Г. Г. Димитриади Модели финансовых пирамид: детерминированный подход. – М.: Едиториал УРСС, 2002.
Опубликовано на сайте «Миркин.Ру» в декабре 2002 года

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Г. Г. Димитриади

МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ПИРАМИД: ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД

Развивается подход к описанию финансовых пирамид, предложенный С. В. Дубовским. Получены аналитические формулы для времени жизни финансовой пирамиды, выручки ее Организатора и вкладчиков при различных характерах ее роста. Рассмотрена и решена задача максимизации выручки Организатора в момент окончания финансовой пирамиды по цене-параметру продажи обязательств Организатора. Приведена постановка задачи оптимального управления, отвечающей случаю зависящей от времени цены, и отмечены ее особенности.

1. Введение

В литературе существует несколько подходов к математическому описанию финансовых пирамид.

Первый подход. Основным предположением, лежащим в основе первого подхода, является предположение о рациональном поведении всех участников рынка.

Вопрос, на который отвечают авторы работы [1], можно кратко сформулировать так: как могут возникнуть и какие формы могут принимать финансовые пирамиды (bubbles)? При этом под финансовыми пирамидами авторы понимают изменение цен, простым образом необъясняемое с помощью имеющейся информации и имеющее вид резкого повышения цен с последующим крахом.

Авторы [1] получают, что и в предположении всеобщей рациональности возможны финансовые пирамиды. Они могут принимать вполне определенную форму экспоненциального роста отклонения цен активов от их базисной цены (NPV денежных потоков, связанных с актовом) и т.д.

В [1] имеются примеры финансовых пирамид, приводятся тесты для их статистического нахождения и примеры успешного применения этих тестов.

Второй подход. Этот подход можно назвать игровым. Рассмотрим его основную идею.

В качестве вкладчиков финансовой пирамиды может выступать все экономически активное население страны или его часть. Желанием Организатора является привлечение как можно большего их числа, т.к. при этом он максимизирует свою прибыль.

В рамках данного подхода Организатор и население рассматриваются как участники одной игры Понци с разными (неантагонистическими) интересами. Возможным выбором Организатора (фирмы Понци) на каждом шаге является либо выполнение всех своих обязательств, для которых наступил срок выполнения, и продолжение существования пирамиды, либо отказ от их выполнения и «уход в тень от обманутых вкладчиков» (крах финансовой пирамиды). В это же время каждый представитель населения на каждом шаге решает, принимать ли участие в финансовой пирамиде, или нет.

Время жизни пирамиды в рассматриваемом подходе зависит от характера изменения числа ее вкладчиков с течением времени, и ее крах заранее предрешен при исчерпании всего населения.

Этот подход положен в основу работы [2]. Авторы делят население на две группы: мудрствующих и наивных индивидов, для которых используются различные критерии поведения (ограниченные критерии рациональности). Основной вывод, полученный в [2], состоит в том, что единственным равновесным состоянием в рассматриваемой игре является отсутствие финансовой пирамиды.

Третий подход. В этом подходе, предложенном С. В. Дубовским [3, 4], предполагается, что обязательства Организатора в рамках финансовой пирамиды погашаются им только за счет собранных средств без привлечения сторонних средств и что крах финансовой пирамиды обусловлен свойствами самой пирамиды: у Организатора финансовой пирамиды в некоторый момент времени может оказаться недостаточно средств для выполнения собственных обязательств.

Настоящая статья лежит в рамках последнего подхода. Основные уравнения модели, расчет линейного случая, а также постановка задачи оптимизации принадлежат С. В. Дубовскому [3, 4].

Во втором разделе данной статьи описывается модель финансовой пирамиды, рассматриваемая в работе, выписываются уравнения и отмечаются основные особенности.

Третий раздел посвящен описанию финансовых пирамид с различными заданными функциями роста $g(t)$ (линейная, степенная, экспоненциальная и логистические функции) и фиксированной ценой продажи c_g ценных бумаг Организатора.

В четвертом разделе рассматривается усовершенствование модели. Будет сделано предположение о том, что целью Организатора финансовой пирамиды является максимизация собственной выручки в момент окончания пирамиды. Будут даны две крайние постановки задач соответствующей оптимизации.

Пятый раздел и Приложения 1-2 посвящены решению задачи максимизация выручки Организатора в момент окончания финансовой пирамиды при различных функциях роста (постоянной, линейной, степенной и экспоненциальной).

В шестом разделе описана задача оптимального управления по Л. С. Понтрягину, соответствующая случаю зависящей от времени цены, и отмечены ее особенности.

2. Модель финансовой пирамиды

В этом разделе приводится описание основной для этой работы модели финансовой пирамиды. Ее основные идеи соответствуют [3, 4].

Дадим определение.

Определение. Под финансовой пирамидой будет пониматься финансовая схема такая, что: Организатор финансовой пирамиды в течение некоторого периода времени продает собственные обязательства, по которым он обязуется выплатить их предъявителю определенную сумму в будущем. Будем предполагать, что Организатор выполняет *все* свои обязательства вплоть до некоторого момента, называемого крахом финансовой пирамиды.

Обязательства Организатора будем считать ценными бумагами, а сумму обязательств по каждой бумаге будем называть ее номиналом.

В рассматриваемой модели описывается только период существования финансовой пирамиды до ее краха, дальнейшие события остаются вне рассмотрения.

Важной особенностью рассматриваемой модели, отличающей ее от других, является то, что крах финансовой пирамиды обусловлен не исчерпанием числа вкладчиков или иными подобными причинами, а тем обстоятельством, что у Организатора в какой-то момент времени может оказаться недостаточно средств (собранных ранее) для выполнения своих обязательств.

Обозначения. Условимся об используемых обозначениях.

Будем считать, что финансовая пирамида начинается в момент времени $t = 0$.

$G(t)$ – непогашенный к моменту времени t объем ценных бумаг финансовой пирамиды по номиналу.

$V(t)$ – доход Организатора финансовой пирамиды.

$W(t)$ – доход вкладчиков финансовой пирамиды.

$g(t)$ – объем распроданных в момент времени t ценных бумаг по номиналу.

$\varphi > 0$ – фиксированный срок, через который наступает момент выполнения обязательств Организатора, отсчитываемый от момента их продажи.

Таким образом, будем предполагать, что ценные бумаги Организатора финансовой пирамиды суть, например, бескупонные облигации с одинаковым сроком погашения φ относительно момента продажи ценных бумаг.

$g(t-\varphi)$ – объем погашенных в момент времени t ценных бумаг, проданных Организатором в момент времени $t-\varphi$.

$c_g(t) \in [0;1]$ – цена, выраженная в долях от номинала, по которой происходят продажи ценных бумаг в момент времени t.

Исходя из экономического смысла записанных ранее величин, можно записать, что

$$\frac{dG}{dt} = \begin{cases} g(t), t < \varphi \\ g(t) - g(t-\varphi), t \geq \varphi \end{cases}, \quad G(0) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{dV}{dt}=\begin{cases}c_g(t)g(t), t<\varphi \\ c_g(t)g(t)-g(t-\varphi), t\geq\varphi\end{cases}, \; V(0)=0, \qquad (2)$$

$$\frac{dW}{dt}=\begin{cases}0, t<\varphi \\ \left[1-c_g(t)\right]g(t-\varphi), t\geq\varphi\end{cases}, \; W(0)=0. \qquad (3)$$

Используя эти формулы, возможно рассчитать функции $G(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ в любой момент по известной функции $g(t)$.

При записи этих формул не предполагается постоянство цены. Она, как и остальные величины, вообще говоря, зависит от времени: $c_g = c_g(t)$.

Предположение о финансировании финансовой пирамиды. Будем считать, что Организатор выполняет свои обязательства перед вкладчиками только за счет выручки от продажи ценных бумаг в рамках финансовой пирамиды, т.е. не привлекая средств со стороны.

В рамках этого предположения ясно, что если в какие-то периоды времени продается «слишком маленькое» количество ценных бумаг Организатора, то, так как выручка, получаемая Организатором в момент времени t $c_g(t)g(t)$ меньше, чем принятые на себя обязательства $g(t)$, в какой-то момент у Организатора может не оказаться средств для выполнения своих обязательств.

Условия окончания финансовой пирамиды.

Рассмотрим два альтернативных условия окончания финансовой пирамиды.

а) Условие $\frac{dV}{dt}=0$: финансовая пирамида существует только до тех пор (Организатор выполняет свои обязательства), пока выполняется условие $c_g(t)g(t) > g(t-\varphi)$.

б) Условие $V=0$: Организатор может использовать для погашения собственных обязательств не только выручку текущего момента $c_g(t)g(t)$, но и ранее полученную. В таком случае условие окончания можно записать как $V=0$.

Далее будут рассмотрены оба эти случая.

Отметим, что в качестве условия окончания финансовой пирамиды можно выбрать и любые промежуточные варианты между двумя описанными, например, такое: Организатор может использовать для погашения собственных обязательств не только выручку текущего момента $c_g(t)g(t)$, но и часть ранее полученной (например, не более половины: $\leq 50\%$). Такие промежуточные варианты далее рассматриваться не будут.

Замечание. Отметим, что рассматриваемая в данной статье модель записана в непрерывном времени. В тоже время дискретные модели описывают ситуацию финансовой пирамиды более адекватно, например, если использовать в качестве единиц времени дни, недели, месяцы и т.д. Таким образом, все приводимые формулы и числовые значения следует рассматривать как приближенные.

3. Финансовая пирамида с заданной функцией $g(t)$ и фиксированной ценой $c_g = fix$

В этом разделе рассчитываются характеристики финансовой пирамиды такие, как время ее жизни T, объем пирамиды $G(T)$ выручка Организатора $V(T)$ и участников финансовой пирамиды при различных заданных функциях роста финансовой пирамиды $g(t)$ и фиксированной цене продажи ценных бумаг Организатора $c_g = fix \in [0,1]$. Аналогичные расчеты были проведены в частных случаях в работах [3, 4].

Схема расчета. Для вычисления указанных выше величин использовался следующий алгоритм. На первом этапе задавался вид функции $g(t)$. Возможными вариантами были:

1) линейная функция $g(t) = \alpha t$, $\alpha > 0$. Она отражает «правдоподобный» монотонный рост числа вкладчиков финансовой пирамиды со временем;
2) степенная функция $g(t) = \alpha t^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta \in ¥$. Функция еще более быстрого роста;
3) экспоненциальная функция $g(t) = \alpha e^{\lambda t}$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Этот вариант очень быстрого роста числа вкладчиков. Он скорее всего невозможен на практике, однако интересен, как крайний случай;
4) логистическая функция $g(t) = g_{ïðåä} \dfrac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} + 1}$. Она растет почти экспоненциально при малых t, а затем асимптотически приближается к константе. Это случай ограниченного числа участников финансовой пирамиды.

На втором этапе в аналитическом виде вычислялись функции $G(t)$, $V(t)$, $W(t)$ в любой момент времени $t \geq 0$ по формулам (4) , (5), (6), которые были получены из формул (1), (2) и (3) соответственно [5]:

$$G(t) = \int_0^t g(\xi)d\xi - \int_{\varphi}^t g(\xi - \varphi)d\xi = \int_{t-\varphi}^t g(\xi)d\xi\,, \tag{4}$$

$$V(t) = \int_0^t c_g g(\xi)d\xi - \int_\varphi^t g(\xi - \varphi)d\xi = c_g \int_0^t g(\xi)d\xi - \int_0^{t-\varphi} g(\xi)d\xi \qquad (5)$$

$$W(t) = \int_\varphi^t (1-c_g)g(\xi - \varphi)d\xi = (1-c_g)\int_0^{t-\varphi} g(\xi)d\xi\,. \qquad (6)$$

При выводе формул (4) – (6) учено предположение $c_g = const$.

На третьем этапе аналитически решались уравнения $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ или $V(t) = 0$ для двух условий окончания финансовой пирамиды соответственно, откуда находилось время жизни финансовой пирамиды T.

На четвертом этапе вычислялись $G(T)$, $V(T)$, $\frac{V(T)}{G(T)}$.

Результаты всех вычислений в виде аналитических формул сведены в Таблицу 1.

Числовой пример. В Таблице 2 приведены числовые значения, рассчитанные по формулам из Таблицы 1 для случая доходности $\approx 10\%$ за 6 месяцев (точнее: принято $c_g = 0{,}9$, что составляет $1/0{,}9 - 1 \approx 11{,}1\%$ за полугодие). В качестве срока, на который принимаются обязательства Организатором финансовой пирамиды, также взято полугодие ($\varphi = 6$ ì åñ.).

В результате расчетов, например, получено, что при указанной доходности за полугодие время существования финансовой пирамиды при условии окончания $\frac{dV}{dt} = 0$ при линейном росте числа вкладчиков $g(t) = \alpha t$ равно примерно 60 месяцам, а при квадратичном – примерно 117 месяцам. Все величины времени, содержащиеся в Таблице 2, выражены в месяцах.

Выводы. Легко получить, что:

1) Из Таблиц 1 и 2 видно, что, как и следовало ожидать из интуитивных соображений, чем быстрее растет функция $g(t)$, тем «больше денег» оказывается у Организатора финансовой пирамиды для выполнения своих обязательств за тот же период времени и тем дольше существует финансовая пирамида.

2) Время жизни при условии окончания финансовой пирамиды $V = 0$ всегда не меньше, чем время при условии $\frac{dV}{dt} = 0$. Исключениями из этого правила являются экспоненциальная и логистическая функ-

ции, если их рост недостаточен (т.е. в случае $c_g < e^{-\lambda\varphi}$ или $\lambda < \frac{1}{\varphi}\ln\frac{1}{c_g}$) для выполнения Организатором своих обязательств уже в момент φ.

3) Исходя из значений времени жизни финансовой пирамиды, приведенных в Таблице 2, можно сделать общий вывод, что рассматриваемая модель дает завышенные значения времени по сравнению с практикой (даже с учетом того, что для расчетов в Таблице 2 использована ставка в $\approx 10\%$ за полугодие, что меньше значений доходности в реальных финансовых пирамидах). Это связано, например, с тем, что в модели не учитываются накладные расходы по организации деятельности финансовой пирамиды, затраты на рекламу и т.д. и т.п.

Таким образом, приведенная модель с фиксированной ценой достаточно проста, чтобы описывать, реальные финансовые пирамиды, такие как АО «МММ», «Властилина», ГКО-ОФЗ и другие.

Отметим, что приведенные в Таблице 1 формулы соответствуют расчетам для линейного и квадратичного роста функции $g(t)$ в работах [3, 4], а Таблицы 1 и 2 совпадают с аналогичными из [6].

Таблица 1.

$g(t)$	Условие окончания $\dfrac{dV}{dt}=0$				Условие окончания $V=0$	
	T	$G(T)$	$V(T)$	$\dfrac{V(T)}{G(T)}$	T	$G(T)$
αt, $\alpha>0$	$\dfrac{\varphi}{1-c_g}$	$\dfrac{\alpha\varphi^2}{2}\dfrac{1+c_g}{1-c_g}$	$\dfrac{\alpha\varphi^2}{2}\dfrac{c_g}{1-c_g}$	$\dfrac{c_g}{1+c_g}\le 1/2$	$\dfrac{\varphi}{1-c_g^{1/2}}$	$\dfrac{\alpha\varphi^2}{2}\dfrac{1+c_g^{1/2}}{1-c_g^{1/2}}$
αt^β, $\alpha>0$, $\beta\in ¥$	$\dfrac{\varphi}{1-c_g^{1/\beta}}$	$\dfrac{\alpha\varphi^{\beta+1}}{\beta+1}\dfrac{1-c_g^{1+1/\beta}}{(1-c_g^{1/\beta})^{\beta+1}}$	$\dfrac{\alpha\varphi^{\beta+1}}{\beta+1}\dfrac{c_g-c_g^{1+1/\beta}}{(1-c_g^{1/\beta})^{\beta+1}}$	$\dfrac{c_g-c_g^{1+1/\beta}}{1-c_g^{1+1/\beta}}\le\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\varphi}{1-c_g^{1/(\beta+1)}}$	$\dfrac{\alpha\varphi^{\beta+1}}{\beta+1}\dfrac{1-c_g}{(1-c_g^{1/(\beta+1)})^{\beta+1}}$
$\alpha e^{\lambda t}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, $c_g\ge e^{-\lambda\varphi}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\xrightarrow[t\to+\infty]{}\left(\dfrac{c_g-e^{-\lambda\varphi}}{1-e^{-\lambda\varphi}}\right)$	$+\infty$	$+\infty$
$\alpha e^{\lambda t}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, $c_g< e^{-\lambda\varphi}$	φ	$\dfrac{\alpha}{\lambda}e^{\lambda\varphi}$	$c_g\dfrac{\alpha}{\lambda}e^{\lambda\varphi}$	c_g	$\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{1-c_g}{e^{-\lambda\varphi}-c_g}>\varphi$	$\dfrac{\alpha}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda\varphi}\right)\dfrac{1-c_g}{e^{-\lambda\varphi}-c_g}$
$g_{пред}\dfrac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}+1}$, $\lambda>0$, $c_g\ge e^{-\lambda\varphi}$	$\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{c_g e^{\lambda\varphi}-1}{1-c_g}$	$\dfrac{g_{пред}}{\lambda}\ln c_g e^{\lambda\varphi}$	$\dfrac{g_{пред}}{\lambda}\ln\left[\left(\dfrac{2(1-c_g)}{e^{\lambda\varphi}-1}\right)^{1-c_g} c_g^{\,c_g}e^{\lambda\varphi}\right]$	$\dfrac{\ln\left[\left(\dfrac{2(1-c_g)}{e^{\lambda\varphi}-1}\right)^{1-c_g} c_g^{\,c_g}e^{\lambda\varphi}\right]}{\ln\left[c_g e^{\lambda\varphi}\right]}$	$\exists c_g^*\in\left(0,e^{-\lambda\varphi}\right)$: время жизни финансовой пирамиды равно $+\infty$, если $c_g\ge c_g^*$, иначе – φ	$\dfrac{g_{пред}}{\lambda}\ln c_g e^{\lambda\varphi}$
$g_{пред}\dfrac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}+1}$, $\lambda>0$, $c_g< e^{-\lambda\varphi}$	φ	$\dfrac{g_{пред}}{\lambda}\ln\dfrac{e^{\lambda\varphi}+1}{2}$	$c_g\dfrac{g_{пред}}{\lambda}\ln\dfrac{e^{\lambda\varphi}+1}{2}$	c_g	Время жизни финансовой пирамиды равно φ, если $c_g<c_g^*$, и $+\infty$ иначе	- - -

Таблица 2. Числовые значения приведены для случая $\alpha = 1$, $\varphi = 6$ месяцев, $c_g = 0{,}9$ (т.е. примерно $1/_{0,9} - 1 \approx 11{,}1\%$ за полугодие). Величины G и V выражены в условных денежных единицах (у.е.). Все значения приведены с четырьмя значащими цифрами, для наглядности некоторые из них дополнены нулями.

$g(t)$	Условие окончания $\frac{dV}{dt} = 0$				Условие окончания $V = 0$	
	T, мес.	$G(T)$, у.е.	$V(T)$, у.е.	$\frac{V(T)}{G(T)}$	T	$G(T)$
t	60	342	162	0, 474	116, 9	683, 5
t^2	116, 9	77 890	24 610	0, 316	173, 9	17 520
t^3	173, 9	29 940 000	7 095 000	0, 237	230, 8	70 940 000
t^4	230, 8	16 160 000 000	3 065 000 000	0, 190	287, 7	39 450 000 000
e^t, $c_g \geq e^{-\lambda\varphi}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0{,}842$	$+\infty$	$+\infty$
$e^{0,001t}$, $c_g < e^{-\lambda\varphi}$	6	1006	905, 4	0, 9	61, 7	6, 4
$\frac{e^t}{e^t + 1}$, $c_g \geq e^{-\lambda\varphi}$	8, 2	5, 9	5, 144	0, 873	$\exists c_g^* \in \left(0, e^{-\lambda\varphi}\right)$: время жизни финансоой пирамиды равно $+\infty$, если $c_g \geq c_g^*$, иначе – φ	- - -
$\frac{e^{0,001t}}{e^{0,001t} + 1}$, $c_g < e^{-\lambda\varphi}$	6	3	2, 7	0, 9	Время жизни финансовой пирамиды равно φ, если $c_g < c_g^*$, и $+\infty$ иначе	- - -

4. Постановки задачи максимизация выручки $V(T)$ Организатора финансовой пирамиды по цене c_g

В этом разделе рассматриваются различные постановки задачи максимизации выручки Организатора финансовой пирамиды при вариации цены.

Предположение о цели Организатора. Поскольку Организатор финансовой пирамиды определяет правила существования финансовой пирамиды, а также вообще и ее возникновение, то логично предположить, что, создавая пирамиду, Организатор имеет целью максимизацию собственной выручки. При этом для корректной постановки задачи в данной работе будем предполагать, что целью Организатора финансовой пирамиды является максимизация своей выручки (за вычетом денежных средств, потраченных на выполнение обязательств, связанных с финансовой пирамидой), т.е. величины $V(T)$, в момент окончания (краха) T финансовой пирамиды. Считаем, что после этого момента Организатор больше не выполняет свои обязательства.

Время краха финансовой пирамиды будем предполагать ограниченным сверху достаточно большой величиной $T_1 > \varphi$: $T \le T_1$. Таким образом, финансовая пирамида в любом случае не существует после момента времени T_1. На практике T_1 естественно ограничено временем жизни Организатора (как физического или юридического лица), а обычно меньше и составляет 2-5 лет.

Параметром, который можно варьировать для решения задачи оптимизации, является цена продажи ценных бумаг Организатором $c_g(t)$.

Формальная запись задачи оптимизации. Исходя из всего вышесказанного, запишем полученную задачу, как:

$$\begin{cases} V(T) \to \max \\ V(0) = 0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = c_g(t)g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o \Phi(c_g(t)) f(t), t \ge 0 \\ c_g = c_g(t) \in [0,1] \end{cases}$$

Здесь $V(T)$ – максимизируемая величина, T – время окончания финансовой пирамиды ($T \le T_1$),

$$\frac{dV}{dt} = c_g(t)g(t) - g(t-\varphi)$$
$$g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \qquad -$$
$$g(t) = g_o \Phi(c_g(t)) f(t)$$

зависимость выручки Организатора финансовой пирамиды от времени (ср. с (2)). Основное отличие от рассматриваемой ранее модели состоит в представлении функции $g(t)$ в виде произведения двух функций: функции спроса $\Phi(c_g)$, зависящей от цены, и заданной функции роста $f(t)$. g_0 – постоянная (коэффициент пропорциональности для выбранных единиц).

Функция спроса. На функцию спроса $\Phi(c)$ наложим следующие естественные ограничения:

1) $\Phi(c)$ определена при $0 \le c \le 1$;
2) $\Phi(c) \ge 0$;
3) $\Phi(c)$ – невозрастающая функция c;
4) $\Phi(1) = 0$, т.е. при продаже ценных бумаг с нулевым дисконтом не найдется желающих их купить;
5) $\Phi(0+) = +\infty$, т.е. при продаже ценных бумаг по нулевой цене (бесплатно) количество желающих их приобрести будет неограниченно.

Различные постановки задачи оптимизации. В записанной выше задаче неясно, как цена зависит от времени: $c_g = c_g(t)$. Рассмотрим два крайних случая возможного уточнения.

Первый случай – это случай постоянной цены $c_g = const$, т.е. цены – параметра. Сделанное предположение довольно грубо, т.к. позволяет установить некоторую цену, но не позволяет менять ее в дальнейшем. Задача становиться задачей оптимизации по параметру $c_g \in [0,1]$. Ее решение приводится в следующем разделе.

Во втором случае предполагается, что цена зависит от времени как кусочно-непрерывная функция (на $[0,T]$, $T \le T_1$) $c_g = c_g(t)$. Здесь задачу можно привести к задаче оптимального управления по Л. С. Понтрягину [7], что будет сделано в разделе 6.

5. Задача максимизация выручки $V(T)$ Организатора финансовой пирамиды по цене – параметру c_g

В этом разделе рассматривается задача оптимизации по цене – параметру $c_g \in [0,1]$.

В этом разделе в качестве функции спроса, удовлетворяющей всем перечисленным требованиям, будем использовать функцию $\Phi(c) = \dfrac{(1-c)^n}{c^m}$, $n > 1$, $0 < m < 1$.

В качестве функции роста $f(t)$ рассмотрим следующие варианты, аналогичные рассмотренным в разделе 3:

1) постоянная функция $f(t) = 1$;
2) линейная функция $f(t) = t$;
3) степенная функция $f(t) = t^{\beta}$, $\beta \in$ ¥ ;
4) экспоненциальная функция $f(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$.

Для каждой из них решена задача:

$$\begin{cases} V(T) \to \max\limits_{c_g \in [0,1]} \\ V(0) = 0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = c_g g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o \dfrac{(1-c_g)^n}{c_g^m} f(t), t \ge 0 \\ n > 1, 0 < m < 1 \\ c_g = const \in [0,1] \end{cases}$$

Схема решения задачи. Эта задача решалась в несколько этапов. Сначала в аналитическом виде выражалась $\dfrac{dV(t)}{dt}$ как явная (хотя и кусочно-заданная) функция времени, исследовался ее знак и находился нуль. Это позволило в аналитическом виде найти значение момента времени T, дающего максимум функции $V(t)$ с учетом условия $T \le T_1$.

После в формульном виде вычислялось экстремальное значение $V(T)$, которое затем максимизировалось по цене $c_g \in [0,1]$.

Замечание. Так как в алгоритме расчета c_g^* есть этап максимизации $V(t)$, то фактически в качестве условия окончания финансовой пирамиды использовалось условие $\frac{dV}{dt}=0$, т.к. предполагалось, что Организатор использует в каждый момент времени для выполнения своих обязательств только средства, полученные в тот же момент времени, но не ранее.

<u>Решения задач.</u> В Приложениях 1 и 2 приводятся решения двух вспомогательных задач.

1. Постоянная функция $f(t)=1$**.** В этом пункте приводится решение задачи максимизации выручки Организатора $V(T)$ по цене-параметру при функции роста $f(t)=1$.

<u>Задача.</u>

$$\begin{cases} V(T)\to\max\limits_{c_g} \\ V(0)=0 \\ 0\le t\le T_1, T_1>\varphi \\ \dfrac{dV}{dt}=c_g g(t)-g(t-\varphi) \\ g(0)=0, t\in[-\varphi,0) \\ g(t)=g_o\dfrac{(1-c_g)^n}{c_g^m}, t\ge 0 \\ n>1, 0<m<1 \\ c_g=const\in[0,1] \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$0\le t<\varphi$: $\dfrac{dV(t)}{dt}=g_0(1-c_g)^n c_g^{1-m}\ge 0$.

$t\ge\varphi$: $\dfrac{dV(t)}{dt}=g_0(1-c_g)^n c_g^{1-m}-g_0(1-c_g)^n c_g^{-m}=-g_0(1-c_g)^{n+1}c_g^{-m}\le 0$.

Итак, $T=\varphi$.

$V(T)=g_0(1-c_g)^n c_g^{1-m}\varphi\to\max\limits_{c_g\in[0,1]}$. Согласно Приложению 1 решение этой задачи имеет вид

$c_g^*=\dfrac{1-m}{n+1-m}\in(0,1)$, т.к. $n>1, 0<m<1$.

<u>Ответ:</u> $c_g^*=\dfrac{1-m}{n+1-m}$.

2. Линейная функция $f(t) = t$**.**

В этом пункте приводится решение задачи максимизации выручки Организатора $V(T)$ по цене-параметру при функции роста $f(t) = t$.

Задача.

$$\begin{cases} V(T) \to \max\limits_{c_g} \\ V(0) = 0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = c_g g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o \dfrac{(1-c_g)^n}{c_g^m} t, t \ge 0 \\ n > 1, 0 < m < 1 \\ c_g = const \in [0,1] \end{cases}$$

Решение.

$0 \le t < \varphi$: $\dfrac{dV(t)}{dt} = g_0 (1-c_g)^n c_g^{1-m} t \ge 0$.

$t \ge \varphi$:

$$\frac{dV(t)}{dt} = g_0 (1-c_g)^n c_g^{1-m} t - g_0 (1-c_g)^n c_g^{-m} (t-\varphi) = g_0 (1-c_g)^n c_g^{-m} \left[-(1-c_g)t + \varphi \right].$$

Отметим, что $c_g = 1$ не дает максимум.

При $c_g \in [0,1)$ $T = \dfrac{\varphi}{1-c_g}$.

$$V(t) = c_g \int_0^t g(\xi) d\xi - \int_0^{t-\varphi} g(\xi) d\xi = g_0 (1-c_g)^n c_g^{-m} \left[c_g \frac{t^2}{2} - \frac{(t-\varphi)^2}{2} \right] =$$

$$= g_0 (1-c_g)^n c_g^{-m} \left[-(1-c_g) \frac{t^2}{2} + \varphi t - \frac{\varphi^2}{2} \right].$$

$$V(T) = g_0 (1-c_g)^n c_g^{-m} \left[-\frac{\varphi^2}{2(1-c_g)} + \frac{\varphi^2}{1-c_g} - \frac{\varphi^2}{2} \right] = \frac{g_0 \varphi^2}{2} (1-c_g)^{n-1} c_g^{1-m} \varphi \to \max_{c_g \in [0,1]}.$$

Согласно Приложению 1 решение этой задачи имеет вид

$$c_g^* = \frac{1-m}{n-m} \in (0,1), \text{ т.к. } n>1, 0<m<1.$$

Еще необходимо проверить условие $T \le T_1$:

$$\frac{\varphi}{1-c_g} \le T_1, \ \frac{n-m}{n-1}\varphi \le T_1, \text{ где } \frac{n-m}{n-1} > 1.$$

<u>Ответ:</u> $c_g^* = \dfrac{1-m}{n-m}$, если T_1 «достаточно велико», т.е. $T_1 \ge \dfrac{n-m}{n-1}\varphi$.

3. Степенная функция $f(t)=t^\beta$, $\beta \in ¥$.

В этом пункте приводится решение задачи максимизации выручки Организатора $V(T)$ по цене-параметру при функции роста $f(t)=t^\beta$.

<u>Задача.</u>

$$\begin{cases} V(T) \to \max\limits_{c_g} \\ V(0)=0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = c_g g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0)=0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o \dfrac{(1-c_g)^n}{c_g^m} t^\beta, t \ge 0 \\ n>1, 0<m<1, \beta \in ¥ \\ c_g = const \in [0,1] \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$0 \le t < \varphi: \ \frac{dV(t)}{dt} = g_0(1-c_g)^n c_g^{1-m} t^\beta \ge 0.$$

$t \ge \varphi$:

$$\frac{dV(t)}{dt} = g_0(1-c_g)^n c_g^{1-m} t^\beta - g_0(1-c_g)^n c_g^{-m}(t-\varphi)^\beta =$$

$$= g_0(1-c_g)^n c_g^{-m}\left[c_g t^\beta - (t-\varphi)^\beta\right].$$

Отметим, что $c_g = 1$ не дает максимум.

При $c_g \in [0,1)$ $T = \dfrac{\varphi}{1 - c_g^{1/\beta}}$.

$$V(t) = c_g \int_0^t g(\xi)d\xi - \int_0^{t-\varphi} g(\xi)d\xi = g_0(1-c_g)^n c_g^{-m} \left[c_g \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{(t-\varphi)^{\beta+1}}{\beta+1} \right] =$$

$$= \frac{g_0(1-c_g)^n c_g^{-m}}{\beta+1} \left[c_g t^{\beta+1} - (t-\varphi)^{\beta+1} \right].$$

$$V(T) = \frac{g_0(1-c_g)^n c_g^{-m}}{\beta+1} \left[c_g \frac{\varphi^{\beta+1}}{\left(1 - c_g^{1/\beta}\right)^{\beta+1}} - \frac{c_g^{\frac{\beta+1}{\beta}} \varphi^{\beta+1}}{\left(1 - c_g^{1/\beta}\right)^{\beta+1}} \right].$$

$$V(T) = \frac{g_0 \varphi^{\beta+1}}{\beta+1} \frac{(1-c_g)^n c_g^{1-m}}{\left(1 - c_g^{1/\beta}\right)^{\beta}} \to \max_{c_g \in [0,1]}.$$

Обозначим $f(c) = \dfrac{(1-c)^n c^{1-m}}{\left(1 - c^{1/\beta}\right)^{\beta}}$. Эта функция имеет особенность в точке $c = 1$. Для ее исследования сделаем замену $u = 1 - c$.

$$\frac{u^n(1-u)^{1-m}}{\left(1-(1-u)^{1/\beta}\right)^{\beta}} \sim \frac{u^n(1-u)^{1-m}}{\left(1-(1-\frac{1}{\beta}u)\right)^{\beta}} \sim \beta^{\beta} u^{n-\beta}(1-u)^{1-m} \sim \beta^{\beta} u^{n-\beta}.$$

Здесь знак $\sim$ означает эквивалентность при $u \to 0+$.

Если $n > \beta$, то $f(c) \to 0$ при $c \to 1-$.

Если $n = \beta$, то $f(c) \to const \in (0,+\infty)$ при $c \to 1-$.

Если $n < \beta$, то $f(c) \to +\infty$ при $c \to 1-$.

Исследуем эти случаи последовательно.

а) $n \le \beta$.

При $n < \beta$ так как $f(c) \to +\infty$ при $c \to 1-$, то $c_g^* = 1$.

При $n = \beta$:

$$f(c) = \frac{(1-c)^n c^{1-m}}{\left(1 - c^{1/n}\right)^{n}} = c^{1-m} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c^{k/n} \right)^n.$$

Таким образом, $f(c)$ – монотонно возрастающая функция. Поэтому опять же $c_g^* = 1$.

Но при $c_g \to 1-$ $T = \dfrac{\varphi}{1 - c_g^{1/\beta}} \to +\infty$, а должно быть $T \le T_1$; значит, $T = T_1$. Тогда

$$V(T) = \frac{g_0 (1 - c_g)^n c_g^{-m}}{\beta + 1} \left[c_g T_1^{\beta+1} - (T_1 - \varphi)^{\beta+1} \right] =$$

$$= \frac{g_0 T_1^{\beta+1}}{\beta + 1} (1 - c_g)^n c_g^{-m} \left[c_g - \left(\frac{T_1 - \varphi}{T_1} \right)^{\beta+1} \right].$$

Согласно Приложению 2 решение этой задачи имеет вид ($a = m$, $b = n$, $k = \left(1 - \dfrac{\varphi}{T_1}\right)^{\beta+1}$):

$$c_g^* = \frac{(1-m) + (n-m)k + \sqrt{(-m - mk + nk + 1)^2 + 4mk(n - m + 1)}}{2(n - m + 1)}.$$

б) $n > \beta$. $f(0) = 0$, $f(1-) \to 0$. Максимум находится на интервале $(0,1)$.

$$\frac{(1 - c_g)^n c_g^{1-m}}{\left(1 - c_g^{1/\beta}\right)^{\beta}} \to \max_{c_g \in [0,1]}, \quad n > \beta, 0 < m < 1, \beta \in ¥ .$$

Обозначим $u = c_g^{1/\beta}$.

$\dfrac{(1 - u^\beta)^n u^{\beta(1-m)}}{(1 - u)^\beta} \to \max\limits_{u \in [0,1]}$, или эквивалентно: $\dfrac{(1 - u^\beta)^{n/\beta} u^{1-m}}{1 - u} \to \max\limits_{u \in [0,1]}$.

Обозначим $a = 1 - m$, $0 < a < 1$, $b = \dfrac{n}{\beta} > 1$,

$$f_1(u) = \frac{u^a \left(1 - u^\beta\right)^b}{1 - u} \to \max_{u \in [0,1]}.$$

$$f_1'(u) = \frac{au^{a-1}\left(1-u^{\beta}\right)^{b}}{1-u} - \beta u^{\beta-1} b \frac{u^{a}\left(1-u^{\beta}\right)^{b-1}}{1-u} + \frac{u^{a}\left(1-u^{\beta}\right)^{b}}{\left(1-u\right)^{2}} =$$

$$= \frac{u^{a-1}\left(1-u^{\beta}\right)^{b-1}}{\left(1-u\right)^{2}}\left[a\left(1-u^{\beta}\right)(1-u) - \beta b u^{\beta}(1-u) + u(1-u^{\beta})\right] =$$

$$= \frac{u^{a-1}\left(1-u^{\beta}\right)^{b-1}}{\left(1-u\right)^{2}}\left[u^{\beta+1}(a+\beta b-1) - (a+\beta b)u^{\beta} + (1-a)u + a\right]$$

Легко проверить, что единица является корнем выражения в квадратных скобках. Соответственно выражение для $f_1'(u)$ можно упростить.

$$f_1'(u) = \frac{u^{a-1}\left(1-u^{\beta}\right)^{b-1}}{\left(1-u\right)}\left[-(a+\beta b-1)u^{\beta} + u^{\beta-1} + \mathrm{K} + u + a\right].$$

Обозначим $f_2(u) = -(a+\beta b-1)u^{\beta} + u^{\beta-1} + \mathrm{K} + u + a$.

$f_2(0) = a > 0$, $f_2(1) = \beta(1-b) < 0$. Это еще раз подтверждает, что c_g^* и u^* лежат на интервале $(0,1)$.

Случай $\beta = 1$. $f_2(u) = -(a+b-1)u + a$.

$u^* = c_g^* = \dfrac{1-m}{n-m} \in (0,1)$. Этот результат был получен в предыдущем пункте.

Случай $\beta = 2$. $f_2(u) = -(a+2b-1)u^2 + u + a$. Уравнение при заданных условиях всегда имеет два корня. Кроме того, из теоремы Виета следует, что этот квадратных трехчлен имеет два корня разных знаков, причем положительный корень больше по модулю.

$$u^* = \frac{1+\sqrt{1+4a(a+2b-1)}}{2(a+2b-1)}.$$

Можно показать, что $u^* \in (0,1)$.

Итак, $c_g^* = \left(\dfrac{1+\sqrt{1+4(1-m)(n-m)}}{2(n-m)}\right)^2.$

В случае $\beta > 2$ аналитические вычисления очень сложны. Численные эксперименты показывают, что на $(0,1)$ имеется ровно 1 корень производной, дающий искомый максимум.

Еще необходимо проверить условие $T \le T_1$:

$$\frac{\varphi}{1-\left(c_g^*\right)^{1/\beta}} \le T_1, \ \frac{\varphi}{1-u^*} \le T_1.$$

<u>Ответ:</u> а) $n \le \beta$:

$$c_g^* = \frac{(1-m)+(n-m)k+\sqrt{(-m-mk+nk+1)^2+4mk(n-m+1)}}{2(n-m+1)},$$

где $k = \left(1-\dfrac{\varphi}{T_1}\right)^{\beta+1}$.

б) $n > \beta$. Если T_1 «достаточно велико», т.е. $T_1 \ge \dfrac{\varphi}{1-\left(c_g^*\right)^{1/\beta}}$, то:

$\beta = 1$:

$$c_g^* = \frac{1-m}{n-m}.$$

$\beta = 2$:

$$c_g^* = \left(\frac{1+\sqrt{1+4(1-m)(n-m)}}{2(n-m)}\right)^2.$$

В случае $\beta > 2$ аналитические вычисления очень сложны. Численные эксперименты показывают, что на $(0,1)$ имеется ровно 1 корень производной, дающий искомый максимум.

4. Экспоненциальная функция $f(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$.

В этом пункте приводится решение задачи максимизации выручки Организатора $V(T)$ по цене-параметру при функции роста $f(t) = e^{\lambda t}$.

Задача.

$$\begin{cases} V(T) \to \max\limits_{c_g} \\ V(0) = 0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = c_g g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o \dfrac{(1-c_g)^n}{c_g^m} e^{\lambda t}, t \ge 0 \\ n > 1, 0 < m < 1, \lambda > 0 \\ c_g = const \in [0,1] \end{cases}$$

Решение.

$0 \le t < \varphi$: $\dfrac{dV(t)}{dt} = g_0 (1-c_g)^n c_g^{1-m} e^{\lambda t} \ge 0$.

$t \ge \varphi$:

$$\frac{dV(t)}{dt} = g_0 (1-c_g)^n c_g^{1-m} e^{\lambda t} - g_0 (1-c_g)^n c_g^{-m} e^{\lambda t} e^{-\lambda\varphi} =$$

$$= g_0 (1-c_g)^n c_g^{-m} e^{\lambda t} \left[c_g - e^{-\lambda\varphi} \right].$$

1) $c_g > e^{-\lambda\varphi}$, $\lambda\varphi > \ln\dfrac{1}{c_g}$. $\dfrac{dV(t)}{dt} \ge 0$ при $t \ge 0$. Значит, $T = T_1$.

$$V(t) = c_g \int_0^t g(\xi) d\xi - \int_0^{t-\varphi} g(\xi) d\xi = g_0 (1-c_g)^n c_g^{-m} \left[c_g \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} - \frac{e^{\lambda t} e^{-\lambda\varphi} - 1}{\lambda} \right] =$$

$$= \frac{g_0}{\lambda} (1-c_g)^n c_g^{-m} \left[c_g \left(e^{\lambda t} - 1 \right) - \left(e^{\lambda t} e^{-\lambda\varphi} - 1 \right) \right].$$

$$V(T) = \frac{g_0 \left(e^{\lambda T_1} - 1 \right)}{\lambda} (1-c_g)^n c_g^{-m} \left[c_g - \frac{e^{\lambda T_1} e^{-\lambda\varphi} - 1}{e^{\lambda T_1} - 1} \right].$$

Согласно Приложению 2 решение этой задачи имеет вид ($a = m$, $b = n$, $k = \dfrac{e^{\lambda T_1} e^{-\lambda\varphi} - 1}{e^{\lambda T_1} - 1}$. $k \in (0,1)$, т.к. $T_1 \in (\varphi, +\infty)$):

$$c_g^* = \frac{(1-m)+(n-m)k+\sqrt{(-m-mk+nk+1)^2+4mk(n-m+1)}}{2(n-m+1)}.$$

Дальнейший анализ этого решения см. в пункте 3.

2) $c_g \le e^{-\lambda\varphi}$, $\lambda\varphi \le \ln\frac{1}{c_g}$.

$$0 \le t < \varphi:\ \frac{dV(t)}{dt} \ge 0 \quad t \ge 0.$$

$$t \ge \varphi:\ \frac{dV(t)}{dt} \le 0 \quad t \ge 0.$$

Значит, $T = \varphi$.

$V(T) = \frac{g_0\left(e^{\lambda\varphi}-1\right)}{\lambda}(1-c_g)^n c_g^{1-m} \to \max\limits_{c_g \in [0,1]}$. Согласно Приложению 1 решение этой задачи имеет вид

$$c_g^* = \frac{1-m}{n+1-m} \in (0,1),\ \text{т.к. } n > 1, 0 < m < 1.$$

Дальнейший анализ этого решения см. в пункте 3.

3) Теперь необходимо выяснить, какой из рассмотренных случаев имеет место, и какое c_g^* дает искомый максимум поставленной задачи.

Отметим, что $k = \frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{e^{\lambda T_1}-1}$ из первого случая $\in (0, e^{-\lambda\varphi})$, т.к. $T_1 \in (\varphi, +\infty)$.

Можно показать, что $c_g^*(k)$ из первого случая монотонно возрастает по k при $k \in (0,1)$, и $c_g^*(k) \ge k$.

а) $\frac{1-m}{n+1-m} > e^{-\lambda\varphi}$. Второй случай не имеет места, а первый – имеет, т.к. $c_g^*(k) \ge c_g^*(0) = \frac{1-m}{n+1-m} > e^{-\lambda\varphi}$. Ответом является ответ первого случая.

б) $\frac{1-m}{n+1-m} \le e^{-\lambda\varphi}$. Второй случай имеет место. При «достаточно больших» T_1 $k = \frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{e^{\lambda T_1}-1}$ из первого случая $\to e^{-\lambda\varphi}$ при $T_1 \to \infty$ и $k \le e^{-\lambda\varphi}$. Но т.к. $c_g^*(k) \ge k$, то и первый случай может иметь место. Необходимо сравнение значений $V(T)$. Итого можно выписать ответ.

<u>Ответ:</u> а) Если $\frac{1-m}{n+1-m} > e^{-\lambda\varphi}$, то ответ (1) (см. ниже).

б) Если $\frac{1-m}{n+1-m} \le e^{-\lambda\varphi}$, то:

б1) если $c_g^*(T_1)$ из (1) (см. ниже) $> e^{-\lambda\varphi}$ и

$$\left(e^{\lambda T_1}-1\right)\left(1-c_g^*(T_1)\right)^n\left(c_g^*(T_1)\right)^{-m}\left[c_g^*(T_1)-\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{e^{\lambda T_1}-1}\right]>$$

$$>\left(e^{\lambda\varphi}-1\right)\frac{\left(1-m\right)^{1-m}n^n}{\left(n-m+1\right)^{n-m+1}},$$

то ответ (1) (см. ниже).

б2) иначе $c_g^* = \frac{1-m}{n+1-m}$.

Упоминаемый выше ответ (1) имеет вид:

$$c_g^*(k)=\frac{(1-m)+(n-m)k+\sqrt{(-m-mk+nk+1)^2+4mk(n-m+1)}}{2(n-m+1)},$$

где $k(T_1)=\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{e^{\lambda T_1}-1}$, а $c_g^*(T_1)=c_g^*(k)\Big|_{k=k(T_1)}$.

<u>Полученные решения.</u> Снова приведем полученные результаты.

1) постоянная функция $f(t)=1$:

$$c_g^* = \frac{1-m}{n+1-m}.$$

2) линейная функция $f(t)=t$;

$c_g^* = \frac{1-m}{n-m}$, если T_1 «достаточно велико», т.е. $T_1 \ge \frac{n-m}{n-1}\varphi$.

3) степенная функция $f(t)=t^\beta$, $\beta \in$ ¥ ;

а) $n \le \beta$.

$$c_g^* = \frac{(1-m)+(n-m)k+\sqrt{(-m-mk+nk+1)^2+4mk(n-m+1)}}{2(n-m+1)},$$

где $k=\left(1-\dfrac{\varphi}{T_1}\right)^{\beta+1}$.

б) $n>\beta$. Если T_1 «достаточно велико», т.е. $\dfrac{\varphi}{1-\left(c_g^*\right)^{1/\beta}} \le T_1$, то:

$\beta=1$:

$$c_g^* = \frac{1-m}{n-m}.$$

$\beta=2$:

$$c_g^* = \left(\frac{1+\sqrt{1+4(1-m)(n-m)}}{2(n-m)}\right)^2.$$

В случае $\beta>2$ аналитические вычисления очень сложны. Численные эксперименты показывают, что на $(0,1)$ имеется ровно 1 корень производной, дающий искомый максимум.

4) экспоненциальная функция $f(t)=e^{\lambda t}$, $\lambda>0$.

а) Если $\dfrac{1-m}{n+1-m} > e^{-\lambda\varphi}$, то ответ (1) (см. ниже).

б) Если $\dfrac{1-m}{n+1-m} \le e^{-\lambda\varphi}$, то

б1) если $c_g^*(T_1)$ из (1) (см. ниже) $> e^{-\lambda\varphi}$ и

$$\left(e^{\lambda T_1}-1\right)\left(1-c_g^*(T_1)\right)^n\left(c_g^*(T_1)\right)^{-m}\left[c_g^*(T_1)-\frac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{e^{\lambda T_1}-1}\right]>$$

$$>\left(e^{\lambda\varphi}-1\right)\frac{(1-m)^{1-m}n^n}{(n-m+1)^{n-m+1}},$$

то ответ (1) (см. ниже).

б2) иначе $c_g^* = \dfrac{1-m}{n+1-m}$.

Упоминаемый выше ответ (1) имеет вид:

$$c_g^*(k) = \frac{(1-m)+(n-m)k+\sqrt{(-m-mk+nk+1)^2+4mk(n-m+1)}}{2(n-m+1)},$$

где $k(T_1) = \dfrac{e^{\lambda T_1}e^{-\lambda\varphi}-1}{e^{\lambda T_1}-1}$, а $c_g^*(T_1) = c_g^*(k)\Big|_{k=k(T_1)}$.

Численный пример. Для иллюстрации полученных результатов найдем численные значения c_g^* для конкретного примера.

Положим $m = 0,5$ (среднее значение), а в качестве n возьмем 2, 5 и 10. Время будем измерять в месяцах, примем период φ за 3 месяца: $\varphi = 3$. В Таблице 3 сведены значения полученных c_g^*.

Выводы. Из приведенной Таблицы 3 легко выделить следующую закономерность: чем меньше выбранное ограничение на время существования финансовой пирамиды T_1, тем меньшие значения c_g^* дают искомый оптимум.

Использование на практике. Как уже было отмечено, рассмотренная в данном разделе модель с постоянной ценой достаточна груба, т.к. не позволяет Организатору менять цену в течение всей жизни финансовой пирамиды, что ограничивает его свободу действий и сильно уменьшает полученную им итоговую выручку.

И все же: для практического применения выводов рассматриваемой модели необходимо определиться в выборе нескольких используемых параметров, а именно: функции спроса $\Phi(c)$ и функции роста числа участников финансовой пирамиды $f(t)$.

Таблица 3.

<table>
<tr><td rowspan="3">Функция $f(t)$, время T_1, мес.</td><td colspan="4">$m = 0,5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$n = 2$</td><td>$n = 5$</td><td>$n = 10$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">0, 200</td><td>0, 091</td><td>0, 048</td></tr>
<tr><td>t</td><td colspan="2">0, 333</td><td>0, 111</td><td>0, 053</td></tr>
<tr><td rowspan="4">t^2</td><td>$T_1 = 3$</td><td>0, 200</td><td rowspan="4">0, 214</td><td rowspan="4">0, 083</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 6$</td><td>0, 347</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 12$</td><td>0, 595</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 24$</td><td>0, 775</td></tr>
<tr><td rowspan="4">t^3</td><td>$T_1 = 3$</td><td>0, 200</td><td rowspan="4">- - -</td><td rowspan="4">- - -</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 6$</td><td>0, 282</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 12$</td><td>0, 513</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 24$</td><td>0, 716</td></tr>
<tr><td rowspan="4">e^{2t}, $\frac{1-m}{1-m+n} > e^{-\lambda\varphi}$</td><td>$T_1 = 3$</td><td>0, 200</td><td>0, 091</td><td>0, 048</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 6$</td><td>0, 204</td><td>0, 095</td><td>0, 052</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 12$</td><td>0, 204</td><td>0, 095</td><td>0, 052</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 24$</td><td>0, 204</td><td>0, 095</td><td>0,052</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$e^{0,5t}$, $\frac{1-m}{1-m+n} \le e^{-\lambda\varphi}$</td><td>$T_1 = 3$</td><td>0, 200</td><td>0, 091</td><td>0, 048</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 6$</td><td>0, 401</td><td>0, 296</td><td>0, 048</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 12$</td><td>0, 435</td><td>0, 332</td><td>0, 285</td></tr>
<tr><td>$T_1 = 24$</td><td>0, 436</td><td>0, 334</td><td>0, 287</td></tr>
</table>

Функцию спроса можно оценить, используя статистику продаж рыночных ценных бумаг, аналогичных тем, которые предполагает выпускать Организатор.

Функцию роста $f(t)$ оценить гораздо сложнее. Для грубого использования модели достаточно понять, какой «степенью» описывается ожидаемый рост числа вкладчиков: линейной, квадратичной, кубической, экспоненциальной функцией и т.п. Такую оценку можно провести по информации о существовавших ранее финансовых пирамидах. Основная трудность состоит в том, что такая информация не является общедоступной.

В следующем разделе будет описана более гибкая модель, которая позволяет варьировать цену бумаг Организатора с течением времени.

6. Задача максимизация выручки $V(T)$ Организатора финансовой пирамиды при помощи вариации цены – управления $c_g(t)$

В этом разделе рассматривается задача оптимизации по цене – управлению $c_g(t) \in [0,1]$.

Как уже было сказано ранее, кроме постановки задачи максимизации с постоянной ценой (т.е. ценой-параметром) возможно постановка с ценой, зависящей от времени $c_g(t) \in [0,1]$:

$$\begin{cases} V(T) \to \max \\ V(0) = 0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = c_g(t)g(t) - g(t-\varphi) \\ g(0) = 0, t \in [-\varphi, 0) \\ g(t) = g_o \Phi(c_g(t)) f(t), t \ge 0 \\ c_g = c_g(t) \in [0,1] \end{cases}$$

Здесь $\Phi(c)$ - функция спроса, удовлетворяющая всем описанным ранее условиям.

Перепишем эту задачу как задачу оптимального управления по Л. С. Понтрягину [7]. Для этого подставим функция $g(t)$ в выражение для $\frac{dV}{dt}$. При этом, с учетом того, что функция $g(t)$ по построению обычно разрывна ($g(0-) = 0$, $g(0+) = g_o \Phi(c_g(0+)) f(0+)$, необязательно $g(0+) = g(0-)$), правая часть дифференциального уравнения также будет разрывна. Для соответствия со стандартной записью задачи оптимального управления [7] сменим знак у $V(t)$. В итоге получим:

$$\begin{cases} V(T) \to \min \\ V(0) = 0 \\ 0 \le t \le T_1, T_1 > \varphi \\ \dfrac{dV}{dt} = -\begin{cases} c_g(t) g_o \Phi(c_g(t)) f(t), 0 \le t < \varphi \\ c_g(t) g_o \Phi(c_g(t)) f(t) - g_o \Phi(c_g(t-\varphi)) f(t-\varphi), t \ge \varphi \end{cases} \\ c_g = c_g(t) \in [0,1] \end{cases}$$

Здесь $V(t)$ – фазовая переменная, $c_g = c_g(t) \in [0,1]$ – управление. $\Phi(c)$ и $f(t)$ – заданные функции, которые будем полагать непрерывными при $t \geq 0$, $f(t) \geq 0$, а $\Phi(c)$ удовлетворяет описанным выше условиям, предъявляемым к функции спроса. Управление $c_g(t)$ будем предполагать кусочно-непрерывным на $[0,T]$.

Таким образом, поставленная задача – это задача оптимального управления по Л. С. Понтрягину, обладающая следующими особенностями:

1) в правую часть дифференциального уравнения, описывающего эволюцию системы, не входит фазовая переменная $V(t)$;

2) правая часть зависит от управления нелинейно (следует из свойств функции $\Phi(c)$;

3) правая часть имеет разрыв в точке $t = \varphi$, если $f(0+) \neq 0$;

4) область управления $U \overset{def}{=} [0,1]$ компактна и не зависит от времени и фазовых переменных;

5) дифференциальное уравнение содержит не только управление $c_g(t)$, но и управление с фиксированным запаздыванием $c_g(t-\varphi)$.

Решение этой задачи представляется делом будущего.

7. Заключение

В данной статье описывается модель финансовой пирамиды, лежащая в рамках предложенного С. В. Дубовским подхода. Основными предположениями, положенными в основу модели, являются следующие:

1) обязательства Организатора в рамках финансовой пирамиды погашаются им только за счет собранных средств без привлечения сторонних средств;

2) крах финансовой пирамиды обусловлен свойствами самой пирамиды: у Организатора финансовой в некоторый момент времени может оказаться недостаточно средств для выполнения собственных обязательств.

Первый раздел статьи представляет собой введение в тему описания финансовых пирамид и содержит небольшой обзор существующих подходов.

Во втором разделе описывается модель финансовой пирамиды, рассматриваемая в работе, выписываются уравнения и отмечаются основные особенности.

Третий раздел посвящен описанию финансовых пирамид с различными заданными функциями роста $g(t)$ (линейная, степенная, экспонenциальная и логистические функции) и фиксированной ценой продажи c_g ценных бумаг Организатора. Во всех случаях получены в виде аналитических формул время жизни финансовой пирамиды жизни T, объем пирамиды $G(T)$, выручка Организатора $V(T)$. Полученные результаты сведены в таблицы. В качестве иллюстрации рассчитан конкретный числовой пример.

Можно отметить, что приведенная модель с фиксированной ценой достаточно проста, чтобы описывать, реальные финансовые пирамиды, такие как АО «МММ», «Властилина», ГКО-ОФЗ и другие.

В четвертом разделе рассматривается усовершенствование модели. Делается предположение о том, что целью Организатора финансовой пирамиды является максимизация собственной выручки в момент окончания пирамиды. Даются две крайние постановки задач соответствующей оптимизации.

Пятый раздел и Приложения 1-2 посвящены решению задачи максимизация выручки Организатора в момент окончания финансовой пирамиды по цене-параметру при различных функциях роста (постоянной, линейной, степенной и экспоненциальной). Получены оптимальные значения c_g^* в виде аналитических формул во всех случаях. Рассчитан конкретный числовой пример, иллюстрирующий реальные значения c_g^*. Приведены рекомендации по применению рассмотренной модели на практике.

В шестом разделе описана задача оптимального управления по Л. С. Понтрягину, соответствующая случаю зависящей от времени цены, и отмечены ее особенности.

Таким образом, в настоящей работе развивается подход С. В. Дубовского к описанию финансовых пирамид, получены аналитические формулы для времени жизни пирамиды, выручки ее Организатора и вкладчиков при различных характерах роста. Рассмотрена и решена задача максимизации выручки Организатора в момент окончания финансовой пирамиды по цене-параметру. Приведена постановка задачи оптимального управления, отвечающей случаю зависящей от времени цены, и отмечены ее особенности.

Рассматриваемую модель можно приблизить к реальности, если учесть, например, расходы на рекламную компанию, позволяющую стимулировать продажи ценных бумаг Организатора финансовой пирамиды, или иным способом.

Список литературы

1. *Blanchard O.-J. and Watson M.* Bubbles, rational expectations and financial markets in *P. Wachtel* Crises in economic and financial structure. – Lexington (MA), 1982.

2. *Белянин А. В., Исупова О. Г.* Финансовые пирамиды в переходной экономике с точки зрения теории игр // Российская программа экономических исследований. Научный доклад № 2000/10 (www.eerc.ru, http://195.28.33.75/).

3. *Дубовский С. В.* Прогнозирование инфляции и обменного курса рубля в российской нестационарной экономике. – М.: Издательство УРСС. – 2001.

4. *Дубовский С. В.* Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков // Экономика и математические методы, 2002, том 38, № 2, с. 84-96.

5. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. – М.: Издательство МФТИ. – 1997.

6. *Димитриади Г. Г.* Математические модели финансовых пирамид // Электронный журнал «Исследовано в России», 83, стр. 929-936, 2002 г. – http:\\zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/083.pdf.

7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. В.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука. – 1976.

Приложение 1

В этом Приложении приводится решение вспомогательной задачи.

Задача.

$f(c)=c^a\left(1-c\right)^b$, $a>0$. $b>0$.

$f(c)\to\max\limits_c$

Решение.

$f'(c)=ac^{a-1}(1-c)^b-bc^a(1-c)^{b-1}=c^{a-1}(1-c)^{b-1}\left[a-(a+b)c\right]$.

Легко видеть, что максимум достигается при $c^*=\dfrac{a}{a+b}$.

Ответ: $c^*=\dfrac{a}{a+b}$.

Приложение 2

В этом Приложении приводится решение вспомогательной задачи.

Задача.

$f(c)=c^{-a}\left(1-c\right)^b(c-k)$, $0<a<1$, $b>1$, $0\le k\le 1$.

$f(c)\to\max\limits_{c\in[0,1]}$

Решение.

$$f'(c)=-ac^{-a-1}(1-c)^b(c-k)-bc^{-a}(1-c)^{b-1}(c-k)+c^{-a}(1-c)^b=$$
$$=c^{-a-1}(1-c)^{b-1}\left[-a(1-c)(c-k)-bc(c-k)+c(1-c)\right]=$$
$$=c^{-a-1}(1-c)^{b-1}\left[-ac+ak+ac^2-ack-bc^2+bck+c-c^2\right]=$$
$$=c^{-a-1}(1-c)^{b-1}\left[c^2(a-b-1)+c(-a-ak+bk+1)+ak\right].$$

Обозначим $f_1(c)=c^2(a-b-1)+c(-a-ak+bk+1)+ak$.

$f_1(c)$ – парабола с ветвями, направленными вниз ($0<a<1,\ b>1\ \Rightarrow\ a-b-1<0$).

Вычислим ее дискриминант:

$$D=(-a-ak+bk+1)^2-4ak(a-b-1)=$$

$$=(-a-ak+bk+1)^2+4ak\left[\left(b-a\right)+1\right]>0.$$

Пусть $c_{1,2}$ – корни $f_1(c)$, их всегда два при заданных условиях. По теореме Виета

$$c_1 c_2 = \frac{ak}{a-b-1} = -\frac{ak}{b-a+1} < 0,$$

$$c_1 + c_2 = \frac{-a-ak+bk+1}{b-a+1} = \frac{(b-a)k+(1-a)}{(b-a)+1} > 0.$$

Итак, корни $c_{1,2}$ разных знаков (или один из корней – нуль при $k=0$), положительный корень больше по модулю. Необходимо проверить, лежит ли больший корень на отрезке $[0,1]$.

$$f_1(0) = ak > 0,$$
$$f_1(1) = a-b-1-a-ak+bk+1+ak = -b+bk = -b(1-k) \le 0.$$

Значит, больший корень обязательно лежит на отрезке $[0,1]$.

Теперь из рассмотрения знаков $f'(c)$ понятно, что максимум функции $f(c)$ на отрезке $c \in [0,1]$ достигается при $c^* = c_2 > 0$.

$$c^* = \frac{(1-a)+(b-a)k+\sqrt{(-a-ak+bk+1)^2+4ak(b-a+1)}}{2(b-a+1)}.$$

Непосредственная проверка дает, что действительно $c^* \in [0,1]$.

Для удобства выпишем значения c^* в двух частных случаях:

При $k=0$ $c^* = \dfrac{1-a}{b-a+1}$, при $k=1$ $c^*=1$.

<u>Ответ:</u>

$$c^* = \frac{(1-a)+(b-a)k+\sqrt{(-a-ak+bk+1)^2+4ak(b-a+1)}}{2(b-a+1)},$$

$$k=0: \; c^* = \frac{1-a}{b-a+1}.$$

$$k=1: \; c^* = 1.$$