ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

Ф. М. ДИМЕНТБЕРГ

ВИНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

П 32
517:531
УДК 512.974:531/534

2-4-2
26—65

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод винтов как метод механики возник в семидесятых годах прошлого столетия. Собственно винтовое исчисление в законченном виде было сформировано в девяностых годах на основе идей В. Клифорда, А. П. Котельникова и Э. Штуди и является обобщением векторного исчисления. Основу его составляют как общая теория винтов, так и специальный «принцип перенесения», устанавливающий соответствие между свободными векторами и винтами таким образом, что все соотношения в области векторов, если им придать особую комплексную форму, формально сохраняются для винтов. Благодаря этому одно «винтовое» уравнение, не отличающееся по форме от векторного, равносильно не трем, а шести скалярным уравнениям, что придает всем выражениям особенную компактность и обозримость.

Несмотря на столь значительный период времени, прошедший со времени создания винтового исчисления, оно осталось до настоящего времени известным небольшому кругу лиц, что объясняется отсутствием необходимой литературы по этому вопросу.

Автор сделал попытку дать изложение основных положений винтового исчисления на основе элементарного аппарата современной векторной алгебры и показать его некоторые применения. В книге излагаются сведения из теории скользящих векторов, алгебра комплексных чисел вида $a + \omega a^0$ со специальным множителем ω, обладающим свойством $\omega^2 = 0$, алгебра винтов, основные сведения из дифференциальной геометрии линейчатой поверхности, необходимые для кинематики твердого тела, основания винтового анализа, а также некоторые сведения из классической теории винтов в ее геометрическом аспекте и показан ряд приложений к механике.

Автор преследовал цель — популяризовать (хотя и с некоторым запозданием) винтовое исчисление среди специалистов по механике — и надеется, что оно станет известным широкому кругу лиц, работающих в разных областях общей и прикладной механики.

При составлении книги были использованы в первую очередь сочинения А. П. Котельникова и Д. Н. Зейлигера, а затем работы Р. Болла, Н. Занчевского, Э. Штуди, Р. Мизеса, С. Г. Кислицына и других авторов. Включены и некоторые результаты автора книги, часть которых была опубликована ранее.

Книга рассчитана на читателя, знакомого с векторной алгеброй и самыми основными сведениями из теории функций векторного аргумента.

Автор выражает благодарность Абраму Мироновичу Лопшицу и Ривольту Ивановичу Пименову, давшим ему ценные советы по отдельным вопросам при работе над книгой.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Теория винтов возникла в начале прошлого столетия, после появления работ Пуансо, Шаля и Мёбиуса, в которых изучалась теория пар сил и бесконечно малых вращений, впервые была установлена аналогия силы и малого вращения и, как следствие,— аналогия сложения тех и других. Работами этих авторов установлена эквивалентность произвольного перемещения тела винтовому перемещению и положено начало изучению кинематики и статики, а также сформировано понятие винта, которое было в дальнейшем развито в работах Плюккера.

Плюккер изучал линейчатое пространство, т. е. пространство, элементом которого является прямая линия. Для описания прямой Плюккер ввел специальные координаты (плюккеровы), которые в общем случае определяют винт; кроме винта, им рассмотрены и другие образы линейчатой геометрии (поверхности, конгруэнции, комплексы).

Винт как совокупность вектора и пары, плоскость которой перпендикулярна вектору, есть геометрический образ, описывающий как произвольное перемещение твердого тела, так и произвольную систему сил, действующих на тело. При изучении движения винт как перемещение во многих случаях является наиболее естественным обобщенным перемещением, над которым непосредственно производятся операции; в то же время силовой винт является соответственной обобщенной силой. Отсюда возникает такой метод механики, в котором все перемещения и их производные, а также силы выражаются винтами и который приводит к результатам, трактуемым на языке винтов.

Теория винтов начиная с 1870 г. подробно изучалась в работах Р. Болла, выпустившего в 1876 г. капитальный труд [1].

Рассматривая произвольные перемещения тела, Болл приводит их к комбинации некоторых базисных винтов, благодаря чему достигается наглядная геометрическая интерпретация и хорошая механическая ощутимость результатов. Болл весьма остроумно противопоставляет метод винтов методу декартовых координат в сочиненном им рассказе [2], в котором в популярной форме излагается сущность метода винтов. История такова: одной технической комиссии было поручено определить динамические свойства твердого тела (корпуса машины), прикрепленного к основанию достаточно сложным образом. Для этой цели необходимо было сначала выяснить число степеней свободы тела. Одним из членов комиссии был картезианец. Исследуя долго и кропотливо подвижность тела при помощи своего «испытанного» координатного триэдра, он в конце концов пришел к результату, сводившемуся к шести числам, выраженным в угловых градусах и минутах и дюймах, численно выражавшим возможные вращательные и поступательные движения вдоль координатных осей; однако этот результат ничего не говорил о существе движения и вызвал неодобрительные замечания председателя комиссии. В то же время другой член комиссии, некто Геликс, используя то обстоятельство, что любое движение тела эквивалентно винтовому, путем сравнительно простого подбора винтов с гайками надлежащего шага, установил несколько вариантов возможных «завинчиваний», т. е. пространственных движений тела, что давало наглядную интерпретацию движения, не зависящую от системы координат.

В русской литературе теория Болла нашла отражение в работе И. О. Занчевского [3], связавшего теорию винтов с теорией линейного комплекса.

Несколькими годами ранее выхода в свет классического труда Болла В. Клиффордом [4] было дано весьма интересное описание винтов при помощи специальных комплексных чисел. Следует иметь в виду, что в указанный период векторное исчисление только развивалось и к тому времени оно еще не приобрело той простой формы, в какой оно известно нам в настоящее время. К векторному исчислению подходили постепенно разными путями: с одной стороны, с помощью геометрических представлений, а с другой стороны, с помощью специально придуманных «гиперкомплексных» чисел или «кватернионов», которые состоят из скалярной части и части, содержащей еще три величины разной природы. Клиффорд ввел множитель ω, квадрат которого равен нулю, а также комплексные числа, состоящие из вещественного числа и произведения вещественного числа на ω. Если компоненты кватерниона считать не вещественными, а комплексными в только что указанном смысле, то кватернионы обращаются в бикватернионы, которые относятся к теории винтов таким же образом, каким кватернионы — к обычной теории векторов. Теорию винтов применительно к механике Клиффорд не развивал; дальнейшие его исследования относились к применению введенной им операции и бикватернионов к неевклидовой геометрии.

В 1895 г. было опубликовано выдающееся сочинение А. П. Котельникова [5], в котором впервые было построено собственно винтовое исчисление. В этой работе использованы упомянутые комплексные числа с множителем ω, с помощью которых вектор превращается в винт. Главная заслуга Котельникова состоит в том, что им впервые в полном виде сформулирован специальный «принцип перенесения», на основании которого все операции винтового исчисления можно построить в точном соответствии с операциями векторного исчисления, если в последнем все вещественные величины заменить комплексными с множителем ω. Благодаря этому удается одним уравнением заменить не три, как в векторном исчислении, а шесть скалярных уравнений, и решение довольно сложных задач приобретает большую компактность.

Сформулированному принципу перенесения Котельниковым было дано и более широкое геометрическое толкование — принцип устанавливает соответствие между геометрическими образами пространств различного числа измерений, в частности между объектами точечного и линейчатого пространств, и позволяет изучать геометрию одного пространства с помощью геометрии другого.

В 1901 г. первым изданием, а в 1903 г. вторым изданием вышел капитальный труд видного немецкого геометра Э. Штуди [6], посвященный геометрической теории винтов. В этой книге объемом свыше 600 страниц около 50 страниц уделяется изложению метода описания винтов и линейчатого пространства с помощью комплексных чисел с множителем ω (Штуди их называет дуальными числами) и формулируется принцип перенесения, аналогичный упомянутому. Во втором издании книги, в небольшой исторической справке, вызванной, очевидно, появлением ряда работ по данному вопросу, автор стремится установить свой приоритет в применении комплексных чисел к винтам. Он приводит свои работы по применению комплексных чисел в линейчатой геометрии евклидова и неевклидова пространств, однако о формулировке им где-нибудь ранее непосредственно принципа перенесения ничего не указывается. В этом кратком очерке имеются ссылки: на небольшую статью Ф. Шиллинга [7] 1891 г., в которой впервые выведены формулы сферической тригонометрии для комплексных углов, затем на указанную выше работу А. П. Котельникова [5], которую Штуди цитирует по краткому реферату из «Fortschritte der Mathematik», 1896 г., в связи с чем о формулировании Котельниковым принципа перенесения ничего не говорится, а также на работу Р. Соссюра [8] 1896 г., где применяются, хотя и не совсем, по его мнению, корректно, комплексные числа. Кстати, в работе Соссюра фактически дана идея применения принципа перенесения к одной задаче о перемещениях твердого тела.

В своей более поздней работе [9] (опубликованной посмертно в 1950 г.) А. П. Котельников делает такое замечание: «Принцип перенесения во всей его общности был открыт и формулирован независимо и, по-видимому, одновременно Штуди и мною. Надо думать, что принцип перенесения уже был известен Штуди, когда он писал... работу „Ueber neue Darstellung der Kräfte“ [1]). Но вполне определенно он формулировал этот принцип в сочинении „Ueber Nicht-Euklidische und Liniengeometrie“ [2])». Первая из указанных статей относится к 1899 г. и, как можно видеть из ее текста, еще не содержит формулировки принципа перенесения. Что касается второй статьи, с которой автору настоящей книги ознакомиться не удалось, то она опубликована в 1900 г. и, по всей вероятности, она является той

---

1) В списке литературы [10].

2) В списке литературы [11].

работой, в которой Э. Штуди впервые дал свою формулировку принципа перенесения.

Следует отметить известную работу Р. Мизеса, выпущенную в виде двух статей в 1924 г. [12] и [13], в которой излагается общая часть и приложения так называемого «мóторного» исчисления (мóтор — соединение слов «момент» и «вектор», т. е. тот же винт). В этой работе автор вначале исходит из геометрического описания мотора с помощью двух прямых, а затем вводит шесть координат мотора и операции над моторами — скалярное и моторное умножение. Далее вводятся моторные диады и матрицы аффинного преобразования. В моторном, как и в винтовом исчислении, обнаруживается аналогия с векторными операциями. Однако принцип перенесения в работе Мизеса не нашел отражения. Мизесом рассмотрены приложения к динамике твердого тела, к теории упругости и к строительной механике стержневых систем, к гидромеханике и др.

Вскоре после А. П. Котельникова (с 1897 г.) идеи винтового исчисления начал развивать Д. Н. Зейлигер, опубликовавший в 1934 г. свою итоговую работу [14], в которой даны результаты обширных исследований по линейчатой геометрии, полученные с помощью винтового исчисления, и показаны интересные применения к кинематике. Некоторые сведения о применении комплексных чисел с множителем ω в линейчатой геометрии даны в книге ученика Штуди — В. Бляшке [15]; кроме того, описание комплексных векторов имеется в книге М. Лагалли [16].

К сожалению, если не считать Д. Н. Зейлигера — современника и единомышленника А. П. Котельникова — и некоторых других геометров, то можно сказать, что винтовое исчисление на протяжении сорока лет оставалось почти совершенно незамеченным. Это в значительной мере объясняется чрезвычайной редкостью издания сочинения А. П. Котельникова, выпущенного в Казани в конце прошлого столетия и в сущности затерявшегося; работа Штуди, представляющая малодоступный геометрический трактат, также не оказалась в поле зрения тех, кто мог бы применить содержащиеся в ней идеи. Весьма возможна и та причина, что многие исследователи в начале этого столетия стремились приспособить те или иные идеи и методы геометрии в первую очередь к развивавшейся механике сплошной среды, винтовое же исчисление, связанное с линейчатой геометрией, к описанию обычной сплошной среды не приспособлено; необходимость использования винтового исчисления для механики твердого тела назрела гораздо позже.

Только с 1937 г. начали появляться работы, которые можно считать продолжением теории винтового исчисления. С. Г. Кислицыным разработаны «винтовые аффиноры» [17], являющиеся перенесением операторов аффинной геометрии на винтовое пространство. Элементами матриц соответствующего аффинного преобразования служат комплексные числа с множителем ω.

Наконец, с 1947 г. начали появляться работы по применению винтового исчисления к вопросам технической механики (теория шарнирных механизмов, теория зубчатых зацеплений). К этим работам относятся работы автора данной книги [18], [19], [20], С. Г. Кислицына [21], [22], [23], [24], Ф. Л. Литвина [25] и некоторые другие.

Из последних работ по применению теории винтов к исследованию механизмов можно указать на статью А. Янга и Ф. Фрейденштейна [26].

Метод винтов, независимо от винтового исчисления, был применен к теории механизмов ранее в 1940 г. Я. Б. Шором и автором настоящей книги [27], [28].

Таким образом, идеи винтового исчисления вызывали некоторый отклик в литературе и в настоящее время уже начали находить применение. Но тем не менее число исследователей в этом направлении весьма ограничено, и в сущности винтовое исчисление продолжает оставаться неизвестным громадному кругу лиц, занимающихся механикой твердого тела и сплошной среды, а тем более инженерам, работающим в промышленности. Можно все же полагать, что появление в последнее время многих статей по приложению винтового исчисления будет в значительной мере способствовать популяризации этого исчисления. Автор надеется, что данная книга также сыграет свою роль в этом направлении.

ГЛАВА I

СКОЛЬЗЯЩИЙ ВЕКТОР. МОТОР И ВИНТ

§ 1. Момент вектора относительно точки. Скользящий вектор. Система скользящих векторов. главный вектор и главный момент системы

Мы будем полагать известными читателю определение вектора, а также все операции над свободными векторами, о которых сообщается в обычных курсах векторной алгебры.

Напомним некоторые сведения о моменте вектора относительно точки и о системе скользящих векторов. Моментом $\boldsymbol{r}_O^0$ вектора $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AB}$, где A — заданное начало, B — конец вектора, относительно какой-нибудь точки O называется вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA}$ на заданный вектор, т. е.

$$\boldsymbol{r}_O^0 = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r}. \tag{1.1}$$

Из определения следует, что момент перпендикулярен к плоскости треугольника OAB и направлен в ту сторону, откуда обход треугольника в направлении вектора представляется происходящим против часовой стрелки, а величина момента равна удвоенной площади треугольника OAB.

Из определения момента следует также, что момент вектора относительно любой точки не изменится, если вектор произвольно перемещать вдоль его прямой.

Два вектора, которые равны и моменты которых относительно любой точки пространства также равны, называются эквивалентными.

Следовательно, перемещая вектор в любое положение вдоль его прямой, мы будем получать эквивалентные векторы.

Во многих задачах механики твердого тела условия задачи сохраняют силу, если векторы, изображающие те или иные величины, заменяются эквивалентными. Такие векторы, которые определяются с точностью до эквивалентности, т. е. которые можно перемещать вдоль линии их действия, называются скользящими. Примером скользящего вектора может служить вектор, изображающий угловую скорость твердого тела. Его положение в пространстве характеризуется положением оси вращения тела; вместе с тем он может быть расположен где угодно на этой оси.

В этой книге рассматриваются скользящие векторы и системы скользящих векторов.

Момент вектора относительно точки O' выражается через момент относительно точки O следующим образом:

$$\boldsymbol{r}_{O'}^0 = \boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{r} = (\overrightarrow{O'O} + \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O^0 + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{r}. \quad (1.2)$$

Из формулы (1.2) следует, что для эквивалентности двух равных векторов достаточно равенства их моментов относительно одной какой-нибудь точки пространства.

Пусть задана произвольная система скользящих векторов $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$. Возьмем произвольную точку O пространства и отнесем к ней два вектора: главный вектор системы, представляющий геометрическую сумму всех векторов системы

$$\boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k, \quad (1.3)$$

и главный момент системы относительно O, равный геометрической сумме моментов всех скользящих векторов системы относительно точки

$$\boldsymbol{r}_O^0 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_{Ok}^0 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_k \times \boldsymbol{r}_k, \quad (1.4)$$

где $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \ldots, \boldsymbol{\rho}_n$ — радиусы-векторы начальных точек векторов из O.

Соотношение между главным моментом системы скользящих векторов относительно новой точки O' и главным моментом этой же системы относительно точки O следующее:

$$\boldsymbol{r}^0_{O'} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_k) \times \boldsymbol{r}_k = \Sigma \boldsymbol{\rho}_k \times \boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{\rho} \times \Sigma \boldsymbol{r}_k =$$
$$= \boldsymbol{r}^0_O + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r}, \qquad (1.5)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор, соединяющий точку O' с точкой O.

Для системы скользящих векторов скалярное произведение главного вектора на главный момент, взятый относительно произвольной точки O пространства, не зависит от выбора указанной точки. В самом деле, перемножив скалярно (1.3) и (1.5), получим для любых двух точек O и O'

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^0_{O'} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^0_O + \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^0_O.$$

Скалярное произведение главного вектора на главный момент системы скользящих векторов называется инвариантом системы и обозначается буквой J.

Из сказанного следует, что при любом изменении точки O может меняться только та составляющая главного момента, которая перпендикулярна к главному вектору, составляющая же, параллельная главному вектору, остается неизменной.

При рассмотрении систем скользящих векторов могут представиться следующие случаи:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \boldsymbol{r} \neq 0,\ \boldsymbol{r}^0 \neq 0,\ J \neq 0; \\ 2)\ \boldsymbol{r} = 0,\ \boldsymbol{r}^0 \neq 0; \\ 3)\ \boldsymbol{r} \neq 0,\ J = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^0 = 0; \\ 4)\ \boldsymbol{r} = 0,\ \boldsymbol{r}^0 = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.6)$$

В первом случае главный вектор и главный момент являются произвольными, во втором случае главный вектор равен нулю, в третьем случае главный момент системы относительно любой точки перпендикулярен главному вектору, четвертый случай характеризует нулевую систему векторов.

§ 2. Эквивалентные системы векторов. Пара векторов

Две системы скользящих векторов назовем эквивалентными, если у них равны главные векторы, а также равны главные моменты относительно любой точки пространства.

Из формулы (1.5) следует, что если у двух систем равны главные векторы и равны главные моменты относительно какой-нибудь одной точки пространства, то у этих систем будут равны моменты относительно любой точки пространства.

Рассмотрим простейшую систему — пару векторов. Система двух скользящих векторов $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{CD}$ образует пару, если фигура $ABCD$ — параллелограмм. Расстояние между прямыми AB и CD — плечо пары, а площадь $ABCD$ — величина момента пары. Момент пары изображается вектором, перпендикулярным к плоскости $ABCD$ и направленным в ту сторону, откуда точка, описывающая периметр $ABCD$, представляется движущейся против часовой стрелки. Пара представляет второй из перечисленных выше (1.6) случаев системы.

Пара, плечо которой равно нулю, называется нулевой. Она соответствует четвертому из случаев (1.6).

Главный вектор пары, очевидно, равен нулю, поэтому главный момент пары на основании (1.5) будет одинаков для всех точек пространства. Этот главный момент равен моменту пары.

Из равенства нулю главного вектора и равенства моментов пары для любой точки пространства следует, что все пары, моменты которых равны, эквивалентны. Эквивалентность не нарушится, если пару переносить и изменять любым образом, сохраняя направление и величину ее момента, т. е. переносить, оставляя ее плоскость параллельной себе, а также изменять модуль ее векторов и плечо, сохраняя произведение.

Совокупность двух пар эквивалентна нулю, если их моменты имеют один модуль, параллельны и направлены в противоположные стороны.

Из того обстоятельства, что эквивалентным парам соответствует одно и то же значение момента, следует, что вместо любой пары можно рассматривать ее момент. Задание момента пары определяет любую пару, эквивалентную данной паре, поэтому оно с точностью до эквивалентности заменяет задание пары.

§ 3. Приведение системы скользящих векторов к простейшей

Существуют элементарные геометрические операции, с помощью которых одна система скользящих векторов может быть заменена другой системой, ей эквивалентной, в частности простейшей, состоящей из наименьшего числа векторов. Эти операции следующие:

а) перенос вектора вдоль его прямой;

б) добавление или отбрасывание двух равных и противоположно направленных векторов;

в) замена нескольких векторов, проходящих через одну точку, их геометрической суммой, проходящей через эту же точку;

г) замена одного вектора его слагающими, полученными по закону параллелограмма и проходящими вместе с ним через одну точку.

Указанные операции не изменяют главного вектора и главного момента системы, следовательно, в результате их применения получается система, эквивалентная данной.

Рассмотрим перенос скользящего вектора на прямую, параллельную его прямой. Пусть $\boldsymbol{r}$ — скользящий вектор, лежащий на прямой a. На параллельной прямой a' построим нулевую пару, состоящую из двух векторов $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ с общим началом в точке O, причем первый из них равен заданному вектору $\boldsymbol{r}$. Иными словами, добавим к заданной системе два равных и противоположно направленных вектора, что представляет собой элементарную операцию «*б*» из перечисленных. Новая система, эквивалентная скользящему вектору $\boldsymbol{r}$, будет состоять из векторов $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''$ и представлять совокупность: $\boldsymbol{r}'$, пара $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')$.

Таким образом, вектор $\boldsymbol{r}$, лежащий на прямой a, эквивалентен совокупности равного ему вектора $\boldsymbol{r}'$ на прямой a', параллельной прямой a, и пары $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')$, момент которой равен моменту вектора $\boldsymbol{r}$ относительно точки O.

Поскольку данная пара или пара, ей эквивалентная, определяется своим моментом, совокупность вектора $\boldsymbol{r}'$ на прямой a' и пары $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')$ заменяется совокупностью вектора $\boldsymbol{r}'$ на прямой a' и момента $\boldsymbol{r}^0$ вектора $\boldsymbol{r}$ относительно точки O на прямой a'.

Отсюда следует, что скользящий вектор эквивалентен простейшей системе, представляющей собой вектор, исходящий из точки, относительно которой взят момент, и момент. Для этой системы, эквивалентной вектору, всегда $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^0 = 0$.

Операция эквивалентной замены скользящего вектора указанной простейшей системой в точке называется приведением скользящего вектора к этой точке.

Рассмотрим приведение системы скользящих векторов в общем случае (первый случай из перечисленных). Пусть задана система скользящих векторов $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$. Выберем некоторую точку пространства O и приведем каждый из векторов системы к этой точке. Мы получим систему векторов $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ с общим началом в точке O, равных данным скользящим векторам, и систему моментов $\boldsymbol{r}_1^0, \boldsymbol{r}_2^0, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{r}_n^0$, равных моментам заданных скользящих векторов относительно O; моменты задают соответствующие пары приведения.

Складывая векторы и определяя сумму

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \ldots + \boldsymbol{r}_n,$$

а также моменты и определяя сумму

$$\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{r}_1^0 + \boldsymbol{r}_2^0 + \ldots + \boldsymbol{r}_n^0,$$

приходим к тому результату, что система заданных скользящих векторов эквивалентна вектору, равному $\boldsymbol{r}$, который в соответствии с операцией «в» проходит через точку O, и паре с моментом $\boldsymbol{r}^0$, поскольку последний определяет эту пару или ей эквивалентную.

Вектор $\boldsymbol{r}$ есть главный вектор, а момент $\boldsymbol{r}^0$ — главный момент системы относительно точки O.

Векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^0$ в общем случае образуют произвольный угол. Поэтому для системы векторов, вообще говоря, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^0 \neq 0$.

Если изменять точку приведения, то момент будет изменяться в соответствии с формулой (1.5), однако составляющая момента по направлению главного вектора будет оставаться неизменной, меняться будет лишь составляющая, перпендикулярная к главному вектору. Существуют такие точки приведения, для которых главный момент системы коллинеарен главному вектору системы.

Пусть главный вектор будет $\boldsymbol{r}$, и для некоторой точки приведения O момент будет $\boldsymbol{r}_O^0$, не коллинеарный $\boldsymbol{r}$. Проведем через точку O прямую, перпендикулярную к $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_O^0$, и найдем на ней точку C, для которой радиус-вектор

$$\overrightarrow{CO} = \frac{r_O^0 \times r}{r^2}.$$

Приняв C за новую точку приведения, найдем соответствующий момент по формуле (1.5):

$$\boldsymbol{r}_C^0 = \boldsymbol{r}_O^0 + \left(\frac{r_O^0 \times r}{r^2}\right) \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,\frac{r_O^0 \cdot r}{r^2}, \qquad (1.7)$$

откуда видно, что момент $\boldsymbol{r}_C^0$ коллинеарен главному вектору $\boldsymbol{r}$. Наряду с точкой C существует бесчисленное множество точек, обладающих тем же свойством. В самом деле, для любой точки C', лежащей вместе с точкой C на прямой линии, параллельной $\boldsymbol{r}$, будем иметь

$$\boldsymbol{r}_{C'}^0 = \boldsymbol{r}_C^0 + \lambda \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_C^0.$$

Прямая линия, для любой точки которой главный момент коллинеарен главному вектору, называется центральной осью системы скользящих векторов.

На основании применения формулы (1.5) можно прийти к выводу, что для любой точки, не лежащей на центральной оси, главный момент не будет коллинеарен главному вектору. Центральная ось системы — единственная прямая, удовлетворяющая поставленному условию.

Распределение главных моментов в пространстве в зависимости от положения точек приведения показано на рис. 1.

В частном случае системы может оказаться, что для любой точки пространства главный момент перпендикулярен к главному вектору. Тогда $J = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^0 = 0$ и имеет место третий из перечисленных выше (1.6) случаев. Приведя систему к центральной оси на основании соотношения (1.7), найдем, что для точек центральной оси $\boldsymbol{r}^0 = 0$. Система будет эквивалентна одному скользящему вектору, а центральная ось будет той прямой, на которой лежит этот вектор.

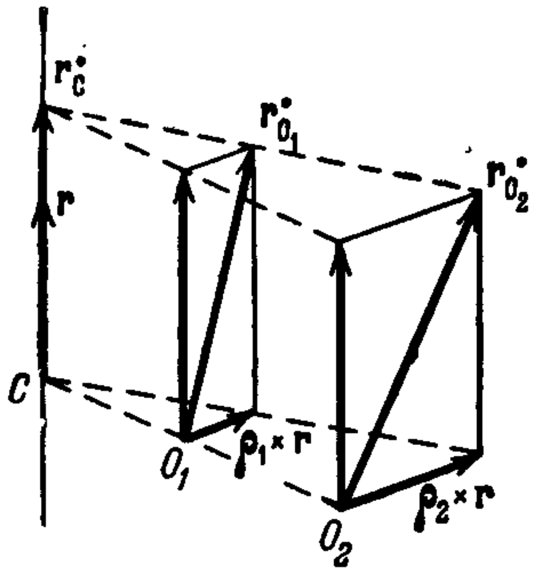

Рис. 1.

К такому случаю приводится, например, система скользящих векторов, проходящих через одну точку, а также система скользящих векторов, лежащих в одной плоскости, при условии, что $\boldsymbol{r} \neq 0$.

Когда система скользящих векторов приводится к одному эквивалентному скользящему вектору, то последний называется равнодействующим вектором или просто равнодействующей данной системы.

Рассмотрим и другой способ приведения системы скользящих векторов $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$. Выберем произвольную плоскость q, не параллельную ни одному из заданных векторов, и рассмотрим точки пересечения $A_1, A_2, \ldots, A_n$ этой плоскости с прямыми, на которых лежат векторы. Затем выберем произвольную прямую a, не параллельную плоскости q и не параллельную ни одному из заданных векторов. В каждой из точек A_k произведем замену скользящего вектора $\boldsymbol{r}_k$ его двумя составляющими по закону параллелограмма (элементарная операция «г»), одна из которых $\boldsymbol{s}_k$ лежит в плоскости q, а другая $\boldsymbol{t}_k$ параллельна прямой a. Вместо заданной системы скользящих векторов мы будем иметь две системы скользящих векторов $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n$ и $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n$. Первая из них — плоская система, эквивалентная одной равнодействующей $\boldsymbol{s}$, лежащей в плоскости q (если только она не эквивалентна паре), а вторая — система параллельных векторов, также эквивалентная одной равнодействующей $\boldsymbol{t}$ (если она, как и первая, не эквивалентна паре). Эти две равнодействующие представляют систему, эквивалентную заданной системе. В общем случае они лежат на скрещивающихся прямых. Таким образом, произвольная система скользящих векторов эквивалентна системе, состоящей из двух скользящих векторов, лежащих на не пересекающихся, вообще говоря, прямых или иначе — кресту векторов. Любую систему можно привести к кресту векторов бесчисленным количеством способов.

§ 4. Мóтор и винт

Геометрический образ — эквивалент системы векторов, представляемый для любой точки пространства главным вектором и главным моментом системы относительно этой точки, называется мóтором (соединение слов «момент» и «вектор»). В дальнейшем для простоты мóтором будем называть совокупность вектора и момента $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^0)$, отнесенную к одной какой-нибудь точке, полагая, что начала $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^0$ находятся в этой точке.

Если система скользящих векторов приведена к точке, лежащей на центральной оси, то главный момент коллинеарен главному вектору.

Мотор $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^0)$, у которого момент $\boldsymbol{r}^0$ коллинеарен вектору, называется винтом.

Прямая, на которой лежит $\boldsymbol{r}$, называется осью винта. Иными словами, винт есть система, состоящая из скользящего вектора $\boldsymbol{r}$ и коллинеарного ему момента $\boldsymbol{r}^0$.

Из всего сказанного следует, что система скользящих векторов в общем случае эквивалентна винту. Ось винта — центральиая ось системы; вектор винта — главный вектор; момент винта — главный момент системы относительно произвольной точки центральной оси.

Так как векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^0$ коллинеарны, то $\boldsymbol{r}^0 = p\boldsymbol{r}$, где p — скалярный множитель. Этот множитель называется параметром винта. Величина p будет положительна, если $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^0$ направлены в одну и ту же сторону, и отрицательна, если они направлены в разные стороны.

Всякий скользящий вектор есть в то же время винт с нулевым параметром, а прямая, на которой он лежит, есть ось этого винта; всякий момент — винт с бесконечно большим параметром, осью которого может служить любая прямая, ему параллельная. В дальнейшем под термином «винт» мы будем понимать винт любого параметра, в том числе и винт нулевого параметра, т. е. скользящий вектор

Винт нулевого параметра, у которого величина вектора равна единице, будем называть единичным винтом (то же, что единичный скользящий вектор).

Винты будем обозначать большими буквами жирного шрифта.

Винт $\boldsymbol{R}$ полностью определяет мотор $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^0)$ для любой точки пространства; этот мотор в свою очередь единственным образом определяет винт.

Замена винта эквивалентным мотором в точке O называется приведением винта к точке O; точку O, к которой отнесен мотор, будем называть точкой приведения.

Момент $\boldsymbol{r}^0_O$ называется моментом винта относительно точки O.

§ 5. Винт кинематический и винт силовой

Поскольку теория винтов имеет непосредственное применение в механике, целесообразно будет здесь же указать на кинематическую и силовую интерпретацию винта.

Наиболее общий случай перемещения твердого тела в пространстве сводится к винтовому перемещению, характеризующемуся осью, модулем главного вектора и параметром. Винт кинематический есть винт, характеризующий перемещение тела. Ось этого винта совпадает с осью винтового перемещения, модуль главного вектора выражает величину угла поворота тела, а параметр — отношение величин поступательного перемещения (скольжения) параллельно оси к величине угла поворота.

Если винтовое перемещение бесконечно малое, то, отнеся его к приращению времени, мы получим мгновенный винт или винт скоростей, у которого вектором служит угловая скорость, а моментом — поступательная скорость тела. В этом случае скорость произвольной точки тела представляет момент винта относительно этой точки.

Наиболее общая система сил, действующих на тело, может быть приведена к силовому винту по правилам приведения к винту системы векторов, если векторы изображают силы. Момент системы сил относительно какой-либо точки пространства есть момент эквивалентного силового винта относительно этой точки, или, что то же, момент, полученный приведением силового винта к этой точке.

§ 6. Относительный момент двух винтов

Сумма слагаемых: а) проекции вектора первого винта на ось момента второго относительно какой-либо точки, умноженной на момент второго, б) проекции вектора второго винта на ось момента первого относительно той же точки, умноженной на момент первого, называется относительным моментом двух винтов.

Если на тело, совершающее элементарное перемещение, характеризующееся кинематическим винтом $\boldsymbol{U}$, действует силовой винт $\boldsymbol{R}$, то работа, совершаемая силовым винтом на винте перемещения, равна относительному моменту силового и кинематического винтов $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{U}$.

Это известное положение может быть легко доказано, если привести оба винта к одной точке и затем рассмотреть сумму работ главного вектора силового винта на поступательном перемещении точки и главного момента силового винта на угловом перемещении тела.

ГЛАВА II

МНОЖИТЕЛЬ ω И ВВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕКТОРОВ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА ВИДА $a+\omega a^0$. АЛГЕБРА И АНАЛИЗ В ОБЛАСТИ ЭТИХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Множитель ω. Комплексный вектор

Как уже было сказано выше, непосредственное задание винта его осью, вектором и параметром заменяется заданием мотора, отнесенного к точке приведения и представляющего совокупность вектора и момента. Эта замена приносит ту выгоду, что оперирование непосредственно над винтом заменяется оперированием над векторами и сводится к задаче обыкновенной векторной алгебры.

Клиффордом введена весьма оригинальная и важная операция, с помощью которой мотор $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^0)$ выражается формально в виде комплексного вектора

$$\boldsymbol{r} + \omega \boldsymbol{r}^0,$$

где ω—множитель, квадрат которого равен нулю.

Если оперировать с такого рода комплексным вектором как с формальной суммой, то ω будет играть роль числа, обладающего свойством $\omega^2 = 0$.

Введение комплексного вектора с указанным множителем ω приводит к интересным последствиям: во-первых, результаты операций над моторами оказываются не зависящими от точки приведения, для которой получен мотор, а во-вторых, «векторная» часть результата операции над любым мотором оказывается равной результату соответствующей операции над вектором мотора.

Поскольку в дальнейшем изложении мы используем представление мотора в виде комплексного вектора, необходимо здесь рассмотреть общие свойства комплексных чисел вида $a+\omega a^0$, где $\omega^2=0$.

§ 2. Действия над комплексными числами вида $a+\omega a^0$. Алгебра и анализ

Комплексные числа рассматриваемого вида будем обозначать большими буквами. Рассмотрим комплексное число

$$A = a + \omega a^0,$$

где $\omega^2 = 0$. Число a называется главной частью, а число $a^0 = \text{мом}\,(A)$ — моментной частью комплексного числа A. Если $a^0 = 0$, то число называется вещественным. Отношение $a^0 : a = P\,(A)$ называется параметром числа A (при $a \neq 0$).

Введя параметр $P(a)$, мы можем представить комплексное число в виде

$$A = a\left(1 + \omega\frac{a^0}{a}\right) = a\,[1 + \omega P\,(a)]. \tag{2.1}$$

Если $P\,(a) = 0$, то число вещественно.

Действия над комплексными числами будем определять, используя, во-первых, незыблемый принцип, согласно которому равенство $A = a + \omega a^0 = 0$ означает, что одновременно удовлетворяются равенства $a = 0$ и $a^0 = 0$, и во-вторых, рассматривая каждое комплексное число формально, как сумму, а операцию ω — как число, обладающее формальным свойством $\omega^2 = 0$.

Сложение и вычитание двух комплексных чисел не отличается от сложения и вычитания обычных комплексных чисел

$$A \pm B = (a \pm b) + \omega\,(a^0 \pm b^0). \tag{2.2}$$

Для умножения будем иметь формулу

$$AB = (a + \omega a^0)\,(b + \omega b^0) = ab + \omega\,(ab^0 + ba^0). \tag{2.3}$$

Для деления (при $b \neq 0$) получим

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} + \omega\frac{a^0 b - b^0 a}{b^2}. \tag{2.4}$$

Возвышение в степень и извлечение корня производится по формулам

$$\left.\begin{aligned} A^n &= (a+\omega a^0)^n = a^n + \omega n a^0 a^{n-1}, \\ \sqrt[n]{A} &= \sqrt[n]{a+\omega a^0} = \sqrt[n]{a} + \omega \frac{a^0}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}, \quad (a \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Для определения функции от комплексной переменной $X = x + \omega x^0$ целесообразно представить эту функцию также в виде комплексной переменной

$$F(X) = F(x+\omega x^0) = f(x, x^0) + \omega g(x, x^0), \tag{2.6}$$

где $f(x, x^0)$ и $g(x, x^0)$ — вещественные функции двух вещественных переменных x и x^0.

Целесообразно здесь и в дальнейшем рассматривать функции дифференцируемые. Для этого необходимо ввести требование, подобное вводимому в обычной теории функций комплексного переменного для аналитических функций, а именно чтобы производная, т. е. предел отношения приращения функции $\Delta F(X)$ к приращению ΔX комплексной переменной X при $\Delta X \to 0$, не зависела от отношения $\Delta x^0 : \Delta x$.

Записав выражение производной, мы будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dX} &= \frac{df(x, x^0) + \omega\, dg(x, x^0)}{dx + \omega\, dx^0} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x^0}\frac{dx^0}{dx}\right) + \omega\left[\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial x^0} - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx^0}{dx} - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{\partial f}{\partial x^0}\left(\frac{dx^0}{dx}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Чтобы удовлетворить поставленному условию, необходимо в выражении (2.7) положить равным нулю множители перед $dx^0 : dx$. Тогда получатся соотношения [1])

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x^0} = \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{2.8}$$

---

[1]) Эти соотношения аналогичны условиям регулярности Коши—Римана для функций комплексного переменного $x + ix^0$, выполнение которых во всей области изменения функции определяет аналитичность функции.

Из первого соотношения вытекает, что функция f есть функция только переменной x, т. е.

$$f(x, x^0) = f(x), \tag{2.9}$$

а из второго — следующее выражение для функции g:

$$g(x, x^0) = x^0 \frac{\partial f}{\partial x} + f^0(x), \tag{2.10}$$

где $f^0(x)$ — некоторая функция от x.

Следовательно, общее выражение функции комплексной переменной

$$X = x + \omega x^0,$$

которая удовлетворяет поставленному условию, будет

$$F(X) = f(x) + \omega\left[x^0 \frac{\partial f}{\partial x} + f^0(x)\right]. \tag{2.11}$$

При X вещественном, т. е. при $x^0 = 0$, функция должна иметь выражение

$$F(X) = f(x) + \omega f^0(x). \tag{2.12}$$

Будем считать, что в общем случае функция комплексной переменной $X = x + \omega x^0$ зависит как от комплексной переменной X, так и от комплексных параметров $A, B, C, \ldots$ и определим ее с помощью ряда Тэйлора, в котором ωx^0 играет роль приращения и положены равными нулю все члены, содержащие ω в степени выше первой. Таким образом,

$$F(X, A, B, C, \ldots) = F(x, a, b, c, \ldots) + \\ + \omega\left(x^0 \frac{\partial F}{\partial x} + a^0 \frac{\partial F}{\partial a} + b^0 \frac{\partial F}{\partial b} + c^0 \frac{\partial F}{\partial c} + \cdots\right). \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.11) и (2.13), найдем

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= F(x, a, b, c, \ldots), \\ f^0(x) &= a^0\frac{\partial f}{\partial x} + b^0\frac{\partial f}{\partial x} + c^0\frac{\partial f}{\partial x} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Таким образом, главная часть функции равна функции от главных частей величин, от которых она зависит.

Из формул (2.11) и (2.13) можно усмотреть важное обстоятельство, а именно, что функция комплексной переменной $x + \omega x^0$ полностью определяется функцией от главной части x.

Отсюда следует, что если главные части f и φ двух функций F и Φ тождественно равны, то равны и сами функции. В самом деле, из равенства $f = \varphi$ на основании (2.14) следует равенство $f^0 = \varphi^0$, а на основании (2.11) можно заключить, что

$$F = \Phi.$$

Из сказанного вытекает важная теорема.

Теорема 1. *В области комплексных величин вида $a + \omega a^0$ сохраняются все тождества, относящиеся к дифференцируемым функциям.*

Для функции e^x получим выражение

$$e^X = e^{x+\omega x^0} = e^x + \omega x^0 e^x = e^x(1 + \omega x^0).$$

С другой стороны,

$$e^X = e^{x+\omega x^0} = e^x e^{\omega x^0},$$

откуда следует, что

$$e^{\omega x^0} = 1 + \omega x^0, \tag{2.15}$$

или вообще для любого числа p

$$e^{\omega p} = 1 + \omega p. \tag{2.15'}$$

Сравнение с формулой (2.1) показывает, что всякое комплексное число A имеет вид

$$A = a + \omega a^0 = a\left(1 + \omega \frac{a^0}{a}\right) = a(1 + \omega p) = ae^{\omega p}, \qquad p = \frac{a^0}{a}.$$

Из этой формулы следует, что

$$P(ABCD\ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + \ldots,$$

т. е. что параметр произведения равен сумме параметров сомножителей, а параметр дроби равен разности параметров числителя и знаменателя.

У числа ωa параметр равен ∞, поэтому к комплексным числам, не имеющим главной части, выведенные теоремы не применимы. В связи с этим модуль главной части числа может быть принят за модуль числа, а отсюда — комплексные числа с модулем нуль представляют особенность.

Для функций комплексного аргумента X мы получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\sin X = \sin x + \omega x^0 \cos x, \quad P(\sin X) = x^0 \operatorname{ctg} x,\\
&\cos X = \cos x - \omega x^0 \sin x, \quad P(\cos X) = -x^0 \operatorname{tg} x,\\
&\operatorname{tg} X = \operatorname{tg} x + \frac{\omega x^0}{\cos^2 x}, \quad P(\operatorname{tg} X) = \frac{x^0}{\sin x \cos x},\\
&\ln X = \ln x + \omega \frac{x^0}{x}, \quad P(\ln X) = \frac{x^0}{x \ln x},\\
&\sin AX = \sin ax + \omega (x^0 a + a^0 x) \cos ax,\\
&e^{A+B} = e^A e^B, \quad e^{iX} = \cos X + i \sin X,\\
&\sin^2 X + \cos^2 X = 1
\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

и т. д.

На основании (2.7) и соотношений (2.8), (2.9) и (2.10) получим выражение производной функции $F(X)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dF(X)}{dX} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial x}\left(x^0 \frac{\partial f}{\partial x} + f^0(x)\right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + \omega\left(x^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f^0}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Из этой формулы видно, что дифференцирование по комплексной переменной X сводится к дифференцированию по вещественной переменной x.

Если некоторая функция $\varphi(x)$, являющаяся главной частью $\Phi(X)$, тождественно равна $\partial f/\partial x$, то отсюда будет следовать, что функция $\Phi(x)$ будет равна dF/dX. В самом деле, дифференцируя равенство (2.14) по x, на основании равенства $\varphi = \partial f/\partial x$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^0}{\partial x} = a^0 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + b^0 \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \cdots = a^0 \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \\
+ b^0 \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \cdots = \varphi^0(x),
\end{aligned}$$

откуда, подставляя в (2.17),

$$\frac{dF}{dX} = \frac{\partial f}{\partial x} + \omega\left[x^0\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f^0}{\partial x}\right] =$$

$$= \varphi + \omega\left[x^0\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi^0(x)\right] = \Phi.$$

Наконец, если F — данная функция комплексной переменной X и комплексных параметров $A, B, C, \ldots$, то функцию G от тех же величин, тождественно удовлетворяющую уравнению

$$dG = F\,dX, \tag{2.18}$$

назовем интегралом от $F\,dX$ и обозначим так:

$$G = \int F\,dX = g + \omega\left[x^0\ \frac{\partial g}{\partial x} + a^0\ \frac{\partial g}{\partial a} + b^0\ \frac{\partial g}{\partial b} + \cdots\right]. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что

$$g(x) = \int f(x)\,dx.$$

Если $\Phi = \Phi(X, A, B, \ldots)$, причем $\varphi = g$, т. е. главная часть функции Φ равна интегралу от главной части функции F, то сама функция равна интегралу от F.

В самом деле, подставив вместо g в (2.19) функцию φ, получим

$$G = \varphi + \omega\left[x^0\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a^0\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} + b^0\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \cdots\right] = \Phi.$$

На основании сказанного можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *В области комплексных чисел вида $a + \omega a^0$ сохраняются все теоремы дифференциального и интегрального исчислений.*

Например, для комплексных величин

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d(X^M)}{dX} = MX^{M-1},\ \frac{d}{dX}(e^X) = e^X,\ d\ln X = \frac{1}{X},\\ &\frac{d\sin X}{dX} = \cos X,\ \ \frac{d\cos X}{dX} = -\sin X,\\ &\int X^A\,dX = \frac{X^{A+1}}{A+1} + C,\ \int\cos(AX)\,dX = \frac{\sin(AX)}{A} + C \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

и т. д.

Отметим особенности исчисления комплексных чисел: а) произведение комплексных чисел может быть равно нулю не только при равенстве нулю одного из сомножителей, но и при равенстве нулю главных частей у двух сомножителей; так $\omega a \omega b = 0$; б) деление на ωa при любом a невозможно.

§ 3. Алгебраические уравнения

Остановимся на некоторых свойствах и особенностях алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами.

Пусть в уравнении n-й степени

$$F(X) = AX^n + BX^{n-1} + CX^{n-2} + \ldots + RX + S = 0, \tag{2.21}$$

коэффициенты будут комплексными числами:

$$A = a + \omega a^0,\ B = b + \omega b^0,\ C = c + \omega c^0,\ \ldots,$$
$$R = r + \omega r^0,\ S = s + \omega s^0. \tag{2.22}$$

Корни такого уравнения, вообще говоря, суть комплексные числа того же вида.

Если в уравнении (2.21) вместо коэффициентов подставить их комплексные выражения (2.22), а вместо X — комплексное число $x + \omega x^0$, то после разделения главной и моментной частей получатся два уравнения:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + rx + s = 0, \tag{2.23}$$

$$[nax^{n-1} + (n-1)\,bx^{n-2} + \ldots + r]\,x^0 +$$
$$+ a^0x^n + b^0x^{n-1} + c^0x^{n-2} + \ldots + r^0x + s^0 = 0. \tag{2.24}$$

Решение уравнения (2.21) сводится к определению главной части α корня из вещественного уравнения (2.23) (она может быть вещественной или комплексной вида $\alpha' + i\alpha''$), а затем, после подстановки ее в уравнение (2.24),— к определению моментной части корня:

$$x^0 = \frac{-(a^0\alpha^n + b^0\alpha^{n-1} + \cdots + r^0\alpha + s^0)}{na\alpha^{n-1} + (n-1)\,b\alpha^{n-2} + \cdots + r} = \alpha^0. \tag{2.25}$$

Как видно, решение возможно, если не имеет места особенный случай, когда дискриминант вещественного уравнения (2.23) обращается в нуль В этом случае, как известно, существует кратный корень уравнения, обращающий в нуль, кроме левой части уравнения (2.23), также производную левой части данного уравнения. Но производная левой части уравнения (2.23) стоит множителем при x^0 в уравнении (2.24) и попадает в знаменатель выражения (2.25) для α^0, а значит, в этом случае определение соответствующей моментной части корня теряет смысл.

Но очевидно, что при обращении в нуль дискриминанта уравнения (2.25) решение все же существует, если одновременно со знаменателем обратится в нуль и числитель выражения (2.25). Это возможно только в том случае, когда кратный корень уравнения (2.23) будет одновременно и корнем уравнения (2.24). Положим, что α — корень k-й кратности уравнения (2.23) и он же — корень $(k-1)$-й кратности уравнения (2.24).

Запишем сокращенно уравнения (2.23) и (2.24) при сделанном предположении

$$f(x) = (x-\alpha)^k g(x) = 0, \tag{2.26}$$

$$x^0 f'(x) + f^0(x) = [k(x-\alpha)^{k-1} g(x) + \\ + (x-\alpha)^k \bar{g}(x)]\, x^0 + (x-\alpha)^{k-1} h(x) = 0, \tag{2.27}$$

где $g(x)$ и $h(x)$ — многочлены, не содержащие множителя $(x-\alpha)$.

Продифференцировав левые части уравнений (2.26) и (2.27) $k-1$ раз, получим

$$f^{(k-1)}(x) = k!\,(x-\alpha)\,g(x) + \ldots + (x-\alpha)^k g^{(k-1)}(x), \tag{2.28}$$

$$x^0 f^{(k)}(x) + f^{0(k-1)}(x) = [k!\,g(x) + \ldots + (x-\alpha)^k g^{(k)}(x)]\, x^0 + \\ + (k-1)!\,h(x) + \ldots + (x-\alpha)^{k-1} h^{(k-1)}(x). \tag{2.29}$$

Левые части уравнений (2.26) и (2.27) обращаются в нуль при $x=\alpha$ и при любом значении x^0.

Производные от левой части уравнения (2.26) всех порядков до $(k-1)$-го включительно обращаются в нуль при $x=\alpha$.

Производные от левой части уравнения (2.27) всех порядков до $(k-2)$-го включительно обращаются в нуль при $x=\alpha$ и при любом значении α^0. Производная же $(k-1)$-го порядка (2.29) обращается в нуль при

$$x=\alpha, \quad x^0 = \alpha^0 = -\frac{h(\alpha)}{kg(\alpha)},$$

где $g(\alpha)$ и $h(\alpha)$ — значения многочленов $g(x)$ и $h(x)$ при $x=\alpha$.

Представим уравнение (2.27) в следующем виде:

$$(x-\alpha)^{k-1}\{[kx^0g(x)+h(x)]+x^0(x-\alpha)g'(x)\}=0. \quad (2.30)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках,

$$H(x)=h(x)+kx^0g(x) \quad (2.31)$$

обращается в нуль при $x=\alpha$ и $x^0=\alpha^0=-h(\alpha)/kg(\alpha)$

$$H(\alpha)=h(\alpha)-k\frac{h(\alpha)}{kg(\alpha)}g(\alpha)=0,$$

поэтому для $x^0=\alpha^0$ выражение (2.31) должно быть равно произведению $(x-\alpha)$ на некоторый многочлен $g^0(x)$, т. е.

$$H(x)=h(x)+k\alpha^0g(x)=(x-\alpha)g^0(x),$$

откуда

$$h(x)=(x-\alpha)g^0(x)-k\alpha^0g(x).$$

В таком случае уравнение (2.27) или (2.30) может быть представлено в такой форме:

$$(x-\alpha)^{k-1}[kg(x)x^0+(x-\alpha)g^0(x)-k\alpha^0g(x)+$$
$$+x^0(x-\alpha)g'(x)]=0. \quad (2.32)$$

Но отсюда немедленно можно заключить, что левая часть: основного комплексного уравнения (2.21) может быть представлена как произведение некоторого комплексного многочлена на k-ю степень разности $X-\mathrm{A}$, т. е.

$$F(X)=(X-\mathrm{A})^kG(X)=0 \quad (2.33)$$

и ее $(k-1)$-я производная будет

$$F^{(k-1)}(X)=k!(X-\mathrm{A})G(X)+\ldots+(X-\mathrm{A})^kG^{(k-1)}(X) \quad (2.34)$$

где $\mathrm{A}=\alpha+\omega\alpha^0$ — комплексный корень, обращающий в нуль наряду с уравнением (2.33) все его производные до $(k-1)$-го порядка включительно, а функция $G(X)$ имеет вид

$$G(X)=g(x)+\omega[x^0g'(x)+g^0(x)]. \quad (2.35)$$

В самом деле, раскрыв комплексное выражение (2.33), мы получим два вещественных алгебраических уравнения:

$$(x-\alpha)^k g(x) = 0, \tag{2.36}$$

$$(x-\alpha)^{k-1}[k(x^0-\alpha^0)g(x) + x^0(x-\alpha)g'(x) + \\ + (x-\alpha)g^0(x)] = 0. \tag{2.37}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (2.26) и (2.32). Из уравнения (2.33) видно непосредственно, что оно удовлетворяется при $x=\alpha$ и при x^0, равном любому числу, так как при подстановке вместо X величины $\mathrm{A}+\omega n = \alpha + \omega(\alpha^0+n)$, где n — произвольное вещественное число, левая часть будет равна нулю:

$$F(\mathrm{A}+\omega n) = (\omega n)^k G(\mathrm{A}+\omega n) = 0,$$

так как любая степень ω выше первой равна нулю.

Из факта существования кратного корня комплексного уравнения $F(X)=0$ следует, что дискриминант этого уравнения равен нулю [1]). Представив дискриминант как результант уравнения и его производных, получим соотношения

$$R(F, F') = 0, R(F, F'') = 0, \ldots, R(F, F^{(k-1)}) = 0,$$

которые с точностью до знака выражаются с помощью определителей

$$\begin{vmatrix} A & B & C & \cdots & & \cdots \\ 0 & nA & (n-1)B & \cdots & & \cdots \\ 0 & A & B & & C & \cdots \\ 0 & 0 & nA & & (n-1)B & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{2.38}$$

и т. д.

Если уравнение с комплексными коэффициентами имеет вещественный корень, то в неособенном случае, т. е. когда дискриминант его вещественной части не равен нулю, уравнения

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + rx + s = 0,$$
$$f^0(x) = a^0x^n + b^0x^{n-1} + c^0x^{n-2} + \ldots + r^0x + s^0 = 0$$

---

[1]) Что вытекает из перенесения теорем алгебры вещественных чисел на алгебру комплексных чисел.

должны удовлетворяться при x, равном этому корню. Для этого необходимо и достаточно, чтобы результант этих уравнений был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & \cdots & \cdots \\ a^0 & b^0 & c^0 & d^0 & \cdots & \cdots \\ 0 & a & b & c & d & \cdots \\ 0 & a^0 & b^0 & c^0 & d^0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0. \tag{2.39}$$

Рассмотрим в качестве примера простейшее — квадратное уравнение

$$F(X) = AX^2 + BX + C = 0, \tag{2.40}$$

которое распадается на два вещественных:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.41}$$

$$x^0 f'(x) + f^0(x) = (2ax + b)\, x^0 + a^0x^2 + b^0x + c^0 = 0. \tag{2.42}$$

Если дискриминант уравнения (2.41) равен нулю, т. е. если

$$b^2 = 4ac, \tag{2.43}$$

то уравнение (2.41) имеет двойной корень $x = -b/2a$, удовлетворяющий также производной — уравнению

$$2ax + b = 0, \tag{2.44}$$

и для разрешимости заданного уравнения (2.40) необходимо, чтобы уравнение

$$a^0x^2 + b^0x + c^0 = 0 \tag{2.45}$$

имело тот же корень. Но так как уравнение (2.45) не может иметь с уравнением (2.41) иных общих корней, кроме указанного двойного корня, то для разрешимости достаточно, чтобы результант уравнений (2.41) и (2.45) или же результант уравнений (2.44) и (2.45) был равен нулю. Взяв второй из них, получим

$$\begin{vmatrix} a^0 & b^0 & c^0 & 0 \\ 0 & 2a & b & 0 \\ 0 & a^0 & b^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и принимая во внимание соотношение (2.43), получим

$$2bb^0 - 4a^0c - 4ac^0 = 0. \tag{2.46}$$

Соотношение (2.46) вместе с соотношением (2.43) равносильно комплексному соотношению

$$B^2 - 4AC = 0, \tag{2.47}$$

которое представляет условие кратности корня заданного комплексного квадратного уравнения. Раскрыв (2.47), мы получим (2.43) и (2.46).

Резюмируя все вышесказанное об алгебраических уравнениях, можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 3. а. *Алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами вида* $a + \omega a^0$ *в общем случае имеет комплексные корни* $\alpha + \omega\alpha^0$ *того же вида* (α *и* α^0 — *числа вещественные или комплексные с мнимой единицей* $\sqrt{-1}$).

б. *Главная часть* α *корня есть корень вещественного уравнения, представляющего главную часть заданного комплексного уравнения, а моментная часть* α^0, *если дискриминант упомянутого вещественного уравнения отличен от нуля, определяется однозначно из моментной части заданного комплексного уравнения.*

в. *Если дискриминант главной части заданного комплексного уравнения равен нулю, то главная часть уравнения имеет кратный корень (он же — главная часть комплексного корня заданного уравнения), но в этом случае определение моментной части корня, вообще говоря, невозможно, и решение уравнения теряет смысл. Если при этом указанный кратный корень обращает в нуль также и моментную часть уравнения, то моментная часть корня неопределенна.*

г. *Если корень главной части уравнения имеет кратность* k *и в то же время он является корнем кратности* $k-1$ *моментной части уравнения, то дискриминант заданного комплексного уравнения равен нулю. В этом случае комплексный корень имеет кратность* k. *Этот корень обращает в нуль также уравнения, левые части которых суть последовательные производные левой части уравнения, включая* $(k-1)$*-ю производную, само же заданное уравнение* *удовлетворяется вещественной частью корня при произвольном значении моментной части неизвестного.*

д. *Для того чтобы алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами имело вещественный корень, необходимо и достаточно обращение в нуль результанта главной части уравнения и уравнения, полученного заменой в последней главных частей коэффициентов моментными частями.*

Отметим, что рассмотренные здесь свойства алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами имеют кинематическую интерпретацию, которая будет в дальнейшем показана (см. гл. IV).

ГЛАВА III

ОПЕРАЦИИ НАД ВИНТАМИ — КОМПЛЕКСНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Общие замечания

После того, как установлено понятие винта, для построения такой алгебры, в которой винт был бы объектом различных операций, необходимо дать определение операций непосредственно над винтами.

В основу всех действий над винтами мы положим действия над моторами, соответствующими этим винтам. При задании двух и более винтов мы выберем в пространстве одну общую точку приведения и к ней отнесем моторы всех винтов. Любую алгебраическую операцию над винтами (умножение на число, сложение и умножение) мы будем определять как операцию над моторами этих винтов, а так как каждый мотор, как об этом уже было сказано, формально выражается комплексным вектором, то алгебра винтов сведется к алгебре комплексных векторов.

Оказывается, что применение основных векторных операций к комплексным векторам — моторам — приводит в результате к величинам, обладающим такими свойствами: во-первых, эти величины не зависят от точки, к которой приведены винты, а во-вторых, главная часть величины, полученной в результате операций, есть величина, получаемая соответствующей операцией над главными частями комплексных векторов. Эти свойства являются следствием свойства выбранного множителя ω, которое выражается равенством $\omega^2 = 0$.

Выражая мотор комплексным вектором, мы производим над ним действие формально как над суммой двух векторов.

При умножении мы используем распределительное свойство произведения.

В частности, для единичного винта $\boldsymbol{E} \to (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^0)$, $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^0 = 0$, где знак $\to$ указывает на соответствие мотора $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^0)$ винту $\boldsymbol{E}$, будем иметь

$$\boldsymbol{E}^2 = (\boldsymbol{e} + \omega\boldsymbol{e}^0)^2 = \boldsymbol{e}^2 + 2\omega\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^0 = 1. \tag{3.1}$$

§ 2. Умножение винта на число

Умножение винта на вещественное число мы определим как построение такого винта, вектор которого равен вектору данного винта, умноженному на это число, и момент которого относительно любой точки пространства равен моменту данного винта относительно этой же точки, умноженному на то же число.

Согласно этому определению, если $\boldsymbol{E}$ — единичный винт, а $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^0)$ — его мотор для какой-нибудь точки, причем $\boldsymbol{e}^2 = 1$, $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^0 = 0$, то винту $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}r$, где r — вещественное число, будет соответствовать мотор $(\boldsymbol{e}r, \boldsymbol{e}^0 r)$ для той же точки.

Применяя формулу (1.1) для момента вектора относительно новой точки, мы придем к выводу, что данное определение не зависит от точки, для которой взят момент, т. е. что винт $\boldsymbol{E}r$, удовлетворяющий условию определения для одной какой-нибудь точки, будет удовлетворять ему для любой точки пространства.

Воспользовавшись соотношением (1.7) для разыскания точки центральной оси, легко можно вывести, что момент винта $\boldsymbol{E}r$ относительно оси винта $\boldsymbol{E}$ равен нулю, а следовательно, ось винта $\boldsymbol{E}r$ есть в то же время ось винта $\boldsymbol{E}$ (нулевого параметра). Отсюда следует, что умножение на вещественное число не меняет оси единичного винта.

На основании (3.1) имеем

$$\boldsymbol{E}^2 = 1, \ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}r, \ \boldsymbol{R}^2 = r^2; \tag{3.2}$$

если r — положительное число, то направления $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}r$ совпадают, если r — отрицательное число, то направления $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}r$ противоположны.

Для умножения произвольного винта $\boldsymbol{R}$, мотор которого есть $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^0)$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^0 \neq 0$, на вещественное число a построим винт $\boldsymbol{R}a$, для которого соответствующий мотор, по определению, будет $(\boldsymbol{r}a, \boldsymbol{r}^0 a)$. Выражая мотор через комплексный вектор, будем иметь

$$\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{r} + \omega \boldsymbol{r}^0, \ \boldsymbol{R}a \to \boldsymbol{r}a + \omega \boldsymbol{r}^0 a, \tag{3.3}$$

где знак $\to$ указывает на соответствие мотора данному винту. Ось винта, как можно показать, при умножении на a сохраняется.

Дадим определение умножения единичного винта $\boldsymbol{E}$ на комплексное число $R = r + \omega r^0$.

Выражая мотор $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}^0)$ винта $\boldsymbol{E}$ через комплексный вектор

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{e} + \omega \boldsymbol{e}^0, \ \boldsymbol{e}^2 = 1, \ \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}^0 = 0,$$

определим винт $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}R$ как винт, соответствующий мотору винта $\boldsymbol{E}$, умноженному на комплексное число R, т. е.

$$\boldsymbol{E}R \to (\boldsymbol{e} + \omega \boldsymbol{e}^0)(r + \omega r^0) = \boldsymbol{e}r + \omega(\boldsymbol{e}^0 r + \boldsymbol{e}r^0). \tag{3.4}$$

Для точек оси винта $\boldsymbol{E}$ момент $\boldsymbol{e}^0$ равен нулю, поэтому мотор винта $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}R$ для этих точек

$$\boldsymbol{e}r + \omega \boldsymbol{e}r^0 = \boldsymbol{e}(r + \omega r^0)$$

будет представлять также винт, так как вектор и момент коллинеарны.

Отсюда следует, что в результате умножения единичного винта $\boldsymbol{E}$ на комплексное число $R = r + \omega r^0$ получается винт $\boldsymbol{R}$, осью которого служит ось винта $\boldsymbol{E}$ и который может быть представлен комплексным вектором

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}R = \boldsymbol{E}(r + \omega r^0) = \boldsymbol{E}re^{\omega p}, \ p = \frac{r^0}{r}. \tag{3.5}$$

Если r — положительное число, то направление вектора винта $\boldsymbol{R}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{E}$, если оно отрицательно, то направление указанного вектора противоположно.

Если винт задан мотором $\boldsymbol{r} + \omega \boldsymbol{r}^0$ для произвольной точки O приведения, то параметр винта будет определяться формулой

$$p = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^0}{\boldsymbol{r}^2}.$$

Комплексное число $|r|e^{\omega p}$, у которого главная часть равна модулю вектора винта, а параметр — параметру винта, будем называть комплексным модулем винта $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}re^{\omega p}$.

Умножение произвольного винта $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}re^{\omega p}$ на комплексное число $A = a + \omega a^0$ мы определим как построение такого винта, мотор которого для произвольной точки получается умножением мотора $(\boldsymbol{e}r, \boldsymbol{e}^0 r + \boldsymbol{e}r^0)$ данного винта для этой же точки на это комплексное число. Представляя мотор как комплексный вектор, получим

$$\boldsymbol{R}A \to [\boldsymbol{e}r + \omega(\boldsymbol{e}^0 r + \boldsymbol{e}r^0)](a + \omega a^0) = \\ = \boldsymbol{e}ra + \omega(\boldsymbol{e}^0 ra + \boldsymbol{e}r^0 a + \boldsymbol{e}ra^0), \quad (3.6)$$

причем $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}^0 = 0$.

И в этом случае легко убедиться, что определение не зависит от точки приведения, для которой взят мотор.

Для точек, принадлежащих оси винта $\boldsymbol{R}$, момент $\boldsymbol{e}^0$ равен нулю, поэтому для этой оси будем иметь мотор

$$\boldsymbol{R}A \to \boldsymbol{e}ra + \omega\boldsymbol{e}(r^0 a + ra^0),$$

у которого момент коллинеарен вектору, т. е. винт. Следовательно, осью винта $\boldsymbol{R}A$ служит ось винта $\boldsymbol{R}$, а значит, при умножении на комплексное число произвольного винта ось остается неизменной.

Для винта $\boldsymbol{R}A$ мы получаем

$$\boldsymbol{R}A = \boldsymbol{E}ra\left[1 + \omega\left(\frac{r^0}{r} + \frac{a^0}{a}\right)\right] = \boldsymbol{E}rae^{\omega r^0/r}e^{\omega a^0/a},$$

$$|\boldsymbol{R}A| = |r|\,|a|\,e^{\omega(r^0/r + a^0/a)}, \quad (3.7)$$

т. е. абсолютная величина главного вектора умножается на абсолютную величину главной части множителя, а к параметру винта прибавляется параметр множителя.

Кратко резюмируем:

а) при умножении винта на вещественное число ось винта остается без изменения, а вектор и момент умножаются на это число;

б) при умножении винта нулевого параметра на комплексное число ось винта остается без изменения, вектор умножается на главную часть множителя, а параметр становится равным параметру множителя;

в) при умножении произвольного винта на комплексное число его ось остается без изменения, вектор умножается на главную часть множителя, а к параметру винта прибавляется параметр множителя — комплексного числа.

Особенным мы будем называть винт, у которого вектор равен нулю, а следовательно, параметр — бесконечно большому числу. Главная часть модуля особенного винта равна нулю.

В дальнейшем мы будем обозначать комплексные модули винтов большими буквами обыкновенного шрифта, одноименными с большими буквами жирного шрифта, обозначающими винты, а главные части модулей — соответствующими малыми буквами, а именно,

$$|\boldsymbol{R}| = R = re^{\omega p},$$

где p — параметр, r — положительное число.

§ 3. Комплексный угол между двумя осями. Щетка

Комплексным углом А между двумя осями, единичные винты которых будут $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$, назовем фигуру, образованную этими осями и отрезком mn прямой, пересекающей эти оси под прямым углом, где m — точка первой оси, а n — точка второй оси (рис. 2).

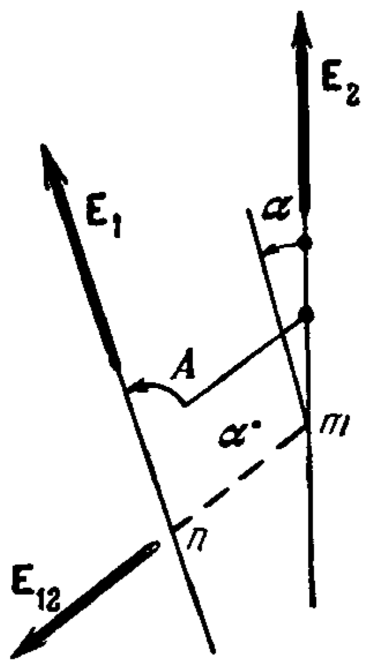

Рис. 2.

Зададим направление прямой mn единичным винтом $\boldsymbol{E}_{12}$ и назовем ее осью комплексного угла.

Для приведения $\boldsymbol{E}_1$ к совпадению с $\boldsymbol{E}_2$ необходимо оси $\boldsymbol{E}_1$ сообщить винтовое движение, состоящее из поворота вокруг оси $\boldsymbol{E}_{12}$ на угол α между направлениями $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ и из поступательного движения на расстояние α^0, равное длине отрезка mn.

Комплексный угол определяется винтом

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{E}_{12}\mathrm{A} = \boldsymbol{E}_{12}(\alpha + \omega\alpha^0), \qquad (3.8)$$

а комплексное число $\mathrm{A} = \alpha + \omega\alpha^0$ принимается за меру комплексного угла между осями $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$.

Относительно знаков чисел α и α^0 условимся, что первое положительно, если для наблюдателя, в сторону которого направлен единичный винт $\boldsymbol{E}_{12}$, вращение происходит против часовой стрелки, а второе положительно, если поступательное движение происходит в сторону положительного направления $\boldsymbol{E}_{12}$.

Очевидно, что

$$\angle(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2) = -\angle(\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_1).$$

Совокупность осей, пересекающих под прямыми углами одну и ту же ось с единичным винтом $\boldsymbol{E}$, называется щеткой. Ось $\boldsymbol{E}$ — ось щетки, а оси, принадлежащие щетке,— лучи щетки.

Из сказанного выше вытекает, что между углами, образуемыми лучами щетки, определяемыми единичными винтами $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \ldots, \boldsymbol{E}_n$, существует соотношение

$$\angle(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2) + \angle(\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3) + \ldots + \angle(\boldsymbol{E}_{n-1}, \boldsymbol{E}_n) + \\ + \angle(\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{E}_1) = 0. \quad (3.9)$$

На основании приведенных ранее формул (2.16) мы можем выразить тригонометрические функции комплексного угла

$$\left.\begin{aligned} \cos \mathrm{A} &= \cos\alpha - \omega\alpha^0 \sin\alpha, \\ \sin \mathrm{A} &= \sin\alpha + \omega\alpha^0 \cos\alpha, \\ \operatorname{tg} \mathrm{A} &= \operatorname{tg}\alpha + \omega\frac{\alpha^0}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \omega\alpha^0(1 + \operatorname{tg}^2\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

Примечание. В определении величины α имеется тот произвол, что вращение оси $\boldsymbol{E}_1$ до совпадения с осью $\boldsymbol{E}_2$ может быть совершено двумя различными путями. Если вращение на угол α $(< \pi)$ совершается против часовой стрелки, то вращение на дополнительный угол $2\pi - \alpha$ будет совершаться по часовой стрелке, и соответствующий угол поворота будет равен $-(2\pi - \alpha) = \alpha - 2\pi$, но тригонометрические функции угла (3.9) сохранятся. Можно условиться в качестве угла α брать угол, меньший двух прямых.

§ 4. Скалярное умножение винтов

Под скалярным произведением двух винтов будем понимать комплексное число, равное скалярному произведению их моторов, отнесенных к какой-нибудь точке приведения.

Скалярное умножение винтов будем обозначать точкой.

Пусть заданы два винта:

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{E}_1 r_1 e^{\omega p_1}, \quad \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{E}_2 r_2 e^{\omega p_2}$$

с комплексными модулями

$$R_1 = r_1 e^{\omega p_1}, \quad R_2 = r_2 e^{\omega p_2}, \quad r_1 > 0, \quad r_2 > 0,$$

и пусть оси 1 и 2 этих винтов образуют комплексный угол

$$\mathrm{A} = \alpha + \omega\alpha^0.$$

Возьмем произвольную точку O и отнесем к ней моторы заданных винтов. Соединив точку O с точками m и n осей 1 и 2, где mn — отрезок кратчайшего расстояния этих осей, мы получим радиусы-векторы точек m и n из O (рис. 3)

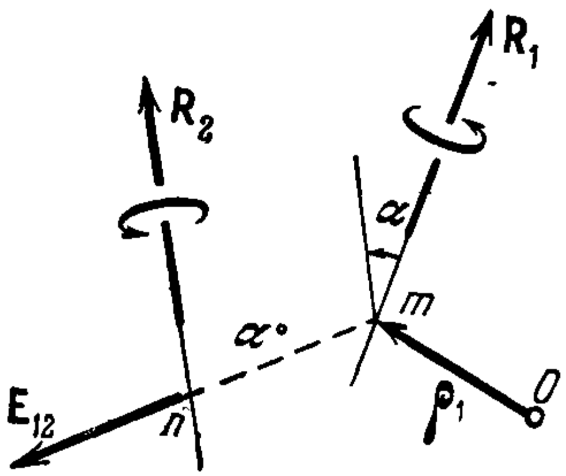

Рис. 3.

$$\overrightarrow{Om} = \boldsymbol{\rho}_1, \quad \overrightarrow{On} = \boldsymbol{\rho}_2, \quad \overrightarrow{mn} = \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{E}_{12}\alpha^0,$$

где $\boldsymbol{E}_{12}$ — единичный винт прямой mn.

Моторы винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, отнесенные к точке O, выразим как комплексные векторы. Таким образом, мы будем иметь замену винтов комплексными векторами

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_1 &\to \boldsymbol{r}_1 + \omega\,(p_1\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{r}_1), \\ \boldsymbol{R}_2 &\to \boldsymbol{r}_2 + \omega\,(p_2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{r}_2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Произведя скалярное умножение, получим, в соответствии с определением,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 &= \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 + \omega\,[(p_1 + p_2)\,\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_1\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{\rho}_2\boldsymbol{r}_2] = \\ &= \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 + \omega\,[(p_1 + p_2)\,\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 - (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)\,\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] = \\ &= r_1 r_2 \cos\alpha + \omega\,[(p_1 + p_2)\,r_1 r_2 \cos\alpha - r_1 r_2 \alpha^0 \sin\alpha] = \\ &= r_1 r_2 e^{\omega p_1} e^{\omega p_2} (\cos\alpha - \omega\alpha^0 \sin\alpha) = R_1 R_2 \cos \mathrm{A}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отсюда — теорема.

Теорема 4. *Скалярное произведение двух винтов равно произведению их комплексных модулей на косинус комплексного угла между ними.*

Выражение скалярного произведения винтов через модули и угол в точности совпадает с выражением скалярного произведения свободных векторов при условии замены в последнем вещественных модулей комплексными модулями и обычных углов комплексными углами.

Как видно из развернутого выражения (3.12), главная часть скалярного произведения двух винтов есть обычное скалярное произведение векторов этих винтов, а моментная часть — относительный момент винтов

$$r_1 r_2 \left[(p_1 + p_2)\cos\alpha - \alpha^0 \sin\alpha\right] \tag{3.13}$$

— величина, не зависящая от точки, для которой взяты моторы. Множитель в квадратных скобках в выражении (3.13) известен под названием «возможного коэффициента» двух винтов (Болл).

Если перемножаемые скалярно винты $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ задать общим выражением моторов, то получим

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 = (\boldsymbol{r}_1 + \omega \boldsymbol{r}_1^0) \cdot (\boldsymbol{r}_2 + \omega \boldsymbol{r}_2^0) = \\ = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 + \omega\, (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2^0 + \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_1^0). \tag{3.14}$$

Выражение $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2^0 + \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_1^0$ есть относительный момент двух винтов, равный выражению (3.13).

Скалярное произведение двух винтов, у которых главные части модулей не равны нулю, обращается в нуль, если $\cos \mathrm{A} = 0$, а значит, если

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha^0 = 0,$$

т. е. если оси перемножаемых винтов пересекаются под прямым углом.

Из формулы (3.12) следует, что $\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{R}_1$.

Если $p_1 = p_2 = 0$, т. е. если перемножаемые винты — скользящие векторы, то скалярное произведение приобретает вид

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 = r_1 r_2 \cos \mathrm{A}. \tag{3.15}$$

Развернув выражение (3.15), получим

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 = r_1 r_2 \cos\alpha - \omega r_1 r_2 \alpha^0 \sin\alpha,$$

т. е. скалярное произведение двух скользящих векторов в главной части дает скалярное произведение этих векторов, а в моментной части — относительный момент этих векторов.

Умножим скалярно винт $\boldsymbol{R}$ на самого себя, тогда получим

$$\boldsymbol{R}^2 = R^2 \cos 0 = (re^{\omega p})^2 = r^2 e^{2\omega p}, \qquad (3.16)$$

т. е. квадрат комплексного модуля винта.

Если винт $\boldsymbol{R}$ задан мотором $\boldsymbol{r} + \omega \boldsymbol{r}^0$, то скалярный квадрат винта имеет выражение

$$\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{r} + \omega \boldsymbol{r}^0)^2 = \boldsymbol{r}^2 + 2\omega \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^0. \qquad (3.16')$$

Для квадрата единичного винта $\boldsymbol{E}$, заданного мотором $\boldsymbol{e} + \omega \boldsymbol{e}^0$, $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}^0 = 0$, мы имеем выведенную выше формулу

$$\boldsymbol{E}^2 = (\boldsymbol{e} + \omega \boldsymbol{e}^0)^2 = \boldsymbol{e}^2 + 2\omega \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}^0 = 1. \qquad (3.1)$$

Квадрат момента

$$(\omega \boldsymbol{r})^2 = \omega^2 \boldsymbol{r}^2 = 0.$$

Если один из перемножаемых скалярно винтов имеет бесконечно большой параметр, то произведение будет

$$\omega \boldsymbol{r}_1^0 \cdot \boldsymbol{E} r_2 e^{\omega p_2} = \omega r_1^0 r_2 e^{\omega p_2} \cos \mathrm{A} = \omega r_1^0 r_2 \cos\alpha.$$

Главная часть произведения равна нулю.

§ 5. Ортогональная составляющая винта по прямой и проекция винта на ось

Пусть $\boldsymbol{R}$ — заданный винт, а a — прямая в пространстве, единичный винт которой $\boldsymbol{E}$. Приведем винт к некоторой точке A, лежащей на этой прямой; пусть $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^0)$ есть соответствующий мотор. Спроектируем ортогонально вектор $\boldsymbol{r}$ и момент $\boldsymbol{r}^0$ на прямую a. Составляющую вектора $\boldsymbol{r}$ обозначим через $\boldsymbol{r}_a$, составляющую момента $\boldsymbol{r}^0$ — через $\boldsymbol{r}_a^0$.

Винт $(\boldsymbol{r}_a, \boldsymbol{r}_a^0)$ с центральной осью на прямой a

$$\boldsymbol{R}_a = \boldsymbol{E}\,(r_a + \omega r_a^0) \qquad (3.17)$$

назовем ортогональной составляющей винта $\boldsymbol{R}$ по прямой a. Очевидно, что как r_a, так и r_a^0 не зависят от выбора точки приведения A на прямой a.

Комплексное число $r_a + \omega r_a^0$, на которое нужно умножить единичный винт $\boldsymbol{E}$, чтобы получить винт $\boldsymbol{R}_a$, назовем ортогональной проекцией (или просто проекцией) винта $\boldsymbol{R}$ на ось, определяемую единичным винтом $\boldsymbol{E}$. При одинаковых направлениях вектора винта $\boldsymbol{R}_a$ и вектора $\boldsymbol{E}$ число r_a положительно, при противоположных — отрицательно.

Пусть $\boldsymbol{R}$ — винт, а $\boldsymbol{E}$ — единичный винт. Составим их скалярное произведение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{E} = R\cos \mathrm{A} = re^{\omega p}(\cos\alpha - \alpha^0 \sin\alpha) = \\ = r\cos\alpha + \omega r(p\cos\alpha - \alpha^0\sin\alpha),\end{aligned} \qquad (3.18)$$

где $\mathrm{A} = \alpha + \omega\alpha^0$ — комплексный угол между осями $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{E}$. Комплексное выражение (3.18) имеет следующий геометрический смысл: главная часть его есть проекция на ось $\boldsymbol{E}$ вектора винта, а моментная часть — проекция на ту же ось момента винта относительно точки, лежащей на оси. Указанное выражение, следовательно, есть проекция винта $\boldsymbol{R}$ на ось $\boldsymbol{E}$ согласно только что данному определению.

Поэтому проекция винта на ось есть комплексная величина, равная произведению комплексного модуля винта на косинус комплексного угла, образуемого осью винта с данной осью.

Для случая, когда $\boldsymbol{R}$ — винт нулевого параметра (т. е. скользящий вектор), $p = 0$ и формула (3.18) упрощается и получает вид

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{E} = r\cos\alpha - \omega r\alpha^0\sin\alpha, \qquad (3.19)$$

т. е. главная часть комплексной проекции равна проекции скользящего вектора на ось, а моментная часть — моменту вектора относительно оси. Умножение на косинус комплексного угла автоматически дает и проекцию и момент.

§ 6. Винтовое умножение винтов

Под винтовым произведением двух винтов будем понимать винт, мотор которого для произвольной точки пространства равен векторному произведению моторов заданных винтов для этой же точки.

Винтовое умножение будем обозначать крестом.

Для определения винтового произведения двух винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ нужно умножить векторно моторы выражений (3.11). Поскольку мы имеем дело с моторами, отнесенными к точке O, мотор, полученный в результате умножения, также будет отнесен к точке O. Сделаем перенос точки O в точку m, через которую проходит скользящий вектор $\boldsymbol{E}_{12}$ (рис. 3), т. е. конечный результат отнесем к точке m.

Для точки O мы будем иметь

$$\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2 = [\boldsymbol{r}_1 + \omega(p_1\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{r}_1)] \times \\ \times [\boldsymbol{r}_2 + \omega(p_2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{r}_2)] = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \omega [\boldsymbol{r}_1 \times \\ \times (p_2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{r}_2) + (p_1\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{r}_2]. \quad (3.20)$$

Для того чтобы конечный результат был отнесен к точке m, мы добавим момент вектора $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$, который надо вообразить проходящим через O, относительно точки m. Мы получим

$$\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \omega [\boldsymbol{r}_1 \times (p_2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{r}_2) + \\ + (p_1\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{r}_2] - \omega\boldsymbol{\rho}_1 \times (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = \\ = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \omega \{(p_1 + p_2)\, \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) + \\ + \boldsymbol{r}_2 [(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \cdot \boldsymbol{r}_1]\} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \omega [(p_1 + p_2)\, \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \\ + (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)]. \quad (3.21)$$

Точно такой же результат получился бы, если бы перенос был сделан в точку n или в любую точку, лежащую на прямой mn.

В полученном выражении в главной части — вектор $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$, а в моментной части — линейная комбинация векторов $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$, т. е. момент, параллельный $\boldsymbol{E}_{12}$. Отсюда следует, что прямая mn — ось единичного винта $\boldsymbol{E}_{12}$ — есть ось винтового произведения $\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2$. В результате можно написать

$$\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{E}_{12} r_1 r_2 \{\sin\alpha + \omega [(p_1 + p_2)\sin\alpha + \\ + \alpha^0 \cos\alpha]\} = \boldsymbol{E}_{12} r_1 r_2 e^{\omega p_1} e^{\omega p_2} (\sin\alpha + \omega\alpha^0 \cos\alpha) = \\ = \boldsymbol{E}_{12} R_1 R_2 \sin \mathrm{A}. \quad (3.22)$$

Итак, доказана теорема.

Т е о р е м а 5. *Винтовое произведение двух винтов есть винт, ось которого пересекает под прямым углом оси пере-*

множаемых винтов, вектор которого имеет направление векторного произведения векторов этих винтов, а комплексный модуль — произведению комплексных модулей этих винтов на синус комплексного угла, образуемого их осями.

Из формулы (3.22) следует, что

$$\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1.$$

Если векторы винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ не равны нулю, то, согласно формуле (3.22), винтовое произведение двух винтов может обратиться в нуль только в том случае, если оси этих винтов совпадают.

Если один из винтов имеет бесконечно большой параметр, то винтовое произведение будет винтом бесконечно большого параметра, так как его модуль

$$|\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2| = \omega r_1^0 r_2 e^{\omega p_2} \sin \mathrm{A} = \omega r_1^0 r_2 \sin \alpha \tag{3.23}$$

не имеет главной части. Такой винт представляет пару и его осью может служить любая прямая в пространстве, перпендикулярная к осям перемножаемых винтов.

§ 7. Сложение винтов

Винт $\boldsymbol{R}$ называется суммой заданных винтов $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \ldots + \boldsymbol{R}_n, \tag{3.24}$$

если его вектор равен сумме векторов указанных винтов, а момент относительно любой точки пространства равен сумме моментов слагаемых винтов относительно этой же точки, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \ldots + \boldsymbol{r}_n, \\ \boldsymbol{r}^0 &= \boldsymbol{r}_1^0 + \boldsymbol{r}_2^0 + \ldots + \boldsymbol{r}_n^0. \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

В том, что определяемый геометрический образ есть действительно винт, можно убедиться из того факта, что скалярное произведение $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^0$ не зависит от точки приведения. В самом деле, для любой точки приведения скалярное произведение

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^0=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1^0+\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2^0+\ldots+\boldsymbol{r}_n\cdot\boldsymbol{r}_n^0+$$
$$+\sum_{i,\,k=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_k^0+\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{r}_i^0),\qquad i\neq k \tag{3.26}$$

состоит из суммы инвариантов винтов и суммы относительных моментов всех возможных пар винтов, а значит, оно не зависит от точки приведения.

При приведении винтов к новой точке O' ($\overrightarrow{O'O}=\boldsymbol{\rho}$) на основании формулы (1.5) мы будем иметь

$$\boldsymbol{r}^{0\prime}=\boldsymbol{r}^0+\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{r}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i^0+\boldsymbol{\rho}\times\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i^0+\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{r}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i^{0\prime}, \tag{3.27}$$

откуда можно заключить, что если условие определения в отношении главного момента выполняется для одной какой-нибудь точки пространства, то оно будет выполняться для любой точки пространства.

Рассмотрим скалярное произведение суммы нескольких винтов $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2+\ldots+\boldsymbol{R}_n$ на винт $\boldsymbol{S}$. Заменяя винты моторами, отнесенными к некоторой точке, получим

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2+\ldots+\boldsymbol{R}_n)\cdot\boldsymbol{S}=[(\boldsymbol{r}_1+\omega\boldsymbol{r}_1^0)+$$
$$+(\boldsymbol{r}_2+\omega\boldsymbol{r}_2^0)+\ldots+(\boldsymbol{r}_n+\omega\boldsymbol{r}_n^0)]\cdot(\boldsymbol{S}+\omega\boldsymbol{S}^0)=$$
$$=(\boldsymbol{r}_1+\omega\boldsymbol{r}_1^0)\cdot(\boldsymbol{S}+\omega\boldsymbol{S}^0)+\ldots$$
$$\ldots+(\boldsymbol{r}_n+\omega\boldsymbol{r}_n^0)\cdot(\boldsymbol{S}+\omega\boldsymbol{S}^0)=\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{S}+\ldots$$
$$\ldots+\boldsymbol{R}_n\cdot\boldsymbol{S}. \tag{3.28}$$

Отсюда вытекает распределительное свойство скалярного произведения: скалярное произведение суммы нескольких винтов на некоторый винт равно сумме скалярных произведений слагаемых винтов на этот винт. В частности, проекция суммы нескольких винтов на ось равна сумме проекций слагаемых винтов на эту ось.

Подобным же образом можно убедиться в существовании распределительного свойства винтового произведения.

Разыскание винта $\boldsymbol{R}$ — суммы по заданным винтам $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ — слагаемым сводится к определению центральной оси этого винта, модуля его вектора и параметра.

Используя распределительное свойство скалярного произведения винтов, выведем формулу сложения винтов, по которой можно построить винт, равный сумме двух заданных винтов. Эта формула является аналогом известной формулы треугольника для суммы векторов. Пусть заданы винты $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ и требуется определить винт $\boldsymbol{R}$ — сумму

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2. \qquad (3.29)$$

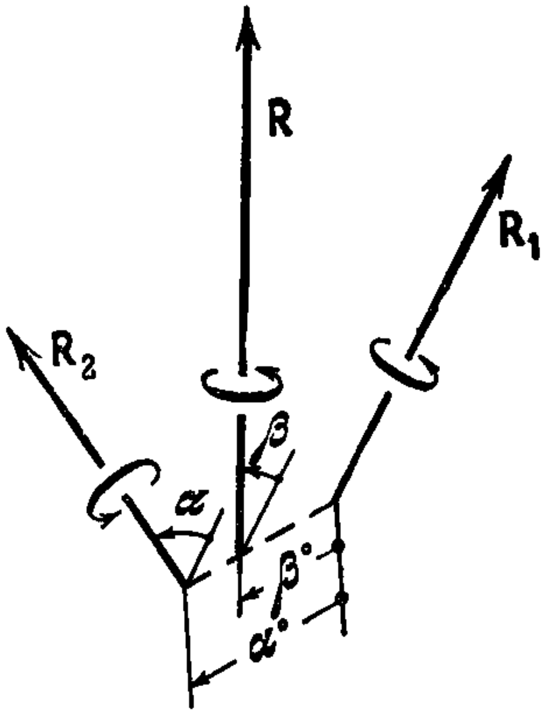

Рис. 4.

Умножив винт $\boldsymbol{R}$ скалярно на $\boldsymbol{E}_{12}$ — единичный винт оси угла, образуемого винтами $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$

$$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{E}_{12} = (\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2) \cdot \boldsymbol{E}_{12} = \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{12} + \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{E}_{12} = 0, \qquad (3.30)$$

получим, что ось винта $\boldsymbol{R}$ пересекает под прямым углом ось угла, образуемого $\boldsymbol{R}_1$ с $\boldsymbol{R}_2$ (рис. 4). Обозначим комплексные углы $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$ и $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R})$ соответственно через $\mathrm{A} = \alpha + \omega\alpha^0$ и $\mathrm{B} = \beta + \omega\beta^0$.

Спроектируем все три винта на ось винта $\boldsymbol{R}_1$, а затем на ось винта $\boldsymbol{R}_2$, умножив эти винты скалярно на единичные векторы осей винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, воспользовавшись формулой (3.18). На основании распределительного свойства скалярного произведения получим

$$R \cos \mathrm{B} = R_1 + R_2 \cos \mathrm{A},$$

$$R \cos (\mathrm{A} - \mathrm{B}) = R_1 \cos \mathrm{A} + R_2, \quad R = |\boldsymbol{R}|, \quad R_1 = |\boldsymbol{R}_1|,$$

$$R_2 = |\boldsymbol{R}_2|, \qquad (3.31)$$

откуда

$$R \sin \mathrm{B} = R_2 \sin \mathrm{A},$$

$$R \sin (\mathrm{A} - \mathrm{B}) = R_1 \sin \mathrm{B},$$

или, объединяя полученные два соотношения, найдем

$$\frac{R}{\sin \mathrm{A}} = \frac{R_1}{\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})} = \frac{R_2}{\sin \mathrm{B}}. \tag{3.32}$$

Таким образом, можно считать доказанной теорему:

Теорема 6. *Если* $\boldsymbol{R}$ *есть сумма двух винтов* $\boldsymbol{R}_1$ *и* $\boldsymbol{R}_2$, *то между комплексными модулями этих винтов и комплексными углами, образуемыми их осями, существует соотношение* (3.32), *аналогичное соотношению между сторонами и углами в треугольнике, но с заменой вещественных величин комплексными.*

На основании (3.29) имеем

$$\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)^2 = \boldsymbol{R}_1^2 + \boldsymbol{R}_2^2 + 2\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 = \\ = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos \mathrm{A}. \tag{3.33}$$

На основании соотношений

$$R = re^{\omega p},\ R_1 = r_1e^{\omega p_1},\ R_2 = r_2e^{\omega p_2}$$

получим соотношение

$$r^2e^{2\omega p} = r_1^2e^{2\omega p_1} + r_2^2e^{2\omega p_2} + 2r_1r_2e^{\omega(p_1+p_2)}(\cos\alpha - \omega\alpha\sin\alpha), \tag{3.34}$$

из которого по разделении главной и моментной частей найдем величину главного вектора и параметр винта — суммы $\boldsymbol{R}$

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\alpha, \tag{3.35}$$

$$p = \frac{p_1r_1^2 + p_2r_2^2 + r_1r_2[(p_1+p_2)\cos\alpha - \alpha^0\sin\alpha]}{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\alpha}. \tag{3.36}$$

Комплексный угол B определяется из (3.32)

$$\sin \mathrm{B} = \frac{R_2 \sin \mathrm{A}}{R} = \frac{r_2e^{\omega p_2}(\sin\alpha + \omega\alpha^0\cos\alpha)}{re^{\omega p}} = \sin\beta + \omega\beta^0\cos\beta.$$

Разделяя главную и моментную части, получим

$$\sin\beta = \frac{r_2\sin\alpha}{r} = \frac{r_2\sin\alpha}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\alpha}}, \tag{3.37}$$

кроме того,

$$\omega\beta^0 = \sin\omega\beta^0 = \sin(B - \beta) = \sin B\cos\beta - \cos B\sin\beta =$$

$$= \frac{R_2 \sin A}{R}\,\frac{r_1 + r_2\cos\alpha}{r} - \frac{R_1 + R_2\cos A}{R}\,\frac{r_2\sin\alpha}{r}.$$

После преобразований получим

$$\beta^0 = r_2\,\frac{r_1[(p_2 - p_1)\sin\alpha + \alpha^0\cos\alpha] + \alpha^0 r_2}{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos\alpha}. \tag{3.38}$$

Точно так же

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{r_1\sin\alpha}{r} = \frac{r_1\sin\alpha}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos\alpha}}, \tag{3.39}$$

$$\alpha^0 - \beta^0 = r_1\,\frac{r_2[(p_1 - p_2)\sin\alpha + \alpha^0\cos\alpha] + \alpha^0 r_1}{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos\alpha}. \tag{3.40}$$

Мы получили простой результат: уравнение замкнутости треугольника векторов и уравнение моментов содержатся в одном винтовом уравнении (3.29), которое выражает одновременно закон параллелограмма и закон рычага.

Как нетрудно видеть, этот результат непосредственно вытекает из формулы для скалярного умножения винтов и из распределительного свойства скалярного умножения, интерпретируемого как равенство проекции суммы винтов на ось сумме проекций слагаемых на ту же ось.

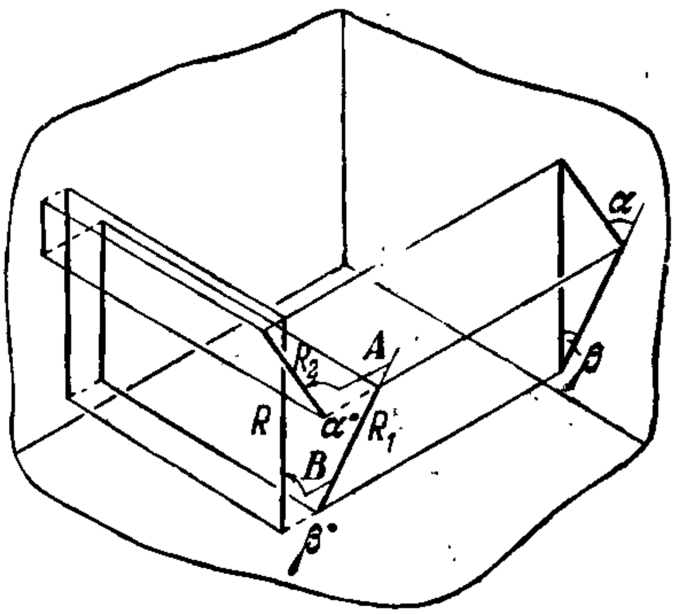

Рис. 5.

Написанные соотношения можно рассматривать как формулы для «раздвинутого» треугольника. Такая фигура получается путем параллельного переноса сторон плоского треугольника в направлении, перпендикулярном к его плоскости (рис. 5).

Обозначая комплексные углы треугольника (т. е. углы совместно с отрезками, на которые передвинуты стороны) соответствующими большими буквами и приписывая сторонам треугольника комплексные значения, равные комплексным модулям, которые имеют соответствующие винты, мы получим, что известное тригонометрическое соотношение (3.32) при комплексной трактовке входящих в него величин выражает равенство одного из винтов сумме двух других. Таким образом, с помощью комплексных чисел геометрия простого треугольника переходит в геометрию «раздвинутого» треугольника.

Заменяя во всех формулах, относящихся к сложению винтов, величину $\boldsymbol{R}_2$ на $-\boldsymbol{R}_2$, мы получим формулу для разности винтов $\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_2$.

§ 8. Ортогональные проекции винта на две взаимно перпендикулярные оси

Вообразим винт $\boldsymbol{R}$ с модулем $R=re^{\omega p}$, пересекающий под прямым углом некоторую ось z, и две оси x и y такие, что xyz образует координатную систему с началом в точке O. Ось винта $\boldsymbol{R}$, очевидно, параллельна плоскости xy (рис. 6).

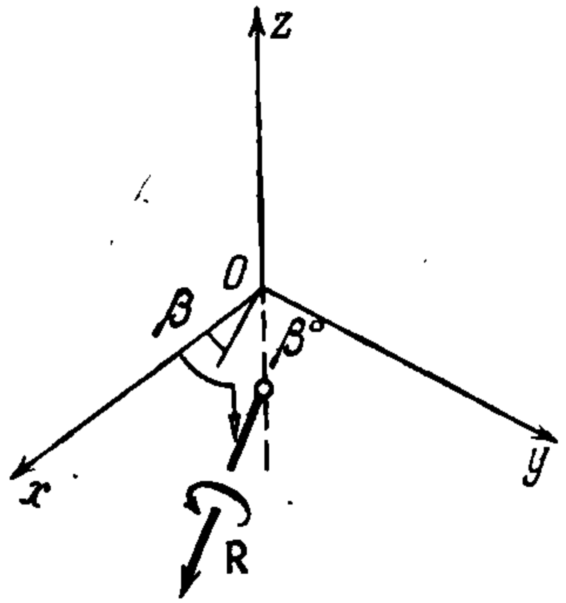

Рис. 6.

Пусть комплексный угол, образуемый осью винта $\boldsymbol{R}$ с осью x, будет $\mathrm{B}=\beta+\omega\beta^0$, тогда угол, образуемый осью винта с осью y, будет $\mathrm{B}-$ $-\pi/2$.

Определим величины проекций X и Y винта $\boldsymbol{R}$ на оси x и y.

Согласно формуле (3.18) имеем

$$R_x=R\cos\mathrm{B}=re^{\omega p}(\cos\beta-\omega\beta^0\sin\beta)=$$
$$=r\cos\beta\,[1+\omega(p-\beta^0\operatorname{tg}\beta)],$$

$$R_y=R\cos\left(\mathrm{B}-\frac{\pi}{2}\right)=R\sin\mathrm{B}=re^{\omega p}(\sin\beta+\omega\beta^0\cos\beta)=$$
$$=r\sin\beta\,[1+\omega(p+\beta^0\operatorname{ctg}\beta)].$$

Рассматривая ортогональные составляющие винта $\boldsymbol{R}$ по осям x и y как винты $\boldsymbol{i}R_x$ и $\boldsymbol{j}R_y$, где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы осей x и y, и зная комплексные модули R_x и R_y этих винтов и параметры

$$p - \beta^0 \operatorname{tg} \beta, \; p + \beta^0 \operatorname{ctg} \beta,$$

произведем сложение этих винтов, т. е. найдем винт, равный сумме

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{i}R_x + \boldsymbol{j}R_y.$$

Угол, образуемый осями этих винтов,

$$\mathrm{A} = \alpha + \omega\alpha^0 = \frac{\pi}{2},$$

следовательно, $\alpha = \pi/2$, $\alpha^0 = 0$, $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$. На основании формул сложения (3.33), (3.35), (3.37) и (3.38) найдем длину вектора r', параметр p и комплексный угол $\mathrm{B}' = \beta' + \omega\beta^{0\prime}$ суммарного винта с осью x. Имеем

$$R'^2 = R_x^2 + R_y^2 + 2R_xR_y\cos\frac{\pi}{2} = R_x^2 + R_y^2 = R^2,$$

$$r'^2 = r^2,$$

$$p' = \frac{1}{r^2}[(p - \beta^0 \operatorname{tg}\beta) r^2 \cos^2\beta + (p + \beta^0 \operatorname{ctg}\beta) r^2 \sin^2\beta +$$
$$+ r^2 \cos\beta \sin\beta \{[2p + \beta^0(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}\beta)]\cos\alpha - \alpha^0 \sin\alpha\}] =$$
$$= p\cos^2\beta + p\sin^2\beta = p,$$

$$\sin\beta' = \frac{r\sin\beta}{r} = \sin\beta,$$

$$\beta^{0\prime} = \frac{1}{r^2}[r\sin\beta r\cos\beta\beta^0(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)] = \beta^0.$$

Из полученных формул следует, что искомый винт $\boldsymbol{R}'$ тождественно совпадает с исходным винтом $\boldsymbol{R}$. Отсюда вытекает теорема.

Теорема 7. *Винт, ось которого пересекает под прямым углом ось z прямоугольной системы координат, равен сумме своих ортогональных составляющих по осям x и y.*

§ 9. Линейная комбинация двух винтов. Щетка. Цилиндроид

Обобщением суммы двух винтов является линейная комбинация этих винтов.

Пусть $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — два произвольных винта, а A и B — комплексные числа. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\boldsymbol{R} = A\boldsymbol{R}_1 + B\boldsymbol{R}_2, \tag{3.41}$$

в которой A и B меняются произвольным образом.

Возьмем единичный винт $\boldsymbol{E}_{12}$, ось которого пересекает под прямым углом оси винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$. Выразив скалярное произведение винта $\boldsymbol{R}$ на $\boldsymbol{E}_{12}$, получим

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{E}_{12} = A\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{E}_{12} + B\boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{E}_{12} = 0, \tag{3.42}$$

откуда следует, что линейная комбинация винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ при любых значениях A и B пересекает под прямым углом единичный винт $\boldsymbol{E}_{12}$, т. е. при изменении A и B ось винта $\boldsymbol{R}$ описывает щетку, имеющую ось $\boldsymbol{E}_{12}$.

Формула (3.41) представляет комплексный аналог обычной формулы линейной комбинации двух векторов

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{r}_1 + b\boldsymbol{r}_2, \tag{3.43}$$

которая при изменении вещественных чисел a и b, если векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ построены из общего начала, описывает плоскость или плоский пучок векторов.

При комплексной трактовке формулы (3.43), т. е. при замене ее формулой (3.41), геометрическим местом прямых, на которых лежат винты, служит щетка, которая, таким образом, является комплексным аналогом плоскости или плоского пучка векторов.

Рассмотрим теперь тот частный случай линейной комбинации винтов (3.41), когда она образована с помощью вещественных множителей a и b, т. е.

$$\boldsymbol{R} = a\boldsymbol{R}_1 + b\boldsymbol{R}_2, \tag{3.44}$$

где $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — заданные винты.

Винт $\boldsymbol{R}$ пересекает под прямым углом ось единичного винта $\boldsymbol{E}_{12}$, пересекающую под прямым углом оси винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$. Придавая числам a и b разнообразные значения, мы заставим ось винта описывать некоторое геометрическое место. Как можно видеть из формулы (3.44), при пропорциональном изменении чисел a и b как направление, так и положение оси не меняются, поэтому существенным будет изменение одного параметра — отношения a/b. Каждому значению этого параметра будет соответствовать одно направление и одна точка пересечения оси $\boldsymbol{R}$ с осью E_{12}. Отсюда следует, что при всех возможных изменениях чисел a и b геометрическим местом, описываемым осью винта $\boldsymbol{R}$, будет линейчатая поверхность, все образующие которой пересекают под прямым углом ось кратчайшего расстояния между осями винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$. Эта поверхность называется цилиндроидом. Определим некоторые ее свойства.

Пусть комплексные модули винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, которые назовем основными, будут $e^{\omega p_1}$ и $e^{\omega p_2}$. Пусть $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}''$ — два каких-нибудь винта, определяемые формулой (3.41), т. е.

$$\boldsymbol{R}' = a'\boldsymbol{R}_1 + b'\boldsymbol{R}_2,$$
$$\boldsymbol{R}'' = a''\boldsymbol{R}_1 + b''\boldsymbol{R}_2.$$

Составим скалярное произведение винтов $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}''$:

$$\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{R}'' = a'a''e^{2\omega p_1} + b'b''e^{2\omega p_2} + (a'b'' + a''b')e^{\omega(p_1+p_2)}\cos\Theta,$$

где Θ — комплексный угол между осями основных винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$.

Приравняв скалярное произведение нулю и разделив на $a'a''e^{\omega(p_1+p_2)}$, будем иметь

$$e^{\omega(p_1-p_2)} + \lambda\mu e^{\omega(p_2-p_1)} + (\lambda+\mu)\cos\Theta = 0, \tag{3.45}$$

где $\lambda = b'/a'$, $\mu = b''/a''$.

Разделяя главную и моментную части (3.45), получим два уравнения, которые дадут

$$\left.\begin{aligned}\lambda+\mu &= \frac{2(p_1-p_2)}{\theta^0\sin\theta-(p_1-p_2)\cos\theta},\\ \lambda\mu &= -\frac{\theta^0\sin\theta+(p_1-p_2)\cos\theta}{\theta^0\sin\theta-(p_1-p_2)\cos\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

Так как величина $(\lambda+\mu)^2 - 4\lambda\mu$, как в этом можно убедиться, существенно положительна, то λ и μ всегда вещественны, а поэтому соотношение (3.45) всегда может быть удовлетворено. Следовательно, в числе винтов, входящих в линейную комбинацию (3.44) и лежащих на цилиндроиде, всегда найдутся два винта $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, оси которых пересекаются под прямым углом. Такие два винта называются главными винтами цилиндроида, а их параметры p' и p'' — главными параметрами; точка пересечения — центром поверхности.

Главные параметры можно определить следующим путем. Поскольку числа λ и μ известны, можно принять произвольные значения a' и a'', например, равные единице, а отсюда получатся значения $b' = \lambda$ и $b'' = \mu$. Будем иметь

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}_1 + \lambda\boldsymbol{R}_2,\ \boldsymbol{R}'' = \boldsymbol{R}_1 + \mu\boldsymbol{R}_2.$$

По правилу сложения винтов на основании формулы (3.36) находим

$$\begin{aligned} p' &= \frac{p_1 + \lambda^2 p_2 + \lambda\,[(p_1 + p_2)\cos\theta - \theta^0 \sin\theta]}{1 + \lambda^2 + 2\lambda\cos\theta}, \\ p'' &= \frac{p_1 + \mu^2 p_2 + \mu\,[(p_1 + p_2)\cos\theta - \theta^0 \sin\theta]}{1 + \mu^2 + 2\mu\cos\theta}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Таким образом, главные параметры известны. Приняв оси главных винтов $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}''$ за оси x и y, ось поверхности — за ось z, а центр — за начало координат, выведем уравнение цилиндроида, т. е. выразим положение его образующей в зависимости от ее угла с осью x и найдем выражение параметра винта, ось которого лежит на этой образующей.

Возьмем главные винты $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}'' = \boldsymbol{R}_2$ такие, что модули их векторов равны единице, т. е.

$$R_1 = e^{\omega p},\quad R_2 = e^{\omega p_2}; \tag{3.48}$$

тогда модуль вектора винта $\boldsymbol{R}$ — линейной комбинации

$$\boldsymbol{R} = a\boldsymbol{R}_1 + b\boldsymbol{R}_2 \tag{3.49}$$

будет определяться формулой

$$R^2 = r^2 e^{2\omega p} = a^2 e^{2\omega p_1} + b^2 e^{2\omega p_2}, \tag{3.49$'$}$$

или, по отделении главной части от моментной,

$$r^2 = a^2 + b^2,\quad r^2 p = a^2 p_1 + b^2 p_2, \tag{3.50}$$

откуда

$$p = \frac{a^2}{a^2+b^2}\, p_1 + \frac{b^2}{a^2+b^2}\, p_2, \tag{3.51}$$

что дает выражение параметра p винта $\boldsymbol{R}$ через угол φ и главные параметры p_1 и p_2

$$p = p_1 \cos^2\varphi + p_2 \sin^2\varphi. \tag{3.52}$$

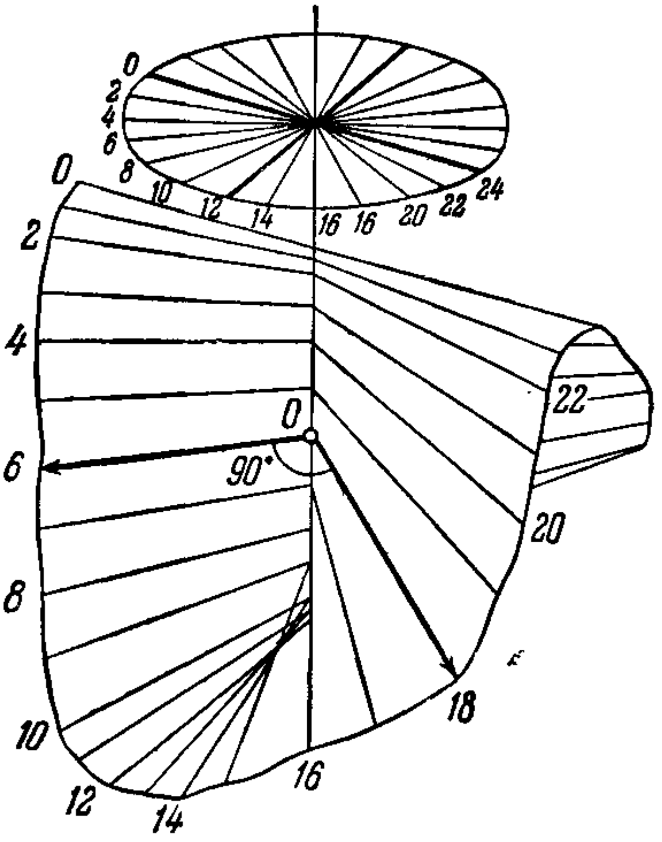

Рис. 7.

Винт $\boldsymbol{R}$ пересекает под прямым углом ось z и образует комплексный угол $\Phi = \varphi + \omega\varphi^0$ с осью x. Проекции винта $\boldsymbol{R}$ на оси x и y будут соответственно

$$\left.\begin{aligned} R\cos\Phi &= a\, e^{\omega p_1}, \\ R\sin\Phi &= b\, e^{\omega p_2}, \\ \frac{b}{a} &= \operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

Из (3.53) получаем

$$\operatorname{tg}\Phi = e^{\omega(p_2-p_1)} \operatorname{tg}\varphi. \tag{3.54}$$

Уравнение (3.54) есть уравнение цилиндроида, отнесенное к главным винтам и к центру. Из него получаем расстояние образующей в функции угла φ. Имеем

$$e^{\omega(p_2-p_1)} = e^{\omega 2\varphi^0/\sin 2\varphi},$$

откуда

$$\varphi^0 = \frac{p_2-p_1}{2} \sin 2\varphi. \tag{3.55}$$

При изменении угла φ образующая описывает поверхность цилиндроида, которую можно наглядно представить следующим образом.

На вертикальной оси от точки O — центра — отложим отрезок $OA = (p_2 - p_1)/2$ вверх и такой же отрезок OA' вниз. Образующая цилиндроида представляет прямую, пересекающую под прямым углом вертикальную ось, которая при изменении φ равномерно вращается вокруг оси и в то же время скользит вдоль оси, совершая гармоническое движение в пределах отрезка AA', причем за один оборот образующей движение ее вниз — вверх совершается дважды. Образующие, проходящие через центр O, пересекаются под прямым углом. Часть поверхности показана на рис. 7.

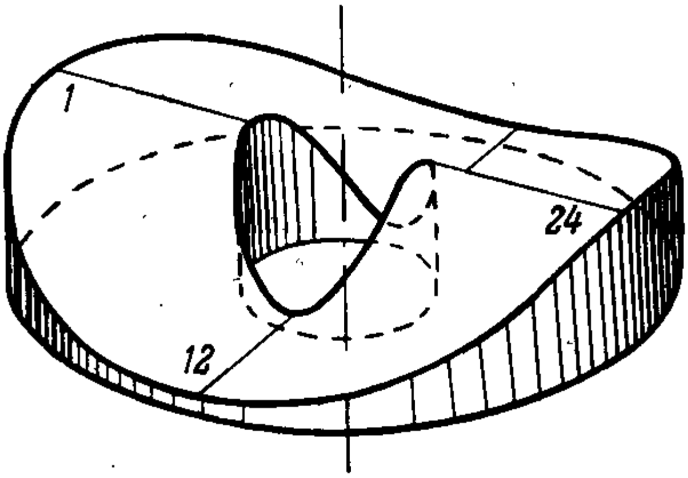

Рис. 8.

Если изобразить поверхность кругового цилиндра, ось которого совпадает с осью цилиндроида, то поверхность цилиндроида с поверхностью цилиндра пересечется по кривой, разверткой которой будет синусоида с двойным периодом по окружности цилиндра (рис. 8).

§ 10. Проекции винта на оси прямоугольной системы координат. Комплексные координаты прямой линии

Пусть будет задан винт

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}R = \boldsymbol{E}re^{\omega p},$$

и пусть комплексные углы, образуемые его осью с осями x, y, z прямоугольной системы координат, будут соответственно

$$\mathrm{A} = \alpha + \omega\alpha^0,\ \mathrm{B} = \beta + \omega\beta^0,\ \Gamma = \gamma + \omega\gamma^0.$$

Проекции винта на указанные оси будут

$$\left.\begin{aligned} R_x = r_x + \omega r_x^0 = R\cos\mathrm{A} = \\ = r\,[\cos\alpha + \omega\,(p\cos\alpha - \alpha^0\sin\alpha)], \\ R_y = r_y + \omega r_y^0 = R\cos\mathrm{B} = \\ = r\,[\cos\beta + \omega\,(p\cos\beta - \beta^0\sin\beta)], \\ R_z = r_z + \omega r_z^0 = R\cos\Gamma = \\ = r\,[\cos\gamma + \omega\,(p\cos\gamma - \gamma^0\sin\gamma)]. \end{aligned}\right\} \quad (3.56)$$

Выражения (3.56) — комплексные ортогональные проекции или прямоугольные координаты винта. Главные части этих выражений

$$r_x = r\cos\alpha,\ r_y = r\cos\beta,\ r_z = r\cos\gamma \qquad (3.57)$$

суть прямоугольные координаты вектора $\boldsymbol{r}$, а моментные части этих выражений

$$r_x^0 = r\,(p\cos\alpha - \alpha^0\sin\alpha),\ r_y^0 = r\,(p\cos\beta - \beta^0\sin\beta),$$
$$r_z^0 = r\,(p\cos\gamma - \gamma^0\sin\gamma) \qquad (3.58)$$

суть прямоугольные координаты момента $p\boldsymbol{r}$ винта относительно начала координат или моменты винта относительно координатных осей.

Теорема 8. *Винт* $\boldsymbol{R}$ *равен геометрической сумме своих ортогональных составляющих по осям прямоугольной системы координат.*

Эту теорему легко доказать, если привести винт к началу координат

$$\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{r} + \omega\,(p\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор произвольной точки оси винта из начала координат. Вектор $\boldsymbol{r}$ и момент $\omega\,(p\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{r})$ суть суммы своих ортогональных составляющих по осям координат, поэтому то же можно сказать об эквивалентном им винте $\boldsymbol{R}$.

Таким образом, можно написать

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}R_x + \boldsymbol{j}R_y + \boldsymbol{k}R_z = \boldsymbol{i}\,(r_x + \omega r_x^0) +$$
$$+ \boldsymbol{j}\,(r_y + \omega r_y^0) + \boldsymbol{k}\,(r_z + \omega r_z^0). \qquad (3.59)$$

Взяв скалярный квадрат этого равенства, получим

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 +$$
$$+ 2\omega\,(r_x r_x^0 + r_y r_y^0 + r_z r_z^0). \qquad (3.60)$$

Следовательно, квадрат комплексного модуля винта распадается на квадрат длины вектора и скалярное произведение вектора на момент.

После введения комплексных координат винта можно видеть, что любое винтовое равенство равносильно трем комплексным скалярным равенствам. Но каждое комплексное равенство распадается на два вещественных, поэтому любое винтовое равенство равносильно шести скалярным равенствам.

На основании равенств (3.56) мы получим

$$R^2 = R^2 (\cos^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{B} + \cos^2 \Gamma),$$

откуда

$$\cos^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{B} + \cos^2 \Gamma = 1, \tag{3.61}$$

т. е. сумма квадратов комплексных направляющих косинусов равна единице, как и в вещественной области. Равенство (3.61) распадается на два:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \\ \alpha^0 \cos \alpha \sin \alpha + \beta^0 \cos \beta \sin \beta + \gamma^0 \cos \gamma \sin \gamma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.62}$$

Если $R = 1$, то R_x, R_y, R_z суть комплексные координаты единичного винта $\boldsymbol{R}$, равные по величине соответствующим направляющим косинусам

$$\begin{aligned} R_x &= X = x + \omega x^0 = \cos \mathrm{A}, \\ R_y &= Y = y + \omega y^0 = \cos \mathrm{B}, \\ R_z &= Z = z + \omega z^0 = \cos \Gamma. \end{aligned}$$

Равенство

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (x + \omega x^0)^2 + (y + \omega y^0)^2 + (z + \omega z^0)^2 = 1, \tag{3.63}$$

эквивалентное (3.61), распадается на два следующих:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ xx^0 + yy^0 + zz^0 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

выражающих равенство единице квадрата длины вектора и равенство нулю скалярного произведения вектора на момент относительно начала координат.

Если задана ось с единичным винтом $\boldsymbol{E}$, координаты которого будут A, B, C $(A^2 + B^2 + C^2 = 1)$, то любая ось с координатами X, Y, Z единичного винта $(X^2 + Y^2 + Z^2 = 1)$, удовлетворяющая уравнению

$$AX + BY + CZ = 0, \tag{3.65}$$

будет пересекать данную ось под прямым углом; совокупность всех таких осей образует щетку.

Следовательно, уравнение (3.65) есть комплексное уравнение щетки (аналогичное уравнению плоскости при вещественных величинах).

§ 11. Выражение скалярного и винтового произведений винтов через комплексные прямоугольные координаты винтов

Для двух винтов, заданных комплексными прямоугольными координатами $R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}$, имеем

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{i}R_{1x} + \boldsymbol{j}R_{1y} + \boldsymbol{k}R_{1z},$$
$$\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{i}R_{2x} + \boldsymbol{j}R_{2y} + \boldsymbol{k}R_{2z}.$$

Непосредственно найдем скалярное произведение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_2 &= R_{1x}R_{2x} + R_{1y}R_{2y} + R_{1z}R_{2z} = \\ &= (r_{1x} + \omega r^0_{1x})(r_{2x} + \omega r^0_{2x}) + (r_{1y} + \omega r^0_{1y})(r_{2y} + \omega r^0_{2y}) + \\ &\quad + (r_{1z} + \omega r^0_{1z})(r_{2z} + \omega r^0_{2z}) = r_{1x}r_{2x} + r_{1y}r_{2y} + r_{1z}r_{2z} + \\ &+ \omega(r_{1x}r^0_{2x} + r_{1y}r^0_{2y} + r_{1z}r^0_{2z} + r^0_{1x}r_{2x} + r^0_{1y}r_{2y} + r^0_{1z}r_{2z}). \quad (3.66)\end{aligned}$$

Скалярное произведение двух винтов распадается на скалярное произведение векторов этих винтов и на их относительный момент, который равен сумме скалярных произведений вектора каждого на момент другого, взятый относительно определенной точки, в данном случае начала координат.

Винтовое произведение двух винтов есть винт

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}(R_{1y}R_{2z} - R_{2y}R_{1z}) + \boldsymbol{j}(R_{2x}R_{1z} - R_{1x}R_{2z}) + \\ + \boldsymbol{k}(R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y}). \quad (3.67)\end{aligned}$$

В самом деле, умножив скалярно винт $\boldsymbol{R}$ на винт $\boldsymbol{R}_1$ и на винт $\boldsymbol{R}_2$, получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}_1 = (R_{1y}R_{2z} - R_{2y}R_{1z})R_{1x} + (R_{2x}R_{1z} - R_{1x}R_{2z})R_{1y} + \\ + (R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y})R_{1z} = 0,\\ \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}_2 = (R_{1y}R_{2z} - R_{2y}R_{1z})R_{2x} + (R_{2x}R_{1z} - R_{1x}R_{2z})R_{2y} + \\ + (R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y})R_{2z} = 0,\end{aligned}$$

а взяв квадрат модуля, будем иметь

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^2 = (R_{1y}R_{2z} - R_{2y}R_{1z})^2 + \\ + (R_{2x}R_{1z} - R_{1x}R_{2z})^2 + (R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y})^2 = \\ = (R_{1x}^2 + R_{1y}^2 + R_{1z}^2)(R_{2x}^2 + R_{2y}^2 + R_{2z}^2) - \\ - (R_{1x}R_{2x} + R_{1y}R_{2y} + R_{1z}R_{2z})^2 = \\ = R_1^2R_2^2 - (R_1R_2\cos \mathrm{A})^2 = (R_1R_2\sin \mathrm{A})^2, \end{aligned} \quad (3.68)$$

откуда следует, что ось винта $\boldsymbol{R}$ пересекает под прямым углом оси винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, а его комплексный модуль равен произведению комплексных модулей перемножаемых винтов на синус комплексного угла А между ними. Взяв главную часть (3.68), убедимся, что вектор $\boldsymbol{r}$ есть векторное произведение $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$.

Следовательно, винт $\boldsymbol{R}$ есть винтовое произведение винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$.

§ 12. Сложные умножения винтов. Теорема Морлея — Петерсена. Формулы комплексной сферической тригонометрии

С помощью комплексных прямоугольных координат легко вывести выражения для более сложных произведений винтов: смешанного (скалярно-винтового), двойного винтового, скалярного произведения двух винтовых произведений и винтового произведения двух винтовых произведений.

На основании формул (3.66) и (3.67) можно составить выражение смешанного произведения

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_1 \cdot (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_3)$$

трех винтов, заданных своими комплексными координатами:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_1 &= \boldsymbol{i}R_{1x} + \boldsymbol{j}R_{1y} + \boldsymbol{k}R_{1z}, \\ \boldsymbol{R}_2 &= \boldsymbol{i}R_{2x} + \boldsymbol{j}R_{2y} + \boldsymbol{k}R_{2z}, \\ \boldsymbol{R}_3 &= \boldsymbol{i}R_{3x} + \boldsymbol{j}R_{3y} + \boldsymbol{k}R_{3z}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ R_{2x} & R_{2y} & R_{2z} \\ R_{3x} & R_{3y} & R_{3z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(R_{2y}R_{3z} - R_{3y}R_{2z}) + \\ + \boldsymbol{j}(R_{3x}R_{2z} - R_{2x}R_{3z}) + \boldsymbol{k}(R_{2x}R_{3y} - R_{3x}R_{2y}),$$

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_3) = R_{1x}(R_{2y}R_{3z} - R_{3y}R_{2z}) + \\ + R_{1y}(R_{3x}R_{2z} - R_{2x}R_{3z}) + R_{1z}(R_{2x}R_{3y} - R_{3x}R_{2y}) = \\ = \begin{vmatrix} R_{1x} & R_{1y} & R_{1z} \\ R_{2x} & R_{2y} & R_{2z} \\ R_{3x} & R_{3y} & R_{3z} \end{vmatrix}. \quad (3.69)$$

Так как в определителе (3.69) любая круговая перестановка строк не меняет знака, то соответственно этому возможна перестановка скобок и знаков скалярного и винтового умножений в смешанном произведении, т. е.

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_1 \cdot (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_3) = \boldsymbol{R}_2 \cdot (\boldsymbol{R}_3 \times \boldsymbol{R}_1) = \boldsymbol{R}_3 \cdot (\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2). \quad (3.70)$$

Используя координатные выражения для скалярного и винтового произведений, мы можем получить формулы для сложных произведений винтов.

Двойное винтовое произведение

$$\boldsymbol{R}_1 \times (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_3) = \boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_3) - \boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2). \quad (3.71)$$

Скалярное произведение двух винтовых произведений

$$(\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2) \cdot (\boldsymbol{R}_3 \times \boldsymbol{R}_4) = (\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_3)(\boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{R}_4) - \\ - (\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_4)(\boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{R}_3). \quad (3.72)$$

Винтовое произведение двух винтовых произведений

$$(\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2) \times (\boldsymbol{R}_3 \times \boldsymbol{R}_4) = \boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_4) - \boldsymbol{R}_4(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3) = \\ = \boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{R}_4) - \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{R}_4). \quad (3.73)$$

Следующая теорема, называемая теоремой Морлея — Петерсена [29], [30], является геометрической интерпретацией свойства трех двойных винтовых произведений винтов и заключается в следующем.

Пусть $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ — три единичных винта, оси которых не принадлежат к одной щетке. Пусть $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ — произвольные винты, оси которых пересекают под прямым углом соответственно пары осей ($\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$), ($\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_3$), ($\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$). Тогда три винта $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$, оси которых пересекают под прямым углом пары ($\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{R}_1$), ($\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{R}_2$), ($\boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{R}_3$), принадлежат одной щетке, т. е. существует прямая, пересекающая под прямым углом оси винтов $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$.

Для доказательства примем во внимание, что в качестве винтов $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ могут быть взяты винтовые произведения, т. е.

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{E}_3,\ \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_3,\ \boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2, \tag{3.74}$$

а в качестве винтов $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ и $\boldsymbol{S}_3$ — винтовые произведения

$$\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{R}_2,\ \boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{E}_3 \times \boldsymbol{R}_3.$$

Подставив вместо $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_3$ их выражения (3.74), будем иметь

$$\begin{gathered}\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{E}_1 \times (\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{E}_3),\ \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{E}_2 \times (\boldsymbol{E}_3 \times \boldsymbol{E}_1),\\ \boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{E}_3 \times (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2).\end{gathered} \tag{3.75}$$

Раскрывая двойные винтовые произведения по формулам (3.71), а затем, сложив равенства (3.75), найдем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{E}_2 (\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_3) - \boldsymbol{E}_3 (\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2) +\\ + \boldsymbol{E}_3 (\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2) - \boldsymbol{E}_1 (\boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_3) + \boldsymbol{E}_1 (\boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_3) -\\ - \boldsymbol{E}_2 (\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_3) = 0,\end{aligned}$$

откуда следует, что винты $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ и $\boldsymbol{S}_3$ линейно зависимы и, значит, принадлежат одной щетке. Ось указанной щетки будет пересекать под прямыми углами оси винтов $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ и $\boldsymbol{S}_3$.

Теперь рассмотрим применение формул (3.72) и (3.73) для скалярного и винтового произведений двух векторных произведений к выводу формулы комплексной сферической тригонометрии.

Заменим в формуле (3.72) все винты единичными винтами $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{E}_4$ и положим, что $\boldsymbol{E}_4 = \boldsymbol{E}_2$. Принимая во внимание, что скалярные произведения единичных винтов равны косинусам соответствующих комплексных углов, получим соотношение

$$(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2) \cdot (\boldsymbol{E}_3 \times \boldsymbol{E}_2) = \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_3 - (\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2)(\boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_3)$$

или

$$\sin A_{12} \sin A_{23} \cos \Theta = \cos A_{13} - \cos A_{12} \cos A_{23},$$

откуда

$$\cos A_{13} = \cos A_{12} \cos A_{23} + \sin A_{12} \sin A_{23} \cos \Theta, \qquad (3.76)$$

где Θ — угол между осями углов A_{12} и A_{23}.

Формула (3.76) представляет аналог известной формулы сферической тригонометрии. Она получена как следствие

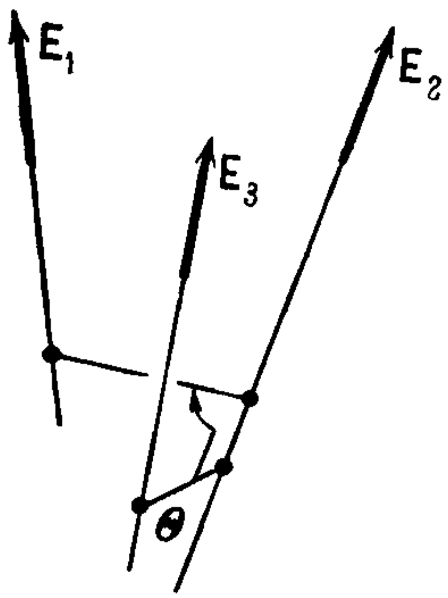

Рис. 9.

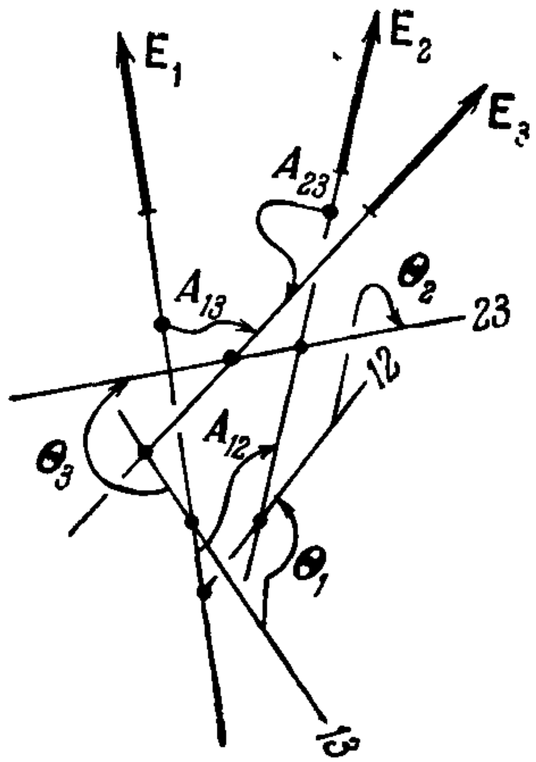

Рис. 10.

известной формулы для скалярного произведения двух векторных произведений, но ее можно было бы, не выводя, получить из обычной формулы сферической тригонометрии, положив все углы комплексными, т. е. раздвинув стороны углов (рис. 9).

Теперь рассмотрим ту же тройку единичных винтов $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ и напишем очевидные соотношения

$$\sin \Theta_1 = \frac{|(E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_3)|}{|E_1 \times E_2|\,|E_1 \times E_3|} = \frac{E_1 E_2 E_3}{\sin A_{12} \sin A_{13}},$$

$$\sin \Theta_2 = \frac{|(E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_3)|}{|E_1 \times E_2|\,|E_2 \times E_3|} = \frac{E_1 E_2 E_3}{\sin A_{12} \sin A_{23}},$$

$$\sin \Theta_3 = \frac{|(E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_3)|}{|E_1 \times E_3|\,|E_2 \times E_3|} = \frac{E_1 E_2 E_3}{\sin A_{13} \sin A_{23}}.$$

Из этих формул получаем соотношение, являющееся аналогом соотношений, составляющих известную теорему синусов в сферической тригонометрии (рис. 10):

$$\frac{\sin \Theta_1}{\sin \mathrm{A}_{23}} = \frac{\sin \Theta_2}{\sin \mathrm{A}_{13}} = \frac{\sin \Theta_3}{\sin \mathrm{A}_{12}}. \tag{3.77}$$

§ 13. Преобразование комплексных прямоугольных координат винта

После того как даны выражения комплексных прямоугольных координат винта, можно легко вывести формулы для перехода от одной системы прямоугольных координат к другой.

Пусть будет задана система прямоугольных координат с началом в точке O и с единичными векторами осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (единичные винты). Пусть координаты единичного винта $\boldsymbol{E}$ в этой системе будут $\cos \mathrm{A}$, $\cos \mathrm{B}$, $\cos \Gamma$ — это будут комплексные направляющие косинусы. Винт $\boldsymbol{E}$ может быть выражен таким образом:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} \cos \mathrm{A} + \boldsymbol{j} \cos \mathrm{B} + \boldsymbol{k} \cos \Gamma. \tag{3.78}$$

Скалярный квадрат винта E будет

$$\boldsymbol{E}^2 = \cos^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{B} + \cos^2 \Gamma = 1. \tag{3.79}$$

Для двух единичных винтов $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$, заданных координатами $\cos \mathrm{A}_1$, $\cos \mathrm{B}_1$, $\cos \Gamma_1$ и $\cos \mathrm{A}_2$, $\cos \mathrm{B}_2$, $\cos \Gamma_2$, скалярное произведение будет иметь выражение

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 = \cos \mathrm{A}_1 \cos \mathrm{A}_2 + \cos \mathrm{B}_1 \cos \mathrm{B}_2 + \cos \Gamma_1 \cos \Gamma_2. \tag{3.80}$$

Условие пересечения $\boldsymbol{E}_1$ с $\boldsymbol{E}_2$ под прямым углом будет:

$$\cos \mathrm{A}_1 \cos \mathrm{A}_2 + \cos \mathrm{B}_1 \cos \mathrm{B}_2 + \cos \Gamma_1 \cos \Gamma_2 = 0. \tag{3.81}$$

Вообразим другую систему прямоугольных координат с началом в точке O' и с единичными векторами осей $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, причем O' не совпадает с O. Пусть координаты единичного винта $\boldsymbol{E}$ во второй системе будут $\cos A'$, $\cos \mathrm{B}'$, $\cos \Gamma'$. Винт $\boldsymbol{E}$ во второй системе будет выражаться так:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}' \cos \mathrm{A}' + \boldsymbol{j}' \cos \mathrm{B}' + \boldsymbol{k}' \cos \Gamma'. \tag{3.82}$$

Оси второй системы координат с осями первой системы составляют девять комплексных углов, комплексные косинусы которых равны скалярным произведениям каждых двух единичных векторов (единичных винтов), взятых из разных систем. Пусть

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}' = \cos \mathrm{A}_1, && \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}' = \cos \mathrm{A}_2, && \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}' = \cos \mathrm{A}_3,\\ &\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}' = \cos \mathrm{B}_1, && \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}' = \cos \mathrm{B}_2, && \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}' = \cos \mathrm{B}_3,\\ &\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}' = \cos \Gamma_1, && \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}' = \cos \Gamma_2, && \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' = \cos \Gamma_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.83}$$

где $\mathrm{A}_1 = \alpha_1 + \omega\alpha_1^0$, $\mathrm{A}_2 = \alpha_2 + \omega\alpha_2^0$ и т. д.

Между этими девятью косинусами существуют следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2 \mathrm{A}_1 + \cos^2 \mathrm{A}_2 + \cos^2 \mathrm{A}_3 = 1,\\ &\cos^2 \mathrm{A}_1 + \cos^2 \mathrm{B}_1 + \cos^2 \Gamma_1 = 1.\\ &\cos \mathrm{A}_1 \cos \mathrm{B}_1 + \cos \mathrm{A}_2 \cos \mathrm{B}_2 + \cos \mathrm{A}_3 \cos \mathrm{B}_3 = 0,\\ &\cos \mathrm{A}_1 \cos \mathrm{A}_2 + \cos \mathrm{B}_1 \cos \mathrm{B}_2 + \cos \Gamma_1 \cos \Gamma_2 = 0,\\ &\cos^2 \mathrm{B}_1 + \cos^2 \mathrm{B}_2 + \cos^2 \mathrm{B}_3 = 1,\\ &\cos^2 \mathrm{A}_2 + \cos^2 \mathrm{B}_2 + \cos^2 \Gamma_2 = 1,\\ &\cos \mathrm{A}_1 \cos \Gamma_1 + \cos \mathrm{A}_2 \cos \Gamma_2 + \cos \mathrm{A}_3 \cos \Gamma_3 = 0,\\ &\cos \mathrm{A}_1 \cos \mathrm{A}_3 + \cos \mathrm{B}_1 \cos \mathrm{B}_3 + \cos \Gamma_1 \cos \Gamma_3 = 0,\\ &\cos^2 \Gamma_1 + \cos^2 \Gamma_2 + \cos^2 \Gamma_3 = 1,\\ &\cos^2 \mathrm{A}_3 + \cos^2 \mathrm{B}_3 + \cos^2 \Gamma_3 = 1,\\ &\cos \mathrm{B}_1 \cos \Gamma_1 + \cos \mathrm{B}_2 \cos \Gamma_2 + \cos \mathrm{B}_3 \cos \Gamma_3 = 0,\\ &\cos \mathrm{A}_2 \cos \mathrm{A}_3 + \cos \mathrm{B}_2 \cos \mathrm{B}_3 + \cos \Gamma_2 \cos \Gamma_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.84}$$

которые равносильны двадцати четырем вещественным соотношениям. В этих равенствах выражено, что все векторы осей единичные, а также, что системы осей прямоугольные.

Для определения положения второй системы относительно первой достаточно шести вещественных величин, поэтому между девятью комплексными углами (т. е. между восемнадцатью вещественными величинами) должны существовать двенадцать вещественных соотношений. Следовательно, из 24 вещественных соотношений (3.84) независимых будет двенадцать.

Пользуясь формулой (3.78), можно записать формулы преобразования единичных винтов

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{i}\cos \mathrm{A}_1 + \boldsymbol{j}\cos \mathrm{A}_2 + \boldsymbol{k}\cos \mathrm{A}_3, \\ \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{i}'\cos \mathrm{A}_1 + \boldsymbol{j}'\cos \mathrm{B}_1 + \boldsymbol{k}'\cos \Gamma_1, \\ \boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{i}\cos \mathrm{B}_1 + \boldsymbol{j}\cos \mathrm{B}_2 + \boldsymbol{k}\cos \mathrm{B}_3, \\ \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{i}'\cos \mathrm{A}_2 + \boldsymbol{j}'\cos \mathrm{B}_2 + \boldsymbol{k}'\cos \Gamma_2, \\ \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{i}\cos \Gamma_1 + \boldsymbol{j}\cos \Gamma_2 + \boldsymbol{k}\cos \Gamma_3, \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{i}'\cos \mathrm{A}_3 + \boldsymbol{j}'\cos \mathrm{B}_3 + \boldsymbol{k}'\cos \Gamma_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3.85)$$

Чтобы получить формулы преобразования координат любого винта $\boldsymbol{R}$, представим винт в одной и в другой системе

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}R_x + \boldsymbol{j}R_y + \boldsymbol{k}R_z = \boldsymbol{i}'R_x' + \boldsymbol{j}'R_y' + \boldsymbol{k}'R_z'. \qquad (3.86)$$

Умножая скалярно это уравнение последовательно на $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и на $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, мы получим формулы

$$\left.\begin{aligned} R_x' &= R_x\cos \mathrm{A}_1 + R\ \cos \mathrm{A}_2 + R_z\cos \mathrm{A}_3, \\ R_x &= R_x'\cos \mathrm{A}_1 + R_y'\cos \mathrm{B}_1 + R_z'\cos \Gamma_1, \\ R_y' &= R_x\cos \mathrm{B}_1 + R_y\cos \mathrm{B}_2 + R_z\cos \mathrm{B}_3, \\ R\ &= R_x'\cos \mathrm{A}_2 + R_y'\cos \mathrm{B}_2 + R_z'\cos \Gamma_2, \\ R_z' &= R_x\cos \Gamma_1 + R_y\cos \Gamma_2 + R_z\cos \Gamma_3, \\ R_z &= R_x'\cos \mathrm{A}_3 + R_y'\cos \mathrm{B}_3 + R_z'\cos \Gamma_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3.87)$$

Определитель данного преобразования

$$D = \begin{vmatrix} \cos \mathrm{A}_1 & \cos \mathrm{A}_2 & \cos \mathrm{A}_3 \\ \cos \mathrm{B}_1 & \cos \mathrm{B}_2 & \cos \mathrm{B}_3 \\ \cos \Gamma_1 & \cos \Gamma_2 & \cos \Gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Выражая его квадрат и учитывая соотношения (3.84), получим

$$D^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда следует, что $D = \pm 1$. Знаку $+$ соответствует винтовое перемещение систем координат.

Формулы преобразования (3.87) в матричной форме запишутся так:

$$\begin{vmatrix} R'_x \\ R'_y \\ R'_z \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos \mathrm{A}_1 & \cos \mathrm{A}_2 & \cos \mathrm{A}_3 \\ \cos \mathrm{B}_1 & \cos \mathrm{B}_2 & \cos \mathrm{B}_3 \\ \cos \Gamma_1 & \cos \Gamma_2 & \cos \Gamma_3 \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos \mathrm{A}_1 & \cos \mathrm{B}_1 & \cos \Gamma_1 \\ \cos \mathrm{A}_2 & \cos \mathrm{B}_2 & \cos \Gamma_2 \\ \cos \mathrm{A}_3 & \cos \mathrm{B}_3 & \cos \Gamma_3 \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} R'_x \\ R'_y \\ R'_z \end{vmatrix} \qquad (3.88)$$

или, короче,

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}'. \qquad (3.89)$$

Матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}'$ с комплексными элементами, рассмотренные здесь, осуществляют аффинное ортогональное преобразование, которое в отличие от такового, осуществляемого матрицами с вещественными элементами, представляет собой винтовое перемещение, сохраняющее комплексные модули винтов, а также комплексные углы между осями двух любых винтов.

§ 14. Винтовая диада. Винтовой аффинор

Рассмотрим произвольную тройку (базис) винтов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ при условии, что $(\boldsymbol{ABC})^2 \neq 0$[1]. Любой заданный винт $\boldsymbol{R}$ можно представить как линейную комбинацию

$$\boldsymbol{R} = R_x\boldsymbol{A} + R_y\boldsymbol{B} + R_z\boldsymbol{C}. \qquad (3.90)$$

Комплексные числа R_x, R_y, R_z суть скалярные произведения винта $\boldsymbol{R}$ на взаимные с заданной тройкой винты $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{C}^*$, определяемые по формулам

$$\boldsymbol{A}^* = \frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{ABC}}, \quad \boldsymbol{B}^* = \frac{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{ABC}}, \quad \boldsymbol{C}^* = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{ABC}}. \qquad (3.91)$$

[1]) Здесь обычного требования $\boldsymbol{ABC} \neq 0$ недостаточно, так как при этом не исключен случай, когда главиая часть этого смешанного произведения равна нулю, и тогда деленне на него невозможно.

При этом получается

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{B}^*\times\boldsymbol{C}^*}{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{C}^*},\quad \boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{A}^*}{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{C}^*},\quad \boldsymbol{C}=\frac{\boldsymbol{A}^*\times\boldsymbol{B}^*}{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{C}^*},\tag{3.92}$$

а также

$$(\boldsymbol{ABC})(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{C}^*)=1.\tag{3.93}$$

Таким образом,

$$R_x=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{A}^*,\ R_y=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{B}^*,\ R_z=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{C}^*.\tag{3.94}$$

Винту $\boldsymbol{R}$, выраженному формулой (3.90), можно привести в соответствие винт $\boldsymbol{R}'$, отнесенный к базису $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}'$, имеющий те же координаты, что и $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}'=R_x\boldsymbol{A}'+R_y\boldsymbol{B}'+R_z\boldsymbol{C}',\tag{3.95}$$

поэтому можно написать следующее выражение для $\boldsymbol{R}'$:

$$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}'\tag{3.96}$$

или следующее:

$$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{R}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}^*\cdot\boldsymbol{R}.\tag{3.97}$$

Формулы (3.96) и (3.97) представляют аффинное преобразование, которое трем винтам $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ приводит в соответствие три винта $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}'$. Винт $\boldsymbol{R}'$ в новой системе базисных винтов $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}'$ имеет такое же выражение, как винт $\boldsymbol{R}$ в старой системе $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.

Выражения

$$\Phi=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}',\tag{3.98}$$

$$\overline{\Phi}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}^*\tag{3.99}$$

называются сопряженными винтовыми диадами; они представляют суммы диадных произведений.

Преобразования (3.96) и (3.97) символически записываются так:

$$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}\cdot\Phi=\overline{\Phi}\cdot\boldsymbol{R}.\tag{3.100}$$

Винт $\boldsymbol{R}'$ можно отнести к первоначальному базису $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$,

$\boldsymbol{C}$ при помощи координат. Обозначая координаты винта $\boldsymbol{R}$ в этом базисе через R'_x, R'_y, R'_z, мы будем иметь

$$\boldsymbol{R}' = R'_x\boldsymbol{A} + R'_y\boldsymbol{B} + R'_z\boldsymbol{C}. \tag{3.101}$$

Величины R'_x, R'_y, R'_z определяются, если известны выражения винтов $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}'$ через $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$. Пусть

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}' &= A_{11}\boldsymbol{A} + A_{12}\boldsymbol{B} + A_{13}\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{B}' &= A_{21}\boldsymbol{A} + A_{22}\boldsymbol{B} + A_{23}\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{C}' &= A_{31}\boldsymbol{A} + A_{32}\boldsymbol{B} + A_{33}\boldsymbol{C}, \end{aligned}\right\} \tag{3.102}$$

где числа A_{ik} — координаты «нового» базиса относительно «старого»; кроме того, $D^2 \neq 0$, где

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

тогда, подставляя (3.102) в (3.95), получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}' = R_x(A_{11}\boldsymbol{A} + A_{12}\boldsymbol{B} + A_{13}\boldsymbol{C}) &+ \\ + R_y(A_{21}\boldsymbol{A} + A_{22}\boldsymbol{B} + A_{23}\boldsymbol{C}) &+ \\ + R_z(A_{31}\boldsymbol{A} + A_{32}\boldsymbol{B} + A_{33}\boldsymbol{C}),& \end{aligned} \tag{3.103}$$

или

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}' = (A_{11}R_x + A_{21}R_y + A_{31}R_z)\boldsymbol{A} + (A_{12}R_x + A_{22}R_y &+ \\ + A_{32}R_z)\boldsymbol{B} + (A_{13}R_x + A_{23}R_y + A_{33}R_z)\boldsymbol{C}.& \end{aligned} \tag{3.104}$$

В соответствии с (3.101) будем иметь выражения координат винта R' в новой системе через его координаты в старой системе:

$$\left.\begin{aligned} R'_x &= A_{11}R_x + A_{21}R_y + A_{31}R_z,\\ R'_y &= A_{12}R_x + A_{22}R_y + A_{32}R_z,\\ R'_z &= A_{13}R_x + A_{23}R_y + A_{33}R_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.105}$$

Полученное аффинное преобразование винта может быть записано и в виде умножения

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{R}, \tag{3.106}$$

где $\boldsymbol{A}$ — матрица преобразования с комплексными элементами $A_{ik} = a_{ik} + \omega \overset{0}{a}_{ik}$

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}. \tag{3.107}$$

Винт $\boldsymbol{R}'$ является линейной винт-функцией винта $\boldsymbol{R}$, а оператор $\boldsymbol{A}$, определяемый матрицей (3.107), называется винтовым аффинором.

Винтовые аффиноры были исследованы и применены С. Г. Кислицыным.

ГЛАВА IV

ПРИНЦИП ПЕРЕНЕСЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ И КИНЕМАТИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Принцип перенесения в комплексной векторной алгебре

При рассмотрении формул, выражающих результаты операций над винтами, бросается в глаза тождественность их с формулами обыкновенной векторной алгебры. Эта тождественность оказалась следствием замены в формулах векторной алгебры вектора мотором и формальным выражением последнего в виде комплексного вектора с особого рода множителем ω, квадрат которого равен нулю, а также введения комплексного модуля вектора и комплексного угла между прямыми в пространстве.

Формулы, выражающие сумму, скалярное и винтовое произведения винтов через «внутренние» величины — модули и углы — оказались совершенно идентичными с соответствующими формулами для суммы, скалярного и векторного произведений векторов при условии, что в последних модуль вектора заменяется комплексным модулем винта, а обыкновенный угол между прямыми — комплексным углом. Тождественность основных формул алгебры векторов и алгебры винтов представляется приведенной на следующей странице таблицей.

Полный параллелизм формул, который виден из этой таблицы, влечет за собой параллелизм во множестве других формул, в первую очередь формул более сложных произведений векторов и винтов (скалярно-винтового, двойного винтового, скалярного и винтового произведений, двух винтовых произведений и др.), а далее — во многих других формулах векторной и винтовой алгебры.

Алгебра векторов	Алгебра винтов
Вектор $\boldsymbol{r}$	Винт $\boldsymbol{R}$
Модуль вектора $\lvert\boldsymbol{r}\rvert = r$	Комплексный модуль винта $\lvert\boldsymbol{R}\rvert = R$
Угол между двумя прямыми α	Комплексный угол между двумя прямыми A
Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 = r_1r_2\cos\alpha$	Скалярное пронзведение двух винтов $\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_2 = R_1R_2\cos\mathrm{A}$
Векторное произведенне двух векторов $\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_{12}r_1r_2\sin\alpha$	Винтовое произведение двух винтов $\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{E}_{12}R_1R_2\sin\mathrm{A}$
($\boldsymbol{e}_{12}$-единичный вектор, образующий прямые углы с векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$)	($\boldsymbol{E}_{12}$-еднничный винт, ось которого пересекает под прямым углом оси винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$
Сумма векторов $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$ ($\boldsymbol{r}$ — вектор, направление и модуль которого определяются из замкнутого треугольника)	Сумма винтов $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2$ ($\boldsymbol{R}$—винт, направление и положение оси которого, а также комплексный модуль определяются из «раздвинутого» треугольника)

Этот параллелизм приводит к одному весьма важному общему положению, которое составляет принцип перенесения в комплексной векторной алгебре — алгебре винтов. Принцип, о котором здесь будет идти речь, является одним из множества примеров известного принципа перенесения, который может быть охарактеризован следующим образом. Пусть имеются формулы, аналитически связывающие элементы какого-нибудь пространства — те или иные геометрические образы (точки, линии и др.),— и допустим, что соответствующие соотношения сохраняются и в том случае, если элементы, ими связываемые, будут заменены другими элементами — совершенно иными геометрическими образами, не исключая геометрические образы иного числа измерений. В таком случае одни и те же формулы будут выражать соотношения двух совершенно различных геометрий, и обе эти геометрии становятся тождественными друг другу. Если известна какая-либо теорема для одной геометрии, то она автоматически переносится на другую геометрию, и эту вторую геометрию можно изучать посредством первой с той только поправкой, что во второй геометрии результаты интерпретируются с помощью иных геометрических понятий[1]).

Принцип перенесения (или раздвигания) для комплексной векторной алгебры — алгебры винтов, сформулированный А. П. Котельниковым, а несколько позже Э. Штуди, сводится к следующему.

Рассмотрим некоторую совокупность векторов $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$, начала которых находятся в некоторой общей точке приведения O. Допустим, что мы наряду с каждым из векторов $\boldsymbol{r}_i$ рассматриваем дополнительно приписанный ему некоторый момент $\boldsymbol{r}_i^0$, отнесенный к точке O, в результате чего появится дополнительная совокупность моментов $\boldsymbol{r}_1^0$, $\boldsymbol{r}_2^0, \ldots$, отнесенных к точке O, и мы будем иметь совокупность двоек векторов, т. е. моторов $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1^0)$, $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2^0)\ldots$. Каждый мотор $(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i^0)$, отнесенный к точке O, единственным образом определяет некоторый винт $\boldsymbol{R}_i$ — его ось, вектор и параметр. Совокупность моторов $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1^0)$, $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2^0) \ldots$, отнесенных к точке приведения O, определяет совокупность винтов $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots$ Концы всех векторов и моментов с началами, помещенными в точке 0, образуют шестимерное точечное пространство, оси же винтов, ими определяемые, образуют четырехмерное линейчатое пространство, причем каждой оси соответствует двухмерное пространство винтов, и значит, пространство винтов будет шестимерным. Таким образом, при помощи точки приведения устанавливается соответствие между пространством двоек векторов — моторов (или двоек точек) с одной стороны, и пространством винтов — с другой. Каждому мотору в первом пространстве соответствует винт во втором пространстве.

Если моменты $\boldsymbol{r}_i^0$ равны нулю, то мы будем иметь обыкновенное векторное (точечное) пространство и операции над векторами дадут соотношения векторной алгебры для векторов $\boldsymbol{r}_i$. Если же моменты $\boldsymbol{r}_i^0$ не равны нулю, то мы, как

---

[1]) Одним из классических примеров принципа перенесения является известный принцип двойственности в проективной геометрии на плоскости, на основании которого все рассуждения сохраняют силу, если в них точки заменить прямыми, а прямые — точками.

это было показано в главе III, можем образовать комплексные векторы $\boldsymbol{r}_i + \omega \boldsymbol{r}_i^0$, для которых основные формулы векторной алгебры могут быть аналогично записаны, но они в то же время будут и формулами для винтов $\boldsymbol{R}_i$, соответствующих этим комплексным векторам. Как мы могли убедиться, в силу свойства удачно введенного множителя ω основные формулы для винтов в точности воспроизводят формулы для главных частей винтов, т. е. для векторов. Поэтому основные формулы алгебры векторов, написанные «малыми буквами», одновременно служат основными формулами теории винтов, если их переписать в «больших буквах».

Основными формулами являются: а) формула для скалярного квадрата вектора (соответственно винта) и б) формула для угла между двумя векторами (соответственно между осями винтов), выраженная с помощью скалярного произведения. При этом мы усматриваем, что модулю вектора соответствует комплексный модуль винта, а углу между векторами — комплексный угол между осями винтов, а именно

$$\boldsymbol{r}^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = r^2, \quad \boldsymbol{R}^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = \\ = R^2 = r^2 e^{2\omega p},$$

$$\cos(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{r_{1x} r_{2x} + r_{1y} r_{2y} + r_{1z} r_{2z}}{\sqrt{r_{1x}^2 + r_{1y}^2 + r_{1z}^2}\sqrt{r_{2x}^2 + r_{2y}^2 + r_{2z}^2}},$$

$$\cos(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \frac{R_{1x} R_{2x} + R_{1y} R_{2y} + R_{1z} R_{2z}}{\sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2 + R_{1z}^2}\sqrt{R_{2x}^2 + R_{2y}^2 + R_{2z}^2}}.$$

Если же существует тождественность между основными формулами алгебры векторов и алгебры винтов, то можно сделать вывод, что существует тождественность между всеми такими формулами, которые можно свести к конечному числу этих основных формул. Это значит, что по крайней мере все формулы алгебры векторов, записанные «малыми буквами», будут служить формулами алгебры винтов, если их переписать в «больших буквах»; при этом всегда в новых формулах модулю вектора будет соответствовать комплексный модуль винта, а углу между двумя векторами — комплексный угол между осями двух винтов.

Сказанное составляет принцип перенесения для комплексной векторной алгебры — алгебры винтов. На основании этого принципа приведенная выше таблица соответствия может быть продолжена для множества других формул таким образом, что левой ее половине, относящейся к вектору («малые буквы»), всегда будет соответствовать правая половина, относящаяся к винтам («большие буквы»); замена малых букв большими означает замену вещественных величин комплексными. На формулы алгебры векторов можно смотреть как на «неразвернутые» формулы алгебры винтов: записав первые большими буквами, мы придаем им комплексное значение и затем развертываем. Таким образом, получаются комплексные формулы преобразования координат, формулы более общего комплексного аффинного преобразования, формулы комплексной сферической тригонометрии и другие.

Здесь необходимо заметить, что перенесение формул алгебры векторов на алгебру винтов теряет смысл в тех случаях, когда модули векторов обращаются в нуль. В этих случаях соответствующие винты являются вырожденными. Для таких исключительных случаев требуется специальный анализ.

На основании сказанного можно видеть, что принцип перенесения устанавливает соответствие между векторным (точечным) пространством и пространством винтов.

При помощи принципа перенесения плоский пучок прямых преобразуется (раздвигается) в щетку (см. § 9 главы III).

Далее, в той же главе III было показано, что основные формулы алгебры винтов инвариантны по отношению к выбору точки приведения, т. е. не зависят от того мотора, к которому приведен заданный винт. При данной только что трактовке принципа перенесения это свойство равносильно свойству всех формул, характеризующих внутренние соотношения между винтами, оставаться неизменными при добавлении к каждому из моментов $\mathbf{r}_i^0$ моторов слагаемого $\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r}_i$, где $\boldsymbol{\rho}$ — один и тот же вектор для всех $\mathbf{r}_i$. Такое преобразование равносильно параллельному переносу пространства винтов. Можно было бы также показать (на этом останавливаться не будем), что основные формулы алгебры винтов остаются неизменными при любом движении пространства, сохраняющем комплексные модули винтов и углы между их осями, иными словами, при любом ортогональном преобразовании.

Ниже, в главе V будет показана возможность установления соответствия между формулами векторного анализа и формулами винтового анализа, в котором фигурируют комплексные скалярные функции и винт-функции винтового аргумента.

Принцип перенесения в теории комплексных векторов имеет большое практическое значение. При решении задач кинематики твердого тела с неподвижной точкой угловые скорости изображаются векторами, проходящими через одну точку, и применяется алгебра свободных векторов. Если требуется решить задачу о движении свободного твердого тела, то в формулы для соответствующего сферического движения вместо векторов угловых скоростей вставляются винты скоростей, а вместо углов между векторами — комплексные углы между осями винтов, и формулы кинематики свободного твердого тела получаются простым переписыванием формул кинематики тела с неподвижной точкой с заменой «малых букв» «большими буквами», а затем эти формулы развертываются. Для многих задач кинематики произвольно движущегося тела можно сформулировать соответствующую задачу сферического движения, искусственно введя закрепленную точку; решение этой более простой задачи автоматически, с помощью принципа перенесения, приводит к решению основной задачи.

Таким же образом можно решать задачи о движении системы твердых тел, относительные движения которых подчинены условиям геометрических связей. Благодаря этому получается возможность сравнительно простого решения задач о движении пространственных шарнирных и других механизмов.

Совершенно аналогично обстоит дело в статике твердого тела, где многие задачи о равновесии свободного твердого тела могут быть решены путем решения задач о равновесии точки и последующего применения принципа перенесения. Здесь же уместно будет отметить, что попытка применения принципа перенесения к динамике уже не приводит к таким простым соотношениям, какие удается получить для кинематики и статики. Это связано с тем, что при составлении винтовых уравнений динамики твердого тела необходимо установить соответствие между двумя пространствами дважды (во-первых, между пространством векторов угловых скоростей и пространством кинематических винтов, а во-вторых, между пространством векторов сил и пространством силовых винтов) и с тем, что комплексный оператор, связывающий кинематический и силовой винты, не может быть получен из соответствующего аффинного оператора, связывающего вектор угловой скорости с моментом, путем замены вещественных величин комплексными [1]). Вследствие этого многие задачи динамики и статики приходится решать на основании общей теории винтов при выражении винтов с помощью шести плюккеровых координат.

В этой и следующей главах будут показаны примеры применения рассматриваемого принципа перенесения к некоторым задачам геометрии и кинематики.

§ 2. Конечные перемещения твердого тела

Рассмотрим применение принципа перенесения к теории конечных перемещений твердого тела.

В кинематике мы будем рассматривать винтовые перемещения. Перемещение выражается винтом, у которого вектор равен углу поворота, а момент — вектору поступательного перемещения; ось винта совпадает с осью перемещения тела.

Винт нулевого параметра (или скользящий вектор) соответствует чистому повороту тела без поступательного перемещения. Винт бесконечно большого параметра соответствует чисто поступательному перемещению тела.

Предварительно остановимся на элементарной теории конечных поворотов тела с неподвижной точкой [2]).

---

[1]) В следующей главе будут приведены соображения относительно области применимости принципа перенесения к решению задач механики.

[2]) Наличие неподвижной точки не является необходимым; формулы (4.1) — (4.10) относятся собственно только к перемещениям от поворотов, независимо от поступательных перемещений тела.

Если твердое тело совершит поворот на конечный угол вокруг некоторой оси, единичный вектор которой обозначим через $\boldsymbol{e}$, то мы можем связать начальное значение радиуса-вектора точки тела $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA}$, где O — точка оси поворота, с его конечным значением после поворота $\boldsymbol{r}' = OA'$, где A' — конечное положение точки (рис. 11), на основании следующей теоремы.

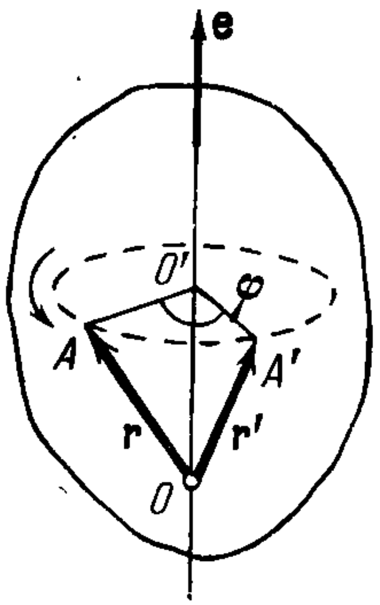

Рис. 11.

Теорема 9. *Если ввести вектор конечного поворота*

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \boldsymbol{e}\theta, \qquad (4.1)$$

где $\boldsymbol{e}$ *— единичный вектор оси вращения,* φ *— угол поворота, то конечное значение* $\boldsymbol{r}'$ *радиуса-вектора через начальное* $\boldsymbol{r}$ *выражается формулой* [1])

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{2\boldsymbol{\theta}}{1+\theta^2} \times (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}). \qquad (4.2)$$

В самом деле, рассматривая сечение, проходящее через точку A перпендикулярно к оси вращения, мы будем иметь в нем вектор $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{O'A}$, переходящий после поворота в вектор $\overrightarrow{O'A'} = \boldsymbol{s}'$.

Имеем соотношения

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e} + \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{r}' = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e} + \boldsymbol{s}'. \qquad (4.3)$$

Для конечного положения имеем

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s}\cos\varphi + \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{s}\sin\varphi = \boldsymbol{s}\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} + \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{s}\frac{2\theta}{1+\theta^2} =$$
$$= \boldsymbol{s} + \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{s}\frac{2\theta}{1+\theta^2} - \boldsymbol{s}\frac{2\theta^2}{1+\theta^2}.$$

На основании (4.3), а также учитывая, что $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}$,

[1]) Эта формула приведена в книге А. И. Лурье [31].

мы можем написать

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}\frac{2\theta}{1+\theta^2} + \frac{2\theta^2}{1+\theta^2}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} - \boldsymbol{r}] =$$
$$= \boldsymbol{s} + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}\frac{2\theta}{1+\theta^2} + \frac{2\theta^2}{1+\theta^2}\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}).$$

Прибавляя к левой и правой частям равенства величину $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, а также заменяя $\boldsymbol{e}\theta$ на $\boldsymbol{\theta}$, получим формулу (4.2), справедливость которой требовалось доказать.

В частном случае, когда $\varphi = \pi$, т. е. когда тело совершает полуоборот, формула (4.2) дает

$$\boldsymbol{r}' = 2(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e} - \boldsymbol{r}. \tag{4.4}$$

Всякий поворот тела можно осуществить с помощью двух полуоборотов на основании следующей теоремы.

Теорема 10. *Поворот тела на угол φ вокруг некоторой оси эквивалентен двум последовательным полуоборотам тела вокруг осей, пересекающих под прямым углом в одной точке данную ось и образующих между собой угол $\varphi/2$.*

Пусть единичный вектор оси вращения будет $\boldsymbol{e}$, а единичные векторы осей полуоборотов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки тела, лежащей в плоскости $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, после полуоборота вокруг $\boldsymbol{e}$ получит, согласно (4.4), выражение

$$\boldsymbol{r}' = 2(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{r},$$

а после второго полуоборота —

$$\boldsymbol{r}'' = 2(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{r}' = 2\{[2(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{r}]\cdot\boldsymbol{e}_2\}\,\boldsymbol{e}_2 - $$
$$- 2(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}.$$

Если угол между $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{e}_1$ обозначить через α, то мы будем иметь

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{e}_1\cos\alpha - 2\boldsymbol{e}_2\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right).$$

Составив векторное произведение начального радиуса-вектора и конечного, т. е. после двух полуоборотов, получим

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}'' = -2\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_1\cos\alpha - 2\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_2\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= \left[-2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)\right]\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\sin\varphi.$$

Отсюда следует, что начальный и конечный радиусы-векторы лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору e, и образуют угол φ, т. е. тело в результате двух полуоборотов совершило поворот на угол φ вокруг оси e, что и требовалось доказать.

Два последовательных поворота тела относительно осей, проходящих через одну точку, эквивалентны одному повороту вокруг оси, проходящей через ту же точку. Такой поворот является результирующим, заменяющим два поворота, которые можно назвать составляющими поворотами.

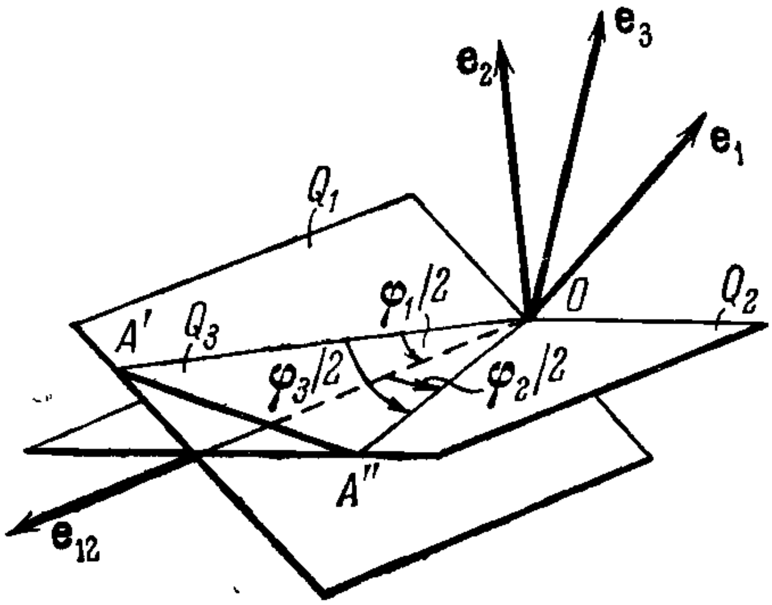

Рис. 12.

Следующая теорема позволяет по заданным единичным векторам e_1, e_2 осей и величинам углов φ_1, φ_2 составляющих поворотов найти единичный вектор e_3 оси и угол φ_3 результирующего поворота.

Пусть будут известны оси e_1 и e_2, образующие угол α, и соответствующие углы поворота φ_1 и φ_2 тела (рис. 12). Построим в точке O пересечения векторов плоскости Q_1 и Q_2, перпендикулярные соответственно векторам e_1 и e_2; этим определится ось с единичным вектором e_{12}, совпадающая с ребром пересечения плоскостей Q_1 и Q_2, причем вектор направим в ту сторону, в какую направлено векторное произведение векторов e_1 и e_2. В плоскости Q_1 из точки O приведем луч OA', который при вращении вокруг O на угол, равный $\varphi_1/2$, совпадет с осью e_{12}; в плоскости же Q_2 из точки O проведем луч OA'', с которым совпадет ось e_{12}, если последнюю повернуть вокруг O на угол $\varphi_2/2$. Единичные векторы вдоль лучей OA' и OA'' обозначим через e' и e''.

Проведем через лучи OA' и OA'' плоскость Q_3 и через точку O проведем ось с единичным вектором e_3 перпендикулярно плоскости Q в ту сторону, в какую направлено векторное произведение векторов e' и e''. Указанный вектор e_3 определяет ось поворота, эквивалентного двум поворотам вокруг e_1 и e_2; а удвоенный угол между лучами OA' и OA'' определяет величину φ_3 угла искомого поворота тела.

Для доказательства заметим, что поворот вокруг e_1 на угол φ_1 по теореме 10 равносилен полуобороту вокруг e' и полуобороту вокруг e_{12}; поворот вокруг e_2 на угол φ_2 равносилен полуобороту вокруг e_{12} и полуобороту вокруг e'', а значит, полный поворот равносилен четырем указанным полуоборотам. Но два полуоборота вокруг e_{12}, взаимно уничтожаются, поэтому остаются полуоборот вокруг e' и полуоборот вокруг e'', а оба они на основании теоремы равносильны повороту вокруг e_3 на угол φ_3. Теперь остается выразить вектор результирующего поворота через векторы составляющих поворотов.

Для этого составим выражение

$$e_3 \frac{\sin(e', e'')}{\cos(e', e'')} = \frac{e' \times e''}{e' \cdot e''} = e_3 \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}. \tag{4.5}$$

Выразим векторы e' и e'':

$$\left.\begin{aligned} e' &= \frac{e_1 \times e_2}{\sin\alpha} \cos\frac{\varphi_1}{2} + \frac{e_1 \times e_2}{\sin\alpha} \times e_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}, \\ e'' &= \frac{e_1 \times e_2}{\sin\alpha} \cos\frac{\varphi_2}{2} + e_2 \times \frac{e_1 \times e_2}{\sin\alpha} \sin\frac{\varphi_2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Перемножив векторно, а затем скалярно равенства (4.6), найдем после преобразований

$$e' \times e'' = e_1 \sin\frac{\varphi_1}{2} \cos\frac{\varphi_2}{2} + e_2 \cos\frac{\varphi_1}{2} \sin\frac{\varphi_2}{2} - e_1 \times e_2 \sin\frac{\varphi_1}{2} \sin\frac{\varphi_2}{2}, \tag{4.7}$$

$$e' \cdot e'' = \cos(e', e'') = \cos\frac{\varphi_1}{2} \cos\frac{\varphi_2}{2} - \sin\frac{\varphi_1}{2} \sin\frac{\varphi_2}{2} \cos\alpha. \tag{4.8}$$

Подставив (4.7) и (4.8) в числитель и знаменатель (4.5), получим после сокращения на $\cos(\varphi_1/2)\cos(\varphi_2/2)$

$$\boldsymbol{e}_3 \operatorname{tg}\frac{\varphi_3}{2} = \frac{\boldsymbol{e}_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} + \boldsymbol{e}_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} - \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}{1 - \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}.$$

Введя снова векторы конечного поворота

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{e}_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2},\quad \boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{e}_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2},\quad \boldsymbol{\theta}_3 = \boldsymbol{e}_3 \operatorname{tg}\frac{\varphi_3}{2}, \tag{4.9}$$

получим окончательный результат — выражение вектора результирующего поворота через векторы составляющих поворотов —

$$\boldsymbol{\theta}_3 = \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1 \times \boldsymbol{\theta}_2}{1 - \boldsymbol{\theta}_1\cdot\boldsymbol{\theta}_2}. \tag{4.10}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 11. *Если заданы единичные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ осей и углы φ_1 и φ_2 последовательных поворотов тела, то ось результирующего поворота, эквивалентного этим двум поворотам, получается следующим построением: через точку O пересечения $\boldsymbol{e}_1$ с $\boldsymbol{e}_2$ проводим две плоскости, перпендикулярные к этим двум векторам; в первой плоскости проводим луч, образующий с ребром пересечения плоскостей угол $-\varphi_1/2$, во второй плоскости — луч, образующий с этим ребром угол $\varphi_2/2$; через эти лучи, определяемые единичными векторами $\boldsymbol{e}'$ и $\boldsymbol{e}''$, проводим плоскость. Ось с единичным вектором $\boldsymbol{e}_3$, перпендикулярная к этой плоскости в точке O, будет осью результирующего поворота, угол поворота φ_3 будет равен удвоенному углу между $\boldsymbol{e}'$ и $\boldsymbol{e}''$. Зависимость вектора результирующего поворота и векторов составляющих поворотов дается формулами* (4.9) *и* (4.10).

Формула (4.10) показывает, что результирующий поворот зависит от порядка, в котором производились составляющие повороты. Для поворотов на малые углы, когда произведениями величин углов можно пренебречь, получается формула «линейного» сложения:

$$\boldsymbol{\theta}_3 \approx \boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2.$$

Приведенные формулы (4.1), (4.2), (4.9) и (4.10) на основании принципа перенесения могут быть истолкованы как формулы с комплексными величинами. Входящие в них углы конечного поворота можно положить комплексными, единичные векторы — единичными винтами фиксированных в пространстве осей, а модули векторов — комплексными. В таком случае, в силу принципа перенесения, эти формулы допускают толкование на языке винтов, и изложенная выше теория конечных поворотов превращается в теорию конечных винтовых перемещений тела. Теоремы 9, 10 и 11 сохраняют силу с той поправкой, что в этом новом толковании, во-первых, телу сообщаются винтовые перемещения относительно осей, произвольно расположенных в пространстве, а во-вторых, определяются начальное и конечное положения не радиуса-вектора точки, а винта, лежащего на прямой, принадлежащей телу.

Таким образом, мы сможем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 12. *Если ввести комплексный вектор конечного винтового перемещения*

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{E}\Theta = \boldsymbol{E}\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}, \tag{4.11}$$

где $\boldsymbol{E}$ *— единичный винт оси винтового перемещения,* $\Phi = \varphi + \omega\varphi^0$ *— комплексный угол поворота (винт перемещения), то для винта (или вектора)* $\boldsymbol{R}$, *лежащего на произвольной прямой, принадлежащей телу, конечное положение* $\boldsymbol{R}'$ *выражается формулой*

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R} + \frac{2\boldsymbol{\Theta}}{1+\Theta^2} \times (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{R}), \tag{4.12}$$

аналогичной формуле (4.2).

Схема рассматриваемого перемещения показана на рис. 13.

Теорема 13. *Винтовое перемещение тела на комплексный угол* $\Phi = \varphi + \omega\varphi^0$ *относительно оси, единичный винт которой* $\boldsymbol{E}$, *эквивалентно двум последовательным полуоборотам, совершающимся относительно прямых с единичными винтами* $\boldsymbol{E}_1$ *и* $\boldsymbol{E}_2$, *пересекающих под прямым углом ось* $\boldsymbol{E}$ *и образующих между собой комплексный угол* $\Phi/2$ (рис. 14).

Теорема 14. *Два последовательных конечных винтовых перемещения на комплексные углы* Φ_1 *и* Φ_2 *относительно*

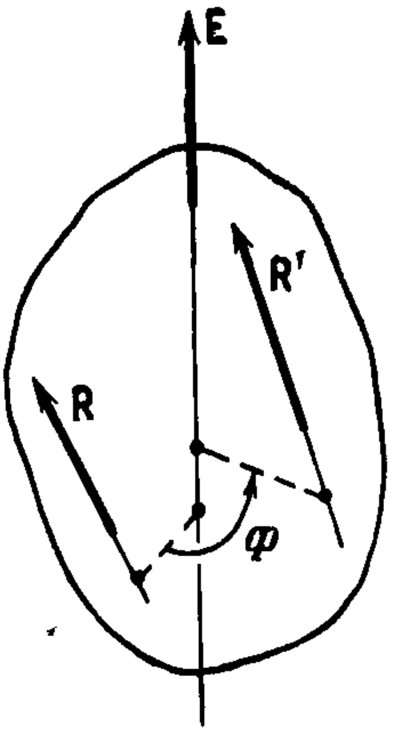

Рис. 13.

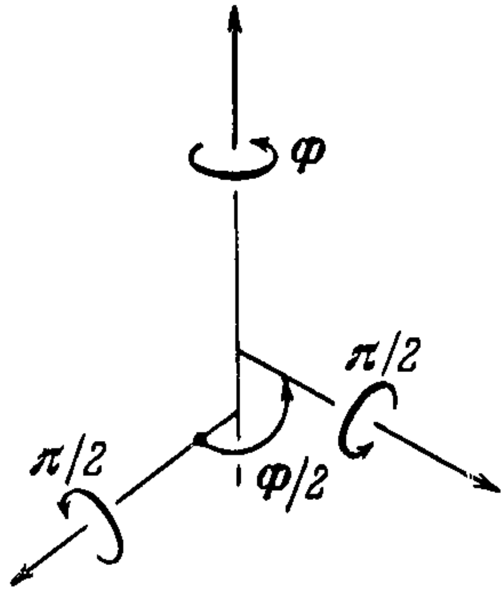

Рис. 14.

произвольных осей пространства с единичными винтами E_1 *и* E_2 *могут быть заменены одним эквивалентным результирующим винтовым перемещением. Ось, единичный винт которой обозначим через* E_3, *и комплексный угол* Φ_3 *результирующего винтового перемещения получаются следующим построением* (рис. 15): *проводим ось комплексного угла* E_1E_2, *а затем прямую* a', *пересекающую ось* E_1 *и составляющую комплексный угол* — $\Phi_1/2$ *с упомянутой осью угла, затем прямую* a'', *пересекающую ось* E_2 *и составляющую комплексный угол* $\Phi_2/2$ *с той же осью угла; удвоенный комплексный угол между* a' *и* a'' *равен комплексному углу* Φ_3 *результирующего винтового перемещения, а ось угла* a' — a'' *с единичным винтом* E_3 *есть ось этого перемещения.*

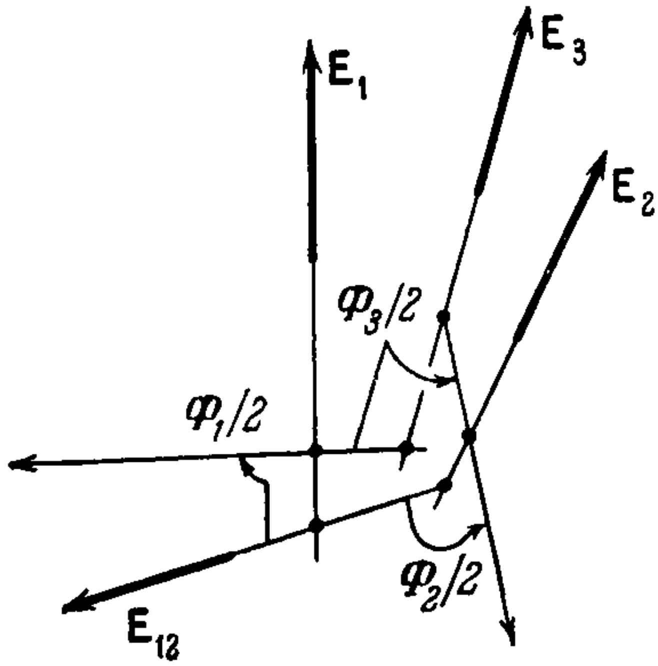

Рис. 15.

Если комплексные векторы конечных винтовых перемещений слагающих и результирующего будут соответственно

$$\boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{E}_1\Theta_1 = \boldsymbol{E}_1 \operatorname{tg} \frac{\Phi_1}{2}, \quad \boldsymbol{\Theta}_2 = \boldsymbol{E}_2\Theta_2 = \boldsymbol{E}_2 \operatorname{tg} \frac{\Phi_2}{2},$$
$$\boldsymbol{\Theta}_3 = \boldsymbol{E}_3\Theta_3 = \boldsymbol{E}_3 \operatorname{tg} \frac{\Phi_3}{2}, \tag{4.13}$$

то зависимость между указанными винтами выражается формулой

$$\boldsymbol{\Theta}_3 = \frac{\boldsymbol{\Theta}_1 + \boldsymbol{\Theta}_2 - \boldsymbol{\Theta}_1 \times \boldsymbol{\Theta}_2}{1 - \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta}_2}, \tag{4.14}$$

аналогичной формуле (4.10).

Теоремы 12, 13 и 14 в доказательстве не нуждаются, так как они вытекают из аналогичных формул, относящихся к простым поворотам тела, в силу принципа перенесения.

Рассмотрение аналогии «векторных» и «винтовых» формул показывает, что с помощью принципа перенесения кинематика точки переходит в кинематику прямой, кинематика тела с неподвижной точкой переходит в кинематику свободного тела.

§ 3. Определение винта перемещения по начальному и конечному положениям твердого тела

Задача о перемещении твердого тела из одного заданного положения в другое при помощи одного винтового перемещения представляет практический интерес для автоматического производства, в частности когда нужно осуществить некоторую технологическую операцию, сопровождаемую общим перемещением детали на станке[1]). Для практического выполнения такого перемещения необходимо иметь конструктивное приспособление, которое способно было бы сообщить детали единое винтовое перемещение, переводящее деталь из одного положения в другое. При этом

---

[1]) Здесь излагается решение, идея которого была предложена Р. Соссюром [8].

начальное и конечное положения считаются заданными, и задача заключается в определении соответствующего винта перемещений, осуществляющего указанный перевод, т. е. оси, угла поворота и поступательного перемещения. Начальное и конечное положения детали могут быть заданы начальным и конечным положением каких-нибудь двух прямых, неизменно связанных с этой деталью.

Предварительно решим более простую задачу, от решения которой можно затем перейти к решению поставленной задачи на основании принципа перенесения. Эта задача следующая: требуется найти вектор конечного поворота твердого тела, имеющего закрепленную точку O, если известно, что два единичных вектора $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ и $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, проходящих через точку O и неразрывно связанных с телом, после поворота переходят в векторы $\boldsymbol{e}_1' = \overrightarrow{OA_1'}$ и $\boldsymbol{e}_2' = \overrightarrow{OA_2'}$ (при этом, естественно, $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_2'$). Эта задача равносильна известной задаче об определении центра конечного вращения сферического отрезка A_1A_2, переходящего в отрезок A_1A_2' на сфере единичного радиуса. Для решения сначала определяем геометрическое место всех осей, вращением вокруг которых можно перевести вектор $\boldsymbol{e}_1$ в вектор $\boldsymbol{e}_1'$. Очевидно, что геометрическим местом таких осей будет плоскость q_1, проходящая через O и перпендикулярная к плоскости OA_1A_1', линия пересечения которой с этой последней делит пополам угол между векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_1'$. Затем определяем геометрическое место всех осей, вращением вокруг которых можно перевести вектор $\boldsymbol{e}_2$ в вектор $\boldsymbol{e}_2'$,— это будет плоскость q_2, проходящая через O и перпендикулярная к плоскости OA_2A_2', линия пересечения которой с последней делит пополам угол между векторами $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_2'$. Прямая s пересечения плоскостей q_1 и q_2, очевидно, удовлетворяет тому условию, что вращением вокруг нее можно перевести как $\boldsymbol{e}_1$ в $\boldsymbol{e}_1'$, так и $\boldsymbol{e}_2$ в $\boldsymbol{e}_2$. Это будет решение задачи об определении оси конечного поворота тела с неподвижной точкой O.

Осуществление решения по указанной схеме выполняется следующим образом. Сначала определяется плоскость q_1 — ее единичный вектор параллелен вектору $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1$, затем определяется плоскость q_2 — ее единичный вектор параллелен вектору $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2$. Единичный вектор $\boldsymbol{e}$, перпендикулярный одновременно к векторам $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, очевидно, будет параллелен линии пересечения плоскостей q_1 и q_2 и определит на сфере единичного радиуса точку поворота сферического отрезка A_1A_2, в результате которого последний перейдет в $A_1'A_2'$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|} = \frac{(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1) \times (\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2)}{|(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1) \times (\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2)|} = \\
&\qquad = \frac{(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1) \times (\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2)}{|\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1|\,|\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2|\sin(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2)}, \\
&|\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1| = 2\sin\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_1) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1}, \\
&|\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2| = 2\sin\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_2) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_2}, \\
&|\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1|\,|\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2| = 2\sqrt{1 - \boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1}\sqrt{1 - \boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_2}, \\
&\cos(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2) = \frac{(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1)\cdot(\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2)}{2\sqrt{1 - \boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1}\sqrt{1 - \boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_2}}, \\
&\sin(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2) = \\
&\quad = \frac{\sqrt{4(1 - \boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1)(1 - \boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_2) - [(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1)\cdot(\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2)]^2}}{2\sqrt{1 - \boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1}\sqrt{1 - \boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Таким образом, единичный вектор оси, вокруг которой тело должно совершить конечный поворот, будет

$$\boldsymbol{e} = \frac{(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1) \times (\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2)}{\sqrt{4(1 - \boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1)(1 - \boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_2) - [(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_1)\cdot(\boldsymbol{e}_2' - \boldsymbol{e}_2)]^2}}. \tag{4.16}$$

Остается найти угол конечного поворота. Для этого воспользуемся формулой (4.2) конечного поворота, подставив в нее начальный и конечный векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, а также вектор $\boldsymbol{e}$. Получим формулу

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1' &= \boldsymbol{e} + \frac{2\theta}{1+\theta^2}\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_1\theta) = \\ &= \boldsymbol{e} + \frac{2\theta}{1+\theta^2}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_1 + \frac{2\theta^2}{1+\theta^2}\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_1) = \\ &= \boldsymbol{e} + \frac{2\theta}{1+\theta^2}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_1 + \frac{2\theta^2}{1+\theta^2}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_1) - \frac{2\theta^2}{1+\theta^2}\boldsymbol{e}_1,\end{aligned}$$

в которой в данном случае известными являются все единичные векторы, а неизвестной — величина $\theta = \operatorname{tg}(\varphi/2)$. Умножив скалярно обе части написанного равенства на $\boldsymbol{e}_1$, получим скалярное уравнение

$$\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1 = 1 + \frac{2\theta^2}{1+\theta^2}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_1)^2 - \frac{2\theta^2}{1+\theta^2} = 1 + \frac{2\theta^2}{1+\theta^2}[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_1)^2 - 1],$$

откуда

$$\theta^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1}{1+\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_1 - 2(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_1)^2}. \tag{4.17}$$

После решения данной задачи весьма просто решить задачу, поставленную вначале.

Итак, заданы два единичных винта $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$, лежащих на двух прямых, неразрывно связанных с телом, которые, после того как тело совершило некоторое перемещение в пространстве, перешли в единичные винты $\boldsymbol{E}_1'$ и $\boldsymbol{E}_2'$, которые известны. Нужно найти соответствующий винт конечного перемещения тела.

Применим принцип перенесения, использовав схему решения предыдущей задачи.

Сперва определим геометрическое место всех осей, винтовым движением относительно которых можно перевести единичный винт $\boldsymbol{E}_1$ в единичный винт $\boldsymbol{E}_1'$. В силу принципа перенесения это будем аналог плоскости — щетка Q_1, осью которой служит ось винта $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1$. Эта ось пересекает под прямым углом ось винта $\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_1'$ и делит пополам отрезок между $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_1'$ на этой оси.

Далее определим геометрическое место всех осей, винтовым движением относительно которых можно перевести единичный винт $\boldsymbol{E}_2$ в единичный винт $\boldsymbol{E}_2'$. Аналогично предыдущему это будет щетка Q_2, осью которой служит ось винта $\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2$. Эта ось пересекает под прямым углом ось винта $\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{E}_2'$ и делит пополам отрезок между $\boldsymbol{E}_2$ и $\boldsymbol{E}_2'$ на этой оси.

Ось $\boldsymbol{E}$, винтовым движением относительно которой можно одновременно перевести $\boldsymbol{E}_1$ в $\boldsymbol{E}_1'$ и $\boldsymbol{E}_2$ в $\boldsymbol{E}_2'$, т. е. ось винтового перемещения тела, будет принадлежать одновременно двум упомянутым щеткам, а следовательно, эта ось должна пересекать под прямым углом оси винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$.

Теперь остается найти все эти оси.

По аналогии с формулами (4.15) имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1, \quad \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2,\\
&\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2}{|\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2|} = \frac{(\boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1) \times (\boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2)}{|\boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1|\,|\boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2| \sin(\boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2)},\\
&|\boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1| = \sqrt{2}\sqrt{1 - \boldsymbol{E}_1' \cdot \boldsymbol{E}_1},\\
&|\boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2| = \sqrt{2}\sqrt{1 - \boldsymbol{E}_2' \cdot \boldsymbol{E}_2},\\
&\sin(\boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2) =\\
&\qquad = \frac{\sqrt{4(1 - \boldsymbol{E}_1' \cdot \boldsymbol{E}_1)(1 - \boldsymbol{E}_2' \cdot \boldsymbol{E}_2) - [(\boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1) \cdot (\boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2)]^2}}{2\sqrt{1 - \boldsymbol{E}_1' \cdot \boldsymbol{E}_1}\sqrt{1 - \boldsymbol{E}_2' \cdot \boldsymbol{E}_2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

Единичный винт оси винтового перемещения тела получается по формуле, аналогичной (4.16):

$$\boldsymbol{E} = \frac{(\boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1) \times (\boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2)}{\sqrt{4(1 - \boldsymbol{E}_1' \cdot \boldsymbol{E}_1)(1 - \boldsymbol{E}_2' \cdot \boldsymbol{E}_2) - [(\boldsymbol{E}_1' - \boldsymbol{E}_1) \cdot (\boldsymbol{E}_2' - \boldsymbol{E}_2)]^2}}. \tag{4.19}$$

Теперь, взяв начальное и конечное положения одного из единичных винтов, а именно $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_1'$, а также полученный единичный винт $\boldsymbol{E}$, находим комплексный угол Φ или, что то же, модуль винта конечного поворота тела из соотношения, аналогичного (4.17),

$$\Theta^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} = \frac{1 - \boldsymbol{E}_1' \cdot \boldsymbol{E}_1}{1 + \boldsymbol{E}_1' \cdot \boldsymbol{E}_1 - 2(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_1)^2}, \tag{4.20}$$

и задача таким образом решена.

§ 4. Применение теории конечных винтовых перемещений к определению относительных перемещений звеньев пространственного механизма

Изложенная выше теория конечных поворотов и ее винтовой аналог — теория конечных винтовых перемещений позволяют вывести формулы зависимости между углами поворота и скольжениями звеньев пространственного механизма с цилиндрическими шарнирами.

Рассматривается пространственный четырехзвенный механизм с одним вращательным шарниром *1* и тремя цилиндрическими шарнирами *2*, *3*, *4* (рис. 16). Вращательный шарнир допускает относительное вращение примыкающих звеньев на произвольный угол, цилиндрические шарниры допускают вращение совместно со скольжением. Оси шарниров занимают в пространстве произвольное положение. Условимся называть звеном жесткую конфигурацию, состоящую из двух соседних осей шарниров и отрезка линии кратчайшего расстояния между ними. Таким образом, звено геометрически характеризуется комплексным углом, главная часть которого есть собственно угол между осями расположенных на его концах шарниров, а моментная часть — длина звена. Обозначим комплексные углы звеньев *1—2*, *2—3*, *3—4*, *4—1* соответственно через

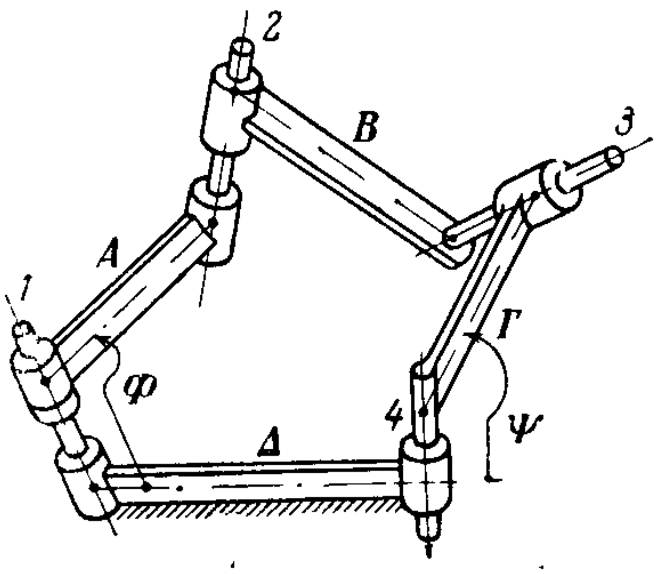

Рис. 16.

$$\mathrm{A} = \alpha + \omega\alpha^0,\ \mathrm{B} = \beta + \omega\beta^0,\ \Gamma = \gamma + \omega\gamma^0,\ \Delta = \delta + \omega\delta^0,$$

звено *1—2* будем считать ведущим, а звено *4—3* — ведомым; звено *4—1* примем за неподвижное. Угол между звеньями *1—4* и *1—2* обозначим через $\Phi = \varphi + \omega\varphi^0$, угол между звеньями *1—4* и *4—3* обозначим через $\Psi = \psi + \omega\psi^0$.

Поставим задачу определить положение ведомого звена *3—4* в зависимости от положения ведущего звена *1—2*, иными словами, определить угол Ψ как функцию угла Φ. Задачу проще всего решить таким путем. Временно удалим звено *2—3*, а звенья *1—2* и *4—3* «растянем» в одну линию с неподвижным звеном *1—4*. Углы Φ и Ψ будут, следовательно, приведены к нулю (рис. 17). После этого сообщим звену *1—2* поворот на комплексный угол Φ вокруг оси *1*, а звену *4—3* — поворот на комплексный угол Ψ вокруг оси *4*. Оси *2* и *3* после поворотов займут положения *2'* и *3'*.

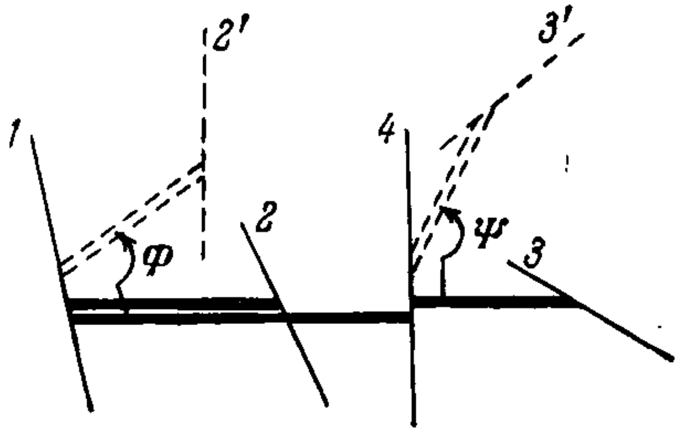

Рис. 17.

Восстановим звено *2—3* тем, что потребуем, чтобы конфигурация осей *2'* и *3'* соответствовала конфигурации временно удаленного звена *2—3*, т. е. чтобы комплексный угол между осями *2'* и *3'* был равен $B = \beta + \omega\beta^0$, а для этого необходимо, чтобы скалярное произведение единичных винтов этих осей было равно косинусу упомянутого комплексного угла.

Обозначим единичные винты осей шарниров в «растянутом» состоянии механизма через $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{E}_4$.

После поворота вокруг $\boldsymbol{E}_1$ на угол Φ положение оси $\boldsymbol{E}_2$ выразится на основании формулы (4.12) следующим образом:

$$\boldsymbol{E}_2' = \boldsymbol{E}_2 + \frac{2\boldsymbol{\Theta}}{1+\boldsymbol{\Theta}^2} \times (\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{E}_2), \qquad (4.21)$$

где $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{E}_1 \operatorname{tg}(\Phi/2)$ — комплексный вектор конечного поворота звена *1—2*.

После поворота вокруг $\boldsymbol{E}_4$ на угол Ψ положение оси $\boldsymbol{E}_3$ на основании той же формулы (4.12) будет

$$\boldsymbol{E}'_3 = \boldsymbol{E}_3 + \frac{2\boldsymbol{X}}{1+\boldsymbol{X}^2} \times (\boldsymbol{E}_3 + \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{E}_3), \qquad (4.22)$$

где

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}_4 \operatorname{tg}\frac{\Psi}{2}.$$

Перемножим скалярно (4.21) и (4.22) и приравняем cos B:

$$\boldsymbol{E}'_2\cdot\boldsymbol{E}'_3=\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{E}_3+\left[\frac{2\Theta}{1+\Theta^2}\times(\boldsymbol{E}_3+\Theta\times\boldsymbol{E}_2)\right]\cdot\boldsymbol{E}_3+$$
$$+\boldsymbol{E}_2\cdot\left[\frac{2X}{1+X^2}\times(\boldsymbol{E}_3+X\times\boldsymbol{E}_3)\right]+$$
$$+\left[\frac{2\Theta}{1+\Theta^2}\times(\boldsymbol{E}_2+\Theta\times\boldsymbol{E}_2)\right]\cdot\left[\frac{2X}{1+X^2}\times(\boldsymbol{E}_3+X\times\boldsymbol{E}_3)\right]=$$
$$=\cos\mathrm{B}.$$

Если мы развернем это произведение, а затем примем во внимание, что скалярные произведения единичных винтов осей механизма имеют следующие значения:

$$\boldsymbol{E}'_2\cdot\boldsymbol{E}'_3=\cos\mathrm{B},\ \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{E}_3=\cos(\Delta-\mathrm{A}+\Gamma),\ \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2=\cos\mathrm{A},$$
$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_4=\cos\Delta,\ \boldsymbol{E}_3\cdot\boldsymbol{E}_4=\cos\Gamma,$$

то получим следующее квадратное уравнение относительно неизвестной комплексной величины X:

$$\{[\cos(\Delta-\mathrm{A}-\Gamma)-\cos\mathrm{B}]+[\cos(\Delta+\mathrm{A}-\Gamma)-$$
$$-\cos\mathrm{B}]\,\Theta^2\}\,\mathrm{X}^2+4\sin\mathrm{A}\sin\Gamma\Theta\mathrm{X}+[\cos(\Delta-\mathrm{A}+\Gamma)-$$
$$-\cos\mathrm{B}]+[\cos(\Delta+\mathrm{A}+\Gamma)-\cos\mathrm{B}]\,\Theta^2=0 \quad (4.23)$$

или сокращенно

$$(M+N\Theta^2)\,\mathrm{X}^2+2P\Theta\mathrm{X}+(Q+R\Theta^2)=0. \quad (4.23')$$

Это квадратное уравнение выражает зависимость величины X от Θ, т. е., собственно, зависимость угла поворота Ψ ведомого звена от угла поворота Φ ведущего звена.

Заметим, что угол $\Phi=\varphi+\omega\varphi^0$ изменяется так, что величина φ^0 остается постоянной (вращательный шарнир), поэтому аргументом является вещественная величина φ, изменение же угла $\Psi=\psi+\omega\psi^0$ представляет изменение собственно угла ψ и отрезка ψ^0.

Если взять главную часть комплексного уравнения (4.23), то она представит собой то же уравнение, но с заменой комплексных величин на вещественные, т. е. с заменой больших букв малыми

$$\{[\cos(\delta-\alpha-\gamma)-\cos\beta]+[\cos(\delta+\alpha-\gamma)-$$
$$-\cos\beta]\,\theta^2\}\,\chi^2+4\sin\alpha\sin\gamma\theta\chi+$$
$$+[\cos(\delta-\alpha+\gamma)-\cos\beta]+[\cos(\delta+\alpha+\gamma)-$$
$$-\cos\beta]\,\theta^2=0 \quad (4.24)$$

или сокращенно

$$(m + n\theta^2)\chi^2 + 2p\theta\chi + (q + r\theta^2) = 0, \qquad (4.24')$$

где

$$\theta = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \chi = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}.$$

Уравнение (4.24) или (4.24') описывает такой пространственный четырехзвенный механизм, у которого оси параллельны осям заданного и пересекаются в одной точке.

Выясним, при каких условиях дискриминант комплексного уравнения (4.23) обращается в нуль, т. е. при каких условиях удовлетворяется равенство

$$P^2\Theta^2 - (M + N\Theta^2)(Q + R\Theta^2) = 0.$$

Это равенство представляет уравнение относительно величины Θ:

$$NR\Theta^4 + (MR + QN - P^2)\Theta^2 + MQ = 0. \qquad (4.25)$$

Преобразуем выражения коэффициентов этого уравнения:

$$NR = 4\sin\frac{\Delta + \mathrm{A} - \Gamma + \mathrm{B}}{2}\sin\frac{\Delta + \mathrm{A} - \Gamma - \mathrm{B}}{2}\times$$
$$\times\sin\frac{\Delta + \mathrm{A} + \Gamma + \mathrm{B}}{2}\sin\frac{\Delta + \mathrm{A} + \Gamma - \mathrm{B}}{2} =$$
$$= [\cos(\mathrm{B} + \Gamma) - \cos(\Delta + \mathrm{A})][\cos(\mathrm{B} - \Gamma) -$$
$$- \cos(\Delta + \mathrm{A})] = \pi\rho,$$

$$MQ = 4\sin\frac{\Delta - \mathrm{A} - \Gamma + \mathrm{B}}{2}\sin\frac{\Delta - \mathrm{A} - \Gamma - \mathrm{B}}{2}\times$$
$$\times\sin\frac{\Delta - \mathrm{A} + \Gamma + \mathrm{B}}{2}\sin\frac{\Delta - \mathrm{A} + \Gamma - \mathrm{B}}{2} =$$
$$= [\cos(\mathrm{B} + \Gamma) - \cos(\Delta - \mathrm{A})][\cos(\mathrm{B} - \Gamma) -$$
$$- \cos(\Delta - \mathrm{A})] = \sigma\tau,$$

$$MR + QN - P^2 =$$
$$= [\cos(\Delta + \mathrm{B}) - \cos(\mathrm{A} + \Gamma)][\cos(\mathrm{A} - \mathrm{B}) -$$
$$- \cos(\mathrm{A} + \Gamma)] + [\cos(\Delta + \mathrm{B}) - \cos(\mathrm{A} - \Gamma)]\times$$
$$\times[\cos(\Delta - \mathrm{B}) - \cos(\mathrm{A} - \Gamma)] - 4\sin^2\mathrm{A}\sin^2\Gamma =$$
$$= \cos^2\mathrm{A} + \cos 2\mathrm{B} + \cos 2\Gamma + \cos 2\Delta - 4\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\times$$

$$\times \cos \Gamma \cos \Delta = [\cos (B + \Gamma) - \cos (\Delta + A)] \times \\ \times [\cos (B - \Gamma) - \cos (\Delta - A)] + [\cos (B - \Gamma) - \\ - \cos (\Delta + A)] [\cos (B + \Gamma) - \cos (\Delta - A)] = \\ = \pi\tau + \rho\sigma;$$

тогда уравнение (4.25) приобретает вид

$$\pi\rho\Theta^4 + (\pi\tau + \rho\sigma)\Theta^2 + \sigma\tau = 0. \tag{4.25'}$$

Корни этого уравнения будут

$$\Theta_1 = \sqrt{-\frac{\tau}{\rho}}, \quad \Theta_2 = \sqrt{-\frac{\sigma}{\pi}}. \tag{4.26}$$

Выясним, какому положению звеньев механизма соответствуют эти два значения Θ, а следовательно, два значения угла Φ. Составим выражение для косинуса угла между осями шарниров *2* и *4* на основании формулы комплексной сферической тригонометрии

$$\cos (\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_4) = \cos A \cos \Delta + \sin A \sin \Delta \cos \Phi = \\ = \cos A \cos \Delta + \sin A \sin \Delta \frac{1 - \Theta^2}{1 + \Theta^2}. \tag{4.27}$$

Теперь вместо Θ^2 поставим его значения Θ_1^2 и Θ_2^2 (4.26); тогда получим в одном случае

$$\cos (\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_4) = \cos A \cos \Delta + \sin A \sin \Delta \frac{\pi + \sigma}{\pi - \sigma} = \\ = \cos A \cos \Delta + \sin A \sin \Delta \frac{2 \cos (B + \Gamma) - 2 \cos A \cos \Delta}{2 \sin A \sin \Delta} = \\ = \cos (B + \Gamma),$$

а в другом случае аналогично

$$\cos (\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_4) = \cos (B - \Gamma).$$

Полученный результат указывает на то, что для значений Θ и соответственно Φ, обращающих в нуль дискриминант уравнения (4.23), комплексный угол между осями *2* и *4* равен сумме или разности углов В и Г. Отсюда следует, что в этом положении механизма оси *2*, *3* и *4* параллельны одной плоскости, а звенья *2—3* и *3—4* становятся параллельными. Указанное положение есть «мертвое» положение (рис. 18, *а*, *б*).

С другой стороны, поскольку дискриминант комплексного алгебраического уравнения (4.23) равен нулю, моментная часть неизвестного, т. е. моментная часть X, а значит, величина ψ^0 на основании теоремы 3 (гл. II) может

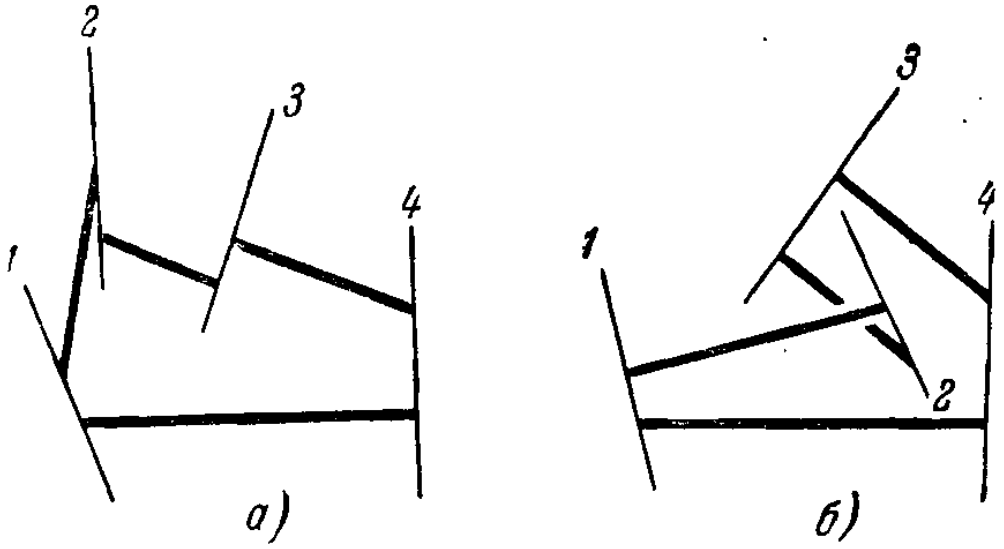

Рис. 18.

быть взята произвольной. Это чисто алгебраическое свойство в данном случае интерпретируется кинематическим фактом: при расположении трех цилиндрических шарниров параллельно одной плоскости два звена вместе со средней осью могут неопределенно скользить, а следовательно, ψ^0 перестает быть фиксированной величиной (рис. 19). Мертвое положение в данном случае является положением неопределенного скольжения для некоторых звеньев.

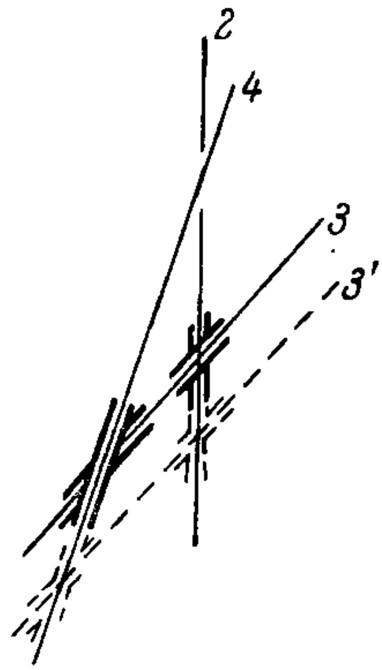

Рис. 19.

Можно поставить и такую задачу: определить, при каких соотношениях размеров звеньев (длин и углов) при вращении ведущего звена *1—2* будет происходить чистое вращение в шарнире *2*. Очевидно, что такие соотношения будут исключительными, ибо в шарнире *4*, вообще говоря, должно быть вращение со скольжением; требование же чистого вращения есть требование тождественного обращения в нуль скольжения при любом значении угла поворота ведущего звена.

Для простоты положим, что $\varphi^0 = \psi^0 = 0$, т. е. что звенья *1—2* с *1—4* и звенья *1—4* и *4—3* соприкасаются, углы Φ и Ψ вещественны.

Выразив коэффициенты и неизвестное в уравнении (4.23) через главные и моментные части, произведем разделение этих частей:

$$(m + n\theta^2)\,\chi^2 + 2p\theta\chi\,(q + r\theta^2) = 0,$$
$$(m^0 + n^0\theta^2)\,\chi^2 + 2p^0\theta\chi\,(q^0 + r^0\theta^2) = 0.$$

Так как величина χ должна удовлетворять обоим написанным уравнениям, то результант этих уравнений должен быть тождественно равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} m + n\theta^2 & 2p\theta & q + r\theta^2 & 0 \\ m^0 + n^0\theta^2 & 2p^0\theta & q^0 + r^0\theta^2 & 0 \\ 0 & m + n\theta^2 & 2p\theta & q + r\theta^2 \\ 0 & m^0 + n^0\theta^2 & 2p^0\theta & q^0 + r^0\theta^2 \end{vmatrix} \equiv 0. \qquad (4.28)$$

Это будет условие вещественности корня комплексного алгебраического уравнения. Раскрыв определитель, мы получим многочлен относительно θ. Так как определитель должен быть равен нулю при любом значении θ, то следует приравнять нулю все выражения, стоящие коэффициентами при θ, а также свободный член. Отсюда получится ряд условий, которые будут содержать только внутренние параметры механизма, т. е. длины звеньев и углы между осями шарниров. Раскрывая эти условия, мы получим необходимые соотношения параметров механизма, удовлетворяющего поставленному требованию.

§ 5. Комплексные эйлеровы углы и кинематические уравнения Эйлера

Для определения положения тела в пространстве можно воспользоваться комплексными эйлеровыми углами, которые характеризуются винтовыми перемещениями тела. Если взять неподвижные прямоугольные оси x, y, z (рис. 20) и оси x', y', z', принадлежащие движущемуся телу, которые можно назвать подвижными осями, то положение подвижных осей относительно неподвижных можно охарактеризовать либо девятью комплексными косинусами, либо тремя независимыми эйлеровыми углами. На эти углы должно было бы повернуться тело, чтобы занять данное положение, если бы неразрывно связанные с телом оси x', y', z' в начальном положении совпадали с осями x, y, z.

Первым таким углом является угол Ψ, соответствующий винтовому перемещению относительно оси z; после этого перемещения оси займут положение n, n', z. Вторым будет угол Θ относительно оси n; после поворота на этот угол оси займут положение n, n'', z'. Третьим будет угол Φ относительно оси z'; после этого перемещения оси займут положение x', y', z'.

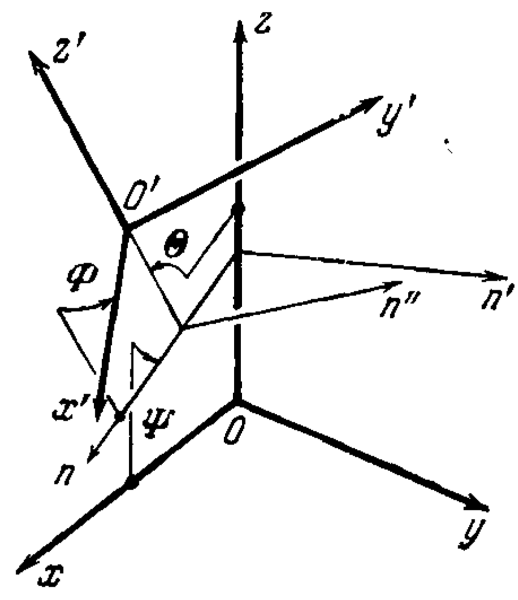

Рис. 20.

По принципу перенесения связь комплексных эйлеровых углов с комплексными прямоугольными координатами формально такая же, как связь вещественных эйлеровых углов с вещественными прямоугольными координатами. Поэтому мы можем представить переход от системы xyz (неподвижной) к системе x', y', z' (подвижной) в виде следующей таблицы «комплексных косинусов»:

	X	Y	Z
X'	$\cos\Phi\cos\Psi-\sin\Phi\sin\Psi\cos\Theta$	$\cos\Phi\sin\Psi+\sin\Phi\cos\Psi\cos\Theta$	$\sin\Phi\sin\Theta$
Y'	$-\sin\Phi\cos\Psi-\cos\Phi\sin\Psi\cos\Theta$	$-\sin\Phi\sin\Psi+\cos\Phi\cos\Psi\cos\Theta$	$\cos\Phi\sin\Theta$
Z'	$\sin\Theta\sin\Psi$	$\sin\Theta\cos\Psi$	$\cos\Theta$

Если обозначить единичные векторы осей неподвижной системы через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, а единичные векторы осей подвижной системы — через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, то косинус угла между единичными векторами первой и второй систем определяется на пересечении соответствующих столбца и строки таблицы. Например, $\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}')$ равен $\sin\Theta\sin\Psi$.

Координаты единичного винта любой прямой, принадлежащей твердому телу, заданные в неподвижной системе, с помощью этой таблицы могут быть выражены через координаты в подвижной системе.

Не развивая этот вопрос, упомянем, что подобно общеизвестным параметрам Родрига — Гамильтона и параметрам Кэли — Клейна можно построить их комплексные аналоги, для которых формулы перехода к эйлеровым углам и другим координатам совершаются по соответствующим формулам при замене в них вещественных величин комплексными.

Проекции $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$, $\Omega_{z'}$ на оси, неразрывно связанные с телом, винта Ω скоростей произвольно движущегося тела связаны с величинами комплексных эйлеровых углов следующими соотношениями, получающимися из известных кинематических уравнений Эйлера для тела, имеющего неподвижную точку, путем замены вещественных величин комплексными

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{x'} &= \dot{\Psi}\sin\Phi\sin\Theta + \dot{\Theta}\cos\Phi, \\ \Omega_{y'} &= \dot{\Psi}\cos\Phi\sin\Theta - \dot{\Theta}\sin\Phi, \\ \Omega_{z'} &= \dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Phi}. \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Разрешив систему уравнений (4.29) относительно эйлеровых углов, получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \frac{1}{\sin\Theta}(\Omega_{x'}\sin\Phi + \Omega_{y'}\cos\Phi), \\ \dot{\Theta} &= \Omega_{x'}\cos\Phi - \Omega_{y'}\sin\Phi, \\ \dot{\Phi} &= \Omega_{z'} - (\Omega_{x'}\sin\Phi + \Omega_{y'}\cos\Phi)\operatorname{ctg}\Theta. \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ И НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ КИНЕМАТИКИ ПРЯМОЙ И ТВЕРДОГО ТЕЛА. КОМПЛЕКСНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ И ВИНТ-ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

§ 1. Винт как функция скалярного аргумента

Пусть винт $\boldsymbol{R}$ будет отнесен к неподвижной прямоугольной системе координат, и пусть его комплексные прямоугольные координаты суть функции некоторого вещественного скалярного параметра t. Тогда винт $\boldsymbol{R}$ будет функцией от t:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t).$$

При изменении t винт изменяется. При изменении аргумента от значения t до значения $t + \Delta t$ винт получает приращение — винт $\Delta\boldsymbol{R}$, прибавляемый к $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} + \Delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t + \Delta t).$$

Назовем производной от винта $\boldsymbol{R}$ предел отношения приращения винта к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{R}(t + \Delta t) - \boldsymbol{R}(t)}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \dot{\boldsymbol{R}}. \tag{5.1}$$

Правила дифференцирования винтов те же, что правила дифференцирования векторов, так как винт можно привести к мотору, а мотор — рассматривать как комплексный вектор. Так,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2) = \frac{d\boldsymbol{R}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{R}_2}{dt}, \tag{5.2}$$

$$\frac{d}{dt}(\Lambda \boldsymbol{R}) = \Lambda \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}; \quad \Lambda = \text{const}. \tag{5.3}$$

Таким же образом можно показать справедливость формул

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2) = \frac{d\boldsymbol{R}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_1 \frac{d\boldsymbol{R}_2}{dt} = \dot{\boldsymbol{R}}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_2, \tag{5.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2) = \frac{d\boldsymbol{R}_1}{dt} \times \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_1 \times \frac{d\boldsymbol{R}_2}{dt} = \dot{\boldsymbol{R}}_1 \times \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_1 \times \dot{\boldsymbol{R}}_2, \tag{5.5}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_3) = \dot{\boldsymbol{R}}_1 \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{R}_1 \dot{\boldsymbol{R}}_2 \boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2 \dot{\boldsymbol{R}}_3. \tag{5.6}$$

При дифференцировании винта могут иметь место такие частные случаи:

а) Ось винта сохраняет неизменное положение, а меняется только комплексный модуль. Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{E}R) = \boldsymbol{E}\frac{dR}{dt} = \boldsymbol{E}\frac{d(re^{\omega p})}{dt} = \boldsymbol{E}(\dot{r} + \omega \dot{p} r)e^{\omega p} =$$

$$= \boldsymbol{E} r e^{\omega p}\left(\frac{\dot{r}}{r} + \omega \dot{p}\right) = \boldsymbol{E} r e^{\omega p} \frac{\dot{r}}{r} e^{\omega \dot{p} \frac{r}{\dot{r}}} = \boldsymbol{R}\Lambda, \tag{5.7}$$

т. е. производная есть винт, соосный с данным винтом.

б) Ось винта изменяет положение в пространстве, а комплексный модуль — величина постоянная. В этом случае

$$\boldsymbol{R}^2 = \text{const}, \ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}^2) = 2\boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{R}} = 0, \tag{5.8}$$

откуда следует, что винты $\boldsymbol{R}$ и $\dot{\boldsymbol{R}}$ пересекаются под прямым углом.

Неопределенным интегралом от функции $\boldsymbol{R}(t)$ назовем функцию

$$\boldsymbol{S}(t) = \int \boldsymbol{R}(t)\, dt, \tag{5.9}$$

если

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \boldsymbol{R}(t).$$

Функция $\boldsymbol{S}(t)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое является винтом.

Определенным интегралом называется винт

$$\int_A^B \boldsymbol{R}(t)\,dt = \boldsymbol{S}(B) - \boldsymbol{S}(A). \tag{5.10}$$

Как и в обыкновенном векторном анализе, общеизвестные свойства интегралов сохраняются и в винтовом исчислении. Так, интеграл от суммы равен сумме интегралов, а постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

§ 2. Сферическая кривая

Напомним основные соотношения дифференциальной геометрии пространственной кривой, причем ограничим изложение тем специальным случаем, когда кривая лежит на сфере единичного радиуса.

Пусть a — точка кривой, радиус-вектор которой относительно центра O сферы будет $\overrightarrow{Oa} = \boldsymbol{r}$; при этом $|\boldsymbol{r}| = r = 1$.

Если t есть произвольный параметр, то уравнение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

есть параметрическое уравнение кривой.

Вектор, определяющий направление касательной в точке a, есть первая производная $\boldsymbol{r}$ по параметру

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}(t).$$

Как известно, в пределе приращение радиуса-вектора равно приращению длины дуги, поэтому

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{|d\boldsymbol{r}|}{ds} = 1. \tag{5.11}$$

Отсюда следует, что

$$ds = \sqrt{|d\boldsymbol{r}|^2} = dt\sqrt{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2} \tag{5.12}$$

и длина дуги

$$s = \int_{t_0}^{t} dt\, \sqrt{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2}, \tag{5.13}$$

где перед корнем необходимо брать знак плюс. На основании (5.11) имеем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\tau}\frac{ds}{dt}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \tag{5.14}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной в точке a. Таким образом, введя вместо t параметр s, мы получаем, что производная от радиуса-вектора по этому параметру представляет собой единичный вектор, направленный по касательной. Так как $|\boldsymbol{r}| = r = 1 = \text{const}$, то направление вектора $\boldsymbol{\tau}$ перпендикулярно к направлению вектора $\boldsymbol{r}$.

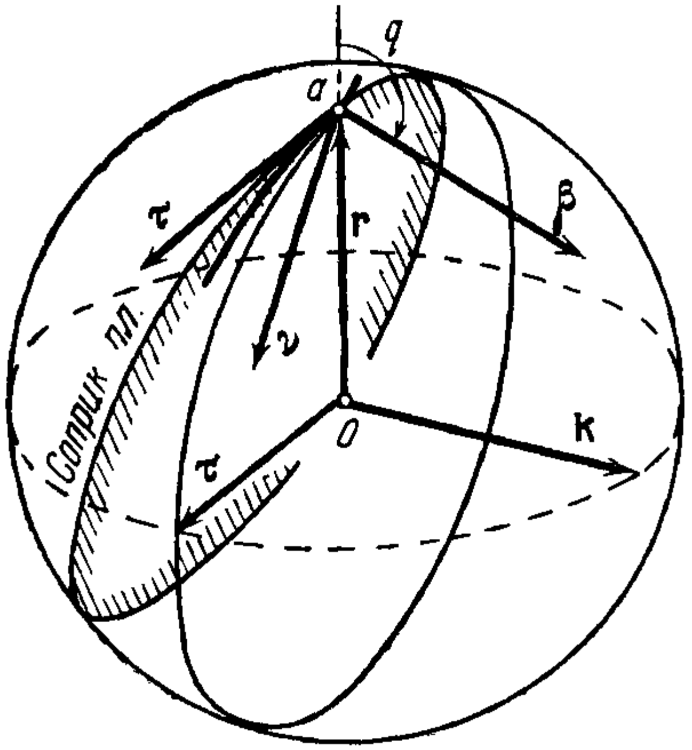

Рис. 21.

Плоскость, проходящую через центр сферы O, точку a и вектор касательной, назовем центральной плоскостью — пересечение ее со сферой образует большой круг (рис. 21); нормаль к кривой в точке a, перпендикулярную к центральной плоскости,— центральной нормалью к кривой. Обозначим единичный вектор последней через $\boldsymbol{k}$. Тройку полуосей, на которых лежат единичные векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{k}$, назовем трехгранником радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$. Этот трехгранник мы поместим в центре сферы O. Двигая точку a вдоль кривой, мы будем изменять $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{k}$; вектор $\boldsymbol{\tau}$ и его приращение определяют соприкасающуюся плоскость, в которой расположена главная нормаль в точке a. Обозначим единичный вектор главной нормали через ν; нормаль к кривой в точке a, перпендикулярная к касательной и к главной нормали, называется бинормалью; обозначим ее единичный вектор через β. Тройку полуосей, на которых лежат векторы τ, ν и β, назовем естественным трехгранником кривой в точке a.

На рис. 21 соприкасающаяся плоскость пересекается по окружности, плоскость которой показана штриховкой; естественный трехгранник помещен в точке a.

При движении точки a по кривой изменение векторов τ, ν, β определяется известными формулами Френе

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= \frac{\nu}{\rho_1}, \\ \frac{d\nu}{ds} &= -\frac{\tau}{\rho_1} + \frac{\beta}{\rho_2}, \\ \frac{d\beta}{ds} &= -\frac{\nu}{\rho_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.15)$$

Эти формулы дают характеристику движения естественного трехгранника вдоль кривой. Кинематическая интерпретация этих формул следующая: трехгранник совершает два вращения: одно — вокруг бинормали, модуль производной угла которого по дуге равен кривизне кривой $1/\rho_1$, где ρ_1 — радиус кривизны, а другое — вокруг касательной, модуль производной угла которого по дуге равен кручению кривой $1/\rho_2$, где ρ_2 — радиус кручения. Два указанных движения, складываясь, определяют движение концов векторов трехгранника, начало которого помещено в точке O.

Обозначим элемент дуги, описываемой концом вектора τ, через ds'; тогда имеем

$$\frac{d\tau}{ds'} = \nu, \quad \left|\frac{d\tau}{ds'}\right| = 1; \qquad (5.16)$$

на основании формул (5.15) и (5.16) имеем

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\rho_1},$$

т. е. кривизна есть производная дуги s' по s.

Из (5.15) следует, что

$$\frac{1}{\rho_1} = +\sqrt{\left|\frac{d\tau}{ds}\right|^2}.$$

Относительное расположение трехгранника радиуса-вектора и естественного трехгранника определяется следующим путем. Обозначим угол между радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ и единичным вектором $\boldsymbol{\beta}$ бинормали, или, что то же, между единичными векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{\nu}$ центральной нормали и главной нормали, через q (рис. 22)

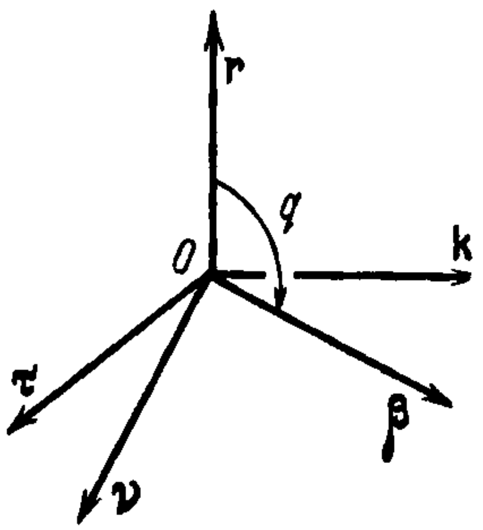

Рис. 22.

$$q = \angle(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\beta}) = \angle(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\nu}).$$

Тогда имеем

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta} = \cos q, & \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nu} = -\sin q, \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\beta} = \sin q, & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu} = \cos q. \end{array}\right\} \tag{5.17}$$

На основании формул (5.15) и (5.16)

$$\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\rho_1} = -\frac{\sin q}{\rho_1}.$$

С другой стороны, дифференцируя по s равенство $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$, мы получим

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\tau}) = 1 + \boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho_1} = 1 - \frac{\sin q}{\rho_1} = 0,$$

откуда

$$\rho_1 = \sin q, \tag{5.18}$$

т. е. радиус кривизны равен синусу угла между радиусом-вектором и бинормалью. Показанное на рис. 21 сечение единичной сферы соприкасающейся плоскостью не совпадает с сечением центральной плоскостью; при сближении этих плоскостей угол q будет стремиться к $\pi/2$, и радиус кривизны будет стремиться к единице.

Дифференцируя по s равенство

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta} = \cos q,$$

получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\beta}-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\rho_2}=-\frac{dq}{ds}\sin q,$$

откуда, принимая во внимание, что $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$, а также что $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nu}=-\sin q$, найдем

$$\frac{1}{\rho_2}=-\frac{dq}{ds}, \tag{5.19}$$

т. е. кручение равно по величине, а по знаку противоположно производной от угла q по s.

Введем неподвижную систему прямоугольных декартовых координат и рассмотрим проекции векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ на оси этой системы

$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z;\ \nu_x,\ \nu_y,\ \nu_z;\ \beta_x,\ \beta_y,\ \beta_z.$$

Очевидно, что каждая тройка этих чисел, имеющая одинаковые индексы, удовлетворяет системе уравнений (5.15), поэтому написанные числа суть три системы интегралов следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{dl}{ds}=\frac{m}{\rho_1},\quad \frac{dm}{ds}=-\frac{l}{\rho_1}+\frac{p}{\rho_2},\quad \frac{dp}{ds}=-\frac{m}{\rho_2}, \tag{5.20}$$

причем

$$l^2+m^2+p^2=1. \tag{5.21}$$

Если ввести переменную δ, определяемую формулой

$$\delta=\frac{l+im}{1+p},\quad i=\sqrt{-1}, \tag{5.22}$$

то, дифференцируя δ по s и пользуясь соотношениями системы (5.20), можно свести систему к одному уравнению типа Риккати

$$\frac{d\delta}{ds}+i\frac{\delta}{\rho_1}+i\frac{\delta^2-1}{2\rho_2}=0. \tag{5.23}$$

Предполагается, что известны функции

$$s=s(t),\ q=q(t),\ \rho_1=\sin q,\ \rho_2=-\frac{dq}{ds}. \tag{5.24}$$

Уравнения (5.24) являются внутренними уравнениями кривой, так как они не содержат координат.

Если в результате интегрирования уравнения будет найдена величина δ, то из соотношения (5.22) путем разделения последнего на части, содержащую и не содержащую i, и принимая во внимание (5.21), можно найти l, m, n.

Для перехода от декартовых координат к эйлеровым углам выразим, следуя С. П. Финикову [32], векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ через последние:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i}(\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta) + \\
&+ \boldsymbol{j}(\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta) + \boldsymbol{k}\sin\varphi\sin\theta, \\
&\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{i}(\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta) - \\
&- \boldsymbol{j}(\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi\cos\theta) + \boldsymbol{k}\cos\varphi\sin\theta, \\
&\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{i}\sin\psi\sin\theta - \boldsymbol{j}\cos\psi\sin\theta + \boldsymbol{k}\cos\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Если x, y, z — прямоугольные координаты вектора $\boldsymbol{r}$, то векторное уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}$$

в проекциях дает следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{ds} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta, \\
&\frac{dy}{ds} = \cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta, \\
&\frac{dz}{ds} = \sin\varphi\sin\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

Если теперь воспользоваться соотношениями (5.25), то из формул Френе (5.15) можно получить три группы по три уравнения для прямоугольных проекций векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$. Однако независимых из них будет только три, поэтому можно воспользоваться любыми тремя из этих проекций, в частности проекциями τ_z, ν_z и β_y. После подстановки их в формулы Френе получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}, \\
&\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho_2}\cos\varphi, \\
&\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\theta}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

Система уравнений (5.26) и (5.27) является системой Коши для неизвестных функций $x, y, z, \psi, \theta, \varphi$. Правые части в системе предполагаются регулярными функциями от s, поэтому система допускает единственное регулярное решение

$$x = x(s),\ y = y(s),\ \ldots,\ \varphi = \varphi(s), \tag{5.28}$$

которое удовлетворяет этой системе и начальным условиям при $s = s_0$:

$$x = x_0,\ y = y_0,\ \ldots,\ \varphi = \varphi_0. \tag{5.29}$$

Эти начальные условия определяют начальную точку кривой и начальное положение естественного трехгранника.

Задание двух величин ρ_1 и ρ_2 в функции длины дуги, как известно, определяет кривую с точностью до ее положения в пространстве, задание же системы Коши полностью определяет кривую с ее «привязкой» к точке и к заданному направлению.

§ 3. Линейчатая поверхность

После изложения кратких сведений из дифференциальной геометрии кривой на сфере единичного радиуса можно перейти к основным понятиям и соотношениям дифференциальной геометрии линейчатой поверхности.

Линейчатая поверхность есть поверхность, образованная движением прямой линии. Указанная прямая называется образующей поверхности.

При рассмотрении движения точки по сферической кривой мы также имеем дело с поверхностью, именно с поверхностью, описываемой радиусом-вектором точки из центра сферы. Но в этом случае радиус-вектор описывает коническую поверхность; кроме того, для характеристики кривой достаточно проследить только за угловыми перемещениями естественного трехгранника. При движении образующей по линейчатой поверхности единичный винт образующей совершает пространственное движение общего вида, и для характеристики движения единичного винта и некоторого связанного с ним трехгранника необходимо знать как вращательные, так и поступательные перемещения, т. е., вообще говоря, винтовые перемещения. Тем не менее в описании линейчатой поверхности достигается аналогия со сферической кривой при выражении указанных винтовых перемещений с помощью комплексных величин на основании принципа перенесения.

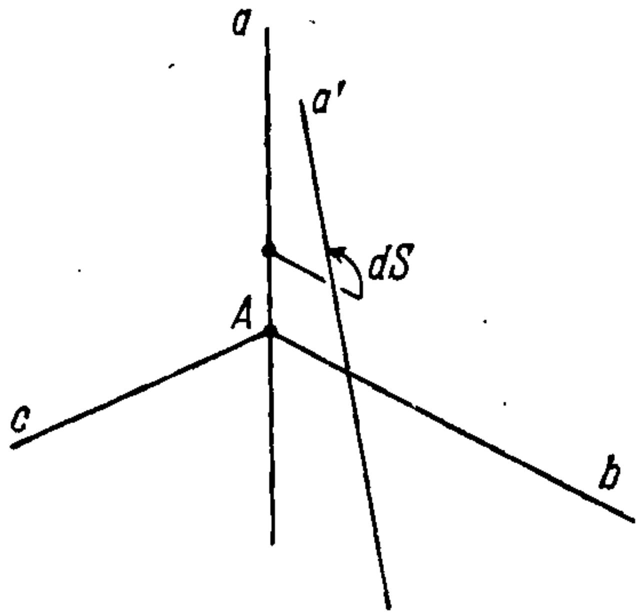

Рис. 23.

Пусть прямая a будет образующей линейчатой поверхности, а единичный винт, лежащий на a, будет $\boldsymbol{R}$ (рис. 23). Пусть образующая изменяется вместе с некоторым вещественным параметром t; тогда $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$.

Рассмотрим образующую a', соответствующую значению параметра $t + dt$; пусть ее единичный винт будет $\boldsymbol{R}'$.

Назовем элементом комплексной дуги поверхности комплексный угол (a, a') и введем для него обозначение

$$dS = ds + \omega\, ds^0 = ds e^{\omega p}, \tag{5.30}$$

где ds — вещественный угол между прямыми a и a', ds^0 — кратчайшее расстояние между этими прямыми, а параметр

$$p = \frac{ds^0}{ds} = \lim \frac{\Delta\theta^0}{\Delta\theta} \tag{5.31}$$

есть предел отношения кратчайшего расстояния $\Delta\theta^0$ между образующими к углу $\Delta\theta$ между ними, когда комплексный угол между образующими $\Delta\Theta$ стремится к нулю. Величина p называется параметром распределения касательных плоскостей к поверхности в точках ее образующей или просто параметром образующей a.

Отметим, что главная часть ds элемента комплексной дуги поверхности численно равна длине элемента дуги сферической кривой, описанной концом единичного вектора образующей поверхности, если его начало было бы помещено в центре сферы.

Нетрудно видеть, что разность $\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R} = \Delta\boldsymbol{R}$ в пределе есть винт $d\boldsymbol{R}$, комплексный модуль которого равен dS.

В самом деле, так как $|\boldsymbol{R}| = R = 1$, то

$$\lim \sin (a, a') = \sin (dS) \approx dS = |\boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{R} + d\boldsymbol{R})| = \\ = |\boldsymbol{R} \times d\boldsymbol{R}| = dR,$$

а поэтому мы имеем

$$|d\boldsymbol{R}| = dS. \tag{5.32}$$

Прямую, проходящую через ось комплексного угла (a, a'), обозначим через b, точки пересечения прямой b с a и a' обозначим через A и A'; в пределе прямая b будет касаться поверхности в точке A, которую мы назовем центром образующей a. Прямую b назовем центральной касательной, ее единичный винт обозначим через $\boldsymbol{K}$.

Очевидно, что $\boldsymbol{K}$ можно получить как винтовое произведение

$$\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{R} + d\boldsymbol{R})}{\sin (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} + d\boldsymbol{R})} = \frac{\boldsymbol{R} \times d\boldsymbol{R}}{dS}; \qquad K = 1. \tag{5.33}$$

Итак, единичный винт $\boldsymbol{K}$ перпендикулярен к единичному винту $\boldsymbol{R}$. Наконец, построим вектор, лежащий на прямой c, перпендикулярной к a и b:

$$\mathbf{T} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dS}. \tag{5.34}$$

Его модуль, согласно сказанному выше, будет равен единице, поэтому $\mathbf{T}$ — единичный винт. Так как $\boldsymbol{R} = \text{const}$, то

$$\boldsymbol{R} \cdot \frac{d\boldsymbol{R}}{dS} = \boldsymbol{R} \cdot \mathbf{T} = 0,$$

т. е. винт $d\boldsymbol{R}/dS$ пересекает винт $\boldsymbol{R}$ под прямым углом; кроме того, умножив $\mathbf{T}$ скалярно на $\boldsymbol{K}$, получим

$$\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{K} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dS} \cdot \left(\boldsymbol{R} \times \frac{d\boldsymbol{R}}{dS}\right) = 0,$$

а следовательно, единичный винт $\mathbf{T}$ пересекает $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{K}$ под прямым углом в точке A. Прямую c — ось единичного винта $\mathbf{T}$ — назовем центральной нормалью к поверхности.

Геометрическое место, описываемое центральной нормалью, называется нормалией.

Геометрическое место центров образующей называется линией сжатия поверхности (или горловой линией).

Тройка единичных винтов **R**, **T** и **K** с общим началом в точке A образует трехгранник, который назовем трехгранником образующей. Нетрудно видеть, что для поверхности единичный винт **R** играет ту же роль, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ для сферической кривой; единичный винт **T** центральной нормали соответствует вектору $\boldsymbol{\tau}$ касательной к кривой, а единичный винт **K** центральной касательной — вектору $\boldsymbol{k}$ центральной нормали кривой.

Положив

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \dot{\boldsymbol{R}},$$

найдем для dS выражение

$$dS = dt\sqrt{|\dot{\boldsymbol{R}}|^2}. \tag{5.35}$$

Комплексной дугой поверхности будем называть величину

$$S = \int_{t_0}^{t} dt\sqrt{|\dot{\boldsymbol{R}}|^2}, \tag{5.36}$$

где перед корнем условимся брать знак плюс.

Пусть (рис. 24) c — центральная нормаль к поверхности, она же — образующая нормалии последней, т. е. также образующая некоторой поверхности. Следовательно, прямая c имеет свой центр, который обозначим буквой B; геометрическое место этих центров будет линией сжатия нормалии.

В точке B построим центральную нормаль к поверхности c и центральную касательную к этой же поверхности. Первую из них назовем главной нормалью поверхности, вторую — бинормалью поверхности; точку B — центром кривизны поверхности a в точке A.

Обозначим единичные винты главной нормали и бинормали соответственно через **N** и **B**, тогда в точке B мы будем иметь тройку единичных винтов **T**, **N**, **B**; три полупрямые, на которых они лежат, назовем естественным трехгранником поверхности. Этот трехгранник совершенно аналогичен такому же трехграннику для кривой.

Обозначим через

$$dS' = ds'e^{\omega p'} \tag{5.37}$$

элемент дуги, описываемой единичным винтом **T**, т. е. элемент дуги нормалии.

Так как главная нормаль есть в то же время центральная нормаль к нормалии, то для **N** и **T** существует соотношение, аналогичное соотношению (5.34) между **T** и $\boldsymbol{R}$, т. е.

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{dS'}, \quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{T} = 0. \tag{5.38}$$

Так как **B** — единичный винт центральной касательной к нормалии, то

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{T} = 0, \ \mathbf{B}\cdot\mathbf{N} = 0.$$

Определим относительное

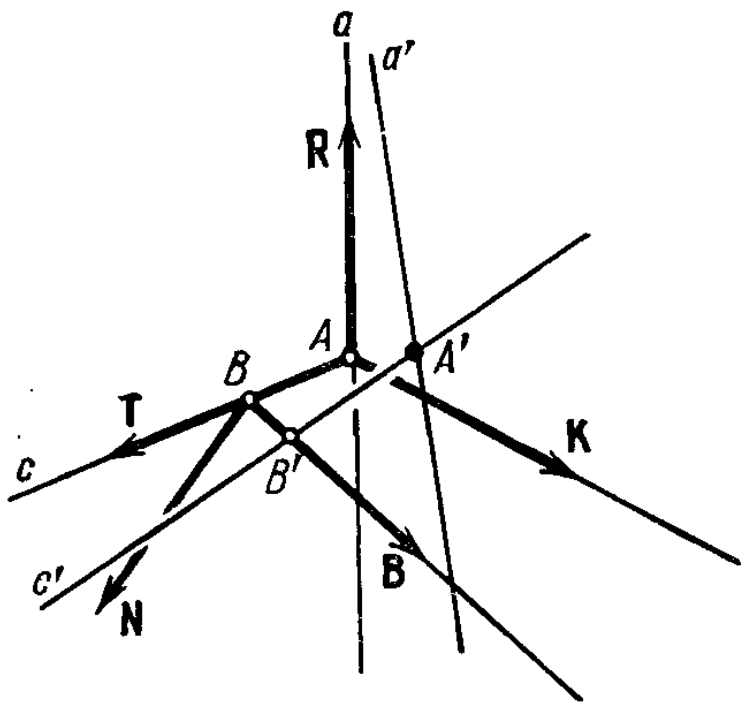

Рис. 24.

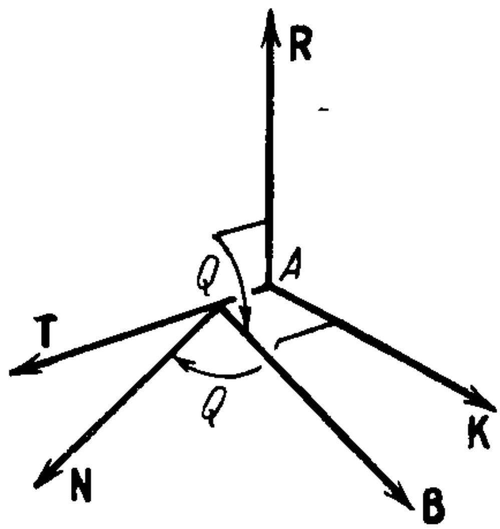

Рис. 25.

расположение трехгранника образующей и естественного трехгранника. Пусть (рис. 25)

$$Q = \angle(\boldsymbol{R}, \mathbf{B}) = \angle(\boldsymbol{K}, \mathbf{N})$$

— комплексный угол между единичными винтами образующей и бинормали, или, что то же, между единичными винтами центральной касательной и главной нормали. Поскольку трехгранник образующей и естественный трехгранник имеют общую ось — центральную нормаль, угол Q полностью характеризует относительный наклон одного трехгранника к другому.

Мы найдем, что

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{R}\cdot\mathbf{B}=\cos Q, \quad \boldsymbol{R}\cdot\mathbf{N}=-\sin Q, \\ \boldsymbol{K}\cdot\mathbf{B}=\sin Q, \quad \boldsymbol{K}\cdot\mathbf{N}=\cos Q. \end{array}\right\} \tag{5.39}$$

Назовем комплексный угол Q мерой кривизны поверхности. На основании формулы (5.38) имеем

$$\frac{d\mathbf{T}}{dS}=\frac{d\mathbf{T}}{dS'}\frac{dS'}{dS}=\mathbf{N}\frac{dS'}{dS}, \tag{5.40}$$

откуда, на основании (5.39) получаем

$$\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dS}=\boldsymbol{R}\cdot\mathbf{N}\frac{dS'}{dS}=-\frac{dS'}{dS}\sin Q.$$

Далее, дифференцируя по S формулу $\boldsymbol{R}\cdot\mathbf{T}=0$, получаем

$$\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dS}+\mathbf{T}\cdot\frac{d\boldsymbol{R}}{dS}=0,$$

а так как $\frac{d\boldsymbol{R}}{dS}=\mathbf{T}$, то имеем

$$-\frac{dS'}{dS}\sin Q+1=0,$$

откуда

$$\frac{dS'}{dS}=\frac{1}{\sin Q}. \tag{5.41}$$

Отношение dS'/dS представляет отношение скорости изменения единичного винта $\mathbf{T}$ центральной нормали к скорости изменения единичного винта $\boldsymbol{R}$ — образующей и характеризует кривизну поверхности. Можно поэтому положить

$$\frac{dS'}{dS}=\frac{1}{\mathrm{P}_1}, \tag{5.42}$$

где P_1 — радиус кривизны поверхности. Имеем

$$\mathrm{P}_1=\sin Q. \tag{5.43}$$

Теперь соотношение (5.40) может быть переписано так:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dS}=\frac{1}{\mathrm{P}_1}\mathbf{N}. \tag{5.44}$$

Дифференцируя по S соотношение

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N},$$

получим

$$\frac{d\mathbf{B}}{dS} = \frac{d\mathbf{T}}{dS} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{dS} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{dS}. \tag{5.45}$$

Так как винт, определяемый формулой (5.45), одновременно пересекает под прямым углом **B** и **T**, то его ось совпадает с осью **N**, поэтому можно написать

$$\frac{d\mathbf{B}}{dS} = \varepsilon \mathbf{N}. \tag{5.46}$$

С другой стороны, дифференцируя по S одно из равенств (5.39), получим

$$\frac{d}{dS}(\boldsymbol{R} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\boldsymbol{R}}{dS} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{R} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dS} = -\frac{dQ}{dS} \sin Q$$

или на основании (5.39) и (5.46)

$$\boldsymbol{R} \cdot \mathbf{N}\varepsilon = -\frac{dQ}{dS} \sin Q,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dS}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{B}}{dS} = \mathbf{N} \frac{dQ}{dS}. \tag{5.47}$$

Величина dQ/dS определяет быстроту изменения угла бинормали с образующей при движении вдоль поверхности и характеризует изгиб поверхности, аналогичный кручению или второй кривизне кривой. Примем по аналогии с (5.19),

$$\frac{1}{\mathrm{P}_2} = -\frac{dQ}{dS}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{dS} = -\frac{1}{\mathrm{P}_2} \mathbf{N}. \tag{5.48}$$

Дифференцируя далее по S равенство

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T},$$

получим

$$\frac{d\mathbf{N}}{dS} = \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{dS} + \frac{d\mathbf{B}}{dS} \times \mathbf{T} = \mathbf{B} \times \frac{\mathbf{N}}{\mathrm{P}_1} + \mathbf{T} \times \frac{\mathbf{N}}{\mathrm{P}_2} =$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{P}_1}\mathbf{T} + \frac{1}{\mathrm{P}_2}\mathbf{B}. \qquad (5.49)$$

Объединяя формулы (5.44), (5.48) и (5.49), мы получаем систему комплексных формул Френе для линейчатой поверхности

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{dS} &= \qquad\quad \frac{\mathbf{N}}{\mathrm{P}_1}, \\ \frac{d\mathbf{N}}{dS} &= -\frac{\mathbf{T}}{\mathrm{P}_1} + \frac{\mathbf{B}}{\mathrm{P}_2}, \\ \frac{d\mathbf{B}}{dS} &= \qquad -\frac{\mathbf{N}}{\mathrm{P}_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.50)$$

Формулы Френе для линейчатой поверхности характеризуют следующее движение естественного трехгранника: последний совершает комплексный поворот (вращение и скольжение) относительно единичного винта бинормали **B**, модуль производной комплексного угла которого по комплексной дуге поверхности равен величине кривизны поверхности, и комплексный поворот вокруг единичного винта центральной нормали **T**, модуль производной комплексного угла которого по комплексной дуге поверхности равен величине изгиба (второй кривизны) поверхности.

Для движения трехгранника образующей можно вывести формулы, аналогичные формулам Френе. Так, во-первых, мы имеем формулу (5.34); далее, выразив вектор **N** через векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{K}$

$$\mathbf{N} = -\boldsymbol{R}\sin Q + \boldsymbol{K}\cos Q,$$

на основании второй из формул Френе и соотношения (5.43) будем иметь

$$\frac{d\mathbf{T}}{dS} = \frac{\mathbf{N}}{\mathrm{P}_1} = \frac{\mathbf{N}}{\sin Q} = -\boldsymbol{R} + \boldsymbol{K}\operatorname{ctg} Q, \qquad (5.51)$$

а затем, дифференцируя равенство

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R} \times \mathbf{T},$$

найдем

$$\frac{dK}{dS} = \frac{dR}{dS} \times \mathbf{T} + R \times \frac{d\mathbf{T}}{dS} = R \times K \operatorname{ctg} Q = -\dot{\mathbf{T}} \operatorname{ctg} Q. \tag{5.52}$$

Объединяя (5.33), (5.51) и (5.52), получим систему соотношений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{dS} &= \quad \mathbf{T}, \\ \frac{d\mathbf{T}}{dS} &= -R + K \operatorname{ctg} Q, \\ \frac{dK}{dS} &= \quad -\mathbf{T} \operatorname{ctg} Q. \end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

Эта система дает указание относительно элементарного перемещения трехгранника образующей. Именно, это перемещение состоит из двух винтовых перемещений — одного dS относительно K и другого — $dS \operatorname{ctg} Q = dS^{*}$ относительно R. Если мы сложим эти два перемещения, а также учтем (5.41), то получим

$$K\,dS - R\,dS \operatorname{ctg} Q = -\mathbf{N}\,\frac{dS}{\sin Q} = -\mathbf{N}\,dS', \tag{5.54}$$

откуда видно, что элементарное перемещение трехгранника есть винтовое перемещение dS' относительно бинормали.

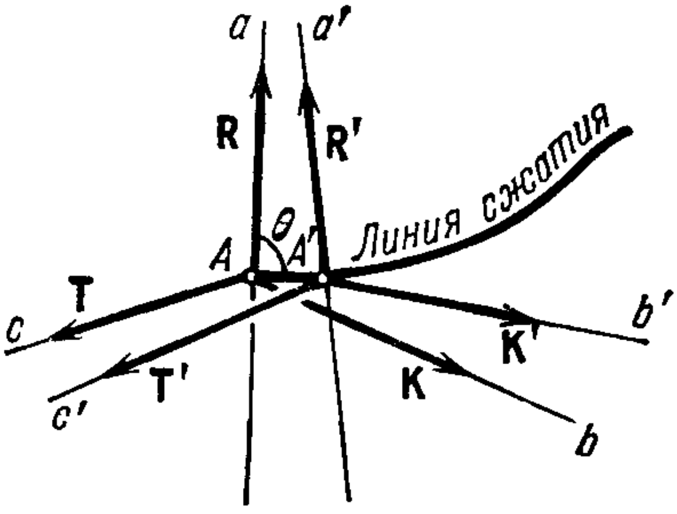

Рис. 26.

Элементарное движение образующей и центральной касательной поверхности можно представить следующим образом. Пусть R, $\mathbf{T}$, K и R', $\mathbf{T}'$, K' — единичные винты двух бесконечно близких трехгранников образующей поверхности (рис. 26). Вершины A и A' трехгранников — бесконечно близкие точки линии сжатия. Элемент $AA' = d\sigma$ — элемент линии сжатия, $\theta = \angle(R, \overrightarrow{AA'})$ — вещественный угол между центральной касательной и касательной к линии сжатия. Для совмещения фигуры $\boldsymbol{R}$, $\mathbf{T}$, $\boldsymbol{K}$ с фигурой $\boldsymbol{R}'\mathbf{T}'\boldsymbol{K}'$ необходимо, с точностью до бесконечно малых второго порядка, первую повернуть относительно $\boldsymbol{K}$ на комплексный угол dS, после чего $\boldsymbol{R}$ совпадет с $\boldsymbol{R}'$, а затем ее повернуть относительно $\boldsymbol{R}'$ на комплексный угол — $dS \operatorname{ctg} Q$.

Перемещение (линейное) по элементу AA' вдоль линии сжатия слагается из перемещений (линейных) вдоль $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{R}$, которые равны моментным частям винтовых перемещений

$$dS = ds e^{\omega p},\ dS^* = ds^* e^{\omega p^*},$$

поэтому

$$\frac{\text{мом}\,(dS^*)}{\text{мом}\,(dS)} = \operatorname{ctg}\theta = \frac{p^*\,ds^*}{p\,dS} = \frac{\left(p - \frac{q}{\sin q \cos q}\right) ds \operatorname{ctg} q}{p\,ds} = $$
$$= \operatorname{ctg} q - \frac{q^0}{p \sin^2 q}\,. \tag{5.55}$$

Формула (5.55) выражает связь между углом, образованным касательной к линии сжатия с центральной касательной, параметром распределения образующей и углом между образующей и бинормалью. Эта формула существенна для изучения аксоидов движущегося твердого тела.

Введя комплексные прямоугольные координаты единичных винтов $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$, на основании (5.50) мы можем написать три группы уравнений для девяти величин:

$$\mathrm{T}_x,\ \mathrm{T}_y,\ \mathrm{T}_z,\ \mathrm{N}_x,\ \mathrm{N}_y,\ \mathrm{N}_z,\ \mathrm{B}_x,\ \mathrm{B}_y,\ \mathrm{B}_z.$$

Каждая тройка из этих величин, соответствующая одному и тому же индексу, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dL}{dS} = \frac{M}{\mathrm{P}_1},\quad \frac{dM}{dS} = -\frac{L}{\mathrm{P}_1} + \frac{P}{\mathrm{P}_2},\quad \frac{dP}{dS} = -\frac{M}{\mathrm{P}_2}, \tag{5.56}$$

причем

$$L^2 + M^2 + P^2 = 1. \tag{5.57}$$

Введя по аналогии с (5.22) новую переменную

$$\Delta = \frac{L + iM}{1 + P}, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{5.58}$$

мы сведем систему (5.56) к одному комплексному уравнению типа Риккати, аналогичному уравнению (5.23):

$$\frac{d\Delta}{dS} + i\frac{\Delta}{\mathrm{P}_1} + i\frac{\Delta^2 - 1}{2\mathrm{P}_2} = 0. \tag{5.59}$$

Функции

$$S = S(t),\ Q = Q(t),\ \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_1(t),\ \mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_2(t) \tag{5.60}$$

должны быть известными; равенства (5.60) представляют внутренние уравнения линейчатой поверхности, не содержащие координат. Задание указанных функций определяет линейчатую поверхность с точностью до положения в пространстве.

Можно воспользоваться комплексными эйлеровыми углами Ψ, Θ и Φ, через которые выражаются компоненты векторов $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$, с помощью формул, подобных (5.25):

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \boldsymbol{i}(\cos\Psi\cos\Phi - \sin\Psi\sin\Phi\cos\Theta) + {}\\
&\quad + \boldsymbol{j}(\sin\Psi\cos\Phi + \cos\Psi\sin\Phi\cos\Theta) + \boldsymbol{k}\sin\Phi\sin\Theta,\\
\mathbf{N} &= -\boldsymbol{i}(\cos\Psi\sin\Phi + \sin\Psi\cos\Phi\cos\Theta) - {}\\
&\quad - \boldsymbol{j}(\sin\Psi\sin\Phi - \cos\Psi\cos\Phi\cos\Theta) + \boldsymbol{k}\cos\Phi\sin\Theta,\\
\mathbf{B} &= \boldsymbol{i}\sin\Psi\sin\Theta - \boldsymbol{j}\cos\Psi\sin\Theta + \boldsymbol{k}\cos\Theta.
\end{aligned}\right\} \tag{5.61}$$

Уравнение

$$\frac{dR}{dS} = \mathbf{T},$$

если взять комплексные прямоугольные координаты единичных винтов $\boldsymbol{R}$ и $\mathbf{T}$, приводит к системе

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{dS} &= \cos\Psi\cos\Phi - \sin\Psi\sin\Phi\cos\Theta,\\
\frac{dY}{dS} &= \sin\Psi\cos\Phi + \cos\Psi\sin\Phi\cos\Theta,\\
\frac{dZ}{dS} &= \sin\Phi\sin\Theta.
\end{aligned}\right\} \tag{5.62}$$

Воспользовавшись формулами Френе (5.50) и выражениями (5.61), взяв из них три независимых, а именно выражения для T_x, N_z и B_y через комплексные эйлеровы углы, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dS} &= \frac{1}{P_1}\frac{\sin\Phi}{\sin\Theta}, \\ \frac{d\Theta}{dS} &= \frac{1}{P_2}\cos\Phi, \\ \frac{d\Phi}{dS} &= \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2}\frac{\sin\Phi}{\operatorname{tg}\Theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.63)$$

Система уравнений (5.62) и (5.63) является системой Коши для неизвестных комплексных функций X, Y, Z, Ψ, Θ, Φ, аналогичной системе (5.26) и (5.27) для кривой. Правые части системы предполагаются регулярными функциями от S, и система допускает единственное регулярное решение

$$X = X(S),\ Y = Y(S),\ \ldots,\ \Phi = \Phi(S), \qquad (5.64)$$

удовлетворяющее данной системе и начальным условиям при $S = S_0$

$$X = X_0,\ Y = Y_0,\ \ldots,\ \Phi = \Phi_0. \qquad (5.65)$$

Задание системы Коши полностью определяет линейчатую поверхность, устанавливая ее начальную образующую и соответствующее положение начального естественного трехгранника.

Отметим, что приведенные уравнения можно истолковывать как геометрически, так и кинематически, в связи с чем они являются уравнениями, определяющими также положение твердого тела, находящегося в произвольном движении, с учетом данных, характеризующих его начальное положение.

Как видно из изложенного выше, имеется полное соответствие между геометрией кривой, лежащей на сфере единичного радиуса, и линейчатой поверхностью. Это соответствие вытекает из принципа перенесения, согласно которому при переходе к линейчатой поверхности точка кривой должна быть заменена прямой линией — образующей этой поверхности, а единичный радиус вектор кривой — винтом, лежащим на образующей, с наложенным на этот винт условием равенства его комплексного модуля единице (это условие одновременно выражает равенство единице модуля вектора винта и равенство нулю его параметра). Собственно, многие теоремы, относящиеся к теории линейчатой поверхности, можно не доказывать, так как они получаются из теорем, относящихся к сферической кривой, вышеуказанной заменой объектов.

В силу существующего соответствия имеется, хотя и с небольшими расхождениями, аналогия в терминах, относящихся к кривой и к поверхности.

Расхождения сводятся к следующему: касательной к кривой соответствует центральная нормаль к поверхности, а центральной нормали — центральная касательная к поверхности; кручению кривой соответствует изгиб поверхности. Ниже приводится таблица соответствующих геометрических образов для сферической кривой единичного радиуса и для линейчатой поверхности.

Кривая на сфере единичного радиуса	Обозначение элемента	Линейчатая поверхность	Обозначение элемента
Точка кривой	a	Образующая поверхности	a
Радиус-вектор точки .	$\mathbf{r}$	Единичный винт (вектор) образующей	$\boldsymbol{R}$
Касательная	τ	Центральная нормаль . .	$\mathbf{T}$
Центральная нормаль	$\boldsymbol{k}$	Цеитральная касательиая	$\boldsymbol{K}$
Главиая нормаль . .	ν	Главная нормаль	$\mathbf{N}$
Биирмаль	β	Бинормаль	$\mathbf{B}$
Элемент дуги кривой	ds	Элемент комплексной дуги поверхиости	dS
Элемент дуги касательной	ds'	Элемент комплексной дуги центральной нормалии	dS'
Радиус кривизны . .	ρ_1	Радиус кривизны	P_1
Радиус кручения . .	ρ_2	Радиус изгиба	P_2

Если взять главные части всех формул, относящихся к линейчатой поверхности, то они совпадут с соответствующими им формулами сферической кривой, эта сферическая кривая будет описываться концом единичного вектора, начало которого находится в постоянной точке O и который при соответствующих значениях t будет параллелен единичному вектору образующей данной поверхности.

§ 4. Кинематика прямой и твердого тела

Пусть прямая a с единичным винтом $\boldsymbol{R}$ движется в пространстве, описывая некоторую поверхность, которую назовем траекторией прямой a. Пусть различные положения прямой и, следовательно, единичного винта $\boldsymbol{R}$ будут функциями времени t.

Скоростью прямой a назовем винт

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}. \tag{5.66}$$

Ускорением прямой a назовем винт

$$\boldsymbol{W} = \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}. \tag{5.67}$$

Преобразовав выражение (5.66), мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dS}\frac{dS}{dt} = \mathbf{T}\frac{dS}{dt};\\ |\boldsymbol{V}| &= V = \frac{dS}{dt}, \quad \boldsymbol{V} = \mathbf{T}V. \end{aligned}\right\} \tag{5.68}$$

Отсюда следует теорема.

Теорема 15. *Скорость прямой есть винт, комплексный модуль которого равен производной по времени от комплексного элемента S траектории, а осью служит центральная нормаль к траектории. Параметр скорости равен параметру прямой.*

Преобразуем выражение (5.67)

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{T}V) = \mathbf{T}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\mathbf{T}}{dS}\frac{dS}{dt} = \\ = \mathbf{T}\frac{dV}{dt} + V^2\frac{d\mathbf{T}}{dS}.$$

На основании формулы (5.44) для производной единичного винта $\mathbf{T}$ мы получим

$$\boldsymbol{W} = \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \mathbf{T}\frac{dV}{dt} + V^2\frac{\mathbf{N}}{\mathrm{P}_1}. \tag{5.69}$$

Следовательно, доказана теорема.

Теорема 16. *Ускорение прямой представляет сумму двух винтов: комплексный модуль одного из них равен произ-*

водной по времени от модуля скорости прямой, а осью служит центральная нормаль, комплексный модуль второго из них равен квадрату модуля скорости, деленному на радиус кривизны поверхности, а осью служит главная нормаль.

Формула (5.69) является аналогом известной формулы о разложении ускорения точки на касательную и нормальную составляющие.

Пусть некоторое твердое тело в момент t обладает мгновенным движением, характеризующимся винтом $\boldsymbol{U}$, единичный винт которого будет $\boldsymbol{E}$, модуль U, а параметр p. Таким образом, мгновенный кинематический винт тела будет

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}U = \boldsymbol{E}ue^{\omega p}.$$

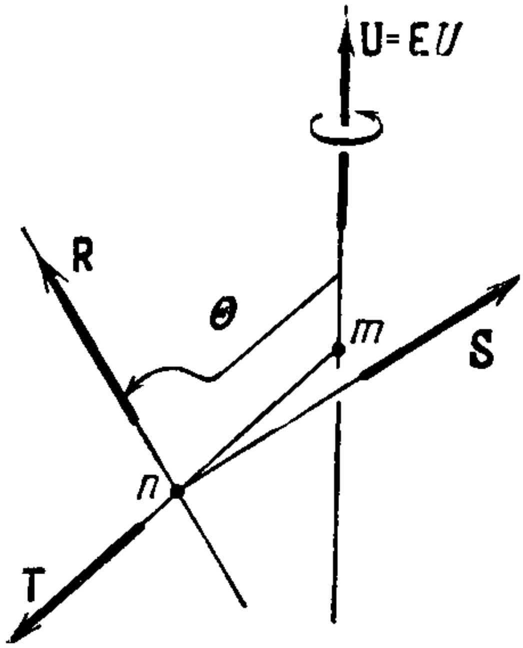

Рис. 27.

Определим скорость произвольной прямой, принадлежащей телу. Пусть единичный винт этой прямой будет $\boldsymbol{R}$.

Обозначим комплексный угол между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{R}$ (рис. 27) через Θ; пусть осью угла Θ будет прямая, встречающая оси $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{R}$ соответственно в точках m и n, и пусть ее единичный винт будет $\mathbf{T}$. Через точку n проведем прямую, перпендикулярную к mn и к $\boldsymbol{R}$, и обозначим единичный винт этой прямой через $\boldsymbol{S}$.

Теперь определим составляющие винта U по осям $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$. Эти составляющие вследствие перпендикулярности соответствующих единичных векторов в сумме дадут винт $\boldsymbol{U}$ (см. гл. III). Имеем

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}' + \boldsymbol{U}'' = \boldsymbol{R}U' + \boldsymbol{S}U'' = \boldsymbol{R}U\cos\Theta + \boldsymbol{S}U\sin\Theta.$$

Первый из составляющих винтов не изменит положения оси, т. е. оси рассматриваемой прямой, а второй сообщит этой прямой винтовое перемещение относительно оси $\boldsymbol{S}$, характеризующееся комплексным элементом

$$dS = ds + \omega\, ds^0 = U\sin\Theta\, dt,$$

откуда следует, что комплексный модуль скорости прямой тела

$$V = \left|\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\right| = \frac{dS}{dt} = U\sin\Theta.$$

Из сделанного построения следует, что если $\boldsymbol{R}$ рассматривать как единичный винт образующей элемента поверхности, описываемой прямой, то $\boldsymbol{S}$ — единичный винт центральной касательной, а $\mathbf{T}$ — единичный винт центральной нормали. Но ось винта скорости $\boldsymbol{V}$, как известно, совпадает с центральной нормалью, т. е. с осью угла между осями винтов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{R}$, а комплексный модуль винтового произведения этих винтов будет $U\sin\Theta$. Следовательно,

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{R} = \mathbf{T}U\sin\Theta = \mathbf{T}ue^{\omega p}\sin\Theta, \qquad (5.70)$$

откуда вытекает следующая теорема.

Теорема 17. *При мгновенном винтовом движении твердого тела, характеризующемся винтом $\boldsymbol{U}$, скорость любой прямой тела есть винт, равный винтовому произведению винта $\boldsymbol{U}$ на единичный винт $\boldsymbol{R}$ этой прямой.*

Следствие 1. Центральная нормаль к траектории прямой встречает под прямым углом ось мгновенного винта U. Центральные нормали траектории всех прямых тела в момент t образуют щетку.

Следствие 2. Параметр прямой, т. е. параметр распределения ее как образующей траектории, определяется формулой

$$p' = \frac{ds^0}{ds} = p + \theta^0 \operatorname{ctg}\theta. \qquad (5.71)$$

Эта формула получается из формулы (5.70), если приравнять параметры обеих частей.

Пусть U — мгновенный винт, характеризующий движение тела A относительно неподвижного пространства, и пусть $\boldsymbol{R}$ — мгновенный винт, характеризующий движение некоторого тела B относительно тела A. Представим себе две системы координат: одну неподвижную, а другую, связанную с движущимся телом A. Найдем связь между производной от винта $\boldsymbol{R}$ относительно неподвижной системы координат, т. е. абсолютной производной, и производной от этого винта в системе координат, связанной с движущимся телом A, т. е. относительной производной (или «кажущейся» производной, какой она представляется наблюдателю, находящемуся на теле A).

Эта задача решается непосредственным применением принципа перенесения к известной теореме об абсолютной и относительной производных от вектора $\boldsymbol{r}$. Согласно этой теореме существует соотношение

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r},$$

где d/dt — знак абсолютной производной, а d'/dt — знак производной по отношению к системе координат, вектор угловой скорости вращения которой есть $\boldsymbol{u}$. Вектор $\boldsymbol{r}$ может изображать различные физические величины. В частности, если упомянутая подвижная система координат связана с некоторым твердым телом a, вращающимся с угловой скоростью $\boldsymbol{u}$, то вектор $\boldsymbol{r}$ может изображать угловую скорость другого тела b относительно тела a (при условии, что векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{r}$ имеют общую точку). В таком случае теорема дает связь между абсолютным приращением вектора $\boldsymbol{r}$ и его приращением по отношению к движущемуся телу a.

Заменяя в написанной формуле векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{u}$ винтами $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{U}$ и имея в виду, что условия поставленной задачи в точности соответствуют условиям указанной теоремы с заменой векторов винтами (или заменой чистых вращений винтовыми перемещениями), мы можем написать искомое соотношение

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\frac{d'\boldsymbol{R}}{dt}+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{R}. \tag{5.72}$$

Здесь $d\boldsymbol{R}/dt$ — абсолютная, а $d'\boldsymbol{R}/dt$ — относительная производная от винта $\boldsymbol{R}$.

В том частном случае, когда винт $\boldsymbol{R}$ является неизменным в системе координат, связанной с твердым телом A, формула приобретает вид

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{R}, \tag{5.73}$$

т. е. производная от мгновенного винта $\boldsymbol{R}$, сохраняющего неизменное значение по отношению к движущемуся телу, мгновенный винт которого есть $\boldsymbol{U}$, выражается винтовым произведением $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{R}$. Мы снова приходим к теореме 17 — кинематической интерпретации винтового произведения двух винтов.

Если винт $\boldsymbol{U}$ задан комплексными прямоугольными координатами U_x, U_y, U_z, а винт $\boldsymbol{R}$ — соответственно координатами R_x, R_y, R_z, то выражения для комплексных координат скорости изменения винта $\boldsymbol{R}$ (или прямой твердого тела) будут

$$V_x = U_y R_z - U_z R_y,\ V_y = U_z R_x - U\ R_z,\ V_z = U_x R_y - U_y R_x. \tag{5.74}$$

Эти формулы являются обобщением известных формул Эйлера для проекции скорости точки тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

При движении твердого тела в каждый момент времени существует прямая, относительно которой происходит мгновенное винтовое движение тела. Эта прямая называется мгновенной винтовой осью. При непрерывном движении тела положение мгновенной винтовой оси меняется и она описывает в пространстве линейчатую поверхность — неподвижный аксоид. В то же время прямая тела, совпадающая в момент t с указанной прямой, двигаясь вместе с телом, описывает в нем другую линейчатую поверхность — подвижный аксоид.

Известно, что при движении тела в каждый момент подвижный и неподвижный аксоиды a_2 и a_1 касаются друг друга вдоль общей образующей a_{12} — мгновенной винтовой оси. В момент t две бесконечно близкие образующие a_2 и a_2' подвижного аксоида сорпадают с двумя бесконечно близкими образующими a_1 и a_1' неподвижного аксоида. Если

$$dS_1 = \angle\,(a_1, a_1'),\quad dS_2 = \angle\,(a_2, a_2'),$$

то, как известно,

$$dS_1 = dS_2 = dS = dse^{\omega p},$$

т. е. элементы поверхностей обоих аксоидов равны; кроме того, образующие a_1 и a_2 имеют общий центр A. Как известно, далее, в течение промежутка времени dt, следующего за моментом t, подвижной аксоид скользит своей образующей a_2' по образующей a_1' неподвижного аксоида до совпадения их центров A_2' и A_1' и вращается вокруг a' до совпадения соответствующих трехгранников образующих.

Пусть (рис. 28) b_{12} — общая центральная касательная аксоидов в момент t, b_1', b_2' — центральные касательные к ним в точках A_1' и A_2', а дуга

$$dW = dwe^{\omega\tau}$$

— элементарное винтовое перемещение подвижного аксоида в момент $t + dt$ относительно общей образующей a_1', a_2'. Если dS_2 и dS_1 относятся к подвижному и неподвижному аксоидам, то, учитывая элементарные перемещения трехгранников образующих, мы будем иметь

$$dW = dS_1 \operatorname{ctg} Q_1 \pm \pm dS_2 \operatorname{ctg} Q_2 = dwe^{\omega\pi} = = dse^{\omega p} (\operatorname{ctg} Q_1 \pm \operatorname{ctg} Q_2),$$

где Q_1 и Q_2 — углы между образующими и бинормалями аксоидов.

Взяв параметры обеих частей, получим

$$\pi = p + P(\operatorname{ctg} Q_1 \pm \operatorname{ctg} Q_2) = = p - \frac{\dfrac{q_1^0}{\sin^2 q_1} \pm \dfrac{q_2^0}{\sin^2 q_2}}{\operatorname{ctg} q_1 \pm \operatorname{ctg} q_2}.$$

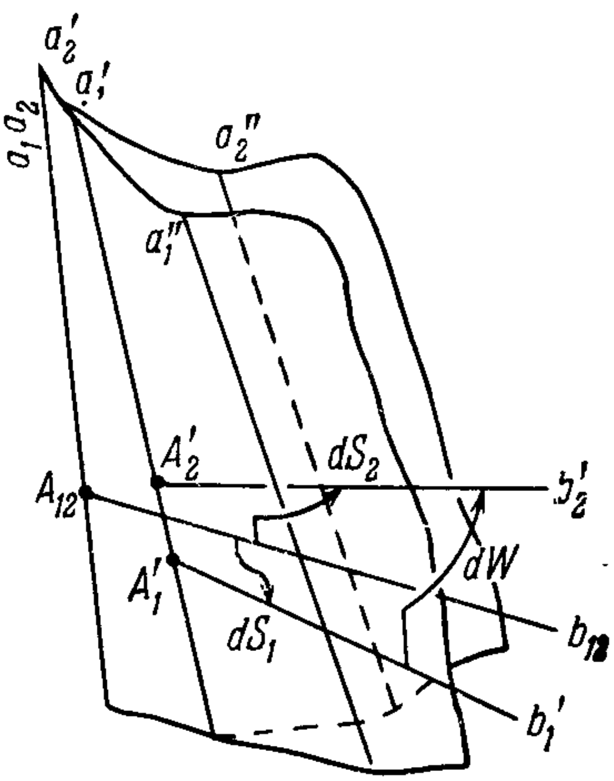

Рис. 28.

Подставим сюда значения q_1^0 и q_2^0, выраженные через $q_{1,\,2}$, $\theta_{1,\,2}$ на основании выведенной ранее формулы (5.55), получим

$$\pi = p \frac{\operatorname{ctg} \theta_1 \pm \operatorname{ctg} \theta_2}{\operatorname{ctg} q_1 \pm \operatorname{ctg} q_2}, \tag{5.75}$$

после чего можно сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 18. *При произвольном движгнии тела его подвижной аксоид катится по неподвижному аксоиду так,* *что происходит непрерывное совмещение равных попарно последовательных элементов комплексных дуг поверхностей одного и другого аксоидов. В каждый момент осью мгновенного винта служит общая образующая аксоидов, а параметр* π *винта зависит от:* а) *параметра* p *общей образующей* a_{12}, б) *углов* q_1 *и* q_2 *между образующими и бинормалями аксоидов,* в) *углов* θ_1 *и* θ_2 *между образующими и касательными к линиям сжатия аксоидов.*

§ 5. Фазовое изображение движения системы с двумя степенями свободы с помощью линейчатой поверхности

При изображении на фазовой плоскости движения системы с одной степенью свободы используются две величины — координаты точки на плоскости, изображающие

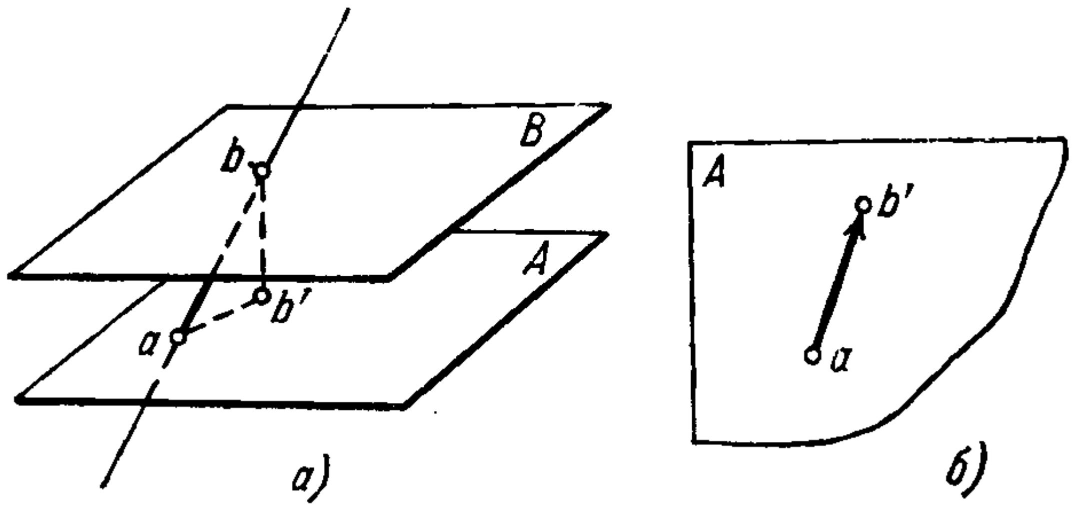

Рис. 29.

соответственно обобщенную координату системы q и ее обобщенную скорость $\dot{q}$. Для аналогичного изображения системы с двумя степенями свободы необходимо четырехмерное фазовое пространство.

В качестве четырехмерного фазового пространства можно использовать пространство прямых линий, ибо каждая прямая в пространстве определяется четырьмя величинами.

Проще всего поступить следующим образом[1]). Вообразим в пространстве (рис. 29, *а*) две плоскости A и B на рас-

[1]) Здесь используется слегка видоизмененный способ изображения точки четырехмерного пространства, предложенный Е. С. Федоровым [33].

стоянии H друг от друга. Эти плоскости, пересекая произвольную прямую пространства, вырезают из прямой отрезок ab, заключенный между A и B, который мы будем считать вектором, идущим от точки a к точке b. Плоскость A примем за плоскость xy, а ось z направим от A к B. Плюккеровыми координатами вектора $\overrightarrow{ab}$, который является скользящим вектором, будут проекции и моменты относительно осей

$$x,\ y,\ H,\ H\eta,\ -H\xi,\ \xi y-\eta x, \tag{5.76}$$

где ξ и η — координаты точки a в плоскости A.

Между записанными величинами существует тождественное соотношение, выражающее перпендикулярность вектора и момента,

$$xH\eta-yH\xi+H(\xi y-\eta x)=0. \tag{5.77}$$

Поскольку величина H известна и играет роль масштаба, координатами вектора $\overrightarrow{ab}$ будут служить четыре числа

$$x,\ y,\ x^0=H\eta,\quad y^0=-H\xi. \tag{5.78}$$

Примем эти числа в качестве фазовых координат системы с двумя степенями свободы, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x&=q_1, & y&=q_2,\\ x^0&=H\eta=\dot q_1, & y^0&=-H\xi=\dot q_2. \end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

В таком случае при движении системы с двумя степенями свободы каждое состояние системы, характеризующееся двумя обобщенными координатами q_1, q_2 и двумя обобщенными скоростями $\dot q_1$, $\dot q_2$, будет соответствовать вектору $\overrightarrow{ab}$, который может быть изображен составляющей ab' в плоскости A (рис. 29, *б*). Если происходит движение системы при определенных начальных данных, то состояние системы будет меняться так, что вектор $\overrightarrow{ab}$ будет описывать некоторую линейчатую поверхность — аналог фазовой кривой системы с одной степенью свободы. При других начальных данных возможны другие линейчатые поверхности, вся их совокупность представит семейство фазовых поверхностей.

Координаты вектора $\overrightarrow{ab}$ можно представить в комплексном виде

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \omega x^0 = x + \omega H\eta, \\ Y &= y + \omega y^0 = y - \omega H\xi, \end{aligned}\right\} \tag{5.80}$$

и эти координаты будут служить изображением комплексных координат системы

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{q}_1 &= q_1 + \omega\dot{q}_1, \\ \overset{*}{q}_2 &= q_2 + \omega\dot{q}_2. \end{aligned}\right\} \tag{5.81}$$

Любопытно, что комплексные координаты голономной механической системы удовлетворяют уравнению Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\overset{*}{q}}_i}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial \overset{*}{q}_i} = \overset{*}{Q}_i, \tag{5.82}$$

где

$$T^* = T + \omega\dot{T}, \qquad Q^* = Q + \omega\dot{Q}. \tag{5.83}$$

В этом можно убедиться, если записать произвольную функцию нескольких комплексных переменных, зависящих от времени, в комплексной форме

$$\begin{aligned} &f(\overset{*}{x}, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n) = \\ &\quad = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \omega\left(\dot{x}_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dot{x}_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \dot{x}_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \\ &\qquad\qquad = f + \omega\frac{df}{dt} = f + \omega\dot{f}. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Кроме того, любая комплексная величина вида $x + \omega\dot{x}$ может рассматриваться как функция комплексного параметра («комплексного времени»)

$$x(t) + \omega\dot{x}(t) = x(t + \omega), \tag{5.85}$$

что вытекает из общего выражения функции комплексной переменной.

Если q_1^*, q_2^* выражены через параметр t, то уравнения

$$q_1^* = q_1^*(t), \quad q_2^* = q_2^*(t). \tag{5.86}$$

представят параметрические уравнения фазовой поверхности, если же исключить вещественный параметр, то уравнение

$$f(\overset{*}{q_1}, \overset{*}{q_2}) = f(q_1 + \omega\dot{q}_1,\ q_2 + \omega\dot{q}_2) \tag{5.87}$$

будет уравнением фазовой поверхности в комплексных координатах движения.

На изображающей плоскости A фазовая поверхность представится в виде проекции — изменяющейся области отрезков ab' (рис. 30).

Если в какой-нибудь момент времени t будут выполняться равенства

$$q_1 = \dot{q}_1 = q_2 = \dot{q}_2 = 0, \tag{5.88}$$

то состояние системы будет соответствовать «особой» точке; при этом область, изображающая фазовую поверхность, будет стягиваться в одну точку — начало координат. В данном случае можно было бы построить геометрическую теорию особых точек и проследить за поведением семейства фазовых поверхностей в окрестности особой точки, однако мы на этом останавливаться не будем.

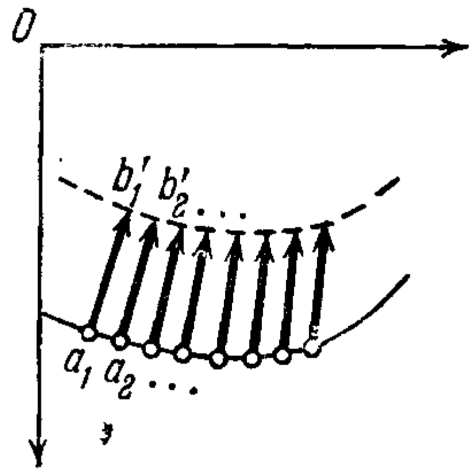

Рис. 30.

В качестве примера рассмотрим движение, фазовой поверхностью которого служит поверхность, образованная равномерным вращением некоторой прямой, пересекающей ось z и составляющей с плоскостью xy постоянный, достаточно малый угол δ, и одновременным скольжением этой прямой вдоль оси z по гармоническому закону таким образом, что за один полный оборот происходит два периода колебания вдоль оси z. Это будет поверхность типа цилиндроида. Область, изображающая соответствующую фазовую поверхность, получится пересечением данной поверхности плоскостью A и параллельной ей плоскостью B, расположенной на высоте H, а затем проектированием ее на плоскость A.

Имеем координаты прямой — образующей поверхности

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \omega x^0 = H \operatorname{ctg} \delta \cos \Phi = H \operatorname{ctg} \delta (\cos \varphi - \omega \varphi^0 \sin \varphi), \\ Y &= y + \omega y^0 = H \operatorname{ctg} \delta \sin \Phi = H \operatorname{ctg} \delta (\sin \varphi + \omega \varphi^0 \cos \varphi), \end{aligned}\right\} \tag{5.89}$$

где $\Phi = \varphi + \omega\varphi^0$ — комплексный угол между горизонтальной проекцией образующей и осью z.

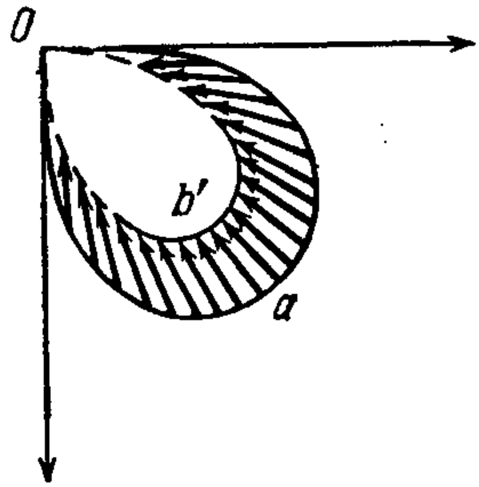

Рис. 31.

Для цилиндроида (см. гл. III)

$$\varphi^0 = K \sin 2\varphi,$$

где K — постоянная. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \omega x^0 = \\ &= H \operatorname{ctg} \delta (\cos \varphi - \omega K \sin 2\varphi \sin \varphi), \\ Y &= y + \omega y^0 = \\ &= H \operatorname{ctg} \delta (\sin \varphi + \omega K \sin 2\varphi \cos \varphi). \end{aligned}\right\} \tag{5.90}$$

Для движения, изображаемого принятой поверхностью, будем иметь

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\operatorname{ctg} \varphi, \quad \frac{q_2}{q_1} = \operatorname{tg} \varphi,$$

отсюда

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{q_1}{q_2}, \quad q_2 \, dq_2 + q_1 \, dq_1 = 0,$$

следовательно,

$$q_1^2 + q_2^2 = R^2 = \text{const}.$$

Кроме того,

$$\frac{dq_1}{dt} = -HK \operatorname{ctg} \delta \sin 2\varphi \sin \varphi.$$

С другой стороны,

$$q_1 = R \cos \varphi, \quad \frac{dq_1}{dt} = -R\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

поэтому

$$-HK \operatorname{ctg} \delta \sin 2\varphi \sin \varphi = -R\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

а следовательно,

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{HK}{R}\operatorname{ctg}\delta\sin 2\varphi, \quad \ln|\operatorname{tg}\varphi| = \frac{2HK}{R}\operatorname{ctg} t + \ln C,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left[C\exp\left(\frac{2HK}{R}\operatorname{ctg}\delta\right)t\right].$$

Отсюда решение

$$q_1 = R\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{1 + C^2\exp\frac{4HK\operatorname{ctg}\delta}{R}t}},$$

$$q_2 = \frac{CR\exp\frac{2HK\operatorname{ctg}\delta}{R}t}{\sqrt{1 + C^2\exp\frac{4HK\operatorname{ctg}\delta}{R}t}}. \tag{5.91}$$

Фазовая поверхность располагается в области $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (рис. 31).

§ 6. Комплексные скалярные функции и винт-функции винтового аргумента

В нижеследующем изложении будет показано, каким образом известные понятия скалярной функции и вектор-функции векторного аргумента распространяются на функции винтового аргумента. Предполагается, что читатель знаком с основными определениями и формулами теории скалярного и векторного поля.

Здесь, как и в предыдущих главах, мы будем исходить из задания винтов с помощью моторов, отнесенных к одной общей, раз и навсегда выбранной точке приведения O.

Пространство моторов $(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i^0)$ с общим началом всех $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}_i^0$ в точке O является в то же время пространством пар точек — концов векторов $\boldsymbol{r}_i$ и моментов $\boldsymbol{r}_i$, а также пространством комплексных векторов $\boldsymbol{r}_i + \omega\boldsymbol{r}_i^0$. Так как каждому мотору $(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i^0)$ можно привести в соответствие вполне определенный винт $\boldsymbol{R}_i$, то указанному пространству взаимно однозначным образом соответствует пространство винтов $\boldsymbol{R}_i$, каждый элемент которого определяется своей осью, вектором и параметром. Пусть каждому винту $\boldsymbol{R}_i$ будет отнесено по некоторому закону некоторое число — комплексный скаляр. Функцию, определяющую это отнесение, назовем комплексной скалярной функцией $F(\boldsymbol{R})$ винта $\boldsymbol{R}$.

Введем следующее определение: комплексная скалярная функция винта $\boldsymbol{R}$ есть то же, что функция соответствующего мотора $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^0)$ в точке приведения O, эквивалентного данному винту. Выражая мотор комплексным вектором, будем иметь

$$F(\boldsymbol{R}) = F(\boldsymbol{r} + \omega \boldsymbol{r}^0), \tag{5.92}$$

и, следовательно, функция винта сводится к функции комплексного вектора.

Чтобы установить некоторые свойства определяемой функции, выразим аргумент через комплексные координаты векторов в системе прямоугольных координат с началом в точке O, а затем применим формулы для функций комплексного скалярного аргумента, приведенные в главе II. Тем самым мы введем здесь поставленное ранее условие дифференцирования функции комплексного скалярного аргумента, а именно независимость производной от направления дифференцирования. Иными словами, условие «аналитичности».

Комплексные координаты винта и соответственно мотора, отнесенного к точке O, будут

$$R_x = r_x + \omega r_x^0, \quad R_y = r_y + \omega r_y^0, \quad R_z = r_z + \omega r_z, \tag{5.93}$$

где r_x, r_y, r_z, r_x^0, r_y^0, r_z^0 — шесть вещественных плюккеровых координат винта. Развертывание функции дает

$$\widetilde{F}(R_x, R_y, R_z) = \widetilde{F}(r_x + \omega r_x^0, r_y + \omega r_y^0, r_z + \omega r_z^0) =$$
$$= \widetilde{F}(r_x, r_y, r_z) + \omega\left(r_x^0 \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r_x} + r_y^0 \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r_y} + r_z^0 \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r_z}\right).$$

Мы сначала положим для простоты, что функция $\widetilde{F}$ становится вещественной, когда координаты вещественны, поэтому $\widetilde{F}(r_x, r_y, r_z)$ — вещественная величина.

Переходя обратно к векторному обозначению, найдем

$$F(\boldsymbol{R}) = F(\boldsymbol{r}) + \omega \boldsymbol{r}^0 \cdot \nabla F(\boldsymbol{r}) = F(\boldsymbol{r}) + \omega \boldsymbol{r}^0 \cdot \operatorname{grad} F(\boldsymbol{r}). \tag{5.94}$$

В формуле (5.94) символ ∇ обозначает известный оператор Гамильтона.

Пусть теперь каждому винту $\boldsymbol{R}_i$ будет отнесен другой винт. Функцию, определяющую это отнесение, назовем винт-функцией $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ винта $\boldsymbol{R}$. Как это уже было сказано, каждый винт $\boldsymbol{R}_i$ однозначно определяет мотор или комплексный вектор в точке O, поэтому определяемая здесь винт-функция одновременно является отнесенной к точке O мотор-функцией мотора, соответствующего винту-аргументу, приведенному к точке O.

Таким образом, мы будем иметь

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r} + \omega \boldsymbol{r}^0), \tag{5.95}$$

и снова функция сводится к функции вектора.

Используя координатные выражения для аргумента $\boldsymbol{R}$ и функции $\boldsymbol{F}$, получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{i}R_x + \boldsymbol{j}R_y + \boldsymbol{k}R_z) &= \boldsymbol{i}F_x(R_x, R_y, R_z) + \boldsymbol{j}F_y(R_x, R_y, R_z) + \\ &+ \boldsymbol{k}F_z(R_x, R_y, R_z) = \boldsymbol{i}F_x(r_x, r_y, r_z) + \boldsymbol{j}F_y(r_x, r_y, r_z) + \\ &+ \boldsymbol{k}F_z(r_x, r_y, r_z) + \omega\left[\boldsymbol{i}\left(r_x^0 \frac{\partial F_x}{\partial r_x} + r_y^0 \frac{\partial F_x}{\partial r_y} + r_z^0 \frac{\partial F_x}{\partial r_z}\right) + \right. \\ &+ \boldsymbol{j}\left(r_x^0 \frac{\partial F_y}{\partial r_x} + r_y^0 \frac{\partial F_y}{\partial r_y} + r_z^0 \frac{\partial F_y}{\partial r_z}\right) + \\ &\left. + \boldsymbol{k}\left(r_x^0 \frac{\partial F_z}{\partial r_x} + r_y^0 \frac{\partial F_z}{\partial r_y} + r_z^0 \frac{\partial F_z}{\partial r_z}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.96}$$

Полагаем, как в предыдущем случае, что функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ обращается в вектор с началом в точке O, когда $\boldsymbol{R}$ обращается в $\boldsymbol{r}$, т. е. в вектор с началом в точке O. Поэтому $\boldsymbol{i}F_x(r_x, r_y, r_z)$, $\boldsymbol{j}F_y(r_x, r_y, r_z)$ и $\boldsymbol{k}F_z(r_x, r_y, r_z)$ — суть векторы, начало которых находится в точке O.

Выражение в квадратных скобках может быть представлено в виде

$$\left[(\boldsymbol{i}r_x^0 + \boldsymbol{j}r_y^0 + \boldsymbol{k}r_z^0)\cdot\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial r_x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial r_y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial r_z}\right)\right](\boldsymbol{i}F_x + \boldsymbol{j}F_y + \boldsymbol{k}F_z). \tag{5.97}$$

Переходя к векторной форме, получим

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + \omega(\boldsymbol{r}^0 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}). \tag{5.98}$$

Выражение $(\boldsymbol{r}^0\cdot\nabla)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ представляет собой производную от вектора $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ по направлению вектора $\boldsymbol{r}^0$, умноженную на величину вектора $\boldsymbol{r}^0$.

Рассматривая выражения (5.94) и (5.98) для комплексной скалярной функции и для винт-функции, мы можем отметить следующие особенности этих выражений: во-первых, главная часть функции равна функции главной части винта (т. е. его вектора), а во-вторых, функция винта полностью определяется функцией его главной части.

Отсюда следует, что если для двух комплексных скалярных функций $F(\boldsymbol{R})$ и $\Phi(\boldsymbol{R})$ и двух винт-функций $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ и $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R})$ известны тождественные равенства

$$F(\boldsymbol{r})\equiv\Phi(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\equiv\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}),$$

то из них вытекают тождественные равенства

$$F(\boldsymbol{R})\equiv\Phi(\boldsymbol{R}),\quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})\equiv\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R}).$$

Следовательно, если функции F и $\boldsymbol{F}$ заданы аналитическими выражениями от координат вектора $\boldsymbol{r}$, то все тождественные соотношения, существующие в области таких функций, сохраняют силу, если вещественные координаты вектора $\boldsymbol{r}$ заменить комплексными, т. е. если вектор $\boldsymbol{r}$ заменить винтом $\boldsymbol{R}$.

Рассмотрим оператор ∇^*, аналогичный оператору ∇ и имеющий выражение

$$\nabla^*=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial R_x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial R_y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial R_z}. \tag{5.99}$$

Сделав в (5.99) подстановку

$$R_x=r_x+\omega r_x^0,\quad R_y=r_y+\omega r_y^0,\quad R_z=r_z+\omega r_z^0, \tag{5.100}$$

получим

$$\nabla^*=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial r_x}-\omega\frac{\partial}{\partial r_x}\frac{\partial r_x^0}{\partial r_x}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial r_y}-\omega\frac{\partial}{\partial r_y}\frac{\partial r_y^0}{\partial r_y}\right)+$$
$$+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial r_z}-\omega\frac{\partial}{\partial r_z}\frac{\partial r_z^0}{\partial r_z}\right).$$

Полагая, что r_x^0, r_y^0, r_z^0 не зависят от r_x, r_y, r_z, мы найдем, что $\nabla^*=\nabla$, т. е. что «комплексный» оператор Гамильтона — тот же, что вещественный.

Применяя этот оператор к комплексной скалярной функции винтового аргумента, получим

$$\operatorname{grad} F(\boldsymbol{R}) = \nabla F(\boldsymbol{R}) = \nabla F(\boldsymbol{r}) + \omega\nabla[\boldsymbol{r}^0\cdot\nabla F(\boldsymbol{r})]. \quad (5.101)$$

Для винт-функции винтового аргумента будем иметь

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + \omega\nabla\cdot[(\boldsymbol{r}^0\cdot\nabla)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})], \quad (5.102)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + \omega\nabla\times[(\boldsymbol{r}^0\cdot\nabla)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})]. \quad (5.103)$$

Из выражений (5.101), (5.102), (5.103) видно, что дифференцирование функций винта сводится к применению операции ∇ к вещественной функции — главной части рассматриваемой функции.

Если для двух функций $F(\boldsymbol{R})$ и $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R})$ известно, что

$$\nabla F(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}),$$

то на основании (5.101) можно сделать заключение о тождественном равенстве

$$\nabla F(\boldsymbol{R}) \equiv \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{R}).$$

Для функций $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ и $\Phi(\boldsymbol{R})$ или $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{R})$ можно прийти к аналогичным выводам: если известно, что

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \equiv \Phi(\boldsymbol{r}), \quad \nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}),$$

то на основании (5.102) и (5.103) следует, что

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) \equiv \Phi(\boldsymbol{R}), \quad \nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) \equiv \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{R}).$$

Если поставить обратные задачи — об определении скаляра по его градиенту и винта по его расхождению и вихрю, то можно аналогично прийти к выводу, что решение этих задач для главной части полностью определяет решение.

Сказанное позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 24. *В области винтов сохраняют силу все формулы и все теоремы векторного анализа.*

В винтовом анализе существуют те же особенные случаи, что в алгебре винтов: это случаи обращения в нуль главной части винта. Для таких случаев требуется специальное исследование.

Вернемся к комплексной скалярной функции винта и положим, что она зависит от нескольких винтов $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{R}_n$. Опуская здесь почти очевидный вывод с помощью координатного выражения винтов, напишем окончательное выражение функции

$$F(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n) = F(\boldsymbol{r}_1 + \omega \boldsymbol{r}_1^0, \boldsymbol{r}_2 + \omega \boldsymbol{r}_2^0, \ldots, \boldsymbol{r}_n + \omega \boldsymbol{r}_n^0) = F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n) + \omega(\boldsymbol{r}_1^0 \cdot \nabla_1 F + \boldsymbol{r}_2^0 \cdot \nabla_2 F + \ldots \ldots + \boldsymbol{r}_n^0 \cdot \nabla_n F), \quad (5.104)$$

где индексы у знака ∇ обозначают, что дифференцирование ведется только по вектору данного номера, соответствующего индексу, а остальные векторы при этом считаются постоянными.

Для винт-функции от нескольких винтов $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ мы получим следующее выражение:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1 + \omega \boldsymbol{r}_1^0, \boldsymbol{r}_2 + \omega \boldsymbol{r}_2^0, \ldots, \boldsymbol{r}_n + \omega \boldsymbol{r}_n^0) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n) + \omega [(\boldsymbol{r}_1 \cdot \nabla_1)\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{r}_2 \cdot \nabla_2)\boldsymbol{F} + \ldots + (\boldsymbol{r}_n \cdot \nabla_n)\boldsymbol{F}]. \quad (5.105)$$

Выражения (5.104) и (5.105) показывают, что функция нескольких винтов полностью определяется функцией от векторов этих винтов.

Выражения (5.104) и (5.105) показывают, что если рассматривать изменение функций F и $\boldsymbol{F}$ при изменении только одного переменного винта, например $\boldsymbol{R}_n$, а остальные $n-1$ винтов положить постоянными, то F, вообще говоря, будет иметь комплексное значение, а $\boldsymbol{F}$, вообще говоря, будет винтом и в том случае, если $\boldsymbol{R}_n$ обратится в вектор, началом которого будет точка O. Нетрудно убедиться, что указанные выше свойства функций F и $\boldsymbol{F}$ сохраняют силу и в этом случае, т. е. снимается сделанное вначале ограничивающее предположение о том, что F вещественно, а $\boldsymbol{F}$ — вектор с началом в точке O, когда $\boldsymbol{R}$ становится вектором с началом в точке O.

Из выражений (5.104) и (5.105) можно непосредственно получить формулы для скалярного и винтового произведений двух винтов, а также для других соотношений алгебры винтов, если эти соотношения рассматривать как функциональные между винтами.

Из всего сказанного здесь вытекает, что можно построить винтовой анализ, воспроизводящий в точности обыкновенный векторный анализ, заменив векторы винтами. При этом, очевидно, сохранится установленное ранее соответствие геометрических объектов: модулю вектора будет соответствовать комплексный модуль винта, углу между векторами — комплексный угол между осями винтов.

После того как выяснены условия возможности аналитической записи выражений функций винтового переменного, мы можем вернуться к принципу перенесения, обсуждение которого мы имели в главе IV, и высказать здесь общие соображения об условиях применимости этого принципа к решению задач механики твердого тела.

Из формулировки принципа перенесения видно, что он заключается в: а) использовании взаимно однозначного соответствия пространства моторов (комплексных векторов), отнесенных к некоторой точке, и пространства винтов и б) переходе от пространства векторов с общим началом к пространству моторов, отнесенных к этому началу. Взаимно однозначное соответствие между двумя пространствами есть геометрический факт, остающийся в силе при любых аффинных ортогональных преобразованиях, т. е. при любых движениях, сохраняющих длину вектора и угол между двумя произвольными векторами, а следовательно, это соответствие имеет силу для любых движений твердого тела. Что же касается перехода от векторов к моторам, то он осуществляется с помощью комплексных величин и действий над ними, причем необходимо, чтобы то или иное уравнение, связывающее механические величины, изображаемые векторами, при замене вещественных величин комплексными становилось уравнением между величинами, изображаемыми винтами. Но это возможно только при выполнении того условия, чтобы соответствующие функциональные выражения имели вид соответственно (5.94), (5.98), (5.104) и (5.105), т. е. чтобы они удовлетворяли условию «аналитичности».

Отсюда можно сделать вывод, что условие «аналитичности» соответствующих уравнений есть в то же время условие применимости принципа перенесения к механике твердого тела.

ГЛАВА VI

ГРУППЫ ВИНТОВ. ПРИЛОЖЕНИЯ К КИНЕМАТИКЕ И СТАТИКЕ

§ 1. Линейная зависимость и линейная независимость виитов. Группа винтов

Мы будем здесь рассматривать комбинации винтов с вещественными множителями.

Если заданы n винтов ($n \leqslant 6$)

$$\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$$

и при этом нельзя подобрать n вещественных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

которые, не будучи все равны нулю одновременно, удовлетворяли бы равенству

$$a_1\boldsymbol{R}_1 + a_2\boldsymbol{R}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{R}_n = 0, \tag{6.1}$$

то заданные винты называются линейно независимыми; в противном случае они называются линейно зависимыми.

Если вещественные прямоугольные (плюккеровы) координаты винтов $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ суть

$$\begin{array}{cccccc} x_1, & y_1, & z_1, & x_1^0, & y_1^0, & z_1^0, \\ x_2, & y_2, & z_2, & x_2^0, & y_2^0, & z_2^0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n, & y_n, & z_n, & x_n^0, & y_n^0, & z_n^0, \end{array}$$

то, умножив одноименные координаты соответственно на $a_1, a_2, \ldots, a_n$, получим вместо равенства (6.1) шесть однородных линейных уравнений между n переменными.

Если эти шесть уравнений могут быть удовлетворены хотя бы одной какой-нибудь системой значений чисел a_k, то условие (6.1) будет выполнено, и винты будут линейно зависимы, когда же уравнения будут несовместны, то винты будут независимы. При $n > 6$ система из шести уравнений, вообще говоря, может быть удовлетворена, поэтому семь и большее число винтов всегда зависимы.

Пусть имеем n ($n \leqslant 6$) линейно независимых винтов. Мы можем построить линейную комбинацию — винт:

$$\boldsymbol{R} = a_1\boldsymbol{R}_1 + a_2\boldsymbol{R}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{R}_n. \tag{6.2}$$

Давая вещественным числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ всевозможные значения, мы получим бесчисленное множество винтов, которое называется n-членной группой. Винты $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ называются основными винтами группы, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — координатами винта $\boldsymbol{R}$ группы. Очевидно, что основные винты $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ принадлежат группе.

Докажем некоторые теоремы, касающиеся групп винтов.

Теорема 19. *Если винты $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ ($n \leqslant 6$) линейно независимы, то для того, чтобы m винтов ($m \leqslant n$)*

$$\boldsymbol{S}_k = a_{k1}\boldsymbol{R}_1 + a_{k2}\boldsymbol{R}_2 + \ldots + a_{kn}\boldsymbol{R}_n \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{6.3}$$

были независимы, необходимо и достаточно, чтобы хоть один из определителей m-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{6.4}$$

был отличен от нуля.

В самом деле, если все определители матрицы (6.4) равны нулю, то существует m величин $b_1, b_2, \ldots, b_m$ таких, что

$$a_{1s}b_1 + a_{2s}b_2 + \ldots + a_{ms}b_s = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

поэтому, умножая равенство (6.3) на b_k и суммируя по k, получим

$$b_1\boldsymbol{S}_1 + b_2\boldsymbol{S}_2 + \ldots + b_m\boldsymbol{S}_m = 0, \tag{6.5}$$

откуда следует, что винты $\boldsymbol{S}_k$ зависимы. Обратно, если винты

$\boldsymbol{S}_k$ зависимы, то между ними существует соотношение вида (6.5), которое можно выразить через винты $\boldsymbol{R}$, а именно

$$c_1\boldsymbol{R}_1 + c_2\boldsymbol{R}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{R}_n = 0, \qquad (6.6)$$

где $c_s = a_{1s}b_1 + a_{2s}b_2 + \ldots + a_{ms}b_m \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$. Но все величины c_s должны быть равны нулю, так как винты $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$, по предположению, независимы. Из равенств же $c_s = 0$ следует, что все определители матрицы (6.4) равны нулю.

Теорема 20. *За основные винты группы можно принять какие угодно n независимых винтов, входящих в группу.*

Пусть $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ — основные винты n-членной группы ($n \leqslant 6$). Каждый винт можно определить шестью вещественными прямоугольными (плюккеровыми) координатами, являющимися независимыми величинами. В таком случае каждый винт можно рассматривать как вектор в шестимерном пространстве. Группа из n винтов представляет n-мерное векторное пространство. Очевидно, любой вектор этого пространства может быть линейно выражен через n заданных линейно независимых векторов подпространства, т. е. через основные винты группы; следовательно, любой винт $\boldsymbol{S}$ группы может быть линейно выражен через $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$. Взяв n таких винтов $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_n$, притом линейно независимых, мы получим другую систему основных винтов группы.

Теорема 21. *Если параметры основных винтов группы увеличить на одну и ту же величину p, то параметры всех винтов группы увеличатся на эту же величину p.*

Для доказательства умножим равенство (6.2) на $e^{\omega p} = 1 + \omega p$; тогда в правой части будут основные винты с параметрами, увеличенными на p, а в левой части — произвольный винт группы, параметр которого будет также увеличен на p.

§ 2. Двучленная и трехчленная группы

Рассмотрим двучленную и трехчленную группы винтов. Двучленная группа определяется выражением

$$\boldsymbol{R} = a_1\boldsymbol{R}_1 + a_2\boldsymbol{R}_2. \qquad (6.7)$$

Как мы уже видели, придавая вещественным числам a_1 и a_2

всевозможные значения, мы будем получать различные винты, оси которых будут лежать на линейчатой поверхности — цилиндроиде (см. гл. III). Как уже было установлено, среди винтов двучленной группы имеются таких два, оси которых пересекаются под прямым углом. Это будут главные винты двучленной группы. Главным винтам соответствуют главные параметры. Приняв в формуле (6.7) винты $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ в качестве главных винтов, выразим скалярный квадрат винта $\boldsymbol{R}$:

$$R^2 = r^2 e^{2\omega p} = a_1^2 r_1^2 e^{2\omega p_1} + a_2^2 r_2^2 e^{2\omega p_2}, \tag{6.8}$$

откуда

$$r^2 = a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2, \quad pr^2 = p_1 a_1^2 r_1^2 + p_2 a_2^2 r_2^2, \tag{6.9}$$

$$p = \frac{p_1 a_1^2 r_1^2 + p_2 a_2^2 r_2^2}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2}. \tag{6.10}$$

Для двух произвольных винтов двучленной группы

$$\boldsymbol{R}' = a_1' \boldsymbol{R}_1 + a_2' \boldsymbol{R}_2,$$
$$\boldsymbol{R}'' = a_1'' \boldsymbol{R}_1 + a_2'' \boldsymbol{R}_2,$$

винтовое произведение будет

$$\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{R}'' = (a_1' a_2'' + a_1'' a_2') \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2, \tag{6.11}$$

а так как числа a_1', a_1'', a_2', a_2'' вещественны, то отсюда следует, что винтовое произведение двух любых винтов группы с точностью до вещественного множителя представляет один и тот же винт.

Если комплексный угол между винтами $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}''$ будет Θ, то, взяв комплексные модули и параметры левой и правой частей (6.11), получим

$$R'R'' \sin\theta = (a_1' a_2'' + a_1'' a_2') R_1 R_2,$$
$$p' + p'' + \theta^0 \operatorname{ctg}\theta = p_1 + p_2, \tag{6.12}$$

т. е. сумма параметров двух произвольных винтов группы, сложенная с параметром синуса угла между ними, равна сумме главных параметров.

При сложении двух винтов цилиндроид играет такую же роль, как плоскость при сложении векторов. Винт-сумма вместе с винтами-слагаемыми лежит на цилиндроиде, и угол, образуемый им с осью, и параметр определяются по формулам, приведенным в главе III.

Трехчленная группа винтов определяется выражением

$$\boldsymbol{R} = a_1\boldsymbol{R}_1 + a_2\boldsymbol{R}_2 + a_3\boldsymbol{R}_3. \tag{6.13}$$

Сделаем сначала предположение, что оси основных винтов $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ трехчленной группы пересекаются под прямыми углами. Примем оси этих винтов за оси прямоугольной системы координат. Соответствующие параметры обозначим через p_1, p_2, p_3, параметр винта $\boldsymbol{R}$ обозначим через p.

Выразим скалярный квадрат винта $\boldsymbol{R}$ согласно (6.13):

$$r^2e^{2\omega p} = a_1^2r_1^2e^{2\omega p_1} + a_2^2r_2^2e^{2\omega p_2} + a_3^2r_3^2e^{2\omega p_3}, \tag{6.14}$$

откуда параметр винта $\boldsymbol{R}$

$$p = \frac{p_1a_1^2r_1^2 + p_2a_2^2r_2^2 + p_3a_3^2r_3^2}{a_1^2r_1^2 + a_2^2r_2^2 + a_3^2r_3^2}. \tag{6.15}$$

Пусть проекции радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}$ произвольной точки оси винта $\boldsymbol{R}$ будут ξ, η, ζ. Так как проекции вектора $\boldsymbol{r}$ винта $\boldsymbol{R}$ на оси координат суть a_1r_1, a_2r_2, a_3r_3, то моменты винта $\boldsymbol{R}$ относительно осей будут соответственно равны

$$\begin{aligned} &pa_1r_1 + \eta a_3r_3 - \zeta a_2r_2, \\ &pa_2r_2 + \zeta a_1r_1 - \xi a_3r_3, \\ &pa_3r_3 + \xi a_2r_2 - \eta a_1r_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, эти моменты равны $p_1a_1r_1$, $p_2a_2r_2$ и $p_3a_3r_3$. Отсюда получается однородная система уравнений

$$\left.\begin{aligned} (p_1 - p)a_1r_1 + \zeta a_2r_2 - \eta a_3r_3 = 0, \\ -\zeta a_1r_1 + (p_2 - p)a_2r_2 + \xi a_3r_3 = 0, \\ \eta a_1r_1 - \xi a_2r_2 + (p_3 - p)a_3r_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

Задавая параметр p винта, мы определяем геометрическое место осей винтов группы, имеющих этот параметр; для этого надо исключить a_1r_1, a_2r_2, a_3r_3 из системы уравнений (6.16), что дает

$$(p_1 - p)\xi^2 + (p_2 - p)\eta^2 + (p_3 - p)\zeta^2 + \\ + (p_1 - p)(p_2 - p)(p_3 - p) = 0. \qquad (6.17)$$

Это геометрическое место, если оно действительное, представляет собою однополостный гиперболоид. Поверхность будет мнимой, если p больше наибольшего или меньше наименьшего из чисел p_1, p_2, p_3. Для осей винтов, параметр которых равен нулю, геометрическое место описывается уравнением

$$p_1\xi^2 + p_2\eta^2 + p_3\zeta^2 + p_1p_2p_3 = 0 \qquad (6.18)$$

и будет действительным, если произведение чисел p_1, p_2, p_3 отрицательно. Различным значениям p в уравнении (6.17) будет соответствовать семейство гиперболоидов, среди которых, в частности, имеется гиперболоид с нулевым параметром, определяемый уравнением (6.18).

Мы приняли за основные винты трехчленной группы три таких винта, оси которых пересекаются под прямыми углами. Но легко видеть, что наиболее общий случай задания трех основных винтов группы сводится к этому же случаю, иными словами, трехчленная группа винтов, основными в которой являются три винта со взаимно пересекающимися под прямыми углами осями, есть самый общий случай трехчленной группы. В самом деле, как уже было показано в главе, любой винт может быть представлен в виде суммы своих составляющих по осям прямоугольной системы координат.

Три произвольно заданных основных винта группы могут быть заменены тремя тройками винтов, оси которых лежат на осях прямоугольной системы координат; складывая по три винта на каждой оси, мы получим три винта, оси которых пересекаются под прямыми углами, эквивалентные сумме трех заданных основных винтов трехчленной группы. Так как сумма винтов есть линейная комбинация с вещественными множителями, то винты — суммы входят в ту же группу, что и винты — слагаемые, поэтому винты, лежащие на осях прямоугольной системы координат, заменяющие три произвольных основных винта трехчленной группы, суть винты этой же трехчленной группы, что и доказывает высказанное предложение.

§ 3. Линейный комплекс прямых и конгруэнция. Четырех-, пяти- и шестичленная группы винтов

Прежде чем перейти к описанию групп высших порядков, дадим определение некоторых геометрических образов линейчатого пространства.

Каждая прямая, как уже было указано в главе III, вполне определяется прямоугольными координатами X, Y, Z, связанными соотношениями

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

поэтому только две из них, например X и Y, могут считаться независимыми.

Давая числам x, x^0, y, y^0 всевозможные значения, при условии

$$-1 < x < +1, \quad -1 < y < +1,$$

мы получим ∞^4 прямых. Отсюда следует, что линейчатое пространство четырехмерно.

Пусть

$$X = X(u, v, w), \qquad Y = Y(u, v, w),$$
$$Z = Z(u, v, w), \tag{6.19}$$

где u, v, w — независимые вещественные параметры, могущие принимать всевозможные значения, X, Y, Z — комплексные функции от этих параметров. Принимая X, Y, Z за координаты прямой a и давая u, v, w все доступные им значения, получим множество из ∞^3 прямых, называемое комплексом прямых. Прямые, принадлежащие комплексу, называются его лучами, соотношения (6.19) — уравнениями комплекса, параметры u, v, w — вещественными координатами лучей.

Если A — произвольная точка пространства, $a(u, v, w)$ — луч комплекса, проходящий через точку A, то числа u, v, w должны удовлетворять двум условиям

$$f_1(u, v, w) = 0, \quad f_2(u, v, w) = 0,$$

откуда следует, что только один из параметров u, v, w может быть оставлен произвольным. Поэтому через любую заданную точку пространства проходит ∞^1 лучей комплекса.

Простейшим комплексом прямых будет линейный комплекс, у которого все лучи, проходящие через данную точку пространства, лежат в одной плоскости. Эта плоскость называется полярной плоскостью точки A.

Для построения линейного комплекса возьмем винт $\boldsymbol{U}$,

$$|\boldsymbol{U}| = U = e^{\omega p},$$

у которого модуль вектора равен единице, и спроектируем его на некоторую прямую пространства, единичный винт которой будет $\boldsymbol{E}$, $|\boldsymbol{E}| = 1$.

Если $\Phi = \varphi + \omega\varphi^0$ — комплексный угол между $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{E}$, то величина проекции будет иметь выражение

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{E} = e^{\omega p}\cos\Phi = \cos\varphi + \omega\,(p\cos\varphi - \varphi^0\sin\varphi). \quad (6.20)$$

Выясним, для каких прямых эта проекция будет вещественной. Заметим, что выражение моментной части проекции

$$p\cos\varphi - \varphi^0\sin\varphi \quad (6.21)$$

есть проекция на прямую момента винта $\boldsymbol{U}$ относительно произвольной точки A этой прямой. Поэтому выражение (6.21) обратится в нуль для всех прямых пространства, проходящих через точку A и лежащих в плоскости Q, перпендикулярной моменту винта относительно точки A. Рассуждая подобным образом в отношении каждой точки пространства, мы получим множество прямых, лежащих в одной плоскости, удовлетворяющих условию

$$p\cos\varphi - \varphi^0\sin\varphi = 0, \quad (6.22)$$

при котором проекция винта на данную прямую имеет вещественное значение, т. е. составляющая винта по этой прямой представляет вектор. Отсюда следует, что совокупность прямых пространства, по которым составляющая некоторого винта представляет вектор, есть линейный комплекс прямых, определяемый винтом. Ось винта называется осью комплекса.

Комплекс определяется пятью величинами — четырьмя вещественными координатами и параметром.

Из уравнения (6.22) следует, что

$$p = \varphi^0\operatorname{tg}\varphi,$$

т.е. что расстояние лучей комплекса обратно пропорционально тангенсам углов, образуемых лучами с осью комплекса. Величина p называется параметром комплекса — она характеризует «крутизну» наклона лучей, расположенных на данном расстоянии от оси.

Далее следует, что если $\varphi^0 = 0$, т. е. если луч пересекает ось комплекса, то $\varphi = \pi/2$, т. е. луч образует с осью комплекса прямой угол. Иными словами, лучи, пересекающие ось комплекса, образуют щетку.

Пусть Q — произвольная плоскость, R и S — произвольные точки в этой плоскости. Пусть Q_1 и Q_2 — полярные плоскости точек R и S. Плоскости Q_1 и Q_2 пересекаются с плоскостью Q по некоторым прямым b_1 и b_2; пусть точкой пересечения этих прямых будет точка T. Можно видеть, что плоскость Q является полярной по отношению к точке T. В самом деле, прямые RT и ST — лучи комплекса, поэтому проекции на них винта U будут вещественны. Если привести винт к точке T, то момент будет перпендикулярен как к RT, так и к ST, а следовательно, он будет перпендикулярен к плоскости Q. Значит, плоскость Q является полярной по отношению к точке T.

Точка T называется полюсом плоскости Q.

Итак, для линейного комплекса через каждую точку пространства проходит одна плоскость, содержащая лучи, проходящие через эту точку, и обратно, все лучи комплекса, лежащие в заданной плоскости, проходят через одну точку.

Пусть A, B, C — прямоугольные координаты оси комплекса, X, Y, Z — прямоугольные координаты его луча.

Соотношение (6.20) с условием (6.22) примет вид

$$e^{\omega p}(AX + BY + CZ) = \cos\varphi, \tag{6.23}$$

где

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Это — уравнение линейного комплекса.

В частном случае, когда $p = 0$, уравнение (6.23) примет вид

$$AX + BY + CZ = \cos\varphi,$$

откуда следует, что комплекс состоит из лучей, пересекающих его ось.

Это будет вырожденный комплекс.

Если принять ось z за ось комплекса, то $A = B = 0$, $C = 1$, и уравнение (6.23) комплекса упростится и примет вид

$$e^{\omega p} Z = \cos \varphi. \tag{6.24}$$

Если заданы два винта $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$, то каждый из этих винтов определяет линейный комплекс. Через каждую точку A пространства можно провести полярные плоскости Q_1 и Q_2 этой точки, соответствующие обоим комплексам. Очевидно, что прямая пересечения этих плоскостей будет одновременно лучом одного и другого комплексов. Совокупность прямых, являющихся общими лучами двух линейных комплексов, называется конгруэнцией. Из сказанного следует, что через заданную точку пространства проходит единственная прямая, принадлежащая конгруэнции.

Теперь перейдем к краткой характеристике четырех- и пятичленных групп винтов.

Для четырехчленной группы, основными винтами которой являются $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{R}_4$, можно указать те прямые пространства, проекции на которые винтов группы будут вещественны. Очевидно, что эти прямые будут общими для четырех комплексов, определяемых данными четырьмя винтами. Условия для определения таких прямых выразятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\text{мом}\ [e^{\omega p_k}(A_k X + B_k Y + C_k Z)] = 0, \\ A_k^2 + B_k^2 + C_k^2 = 1, \quad &X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \qquad k = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

где p_k — параметры винтов, A_k, B_k, C_k — комплексные прямоугольные координаты осей винтов, X, Y, Z — комплексные прямоугольные координаты искомой прямой.

Отделив главные части от моментных, получим четыре уравнения

$$(a_k^0 + p_k a_k)\, x + (b_k^0 + p_k b_k)\, y + (c_k^0 + p_k c_k)\, z + a_k x^0 + b_k y^0 + \\ + c_k z^0 = 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4. \tag{6.26}$$

Разделив уравнения на z^0, выразим из них четыре величины x/z^0, y/z^0, z/z^0, x^0/z^0 через y^0/z^0, а затем потребуем выполнения равенства

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

что приведет к квадратному уравнению относительно величины y^0/z^0. Отсюда можно сделать вывод, что во всем пространстве существует не более двух прямых (вещественных или мнимых), удовлетворяющих поставленному условию.

Примем теперь эти прямые за оси линейных комплексов. Условия, равносильные (6.25), выражающие равенство нулю момента произвольного винта $\boldsymbol{R}$ группы относительно этих прямых, будут

$$\left.\begin{aligned} p\cos\varphi_1 - \varphi_1^0\sin\varphi_1 = 0,\\ p\cos\varphi_2 - \varphi_2^0\sin\varphi_2 = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (6.27)$$

где p — параметр винта $\boldsymbol{R}$, $\varphi_1 + \omega\varphi_1^0$, $\varphi_2 + \omega\varphi_2^0$ — комплексные углы, образуемые прямыми с осью $\boldsymbol{R}$.

Сравнивая с (6.22), мы можем истолковать условия (6.27) как условия того, что ось винта $\boldsymbol{R}$ есть одновременно луч двух комплексов, оси которых совпадают с двумя указанными прямыми, причем общий параметр этих комплексов равен p. Отсюда следует, что оси всех винтов четырехчленной группы образуют конгруэнцию.

Для пятичленной группы с основными винтами $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{R}_5$ условие вещественности величины проекции каждого из этих винтов на произвольную прямую пространства или, что то же, равенства нулю относительных моментов даст пять уравнений типа (6.26)

$$(a_k^0 + pa_k)\,x + (b_k^0 + p_k b_k)\,y + (c_k^0 + p_k c_k)\,z + a_k x^0 + b_k y^0 + \\ + c_k z^0 = 0, \qquad k = 1,\ 2, \ldots,\ 5. \quad (6.28)$$

Решая систему (6.28), найдем значения пяти отношений координат x, y, z, x^0, y^0, z^0 к одной из них, например последней z^0. При дополнительном условии

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

это определит координаты единственной прямой, относительно которой момент винтов пятичленной группы будет нуль. Обратно, если ось этой прямой принять за ось некоторого линейного комплекса, то, поступив так же, как в случае четырехчленной группы, а именно написав условие равенства нулю относительного момента произвольного винта группы и упомянутой прямой в форме (6.27), мы убедимся, что оси всех винтов пятичленной группы, имеющих один и тот же параметр, суть лучи одного и того же комплекса.

Наконец, шестичленная группа винтов представляет такую систему, из которой линейной комбинацией с вещественными множителями можно получить любой винт.

§ 4. Взаимные винты и взаимные группы винтов

Как уже указывалось в главе III, моментная часть скалярного произведения двух винтов

$$\text{мом}\ (\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2) = r_1 r_2\,[(p_1 + p_2)\cos\alpha - \alpha^0 \sin\alpha] \qquad (6.29)$$

есть относительный момент этих винтов, равный сумме скалярных произведений главного вектора первого на главный момент второго и главного вектора второго на главный момент первого, причем моменты обоих винтов берутся относительно одного и того же полюса.

Два винта называются взаимными, если их относительный момент равен нулю или, что то же, если их скалярное произведение равно вещественному числу.

Теорема 22. *Винт, взаимный с n независимыми винтами n-членной группы ($n < 6$), взаимен с любым винтом, входящим в эту группу.*

В самом деле, пусть винт $\boldsymbol{S}$ будет взаимен с винтами $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ ($n < 6$), т. е.

$$\text{мом}\ (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}_1) = \text{мом}\ (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}_2) = \ldots = \text{мом}\ (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}_n) = 0.$$

Умножив скалярно винт $\boldsymbol{S}$ на произвольный винт n-членной группы, образованной указанными n винтами, получим

$$\text{мом}\ (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}) = \text{мом}\,[\boldsymbol{S} \cdot (a_1\boldsymbol{R}_1 + a_2\boldsymbol{R}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{R}_n)] =$$
$$= a_1\,\text{мом}\ (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}_1) + a_2\,\text{мом}\ (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}_2) + \ldots + a_n\,\text{мом}(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}_n),$$

а так как правая часть равна нулю, то

$$\text{мом}\ (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{R}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Винт $\boldsymbol{S}$, если его параметр p отличен от нуля, сам не может входить в рассмотренную n-членную группу, ибо его скалярное произведение на самого себя равно $s^2e^{2\omega q}$, а поэтому не может равняться вещественному числу. Если же параметр винта $\boldsymbol{S}$ равен нулю, то его ось есть общий луч комплексов, соответствующих всем винтам группы.

Теорема 23. *Совокупность винтов, взаимных с винтами n-членной группы ($n < 6$), образует ($6 - n$)-членную группу.*

Докажем теорему для случая $n = 3$. Если винт $\boldsymbol{S}$ с координатами $\Xi = \xi + \omega\xi^0$, $\mathrm{H} = \eta + \omega\eta^0$, $\mathrm{Z} = \zeta + \omega\zeta^0$ взаимен с тремя винтами $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ с координатами $X_1 = x_1 + \omega x_1^0$, $Y_1 = y_1 + \omega y_1^0, \ldots, Z_3 = z_3 + \omega z_3^0$, то имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned}
\xi x_1^0 + \eta y_1^0 + \zeta z_1^0 + \xi^0 x_1 + \eta^0 y_1 + \zeta^0 z_1 = 0,\\
\xi x_2^0 + \eta y_2^0 + \zeta z_2^0 + \xi^0 x_2 + \eta^0 y_2 + \zeta^0 z_2 = 0,\\
\xi x_3^0 + \eta y_3^0 + \zeta z_3^0 + \xi^0 x_3 + \eta^0 y_3 + \zeta^0 z_3 = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (6.30)$$

и так как три винта $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ линейно независимы, то в матрице системы (6.30) есть хотя бы один определитель третьего порядка, отличный от нуля. В таком случае, оставив в левой части по три члена уравнения с указанным определителем — пусть это будет система относительно ξ, η, ζ^0, — решим систему относительно этих координат, выразив последние через ξ^0, η^0, ζ:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= A_1\xi^0 + B_1\eta^0 + C_1\zeta,\\
\eta &= A_2\xi^0 + B_2\eta^0 + C_2\zeta,\\
\zeta^0 &= A_3\xi^0 + B_3\eta^0 + C_3\zeta.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.31)$$

Здесь ξ^0, η^0, ζ могут быть взяты произвольно, поэтому существует не менее трех независимых систем значений этих чисел, по которым можно образовать три взаимных винта; например, возможны винты с координатами, пропорциональными числам

$$\begin{gathered}
A_1,\ A_2,\ 0,\ 1,\ 0,\ A_3,\\
B_1,\ B_2,\ 0,\ 0,\ 1,\ B_3,\\
C_1,\ C_2,\ 1,\ 0,\ 0,\ C_3,
\end{gathered}$$

и если составить матрицу из этих чисел, то в ней существует определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля, из чего следует, что есть не меньше трех линейно независимых винтов, взаимных с тремя данными. Легко видеть, что их будет не больше трех, так как в (6.31) нельзя принять произвольно более чем три системы значений чисел ξ^0, η^0, ζ; всякая же четвертая система значений выражается линейно через эти три, и в матрице, составленной из координат четырех соответствующих винтов, все определители четвертого порядка будут равны нулю. Таким образом, теорема доказана для $n = 3$. Доказательство для иного значения n принципиально не отличается от приведенного.

Легко установить, в каком отношении находятся оси винтов взаимной группы с комплексом лучей, определяемым винтами данной группы.

При $n = 1$ взаимная группа будет пятичленной. Условие взаимности единственного винта $\boldsymbol{R}$ заданной одночленной группы с произвольным винтом $\boldsymbol{S}$ взаимной группы будет

$$\text{мом}\ (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{S}) = rs\,[(p+q)\cos\varphi - \varphi^0\sin\varphi] = 0, \tag{6.32}$$

где p и q — параметры винтов $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$, $\varphi + \omega\varphi^0$ — комплексный угол между осями винтов. Сравнивая (6.32) с формулой (6.22), определяющей луч линейного комплекса, находим, что оси винтов $\boldsymbol{S}$, имеющие заданный параметр q, группы, взаимной с $\boldsymbol{R}$, суть лучи линейного комплекса, ось которого совпадает с осью винта $\boldsymbol{R}$, а параметр равен сумме $p + q$.

При $n = 2$ взаимная группа будет четырехчленной. Каждый винт этой четырехчленной группы должен удовлетворять двум условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\text{мом}\ (\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{S}) = r_1 s\,[(p_1+q)\cos\varphi_1 - \varphi_1^0\sin\varphi_1] = 0, \\ &\text{мом}\ (\boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{S}) = r_2 s\,[(p_2+q)\cos\varphi_2 - \varphi_2^0\sin\varphi_2] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

где $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — винты заданной двучленной группы. Первое условие выражает, что ось винта $\boldsymbol{S}$ есть луч комплекса, осью которого служит ось первого винта, а параметром — величина p_1, увеличенная на q; второе условие выражает, что ось винта $\boldsymbol{S}$ — луч комплекса, осью которого служит ось второго винта, а параметром — величина p_2, увеличенная на q. Таким образом, оси всех $\boldsymbol{S}$ являются лучами двух линейных комплексов и, следовательно, принадлежат конгруэнции.

При $n = 3$ заданная группа и взаимная с ней будут трехчленны. Как мы видели, любая трехчленная группа может быть задана основными тремя винтами, оси которых пересекаются в одной точке под прямыми углами. В таком случае будем считать основную группу заданной тремя такими винтами $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3$; пусть основными для взаимной группы будут винты $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$ на тех же осях. Любой винт первой группы и любой винт второй группы будут иметь выражения

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= a_1\boldsymbol{R}_1 + a_2\boldsymbol{R}_2 + a_3\boldsymbol{R}_3, \\ \boldsymbol{S} &= b_1\boldsymbol{S}_1 + b_2\boldsymbol{S}_2 + b_3\boldsymbol{S}_3, \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

где a_k и b_k — вещественные числа.

Перемножив скалярно равенства (6.34) и приравняв моментную часть нулю, получим

$$\text{мом}\ (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{S}) = a_1b_1r_1s_1(p_1 + q_1) + a_2b_2r_2s_2(p_2 + q_2) + \\ + a_3b_3r_3s_3(p_3 + q_3) = 0.$$

Так как последнее равенство должно выполняться при любых значениях a_k и b_k, то необходимо, чтобы было

$$r_1s_1(p_1 + q_1) = 0, \quad r_2s_2(p_2 + q_2) = 0, \quad r_3s_3(p_3 + q_3) = 0,$$

откуда (при $r_k \neq 0$ и $s_k \neq 0$)

$$p_1 = -q_1, \quad p_2 = -q_2, \quad p_3 = -q_3. \tag{6.35}$$

Гиперболоид, на котором лежат оси винтов заданной системы, имеющих параметр p, определяется уравнением (6.17), соответствующий же гиперболоид взаимной системы, согласно (6.35), будет определяться уравнением

$$(p_1 + p)\xi^2 + (p_2 + p)\eta^2 + (p_3 + p)\zeta^2 + \\ + (p_1 + p)(p_2 + p)(p_3 + p) = 0, \tag{6.36}$$

т. е. будет представлять тот же гиперболоид, но для винтов параметра $-p$.

§ 5. Геометрическое изображение винтов и построение взаимных групп

Для решения многих задач механики полезно иметь геометрическую интерпретацию объектов, которая позволяла бы производить непосредственно над этими объектами необходимые операции и получать наглядные результаты. С помощью приведенного ниже непосредственного геометрического изображения винтов решение ряда задач можно эффективно выполнять методами, сходными с классическими методами графической статики.

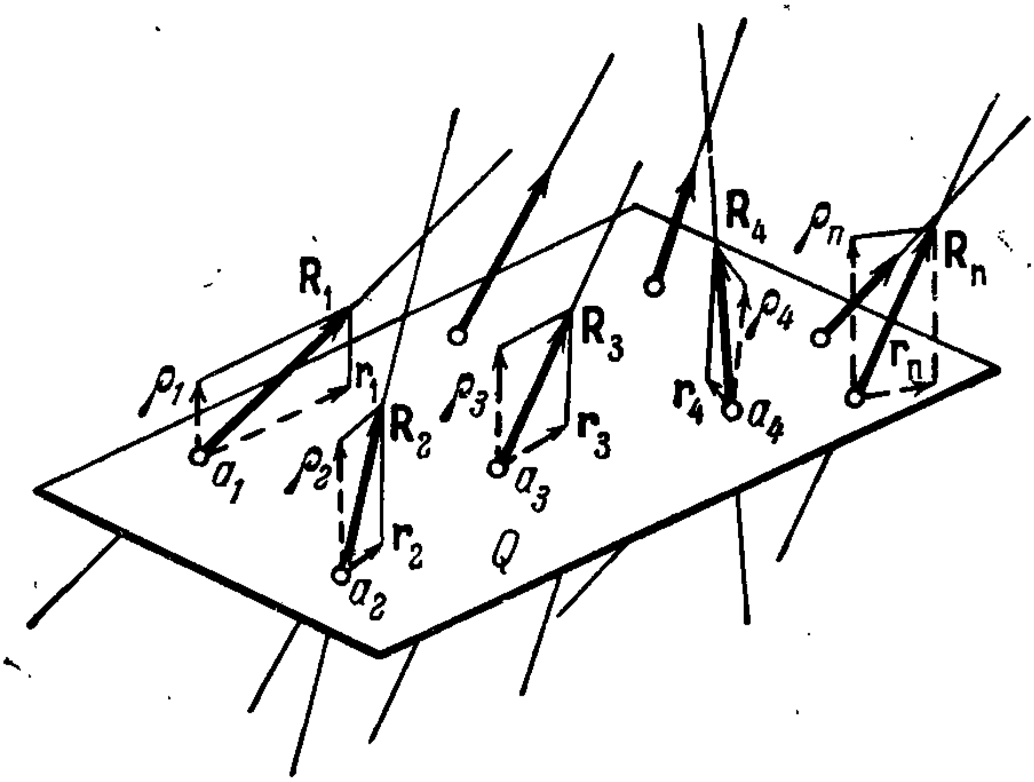

Рис. 32.

Вообразим произвольную систему скользящих векторов $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$. Проведем некоторую секущую плоскость Q (рис. 32), которая в дальнейшем будет играть роль плоскости изображения, и отметим точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пересечения прямых, на которых лежат указанные векторы.

Затем в каждой из этих точек произведем разложение соответствующего вектора на две составляющие: одну — в плоскости Q, а другую — перпендикулярно к плоскости Q. Составляющие в плоскости Q обозначим через $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$, а составляющие, перпендикулярные к Q, — через $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{\rho}_n$. Таким образом, заданная система скользящих векторов разделится на две системы: а) систему плоских скользящих векторов и б) систему параллельных скользящих векторов, общее направление которых перпендикулярно к плоскости первой системы. Первая система эквивалентна некоторому скользящему вектору $\boldsymbol{r}$ в плоскости Q, а вторая — вектору $\boldsymbol{\rho}$, перпендикулярному Q (если эти системы не эквивалентны парам). Следовательно, винт $\boldsymbol{R}$, которому эквивалентна заданная система, в свою очередь эквивалентен системе из двух скользящих векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ (ортогональный крест векторов), что можно выразить так:

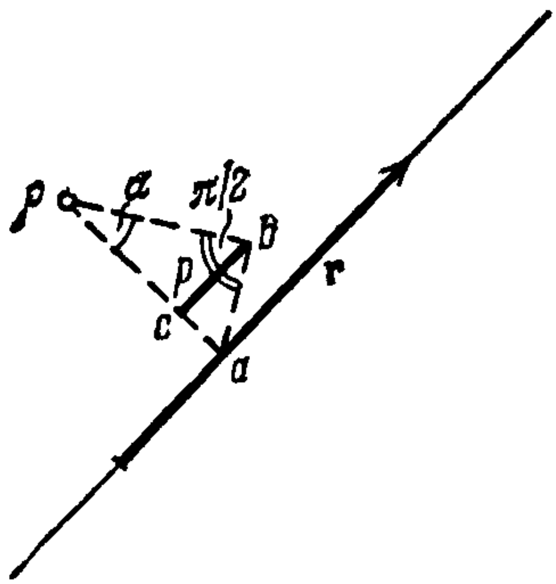

Рис. 33.

$$\boldsymbol{R} \to (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}).$$

Задавая в плоскости Q вектор $\boldsymbol{r}$ его положением и величиной, а также след ρ вектора $\boldsymbol{\rho}$ с приписанной ему величиной ρ, мы будем иметь однозначно определяемое для плоскости Q изображение винта (рис. 33). В частных случаях, когда прямая в плоскости Q бесконечно удалена, а также след бесконечно удален, мы будем иметь эквивалентные пары. Указанное изображение в свою очередь полностью определяет винт, т. е. величину его главного вектора, центральную ось и параметр.

В самом деле, величина главного вектора винта будет равна $\sqrt{r^2+\rho^2}$. Кроме того, опустив перпендикуляр из точки ρ на ось $\boldsymbol{r}$ и построив прямоугольный треугольник ρab, у которого ρa — гипотенуза, а угол $a\rho b = \alpha = \operatorname{arctg}(\rho/r)$ (рис. 33), найдем момент винта относительно точки c — основания перпендикуляра, опущенного из вершины b на гипотенузу:

$$\overrightarrow{c\rho} \times \boldsymbol{\rho} + \overrightarrow{ca} \times \boldsymbol{r}.$$

Отношение вертикальной и горизонтальной составляющих момента равно

$$\frac{|\overrightarrow{ca} \times \boldsymbol{r}|}{|\overrightarrow{c\rho} \times \boldsymbol{\rho}|} = \frac{r\,(ca)}{\rho\,(c\rho)} = \frac{r}{\rho}\,\frac{(\rho/r)\,(cb)}{(r/\rho)\,(cb)} = \frac{\rho}{r}\,\frac{cb}{cb} = \frac{\rho}{r},$$

т. е. отношению вертикальной и горизонтальной составляющих главного вектора, откуда следует, что прямая cb есть проекция центральной оси; величина же отрезка cb, служащая коэффициентом пропорциональности, очевидно, равна параметру p винта. Наконец, инвариант J винта, равный скалярному произведению его главного вектора на главный момент, если за моментную точку принять точку ρ, будет иметь выражение

$$J = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}) \cdot \text{мом}_\rho \, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} \cdot \text{мом}_\rho \, \boldsymbol{r} = \pm \rho r \, (\rho a).$$

Ввиду эквивалентности креста винту можно крестам давать обозначение соответствующих винтов и говорить об операциях непосредственно над крестами.

Большое преимущество в построениях дает предложенное Я. Б. Шором [34] использование крестов с величиной составляющей, перпендикулярной к плоскости изображения, равной единице. Заданный винт приводится к выражению $\boldsymbol{R} = \rho \boldsymbol{K}$, где $\boldsymbol{K}$ — винт, эквивалентный кресту

$$\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\rho}, \boldsymbol{\varkappa}\right) = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\varkappa}), \quad \varkappa = 1.$$

Крест $\boldsymbol{K} \to (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\varkappa})$ при $\varkappa = 1$ назовем условно орт-крестом.

У орт-креста величина составляющей в плоскости изображения равна $k = \operatorname{ctg} \alpha$, модуль главного вектора $\sqrt{1 + k^2} = 1/\sin \alpha$, а инвариант — моменту вектора $\boldsymbol{k}$ относительно следа $\boldsymbol{\varkappa}$.

Определим относительный момент двух винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, орт-кресты которых суть $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$. Выберем в качестве моментной точку A пересечения осей составляющих $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$. Относительный момент будет равен сумме скалярных произведений главного вектора первого креста на главный момент второго относительно точки A и главного вектора второго на главный момент первого относительно точки A. Выражая кресты через орт-кресты, будем иметь

$$\begin{aligned} \text{мом}\,(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) &= \rho_1\rho_2 \,\text{мом.}\,(\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2) = \\ &= \rho_1\rho_2 \,[\boldsymbol{k}_1 \cdot (\overrightarrow{A\varkappa_2} \times \boldsymbol{\varkappa}_2) + \boldsymbol{k}_2 \cdot (\overrightarrow{A\varkappa_1} \times \boldsymbol{\varkappa}_1)] = \\ &= \rho_1\rho_2 \,[(\boldsymbol{k}_1 \times \overrightarrow{A\varkappa_2}) \cdot \boldsymbol{\varkappa}_2 + (\boldsymbol{k}_2 \times \overrightarrow{A\varkappa_1}) \cdot \boldsymbol{\varkappa}_1] = \\ &= \rho_1\rho_2 \,(\text{мом}_{\varkappa_2} \boldsymbol{k}_1 + \text{мом}_{\varkappa_1} \boldsymbol{k}_2). \end{aligned} \tag{6.37}$$

Условие взаимности двух орт-крестов выражается простым соотношением

$$\text{мом}_{\varkappa_2} \boldsymbol{k}_1 + \text{мом}_{\varkappa_1} \boldsymbol{k}_2 = 0. \tag{6.38}$$

Взаимность двух орт-крестов имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$ — два орт-креста с соответствующими составляющими $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ и следами $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ (рис. 34, *а*). Очевидно, что относительный момент этих

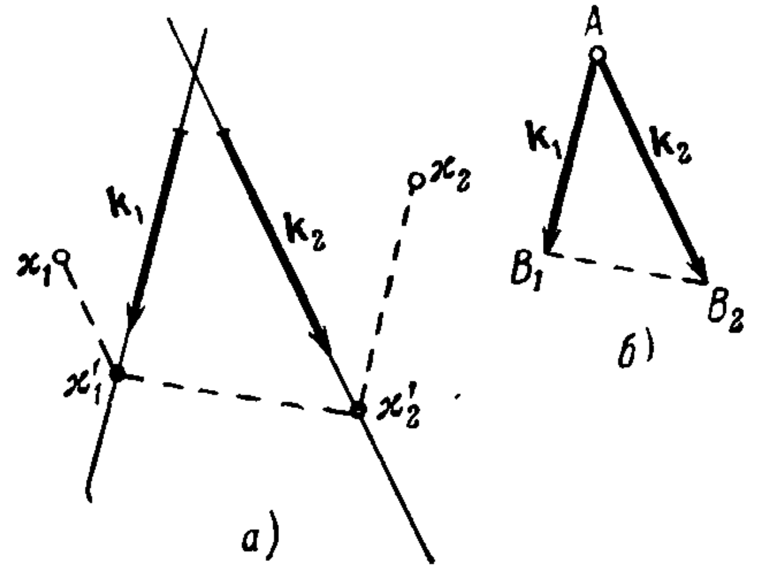

Рис. 34.

крестов не изменится, если передвигать $\varkappa_1$ параллельно $\boldsymbol{k}_2$, а $\varkappa_2$ — параллельно $\boldsymbol{k}_1$.

Двигая указанные точки до тех пор, пока $\varkappa_1$ не совместится с $\boldsymbol{k}_1$, а $\varkappa_2$ — с $\boldsymbol{k}_2$, мы получим вместо точек $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ точки $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$, и орт-кресты обратятся в скользящие орт-векторы. Но для взаимности двух скользящих векторов необходимо и достаточно, чтобы оси этих векторов пересекались, а в таком случае прямая $\varkappa_1'\varkappa_2'$ должна быть параллельна прямой B_1B_2, соединяющей концы векторов $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$, проведенных из общего начала A (рис. 34, *б*). Это и будет необходимое и достаточное условие взаимности орт-крестов.

Линейная комбинация двух орт-крестов

$$\boldsymbol{K} = \xi \boldsymbol{K}_1 + \eta \boldsymbol{K}_2,$$

у которой $\xi + \eta = 1$, есть, очевидно, также орт-крест. Конец вектора $\boldsymbol{k}$, приведенного к общему началу A с векторами $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$, очевидно, лежит на прямой, соединяющей концы векторов $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$, разделяя соответствующий отрезок на части, обратно пропорциональные отношению $\xi : \eta$; след же $\varkappa$ лежит на прямой, соединяющей следы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, и разделяет отрезок $\varkappa_1\varkappa_2$ в том же отношении. Если, в частности, $\xi = \eta = 1/2$, то получается «сумма» ортов, и в этом случае конец результирующего вектора $\boldsymbol{k}$ и след $\varkappa$ лежат на серединах соответствующих отрезков.

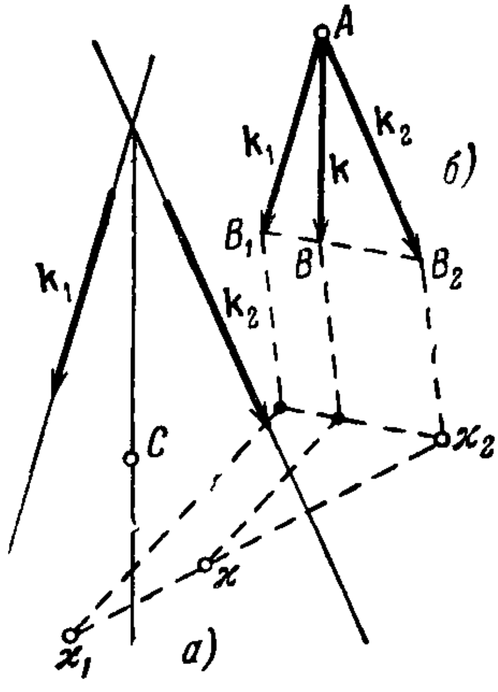

Рис. 35.

Задача 1. Построить орт-крест $\boldsymbol{K}$, являющийся линейной комбинацией орт-крестов $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$, составляющая $\boldsymbol{k}$ которого проходит через заданную точку C.

Решение. Проводим ось $\boldsymbol{k}$ (рис. 35, a) через точку пересечения осей $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ и точку C; затем находим точку B пересечения составляющей $\boldsymbol{k}$ с прямой, соединяющей концы B_1 и B_2 составляющих $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$, приведенных к общему началу A (рис. 35, $б$). Затем на прямой $\varkappa_1\varkappa_2$ находим точку $\varkappa$, удовлетворяющую условию $\varkappa_1\varkappa : \varkappa\varkappa_2 = B_1B : BB_2$. Точка $\varkappa$ есть след искомого орт-креста.

Задача 2. Построить орт-крест $\boldsymbol{K}$, являющийся линейной комбинацией орт-крестов $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$, взаимный с орт-крестом $\boldsymbol{L}$.

Решение. Пусть

$$\boldsymbol{K} = \xi\boldsymbol{K}_1 + \eta\boldsymbol{K}_2, \tag{6.39}$$

где $\xi + \eta = 1$, а $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{L}$ заданы своими составляющими $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{l}$ и следами $\varkappa_1, \varkappa_2$, λ (рис. 36,a). Построим сперва орт-кресты $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}_2'$, взаимные с орт-крестом $\boldsymbol{L}$, притом такие, у которых составляющие $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ — те же, что у орт-крестов $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$, но следы $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$ лежат на двух произвольных параллельных прямых, проходящих через следы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Такие орт-кресты легко построить, а именно: нужно сперва через $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ провести прямые u и v, параллельные $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$

через точку λ надо провести прямую $\lambda\sigma_1$ параллельно $\boldsymbol{k}_1$, затем — прямую $\sigma_1\tau_1$ параллельно разности векторов $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{k}$ (рис. 36,*б*), а затем провести через τ_1 прямую параллельно $\boldsymbol{l}$ до пересечения с u, что определяет точку $\varkappa_1'$;

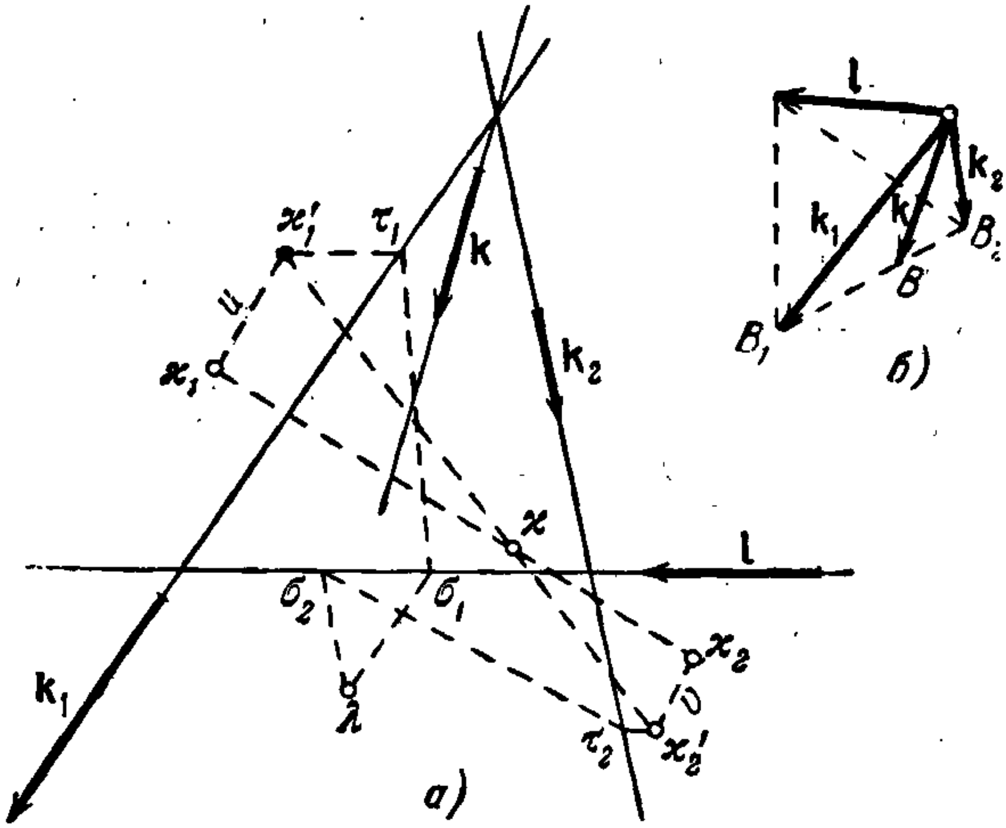

Рис. 36.

на основании установленного выше геометрического принципа взаимности орт-крест K_1' будет взаимен с орткрестом $\boldsymbol{L}$. Точно так же надо провести через точку λ прямую $\lambda\sigma_2$ параллельно $\boldsymbol{k}_2$, затем — прямую $\sigma_2\tau_2$ параллельно разности векторов $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{k}_2$ (рис. 36, *б*), а затем через τ_2 — прямую параллельно $\boldsymbol{l}$ до пересечения с v, что определит точку $\varkappa_2'$; орт-крест K_2' будет взаимен с орт-крестом $\boldsymbol{l}$. Таким образом, мы будем иметь два орт-креста K_1' и K_2', которые будут отличаться от орт-крестов K_1 и K_2 только положением следов $\varkappa_1'\varkappa_2'$. Однако оба орт-креста K_1' и K_2' взаимны $\boldsymbol{L}$. Поэтому комбинация

$$\xi K_1' + \eta K_2' = K' \tag{6.40}$$

также будет взаимна с $\boldsymbol{L}$. Но эта комбинация имеет ту же составляющую $\boldsymbol{k}$, что искомая комбинация (6.39), которая по условию задачи должна быть также взаимна с орт-крестом $\boldsymbol{L}$.

Соединим прямой точки $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$ и найдем точку $\varkappa$ пересечения этой прямой с прямой $\varkappa_1\varkappa_2$. Точка $\varkappa$ есть след искомого орт-креста K, так как $\varkappa_1'\varkappa : \varkappa\varkappa_2' = \varkappa_1\varkappa : \varkappa\varkappa_2$ и точка принадлежит одновременно комбинациям (6.39) и (6.40), а соответствующая ей составляющая k для обеих комбинаций — одна и та же.

Последняя определяется разделением отрезка B_1B_2 на части, пропорциональные $\varkappa_1\varkappa$ и $\varkappa\varkappa_2$ (рис. 36, *б*).

Вместо указанного чисто графического построения для решения задачи можно использовать условие (6.38), которое приведет к уравнению с одним неизвестным.

З а д а ч а 3. Построить орт-крест L_{123}, взаимный с тремя орт-крестами K_1, K_2 и K_3.

Р е ш е н и е. Сперва построим орт-крест L_{12}, взаимный с орт-крестами K_1 и K_2. Очевидно, что такой орт-крест можно получить, взяв за ось l_{12} прямую, проходящую через $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, а за точку λ_{12} —точку пересечения k_1 и k_2. При этом величина l_{12} останется неопределенной. Ее можно определить из условия взаимности с K_3 либо построением, указанным выше, либо составлением относительного момента орт-креста L_{12} и орт-креста K_3 и приравниванием его нулю, после чего величина l_{12} определится из уравнения с одним неизвестным. Задача решена.

Вторым вариантом решения будет орт-крест L_{132}, который строится таким же точно образом, но при условии, что сперва построен орт-крест, взаимный с K_1 и K_3, а затем он подчиняется условию взаимности с K_2.

Наконец, третьим вариантом будет орт-крест L_{231}, построенный сперва как взаимный с K_2 и K_3, а затем подчиненный условию взаимности с K_1.

Три орт-креста L_{123}, L_{132} и L_{231} определяют трехчленную группу, взаимную с трехчленной группой орт-крестов K_1, K_2 и K_3. Все указанные кресты изображены на рис. 37.

З а д а ч а 4. Построить орт-крест, взаимный с пятью заданными орт-крестами K_1, K_2, . . . , K_5.

Р е ш е н и е. Сначала построим трехчленную группу орт-крестов, взаимных с орт-крестами K_1, K_2, K_3, в соответствии с задачей 3. Пусть это будут орт-кресты L_{123}, L_{132}, L_{231}. Найдем орт-крест L_{1234}, являющийся линейной комбинацией орт-крестов L_{123} и L_{132}, взаимный с K_4. Это можно выполнить согласно решенной задаче 3. Точно так же найдем орт-крест L_{1324}, являющийся линейной комбинацией L_{132} и L_{231}, взаимный с K_4. Таким образом, мы будем иметь два орт-креста L_{1234} и L_{1324}, определяющие двучленную группу, взаимную с орт-крестами K_1, K_2, K_3, K_4.

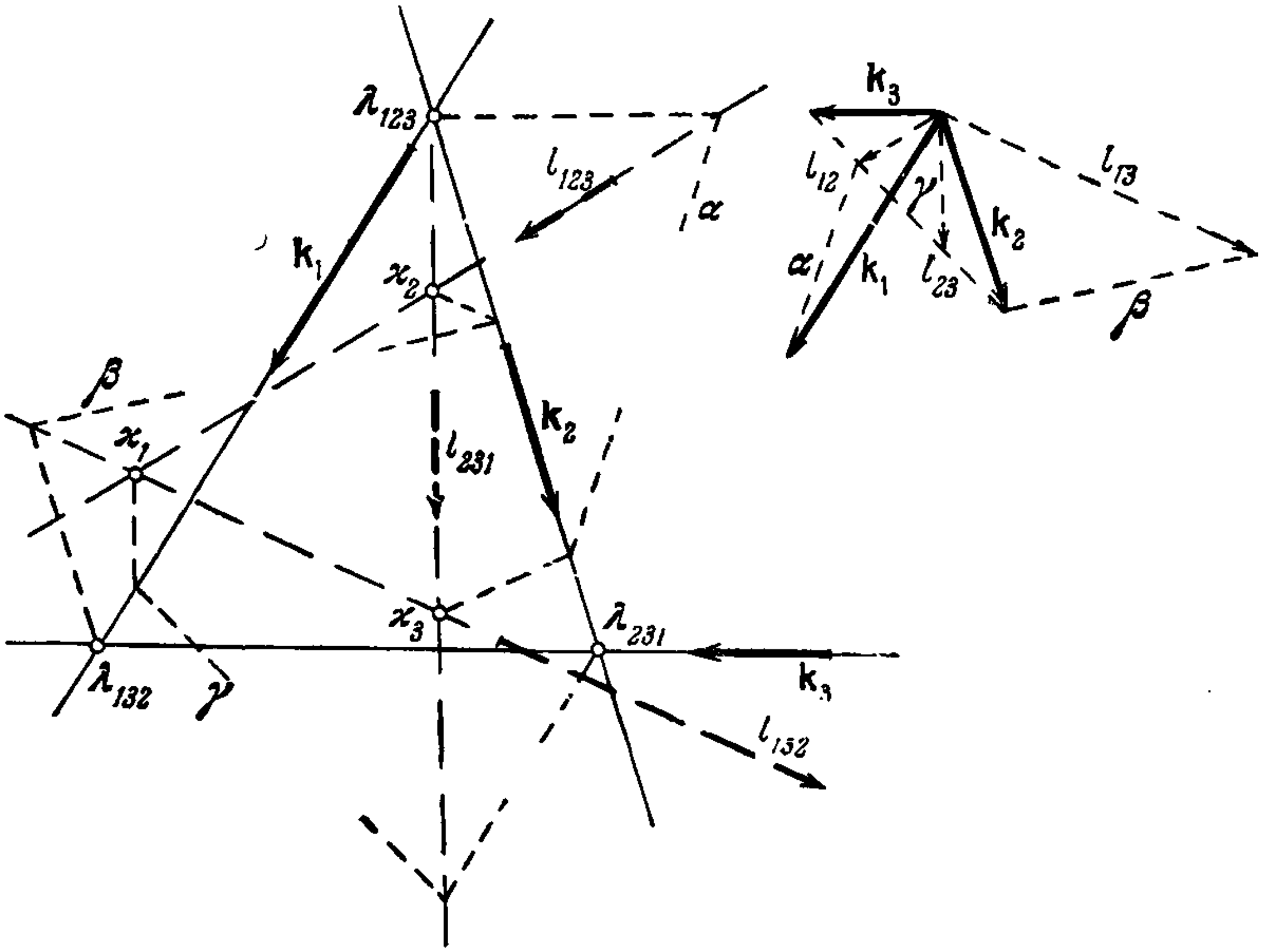

Рис. 37.

Составив теперь линейную комбинацию орт-крестов L_{1234} и L_{1324} и подчинив ее условию взаимности с орт-крестом K_5, снова руководствуясь решением задачи 3, мы найдем единственный орт-крест L_{12345}, взаимный с заданными орт-крестами K_1, K_2, ..., K_5.

Указанные здесь геометрические построения можно использовать в задачах пространственной статики и кинематики [1]).

[1]) В свое время Б. Майором [[35]] был предложен особый способ отображения пространственных векторов и винтов на плоскость, однако более сложный, чем приведенный здесь. Из-за трудности изложения книга Б. Майора не стала популярной. В дальнейшем идеи Майора частично развивались Р. Мизесом и В. Прагером. В советской литературе метод Майора нашел хорошую интерпретацию и развитие в интересной книге Б. Н. Горбунова и А. А. Умаиского [[36]].

§ 6. Группы винтов в кинематике и статике

Учение о группах винтов тесно связано с рассмотрением свойств движений твердого тела, обладающего тем или иным числом степеней свободы (от одной до шести), а также со свойствами систем сил, действующих на тело, в том числе сил реакции, если тело не свободно.

Самый общий вид перемещения твердого тела есть винтовое перемещение, характеризующееся осью винта, модулем его вектора и параметром. Модулем вектора при бесконечно малом перемещении служит элементарный угол поворота $d\varphi$, параметром — отношение поступательного перемещения $d\varphi^0$ к $d\varphi$; задав винт его осью и комплексным модулем с главной частью, равной единице, и умножая комплексный модуль на $d\varphi$, мы получаем кинематический винт — винт, выражающий бесконечно малое перемещение тела.

Пусть тело может совершать перемещение вдоль только одного винта $\boldsymbol{R}$ с комплексным модулем $R = e^{\omega p}$; умножив этот винт на $d\varphi$, получим перемещение

$$d\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{R}\, d\varphi, \quad d\Phi = e^{\omega p}\, d\varphi.$$

Зная винт перемещений, можно определить перемещение любой точки тела как момент винта относительно этой точки.

Перемещения всех точек тела, равноотстоящих от оси винта, направлены по касательным к винтовым линиям, построенным на оси винта и имеющим одинаковый шаг. Плоскость, нормальная к перемещению, является полярной по отношению к рассматриваемой точке; в ней лежат все лучи комплекса, проходящие через эту точку.

Если тело может совершать перемещения по двум винтам $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, заданным осями в пространстве и комплексными модулями

$$R_1 = e^{\omega p_1}, \quad R_2 = e^{\omega p_2},$$

то, сообщив телу два малых перемещения $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$ по этим винтам, мы получим результирующее движение, которое будет снова винтовым. Результирующий винт зависит как от положения осей винтов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, так и от элементарных перемещений $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$. Меняя последние, мы получим множество новых винтов, вдоль которых тело может совершать перемещения. Все они лежат на цилиндроиде, который может быть построен по двум данным винтам; в числе всех этих винтов имеются два, оси которых пересекаются под прямым углом. Если кроме винтов, лежащих на цилиндроиде, нет других, относительно которых тело могло бы перемещаться, то тело обладает двумя степенями свободы.

Если тело может совершать перемещения вдоль n винтов $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, . . . , $\boldsymbol{R}_n$, то возьмем какие-нибудь m из них ($m < n$) и сообщим телу m винтовых перемещений по ним. Результирующее перемещение будет винтом; предположим, что как бы мы ни меняли величины главных векторов их, т. е. величины элементарных поворотов, результирующий винт всегда будет отличаться от $n - m$ остальных винтов. В таком случае n винтов независимы. Тело, способное совершать перемещения вдоль n независимых винтов, обладает свободой n-й степени.

Изучение геометрического распределения всех винтов, вдоль которых может перемещаться тело, обладающее свободой n-й степени, сводится, следовательно, к изучению распределения всех винтов, входящих в n-членную группу. В частности, винты, вдоль которых может совершать движение тело, имеющее три степени свободы, распределяются по гиперболоидам таким образом, что на каждом из гиперболоидов лежат винты одного и того же параметра; среди них есть гиперболоид нулевого параметра, отвечающий чистым вращательным движениям тела.

Рассмотрим теперь силовую интерпретацию винтов. Силовой винт характеризуется совокупностью вектора силы и пары, момент которой параллелен вектору силы. Таким образом, главный вектор винта есть вектор силы, а главный момент — момент пары. Момент винта относительно некоторой точки пространства есть момент мотора, полученного в результате приведения винта к этой точке.

Из рассмотрения групп винтов вытекает, что если тело находится в равновесии под действием n силовых винтов, то необходимо, чтобы какой-нибудь из этих винтов входил в группу, образованную $n - 1$ остальными винтами. В частности, мы будем иметь:

а) для двух винтов равновесие возможно только в случае, если параметры винтов равны и оси их лежат на одной прямой;

б) для трех винтов, если их параметры одинаковы, равновесие возможно только в том случае, если оси их лежат в одной плоскости (цилиндроид, построенный на двух из них, должен быть плоскостью), а кроме того, оси должны пересекаться в одной точке;

в) для четырех винтов одинакового параметра, в частности для четырех сил, равновесие возможно, если оси винтов лежат на одном гиперболоиде (этот гиперболоид есть гиперболоид винтов равных параметров для трехчленной группы, определяемой тремя из данных винтов);

г) для пяти винтов одинакового параметра равновесие возможно, если оси этих винтов лежат на лучах одной конгруэнции;

д) для шести винтов одинакового параметра равновесие возможно, если оси этих винтов суть лучи одного и того же комплекса.

Наконец, для семи и большего числа винтов мы не получаем никакого необходимого условия, так как в общем случае любой из семи или большего числа винтов входит в группу, образованную шестью из этих винтов, если они линейно независимы.

Приведенные условия равновесия, являющиеся следствием свойств групп винтов, чрезвычайно важны для статики твердого тела, так как они содержат самые общие выводы для условий равновесия многих сооружений. В частности, они непосредственно относятся к сооружениям (фермам, фундаментам), прикрепляемым некоторым числом связей к основанию, и дают основание для суждения о неизменяемости (неподвижности) системы при наличии тех или иных связей. Эти же условия, в силу аналогии статики и кинематики, служат для определения подвижности пространственных шарнирных механизмов, в частности, дают возможность выявлять случаи «особенного» расположения звеньев, когда движение возможно, несмотря на присутствие избыточного числа связей в кинематических парах.

Значение взаимных винтов можно видеть на частном примере разыскания усилий в шести стержнях, произвольно расположенных в пространстве.

З а д а ч а. Твердое тело прикреплено к основанию шестью стержнями, на тело действует некоторый силовой винт P (рис. 38). Требуется найти значения сил S_1, S_2, ..., S_6, действующих вдоль прикрепляющих стержней. Задача сводится к разложению винта P по шести прямым пространства.

Применим принцип возможных перемещений. Мысленно удалим 6-й стержень. Тогда тело получит одну степень свободы, характеризующуюся движением по некоторому винту T_{12345}. Этот винт должен быть таким, чтобы перемещение точек тела, в которых присоединяются пять оставшихся стержней, были нормальны к осям этих стержней. Это означает, что винт T_{12345} определяет линейный комплекс, лучами которых служат эти пять стержней, а перемещения указанных точек происходят в их полярных плоскостях. Следовательно, винт T_{12345} взаимен со всеми пятью винтами (в данном случае нулевого параметра), оси которых направлены по пяти стержням. Этот винт может быть найден по способу, указанному выше (задача 4). Чтобы найти силу, действующую вдоль 6-го стержня, нужно разложить силовой винт P на две составляющие: одну — по винту U, взаимному с винтом T_{12345}, а другую — по оси 6-го стержня. Эта задача может быть выполнена чисто графически, для чего надо, изобразив винты орт-крестами, найти орт-крест U (в соответствии с задачей 2), а затем произвести элементарное разложение винта P. Далее таким же способом составляющая U разлагается по оси 5-го стержня и по винту, взаимному с четырьмя винтами 1, 2, 3, 4 и т. д. Можно выполнить и аналитическое решение, используя построенные с помощью орт-крестов взаимные винты. Составим выражение суммы работ на винте T_{12345} винта P внешних сил и силы S_6, действующей вдоль удаленного стержня, и, приравняв его нулю, получим одно уравнение с неизвестной величиной усилия в 6-м стержне. Усилия в остальных стержнях определяются аналогично.

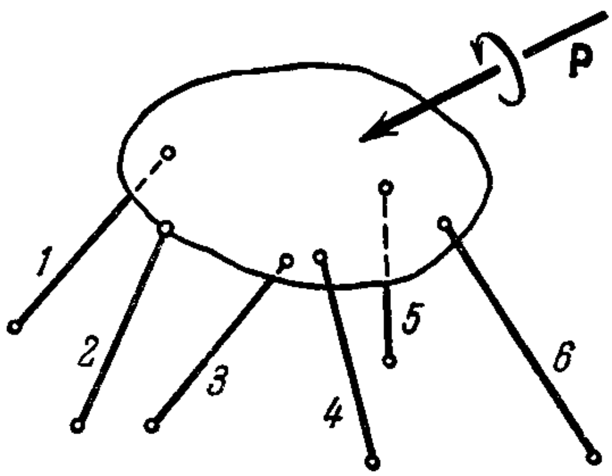

Рис. 38.

Работа силового винта на перемещении, совершающемся по кинематическому винту, есть моментная часть скалярного произведения этих винтов, или, что то же, относительный момент винтов.

Силовой винт можно уравновесить и меньшим числом винтов, т. е. тело может быть в равновесии и при числе стержней, меньшем шести. Однако при этом должно удовлетворяться то условие, чтобы действующий на тело силовой винт входил в группу, образуемую реакциями стержней. Если построить группу винтов, взаимных с винтами, оси которых направлены вдоль стержней, то действующий винт, удовлетворяющий такому условию, будет взаимен с этой построенной взаимной группой.

ГЛАВА VII

ВИНТОВЫЕ БИНОРЫ И ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Винтовой бинор

Преобразования винта с помощью диады и аффинора (см. гл. III) позволяют выразить координаты винта в некоторой системе координат через его координаты относительно другой системы координат. В общем случае это преобразование определяется девятью комплексными или восемнадцатью вещественными числами.

Если A — аффинор, то умножение этого аффинора на винт R, приведенный к некоторому мотору, выразится так:

$$R' = AR = A(r + \omega r^0) = Ar + \omega A r^0. \tag{7.1}$$

Более общее преобразование винта R получается умножением на него винтового бинора (A), введенного С. Г. Кислицыным [17] в качестве обобщения винтового аффинора, а именно

$$R' = (A)R = Ar + A^+ r^0. \tag{7.2}$$

Это преобразование переходит в преобразование (7.1) в том частном случае, когда

$$A^+ = \omega A. \tag{7.3}$$

Преобразование с помощью бинора определяется двумя матрицами с девятью комплексными элементами каждая, т. е. всего тридцатью шестью вещественными числами.

Преобразование посредством бинора вещественных компонент винта осуществляется умножением последних на элементы квадратной матрицы с шестью строками и шестью столбцами. Эта матрица оказывается тождественной с матрицей преобразования «моторов», введенной Р. Мизесом [12].

При отнесении винта к прямоугольному базису с помощью координат операция аффинного преобразования вектора $\boldsymbol{r}$ и момента $\boldsymbol{r}^0$ винта к новой системе сведется к умножению на эти векторы матриц

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} A^+_{11} & A^+_{12} & A^+_{13} \\ A^+_{21} & A^+_{22} & A^+_{23} \\ A^+_{31} & A^+_{32} & A^+_{33} \end{matrix} \right\|, \tag{7.4}$$

где

$$A_{ik} = a_{ik} + \omega a^0_{ik}, \quad A^+_{ik} = a^+_{ik} + \omega a^{+0}_{ik}.$$

Если развернуть произведение по вещественным координатам, то получится преобразование

$$\left.\begin{aligned} r'_x &= a_{11}r_x + a_{12}r_y + a_{13}r_z + a^+_{11}r^0_x + a^+_{12}r^0_y + a^+_{13}r^0_z, \\ r'_y &= a_{21}r_x + a_{22}r_y + a_{23}r_z + a^+_{21}r^0_x + a^+_{22}r^0_y + a^+_{23}r^0_z, \\ r'_z &= a_{31}r_x + a_{32}r_y + a_{33}r_z + a^+_{31}r^0_x + a^+_{32}r^0_y + a^+_{33}r^0_z, \\ r^{0\prime}_x &= a^0_{11}r_x + a^0_{12}r_y + a^0_{13}r_z + a^{+0}_{11}r^0_x + a^{+0}_{12}r^0_y + a^{+0}_{13}r^0_z, \\ r^{0\prime}_y &= a^0_{21}r_x + a^0_{22}r_y + a^0_{23}r_z + a^{+0}_{21}r^0_x + a^{+0}_{22}r^0_y + a^{+0}_{23}r^0_z, \\ r^{0\prime}_z &= a^0_{31}r_x + a^0_{32}r_y + a^0_{33}r_z + a^{+0}_{31}r^0_x + a^{+0}_{32}r^0_y + a^{+0}_{33}r^0_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Таким образом, умножение бинора на винт равносильно преобразованию его вещественных плюккеровых координат с помощью матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a^+_{11} & a^+_{12} & a^+_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a^+_{21} & a^+_{22} & a^+_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a^+_{31} & a^+_{32} & a^+_{33} \\ a^0_{11} & a^0_{12} & a^0_{13} & a^{+0}_{11} & a^{+0}_{12} & a^{+0}_{13} \\ a^0_{21} & a^0_{22} & a^0_{23} & a^{+0}_{21} & a^{+0}_{22} & a^{+0}_{23} \\ a^0_{31} & a^0_{32} & a^0_{33} & a^{+0}_{31} & a^{+0}_{32} & a^{+0}_{33} \end{matrix} \right\|. \tag{7.6}$$

Легко усмотреть, что в случае аффинора, т. е. при

$A^{+}_{ik} = \omega A_{ik} = \omega a_{ik}$, матрица (7.6) преобразования приобретает следующий частный вид:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a^0_{11} & a^0_{12} & a^0_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a^0_{21} & a^0_{22} & a^0_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a^0_{31} & a^0_{32} & a^0_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (7.7)$$

Если матрицы (7.6) и (7.7) представить как блочные, то они будут иметь вид соответственно

$$\left\Vert \begin{array}{c:c} A & A^{+} \\ \hdashline A^0 & A^{+0} \end{array} \right\Vert; \quad \left\Vert \begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline A^0 & A \end{array} \right\Vert. \qquad (7.8)$$

Операция повторного применения бинора приводит к перемножению матриц:

$$R'' = (B)R' = (B)\,(A)R = (C)R,$$

$$\begin{Vmatrix} C & C^{+} \\ C^0 & C^{+0} \end{Vmatrix} R = \begin{Vmatrix} B & B^{+} \\ B^0 & B^{+0} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A & A \\ A^0 & A^{+0} \end{Vmatrix} R = \begin{Vmatrix} BA + B^{+}A^0 & B^0A^{+} + B^{+}A^{+0} \\ B^0A + B^{+0}A^0 & B^0A^{+} + B^{+0}A^{+0} \end{Vmatrix} R. \qquad (7.9)$$

Бинор — линейный оператор, обладающий свойством

$$(A)\,(R_1 + R_2) = (A)R_1 + (A)R_2,$$
$$(A)\lambda R = \lambda\,(A)R, \qquad (7.10)$$

где λ — скалярный множитель.

Вернемся к преобразованию (7.2) и выразим матрицы A и A^{+} с комплексными элементами через вещественные матрицы

$$A = a + \omega a^0, \quad A^{+} = a^{+} + \omega a^{+0}.$$

Подставив в (7.2), получим

$$R' = (ar + a^{+}r^0) + \omega\,(a^0r + a^{+0}r^0). \qquad (7.2')$$

Выражение (7.2′) показывает, что при преобразовании винта R с помощью бинора главная часть преобразованного винта R' не является результатом преобразования только главной части винта $\boldsymbol{R}$, а зависит также от моментной части последнего. Следовательно, результат умножения бинора на винт представляет функцию винта, которая не выражается формулой (5.98) для винт-функции винта и, значит, она не удовлетворяет условию аналитичности, о котором было сказано в конце главы V.

§ 2. Бинор инерции твердого тела

А. П. Котельников [5] ввел понятие о винте количества движения системы материальных точек (кинетическом винте). Винт количества движения есть винт, эквивалентный системе скользящих векторов, оси которых проходят через точки системы и которые геометрически равны скоростям этих точек, умноженным на соответствующие массы.

Если связи системы таковы, что мы можем, не изменяя относительного расположения точек, сообщить всей системе во всяком ее положении винтовое перемещение, то говорят, что для системы возможен кинематический винт. В частности, если система представляет собой твердое тело, это будет кинематический винт, определяющий мгновенное винтовое движение тела, а если его отнести ко времени, это будет винт скоростей.

Пусть этот винт будет $\boldsymbol{U}$ с комплексным модулем

$$|\boldsymbol{U}| = U = ue^{\omega p} = u + \omega u^0, \ p = \frac{u^0}{u}, \tag{7.11}$$

где u — величина угловой скорости, $u^0 = pu$ — величина поступательной скорости точек тела, лежащих на винтовой оси.

Возьмем некоторую точку O на центральной оси кинематического винта и обозначим радиус-вектор произвольной точки тела, отсчитываемый от точки O, через $\boldsymbol{\rho}$.

Скорость точки, определяемая кинематическим винтом $\boldsymbol{U}$, представит момент мотора, полученного приведением этого винта к точке, причем радиусом приведения будет $\boldsymbol{\rho}$. Поэтому для скорости точки мы получим выражение

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\rho}. \tag{7.12}$$

Приписав точке тела элементарную массу dm, мы получим количество движения точки

$$\boldsymbol{v}\, dm = \boldsymbol{u}^0\, dm + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\rho}\, dm. \tag{7.13}$$

Момент количества движения точки относительно точки O равен выражению

$$\rho \times \boldsymbol{v}\, dm = \rho \times (\boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{u} \times \rho)\, dm. \tag{7.14}$$

Проинтегрировав (7.13) и (7.14) по всем точкам, получим вектор и момент количества движения твердого тела, образующие мотор, эквивалентный винту количества движения тела:

$$\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{k} + \omega \boldsymbol{k}^0 = \int \boldsymbol{v}\, dm + \omega \int \rho \times \boldsymbol{v}\, dm. \tag{7.15}$$

Напишем выражения (7.13) и (7.14) в прямоугольных координатах. Для проекции на оси x, y, z вектора количества движения мы будем иметь выражения

$$\left.\begin{aligned} v_x dm &= (u_x^0 + u_y\zeta - u_z\eta)\, dm,\\ v_y dm &= (u_y^0 + u_z\xi - u_x\zeta)\, dm,\\ v_z dm &= (u_z^0 + u_x\eta - u_y\xi)\, dm, \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

а для моментов этого вектора относительно тех же осей — выражения

$$\left.\begin{aligned} (v_z\eta - v_y\zeta)\, dm &= [u_z^0\eta - u_y^0\zeta + u_x(\eta^2 + \zeta^2) - u_y\xi\eta - u_z\xi\zeta]\, dm,\\ (v_x\zeta - v_z\xi)\, dm &= [u_x^0\zeta - u_z^0\xi - u_x\xi\eta + u_y(\xi^2 + \zeta^2) - u_z\eta\zeta]\, dm,\\ (v_y\xi - v_x\eta)\, dm &= [u_y^0\xi - u_x^0\eta - u_x\xi\zeta - u_y\eta\zeta + u_z(\xi^2 + \eta^2)]\, dm, \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

где ξ, η, ζ — проекции на оси x, y, z радиуса-вектора ρ.

Теперь проинтегрируем по всем точкам выражения (7.16) и (7.17), одновременно приняв обозначения:

$$\left.\begin{gathered} \int dm = m, \quad \int \xi\, dm = S_1, \quad \int \eta\, dm = S_2, \quad \int \zeta\, dm = S_3,\\ \int \eta\zeta\, dm = D_1, \quad \int \zeta\xi\, dm = D_2, \quad \int \xi\eta\, dm = D_3,\\ \int (\eta^2 + \zeta^2)\, dm = I_1, \quad \int (\xi^2 + \zeta^2)\, dm = I_2,\\ \int (\xi^2 + \eta^2)\, dm = I_3 \end{gathered}\right\} \tag{7.18}$$

для сокращенного выражения массы, статических моментов, произведений инерции и моментов инерции относительно осей.

Тогда мы найдем выражения проекций на оси x, y, z вектора $\boldsymbol{k}$ и момента $\boldsymbol{k}^0$ мотора, соответствующего винту количества движения тела

$$\left.\begin{aligned}
k_x &= S_3u_y - S_2u_z + mu_x^0, \\
k_y &= -S_3u_x + S_1u_z + mu_y^0, \\
k_z &= S_2u_x - S_1u_y + mu_z^0, \\
k_x^0 &= I_1u_x - D_3u_y - D_2u_z - S_3u_y^0 + S_2u_z^0, \\
k_y^0 &= -D_3u_x + I_2u_y - D_1u_z + S_3u_x^0 - S_1u_z^0, \\
k_z^0 &= -D_2u_x - D_1u_y + I_3u_z - S_2u_x^0 + S_1u_y^0.
\end{aligned}\right\} \quad (7.19)$$

Формулы (7.19) показывают, что мотор $\boldsymbol{k} + \omega\boldsymbol{k}^0$ получается умножением на мотор $\boldsymbol{u} + \omega\boldsymbol{u}^0$ бинора $(\boldsymbol{T})$, определяемого матрицей

$$\begin{Vmatrix}
0 & S_3 & -S_2 & m & 0 & 0 \\
-S_3 & 0 & S_1 & 0 & m & 0 \\
S_2 & -S_1 & 0 & 0 & 0 & m \\
I_1 & -D_3 & -D_2 & 0 & -S_3 & S_2 \\
-D_3 & I_2 & -D_1 & S_3 & 0 & -S_1 \\
-D_2 & -D_1 & I_3 & -S_2 & S_1 & 0
\end{Vmatrix},$$

а именно

$$(T) = \left(\begin{Vmatrix}
\omega I_1 & S_3 - \omega D_3 & -S_2 - \omega D_2 \\
-S_3 - \omega D_3 & \omega I_2 & S_1 - \omega D_1 \\
S_2 - \omega D_2 & -S_1 - \omega D_1 & \omega I_3
\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}
m & -\omega S_3 & \omega S_2 \\
\omega S_3 & m & -\omega S_1 \\
-\omega S_2 & \omega S_1 & m
\end{Vmatrix}\right), \quad (7.20)$$

что сокращенно можно записать так:

$$K = (T)U. \quad (7.21)$$

Бинор (T) называется бинором инерции твердого тела. Формула (7.21) выражает, следовательно, тот факт, что винт количества движения получается в результате умножения бинора инерции на кинематический винт.

§ 3. Уравнение движения твердого тела в виитовой форме

Дифференцируя по времени равенства (7.19), мы получаем в левой части производные по времени от проекций и моментов винта количества движения, а в правой части — производные по времени от составляющих произведения бинора инерции на кинематический винт. Соответствующие члены правой части равенств будут выражать произведения масс и статических моментов на проекции ускорения центра тяжести тела и произведения моментов инерции на угловые ускорения. Это будут проекции на оси координат и моменты относительно этих осей винта действующих сил. Следовательно, переходя к винтовому равенству (7.21), мы будем иметь соотношение, выведенное Р. Мизесом [13],

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\,[(\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{U}] = \boldsymbol{R}, \tag{7.22}$$

где $\boldsymbol{R}$ — винт действующих сил. Уравнение (7.22) есть винтовая форма записи закона количества движения и закона момента количества движения.

Пусть рассматриваемое тело имеет винтовое перемещение относительно неподвижного пространства, определяемое винтом $\boldsymbol{U}$; если мы пожелаем выразить производную по времени от винта $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{T})\boldsymbol{U}$ относительно неподвижного пространства через производную по времени относительно системы координат, связанной с движущимся телом, то мы должны будем применить формулу (5.72), в результате чего получим

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{K} = \frac{d'}{dt}\,[(\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{U}] + \boldsymbol{U}\times[(\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{U}] = \boldsymbol{R},$$

где символ d'/dt обозначает относительную, или «кажущуюся» производную, т. е. такую, какой она представляется наблюдателю, находящемуся на движущейся системе. Раскрыв скобки под знаком d' и замечая, что бинор инерции в системе координат, связанной с телом, является постоянным, т. е. что $d'(T) = 0$, получим

$$(T)\frac{d'U}{dt} + U \times [(T)U] = R. \tag{7.23}$$

Развертывание уравнений (7.22) и (7.23) по координатам приводит к системе шести уравнений динамики.

Сделаем одно необходимое замечание.

Предположим, что мы захотели бы из уравнения (7.23) получить уравнение динамики для тела, имеющего неподвижную точку (векторное уравнение). Для этой цели нужно было бы положить, что кинематический винт U обратился в вектор угловой скорости, проходящий через неподвижную точку. Взяв эту последнюю за начало координат, мы должны положить равными нулю координаты поступательного перемещения этой точки тела, а к проекциям главного вектора внешних сил добавить реакции в неподвижной точке. Уравнения динамики при этом распадутся на две группы по три уравнения. Но те три уравнения, которые выразят связь главной части винта U, т. е. вектора угловой скорости, с моментом внешних сил, не будут являться главной частью уравнений, а наоборот, будут их моментной частью. Соответствующее векторное уравнение будет не главной, а моментной частью винтового уравнения (7.23). Таким образом, дифференциальные уравнения для главной части кинематического винта не являются главной частью основных дифференциальных уравнений, а наоборот, они являются их моментной частью.

Это обстоятельство связано с тем фактом, что если в кинематическом винте главной частью, т. е. вектором, служит угловая скорость, то в силовом винте главной частью служит главный вектор сил; с другой стороны, обобщенной силой для угловой координаты является момент. Кроме того, при умножении бинора на винт в главной части оказываются как вектор так и момент. Следовательно, бинор нельзя получить из какого-либо вещественного оператора, заменив в нем вещественные величины на комплексные, т. е. бинор не является оператором, обладающим свойством «аналитичности», и винтовые формулы, полученные в результате его применения, не являются непосредственным обобщением векторных формул (см. § 1 этой главы).

На основании сказанного следует заключить, что получение винтового уравнения динамики произвольно движущегося тела из векторного уравнения динамики тела с неподвижной точкой путем использования принципа перенесения невозможно.

§ 4. Статика и малые колебания упруго подвешенного твердого тела

Представляет практический интерес решение задачи о равновесии и колебаниях твердого тела, подвешенного в пространстве с помощью некоторого числа упругих связей — пружин, — заключающейся в определении усилий в пружинах при действии на тело заданной силы. Расположение пружин может быть произвольным, однако должно выполняться непременное условие, что никакое перемещение тела невозможно без деформирования пружин, т. е. что вся система не может свободно перемещаться как механизм.

При числе пружин, большем чем шесть, задача о нахождении усилий является статически неопределимой. Однако если ввести какое-нибудь дополнительное условие, связывающее усилия в пружинах с их удлинениями (или сокращениями), то задачу можно свести к задаче статики твердого тела.

Примем зависимость, выражающуюся простой пропорциональностью между усилием в пружине и изменением ее длины и будем полагать, что при ненагруженном положении тела усилия во всех пружинах равны нулю. Кроме того, будем полагать перемещения тела малыми.

Положение осей пружин в пространстве определим их плюккеровыми координатами — направляющими косинусами единичных векторов E_i осей и моментами этих векторов относительно осей некоторой прямоугольной системы координат xyz. Пусть углы, образуемые осями пружин с осями координат, будут α_i, β_i, γ_i, а координаты точек прикрепления пружин к телу будут ξ_i, η_i, ζ_i, где i — номер пружины. Моменты единичных векторов осей пружин относительно осей координат будут иметь выражения

$$l_i = \eta_i \cos\gamma_i - \zeta_i \cos\beta_i, \quad m_i = \zeta_i \cos\alpha_i - \xi_i \cos\gamma_i,$$
$$n_i = \xi_i \cos\beta_i - \eta_i \cos\alpha_i$$

и, следовательно, плюккеровы координаты осей пружин будут следующие:

$$\cos\alpha_i,\ \cos\beta_i,\ \cos\gamma_i,\ l_i,\ m_i,\ n_i. \tag{7.24}$$

Сообщим телу малое винтовое перемещение, характеризуемое произвольным винтом **Ф**, задаваемым координатами

$$\varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_z,\ \delta_x,\ \delta_y,\ \delta_z,$$

где первые три величины — проекции угла поворота тела на оси координат, а последние три — проекции на те же оси перемещения точки тела, совпадающей с началом координат.

Чтобы выразить усилие в i-й пружине, возникшее в результате указанного перемещения, нужно найти перемещение какой-нибудь точки, неразрывно связанной с телом, лежащей на оси пружины (в частности, точки прикрепления пружины к телу) и спроектировать это перемещение на ось пружины. Мы получим удлинение или укорочение пружины, а умножив эту величину на коэффициент жесткости c_i пружины, мы найдем усилие S_i пружины. Но перемещение точки тела (малое) выражается моментом винта перемещений относительно этой точки, проекция же момента на прямую, проходящую через точку, есть относительный момент винта и прямой. Следовательно, для пружины с единичным вектором оси $\boldsymbol{E}_i$ при перемещении тела по винту **Ф** мы будем иметь усилие

$$S_i = c_i \operatorname{мом}(\mathbf{\Phi}\cdot\boldsymbol{E}_i) = \\ = c_i(\delta_x\cos\alpha_i + \delta_y\cos\beta_i + \delta_z\cos\gamma_i + \varphi_x l_i + \varphi_y m_i + \varphi_z n_i). \tag{7.25}$$

Выразим проекции сил $\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{E}_i S_i$ на оси координат и моменты их относительно этих осей, умножая величину S_i поочередно на каждую из шести величин (7.24), а затем, суммируя проекции и моменты по всем пружинам, найдем шесть координат $-P_x, -P_y, -P_z, -L_x, -L_y, -L_z$ силового винта, уравновешивающего тот силовой винт $\boldsymbol{R}$, который способен вызвать перемещение тела по винту **Ф**.

Заметим, что ввиду допущения о малости перемещения мы не делаем никакого различия между начальным, т. е.

ненагруженным, положением тела и конечным, т. е. получившимся после перемещения. В строительной механике стержневых систем, а также в теории малых колебаний это допущение является обычным; оно, кроме того, соответствует решению в первом приближении в тех случаях, когда учитывается нелинейность, связанная с учетом влияния составляющих перемещений второго и высших порядков малости.

Произведя указанные выше умножения и суммирования, мы получим следующую систему уравнений равновесия упруго-подвешенного твердого тела:

$$\left.\begin{aligned}
c_{11}\delta_x+c_{12}\delta_y+c_{13}\delta_z+c_{14}\varphi_x+c_{15}\varphi_y+c_{16}\varphi_z-P_x=0,\\
c_{21}\delta_x+c_{22}\delta_y+c_{23}\delta_z+c_{24}\varphi_x+c_{25}\varphi_y+c_{26}\varphi_z-P_y=0,\\
c_{31}\delta_x+c_{32}\delta_y+c_{33}\delta_z+c_{34}\varphi_x+c_{35}\varphi_y+c_{36}\varphi_z-P_z=0,\\
c_{41}\delta_x+c_{42}\delta_y+c_{43}\delta_z+c_{44}\varphi_x+c_{45}\varphi_y+c_{46}\varphi_z-L_x=0,\\
c_{51}\delta_x+c_{52}\delta_y+c_{53}\delta_z+c_{54}\varphi_x+c_{55}\varphi_y+c_{56}\varphi_z-L_y=0,\\
c_{61}\delta_x+c_{62}\delta_y+c_{63}\delta_z+c_{64}\varphi_x+c_{65}\varphi_y+c_{66}\varphi_z-L_z=0,
\end{aligned}\right\} \quad (7.26)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&c_{11}=\sum c\cos^2\alpha, \quad c_{22}=\sum c\cos^2\beta, \quad c_{33}=\sum c\cos^2\gamma,\\
&c_{12}=c_{21}=\sum c\cos\alpha\cos\beta, \quad c_{13}=c_{31}=\sum c\cos\alpha\cos\gamma,\\
&c_{14}=c_{41}=\sum c\cos\alpha l,\\
&c_{15}=c_{51}=\sum c\cos\alpha m, \quad c_{16}=c_{61}=\sum c\cos\alpha n,\\
&c_{24}=c_{42}=\sum c\cos\beta l, \quad c_{25}=c_{52}=\sum c\cos\beta m,\\
&c_{26}=c_{62}=\sum c\cos\beta n,\\
&c_{34}=c_{43}=\sum c\cos\gamma l, \quad c_{35}=c_{53}=\sum c\cos\gamma m,\\
&c_{36}=c_{63}=\sum c\cos\gamma n,\\
&c_{44}=\sum cl^2, \quad c_{55}=\sum cm^2, \quad c_{66}=\sum cn^2,\\
&c_{45}=c_{54}=\sum clm, \quad c_{46}=c_{64}=\sum cln,\\
&c_{56}=c_{65}=\sum cmn.
\end{aligned}\right\} \quad (7.27)$$

В формулах (7.27) суммирование ведется по всем пружинам; индекс i опущен.

Таким образом, решение статической задачи сводится к определению координат неизвестного винта перемещений $\boldsymbol{\Phi}$ по заданным координатам силового винта $\boldsymbol{R}$ из системы уравнений (7.26).

Уравнения (7.26) можно выразить в бинорной форме таким образом:

$$\begin{Vmatrix} c_{14}+\omega c_{44} & c_{15}+\omega c_{45} & c_{16}+\omega c_{46} \\ c_{24}+\omega c_{54} & c_{25}+\omega c_{55} & c_{26}+\omega c_{56} \\ c_{34}+\omega c_{64} & c_{35}+\omega c_{65} & c_{36}+\omega c_{66} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} c_{11}+\omega c_{41} & c_{12}+\omega c_{42} & c_{13}+\omega c_{43} \\ c_{21}+\omega c_{51} & c_{22}+\omega c_{52} & c_{23}+\omega c_{53} \\ c_{31}+\omega c_{61} & c_{32}+\omega c_{62} & c_{33}+\omega c_{63} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_x+\omega L_x \\ P_y+\omega L_y \\ P_z+\omega L_z \end{vmatrix} = 0 \quad (7.28)$$

или, введя сокращенное обозначение бинора упругости (C),

$$(C)\boldsymbol{\Phi} = \{C, C^+\}(\boldsymbol{\varphi} + \omega\boldsymbol{\delta}) = C\boldsymbol{\varphi} + C^+\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{R}. \quad (7.29)$$

Из линейности оператора (C) следует, что если заданы два состояния

$$(C)\boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{R}_1, \quad (C)\boldsymbol{\Phi}_2 = \boldsymbol{R}_2,$$

то состояние, соответствующее линейной комбинации перемещений $\boldsymbol{\Phi}_1$ и $\boldsymbol{\Phi}_2$, будет характеризоваться равенством

$$(C)(\lambda\boldsymbol{\Phi}_1 + \mu\boldsymbol{\Phi}_2) = \lambda\boldsymbol{R}_1 + \mu\boldsymbol{R}_2,$$

из которого следует, что линейной комбинации винтов перемещений соответствует линейная комбинация силовых винтов, действующих на тело. Линейная комбинация винтов с вещественными множителями есть винт, лежащий с основными винтами на одном цилиндроиде; если множители линейной комбинации комплексные, то ось винта линейной комбинации опишет щетку, т. е. множество прямых, пересекающих под прямым углом некоторую прямую. Щетку опишет как ось винта перемещений, так и ось силового винта.

Легко убедиться в справедливости следующего положения: если на тело действует статически силовой винт $\boldsymbol{R}'$, вызывающий упругое перемещение тела по винту $\boldsymbol{\Phi}'$, то при статическом действии силового винта $\boldsymbol{R}''$, взаимного с винтом $\boldsymbol{\Phi}'$, упругое перемещение тела произойдет по винту $\boldsymbol{\Phi}''$, взаимному с винтом $\boldsymbol{R}'$. Для доказательства рассмотрим состояния 1 и 2, соответствующие действию сил $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}''$, составим выражение работ внешних сил 1-го состояния на перемещениях 2-го состояния и внешних сил 2-го состояния на перемещениях 1-го состояния. Имеем:

а) для 1-го состояния сила — винт $\boldsymbol{R}'$, перемещение — винт $\boldsymbol{\Phi}'$, причем $\boldsymbol{R}' = (C)\boldsymbol{\Phi}'$,

б) для 2-го состояния сила — винт $\boldsymbol{R}''$, перемещение — винт $\boldsymbol{\Phi}''$, причем $\boldsymbol{R}'' = (C)\boldsymbol{\Phi}''$.

Составив выражение работы как моментной части скалярного произведения винтов и развернув его, получим

$$\begin{aligned}\text{мом}\ \{[(C)\,\boldsymbol{\Phi}']\cdot\boldsymbol{\Phi}''\} &= P'_x\delta''_x + P'_y\delta''_y + P'_z\delta''_z + L'_x\varphi''_x + \\ &+ L'_y\varphi''_y + L'_z\varphi''_z = c_{11}\delta'_x\delta''_x + c_{12}\delta'_y\delta''_x + c_{13}\delta'_z\delta''_x + \\ &+ c_{14}\varphi'_x\delta''_x + c_{15}\varphi'_y\delta''_x + c_{16}\varphi'_z\delta''_x + c_{41}\delta'_x\varphi''_x + c_{42}\delta'_y\varphi''_x + \\ &+ c_{43}\delta'_z\varphi''_x + c_{44}\varphi'_x\varphi''_x + c_{45}\varphi'_y\varphi''_x + c_{46}\varphi'_z\varphi''_x + \\ &+ c_{21}\delta'_x\delta''_y + c_{22}\delta'_y\delta''_y + c_{23}\delta'_z\delta''_y + c_{24}\varphi'_x\delta''_y + \\ &+ c_{25}\varphi'_y\delta''_y + c_{26}\varphi'_z\delta''_y + c_{51}\delta'_x\varphi''_y + c_{52}\delta'_y\varphi''_y + \\ &+ c_{53}\delta'_z\varphi''_y + c_{54}\varphi'_x\varphi''_y + c_{55}\varphi'_y\varphi''_y + c_{56}\varphi'_z\varphi''_y + \\ &+ c_{31}\delta'_x\delta''_z + c_{32}\delta'_y\delta''_z + c_{33}\delta'_z\delta''_z + c_{34}\varphi'_x\delta''_z + \\ &+ c_{35}\varphi'_y\delta''_z + c_{36}\varphi'_z\delta''_z + c_{61}\delta'_x\varphi''_z + c_{62}\delta'_y\varphi''_z + \\ &+ c_{63}\delta'_z\varphi''_z + c_{64}\varphi'_x\varphi''_z + c_{65}\varphi'_y\varphi''_z + c_{66}\varphi'_z\varphi''_z.\end{aligned}$$

Написанное выражение симметрично относительно индексов $'$ и $''$, откуда следует, что

$$\text{мом}\,\{[(C)\,\boldsymbol{\Phi}']\cdot\boldsymbol{\Phi}''\} = \text{мом}\,\{[(C)\,\boldsymbol{\Phi}'']\cdot\boldsymbol{\Phi}'\},$$

или

$$\text{мом}\,(\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{\Phi}'') = \text{мом}\,(\boldsymbol{R}''\cdot\boldsymbol{\Phi}'), \tag{7.30}$$

что представляет собой известную теорему взаимности.

Если силовой винт $\boldsymbol{R}''$ взаимен с винтом перемещений $\boldsymbol{\Phi}'$, то правая часть (7.30) равна нулю, а следовательно, равна нулю и левая часть (7.30), откуда следует, что винт перемещений $\boldsymbol{\Phi}''$ взаимен с силовым винтом $\boldsymbol{R}'$.

Сказанное дает возможность построить сравнительно простую схему определения винта $\boldsymbol{\Phi}$ по заданному силовому винту $\boldsymbol{R}$. Именно, сообщим телу пять перемещений по винтам $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_5$, каждый из которых взаимен с винтом $\boldsymbol{R}$. Такими винтами могут служить следующие: 1) винты Φ_1 и Φ_2, оси которых пересекают под прямым углом ось винта R и параметр которых равен нулю (простые повороты), 2) винты Φ_3 и Φ_4, оси которых перпендикулярны к оси винта $\boldsymbol{R}$ и параметр которых равен бесконечности (поступательные перемещения) и, наконец, 3) винт Φ_5, лежащий на одной оси с винтом $\boldsymbol{R}$ и имеющий параметр, равный по абсолютной величине параметру винта $\boldsymbol{R}$ и обратный ему по знаку. Последний винт будет взаимен с $\boldsymbol{R}$ в силу обращения в нуль выражения (3.12) для возможного коэффициента винтов Φ_5 и $\boldsymbol{R}$.

Каждому из перечисленных винтов перемещений будет соответствовать силовой винт, который способен, будучи приложен к телу, вызвать перемещение по этому винту. Пусть силовые винты, соответствующие пяти перечисленным винтовым перемещениям, будут $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_5$.

Теперь на основании сказанного можно видеть, что винт Φ, взаимный с винтами $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_5$, будет искомым винтом перемещений от действия силового винта $\boldsymbol{R}$.

Все решение может быть проведено с помощью графоаналитических и даже чисто графических операций, использующих геометрическую интерпретацию винтов в виде ортогональных крестов. Такое решение, в сущности, заменяет аналитическое решение системы уравнений (7.26).

Рассмотрим теперь малые колебания упруго подвешенного твердого тела, вызванные действием силового винта $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 \sin \lambda t$, где $\boldsymbol{R}_0$ — амплитудный винт.

Для этого случая необходимо использовать уравнение динамики твердого тела (7.22) вместе с уравнением статики (7.29).

Обозначим искомый винт через Φ, скоростной винт будет $\dot{\Phi}$. Выбрав произвольное начало координат 0, получим приведением к точке 0 моторы $\varphi + \omega\delta$ и $\dot{\varphi} + \omega\dot{\delta}$. На основании уравнения (7.22) для неподвижной системы координат будем иметь

$$\frac{d}{dt}[(T)\dot{\Phi}] = -\boldsymbol{R}_{\text{упр}} + \boldsymbol{R}_0 \sin \lambda t, \qquad (7.31)$$

где $\boldsymbol{R}_{\text{упр}}$ — винт внутренних упругих сил, выражаемый линейно через винт перемещений упруго подвешенного тела. Этот винт выражается на основании уравнения (7.29) следующим образом:

$$\boldsymbol{R}_{\text{упр}} = (C)\Phi. \tag{7.32}$$

Раскрыв в левой части уравнения (7.31) выражение в скобках под знаком производной по времени, а также подставив вместо него выражение из (7.32), получим

$$(\boldsymbol{T})\frac{d\dot{\Phi}}{dt} + \frac{d(T)}{dt}\dot{\Phi} + (C)\Phi = \boldsymbol{R}_0 \sin \lambda t.$$

Принимая во внимание малость амплитуд колебаний, а кроме того, предполагая, что эллипсоид инерции тела не слишком вытянут, для первого приближения решения задачи, соответствующего ее линейной постановке, можно допустить, что $d(\boldsymbol{T})/dt$ есть величина второго порядка малости и что ею можно пренебречь. В таком случае дифференциальное уравнение колебаний тела получит вид

$$(T)\ddot{\Phi} + (C)\Phi = \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 \sin \lambda t, \tag{7.33}$$

что представляет собой дифференциальное уравнение «винтового» осциллятора, равносильное шести скалярным дифференциальным уравнениям.

Здесь $(\boldsymbol{T})$ — бинор инерции, (C) — бинор упругости.

Для произвольно выбранной системы координат xyz уравнение (7.33) в бинорно-матричной записи имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \omega I_1 & S_3 - \omega D_3 & -S_2 - \omega D_2 \\ -S_3 - \omega D_3 & \omega I_2 & S_1 - \omega D_1 \\ S_2 - \omega D_2 & -S_1 - \omega D_1 & \omega I_3 \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} m & -\omega S_3 & \omega S_2 \\ \omega S_3 & m & -\omega S_1 \\ -\omega S_2 & \omega S_1 & m \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\delta}_x \\ \ddot{\delta}_y \\ \ddot{\delta}_z \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} c_{14} + \omega c_{44} & c_{15} + \omega c_{45} & c_{16} + \omega c_{46} \\ c_{24} + \omega c_{54} & c_{25} + \omega c_{55} & c_{26} + \omega c_{56} \\ c_{34} + \omega c_{64} & c_{35} + \omega c_{65} & c_{36} + \omega c_{66} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi^z \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{Vmatrix} c_{11}+\omega c_{41} & c_{12}+\omega c_{42} & c_{13}+\omega c_{43} \\ c_{21}+\omega c_{51} & c_{22}+\omega c_{52} & c_{23}+\omega c_{53} \\ c_{31}+\omega c_{61} & c_{32}+\omega c_{62} & c_{33}+\omega c_{63} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} P_x+\omega L_x \\ P_y+\omega L_y \\ P_z+\omega L_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix}. \qquad (7.34)$$

При соответствующем выборе системы координат можно добиться упрощения вида либо бинора (T), либо бинора (C). Допустим, что в качестве системы координат приняты три главных центральных оси инерции тела, тогда бинор инерции (T), фигурирующий в двух первых слагаемых левой части уравнения (7.34), примет простой вид:

$$\left(\begin{Vmatrix} \omega I_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega I_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega I_3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix} \right).$$

Предположим, что мы пожелали выбрать систему координат из соображений упрощения бинора (C) в уравнении (7.34). В общем случае, если за координаты движения принимать величины $\delta_{x,\,y,\,z}$ и $\varphi_{x,\,y,\,z}$ и не переходить к обобщенным винтовым координатам, то добиться существенного упрощения матриц не удается, как это можно видеть из приводимого ниже анализа. Этот анализ позволит выявить структуру «упругой подвески» твердого тела и установить, в каких случаях возможно то или иное упрощение.

Будем искать такие направления поступательного перемещения тела, при которых главный вектор суммарного усилия пружин параллелен перемещению. Очевидно, это сведется к устранению недиагональных элементов матрицы

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix},$$

и мы получим три взаимно перпендикулярных главных направления жесткости подвески.

В общем случае равнодействующая усилий пружин при поступательном перемещении тела будет винт; если принять оси системы координат параллельными трем главным направлениям жесткости подвески, то координаты осей x', y', z' трех соответствующих винтов будут

$$\left.\begin{aligned} \eta'_x &= \frac{\Sigma c \cos\alpha n}{\Sigma c \cos^2\alpha}, & \zeta'_x &= \frac{\Sigma c \cos\alpha m}{\Sigma c \cos^2\alpha}, \\ \xi'_y &= \frac{\Sigma c \cos\beta n}{\Sigma c \cos^2\beta}, & \zeta'_y &= \frac{\Sigma c \cos\beta l}{\Sigma c \cos^2\beta}, \\ \xi'_z &= \frac{\Sigma c \cos\gamma m}{\Sigma c \cos^2\gamma}, & \eta'_z &= \frac{\Sigma c \cos\gamma l}{\Sigma c \cos^2\gamma}. \end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

Величины векторов и моментов винтов, эквивалентных силам сопротивления пружин при поступательных перемещениях тела на единицу вдоль каждой из осей x, y, z, будут иметь выражения

$$X'_x = \sum c\cos^2\alpha, \quad Y'_x = 0, \quad Z'_x = 0,$$
$$L'_x = \sum c\cos\alpha l, \quad M'_x = 0, \quad N'_x = 0,$$
$$X'_y = 0, \quad Y'_y = \sum c\cos^2\beta, \quad Z'_y = 0, \quad L'_y = 0,$$
$$M'_y = \sum c\cos\beta m, \quad N'_y = 0,$$
$$X'_z = 0, \quad Y'_z = 0, \quad Z'_z = \sum c\cos^2\gamma,$$
$$L'_z = 0, \quad M'_z = 0, \quad N'_z = \sum c\cos\gamma n.$$

Нетрудно убедиться в том, что при чистых поворотах тела вокруг осей x^*, y^*, z^*, пересекающих под прямым углом пары осей $y'z'$, $x'z'$ и $x'y'$, оси равнодействующих винтов усилий в пружинах будут также параллельны осям вращения.

Пусть оси этих винтов будут x'', y'', z''. Величины главных векторов и главных моментов этих винтов определяются таким образом: усилие в i-й пружине при поворотах вокруг осей x^*, y^* и z^* на угол, равный единице, будет равно относительным моментам единичного вектора пружины с координатами (7.24) и единичных векторов указанных осей поворота, имеющих плюккеровы координаты (η'_z, ζ'_y),

(ξ_z', ζ_x'), (ξ_y', η_x'), т. е. равно соответственно

$$S_{ix} = c_i (l_i + \cos\beta_i \zeta_y' - \cos\gamma_i \eta_z'),$$
$$S_{iy} = c_i (m_i - \cos\alpha_i \zeta_x' + \cos\gamma_i \xi_z'),$$
$$S_{iz} = c_i (n_i + \cos\alpha_i \eta_x' - \cos\beta_i \xi_y').$$

Умножая эти величины поочередно на $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$, l_i, m_i, n_i и суммируя по всем пружинам, получим проекции и моменты в системе координат xyz винтов — равнодействующих усилий в пружинах:

$$\left.\begin{aligned}
X_x'' &= \sum S_{ix}\cos\alpha_i = \sum c_i \cos\alpha_i l_i,\\
Y_x'' &= \sum S_{ix}\cos\beta_i = 0, \quad Z_x'' = \sum S_{ix}\cos\gamma_i = 0,\\
T_x'' &= \sum S_{ix} l_i = \sum c_i l_i^2 + \zeta_y' \sum c_i \cos\beta_i l_i -\\
&\qquad - \eta_z' \sum c_i \cos\gamma_i l_i,\\
M_x'' &= \sum S_{ix} m_i = \sum c_i l_i m_i + \zeta_y' \sum c_i \cos\beta_i m_i -\\
&\qquad - \eta_z' \sum c_i \cos\gamma_i m_i,\\
N_x'' &= \sum S_{ix} n_i = \sum c_i l_i n_i + \zeta_y' \sum c_i \cos\beta_i n_i -\\
&\qquad - \eta_z' \sum c_i \cos\gamma_i n_i
\end{aligned}\right\} \qquad (7.36)$$

и т. д., а затем найдем координаты осей этих винтов

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_x'' &= \frac{\Sigma clm + \zeta_y' \Sigma c\cos\beta m - \eta_z' \Sigma c\cos\gamma n}{\Sigma c\cos\alpha l},\\
\eta_x'' &= \frac{\Sigma cln + \zeta_y' \Sigma c\cos\beta n - \eta_z' \Sigma c\cos\gamma n}{\Sigma c\cos\alpha l},\\
\zeta_y'' &= \frac{\Sigma cml - \zeta_x' \Sigma c\cos\alpha l + \xi_z' \Sigma c\cos\gamma l}{\Sigma c\cos\beta m},\\
\xi_y'' &= \frac{\Sigma cmn - \zeta_x' \Sigma c\cos\alpha n + \xi_z' \Sigma c\cos\gamma n}{\Sigma c\cos\beta m},\\
\eta_z'' &= \frac{\Sigma cln + \eta_x' \Sigma c\cos\alpha l - \xi_y' \Sigma c\cos\beta l}{\Sigma c\cos\gamma n},\\
\xi_z'' &= \frac{\Sigma cnm + \eta_x' \Sigma c\cos\alpha m - \xi_y' \Sigma c\cos\beta m}{\Sigma c\cos\gamma n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.37)$$

Величины векторов и моментов всех сил сопротивления пружин при поворотах тела вокруг x^*, y^*, z^* на углы, равные единице, будут

$$X''_x = \sum c \cos \alpha l, \quad Y''_x = 0, \quad Z''_x = 0,$$
$$L''_x = \sum c l^2 + \zeta'_y \sum c \cos \beta l - \eta'_z \sum c \cos \gamma l, \quad M''_x = N''_x = 0,$$
$$X''_y = 0, \quad Y''_y = \sum c \cos \beta m, \quad Z''_y = 0, \quad L''_y = 0,$$
$$M''_y = \sum c m^2 - \zeta'_x \sum c \cos \alpha m - \xi'_z \sum c \cos \gamma n, \quad N''_y = 0,$$
$$X''_z = 0, \quad Y''_z = 0, \quad Z_z = \sum c \cos \gamma n, \quad L''_z = M''_z = 0,$$
$$N''_z = \sum c n^2 + \eta'_x \sum c \cos \alpha n - \xi'_y \sum c \cos \beta n.$$

Оси этих винтов параллельны осям x, y, z, а их положения определяются формулами (7.37).

Таким образом, единичные поступательные перемещения тела вдоль некоторых трех взаимно перпендикулярных направлений и единичные повороты тела вокруг определенных трех осей, им параллельным, приводят к системе шести винтов (X', L'), (Y', M'), (Z', N') и (X'', L''), (Y'', M''), (Z'', N'') равнодействующих усилий в пружинах. Оси этих винтов в общем случае не пересекаются. Расположение осей схематически показано на рис. 39.

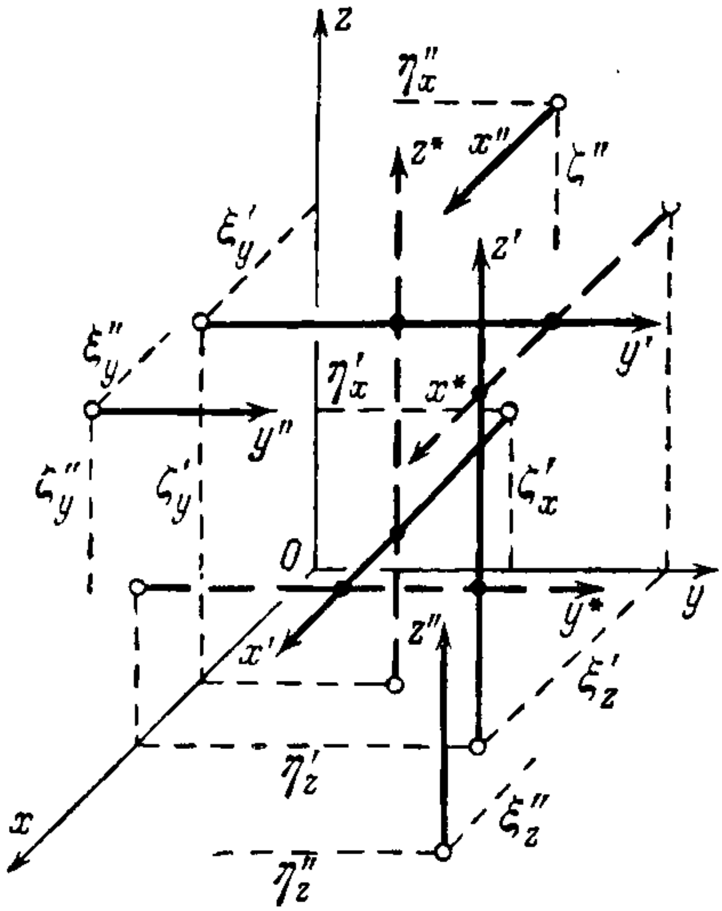

Рис. 39.

Очевидно, что система из шести указанных винтов характеризует структуру упругой подвески тела, т. е. системы пружин. В частных случаях система может быть симметричной относительно одной из плоскостей — в этом случае оси двух из винтов пересекаются и параметры этих винтов равны нулю; при системе, имеющей две плоскости симметрии, две оси винтов пересекают третью; возможна квазисимметричная система, в которой оси шести указанных винтов представляют две совпадающие взаимно перпендикулярные тройки, причем параметры этих винтов не равны нулю. В последнем случае подвеска имеет «центр» упругости, а оси винтов суть главные оси упругости.

Из рассмотрения схемы на рис. 39 можно сделать заключение, что в общем случае система уравнений не распадается на независимые уравнения, если в качестве искомых координат принять поступательные перемещения и повороты тела относительно отдельных осей. Это возможно лишь в частном случае — при наличии центра упругости и при совпадении главных центральных осей инерции тела с главными осями упругости.

Задача о колебаниях упруго подвешенного тела заключается в определении винта перемещений $\boldsymbol{\Phi}$ по заданному силовому винту $\boldsymbol{R}$. Эта задача не представляет принципиальной трудности и на ее аналитическом решении мы останавливаться не будем. Представляют интерес некоторые свойства рассматриваемой системы упруго подвешенного тела и геометрическая интерпретация его колебаний — положение осей винтов перемещений в зависимости от осей силовых винтов, действующих на систему.

В случае, когда за оси координат приняты главные центральные оси инерции тела, система из шести дифференциальных уравнений, эквивалентная бинорному уравнению (7.33), записанная в векторной форме, после отделения моментной части от главной будет

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 \sin\lambda t, \\ \boldsymbol{T}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{C}_4\boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 \sin\lambda t, \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

где

$$\boldsymbol{M} = \begin{Vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{Vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_1 = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{Vmatrix} c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{34} & c_{35} & c_{36} \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_3 = \begin{Vmatrix} c_{41} & c_{51} & c_{61} \\ c_{42} & c_{52} & c_{62} \\ c_{43} & c_{53} & c_{63} \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_4 = \begin{Vmatrix} c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{Vmatrix}.$$

При $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{L}_0 = 0$ мы имеем собственные колебания тела. Так как система имеет шесть степеней свободы, то всего существует шесть собственных частот $\lambda^{(\mu)}$, каждой из которой соответствует «собственный винт» $\boldsymbol{\Phi}^{(\mu)} = \boldsymbol{\Phi}_0^{(\mu)} \sin \lambda t$, где $\boldsymbol{\Phi}_0^{(\mu)}$ — амплитудный винт с координатами

$$\varphi_x^{(\mu)},\ \varphi_y^{(\mu)},\ \varphi_z^{(\mu)},\ \delta_x^{(\mu)},\ \delta_y^{(\mu)},\ \delta_z^{(\mu)}, \qquad (7.39)$$

причем три первые координаты — координаты его главного вектора, а три последние — координаты главного момента относительно начала координат. Этому собственному винту соответствует силовой винт, эквивалентный системе всех элементарных сил инерции тела, совершающего колебания по собственному винту. Координаты силового винта будут иметь выражения

$$\begin{gathered} -\lambda^2 m\delta_x^{(\mu)}, \quad -\lambda^2 m\delta_y^{(\mu)}, \quad -\lambda^2 m\delta_z^{(\mu)}, \quad -\lambda^2 I_x\varphi_x^{(\mu)}, \\ -\lambda^2 I_y\varphi_y^{(\mu)}, \quad -\lambda^2 I_z\varphi_z^{(\mu)}, \qquad (7.40) \end{gathered}$$

где первые три координаты — координаты главного вектора всех сил, а три последние — координаты главного момента всех сил относительно начала координат.

Так как между координатами двух собственных винтов, соответствующих собственным частотам $\lambda^{(\mu)}$ и $\lambda^{(\nu)}$, существует условие ортогональности

$$\begin{gathered} I_x\varphi_x^{(\mu)}\varphi_x^{(\nu)} + I_y\varphi_y^{(\mu)}\varphi_y^{(\nu)} + I_z\varphi_z^{(\mu)}\varphi_z^{(\nu)} + m\delta_x^{(\mu)}\delta_x^{(\nu)} + \\ + m\delta_y^{(\mu)}\delta_y^{(\nu)} + m\delta_z^{(\mu)}\delta_z^{(\nu)} = 0, \qquad (7.41) \end{gathered}$$

а это условие будет равносильно условию взаимности инерционного силового винта, соответствующего μ-й форме колебаний, с кинематическим винтом, соответствующим ν-й форме, если обе части (7.41) умножить на $-\lambda^{(\mu)2}$, то из этого мы делаем заключение, что винт, эквивалентный системе всех элементарных сил инерции при колебаниях тела по одному из шести собственных винтов, взаимен со всеми остальными пятью собственными винтами.

Для винта внешних сил и винта перемещений тела при колебаниях существуют зависимости, подобные зависимостям между винтом внешних сил и винтом перемещений при статическом действии внешних сил.

Пусть на тело действует внешний силовой винт $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}_0' \sin \lambda t$, и пусть винт перемещений будет $\boldsymbol{\Phi}' = \boldsymbol{\Phi}_0' \sin \lambda t$, где $\boldsymbol{R}_0'$, $\boldsymbol{\Phi}_0'$ — амплитудные винты. Можно показать, что для внешнего силового винта $\boldsymbol{R}'' = \boldsymbol{R}_0'' \sin \lambda t$, взаимного с $\boldsymbol{\Phi}'$, винт перемещений $\boldsymbol{\Phi}''$ будет взаимен с винтом $\boldsymbol{R}'$.

В самом деле, на основании теоремы взаимности можно написать соотношение для координат винтов

$$\begin{aligned}
&(P_x'\delta_x'' + P_y'\delta_y'' + P_z'\delta_z'' + L_x'\varphi_x'' + L_y'\varphi_y'' + L_z'\varphi_z'') - \\
&-\lambda^2 (m\delta_x'\delta_x'' + m\delta_y'\delta_y'' + m\delta_z'\delta_z'' + I_x\varphi_x'\varphi_x'' + I_y\varphi_y'\varphi_y'' + I_z\varphi_z'\varphi_z'') = \\
&\quad = (P_x''\delta_x' + P_y''\delta_y' + P_z''\delta_z' + L_x''\varphi_x' + L_y''\varphi_y' + L_z''\varphi_z') - \\
&\qquad -\lambda^2 (m\delta_x''\delta_x' + m\delta_y''\delta_y' + m\delta_z''\delta_z' + I_x\varphi_x''\varphi_x' + \\
&\qquad\qquad + I_y\varphi_y''\varphi_y' + I_z\varphi_z''\varphi_z'). \quad (7.42)
\end{aligned}$$

В левой и правой частях равенства (7.42) первые члены в скобках представляют относительные моменты внешнего силового винта и винта перемещения твердого тела; вторые члены — относительные моменты винта сил инерции (производной по времени от кинематического винта) и винта перемещения. Эти относительные моменты суть выражения работ сил на перемещениях, причем левая часть равенства есть выражение работы сил первого состояния на перемещениях второго состояния, вторая — выражение работы сил второго состояния на перемещениях первого состояния.

Так как работа сил инерции в правой и левой частях при одинаковой частоте λ одна и та же, то работа внешнего силового винта первого состояния на винте перемещения второго состояния равна работе внешнего силового винта второго состояния на винте перемещения первого состояния, т. е.

$$\text{мом}\,(\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{\Phi}'') = \text{мом}\,(\boldsymbol{R}''\cdot\boldsymbol{\Phi}').$$

Но вторая работа равна нулю, так как по условию винт $\boldsymbol{R}''$ взаимен с винтом $\boldsymbol{\Phi}''$, откуда следует, что

$$\text{мом}\,(\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{\Phi}'') = 0, \qquad (7.43)$$

т. е. что винт $\boldsymbol{\Phi}''$ взаимен с винтом $\boldsymbol{R}'$.

Доказанное свойство совершенно тождественно со свойством системы при статическом действии винта внешних сил, при условии равных частот вынужденных колебаний в первом и втором состояниях. На основании этого свойства можно найти амплитудный винт перемещений тела при заданном амплитудном винте внешних сил, применив ту же схему, какая была описана при рассмотрении статики упруго подвешенного твердого тела (стр. 184—185).

Если винт $\boldsymbol{R}$ представляет линейную комбинацию

$$\boldsymbol{R} = \lambda \boldsymbol{R}_1 + \mu \boldsymbol{R}_2 \tag{7.44}$$

с изменяющимися вещественными параметрами λ и μ, то его ось описывает линейчатую поверхность, постоянно

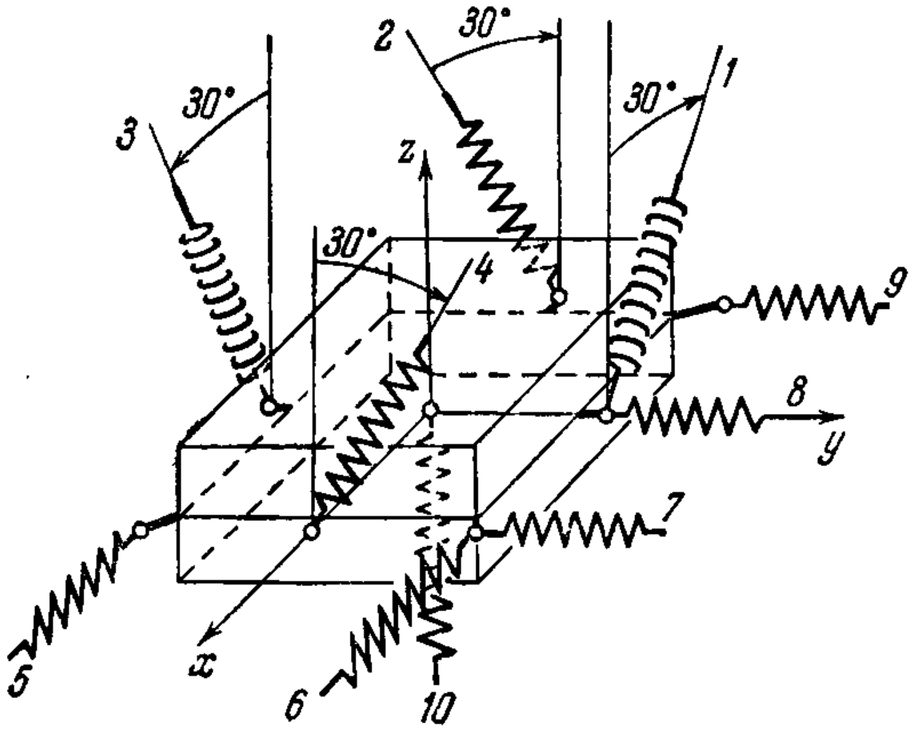

Рис. 40.

пересекая некоторую прямую линию — ось поверхности, о чем уже было раньше сказано. Винт перемещений $\boldsymbol{\Phi}$ твердого тела также будет описывать поверхность

$$\boldsymbol{\Phi} = \lambda \boldsymbol{\Phi}_1 + \mu \boldsymbol{\Phi}_2, \tag{7.45}$$

где $\boldsymbol{\Phi}_1$ и $\boldsymbol{\Phi}_2$ — винты перемещений, соответствующие отдельному действию $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$. Если ось поверхности (7.45) совпадает с осью какой-либо пружины, то усилие в этой пружине при изменении, согласно (7.44), будет равно нулю. Можио поставить такую задачу: найти комбинацию винтов типа (7.44) (в частности, это может быть вращающийся эксцентрик), при котором в заданной пружине не будет возникать усилий. Действительно, пусть Φ_1 и Φ_2 — какие-нибудь два винта перемещений тела, оси которых пересекают под прямым углом ось заданной пружины. Построив два силовых винта R_1 и R_2 — равнодействующих усилий в пружинах, мы получим ось — линию кратчайшего расстояния между последними винтами, которую будет пересекать любая линейная комбинация этих винтов, вызывающая перемещение по винту — линейной комбинации Φ_1 и Φ_2, которое не вызовет усилий в заданной пружине. Заметим, что параметры винтов Φ_1 и Φ_2 можно назначать произвольно, что позволяет выбирать более рациональную комбинацию силовых винтов.

В заключение рассмотрим пример пространственной системы (рис. 40). В этой системе упругая подвеска имеет три главных оси; матрица коэффициентов уравнений (7.26) имеет следующую структуру:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & c_{25} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{52} & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{Vmatrix}. \tag{7.46}$$

Приведенные коэффициенты — квадраты парциальных частот

$$\frac{c_{11}}{m} = \lambda_1^2 = 2500, \qquad \frac{c_{22}}{m} = \lambda_2^2 = 3500, \qquad \frac{c_{33}}{m} = \lambda_3^2 = 4000,$$

$$\frac{c_{44}}{m\rho_x^2} = \lambda_4^2 = 4500, \qquad \frac{c_{55}}{m\rho_y^2} = \lambda_5^2 = 5000, \qquad \frac{c_{66}}{m\rho_z^2} = \lambda_6^2 = 6000,$$

$$\frac{c_{14}}{m\rho_x} = \lambda_{14}^2 = 1772, \qquad \frac{c_{25}}{m\rho_y} = \lambda_{25}^2 = 1969, \qquad \frac{c_{36}}{m\rho_z} = \lambda_{36}^2 = 2474.$$

Радиусы инерции тела

$$\rho_x = 0{,}5a, \quad \rho_y = a, \quad \rho_z = \sqrt{0{,}5a}, \quad a = 10 \text{ см}.$$

Система уравнений с матрицей (7.46) распадается на независимые три пары уравнений с двумя неизвестными, собственные частоты из которых получаются равными

$$\lambda^{(1)} = 42{,}28,\quad \lambda^{(2)} = 52{,}10,\quad \lambda^{(3)} = 55{,}92,$$
$$\lambda^{(4)} = 81{,}93,\quad \lambda^{(5)} = 91{,}01,\quad \lambda^{(6)} = 104{,}27.$$

При действии на систему гармонической пары, ось которой равнонаклонена к осям x, y и z, ось винта перемещений определяется из системы уравнений с правой частью.

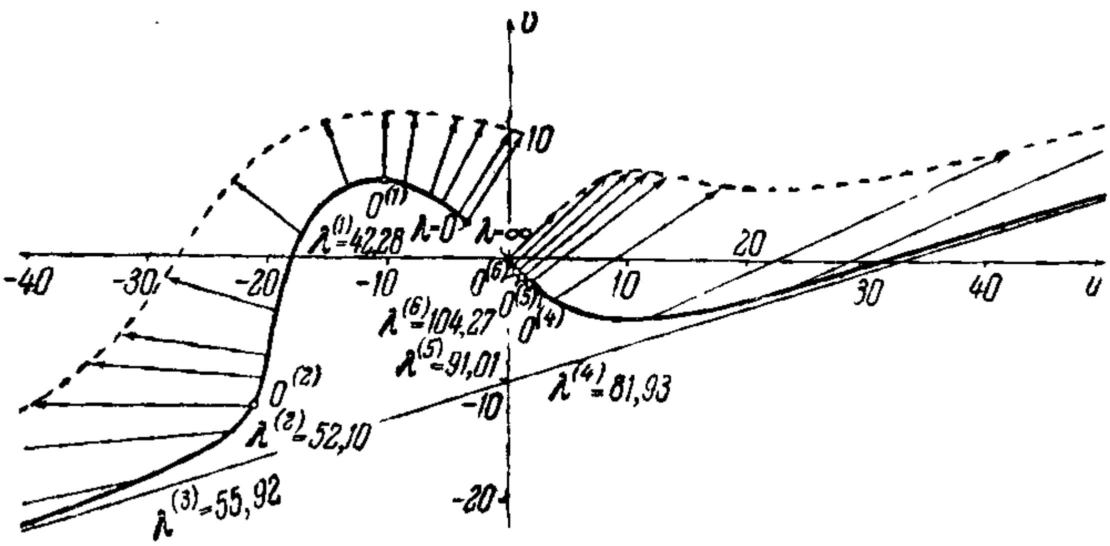

Рис. 41.

При изменении частоты λ вынужденных колебаний от 0 до ∞ ось винта описывает линейчатую поверхность. Координаты точек пересечения этой поверхности с плоскостью xy определяются по формулам

$$u = \frac{\delta_y - p\varphi_y}{\varphi_z}, \qquad v = \frac{\delta_x - p\varphi_x}{\varphi_z}, \tag{7.47}$$

где p — параметр винта, соответствующий данной образующей, определяемый по формуле

$$p = \frac{\delta_x\varphi_x + \delta_y\varphi_y + \delta_z\varphi_z}{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}. \tag{7.48}$$

Построив в горизонтальной плоскости uv при каждой точке векторы, пропорциональные величинам φ_x/φ_z и φ_y/φ_z, мы получим горизонтальные составляющие векторов, лежащих на образующих поверхности (осях винтов), концы которых лежат в плоскости, параллельной плоскости uv.

На рис. 41 показаны кривые в плоскости uv и в параллельной ей плоскости, изображающие пересечение линейчатой поверхности, описываемой осью винта при изменении частоты вынужденных колебаний от 0 до ∞, с двумя горизонтальными плоскостями. Нижнюю и верхнюю плоскости указывают соответствующие векторы осей винтов. Таким образом, на основании сделанного чертежа можно судить о характере поверхности, описываемой осью винта перемещений при изменении частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ball R., A. Treatise on the Theory of the Screws, Dublin, 1876. Имеется издание 1900 г.
2. Ball R., Adress to the Mathematical and Physical Section of the British Assotiation, Manchester, 1887. A. Dynamical Parabel. (Напечатано также как приложеиие в книге [1], изд. 1900 г.)
3. Занчевский И., Теория виитов, Изв. матем. отд. Новороссийского об-ва естествоиспытателей, т. IX, Одесса, 1889.
4. Clifford W., Preliminary Scetch of Biquaternions, Proceed. of the London Mathemat. Soc., т. IV, 1873.
5. Котельииков А. П., Виитовое счисление и некоторые приложеиия его к геометрин и механике, Казаиь, 1895.
6. Study E., Geometry der Dynamen, Leipzig, 1901, 1903.
7. Schilling Fr. Ueber die Geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente, Math. Ann., B.XXXIX, 1891.
8. Saussure R., Etude de Geometrie Cinematique reglee, American Journ. of Mathem., 19, 1897.
9. Котельников А. П., Теория векторов и комплексиые числа, Сбориик «Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике», Гостехиздат, 1950.
10. Study E., Ueber neue Darstellung der Kräfte, Berichte über die Verhandl. der Sächs. Akademie. Ges. der Wiss. Mathem. Theil, т. 51, Leipzig, 1899.
11. Study E., Ueber Nicht-Euklidische und Liniengeometrie, Festschr. der Philos. Fakultät zu Greifswald, 1900.
12. Mises R., Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik, ZAMM, т. IV, вып. 2, 1924.
13. Mises R., Anwendungen der Motorrechnung, ZAMM, т. IV, вып. 3, 1924.
14. Зейлигер Д. Н., Комплексиая линейчатая геометрия, Гостехиздат, 1934.
15. Бляшке В., Дифференциальная геометрия, перев. с нем., ОНТИ, 1935.
16. Лагалли М., Векториое исчисление, перев. с ием., ОНТИ, 1936.
17. Кислицын С. Г., Виитовые аффиноры и некоторые их приложеиия к вопросам кинематики твердого тела, Уч. зап. Ленингр. Гос. педаг. ин-та им. А. И. Герцеиа, т. X, 1938.
18. Диментберг Ф. М., Конечные перемещеиия пространствениого четырехзвеиника с цилиндрическими парами и случаи пассивных связей, ПММ, т. XI, вып. 6, 1947.

19. Диментберг Ф. М., Общий метод исследования конечных перемещений пространственных механизмов и некоторые случаи пассивных связей, Труды семинара по ТММ, вып. 17, Ин-т машиноведения АН СССР, 1948.
20. Диментберг Ф. М., Определение положений пространственных механизмов, Изд. АН СССР, 1950.
21. Кислицын С. Г., Тензорный метод в теории пространственных механизмов, Труды семинара по ТММ, вып. 54, Ин-т машиноведения, 1954.
22. Кислицын С. Г., Определение положений некоторых пространственных механизмов, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, т. 125, 1956.
23. Кислицын С. Г., Винтовые биноры и их приложения, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена.
24. Диментберг Ф. М., Кислицын С. Г., Применение винтового исчисления к анализу пространственных механизмов, Труды II Всесоюзного совещания по проблемам динамики машин, Машгиз, 1960.
25. Литвин Ф. Л., Применение винтового исчисления и матриц к исследованию пространственных зацеплений, Труды Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, № 182, 1955.
26. Yang A. T., Freidenstein F., Application of Dual—Nomber Quaternion Algebra to the Analisis of Spatial Mechanisms, Journ. of Appl. Mech. Transact. ASME, Ser. E. 1964, № 2.
27. Диментберг Ф. М., Шор Я. Б., Графическое решение задач пространственной механики при помощи изображения в одной плоскости, ПММ, т. IV, вып. 5, 1940.
28. Шор Я. Б., Об определении винтовых осей в пространственных механизмах, ПММ, т. V, вып. 2, 1941.
29. Morley, On a regular rectangular Configuration of ten Lines, Proceed. Lond. Soc., т. 29, 1898.
30. Petersen, Oversight over d. k. danske Vidensk Selskabs Forhand, 1898.
31. Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.
32. Фиников С. П., Дифференциальная геометрия, Изд. Моск. университета, 1961.
33. Федоров Е. С., Новая начертательная геометрия. Изв. Акад. наук, № 12, 1917.
34. Шор Я. Б., О приложении начертательной геометрии в пространственной механике, Инженерный сборник, т. II, вып. 1, 1943.
35. Mayor B., Statique graphique des systemes de l'espace, Lausanne—Paris, 1910.
36. Горбунов Б. Н. и Уманский А. А., Статика пространственных систем, Госстройиздат, 1932.

Федор Менасьевич Диментберг

Виитовое исчисление
и его приложение в механике
М., 1965 г., 200 стр. с илл.
Редантор *И. Л. Антонов*
Технический редактор *А. А. Благовещенская*
Корректор *А. Ф. Серкина*

Сдано в набор 20/V 1955 г. Подпнсано к печати 9/XI 1965 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 6,25. Условн. печ. л. 10,25. Уч.-изд. л. 8,61. Тираж 7500 экз. Т-13757. Цена книги 43 коп. Заказ № 2819.

Издательство «Наука»
Главная редакцня
физико-математнческой литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.