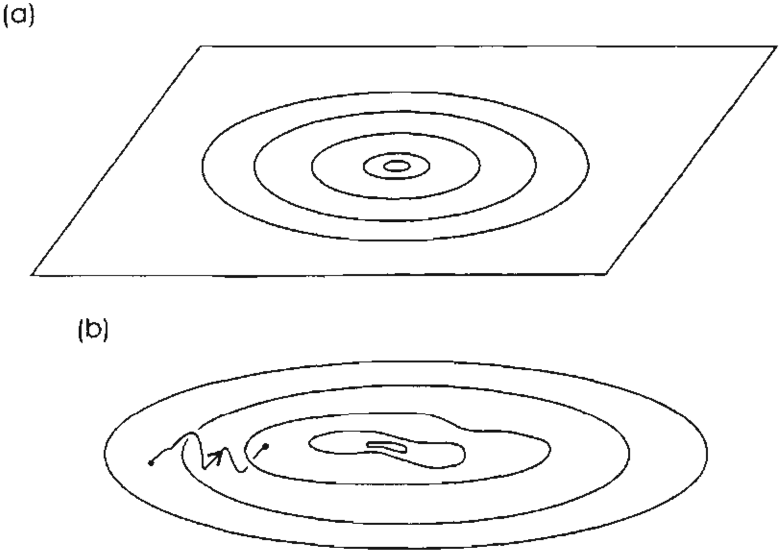


Рис. 5.8. Пример возможного поведения торов в более высоких измерениях: а) до возмущения; b) после возмущения, с изображением убегающей орбиты

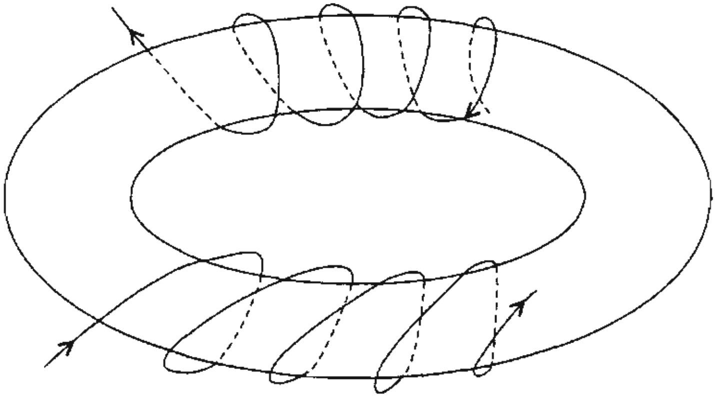


Рис. 5.9. Орбита, принадлежащая устойчивому многообразию, и орбита, принадлежащая неустойчивому многообразию тора

Аналогично тому, как равновесия седловой точки дифференциального уравнения или отображения могут обладать устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, заполненными орбитами, которые приближаются к равновесию и удаляются от него, как на рисунках 1.6, 1.9 и 5.7, так ими могут обладать и торы квазипериодических орбит. Могут существовать также орбиты, стремящиеся к тору, как на рисунке 5.9, и достигающие его по истечении бесконечного промежутка времени. Множество всех орбит, обладающих этим свойством, образует (гипер-)поверхность, которая при выполнении определенных условий является гладким, устойчивым многообразием. В примере Арнольда эти торы были двумерными, как на рисунке 5.9, а их устойчивое и неустойчивое многообразия, или *усы* (как он их назвал), — трехмерными. В данном случае наша картинка несколько произвольна, так как мы не можем изобразить орбиты в устойчивом и неустойчивом многообразиях одновременно в одном и том же трехмерном пространстве. И опять, «размер» фазового пространства с *большим числом измерений необходим*, чтобы в него все вместилось.

Устойчивое и неустойчивое многообразия имеют размерности, которые могут изменяться от тора к тору. Глядя на нижнюю часть рисунка 5.9, можно вообразить другие орбиты, которые стремятся к тору, *заполняя полную* трехмерную окрестность. Вообще-то, устойчивое и неустойчивое многообразия k-мерного инвариантного тора в системе с n степенями свободы могут иметь любую размерность вплоть до $n - k$. Устойчивые и неустойчивые многообразия могут пересекаться друг с другом вдоль орбиты, причем это пересечение может быть *трансверсальным*, как на рисунке 5.10, когда каждое из многообразий изображено в виде поверхности. Понятие «трансверсальный» имеет тот же смысл, что и в первой главе, т. е. то, что две поверхности пересекаются не по касательной вдоль общей орбиты. Используя рассуждение, аналогичное приводившемуся в первой и второй главах, можно заключить, что трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий инвариантного тора приводит к хаотическому поведению, похожему на поведение, связанное с орбитами, гомоклиническими к неподвижной точке.

Однако диффузия Арнольда еще богаче. Она имеет место, когда происходят *множественные* трансверсальные пересечения устойчивых и неустойчивых усов конечной последовательности *отдельных* торов, так что встречаются орбиты, переходящие с тора на тор более или менее «произвольно». Это явление Арнольд назвал *переходной цепочкой*. Чтобы изобразить ее, представим торы точками, а их устойчивые и неустой-

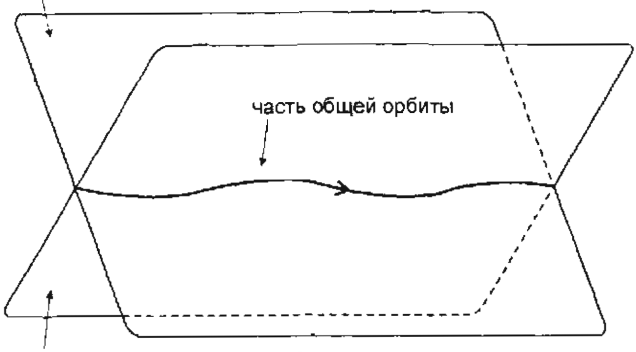


Рис. 5.10. *Трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий тора вдоль общей орбиты*

чивые многообразия — кривыми. (Безусловно, размерности торов и многообразий могут быть высокими.)

Рисунок 5.11 демонстрирует, каким образом трансверсальные пересечения создают диффузию Арнольда. Устойчивые и неустойчивые многообразия торов T_1, T_2 и T_3 пересекаются друг с другом, как это обозначено на рисунке. Орбита, начинающаяся вблизи T_1, может следовать по гетероклинической орбите почти до T_2, где переносит свою «принадлежность» на следующую орбиту, ведущую к T_3. Это может продолжаться неопределенно долго. Данная картинка «заполняется» при итерации отображения, как показано на рисунке 5.12, что может говорить о сложностях хаотического поведения. При каждой встрече с тором хаотическая орбита может перейти к следующему тору в цепочке или может вернуться к предыдущему. Однако, в отличие от достоверных изображений трехмерного фазового пространства маятника и его отображения Пуанкаре на рисунках 1.12–1.14, рисунки 5.11 и 5.12 не более чем схемы. Диффузия Арнольда требует, по меньшей мере, три степени свободы: пятимерное многообразие энергии с четырехмерным отображением Пуанкаре.

Пример Арнольда до 1964 года был искусственным в том плане, что дифференциальное уравнение, которое он создал, чтобы показать суще-

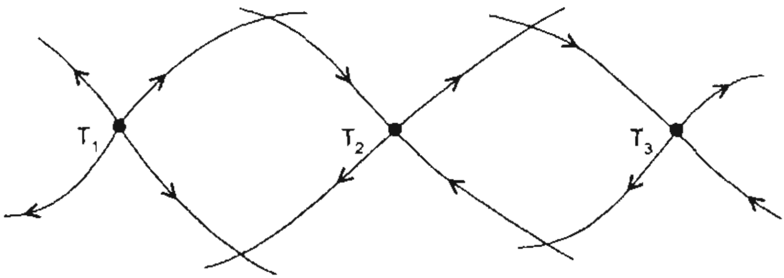


Рис. 5.11. Трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий для конечной последовательности торов порождает диффузию Арнольда

ствование диффузии, не имеет очевидного физического смысла. Однако в сноске к своей статье он предположил, что такой тип хаоса также мог бы иметь место в задаче трех тел. К сожалению, крайне сложно доказать, что столь сложное поведение действительно присутствует в определенных моделях физических систем. В последние тридцать лет в этом отношении был достигнут некоторый прогресс, но только для очень специальных случаев. Сейчас мы знаем, что диффузию демонстрируют, например, некоторые механические системы связанных осцилляторов. В данном случае это означает, что энергия может переходить от одного осциллятора к другому и обратно (от моды к моде), как если бы это происходило произвольно. Хотя диффузия Арнольда считается общим свойством неинтегрируемых гамильтоновых систем, окончательных результатов пока не получил никто. Более того, многое свидетельствует о том, что, когда диффузия Арнольда действительно происходит, она требует невероятно огромных временны́х промежутков. Следовательно, эта диффузия представляет собой неуловимый эффект, который сложно установить и количественно определить в физических системах.

Однако Джихонг Ша — тот самый, который ранее доказал гипотезу Пенлеве, — недавно продемонстрировал, что диффузия Арнольда присутствует в задаче трех тел. Он доказал этот результат поэтапно, сначала рассмотрев частный случай ограниченной задачи трех тел и затем обобщив свои идеи на общий случай. Это служит еще одним заметным вкладом молодого китайского математика в задачу, которая оставалась нерешенной почти три десятилетия.

Однако, наверное, еще более поражает то, что недавно Луиджи Кьёркиа и Джованни Галлавотти из Римского университета показали,

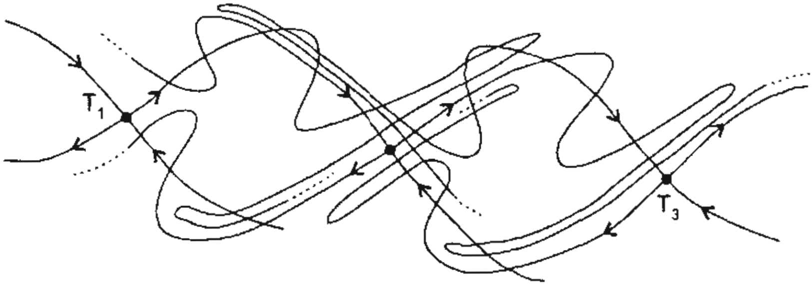


Рис. 5.12. Следующее приближение хаоса, созданного явлением диффузии Арнольда

что диффузия Арнольда происходит в модели обращения слегка асимметричной, сплющенной у полюсов, планеты по орбите вокруг неподвижной звезды — задача, изначально поставленная Даламбером. Их стасорокачетырехстраничная работа, триумф классической теории возмущений и чистого анализа, получила одну из премий за 1995 год, присуждаемых Институтом им. Анри Пуанкаре и Готье-Вийаром (издателем Пуанкаре), — особенно уместную награду.

Кое-какие свидетельства говорят о том, что диффузия Арнольда присутствует в еще одной классической астрономической задаче в Солнечной системе. В 1857 году Даниель Кирквуд, американский преподаватель математики и астрономии, заметил несколько промежутков в поясе астероидов между Юпитером и Марсом. В этом отношении пояс астероидов по своей конфигурации аналогичен кольцам Сатурна, хотя в последних частицы гораздо меньше и расположены гораздо ближе друг к другу. С тех пор астрономы и специалисты по небесной механике потратили уйму времени, пытаясь понять, каким образом возникли эти промежутки и являются ли они долгосрочными или всего-навсего краткосрочными особенностями. Существование некоторых промежутков объясняется так называемым *явлением резонанса,* проистекающим из задачи малых знаменателей, которую мы обсуждали ранее в этой главе: огромная возмущающая сила действует как раз на том расстоянии от Солнца, на котором частоты совпадают идеальным образом, в результате чего в данной области происходит выброс частиц с их орбит. К сожалению, общего объяснения для всех промежутков Кирквуда не существует, а большинство имеющихся результатов основаны, скорее, на численном моделировании, нежели на строгих математических доказательствах. Более подробную информацию интересующиеся этим вопросом читатели могут найти в книге Иварса Петерсона, обозначенной в библиографии.

Последняя теорема Ша по задаче трех тел обнадеживает всех, кто предполагает, что диффузия Арнольда могла бы объяснить промежутки Кирквуда. Задача трех тел (Юпитера, Солнца и астероида) могла бы открыть, каким образом при некоторых начальных условиях астероид покидает пояс, к которому он принадлежал изначально. Такое объяснение полностью согласовывалось бы с ранее полученными результатами. К сожалению, эта задача не так проста. Качественный результат Ша невозможно применить непосредственно к частной количественной задаче о Юпитере и Солнце. Вообще-то, его доказательство в применении к Солнечной системе свидетельствует о том, что диффузия Арнольда имеет место для частиц, которые изначально вращались по орбите *за* Юпитером. Это, конечно, не означает, что диффузия Арнольда не может произойти внутри орбиты Юпитера: это значит лишь то, что доказательство Ша невозможно применить непосредственно к поясу астероидов.

Эпилог

Мир небесной механики до сих пор процветает больше, чем три столетия назад, после своего зарождения в труде Исаака Ньютона *Principia Mathematica*. Читатель, который вместе с нами дошел до этой страницы, уже не сочтет странным, что одна математическая задача — решение дифференциальных уравнений, описывающих гравитационную задачу n-тел, — могла занимать умы стольких блестящих фигур в истории математики или что она способна продолжать очаровывать и огорчать нас по сей день. Как мы увидели, решение уравнений динамики — это не одна задача, а множество. И, вероятно, не столько сами эти задачи, сколько все их неожиданные побочные результаты возымели такое влияние на развитие математики и науки вообще. Хорошая математика, как и хорошая наука, зачастую заключается, главным образом, в установлении связей между явно несвязанными кусочками информации и областями знания, и мы не раз видели, каким образом это происходило в математической теории небесной механики.

Теория динамических систем, в сущности придуманная Пуанкаре в его (исправленной) научной статье, получившей премию короля Оскара, в попытке понять гомоклинические орбиты сегодня разрослась и превратилась в огромный, неорганизованный, но жизненно важный предмет *нелинейной динамики* — области, затрагивающей почти все отрасли техники и естественных наук, в которых используются дифференциальные уравнения. Она представляет собой совокупность строгих результатов и инструментов вроде символической динамики, вычислительных и геометрических методов и более свободных идей и гипотез. Химики, которые пытаются понять узоры, образованные на поверхностях катализаторов, инженеры, изучающие неустойчивость железнодорожных вагонов, биологи и врачи, лечащие сердечные заболевания, физики, наблюдающие рост кристаллов, авиаконструкторы, интересующиеся турбулентностью, метеорологи и создатели климата — все они находят применение для открытий, корни которых уходят в «простую» задачу n-тел. Книги вроде тех, что написаны Леоном Глассом и Майклом Макеем, Джеймсом Глейком, Эдвардом Лоренцом, Давидом Рюэлем и Йеном Стюартом, перечисленные в библиографии, более подробно расскажут читателю обо всех этих вещах.

Однако теория динамических систем возымела, вероятно, не менее важное влияние и на саму математику. Мы уже отмечали, что Пуанкаре, помимо всего прочего, основал топологию, которая, наряду с анализом и алгеброй, является одним из основных столпов математики. И это произошло не случайно. Топологию можно охарактеризовать как изучение непрерывных отображений, соотносящих объекты в (топологических) пространствах X и Y в виде $f : X \to Y$. Когда эти пространства одинаковы, применение f можно повторять посредством итерации отображения, получая динамическую систему. Стефен Смейл, чье изобретение отображения подковы мы описали во второй главе, сделал в топологию не менее важный вклад, чем в теорию динамических систем, причем многие его идеи основывались на принятии динамической точки зрения. Уже позднее он заинтересовался вычислительной математикой и вопросами вычисляемости и сложности, и вновь динамическая перспектива оказалась весьма кстати. Как-никак, бóльшая часть научного вычисления связана с повторением циклов, позволяющим получить ответ. В компьютерных центрах даже говорят о продаже «циклов» на их машинах. Научные труды конференции, проводившейся в 1990 году в Беркли в честь шестидесятилетнего юбилея Смейла, называются «От топологии к вычислениям», причем на конференции несколько человек утверждали, что динамика служит объединяющей нитью в его работе. Смейл необычен по глубине и обширности своих интересов, но некоторые другие математики полагают, что теория динамических систем указывает в сторону более общего взгляда на их предмет.

Спеша сделать упор на новейшие области применения и понимания, давайте не будем забывать, с чего все начиналось. Празднуя внезапное изливание идей и результатов нелинейной динамики, нельзя забывать о ее корнях, так как в них мы находим как ее сильные стороны, так и ее ограничения. Прежде чем с головой уйти в изучение нелинейности или отправиться на поиски хаоса в любимой задаче, следует поразмыслить о том, что идеи и свойства, которые, на первый взгляд, имеют чисто физическую основу, как-то: устойчивость или даже сам хаос, — требуют точных математических определений, если мы хотим применить их с пользой. Кому нужно утверждение об устойчивости самолета, если мы не имеем общего понятия об устойчивости, единого для всех, но наше высказывание становится гораздо более убедительным, если мы доказываем, что математическая модель самолета имеет решения, устойчивые к внезапным возмущениям.

Все строгие математические основы динамики происходят от людей и их трудов, описанных выше. Мы надеемся, что наша книга позволила читателю хоть сколько-нибудь приблизиться к раскрытию и объяснению этих жизненно важных корней.

Примечания

В нижеследующих примечаниях приведены библиографические и исторические детали. Понимая, что такие тонкости будут неинтересны большинству читателей, мы собрали их в приложении после основного текста книги, а не вынесли в виде сносок, чтобы не прерывать повествование. Они предназначены, в первую очередь, для того, чтобы помочь математику или историку математики определить источники ссылок.

Эта книга была задумана в целях популяризации, и мы считаем данное повествование интересным, поэтому ради его непрерывности мы включили в него ряд ситуаций, относительно которых мы не располагаем полными документальными доказательствами. Те несколько случаев, в которых мы позволили себе подобные вольности, отмечены ниже. Нас оправдывает желание ввести читателя в атмосферу и дух тех времен, когда происходили рассматриваемые события; благодаря этому создается более живой фон для изложения фактов.

Примечания расположены в соответствии с разделами каждой главы, обозначенными двумя числами (например, 2.3 означает третий раздел второй главы). Мы также приводим название соответствующего раздела. Библиографические ссылки (данные в скобках) расположены после примечаний; некоторые из приведенных книг и статей содержат общую информацию, и мы непосредственно ссылаемся далеко не на все из них. Имена авторов (в виде сокращений ФД и ФХ) появляются при ссылках на беседы и другие неопубликованные источники; в таких случаях, в интересах точности, мы описываем сопутствующие обстоятельства. Поскольку некоторые использованные нами материалы являются частью нашего общего знания и события, связанные с их сбором, уже стерлись из нашей памяти, мы хотели бы принести свои извинения всем тем, чьи высказывания мы, по своей невнимательности, процитировали неточно, и кого мы забыли упомянуть.

Первый эпиграф к книге переведен из строк 114–116 «Теогонии» Гесиода. Его нам предложил Статис Томпаидис. Второй эпиграф взят из [Dy, 1995].

Глава 1. Великое открытие

1.0. Эпиграф к первой главе взят из [Da,1900]. Он также цитируется во введении к [Po,1929]. В заметках к семинару по «Новым методам. . . », который провели Жак Ласкар и Ален Шенсине в Бюро долгот в Париже в 1989 году, то же самое высказывание (на французском языке) приписано Полю Аппелю в 1925 году.

1.1. *Прогулка по Парижу.* Первая часть этой главы строится вокруг стремления Пуанкаре понять проблему гомоклинических точек и хаоса и внезапного озарения, которое пришло к нему тогда, когда он гулял, думая совсем о другом. Исторических свидетельств этого нет, но Пуанкаре описывает подобное событие в связи с открытием свойства, имеющего отношение к фуксовым функциям, когда идея доказательства возникла у него в голове ниоткуда во время отдыха, расслабленного состояния и отрешенности от задачи ([Po,1929], стр. 387–388). Подобные случаи — далеко не редкость в научном мире: аналогичным примером служит открытие Кекуле бензольного кольца. Вследствие этого мы сочли такое введение в повествование вполне уместным. Пуанкаре, конечно же, осознал смысл своего открытия гомоклинических точек, сделанного в 1889 году, лишь несколько лет спустя. Верно и то, что они причиняли ему беспокойство на протяжении многих лет.

Пуанкаре действительно был женат, счастлив в семейной жизни, которая подарила ему трех дочерей и сына [Be,1937]. В июле 1993 года в Обервальде (Германия) Марк Шаперон из Парижского университета рассказал Флорину Диаку, что одним из его студентов был потомок Анри Пуанкаре. В первом и вводном разделах также встречаются другие ссылки, связанные с Пуанкаре: [Nm,1960], [Be,1937][1] и [Co,1990]. Факты, касающиеся Гаусса, Больяи и Галуа, в истории математики известны всем, см. [Nm,1960].

1.2. *Понимание Ньютона.* Основным источником является [N,1934], а его первой публикацией — *[N,1686]. Для получения информации* о жизни и достижениях Ньютона, включая его спор с Лейбницем, см. [We,1980]. Информацию о Непере и первых дифференциальных уравнениях Флорин Диаку получил от историка математики, Гарри Ти, в январе

---

[1] Несмотря на то, что некоторые историки критикуют книгу Белла как содержащую слишком много вымысла, мы считаем ее полезной для наших целей. Последний обзор [Br,1994] относит труд Белла к категории научных книг, описывающих «математические истины, которые не укладываются в существующую форму традиции и ожидания», и заключает, что «нам нужны математики, подобные Беллу, которые способны привлечь к своей работе музу поэзии»

1993 года на конференции по дифференциальным уравнениям и научным вычислениям, которая проходила в университете Окленда (Новая Зеландия).

1.3. *Язык законов природы.* Идеи, описанные в этом разделе, встречаются в большинстве современных учебников по дифференциальным уравнениям. См., например, [Ar, 1973] или [H&S,1974].

1.4. *Модели реальности.* Те же ссылки, что и в 1.3.

1.5. *Миры многообразий.* Концепции, представленные в этом разделе, можно найти в учебниках по введению в топологию или в современную дифференциальную геометрию, а также в книгах по дифференциальным уравнениям на многообразиях (см. 1.3).

1.6. *Задача n-тел.* Впервые задачу n-тел (на языке геометрии) сформулировал Ньютон [N,1686,1934]. Что касается утверждения о решении задачи двух тел Бернулли, см. библиографические примечания в [Win,1941].

1.7. *Премия короля Оскара.* Замечательным источником, рассказывающим о премии короля Оскара, служит введение в [Po,1993], написанное Героффом; см. также [S&M,1971] и исторические статьи [B-G,1994] и [And,1994]. Объявление о проведении конкурса на английском и немецком языках появилось в *Acta Mathematica,* том 7, за 1885–86 гг. Задачу, поставленную жюри, в [D,1914] цитирует Гастон Дарбу; а ее перевод на английский язык, приведенный здесь, появился в [Po,1993].

1.8. *Достижение Пуанкаре.* Слова Пуанкаре: «Жизнь – это лишь краткий эпизод...» появляются в [Po,1929]. Ранние статьи по небесной механике см. в [Po,1951–6]. Перевод эпиграфа, выбранного Пуанкаре, взят из [B-G,1994].

1.9. *Les méthodes nouvelles...»* Научный труд Пуанкаре, за который он получил премию, был опубликован в [Po,1890]. *Les méthodes nouvelles...»* вышел в трех томах: [Po,1892–3–9], английский перевод, выполненный Д. Героффом, увидел свет совсем недавно [Po,1993].

1.10. *Неподвижные точки.* Более техническое введение в идеи, представленные в этом разделе и в некоторых частях второй главы, можно найти в [Ho,1990].

1.11. *Первые возвращения.* Источники те же, что и в 1.9. Идея об отображении возвращения была впервые введена в [Po,1881–6].

1.12. *Общее представление о хаосе.* См. [Ho,1990] и [Po,1993], откуда (в переводе Героффа) цитируется описание гомоклинической сети.

1.13. *Ящик Пандоры.* Единственными ссылками в данном разделе являются [Po,1892–3–9] и [Po,1993]. Знаменитое высказывание о гомоклинической сети встречается в главе 33, разделе 397.

1.14. *Ошибка Пуанкаре.* Для получения более полной информации читателю следует обратиться к коллекции писем Пуанкаре Миттаг-Леффлеру, напечатанных в *Acta Mathematica,* том 38; введению Гороффа в [Po,1993] и к [Mou,1912]. Более ранний рассказ о событиях, окружающих ошибку, появился в [Pet,1993]. В январе 1989 года на заседании Американского математического общества в Фениксе (штат Аризона) Ричард Мак-Гихи рассказал Филипу Холмсу о том, что он нашел оригинальные отпечатки статьи Пуанкаре. Ряд обсуждений между ФД и Мак-Гихи на конференции по динамическим системам в Обервальде (Германия) в июле 1993 года также помог внести ясность в эту историю. Неоценимый вклад в плане обеспечения дополнительных подробностей оказали две недавно увидевшие свет статьи [B-G,1994] и [And,1994], авторы которых извлекли немалую пользу от доступа к архивам Института Миттаг-Леффлера. В тексте мы также ссылаемся на статью Гильдена [Gy,1887] и Бухгольца [Bch,1904]. Мы выражаем свою благодарность Юргену Мозеру за то, что он привлек наше внимание к последней. (В статье [Bch,1904] автор также замечает между делом, что премия составляла не 2 500 крон, как сказано в объявлении, а 10 000 крон; см. 1.7 выше, но авторы статьи [B-G,1994] и [And,1994] принимают первую цифру.) Мнение Мультона [Mou,1912] о работе Пуанкаре воспроизводится в [Po,1993].

1.15. *Удивительная находка.* Этот раздел написан на основе вышеупомянутых бесед с Ричардом Мак-Гихи. Описание библиотеки Института им. Миттаг-Леффлера и рисунок, на котором изображена бывшая резиденция Миттаг-Леффлера, можно найти в [Bö,192]. Некоторые популярные работы Пуанкаре по науке (большинство их также публиковалось по отдельности) присутствуют в [Po,1929].

Глава 2.
Символическая динамика

2.0. Эпиграф ко второй главе взят из [Mor,1946].

2.1. *Начало карьеры неподвижной точки.* Первая сцена является плодом нашего воображения и была включена ради описания возможного психологического состояния ученого, находящегося на грани получения предложения о работе. Нам неизвестно, отреагировал ли Биркгоф на предложение Гарвардского университета именно так (быть может, он был обрадован куда меньше, чем были бы на его месте мы). Что касается остальной части, см. [Bi,1913,1927,1935,1968] и введение Гороффа в [Po,1993]. Последняя статья Пуанкаре — это [Po,1912]; ее также можно найти в [Po,1951-6].

2.2. *На пляже в Рио.* О переписке Дж. Л. Синга, связанной с медалью Филдса, и подобных данных см. [Sy,1933] и [Tr,1976]. Замечания о Нобеле, см. в [Mey,1994].

Большая часть этого раздела основана на статье, напечатанной в [Sm,1980] и перепечатанной в [HM&S,1993]. Ряд подробностей ФХ узнал от самого Смейла во время телефонного разговора, состоявшегося 3 января 1995 года. См. также [Sm,1991]. Статьи ван дер Поля и ван дер Марка, Картрайт и Литлвуда, а также Левинсона обозначены [V&V,1927], [C&L,1945] и [Levi,1949]. Мэри Картрайт описала свою работу во время войны и другие воспоминания, связанные с теорией динамических систем, в [Ca,1972]. Точный способ внедрения подков в отображение Пуанкаре уравнения ван дер Поля был определен только в конце 1970-х годов [Levi,1981].

2.3. *Подкова Смейла.* Ссылки на литературу о Смейле приведены в 2.1. Сегодня математические результаты, связанные с подковой, можно найти в большинстве современных учебников по динамическим системам, например, в [Mos,1973] и [G&H,1983].

2.4. *Сдвиги на символах.* Существует несколько книг по символической динамике, например, [De,1986] и [G&H,1983]. Ранний текст можно найти в математической библиотеке Института перспективных исследований в Принстоне; это заметки Руфуса Ольденбургера, сделанные по лекциям Марстона Морса в 1937–1938 учебном году [Mor,1938]. Основная обзорная статья Смейла по динамическим системам, которая была опубликована в «Бюллетене Американского математического общества», перепечатана в [Sm,1980], где ее сопровождают дополнительные примечания и пояснения. Первая статья Смейла о подкове появилась в сборнике статей, опубликованном издательством Принстонского университета «Принстон Юниверсити Пресс», под заголовком «Дифференциальная и комбинаторная топология» (*Differential and Combinatorial Topology*) [Sm,1965], — ссылки на него приведены в [Sm,1980]. Свойства, определяющие хаос, см. в [De,1986] и [B et al.,1992].

2.5. *Символы, обозначающие хаос.* См. ссылки, упомянутые в 2.4. Раннее замечание Максвелла о чувствительной зависимости от начальных условий цитируется в [Ber,1978] и [Ek,1988]; см. также [H&Y,1993]. Обращение Лоренца, ранее не публиковавшееся, входит в [Lo,1993].

2.6. *Колебания и вращения.* Здесь упоминаются следующие статьи, книги и научные труды: [Bi,1927,1935], [Sit,1961], [A,1968a,1968b,1969]. Рассказ о работе Ситникова есть в [Mos,1973]. Труды Йельской конференции опубликованы под названием [Wa,1993].

2.7. *Новая наука?* Примеры диапазона применений нелинейной динамики в различных науках см. в [Gl,1987] и [St,1989]. В труде [Hay, 1990] автор рассматривает влияние хаоса на изучение литературы.

Глава 3. Столкновения и прочие сингулярности

3.0. Эпиграф к третьей главе взят из введения Гарнье к [Pa,1972]. Часть материала этой главы впервые появилась в [Di,1993b]. Статья [S&X,1995] написанна для математиков, но относительно техническим языком, также содержит описание ключевых результатов, которые приводят к доказательству Ша бесстолкновительных сингулярностей в 3.10.

3.1. *Исключительный человек.* Посещение королем вводной лекции Пенлеве описано в [Pa,1972], [S&M,1971]. Информация о поддержке, которую он оказывал математике, есть в [B-G,1994]. Слова Пенлеве переведены из опубликованного варианта той же лекции в [Pa,1972], а рукопись, опубликованная как [Pa,1897], также воспроизводится в [Pa,1972], том I. Биографию Пенлеве также можно найти в [Pa,1972].

3.2. *Столкновение или уход в бесконечность.* У нас нет прямых доказательств того, что фон Цейпель присутствовал на вводной лекции, но достаточно логично предположить, что присутствие Пенлеве в Стокгольме повлияло на его решение заняться небесной механикой. Другие данные из жизни фон Цейпеля взяты из [Mc,1986]. История результата фон Цейпеля относительно сингулярностей, не связанных со столкновениями, приведена в примечаниях к [Win,1941]. Другие ссылки — [Ch,1920], [Sp,1970].

3.3. *Компьютерные игры.* Рассказ об участии фон Неймана в создании первого программируемого компьютера в Институте перспективных исследований см. в [Re,1987]. Информацию о команде Себехея и других можно найти в [Sz,1967]. Комментарии по поводу вычислительных экспериментов Мейсселя были предоставлены ФД Жаком Петром в феврале 1995 года через электронную почту (научная биография Месселя есть в [Pe,1995]). Численные расчеты рисунка 3.4 также есть в [Ar,1988]. Доказательство эффекта выброса частицы, который происходит (в общем случае) после тройного сближения, присутствует в [Mc,1974] и [W,1975,1976].

3.4. *Как поймать кролика.* Исследование, описанное в этом разделе, содержится в статьях [P&S,1968,1970], [S,1971,1973a,1973b,1973c]. Свойства, доказанные Дональдом Саари в 1972 году, были опубликованы в [S,1973b]. Подоплеку этой истории рассказал Саари весной 1991 года во время приезда в Центр математических исследований в Монреале, где ФД занимался постдокторскими исследованиями. Дополнительные подробности ФД получил от Саари в 1993 году по электронной почте, а также в июне 1995 года на Совместной летней исследовательской конференции по математике: «Гамильтоновы системы и небесная механика», Вашингтонский университет, Сиэтл. Данную тему ФД также обсуждал с Карлом Симоном во время Конференции по динамическим системам, проходившей на Среднем Западе в октябре 1993 года, в Беркли, в честь Морриса Хирша.

3.5. *Мера успеха.* Этот раздел также основан на источниках, упомянутых в 3.4, и на статьях [S,1975,1976,1977,1978,1984]. Стоит упомянуть также о недавних результатах по гравитационной модели, предложенной болгарским физиком Маневым (или Манефф — в немецком и французском написании) в двадцатые годы, [Ma,1924,1925,1930a,1930b]. Эти результаты свидетельствуют о том, что в данной модели множество начальных условий, приводящих к столкновениям, имеет *положительную* меру Лебега (см. [Di,1993a], [Di,1996b]). Модель Манева в некотором смысле является приближением относительности и находится в согласии с наблюдаемыми астрономическими явлениями. Ею, в упрощенной форме, пользовался Эйнштейн, чтобы приблизить относительность и доказать, что опережение перигелия Меркурия может и не быть настолько невероятным во Вселенной. Другие типы моделей, например, модель, предложенная в 1977 году Мюкетом и Тредером, судя по всему, качественно ведут себя также, как и классическая модель Ньютона; см. [Ba&D,1993], [Di,1996a]. Работу Саари по голосованию и пропорциональному распределению мест см. в [S,1978], [S,1987] и [S,1994]. Научный труд Панко на получение степени магистра — [Pan,1951]. Книга Литлвуда с некоторыми дополнениями была переиздана: [Lit,1986].

3.6. *Регуляризующие столкновения.* Информацию, приведенную в этом разделе, Ричард Мак-Гихи предоставил ФД во время конференции в Беркли, упомянутой в 3.4. В этом разделе идет речь о статье Зигеля [Si,1941]. Статья Сундмана — [Su,1912]; вообще-то, исследование, описанное в этой статье, является усовершенствованным вариантом двух более ранних статей: [Su,1907] и [Su,1909]. Книга Мозера — [Mos,1973].

3.7. *Небесный бильярд.* Этот раздел также основан на обсуждении с Ричардом Мак-Гихи, упомянутом в 3.6. Статья Истона по блочной регуляризации — [E,1971]. Ранние преобразования Леви-Чивиты, стимулировавшие исследование Мак-Гихи в [Mc,1974], были опубликованы в [Le,1920]. Комментарии по работе Конли предоставили Крис Джонс и Катарина Анастасия Конли, прислав их ФХ и ФД по электронной почте в мае и июне 1995 года. История о фазовых портретах пришла от Марти Фейнберга через Криса Джонса; они, как и Нейл Феникел, подчеркивали щедрость Конли и его желание отдать заслуги другим. Компьютерную реализацию теории показателя Конли см. в [Mi&Mr,195].

3.8. *Встречи на конференции.* Информацию, использованную при написании данного раздела, предоставили Ричард Мак-Гихи (как в 3.6) и Джон Мазер в 1993 году на конференции в Обервальде, о которой упоминалось в примечании 1.14. Статья Мазера и Мак-Гихи — [M&M,1975], статья Шелдона — [Sh,1978].

3.9. *От четырех тел к пяти.* Этот раздел основан на дискуссии, которая состоялась между Джервером и ФД на Конференции по динамическим системам, проходившей в Северозападном университете в марте 1991 года. Гипотеза Римана, которую Джервер доказал в 1969 году, еще будучи аспирантом, гласит, что функция $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sin n^2x)/n^2$ не дифференцируема нигде. ФД узнал о доказательстве этой гипотезы (которое не удалось выполнить Вейерштрассу) не от Джервера, а от Норберта Шломиука из Монреальского университета на зимнем заседании Канадского математического общества в декабре 1991 года в университете Виктории. Эвристический пример Джервера решения, ведущего к бесстолкновительной сингулярности, был опубликован в [Ge,1984].

3.10. *Завершение поисков длиной в век.* Этот раздел основан на беседах ФД с Джефом Ша в Северозападном университете (как в 3.9) и на конференции, проходившей в 1995 году в Сиэтле (о ней упоминалось в 3.4); с Джоном Мазером (как в 3.8) и обмене сообщениями по электронной почте с Доном Саари (как в 3.4). Краткая биография Ша появилась в Заметках Американского математического общества (40, 1993 г., ноябрьский номер, стр. 1220–1221) вместе с сообщением о присуждении ему премии Блюменталя. Статья Ша — [X,1992]. См. также объяснительную статью [S&X,1995], ссылка на которую присутствует в 3.0.

3.11. *Частные постановки задачи 3-х тел при наличии симметрии.* Некоторые классические результаты по равнобедренной задаче можно найти в [Win,1941]. Другие соответствующие статьи и книги — [Wi,1913], [Sit,1961], [Mos,1973], [De,1980,1982], [Mo,1984], [Bro,1979], [Sin,1981] и [S&M,1988]. Это, конечно же, далеко не полный список.

3.12. *Идея, пришедшая за ужином.* Пример Джервера плоского решения, которое приводит к бесстолкновительной сингулярности, дан в [Ge,1991], где также описывается беседа Джервера со Скоттом Брауном. Историю понимания Уильямсом данной проблемы ФД рассказал Ричард Мак-Гихи в Беркли, как в 3.6.

Глава 4. Устойчивость

4.0. Эпиграф к главе 4 взят из [Mos,1978].

4.1. *Стремление к порядку.* Вводная история о бесплодном появлении Лапласа в доме Даламбера и последующая передача его эссе по общим принципам механики описаны в [Be,1937] и [Nm,1960]. Сцена, произошедшая в доме Даламбера, вымышлена нами. В [Sz,1984] приводится обзор множества различных понятий устойчивости, используемых в небесной механике. Вклады Аристотеля и Архимеда описаны в [M,1959].

4.2. *Маркиз и император.* См. [Be,1937]. Краткий исторический очерк развития методов возмущений и усреднения можно найти в [V,1984]. Многие фундаментальные идеи появляются в книге Лапласа «Небесная механика» [Lap,1799–1825], но первым ясное изложение, судя по всему, дал Лагранж в «Аналитической механике» [Lag,1788], описанной в разделе 4.3. История Адамса и Леверье рассказана в [Pet,1993]. Перевод эссе Лапласа «О вероятностях» можно найти в [Nm,1960], том 2, вместе с биографией Лапласа, из которой взяты некоторые подробности его жизни. Замечание Лагранжа о Боге цитируется из этого же источника.

4.3. *Музыка сфер.* Этот раздел написан по [Co,1990], [Cal,1982], [Nm,1960] и [Be,1937]. См. также [V,1984], [Koe,1986] и вышеприведенное примечание. Слова, которые Лагранж произнес на смертном одре, предположительно, были обращены к его друзьям Монжу, Ласепеде и Шапталю. Они были воспроизведены из записей, сделанных последним, в биографическом эссе М. Деламбра, стр. XLIV–XLV работы [Lag,1867–92], том 1; см. [Koe,1986].

4.4. *Вечное возвращение.* Источниками данного раздела являются [Co,1990], [Be,1937] и [Po,1993]. Результат, связанный с теоремой о возвращении, появляется как теорема I в разделе 8 работы [Po,1890].

4.5. *Возмущая мир.* О Спиру Аретю написано несколько книг на румынском языке; это, например, [Bâ,1972], [Din,1970] и [Or,1976]. Две последние статьи, анализирующие его вклад в небесную механику, – это [R,1985] и [Pá,1991]. Диссертацию Аретю Пуанкаре цитирует в [Po,1905]. На самом деле, Аретю был не только первым румыном, но и первым иностранцем, получившим докторскую степень по математике в Париже, о чем свидетельствует письмо декана Факультета естественных наук румынскому министру образования Георгу Чите. Книга по «социальной механике» — это [Har,1910]. Исследование Меффроя — [Me,1958].

4.6. *Насколько устойчивое устойчиво?* Высказывания Пуанкаре можно найти в [Po,1898]. Английский перевод имеется во введении Гороффа в [Po,1993].

4.7. *Качественный век.* Важная статья Брунса — это [Bru,1887]. В западной литературе фамилия Ляпунова появляется, по меньшей мере, в пяти вариантах написания: Liapunov, Lyapunov, Liapunoff, Lyapunoff и Ljapunow. Мы приняли первый. Работы Ляпунова, упомянутые в этом разделе, можно найти в переводе на французский и английский языки: [Li,1947], [Li,1966], [Li,1992]. Биография Ляпунова и библиография его работ появились в [Smi,1992] и [B,1992]. Заметку, в которой описывались события вокруг смерти Ляпунова, опубликовал Уилсон: [Wi,1994].

4.8. *Линеаризация и ее пределы.* Статьи Гробмана и Хартмана — это [Gr,1959,1962] и [Ha,1960,1963] (вообще-то, аналитический случай теоремы Хартмана–Гробмана Пуанкаре доказал еще в 1879 году; см. [Po,1951–6]). Большинство классических учебников по качественной теории дифференциальных уравнений содержат основные результаты теории устойчивости, созданной Ляпуновым. См., например, [H&S,1974]. Показатели Ляпунова для произвольных решений впервые были обоснованы в [O,1968]; введение можно найти в [G&H,1983].

4.9. *Устойчивость моделей.* Вводные описания структурной устойчивости можно найти в [H&S,1974] и [G&H,1983].

4.10. *Планеты в равновесии.* Статьи Л. Эйлера и Ж. Л. Лагранжа — это [Eu,1767] и [L,1873]. Подробности, касающиеся вопроса о числе центральных конфигураций, можно найти в [Win,1941]. Над этой проблемой работали многие ученые, среди них: Джиобек и Мультон в конце девятнадцатого века, а позднее — Ален Альбуй, Грег Бак, Жозефина Касасая, Ален Шенсине, Нелли Файсал, Г. Р. Холл, Жём Либре, Крис МакКорд, Кен Мейер, Рик Мекель, Ана Нанс, Филомена Паселла, Джулиан Палмор, Дон Саари, Дитер Шмидт, Карлес Симо, Стефен Смейл, Ник Тьен и Джеф Ша. Среди их многочисленных статей особого упоминания заслуживают [Al,1995], [Bu,1990,1991], [CLN,1994], [Dz,1900], [Ll,1991], [Mo,1985,1990], [Mou,1910], [P,1986,1987], [Pal,1974, 1975a,1975b,1982], [Sim,1977], [X,1991]. Статья Сундмана — это [Su,1912]. Статья Саари — [S,1980]. Более полный источник ссылок по этой теме см. в [Ll,1991]. Новый подход к центральным конфигурациям зародился в статьях Смейла [Sm,1970a,1970b].

Глава 5.
КАМ-теория

5.0. Эпиграф к пятой главе взят из [Bi,1920].

5.1. *Упрощай и решай.* Лекция, которую Колмогоров прочитал на Международном конгрессе по математике в 1954 году в Амстердаме, впервые была опубликована на русском языке (с французским заголовком) — [K,1957]. Английский перевод лекции — [K,1991a]. Краткие биографии Колмогорова опубликовали В. М. Тихомиров и П. С. Александров в [T,1991–92]. Некролог Колмогорова опубликовал Арнольд [Ar,1989b]. Интересную статью Арнольда, озаглавленную «Об А. Н. Колмогорове» и подготовленную для Американского математического общества, ФД показала Смилка Здравковска в 1993 году; она была опубликована в [Z&D,1994]. Часть представленной нами информации мы взяли из этих источников, а другую часть из рукописного доклада, который по просьбе ФД предоставил В. И. Арнольд. Рассказ Борхеса «Фунес, чудо памяти» можно найти в [Bo,1964], где второй рассказ «Вавилонская библиотека» исследует понятия бесконечности и случайности.

5.2. *Квазипериодические движения.* Есть несколько источников, где описываются КАМ-теория и проблема малых знаменателей, но (пока!) нет ни одной книги, которая была бы посвящена только этому вопросу[2]. Для интересующегося (и математически подготовленного) читателя мы предлагаем [Ar,1983,1989a] и [Ga,1983].

5.3. *Возмущая торы.* См. вышеприведенный раздел 5.2.

5.4. *Письма, потерянное решение и политика.* Для написания этого раздела мы использовали [Be,1937], [Bö,1992], краткие биографии Вейерштрасса в [Cal,1982] и Ковалевской в [EB,1986], введение Гороффа в [Po,1993] и источники, упомянутые в разделе 5.1. Отрывки из переписки по премии короля Оскара см. в [B–G,1994] (см. 1.7). Статья Крылова и Боголюбова — [K&B,1937]. Яков Синай предоставил некоторую информацию о Колмогорове и его семинаре во время бесед с ФХ в Принстоне в январе 1995 года. Лысенко (1898–1976) занял выдающееся положение в советской науке благодаря своим ложным генетическим теориям, обещавшим получение огромных урожаев в результате скрещивания разных сортов растений. Он был научным руководителем, а впоследствии и директором Всесоюзного института селекции и генетики в Одессе в 1930-х годах. Затем он занимал влиятельные посты в Акаде-

[2]Сейчас уже вышли несколько таких книг, например, Р. де ла Яве «Введение в КАМ-теорию». Москва–Ижевск: ИКИ, 2003. — *Прим. ред.*

мии наук и во Всесоюзной Академии сельскохозяйственных наук. Спорные статьи по генетике Менделя — это [K,1940], [Ly,1940] и [Ko,1940].

5.5. *Переживания из-за доказательства.* Этот раздел основан на нескольких беседах ФД с Юргеном Мозером в Обервольфахе в июле 1993 года (как в 1.14), на [Ze,1993] и на электронной переписке с Мозером в мае 1995 года. Обзор статьи Колмогорова Мозером — [Mos,1959]. Книга Зигеля и Мозера появилась на английском языке как [S&M,1971]. Статья Мозера, содержащая теорему о закручивании — [Mos,1962]. Некоторые подробности относительно встречи Мозера с Колмогоровым и Арнольдом, а также посещения им Москвы взяты из беседы с Синаем, о которой упоминалось в разделе 5.4.

5.6. *Закручивающие отображения.* См. [Mos,1962,1973] и [Ar,1989a].

5.7. *Одаренный ученик.* Этот раздел основан на работе [Z,1987], из которой процитированы высказывания Арнольда, и на литературе по КАМ-теории, упоминавшейся в разделе 5.2. В Монреале при нескольких удобных случаях с 1985 по 1993 год Леон Гласс рассказывал ФХ о работе Арнольда по математической биологии (см. [G&M,1988]). Некоторые подробности взяты из рукописи Арнольда, о которой упоминается в разделе 5.4. Доказательство Арнольдом «аналитической» КАМ-теоремы появилось в [Ar,1962,1963a,1963b].

5.8. *Хаос диффундирует.* В этом разделе вновь используются источники раздела 5.7. Первая статья по диффузии — [Ar,1964]. [H&M,1983a,1983b] — первые ссылки в западной литературе на диффузию в несколько более общих классах гамильтоновых систем. Статьи Ша по существованию диффузии Арнольда в задаче трех тел — [X,1992,1993]; работа Кьёркиа и Галлавотти по вращению сплющенной у полюсов планеты — [C&G,1994]. Введение в данный предмет и обсуждение астрономических следствий диффузии Арнольда, хаоса в Солнечной системе и люков Кирквуда присутствует в [B&D,1993].

5.9. *Эпилог.* Книги Гласса и Макея, Глейка, Лоренца, Рюэля и Стюарта — [G&M,1988], [Gl,1987], [Lo,1993], [Ru,1991] и [St,1989]. Сборник [HM&S,1993] содержит научные труды конференции в честь шестидесятого юбилея Смейла. Он содержит обзор труда Смейла, дальнейшие подробности которого появляются в [Sm,1991].

Литература

[Al,1995] Albouy, A. Symétrie des configurations centrales de quatre corps. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I*, **320** (1995), 217–220.

[A,1968a] Alekseev, V. M. Quasirandom dynamical systems. I. Quasirandom diffeomorphisms. *Mathematics USSR Sbornik* **5**, 1 (1968), 73–128.

[A,1968b] Alekseev, V. M. Quasirandom dynamical systems. II. One-dimensional nonlinear oscillations in a field with periodic perturbation. *Mathematics USSR Sbornik* **6**, 4 (1968), 505–560.

[A,1969] Alekseev, V. M. Quasirandom dynamical systems. III. Quasirandom os- cillations of one-dimensional oscillators. *Mathematics USSR Sbornik* **7**, 1 (1969), 1–43.

[And,1994] Andersson, K. G. Poincaré's discovery ofhomoclinic points. *Archive for History of Exact Sciences* **48** (1994), 133–147.

[A&P.1937] Andronov, A. A., and Pontryagin, L. Systèmes grossieres. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **14** (1937), 247–251.

[Ar,1962] Arnold, V. I. The classical theory of perturbations and the problem of stability of planetary systems. *Soviet Mathematics Doklady* **3** (1962), 1008–1012.

[Ar,1963a] Arnold, V. I. Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasiperiodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russian Mathematical Surveys* **18** (5) (1963), 9–36.

[Ar,1963b] Arnold, V. I. Small divisor problems in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys* **18** (6) (1963), 85–192.

[Ar,1964] Arnold, V. I. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. *Soviet Mathematics Doklady* **5** (1964), 342–355.

[Ar,1973] Arnold, V. I. *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press, Cambridge, Mass., 1973.

[Ar,1983] Arnold, V. I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.

[Ar,1988] Arnold, V. I., ed. *Dynamical Systems III*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1988.

[Ar,1989a] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1989.

[Ar,1989b] Arnold, V. I. A. N. Kolmogorov. *Physics Today*, October 1989, 148–149.

[B&D,1993] Bakker, L. E, and Diacu, F. N. On the existence of celestial bodies with unpredictable motion in the solar system and on the Kirkwood gaps. *Romanian Astronomical Journal* **3**, 2 (1993), 139–155.

[Bâ,1972] Bâldescu, E., *Spiru Haret în ştiinţa, filozofie, politică, pedagogic, învăţămînt*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.

[Ba&D,1993] Ballinger, G., and Diacu, F. N. Collision and near collision orbits in post-Newtonian gravitational systems. *Romanian Astronomical Journal* **3**, 1 (1993), 51–59.

[Bet al.,1992] Banks, J.; Brooks, J.; Cairns, G.; Davis, G.; and Stacey, P. On Devaney's definition of chaos. *American Mathematical Monthly*, April 1992, 332.

[B,1992] Barret, J. F. Bibliography of A. M. Lyapunov's work. *International Journal of Control* **55**, 3 (1992), 785–790.

[B-G,1994] Barrow-Green, J. Oscar II's prize competition and the error in Poin- care's memoir on the three body problem. *Archive for History of Exact Sciences* **48** (1994), 107–131.

[Be,1937] Bell, E. T. *Men of Mathematics*. Simon and Schuster, New York, 1937.

[Ber,1978] Berry, M. V. Regular and irregular motion. In *Topics in Nonlinear Dynamics*, pp. 16–120. AIP Conference Proceedings **46**, ed. Siebe Jorna. American Institute of Physics, New York, 1978.

[Bi,1913] Birkhoff, G. D. Proof of Poincaré's geometric theorem. *Transactions of the American Mathematical Society* **14** (1913), 14–22.

[Bi,1920] Birkhoff, G. D. Recent advances in dynamics. *Science (New Series)* **51** (1920), 51–55.

[Bi,1927] Birkhoff, G. D. *Dynamical Systems*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1927. (Reprinted with an introduction by J. Moser and a preface by M. Morse, 1966.)

[Bi,1935] Birkhoff, G. D. Nouvelles recherches sur les systemes dynamiques. *Mémoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei* **1** (1935), 85–216.

[Bi,1968] Birkhoff, G. D. *Collected Mathematical Papers*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1950. (Reprinted by Dover, New York, 1968.)

[Bo,1992] Bölling R.... Deine Sonia: A reading from a burned letter. *The Mathematical Intelligencer* **14**, 3 (1992), 24–30.

[Bo,1964] Borges, J. L. *Labyrinths: Selected Stories and Other Writings*. New Directions, New York, 1964.

[Br,1994] Bressoud, D. M. Review of "The Search for E. T. Bell, also known as John Taine", by Constance Reid. *The Mathematical Intelligencer* **16**, 3 (1994), 72–74.

[Bro,1979] Broucke, R. On the isosceles triangle configuration in the planar gen- eral three-body problem. *Astronomy and Astrophysics* **73** (1979), 303–313.

[Bru,1887] Bruns, H. Über die Integrate des Vielkörper-Problems. Acta Mathematica **11** (1887), 25–96.

[Bch,1904] Buchholz, H. Poincarés Preisarbeit von 1889/90 und Gyldéns Forschung über das Problem der drei Körper in ihren Ergebnissen fur die Astronomie. *Physikalische Zeitschrift* **7**, 5 (1904), 180–186.

[Bu,1990] Buck, G. On clustering in central configurations. *Proceedings of the American Mathematical Society* **108**, 3 (1990), 801–810.

[Bu,1991] Buck, G. The collinear central configuration of n equal masses. *Celestial Mechanics* **51** (1991), 305–317.

[Cab,1988] Cabral, H. The masses in an isosceles solution of the three-body problem. *Celestial Mechanics* **41** (1988), 175–177.

[Cal,1982] Calinger, R., ed. *Classics of Mathematics*. Moore Publishing Company, Oak Park, Ill., 1982.

[C&L,1945] Cartwright, M. L., and Littlewood, J. E. On nonlinear differential equations of the second order, I: The equation: $\ddot{y} + k(1 - y^2) + \dot{y} + + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large. *J. London Math. Soc.* **20** (1945), 180–189.

[Ca,1972] Cartwright, M. L. The early history of the theory of dynamical systems and its relationship to the theory of nonlinear oscillations. In *Proceedings of the Colloquium on Smooth Dynamical Systems*, 1.1–1.13. Department of Mathematics, University of Southampton, U.K., 18–22 September 1972.

[CLN,1994] Casasayas, J.; Llibre, J.; and Nunes, A. Central configurations of the planar $1 + N$ body problem. *Celestial Mechanics* **60** (1994), 273–288.

[Ch,1920] Chazy, J. Sur les singularités impossible du problème des n corps. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences de Paris* **170** (1920), 575–577.

[C&G,1994] Chierchia, L., and Gallavotti, G. Drift and diffusion in phase space. *Annales de l'Institut Poincaré* B, **60** (1994), 1–144.

[Co,1990] *Collier's Encyclopedia*. Macmillan, New York, 1990.

[D,1914] Darboux, G. Éloge historique d'Henri Poincaré. *Mem. Acad. Sci. Inst. Fr.* **52**, 74 (1914).

[Da,1900] Darwin, G. President's address. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **60** (1900), 412.

[D&H,1981] Davis, P. J., and Hersh, R. *The Mathematical Experience*. Birkhauser, Boston, 1981.

[De,1980] Devaney, R. Triple collision in the planar isosceles three-body problem. *Inventiones Mathematicae* **60** (1980), 249–267.

[De,1982] Devaney, R. Motion near total collapse in the planar isosceles three- body problem. *Celestial Mechanics* **28** (1982), 25–36.

[De,1986] Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Benjamin Cummings, Menlo Park, Calif., 1986.

[Di,1992a] Diacu, F. N. Regularization of partial collisions in the N-body problem. *Differential and Integral Equations* **5** (1992), 103–136.

[Di,1992b] Diacu, F. N. *Singularities of the N-Body Problem*. Les Publications CRM, Montreal, 1992.

[Di,1993a] Diacu, F. N. The planar isosceles problem for Maneff's gravitational law. *Journal of Mathematical Physics* **34**, 12 (1993), 5671–5690.

[Di,1993b] Diacu, F. N. Painleve's conjecture. *The Mathematical Intelligencer* **15**, 2 (1993), 6–12.

[Di,1996a] Diacu, F. N. On the Mücket–Treder gravitational law. In *Proceedings of the International Conference on Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics*, ed. E. A. Lacomba and J. Llibre. Cocoyoc, Mexico, **1994** (to appear, 1996).

[Di,1996b] Diacu, F. N. Near-collision dynamics for particle systems with quasi-homogeneous potential laws. *Journal of Differential Equations* (to appear, 1996).

[Din,1970] Dinu, C., *Spiru Haret*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1970.

[Dy,1995] Dyson, F. The scientist as rebel. *New York Review of Books* 42, 9 (May 25, 1995), 31-33.

[Dz,1900] Dziobek, 0. Ueber einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems. *Astronomische Nachrichten* **152** (1900), 34–46.

[E,1971] Eastern, R. Regularization of vector fields by surgery. *Journal of Differential Equations* **10** (1971), 92–99.

[Ek,1988] Ekeland, I. *Mathematics and the Unexpected.* University of Chicago Press, Chicago, 1988.

[El,1990] Elbialy, M. S. Collision singularities in celestial mechanics. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **21** (1990), 1563–1593.

[EB,1986] *Encyclopaedia Britannica.* 15th ed. Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, 1986.

[Eu,1767] Euler, L. De moto rectilineo trium corpomm se mutuo attrahentium. *Novo Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* **11** (1767), 144–151.

[F,1972] Fang, J. *Mathematicians from Antiquity to Today.* Paideia Press, Hauppauge, N.Y., 1972.

[Ga,1983] Gallavotti, G. *The Elements of Mechanics.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.

[Ge.1984] Gerver, J. A possible model for a singularity without collisions in the five-body problem. *Journal of Differential Equations* **52** (1984), 76–90.

[Ge,1991] Gerver, J. The existence of pseudocollisions in the plane. *Journal of Differential Equations* **89** (1991), 1–68.

[G&M,1988] Glass, L., and Mackey, M. C. *From Clocks to Chaos.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1988.

[Gl,1987] Gleick, J. *Chaos — Making a New Science.* Penguin Books, New York, 1987.

[Gr,1959] Grobman, D. M. Homeomorphisms of systems of differential equations. *Dokl. Akad Nauk SSSR* **128** (1959), 880–881.

[Gr,1962] Grobman, D. M. Topological classification of the neighborhood of a singular point in n-dimensional phase space. *Mat. Sbornik (New Series)* **56** (98) (1962), 77–94.

[G&H,1983] Guckenheimer, J., and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983. (Fourth corrected printing, 1994.)

[Gy,1887] Gyldén, H. Untersuchungen fiber die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden. *Acta Mathematica* **9** (1887), 185–294.

[H,1975] Hagihara, Y. *Celestial Mechanics.* Vol. 2, part 1. The MIT Press, Cambridge, Mass., 1975.

[Har,1910] Haretu, S. *Mécanique sociale.* Gauthier-Villars, Paris, 1910.

[Ha,1960] Hartman, P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society* **11** (1960), 610–620.

[Ha,1963] Hartman, P. On the linearization of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society* **14** (1963), 568–573.

[Hay,1990] Hayles, K. *Chaos Bound: Orderly Disorder in Contemporary Literature and Science.* Cornell University Press, Ithaca, N.Y, 1990.

[Hi,1984] Hirsch, M.W. The dynamical systems approach to differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society* **11** (1984), 451–514.

[HM&S,1993] Hirsch, M.W.; Marsden, J.E.; and Shub, M., eds. *From Topology to Computation. Proceedings of the Smalefest.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1993.

[H&S,1974] Hirsch, M.W., and Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* Academic Press, New York, 1974.

[Ho,1990] Holmes, P. Poincaré, celestial mechanics, dynamical systems theory and chaos. *Physics Reports* 193, **3** (1990), 137–163.

[H&M,1983a] Holmes, P., and Marsden, J.E. Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamilton! an systems. *J. Math. Phys.* **23** (1983), 669–675.

[H&M,1983b] Holmes, P., and Marsden, J.E. Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups. *Indiana U Math J.* **32** (1983), 273–310.

[Hop,1942] Hopf, E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationaren Lösung eines Differential-Systems. *Berichte Math.-Phys. Kl Sächs Akad. Wiss. Leipzig* **94** (1942), 1–22, and *Berichte Math -Nat. Kl Vreh Sdchs Akad. Wiss Leipzig* 95, **1** (1942), 3–22.

[H&Y,1993] Hunt, B.R., and Yorke, J.A. Maxwell on Chaos. *Nonlinear Science Today* **3**, 1 (1993), 1, 3–4.

[Koe,1986] Koetsier, T. Joseph Louis Lagrange (1786–1813), his life, his work and his personality. *Nieuw Archief voor Wiskunde* **3**, 4 (1986), 191–206.

[Ko,1940] Kolman, E. Is it possible to prove or disprove Mendelism by mathemat- ical and statistical methods? *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **28**, 9 (1940), 834–838 (in Russian: English translation published in Comptes Rendus [Doklady] de l'Academie des Sciences de l'URSS).

[K,1940] Kolmogorov, A. N. On a new confirmation of Mendel's laws. *Dokl Akad Nauk SSSR* **27**, 1 (1940), 38–**42** (in Russian); English translation in *Comptes Rendus [Doklady] de l'Academic des Sciences de l'URSS*. Reprinted in *Selected Works of A N. Kolmogorov*, vol. 2, pp. 222–227, ed. V.M. Tikhomirov. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 1991.

[K,1957] Kolmogorov, A.N. Théoric générate dcs systèmes dynamiques et mécanique classique. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Amsterdam, 1954, vol. 1, pp. 315–333. Erveb P., Noordhoff N.V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957.

[K,1991a] Kolmogorov, A.N. The general theory of dynamical systems and classical mechanics. In *Selected Works of A.N. Kolmogorov*, vol. 1, pp. 355–374, ed. V.M. Tikhomirov. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 1991.

[K,1991b] Kolmogorov, A.N. On the preservation of conditionally periodic mo- tions under small variations of the Hamilton function. In *Selected Works of A.N Kolmogorov*, vol. 1, pp. 349–354, ed. V.M. Tikhomirov. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 1991.

[K&B,1937] Kryloff, N., and Bogolyuboff, N. La théorie générale de la mesure dans son application a l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. *Annals of Mathematics* **38**, 1 (1937), 65–113.

[L,1873] Lagrange, J.L. *Oeuvres*. Vol. 6, pp. 272–292. Paris, 1873.

[Lag,1788] Lagrange, J.L. *Mécanique analytique*. 2 vols. Desaint, Paris, 1788. (Reprinted by Librairie Albert Blanchard, Paris, 1873, and as vols. 11 and 12 of [Lag,1867–92].)

[Lag,1867–92] Lagrange, J.L. *Oeuvres*. 14 vols. Ed. J.A. Serret and G. Darboux. Paris, 1867–1892.

[Lap,1799–1825] Laplace, P.S. *Traité de mécanique céleste*. 5 vols. Paris, 1799–1825. (Reprinted as vols. 1–5 of [Lap,1878].)

[Lap,1878–1912] Laplace, P.S. *Oeuvres*. 14 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1878–1912.

[Levi,1981] Levi, M. Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations. *Memoirs of the American Mathematical Society* **214** (1981), 1–147.

[Le,1920] Levi-Civita, T. Sur la régularisation du problème des trois corps. *Acta Mathematica* **42** (1920), 99–144.

[Levin,1949] Levinson, N. A second-order differential equation with singular solutions. *Annals of Mathematics* **50** (1949), 127–153.

[Lev,1968] Levy, J. La contribution française au développement de la mécanique céleste au cours de trois derniers siècles. In *Colloque sur* *le probleme des n corps*, pp. 13–20. Editions du Centre Nationale de la Rechrche Scientifique, Paris VII, 1968.

[Li,1947] Liapunov, M. A. Problème général de la stabilité de mouvement. *Annals of Mathematical Studies* 17. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1947.

[Li,1966] Liapunov, M. A. *Stability of Motion*. Academic Press, New York and London,1966.

[Li,1992] Liapunov, M. A. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control* **55**, 3 (1992), 531–773.

[Lit,1986] Littlewood, J. E. *Littlewood's Miscellany*. Edited by Bela Bollobas. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1986.

[Ll,1991] Llibre, J. On the number of central configurations in the n-body problem. *Celestial Mechanics* **50** (1991), 89–96.

[Lo,1993] Lorenz, E. N. *The Essence of Chaos*. University of Washington Press, Seattle, 1993.

[Ly,1940] Lysenko, T. D. In response to an article by A. N. Kolmogorov. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **28**, 9 (1940), 832–833 (in Russian: English translation published in *Comptes Rendus [Doklady] de l'Academic des Sciences de UURSS*).

[M,1959] Magnus, K. Zur Entwicklung des Stabilitatsbegriffes der Mechanik. *Naturwissenschaften* **46** (1959), 590–595.

[Ma,1924] Maneff, G. La gravitation et le principe de l'egalite de l'action et de la reaction. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **178** (1924), 2159–2161.

[Ma,1925] Maneff, G. Die Gravitation und das Prinzip von Wirkung und Gegen- wirkung. *Zeitschrift für Physik* **31** (1925), 786–802.

[Ma,1930a] Maneff, G. Le principe de la moindre action et la gravitation. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **190** (1930), 963–965.

[Ma,1930b] Maneff, G. La gravitation et l'energie au zero. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **190** (1930), 1374–1377.

[M&M.1975] Mather, J., and McGehee, R. Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time. In *Dynamical Systems Theory and Applications*, pp. 573–587, ed. J. Moser. Lecture Notes in Physics. Springer- Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.

[Mc,1974] McGehee, R. Triple collision in the collinear three-body problem. *Inventiones Mathematicae* **27** (1974), 191–227.

[Me,1975] McGehee, R. Triple collision in Newtonian gravitational systems. In *Dynamical Systems Theory and Applications*, pp. 550–572, ed. J. Moser. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.

[Me,1981] McGehee, R. Double collisions for a classical particle system with nongravitational interactions. *Commentarii Mathematici Helvetici* **56** (1981), 524–557.

[Me,1986] McGehee, R. Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics. *Expositionae Mathematicae* **4** (1986), 335–345.

[Me,1958] Meffroy, J. Sur l'existence effective du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes. *Bull. Astron.* **21** (1958), 261–322.

[Mey,1994] Meyer, M. *The richest vagabond* (a review of "Alfred Nobel: A Biography", by Kenne Fant). *New York Review of Books* **41** (1 and 2) (January 13, 1994), 26–27.

[Mi,1972] Mihăileanu, N. *Istoria Matematicii*. Vol. 1. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucharest, 1972.

[Mi,1981] Mihăileanu, N. *Istoria Matematicii*. Vol. 2. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucharest, 1981.

[Mi&Mr, 1995] Mischiakow, K., and Mrozek, M. Chaos in the Lorenz equations: A computer-assisted proof. *Bulletin of the American Mathematical Society* **32**, 1 (1995), 66–72.

[Mo,1984] Moeckel, R. Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body prob- lem. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **15**, 5 (1984), 857–876.

[Mo,1985] Moeckel, R. Relative equilibria of the four-body problem. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **5** (1985), 417–435.

[Mo,1990] Moeckel, R. On central configurations. *Mathematische Zeitschrift* **205** (1990), 499–517.

[Mor,1938] Morse, M. *Symbolic Dynamics*. Notes by R. Oldenburger of Lectures by Marston Morse. The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1938.

[Mor,1946] Morse, M. George David Birkhoff and his mathematical work. *Bulletin of the American Mathematical Society* **52** (1946), 357–391.

[Mos,1959] Moser, J. K. Review of Kolmogorov, A. N., "Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique". *Mathematical Reviews* **20**, 6 (1959), 675–676.

[Mos,1962] Moser, J. K. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen II, Math. Phys. Kl.* 1962, 1–20.

[Mos,1973] Moser, J.K. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973.

[Mos.1978] Moser, J.K. Is the solar system stable? *The Mathematical Intelligencer* **1**, 2 (1978), 65–71.

[Mou,1910] Moulton, F.R. The straight line solutions of the problem of n bodies. *Annals of Mathematics* **12** (1910), 1–17.

[Mou,1912] Moulton, F.R. M. Henri Poincaré. *Popular Astronomy* **10**, 10 (1912), 625.

[Mou,1914] Moulton, F.R. *An Introduction to Celestial Mechanics.* Macmillan, London, 1914. (Reprinted by Dover, New York, 1970.)

[Nm,1960] Newman, J.R., ed. *The World of Mathematics. Vols. 1–4.* George Alien and Unwin, London, 1960.

[N,1686] Newton, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* S. Pepys, Royal Society Press, London, 1686.

[N,1934] Newton, I. *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World.* 2 vols. Trans. Andrew Motte (1729). Revised, with historical and explanatory appendix, by Florian Cajori. University of California Press, Berkeley, 1934.

[Or,1976] Orăscu, Ş., *Spiru Haret*, Editura Ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1976.

[O,1968] Oseledec, V.I. A multiplicative ergodic theorem: Liapunov characteris- tic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** (1968), 197–231.

[P,1986] Pacella, F. Equivariant Morse theory for flows and an application to the n-body problem. *Transactions of the American Mathematical Society* **297** (1986), 41–52.

[P,1987] Pacella, F. Central configurations of the n-body problem via equivariant Morse theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **97** (1987), 59–73.

[Pa,1897] Painlevé, P. *Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles.* Hermann, Paris, 1897.

[Pa,1972] Painlevé, P. *Oeuvres.* Vol 1. Ed. Centr. Nat. Rech. ScL, Paris, 1972.

[Pa,1991] Pál, Á. Spiru Haretu's theorem. *Romanian Astronomical Journal* **1**, 1–2 (1991), 5–11.

[Pal,1974] Palmore, J.I. Classifying relative equilibria. I. *Bulletin of the American Mathematical Society* **79**, 5 (1973), 904–908.

[Pal,1975a] Palmore, J.I. Classifying relative equilibria. II. *Bulletin of the American Mathematical Society* **81**, 2 (1975), 589–591.

[Pal,1975b] Palmore, J.I. Classifying relative equilibria. III. *Letters in Mathematical Physics* **1** (1975), 71–73.

[Pal,1982] Palmore, J.I. Collinear relative equilibria of the planar n-body problem. *Celestial Mechanics* **28** (1982), 17–24.

[Pan,1951] Pancoc, A. "Properties of the solution of the second Painleve transcendent". M. Sc. thesis. Northwestern University, 1982.

[Pe,1995] Peetre, J. Outline of a scientific biography of E. Meissel (1826–1895). *Historia Mathematica* **22** (1995), 154–78.

[Pet,1993] Peterson, I. *Newton's Clock – Chaos in the Solar System*. Freeman, New York, 1993.

[Po,1881–6] Poincaré, H.J. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques* **7** (1881), 375–422, and **8** (1882), 251–296; *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **1** (1885), 167–244, and **2** (1886), 151–217.

[Po,1890] Poincaré, H.J. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* **13** (1890), 1–270.

[Po,1891] Poincaré, H.J. Sur le probleme des trois corps. *Bulletin Astronomique* **8** (1891), 12–24.

[Po,1892–3-9] Poincaré, H.J. *Les méthodes nouvelles de la de mécanique céleste.* Vols. 1–3. Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899. (Reprinted by Librairie Albert Blanchard, Paris, 1987.)

[Po,1898] Poincaré, H.J. Sur la stabilite du systeme solaire. In *Annuaire pour l'an 1898 par le Bureau des Longitudes*, pp. B. 1–2. Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[Po,1905] Poincaré, H.J. *Leçons de mécanique céleste.* Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[Po,1912] Poincaré, H.J. Sur un théorème de geometrie. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **33** (1912), 375–407.

[Po,1929] Poincaré, H.J. *The Foundation of Science*. The Science Press, New York, 1929.

[Po,1951–6] Poincaré, H.J. *Oeuvres*, 11 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[Po,1993] Poincaré, H.J. *New Methods of Celestial Mechanics.* Ed. and introduced by D. Goroff. American Institute of Physics, New York, 1993.

[P&S,1968] Pollard, H., and Saari, D. G. Singularities of the n-body problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **30** (1968), 263–269.

[P&S,1970] Pollard, H., and Saari, D. G. Singularities of the n-body problem. II. In *Inequalities–II*, pp. 255–259, ed. O. Shisha. Academic Press, New York, 1970.

[R,1985] Ratiu, T. Haretu's contribution to the n-body problem. *Libertas Mathematica* **5** (19S5), 1–7.

[Re,1987] Regis, E. *Who Got Einstein's Office? Eccentricity and Genius at the Institute for Advanced Study.* Addison-Wesley, New York, 1987.

[Ru,1991] Ruelle, D. *Chance and Chaos.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1991.

[S,1971] Saari, D. G. Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems. *Transactions of the American Mathematical Society* **162** (1971), 267–271; **168** (1972), 521; **181** (1973), 351–368.

[S,1973a] Saari, D. G. Singularities of Newtonian gravitational systems. In *Dynamical Systems, Salvador, Bahia, Brazil*, pp. 479–487, ed. M. M. Peixoto. Academic Press, New York, 1973.

[S,1973b] Saari, D. G. Singularities and collisions of Newtonian gravitational systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **49** (1973), 311–320.

[S,1973c] Saari, D. G. On global existence and uniqueness theorems for gravitational systems. *Celestial Mechanics* **8** (1973), 157–161.

[S,1975] Saari, D. G. Collisions are of first category. *Proceedings of the American Mathematical Society* **47**, 2 (1975), 442–445.

[S,1976] Saari, D. G. The n-body problem of celestial mechanics. *Celestial Mechanics* **14** (1976), 11–17.

[S,1977] Saari, D. G. A global existence and uniqueness theorem for the four-body problem of Newtonian mechanics. *Journal of Differential Equations* **26** (1977), 80–111.

[S,1978] Saari, D. G. Apportionment methods and the House of Representatives. *American Mathematical Monthly* **85** (1978), 792–802.

[S,1980] Saari, D. G. On the role and the properties of n-body central configurations. *Celestial Mechanics* **21** (1980), 9–20.

[S,1984] Saari, D. G. The manifold structure for collision and for hyperbolicparabolic orbits in the n-body problem. *Journal of Differential Equations* **55** (1984), 300–329.

[S,1987] Saari, D. G. The source of some paradoxes from social choice and probability. *Journal of Economic Theory* **41** (1987), 1–22.

[S,1994] Saari, D. G. *Geometry of Voting.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994.

[S&X,1989] Saari, D. G., and Xia, Z. The existence of oscillatory and superhyperbolic motion in Newtonian systems. *Journal of Differential Equations* **82** (1989), 342–355.

[S&X,1995] Saari, D. G., and Xia, Z. Off to infinity in finite time. *Notices of the American Mathematical Society* **42** (1995), 538–546.

[Sh,1978] Sheldon, R. O. Noncollision singularities in the four-body problem. *Transactions of the American Mathematical Society* **249**, 2 (1979), 225–259.

[Si,1941] Siegel, C. L. Der Dreierstoss. *Annals of Mathematics* **42**, 1 (1941), 127–168.

[Si,1956] Siegel, C. L. *Vorlesungen über Himmelsmechanik.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1956.

[S&M,1971] Siegel, C. L., and Moser, J. K. *Lectures on Celestial Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1971.

[Sim,1977] Simó, C. Relative equilibrium solutions in the four-body problem. *Celestial Mechanics* **18** (1977), 165–184.

[Sim,1981] Simó, C. Analysis of triple collision in the isosceles problem. In *Classical Mechanics and Dynamical Systems*, pp. 203–224, ed. R. Devaney and Z. Nitecki. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **70**. Dekker, New York, 1981.

[S&M,1988] Simó, C., and Martinez, R. Qualitative study of the planar isosceles three-body problem. *Celestial Mechanics* **41** (1988), 179–251.

[Sit,1961] Sitnikov, K. The existence of oscillatory motion in the three-body problem. *Soviet Physics Doklady* **5** (1961), 647–650.

[Sm,1965] Smale, S. Diffeomorphisms with many periodic points. In *Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse*, pp. 63–70, ed. S. S. Cairns. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.

[Sm,1970a] Smale, S. Topology and mechanics II: The planar n-body problem. *Inventiones Mathematicae* **11** (1970), 45–64.

[Sm,1970b] Smale, S. Problems of the nature of relative equilibria in celestial mechanics. In *Manifolds-Amsterdam 1970*, pp. 194–198. Lecture Notes in Mathematics **197** (1970). Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.

[Sm,1980] Smale, S. *The Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[Sm,1991] An Hour's Conversation with Stephen Smale. *Nonlinear Science Today* **1**, 1 (1991), 1,3, 12–18.

[Smi,1992] Smirnov, V. I. Biography of A. M. Lyapunov. *International Journal of Control* **55**, 3 (1992), 775–784.

[Sp,1970] Sperling, H. J. On the real singularities of the N-body problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **245** (1970), 15–40.

[St,1989] Stewart, I. *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*. Basil Blackwell, Oxford, 1989.

[Su,1907] Sundman, K. Recherches sur le probleme des trois corps. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae* **34**, 6 (1907).

[Su,1909] Sundman, K. Nouvelles recherches sur le probleme des trois corps. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae* **35**, 9 (1909).

[Su,1912] Sundman, K. Mémoire sur le probleme des trois corps. *Acta Mathematica* **36** (1912), 105–179.

[Sy,1933] Synge, J. L. John Charles Fields. *Journal of the London Mathematical Society* **8** (1933), 153–160.

[Sz,1967] Szebehely, V. Burrau's problem of the three bodies. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* **58** (1967), 60–65.

[Sz,1984] Szebehely, V. Review of concepts of stability. *Celestial Mechanics* **34** (1984), 49–64.

[T,1991–92] Tikhomirov, V. M., ed. *Selected Works of A. N. Kolmogorov*. Kluwer, Dordrecht-Boston-London: vol. 1, 1991; vol. 2, 1992.

[Tr,1976] Tropp, H. S. The origins and history of the Fields Medal. *Historia Mathematica* **3** (1976), 167–181.

[V&V,1927] van der Pol, B., and van der Mark, J. Frequency demultiplication. *Nature* **120** (1927), 363–364.

[V,1984] Verhulst, F. Perturbation theory from Lagrange to van der Pol. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (4) **2** (1984), 428–438.

[W,1975] Waldvogel, J. The close triple approach. *Celestial Mechanics* **11** (1975), 429–432.

[W,1976] Waldvogel, J. The three-body problem near triple collision. *Celestial Mechanics* **14** (1976), 287–300.

[Wa,1993] Walters, P., ed. *Symbolic Dynamics and Its Applications.* Contemporary Mathematics, vol. 135. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1993.

[We,1980] Westfall, R. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton.* Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1980.

[Wil,1913] Wilczynski, E. J. Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi. *Annali di Matematica Pura ed Aplicata* **21** (1913), 1–31.

[Wi,1994] Wilson, R. Russian mathematics II. *The Mathematical Intelligencer* **16**, 3 (1994), 76.

[Win,1941] Wintner, A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.

[X,1991] Xia, Z. Central configurations with many small masses. *Journal of Differential Equations* **91** (1991), 168–179.

[X,1992] Xia, Z. The existence of noncollision singularities in the N-body problem. *Annals of Mathematics* **135** (1992), 411–468.

[X.1993] Xia, Z. Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem. *Journal of Dynamics and Differential Equations* **5**, 2 (1993), 219–240.

[XJ994] Xia, Z. Arnold diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem. *Journal of Differential Equations* **110** (1994), 289–321.

[Z,1987] Zdravkovska, S. Conversation with Vladimir Igorevich Arnold. *The Mathematical Intelligencer* **9**, 4 (1987), 28–32.

[Z&D,1994] Zdravkovska, S., and Duren, P. L., eds. *Golden Years of Moscow Mathematics.* History of Mathematics, vol. 6. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1994.

[Ze,1993] Zehnder, E. Cantor-Medaille für Jürgen Moser. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung* **95** (1993), 85–94.

[Zei,1908] Zeipel, H. von. Sur les singularités du problème des n corps. *Arkiv for Matematik, Astronomic och Fysik* **4**, 32 (1908), 1–4.

Предметный указатель

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332-48-92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж).
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Флорин Диаку, Филип Холмс

НЕБЕСНЫЕ ВСТРЕЧИ

Истоки хаоса и устойчивости

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор З. Ю. Соболева

Подписано в печать 02.02.2004. Формат $60 \times 84^1/_{16}$
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,67. Уч. изд. л. 17,54.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1
Тираж 900 экз. Заказ № 635.
Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ФГУИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122

ISBN 5-93972-323-3