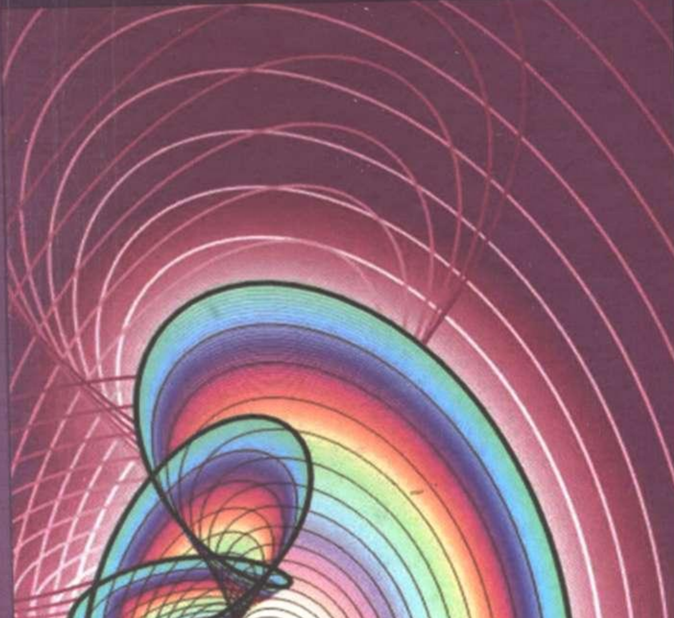
В. Е. Епихин

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Учебное пособие



БИНОМ

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

В. Е. Епихин

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Учебное пособие

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2006

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1
Е67

Епихин В. Е.

Е67 Алгебра и теория пределов. Элективный курс: Учебное пособие / В. Е. Епихин. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 352 с.: ил.

ISBN 5-94774-449-X

Элективный курс предназначен для углубленного изучения математики. Излагаются основы теории множеств и математической логики, элементы аксиоматики действительных чисел, начала тригонометрии, теория приближений действительных чисел, комплексные числа, теория пределов, свойства функций, многочлены. Книга завершается доказательством основной теоремы алгебры. Изложение сопровождается примерами и упражнениями. В основу учебного пособия положен общий курс математики, который читается учащимся старших классов физико-математического лицея № 1580 при МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Для старшеклассников и учителей математики общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, колледжей. Книга будет полезна преподавателям и слушателям подготовительных курсов, а также студентам младших курсов вузов.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1

Учебное издание

Епихин Валерий Евгеньевич

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Элективный курс

Учебное пособие

Ведущий редактор *М. Стригунова*
Художник *Ф. Инфантэ*
Художественный редактор *О. Лапко*
Компьютерная верстка *М. Панов*

Подписано в печать 05.05.06. Формат 60 × 90 1/16.
Гарнитура Computer Modern. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 22,0. Тираж 2000 экз. Заказ 2850
ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (495) 157-1902,
e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

Отпечатано в ОАО ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ISBN 5-94774-449-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. Математика возникла в глубокой древности из практических потребностей счета и простейших измерений. Как любой пласт культуры, математика была вызвана к жизни духовными потребностями человека, его стремлением к познанию и красоте.

Хотя числа и не управляют миром, они показывают, по каким законам управляется мир. На вопрос: «Для чего изучают математику?» английский философ Роджер Бэкон ответил: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества».

2. Эта книга не столько отражает многолетний опыт работы автора на кафедре «Основы математики и информатики» Специализированного учебно-научного центра при МГТУ им. Н. Э. Баумана, сколько представляет собой изложение понимания задач школьного математического образования с целью разработки ясного, компактного курса, позволяющего вести преподавание математики с единых позиций старшеклассникам с подготовкой разного уровня.

Понимание необходимости объективно складывающегося в перспективе сближения математики, изучаемой в старшей школе, и математики высшей школы позволит планомерно преодолеть известный разрыв между требованиями школьной программы и требованиями университетских программ по высшей математике.

Базисные понятия: число, множество, соответствие, отношение, функция, последовательность, предел, непрерывность, производная, интеграл, уравнение, а также приемы доказательств и методы решения типовых задач, являются общими как для школьной, так и для вузовской математики.

Ключевые положения математики: основные теоремы арифметики, алгебры и математического анализа — образуют костяк школьного учебного плана по алгебре и началам анализа.

Справедливым будет признать, что общей проблемой преподавания математики в школе и в вузе является недостаток отведенного на обучение времени для изложения всего нужного материала. По этой причине часть фактов не доказывается. Обычно опускаются доказательства теорем существования вводимых математических объектов. Допустимы нестрогие доказательства теорем, когда используются более жесткие условия, а также схематичные, иллюстративные доказательства. Иногда общий факт сообщается без доказательства или проверяется на частном примере.

Цель этого пособия — достаточно строгое, углубленное, универсальное и доступное изложение учебного материала, уже ставшего для школы традиционным.

3. Книга состоит из введения и трех частей. Каждая часть объединяет главы, включающие пункты. Нумерация частей и глав сплошная. Например, часть 1, глава 1. Нумерация пунктов, определений, лемм, теорем, примеров, упражнений и рисунков внутри глав — зависимая. Так лемма 1.2 обозначает вторую лемму из главы 1, пункт 1.1 — первый пункт главы 1 и т. д. Оглавление, содержащее подробную информацию о структуре и содержании глав, позволяет использовать книгу в качестве справочника.

Учебный материал включает: основы теории множеств и математической логики; элементы аксиоматики действительных чисел; начала тригонометрии; теорию приближений действительных чисел; комплексные числа; теорию пределов; свойства функций; многочлены. Книга завершается доказательством основной теоремы алгебры.

Сопутствующие примеры и упражнения, снабженные подробными указаниями или ответами, предназначены для улучшения понимания, повышения эффективности и контроля успешности усвоения учебного материала учащимися.

Весь материал рассчитан на школьников 10-х классов. Ниже приводится примерный тематический план изучения элективного курса и распределения аудиторной нагрузки по темам. Тематический план составлен для двух вариантов: аудиторной нагрузки в 68 часов и в 34 часа. Учебное время, соответствующее нагрузке в 34 часа, приведено в скобках.

Тема	Форма организации занятия и учебное время, ч		Всего, ч
	Лекция	Практическое занятие	
Введение в теорию множеств	4 (2)	4 (2)	8 (4)
Числовые системы. Теория пределов	8 (4)	8 (4)	16 (8)
Свойства функций. Предел функции	8 (4)	8 (4)	16 (8)
Многочлены. Основная теорема алгебры	8 (4)	8 (4)	16 (8)
Контрольные мероприятия	—	8 (4)	8 (4)
Повторение	—	4 (2)	4 (2)
Итого, ч:	28 (14)	40 (20)	68 (34)

Автор выражает благодарность коллегам: В. А. Воблому и Н. П. Мясникову за обсуждение содержания отдельных глав учебника; директору лицея № 1580 при МГТУ им. Н. Э. Баумана, заведующему кафедрой «Основы математики и информатики» профессору С. С. Граськину — за помощь и поддержку в работе.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ КУРСА

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ... — множества элементов, например $\boldsymbol{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$;
$\varnothing$ — пустое множество;
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ — дизъюнкция, или объединение множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$;
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ — конъюнкция, или пересечение множеств;
$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ — прямое, или декартово, произведение множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, состоящее из упорядоченных пар (a, b) элементов a и b, принадлежащих соответственно множеству $\boldsymbol{A}$ и множеству $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(a, b) \mid (a \in \boldsymbol{A}), (b \in \boldsymbol{B})\}$, где «|» — знак разъясняющий (читается: «такой, что»), например $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2$ — декартов квадрат множества $\boldsymbol{A}$;
$|\boldsymbol{A}|$ — число элементов к о н е ч н о г о множества $\boldsymbol{A}$.

ВКЛЮЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ И ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ЭЛЕМЕНТА МНОЖЕСТВУ

$\subset$, $\subseteq$ — знаки включения множеств, например, $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{D}$;
$\not\subset$ — знак отрицания включения множеств;
$\in$ — знак принадлежности элемента множеству, например, $a \in \boldsymbol{A}$;
$\notin$, или $\overline{\in}$ — знак отрицания принадлежности элемента множеству.

КВАНТОРЫ

$\forall$ — квантор общности, например, $\forall x$ — «для любого x»;
$\exists$ — квантор существования, например, $\exists x$ — «существует x»;

$\exists!$ — квантор существования и единственности, например, $\exists!\, x$ — «существует единственный x»;

$\bar{\exists}$ — квантор «не существует».

ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{I}$ — множество иррациональных чисел;

$\mathbb{R}$ или $(-\infty;\infty)$ — множество действительных чисел;

$[a;\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$, $(-\infty;b]=\{x \mid x \leqslant b\}$ — замкнутые лучи, или полупрямые, например $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty)$ — множество неотрицательных действительных чисел;

$(a;\infty) = \{x \mid x > a\}$, $(-\infty;b) = \{x \mid x < b\}$ — открытые лучи, например $\boldsymbol{X} = \{x \mid x < 5\}$ — множество, состоящее из элементов «x таких, что $x < 5$».

ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок или сегмент;

$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$, $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ — полуинтервалы;

$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ — интервал;

$A|A'$ — сечение на множестве рациональных чисел;

$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}'$ — сечение на множестве действительных чисел.

ГРУППОВЫЕ ОПЕРАЦИИ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ЧИСЕЛ

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} x_\nu = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \qquad \prod_{\nu=1}^{\nu=n} x_\nu = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

I. АКСИОМАТИКА НАТУРАЛЬНОГО РЯДА ЧИСЕЛ

Одно из ключевых понятий математики — *число*, от греческого слова *arithmos* — дало название «Арифметика» науке о числах, в первую очередь, целых и дробных, и действиях с ними.

Основные этапы развития арифметики — от простейших приемов счета и перечисления элементов совокупности объектов у древних египтян и вавилонян — к теоретической разработке учения о натуральных числах, теории пропорций и измерения величин у древних греков.

Архимед сделал существенный вклад в формирование понятия бесконечного натурального ряда.

Важным этапом разработки учений о числах и об измерении величин было создание общего учения о числе (целом, рациональном и иррациональном), а также буквенного аппарата алгебры. В конце 17 в., благодаря включению в арифметику понятия иррационального числа, было осознано фундаментальное значение арифметики как науки, достаточной для изучения непрерывных величин.

Начало следующего этапа — аксиоматическое построение арифметики — относится к 19 в. в связи с процессом критического пересмотра логических основ математики. В середине 19 в. Г. Грассману удалось построить систему аксиом, определяющих действия сложения и умножения так, что остальные положения арифметики вытекают из нее как логическое следствие. Для натурального ряда чисел, начиная с 1, можно определить число 2 как $1 + 1$, число 3 как $2 + 1$, число 4 как $3 + 1$ и т. д. Поэтому одного общего положения

$$k + (l + 1) = (k + l) + 1, \qquad \text{(I.1)}$$

принимаемого в качестве определения *сложения*, достаточно для того, чтобы не только вывести формулы частного типа, например $3+2 = 5$, но, пользуясь методом математической индукции, доказать и общие свойства сложения, верные для любых натуральных чисел k, l, m — *коммутативность*: $k + l = l + k$, *ассоциативность*: $(k + l) + m = k + (l + m)$, а также *закон сокращения для сложения*: если $k + l = n + l$, то $k = n$.

Такое же значение для умножения имеют формулы

$$a \cdot 1 = a \quad \text{и} \quad a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a. \qquad \text{(I.2)}$$

Так доказательство соотношения $2 \cdot 2 = 4$ можно представить в виде цепочки равенств: $2{\cdot}2 = 2{\cdot}(1+1) = 2{\cdot}1+2{\cdot}1 = 2+2 =$ $= 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$.

После доказательства *коммутативности*: $k \cdot l = l \cdot k$, *ассоциативности*: $(k \cdot l) \cdot m = k \cdot (l \cdot m)$, *дистрибутивности* (по отношению к сложению): $k \cdot (l + m) = k \cdot l + k \cdot m$, а также *закона сокращения для умножения*: если $k \cdot l = n \cdot l$, то $k = n$, — построение теории арифметических действий над натуральными числами осуществляется с помощью дедуктивного вывода, от общего к частному.

Построение Г. Грассмана было завершено трудами Пеано, в которых была четко выделена система основных понятий, а именно: *натуральные числа*, *начальный член* натурального ряда (в качестве которого обычно принимается число 1), а также основное отношение — *следование одного числа непосредственно за другим* в натуральном ряде.

Перечисленные понятия связаны между собой пятью аксиомами.

Аксиомы Дж. Пеано (1858–1932).

$П_1$. 1 есть натуральное число.

$П_2$. Следующее за натуральным числом есть натуральное число.

$П_3$. 1 не следует ни за каким натуральным числом.

$П_4$. Если натуральное число n следует за натуральным числом l и за натуральным числом m, то l и m равны.

$П_5$ (аксиома математической индукции). Если какое-либо предложение $P(n)$ доказано для $n = 1$ и если из допущения, что оно истинно для натурального n вытекает, что оно истинно и для следующего за n натурального числа, то это предложение истинно для всех натуральных чисел.

II. ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА В НАТУРАЛЬНОМ РЯДЕ ЧИСЕЛ

Определение В1. Если для натуральных чисел n_1, n_2 существует такое натуральное число k, что $n_1 + k = n_2$, то говорят, что n_1 меньше n_2, или $n_1 < n_2$. Число n_1 меньше или равно n_2, если $n_1 < n_2$ или $n_1 = n_2$; в этом случае пишут $n_1 \leqslant n_2$.

Имеется отношение, инверсное к отношению $<$, обозначаемое символом $>$. При этом $n_2 > n_1$ тогда и только тогда, когда $n_1 < n_2$.

Отношение $\geqslant$ является инверсией к отношению $\leqslant$.

Теорема В1 (закон трихотомии). Для любых натуральных чисел n_1, n_2 выполняется одно и только одно из трех условий

$$n_1 < n_2 \quad \text{или} \quad n_1 = n_2 \quad \text{или} \quad n_1 > n_2.$$

Теорема В2. Бинарное отношение $<$ на множестве натуральных чисел транзитивно. Это означает, что для любых натуральных чисел n_1, n_2, n_3 из неравенств $n_1 < n_2$ и $n_2 < n_3$ следует неравенство $n_1 < n_3$.

Теорема В3. Бинарное отношение $<$ на множестве натуральных чисел монотонно относительно сложения и умножения, т. е. для любых натуральных чисел n_1, n_2, n_3 истинны утверждения

1) $n_1 < n_2$ тогда и только тогда, когда $n_1 + n_3 < n_2 + n_3$;
2) $n_1 < n_2$ тогда и только тогда, когда $n_1 n_3 < n_2 n_3$.

Решение уравнения $n = n_1 + m$ при $n_1 < n$ обозначается через $m = n - n_1$.

Натуральный ряд чисел можно расширить до *множества целых чисел* $\mathbb{Z}$ добавлением символов $(-n)$, или отрицательных целых чисел, и нуля 0. Целые числа можно представить парами натуральных чисел: натуральное число n — парой $(n+n_1, n_1)$, нуль — парой (n_1, n_1), отрицательное число $(-n)$ — парой $(n_1, n+n_1)$, где n_1 — произвольное натуральное число. Каждое целое число m можно представить многими парами (n, n_1), однако каждый символ (n, n_1) определяет одно и только одно целое число, а именно: натуральное число m, если $n > n_1$; число $m = 0$, если $n = n_1$; число $m = -(n_1 - n)$, если $n_1 > n$.

Операции сложения и умножения определяются соотношениями

$$(n, n_1) + (n_2, n_3) = (n + n_2, n_1 + n_3),$$
$$(n, n_1) \cdot (n_2, n_3) = (nn_2 + n_1 n_3, nn_3 + n_1 n_2),$$
$$(n, n_1) < (n_2, n_3), \text{ если } n + n_3 < n_1 + n_2.$$

Для них выполняются все свойства сложения и умножения (утверждения теоремы В3), а также свойства отношений порядка.

На множестве целых чисел уравнение $n = n_1 + m$ всегда имеет единственное решение $m = n - n_1$. Равенство $m_1 \cdot m_2 = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$.

Введем понятие *модуля целого числа* m:

$$|m| = m \qquad \text{при } m > 0;$$
$$|m| = 0 \qquad \text{при } m = 0;$$
$$|m| = -m \qquad \text{при } m < 0.$$

Дробные числа можно вводить как пары целых чисел (числитель и знаменатель), подчиненные определенным законам сравнений и действий.

Упражнение В1. Доказать единственность представления натурального числа n в десятичной системе счисления

$$n = n_0 + \sum_{\lambda=1}^{\nu} 10^\lambda \cdot n_\lambda = \overline{n_\nu n_{\nu-1} \ldots n_1 n_0}, \quad \text{где } \nu \in \mathbb{N};\ n_\nu \in \mathbb{N},\ n_\nu < 10, \tag{II.1}$$

а каждая из цифр $n_0, n_1, \ldots, n_{\nu-1}$ — либо 0, либо натуральное число, меньшее 10.

III. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Понятие *множества*, или *совокупности*, принадлежит к числу неопределяемых математических понятий. Это понятие не определяется, но может быть раскрыто на примерах.

Спросим, что общего между хлебом, книгой и космической ракетой?

— Все это продукты человеческого труда, или товары, имеющие стоимость.

Математика, астрономия, механика, физика, химия суть науки. Чтобы определить множество $\boldsymbol{A}$, достаточно указать *характеристическое свойство* его элементов $P(a)$, т. е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества, и только они. Для задания множества используют запись: $\boldsymbol{A} = \{a \,|\, P(a)\}$, или «$\boldsymbol{A}$ есть множество элементов a, таких, что выполнено $P(a)$».

Если данным свойством не обладает ни один объект, то говорят, что это свойство определяет *пустое множество* $\varnothing$. Например, множество людей, побывавших на планете Венера — пустое. Учение об общих свойствах множеств составляет *теорию множеств*.

Факт принадлежности элемента a множеству $\boldsymbol{A}$ записывают в виде $a \in \boldsymbol{A}$ (читается: «a принадлежит множеству $\boldsymbol{A}$»).

Если каждый элемент множества $\boldsymbol{A}$ является элементом множества $\boldsymbol{B}$, то множество $\boldsymbol{A}$ называется *подмножеством*, или *частью*, множества $\boldsymbol{B}$. Включение множества $\boldsymbol{A}$ в множество $\boldsymbol{B}$ записывают в виде формулы: $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, или $\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$ (читается: «$\boldsymbol{A}$ включено в $\boldsymbol{B}$», или «$\boldsymbol{B}$ содержит $\boldsymbol{A}$»). Подмножеством данного множества $\boldsymbol{B}$ является также само множество $\boldsymbol{B}$. Пустое множество по определению считается подмножеством любого множества. Всякое *непустое* подмножество $\boldsymbol{A}$ данного множества $\boldsymbol{B}$, отличное от $\boldsymbol{B}$, называется *правильной частью*, или *собственным подмножеством* множества $\boldsymbol{B}$.

Определение В2. Множество U, содержащее все рассматриваемые множества, называется *универсальным множеством*. Так в алгебре множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ содержит множества действительных корней уравнений и решений неравенств.

2. Операции над множествами. *Суммой*, или *объединением* двух, трех, и вообще произвольного, конечного или бесконечного, множества множеств называется множество всех тех объектов, каждый из которых является элементом хотя бы одного из данных множеств.

Примеры записи объединения множеств:

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}; \qquad \bigcup_{\nu=1}^{\nu=n} \boldsymbol{A}_\nu = \boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 \cup \ldots \cup \boldsymbol{A}_n.$$

Сумма множеств обладает свойствами коммутативности

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A} \qquad (\textit{переместительный закон}),$$

ассоциативности

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = A \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) \qquad (\textit{сочетательный закон}).$$

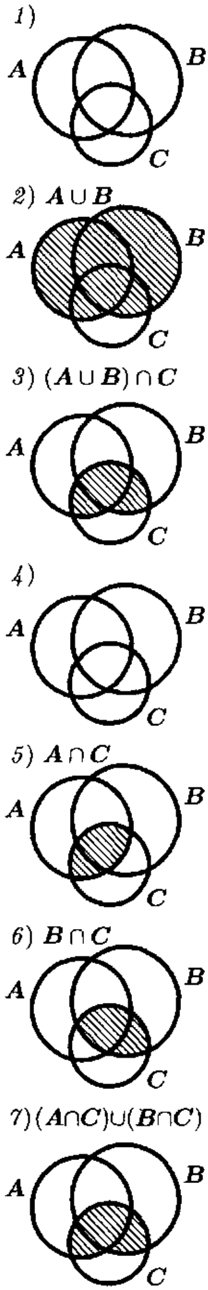


Рис. В1

Разностью множеств $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$ называется множество $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$ всех элементов из $\boldsymbol{B}$, не являющихся элементами множества $\boldsymbol{A}$.

Разность множества $\boldsymbol{B}$ и его подмножества $\boldsymbol{A}$ называется *дополнением* $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$ множества $\boldsymbol{A}$ в множестве $\boldsymbol{B}$.

Пересечением двух, трех, и вообще произвольного — конечного или бесконечного — множества множеств называется множество всех элементов, общих всем данным множествам.

Примеры записи пересечения множеств:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}; \qquad \bigcap_{\nu=1}^{\nu=n} \boldsymbol{A}_\nu = \boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{A}_2 \cap \ldots \cap \boldsymbol{A}_n.$$

Пересечение даже двух непустых множеств может оказаться пустым.

Пересечение множеств обладает свойствами: коммутативности (*переместительный закон*)

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A},$$

ассоциативности (*сочетательный закон*)

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}),$$

дистрибутивности по отношению к объединению и разности множеств

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}),$$
$$(\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}) \cap \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) \setminus (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}).$$

Докажем дистрибутивность операции пересечения по отношению к объединению множеств (*первый дистрибутивный закон*)

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}).$$

$\triangleright$ Первое доказательство. Пусть произвольный элемент x принадлежит множеству из левой части доказываемого равенства, следовательно x принадлежит и $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, и $\boldsymbol{C}$, а значит — хотя бы одному из множеств $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$; так, если x принадлежит $\boldsymbol{B}$, то x принадлежит $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$, а следовательно, правой части доказываемого равенства. Обратно, пусть x принадлежит правой части доказываемого равенства, следовательно x принадлежит $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$ или $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$; так, если x принадлежит $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$, то x принадлежит $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$, а значит, и множествам $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$, образующим левую часть доказываемого равенства. Утверждение доказано. ◀

▷ Любое множество можно условно изобразить на плоскости в виде геометрической фигуры, а его элементы — точками фигуры (диаграмма Венна, или круг Эйлера). Второе доказательство проведем с помощью кругов Эйлера (рис. В1). На рисунках *3*) и *7*) получаются равные множества. ◀

Примеры. На рис. В2 показаны пересекающиеся прямоугольники: $ABCD$ — множество $\boldsymbol{A}$ и $AEFG$ — множество $\boldsymbol{B}$. Объединение множеств $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ — заштрихованная область $[ABCHFG]$. Пересечение множеств $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ — прямоугольник $AEHD$. Разность множеств $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$ — прямоугольник $FGDH$, исключая $[DH]$. Дополнением прямоугольника $AEHD$ в множестве $\boldsymbol{A}$ служит прямоугольник $BCHE$, исключая отрезок $[HE]$.

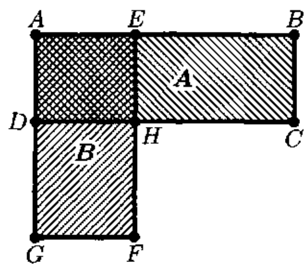


Рис. В2

Пусть $|\boldsymbol{X}|$ обозначает число элементов конечного множества $\boldsymbol{X}$.

Упражнение В2. Используя круги Эйлера, доказать следующие утверждения:

1) если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ — конечные множества и $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \varnothing$, то $|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$;

2) если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ — конечные множества, то

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|;$$

3) если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ — конечные множества, то

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|.$$

Упражнение В3. Доказать второй дистрибутивный закон

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}) \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}).$$

Упражнение В4. Из 300 старшеклассников 134 любят играть в футбол, 96 — в баскетбол, 64 — в волейбол; 14 старшеклассников играют только в баскетбол, 10 — только в волейбол, 22 — только в футбол; 6 старшеклассников играют в футбол, в волейбол и в баскетбол. Сколько учащихся занимаются спортивными играми?

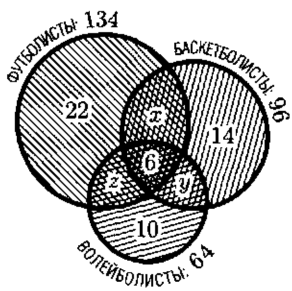


Рис. В3

(Указание. Примените круги Эйлера (рис. В3) и решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 8 = 82 & (= 96 - 14), \\ y + z + 6 = 54 & (= 64 - 10), \\ z + x + 6 = 112 & (= 134 - 22). \end{cases}$$

Ответ: $\{167\}$.)

IV. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ АРИФМЕТИКИ

IV.1. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Напомним основные арифметические определения и теоремы.

Определение В3. Говорят, что натуральное число k делится на натуральное число n, если существует такое натуральное число l, что $k = nl$.

Делимость числа k на число n будем обозначать символически $k \vdots n$. Натуральное число k называется *кратным* натурального числа n.

Так, число 65 есть кратное числа 5 и числа 13. Число 12 имеет бесконечное множество кратных $\boldsymbol{A} = \{12; 24; 36; \ldots\}$; число 8 — бесконечное множество кратных $\boldsymbol{B} = \{8; 16; 24; 32; \ldots\}$.

Докажем, что *частное* от деления числа k на число n единственно.

▷ Доказательство проведем методом «от противного». Пусть $k = nl$ и $k = nl'$. Из этих равенств получим $nl = nl'$, или $n(l - l') = 0$. По определению $n \neq 0$, значит, $l - l' = 0$, т. е. $l = l'$, и частное имеет одно определенное значение. ◀

Сформулируем некоторые теоремы о делимости целых чисел.

1. $k \vdots k$ — свойство *рефлексивности* деления.

2. Если $k \vdots n$ и $n \vdots l$, то $k \vdots l$ — свойство *транзитивности* деления.

3. Если $k \vdots n$ и $n \vdots k$, то $k = n$ — свойство *антисимметричности* деления.

4. Если $k \vdots n$, то $k \geqslant n$.

5. Если $k_1 \vdots n$, $k_2 \vdots n, \ldots, k_\nu \vdots n$ то $(k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu) \vdots n$.

Следствие. Если $(k_1 + k_2) \vdots n$ и $k_1 \vdots n$, то и $k_2 \vdots n$.

Определение В3$_1$. *Общим кратным* натуральных чисел n_1, n_2 называется натуральное число k, которое делится на n_1 и на n_2.

Например, общие кратные чисел 8 и 12 образуют бесконечное множество $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{24, 48, 72, \ldots\}$.

Определение В3$_2$. Наименьшее из всех общих кратных натуральных чисел n_1, n_2 называется *наименьшим общим кратным* этих чисел и обозначается $\text{НОК}(n_1, n_2)$.

Наименьший элемент множества $\boldsymbol{C}$ есть 24, поэтому $\text{НОК}(8, 12) = 24$.

Определение В4. *Делителем* натурального числа n называется всякое натуральное число n', на которое делится число n.

Так, множество делителей числа 45 есть $\boldsymbol{A}' = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$; множество делителей числа 60 есть $\boldsymbol{B}' = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$.

Определение В4$_1$. *Общим делителем* нескольких натуральных чисел называется число, которое является делителем для каждого из них.

Так, множество общих делителей чисел $n' = 45$ и $n'' = 60$ есть конечное множество $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}' = \{1; 3; 5; 15\}$, имеющее наименьший и наибольший элемент.

Наибольший из всех общих делителей чисел n', n'' обозначается $\text{НОД}(n', n'')$. В частности, если $\text{НОД}(n', n'') = 1$, то числа n' и n'' называются *взаимно простыми*.

Наибольший элемент множества C' есть 15. Поэтому НОД(45, 60) = 15.

Определение В5. 1) Натуральное число n называется *простым*, если оно отлично от 1 и имеет делителями только 1 и n.

2) Натуральное число n, отличное от 1, и имеющее кроме 1, n также другие делители, называется *составным числом*. Каждое число можно разложить в произведение простых сомножителей.

Замечание. По определению, число 1 не относится ни к простым ни к составным числам.

Первые натуральные простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Теорема Евклида. Простых чисел имеется бесконечно много.

▷ Доказательство проведем методом «от противного». Предположим, что простых чисел — конечное число. Обозначим их p_1, p_2, ..., p_ν. Рассмотрим натуральное число $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_\nu + 1$; это число не делится ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, так как остаток всегда равен 1. Следовательно, возможны два случая: или число n — простое, не равное ни одному из перечисленных, или n делится на простое число, которого нет среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$. Оба случая противоречат допущению о конечности множества простых чисел. ◀

Основная теорема арифметики. Каждое натуральное число, не равное 1, можно разложить в *произведение простых множителей* единственным образом, если не учитывать порядок следования сомножителей: $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{k_\nu}$, где p_1, p_2, ..., p_ν — не равные друг другу простые числа; k_1, k_2, ..., k_ν — натуральные числа.

Это *разложение* называется *каноническим*.

Следствие. Если $n_1 = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{k_\nu}$, $n_2 = q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot q_\mu^{l_\mu}$, то в НОК$(n_1, n_2)$ войдут сомножители с общими основаниями $(p_i = q_j)$, и показателем степени равным максимальному значению $\max(k_i, l_j)$, а также все сомножители с необщими основаниями $(p_i \neq q_j)$; в НОД(n_1, n_2) войдут сомножители с общими основаниями ($p_i = q_j$), и показателем степени равным значению $\min(k_i, l_j)$.

Упражнение В5. Найти:
1) НОК(270, 300, 315); 2) НОД(126, 540, 630).
3) Доказать, что

$$\text{НОК}(n_1, n_2) \cdot \text{НОД}(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2.$$

(Указание. Запишите каноническое представление целых чисел n_1, n_2, а потом воспользуйтесь равенством $x + y = \max(x, y) + \min(x, y)$, где x, $y \in \mathbb{R}$.)

IV.2. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НА 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25

1. Воспользуемся формулой (II.1) и рассмотрим число

$$q = n - n_0 = \sum_{\lambda=1}^{\nu} 10^\lambda \cdot n_\lambda = 10 \cdot \overline{n_\nu n_{\nu-1} \ldots n_2 n_1}.$$

Очевидно, q делится на 10, на 5 и на 2. Поэтому n делится на 2 тогда и только тогда, когда n_0 делится на 2, т. е. $n_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$; n делится на 5 тогда и только тогда, когда n_0 делится на 5, т. е. $n_0 \in \{0; 5\}$; n делится на 10 тогда и только тогда, когда n_0 делится на 10, т. е. $n_0 \in \{0\}$.

2. Представим число n в виде суммы слагаемых $n = n' + n''$, где

$$n' = \sum_{\lambda=1}^{\nu} (10^\lambda - 1) \cdot n_\lambda, \qquad n'' = n_0 + \sum_{\lambda=1}^{\nu} n_\lambda.$$

Заметим, что n'' — сумма цифр числа n. Преобразуем числа вида $10^k - 1$, где $k \geqslant 2$, входящие в запись n', в произведение

$$10^k - 1 = (10 - 1) \cdot (10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1) = 99\ldots99.$$

Следовательно, число n' делится на 9 и на 3. Отсюда следует, что число n делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма цифр числа n делится на 3 (на 9).

3. Натуральное число делится на 4 (на 25) тогда и только тогда, когда последние две его цифры — нули или образуют двузначное число, которое делится на 4 (на 25).

4. Натуральное число делится на 8 тогда и только тогда, когда последние три его цифры — нули или образуют трехзначное число, которое делится на 8.

Упражнение В6. Доказать признаки делимости целых чисел на 4 и 8.

IV.3. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Деление целых чисел выполнимо не всегда. Поэтому наряду с делением нацело вводится более общее *деление с остатком.*

Определение В6. Разделить число m на число $n > 0$ с остатком — значит представить число m в виде $m = nq+r$, где q, r — целые числа, $0 \leqslant r < n$.

Число q называется *неполным частным*, а число r — *остатком* от деления m на n. Остаток $r = 0$ тогда и только тогда, когда $m \vdots n$. В этом случае q равно частному от деления m на n.

Деление с остатком всегда выполнимо, а неполное частное и остаток однозначно определяются делимым и делителем.

Теорема В4 (о делении с остатком). Для произвольных целых чисел m и n $(n > 0)$ существуют и единственны такие целые числа r и q, что $m = nq + r$, причем $0 \leqslant r < n$.

$\triangleright$ Доказательство проведем для целых $m \geqslant 0$. Зафиксируем делитель n и индукцией по m докажем существование чисел r и q.

1°. Для $m = 0$ утверждение истинно, так как $0 = n \cdot 0 + 0$.

2°. Предположим, что утверждение теоремы истинно для $m = \mu$, т. е. существуют такие целые числа q, r, что $\mu = nq+r$, причем $0 \leqslant r < n$ и докажем его истинность для $m = \mu + 1$.

В самом деле, из равенства $\mu = nq + r$ следует, что $\mu + 1 = nq + (r + 1)$ и $0 < r + 1 \leqslant n$. При этом, если $r + 1 < n$, то числа q, $r + 1$ — искомые, а если $r + 1 = n$, то $\mu + 1 = n(q + 1)$, а искомые числа суть $q + 1$, 0.

Докажем единственность неполного частного и остатка: из равенств $m = nq + r$ $(0 \leqslant r < n)$ и $m = nq_1 + r_1$ $(0 \leqslant r_1 < n)$ следует, что $q = q_1$, $r = r_1$.

По условию, имеет место равенство $nq + r = nq_1 + r_1$, или $r - r_1 = n(q_1 - q)$, откуда следует, что $(r - r_1) \vdots n$. Ввиду неравенства $|r - r_1| < n$, это возможно только при $r - r_1 = 0$, или $r = r_1$. При этом $n(q_1 - q) = 0$, откуда следует, что при $n > 0$ выполнено равенство $q_1 - q = 0$, или $q_1 = q$. ◀

Следствие. Среди последовательных k целых чисел имеется одно число, кратное k.

V. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Определение В7. 1) *Прямым*, или *декартовым* произведением множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется множество $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар элементов (a, b), причем $a \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{B}$.

Символическая запись этого определения имеет вид

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(a, b) \mid (a \in \boldsymbol{A}), (b \in \boldsymbol{B})\}.$$

2) Если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2$ — это *декартов квадрат* множества $\boldsymbol{A}$, *состоящий* из всевозможных пар элементов, лежащих в множестве $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^2 = \{(a_1, a_2) \mid (a_1 \in \boldsymbol{A}), (a_2 \in \boldsymbol{A})\}.$$

Рассмотрим пример задания декартова произведения конечных множеств $\boldsymbol{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и $\boldsymbol{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Для сокращения записи элементы множества $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ сведем в табл. В1, из которой следует, что, если $|\boldsymbol{A}|$ — количество

Таблица В1

Элементы множеств	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	(a_1, b_4)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	(a_2, b_4)
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	(a_3, b_4)
a_4	(a_4, b_1)	(a_4, b_2)	(a_4, b_3)	(a_4, b_4)
a_5	(a_5, b_1)	(a_5, b_2)	(a_5, b_3)	(a_5, b_4)

элементов множества A, а $|B|$ — количество элементов множества B, то $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Замечание. Количество элементов конечного множества называется *мощностью* множества.

Декартово произведение множеств A и B не коммутативно:

$$A \times B \neq B \times A,$$

так как получаемые множества состоят из различных наборов упорядоченных пар элементов.

Для изображения декартовых произведений применяется координатная плоскость. Приведем пример графического изображения декартовых произведений бесконечных ограниченных множеств $A = \{a \mid -1 < a \leqslant 1\}$ и $B = \{b \mid 0 \leqslant b < 4\}$ на координатной плоскости Oab.

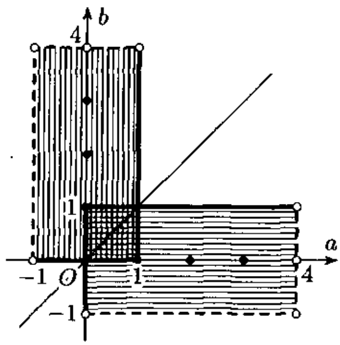


Рис. В4

▷ 1. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in (-1; 1],$ $b \in [0; 4)\}$. На рис. В4 это прямоугольник с вертикальной штриховкой.

2. $B \times A = \{(b, a) \mid a \in (-1; 1],$ $b \in [0; 4)\}$. На рис. В4 это прямоугольник с горизонтальной штриховкой. ◀

Множества $A \times B$ и $B \times A$ не совпадают, однако они симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Самостоятельно докажите, что произвольной точке множества $A \times B$ соответствует симметричная точка из множества $B \times A$.

VI. СООТВЕТСТВИЕ, ИЛИ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОЖЕСТВАМИ

Определение В8. 1) Любое подмножество $R \subseteq A \times B$ декартова произведения двух различных множеств называется *соответствием между множествами* A и B.

2) Множество первых компонент упорядоченных пар, принадлежащих $\boldsymbol{R}$, называется *областью определения* соответствия $\boldsymbol{R}$ и обозначается $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$.

3) Множество вторых компонент упорядоченных пар, принадлежащих $\boldsymbol{R}$, называется *множеством значений* соответствия $\boldsymbol{R}$ и обозначается $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})$.

4) Если множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — числовые, то множество точек координатной плоскости, соответствующих упорядоченным парам из множества $\boldsymbol{R}$, образуют *график соответствия* $\boldsymbol{R}$.

5) Если $a \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{B}$ и $(a,b) \in \boldsymbol{R}$, то записывают $\boldsymbol{R}(a,b)$, или $a\boldsymbol{R}b$.

6) Если $\boldsymbol{R} = \varnothing$, то соответствие называют *пустым*, а если $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, то соответствие называют *полным*.

7) *Полным образом* элемента $a \in \boldsymbol{A}$ называется множество всех $y \in \boldsymbol{B}$, таких, что $a\boldsymbol{R}y$.

8) *Полным прообразом* элемента $b \in \boldsymbol{B}$ называется множество всех $x \in \boldsymbol{A}$, таких, что $x\boldsymbol{R}b$.

Определение В9. Всякое подмножество декартова квадрата $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ называется *бинарным отношением*, или просто — *отношением*.

По аналогии, можно ввести n-арное соответствие или n-арное отношение. Наиболее распространенные примеры соответствий — календарь, расписание поездов или занятий в школе, график дежурства, электронная схема, инструкция (например, по технике безопасности), руководство пользователя прибором (например, компьютером), уголовный и процессуальный кодексы, трудовое законодательство и т. д. Можно затронуть темы искусства, спорта, политики, науки.

Соответствия могут иметь сложную структуру, но чаще всего это простая двумерная таблица с одним входом и несколькими выходами.

Графиками бинарных отношений на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ являются геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют заданным соотношениям: уравнениям, неравенствам, а также совокупностям и/или системам условий.

Примеры. 1) Геометрическим местом точек плоскости, лежащих на заданном расстоянии r от точки $O(x_0, y_0)$ является окружность с центром в данной точке с уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

2) Геометрическим местом точек плоскости, отстоящих от точки $O(x_0, y_0)$ на расстоянии, не меньшем заданного числа r, является внешность окружности с центром в данной точке; здесь $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \geqslant r^2$.

Упражнение В7. Изобразить на плоскости Oxy графики соответствий 1)—7):

1) $\dfrac{(y-x)^3\cdot(xy-1)^5}{(y-x)^4+(xy-1)^6}=0;$ 2) $\begin{cases} y+8 \geqslant x^2+2x, \\ 12+5x \leqslant -2y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-4x+y^2+4y+6 \leqslant 0, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$ 4) $\dfrac{xy+4}{x^3}<0;$

5) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9, \\ y+1 \geqslant 0, \\ 3y+6 \geqslant 2|x|; \end{cases}$ 6) $\dfrac{xy-6}{x}>0;$ 7) $x(x^2+y^2-9) \leqslant 0.$

Для конечных множеств A и B широко используется матричное представление соответствия. Пусть $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ и $R \subseteq A \times B$. Соответствию R сопоставим матрицу размером $n\times m$, строки которой помечены элементами из A, а столбцы — элементами из B, причем на пересечении строки a_i и столбца b_j стоит 1, если $a_i R b_j$, и 0 в противном случае. Например, полному соответствию из табл. В1 сопоставляется матрица, состоящая из единиц.

Если $A=\{a,b\}$, $B=\{x,y,z\}$, и $R=\{(a,x),(a,y),(b,y),(b,z)\}$, то R сопоставляется матрица

$$\begin{array}{c} \\ \\ a- \\ b- \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \\ | & | & | \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Наоборот, каждая матрица подобного вида однозначно определяет соответствие между множествами A и B.

Упражнение В8. Доказать, что среднее арифметическое простых чисел p и $p+2$ при $p \geqslant 5$ кратно 6.

VII. ВИДЫ СООТВЕТСТВИЙ. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

Логически представляется возможным выделить четыре качественно различных вида соответствий, а именно

— *одно-однозначное*, или 1-1 (все упорядоченные пары имеют различные первые и различные вторые компоненты);

— *одно-многозначное*, или 1-М (имеются пары с одинаковыми первыми, но различными вторыми компонентами);

— *много-однозначное*, или М-1 (имеются пары с одинаковыми вторыми, но различными первыми компонентами);

— *много-многозначное*, или М-М (имеются пары с одинаковыми первыми, но различными вторыми компонентами, а также пары с одинаковыми вторыми, но различными первыми компонентами).

В табл. В2 приведены примеры различных соответствий.

Таблица В2

Примеры соответствий

Виды соответствий	Между множествами $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ и $\boldsymbol{B} = \{a, b, c, d\}$	Между числовыми множествами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, $n \in \mathbb{N}$
1-1	$\boldsymbol{R} = \{(1; a), (2; c), (4; b)\}$	$y = x^{2n-1}$; $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}$
1-М	$\boldsymbol{R} = \{(2; a), (2; c), (4; b)\}$	$y^{2n} = x$; $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}$
М-1	$\boldsymbol{R} = \{(1; a), (2; a), (4; d)\}$	$y = x^{2n}$; $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}_+$
М-М	$\boldsymbol{R} = \{(2; a), (2; b), (3, d), (4, d)\}$	$x^{2n} + y^{2n} = 1$; $\boldsymbol{X} = [-1; 1]$, $\boldsymbol{Y} = [-1; 1]$

Перейдем к определению важнейшего вида соответствий, при котором каждому элементу из области определения соответствует только один элемент из множества значений.

Определение В10. Пусть заданы два непустых множества $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Соответствие f между множествами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ называется *функциональным*, или *отображением множества* $\boldsymbol{X}$ *в множество* $\boldsymbol{Y}$, если оно одно-однозначное или много-однозначное.

Функцию, или отображение принято записывать одним из способов

$$y = f(x),\ x \in \boldsymbol{X}, \quad \text{или } f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y},$$
$$\text{или } f\colon x \mapsto y,\ x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y}.$$

Для функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на одном и том же множестве $\boldsymbol{X}$, можно определить их сумму $f + g$, разность $f - g$, произведение $f \cdot g$, частное $\dfrac{f}{g}$. Это новые функции, значения которых выражаются, соответственно, формулами ($x \in \boldsymbol{X}$)

$$f(x) + g(x); \quad f(x) - g(x); \quad f(x) \cdot g(x); \quad \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0.$$

Таблица В3

Отображение *«в»*, или *инъективное* (рис. В5)	Отображение *«на»*, или *сюръективное* (рис. В6)
Определение В11. $(\forall x \in \boldsymbol{X})\,(\exists!\, y \in \boldsymbol{Y})\colon (y = f(x))$ и $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Различным элементам из $\boldsymbol{X}$ соответствуют различные элементы из $\boldsymbol{Y}$. Свойства: 1) *обратимость*, т. е. $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; 2) $f(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{Y}$.	Определение В12. $(\forall x \in \boldsymbol{X})\,(\exists!\, y \in \boldsymbol{Y})\colon (y = f(x))$ и $(\forall y \in \boldsymbol{Y})\,(\exists\, x \in \boldsymbol{X})\colon (f(x) = y)$. При этом отображении образом множества $\boldsymbol{X}$ является все множество $\boldsymbol{Y}$: $\boldsymbol{Y} = f(\boldsymbol{X})$. Отображение «на» не взаимно однозначное.
Определение В13. Отображение называется *биективным*, или *биекцией*, если оно сюръективное и инъективное. *Биективное* отображение — взаимно однозначное.	

В табл. В3 и на рис. В5, В6 рассмотрены два типа отображений $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$. Это отображение «в», или *инъективное*, и отображение «на», или *сюръективное*.

Определение В14. Если $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ — соответствие между множествами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, то *обратным к* $\boldsymbol{R}$ называется соответствие $\boldsymbol{R}^{-1} \subseteq \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ между множествами $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$, состоящее из

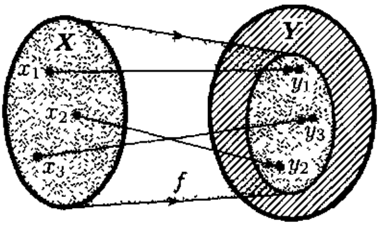


Рис. В5. Диаграмма *инъекции*

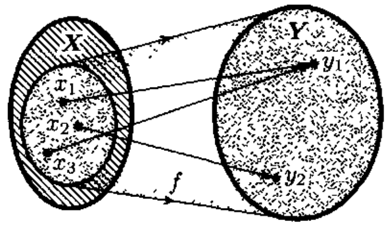


Рис. В6. Диаграмма *сюръекции*

упорядоченных пар (b, a), *инверсных* по отношению к парам $(a, b) \in \boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \{(b, a) \mid a \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{B}, a\boldsymbol{R}b\}.$$

Соответствие, обратное к $\boldsymbol{R}^{-1}$ есть $\boldsymbol{R}$. Поэтому соответствия $\boldsymbol{R}^{-1}$ и $\boldsymbol{R}$ называются *взаимно обратными*.

Упражнение В9. Определить тип соответствия «пальто – крючки» в школьной раздевалке, если каждое пальто висит

1) на отдельном крючке и имеются свободные места;
2) на отдельном крючке, свободных мест нет;
3) на крючках висят по несколько пальто, свободных мест нет.

Теорема В5. Если множества $\boldsymbol{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $\boldsymbol{B} = \{b_1, \ldots \ldots, b_n\}$ состоят из конечного числа элементов, то

1) инъекция $f\colon \boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{в}} \boldsymbol{B}$ существует тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{A}| \leqslant |\boldsymbol{B}|$;

2) сюръекция $f\colon \boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{на}} \boldsymbol{B}$ существует тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{A}| \geqslant |\boldsymbol{B}|$;

3) биекция $f\colon \boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ существует тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

VIII. СУПЕРПОЗИЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

В том случае, когда заданы два отображения $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, $g\colon \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$, причем для любого элемента $x \in \boldsymbol{X}$ имеется единственный $y = f(x) \in \boldsymbol{Y}$, для которого можно найти только один элемент $z = g(y) \in \boldsymbol{Z}$, – каждому элементу $x \in \boldsymbol{X}$ соответствует единственный элемент $z = g(f(x)) \in \boldsymbol{Z}$, что определяет отоб-

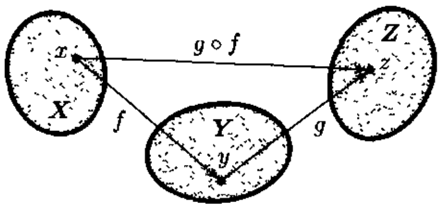


Рис. В7

ражение множества $\boldsymbol{X}$ в множество $\boldsymbol{Z}$ посредством суперпозиции (композиции) отображений g и f (рис. В7)

$$g \circ f \colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z} \quad \text{или} \quad x \mapsto z = g(f(x)).$$

IX. ПРИМЕРЫ ЧИСЛОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$ — функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел: $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Пример инъекции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение $a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, или

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n \cdot (n+1), \; n \in \mathbb{N}.$$

3. Рассмотрим двухпараметрическое отображение — так называемый «биноминальный коэффициент»

$$C_n^0 = 1, \; C_n^n = 1; \text{ при } 0 < \nu < n\text{: } C_n^\nu = C_{n-1}^{\nu-1} + C_{n-1}^\nu, \; n, \nu \in \mathbb{N}. \tag{IX.1}$$

Для удобства вычисления коэффициентов C_n^ν используется табл. В4, называемая «треугольником Паскаля».

Методом математической индукции докажем формулу сокращенного умножения для $(a+b)^n$, или «бином Ньютона»:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n b^n.$$

Таблица В4

$n \backslash \nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...									

$\triangleright$ Доказательство методом математической индукции опирается на использование двух суждений, а именно

1°. База индукции. Отметим связь чисел в табл. В4 с коэффициентами разложения простейших биномов по формулам сокращенного умножения в частных случаях $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$:

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b,$$
$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

2°. Индукционный шаг. Предположим, что для показателя степени $n-1$ выполнена формула

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} C_{n-1}^{\nu} a^{(n-1)-\nu} b^{\nu},$$

и докажем ее для показателя степени n, а именно

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} C_n^{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}.$$

Заметим, что

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)^{n-1} = (a+b)\cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} C_{n-1}^{\nu} a^{(n-1)-\nu} b^{\nu}.$$

Выполним умножение — сначала на a, а потом — на b и преобразуем получившиеся выражения

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} C_{n-1}^{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} C_{n-1}^{\nu} a^{(n-1)-\nu} b^{\nu+1} =$$
$$= \left(C_{n-1}^{0} a^n + \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} C_{n-1}^{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu} \right) +$$
$$+ \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} C_{n-1}^{\nu} a^{(n-1)-\nu} b^{\nu+1} + C_{n-1}^{n-1} b^n \right).$$

В знаке суммы, стоящем во второй скобке, сделаем замену индекса $\nu + 1 = \lambda$ и получим формулу

$$(a+b)^n = \left(C_{n-1}^{0} a^n + \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} C_{n-1}^{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu} \right) +$$
$$+ \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} C_{n-1}^{\lambda-1} a^{n-\lambda} b^{\lambda} + C_{n-1}^{n-1} b^n \right).$$

Возвратимся к прежнему обозначению $\lambda = \nu$, объединим слагаемые под общим знаком суммы, воспользуемся тем, что $C_{n-1}^{0} = C_n^0 = 1$ и $C_{n-1}^{n-1} = C_n^n = 1$ и получим выражения

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} (C_{n-1}^{\nu} + C_{n-1}^{\nu-1}) \cdot a^{n-\nu} b^{\nu} + C_n^n b^n =$$
$$= C_n^0 a^n + \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} C_n^{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu} + C_n^n b^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} C_n^{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu},$$

причем последнее равенство тождественно доказываемому.

На основании принципа математической индукции заключаем, что доказываемое утверждение истинно для любого $n \in \mathbb{N}$. ◀

Упражнение В10. 1) Доказать равенства

а) $\sum_{\nu=0}^{\nu=n} C_n^{\nu} = 2^n$; б) $\sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^{\nu} C_n^{\nu} = 0$.

2) Доказать, что сумма биноминальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, и каждая из этих сумм равна 2^{n-1}.

3) Проверить, что каждое число, стоящее в табл. B4, отвечает равенству $C_n^\nu = \dfrac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}$ $(\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, где по определению $0! = 1$, $1! = 1$.

4) Доказать, что для чисел $C_n^\nu = \dfrac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}$ выполняются равенства (IX.1) и равенство $C_n^\nu = C_n^{n-\nu}$.

X. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение B15. Конечная или бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *арифметической прогрессией*, если для каждого натурального n выполнено равенство

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Число a_1 называется *первым членом*, а число d – *разностью* арифметической прогрессии. Если $d > 0$, то прогрессия называется *возрастающей*, а если $d < 0$ — *убывающей* арифметической прогрессией.

Утверждение B1. Формула общего члена арифметической прогрессии имеет вид $a_n = a_1 + d(n-1)$.

▷ Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. При $n = 1$ выполнено истинное равенство $a_1 = a_1 + d(1-1)$, при $n = 2$ — истинное равенство $a_2 = a_1 + d(2-a) = a_1 + d$.

2°. Предположим истинность доказываемой формулы при $n = k$ и докажем ее при $n = k+1$:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d\cdot(k-1) + d = a_1 + d\cdot((k+1)-1).$$

Утверждение доказано. Следовательно, оно истинно $\forall\, n \in \mathbb{N}$. ◀

Утверждение B2 (характеристическое свойство, или *критерий* арифметической прогрессии). Конечная или бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый член данной последовательности является средним арифметическим своих соседних членов слева и справа, если они существуют, т. е. выполнено равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \tag{X.1}$$

▷ Доказательство необходимости. Если последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией, то имеем равенства

$$a_{n-1} = a_n - d, \qquad a_{n+1} = a_n + d,$$

из которых следует, что

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Доказательство достаточности. Пусть при всех натуральных $n > 1$ выполнено равенство (X.1). Вычислим разности

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2},$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} - a_{n-1} = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}.$$

Из полученных формул следует, что при $n > 1$ выполнены равенства

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = \ldots = a_2 - a_1 = d,$$

причем здесь число d — общее значение разности последовательных членов $\{a_n\}$. При этом для каждого натурального n выполнено равенство $a_{n+1} = a_n + d$, и последовательность $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия. ◀

Утверждение В3. Сумма первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

▷ Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. При $n = 1$ выполнено истинное равенство $S_1 = a_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1$, а при $n = 2$ — равенство $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot 2$.

2°. Предположим истинность доказываемой формулы при $n = k$ и докажем ее при $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_k}{2}k + \frac{a_k + a_{k+2}}{2} =$$
$$= \frac{a_1 k + a_k(k+1) + a_{k+2}}{2} = \frac{a_1 k + a_k(k+1) + a_1 + d(k+1)}{2} =$$
$$= \frac{a_1(k+1) + (a_k + d)(k+1)}{2} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1).$$

Утверждение доказано. Следовательно, оно истинно $\forall n \in \mathbb{N}$. ◀

Упражнение B11. Доказать утверждения:

1) если $\{a_n\}$ арифметическая прогрессия, то $a_n = a_m + d(n - m)$;
2) если $\{a_n\}$ арифметическая прогрессия и $n + m = k + l$, то

$$a_n + a_m = a_k + a_l;$$

3) последовательность $\{S_n\}$, составленная из сумм последовательных отрезков членов арифметической прогрессии длиной m каждый, сама является арифметической прогрессией с разностью dm^2.

XI. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение B16. Конечная или бесконечная числовая последовательность $\{b_n\}$ называется *геометрической прогрессией*, если для каждого натурального n выполнено равенство

$$b_{n+1} = q \cdot b_n. \qquad \text{(XI.1)}$$

Число $b_1 \neq 0$ называется *первым членом*, а число $q \neq 0$ — *знаменателем* геометрической прогрессии. Если $|q| > 1$, то прогрессия называется *возрастающей по абсолютной величине*, а если $|q| < 1$ — *убывающей по абсолютной величине* геометрической прогрессией.

Утверждение B4. Формула общего члена геометрической прогрессии имеет вид $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

▷ Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. При $n = 1$ выполнено равенство $b_1 = b_1 \cdot q^{1-1}$, при $n = 2$ — равенство $b_2 = b_1 \cdot q^{2-1} = b_1 \cdot q$.

2°. Предположим истинность доказываемой формулы при $n = k$ и докажем ее при $n = k + 1$:

$$b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b^1 \cdot q^{(k+1)-1}. \qquad \text{(XI.2)}$$

Утверждение доказано. Следовательно, оно истинно $\forall n \in \mathbb{N}$. ◀

Утверждение В5 (характеристическое свойство, или *критерий* геометрической прогрессии). Конечная или бесконечная числовая последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый член данной последовательности есть среднее геометрическое своих соседних членов слева и справа, если они существуют, т. е. выполнено равенство

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad \text{или} \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}. \qquad \text{(XI.2}_1\text{)}$$

▷ Доказательство необходимости. Если последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией, то имеем равенства

$$b_{n-1} = \frac{b_n}{q}, \qquad b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

из которых следует, что $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Leftrightarrow |b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Доказательство достаточности. Пусть при всех натуральных $n > 1$ выполнено равенство (XI.2_1). Вычислим частные

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+1}}{\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}} = \sqrt{\frac{b_{n+1}}{b_{n-1}}}, \quad \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}}{b_{n-1}} = \sqrt{\frac{b_{n+1}}{b_{n-1}}}.$$

Из полученных формул следует, что при $n > 1$ выполнены равенства

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \ldots = \frac{b_2}{b_1} = q,$$

причем здесь число q — общее значение частного последовательных членов $\{b_n\}$. При этом выполнены равенства $b_{n+1} = b_n \cdot q$, и последовательность $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия. ◀

Утверждение В6. Сумма первых n членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$ вычисляется по формуле

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} b_\nu = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

$\triangleright$ Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. При $n = 1$ выполнено истинное равенство $S_1 = b_1 = b_1 \cdot \dfrac{q-1}{q-1}$. При $n = 2$ — истинное равенство $S_2 = b_1 + b_2 = b_1 \cdot (1+q) = b_1 \cdot \dfrac{q^2-1}{q-1}$.

2°. Предположим истинность доказываемой формулы при $n = k$ и докажем ее при $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = b_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} + b_{k+1} = b_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} + b_1 q^k =$$
$$= b_1 \cdot \frac{(q^k - 1) + (q^{k+1} - q^k)}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Утверждение доказано. Следовательно, оно истинно $\forall n \in \mathbb{N}$. ◀

Замечание. При $q = 1$ сумма $S_n = b_1 n$.

Упражнение В12. Доказать утверждения:

1) если $\{b_n\}$ геометрическая прогрессия, то $b_n = b_m \cdot q^{n-m}$;

2) если $\{b_n\}$ геометрическая прогрессия и $n + m = k + l$, то $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$;

3) последовательность $\{S_n\}$, составленная из сумм последовательных отрезков членов геометрической прогрессии длиной m каждый, сама является геометрической прогрессией со знаменателем q^m.

XII. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

Как известно, истина рождается в споре. Истинность любого утверждения устанавливается методом дедуктивного логического вывода, или *дедукции*.

Дедукция (от лат. *deductio* — вывод) — операция логического вывода, представляющего собой переход от общих посылок к заключениям, или следствиям, на основе применения правил логики.

Логика изучает формальные правила, по которым выводятся *заключения* из *посылок*. Дедуктивный логический вывод представляется в виде конечной последовательности предложений, удовлетворяющих определенным требованиям. Замыкающий член такой последовательности и представляет собой выводимое предложение, или заключение. Переход от одного предложения упомянутой последовательности к другому осуществляется по правилам логики, без каких-либо ссылок на наглядность и опыт.

Дедуктивный метод играет главную роль в математике, где теории строятся с помощью дедуктивного вывода из аксиом.

Рассуждение можно признать дедуктивным, если с его помощью из истинных посылок нельзя получить ложное заключение.

Пример. Рассмотрим вывод $A \to B$ («если A, то B»), с общими высказываниями

$$A(n) = \text{«}n \text{ кратно } 4\text{»}, \qquad B(n) = \text{«}n \text{ кратно } 2\text{»}.$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Частная посылка $A(12)$: «число 12 кратно 4». Заключение $B(12)$: «число 12 кратно 2».	2. Частная посылка $B(126)$: «число 126 кратно 2». Заключение $A(126)$: «число 126 кратно 4».

Каждому их этих заключений соответствует своя схема вывода:

Схема вывода 1: $(A \to B \text{ и } A(12)) \to B(12)$. В этом выводе посылки и заключение истинны. Можно предположить, что вывод дедуктивный.	Схема вывода 2: $(A \to B \text{ и } B(126)) \to A(126)$. Получено ложное заключение. Вывод не дедуктивный.

В этих двух рассуждениях схемы вывода различны. В первом случае заключение истинное, а во втором — ложное. Из этих примеров видно, что истинность посылок не всегда влечет истинность заключения.

Рассуждение, устанавливающее истинность какого-либо утверждения путем приведения других утверждений, истинность которых уже установлена, называется *доказательством*.

В доказательстве различают *тезис*, т. е. доказываемое утверждение, и *основание*, или *аргументы*, т. е. утверждения, на основании которых доказывается тезис.

Понятие доказательства — одно из центральных в логике и математике. По способу проведения доказательства делятся на *прямые* и *косвенные*.

При прямом доказательстве стараются найти аргументы, из которых логически вытекает тезис.

Например, тезис «медь проводит электрический ток» можно доказать с помощью аргументов: «металлы проводят электрический ток», «медь — металл», следовательно, «медь проводит электрический ток».

В косвенном доказательстве истинность тезиса устанавливается тем, что вскрывается ошибочность противоположного ему допущения, или *антитезиса* (*антитезы*). Поскольку косвенное доказательство использует отрицание доказываемого положения, оно называется также доказательством «от противного».

При математическом доказательстве устанавливается истинность математических утверждений, или теорем.

Упражнение B13. Доказать, что $\operatorname{tg} 1^\circ$ — число иррациональное.

▷ Решение. Проведем доказательство методом «от противного». Предположим, что $\operatorname{tg} 1^\circ$ — число рациональное. Воспользуемся формулой для тангенса суммы двух углов, имеющей вид $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, и последовательно запишем следующие рациональные выражения: $\operatorname{tg} 2^\circ = \dfrac{2\operatorname{tg} 1^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 1^\circ}$, $\operatorname{tg} 3^\circ = \dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ}{1 - \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ}, \ldots$, которые суть рациональные числа, что противоречит иррациональности числа $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$. Таким образом, антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

XII.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИКИ

Определение B17. Повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинное или ложное, называется *высказыванием*. Истинному высказыванию сопоставляется значение ИСТИНА, или логическая 1; ложному высказыванию — значение ЛОЖЬ, или логический 0.

Таблица В5

Таблица истинности элементарных логических формул

A	B	$A \vee B$	$A \& B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Определение В18. *Дизъюнкцией* (логической суммой) высказываний «A и/или B» называется высказывание $A \vee B$ (от лат. *vel* — или), истинное в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний A, B истинное, $A \vee B = 1$, а именно: $1 + 0 = 1$; $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 1$. Дизъюнкция высказываний «A и/или B» считается ложной, только если A и B — ложные, при этом $A \vee B = 0$: $0 + 0 = 0$.

Определение В19. *Конъюнкцией* (логическим произведением) высказываний «A и B» называется высказывание $A \& B$, реже обозначаемое $A \cdot B$, истинное только в том случае, когда каждое из высказываний A, B истинное, $A \& B = 1$: $1 \cdot 1 = 1$. Конъюнкция высказываний «A и B» считается ложной, если хотя бы одно из высказываний A, B ложное, $A \& B = 0$: $1 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$.

Определение В20. *Отрицанием* высказывания A называется высказывание «не-A», или $\neg A$, истинное в том случае, когда высказывание A ложное; высказывание «не-A» ложное в том случае, если A истинное. Другими словами: если $A = 0$, то $\neg A = 1$; если $A = 1$, то $\neg A = 0$.

Определение В21. *Импликацией* высказываний «если A, то B» называется высказывание $A \to B$, ложное только тогда, когда высказывание A истинное, а высказывание B — ложное.

Высказывание A называется *посылкой*, а высказывание B — *заключением* импликации. Если высказывание A — ложное, то о высказывании B ничего не утверждается.

Определение В22. *Эквиваленцией* высказываний A и B «*A тогда и только тогда, когда B*» называется высказывание $A \leftrightarrow B$, истинное тогда и только тогда, когда высказывания A и B оба истинные или оба ложные.

XII.2. ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ

Логическая структура большинства математических теорем имеет вид импликации $A \to B$, или «если A, то B», где математическое высказывание A называется *условием*, а математическое высказывание B — *заключением* теоремы.

Утверждение, противоположное некоторому свойству A, записывается «не-A», или $\neg A$. Во всех случаях «не-не-A» $= A$, и справедливо утверждение «или A, или не-A» (*принцип исключения третьего*).

Условие A называется *достаточным* условием истинности B, а условие B — *необходимым* условием истинности A. Теорема $A \to B$ позволяет построить другие логические формулы, а именно: *обратную* теорему $B \to A$; теорему $\neg A \to \neg B$, *противоположную* данной; теорему $\neg B \to \neg A$, *обратную противоположной* теореме.

Истинность теоремы устанавливается путем доказательства, основанного на других теоремах и леммах, а в конечном итоге — на определениях и аксиомах.

Теорема В6. Следующие импликации эквивалентны:

$$(A \to B) = (\neg B \to \neg A), \qquad \text{(XII.1)}$$

$$(B \to A) = (\neg A \to \neg B). \qquad \text{(XII.2)}$$

▷ Доказательство. 1. Предположим, что утверждение $A \to B$ истинно и имеет место $\neg B$. Тогда A невозможно без того, чтобы не было истинно B, что противоречит $\neg B$. Следовательно, имеет место $\neg A$ и утверждение $\neg B \to \neg A$ истинно.

2. Если истинно утверждение $\neg B \to \neg A$, то из 1 следует $\neg\neg A \to \neg\neg B$. Ввиду равенств $\neg\neg A = A$ и $\neg\neg B = B$, следует, что утверждение $A \to B$ истинно. Теорема доказана. ◀

Замечание. Эквивалентность (XII.1) называют *законом контрапозиции*. Теорема В6 показывает, что нет необходимости изучать все четыре вида теорем, а достаточно рассмотреть любую пару, например прямую и обратную теоремы.

Если истинны прямая и обратная теоремы, то высказывание A называется необходимым и достаточным признаком истинности высказывания B и наоборот: высказывание B — необходимый и достаточный признак истинности высказывания A. Выражения «*необходимо и достаточно*», «*тогда и только тогда*», «*в том и только том случае*», «*утверждения A и B эквивалентны*» — синонимы.

Пример. Теорема: «Если в треугольнике ABC угол C равен $90°$, то длины его сторон связаны соотношением $a^2+b^2=c^2$».

Обратная теорема: «Если в треугольнике ABC длины сторон связаны соотношением $a^2+b^2=c^2$, то угол C равен $90°$».

Доказательство обратной теоремы можно заменить доказательством противоположной теоремы: «Если в треугольнике ABC угол C не равен $90°$, то выполнено неравенство $a^2+b^2\neq c^2$».

Пример. Эквивалентными являются следующие предложения: «Любая вещественная функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, ограничена» и «Любая вещественная функция, определенная на отрезке $[a,b]$ и не ограниченная на нем, разрывна по крайней мере в одной точке».

В математических теоремах часто используется выражение «Для всех ...», обозначаемое как $\forall$, и «Существует ... такое, что ...», обозначаемое как $\exists$. Значок $\forall$ называется *квантором общности*, а значок $\exists$ — *квантором существования*.

Предложения «Для всех ...» и «Существует ... такое, что ...» часто сопровождаются ограничениями, записываемыми в круглых скобках, например, запись $(\forall x \mid x\in M)\,(P(x))$ обозначает, что каждый элемент множества M обладает свойством $P(x)$.

Например, свойство непрерывности вещественной функции $f(x)$ в точке a означает, что любого $\varepsilon>0$, существует такое $\eta(a,\varepsilon)>0$, что неравенство $|x-a|<\eta$ влечет неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, или в краткой форме

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\eta>0)\,(\forall x\in\mathbb{R}, |x-a|<\eta)\colon\,(|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

Формулировка свойства непрерывности вещественной функции $f(x)$ в каждой точке имеет вид: «Каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует такое $\eta(a,\varepsilon)>0$, что для всех a, $x\in\mathbb{R}$ и таких, что $|x-a|<\eta$, имеет место неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$», или в краткой форме

$$(\forall a\in\mathbb{R})\,(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\eta>0)\,(\forall x\in\mathbb{R}, |x-a|<\eta)\colon\,(|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

Если необходимо построить отрицание высказывания, то пользуются следующей теоремой.

Теорема B7 (правило проноса отрицания). Отрицание высказывания, содержащего некоторое число кванторов $\forall$, $\exists$ и свойство $P(x)$, получается заменой каждого квантора $\forall$ на $\exists$ и каждого квантора $\exists$ на $\forall$, а свойство $P(x)$ заменяется его отрицанием $\neg P(x)$.

Например, свойство вещественной функции действительной переменной не быть всюду непрерывной, т. е. иметь разрыв хотя бы в одной точке, можно записать в виде строки

$$(\exists a \in \mathbb{R})\,(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \eta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R}, |x-a| < \eta):\ (|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon).$$

XII.3. СХЕМЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МЕТОДОМ «ОТ ПРОТИВНОГО»

Широко распространенные схемы доказательства методом «от противного» (или косвенного доказательства) основаны на теореме B8.

Теорема B8. Истинны эквивалентности I—III:

I. $(P \to Q) = (P \,\&\, \neg Q) \to (R \,\&\, \neg R)$;
II. $(P \to Q) = (P \,\&\, \neg Q) \to \neg P$;
III. $(P \to Q) = (P \,\&\, \neg Q) \to Q$.

$\triangleright$ Для доказательства составим *таблицу истинности* для утверждений I—III (табл. B6).

Таблица B6

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\to Q$	$P\&\neg Q$	$R\&\neg R$	$(P\&\neg Q)\to\to(R\&\neg R)$	$(P\&\neg Q)\to\to\neg P$	$(P\&\neg Q)\to\to Q$
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1

Анализ таблицы показывает, что при всех допустимых значениях высказываний столбцы, соответствующие доказываемым формулам, тождественно равны. Отсюда вытекает истинность теоремы. ◀

Поскольку высказывание $R \,\&\, \neg R$ всегда принимает значение ЛОЖЬ, то схема доказательства I называется приведением к противоречию, или *приведением к абсурду* (*reductio ad absurdum*).

Примеры. Рассмотрим применение схем доказательства методом «от противного», обоснованных в теореме В8.

1. Воспользуемся эквивалентностью I для доказательства теоремы: «Если две прямые a и b параллельны прямой c, то они параллельны между собой».

$\triangleright$ Здесь условие теоремы P: $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Заключение теоремы: Q: $a \parallel b$. Теорема имеет вид: $P \to Q$. Доказательство теоремы начнем с того, что сделаем предположение $\neg Q$: $a \nparallel b$. В результате логического вывода получим утверждение $\neg R$, о том, что в одной плоскости через одну точку проходят две различные прямые a, b параллельные одной и той же прямой c, противоречащее постулату Евклида о параллельных прямых, который обозначим R.

Таким образом, теорема доказана по схеме $(P \,\&\, \neg Q) \to$ $\to (R \,\&\, \neg R)$, эквивалентной импликации $P \to Q$. ◀

2. Рассмотрим применение схемы доказательства, основанной на эквивалентности II, на примере следующей теоремы: «Если для натуральных чисел m и n выполнено неравенство $a^m < a^n$, и $a > 1$, то $m < n$».

$\triangleright$ Здесь условие теоремы: $P = P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, P_3$: числа m и n — натуральные, выполнено неравенство $a^m < a^n$, $a > 1$. Заключение теоремы: Q: $m < n$.

Теорема имеет вид: $P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, P_3 \to Q$. Для доказательства воспользуемся условием $a > 1$ и предположением $\neg Q$ о том, что $m > n$. Возведем a в натуральную степень m и n. По свойству монотонности произведения при $a > 1$, получим условие $\neg P_2$: $a^m \geqslant a^n$, противоречащее условию P_2. При этом условие теоремы будет $\neg P$, т. е. противоречащее P. ◀

3. Рассмотрим применение схемы доказательства, основанной на эквивалентности III, на примере теоремы: «Если $0 < a \leqslant a^\alpha$ для каждого $0 < \alpha < 1$, то $0 < a \leqslant 1$».

$\triangleright$ Здесь условие теоремы: $P = P_1 \,\&\, P_2$: $0 < a \leqslant a^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Заключение теоремы Q: $0 < a \leqslant 1$. Теорема имеет вид: $P_1 \,\&\, P_2 \to Q$. Для доказательства воспользуемся условием

$0 < \alpha < 1$ и предположением $\neg Q$ о том, что $a > 1$. Тогда $0 < \dfrac{1}{a} < 1$ и выполнены неравенства $\left(\alpha = \dfrac{1}{a}\right)$

$$a \leqslant a^{\frac{1}{a}} \Leftrightarrow \log_a a \leqslant \log_a a^{\frac{1}{a}} \Leftrightarrow \log_a a \leqslant \frac{1}{a} \cdot \log_a a \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{a} \Leftrightarrow a \leqslant 1.$$

Поэтому антитеза неверна. Утверждение доказано. ◄

В рассмотренном случае заключение получено из условия теоремы и предположения, противоречащего заключению.

Коллоквиум по теме: ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

1. Множество. Элементы множества. Основные числовые множества. Характеристическое свойство множества. Способы задания множеств.
2. Отношение включения. Универсальное множество. Доказательство теорем о множествах с помощью диаграмм Эйлера— Венна.
3. Операция пересечения множеств. Коммутативность и ассоциативность пересечения множеств. Дистрибутивность относительно объединения множеств.
4. Операция объединения множеств. Коммутативность и ассоциативность объединения множеств. Дистрибутивность пересечения относительно объединения множеств.
5. Операция разности множеств. Операция дополнения множества.
6. Мощность конечного множества. Сравнение бесконечных множеств.
7. Упорядоченные пары. Декартово произведение множеств. Доказать некоммутативность декартова произведения.
8. Соответствие между элементами множеств. Область определения и множество значений соответствия. Образ и прообраз элемента соответствия.
9. Декартов квадрат множества. Дать определение отношения между элементами множества.
10. Виды соответствий. Привести примеры. Бином Ньютона.
11. Функциональное соответствие, его область определения и множество значений. Отображения. Композиция отображений.
12. Виды теорем. Методы доказательства теорем (метод математической индукции, метод доказательства «от противного»).

ЧАСТЬ

1 ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

ГЛАВА 1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Будем считать известным множество рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Для операций *сложения* и *умножения* с рациональными числами выполняются законы коммутативности

$$p + q = q + p, \qquad pq = qp;$$

законы ассоциативности

$$(p + q) + r = p + (q + r), \qquad (pq)r = p(qr);$$

закон дистрибутивности

$$(p + q)r = pr + qr.$$

Существует нулевой элемент 0: $p+0 = p$. Существует единица 1: $p \cdot 1 = p$.

Каждое рациональное число p имеет единственное *противоположное* число $(-p)$: $p + (-p) = 0$.

Разность рациональных чисел p и q равна $p + (-q)$.

Каждое рациональное число $p \neq 0$ имеет единственное *обратное* число p^{-1}: $p \cdot p^{-1} = 1$.

Частное рациональных чисел p и $q \neq 0$ равно $p \cdot q^{-1}$.

2. Определено отношение «*меньше*», упорядочивающее множество $\mathbb{Q}$. Отношение «меньше» обладает следующими свойствами:

— для любых рациональных чисел p и q либо $p < q$, либо $q < p$, либо $p = q$;

— отношение «меньше» транзитивно, т. е. из $p < q$, $q < r$ следует $p < r$;

— если $p > 0$ и $q > 0$, то $p + q > 0$ и $pq > 0$;

— если p, q, r — рациональные числа, и $p < q$, то $p+r < q+r$;

— если $p < q$ и $r > 0$, то $pr < qr$.

3. Множество рациональных чисел замкнуто относительно четырех арифметических действий. Это значит, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел — рациональное число (деление на нуль исключено).

Упражнение 1.1. 1) Доказать, что рациональное выражение, содержащее рациональные числа — рациональное число.

2) Доказать свойство *плотности* множества рациональных чисел, а именно: «Из $p < q$ следует неравенство $p < \frac{p+q}{2} < q$».

4. **Аксиома Архимеда.** Для любого рационального числа p существует такое целое число m, что $p < m$.

Упражнение 1.2. Воспользуйтесь аксиомой Архимеда для доказательства утверждения: «Если $p \leqslant \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $p \leqslant 0$».

$\triangleright$ Доказательство. Применим метод доказательства «от противного». Пусть $p > 0$, тогда $\frac{1}{p} > 0$. По аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число n, что $0 < \frac{1}{p} < n$. Умножая это неравенство на число $\frac{p}{n}$, получим неравенство

$$0 < \frac{1}{n} < p,$$

что противоречит условию доказываемого утверждения. Следовательно, антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

5. Известно, что имеются «иррациональные числа», не являющиеся рациональными, например, $\sqrt{2}$. При попытке построить рациональные приближения этого числа в виде конечных десятичных дробей получается последовательность

$$\{1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ \ldots\}, \qquad (1.1)$$

о которой говорят, что она «стремится к $\sqrt{2}$».

▷ Докажем, что число $\sqrt{2}$ не может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа. Доказательство проведем методом «от противного». Предположим, что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, что эквивалентно равенствам

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Из последнего равенства следует, что m^2 четное число. Значит и m четно, так как если бы m было нечетным, то и m^2 было бы нечетным. Тогда m^2 кратно 4, например $m^2 = 4l^2$, и $n^2 = 2l^2$ четное число, откуда следует, что и число n четно. Таким образом, предположение о том, что $\sqrt{2}$ можно представить в виде несократимой дроби, привело к противоречию. Антитеза неверна; $\sqrt{2}$ — число иррациональное. ◀

Чтобы уяснить смысл этого утверждения, а также утверждения о «стремлении к $\sqrt{2}$» последовательности (1.1), ниже будут даны необходимые определения.

Упражнение 1.3. Доказать иррациональность $\sqrt{3}$.

1.2. СЕЧЕНИЕ НА МНОЖЕСТВЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Изложим теорию иррациональных чисел, используя понятие о *сечении* на множестве рациональных чисел. Все необходимые определения основываются на свойствах множеств.

Выполним разбиение множества рациональных чисел на два непустых подмножества A и A'.

Определение 1.1. Разбиение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на два непустых подмножества, или класса, A и A' называется *сечением* $A|A'$, если: 1) каждое рациональное число попадает в одно, и только одно из множеств A или A'; 2) каждое число $a \in A$ меньше любого числа $a' \in A'$.

Множество A называется *нижним классом* сечения $A|A'$; множество A' — *верхним классом* сечения $A|A'$.

Так, если рациональное число $p < a$, $a \in A$, то $p \in A$; если рациональнальное число $q > a'$, $a' \in A'$, то $q \in A'$.

Пример 1.1. Определим множество $A = \{a | a \in \mathbb{Q}, a < 1\}$ и множество $A' = \{a' \mid a' \in \mathbb{Q}, a' \geqslant 1\}$. Разбиение множества $\mathbb{Q}$ на подмножества A и A' образует сечение. При этом в классе A нет наибольшего числа, а наименьшее число класса A' есть 1.

Пример 1.2. Пусть множества $A = \{a \mid a \in \mathbb{Q}, a \leqslant 1\}$ и $A' = \{a' \mid a' \in \mathbb{Q}, a' > 1\}$. Здесь, как и выше, разбиение $A|A'$ образует сечение множества $\mathbb{Q}$. Причем в верхнем классе A' нет наименьшего числа, а наибольшее число нижнего класса A есть 1.

Пример 1.3. Отнесем к нижнему классу все отрицательные рациональные числа, нуль и все положительные рациональные числа, для которых выполнено неравенство $a^2 < 3$,

$$A = \{a \mid a \in \mathbb{Q}, a \leqslant 0\} \cup \{a \mid a \in \mathbb{Q}, a > 0, a^2 < 3\},$$

а к верхнему классу — все положительные рациональные числа, для которых выполнено неравенство $a^2 > 3$,

$$A' = \{a' \mid a' \in \mathbb{Q}, a' > 0, a'^2 > 3\}.$$

Полученное разбиение образует сечение множества $\mathbb{Q}$. Докажем, утверждения:

1. В нижнем классе A нет наибольшего числа.
2. В верхнем классе A' нет наименьшего числа.

$\triangleright$ Доказательство. 1. Все числа на луче $(-\infty; 0]$ меньше любого числа $a > 0$. Докажем, что для каждого положительного числа $a \in A$ найдется такое натуральное число n, что $\left(a + \dfrac{3}{2n}\right)^2 < 3$, и $a + \dfrac{3}{2n} \in A$.

Для этого выполним эквивалентные преобразования неравенства

$$\left(a + \frac{3}{2n}\right)^2 < 3 \;\Leftrightarrow\; a^2 + \frac{3a}{n} + \frac{9}{4n^2} < 3 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{3a}{n} + \frac{9}{4n^2} < 3 - a^2. \qquad (1.2)$$

Заметим, что $\frac{9}{4n^2} < \frac{3}{n}$, поэтому третье из неравенств (1.2) будет тем надежнее выполнено, если решить вместо него неравенство, в котором слагаемое $\frac{9}{4n^2}$ заменено на $\frac{3}{n}$, или

$$\frac{3a}{n} + \frac{9}{4n^2} < \frac{3a}{n} + \frac{3}{n} < 3 - a^2 \qquad (a^2 < 3). \qquad (1.3)$$

Если n удовлетворяет неравенству

$$n > \frac{3(a+1)}{3-a^2},$$

что всегда возможно по аксиоме Архимеда, то истинно неравенство (1.3), а следовательно, и неравенство (1.2). Утверждение 1 доказано. ◀

Утверждение 2 рекомендуется доказать самостоятельно.

Упражнение 1.4. Построить сечение множества рациональных чисел, соответствующее $\sqrt{2}$.

Лемма 1.1. Не существует сечение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, имеющее в нижнем классе наибольшее число a_1, а в верхнем классе — наименьшее число a_1'.

▷ Доказательство проведем методом «от противного». Если бы такое сечение существовало, то нашлось бы рациональное число, например, $r = \frac{a_1 + a_1'}{2}$, для которого выполнено неравенство $a_1 < r < a_1'$. При этом число r не может принадлежать нижнему классу, так как иначе число a_1 не было бы наибольшим в этом классе; также число r не может принадлежать верхнему классу, так как иначе число a_1' не было бы наименьшим в своем классе. Эти выводы противоречат условию 1, входящему в определение сечения. Следовательно, антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

Подведем итоги. В примерах 1.1 и 1.2 имеется рациональное сечение, производимое числом $p = 1$, граничным между нижним и верхним классами, определяющими это сечение.

В примере 1.3 такого пограничного числа не существует. Сечение множества $\mathbb{Q}$ не определяет никакого рационального числа.

Определение 1.2. Всякое сечение множества $\mathbb{Q}$, не имеющее в нижнем классе наибольшего числа, а в верхнем классе — наименьшего числа, определяет *иррациональное число* α.

В примере 1.3 это недостающее число, лежащее между числами a из нижнего класса и числами a' из верхнего класса, есть $\sqrt{3}$.

Определение 1.3. Все рациональные и иррациональные числа образуют *множество действительных чисел*, обозначаемое $\mathbb{R}$.

1.3. ЛЕММЫ О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1.4. *Бесконечная десятичная дробь* — одна из форм записи действительных чисел, имеющая вид

$$a_0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{10^\nu}, \tag{1.4}$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$ — целое число; a_1, a_2, … — одна из цифр $\{0; 1; 2; 3; \ldots; 9\}$.

Лемма 1.2 (свойство плотности множества действительных чисел). Между двумя действительными числами существует хотя бы одно рациональное число.

$\triangleright$ Доказательство. Пусть x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — действительные числа. Представим их в виде десятичных дробей

$$x_1 = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,$$
$$x_2 = b_0{,}b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots,$$

где a_0, b_0 — целые числа; a_1, a_2, a_3, …, a_n, …; b_1, b_2, b_3, … …, b_n, … — цифры от 0 до 9. Из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что либо $a_0 < b_0$, либо существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1, \\ &\dots\dots \\ a_{n-1} &= b_{n-1}, \\ a_n &< b_n. \end{aligned}$$

Выберем конечную десятичную дробь $q \in \mathbb{Q}$

$$q = b_0{,}b_1b_2b_3\dots b_{n-1}b_n(0).$$

Число q удовлетворяет двойному неравенству $x_1 < q < x_2$. Что и требовалось доказать. ◀

Пример 1.4. Пусть число $x_1 = 110{,}23456\dots$, число $x_2 = 110{,}23457\dots$ Здесь $n = 5$, число $q = 110{,}23457(0)$.

Следствия. 1. Всякое действительное число x можно оценить сверху и снизу рациональными числами p, p' с любой, наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$:

$$p < x < p', \qquad 0 < p - p' < \varepsilon.$$

2. Если x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) – действительные числа, то между x_1 и x_2 существуют два, или больше, различных рациональных чисел p, q ($p < q$), а именно: $x_1 < p < q < x_2$.

▷ Доказательство следствия 2. По лемме 1.2, существует рациональное число p такое, что $x_1 < p < x2$. Так как $p \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow p \in \mathbb{R}$, то для чисел p, x_2 выполнены условия леммы 1.2. Следовательно, существует рациональное число q такое, что $x_1 < p < q < x_2$. Утверждение доказано. ◀

Упражнение 1.5. 1) Доказать, что между двумя неравными рациональными числами p и q ($p < q$) содержится иррациональное число.

(Указание. Иррациональное число $p + \dfrac{q-p}{\sqrt{2}}$ лежит между p и q.)

2) Найти какое-нибудь иррациональное число между $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

Лемма 1.3 (принцип сходимости рациональных приближений к действительному числу). Если для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ действительные числа x_1, x_2 можно разместить между одними и теми же рациональными числами $r(\varepsilon)$ и $r'(\varepsilon)$,

$$r(\varepsilon) < x_1 < r'(\varepsilon) \quad \text{и} \quad r(\varepsilon) < x_2 < r'(\varepsilon),$$

причем $0 < r'(\varepsilon) - r(\varepsilon) < \varepsilon$, то $x_1 = x_2$.

$\triangleright$ Доказательство проведем методом «от противного». Пусть $x_1 \neq x_2$, например $x_1 < x_2$. Тогда по следствию 2 из леммы 1.2, имеются рациональные числа p, q, такие, что $x_1 < p < q < x_2$ (рис. 1.1), для которых выполнены неравенства $r < p < q < r'$ и $r' - r > q - p > 0$, причем из последнего вытекает, что разность не может быть меньше числа $\varepsilon_0 = q - p$, что противоречит условию леммы 1.3. ◀

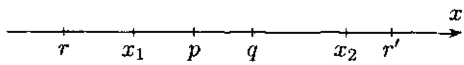


Рис. 1.1

Замечание. Лемма 1.3 сохраняет силу также в том случае, когда ε, r, r' — действительные числа.

1.4. ТЕОРИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Рассмотрим положительное действительное число

$$\alpha = A_0{,}a_1a_2\ldots a_k\ldots > 0.$$

Определение 1.5. Конечная десятичная дробь $\alpha_k = A_0{,}a_1a_2\ldots a_k$ называется *десятичным приближением* числа α *с недостатком*, а конечная десятичная дробь $\alpha'_k = A_0{,}a_1a_2\ldots a_k + 10^{-k}$ — *десятичным приближением* числа α *с избытком* с точностью до k знаков после запятой.

Очевидно, что $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ Из определения 1.5 следует, что каждое действительное число α содержится между рациональными числами α_k и α'_k: $\alpha_k \leqslant \alpha \leqslant \alpha'_k$, где $\alpha'_k = \alpha_k + 10^{-k}$. При этом выполнены неравенства $|\alpha - \alpha_k| \leqslant \alpha'_k - \alpha_k = 10^{-k}$, из которых следует, что рациональные приближения α_k и α'_k — суть приближенные значения числа α с точностью 10^{-k}.

Соответствующие приближения суммы действительных чисел α и β связаны соотношением $(\alpha'_k+\beta'_k) = (\alpha_k+\beta_k)+2\cdot 10^{-k}$. Следовательно, разность $(\alpha'_k + \beta'_k) - (\alpha_k + \beta_k) = (\alpha'_k - \alpha_k) + (\beta'_k - \beta_k) = 2 \cdot 10^{-k}$ можно сделать меньше любого числа $\varepsilon > 0$ (см. упражнение 2.5).

Для приближений произведения действительных чисел эта связь имеет вид $(\alpha'_k \cdot \beta'_k) = (\alpha_k \cdot \beta_k) + (\alpha_k + \beta_k) \cdot 10^{-k} + 10^{-2k}$. Учитывая неравенства $\alpha_k < [\alpha] + 1$, $\beta_k < [\beta] + 1]$, $10^{-k} < 1$, где $[\alpha]$, $[\beta]$ соответственно обозначают целые части чисел α и β, получаем оценку

$$(\alpha'_k \cdot \beta'_k) - (\alpha_k \cdot \beta_k) = (\alpha_k + 10^{-k}) \cdot (\beta_k + 10^{-k}) - (\alpha_k \cdot \beta_k) =$$
$$= (\alpha_k + \beta_k + 10^{-k}) \cdot 10^{-k} < ([\alpha] + \beta + 3) \cdot 10^{-k},$$

из которой следует, что разность $(\alpha'_k \cdot \beta'_k) - (\alpha_k \cdot \beta_k)$ может принимать значения, меньшие любого числа $\varepsilon > 0$.

Число $\alpha > 0$ имеет обратное число $\dfrac{1}{\alpha}$. Оценим сверху разность

$$\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha'_k} = \frac{\alpha'_k - \alpha_k}{\alpha_k \cdot \alpha'_k} = \frac{10^{-k}}{\alpha_k \cdot \alpha'_k} < \frac{10^{-k}}{\alpha_p^2},$$

где α_p — первое н е н у л е в о е приближение числа α с недостатком; так, если $\alpha > 1$, то $\alpha_p = [\alpha]$. Из полученной оценки следует, что разность между приближениями обратного числа может принимать значения меньше любого числа $\varepsilon > 0$. Лемма 1.3 утверждает сходимость верхнего и нижнего приближений разности, произведения и обратной величины действительных чисел, взятых в десятичной форме, к единственному общему значению.

На каждом этапе процесса все более точных измерений или приближенных вычислений какой-нибудь величины α возможны два исхода: во-первых, процесс заканчивается на k-м шаге, при этом число $\alpha = \alpha_k$ — конечная десятичная дробь; во-вторых, процесс не заканчивается ни при каком конечном k, число α — бесконечная десятичная дробь. В этом случае заранее задаются погрешностью $\varepsilon > 0$, с которой своими рациональными приближениями необходимо определить число α.

Упражнение 1.6. Сформулировать определение десятичных приближений для отрицательного действительного числа $\alpha = -A_0{,}a_1a_2\ldots a_k\ldots$ с недостатком и с избытком.

Определение 1.6. 1) Действительное число $\alpha_0 = -A_0 - 1$ называется *целым приближением* числа α *с недостатком*, а число $\alpha'_0 = -A_0$ — *целым приближением* числа a *с избытком.*

2) Конечная десятичная дробь $\alpha_k = -A_0{,}a_1a_2\ldots a_k - 10^{-k}$ называется *десятичным приближением* числа α *с недостатком*, а конечная десятичная дробь $\alpha'_k = -A_0{,}a_1a_2\ldots a_k$ — *десятичным приближением* числа α *с избытком*, с точностью до 10^{-k}, или k знаков после запятой.

Определение 1.7. Бесконечная десятичная дробь называется *периодической*, если в выражении (1.4), начиная с некоторого $\nu = N$, содержится повторяющаяся *конечная последовательность* цифр, называемая *периодом* десятичной дроби, состоящая из p цифр.

Символьная запись определения периодической дроби имеет вид

$$(\exists\, N \in \mathbb{N})\,(\exists\, p \in \mathbb{N})\,(\forall\, \nu \in \mathbb{N}, \nu \geqslant N)\colon\; (a_{\nu+p} = a_\nu).$$

Здесь в определяющей части используются высказывания: $(\exists\, N \in \mathbb{N})$, $(\exists\, p \in \mathbb{N})$, $(\forall\, \nu \in \mathbb{N}, \nu \geqslant N)$ («существует такое натуральное число N и существует такое натуральное число p и натуральное число ν больше или равное N»; в постановляющей части — высказывание $(a_{\nu+p} = a_\nu)$ («что выполнено равенство $a_{\nu+p} = a_\nu$»).

Число $a_0{,}(9) = (a0 + 1){,}(0)$. Если число a_k — одна из цифр $\{0; 1; 2; \ldots; 8\}$, то

$$a_0{,}a_1a_2\ldots a_k(9) = a_0{,}a_1a_2\ldots(a_k + 1)(0) = a_0{,}a_1a_2\ldots(a_k + 1)$$

— конечная десятичная дробь.

Пример 1.5. 1) $\dfrac{6}{7} = 0{,}857142\,857142\ldots = 0{,}(857142)$ — чисто периодическая десятичная дробь; $N=1$, $p=6$; (857142) — повторяющаяся последовательность цифр, или период дроби, состоящий из 6 цифр.

2) $4{,}82 = 4{,}82(0)$ — конечная десятичная дробь;

3) $\dfrac{4}{9} = 0{,}444\ldots = 0{,}(4)$ — чисто периодическая десятичная дробь, $N = 1$; $p = 1$ — период дроби состоит из одной цифры 4;

4) $4{,}513(456)$ — смешанная бесконечная десятичная дробь, $N = 4$; $p = 3$ — период дроби состоит из трех цифр (456).

Смешанную бесконечную десятичную дробь можно представить в виде суммы конечной десятичной дроби и чисто периодической десятичной дроби.

Теорема 1.1. Чисто периодическая бесконечная десятичная дробь равна обыкновенной дроби, числитель которой равен периоду, а знаменатель состоит из девяток, количество которых равно числу цифр в периоде дроби.

Пример 1.6. Привести десятичные дроби к обыкновенным

$$1)\ a = 0{,}(231); \qquad 2)\ b = 51{,}3(42).$$

▷ Решение. 1) $a = 0{,}(231)$; $10^3 a = 231 + a$;

$$a = \frac{231}{10^3 - 1} = \frac{231}{999} = \frac{77}{333}.$$

2) $b = 51{,}3(42) = 51 + \dfrac{1}{10} + 0{,}2(42) = 51 + \dfrac{1}{10} + 0{,}(24)$;

$$c = 0{,}(24);\ 10^2 c = 24 + c;\ c = \frac{24}{10^2 - 1} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}.$$

Ответ: 1) $a = \dfrac{77}{333}$; 2) $b = 51\dfrac{113}{330}$. ◀

Теорема 1.2. Всякое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или периодической бесконечной десятичной дроби с конечным периодом.

Замечание 1. Имеются бесконечные десятичные дроби, не имеющие конечного периода, называемые *непериодическими* бесконечными десятичными дробями.

Замечание 2. Иррациональные числа представляются в виде непериодических бесконечных десятичных дробей.

Пример 1.7. Доказать иррациональность числа $0{,}45415411541115\ldots$

▷ Решение. Докажем, что данная дробь — непериодическая. Воспользуемся методом доказательства «от противного».

Предположим, что дробь периодическая с периодом $p \in \mathbb{N}$. По определению периодической дроби, существуют такие числа N, $p \in \mathbb{N}$, что при всех $\nu \geqslant N$ выполнены равенства $a_{\nu+p} = a_\nu$. При достаточно большом N получим

$$a_{\nu+p+1} = a_{\nu+1} = 1, \quad a_{\nu+p+2} = a_{\nu+2} = 1, \quad \ldots, \quad a_{\nu+2p} = a_{\nu+p} = 1$$

и т. д. Все цифры в записи периода данного числа, следующие после a_ν, будут равны 1, что противоречит определению числа. Это означает, что антитеза неверна. Данная дробь непериодическая, а изображаемое ей число — иррациональное. ◀

Упражнение 1.7. 1) Доказать иррациональность числа 0,101001000..., у которого после запятой стоят подряд натуральные степени числа 10.

2) Доказать иррациональность числа 0,123456789101112...

3) Доказать иррациональность числа $1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

4) Доказать, что число $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ — рациональное.

5) Вычислить: $\left|\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}\right|$.

1.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Свойство полноты, или непрерывность множества действительных чисел, устанавливает теорема Дедекинда. Она показывает, что пробелы, обнаруженные в системе рациональных чисел, заполнены окончательно. Другими словами, если пытаться построить сечения, элементами которых были бы действительные числа, то каждое сечение имело бы наименьшую верхнюю границу, и мы могли бы отождествить каждое сечение с наименьшим из чисел его верхнего класса, не получив ничего нового.

Определение 1.8. *Сечением на множестве действительных чисел* $\mathbb{R}$ назовем его разбиение на два непустых подмножества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A'}$, причем

1) каждое действительное число попадет в одно и только одно из подмножеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A'}$;

2) каждое число $\alpha \in \mathbf{A}$ меньше каждого числа $\alpha' \in \mathbf{A}'$ (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Числовая прямая

Теорема 1.3 (теорема Дедекинда). Для каждого сечения $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$ на множестве действительных чисел существует единственное действительное число ξ, производящее это сечение, такое, что либо при всех либо $\alpha \leqslant \xi$ при всех $\alpha \in \mathbf{A}$, либо $\xi \leqslant \alpha'$ при всех $\alpha' \in \mathbf{A}'$.

$\triangleright$ Доказательство. 1. Докажем единственность числа ξ методом «от противного». Предположим, что заключение теоремы выполнено для двух чисел ξ_1 и ξ_2, причем $\xi_1 < \xi_2$. По лемме 1.2, существует такое число ξ^*, что $\xi_1 < \xi^* < \xi_2$.

Из неравенства $\xi^* < \xi_2$ следует, что $\xi^* \in \mathbf{A}$, тогда как из неравенства $\xi_1 < \xi^*$ следует, что $\xi^* \in \mathbf{A}'$, но это противоречит определению сечения $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$. Следовательно, антитеза неверна — существует только одно число ξ с требуемыми свойствами.

2. Обозначим через A множество всех рациональных чисел, лежащих в $\mathbf{A}$, а через A' — множество всех рациональных чисел, лежащих в $\mathbf{A}'$. Множества A и A' образуют сечение на множестве рациональных чисел, определяющее некоторое действительное число ξ, которое попадет в один из классов $\mathbf{A}$ или $\mathbf{A}'$. В том случае, когда ξ лежит в $\mathbf{A}$, оно будет наибольшим в $\mathbf{A}$, так как в противном случае нашлось бы другое число ζ из этого класса, большее ξ, и тогда по лемме 1.2 для некоторого рационального числа r выполнено неравенство $\xi < r < \zeta$. Поскольку r лежит в $\mathbf{A}$, то r лежит также в A. Таким образом, рациональное число r, принадлежащее нижнему классу сечения, определяющего число ξ, больше ξ и, следовательно, не лежит в A. Полученное противоречие доказывает, что число ξ — наибольшее в классе $\mathbf{A}$. ◀

Следствие. Из теоремы 1.3 вытекает, что либо $\mathbf{A}$ содержит наибольшее число, либо $\mathbf{A}'$ содержит наименьшее число.

1.6. ГРАНИЦЫ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Определение 1.9. Пусть $X = \{x\}$ — бесконечное числовое множество.

1) Если существует такое число M, что $x \leqslant M$ при всех $x \in X$, то множество X называется *ограниченным сверху*, а число M называется *верхней границей* множества X.

2) Если существует такое число m, что $x \geqslant m$ при всех $x \in X$, то множество X называется *ограниченным снизу*, а число m называется *нижней границей* множества X.

3) Если множество X ограничено сверху и снизу, то оно называется *ограниченным*.

Определение 1.10. Пусть множество $X = \{x\}$ ограничено сверху и имеется число M_γ, такое, что

1) M_γ — верхняя граница множества X;

2) никакое число $x < M_\gamma$ не является верхней границей множества X.

Тогда M_γ называется *точной верхней границей*, или *верхей гранью* множества X.

Для обозначения верхней грани множества X используется символ $\sup X$ (от лат. *supremum* — наивысшее). Если все числа x множества X удовлетворяют неравенству $x \leqslant M$, то $\sup X \leqslant M$.

Определение 1.11. Пусть множество $X = \{x\}$ ограничено снизу и имеется число m_γ, такое, что

1) m_γ — нижняя граница множества X;

2) никакое число $x > m_\gamma$ не является нижней границей множества X.

Тогда m_γ называется *точной нижней границей*, или *нижней гранью* множества X.

Для обозначения нижней грани множества X используется символ $\inf X$ (от лат. *infimum* — наинизшее). Если все числа x множества X удовлетворяют неравенству $x \geqslant m$, то $\inf X \geqslant m$.

Пример 1.8. Множество $X = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ ограничено сверху и снизу. Его верхняя грань, равная 1, принадлежит X, а нижняя грань, равная 0, не принадлежит X.

Пример 1.9. Множество $X = \{x \mid x > 0\}$ ограничено снизу, его нижняя грань равна 0. Множество X не ограничено сверху.

Теорема 1.4. Если бесконечное множество X ограничено сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.

$\triangleright$ Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Среди чисел x множества X найдется наибольшее число x', — все числа множества X удовлетворяют неравенству $x \leqslant x'$, т. е. x' — верхняя граница для X, и никакое число $x < x'$ не является верхней границей множества X. Тогда x' — точная верхняя граница множества X.

2. Среди чисел x множества X нет наибольшего. Выполним разбиение множества действительных чисел: к верхнему классу A' отнесем все верхние границы α' множества X, а к нижнему классу — остальные числа α. При этом множество X окажется в классе A. Поэтому классы A и A' — непустые множества, и каждое число из A' больше любого числа из класса A. Следовательно, разбиение $A|A'$ является сечением. По теореме 1.3, существует единственное число ξ, производящее это сечение. При этом, по следствию из теоремы 1.3, либо A содержит наибольшее число, либо A' содержит наименьшее число.

Однако, в рассматриваемом случае среди чисел x множества X нет наибольшего. Следовательно, ξ — наименьшее число класса A', и, как наименьшая из верхних границ, есть искомая точная верхняя граница множества X. ◀

1.7. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Пусть x, y — действительные числа; p, p', q, q' — рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $p < x < p'$, $q < y < q'$.

Определение 1.12. *Суммой* $x + y$ назовем действительное число z, содержащееся между всеми суммами $p + q$ и $p' + q'$:

$$p + q < z < p' + q'. \tag{1.5}$$

▷ 1. Докажем существование суммы. Рассмотрим множество всех сумм вида $p+q$. Это множество ограничено сверху, например, любой суммой вида $p'+q'$. Положим $z=\sup(p+q)$. Определенное таким образом число z удовлетворяет двойному неравенству (1.5) и определению суммы.

2. Докажем единственность суммы. Предположим, что имеются два числа z_1 и z_2, причем $z_1<z_2$, удовлетворяющие определению суммы и неравенству (1.5). Зададимся произвольным (малым) рациональным числом $e>0$ так, что выполнены неравенства

$$p'-p<\frac{e}{2},\qquad q'-q<\frac{e}{2}.$$

При этом также выполнено следующее неравенство:

$$(p'+q')-(p+q)=(p'-p)+(q'-q)<\frac{e}{2}+\frac{e}{2}=e. \qquad (1.6)$$

Тогда, по лемме 1.3, выполнено равенство $z_1=z_2$, и существует единственное число z, лежащее между всеми суммами вида $p+q$ и $p'+q'$. ◀

Определение 1.13. *Произведением* $x\cdot y$ назовем действительное число z, содержащееся между всеми произведениями вида $p\cdot q$ и $p'\cdot q'$:

$$p\cdot q<z<p'\cdot q'.$$

Доказательство существования и единственности произведения положительных действительных чисел проводится аналогично предыдущему.

По определению, *абсолютная величина числа* x, обозначаемая $|x|$, есть

$$|x|=x \text{ при } x\geqslant 0,\qquad |x|=-x \text{ при } x<0.$$

Произведение неположительных действительных чисел $x\cdot y$ определим с помощью равенств

$$x\cdot 0=0\cdot x=0;$$
$$x\cdot y=|x|\cdot|y|, \quad \text{если } x \text{ и } y \text{ одного знака};$$
$$x\cdot y=-(|x|\cdot|y|), \quad \text{если } x \text{ и } y \text{ разных знаков}.$$

Действительные числа обладают следующими свойствами.

I. Свойства суммы.

1. *Коммутативность*: $x + y = y + x$.
2. *Ассоциативность*: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. *Наличие нуля*: $x + 0 = x$.
4. Каждое действительное число x имеет единственное *противоположное* число $(-x)$, такое, что $x + (-x) = 0$.

II. Свойства произведения.

5. *Коммутативность*: $x \cdot y = y \cdot x$.
6. *Ассоциативность*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
7. *Наличие единицы*:

$$\exists!\, 1 \in \mathbb{R} \mid 1 \neq 0,\ x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

8. Каждое действительное число $x \neq 0$ имеет *обратное* число x^{-1}, такое, что $x \cdot x^{-1} = 1$.

Сформулированные свойства суммы и произведения позволяют однозначно определить разность и частное действительных чисел.

III. Свойство дистрибутивности.

9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

IV. Свойство упорядоченности. Определено отношение порядка «меньше» на множестве $\mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

10. Для любых действительных x и y либо $x < y$, либо $y < x$, либо $x = y$.
11. Отношение «меньше» *транзитивно*, т. е. из $x < y$ и $y < z$ следует $x < z$.
12. Из неравенства $x < y$ следует неравенство $x + c < y + c$.
13. Из неравенств $x < y$ и $c > 0$ следует неравенство $x \cdot c < y \cdot c$.

V. Свойство непрерывности. Теорема Дедекинда о полноте, или непрерывность множества $\mathbb{R}$.

На множестве действительных чисел полностью сохраняются правила элементарной алгебры, относящиеся к четырем

Таблица 1.1

Дихотомическое деление объема понятия «действительные числа»

<table>
<tr><td colspan="5">ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА, $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, $\mathbb{A}$:
корни уравнений вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, из которых не все равны 0</td><td>ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА:
e, π, $\ln 2$, $2^{\sqrt{2}}$ и др.</td></tr>
<tr><td colspan="3">РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, $\mathbb{Q}$:
$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3; -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; 0{,}124; 0{,}237(66)$
и т. д.</td><td>АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА:
$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\cos 20^\circ$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{37}$ и т. п.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА, $\mathbb{Z}$:
$\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$</td><td>ДРОБНЫЕ ЧИСЛА:
конечные и бесконечные периодические десятичные дроби</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, $\mathbb{N}$:
$1, 2, 3, \ldots$</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

арифметическим действиям и к сочетаниям равенств и неравенств.

Сформулируем теорему, прототипом которой является аксиома Архимеда для множества рациональных чисел.

Теорема 1.5 (принцип Архимеда). Каково бы ни было действительное число α, существует такое натуральное число n, что $\alpha < n$.

$\triangleright$ Доказательство. В верхнем классе сечения $A|A'$ множества рациональных чисел, определяющего действительное число α, имеется рациональное число $a' > \alpha$, для которого выполнена аксиома Архимеда:

$$\exists n \in \mathbb{N} \mid n > a' > \alpha. \quad \blacktriangleleft$$

Упражнение 1.8. Какими свойствами действительных чисел не обладают рациональные числа?

1.8. ТИПИЗАЦИЯ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ

Определение 1.14. *Дихотомическое деление*, или *деление надвое* — логическая операция, посредством которой объем понятия $\boldsymbol{A}$ делится на два исчерпывающих его непересекающихся множества $\boldsymbol{B}$ и не-$\boldsymbol{B}$.

Такое деление продолжается до тех пор, пока отрицание не-$\boldsymbol{C}$ в некоторой из пар полученных понятий не окажется пустым.

Табл. 1.1 содержит дихотомическое деление объема понятия «действительные числа». Члены деления в строках табл. 1.1, кроме последней, разделены вертикальной чертой, размещенной под делимым понятием.

Табл. 1.1 показывает, что действительные числа подразделяются на два класса. В первый класс входят *алгебраические числа*, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами. Второй класс образуют *трансцендентные числа* — числа, не принадлежащие первому классу. Алгебраические числа подразделяются на *рациональные* и *иррациональные числа*.

Рациональные числа включают *целые числа* и *дробные числа*. Целые числа включают *натуральные числа*, отрицательные целые числа и нуль. Понятие «натуральные числа» не имеет пары.

Множество рациональных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на 0).

Теорема 1.6. Если α — иррациональное число и r — рациональное число, то операции сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на нуль), примененные к числам α и r, приводят к иррациональным числам.

▷ Доказательство проведем методом «от противного». Если утверждение теоремы неверно, то выполнялось бы одно из равенств

$$\alpha + r = r_1, \quad \alpha - r = r_2, \quad r - \alpha = r_3,$$
$$r\alpha = r_4, \quad \frac{\alpha}{r} = r_5, \quad \frac{r}{\alpha} = r_6$$

(числа r_1, r_2, ..., r_6 — рациональные), из которых вытекают равенства

$$\alpha = r_1 - r, \quad \alpha = r_2 + r, \quad \alpha = r - r_3,$$
$$\alpha = \frac{r_4}{r}, \quad \alpha = rr_5, \quad \alpha = \frac{r}{r_6},$$

правые части которых — суть рациональные числа, что противоречит предположению об иррациональности числа α. ◀

Следствие. Если α — иррациональное число, то $(-\alpha)$ и α^{-1} — иррациональные числа.

Замечание. Множество иррациональных чисел незамкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления.

Например, результаты вычислений

$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2, \quad (1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) = -1, \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$$

приводят к рациональным числам.

Упражнение 1.9. Приведите пример числового множества, незамкнутого относительно операции вычитания.

1.9. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Известно, что если между элементами двух конечных множеств можно установить взаимно однозначное, или одно-однозначное, соответствие, то они состоят из одного и того же количества элементов, и обратно. Так, в школьной раздевалке каждое пальто висит на отдельном крючке, и обратно, на каждом крючке висит только одно пальто.

Подобным образом и в случае двух бесконечных множеств определяют их количественную эквивалентность, или *равномощность*, как возможность установить между ними взаимно однозначное соответствие, или биекцию.

Определение 1.15. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным* множеством.

Мощность счетных множеств есть наименьшая мощность, которую может иметь бесконечное множество.

Немецкий математик Георг Кантор в начале 70-х гг. 19 в. доказал, что множество всех рациональных чисел, и даже всех алгебраических чисел, являющихся корнями какого-нибудь алгебраического уравнения с целыми коэффициентами (рациональных и иррациональных) — счетное, тогда как множество всех действительных чисел несчетно. Тем самым было доказано существование так называемых *трансцендентных чисел*, т. е. действительных чисел, не являющихся корнями никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, а также несчетность множества таких чисел.

Определение 1.16. Мощность множества всех действительных чисел называется *мощностью континуума*.

Множеству всех действительных чисел равномощны множество всех точек плоскости, а также множество всех точек трех- и вообще n-мерного пространства при любом $n \in \mathbb{N}$.

Г. Кантор высказал *континуум-гипотезу* о том, что всякое множество, состоящее из действительных чисел, либо конечно, либо счетное, либо равномощно множеству всех действительных чисел (т. е. имеет мощность континуума).

В 1964 г. было доказано (П. Дж. Коэн), что континуум-гипотеза неразрешима — ее невозможно ни доказать, ни опровергнуть; можно лишь принять ее или противоположное ей утверждение как аксиому.

Упражнение 1.10. Доказать, что имеется взаимно однозначное соответствие между множествами натуральных и целых чисел.

(Указание. Воспользуйтесь следующим соответствием:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \dots \end{array}$$

При этом 0 ставится в соответствие 1; каждому нечетному числу, имеющему вид $2\nu+1$, $\nu \in \mathbb{N}$ — число $\nu > 0$, а каждому четному числу 2ν — отрицательное целое число $-\nu$, и обратно.)

Упражнение 1.11. 1) Доказать, что отрезки разной длины равномощны.

(Указание. Отображение $x = \dfrac{(d-c)t + bc - ad}{b-a}$ является биекцией отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$.)

2) Привести пример взаимно однозначного соответствия между всеми числами из интервала $(-1; 1)$ и множеством $\mathbb{R}$.

(Указание. Отображение $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ является биекцией интервала $(-1; 1)$ и $\mathbb{R}$.)

Теорема 1.7. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетное.

$\triangleright$ Доказательство. Разместим все рациональные числа в таблице, содержащей бесконечное число строк и столбцов: в n-й строке попарно, друг за другом разместим взаимно противоположные рациональные числа, записанные в виде несократимых дробей с натуральным знаменателем n, возрастающие по абсолютной величине (табл. 1.2). При этом каждое рациональное число получит в этой таблице определенное место.

Элементам табл. 1.2 поставим в соответствие числа натурального ряда согласно схеме, изображенной в табл. 1.3. Таким образом, каждому рациональному числу сопоставлено единственное натуральное число. Это означает, что множество рациональных чисел — счетное. $\blacktriangleleft$

Таблица 1.2

0	1	−1	2	−2	3
$^1/_2$	$-^1/_2$	$^3/_2$	$-^3/_2$	$^5/_2$	$-^5/_2$
$^1/_3$	$-^1/_3$	$^2/_3$	$-^2/_3$	$^4/_3$	$-^4/_3$
$^1/_4$	$-^1/_4$	$^3/_4$	$-^3/_4$	$^5/_4$	$-^5/_4$
$^1/_5$	$-^1/_5$	$^2/_5$	$-^2/_5$	$^3/_5$	$-^3/_5$
$^1/_6$	$-^1/_6$	$^5/_6$	$-^5/_6$	$^7/_6$	$-^7/_6$

Таблица 1.3

1	2	4	7	11	16
3	5	8	12	17	
6	9	13	18		
10	14	19			
15	20				
21					

Теорема 1.8. Множество действительных чисел из интервала $(0;1)$ несчетно.

▷ Доказательство проведем методом «от противного».

1. Каждое действительное число из интервала $(0;1)$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби с целой частью нуль. При этом число, выражаемое конечной десятичной дробью, можно записать в виде бесконечной десятичной дроби двумя способами, например, $0{,}1251 = 0{,}1251(0) = 0{,}1240(9)$. Одна из этих записей содержит в периоде 0, а другая 9. Условимся не употреблять записи, содержащие 9 в периоде. Тогда каждое действительное число будет иметь единственную запись в виде бесконечной десятичной дроби.

2. Предположим, что множество действительных чисел из интервала $(0;1)$ счетное и занумеруем его элементы числами натурального ряда: $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Представим каждое число x_n в виде бесконечной десятичной дроби $x_n = 0{,}x_{n1}x_{n2}x_{n3}\ldots x_{nn}\ldots$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}x_{11}x_{12}x_{13}\ldots x_{1n}\ldots,\\
x_2 &= 0{,}x_{21}x_{22}x_{23}\ldots x_{2n}\ldots,\\
x_3 &= 0{,}x_{31}x_{32}x_{33}\ldots x_{3n}\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= 0{,}x_{n1}x_{n2}x_{n3}\ldots x_{nn}\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

3. Построим действительное число b из интервала $(0;1)$, не входящее в представленный список и получим противоречие, из которого будет следовать, что антитеза неверна, и множество действительных чисел из интервала $(0;1)$ несчетно.

Для этого составим бесконечную последовательность цифр $\{x_{11}, x_{22}, x_{33}, \ldots, x_{nn}, \ldots\}$ и для каждого n определим цифру b_n так, чтобы выполнялись неравенства $0 < b_n < 9$, $b_n \neq x_{nn}$. Например, если $x_{nn} < 8$, то $b_n = x_{nn} + 1$; а если $x_{nn} = 8$, то $b_n = 7$.

В записи числа $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$ из интервала $(0;1)$ не содержится ни одной девятки. Кроме того, число b не равно ни одному из чисел x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n, $\ldots$ так как в противном случае для какого-то номера n выполнялось бы равенство $b = x_n = 0{,}x_{11}x_{22}x_{33}\ldots x_{nn}\ldots$, из которого видно, что на n-м месте десятичной дроби $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$ стоит x_{nn}, хотя по построению числа b выполнено неравенство $b_n \neq x_{nn}$. Теорема доказана. ◀

Упражнение 1.12. Доказать, что число вида $\sqrt[n]{q}$, где q и n — натуральные числа, $n \geqslant 2$, либо иррациональное, либо целое, причем в последнем случае q есть n-я степень целого числа.

(Указание. $\sqrt[n]{q}$ есть корень уравнения $x^n - q = 0$ и, если это уравнение имеет рациональный корень, то он целый. Если число $\sqrt[n]{q}$ целое, например, k, то $k^n = q$.)

Упражнение 1.13. Доказать, что множество простых чисел счетно.

Упражнение 1.14. Доказать иррациональность $\cos 20°$.

(Указание. Выведите алгебраическое уравнение 3-й степени, имеющее корень $\cos 20°$, и докажите, что оно не имеет рациональных корней.)

Упражнение 1.15. Пусть $0 < \alpha < 90°$. Доказать, что тогда, если угол α содержит рациональное число градусов, и $\alpha \neq 60°$, то $\cos\alpha$ — иррациональное число.

1.10. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ УГЛА. ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ

1. Напомним, что *углом* называется часть плоскости, высекаемая парой лучей, выходящих из одной точки, называемой вершиной угла.

Зафиксируем точку O, из которой выходят лучи $[OA)$ и $[OA')$. Зафиксируем положение луча $[OA)$ и начнем поворачивать луч $[OA')$ около точки O против часовой стрелки.

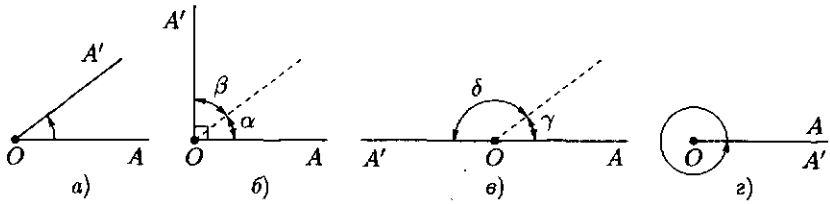


Рис. 1.3

Угол AOA', изображенный на рис. 1.3, *а*, называется *положительным острым* углом. Угол AOA' на рис. 1.3, *б* называется *прямым*. Два угла α и β, имеющие общую сторону, и такие, что $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, называются *дополнительными*. Угол, показанный на рис. 1.3, *в*, называется *развернутым*; его величина равна π. Два угла γ и δ, имеющие общую сторону, и такие, что $\gamma + \delta = \pi$, называются *смежными*. Угол на рис. 1.3, *г*, соответствующий полному обороту луча $[OA')$, называется *полным*.

Рассмотрим окружность радиуса R, длиной $2\pi R$. Разделим ее на n равных частей; при этом каждая часть имеет длину $\dfrac{2\pi R}{n}$. На практике применяется деление полного угла на 100 отметок угломера; также известно измерение полного угла величиной 400^g, или градов. По традиции полагают, что величина полного угла равна $360°$, при этом окружность делят на 360 равных частей, соответствующих одному *дуговому градусу*, имеющих длину $\dfrac{2\pi R}{360}$. Дуга окружности, содержащая целое число градусов α $(0 < \alpha < 360°)$, имеет длину $\dfrac{2\pi R\alpha}{360°}$. Градус можно разделить на 60 минут (обозначаемых символом $'$), каждая минута делится на 60 секунд (символ $''$), а каждая секунда делится по десятичной шкале.

2. В геометрии изучаются выпуклые фигуры с углами, не превышающими $180°$. В тригонометрии понятие тригономет-

рической функции обобщается, когда начинают рассматривать функции дуги. При этом уже не ограничиваются дугами в пределах полного оборота, а рассматривают дуги, измерение которых выражается любым числом градусов (минут, секунд) или радиан, положительным или отрицательным. Существенный шаг к обобщению понятия угла состоит в переходе от градусного измерения дуг к *радианному измерению*.

Определение 1.17. *Радианом* называется величина дуги окружности, длина которой равна ее радиусу.

Длина окружности единичного радиуса равна 2π. Поэтому величина дуги в 360° содержит 2π радиан, величине дуги в 180° соответствует π радиан и т. д. Дуга величиной 1 радиан содержит $\dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\ 17'\ 44{,}8''$. Дуга величиной α° содержит $x = \dfrac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$ радиан. Дуга величиной x радиан содержит $\alpha = \dfrac{180 \cdot x}{\pi}$ градусов.

3. Направим ось абсцисс по лучу $[OA)$, а ось ординат перпендикулярно лучу $[OA)$ (рис. 1.4). При этом центр единичной окружности попадет в начало координат. На пересечении окружности и оси абсцисс лежит точка $A(1;0)$.

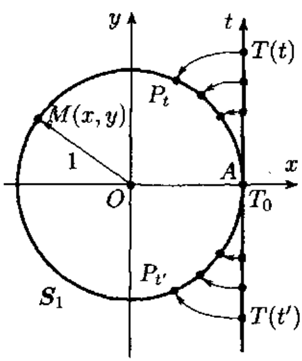


Рис. 1.4

Определение 1.18. Окружность единичного радиуса, на которой заданы начало отсчета и положительное направление обхода, называется *координатной окружностью*.

Координатная окружность S_1 является геометрическим местом точек $M(x,y)$, удовлетворяющих условию

$$S_1 = \{M(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}. \quad (1.7)$$

Проведем касательную t к тригонометрической окружности в точке A.

Отобразим множество $\mathbb{R}$ на числовую прямую t и сопоставим ее точкам T точки координатной окружности, причем начало координат T_0 на прямой t перейдет в точку A, называемую началом отсчета на окружности, а произвольной точке прямой $T(t)$ соответствует дуга AP_t координатной окружности длиной $t > 0$, если радиус OP_t поворачивается за точкой P_t против часовой стрелки, т. е. в положительном направлении. Если $t' < 0$, то точке $T(t')$ соответствует дуга $AP_{t'}$ длиной $|t'|$. При этом радиус $OP_{t'}$ поворачивается за точкой $P_{t'}$ в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке (рис. 1.4).

Геометрический смысл отображения $\varphi\colon \mathbb{R} \to S_1$ состоит в наматывании положительной полуоси числовой прямой t на координатную окружность в положительном направлении, тогда как отрицательная полуось наматывается на координатную окружность в отрицательном направлении. Каждая точка P_t после полного оборота возвращается в исходное положение. Например, точкам $T(t)$ и $T(t + 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$, соответствует одна и та же точка координатной окружности.

З а м е ч а н и е. *Ввиду сказанного*, не существует полной аналогии между координатной окружностью и числовой прямой. В самом деле, на числовой прямой осуществлено взаимно однозначное соответствие между числами и точками. На координатной окружности хотя каждому числу t и соответствует единственная изображающая точка P_t, но обратное соответствие неоднозначно — ведь каждой точке P_t координатной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел, а именно, величины всех дуг с началом в точке A и концом в точке P_t. Величины всех таких дуг имеют вид $t + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

ГЛАВА 2

СТЕПЕНЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Определение 2.1. 1) Степенью действительного числа a с натуральным показателем $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, называется выражение $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, содержащее n сомножителей a.

2) Степенью действительного числа $a \neq 0$ с отрицательным целым показателем m, называется выражение, содержащее $m_1 = -m$ сомножителей $\frac{1}{a}$: $a^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{m_1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}$.

3) Если $a \neq 0$, то полагаем по определению $a^0 = 1$. Выражение 0^0 не определено.

Число a называется *основанием* степени с целым показателем.

2.1. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ ЧИСЛА С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1. $0^n = 0$. 2. $1^n = 1$. 3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$. 5. $(ab)^n = a^n b^n$. 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

7. Если $a > 0$, то $a^n > 0$.

8. а) Если $0 < a < 1$, то $\ldots < a^3 < a^2 < a < 1$; б) если $a > 1$, то $1 < a < a^2 < a^3 < \ldots$

Если среди чисел $m - n$ и $m + n$ имеются равные нулю или отрицательные, то в свойствах 3, 4 следует заменить сомножители согласно определению целой отрицательной степени числа. Докажем, к примеру, свойство 8 для $0 < a < 1$.

$\triangleright$ Домножим левую и правую части неравенства $a < 1$ на $a > 0$ и получим $a^2 < a$. Продолжая эту процедуру, последовательно найдем

$$a^3 < a^2 < a, \quad a^4 < a^3 < a^2 < a < 1 \quad \text{и т. д.}$$

Аналогично доказывается свойство 8 в случае $a > 1$. ◀

Теорема 2.1. 1) Если $0 < a < b$, то $0 < a^n < b^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, и обратно.

2) Если $b > 0$ и $a > 0$, то из равенства $b^n = a^n$ следует равенство $b = a$.

▷ Доказательство. Разложим в произведение разность степеней

$$b^n - a^n = (b - a) \cdot (b^{n-1} + ab^{n-2} + \ldots + a^{n-1}b + a^{n-1}). \quad (2.1)$$

Второй множитель в правой части разложения (2.1) — положительное число, следовательно, знак разности в левой части полученного равенства совпадает со знаком первого множителя. Равенство $b^n = a^n$ влечет равенство $b = a$, и обратно. Утверждение доказано. ◀

Из свойств натуральных степеней числа вытекают следствия.

Следствие 1. Если $0 \leqslant a < 1$, то $0 \leqslant a^n < 1$.

Следствие 2. Если $b \geqslant 1$, то $b^n \geqslant 1$.

2.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ

Определение 2.2. Пусть числа $a \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$, n — натуральное число.

Число α называется *арифметическим корнем* n-й степени из числа a, если $\alpha^n = a$. Для арифметического корня α из числа $a \geqslant 0$ используется обозначение: $\alpha = \sqrt[n]{a}$.

Теорема 2.2. Существует единственный арифметический корень из положительного числа.

▷ 1. Единственность вытекает из теоремы 2.1 (1), согласно которой разным положительным числам отвечают разные степени этих чисел, а именно: если $0 < \alpha < \beta$, то $\alpha^n < \beta^n$, а если $0 < \beta < \alpha$, то $\beta^n < \alpha^n$.

2. Докажем существование арифметического корня n-й степени.

i) Пусть имеется такое рациональное число $p > 0$, что $p^n = a$.

В таком случае $p = \alpha$ — арифметический корень из числа a: $p = \sqrt[n]{a}$.

ii) Если такого рационального числа нет, построим сечение $X|X'$ на множестве рациональных чисел так, чтобы в нижний класс X попали такие положительные рациональные числа x, для которых выполнено неравенство $x^n < a$. В верхний класс X' войдут такие положительные числа x', для которых выполнено неравенство $x'^n > a$.

Докажем, что эти классы — непустые множества. Рассмотрим натуральное число m, удовлетворяющее двойному неравенству $\dfrac{1}{m} < a < m$. При этом тем более выполнено неравенство $\dfrac{1}{m^n} < a < m^n$, откуда следует, что число $\dfrac{1}{m}$ входит в нижний класс X, а число m — в верхний класс X'. Другие свойства сечений выполняются с очевидностью.

Пусть число α определяется сечением $X|X'$. Докажем, что $\alpha^n = a$, т. е. $\alpha = \sqrt[n]{a}$.

Из теоремы 2.1 (1) следует, что, если $0 < x < \alpha < x'$, то выполнено неравенство $0 < x^n < \alpha^n < x'^n$. Поскольку число x принадлежит классу X, а число x' — классу X', то, по определению этих классов, выполняется неравенство

$$x^n < a < x'^n.$$

Таким образом, числа a и α^n расположены между числами x^n и x'^n. Произведем оценку разности $x'^n - x^n$ с помощью формулы (2.1):

$$x'^n - x^n = (x' - x) \cdot (x'^{n-1} + xx'^{n-2} + \ldots + x^{n-1}x' + x^{n-1}). \quad (2.2)$$

По следствию 1 из леммы 1.2, разность $x' - x$ можно сделать меньше любого числа $\eta > 0$. Будем считать, что число x' меньше некоторого числа x'_0 из верхнего класса. С учетом формулы

(2.2), получим верхнюю оценку для разности $x'^n - x^n$:

$$x'^n - x^n < \eta \cdot n x_0'^{n-1}, \qquad (2.3)$$

при этом число $\eta \cdot n x_0'^{n-1}$ в правой части неравенства (2.3) меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, если $\eta < \dfrac{\varepsilon}{n x_0'^{n-1}}$.

По лемме 1.3 между границами x^n и x'^n не могут находиться два различных числа. Отсюда следует равенство чисел α^n и a. ◀

2.3. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ

Теорема 2.3. 1) Если $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2) Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то выполнены равенства

а) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, б) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{c}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$, в) $\dfrac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[m]{c}} = \sqrt[mn]{c^{m-n}}$, $m > n$.

Теорема 2.4. Если $a \geqslant 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 1$, то

а) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, б) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$,

в) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, г) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$.

Теорема 2.5. Если $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $m \in \mathbb{Z}$, то $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Теорема 2.6. Если $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Теорема 2.7. Если $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то из неравенств $0 \leqslant a < 1$ следуют неравенства $a \leqslant \sqrt[n]{a} < 1$, а из неравенства $a > 1$ следует $\sqrt[n]{a} > 1$.

Теорема 2.8. 1) Если $0 < a < 1$, то выполнены неравенства

$$0 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \ldots < 1;$$

2) если $a > 1$, то имеют место следующие неравенства:

$$a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \ldots > 1.$$

▷ Общая идея доказательства равенств, содержащихся в теоремах 2.3–2.5, заключается в проверке равенства степеней их правой и левой частей, в соответствии с теоремой 2.1 (2). Например, утверждения теоремы 2.3 (2) следуют из тождеств

$$\text{а) } (\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n = ab;\quad \text{б) } \left(\sqrt[n]{\frac{a}{c}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{c})^n} = \frac{a}{c};$$

$$\text{в) } \left(\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[m]{c}}\right)^{mn} = \frac{(\sqrt[n]{c})^{mn}}{(\sqrt[m]{c})^{mn}} = \frac{((\sqrt[n]{c})^n)^m}{((\sqrt[m]{c})^m)^n} = \frac{(\sqrt[n]{c^n})^m}{(\sqrt[m]{c^m})^n} = \frac{c^m}{c^n} = c^{m-n}.$$

Утверждения теоремы 2.4 следуют из тождеств

$$\text{а) } (\sqrt[n]{a^m})^n = ((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m;$$

$$\text{б) } \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\text{в) } \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a;$$

$$\text{г) } (\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a})^{mn} = (\sqrt[n]{a})^{nm}\cdot(\sqrt[m]{a})^{nm} =$$

$$= ((\sqrt[n]{a})^n)^m\cdot((\sqrt[m]{a})^m)^n = a^m\cdot a^n = a^{m+n}.\ ◀$$

При доказательстве теорем 2.7, 2.8 применяется теорема 2.1.

▷ Докажем, например, теорему 2.8 (1). Воспользуемся теоремой 2.3 (равенство 2в) при вычислении отношения радикалов:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a}} = \sqrt[(n+1)n]{a^{(n+1)-n}} = \sqrt[(n+1)n]{a} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a}.$$

Причем неравенство $\sqrt[(n+1)n]{a} < 1$ истинно, поскольку в противном случае, ввиду теоремы 2.1, выполнялось бы неравенство $a \geqslant 1$, противоречащее условию $0 < a < 1$. ◀

2.4. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ ЧИСЛА С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Определение 2.3. Степенью положительного числа a с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, называется число $a^{\frac{m}{n}}$, определенное равенством $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Число a называется основанием степени с рациональным показателем.

Свойства рациональной степени числа ($a > 0, b > 0$; p, q, r — рациональные числа).

1. $1^p = 1$. 2. $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}}$. 3. $a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k+m}{n}}$.
4. а) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; б) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$. 5. $(ab)^p = a^p b^p$.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$. 7. $\dfrac{1}{b^p} = b^{-p}$. 8. $(a^p)^q = a^{pq}$.
9. а) $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$; б) $a^p = a^{\frac{pq}{q}}$. 10. $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pr}{qr}}$.
11. Если $a > b > 0$ и $p > 0$, то $a^p > b^p > 0$.
12. Если $a > b > 0$ и $p < 0$, то $0 < a^p < b^p$.

Докажем свойства 2, 3, 4 (а) и 8.

▷ 2. Обозначим $b = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ и воспользуемся тождествами

$$b^n = a^m \Leftrightarrow b^{kn} = a^{km} \Leftrightarrow b = \sqrt[kn]{a^{km}} \Leftrightarrow b = a^{\frac{km}{kn}}.$$

3. Обозначим $c = a^{\frac{k}{n}}$, $d = a^{\frac{m}{n}}$ и воспользуемся тождествами

$$c^n = a^k,\ d^n = a^m,\ (cd)^n = a^{k+m} \Leftrightarrow cd = \sqrt[n]{a^{k+m}} = a^{\frac{k+m}{n}}.$$

4 (а). Обозначим $p = \dfrac{k}{l}$, $q = \dfrac{m}{n}$. Преобразуем дроби p, q к общему знаменателю: $p = \dfrac{k \cdot n}{l \cdot n}$, $q = \dfrac{m \cdot l}{l \cdot n}$, и получим тождества

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{k\,n}{l\,n}} \cdot a^{\frac{m\,l}{l\,n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[l\,n]{a^{k \cdot n}} \cdot \sqrt[l\,n]{a^{m \cdot l}} = \sqrt[l\,n]{a^{k \cdot n + m \cdot l}} = a^{\frac{k\,n + m\,l}{l\,n}} = a^{\frac{k}{l} + \frac{m}{n}} = a^{p+q}.$$

$$8.\ (a^p)^q = \left(a^{\frac{k}{l}}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[l]{a^k}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\sqrt[l]{a^k}}\right)^m = \sqrt[l\,n]{a^{km}} =$$

$$= a^{\frac{k\,m}{l\,n}} = a^{p \cdot q}. \quad ◀$$

Другие свойства рациональной степени доказываются аналогично.

Упражнение 2.1. Объясните, почему не определяется рациональная степень числа $a \leqslant 0$.

Теорема 2.9. Если r_1, r_2 — рациональные числа, причем $r_1 < r_2$, то при $a > 1$ выполняется неравенство $a^{r_1} < a^{r_2}$, а при $0 < a < 1$ — неравенство $a^{r_1} > a^{r_2}$.

▷ Доказательство. Пусть $r_1 = \dfrac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$. Приведем эти дроби к общему знаменателю и получим равенства

$$r_1 = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}, \qquad r_2 = \frac{m_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1}.$$

Из условия $r_1 < r_2$ следует неравенство $m_1 n_2 < m_2 n_1$.

При $a > 1$, по теореме 2.7, выполнено неравенство $\sqrt[n_1 n_2]{a} > 1$, откуда, по теореме 2.8 (1) следует неравенство

$$(\sqrt[n_1 n_2]{a})^{m_1 n_2} < (\sqrt[n_1 n_2]{a})^{m_2 n_1} \Leftrightarrow a^{r_1} < a^{r_2}.$$

При $0 < a < 1$ выполнено неравенство $\sqrt[n_1 n_2]{a} < 1$, из которого по теореме 2.8 следует неравенство

$$(\sqrt[n_1 n_2]{a})^{m_1 n_2} > (\sqrt[n_1 n_2]{a})^{m_2 n_1} \Leftrightarrow a^{r_1} > a^{r_2}.$$ ◀

2.5. НЕРАВЕНСТВО БЕРНУЛЛИ

Лемма 2.1. Если $n \geqslant 2$ — натуральное число, и $\lambda > 0$, то

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda. \tag{2.4}$$

▷ Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. При $n = 2$ имеем $(1+\lambda)^2 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 > 1 + 2\lambda$. Неравенство истинно.

2°. Предположим, что неравенство истинно при $n = k$, т. е. $(1+\lambda)^k > 1 + k\lambda$, и докажем его при $n = k+1$. Умножим обе части предыдущего неравенства на $1 + \lambda > 0$ и получим

$$(1+\lambda)^{k+1} = (1+\lambda)^k(1+\lambda) > (1+k\lambda)(1+\lambda) =$$
$$= 1 + (k+1)\lambda + \lambda^2 > 1 + (k+1)\lambda,$$

т. е. $(1+\lambda)^{k+1} > 1 + (k+1)\lambda$. Отсюда по принципу математической индукции вытекает истинность утверждения. ◀

Следствие 1. Если $n \geqslant 2$ — натуральное число, и $\gamma > 1$, то

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1). \tag{2.4$_1$}$$

▷ Доказательство. Положим $\lambda = \gamma - 1 > 0$, тогда $\gamma = 1 + \lambda$, и неравенство (2.4$_1$) с очевидностью эквивалентно неравенству Бернулли. ◀

Следствие 2. В неравенстве (2.4_1) положим $\gamma = \sqrt[n]{a}$, где $a > 1$, и получим

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}. \qquad (2.5)$$

Упражнение 2.2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ доказать неравенство

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}.$$

Упражнение 2.3. Доказать, что если $a > 1$, и для любого натурального n выполнено неравенство $\alpha \leqslant a^{-n}$, то $\alpha \leqslant 0$.

▷ Доказательство. Положим $\delta = a - 1 > 0$ и $a = 1 + \delta$. Воспользуемся неравенством Бернулли и для произвольного натурального n получим неравенства $a^n = (1+\delta)^n > 1 + n\delta > n\delta$, из которых следуют неравенства

$$\alpha \leqslant a^{-n} = \frac{1}{(1+\delta)^n} < \frac{1}{1+n\delta} < \frac{1}{n\delta},$$

позволяющие вывести неравенство $\alpha\delta < \dfrac{1}{n}$. По свойству из упражнения 1.2 отсюда вытекает, что $\alpha\delta \leqslant 0$. Учитывая, что $\delta > 0$, получаем $\alpha \leqslant 0$. ◀

Упражнение 2.4. 1) Доказать формулу

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

где $A > 0$, $B > 0$, $A^2 - B > 0$.

(Указание. Возведите обе части формулы в квадрат.)

2) Упростить выражения:

а) $\sqrt{208 - 120\sqrt{3}} + \sqrt{229 + 132\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{208 + 120\sqrt{3}} - \sqrt{229 - 132\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{208 + 120\sqrt{3}} + \sqrt{229 - 132\sqrt{3}}$.

(Указание. Воспользуйтесь равенствами $208 - 120\sqrt{3} = 100 + 36 \cdot 3 - 120\sqrt{3} = 10^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6\sqrt{3} = (10 - 6\sqrt{3})^2$.)

2.6. СТЕПЕНЬ ЧИСЛА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Определение 2.4. 1) Степенью a^x действительного числа $a > 1$ с действительным показателем x называется действительное число ξ, лежащее между степенями a^p и $a^{p'}$,

$$a^p < \xi < a^{p'},$$

с рациональными показателями p, p', удовлетворяющими двойному неравенству $p < x < p'$.

2) Степенью a^x действительного числа $0 < a < 1$ с действительным показателем x называется действительное число ξ, лежащее между степенями $a^{p'}$ и a^p,

$$a^{p'} < \xi < a^p,$$

с рациональными показателями p, p', удовлетворяющими двойному неравенству $p < x < p'$.

Число a называется основанием степени с действительным показателем.

Теорема 2.10. Докажем существование и единственность степени числа $a > 1$ с действительным показателем.

$\triangleright$ 1. Доказательство существования числа ξ. Бесконечное множество степеней $\{a^p\}$ при $a > 1$, не имеющее наибольшего значения, ограничено сверху любой степенью $a^{p'}$. Аналогично, бесконечное множество степеней $\{a^{p'}\}$ при $a > 1$, не имеющее наименьшего значения, ограничено снизу любой степенью a^p. Множества $\boldsymbol{A} = (-\infty; 0] \cup \{a^p\}$ и $\boldsymbol{A}' = \{a^{p'}\}$ образуют на множестве $\mathbb{R}$ сечение $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}'$, соответствующее числу ξ, так как каждое число из $\boldsymbol{A}$ меньше любого числа из $\boldsymbol{A}'$.

2. Для доказательства единственности числа ξ воспользуемся методом «от противного».

Пусть имеются два значения ξ_1, ξ_2, отвечающие определению степени. Возьмем числа p, p', такие, что $0 < p' - p < \dfrac{1}{n}$, где n — натуральное число. Рассмотрим разность чисел $a^{p'}$ и a^p, произведем оценки и, с учетом неравенства (2.5), найдем

$$a^{p'} - a^p = a^p\left(a^{p'-p} - 1\right) < a^p\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < a^{p'_0}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < a^{p'_0}\frac{a-1}{n} < \varepsilon,$$

где p'_0 — фиксированное число из множества $\{p'\}$. Для любого

$\varepsilon > 0$, при $n > \left[\dfrac{a^{p_0'}(a-1)}{\varepsilon}\right]$ (здесь выражение $[x]$ обозначает целую часть числа x) выполнено неравенство $0 < a^{p'} - a^p < \varepsilon$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ разность чисел можно сделать меньше ε. С учетом замечания к лемме 1.3, между границами a^p и $a^{p'}$ не может содержаться различных чисел, поэтому $\xi_1 = \xi_2$.

Доказательство в случае $0 < a < 1$ проводится аналогично. ◀

2.7. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ ЧИСЛА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Для степени с действительным показателем истинны все выводы, сделанные для степени с рациональным показателем.

Теорема 2.11. Пусть основания степени — действительные положительные числа $a > 0$, $b > 0$; α, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда имеют место равенства:

1) $1^\alpha = 1$; 2) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;

3) $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$; 4) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;

5) $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$. 6) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Докажем правило 2 сложения показателей при перемножении степеней: $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

▷ Доказательство. Пусть p, p', q, q' — любые рациональные числа, для которых выполнены неравенства

$$p < \alpha < p', \qquad q < \beta < q'.$$

По определению суммы

$$p + q < \alpha + \beta < p' + q'.$$

По определению степени, при $a > 1$ выполнены неравенства

$$a^p < a^\alpha < a^{p'}, \quad a^q < a^\beta < a^{q'} \quad \text{и} \quad a^{p+q} < a^{\alpha+\beta} < a^{p'+q'}.$$

Перемножая первые два из них, получим неравенство

$$a^{p+q} < a^{\alpha} \cdot a^{\beta} < a^{p'+q'}.$$

Таким образом, числа $a^{\alpha+\beta}$ и $a^{\alpha} \cdot a^{\beta}$ лежат в границах от a^{p+q} до $a^{p'+q'}$, которые можно сделать сколь угодно близкими. Отсюда, по обобщенной лемме 1.3 следует правило сложения показателей при перемножении степеней. ◀

Теорема 2.12. Если основание степени — действительное число $a > 0$, и показатель степени $\alpha \in \mathbb{R}$, то

1) истинно неравенство $a^{\alpha} > 0$;

2) для любого $b \leqslant 0$ уравнение $a^x = b$ не имеет корней.

З а м е ч а н и е. Если $\alpha > 0$, то по определению полагаем $0^{\alpha} = 0$.

▷ Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство 1 следует из того, что рациональная степень числа строго больше нуля, а именно:

i) В случае $a > 1$ возьмем число $q \in \mathbb{Q}$ и $q \leqslant \alpha$. Тогда, по свойству степени, выполнено неравенство $a^{\alpha} \geqslant a^q > 0$.

ii) В случае $0 < a < 1$ возьмем число $p \in \mathbb{Q}$ и $\alpha \leqslant p$. По свойству степени, выполнено неравенство $a^{\alpha} \geqslant a^p > 0$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 докажем методом «от противного».

Предположим, что уравнение $a^x = b$, $b \leqslant 0$ имеет корень α. Однако, степень $a^{\alpha} > 0$ не может равняться неположительному числу b.

Таким образом, антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

Теорема 2.13. Если α_1, α_2 — действительные числа, причем $\alpha_1 < \alpha_2$, то при $a > 1$, выполняется неравенство $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, а при $0 < a < 1$ – неравенство $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

▷ Д о к а з а т е л ь с т в о в случае $a > 1$. Рассмотрим рациональное число p: $\alpha_1 < p < \alpha_2$. По свойству степени, при $a > 1$ выполнено неравенство $a^{\alpha_1} < a^p < a^{\alpha_2}$, из которого следует неравенство $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Доказательство в случае $0<a<1$ проводится аналогично. ◀

П р и м е р 2.1. В табл. 2.1 приводится пример вычислений последовательных приближений чисел $\sqrt{2}$ и $10^{\sqrt{2}}$ с возрастающей точностью с недостатком и с избытком, выполненных с помощью калькулятора.

Замечания. 1. Существует единственное число $x = \sqrt{2}$, удовлетворяющее сразу всем неравенствам

$$\begin{gathered} 1 < x < 2; \\ 1{,}4 < x < 1{,}5; \\ 1{,}41 < x < 1{,}42; \\ 1{,}414 < x < 1{,}415; \\ \ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

2. Последовательность значений 10^x, найденных с недостатком, возрастает. Последовательность значений 10^x, найденных с избытком, убывает. Разность между ними уменьшается от 90 в первом приближении до 0,00006 — в седьмом. Обе эти последовательности приближаются к одному и тому же числу $10^{\sqrt{2}}$, которое можно вычислить с заданной погрешностью.

Таблица 2.1

№ п/п	Значения $x \approx \sqrt{2}$		Степень 10^x при значениях $x \approx \sqrt{2}$		Разность значений степеней $10^{p'} - 10^p$ с избытком и с недостатком
	с недостатком p	с избытком p'	с недостатком 10^p	с избытком $10^{p'}$	
1	1	2	10	100	90
2	1,4	1,5	25,11886	31,62277	6,50391
3	1,41	1,42	25,70395	26,30267	0,59872
4	1,414	1,415	25,94179	26,00159	0,05980
5	1,4142	1,4143	25,95374	25,95971	0,00597
6	1,41421	1,41422	25,95433	25,95493	0,00060
7	1,414213	1,414214	25,95451	25,95457	0,00006

Упражнение 2.5. Доказать, что число 10^{-n} можно сделать меньше любого действительного числа $\varepsilon > 0$.

(Указание. Из неравенства Бернулли: $10^n = (1 + (10 - 1))^n > 1 + n(10 - 1) > 9n$. При этом $10^{-n} < (9n)^{-1} < \varepsilon$ для любого $n > \left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]$.)

2.8. ЛОГАРИФМ ЧИСЛА

Определение 2.5. Показатель степени r, являющийся решением уравнения $a^r = b$, где основание $a > 0$, $a \neq 1$, а правая часть $b > 0$, называется *логарифмом числа b по основанию a*: $r = \log_a b$.

Теорема 2.14. Докажем существование и единственность логарифма числа $b > 0$ по основанию $a > 0$, $a \neq 1$.

▷ Доказательство теоремы проведем в случае $a > 1$.

1. Если существует такое рациональное число r, что выполнено равенство $a^r = b$, то r и есть искомый логарифм.

2. Рассмотрим случай, когда такого рационального числа r нет.

i) Произведем сечение $P|P'$ на множестве всех рациональных чисел так, чтобы к нижнему классу P относились все рациональные числа p, для которых $a^p < b$, а к верхнему классу P' — рациональные числа p', для которых $a^{p'} > b$. Покажем, что классы P и P' — непустые множества. Покажем сначала, что имеется такое $n \in \mathbb{N}$, что выполнено неравенство $a^n > b$.

Действительно, неравенство Бернулли позволяет получить (см. (2.4$_1$))

$$a^n > 1 + n(a-1) > n(a-1).$$

Поэтому из неравенства $n(a-1) > b$ следует неравенство $a^n > b$, и достаточно взять $n > \dfrac{b}{a-1}$, чтобы выполнялось неравенство $a^n > b$. Следовательно, так определенное число n относится к классу P'.

С другой стороны, ввиду неравенства

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} < \frac{1}{n(a-1)} < b \quad (a > 1),$$

достаточно взять $n > \dfrac{1}{b(a-1)}$, чтобы выполнялось неравенство $a^{-n} < b$; при этом число $(-n)$ лежит в классе P.

Другие условия, определяющие сечение, здесь также выполнены.

ii) По построению сечения $P|P'$, истинно неравенство $a^p < b < a^{p'}$.

По теореме 1.3, сечение $P|P'$ определяет единственное действительное число σ, разделяющее нижний и верхний классы, при этом $p < \sigma < p'$. По определению степени с основанием $a > 1$, выполнено неравенство $a^p < a^\sigma < a^{p'}$, в котором действительное число a^σ, удовлетворяющее всем таким неравенствам — единственное. Следовательно, числа b и a^σ совпадают, $\sigma = \log_a b$. Существование и единственность логарифма числа доказаны. ◀

Следствие. Уравнение $a^x = b$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ имеет единственное решение.

2.9. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Будем считать, что действительные числа $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$; $c \neq 0$; $x > 0$; $y > 0$.

1. $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$. 2. $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$.
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y.$$
4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. В частности, $\log_a \dfrac{1}{y} = -\log_a y$.
5. $\log_a x^p = p \cdot \log_a x \Leftrightarrow a^{p \log_a x} = (a^{\log_a x})^p = x^p$.
6. $\log_{a^c} x^p = \dfrac{p}{c} \log_a x \Leftrightarrow (a^c)^{\frac{p}{c} \log_a x} = (a^{\log_a x})^p = x^p$.
7. $\log_{a^c} x = \dfrac{1}{c} \log_a x$.
8. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ — модуль перехода к новому основанию.

В частности, $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$; здесь $b \neq 1$.

Доказательства свойств логарифмов основаны на использовании основного логарифмического тождества

$$a^{\log_a b} = b,$$

вытекающего из определения логарифма числа

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b \Leftrightarrow b = a^x = a^{\log_a b}$$

и следствия из теоремы 2.14.

▷ Так, для доказательства свойства 8, преобразуем формулу 8 к виду $\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x$. Далее, потенциируя ее левую и правую части, получим тождество

$$b^{\log_a x \cdot \log_b a} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}. \qquad ◀$$

Определение 2.6. 1) Логарифм числа $a > 0$ по основанию 10 называется *десятичным логарифмом* числа: $\log_{10} a = \lg a$.

2) Логарифм числа $a > 0$ по основанию e называется *натуральным логарифмом* числа: $\log_e a = \ln a$.

3) Число $e \approx 2{,}718281828459045$ равно пределу последовательности $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n (см. лемму 5.1).

Обозначение e ввел Леонард Эйлер, вычисливший первые 23 знака этого числа в виде десятичной дроби.

З а м е ч а н и е 1. Формулы из свойств 3, 4 логарифмов можно видоизменить. Так, если $x \cdot y > 0$ (неупоминаемые здесь условия из списка свойств сохраняются), то

$$3'.\ \log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|;$$

$$4'.\ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|.$$

З а м е ч а н и е 2. Если показатели степени p, c — целые четные числа: $p = m$, $c = n$, то при $x \neq 0$ формула свойства 5 имеет вид

$$5'.\ \log_a x^n = n \log_a |x|,$$

а при $x \neq 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ формула свойства 6 имеет вид

$$6'.\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_{|a|} |x|;$$

при $a \neq 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ формула свойства 7 имеет вид

$$7'.\ \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_{|a|} x.$$

Упражнение 2.6. Доказать следующие утверждения:

1) Если $a > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$; c, $c' > 0$; c, $c' \neq 1$, то

$$\frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\log_{c'} a}{\log_{c'} b} = \log_b a.$$

2) Если $a > 0$; $b > 0$; c, $c' > 0$; c, $c' \neq 1$, то

$$\log_c a \cdot \log_{c'} b = \log_{c'} a \cdot \log_c b.$$

3) Если $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$, $c \neq 1$, то

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$$

4) Если $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$ и $\log_a b > 0$, то

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}.$$

5) Если $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$; $ab \neq 1$; $x > 0$, $x \neq 1$; $y > 0$, $y \neq 1$, то

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_a x + \log_b x} = \frac{\log_a y - \log_b y}{\log_a y + \log_b y} = \log_{ab} \frac{b}{a}.$$

6) Если $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$; $c > 0$, $c \neq 1$; $abc \neq 1$; $x > 0$, $x \neq 1$, то

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x}.$$

Упражнение 2.7. Существуют ли такие иррациональные числа α, β, что число α^β рационально?

▷ Решение. Докажем, что такие числа существуют. Рассмотрим, к примеру, число $q = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Рационально ли оно?

1. Если число q рациональное, то оно и есть то, что мы ищем; при этом $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.

2. Если число q иррациональное, то возведем его в степень $\sqrt{2}$ и получим число $p = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ — это целое число. В этом случае искомыми будут числа $\alpha = q$ и $\beta = \sqrt{2}$.

Таким образом, хотя и не удалось найти такие иррациональные числа α, β, для которых число α^β рациональное, однако мы доказали, что такие числа существуют. ◀

Упражнение 2.8. Доказать, что число $\lg 3$ — иррациональное.

▷ Применим метод доказательства «от противного». Предположим, что $\lg 3$ — рацинальное число. Тогда выполнено равенство $\lg 3 = \frac{m}{n}$, где m, n — натуральные числа, из которого следует равенство $3 = 10^{\frac{m}{n}}$, или $3^n = 10^m$. Однако, полученное равенство невозможно ввиду того, что каждое из чисел вида 10^m оканчивается цифрой 0, а числа вида 3^n — одной из цифр 3, 9, 7, 1. Полученное противоречие доказывает, что антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

Упражнение 2.9. Доказать, что, если n и k — различные натуральные числа, то число $\lg(2^n 5^k)$ — иррациональное.

▷ Доказательство. Предположим, что $\lg(2^n 5^k) = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow 2^{qn}5^{qk} = 10^p = 2^p 5^p$. По основной теореме арифметики, это равенство истинно только тогда, когда $qn = p$ и $qk = p$, т. е. $qn = qk$, или $n = k$, что противоречит условию. Следовательно, число $\lg(2^n 5^k)$ иррациональное. ◀

Упражнение 2.10. Доказать, что все числа вида $\lg n$, где n — любое натуральное число, исключая $n = 1, 10, 10^2, \ldots$ (т. е. целые степени числа 10) — иррациональные.

Упражнение 2.11. Показать взаимосвязь геометрической и арифметической прогрессий.

(Указание. Если все члены геометрической прогрессии $\{b_n\}$ суть положительные числа, то можно построить связанную с ней арифметическую прогрессию $\{a_n\}$, а именно, положим $a_1 = \lg b_1$, $d = \lg q$, $a_n = \lg b_n$. Тогда выполнены равенства

$$a_n = \lg b_n = \lg b_{n-1} + \lg q = a_{n-1} + d, \qquad n > 1,$$
$$a_n = \lg b_n = \lg b_1 + (n-1)\lg q = a_1 + d(n-1).$$

Прологарифмировав формулу, выражающую характеристическое свойство геометрической прогрессии, получим формулу, выражающую характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Обратно, потенцируя арифметическую прогрессию $\{a_n\}$ по основанию 10 получим геометрическую прогрессию $\{bn\}$, $b_n = 10^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Из свойств арифметической прогрессии вытекают все свойства связанной с ней геометрической прогрессии.)

2.10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Теорема 2.15 (неравенство Коши). Среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{1}{n}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n) \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \quad (a_\nu > 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.6}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots$ $\ldots = a_n$.

$\triangleright$ 1. Доказательство неравенства. Рассмотрим числа

$$b_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}$$

и переформулируем утверждение теоремы.

Если $b_1 > 0, \dots, b_n > 0$ и $b_1 b_2 \dots b_n = 1$, то

$$\frac{1}{n} \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geqslant 1.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $b_1 = b_2 = \dots$ $\dots = b_n = 1$.

Воспользуемся методом математической индукции.

1°. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно, так как число 1 равно самому себе.

2°. Предположим, что утверждение истинно при натуральном $n > 1$ и докажем его для $n + 1$. Докажем, что если $c_1 > 0$, $c_2 > 0, \dots, c_n > 0, c_{n+1} > 0$ и $c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \cdot c_{n+1} = 1$, то

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + c_{n+1} \geqslant n + 1. \qquad (2.7)$$

Воспользуемся индуктивным предположением для n чисел: $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2, \dots, b_n = c_n \cdot c_{n+1}$. Для них выполнены неравенства: $b_1 > 0, \dots, b_n > 0$ и $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n = 1$; при этом

$$c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1} + (c_n \cdot c_{n+1}) \geqslant n. \qquad (2.7_1)$$

Если числа $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$ не равны друг другу, то ввиду (2.7) среди них найдутся по меньшей мере два числа, одно из которых не меньше 1, а другое меньше 1. Перенумеруем их так, чтобы выполнялись неравенства: $c_n \geqslant 1$, $c_{n+1} < 1$. В неравенстве (2.7_1) заменим произведение $(c_n \cdot c_{n+1})$ суммой $c_n + c_{n+1}$. При этом выполнены неравенства

$$c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1} + (c_n + c_{n+1}) \geqslant$$
$$\geqslant c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1} + (c_n \cdot c_{n+1}) + 1 \geqslant n + 1,$$

эквивалентные неравенствам

$$c_n + c_{n+1} \geqslant c_n \cdot c_{n+1} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_n + c_{n+1} - c_n c_{n+1} - 1 \geqslant 0,$$

причем последнее из них истинно ввиду соотношений

$$c_n + c_{n+1} - c_n c_{n+1} - 1 = c_n \cdot (1 - c_{n+1}) - (1 - c_{n+1}) = \\ = (c_n - 1) \cdot (1 - c_{n+1}) \geqslant 0,$$

и $c_n \geqslant 1$ и $c_{n+1} < 1$. Доказательство первой части утверждения закончено.

2. Докажем утверждение о равенстве.

Достаточность. Если $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$, то в нестрогом неравенстве (2.6) с очевидностью имеет место равенство средних.

Необходимость. Методом «от противного» докажем, что из равенства средних в нестрогом неравенстве (2.6) вытекает равенство всех a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Предположим, например, что $a_1 \neq a_2$, тогда

$$\frac{1}{n}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_1+a_2)+a_3+\ldots+a_n\right) \geqslant \\ \geqslant \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)\right)^2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} > \sqrt[n]{(\sqrt{a_1 \cdot a_2})^2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Предположение повлекло нарушение условия о равенстве средних. Следовательно, антитеза неверна. Теорема полностью доказана. ◀

Следствие 1. Для двух взаимно обратных чисел выполнены неравенства

i) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ при $x > 0$; равенство достигается только при $x = 1$;

ii) $x + \dfrac{1}{x} \leqslant -2$ при $x < 0$; равенство достигается только при $x = -1$.

Следствие 2. Уравнение $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| = a$ имеет действительные корни только при $a \geqslant 2$.

Следствие 3. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то выполнено неравенство

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2 \cdot (a + b)}. \qquad (2.8)$$

Равенство достигается только при $a = b$.

▷ Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$0 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = 2(a+b).$$

После извлечения корня при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ получим доказываемое неравенство:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{2\cdot(a+b)}.$$

Равенство достигается только при $a = b$. ◀

Пример 2.2. Найти x, при которых функция

$$f(x) = 5\cdot\left(\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}}+\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}}\right) \tag{2.9}$$

принимает наибольшее значение. Указать, между какими последовательными натуральными числами лежит это наибольшее значение.

▷ Решение. Применим неравенство (2.8) к функции (2.9) четыре раза:

$$f(x) \leqslant 5\cdot\sqrt{2\cdot\left(16+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 5\cdot\sqrt{2\cdot\left(16+\sqrt{2\cdot(8+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2+\sqrt{1-x}})}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 5\cdot\sqrt{2\cdot\left(16+\sqrt{2\cdot\left(8+\sqrt{2\cdot(4+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\right)}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 5\cdot\sqrt{2\cdot\left(16+\sqrt{2\cdot\left(8+\sqrt{2\cdot(4+\sqrt{2\cdot 2})}\right)}\right)} =$$

$$= 10\cdot\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{3}}}.$$

Знак равенства имеет место на каждом шаге при условии $1-x = 1+x \Leftrightarrow x = 0$.

Поэтому наибольшее значение $f(x)$ достигает при $x = 0$, оно равно

$$f(0) = 10\cdot\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{3}}}.$$

Произведем числовые оценки:

$$32 = 10 \cdot 3{,}2 < 10 \cdot \sqrt{10{,}3} = 10 \cdot \sqrt{8 + \sqrt{5{,}7}} < 10 \cdot \sqrt{8 + \sqrt{4 + \sqrt{3}}} <$$
$$< 10 \cdot \sqrt{8 + \sqrt{5{,}8}} < 10 \cdot \sqrt{8 + 2{,}5} = 10 \cdot \sqrt{10{,}5} < 10 \cdot 3{,}3 = 33.$$

Таким образом, наибольшее значение лежит между числами 32 и 33.

Ответ: $x = 0$; между 32 и 33. ◀

Теорема 2.16 (неравенство Коши–Буняковского). Для действительных чисел $\{x_\nu\}$, $\{y_\mu\}$, где ν, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, выполнено неравенство

$$(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2). \quad (2.10)$$

Равенство достигается только в том случае, когда $x_\nu = \lambda y_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), где λ — постоянная.

▷ Доказательство. Рассмотрим верное при всех значениях $\mu \in \mathbb{R}$ неравенство

$$(x_1 - \mu y_1)^2 + (x_2 - \mu y_2)^2 + \ldots + (x_n - \mu y_n)^2 \geqslant 0.$$

Преобразовав выражение в его левой части, получим, что квадратное относительно μ неравенство

$$\mu^2(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) - 2\mu(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n) +$$
$$+ (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant 0$$

выполняется для любого значения μ. Поскольку у полученного квадратного трехчлена коэффициент при μ^2 неотрицателный, это означает, что либо квадратный трехчлен не имеет корней, либо имеет только один корень. Значит, его дискриминант неположительный:

$$\frac{D}{4} = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \times$$
$$\times (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \leqslant 0.$$

Неравенство Коши–Буняковского доказано.

Равенство возможно только в случае $D = 0$, т. е. когда квадратный трехчлен имеет (единственный) корень $\mu = \lambda$. При этом

$$(x_1 - \lambda y_1)^2 + (x_2 - \lambda y_2)^2 + \ldots + (x_n - \lambda y_n)^2 = 0,$$

т. е. $x_\nu = \lambda y_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), где λ — постоянная. ◀

Следствие. Если сумма квадратов действительных чисел каждого из наборов $\{x_\nu\}$ и $\{y_\nu\}$ (где $\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n$) равна 1, то модуль суммы произведений их соответственных пар не превосходит 1. Другими словами, если $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ и $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1$, то $|x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n| \leqslant 1$.

Пример 2.3. Доказать неравенство: если $a_1 + a_2 + \ldots$ $\ldots + a_n = 1$, то

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}.$$

▷ Доказательство. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{e}(1; 1; \ldots; 1)$ и $\boldsymbol{a}(a_1; a_2; \ldots; a_n)$. Неравенство (2.10) запишем в векторной форме $(\boldsymbol{e}; \boldsymbol{a})^2 \leqslant |\boldsymbol{e}|^2 \cdot |\boldsymbol{a}|^2$ и получим

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}; \boldsymbol{a})^2 = (1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n)^2 = 1 \leqslant \\ \leqslant (1 + 1 + \ldots + 1) \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Равенство достигается только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$. ◀

Теорема 2.17 (неравенство Бернулли). Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ выполнено неравенство

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx. \tag{2.11}$$

Равенство достигается при $x = 0$ и/или $n = 1$.

Доказательство неравенства Бернулли проводится методом математической индукции.

Теорема 2.18 (обобщенные неравенства Бернулли).

I. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ и $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, то

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha \cdot x. \tag{2.12}$$

II. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ и $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, то

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha \cdot x. \tag{2.13}$$

III. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$ и $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, то

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha \cdot x. \tag{2.14}$$

Равенство достигается при $x = 0$ и/или $\alpha = 0$, $\alpha = 1$.

$\triangleright$ Доказательство. Пусть $\alpha > 1$. С произвольной, наперед заданной, точностью представим α в виде рациональной дроби $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $r > 1$ $(p,\ q \in \mathbb{N})$, $p > q$. Докажем, что $(1+x)^r \geqslant 1 + r \cdot x$. Сделаем замену переменной $(1+x)^r = 1 + y$ и найдем

$$1 + x = (1+y)^{\frac{1}{r}} = (1+y)^{\frac{q}{p}}, \quad \text{или}$$
$$1 + x = \sqrt[p]{(1+y)\cdot(1+y)\cdot\ldots\cdot(1+y)\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}.$$

Здесь под знаком корня p-й степени имеется q сомножителей $(1+y)$ и $(p-q)$ единиц. Ввиду неравенства Коши, получим неравенство

$$1 + x \leqslant \frac{1}{p} \cdot ((1+y)q + p - q).$$

Упростим выражение в правой части последнего неравенства:

$$1 + x \leqslant \frac{1}{p}(yq + p) = \frac{q}{p}y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{q}{p}y = \frac{1}{r}\cdot((1+x)^r - 1).$$

Отсюда в окончательном виде получим неравенство

$$(1+x)^r \geqslant 1 + r \cdot x.$$

Пусть теперь $0 < \alpha < 1$.

i) Сначала докажем неравенство (2.12) для $\alpha = \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. При $k = 2$ это неравенство имеет вид

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1 + \frac{1}{2}\cdot x \ \Leftrightarrow\ 1 + x \leqslant 1 + x + \frac{1}{4}\cdot x^2 \ \Leftrightarrow\ 0 \leqslant \frac{1}{4}\cdot x^2.$$

Введем обозначение $(1+x)^{\frac{1}{k}} = 1+y$, откуда $y = (1+x)^{\frac{1}{k}} - 1$, преобразуем последнее выражение и воспользуемся неравенством Бернулли

$$1+x = (1+y)^k \geqslant 1+ky = 1+k\cdot\left((1+x)^{\frac{1}{k}} - 1\right) = 1-k+k\cdot(1+x)^{\frac{1}{k}}.$$

Полученное неравенство преобразуем к доказываемому виду:

$$1+x \geqslant 1-k+k\cdot(1+x)^{\frac{1}{k}} \Leftrightarrow x+k \geqslant k\cdot(1+x)^{\frac{1}{k}} \Leftrightarrow (1+x)^{\frac{1}{k}} \leqslant 1+\frac{x}{k}.$$

ii) Докажем теперь неравенство (2.13) для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. С произвольной, наперед заданной точностью, представим число α в виде рациональной дроби $\frac{p}{q} = r \in \mathbb{Q}$; $p, q \in \mathbb{N}$; $p < q$; $0 < r < 1$. Докажем, что $(1+x)^r \leqslant 1 + r \cdot x$.

Для доказательства преобразуем левую часть неравенства к виду

$$(1+x)^r = (1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)\cdot(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}.$$

Здесь под знаком корня q-й степени имеется p сомножителей $(1+x)$ и $(q-p)$ единиц. Неравенство Коши позволяет получить следующее неравенство:

$$(1+x)^r \leqslant \frac{1}{q}\cdot((1+x)p+q-p) = \frac{p}{q}\cdot x+1 = r\cdot x+1,$$

из которого вытекает, что $(1+x)^r \leqslant 1 + r\cdot x$.

Доказательство неравенства III. Выполним замену $\beta = -\alpha$ и преобразуем неравенство (2.12) к виду

$$(1+x)^\beta(1-\beta x) \leqslant 1, \quad \text{где } \beta > 0. \qquad (2.15)$$

Представим в виде суммы число $\beta = \nu + \gamma$, здесь $\nu = [\beta]$, $\gamma = \{\beta\}$; причем $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $0 \leqslant \gamma < 1$. Будем считать, что $1 - \beta x \geqslant 0$, так как в противном случае неравенство (2.15) очевидно. Тогда в силу уже доказанного обощенного неравенства II при $0 \leqslant \gamma < 1$ выполнены соотношения

$$0 < r_\gamma(x) = (1+x)^\gamma(1-\gamma x) \leqslant (1+\gamma x)(1-\gamma x) = 1-(\gamma x)^2 \leqslant 1.$$

Ввиду неравенства

$$\sqrt[\nu+1]{(1+x)^\nu(1-\nu x)} \leqslant \frac{\nu(1+x)+(1-\nu x)}{\nu+1} = 1,$$

выполнены соотношения $0 \leqslant \tau_\nu(x) = (1+x)^\nu(1-\nu x) \leqslant 1$. Очевидно, $\tau_\gamma(x) \cdot \tau_\nu(x) \leqslant 1$, или

$$(1+x)^\beta \cdot (1-\beta x) = (1+x)^\nu(1+x)^\gamma \cdot (1-\nu x-\gamma x) \leqslant$$
$$\leqslant (1+x)^\nu(1+x)^\gamma \cdot (1-\nu x-\gamma x+\gamma\nu x^2) = \tau_\nu(x) \cdot \tau_\gamma(x) \leqslant 1,$$

откуда вытекает доказываемое утверждение при $\alpha < 0$. ◀

Упражнение 2.12. Доказать утверждения: 1) если a_1, a_2, … …, a_n — положительные числа, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2;$$

2) среднее геометрическое n положительных чисел не меньше их среднего гармонического:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}.$$

ГЛАВА 3

НАЧАЛА ТРИГОНОМЕТРИИ

3.1. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ЧИСЛА

Определение 3.1. Пусть отображение $\varphi\colon \mathbb{R} \to S_1$ ставит в соответствие числу $t \in \mathbb{R}$ точку P_t на тригонометрической окружности. Тогда ордината точки P_t называется *синусом* числа t и обозначается $y = \sin t$, а абсцисса точки P_t называется *косинусом* числа t: $x = \cos t$.

Для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1. \qquad (3.1)$$

Ввиду неравенств $\cos^2 t \geqslant 0$, $\sin^2 t \leqslant \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, выполнено неравенство $|\sin t| \leqslant 1$, или $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$. Аналогично доказывается, что $|\cos t| \leqslant 1$, или $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$.

Теорема 3.1. Для любого числа t выполнены равенства

1) $\sin(-t) = -\sin t, \qquad \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t;$

$\cos(-t) = \cos t, \qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t;$

2) $\sin(\pi + t) = -\sin t, \qquad \sin(\pi - t) = \sin t;$

$\cos(\pi + t) = \cos(\pi - t) = -\cos t;$

3) $\sin(t + 2n\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2k\pi) = \cos t; \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

Определение 3.2. 1) Отношение синуса числа $t \in \mathbb{R}$ к косинусу этого числа при условии, что $\cos t \neq 0$, называется *тангенсом* числа t и обозначается $\operatorname{tg} t$.

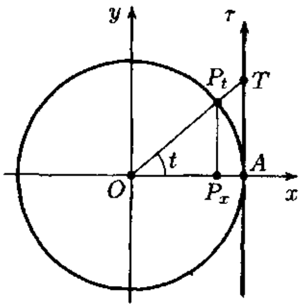


Рис. 3.1

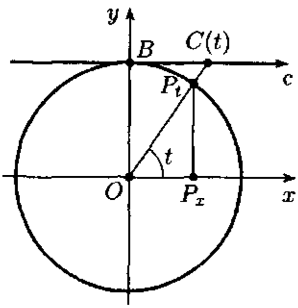


Рис. 3.2

2) Отношение косинуса числа $t \in \mathbb{R}$ к синусу этого числа при условии, что $\sin t \neq 0$, называется *котангенсом* числа t и обозначается $\operatorname{ctg} t$.

Таким образом, тангенс числа t определен при тех действительных значениях t, при которых $\cos t \neq 0$, т. е. при $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Котангенс числа t определен при тех действительных значениях t, при которых $\sin t \neq 0$, т. е. при $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi l \mid l \in \mathbb{Z}\}$ (рис. 3.1):

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cos t \neq 0;$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \qquad \sin t \neq 0.$$

Через точку $A(1;0)$ проведем касательную $\tau(A)$. На рис. 3.1 точке $T(t)$ пересечения луча $[OP_t)$ с касательной $\tau(A)$ соответствует угол t. Длину отрезка $[AT]$ найдем из подобия треугольников OP_tP_x и OTA. Запишем условие пропорциональности соответственных сторон: $\frac{|TA|}{|P_tP_x|} = \frac{|OA|}{|OP_x|}$, откуда

$$|TA| = |P_tP_x| \cdot \frac{|OA|}{|OP_x|} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Ордината точки $T(t)$ равна $\operatorname{tg} t$. Поэтому касательная $\tau(A)$ называется *линией тангенсов*. Заметим, что при $t \in \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ точка P_t лежит на оси ординат, а ввиду параллельности линии тангенсов и оси ординат, они не пересекаются, и $\operatorname{tg} t$ не определен.

Через точку $B(0;1)$ проведем касательную $c(B)$. На рис. 3.2 точке $C(t)$ соответствует угол t. Длину отрезка BC найдем из подобия треугольников OP_tP_x и COB.

Таблица 3.1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Запишем условие равенства отношений соответст енных сторон $\dfrac{|OB|}{|P_tP_x|} = \dfrac{|BC|}{|OP_x|}$, откуда

$$|BC| = |OP_x| \cdot \frac{|OB|}{|P_tP_x|} = \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t.$$

Таким образом, абсцисса точки $C(t)$ равна $\operatorname{ctg} t$. Поэтому касательная $c(B)$ называется *линией котангенсов*. Заметим, что при $t \in \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ точка P_t лежит на оси абсцисс, а ввиду параллельности линии котангенсов оси Ox, эти прямые не пересекаются и $\operatorname{ctg} t$ не определен.

Теорема 3.2. При всех допустимых значениях числа t выполнены равенства

1) $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t, \quad \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t;$

2) $\operatorname{tg}(t + \pi n) = \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{ctg}(t + \pi k) = \operatorname{ctg} t; \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

Упражнение 3.1. 1) Окружность морского компаса делится на 32 равные дуги, или *румбы*. Выразить румб в градусах и радианах.

2) Углы, образующиеся при вращении Земли вокруг своей оси, измеряются в *часовых единицах* (полный оборот, происходящий за 24 часа, соответствует 24^{h}). Выразить часовую единицу в градусах и радианах.

3) За единицу измерения углов в артиллерии принимается угол, равный $1/60$ полного оборота, называемый *большим делением угломера*. Выразить большое деление угломера в градусах и радианах.

Упражнение 3.2. Используя единичную окружность, получить значения тригонометрических функций, приведенные в табл. 3.1.

Определение 3.3. 1) *Секансом* числа t такого, что $\cos t \neq 0$ называется число $\dfrac{1}{\cos t} = \sec t$. 2) *Косекансом* числа t такого, что $\sin t \neq 0$ называется число $\dfrac{1}{\sin t} = \operatorname{cosec} t$.

3.2. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ К ОСТРОМУ УГЛУ

Определение 3.4. Синус, косинус, тангенс и котангенс, определенные при всех допустимых значениях числа t, называются *основными тригонометрическими функциями* t.

Для вычисления тригонометрических функций числа t через тригонометрические функции подходящего острого угла α применяются *формулы приведения*, представленные в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Функция от t	Число t							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
Название функции при переходе к острому углу	Изменяется		Не изменяется		Изменяется		Не изменяется	

Формулы приведения доказываются при помощи признаков равенства треугольников, содержащих подходящие углы.

Теорема 3.3. Любая тригонометрическая функция угла $t = \dfrac{\pi}{2}n + \alpha$ по абсолютной величине равна той же функции угла α, если число n четное, и ко-функции этого угла, если число n нечетное. При этом, если функция угла t положитель-

Таблица 3.3

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
α_ν	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
ν	9	10	11	12	13	14	15	16
α_ν	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π

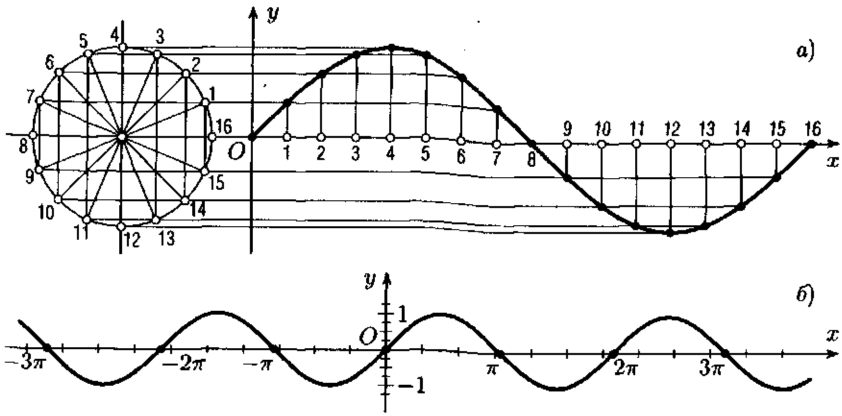


Рис. 3.3

ная, когда α острый угол, то знаки обеих функций одинаковы, а если отрицательная, то разные.

Воспользуемся определением синуса числа с помощью координатной окружности и построим график соответствия $(\alpha_\nu, \sin\alpha_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, 16$ (табл. 3.3) на координатной плоскости Oxy, показанный на рис. 3.3, *а*. Соединяя точки $A_\nu(\alpha_\nu, \sin\alpha_\nu)$ непрерывной линией с помощью лекала, получим ветвь графика функции $y = \sin x$, отвечающую значениям $x \in [0; 2\pi]$. Ввиду равенства $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, $n \in \mathbb{Z}$, график функции $y = \sin x$ на числовой прямой получается из построенной волны параллельным переносом вдоль оси абсцисс (рис. 3.3, *б*).

Для построения графика соответствия $(\alpha_\nu, \cos\alpha_\nu)$ воспользуемся формулой приведения $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. График косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса против направления оси абсцисс на $\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 3.4).

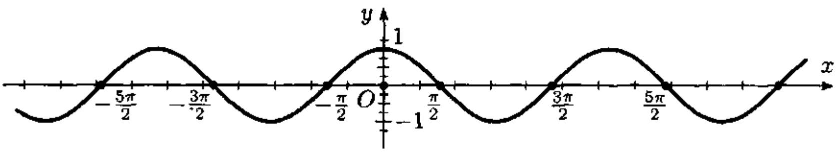
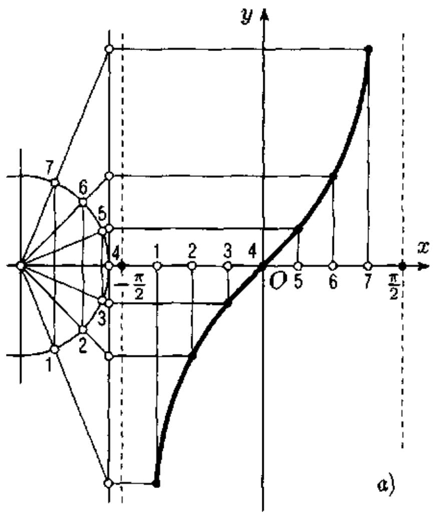


Рис. 3.4

Воспользуемся определением тангенса числа с помощью координатной окружности и построим график соответствия $(\alpha_\nu, \operatorname{tg}\alpha_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, 7$ (табл. 3.4) на координатной плоскости Oxy, показанный на рис. 3.5, *а*.

При $x = -\dfrac{\pi}{2}$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$ значение тангенса не определено. Ввиду равенства $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi n)$ $(n \in \mathbb{Z})$, график функции $y = \operatorname{tg} x$ получает-



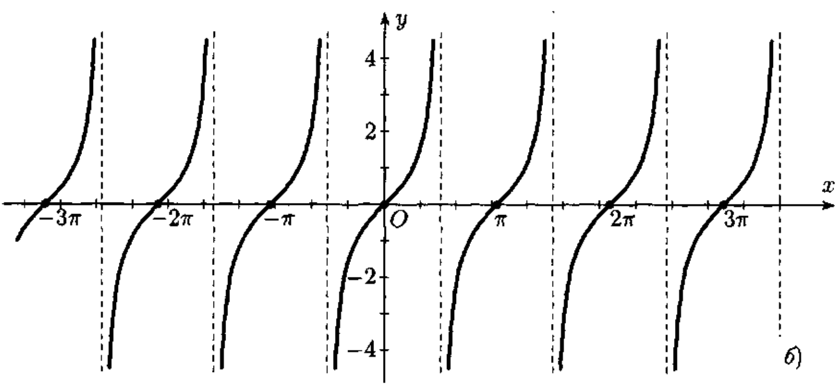


Рис. 3.5

Таблица 3.4

ν	1	2	3	4	5	6	7
α_ν	$-\dfrac{3\pi}{8}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{8}$	0	$\dfrac{\pi}{8}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{3\pi}{8}$

ся из построенной ветви параллельным переносом вдоль оси абсцисс (рис. 3.5, *б*).

Для построения графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$. График котангенса получается из графика тангенса с помощью композиции параллельного переноса в положительном направлении оси абсцисс на $\dfrac{\pi}{2}$ и симметрии относительно оси абсцисс (рис. 3.6).

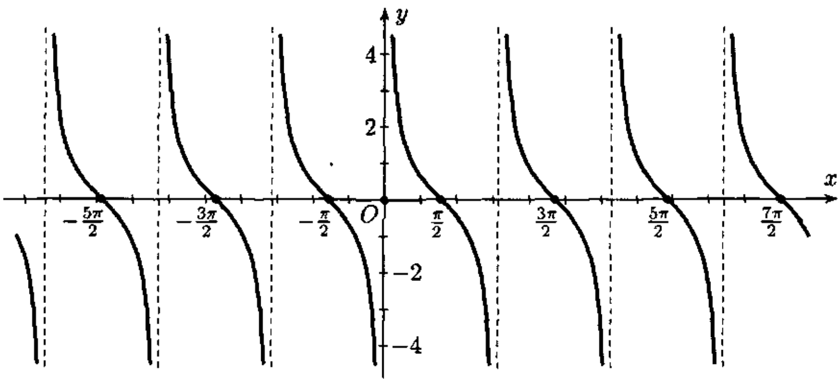


Рис. 3.6

Упражнение 3.3. Может ли синус или косинус угла равняться

1) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$; 2) $\ln a + (\ln a)^{-1}$, если $a > 0$, $a \neq 1$;

3) $\ln a + \ln(a^{-1})$, если $a > 0$?

Упражнение 3.4. Сравнить числа:

1) $\sin 1$ и $\sin\left(1 + \dfrac{2\pi}{5}\right)$; 2) $\cos\left(1 + \dfrac{2\pi}{5}\right)$ и $\cos\left(1 + \dfrac{4\pi}{5}\right)$;

3) $\sin(-1)$ и $\sin 4$; 4) $\sin 1$ и $\sin 3$; 5) $\sin 3$ и $\sin 4$.

Упражнение 3.5. Найти знак числа:

1) $\cos\left(1+\dfrac{6\pi}{5}\right)\cdot\operatorname{tg}11$; 2) $\sin 7\cdot\sin 1$;

3) $\cos\left(1+\dfrac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(1+\dfrac{4\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(1+\dfrac{6\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(1+\dfrac{8\pi}{5}\right)$;

4) $\sin 7-\sin(-1)$.

Упражнение 3.6. Вычислить:

1) $\sin\dfrac{1001\pi}{6}$; 2) $\cos\dfrac{123\pi}{4}$; 3) $\sin\left(-\dfrac{117\pi}{4}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\dfrac{1011\pi}{4}$; 5) $\operatorname{ctg}\dfrac{1001\pi}{6}$.

3.3. УСЛОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Лемма 3.1. Если число x таково, что $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

Следствие 1. При натуральном $n>2$ истинно двойное неравенство $n\sin\dfrac{\pi}{n}<\pi<n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$.

Следствие 2. При всех $x>0$ истинно неравенство $\sin x<x$; при всех $x<0$ истинно неравенство $\sin x>x$.

Следствие 3. Если $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$, то истинно двойное неравенство $|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg}x|$.

Следствие 4. Если $0<x<1$, то $\operatorname{arctg}x<x<\arcsin x$.

Следствие 5. Если $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, то истинны неравенства

$$\operatorname{ctg}x<\frac{1}{x}<\operatorname{cosec}x \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{ctg}^{\nu}x<\frac{1}{x^{\nu}}<\operatorname{cosec}^{\nu}x,\ \nu\in\mathbb{N}.$$

Лемма 3.2. Если $0<nx<\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\sin nx}{nx}<\frac{\sin x}{x}.$$

$\triangleright$ Доказательство. Воспользуемся рис. 3.7, на котором $\angle AOA_1=\angle A_1OA_2=\ldots=\angle A_{n-1}OS=x$, $\angle AOS=nx$. Площадь треугольника $\triangle AOS$ меньше суммы площадей равных треугольников $\triangle AOA_1, \triangle A_1OA_2, \ldots, \triangle A_{n-1}OS$, а сектор $\smile AOS$ состоит из n равных секторов $\smile AOA_1$, $\smile A_1OA_2$, … …, $\smile A_{n-1}OS$. Радиус изображенного круга равен 1.

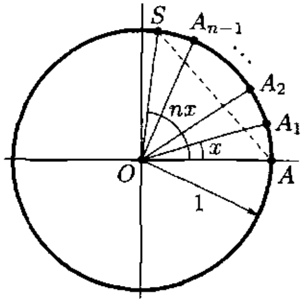


Рис. 3.7

Верхняя оценка отношения площадей $\triangle AOS$ и сектора $\smile AOS$ приводит к доказываемому неравенству:

$$\frac{S(\triangle AOS)}{S(\smile AOS)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin nx}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot nx} < \frac{S(\triangle AOA_1)+\ldots+S(\triangle A_{n-1}OS)}{S(\smile AOA_1)+\ldots+S(\smile A_{n-1}OS)} =$$

$$= \frac{n\,S(\triangle AOA_1)}{n\,S(\smile AOA_1)} = \frac{S(\triangle AOA_1)}{S(\smile AOA_1)} = \frac{\sin x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin nx}{nx} < \frac{\sin x}{x}. \blacktriangleleft$$

Следствие 1. Если $n = 2, 3, \ldots$ и $0 < nx < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{1}{n} = \frac{x}{nx} < \frac{\sin x}{\sin nx}.$$

Следствие 2. Если $n = 2, 3, \ldots$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}.$$

Упражнение 3.7. Применить метод математической индукции для доказательства неравенства $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 3.8. Доказать неравенство $1 - |\cos x| \leqslant \sin^2 x$.

Упражнение 3.9. Доказать условное неравенство: если $0 < \alpha_1 < < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

▷ Доказательство. Если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \dfrac{\pi}{2}$, то выполнены неравенства

$$\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 < \ldots < \sin\alpha_n,$$
$$\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > \ldots > \cos\alpha_n,$$

позволяющие получить для числителя и знаменателя дроби оценки

$$n\sin\alpha_1 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n < n\sin\alpha_n,$$
$$n\cos\alpha_n < \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n < n\cos\alpha_1,$$

из которых по свойствам числовых неравенств находим

$$\frac{n\sin\alpha_1}{n\cos\alpha_1} < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \frac{n\sin\alpha_n}{n\cos\alpha_n}. \qquad ◀$$

3.4. ВЫВОД ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

1. Формулы сложения. На единичной окружности отметим точки $N(\alpha)$, $M(\beta)$, $P(\beta - \alpha)$. Точки N, M, P имеют следующие координаты: $N(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $M(\cos\beta, \sin\beta)$, $P(\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha - \beta))$ (рис. 3.8).

По свойству скалярного произведения выполнено равенство

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\alpha,$$

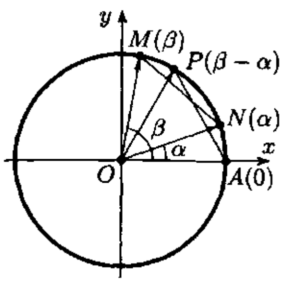


Рис. 3.8

откуда получаем формулу для *косинуса разности двух углов*

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \sin\alpha. \tag{3.2}$$

В формуле (3.2) положим $\alpha = -\gamma$ и получим формулу для *косинуса суммы двух углов*

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\gamma. \tag{3.3}$$

Воспользуемся формулой приведения и запишем равенство

$$\sin(\beta + \gamma) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \gamma\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \cos\gamma +$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \sin\gamma = \sin\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot \sin\gamma,$$

откуда получаем формулу для *синуса суммы двух углов*

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cdot\cos\gamma + \cos\beta\cdot\sin\gamma. \qquad (3.4)$$

Полагая в формуле (3.4) $\gamma = -\alpha$, получим формулу для *синуса разности двух углов*

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cdot\cos\alpha - \cos\beta\cdot\sin\alpha. \qquad (3.5)$$

Выведем формулу для *тангенса суммы двух углов*:

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\beta\cdot\sin\gamma}{\cos\beta\cdot\cos\gamma-\sin\beta\cdot\sin\gamma} = \\ = \frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma} = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)}.$$

Упражнение 3.10. 1) Вывести формулы для тангенса и котангенса разности двух углов.

2) Доказать условное равенство: если $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha = 1. \qquad (3.6)$$

▷ Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (3.6):

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha) = \\ = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\times \\ \times(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha) = 1.$$ ◀

Формулы кратных углов выводятся из формул сложения (3.3), (3.4):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad (3.7)$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha \neq 1; \qquad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},\ \operatorname{tg}^2\alpha\neq 1.$$

Упражнение 3.11. Доказать тождество

$$\frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Пример 3.1. Решить уравнение

$$\frac{3-4\cos 2x-8\sin^4 x}{\sin 2x+\cos 2x}=\frac{1}{\sin 2x}. \tag{3.8}$$

▷ Решение. Воспользуемся формулами кратных углов и выполним эквивалентные преобразования уравнения (3.8):

$$\frac{3-4\cos 2x-8\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2}{\sin 2x+\cos 2x}=\frac{1}{\sin 2x} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-2\cos^2 2x}{\sin 2x+\cos 2x}=\frac{1}{\sin 2x}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\sin^2 2x-\cos^2 2x}{\sin 2x+\cos 2x}=\frac{1}{\sin 2x}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(\sin 2x-\cos 2x)\sin 2x=1,\\ \sin 2x+\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos^2 2x+\cos 2x\cdot\sin 2x=0,\\ \sin 2x+\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos 2x\cdot(\cos 2x+\sin 2x)=0,\\ \sin 2x+\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \sin 2x+\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos 2x=0\quad\Leftrightarrow\quad x\in\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2. Тригонометрические формулы половинного аргумента. Формулы кратных углов (3.7), имеющие вид

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1,$$

при $x=2\alpha$ позволяют получить формулы

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}-1,$$

из которых выводятся формулы половинного аргумента:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1+\cos x},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Пример 3.1. Вычислить без таблиц выражение

$$\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

▷ Решение. Воспользуемся формулами приведения в третьем и четвертом слагаемых и получим

$$\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16} =$$

$$= \left(\sin^4\frac{\pi}{16} + 2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}\right) +$$

$$+ \left(\sin^4\frac{3\pi}{16} + 2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16}\right) -$$

$$- 2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{16} - 2\sin^2\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$ ◀

3. Универсальная тригонометрическая подстановка. Выведем формулы, выражающие тригонометрические функции

через тангенс половинного аргумента, известные также как «боевые формулы тригонометрии»:

$$\sin x = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}, \quad \cos\frac{x}{2}\neq 0;$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}, \quad \cos\frac{x}{2}\neq 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}, \quad \cos\frac{x}{2}\neq 0, \ \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\neq 1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2}\neq 0, \ \cos\frac{x}{2}\neq 0.$$

Пример 3.2. Привести уравнение

$$3\sin^2 x - \cos x + 2\sin x - 2\sin 2x - 1 = 0 \qquad (3.9)$$

к эквивалентной совокупности простейших тригонометрических уравнений.

▷ Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \cos\frac{x}{2}\neq 0.$$

Заметим, что если $\cos\dfrac{x}{2} = 0$, то $\sin\dfrac{x}{2} = \pm 1$, $\sin x = 0$, $\cos x = -1$, $\sin 2x = 0$.

При подстановке этих значений в уравнение (3.9) получаем верное равенство, так как $3\cdot 0 + 1 + 2\cdot 0 - 2\cdot 0 - 1 = 0$. Выполним преобразование уравнения (3.9) к эквивалентной совокупности условий:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t,\\[2mm] \dfrac{12t^2}{(1+t^2)^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{4t}{1+t^2}-\dfrac{8t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}-1=0,\\[2mm] \cos\dfrac{x}{2}\neq 0;\end{array}\right.\\[2mm] \cos\dfrac{x}{2}=0.\end{array}\right. \qquad (3.9_1)$$

Второе уравнение системы, входящей в совокупность (3.9_1), позволяет получить целое рациональное уравнение относительно t:

$$6t^3+5t^2-2t-1=0.$$

Домножим обе его части на 36, сделаем замену переменной $u=6t$ и получим уравнение со старшим коэффициентом, равным 1:

$$u^3+5u^2-12u-36=0. \qquad (3.9_2)$$

Разложим в произведение левую часть уравнения (3.9_2). Для этого представим $5u^2=3u^2+2u^2$ и $-12u=-18u+6u$, сгруппируем слагаемые и получим

$$(u^3+3u^2-18u)+(2u^2+6u-36)=$$
$$=u(u^2+3u-18)+2(u^2+3u-18)=(u+2)(u^2+3u-18).$$

Следовательно,

$$(3.9_2) \quad \Leftrightarrow \quad (u+2)(u^2+3u-18)=0,$$

откуда получим два других корня уравнения (3.9_2) — это $\{-6;3\}$. Таким образом, уравнение (3.9_2) имеет корни $\{-6;$ $-2;3\}$, и $t\in\left\{-1;-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$, а совокупность (3.9_1) эквивалентна совокупности простейших тригонометрических уравнений

$$\left[\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1, \\ &\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}, \\ &\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}, \\ &\cos\frac{x}{2} = 0. \end{aligned}\right.$$

В этом примере проиллюстрирована особенность метода универсальной тригонометрической подстановки, состоящая в возможности потери серии корней. ◀

Замечание. Тригонометрическое уравнение с помощью универсальной подстановки можно свести к рациональному алгебраическому уравнению. Но всегда ли удастся записать корни алгебраического уравнения, используя принятые обозначения? Поясним сказанное на примере решения простейшего тригонометрического уравнения

$$\sin 3x = \frac{1}{2}, \tag{3.10}$$

имеющего корни $\left\{\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \mid n, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Формулы кратного аргумента позволяют получить эквивалентное рациональное уравнение третьей степени

$$(3.10) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = \sin x, \\ 4t^3 - 3t + \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = \sin x, \\ u = 2t, \\ u^3 - 3u + 1 = 0. \end{cases} \tag{3.10_1}$$

Рациональные корни кубического уравнения в системе (3.10_1) со старшим коэффициентом, равным 1, если они существуют, суть целые числа, являющиеся делителями свободного члена, т. е. $\{-1; 1\}$, которые с очевидностью корнями не являются. Таким образом, это уравнение имеет иррациональные корни, записать которые можно с помощью формул корней кубического уравнения (п. 13.2), используя обратные тригонометрические функции.

В теории многочленов доказано, что корни общего рационального уравнения, имеющего степень выше четвертой, записать в алгебраической форме нельзя.

4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Запишем формулы для косинуса разности и косинуса суммы двух углов:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Сложим левые и правые части записанных равенств и получим формулу $2\cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, или

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

Разность нижнего и верхнего уравнений позволяет получить $2\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$, или

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Упражнение 3.12. 1) Вывести формулы

а) $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$,

б) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$, $\quad \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$.

2) Преобразовать в сумму тригонометрических функций выражение $\cos^2 x\cdot\cos 3x$.

Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\cos 3x + \frac{1}{4}\cdot(\cos 5x+\cos x)$.

5. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение. Вывод каждой из формул преобразований осуществляется единым образом. Для примера докажем разложение в произведение суммы

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$\triangleright$ Положим $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$, откуда $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, тогда $\sin\alpha+\sin\beta = \sin(x+y)+\sin(x-y) = 2\sin x\cdot\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. $\blacktriangleleft$

Упражнение 3.13. Вывести формулы

1) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

2) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

3) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$;

5) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$;

6) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, $\sin\alpha\neq 0$, $\sin\beta\neq 0$;

7) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, $\sin\alpha\neq 0$, $\sin\beta\neq 0$.

Пример 3.3. Доказать, что если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \qquad (3.11)$$

▷ Решение. Воспользуемся равенством $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, формулами приведения и выполним эквивалентные преобразования левой части равенства (3.11):

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\pi-(\alpha+\beta)) =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} =$$
$$= 4\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \quad ◀$$

Упражнение 3.14. Доказать, что если $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, то

1) $\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$; 2) $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} > \dfrac{\sin\beta}{\beta}$.

▷ Р е ш е н и е. 1) Выполним преобразования:

$$\sin\beta-\sin\alpha=-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}<2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}<2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}=\beta-\alpha.$$

Отсюда вытекает доказываемое неравенство.

2) Введем обозначение $\gamma=\beta-\alpha>0$ и выполним преобразования:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\frac{\sin\beta}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}\cdot(\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta)=\frac{1}{\alpha\beta}\cdot((\alpha+\gamma)\sin\alpha-\alpha\sin(\alpha+\gamma))=$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\cdot(\alpha\sin\alpha+\gamma\sin\alpha-\alpha\sin\alpha\cos\gamma-\alpha\cos\alpha\sin\gamma)=$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\left(\alpha\sin\alpha\cdot(1-\cos\gamma)+\alpha\gamma\cos\alpha\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}-\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)\right).$$

Ввиду неравенств $\dfrac{\sin\gamma}{\gamma}<1<\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\Leftrightarrow\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}-\dfrac{\sin\gamma}{\gamma}>0$; $\alpha\sin\alpha\times$ $\times\,(1-\cos\alpha)>0$, выполнено неравенство

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\frac{\sin\beta}{\beta}>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}.$$ ◀

Упражнение 3.15. Доказать, что если $0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\operatorname{tg}x}{x}<\frac{\operatorname{tg}y}{y}.$$

Дополнение. Аппроксимация действительных чисел

В тех задачах, в которых используются приближенные вычисления, по заданным действительному числу a и точности ε требуется найти промежуток, на котором лежит искомое приближение x числа a. Задача имеет бесконечно много решений, среди которых имеются рациональные и иррациональные числа.

Определение Д1. *Приближением* действительного числа a с точностью $\varepsilon > 0$ называется любое число x, удовлетворяющее условию

$$|x - a| \leqslant \varepsilon. \qquad (Д1)$$

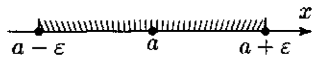


Рис. Д1

Число ε называется *абсолютной погрешностью* приближения числа a.

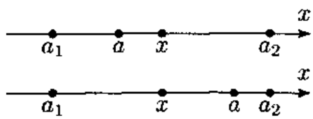


Рис. Д2

На рис. Д1 показан ε-промежуток точки a, обозначаемый

$$U_\varepsilon(a) = \{x \mid a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon\},$$

состоящий из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$.

Если удалось установить, что число a лежит в интервале (a_1, a_2), причем $a_2 - a_1 \leqslant 2\varepsilon$, то число $x = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, лежащее на середине этого интервала, есть одно из приближений числа a с точностью ε, поскольку $|x - a_1| \leqslant \varepsilon$ и $|x - a_2| \leqslant \varepsilon$ (рис. Д2).

Пример Д1. Вычислить число $a = \log_2 7$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}25$.

▷ Решение. 1. Поскольку $4 < 7 < 8$, то $2 < \log_2 7 < 3$; здесь $2\varepsilon = 3 - 2 = 1$, $\varepsilon = 0{,}5$. На середине интервала $(2;3)$ лежит число $x = \frac{5}{2}$.

2. Выясним, в каком из интервалов $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ или $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$ лежит число $\log_2 7$. Сравним числа $\log_2 7$ и $\frac{5}{2}$:

$$\log_2 7 \vee \frac{5}{2} \Leftrightarrow 7 \vee 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 49 \vee 32 \Rightarrow 49 > 32 \Rightarrow \log_2 7 > \frac{5}{2}.$$

Следовательно, $\frac{5}{2} < \log_2 7 < 3$. Теперь $2\varepsilon = 3 - \frac{5}{2} = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}25$. Число $x' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 3\right) = \frac{11}{4}$. ◀

Ответ: $\log_2 7$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}25$ равно $\frac{11}{4}$.

Пример Д2. Найти $\cos 10^\circ$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}15$.

▷ Решение. Поскольку $\cos 30^\circ < \cos 10^\circ < \cos 0^\circ$, то $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 10^\circ < 1$; здесь $2\varepsilon = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}3$, $\varepsilon < 0{,}15$. Число $x = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ — получили аппроксимацию действительного числа $\cos 10^\circ$ с помощью другого числа. ◀

Ответ: число $\cos 10^\circ$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}15$ равно $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Пример Д3. Найти $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}15$.

▷ Решение. Найдем $\sqrt{3}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}15$, а затем выполним вычисления.

1. Поскольку $1 < \sqrt{3} < 2$, то $2\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0{,}5 > 0{,}15$; число $x = \frac{3}{2}$.

2. Поскольку $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$, то $2\varepsilon = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}25 > 0{,}15$; здесь $x' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) = \frac{7}{4}$.

3. Ввиду неравенства $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$, $2\varepsilon = 0{,}25$, $\varepsilon = 0{,}125 < 0{,}15$; $x'' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{4}\right) = \frac{13}{8} = 1{,}625$. Число $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}15$ равно $\frac{2+1{,}625}{4} \approx 0{,}9063$. ◀

Ответ: число $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}15$ равно 0,9063.

Пример Д4. Найти $\sqrt{5}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}1$.

▷ Решение. 1. $2 < \sqrt{5} < 2{,}5 = \frac{5}{2}$, $2\varepsilon = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}25 > 0{,}1$; $x = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

2. Выясним, в каком из интервалов $\left(2; \frac{9}{4}\right)$ или $\left(\frac{9}{4}; \frac{5}{2}\right)$ лежит число $\sqrt{5}$. Сравним числа: $\sqrt{5} \vee \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5 \vee \frac{81}{16} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 80 \vee 81 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$, $2\varepsilon = 0{,}25$, $\varepsilon = 0{,}125 > 0{,}1$; число $x' = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{9}{4}\right) = \frac{17}{8}$.

3. Выясним, в каком из интервалов $\left(2; \frac{17}{8}\right)$ или $\left(\frac{17}{8}; \frac{9}{4}\right)$ лежит число $\sqrt{5}$. $\sqrt{5} \vee \frac{17}{8} \Leftrightarrow 8\sqrt{5} \vee 17 \Leftrightarrow 64 \cdot 5 \vee 289 \Rightarrow$ $\Rightarrow 320 > 289$. Итак, $\frac{17}{8} < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$, $2\varepsilon = 0{,}125$, $\varepsilon = 0{,}0625 < 0{,}1$. Число $x'' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{17}{8} + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{8} = \frac{35}{16} \approx 2{,}2$. ◀

Ответ: число $\sqrt{5}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}1$ равно 2,2.

Упражнение Д1. Вычислить число a с точностью ε:

1) $a = \sin 50°$, $\varepsilon = 0{,}1$; 2) $a = \log_2 3$, $\varepsilon = 0{,}5$;

3) $a = \sqrt[3]{5}$, $\varepsilon = 0{,}1$; 4) $a = \sqrt{11} + \sqrt{7}$, $\varepsilon = 0{,}1$.

Отметим универсальность метода аппроксимаций, применимого при доказательстве неравенств, а также при установлении взаимного расположения действительных чисел.

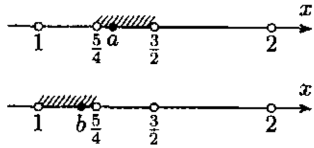


Рис. Д3

Упражнение Д2. Сравнить числа $a = \log_3 4$ и $b = \log_7 10$.

(Указание. Воспользуйтесь алгоритмом аппроксимации действительных чисел и получите для числа a приближение $\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$ а для числа b — приближение $\left(1; \frac{5}{4}\right)$, откуда $b < \frac{5}{4} < a$, см. рис. Д3.)

Упражнение Д3. Не пользуясь таблицами, сравнить числа

а) $\log_2 3$ и $\log_5 8$; б) $\frac{18}{37}$ и $\log_5 2$; в) $\log_3 7$ и $\log_7 27$;

г) $\log_5 14$ и $\log_7 18$; д) $\log_4 60$ и $\log_3 30$.

Д1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ РАЦИОНАЛЬНЫМИ

1. Целочисленные приближения действительных чисел. При округлении рационального числа путем замены его на ближайшее целое число, ошибка округления не превосходит $\frac{1}{2}$.

Например, при замене приближенными значениями чисел $3{,}78 \approx 4$; $8{,}501 \approx 9$; $2{,}2 \approx 2$ ошибка округления не превосходит $\frac{1}{2}$.

В том случае, когда иррациональное число заменяется ближайшим целым числом, ошибка округления строго меньше $\frac{1}{2}$.

Теорема Д1. Каждому иррациональному числу α соответствует единственное целое число p, такое, что $-\frac{1}{2} < \alpha - p < \frac{1}{2}$.

$\triangleright$ 1. Докажем существование числа p. Рассмотрим отрезок $\left[\alpha - \frac{1}{2}; \alpha + \frac{1}{2}\right]$. Концы отрезка отвечают иррациональным числам. Обозначим буквой p целое число, лежащее на $\left[\alpha - \frac{1}{2}; \alpha + \frac{1}{2}\right]$ (такое число p обязательно найдется, поскольку длина отрезка равна 1). Для него выполнены неравенства $\alpha - \frac{1}{2} < p < \alpha + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < p - \alpha < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \alpha - p < \frac{1}{2}$. Существование числа p доказано.

2. Докажем единственность числа p. Допустим, что существует целое число $q \neq p$, удовлетворяющее неравенству $-\frac{1}{2} < \alpha - q < \frac{1}{2}$. Тогда истинно неравенство $\alpha - \frac{1}{2} < q < \alpha + \frac{1}{2}$. Однако, отрезок $\left[\alpha - \frac{1}{2}; \alpha + \frac{1}{2}\right]$ содержит единственное целое число и поэтому $q = p$. Теорема доказана. ◀

2. Рациональные приближения иррациональных чисел.

Теорема Д2. Пусть α — произвольное иррациональное число и q — любое натуральное число. Тогда существует такое рациональное число $\frac{p}{q}$, что

$$-\frac{1}{2q} < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{2q}.$$

▷ Доказательство. По теореме 1.6, число $q\alpha$ — иррациональное. Определим число p как ближайшее к $q\alpha$ целое число. По теореме Д1 имеем неравенства: $-\frac{1}{2} < q\alpha - p < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2q} < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{2q}$. Теорема доказана. ◀

Пример Д5. Пусть $\alpha = \sqrt{2}$, $q = 23$. Из равенства $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ найдем приближенное значение числа $23 \cdot \sqrt{2} = 32{,}52\ldots$ Ближайшее целое число к $23 \cdot \sqrt{2}$ есть 33, которое равно числу p теоремы Д2, утверждающей, что

$$-\frac{1}{2} < 23 \cdot \sqrt{2} - 33 < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{46} < \sqrt{2} - \frac{33}{23} < \frac{1}{46}.$$

Пример Д6. Найти рациональные приближения числа $\alpha = \sqrt{2}$ для $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Таблица Д1

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q\alpha$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$
p	1	3	4	6	7	8	10	11	13	14
$\frac{p}{q}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{14}{10}$
$\frac{1}{2q}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{20}$

▷ Результаты вычислений представлены в табл. Д1. Ошибка каждого из рациональных приближений $\frac{p}{q}$ меньше $\frac{1}{2q}$. ◀

Упражнение Д4. 1) Найти рациональные приближения $\sqrt{3}$ для $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

2) Найти рациональные приближения числа $\pi = 3{,}141592\ldots$ для $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Д2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ЧИСЛОВОЙ ОКРУЖНОСТИ

Для исследования расположения изображающей точки P_t на координатной окружности используются приближенные значения числа π. С точностью до первых 20 знаков после запятой, это число равно 3,141 592 653 589 793 238 46.

Пусть π_n — приближенное значение числа π с недостатком, а π'_n — с избытком с точностью до n знаков после запятой: $\pi_n < \pi < \pi'_n$.

Задача. В какой четверти коодинатной окружности располагается изображающая точка P_N, отвечающая числу N?

▷ Решение. Найдем такое целое число k, чтобы данное число N удовлетворяло неравенствам

$$\frac{\pi k}{2} < \frac{\pi'_n k}{2} \leqslant N < \frac{\pi_n(k+1)}{2} < \frac{\pi(k+1)}{2}. \qquad (Д2)$$

При этом максимальное значение разности между верхней и нижней оценками числа N не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Поскольку четыре четверти составляют полный угол, то номер четверти, в которой расположена точка P_N, и число $k+1$ дают одинаковые остатки при делении на 4.

Замечание. В рассмотренных ниже примерах порядок приближения n числа π с самого начала не фиксировался, но изменялся от столбца к столбцу таблицы по ходу решения, пока соответствующие n числа

$$k = \left[\frac{2N}{\pi'_n}\right] \quad \text{и} \quad k' = \left[\frac{2N}{\pi_n}\right] + 1$$

не переставали изменяться с увеличением n, а разность $k' - k$ не становилась равна 1. Именно эти окончательные значения k и $k+1 = k'$ — суть решения внешних неравенств (Д2).

Таблица Д2

n	0	1	2
π_n	3	3,1	3,14
π'_n	4	3,2	3,15
$\frac{2N}{\pi'_n}$	5	6,3	6,35
$\frac{2N}{\pi_n}$	6,7	6,5	6,37
$k = \left[\frac{2N}{\pi'_n}\right]$	5	$\underline{6}$	$\underline{6}$
$k' = \left[\frac{2N}{\pi_n}\right] + 1$	7	$\underline{7}$	$\underline{7}$

Пример Д7. Решить задачу в случае $N = 10$.

▷ Решение. Составим табл. Д2. При $n \geqslant 1$ получаем неизменные значения $k = 6$, $k + 1 = 7$. Остаток от деления 7 на 4 равен 3, так как $7 = 1 \cdot 4 + 3$. Следовательно, точка P_{10} лежит в III четверти. Запишем условие (Д2) при $n = 1$ и $n = 2$:

$$n = 1: \quad \frac{3{,}2 \cdot 6}{2} < 10 < \frac{3{,}1 \cdot 7}{2}, \quad \text{или} \quad 9{,}6 < 10 < 10{,}9; \quad \Delta = 1{,}3;$$

$$n = 2: \quad \frac{3{,}15 \cdot 6}{2} < 10 < \frac{3{,}14 \cdot 7}{2}, \quad \text{или} \quad 9{,}45 < 10 < 10{,}99; \quad \Delta = 1{,}54;$$

Пример Д8. Решить задачу в случае $N = 900$.

▷ Решение. Составим табл. Д3. При $n \geqslant 4$ получаем неизменные значения $k = 572$, $k + 1 = 573$. Остаток от деления 573 на 4 равен 1, так как $573 = 143 \cdot 4 + 1$. Следовательно, точка P_{900}

Таблица Д3

n	0	1	2	3	4	5
π_n	3	3,1	3,14	3,141	3,1415	3,14159
π'_n	4	3,2	3,15	3,142	3,1416	3,14160
$\dfrac{2N}{\pi'_n}$	450	562,5	571,4	572,88	572,96	572,956
$\dfrac{2N}{\pi_n}$	600	580,6	573,2	573,07	572,97	572,958
$k=\left[\dfrac{2N}{\pi'_n}\right]$	450	562	571	572	$\underline{572}$	$\underline{572}$
$k'=\left[\dfrac{2N}{\pi_n}\right]+1$	601	581	574	574	$\underline{573}$	$\underline{573}$

лежит в I четверти. Проверим условие (Д2) при $n = 4$ и $n = 5$:

$$n = 4: \quad \frac{3{,}1416 \cdot 572}{2} < 900 < \frac{3{,}1415 \cdot 573}{2},$$

$$\text{или } 898{,}5 < 900 < 900{,}04; \quad \Delta = 1{,}54;$$

$$n = 5: \quad \frac{3{,}14160 \cdot 572}{2} < 900 < \frac{3{,}14159 \cdot 573}{2},$$

$$\text{или } 898{,}5 < 900 < 900{,}07; \quad \Delta = 1{,}57. \blacktriangleleft$$

ГЛАВА 4

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

(РАСШИРЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ)

1. Комплексные числа появились в математике в середине 16 в. в связи с решением алгебраических уравнений третьей степени.

Рассмотрим вывод формулы для корней кубического уравнения

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{4.1}$$

Заменой $x = \xi - \dfrac{1}{3} \cdot a_2$ преобразуем его к *неполному кубическому уравнению* относительно неизвестной ξ, имеющему вид

$$\xi^3 + p\xi + q = 0. \tag{4.1$_1$}$$

Введем неизвестные α и β, такие, что $\xi = \alpha + \beta$, подставим это выражение в уравнение (4.1$_1$) и получим соотношение

$$\alpha^3 + \beta^3 + (\alpha + \beta)(3\alpha\beta + p) + q = 0, \tag{4.1$_2$}$$

из которого вытекает система уравнений для определения новых неизвестных α и β

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ \alpha^3\beta^3 = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3. \end{cases} \tag{4.1$_3$}$$

Для решения системы (4.1$_3$) воспользуемся теоремой Виета для корней *приведенного квадратного уравнения*, а именно: числа α^3 и β^3 суть корни приведенного квадратного уравнения

$$\eta^2 + q\eta - \frac{p^3}{27} = 0, \tag{4.1$_4$}$$

$$\alpha^3 = \eta_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{Q}, \quad \beta^3 = \eta_2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{Q},$$

где $Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Обратно, корни уравнения (4.1_4) удовлетворяют системе (4.1_3). При этом сумма $\alpha+\beta$ есть решение уравнения (4.1_1):

$$\xi = \alpha+\beta = \sqrt[3]{\eta_1} + \sqrt[3]{\eta_2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}. \quad (4.1_5)$$

Выведенная формула называется ***формулой Кардано*** для корней кубического уравнения (4.1_1). В том случае, когда $p < 0$ и $\left|\frac{p^3}{27}\right| > \frac{q^2}{4}$, выполнено неравенство $Q < 0$, и квадратный корень в формуле Кардано — неопределенная величина. Так, для уравнения $x^3 - 15x - 4 = 0$ ($p = -15$, $q = -4$), имеющего корень $\{4\}$, значение $Q = -121$, $\alpha^3 = 2 - \sqrt{-121}$, $\beta^3 = 2 + \sqrt{-121}$. В этом случае невозможно выразить корни через одни только действительные радикалы, поэтому он получил название *неприводимого.*

По формуле Кардано должно выполняться равенство

$$4 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}},$$

в котором положительное число 4 представлено в виде выражения, содержащего квадратные корни из отрицательного числа.

В 1545 г. была издана книга под названием «Великое искусство, или об алгебраических преобразованиях», в которой Дж. Кардано (1501—1576) опубликовал формулу для корней кубического уравнения, открытую его современниками С. дель Ферро (1465—1526) и Н. Тартальей (1500—1557). Обнаружилось, что в случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано появляются квадратные корни из отрицательного числа. Этот случай получил название *неприводимого* (т. е. решение уравнения третьей степени не приводится к решению квадратного уравнения). Квадратные корни из отрицательного числа назвали ***мнимыми числами.*** В «Алгебре» итальянского математика Р. Бомбелли в 1579 г. было показано, что вычисление выражений, содержащих квадратные корни из отрицательных чисел, по определенным правилам позволяет получать достоверные результаты. Мнимые числа стали широко использовать при решении уравнений.

На рубеже 18 и 19 вв. К. Ф. Гаусс исследовал мнимые числа. Назвав их *комплексными числами*, он дал им геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный (1799).

2. Покажем, каким образом можно расширить множество действительных чисел $\mathbb{R}$ до такого множества, в котором любое алгебраическое уравнение n-й степени обладало бы корнем.

Определение 4.1. Множество всех упорядоченных пар действительных чисел $(x; y)$, в котором равенство двух любых пар $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ выполнено тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$; операции сложения и умножения определяются равенствами

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2),$$
$$(x_1; y_1)(x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2; y_1x_2 + x_1y_2),$$

называется *множеством комплексных чисел* $\mathbb{C}$, а каждый элемент этого множества называется *комплексным числом* $z = (x; y)$.

Между комплексными числами вида $(x; 0)$ и множеством действительных чисел $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ имеется взаимно однозначное соответствие, а именно: двум различным комплексным числам $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ ставятся в соответствие два различных действительных числа x_1, x_2. Сумме комплексных чисел $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ соответствует сумма действительных чисел x_1, x_2, и обратно. Произведению комплексных чисел — произведение действительных чисел, и обратно. Поэтому говорят, что множество комплексных чисел вида $(x; 0)$ изоморфно множеству $\mathbb{R}$.

Сформулированные свойства суммы и произведения позволяют однозначно определить разность и частное комплексных чисел.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, для которого выполнено равенство $z + z_1 = z_2$. Это единственное число z имеет вид $z = (-z_1) + z_2 = z_2 + (-z_1) = z_2 - z_1 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Частным комплексных чисел z_1 и z_2, $z_2 \neq 0$, называется комплексное число z, для которого выполнено равенство $z \cdot z_2 = z_1$. Это единственное число z имеет вид $z = z_2^{-1} \cdot z_1 = z_1 \cdot z_2^{-1} = \dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$.

Комплексные числа $z = (x; y)$ и $\overline{z} = (x; -y)$ называются *комплексно сопряженными*. Сумма $z + \overline{z} = (2x; 0)$, разность $z - \overline{z} = (0; 2y)$.

Произведение $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = (x^2 + y^2; 0)$, или $|z|^2 = x^2 + y^2$, откуда $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Неотрицательное действительное число $|z|$ называется *модулем* комплексного числа; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Алгебраической формой комплексного числа называется запись вида

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = (x; 0) + (y; 0) \cdot (0; 1) = x + iy,$$
$$\overline{z} = (x; -y) = x - iy,$$
$$i = (0; 1), \quad i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0) = -1.$$

Число $x = \operatorname{Re} z$ называется *действительной частью* комплексного числа z, а число $y = \operatorname{Im} z$ — его *мнимой частью*. Действия с комплексными числами, записанными в алгебраической форме, имеют вид:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2).$$

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел совершается по обычным правилам алгебры, а выражение i^2 заменяется на (-1).

Свойства комплексных чисел.

I. Свойства суммы.

1. *Коммутативность*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2. *Ассоциативность*: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3. Имеется нулевой элемент 0=(0;0), такой, что $z + 0 = z$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

4. Каждое комплексное число $z = (x; y)$ имеет один противоположный элемент $(-z) = (-x; -y)$, такой, что $z + (-z) = 0$.

II. Свойства произведения.

5. *Коммутативность*: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

6. *Ассоциативность*: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

7. Имеется единица $1 = (1; 0)$:

$$\exists! 1 \mid 1 \in \mathbb{C},\ 1 \neq 0,\quad z \cdot 1 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

8. Каждое комплексное число $z \neq 0$ имеет единственный обратный элемент $z^{-1} = \left(\frac{x}{|z|^2}, -\frac{y}{|z|^2}\right)$ такой, что $z \cdot z^{-1} = 1$.

9. Имеется мнимая единица $i = (0; 1)$, обладающая свойством $i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0) = -1$.

III. Свойство дистрибутивности.

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Упражнение 4.1. Используя алгебраическую форму комплексного числа, доказать утверждения о комплексно сопряженных числах:

1) $z = \overline{(\overline{z})}$, $|z| = |\overline{z}|$; 2) $b = \overline{b} \Leftrightarrow b \in \mathbb{R}$; 3) $\overline{ib} = -ib \Leftrightarrow b \in \mathbb{R}$;

4) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; 5) $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; 6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Из определения модуля комплексного числа вытекают равенства

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} = (z \cdot w) \cdot (\overline{z} \cdot \overline{w}) = (z \cdot \overline{z}) \cdot (w \cdot \overline{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2,$$

из которых следует формула $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

При $z \neq 0$ имеем равенство $|z| \cdot |z^{-1}| = |z \cdot z^{-1}| = 1$, следовательно, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

4.1. ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

На декартовой координатной плоскости Oxy отметим точку $z(x; y)$ с координатами $(x; y)$, радиус-вектор которой — также z. При этом на ось абсцисс попадают действительные части, а на ось ординат — мнимые части комплексного числа z. Нуль располагается в начале координат (рис. 4.1). Произведение двух комплексных чисел

$$(\lambda; 0) \cdot (x; y) = \lambda \cdot (x; y) = (\lambda x; \lambda y).$$

По свойству суммы, комплексные числа складываются между собой и умножаются на пары вида $(\lambda; 0) = \lambda$ как векторы. Векторная интерпретация суммы и разности комплексных чисел показана на рис. 4.1, *а*, *б*.

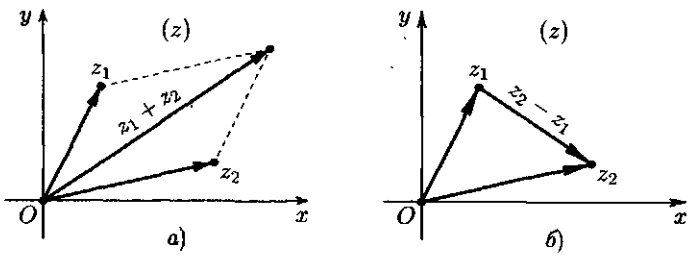


Рис. 4.1

Геометрический смысл суммы комплексных чисел — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$. Длина вектора $z_1 + z_2$ есть $|z_1 + z_2|$.

1. Докажем *неравенство треугольника*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

▷ По свойству модуля, выполнено равенство

$$|z_1 + 1|^2 = (z_1 + 1) \cdot (\overline{z_1} + 1) = |z_1|^2 + z_1 + \overline{z_1} + 1.$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, то $z_1 + \overline{z_1} = 2x_1 \leqslant 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2|z_1|$ и $|z_1 + 1|^2 \leqslant (|z_1| + 1)^2$, или $|z_1 + 1| \leqslant |z_1| + 1$. Рассмотрим модуль суммы (считая $z_2 \neq 0$):

$$|z_1 + z_2| = \left|z_2 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} + 1\right)\right| = |z_2| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2} + 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant |z_2| \cdot \left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + 1\right) = |z_1| + |z_2|.$$

Следовательно, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Заметим, что равенство достигается только в том случае, когда точки z_1, z_2 и 0 лежат на одной прямой. ◀

Следствие. Так как $z_1 = -z_2 + (z_1 + z_2)$ и $|z_2| = |-z_2|$, то в силу неравенства треугольника имеем следующие неравенства:

$$|z_1| \leqslant |-z_2| + |z_1 + z_2| = |z_2| + |z_1 + z_2| \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad |z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|.$$

2. *Тригонометрической формой* комплексного числа $z \neq 0$ называется формула вида $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол φ, определяемый равенствами $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}$, или $x = |z| \cdot \cos\varphi$, $y = |z| \cdot \sin\varphi$ (рис. 4.2).

Все возможные значения аргумента даются формулой $\overline{\varphi} = \varphi + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Любые два значения аргумента комплексного числа $z \neq 0$ отличаются на целое кратное 2π. При этом частное $\dfrac{\overline{\varphi} - \varphi}{2\pi}$ есть целое число. В том случае, когда необходимо получить однозначно определенное значение аргумента, берут его *главное значение*, лежащее между числами $-\pi$ и π, которое обозначают $\arg(z)$, или $\arg z$ (где $-\pi < \arg z \leqslant \pi$).

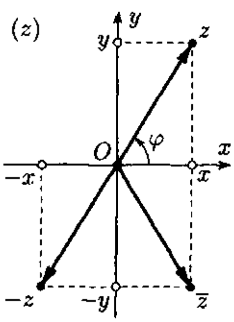


Рис. 4.2

Для вычисления $\arg z$ используются соотношения

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad \text{при } x > 0,$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi \quad \text{при } x < 0 \text{ и } y \geqslant 0,$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi \quad \text{при } x < 0 \text{ и } y < 0.$$

Если действительное число $x > 0$, то $\arg x = 0$, а если $x < 0$, то $\arg x = \pi$.

Если число $y > 0$, то $\arg(iy) = \dfrac{\pi}{2}$, а если $y < 0$, то $\arg(iy) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Аргумент комплексного числа 0 не определен. Приведем примеры:

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0), \quad -1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi);$$

$$i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right), \quad -i = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right);$$

$$\overline{z} = |z| \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = |z| \cdot (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

— аргументы комплексно сопряженных чисел отличаются знаком.

Формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеют вид

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \\ = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2}.$$

После упрощений получаем формулу

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

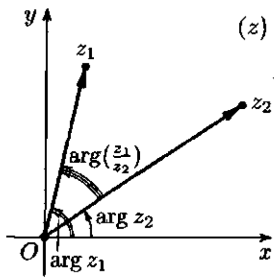


Рис. 4.3

Из равенства $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ следует, что угол между векторами z_1, z_2, отсчитываемый от z_2 к z_1 против часовой стрелки, равен $\arg \frac{z_1}{z_2}$ (рис. 4.3).

4.2. ФОРМУЛА МУАВРА

Из формул умножения и деления можно вывести общую формулу возведения комплексных чисел в целую степень, называемую *формулой Муавра.*

Положим по определению $z^0 = 1$, $z \neq 0$. Имеем:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \\ z \neq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Полагая $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, выведем формулу Муавра для целого числа $m = -n < 0$ $(n \in \mathbb{N})$, а именно:

$$z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} =$$
$$= \left(\frac{1}{|z|}\right)^n \cdot \frac{\cos n\varphi - i \sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = |z|^{-n} \cdot (\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)) =$$
$$= z^m = |z|^m \cdot (\cos m\varphi + i \sin m\varphi), \quad z \neq 0.$$

Отсюда следует истинность формулы Муавра

$$z^m = |z|^m \cdot (\cos m\varphi + i \sin m\varphi), \quad m \in \mathbb{Z},\ z \neq 0.$$

Упражнение 4.2. 1) Доказать формулу

$$\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n = \frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha}.$$

2) Пользуясь формулой Муавра, выразить через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ тригонометрические функции кратных углов

а) $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$; б) $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$; в) $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$.

4.3. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение 4.2. *Квадратным корнем* $\sqrt{z}$ *из комплексного числа* z называется такое комплексное число w, что $w^2 = z$.

Введем обозначения $z = x + iy$, $\sqrt{z} = w = u + iv$, где x, y, u, v — действительные числа. Выразим неизвестные u, v через x, y. Используя определение квадратного корня из комплексного числа, выведем эквивалентную систему уравнений

$$w^2 = z \;\Leftrightarrow\; (u + iv)^2 = x + iy \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u^2 - v^2 = x, \\ 2uv = y. \end{cases}$$

Из эквивалентной системы получим уравнение-следствие

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (u^2 + v^2)^2 = |z|^2 \;\Leftrightarrow\; |w|^4 = |z|^2,$$

или $|w|^2 = |z|$. Решения системы уравнений

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = |z|, \\ u^2 - v^2 = x \end{cases}$$

выражаются формулами

$$u^2 = \frac{1}{2} \cdot (|z| + x) \geqslant 0, \quad v^2 = \frac{1}{2} \cdot (|z| - x) \geqslant 0,$$

из которых следует, что

$$u = \sigma_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|z| + x)}, \quad v = \sigma_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|z| - x)},$$

где рассматриваются арифметические корни, а множители σ_1, σ_2 принимают значения ± 1. Комбинируя два возможных значения u с двумя возможными значениями v, можно получить четыре упорядоченные пары действительных чисел (u, v). Проверим, какие из этих пар удовлетворяют эквивалентной системе уравнений.

Уравнение $u^2 - v^2 = x$ выполнено при любом выборе знаков σ_1, σ_2. Уравнение $2uv = y$ эквивалентной системы запишем в виде

$$2uv = y \ \Leftrightarrow\ 2\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (|z|^2 - x^2)} = y \ \Leftrightarrow\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{y^2} = y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot |y| = \operatorname{sign} y \cdot |y| \ \Leftrightarrow\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \operatorname{sign} y \ \Leftrightarrow\ \sigma_2 = \sigma_1 \cdot \operatorname{sign} y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1, & \text{если } y > 0, \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 = -1, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Это позволяет получить формулу для квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме:

$$\sqrt{x + iy} = \sigma_1 \cdot (u + i \cdot \operatorname{sign} y \cdot v) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{x + iy} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|z| + x)} + i \cdot \operatorname{sign} y \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|z| - x)} \right).$$

В частности, если $y > 0$, то

$$\sqrt{x + iy} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|z| + x)} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|z| - x)} \right),$$

а если $y < 0$, то

$$\sqrt{x+iy} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(|z|+x)} - i\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(|z|-x)}\right),$$

Пример 4.1. $\sqrt{3-4i} =$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{9+16}+3)} - i\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{9+16}-3)}\right) =$$

$$= \pm(\sqrt{4} - i\sqrt{1}) = \pm(2-i).$$

Проверка: $(\pm(2-i))^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$.

Пример 4.2. $\sqrt{i} =$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{0+1}+0)} + i\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{0+1}-0)}\right) = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Проверка: $\left(\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot(1+2i-i) = \frac{2i}{2} = i$.

4.4. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Теорема 4.1. Уравнение $z^n = w$, $w \neq 0$, $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет ровно n различных комплексных корней.

$\triangleright$ Доказательство. Пусть $w = |w|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$, число z будем искать в виде

$$z = |z|\cdot(\cos\zeta + i\sin\zeta).$$

Преобразуем уравнение $z^n = w$, используя формулу Муавра:

$$|z|^n\cdot(\cos n\zeta + i\sin n\zeta) = |w|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Отсюда вытекают равенства

$$|z|^n = |w|, \qquad n\zeta = \theta + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

из которых для модуля искомого корня получается определенное значение $|z| = \sqrt[n]{|w|}$, тогда как его аргумент $\zeta = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ может принимать различные значения при разных k. При этом значениям $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ соответствуют различные значения корня, а при $k = n$ значение корня совпадает с его значением при $k = 0$. При $k = n + 1$ получим то же значение корня, что и при $k = 1$, и т. д. Значения ζ_1 и ζ_2, соответствующие разным значениям k_1 и k_2, отличаются друг от друга на кратное 2π только тогда, когда разность $\zeta_1 - \zeta_2$ кратна 2π. Другими словами,

$$\frac{\theta + 2k_1\pi}{n} - \frac{\theta + 2k_2\pi}{n} = \frac{2\pi(k_1 - k_2)}{n} = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, число различных значений корня равно n — это

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Все n корней z_k лежат на окружности радиусом $\sqrt[n]{|w|}$ с центром в начале координат; они делят окружность на n дуг величиной $\frac{2\pi}{n}$ каждая и суть вершины вписанного в нее правильного n-угольника. ◀

Пример 4.3. Вычислить корень n-й степени из действительного числа x.

▷ Решение. Если x — положительное действительное число, то $|x| = x$, $\theta = 0$. Формула корней в этом случае дает

$$z_k = \sqrt[n]{x} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. При $k = 0$ получим $z_0 = \sqrt[n]{x}$ — это арифметический корень. При четном $n = 2\nu$ и $k = \nu$ $(\nu \in \mathbb{N})$ имеется еще один действительный корень (с $\theta = \pi$)

$$z_\nu = \sqrt[n]{x} \cdot \left(\cos\frac{2\nu\pi}{2\nu} + i \sin\frac{2\nu\pi}{2\nu}\right) = -\sqrt[n]{x}.$$ ◀

Пример 4.4. Вычислить корни из комплексного числа $\sqrt[3]{2 + 2i}$.

▷ Решение. Найдем тригонометрическую форму числа

$$2 + 2i = \sqrt{8} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

По формуле для корней из комплексного числа имеем:

$$\sqrt[3]{3+2i} = (\sqrt{8})^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \right) \right),$$

где k пробегает значения 0, 1, 2. Запишем полученные корни:

$$\alpha_0 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\alpha_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12} \right).$$

Используя формулы для косинуса и синуса разности углов, получаем:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

◀

Ответ: $\left\{ \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -1+i, -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\}$.

Пример 4.5. Вычислить сумму p-х степеней корней n-й степени из 1.

▷ Решение. Имеем:

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n};$$

$$\varepsilon_k^p = \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)^p.$$

i) Рассмотрим случай, когда $\frac{p}{n}$ — не целое число. По формуле для суммы n первых членов геометрической прогрессии получим:

$$S_p = \sum_{k=0}^{k=n-1} \varepsilon_k^p = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)^p =$$

$$= 1 \cdot \frac{\cos\dfrac{2\pi pn}{n} - 1 + i\sin\dfrac{2\pi pn}{n}}{\cos\dfrac{2\pi p}{n} - 1 + i\sin\dfrac{2\pi p}{n}} = \frac{\cos(2\pi p) - 1 + i\sin(2\pi p)}{\cos\dfrac{2\pi p}{n} - 1 + i\sin\dfrac{2\pi p}{n}}.$$

Поскольку $\dfrac{p}{n}$ не равно никакому целому числу l, то $\dfrac{2\pi p}{n} \neq$ $\neq 2\pi l$, и знаменатель полученной дроби не равен 0, тогда как ее числитель есть 0 при всех целых p. Таким образом, $S_p = 0$.

ii) В том случае, когда $\dfrac{p}{n} = l_p$ — целое число, числитель и знаменатель дроби суть нули. Формула для суммирования геометрической прогрессии неприменима. Замечая, что каждое слагаемое суммы

$$S_p = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\cos\frac{2\pi pk}{n} + i\sin\frac{2\pi pk}{n}\right)$$

равно 1, найдем $S_p = n$. ◀

О т в е т: $S_p=0$, когда p не кратно n; $S_p=n$, когда p кратно n.

З а м е ч а н и е. Все значения корня n-й степени из комплексного числа z можно получить умножением о д н о г о и з з н а ч е н и й корня на все корни n-й степени из 1. Например, $z_k = z_0 \cdot \varepsilon_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

В частности, $\sqrt[3]{1}$ принимает значения

$$\left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},$$

или $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\sqrt[3]{-8}$ принимает значения $\{-2; -2\varepsilon_1; -2\varepsilon_2\} = \{-2; 1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\}$.

П р и м е р 4.6. Доказать, что комплексное число $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ чисто мнимое тогда и только тогда, когда $|z| = 1$ $(z \neq -1)$.

$\triangleright$ 1. Докажем достаточность: если $|z| = 1$, то число $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ чисто мнимое.

В самом деле, если $|z| = 1$, то $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Вычисляя $w = \dfrac{z-1}{z+1}$, получим:

$$w = \frac{\cos\alpha - 1 + i\sin\alpha}{\cos\alpha + 1 + i\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha - 1 + i\sin\alpha}{\cos\alpha + 1 + i\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha + 1 - i\sin\alpha}{\cos\alpha + 1 - i\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - (1 - i\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha + 1)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - (1 - 2i\sin\alpha - \sin^2\alpha)}{(\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1) + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{2i\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = i\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

2. Докажем необходимость: если $w = \dfrac{z-1}{z+1} = it$ $(t \neq 0,\ t \in \mathbb{R},\ z \neq -1)$, то $|z| = 1$.

Запишем эквивалентные преобразования формулы на множестве $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{z-1}{z+1} = it \ \Leftrightarrow\ x - 1 + iy = it(x + 1 + iy) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x - 1 = -ty, \\ y = t(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ t(x^2 - 1) = -ty^2 \ \Leftrightarrow\ t(x^2 + y^2) = t \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 = |z|^2 = 1.$$

Утверждение доказано полностью. ◀

В последующих главах мы еще вернемся к комплексным числам в связи с решением уравнений, а также приложениями к теории пределов.

4.5. СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНУЮ ПЛОСКОСТЬ

1. Рассмотрим сферу $S_{\frac{1}{2}}$ единичного диаметра, касающуюся плоскости (z) в начале координат S, центр сферы располагается выше плоскости (z) (рис. 4.4). Плоскость σ, проходящая через центр сферы параллельно (z), называется *экваториаль-*

ной плоскостью. Экваториальная плоскость пересекает сферу по окружности L, называемой *экватором*.

Точка N, лежащая на диаметре сферы, проходящем через точку S перпендикулярно плоскости (z), соответствует *северному полюсу*, а точка S — *южному полюсу* сферы.

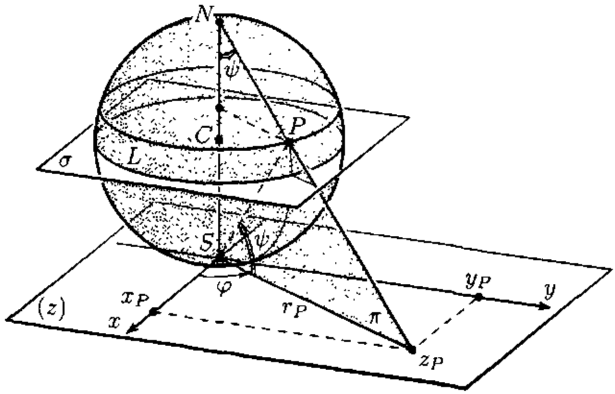


Рис. 4.4

Введем систему координат на сфере $S_{\frac{1}{2}}$, а именно: на рис. 4.4 точке P на сфере соответствует *долгота* φ, где $0 \leqslant \leqslant \varphi < 2\pi$, отсчитываемая от оси абсцисс против часовой стрелки, и *широта* ψ, где $0 \leqslant \psi < \dfrac{\pi}{2}$, отсчитываемая от плоскости (z) против часовой стрелки.

2. Будем соединять точку N с различными точками z_P плоскости (z) прямолинейными лучами $l_P = [NP)$, пересекающими сферу в точке P.

В результате будет установлено взаимно однозначное соответствие $F\colon P \leftrightarrow z_P$ между точками сферы и точками плоскости. Каждая точка сферы, за исключением точки N, будет иметь образ на плоскости (z).

Проекция сферы с центром в точке N на плоскость (z) называется *стереографической проекцией*. Сфера $S_{\frac{1}{2}}$ называется *сферой Римана*.

3. Выберем последовательность точек $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (z)$, таких, что $|z_n| = r_n$, причем $r_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Тогда точки P_n,

изображающие на сфере точки z_n, приближаются к северному полюсу N, так как при $n \to \infty$ угол $\psi_n = \operatorname{arctg} r_n \to \frac{\pi}{2}$. Обратно, если при любом фиксированном значении φ номер $n \to \infty$, и бесконечная последовательность $\psi_n \to \frac{\pi}{2}$, то $r_n = \operatorname{tg} \psi_n \to +\infty$, а тогда и $z_n \to \infty$ (рис. 4.5). Точка N рассматривается как изображение на сфере *бесконечно удаленной точки*, называемой *несобственной точкой* комплексной плоскости.

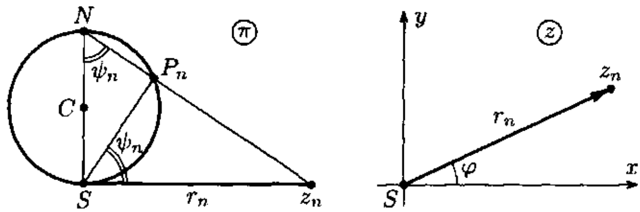


Рис. 4.5

4. Комплексная плоскость (z), к которой мысленно присоединяют единственную бесконечно удаленную точку, называется *расширенной комплексной плоскостью*, или просто *расширенной плоскостью*.

Геометрическим образом расширенной комплексной плоскости является вся сфера, и обратно.

Комплексная плоскость (z), образованная лишь *собственными*, или конечными точками z, называется *конечной комплексной плоскостью*.

Конечную комплексную плоскость можно представить, как сферу, из которой исключена точка N.

Стереографическая проекция обладает замечательными свойствами.

1) При стереографической проекции всякая окружность сферы переходит в окружность комплексной плоскости, и обратно (прямая на плоскости (z) считается окружностью бесконечного радиуса).

2) Если две кривые на сфере $S_{\frac{1}{2}}$ пересекаются в точке M, а касательные к этим кривым в точке M образуют угол α, то

и угол между касательными к стереографическим проекциям этих кривых в точке их пересечения M' тоже равен α. Другими словами, при стереографической проекции величины углов сохраняются.

4.6. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Теорема 4.2. Если $c = a + ib \in \mathbb{C}$ — комплексное число, а α, $\beta \in \mathbb{R}$ — действительные числа, удовлетворяющие неравенству $|c|^2 - \alpha\beta > 0$, то уравнение

$$\alpha \cdot z \cdot \overline{z} + (\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z}) + \beta = 0 \tag{4.2}$$

при $\alpha \neq 0$ определяет окружность на плоскости $\mathbb{C}$, а при $\alpha = 0$ — прямую.

$\triangleright$ Доказательство. 1. Воспользуемся свойствами комплексных чисел и запишем равенства

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2,$$

$$\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z} = (a - ib) \cdot (x + iy) + (a + ib) \cdot (x - iy) = 2 \cdot (ax + by),$$

из которых следует, что уравнение (4.2) при $\alpha \neq 0$ принимает вид

$$\alpha \cdot (x^2 + y^2) + 2 \cdot (ax + by) + \beta = 0. \tag{4.2$_1$}$$

При этом уравн ние (4.2$_1$) с учетом дополнительного условия $\alpha \neq 0$ позволяет получить уравнение окружности

$$\left(x + \frac{a}{\alpha}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{\alpha}\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2) - \alpha\beta}{\alpha^2} > 0,$$

которое можно преобразовать к виду

$$|z - z_0|^2 = r^2, \quad \text{где } z_0 = -\frac{a}{\alpha} - i\frac{b}{\alpha},\ r = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2) - \alpha\beta}{\alpha^2}}.$$

2. Если $\alpha = 0$, то из равенства (4.2$_1$) получим уравнение прямой в виде

$$2(ax + by) + \beta = 0. \qquad \blacktriangleleft$$

4.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНВЕРСИИ

Каждой точке $P(\varphi;\psi)$, лежащей в северном полушарии (т. е. выше плоскости экватора), поставим в соответствие точку $P'(\varphi;\psi')$, симметричную P относительно плоскости экватора, лежащую в южном полушарии. Из очевидного равенства $\psi+\psi'=\dfrac{\pi}{2}$ следуют эквивалентные равенства $\operatorname{tg}\psi\cdot\operatorname{tg}\psi'=1$, или $|z_P|\cdot|z_{P'}|=1$. При этом, ввиду равенства $\arg z_P=\arg z_{P'}$, имеет место равенство $z_P\cdot\overline{z_{P'}}=1$ (рис. 4.6).

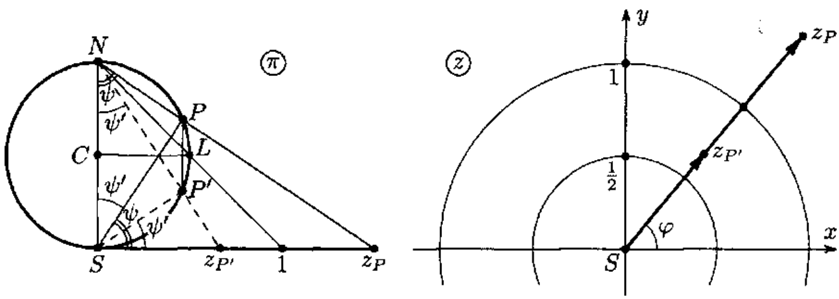


Рис. 4.6

Из рис. 4.6 видно, что точке P соответствует точка z_P, лежащая во внешности единичного круга, а точке P' — точка $z_{P'}$, лежащая внутри единичного круга. Преобразование

$$I_{S,1}\colon w=\frac{1}{\overline{z}} \tag{4.3}$$

переводит внешность единичной окружности в ее внутренность, и обратно. При этом ∞ переходит в точку $S=0$, а точка S переходит в ∞; точки единичной окружности переходят сами в себя. Это преобразование можно рассматривать, как преобразование симметрии расширенной плоскости относительно единичной окружности. Отображение $I_{S,1}$, переводящее точку z в точку w, называется *инверсией*. Инверсия является взаимно однозначным отображением расширенной комплексной плоскости в себя.

Теорема 4.3. При преобразовании инверсии любая прямая или окружность переходит в прямую или окружность (рис. 4.7). При этом

1) прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется сама в себя;

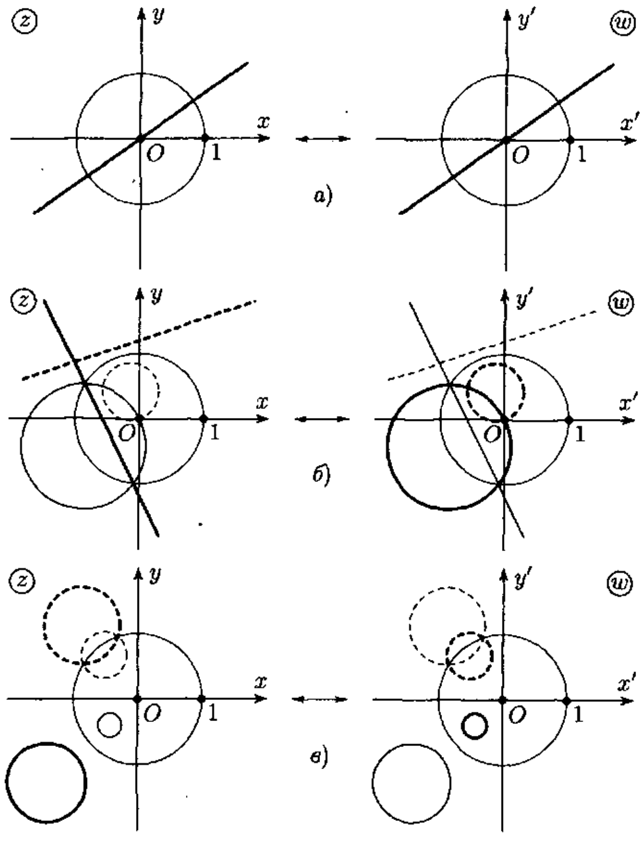


Рис. 4.7

2) прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии, и обратно;

3) окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, не проходящую через центр инверсии.

▷ Доказательство. Общее уравнение для прямых и окружностей на комплексной плоскости (z) имеет вид (4.2):

$$\alpha \cdot z \cdot \overline{z} + (\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z}) + \beta = 0$$

Воспользуемся преобразованием инверсии (4.3)

$$w = \frac{1}{\overline{z}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{\overline{w}}.$$

Подставив $z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ в уравнение (4.2), получим уравнение

$$\alpha \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} + \left(\overline{c} \cdot \frac{1}{\overline{w}} + c \cdot \frac{1}{w}\right) + \beta = 0. \qquad (4.2_2)$$

Домножим обе части (4.2_2) на $w \cdot \overline{w}$ и получим уравнение

$$\alpha + (\overline{c} \cdot w + c \cdot \overline{w}) + \beta \cdot w \cdot \overline{w} = 0. \qquad (4.2_3)$$

В дальнейшем воспользуемся обозначениями $\alpha' = \beta$, $c' = c$, $\beta' = \alpha$. Уравнение (4.2_3) с новыми коэффициентами примет вид

$$\alpha' \cdot w \cdot \overline{w} + (\overline{c'} \cdot w + c' \cdot \overline{w}) + \beta' = 0, \qquad (4.2_4)$$

при этом выполнено неравенство $|c|^2 - \alpha\beta = |c'|^2 - \alpha'\beta' > 0$. По теореме 4.2, геометрическим местом точек, удовлетворяющих уравнению (4.2_4), является прямая или окружность.

Рассмотрим различные случаи 1)—3), перечисленные в теореме 4.3 (рис. 4.7, *а*—*в*).

1) Общее уравнение прямой p, проходящей через точку O (рис. 4.7, *а*), имеет вид $\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z} = 0$, здесь $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Образом прямой p является прямая p', точки которой удовлетворяют уравнению $\overline{c} \cdot w + c \cdot \overline{w} = 0$, имеющему тот же самый вид, что и предыдущее уравнение, откуда следует истинность утверждения.

2) Общее уравнение прямой p, не проходящей через точку O (рис. 4.7, *б*), имеет вид $(\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z} + \beta = 0$, при этом $\alpha = \beta' = 0$, $\beta = \alpha' \neq 0$. Образом прямой p будет геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$\alpha' \cdot w \cdot \overline{w} + (\overline{c'} \cdot w + c' \cdot \overline{w}) = 0,$$

описывающему окружность, проходящую через центр инверсии.

Отсюда вытекает истинность доказываемого утверждения.

3) Окружность, не проходящая через начало координат (рис. 4.7, *в*), имеет уравнение

$$\alpha \cdot z \cdot \overline{z} + (\overline{c} \cdot z + c \cdot \overline{z}) + \beta = 0,$$

в котором $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, а тогда $\alpha' \neq 0$, и $\beta' \neq 0$. Уравнения (4.2), (4.2_4) описывают координаты точек, лежащих на окружностях, не проходящих через центр инверсии и только их. Утверждение доказано. ◀

4.8. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Преобразование *инверсии* относительно окружности радиуса R, с центром в точке z_0 описывается уравнением

$$I_{z_0,R}\colon w = z_0 + \frac{R^2}{\overline{(z - z_0)}} \qquad \text{(рис. 4.8, } a\text{)}.$$

2. Преобразование комплексной плоскости $w = z + a$, где z и a — комплексные числа, называется *трансляцией*, или *параллельным переносом* на вектор $\vec{a}$ (комплексное число a)

$$T_a\colon w = z + a \qquad \text{(рис. 4.8, } б\text{)}.$$

3. Преобразование комплексной плоскости $w = kz$, где $k > 0$, называется *гомотетией* с центром O и коэффициентом k, при этом

$$\Gamma_{O,k}\colon w = k \cdot |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \qquad \text{(рис. 4.8, } в\text{)}.$$

4. Преобразование комплексной плоскости $w = e_\alpha \cdot z$, где $e_\alpha \in \mathbb{C}$, $e_\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$, называется *поворотом* около центра O на угол α

$$\Pi_{O,\alpha}\colon w = e_\alpha \cdot z = |z| \cdot (\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)) \quad \text{(рис. 4.8, } г\text{)}.$$

5. Преобразование комплексной плоскости $w = a \cdot z$, где комплексное число $a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$ соответствует композиции гомотетии с коэффициентом $k = |a| > 0$ и поворота на угол α около центра O (рис. 4.8, *д*).

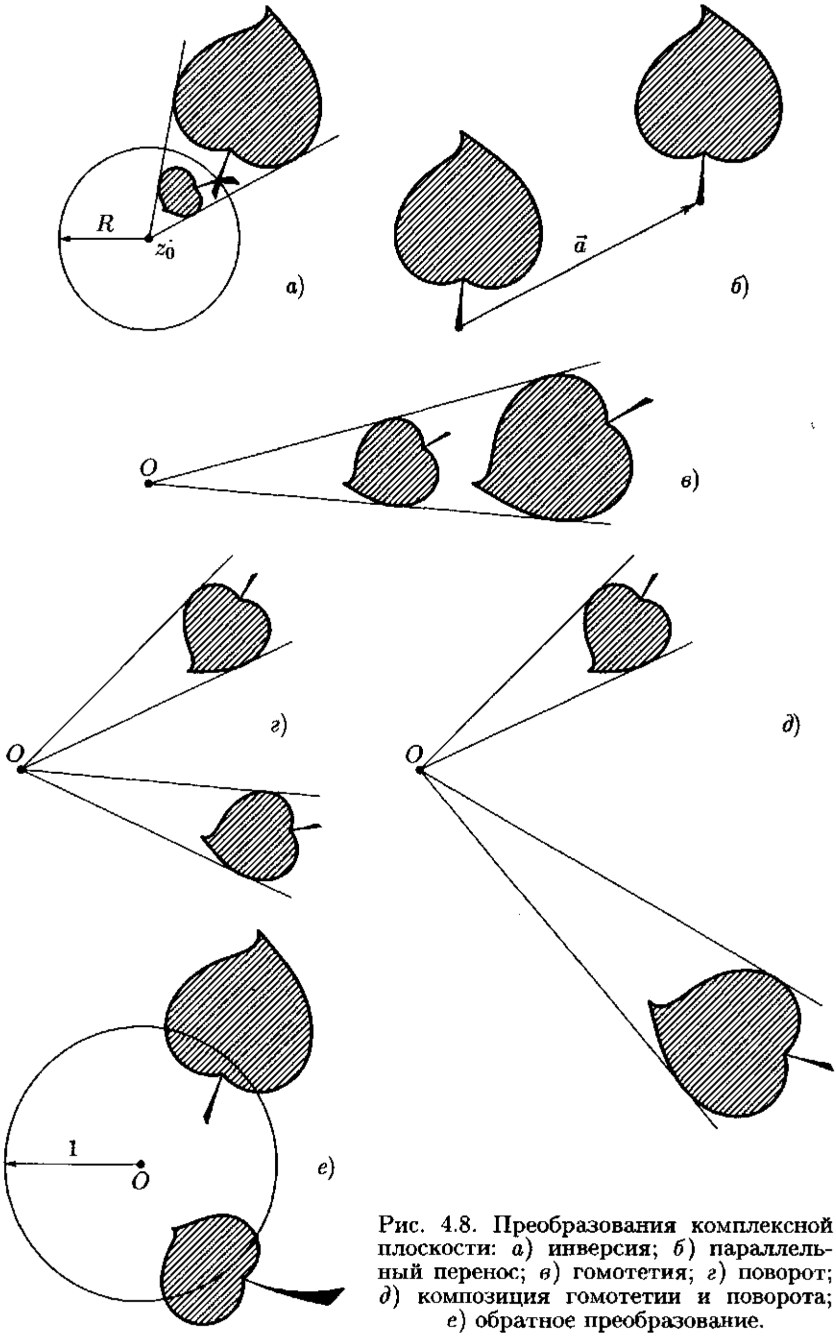


Рис. 4.8. Преобразования комплексной плоскости: *а*) инверсия; *б*) параллельный перенос; *в*) гомотетия; *г*) поворот; *д*) композиция гомотетии и поворота; *е*) обратное преобразование.

6. Преобразование комплексной плоскости $w = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$, называется *обратным отображением*, при этом

$$w = \frac{1}{|z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{|z|} \cdot (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

(рис. 4.8, *е*).

При преобразованиях комплексной плоскости 1–6 сохраняются углы между кривыми (т. е. углы между касательными к кривым в точке их пересечения). Преобразования комплексной плоскости, обладающие этим свойством, называют *конформными*.

ГЛАВА

5 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим бесконечные числовые последовательности $\{x_n\}$, или функции целочисленного аргумента, определенные на множестве $\mathbb{N}$, с общим членом вида $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Бесконечные числовые последовательности обладают свойствами монотонности, ограниченности. Их можно умножать на число, складывать, вычитать, умножать и делить.

Монотонные последовательности.

Если $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{x_n\}$ *возрастающая*, а если $x_{n+1} < x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то *убывающая*. Если последовательность возрастающая или убывающая, то она называется *строго монотонной*.

Если $x_{n+1} \geqslant x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{x_n\}$ *неубывающая*, а если $x_{n+1} \leqslant x_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то *невозрастающая*. Если последовательность неубывающая или невозрастающая, то она называется *нестрого монотонной*.

Ограниченные последовательности определяются так же, как и ограниченные множества (см. определение 1.9).

Если существует такое число M, что $x_n < M$ при всех $n \in \mathbb{N}$, или $(\exists M \mid \forall n \in \mathbb{N})\,(x_n < M)$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*.

Если существует такое число m, что $x_n > m$ при всех $n \in \mathbb{N}$, или $(\exists m \mid \forall n \in \mathbb{N})\,(x_n > m)$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и снизу, или $(\exists M \mid \forall n \in \mathbb{N})\,(-M < x_n < M)$, то она называется *ограниченной*.

Действия с последовательностями.

Умножение последовательности $\{x_n\}$ *на число* a:

$$a\{x_n\} = \{ax_1, ax_2, \ldots, ax_n, \ldots\} = \{ax_n\}.$$

Сумма и *разность* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

$$\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n, \ldots\} = \{x_n \pm y_n\}.$$

Произведение последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots\} = \{x_n \cdot y_n\}.$$

Частное последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots\right\} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, \quad y_n \neq 0.$$

Определение 5.1. Назовем *ε-окрестностью* точки a множество точек числовой прямой, расстояние от которых до точки a меньше ε:

$$\boldsymbol{U}_\varepsilon(a) = \left\{x \;\middle|\; |x - a| < \varepsilon\right\}.$$

На числовой прямой это интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ с центром в точке a.

Например, члены бесконечной последовательности $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ располагаются на интервале $(0; 1)$, с центром в точке $\dfrac{1}{2}$, имеющем обозначение $\boldsymbol{U}_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Запишем несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$: $\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}; \ldots\right\}$.

Покажем, что бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ располагаются в произвольной ε-окрестности точки 1, оставаясь меньше 1. В самом деле, для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнены эквивалентные неравенства $1 - \dfrac{n}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, причем из последнего следует, что все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с номера $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, лежат в ε-окрестности точки 1, оставаясь меньше 1.

Вне ε-окрестности находится лишь конечное число членов этой последовательности. Так, при $\varepsilon = 0{,}1$ члены $x_1, \ldots, x_9$ не лежат в $U_{0,1}(1)$; при $\varepsilon = 0{,}01$ члены $x_1, \ldots, x_{99}$ не лежат в $U_{0,01}(1)$, а при $\varepsilon = 0{,}001$ члены $x_1, x_2, \ldots, x_{999}$ не лежат в $U_{0,001}(1)$ (табл. 5.1).

Таблица 5.1

ε	N	$1 - x_N$
0,1	10	$\frac{1}{11} < 0{,}1$
0,01	100	$\frac{1}{101} < 0{,}01$
0,001	1000	$\frac{1}{1001} < 0{,}001$

В рассмотренном случае число 1 является пределом последовательности $\{x_n\}$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Определение 5.2. Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, если в любой ε-окрестности точки a располагаются все члены последовательности, начиная с некоторого номера N.

На языке ε-N определение предела последовательности имеет вид

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) = (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n > N)\colon\, (|x_n - a| < \varepsilon),$$

или

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) = (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n > N)\colon\, (x_n \in U_\varepsilon(a)).$$

Если $a = 0$, то последовательность называется *бесконечно малой.*

Из определения предела вытекает теорема о последовательности, ее пределе и бесконечно малой последовательности

Теорема 5.1. Последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел a тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\} = \{\xi_n\}$ — бесконечно малая.

Следствие. Если последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел a, то при $n \to \infty$ ее общий член можно представить в виде $x_n = a + \xi_n$, где $\{\xi_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Обратно, если при $n \to \infty$ общий член последовательности $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ можно представить в виде $x_n = a + \xi_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Определение 5.3. Будем говорить, что бесконечная последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет бесконечный предел, или что она *бесконечно большая*, если $\forall E > 0$ все ее члены, начиная с некоторого номера $N(E)$ располагаются вне E-окрестности точки 0, или

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right) = (\forall E > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n > N)\colon (|x_n| \geqslant E).$$

При этом, если $(\exists N' \in \mathbb{N})\,(\forall n > N')\colon (x_n > 0)$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. В том случае, когда $(\exists N' \in \mathbb{N})\,(\forall n > N')\colon (x_n < 0)$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Определение 5.4. Бесконечная последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*. Если бесконечная последовательность не имеет предела или имеет бесконечный предел, она называется *расходящейся*.

Упражнение 5.1. 1) Изобразить на плоскости (n, x) несколько первых членов последовательности $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) Показать, что точки -1 и 1 не являются ее пределами.

5.2. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теорема 5.2. Если последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, то он единственный.

$\triangleright$ Доказательство проведем методом «от противного».

Предположим, что последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет два предела a и b $(a \neq b)$. Тогда имеются непересекающиеся окрестности точек a и b, причем вне окрестности точки a располагается лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$. При этом в окрестности точки b их будет конечное число, что противоречит предположению о том, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, из которого вытекает, что внутри этой окрестности их должно быть бесконечно много. Таким образом, антитеза неверна. Теорема доказана. ◀

Теорема 5.3. Если все члены сходящейся последовательности неотрицательны, то ее предел также неотрицателен.

▷ Для доказательства заметим, что если число $\beta < 0$, а число $x_n \geqslant 0$, то $|x_n - \beta| \geqslant |\beta|$, т. е. неотрицательное число отличается от отрицательного числа не меньше чем на абсолютную величину отрицательного числа. Следовательно, если $\{x_n\}$ — некоторая последовательность с неотрицательными членами, и число $\beta < 0$, то никакой элемент последовательности $\{x_n\}$ не лежит в $|\beta|$-окрестности точки β, поэтому β не является пределом последовательности $\{x_n\}$. Последовательность имеет пределом неотрицательное число. Теорема доказана. ◀

Следствие 1. Если сходящиеся последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ имеют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, и существует такое число $N_0 > 0$, что $x_n \leqslant y_n$ при всех $n > N_0$, то $a \leqslant b$.

Следствие 2. Если сходящиеся последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ имеют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, и существует такое число $N_0 > 0$, что $x_n < y_n$ при всех $n > N_0$, то $a \leqslant b$.

Следствие 3. Если все элементы последовательности $\{x_n\}$, имеющей предел γ, лежат на отрезке $[a, b]$, то и $\gamma \in [a, b]$.

Упражнение 5.2. 1) Изменится ли предел сходящейся последовательности, если произвольно переставить любое число ее членов?

2) Доказать ограниченность сходящейся последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера N_1, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < 1$ или $a - 1 < x_n < a + 1$, т. е.

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})\,(\forall n > N_1):\ (|x_n - a| < 1 \ \Leftrightarrow\ a - 1 < x_n < a + 1).$$

Ввиду этих неравенств и из того, что оставшихся членов лишь конечное число, отсюда вытекает ограниченность последовательности. ◀

3) Следует ли сходимость из ограниченности последовательности? (Ответ: нет. Указание. Приведите контрпример.)

4) Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ расходится, то любая последовательность, отличающаяся от данной порядком членов, также расходится.

5) Доказать расходимость последовательности с общим членом

а) $x_n = (-1)^n$; б) $x_n = n^2$; в) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$; г) $x_n = (1+(-1)^n)\cdot n$.

6) Доказать,что если последовательность является объединением двух подпоследовательностей, имеющих общий предел, то она имеет тот же самый предел.

7) Доказать утверждение:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right)(a > p) \;\Rightarrow\; (\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n > N_0)\colon (x_n > p).$$

5.3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теорема 5.4$_1$. Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ есть последовательность, сходящаяся к сумме (разности) пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

$\triangleright$ Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_y + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = b$. По определению предела,

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists N', N'' \in \mathbb{N})(\forall n > N', \forall m > N'')\colon$$
$$\left(|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(|y_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Следовательно, при $n > N = \max(N', N'')$ выполнены оба предыдущих неравенства, так что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\colon \left(|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big(|x_n + y_n - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\Big).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$. Утверждение доказано. ◀

Пример 5.1. а) Пусть

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 1;$$
$$y_n = \frac{3n-1}{5n-1}, \; n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{3}{5}.$$

Последовательность

$$\{x_n + y_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n} + \frac{3n-1}{5n+1}\right\} = \left\{\frac{8n^2 - 5n - 1}{5n^2 + n}\right\}$$

имеет предел

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}.$$

б) Последовательность

$$\{x_n + y_n\} = \left\{\frac{2n}{n^2-1}\right\} = \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\} + \left\{\frac{1}{n-1}\right\}$$

сходится к нулю.

Упражнение 5.3. Доказать утверждение теоремы 5.4_1 для разности двух последовательностей.

Теорема 5.4$_2$. Произведение двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

$\triangleright$ Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = b$. По определению предела

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N', N'' \in \mathbb{N})\,(\forall n > N', \forall m > N''):$$
$$(|x_n - a| < \varepsilon)\,(|y_m - b| < \varepsilon).$$

Следовательно, при $n > N = \max(N', N'')$ выполнены оба предыдущих неравенства:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n > N):\,(|x_n - a| < \varepsilon, |y_n - b| < \varepsilon).$$

в которых положим $x_n = a + \xi_n$, $y_n = b + \eta_n$ и получим

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &= |(a + \xi_n)(b + \eta_n) - ab| = \\
&= |\xi_n b + \eta_n a + \xi_n \eta_n| \leqslant |\xi_n b| + |\eta_n a| + |\xi_n \eta_n| = \\
&= |x_n - a| \cdot |b| + |y_n - b| \cdot |a| + |x_n - a| \cdot |y_n - b| < \\
&< \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Потребуем дополнительно, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon < 1$. Тогда, ввиду предыдущего, выполнено неравенство

$$|x_n y_n - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + 1).$$

Если необходимо, чтобы полученное неравенство выполнялось с погрешностью, меньшей некоторого произвольного числа $\sigma > 0$, то достаточно выбрать такое число $\varepsilon > 0$, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon(|a| + |b| + 1) < \sigma$, или $\varepsilon < \dfrac{\sigma}{|a| + |b| + 1}$.

Таким образом, для произвольного числа $\sigma > 0$ существует такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполнено неравенство

$$|x_n y_n - ab| < \sigma,$$

а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab$. Утверждение доказано. ◀

Замечание. При доказательстве сходимости последовательности $\{x_n\}$ всегда можно принять, что число ε меньше произвольного положительного числа α, поскольку для любого $\varepsilon' \geqslant \alpha > 0$ из неравенства $|x_n - a| < \varepsilon < \alpha$ следует неравенство $|x_n - a| < \varepsilon < \alpha \leqslant \varepsilon'$.

Пример 5.2. Последовательность

$$\left\{\frac{(2n-1)(3n-2)}{n^2}\right\} = \left\{\frac{2n-1}{n}\right\} \cdot \left\{\frac{3n-2}{n}\right\} = \left\{2 - \frac{1}{n}\right\} \cdot \left\{3 - \frac{2}{n}\right\}$$

сходится и имеет предел, равный 6.

Теорема 5.4₃. Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному их пределов, при условии, что предел последовательности $\{y_n\}$ не равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \qquad y_n \neq 0, \ \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

▷ Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$. Тогда $(\exists N_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n > N_0)\colon (y_n \neq 0)$. Далее, поступая также, как при доказательстве теоремы о пределе произведения, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ получим такое натуральное число $N > N_0$, что

$$(\forall n > N)\colon (|x_n - a| < \varepsilon, |y_n - b| < \varepsilon).$$

Полагая, что $\varepsilon < \frac{|b|}{2}$, оценим модуль разности $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right|$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{bx_n - ay_n}{by_n}\right| = \left|\frac{b(a+\xi_n) - a(b+\eta_n)}{b(b+\eta_n)}\right| =$$
$$= \left|\frac{b\xi_n - a\eta_n}{b(b+\eta_n)}\right| \leqslant \frac{|b|\cdot|\xi_n| + |a|\cdot|\eta_n|}{|b|\cdot|b+\eta_n|},$$

где $|x_n - a| = |\xi_n| < \varepsilon$, $|y_n - b| = |\eta_n| < \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon < \frac{|b|}{2}$, то по свойству модуля, имеют место оценки $|b+\eta_n| \geqslant |b| - |\eta_n| > > |b| - \varepsilon > |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b|$.

Поэтому $|b+\eta_n| > \frac{1}{2}|b|$ и предыдущее неравенство примет вид

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{|b|\cdot|\xi_n| + |a|\cdot|\eta_n|}{|b|\cdot|b+\eta_n|} < \frac{|b|+|a|}{\frac{1}{2}|b|^2}\varepsilon.$$

Последнее неравенство выполнено с погрешностью, меньшей произвольного числа $\sigma > 0$, если число $\varepsilon > 0$ удовлетворяет двум условиям: 1) $\varepsilon < \frac{|b|}{2}$; 2) $\frac{|b|+|a|}{\frac{1}{2}|b|^2}\varepsilon < \sigma$. Для этого достаточно взять число $\varepsilon > 0$, меньшее каждого из чисел $\frac{b}{2}$ и $\frac{1}{2}\cdot\frac{|b|^2\sigma}{|b|+|a|}$. Таким образом, взяв произвольное число $\sigma > 0$, можно найти такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \sigma$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. Утверждение доказано. ◀

Упражнение 5.4. Доказать арифметические теоремы о бесконечно малых последовательностях:

1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

2) Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Так, последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\sin n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть произведение бесконечно малой последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и ограниченной последовательности $\{\sin n\}$ — бесконечно малая при $n\to\infty$.

Следствие 1. Произведение бесконечно малой последовательности на постоянную есть бесконечно малая последовательность.

Следствие 2. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Упражнение 5.5. Доказать арифметические теоремы о бесконечно больших последовательностях:

1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно больших последовательностей, имеющих одинаковый знак, начиная с некоторого номера N, есть бесконечно большая последовательность.

2) Сумма бесконечно большой последовательности и ограниченной последовательности есть бесконечно большая последовательность.

3) Произведение конечного числа бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

4) Если $\{x_n\}$, $x_n\neq 0$ — бесконечно большая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая. Обратно, если $\{x_n\}$, $x_n\neq 0$ — бесконечно малая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая.

5.4. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теорема 5.5 (о «зажатой» последовательности). Если сходящиеся последовательности $\{x_n\}$, $\{z_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

и существует такое натуральное число N_0, что при всех $n > N_0$ выполнено неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то последовательность $\{y_n\}$ — тоже сходящаяся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

$\triangleright$ Доказательство. По условию теоремы при всех $n > N_0$ выполнены неравенства

$$0 \leqslant y_n - x_n \leqslant z_n - x_n \;\Rightarrow\; |y_n - x_n| \leqslant |z_n - x_n|.$$

Однако $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - a = 0$, поэтому последовательность $\{z_n - x_n\}$ — бесконечно малая, а тогда и $\{y_n - x_n\}$ — бесконечно малая. Ввиду равенства $y_n = x_n + (y_n - x_n)$, с учетом условий $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, получаем искомое равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + 0 = a$.Теорема доказана. ◄

Пример 5.3. Доказать, что монотонная последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

▷ Доказательство. Пусть $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — монотонная последовательность действительных чисел, например, $x_{n+1} \geqslant x_n$, содержащая сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$, где индекс n_k пробегает возрастающую бесконечную последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ так, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет предел a, или $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

По определению предела бесконечной последовательности $\{x_{n_k}\}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_{k_0}, что все члены $\{x_{n_k}\}$ при $n_k \geqslant n_{k_0}$ лежат в ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a. Для любого номера $n > n_{k_0}$ найдется номер $n_k > n$; при этом $x_{n_{k_0}} \leqslant x_n \leqslant x_{n_k}$, и тогда $x_n \in U_\varepsilon(a)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n > N$. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ◄

Докажем теорему Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5.6 (теорема Вейерштрасса). 1) Каждая невозрастающая, ограниченная снизу последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет конечный предел.

1_1) Каждая невозрастающая, неограниченная снизу последовательность стремится к $-\infty$.

2) Каждая неубывающая, ограниченная сверху последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет конечный предел.

2_1) Неубывающая, неограниченная сверху последовательность стремится к $+\infty$.

▷ Доказательство. По теореме 1.4, бесконечная последовательность $\{x_n\}$, ограниченная сверху, имеет верхнюю грань $\beta = \sup\{x_n\}$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. Согласно определению верхней грани выполнены свойства:

i) для любого номера $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_n \leqslant \beta$;

ii) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что $x_{n_0} > \beta - \varepsilon$.

С учетом возрастания последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для всех ее членов с номерами $n > n_0$ выполнены неравенства

$$\beta - \varepsilon < x_{n_0} < x_n \leqslant \beta,$$

так что $x_n \in U_\varepsilon(\beta)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что все члены последовательности $\{x_n\}$ при $n \geqslant n_0$ лежат в ε-окрестности $U_\varepsilon(\beta)$ точки β. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

Аналогично рассматривается случай невозрастающей последовательности. Утверждение доказано. ◀

Замечание. Не каждая сходящаяся последовательность является монотонной. Например, последовательность $\left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$, имеющая предел, равный 1, не монотонна.

5.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ О ПРЕДЕЛАХ

Рассмотрим примеры ограниченных монотонных последовательностей. Так, последовательность рациональных чисел $\{a_n\} = \left\{1 - \dfrac{1}{1}; 1 - \dfrac{1}{2}; \ldots; 1 - \dfrac{1}{n}; \ldots\right\}$ — возрастающая, ограниченная сверху, $a_n < 1$. Она имеет предел 1.

Ниже рассмотрена убывающая последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ограниченная снизу.

5.5.1. ОСНОВАНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ

Лемма 5.1. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, имеет предел при $n \to \infty$.

▷ Доказательство. Воспользуемся неравенством Бернулли и получим нижнюю оценку для величины $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)\cdot\frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2.$$

Используя неравенство Бернулли, оценим отношение

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n-1)^n}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{(n^2-1)^n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n^2-1}{n(n+1)} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} > \left(1+(n+1)\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = 1.$$

Следовательно, $y_{n-1} > y_n > 2$ при $n = 2, 3, \ldots$ Последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — монотонно убывающая, ограниченная снизу и по теореме Вейерштрасса имеет предел при $n \to \infty$. Поэтому предел последовательности $\{x_n\}$ существует. Это число Эйлера. Для него используется специальное обозначение — буква e:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} y_n = e. \quad ◀$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве, число e не меньше 2. Его приближенное значение с 15 верными знаками после запятой равно 2,718 281 828 459 045. Число e — иррациональное. Логарифм числа $a > 0$ по основанию e называется ***натуральным логарифмом числа*** a: $\log_e a = \ln a$.

Члены последовательности $\{y_n\}$ приближаются к числу e сверху, $y_n > e$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — монотонно возрастающая, и члены последовательности $\{x_n\}$ приближаются к числу e снизу, так что $x_n < e$.

$\triangleright$ Произведем оценку отношения $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, используя обобщенные неравенства Бернулли:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} >$$

$$> \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$$

Следовательно, $x_{n+1} > x_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — монотонно возрастающая, ограниченная сверху, $x_n < e$. Таким образом, выполнено двойное неравенство $x_n < e < y_n$, или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad \blacktriangleleft$$

Таблица 5.2

n	x_n
1	2
10	2,5937
10^2	2,7048
10^3	2,7169
10^4	2,7182
10^5	2,718270
10^6	2,718280
10^7	2,7182817

Для установления быстроты сходимости последовательности $\{x_n\}$ к числу e, докажем неравенство

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\triangleright$ В соответствии с предыдущим,

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

следовательно,

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n} < \frac{e}{n} < \frac{3}{n}. \quad \blacktriangleleft$$

Например, x_n отличается от числа e на 10^{-4} при $n > 3\cdot 10^4$. В табл. 5.2 показаны результаты вычислений x_n при $n = 10^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, 7$).

5.5.2. ПРЕДЕЛЫ НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Пусть a_n — конечная десятичная дробь, полученная из бесконечной десятичной дроби числа $\sqrt{2}$ отсечением «бесконечного хвоста», начиная с $(n+1)$-го разряда после запятой:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1{,}4; & a_2 = 1{,}41; & a_3 = 1{,}414; \\ a_4 = 1{,}4141; & a_5 = 1{,}41412; & a_6 = 1{,}414121; \ \ldots \end{array}$$

Очевидно, что $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a_n < \sqrt{2} < a_n + \frac{1}{10^n} \quad \text{или} \quad a_n^2 < 2 < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2.$$

Докажем, что последовательность $\{a_n^2\}$ сходится к числу 2.

$\triangleright$ Вычитая из каждой части неравенства $a_n^2 < 2 < \left(a_n + \dfrac{1}{10^n}\right)^2$ по a_n^2, получаем равносильные неравенства

$$0 < 2 - a_n^2 < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 - a_n^2 = \frac{2a_n}{10^n} + \left(\frac{1}{10^n}\right)^2,$$

из которых следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 2$. $\blacktriangleleft$

Рациональные числа a_n ни к какому рациональному числу стремиться не могут, так как в противном случае из $a_n \to r$ (где r — рациональное число) следовало бы, что и $a_n^2 \to r^2$, что означало бы, ввиду $a_n^2 \to 2$, равенство $r^2 = 2$, что невозможно.

Последовательность $\{a_n\}$ — неубывающая ($a_{n+1} \geqslant a_n$), ограниченная ($a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$), однако не имеет рационального предела. Вводя число $\sqrt{2}$, мы заполняем пробел, имеющий место во множестве рациональных чисел.

2. Воспользуемся выведенным ранее условным неравенством: если $n > 2$, то $n \sin \dfrac{\pi}{n} < \pi < n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n}$ (см. следствие 1 из леммы 3.1).

Заметим, что величина $2n \sin \dfrac{\pi}{n}$ равна периметру правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, а $2n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n}$ — периметр правильного n-угольника, описанного около нее.

Докажем, что последовательность $\{a_n\} = \left\{n \sin \dfrac{\pi}{n}\right\}$, $(n = 3,\ 4,\ \ldots)$ — возрастающая, а последовательность $\{b_n\} = \left\{n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n}\right\}$ – убывающая.

$\triangleright$ Положим $\alpha_n = \dfrac{\pi}{n}$, причем $0 < \alpha_n < \dfrac{\pi}{2}$; тогда $\{a_n\} = \left\{\pi \dfrac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}\right\}$, $\{b_n\} = \left\{\pi \dfrac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\alpha_n}\right\}$.

i) Ввиду условного неравенства: если $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{\sin y}{y}$, из неравенства $y = \alpha_n > x = \alpha_{n+1}$ получим $a_{n+1} > a_n$. Значит, последовательность $\{a_n\} = \left\{n \sin \dfrac{\pi}{n}\right\}$ — возрастающая.

ii) Ввиду условного неравенства: если $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} < \dfrac{\operatorname{tg} y}{y}$, из неравенства $y = \alpha_n > x = \alpha_{n+1}$ получим $b_n > b_{n+1}$. Поэтому последовательность $\{b_n\} = \left\{n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n}\right\}$ — убывающая. ◀

Каждое число a_n ограничено сверху числом b_3 и наоборот — каждое число b_n ограничено снизу числом a_3. Поэтому последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — сходящиеся. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

$\triangleright$ Доказательство. Оценим сверху разность

$$b_n - a_n =$$

$$= n \sin \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} < n \sin \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{1 - \left(\frac{\pi}{n}\right)^2} < n \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\frac{\pi^2}{2n^2}}{1 - \left(\frac{\pi}{n}\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi^3}{2(n^2 - \pi^2)} < \varepsilon$$

и получим неравенство $n > \pi\sqrt{1 + \dfrac{\pi}{2\varepsilon}}$. Учитывая, что $\pi^{\frac{3}{2}} \times \varepsilon^{-\frac{1}{2}} > \pi\sqrt{1 + \dfrac{\pi}{2\varepsilon}}$ при $\varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$, обозначим $N(\varepsilon) = \left[\pi^{\frac{3}{2}} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right] + 1$.

Получаем, что $b_n - a_n < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$. Утверждение доказано. ◀

Поэтому последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ сходятся к общему пределу π. Неравенство $n\sin\frac{\pi}{n} < \pi < n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$ выполнено тем точнее, чем больше n. Положим $n = 2^m$ и запишем числа $\sin\frac{\pi}{2^m}$, $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^m}$ с помощью формул половинного аргумента. Например, при $m = 2, 3, 4$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \qquad \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1;$$

$$\sin\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \quad \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{16} = 2\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2} - 1;$$

поэтому

$$2\sqrt{2} < \pi < 4;$$

$$4\sqrt{2-\sqrt{2}} < \pi < 8(\sqrt{2}-1);$$

$$8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \pi < 16\left(2\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2} - 1\right).$$

З а м е ч а н и е. В рассмотренном примере сходящиеся последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ состоят из иррациональных чисел.

5.5.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЯ ИЗ ЧИСЛА

Рассмотрим решение уравнения $x^2 = c$, $c > 0$. В случае $c > 1$ выполняется неравенство $c^2 > c \Leftrightarrow c > \sqrt{c}$, а в случае $0 < c < 1$ — неравенство $\sqrt{c} < 1$. Таким образом, число $x_1 = \max(c, 1)$ будет первым приближением корня по избытку. При этом величина $\frac{c}{x_1}$ — приближенное значение корня по недостатку.

Уравнение $x^2 = c$ эквивалентно уравнению $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$. Положим

$$x_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(x_1 + \frac{c}{x_1}\right) \geqslant \sqrt{x_1\cdot\frac{c}{x_1}} = \sqrt{c}. \tag{5.1}$$

Следовательно, x_2 — приближенное значение корня по избытку, а величина $\dfrac{c}{x_2}$ — по недостатку. Построим последовательность $\{x_n\}$ по формулам

$$x_1 = \max(c, 1); \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \ n = 1, 2, \ldots \quad (5.1_1)$$

Лемма 5.2. Последовательность $\{x_n\}$, определенная соотношениями (5.1_1), при $n \to \infty$ имеет предел.

$\triangleright$ Доказательство. 1. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, так как по неравенству Коши для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено нестрогое неравенство

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c}. \qquad (5.1_2)$$

2. Предположим, что на каком-то шаге получено равенство $x_n = \sqrt{c}$, следовательно, $\dfrac{c}{x_n} = \sqrt{c}$, а тогда и $x_{n+1} = \sqrt{c}$ и все последующие члены последовательности равны $\sqrt{c}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{c}$.

3. В том случае, когда равенство $x_n = \sqrt{c}$ не выполняется ни при каком n, равенство в формуле (5.1_2) не имеет места. Последовательность $\{x_n\}$ — убывающая, так как

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) - x_n = \frac{c - x_n^2}{2x_n} < 0,$$

следовательно, $x_{n+1} < x_n$. По теореме Вейерштрасса, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{c}$. ◀

4. Оценим абсолютную погрешность последовательных приближений. Для этого вычислим разность

$$\delta_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) - \sqrt{c} =$$

$$= \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{c} + \sqrt{c^2}}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{2x_n} = \frac{\delta_n^2}{2x_n}.$$

При $n = 0$ получим первую из оценок δ_1, а при $n = 1, 2, \ldots$ — последующие оценки. Очевидно, $x_n = \delta_n + \sqrt{c} > \sqrt{c}$, поэтому

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n^2}{2x_n} = \frac{\delta_n}{2x_n} \cdot \delta_n = \frac{x_n - \sqrt{c}}{2x_n} \cdot \delta_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2x_n}\right) \cdot \delta_n,$$

при этом, ввиду условия $0 < \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{c}}{2x_n} < \dfrac{1}{2}$, выполнены неравенства

$$|\delta_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2x_n}\right| \cdot |\delta_n| < \frac{1}{2} \cdot |\delta_n| < \frac{1}{2^2} \cdot |\delta_{n-1}| < \ldots < \frac{1}{2^n} \cdot |\delta_1|.$$

Полученные соотношения показывают, что на каждом шаге вычислений абсолютная погрешность уменьшается вдвое, а также, что

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{c}.$$

5. Из равенства $\delta_{n+1} = \dfrac{\delta_n^2}{2x_n}$ и условия $x_n > \sqrt{c}$ следуют неравенства

$$\delta_{n+1} < \frac{\delta_n^2}{2\sqrt{c}} \quad \text{и} \quad \eta_{n+1} < \frac{\eta_n^2}{2}, \qquad \text{где } \eta_n = \frac{\delta_n}{\sqrt{c}}.$$

Величина η_n называется *относительной погрешностью* приближения x_n к $\sqrt{c}$. Относительная погрешность η_{n+1} удовлетворяет неравенствам

$$\eta_{n+1} < \frac{\eta_n^2}{2} < \frac{\eta_1^{2^n}}{2^{2^n-1}}.$$

Так, в случае, когда относительная погрешность $\eta_n \approx 10^{-2}$, значение

$$\eta_{n+1} \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-4},$$
$$\eta_{n+2} \leqslant 0{,}5 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-4})^2 \approx 0{,}13 \cdot 10^{-9}$$

. . . .

Каждое очередное приближение удваивает число верных знаков.

Пример 5.4. Вычислить $\sqrt{5}$. Оценить погрешность четвертого приближения.

▷ Решение. Вычислим

$$x_0 = \max(5;1) = 5; \quad x_1 = \frac{1}{2}\cdot(5+1) = 3;$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(3+\frac{5}{3}\right) = \frac{7}{3}; \quad x_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{3}+\frac{5\cdot 3}{7}\right) = \frac{47}{21};$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{47}{21}+\frac{5\cdot 21}{47}\right) = \frac{2207}{987} \approx 2{,}23607.$$

Оценим абсолютные погрешности последовательных приближений

$$\delta_1 = x_1 - \sqrt{5} < x_1 - 2 = 3 - 2 = 1; \quad \delta_2 < 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2;$$

$$\delta_3 < 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^4; \quad \delta_4 < 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^8 = 2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2^8\cdot 5^4} <$$

$$< \frac{5}{2^8\cdot 5^4} = \frac{1}{2^8\cdot 5^3} = \frac{1}{32\,000} < 0{,}3\cdot 10^{-4}.$$

Приближение $\sqrt{5} \approx 2{,}23607$ обеспечивает четыре верных знака после запятой, а практически — пять верных знаков. ◀

Упражнение 5.6. 1) Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, заданная равенствами $x_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot\left(2x_n + \frac{c}{x_n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1 = \max(c;1)$, $c > 0$, при $n \to \infty$ имеет предел, равный $\sqrt[3]{c}$.

2) Вычислить $\sqrt[3]{5}$ с тремя верными знаками после запятой.

3) Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то последовательность $\{x_{n+1} - x_n\}$ — бесконечно малая. Истинно ли обратное утверждение?

(Ответ: нет. Указание. Для опровержения достаточно привести один контрпример, а именно: $x_n = \ln n$, при этом $x_{n+1} - x_n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, однако, $x_n = \ln n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.)

5.5.4. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ

Вычислим предел последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$x_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

▷ Решение. Преобразуем ν-й сомножитель в формуле для x_n:

$$\frac{\nu^3-1}{\nu^3+1}=\frac{(\nu-1)(\nu^2+\nu-1)}{(\nu+1)(\nu^2-\nu+1)}=\frac{\nu-1}{\nu+1}\cdot\frac{(\nu+\bar{\varepsilon})(\nu+\varepsilon)}{(\nu-\bar{\varepsilon})(\nu-\varepsilon)}=$$
$$=\frac{\nu-1}{\nu+1}\cdot\frac{(\nu-\varepsilon+1)(\nu+\varepsilon)}{(\nu+\varepsilon-1)(\nu-\varepsilon)},$$

где $\nu=2,\ 3,\ \ldots,\ n$; ε и $\bar{\varepsilon}$ — комплексно сопряженные корни квадратного уравнения $\nu^2-\nu+1=0$: $\varepsilon=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $\bar{\varepsilon}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Очевидно, $\bar{\varepsilon}=1-\varepsilon$ и $\bar{\varepsilon}\cdot\varepsilon=1$. Запишем формулу для x_n в компактной форме с помощью знака группового умножения:

$$x_n=\prod_{\nu=2}^{\nu=n}\frac{\nu^3-1}{\nu^3+1}=$$
$$=\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{\nu=n}(\nu-1)\cdot\prod\limits_{\nu=2}^{\nu=n}(\nu^2+\nu+1)}{\prod\limits_{\nu=2}^{\nu=n}(\nu+1)\cdot\prod\limits_{\nu=2}^{\nu=n}(\nu^2-\nu+1)}=\frac{2(n-1)!}{(n+1)!}\cdot\frac{\prod\limits_{\nu=2}^{\nu=n}(\nu-\varepsilon+1)(\nu+\varepsilon)}{\prod\limits_{\nu=2}^{\nu=n}(\nu+\varepsilon-1)(\nu-\varepsilon)}=$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{(3-\varepsilon)(4-\varepsilon)(5-\varepsilon)\ldots(n-\varepsilon)(n+1-\varepsilon)}{(2-\varepsilon)(3-\varepsilon)(4-\varepsilon)(5-\varepsilon)\ldots(n-\varepsilon)}\times$$
$$\times\frac{(2+\varepsilon)(3+\varepsilon)(4+\varepsilon)\ldots(n-1+\varepsilon)(n+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)(3+\varepsilon)(4+\varepsilon)\ldots(n-1+\varepsilon)}=$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n+1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\cdot\frac{n+\varepsilon}{1+\varepsilon}=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}.$$

В последней строке для преобразования выражений были использованы тождества: $(2-\varepsilon)(1+\varepsilon)=3$ и $(n+1-\varepsilon)(n+\varepsilon)=$ $=n^2+n+1$.

Наконец, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{2}{3}$. ◀

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

5.6. ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ. МЕТОД БОЛЬЦАНО

Определение 5.5. Система отрезков числовой прямой $[a_n, b_n]$, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n\in\mathbb{R}$, называется *системой вложенных от-*

резков, если выполнены неравенства

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant b_1,$$
$$\text{или } [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

(рис. 5.1).

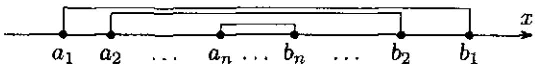


Рис. 5.1

Теорема 5.7 (о пересечении вложенных отрезков). Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, длины которых стремятся к нулю, существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам этой системы, причем

$$c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}.$$

$\triangleright$ 1. Доказательство единственности проведем методом «от противного». Предположим, что имеются две точки, принадлежащие всем отрезкам системы: $\alpha \in [a_n, b_n]$, $\beta \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(|\alpha - \beta| \leqslant b_n - a_n),$$

а из условия $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ следует, что

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n > N)\colon\ (|\alpha - \beta| \leqslant b_n - a_n < \varepsilon).$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, неравенство $|\alpha - \beta| < \varepsilon$ возможно только при $\alpha = \beta$. Таким образом, имеется единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$:

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. Из полученных неравенств следует, что число c ограничивает сверху числа a_n и снизу — числа b_n, так что выполнены неравенства

$$a_n \leqslant \sup\{a_n\} \leqslant c \leqslant \inf\{b_n\} \leqslant b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

из которых следует, что числа $\sup\{a_n\}$, $\inf\{b_n\}$ также принадлежат всем отрезкам $[a_n, b_n]$, а ввиду единственности общей точки, они равны друг другу: $\sup\{a_n\} = \inf\{b_n\} = c$. ◀

Замечание 1. Для интервалов и полуинтервалов множества действительных чисел принцип вложения несправедлив, например,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,\frac{1}{n}\right]=\varnothing.$$

Замечание 2. Для множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел принцип вложенных отрезков несправедлив, если под отрезком $[a,b]$ во множестве $\mathbb{Q}$ понимать пересечение отрезка числовой прямой, концы которого a, b — суть рациональные числа, с множеством $\mathbb{Q}$,

$$[a,b]\cap\mathbb{Q}=\{x\mid x\in\mathbb{Q}, a\leqslant x\leqslant b\}.$$

Например, если $\{a_n\}$ — множество десятичных приближений с недостатком, а $\{b_n\}$ — с избытком, имеющих n десятичных знаков после запятой, где $n=1, 2, \ldots,$ то

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}([a_n,b_n]\cap\mathbb{Q})=\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\right)\cap\mathbb{Q}=\varnothing$$

ввиду того, что общая часть $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{\sqrt{2}\}$ — иррациональное число, не лежащее в $\mathbb{Q}$.

Из определения предела последовательности следует, что каждая подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_n\}$ имеет тот же самый предел, конечный или бесконечный.

Обратное неверно: из того, что какая-то подпоследовательность сходится, не следует сходимость последовательности $\{x_n\}$.

Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ — расходящаяся, хотя и содержит две подпоследовательности, сходящиеся к (-1) и к 1.

5.7. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО—ВЕЙЕРШТРАССА

Теорема 5.8. Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу.

$\triangleright$ Доказательство. Пусть элементы последовательности $\{x_n\}$ лежат на отрезке $\Delta_0=[a;b]$. Разделим его пополам и обозначим через Δ_1 тот из двух получившихся отрезков, который содержит бесконечно много элементов x_n. Если обе эти половинки содержат бесконечно много элементов, то Δ_1 — та, что лежит справа. Выберем какой-нибудь элемент x_{n_1} последовательности $\{x_n\}$, лежащий на Δ_1.

Далее, обозначим самую правую половинку отрезка Δ_1, содержащую бесконечно много элементов x_n через Δ_2. Среди элементов x_n, лежащих на Δ_2, найдется элемент x_{n_2} с $n_2 > n_1$. Продолжая деление, получим систему вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_{k-1}$ и лежащие на них элементы x_{n_1}, $x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$.

На k-м шаге обозначим через Δ_k самую правую половинку отрезка Δ_{k-1}, содержащую бесконечно много элементов x_n, среди которых имеется элемент x_{n_k} с $n_k > n_{k-1}$. Обозначим буквой a общую точку, принадлежащую отрезкам Δ_k ($k = 1, 2, \ldots$). Построенная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет предел a. Теорема доказана. ◀

Теорема 5.8₁. Из всякой бесконечной последовательности действительных чисел, ограниченной или неограниченной, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$.

▷ Доказательство. Для ограниченной последовательности, сходящейся к конечному числу, утверждение доказано в теореме 5.8.

В том случае, когда последовательность не ограничена сверху (или снизу), для любого натурального числа k найдется такое натуральное число n_k, что $k < x_{n_k}$ (соответственно, $x_{n_k} < -k$), вследствие чего подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет бесконечный предел $+\infty$ или -∞. ◀

5.8. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема 5.9 (критерий сходимости Коши). Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$ выполнено при всех $n > N$ и $m > N$ (т. е. выполнено *условие Коши*).

▷ 1. Доказательство необходимости. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда, по определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ по числу $\dfrac{\varepsilon}{2}$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Для любых натуральных чисел $n > N$ и $m > N$ выполнены неравенства

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| =$$

$$= |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Условие Коши доказано.

2. Доказательство достаточности. Пусть выполнено условие Коши, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что неравенство $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполняется при всех $n > N$ и $m > N$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет конечный предел.

i) Докажем ограниченность последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Положим $\varepsilon = 2$ и подберем такое N, чтобы выполнялось неравенство $|x_n - x_m| < 1$ при всех $n > N$ и $m > N$. Зафиксируем какой-нибудь номер $m > N$. Тогда из неравенства $|x_n - x_m| < 1$ следует, что

$$1 > |x_n - x_m| \geqslant |x_n| - |x_m| \quad \Leftrightarrow \quad |x_n| < 1 + |x_m|.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ ограничена при всех $n > N$, а все ее значения при $1 \leqslant n \leqslant N$ имеют наибольшее и наименьшее значения.

ii) По теореме Больцано–Вейерштрасса, из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу c. Тогда при достаточно большом k выполнены неравенства $|x_{n_k} - c| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, и $n_k > N$. Следовательно, в неравенстве $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ можно взять $m = n_k$ и тогда получим неравенство $|x_n - x_{n_k}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, для любых $n > N$, $n_k > N$ имеют место неравенства

$$|x_n - c| = |(x_n - x_{n_k} + (x_{n_k} - c)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

из которых вытекает сходимость последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ◀

Замечание 1. Условие Коши можно сформулировать в иной форме, а именно: для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что выполнено неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и любых натуральных p.

Замечание 2. Критерию сходимости Коши можно придать следующую форму: последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши.

Замечание 3. Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, называются *сходящимися в себе*, или *фундаментальными*.

5.9. ТИПИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ И НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

На рис. 5.2 показаны ε-окрестности точки A на числовой прямой и на координатной плоскости Oxy, обозначаемые $U_\varepsilon(A)$, состоящие из таких точек M, что $\rho(A, M) < \varepsilon$, или $U_\varepsilon(A) = \{M \mid \rho(A, M) < \varepsilon\}$. При этом на числовой прямой $U_\varepsilon(A) = \{M(x) \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$, а на плоскости Oxy

$$U_\varepsilon(A) = \Big\{M(x, y) \mid \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} < \varepsilon\Big\}.$$

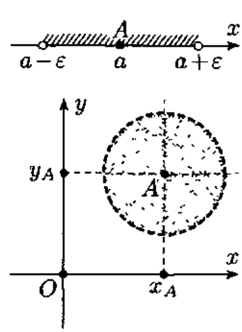


Рис. 5.2

Дадим основные определения и опишем свойства множеств точек, лежащих на числовой прямой и на координатной плоскости.

Определение 5.6. Точка A называется *предельной точкой* множества $\boldsymbol{A}$, если каждая окрестность точки A содержит хотя бы одну точку множества $\boldsymbol{A}$, отличную от нее самой.

На самом деле любая окрестность точки A содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\boldsymbol{A}$, из которых можно выделить бесконечную последовательность точек, сходящуюся к A.

Определение 5.7. Множество $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}'$, получаемое объединением множества $\boldsymbol{A}$ и множества $\boldsymbol{A}'$ всех его предельных точек, называется *замыканием* множества $\boldsymbol{A}$.

Множество $\boldsymbol{A}'$ всех предельных точек множества $\boldsymbol{A}$ называется его *производным множеством.*

Определение 5.8. Множество $\boldsymbol{A}$ называется *замкнутым*, если ни одна точка, не принадлежащая $\boldsymbol{A}$, не может быть предельной точкой для него.

Другими словами, любое замкнутое множество с о д е р ж и т в с е свои предельные точки, либо с о в с е м н е и м е е т предельных точек. Последнее означает, что пустое множество, конечное множество, множество точек с целочисленными координатами суть замкнутые множества.

Замыкание любого множества $\boldsymbol{A}$ есть замкнутое множество.

Определение 5.8$_1$. Множество $\boldsymbol{A}$ называется *открытым*, если каждая точка этого множества имеет окрестность, целиком содержащуюся в $\boldsymbol{A}$.

Открытое множество $\boldsymbol{A}$ состоит только из внутренних точек.

Частным случаем открытого множества является *область*.

Если множество $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ замкнуто, то $\mathbb{R} \setminus \boldsymbol{A}$ – открытое, и наоборот.

Определение 5.9. Точка P называется *внутренней* по отношению к множеству $\boldsymbol{A}$, если существует ε-окрестность точки P, лежащая в $\boldsymbol{A}$.

Определение 5.10. Множество всех внутренних точек множества $\boldsymbol{A}$ называется *ядром* $\boldsymbol{A}$ и обозначается $\boldsymbol{A}_1$.

Ядро $\boldsymbol{A}_1$ — открытое множество.

Определение 5.11. Точка P называется *граничной точкой* множества $\boldsymbol{A}$, если каждая окрестность точки P содержит хотя бы одну точку $\boldsymbol{A}$ и хотя бы одну точку дополнительного множества $\mathbb{R} \setminus \boldsymbol{A}$ (или $\mathbb{R}^2 \setminus \boldsymbol{A}$).

Определение 5.12. Множество всех граничных точек множества $\boldsymbol{A}$ называется *границей* $\boldsymbol{A}$ и обозначается символом $\boldsymbol{\Gamma_A}$.

Граница $\boldsymbol{\Gamma_A}$ множества $\boldsymbol{A}$ является замкнутым множеством. Любое замкнутое множество $\boldsymbol{A}$ является объединением своего ядра и границы: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{\Gamma_A}$.

Определение 5.13. Точка P называется *внешней* по отношению к множеству $\boldsymbol{A}$, если $P \notin \boldsymbol{A}$ и существует ε-окрестность точки P, не лежащая в $\boldsymbol{A}$, т. е. $U_\varepsilon(P) \cap \boldsymbol{A} = \varnothing$.

Каждая внешняя по отношению к множеству $\boldsymbol{A}$ точка имеет окрестность, заполненную только внешними точками, не являющихся предельными для $\boldsymbol{A}$. Поэтому множество $\boldsymbol{A}_2$ всех внешних точек множества $\boldsymbol{A}$ — открытое.

Определение 5.14. Точка $A \in \boldsymbol{A}$, обладающая такой окрестностью $U_\varepsilon(A)$, что $U_\varepsilon(A) \cap \boldsymbol{A} = \{A\}$, называется *изолированной* точкой множества $\boldsymbol{A}$.

Упражнение 5.7. Привести примеры точек и множеств точек, отвечающих определениям 5.6–5.14.

5.10. ТИПИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Приведем краткое описание множеств точек на комплексной плоскости (z).

Определение 5.15. Точка z_0 называется *предельной точкой* множества $\boldsymbol{E}$, если каждая окрестность точки z_0 содержит хотя бы одну точку множества $\boldsymbol{E}$, отличную от нее самой.

На самом деле, любая окрестность точки z_0 содержит бесконечное множество точек, принадлежащих $\boldsymbol{E}$, из которых можно выделить бесконечную последовательность точек, сходящуюся к z_0.

Определение 5.16. Множество $\boldsymbol{E}$ точек плоскости называется *ограниченным*, если все его точки располагаются внутри некоторого круга с центром в начале координат.

Определение 5.17. Множество $\boldsymbol{F}$ точек плоскости (ограниченное или неограниченное) называется *замкнутым*, если ни одна точка, не принадлежащая $\boldsymbol{F}$, не может быть предельной точкой для него.

Это означает, что любое замкнутое множество содержит все свои предельные точки, либо совсем не имеет предельных точек.

Определение 5.18. Точка A называется *внутренней* по отношению к множеству $\boldsymbol{E}$, если существует окрестность точки A, лежащая в $\boldsymbol{E}$.

Определение 5.19. Множество $\boldsymbol{E}$, состоящее только из внутренних точек, называется *открытым множеством.*

Определение 5.20. Точки, предельные для открытого множества $\boldsymbol{E}$, но не принадлежащие ему, называются *граничными* точками.

Определение 5.21. Совокупность всех граничных точек множества $\boldsymbol{E}$ образует *границу* $\boldsymbol{\Gamma}$ множества $\boldsymbol{E}$.

Граница $\boldsymbol{\Gamma}$ любого множества $\boldsymbol{E}$ является замкнутым множеством.

Определение 5.22. Множество $\overline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{\Gamma}$, получаемое объединением множества $\boldsymbol{E}$ и его границы $\boldsymbol{\Gamma}$, называется *замыканием* множества $\boldsymbol{E}$.

Замыкание множества $\boldsymbol{E}$, а также множество всех точек плоскости, не принадлежащих $\boldsymbol{E}$, суть замкнутые множества.

Множество всех точек плоскости, не принадлежащих $\boldsymbol{E}$, состоит из границы $\boldsymbol{\Gamma}$, а также из множества E_1 точек, не принадлежащих $\boldsymbol{E}$, и не являющихся предельными для него, называемых *внешними* точками.

Каждая внешняя точка имеет окрестность, заполненную только внешними точками. Поэтому множество E_1 всех внешних точек множества $\boldsymbol{E}$ является открытым множеством.

Частным случаем открытого множества является *область*.

Определение 5.23. Открытое множество E называется *связной о ластью*, если любые две точки $z, \zeta \in E$ можно соединить между собой ломаной линией, содержащейся в E (рис. 5.3).

В частном случае ломанная может сводиться к одному прямолинейному отрезку — и тогда область называется *выпуклой областью* (рис. 5.3, *а*).

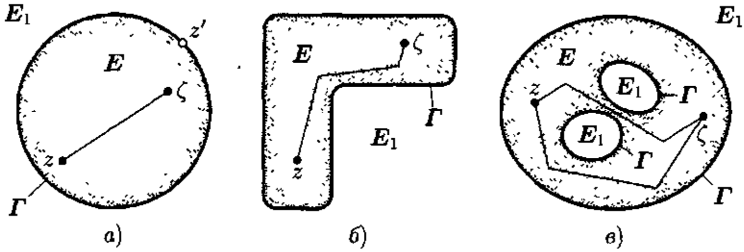


Рис. 5.3. Точки и связные множества комплексной плоскости

П р и м е р 5.5. 1. Точки z, удовлетворяющие неравенству $|z| < 1$, образуют область G – внутренность круга радиуса 1 с центром в точке O.

2. Граница этой области G — окружность Γ: $|z| = 1$.

3. Внешние точки по отношению к G отвечают неравенству $|z| > 1$. Они образуют область G_1 — внешность круга. Точка ∞ также внешняя по отношению к области G; она принадлежит G_1. Граница области G_1 — та же самая окружность Γ.

4. Каждая точка $z \in G$, является внешней по отношению к G_1. Совокупность всех точек, внешних по отношению к G_1, совпадает с G.

5.11. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО—ВЕЙЕРШТРАССА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Теорема 5.10. Из любой ограниченной последовательности точек $\{z_n\}$ всегда можно извлечь такую подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ ($n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, $n_k \to +\infty$), которая сходится к предельной точке.

$\triangleright$ Доказательство. 1. Ограничим бесконечную ограниченную последовательность $\{z_n\}$ квадратом $\boldsymbol{K}_0$, стороны которого имеют длину l и параллельны осям координат. Разделим стороны квадрата пополам и, соединяя середины противоположных сторон, разобьем $\boldsymbol{K}_0$ на четыре одинаковых квадрата $\boldsymbol{K}_0^{(1)}, \boldsymbol{K}_0^{(2)}, \boldsymbol{K}_0^{(3)}, \boldsymbol{K}_0^{(4)}$, а через $\boldsymbol{K}_1$ обозначим тот из этих четырех квадратов, который содержит бесконечно много элементов $\{z_n\}$. Если таких квадратов несколько, то пусть $\boldsymbol{K}_1$ обозначает тот из них, который лежит правее и выше других,

$$\boldsymbol{K}_0 = \bigcup_{\nu=1}^{\nu=4} \boldsymbol{K}_0^{(\nu)}$$

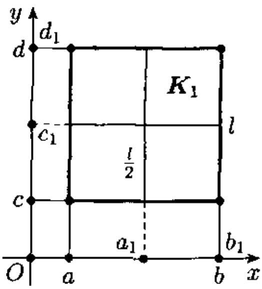


Рис. 5.4

(рис. 5.4). Выберем какой-нибудь элемент z_{n_1} последовательности $\{z_n\}$, лежащий в $\boldsymbol{K}_1$. На следующем этапе деления обозначим самую правую и верхнюю четверть квадрата $\boldsymbol{K}_1$, содержащую бесконечно много элементов $\{z_n\}$, через $\boldsymbol{K}_2$. Среди элементов $\{z_n\}$, лежащих в $\boldsymbol{K}_2$, найдется элемент с номером $n_2 > n_1$. Продолжая деление, получим систему вложенных квадратов $\boldsymbol{K}_1 \supset \boldsymbol{K}_2 \supset \ldots \supset \boldsymbol{K}_{k-1}$ и лежащие в них элементы $z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_{k-1}}$. На k-м шаге обозначим через $\boldsymbol{K}_k$ самую правую и верхнюю четверть квадрата $\boldsymbol{K}_{k-1}$, содержащую бесконечно много элементов $\{z_n\}$, среди которых имеется элемент с номером $n_k > n_{k-1}$, и т. д.

2. Проекциями квадратов $\boldsymbol{K}_k$ на действительную и мнимую оси являются вложенные отрезки, которые обозначим, соответственно, $[a_k, b_k]$ и $[c_k, d_k]$, при этом длина стороны квадрата $\boldsymbol{K}_k$

$$|b_k - a_k| = |d_k - c_k| = \frac{l}{2^k} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

По принципу вложенных отрезков отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = x_c; \quad \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} d_k = y_c;$$

при этом последовательность квадратов $\{\boldsymbol{K}_k\}$ стягивается в точку $z_c = (x_c, y_c)$, общую всем квадратам $\boldsymbol{K}_k$, а ввиду неравенств

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{и} \quad c_k \leqslant y_{n_k} \leqslant d_k,$$

можно сделать заключение, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_c$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_c$, поэтому построенная подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ сходится к точке $z_c = (x_c, y_c)$ как предельной. Теорема доказана. ◀

Следствие. Всякая бесконечная ограниченная последовательность точек на плоскости имеет предельную точку.

Теорема 5.11. Из всякой бесконечной последовательности точек $\{z_n\}$, ограниченной или неограниченной, можно выделить подпоследовательность точек, сходящуюся к конечной точке или бесконечно удаленной точке комплексной плоскости.

▷ Доказательство. Для бесконечной ограниченной последовательности точек, сходящейся к конечной точке, утверждение доказано в теореме 5.10. В том случае, когда последовательность неограниченна, для любого натурального числа k найдется такое натуральное число n_k, что $|z_{n_k}| > k$, и значит, подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ сходится к бесконечно удаленной точке комплексной плоскости. ◀

КОЛЛОКВИУМ ПО ТЕМЕ: ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Действительные числа

1. Аксиоматика Пеано натурального ряда. Метод математической индукции. Признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 5, 9, 10. Свойства рациональных чисел. Числовые неравенства. Иррациональные числа.

2. Сечение на множестве рациональных чисел. Множество действительных чисел. Арифметические действия с числами. Модуль числа.

3. Десятичные дроби. Периодические и непериодические дроби. Границы числовых множеств.

4. Обобщение понятия угла. Числовая окружность.

Числовые последовательности

1. Арифметическая и геометрическая прогрессии: формула общего члена, сумма первых n членов, характеристическое свойство.

2. Свойства числовых последовательностей.

2.1. Сумма, разность, произведение и частное последовательностей.

2.2. Свойство монотонности. Свойство ограниченности последовательностей (сверху, снизу, сверху и снизу).

2.3. Изображение последовательности на числовой прямой. График числовой последовательности.

Степень действительного числа

1. Свойства степеней числа с натуральным и целым показателем.

2. Арифметический и алгебраический корень. Доказать существование и единственность арифметического корня.

3. Степень числа с рациональным показателем. Неравенство Бернулли.

4. Свойства степени числа с действительным показателем.

5. Основное логарифмическое тождество. Свойства логарифма числа. Формула перехода к новому основанию.

Начала тригонометрии

1. Соответствие между множеством действительных чисел и мерой угла в радианах. Геометрическая интерпретация тригонометрических функций на координатной окружности.

2. Синус и косинус числа. Построить графики соответствий $(t, \sin t)$, $(t, \cos t)$.

3. Тангенс и котангенс числа. Построить графики соответствий $(t, \operatorname{tg} t)$, $(t, \operatorname{ctg} t)$.

4. Доказать основное тригонометрическое тождество и следствия.

5. Доказать теоремы сложения. Вывести формулы приведения.

6. Вывести формулы двойных и половинных углов. Вывести формулы тригонометрических функций через тангенс половинного угла.

7. Вывести формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение. Вывести формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Следствия.

Комплексные числа

1. Комплексная плоскость. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

2. Комплексно сопряженные числа. Теоремы о сопряженности суммы и произведения комплексно сопряженных чисел.

3. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.

4. Конформные отображения комплексной плоскости.

Предел последовательности

1. Определение предела последовательности.

2. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями.

3. Теоремы о сумме и произведении бесконечно малых последовательностей и о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей.

4. Необходимые условия сходящейся последовательности (ограниченность, единственность предела).

5. Признаки сходимости последовательности. Теорема Вейерштрасса.

6. Арифметические теоремы о пределах последовательностей.

7. Теорема о последовательности, ее пределе и бесконечно малой последовательности.

8. Теоремы о пределах последовательностей: о стабилизации знака последовательности, о предельном переходе в неравенстве, о пределе промежуточной последовательности.

9. Число Эйлера. Натуральный логарифм числа. Экспонента.

10. Типизация множеств точек на прямой и на плоскости.

11. Принцип вложенных отрезков. Метод Больцано.

12. Теорема Больцано—Вейерштрасса.

ЧАСТЬ 2

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

ГЛАВА 6 ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

6.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Функция является одним из основных понятий математики.

Определение 6.1. 1) Если каждому значению х из числового множества $\boldsymbol{X}$ ставится в соответствие по определенному правилу f единственное число y, $f\colon x \to y$, или $x \xrightarrow{f} y$, то говорят, что на множестве $\boldsymbol{X}$ задана *функция* $y = f(x)$.

2) Переменная x называется *аргументом* функции, или *независимой переменной.*

3) Переменная y называется *зависимой переменной*, или значением функции, отвечающим значению x.

Определение 6.2. Совокупность всех значений аргумента, которым соответствуют определенные действительные значения функции $f(x)$, называется *областью определения* $\boldsymbol{D}(f)$ функции $f(x)$.

Определение 6.3. Множество чисел y, для которых существует такое число $x \in \boldsymbol{D}(f)$ что $y = f(x)$, называется *областью изменения*, или *множеством значений* $\boldsymbol{E}(f)$ функции $y = f(x)$.

Определение 6.4. *Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество $\boldsymbol{\Gamma}_f$ всех точек на координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где x — произвольное число из области $\boldsymbol{D}(f)$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_f\{(x;y) \mid x \in \boldsymbol{D}(f),\ y = f(x)\}.$$

Если $f(x_0) = 0$, то точка с координатами $(x_0, 0)$ лежит на пересечении графика $\boldsymbol{\Gamma}_f$ с осью абсцисс; такое число x_0 называется *нулем* функции $y = f(x)$. Если $\{0\} \in \boldsymbol{D}(f)$, то точка $(0; f(0))$ лежит на пересечении графика $\boldsymbol{\Gamma}_f$ с осью ординат.

Определение 6.5. Подмножество $\boldsymbol{X}$ называется *промежутком знакопостоянства* функции $y = f(x)$, если либо $(\forall x \in \boldsymbol{X})\colon (f(x) > 0)$, либо $(\forall x \in \boldsymbol{X})\colon (f(x) < 0)$.

Функция может быть задана с помощью формулы (аналитический способ задания); с помощью графика; описательно, с помощью алгоритма или таблично (как степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции), например, как в табл. 6.1.

Упражнение 6.1. Существует ли числовая функция, область определения которой состоит из 7 чисел, а множество значений

а) из 12 чисел; б) из 3 чисел; в) из 5 чисел?

Определение 6.6. *Сложная функция*, или *суперпозиция* функций — функция от функции. Если переменная z является функцией переменной y, т. е. $z = f(y)$, а y — функция от x, т. е. $y = g(x)$, то z является сложной функцией от переменной x, т. е. $z = f(g(x))$, определенной для тех значений x, для которых $\boldsymbol{E}(g) \subseteq \boldsymbol{D}(f)$.

В этом случае говорят, что z является *сложной функцией* независимой переменной x, а y — *промежуточный аргумент*. Таким образом, сложная функция есть результат суперпозиции функций $y = g(x)$ и $f(y)$: $z = (f \circ g)(x)$.

Удобнее всего проиллюстрировать введение сложной функции с помощью табл. 6.2.

Таблица 6.1

x	$y = f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
...	...

Таблица 6.2

x	$y = g(x)$	$z = f(y)$
x_1	$y_1 = g(x_1)$	$f(y_1)$
x_2	$y_2 = g(x_2)$	$f(y_2)$
...	...	...

Пример 6.1. Положим $z = y^2$, $y = \sin x$; тогда $z = \sin^2 x$. Функция $z(x)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

Пример 6.2. Пусть $z = \sqrt{y}$, $y = \operatorname{tg} x$; тогда $z = \sqrt{\operatorname{tg} x}$. Функция $z(x)$ определена при тех $x \in \mathbb{R}$, для которых выполнено неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant 0$.

Упражнение 6.2. Чем отличаются области определения функций
1) $\sqrt{x^2}$ и $(\sqrt{x})^2$; 2) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$ и $(\sqrt{\operatorname{tg} x})^2$?

Упражнение 6.3. Привести примеры функций, для которых

$$f(f(x)) = x \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Упражнение 6.4. Найти все функции, удовлетворяющие условиям:

1) $$2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \qquad \text{для всех } x \neq 0;$$

2) $$f(x) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot f(1 - x) = 1 \qquad \text{для всех } x \in \mathbb{R};$$

3) $$f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1 \qquad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}.$$

(Указания. 1) Вывести систему уравнений, из которой найти $f(x)$:

$$\begin{cases} 2f(x) - 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2, \\ 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 3f(x) = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

3) Запишем данное равенство в виде

$$(f(x) - 1) \cdot (f(y) - 1) = xy.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{y}{f(y) - 1} \quad \text{при } x \neq 0,\ f(y) \neq 1,$$

а также равенства $f(x) = cx + 1$ при $x \neq 0$; $c = \dfrac{1}{c}$, или $c \in \{-1; 1\}$, откуда $f(x) = x + 1$ или $f(x) = -x + 1$ для $x \neq 0$. При $x = 0$ значение $f(0) = 1$.)

6.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(x)$ и линейные функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ определены на множестве $\mathbb{R}$:

$$\lambda(x) = kx + b, \quad \mu(x) = lx + c, \quad k \cdot l \neq 0.$$

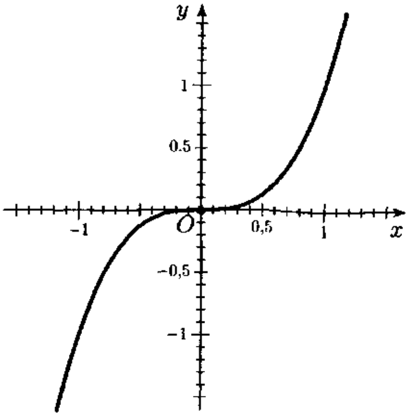


Рис. 6.1. График функции $y = x^3$

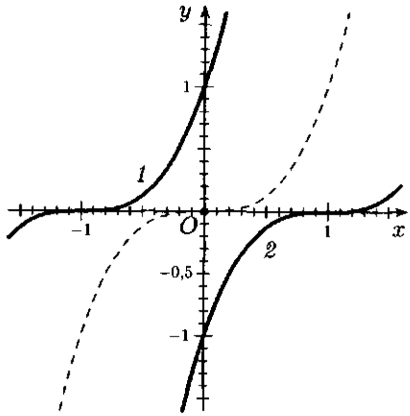


Рис. 6.2. Графики функций *1)* $y = (x+1)^3$, *2)* $y = (x-1)^3$

1. Определим *левую суперпозицию* с линейной функцией

$$(\lambda \circ f)(x) = \lambda(f(x)) = k\,f(x) + b.$$

График суперпозиции

$$y = \lambda(f(x)) = k\,f(x) + b$$

можно получить их графика функции $y = f(x)$ с помощью такой последовательности *элементарных линейных преобразований:*

$$y = f(x) \;\to\; y = f_1(x) = k\,f(x) \;\to\; y = f_2(x) = f_1(x) + b.$$

i) График функции $y = k\,f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью *растяжения* ($|k| > 1$) (*сжатия* ($|k| < 1$)) *от оси абсцисс* с коэффициентом $|k| \neq 1$. При этом точка графика с координатами (x, y) перейдет в точку (x, ky).

ii) Если $k = -1$, то график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс. При этом точка графика с координатами (x, y) перейдет в точку $(x, -y)$.

Если $k < 0$ ($k = -|k|$), то сначала получаем симметричный график, а потом производим его растяжение (сжатие) от оси абсцисс.

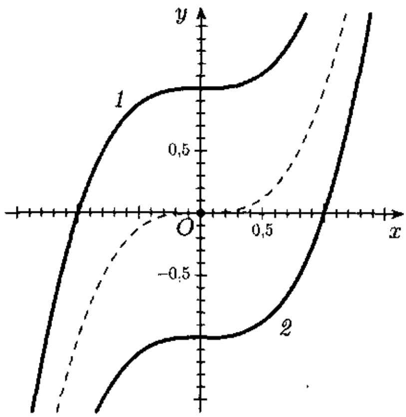


Рис. 6.3. Графики функций
1) $y = x^3 + 1$, *2*) $y = x^3 - 1$

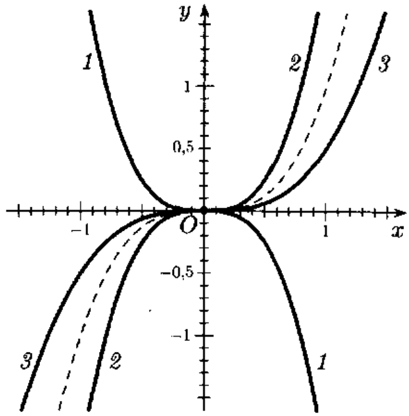


Рис. 6.4. Графики функций
1) $y = -2x^3$, *2*) $y = 2x^3$, *3*) $y = \dfrac{1}{2}x^3$

iii) График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси ординат. Точка графика с координатами (x, y) перейдет в точку $(x, y + b)$. При этом перенос графика происходит «вверх», если $b > 0$, и «вниз», если $b < 0$.

2. Определим *правую суперпозицию* с линейной функцией:

$$(f \circ \mu)(x) = f(\mu(x)) = f(lx + c) = f\left(l\left(x + \frac{c}{l}\right)\right).$$

График суперпозиции

$$y = f(\mu(x)) = f\left(l\left(x + \frac{c}{l}\right)\right)$$

можно получить их графика функции $y = f(x)$ с помощью такой последовательности *элементарных линейных преобразований*:

$$y = f(x) \;\to\; y = f_1(x) = f(lx) \;\to\; y = f_2(x) = f_1\left(x + \frac{c}{l}\right).$$

iv) График функции $y = f(lx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью *растяжения от оси ординат* с коэффициентом $|l|^{-1}$, если $|l| < 1$ или *сжатия* с коэффициентом $|l|$, если $|l| > 1$. При этом точка графика с координатами (x, y) перейдет в точку (lx, y).

v) Если $l = -1$, то график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси ординат.

Если $l < 0$ $(l = -|l|)$, то сначала получаем симметричный график, а потом производим его растяжение (сжатие) от оси ординат.

vi) График функции $y = f\left(x + \dfrac{c}{l}\right)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью переноса вдоль оси абсцисс, при котором точка графика с координатами (x, y) перейдет в точку $\left(x - \dfrac{c}{l}, y\right)$. При этом перенос происходит на $\left|\dfrac{c}{l}\right|$ единиц «вправо», если $\dfrac{c}{l} < 0$, и «влево», если $\dfrac{c}{l} > 0$.

3. Суперпозиция функций $\lambda(x)$, $f(x)$ и $\mu(x)$ имеет вид

$$(\lambda \circ f \circ \mu)(x) = \lambda(f(\mu(x))) = k\,f(lx+c)+b = k\,f\left(l\left(x + \frac{c}{l}\right)\right)+b.$$

График суперпозиции

$$(\lambda \circ f \circ \mu)(x) = k\,f\left(l\left(x + \frac{c}{l}\right)\right) + b$$

можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью последовательности элементарных преобразований i)—vi):

$$y = f(x) \ \to\ y = f_1(x) = f(lx) \ \to\ y = f_2(x) = f_1\left(x + \frac{c}{l}\right) \ \to$$

$$\to\ y = f_3(x) = k\,f_2(x) \ \to\ y = f_4(x) = f_3(x) + b.$$

На рис. 6.1–6.4 показаны графики суперпозиций линейных функций и функции $y = x^3$.

Упражнение 6.5. 1) Найти все такие линейные функции $\lambda(x)$, для которых $\lambda(\lambda(x)) = \lambda(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

2) Найти все линейные функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$, такие, что $\lambda(\mu(x)) \equiv \equiv \mu(\lambda(x))$.

3) Обладает ли суперпозиция линейных функций свойством коммутативности?

Упражнение 6.6. 1) Записать функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ для суперпозиций, графики которых изображены на рис. 6.2–6.4.

2) Построить графики функций:

а) $y = (3x+1)^3 + 2$; б) $y = (4x-1)^4 - 3$.

6.3. СВОЙСТВО ПЕРИОДИЧНОСТИ ФУНКЦИИ

Определение 6.7. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$, называемое *периодом* функции, такое, что для любого x из области определения функции $\boldsymbol{D}(f)$ выполнены свойства

$$\text{а)}\ \ x+T \in \boldsymbol{D}(f),\ x-T \in \boldsymbol{D}(f), \quad \text{б)}\ \ f(x) = f(x+T).$$

Символическая запись этого определения имеет вид:

$$(\exists T \neq 0)\,(\forall x \in \boldsymbol{D}(f)):$$
$$(x+T \in \boldsymbol{D}(f), x-T \in \boldsymbol{D}(f))\,(f(x) = f(x+T)).$$

Наименьшее число $T > 0$ называется *основным периодом* функции $f(x)$.

Пример 6.3. Доказать, что функция $y = \sin(\omega x + b)$ периодическая и найти ее основной период.

▷ Решение. Найдем период функции $y = \sin(\omega x + b)$, если он существует. Пусть данная функция периодическая с периодом T, и выполнено равенство

$$y = \sin(\omega x + b) = \sin(\omega(x+T) + b),$$

из которого получим уравнение, позволяющее найти T:

$$\sin(\omega x + b) = \sin(\omega(x+T) + b)$$

Выполним эквивалентные преобразования полученного уравнения:

$$\sin(\omega x + b) = \sin(\omega(x+T) + b) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \sin(\omega x + b) - \sin(\omega(x+T) + b) = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2\sin\frac{(\omega x+b)-(\omega(x+T)+b)}{2}\cdot\cos\frac{(\omega x+b)+(\omega(x+T)+b)}{2} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\sin\frac{\omega T}{2} = 0, \\ &\cos\left(\omega x + b + \frac{\omega T}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{\omega T}{2} = n\pi, \\ &\omega x + b + \frac{\omega T}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &T = \frac{2n\pi}{\omega}, \\ &T = \frac{\pi + 2k\pi}{\omega} - 2\left(x + \frac{b}{\omega}\right) \end{aligned}\right. \quad (n, k \in \mathbb{Z}).$$

Второе из найденных выражений для T зависит от x и не удовлетворяет определению периода функции. Формула $T = \frac{2n\pi}{\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$, задает бесконечное множество чисел, наименьшее положительное из которых — число $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega|}$. При любом x значения $x - T_0$ и $x + T_0$ принадлежат $D(y)$. Равенства $f(x) = f(x - T_0) = f(x + T_0)$ также выполнены.

Следовательно, полученное число T_0 удовлетворяет определению периода и допущение о периодичности функции $y = \sin(\omega x + b)$, положенное в основу этого анализа, истинно. ◀

Упражнение 6.7. Чему равен основной период функции $y = 1$?
Упражнение 6.8. Чему равен период функции Дирихле?
(Указание. Определение функции Дирихле дано в п. 6.11.)

Из определения периодичности вытекают утверждения 1—4.

1. Область определения периодической функции содержит положительные и отрицательные числа, сколь угодно большие по абсолютной величине.

Например, функция $y = \lg(-x)$ — непериодическая, так как ни одно из чисел $x \geqslant 0$ не лежит в области ее определения.

Функция $f(x) = \cos\sqrt{x}$ непериодическая по той же причине. Ее область определения $D(f) = [0; +\infty)$, и для любого $T > 0$ можно взять число $x' = \frac{T}{2}$, лежащее в $D(f)$. При этом число $x' - T = -\frac{T}{2} < 0$ не принадлежит $D(f)$. В случае $T < 0$ можно взять $x' = 0$.

2. Периодическая функция принимает каждое свое значение в бесконечном числе точек x, среди которых имеются как положительные, так и отрицательные числа, сколь угодно большие по абсолютной величине. По этой причине, например, строго монотонная функция не может быть периодической.

3. Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, ограничена на некотором отрезке $[x'; x' + |T|]$, лежащем в области определения, то она ограничена.

Например, если периодическая функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то существует такое число $N > 0$, что неравенство $|f(x)| \leqslant N$ выполнено для всех действительных чисел x.

Если T_f — наименьший положительный период функции $f(x)$, то любое положительное число $0 < t < T_f$ не является периодом функции $f(x)$.

Самые известные примеры периодических функций — это тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс; постоянная и др. Постоянная не имеет наименьшего положительного периода.

Функция $f(x) = \dfrac{x}{x}$ *равна* 1 *при* $x \neq 0$, и не определена при $x = 0$. Эта функция непериодична, так как условие а) в определении 6.7 не выполнено ни при каком $T \neq 0$. В самом деле, для любого $T \neq 0$ можно взять число $x' = T \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \boldsymbol{D}(f)$, при этом число $x' - T = 0 \notin \boldsymbol{D}(f)$.

4. Периодическая функция не может иметь в своей области определения конечного числа точек разрыва.

Теорема 6.1. Если T_f — наименьший положительный период функции $f(x)$, то любой период T этой функции имеет вид nT_f, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и обратно, всякое число вида nT_f — период $f(x)$.

$\triangleright$ Доказательство. i) Обратное утверждение вытекает из простого наблюдения: если T_1 и T_2 — периоды функции $f(x)$, то сумма $T_1 + T_2$ и разность $T_1 - T_2$ — также периоды $f(x)$.

ii) Докажем прямую теорему методом «от противного». Допустим, что период T нельзя представить в виде $n \cdot T_f$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда T лежит между соседними целыми кратными числа T_f, а именно

$$n' \cdot T_f < T < (n'+1) \cdot T_f.$$

Это неравенство эквивалентно следующему:

$$n' \cdot T_f - n' \cdot T_f < T - n' \cdot T_f < (n'+1) \cdot T_f - n' \cdot T_f \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < T - n' \cdot T_f < T_f.$$

Таким образом, число $T' = T - n' \cdot T_f$, равно разности периодов $f(x)$, и значит, само — период $f(x)$ — оказалось меньше основного периода T_f и, следовательно, не может быть периодом функции $f(x)$.

Принятое допущение привело к противоречию. Это доказывает, что оно неверно. Следовательно, $T = nT_f$. Теорема доказана. ◀

Теорема 6.2. Если основные периоды периодических функций $f(x)$ и $g(x)$ соизмеримы, т. е. отношение $\dfrac{T_f}{T_g}$ — рациональное число, то сумма, разность и произведение этих функций периодичны.

В том случае, когда дробь $\dfrac{T_f}{T_g}$ — иррациональное число, сумма и произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ суть непериодические функции.

Теорема 6.3. Если $f(x)$ — периодическая функция с основным периодом T_f и $\boldsymbol{D}(f) = \mathbb{R}$, то суперпозиция $\Phi(x) = c \cdot f(ax+b) + d$, $ac \neq 0$ — также периодическая функция с основным периодом $T_\Phi = \dfrac{T_f}{a}$.

▷ Доказательство. i) Непосредственной проверкой убедимся, что $\dfrac{T_f}{a}$ — период функции $\Phi(x)$.

ii) Пусть основной период функции $\Phi(x)$, если он существует, равен T_Φ. Из равенства $\Phi(x+T_\Phi) = \Phi(x)$ и условия теоремы получим равенство $a(x+T_\Phi) - ax = T_f$, откуда следует, что $T_\Phi = T_f/a$. ◀

Упражнение 6.9. Найти общий период функций $y = \sin 11x$ и $y = \cos 5x$.

▷ Решение. Функция $y = \sin 11x$ имеет период $T_1 = \frac{2n\pi}{11}$, $n \in \mathbb{Z}$, а функция $y = \cos 5x$ — период $T_2 = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. Общий период $T = T_1 = T_2$ при некоторых n и k (T — кратное T_1 и T_2). Следовательно, наименьший общий период есть наименьшее общее кратное чисел T_1 и T_2:

$$T_0 = \text{НОК}(T_1; T_2) = \frac{2\pi}{55} \cdot \text{НОК}(5; 11) = \frac{2\pi}{55} \cdot 55 = 2\pi. \quad ◀$$

Упражнение 6.10. Доказать, что функции $y = \sin 9x$ и $y = \cos\sqrt{7}x$ не имеют общего периода.

(Указание. Здесь $T_1 = \frac{2n\pi}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$; $T_2 = \frac{2k\pi}{\sqrt{7}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Условие $T = T_1 = T_2$ при некоторых n и k позволяет получить равенство $\frac{2n\pi}{9} = \frac{2k\pi}{\sqrt{7}}$, n, $k \in \mathbb{Z}$, из которого следует, что $\frac{9k}{n} = \sqrt{7}$, что невозможно, так как число $\sqrt{7}$ — иррациональное.)

Упражнение 6.11. Доказать непериодичность функции

$$y = \cos(\sqrt{2} \cdot x) + \cos x.$$

Упражнение 6.12. Может ли сумма двух непериодических функций быть периодической?

Пример 6.4. При каких целых n функция

$$f(x) = \cos nx \cdot \sin\left(\frac{15x}{n^2}\right)$$

удовлетворяет условию $f(x + 5\pi) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$?

▷ Решение. По условию задачи, при всех $x \in \mathbb{R}$, а значит, и при $x = 0$, выполнены равенства

$$f(0) = \cos(n \cdot 0) \cdot \sin\left(\frac{15 \cdot 0}{n^2}\right) = 0,$$

$$f(0 + 5\pi) = \cos(5\pi n) \cdot \sin\left(\frac{15 \cdot 5\pi}{n^2}\right).$$

Условие $f(0) = f(5\pi) = 0$ позволяет получить уравнение

$$\cos(5\pi n) \cdot \sin\left(\frac{15 \cdot 5\pi}{n^2}\right) = 0,$$

эквивалентное, ввиду неравенства $\cos(5\pi n) = (-1)^n \neq 0$, уравнению

$$\sin\left(\frac{75\pi}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{75\pi}{n^2} = \pi k \Leftrightarrow \frac{75}{n^2} = k \Leftrightarrow n^2 = \frac{75}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Число 75 имеет два делителя, являющихся квадратами целых чисел, — это 1 и 25, откуда $n \in \{-5; -1; 1; 5\}$. Проверка показывает, что эти числа удовлетворяют условию задачи. ◀

Ответ: $\{-5; -1; 1; 5\}$.

Пример 6.5. Доказать, что функция $f(x) = x^2 \cos x$ — непериодическая.

▷ Доказательство. Функция $f(x)$ определена на $D(f) = \mathbb{R}$.

i) Докажем, что $f(x)$ не ограничена на $\mathbb{R}$. Для произвольного натурального числа N возьмем число $x' = 2\pi N$. Значение

$$|f(x')| = 4\pi^2 \cdot N^2 \cdot \cos(2\pi N) = 4\pi^2 \cdot N^2 > 36N^2.$$

Следовательно, функция $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ — неограниченная.

ii) Если бы $f(x)$ была периодической, то в соответствии с утверждением 3 она должна быть ограниченной при $x \in \mathbb{R}$, что противоречит неограниченности $f(x)$ на $\mathbb{R}$. Таким образом, антитеза неверна. Функция $f(x)$ — непериодическая. ◀

6.4. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ И СООТВЕТСТВИЙ

Определение 6.8. 1) Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого $x \in D(f)$ число $(-x)$ тоже лежит в $D(f)$ и $f(x) = f(-x)$.

2) Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого $x \in D(f)$ число $(-x)$ тоже лежит в $D(f)$ и $f(-x) = -f(x)$.

3) Функция $y = f(x)$ называется функцией *общего положения*, или *общего вида*, если она не является ни четной, ни нечетной.

Упражнение 6.13. Чем отличаются множества нечетных функций и не четных функций?

Упражнение 6.14. Используя определения четной и нечетной функции, докажите самостоятельно утверждения 1—13.

1. Сумма и разность четных функций — четная функция.

2. Сумма и разность нечетных функций — нечетная функция.

3. Произведение четной функции на число — четная функция.

4. Произведение нечетной функции на число — нечетная функция.

5. Произведение четной функции на четную функцию, а также нечетной функции на нечетную функцию — четная функция.

6. Произведение четной функции на нечетную функцию — нечетная функция.

7. Суперпозиция четной и нечетной функций (или наоборот) — четная функция.

8. Суперпозиция четных функций — четная функция.

9. Суперпозиция нечетных функций — нечетная функция.

10. Если функция общего положения имеет область определения, симметричную относительно начала координат, то ее можно представить в виде суммы четной и нечетной функций с той же самой областью определения.

(Указание. Докажите, что функция $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ — четная, функция $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ — нечетная, а затем воспользуйтесь равенством $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$.)

11. Имеется функция, обладающая свойствами четной и нечетной функций (привести пример).

12. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

13. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Свойство четности применяется при построения графиков функций и соответствий. Сформулируем утверждения 14, 15.

14. Если $k \neq 0$, то график линейной функции $y = kx + b$ пересекает ось абсцисс в точке $M_0\left(-\dfrac{b}{k}; 0\right)$. Покажем, что

точка M_0 есть центр симметрии графика линейной функции. Пусть $x_1 = -\frac{b}{k} + \xi$, $x_2 = -\frac{b}{k} - \xi$, и $\xi > 0$. Вычислим $y(x_1)$ и $y(x_2)$: $y(x_1) = kx_1 + b = k\xi$, $y(x_2) = kx_2 + b = -k\xi$. Очевидно, $y(x_1) = -y(x_2)$, а точки $M_1\left(-\frac{b}{k} + \xi; k\xi\right)$ и $M_2\left(-\frac{b}{k} - \xi; -k\xi\right)$ симметричны относительно точки M_0.

Поэтому, во-первых, точка M_0 является центром симметрии графика функции $y = f(kx+b)$, если $f(x)$ нечетная функция; во-вторых, график функции $y = f(kx+b)$ имеет ось симметрии $x = -\frac{b}{k}$, если $f(x)$ четная функция. Так, в случае четной функции $f(x)$ график суперпозиции $y = f(x-a)$ имеет ось симметрии $x = a$.

15. Пусть множество $\boldsymbol{M}$ является геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x-a, y-b) = 0$. Тогда:

1) если формула $F(x,y)$ при любом допустимом значении $y = y_0$ обладает свойством $F(x, y_0) = F(-x, y_0)$, то множество $\boldsymbol{M}$ симметрично относительно прямой $x = a$;

2) если формула $F(x,y)$ при любом допустимом значении $x = x_0$ обладает свойством $F(x_0, y) = F(x_0, -y)$, то множество $\boldsymbol{M}$ симметрично относительно прямой $y = b$ *).

Пример 6.6. Построить график функции

$$y = x^2 + |x-3| - 6x + 7.$$

▷ Построение. 1. Преобразуем данную функцию к виду $y = f(x-3) = (x-3)^2 + |x-3| - 2$, где $f(x) = x^2 + |x| - 2$ — четная функция. По предыдущему, график функции $y = f(x-3)$ имеет ось симметрии $x = 3$.

2. При $x \geqslant 3$ функция имеет вид $y = x^2 - 5x + 4$. Ветвь полученной параболы отразим симметрично относительно прямой $x = 3$ (рис. 6.5). ◀

*) *Я. М. Клейман.* Оси симметрии графиков функций // Математика в школе. — 1972. — № 3. — С. 30—32.

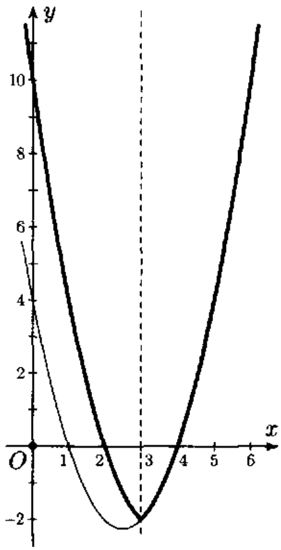


Рис. 6.5

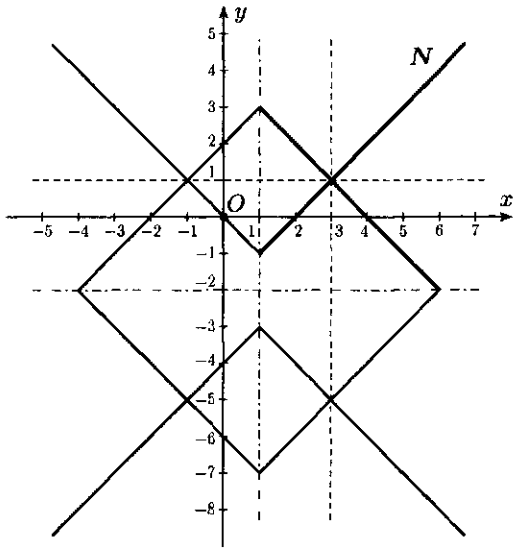


Рис. 6.6

Пример 6.7. Построить геометрическое множество точек координаты которых удовлетворяют уравнению

$$||y+2|-3| = |2-|x-1||.$$

▷ Построение. 1. Данное отношение имеет вид $F(x-1, y+2) = 0$, причем функция $F(x,y) = ||y|-3| - |2-|x||$ — четная относительно неизвестных x и y. Согласно утверждению 15, искомое ГМТ симметрично относительно прямых $x = 1$ и $y = -2$.

2. На множестве точек с координатами $x \geqslant 1$ и $y \geqslant -2$, уравнение $F(x-1, y+2) = 0$ имеет вид $|y-1| = |x-3|$, что эквивалентно уравнению $G(x-3, y-1) = 0$, причем функция $G(x,y) = |y| - |x|$ — четная относительно переменных x и y, а соответствующее множество точек N симметрично относительно прямых $x = 3$ и $y = 1$. При $x \geqslant 3$ и $y \geqslant 1$ уравнение $G(x-3, y-1) = 0 \Leftrightarrow y = x-2$. Выделим часть множества N, лежащую в области $x \geqslant 1$, $y \geqslant -2$, затем воспользуемся симметрией искомого ГМТ относительно прямых $x = 1$, $y = -2$ и получим график данного соответствия (рис. 6.6). ◀

6.5. МАКСИМУМ И МИНИМУМ ФУНКЦИИ

Определение 6.9. *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал (a, b) числовой прямой, содержащий эту точку.

Так, интервал $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где число $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью точки x_0.

Определение 6.10. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Определение 6.11. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Точки максимума и точки минимума функции, называемые также *точками экстремума* функции — внутренние, так как вместе с некоторой своей окрестностью лежат в области $D(f)$.

Пример 6.8. 1. Рассмотрим функцию $f(x) = (x-1)^2+11$. График функции $f(x)$ показан на рис. 6.7. При $x_0 = 1$ функция $f(x)$ принимает минимальное значение, так как для всех $x \neq 1$ выполняется неравенство $f(x) > f(1) = 11$. По той же причине, число 11 является наименьшим значением функции $f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

2. а) Функция $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ имеет точку минимума $x = 1$, так как для всех $x \in (0; +\infty)$ выполнено неравенство

$$0 \leqslant \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} - 2,$$

откуда $f(x) \geqslant f(1) = 2$.

б) Функция $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ имеет точку максимума $x = -1$, так как для всех $x \in (-\infty; 0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant$ $\leqslant f(-1) = -2$.

Отметим, что в этом примере точки минимума и максимума суть *локальные экстремумы*, и в точке локального максимума значение функции меньше, чем в точке локального минимума функции $f(x)$: $f(-1) = -2 < f(1) = 2$.

6.6. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Определение 6.12. 1) Число M_0 называется *наибольшим значением* функции $y = f(x)$ на множестве $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{D}(f)$, или $M_0 = \max\limits_{x \in \boldsymbol{X}} f(x)$, если для любого числа $x \in \boldsymbol{X}$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant M_0$, кроме того существует такое число $x_1 \in \boldsymbol{X}$, для которого $f(x_1) = M_0$.

2) Число m_0 называется *наименьшим значением* функции $y = f(x)$ на множестве $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{D}(f)$, или $m_0 = \min\limits_{x \in \boldsymbol{X}} f(x)$, если для любого числа $x \in \boldsymbol{X}$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant m_0$, кроме того существует такое число $x_2 \in \boldsymbol{X}$, для которого $f(x_2) = m_0$.

Точки наибольшего и наименьшего значений функции могут совпасть с точками экстремума функции, но могут лежать и на границе области определения $\boldsymbol{D}(f)$.

Например, функция $f(x) = (x-1)^2+11$ имеет на отрезке $[0; 3]$ наименьшее значение $f(1) = 11$ и наибольшее значение $f(3) = 15$ (рис. 6.7).

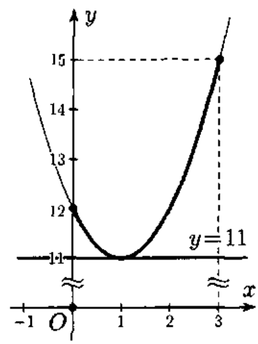


Рис. 6.7

Упражнение 6.15. Указать точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-4; 6]$ функции, график которой показан на рис. 6.9.

Иногда задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции сводится к решению эквивалентной алгебраической задачи.

Пример 6.9. Найти наименьшее значение квадратичной функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0; \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\triangleright$ Решение. Рассмотрим эквивалентную задачу.

Из пучка паралельных прямых $y = t$ найти такую прямую, которая пересекает график данной функции в единственной точке (как прямая $y = 11$ на рис. 6.7).

Первоначальная задача сводится к определению значения t, при котором имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y = t. \end{cases}$$

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = t \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c - t = 0 \tag{6.1}$$

имеет единственный корень тогда и только тогда, когда дискриминант

$$b^2 - 4a(c - t) = 0. \tag{6.1_1}$$

Уравнение (6.1_1) — линейное по t, оно имеет решение $t = -\dfrac{D}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Подставим найденное значение t в уравнение (6.1) и найдем соответствующее значение неизвестной x:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 4(ax)^2 + 4abx + b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2ax + b)^2 = 0,$$

откуда $x = -\dfrac{b}{2a}$. ◀

Замечание. В этой точке сливаются корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ при $D = 0$. По этой причине корень $\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ называется *кратным* корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Ответ: Наименьшее значение квадратичной функции достигается при $x = -\dfrac{b}{2a}$ и равно $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{D}{4a}$.

Кратный корень не всегда соответствует экстремуму. Проиллюстрируем этот факт примером.

Пример 6.10. Решим графически уравнение $x^3 - \varepsilon^2 x = 0$, $\varepsilon > 0$, имеющее корни $\{-\varepsilon; 0; \varepsilon\}$. Оно эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = \varepsilon^2 x, \end{cases} \tag{6.2}$$

которым соответствуют кривые *1*, *2*, изображенные на рис. 6.8.

Корням $\{-\varepsilon; 0; \varepsilon\}$ системы (6.2) соответствуют три точки пересечения кубической параболы $y = x^3$ и прямой $y = \varepsilon^2 x$. При $\varepsilon \to 0$ секущая приближается к прямой $y = 0$, и при $\varepsilon = 0$ точки пересечения сливаются в одну точку. При этом ось абсцисс имеет единственную общую точку с кубической параболой, а данное уравнение при $\varepsilon = 0$ имеет корень $\{0\}$ кратности 3.

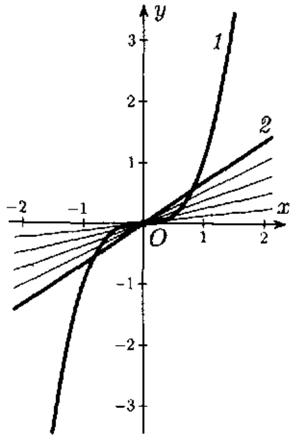


Рис. 6.8

Пример 6.11. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 2}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

▷ Решение. Рассмотрим эквивалентную задачу. Из пучка параллельных прямых $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, найти такие прямые, которые пересекают график данной функции в кратных точках (как на рис. 6.7, где единственная кратная точка — вершина параболы). Первоначальная задача сводится к определению таких значений t, при которых уравнение (6.3), эквивалентное системе

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 2}{(x^2+1)^2}, \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 2}{(x^2+1)^2} = t, \qquad (6.3)$$

имеет кратные корни. После эквивалентных преобразований из уравнения (6.3) получим симметрическое уравнение

$$2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 2 = t(x^2+1)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-t)x^4 - 4x^3 + (9-2t)x^2 - 4x + 2 - t = 0.$$

В том случае, когда $t \neq 2$, это уравнение не имеет нулевого корня. Поделим на x^2 его левую часть и получим

$$(2-t)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 - 2t = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-t)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0. \qquad (6.3_1)$$

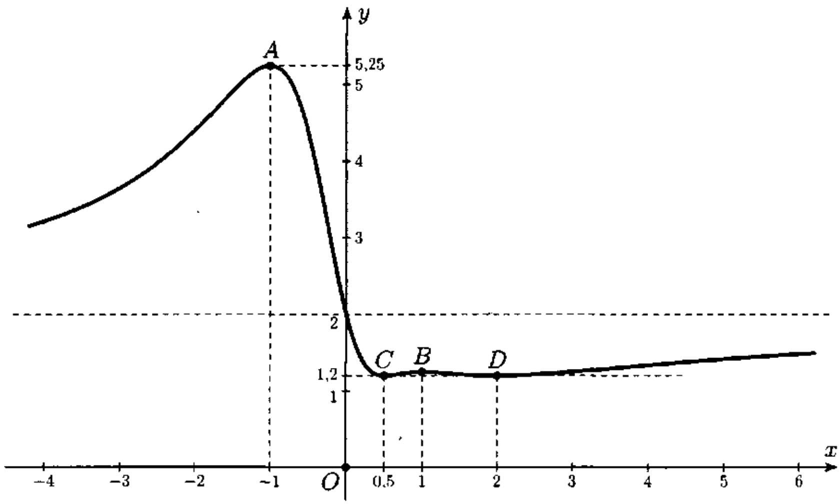


Рис. 6.9. График функции $y = \dfrac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 2}{(x^2+1)^2}$. Точки A, B — точки максимума; C, D — точки минимума функции.

Сделаем замену переменной $u = x + \dfrac{1}{x}$ и запишем уравнение (6.3_1) в виде системы

$$\begin{cases} u = x + \dfrac{1}{x}, \\ (2-t)u^2 - 4u + 5 = 0, \end{cases} \qquad (6.3_2)$$

имеющей действительные корни тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения в системе (6.3_2) — неотрицательный и выполнено обобщенное неравенство Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = 4 - 5(2-t) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; t \geqslant \dfrac{6}{5}, \\ |u| = \left| x + \dfrac{1}{x} \right| \geqslant 2. \end{cases}$$

При $t = \dfrac{6}{5}$ дискриминант D равен нулю, и квадратное уравнение в системе (6.3_2) имеет кратный корень $u = \dfrac{5}{2}$. Возвращаясь к неизвестной x, получим абсциссы точек касания прямой, имеющей уравнение $y = \dfrac{6}{5}$, с графиком данной функции:

$$\frac{4}{5}u^2 - 4u + 5 = 0 \Leftrightarrow u \in \left\{\frac{5}{2}\right\} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}.$$

Заметим, что уравнение $u = x + \dfrac{1}{x}$ может иметь кратные корни. Так, если $u = -2$, то кратный корень $x = -1$, при этом $t = 2 - \dfrac{4u-5}{u^2} = \dfrac{21}{4}$; если $u = 2$, то кратный корень $x = 1$, при этом $t = \dfrac{5}{4}$. Таким образом, функция $f(x)$ имеет экстремумы в точках $x \in \left\{-1; \dfrac{1}{2}; 1; 2\right\}$. Отсюда найдем, что наименьшее значение функции $f(x)$ равно $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(2) = \dfrac{6}{5}$. Наибольшее значение $f(x)$ равно $f(-1) = \dfrac{21}{4}$. Имеется также локальный максимум — точка $B\left(1, \dfrac{5}{4}\right)$. Показанный на рис. 6.9 график функции $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$. ◀

Упражнение 6.16. 1) Найти наибольшее значение квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, если $a < 0$.

2) Найти наибольшее значение функции

$$\text{а) } f(x) = -(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15;$$
$$\text{б) } f(x) = -(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10.$$

Ответы: а) 31; б) 19.

3) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 10.$$

Ответ: 9.

4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1}$; б) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$;

в) $f(x) = a\sin x + b\cos x + c$.

Ответы: а) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$; б) 1, −1;

в) $c + \sqrt{a^2+b^2}$, $c - \sqrt{a^2-b^2}$.

Упражнение 6.17. 1) При каких значениях параметра a наименьший корень уравнения $8x^3-12ax^2-2(a-1)^2x+3a(a-1)^2=0$ лежит на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$?

2) При каких значениях параметра a наибольший корень уравнения $27x^3-18ax^2-3(a+1)^2+2a(a+1)^2=0$ лежит на отрезке $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$?

3) При каких значениях параметра a наименьший корень уравнения $x^3-5ax^2-(a-1)^2x+5a(a-1)^2=0$ лежит на отрезке $[-1;0]$?

4) При каких значениях параметра a наибольший корень уравнения $x^3-4ax^2-(a+1)^2x+4a(a+1)^2=0$ лежит на отрезке $[0;1]$?

Ответы: 1) $[0;2]$; 2) $[-2;0]$; 3) $[0;2]$; 4) $[-2;0]$.

6.7. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 6.13. 1) Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на множестве $\boldsymbol{X}\subseteq \boldsymbol{D}(f)$, если для любых x_1, $x_2\in \boldsymbol{X}$, таких, что $x_1<x_2$, выполнено неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

2) Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на множестве $\boldsymbol{X}\subseteq \boldsymbol{D}(f)$, если для любых x_1, $x_2\in \boldsymbol{X}$, таких, что $x_1<x_2$, выполнено неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Если в предыдущем определении выполняются нестрогие неравенства $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ или $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, то функция называется, соответственно, *неубывающей* или *невозрастающей*.

Определение 6.13₁. Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*.

Упражнение 6.18. 1) Доказать, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке $\boldsymbol{X}$ тогда и только тогда, когда для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 $(x_1\neq x_2)$ из $\boldsymbol{X}$ выполнено неравенство $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$.

2) Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие у б ы в а н и я функции на промежутке $\boldsymbol{X}$.

3) Доказать *признак локального максимума* функции: если функция $y=f(x)$, возрастает на некотором промежутке $(x_0-\delta;x_0]\subset \boldsymbol{X}$ и убывает на промежутке $[x_0;x_0+\delta)\subset \boldsymbol{X}$, то точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$.

4) Сформулировать и доказать признак локального минимума функции.

Сформулируем основные свойства монотонных функций.

Теорема 6.4. 1) Сумма возрастающих функций — возрастающая функция: $\mathrm{i} + \mathrm{i} = \mathrm{i}$. Сумма постоянной и возрастающей функции — возрастающая функция. Разность постоянной и возрастающей функции — убывающая функция.

2) Разность возрастающей и убывающей функций — возрастающая функция: $\mathrm{i} - \mathrm{d} = \mathrm{i}$. Разность постоянной и убывающей функции — возрастающая функция.

3) Сумма убывающих функций — убывающая функция: $\mathrm{d} + \mathrm{d} = \mathrm{d}$. Сумма постоянной и убывающей функции — убывающая функция. Разность убывающей и возрастающей функций — убывающая функция: $\mathrm{d} - \mathrm{i} = \mathrm{d}$.

Здесь возрастающей функции сопоставлен признак i (от англ. *increase*), а убывающей функции — признак d (от англ. *decrease*): $-\mathrm{i} = \mathrm{d}$, $-\mathrm{d} = \mathrm{i}$; n — неопределенно (функция может возрастать или убывать). Алгебраическим операциям с функциями соответствуют операции с их признаками. Из теоремы 6.4 вытекают соотношения между признаками d, i, n

$$\mathrm{i} - \mathrm{i} = \mathrm{n}, \quad \mathrm{i} + \mathrm{d} = \mathrm{d} + \mathrm{i} = \mathrm{n}, \quad \mathrm{d} - \mathrm{d} = \mathrm{n}, \quad -\mathrm{n} = \mathrm{n}. \tag{6.4}$$

Следствие. Изменение знака монотонной функции влечет изменение характера ее монотонности.

Утверждения теоремы 6.4 схематично представлены в табл. 6.3.

Лемма 6.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ обе возрастающие (или убывающие). Тогда: 1) если $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то произве-

Таблица 6.3

Признак поведения		Признак поведения суммы и разности	
$f(x)$	$g(x)$	$f(x) + g(x)$	$f(x) - g(x)$
i	i	i	n
i	d	n	i
d	d	d	n
d	i	n	d

Таблица 6.4

	Признак поведения		$f(x)\cdot g(x)$ $f(x)>0$, $g(x)>0$	$(-f(x))\cdot(-g(x))$ $f(x)<0$, $g(x)<0$	$-f(x)\cdot(-g(x))$ $f(x)>0$, $g(x)<0$	$-(-f(x))\cdot g(x)$ $f(x)<0$, $g(x)>0$
	$f(x)$	$g(x)$				
	1	2	3	4	5	6
1	i	i	i·i=i	(–i)·(–i)=d·d=d	–(i·(–i))=n	–(d·i)=n
2	d	d	d·d=d	(–d)·(–d)=i·i=i	–(d·(–d))=n	–(i·d)=n
3	i	d	i·d=n	(–i)·(–d)=d·i=n	–(i·(–d))=d	–(d·d)=i
4	d	i	d·i=n	(–d)·(–i)=i·d=n	–(d·(–i))=i	–(i·i)=d

дение $f(x)\cdot g(x)$ — возрастающая (соответственно, убывающая) функция; 2) если $f(x)<0$, $g(x)<0$, то произведение $f(x)\cdot g(x)$ — убывающая (соответственно, возрастающая) функция.

▷ Доказательство первого утверждения леммы 6.1 очевидно. Поведение произведения положительно определенных функций, соответствующее столбцу 3 табл. 6.4, выражается соотношениями

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i},\quad \mathrm{d}\cdot\mathrm{d}=\mathrm{d},\quad \mathrm{i}\cdot\mathrm{d}=\mathrm{d}\cdot\mathrm{i}=\mathrm{n}. \tag{6.5}$$

Доказательство второго утверждения леммы 6.1, показанного на пересечении строк 1, 2 и столбца 4 табл. 6.4, основано на использовании соотношений (6.5) и преобразованием произведения по формуле

$$f(x)\cdot g(x)=(-f(x))\cdot(-g(x)). \tag{6.6}$$

◀

Следствие. *Если $f(x)>0$, то $f^2(x)$ изменяется в том же направлении, что и $f(x)$; а если $f(x)<0$, то — в противоположном направлении.*

Теорема 6.5. Пусть функция $f(x)$ возрастающая, а $g(x)$ — убывающая. Тогда: 1) если $f(x)>0$, $g(x)<0$, то произведение $f(x)\cdot g(x)$ — убывающая функция; 2) если $f(x)<0$, $g(x)>0$, то произведение $f(x)\cdot g(x)$ — возрастающая функция.

▷ Доказательство утверждений теоремы 6.5, показанных на пересечении строки 3 и столбцов 5, 6 табл. 6.4, основано на использовании соотношения (6.6) для преобразования произведения $f(x)\cdot g(x)$ к виду $-f(x)\cdot(-g(x))$ или, соответственно, к виду $-(-f(x))\cdot g(x)$. ◄

В табл. 6.4 представлены свойства произведения монотонных функций.

Теорема 6.6. Суперпозиция $f(g(x))$ возрастающих функций $f(x)$ и $g(x)$ — возрастающая функция. Суперпозиция двух убывающих функций — возрастающая функция. Суперпозиция возрастающей и убывающей функций или убывающей и возрастающей функций — убывающая функция.

Следствие 1. Если $f(x)$ — возрастающая функция, то $f(-x)$ — убывает.

Если $f(x)$ — убывающая функция, то $f(-x)$ — возрастает.

Следствие 2. Если $f(x) \neq 0$, то функции $f(x)$ и $\frac{1}{f(x)}$ изменяются в противоположных направлениях.

Упражнение 6.19. Объяснить ошибку в рассуждениях:

1) «Суперпозиция функций $f(u) = -u^2$ и $u(x) = -x^3$, убывающих при положительных значениях аргументов, есть $F(x) = f(u(x)) = -(-x^3)^2 = -x^6$. В противоречие с теоремой 6.6, $F(x)$ — убывающая функция при $x > 0$».

(Указание. Если $x > 0$, то $u < 0$; при этом $u(x)$ убывает, а $f(u)$ возрастает.)

2) «Суперпозиция функций $g(v) = -v^{-2}$ и $v(x) = -x^{-3}$, возрастающих при положительных значениях аргументов, есть $G(x) = g(v(x)) = -(-x^{-3})^{-2} = -x^6$. В противоречие с теоремой 6.6, $G(x)$ — убывающая функция при $x > 0$».

6.8. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Определение 6.14. 1) Если расстояние от точки M графика функции $y = f(x)$ до некоторой определенной прямой l при $x \to x_0$ и неограниченном удалении точки M от начала координат стремится к нулю, то прямая l называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

2) Если число x_0 — конечное, то асимптота называется *вертикальной*. При этом должно выполняться хотя бы одно из условий:

i) если $x \to x_0 - 0$, или $x \to x_0^{-0}$ (x стремится к x_0, оставаясь меньше x_0), то $y \to +\infty$ (или $y \to -\infty$);

ii) если $x \to x_0 + 0$, или $x \to x_0^{+0}$ (x приближается к x_0, оставаясь больше x_0), то $y \to +\infty$ (или $y \to -\infty$).

Так функция $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. При этом, если $x \to 0 - 0$, то $y \to -\infty$, а если $x \to 0 + 0$, то $y \to +\infty$.

Таким образом, вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечного разрыва функции.

3) Если $x_0 \to +\infty$ (или $x_0 \to -\infty$), то асимптота будет либо *горизонтальной*, либо *наклонной*. В первом случае, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ функция $y \to b$ (как на рис. 6.10); либо при $x \to +\infty$ функция $y \to b$ (например, $y = b + 2^{-x}$); либо при $x \to -\infty$ функция $y \to b$ (как $y = b + 2^x$). График может иметь две различные горизонтальные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ (как на рис. 6.11).

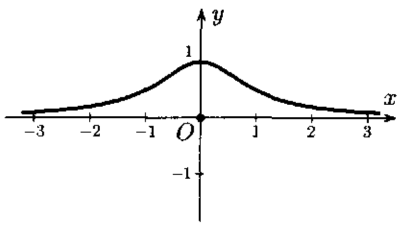


Рис. 6.10.
График функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

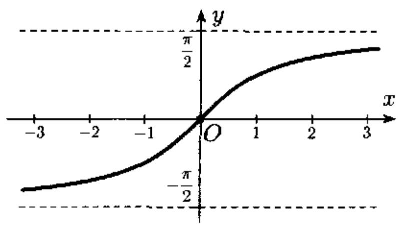


Рис. 6.11.
График функции $y = \operatorname{arctg} x$

Определение 6.15. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной* асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, причем $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Например, функция $y = x + \dfrac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ имеет наклонную асимптоту с уравнением $y = x$.

Если угловой коэффициент $k = 0$, то получим определение горизонтальной асимптоты.

Асимптота может пересекать график функции в нескольких точках и даже в бесконечном множестве точек. На рис. 6.12 показан график функции

$$y = x + 2^{-x}\cos 5x,$$

пересекающий наклонную асимптоту $y = x$ бесконечное число раз в тех точках, где $\cos 5x = 0$.

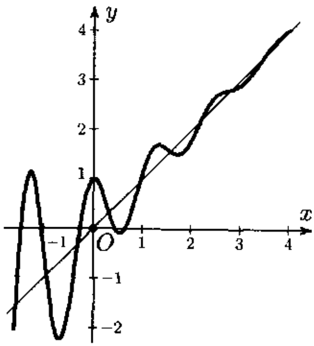


Рис. 6.12

Упражнение 6.20. 1) Построить графики функций

а) $y = x + \dfrac{1}{x}$; б) $y = 2^x$; в) $y = 2^{\frac{1}{x}}$;

г) $y = (1 - 4x)^3$; д) $y = \sqrt[3]{x-2}$; е) $y = \left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

2) Построить графики соответствий, или геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям

а) $2^{|y+4|} = x^2 - 6x + 9$; б) $||y| - 3| = ||x+2| - 1| + 2$;

в) $\log_{x^2+2x+2}(y^2 - 4y + 4) = 2$; г) $|y+1| = \dfrac{x^3 - 2x^2}{2|x-2|}$.

3) Может ли график функции иметь три вертикальные асимптоты? три наклонные асимптоты? Привести примеры.

6.9. СВОЙСТВО ОБРАТИМОСТИ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ имеет область определения $\boldsymbol{D}(f)$ и множество значений $\boldsymbol{E}(f)$. Возьмем какое-нибудь число $y_0 \in \boldsymbol{E}(f)$ и решим уравнение $f(x) = y_0$. Это уравнение имеет хотя бы одно решение $x_0 \in \boldsymbol{D}(f)$.

В том случае, когда функция $f(x)$ строго монотонная, для каждого $y \in \boldsymbol{E}(f)$ найдется единственное число $x \in \boldsymbol{D}(f)$, такое, что $f(x) = y$.

Соответствие $F\colon y \to x$ будем называть функцией $x = F(y)$, *обратной* к функции $f(x)$. При этом в последней записи y — аргумент, а x — зависимая переменная. Обозначим аргумент обратной функции x, а зависимую переменную y. В результате получим функцию $y = F(x)$, обратную данной. Очевидно, что и функция $f(x)$ — обратная к функции $F(x)$. Поэтому $f(x)$ и $F(x)$ называются *взаимно обратными* функциями.

6.10. СВОЙСТВА ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Область определения обратной функции совпадает с множеством значений данной функции: $\boldsymbol{D}(F) = \boldsymbol{E}(f)$, а множество значений обратной функции — с областью определения данной функции: $\boldsymbol{E}(F) = \boldsymbol{D}(f)$.

2. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. $\triangleright$ Доказательство. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на графике функции $y = f(x)$, а точка $M'(y, x)$, отвечающая инверсной паре координат, — на графике обратной функции $y = F(x)$; точка $A(0, y)$ — проекция точки M на ось ординат, точка $A'(y, 0)$ — проекция M' на ось абсцисс (рис. 6.13).

Прямоугольные треугольники OAM и $OA'M'$ равны, поскольку имеют равные катеты: $|OA| = |OA'|$ и $|AM| = |A'M'|$. Поэтому они имеют равные гипотенузы $|OM| = |OM'|$ и равные соответственные углы MOA и $M'OA'$. Следовательно, $\Delta OMM'$ — равнобедренный, и биссектриса $[OO')$ координатного угла — также биссектриса угла MOM'; отрезок $[OO']$ является медианой и высотой в $\Delta OMM'$, а значит, точки M и M' симметричны относительно прямой (OO'). Отсюда, ввиду произвольности выбора точки M, следует симметричность графиков взаимно обратных функций относительно биссектрисы координатного угла. Утверждение доказано. ◀

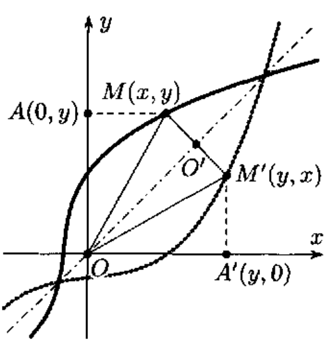


Рис. 6.13

Из определения обратной функции вытекают условные тождества

$$F(f(x)) = x, \quad x \in \boldsymbol{D}(f);$$
$$f(F(x)) = x, \quad x \in \boldsymbol{E}(f).$$

Сформулируем принцип обратимости, вытекающий из табл. В2.

Теорема 6.7. Для существования обратной функции необходимо и достаточно, чтобы данная функция $f(x)$ принимала разные значения при различных значениях аргумента, т. е. чтобы

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{при} \quad x_1 \neq x_2.$$

Поэтому каждая обратимая функция является одно-однозначной.

Следствие. Функция, монотонная на промежутке, имеет обратную функцию.

Лемма 6.2. Если функция $f(x)$ строго монотонна на числовом промежутке $\boldsymbol{X}$, то имеется обратная функция $F(x)$, строго монотонная на промежутке $\boldsymbol{Y} = f(\boldsymbol{X})$ в том же смысле, что и $f(x)$.

Пример 6.12. Доказать, что никакая обратимая функция не удовлетворяет условию $f(x^2) - f^2(x) \geqslant \dfrac{1}{4}$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

▷ Решение. Заметим, что обратимая функция является одно-однозначной. Воспользуемся методом доказательства «от противного».

Пусть, например, обратимая функция $f(x)$ удовлетворяет данному условию. Тогда при $x = 0$ выполнено неравенство

$$f(0) - f^2(0) \geqslant \frac{1}{4}, \quad \text{или} \quad \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0,$$

откуда следует равенство $f(0) = \dfrac{1}{2}$. При $x = 1$ выполнено неравенство

$$f(1) - f^2(1) \geqslant \frac{1}{4}, \quad \text{или} \quad \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0,$$

откуда следует, что $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, $f(0) = f(1) = \dfrac{1}{2}$, функция $f(x)$ — много-однозначная, а потому необратимая; но это противоречит условию. Следовательно, антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

Упражнение 6.21. Доказать, что никакая обратимая функция не удовлетворяет условиям:

1) $f((x-1)^6) - f^2(x-1) \geqslant \dfrac{1}{4}$ при всех $x \in \mathbb{R}$;

2) $6f\left(\left(\dfrac{x}{10}\right)^4\right) - f^2\left(\dfrac{x}{10}\right) \geqslant 9$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Упражнение 6.22. Продолжить на множество $\mathbb{R}$ функцию $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$, определенную на луче $\left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$, так, чтобы полученная функция совпала со своей обратной.

▷ Решение. График искомой самообратной функции $y = \overline{f}(x)$ симметричен относительно прямой $y = x$, пересекающейся в точке $A\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ с графиком функции $y = f(x)$, который, в свою очередь, пересекает ось абсцисс в точке $B(2; 0)$.

Графиком функции $y = f(x)$ является луч $[AB)$. Точка $C(0; 2)$, симметричная точке B относительно прямой $y = x$, лежит на луче $[AC)$, симметричном лучу $[AB)$. Следовательно, лучи $[AB)$ и $[AC)$ являются ветвями графика искомой функции (рис. 6.14). Уравнение прямой (AC) имеет вид $y = 2 - 2x$. Таким образом, искомая функция выражается условиями

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & \text{если } x \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right); \\ 1 - \dfrac{x}{2}, & \text{если } x \in \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right). \end{cases}$$ ◀

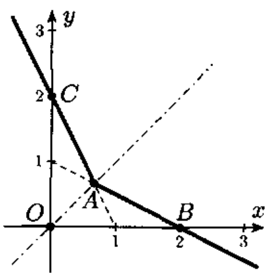


Рис. 6.14

На рис. 6.15 приведен график одно-однозначной немонотонной функции $y = f(x)$, $\boldsymbol{X} = [0; 1] \cup (1; +\infty)$, заданной условиями

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|x-1|}{x-1} + 1\right), \\ \qquad\qquad x \in [0; 1) \cup (1; +\infty), \\ 0, \qquad\quad x = 1. \end{cases}$$

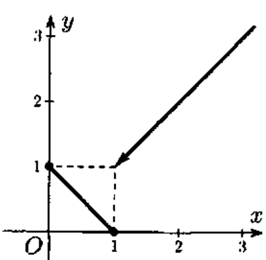


Рис. 6.15

Функция $y = f(x)$ имеет на множестве $\boldsymbol{X}$ обратную функцию. График функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $y = x$.

Может статься, что функция $f(x)$ на числовом множестве $\boldsymbol{X}$ непрерывна, но не монотонна. Если $\boldsymbol{X}$ можно разбить на n непересекающихся промежутков $\boldsymbol{X}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$)

$$\boldsymbol{X} = \bigcup_{\nu=1}^{\nu=n} \boldsymbol{X}_\nu, \qquad \boldsymbol{X}_\nu \cap \boldsymbol{X}_\mu = \varnothing, \ \ \nu \neq \mu,$$

на которых $f(x)$ монотонна, то на каждом из промежутков $\boldsymbol{X}_\nu$ функция $f(x)$ имеет обратную.

Упражнение 6.23. Используя рис. 6.15, постройте графики одно-однозначных соответствий, определенных на всей числовой оси.

Упражнение 6.24. Среди функций вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = f(x)$, $c \neq 0$, найти все такие функции, для которых $f(x) = F(x)$ для всех x из $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right\}$.

▷ Решение. Выразим x через y и получим $x = \dfrac{b-dy}{cy-a}$. Заменяя переменные, получим обратную функцию $y = F(x) = \dfrac{b-dx}{cx-a}$. По условию задачи, выполнено тождество $\dfrac{ax+b}{cx+d} \equiv \dfrac{b-dx}{cx-a}$. Если $x \neq -\dfrac{d}{c}$ и $x \neq \dfrac{a}{c}$, то имеем тождество

$$acx^2 + (bc - a^2)x - ab = -cdx^2 + (bc - d^2)x + bd,$$

из которого выведем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} ac = -cd, \\ bc - a^2 = bc - d^2, \\ -ab = bd, \end{cases}$$

откуда следует, что $a = -d$. ◀

Ответ: $a = -d$, тогда $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$.

Замечание. Если функция $f(x)$ не монотонна на промежутке $\boldsymbol{X}$, то уравнение $y = f(x)$, разрешенное относительно x, позволяет получить многозначную и чаще всего — разрывную обратную функцию $x = F(y)$.

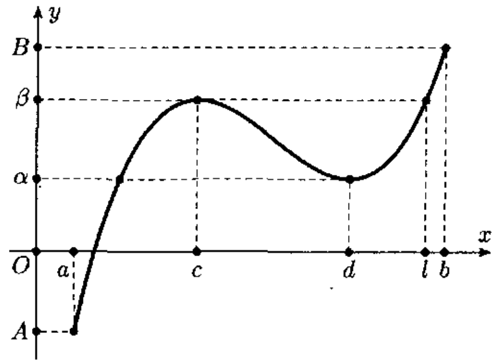


Рис. 6.16

Для примера рассмотрим рис. 6.16, на котором изображен график непрерывной на $[a, b]$ функции $y = f(x)$, возрастающей до точки c, убывающей до точки $x = d$, и возрастающей при $x > d$.

На отрезке $[A, \alpha]$ имеется возрастающая обратная функция $x = F(y)$; на интервале (α, β) каждому значению y соответствуют три значения зависимой переменной x; в точке $y = \beta$ зависимая переменная скачком переходит от значения c к значению $l > c$; на полуинтервале $(\beta, B]$ имеется возрастающая обратная функция.

6.11. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Классификацию элементарных выражений производят по их внешнему виду, например, постоянная (параметр): 1, 2, ...; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; a, b, c, ...; переменная: x, y, z, ... Классификация основных элементарных функций представлена в табл. 6.5.

Определение 6.16. 1) Функция $y = f(x)$ называется *алгебраической*, если существует многочлен

$$P_n(x, y) = P_{m_n}(x)\, y^n + P_{m_{n-1}}(x)\, y^{n-1} + \ldots + P_{m_1}(x)\, y + P_{m_0}(x),$$

коэффициентами которого служат действительные многочлены $P_{m_0}(x)$, $P_{m_1}(x)$, $P_{m_2}(x)$, ..., $P_{m_n}(x)$ со старшими показателями степени, указанными в их индексации, не обращающиеся

Таблица 6.5

Основные элементарные функции ($D(f), f(x)$)

Алгебраические функции			Неалгебраические функции			
Рациональные функции		Иррациональные функции	Элементарные трансцендентные функции			
Целые функции	Дробные функции		Тригонометрические функции	Обратные тригонометрические функции	Показательная функция	Логарифмическая функция
$k, m, n \in \mathbb{N}$; $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$					$a > 0, a \neq 1$	
$x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) =$ $= a_n x^n + \ldots$ $\ldots + a_1 x + a_0$	$Q_m(x) \neq 0$, $R_{n,m}(x) =$ $= \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$	$x > 0$, x^p; $x \in \mathbb{R}$, $\lvert x \rvert$; $x^k - a \geqslant 0$, $\sqrt[n]{x^k - a}$; $P_k(x) \geqslant 0$, $\sqrt[n]{P_k(x)}$; $R_{k,m}(x) \geqslant 0$, $\sqrt[n]{R_{k,m}(x)}$	$x \in \mathbb{R}$, $\sin x$, $\cos x$; $\cos x \neq 0$, $\operatorname{tg} x$; $\sin x \neq 0$, $\operatorname{ctg} x$	$x \in [-1; 1]$, $\arcsin x$, $\arccos x$ $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$	$x \in \mathbb{R}$, a^x	$x > 0$, $\log_a x$

одновременно в нуль ни при каком значении x,

$$P_{m_0}^2(x) + P_{m_1}^2(x) + P_{m_2}^2(x) + \ldots + P_{m_n}^2(x) \neq 0,$$

причем суперпозиция $P_n(x, f(x))$ обращается тождественно в нуль в области определения функции $y = f(x)$, или $P_n(x, f(x)) \equiv 0$, $x \in D(f)$.

2) Функция называется *трансцендентной* (т. е. превосходящей силу алгебраических методов), если она не является алгебраической.

К элементарным трансцендентным относятся тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$; обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$; x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, а также не сводящиеся к алгебраическим функции, которые можно получить из перечисленных в табл. 6.5 с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиций, применяемых конечное число раз.

Ниже доказано, что показательная функция $y = a^x$ и тригонометрическая функция $y = \sin x$ — суть трансцендентные функции. Примером трансцендентной функции служит логарифмическая функция (обратная к показательной).

Графиком трансцендентной функции является *трансцендентная кривая*. В отличие от графиков алгебраических функций, трансцендентные кривые могут иметь бесконечное число точек пересечения с прямой, точек перегиба, особых точек, вершин, асимптот и др. Они имеют характерные точки, которых нет у алгебраических кривых. Например, угловые точки, асимптотические точки и т. д.

Замечание 1. Элементарные функции вида $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{I}$ (т. е. α — иррациональное число), а также $y = x^x$ — трансцендентные функции.

2. *Функция Дирихле* $D(x)$, заданная условиями

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

определена при всех $x \in \mathbb{R}$, однако построить ее график невозможно, так как функция Дирихле разрывна в каждой точке.

Упражнение 6.25. 1) Верно ли, что функция Дирихле — четная?

2) Известно, что p, q, r — рациональные числа, докажите тождества $\forall x \in \mathbb{R}$:

а) $D(x) \equiv D(px+q)$; б) $D(x) \equiv D\left(\dfrac{r}{px+q}\right)$, $px+q \neq 0$.

(Указание. Воспользуйтесь теоремой 1.6.)

Пример 6.13. Элементарная функция

$$f(x) = \sqrt[12]{\ln \sin \frac{2\pi x}{\sqrt{7}}}$$

является суперпозицией линейной функции, функции синус, логарифмической функции и степенной функции. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция, причем один из ее периодов — число $\sqrt{7}$.

$\triangleright$ Доказательство. 1. Найдем область определения функции $f(x)$:

$$\ln \sin \frac{2\pi x}{\sqrt{7}} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin \frac{2\pi x}{\sqrt{7}} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi x}{\sqrt{7}} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{\sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{4} + n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{D}(f) = \left\{\sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{4} + n\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Обозначим $g(x) = \sin \dfrac{2\pi x}{\sqrt{7}}$.

2. Для любого $x \in \boldsymbol{D}(f)$ истинны включения

$$x + \sqrt{7} = \sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{4} + n + 1\right) \in \boldsymbol{D}(f),$$
$$x - \sqrt{7} = \sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{4} + n - 1\right) \in \boldsymbol{D}(f),$$

и выполнены равенства

$$g(x+\sqrt{7})=$$

$$=\sin\left(2\pi\cdot\frac{\sqrt{7}\left(\frac{1}{4}+n\right)+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)=\sin\left(2\pi\cdot\frac{\sqrt{7}\left(\frac{1}{4}+n+1\right)}{\sqrt{7}}\right)=$$

$$=\sin\left(2\pi\cdot\left(\frac{1}{4}+n+1\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2(n+1)\pi\right)=1=g(x).$$

Поэтому функция $f(x)$ периодическая, и число $\sqrt{7}$ — ее период. ◀

Упражнение 6.26. Найти область определения функции

$$1)\ y=\frac{\ln\sin\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\log_2(-x^2+x+12)};\qquad 2)\ y=\frac{\log_2\cos\left(x+\frac{2\pi+1}{2}\right)}{\lg(9-x^2)};$$

$$3)\ y=\frac{\log_2\cos\left(x+\frac{2\pi+1}{2}\right)}{\log_5\left(5-\frac{x}{2}-x^2\right)}.$$

6.12. ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ НЕЯВНО

Определение 6.17. Говорят, что множество $\boldsymbol{M}$ задано уравнением $F(x,y)=0$ (или неравенством $F(x,y)>0$), если во-первых, координаты любой точки $M\in\boldsymbol{M}$ удовлетворяют данному уравнению (неравенству), и во-вторых, если для любой упорядоченной пары чисел (x,y), удовлетворяющей данному уравнению (неравенству), точка $M(x,y)\in\boldsymbol{M}$. Иногда множество $\boldsymbol{M}$ называют *геометрическим местом точек* $M(x,y)$, таких, что $F(x,y)=0$ (соответственно, $F(x,y)>0$).

При решении многих задач возникают соотношения вида $F(x,y)=0$ или $G(x,y,z)=0$. Например, геометрическое место точек, лежащих на координатной плоскости, равноотстоящих от данной точки $C(x_0;y_0)$ на расстоянии r, описывается уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Это уравнение окружности радиуса r с центром в точке C.

Прямая с вектором нормали $\vec{n}(a, b)$, проходящая через точку $A(x_0; y_0)$, есть геометрическое место точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Определение 6.18. Если функция двух переменных $F(x; y)$ определена на некотором подмножестве $\boldsymbol{D}_F \subseteq \mathbb{R}^2$, и существует такая функция $f(x)$, определенная на подмножестве $\boldsymbol{X}$ числовой прямой, что $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$, и для любого $x \in \boldsymbol{X}$ истинно включение $(x, f(x)) \in \boldsymbol{D}_F$, причем $F(x, f(x)) = 0$, то функция $f(x)$ называется *неявной функцией*, определенной уравнением $F(x, y) = 0$.

Так, уравнение $x^2 - 4y + 7 = 0$ задает неявно функцию y, которую можно выразить формулой $y = \dfrac{x^2 + 7}{4}$ в явном виде.

Уравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{6.7}$$

задает бесконечное множество функций y, определенных на отрезке $[-1, 1]$. Например, из уравнения (6.7) можно получить функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, заданные формулами

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \in [0, 1], \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \in [-1, 0), \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right), \end{cases}$$

Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ показаны на рис. 6.17 — это выделенные дуги единичной окружности.

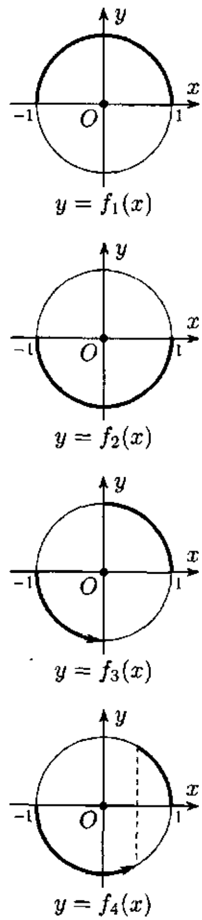


Рис. 6.17

Дополнительные условия на область определения $D(f)$ и на множество значений функции $E(f)$ позволяют получить из уравнения (6.7) единственную функцию $f(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

Замечание. Необходимо быть уверенным в том, что уравнение $F(x, y) = 0$ для каждого x из подмножества X имеет имеет хотя бы один корень y, даже если мы не можем его вычислить. В противном случае нельзя говорить ни о какой функции $y = f(x)$, явной или неявной.

Например, уравнение $y^2 - \sin 2x - \sin 2y + 2 + \varepsilon = 0$ при $\varepsilon > 0$ не определяет никакой действительной функции y, явной или неявной.

Однако, хотя уравнение $x^2 + y + y^5 = 0$ и не может быть решено в явном виде относительно y, оно определяет y как неявную функцию x.

6.12.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ СООТВЕТСТВИЙ

Теорема 6.8. Если множество M является геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, то:

1) геометрическое место $N_{\vec{p}}$ точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x - a, y - b) = 0$ есть образ множества M при параллельном переносе на вектор $\vec{p}(a, b)$ (рис. 6.18, *а*);

2) геометрическое место N_Γ точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F\left(\dfrac{x}{k}, \dfrac{y}{k}\right) = 0$ есть образ множества M при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом k (рис. 6.18, *б*);

3) геометрическое место N_S точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$ есть образ множества M при центральной симметрии относительно точки $A(x_0, y_0)$ (рис. 6.18, *в*);

4) геометрическое место N_l точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(y, x) = 0$ есть образ множе-

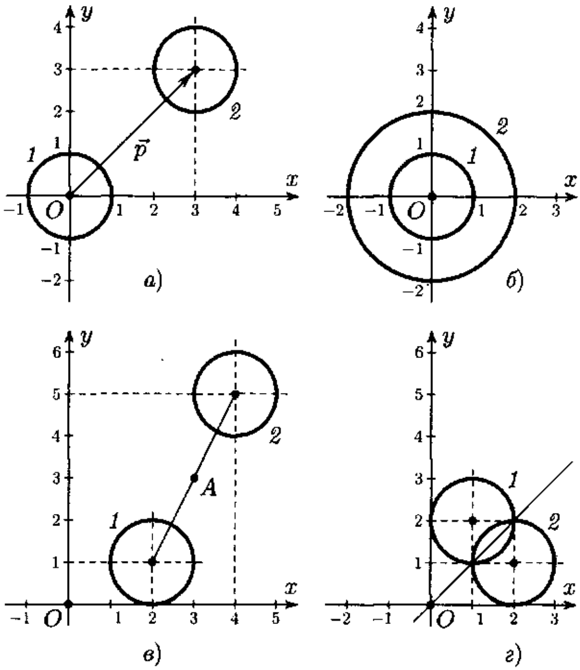


Рис. 6.18

ства M при осевой симметрии относительно прямой $l\colon y = x$ (рис. 6.18, *г*).

Примеры. На рис. 6.18, *а* окружность *2* с уравнением $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$ получена *параллельным переносом* на вектор $\vec{p}(3,3)$ из окружности *1* с уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

На рис. 6.18, *б* окружность *2* с уравнением $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ получена *гомотетией* с центром в начале координат и коэффициентом 2 из окружности *1* с уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

На рис. 6.18, *в* окружность *2* с уравнением $(x-4)^2+(y-5)^2 = 1$ получена *центральной симметрией* относительно точки $A(3;3)$ из окружности *1* с уравнением $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

На рис. 6.18, *г* окружность *2* с уравнением $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$ получена *симметрией* относительно прямой $y = x$ из окружности *1* с уравнением $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

ГЛАВА 7
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ПО КОШИ

Фундаментальным понятием математического анализа функций является определение предела функции (О. Коши, 20-е годы 19 в.), использующее понятие точки сгущения.

Определение 7.1. *Предельная точка* числового множества $\boldsymbol{X}$ (синоним: точка сгущения) — такая точка, в любой окрестности которой содержится, хотя бы одна точка множества $\boldsymbol{X}$, отличная от нее самой.

На самом деле, любая окрестность точки a содержит бесконечное множество точек множества $\boldsymbol{X}$, из которых можно выделить бесконечную последовательность $\{x_1, x_2, \ldots\}$ ($x_n \neq x_k$, $n \neq k$), сходящуюся к a.

Например, действительное число $a = \sqrt{2}$ является предельной точкой для множества рациональных чисел, причем $a \notin \mathbb{Q}$.

Сформулированное на «языке ε-δ», определение предела функции в точке по Коши имеет следующий вид:

Определение 7.2. 1) Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В символическом виде имеем

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) =$$
$$= (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta)\colon (|f(x) - A| < \varepsilon),$$

или $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) =$

$$= (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \boldsymbol{U}^{\circ}_{\delta}(x_0))\colon (f(x) \in \boldsymbol{U}_{\varepsilon}(A)),$$

где $U_\delta^\circ(x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ — проколотая δ-окрестность точки x_0, число δ зависит как от величины ε, так и от положения точки сгущения x_0, $U_\varepsilon(A)$ — ε-окрестность точки A.

2) Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $E > 0$, что $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x > E$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, или

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = A\right) = \\ = (\forall\,\varepsilon > 0)\,(\exists\, E > 0)\,(\forall\, x \in \mathbb{R}, x > E)\colon (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

3) Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $E > 0$, что $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x < -E$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, или

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A\right) = \\ = (\forall\,\varepsilon > 0)\,(\exists\, E > 0)\,(\forall\, x \in \mathbb{R}, x < -E)\colon (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Замечание 1. Если $A = 0$, то функция называется *бесконечно малой*, соответственно, при $x \to x_0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Замечание 2. Если $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$.

Теорема 7.1 (о единственности предела функции). Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то он единственный.

$\triangleright$ Доказательство проведем методом «от противного». Предположим, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = q$, причем $p \neq q$. Тогда $\forall\,\varepsilon > 0$ существует такая проколотая δ-окрестность точки x_0, что

$$(\forall\, x \in U_\delta^\circ(x_0))\colon \left(|f(x) - p| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f(x) - q| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

и выполнено неравенство

$$|p - q| = |(f(x) - q) - (f(x) - p)| \leqslant |f(x) - q| + |f(x) - p| < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

из которого вытекает равенство $p = q$, т. е. антитеза неверна. Утверждение доказано. $\blacktriangleleft$

Из определения вытекает необходимое условие существования предела функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 7.2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A < \infty$, то $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

$\triangleright$ Доказательство. Пусть число $\varepsilon = 1$. Поскольку $A \in \in (A - 1; A + 1)$, то найдется такое число $\delta(x_0, 1) > 0$, что для любого x, удовлетворяющего условию $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < 1$, равносильное неравенству $A - 1 < f(x) < A + 1$, т. е. $f(x)$ ограничена. ◀

Определение 7.3. Число A называется *левосторонним пределом* функции $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$, если каждому числу $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такой интервал с правым концом в точке x_0, что модуль разности значений функции $f(x)$ и A в каждой точке этого интервала, отличной от x_0, меньше ε.

Сформулированное на «языке ε-δ», это определение имеет вид:

$$\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A\right) = \\ = (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)) \colon (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Аналогично определяется правосторонний предел функции $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ и записывают:

$$\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A\right) = \\ = (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)) \colon (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Для примера на рис. 7.1 показан график функции $y = \dfrac{x}{|x|}$, правосторонний предел которой при $x \to 0 + 0$ равен 1, левосторонний предел при $x \to 0 - 0$ равен -1; предел функции при $x \to 0$ не существует.

Из определения предела следует, что если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то у нее имеются также правосторонний и левосторонний пределы, причем оба равны пределу функции в точке x_0.

Из существования, к примеру, только правостороннего предела нельзя сделать никаких выводов о существовании предела функции или левостороннего предела. Даже из существования правостороннего и левостороннего пределов нет возможности сделать никакого заключения о существовании предела функции, как на рис. 7.1, где функция при $x = 0$ не определена.

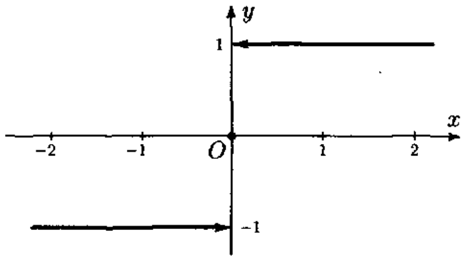


Рис. 7.1

В том случае, когда правосторонний и левосторонний пределы функции в точке существуют и равны между собой, предел функции в точке также существует и равен общему значению правостороннего и левостороннего пределов.

Упражнение 7.1. Доказать необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке, а именно: функция имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют правосторонний и левосторонний пределы функции, равные между собой, причем предел функции в точке равен общему значению этих пределов.

Из определения предела функции вытекает замечательная теорема, применяемая при доказательствах в теории пределов.

Теорема 7.3 (о функции, ее пределе и бесконечно малой функции). Утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ эквивалентно утверждению

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad x \to x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Лемма 7.1 (о стабилизации знака функции). Если функция $f(x)$, определенная на промежутке X, имеющем точку сгущения a, такова, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $A > 0$ (или $A < 0$), то имеется такое число $\gamma > 0$ (или $\gamma < 0$) и такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$$(\forall x \in U_\delta^\circ(a))\colon (f(x) > \gamma > 0)$$

(соответственно, $f(x) < \gamma < 0$).

$\triangleright$ Доказательство проведем для $A > 0$. По определению предела в точке a, имеем:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta)\colon (|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > A - \varepsilon).$$

В частности, при $\varepsilon = \dfrac{1}{2}A > 0$ выполнено неравенство $f(x) > \dfrac{1}{2}A = \gamma > 0$. $\blacktriangleleft$

Следствие 1. Если функция $f(x)$, определенная на промежутке X, имеющем точку сгущения a, такова, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $p < A < q$, то имеется такое число $\delta > 0$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство $p < f(x) < q$, или

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = A\right)(p < A < q) \to (\exists\,\delta > 0)\,(\forall x \in U_\delta^\circ(a))\colon (p < f(x) < q).$$

Следствие 2. Утверждение леммы 7.1 имеет место для односторонних пределов. Так, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, то

$$(\forall M > 0)\,(\exists\,\delta > 0)\,(\forall x \in U_\delta^\circ(a))\colon (f(x) > M).$$

Теорема 7.4. Если функции $v(x)$ и $w(x)$ имеют пределы в точке x_0, то в ней существуют также пределы суммы, разности, произведения и частного $\left(\text{при условии, что} \lim\limits_{x\to x_0} w(x) \neq 0\right)$ этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}(v(x) + w(x)) = \lim_{x\to x_0} v(x) + \lim_{x\to x_0} w(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(v(x) - w(x)) = \lim_{x\to x_0} v(x) - \lim_{x\to x_0} w(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(v(x) \cdot w(x)) = \lim_{x\to x_0} v(x) \cdot \lim_{x\to x_0} w(x),$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{v(x)}{w(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} w(x)},$$

Теорема 7.5 (о предельном переходе в неравенстве). Если в некоторой окрестности точки сгущения x_0 выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ (или $f(x) < g(x)$) и существуют пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

то $A \leqslant B$.

Опираясь на определение предела функции, докажем теорему о пределе «зажатой функции».

Теорема 7.6. Если выполнены следующие условия:

1) функции $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$ определены на множестве $\boldsymbol{X}$, имеющем точку сгущения x_0 (заметим, что x_0 может не принадлежать $\boldsymbol{X}$);

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$;

3) существует окрестность точки x_0, в каждой точке которой (возможно, кроме точки x_0) выполнено неравенство $\varphi(x) \leqslant \chi(x) \leqslant \psi(x)$, то существует предел

$$\lim_{x\to x_0} \chi(x) = A.$$

$\triangleright$ Доказательство. По определению предела, для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеем высказывательные формы, которые объединим в систему:

$$\begin{cases} (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta_1 > 0)\,(\forall x \in \boldsymbol{U}^\circ_{\delta_1}(x_0))\colon\ (A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon), \\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta_2 > 0)\,(\forall x \in \boldsymbol{U}^\circ_{\delta_2}(x_0))\colon\ (A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon), \\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta_3 > 0)\,(\forall x \in \boldsymbol{U}^\circ_{\delta_3}(x_0))\colon\ (A - \varepsilon < \chi(x) < A + \varepsilon). \end{cases}$$

Следовательно, если взять $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, то в проколотой δ-окрестности точки x_0 выполнены неравенства

$$(\forall x \in \boldsymbol{U}^\circ_\delta(x_0))\colon\ (-\varepsilon < \varphi(x) - A \leqslant \chi(x) - A \leqslant \psi(x) - A < \varepsilon),$$

из которых вытекает, что $-\varepsilon < \chi(x) - A < \varepsilon \Leftrightarrow |\chi(x) - A| < \varepsilon$, или

$$\lim_{x\to x_0} \chi(x) = A. \qquad \blacktriangleleft$$

Теорема 7.7 (о пределе сложной функции). Если функция $u = f(x)$ имеет предел в точке x_0, а функция $g(u)$ имеет предел в точке u_0, такой, что $u_0 = f(x_0)$, то суперпозиция $h = g(f(x))$ имеет предел в точке x_0.

7.2. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Докажем некоторые следствия, вытекающие из общих теорем.

Теорема 7.8 (первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{7.1}$$

▷ Воспользуемся условным неравенством леммы 3.1: если $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, то $\sin x<x<\operatorname{tg} x$. Поделим его на $\sin x$ и получим неравенство $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$, или $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

Из неравенств $1>\cos x>\cos^2 x=1-\sin^2 x>1-x^2$ следует, что разность $1-\cos x$ можно сделать меньше любого $\varepsilon>0$, если взять $|x|<\delta$, где $\delta=\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Первый замечательный предел вытекает из доказанного предела и теоремы «о зажатой функции». ◀

Теорема 7.9 (второй замечательный предел).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{7.2}$$

Лемма 7.2. Функция $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ строго возрастает при $x\geqslant 1$.

▷ Доказательство. Как известно, любое действительное число x можно представить в виде суммы его целой и дробной частей. Положим $x_1=x$, $x_2=x+n+\Delta>x_1$, $0\leqslant\Delta<1$, $n\in\mathbb{N}$. При заданных x_1, x_2 величины n и Δ вычисляются по формулам $n=[x_2-x_1]$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\{0;1;2;\ldots\}$; $\Delta=\{x_2-x_1\}$, где n — целая часть разности x_2-x_1, а Δ — ее дробная часть.

Доказательство проведем методом математической индукции по n.

1°. При $n=0$ вычислим отношение

$$\frac{y(x_2)}{y(x_1)}=\frac{y(x+\Delta)}{y(x)}=\left(1+\frac{1}{x+\Delta}\right)^{x+\Delta}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=$$

$$= \left(\frac{1 + \dfrac{1}{x + \Delta}}{1 + \dfrac{1}{x}} \right)^{x+\Delta} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\Delta} = \left(\frac{x(x + \Delta + 1)}{(x + \Delta)(x + 1)} \right)^{x+\Delta} \times$$

$$\times \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\Delta} = \left(\frac{(x+\Delta)(x+1) - \Delta}{(x+\Delta)(x+1)}\right)^{x+\Delta} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\Delta} =$$

$$= \left(1 - \frac{\Delta}{(x+\Delta)(x+1)}\right)^{x+\Delta} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\Delta}. \quad (7.3)$$

Оценим первый сомножитель выражения (7.3) снизу, используя I обобщенное неравенство Бернулли:

$$\frac{y(x_2)}{y(x_1)} \geqslant \left(1 - \frac{(x+\Delta)\Delta}{(x+\Delta)(x+1)}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\Delta} =$$

$$= \left(1 - \frac{\Delta}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\Delta}.$$

Затем оценим сверху выражение $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\Delta}$, используя II обобщенное неравенство Бернулли (показатель степени $0 \leqslant \Delta < 1$), и по свойствам неравенств получим нижнюю оценку для выражения $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\Delta}$:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\Delta} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{\Delta} \leqslant 1 - \frac{\Delta}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\Delta} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\Delta} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)^{\Delta}} \geqslant \frac{1}{1 - \dfrac{\Delta}{x+1}}.$$

Подставив полученные оценки в соотношение (7.3), запишем неравенство

$$\frac{y(x_2)}{y(x_1)} \geqslant \left(1 - \frac{\Delta}{x+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Delta}{x+1}\right)^{-1} = 1,$$

из которого следует, что при $n = 0$ значение $y(x_2) \geqslant y(x_1)$.

2°. Положим $n = k - 1$ и допустим справедливость неравенства $\dfrac{y(x + (k-1) + \Delta)}{y(x)} > 1$. Докажем, что при $n = k$ выполнено неравенство $\dfrac{y(x + k + \Delta)}{y(x)} > 1$.

Воспользуемся равенством

$$\frac{y(x+k+\Delta)}{y(x)} = \frac{y(x+k+\Delta)}{y(x+(k-1)+\Delta)} \cdot \frac{y(x+(k-1)+\Delta)}{y(x)}. \tag{7.4}$$

Первый сомножитель в правой части выражения (7.4) имеет вид $\dfrac{y(\xi+1)}{y(\xi)}$, где $\xi = x + (k-1) + \Delta$. Докажем, что $\dfrac{y(\xi+1)}{y(\xi)} > 1$. Для этого сначала применим преобразование, использовавшееся при выводе формулы (7.3), и найдем

$$\frac{y(\xi+1)}{y(\xi)} = \left(1 + \frac{1}{\xi+1}\right)^{\xi+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{-\xi} =$$

$$= \left(\frac{1 + \dfrac{1}{\xi+1}}{1 + \dfrac{1}{\xi}}\right)^{\xi+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) = \left(\frac{\xi(\xi+1+1)}{(\xi+1)^2}\right)^{\xi+1} \cdot \frac{\xi+1}{\xi} =$$

$$= \left(\frac{(\xi+1)^2 - 1}{(\xi+1)^2}\right)^{\xi+1} \cdot \frac{\xi+1}{\xi} = \left(1 - \frac{1}{(\xi+1)^2}\right)^{\xi+1} \cdot \frac{\xi+1}{\xi},$$

а затем оценим снизу полученное выражение с помощью I неравенства Бернулли (показатель степени $\xi + 1 > 1$):

$$\frac{y(\xi+1)}{y(\xi)} = \left(1 - \frac{1}{(\xi+1)^2}\right)^{\xi+1} \cdot \frac{\xi+1}{\xi} > \left(1 - \frac{(\xi+1)\cdot 1}{(\xi+1)^2}\right) \times$$

$$\times \frac{\xi+1}{\xi} = \left(1 - \frac{1}{\xi+1}\right) \cdot \frac{\xi+1}{\xi} = \frac{\xi}{\xi+1} \cdot \frac{\xi+1}{\xi} = 1.$$

Оценка второго сомножителя в формуле (7.4) вытекает из предположения индукции. Таким образом, при всех $x_2 > x_1 \geqslant 1$ выполнено неравенство $\dfrac{y(x_2)}{y(x_1)} > 1$. При этом $y(x_2) > y(x_1)$. Лемма 7.2 доказана. ◀

▷ Доказательство формулы (7.2). Представим число x в виде суммы его целой и дробной частей: $x = n + \Delta$, $n = [x]$,

$\Delta = \{x\}$, $0 \leqslant \Delta < 1$. Очевидно, $n \leqslant x < n+1$. Воспользуемся леммой 7.2 и построим функции $\mu(x)$, $\nu(x)$, оценивающие функцию $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, соответственно, снизу и сверху:

$$\mu(x) = y([x]) \leqslant y(x) < y([x]+1) = \nu(x).$$

При $x \to +\infty$ величина $n = [x] \to +\infty$. При этом, по лемме 7.1, каждая из функций $\mu(x)$, $\nu(x)$ имеет один и тот же предел, равный e.

Следовательно, по теореме о «зажатой функции», $y(x)$ имеет тот же самый предел. Теорема доказана. ◀

Следствие 1.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{7.5$_1$}$$

▷ Для доказательства введем переменную $x = -u$. Очевидно, $u \to +\infty$ при $x \to -\infty$. В новых обозначениях предел (7.5$_1$) преобразуется к пределу (7.2):

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{u-1}\right)^u =$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1+\frac{1}{u-1}\right) = e\cdot 1 = e. \quad ◀$$

Следствие 2.

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e. \tag{7.5$_2$}$$

Упражнение 7.2. 1) Доказать предел (7.5$_2$) самостоятельно.

2) Доказать, что прямая с уравнением $y = kx + b$ при $x \to \infty$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = b.$$

3) Найти наклонные асимптоты при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$ и построить графики следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2+1}$; б) $y = \sqrt{x^2+2x}$;

в) $y = \sqrt{x^2+2x+3}$; г) $y = \sqrt{4x^2+x} - x$.

7.3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

Определение 7.4. Две бесконечно малые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *эквивалентными*, или $\varphi(x) \sim \psi(x)$, в окрестности точки a, если

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка*, или $\varphi(x) = O(\psi(x))$, или $\psi(x) = O(\varphi(x))$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = p$, $p \neq 1$ и $p \neq 0$. Если $p = 0$, то $\varphi(x)$ называется бесконечно малой *высшего порядка* малости по отношению к $\psi(x)$, или $\varphi(x) = o(\psi(x))$, а $\psi(x)$ — бесконечно малой *низшего порядка* малости по отношению к $\varphi(x)$.

Докажите, что из теоремы о функции, ее пределе и бесконечно малой функции вытекает эквивалентность бесконечно малых при $x \to 0$ функций:

$$x, \quad \sin x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \ln(1+x), \quad e^x - 1,$$
$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} \ (\alpha \neq 0), \quad \arcsin x, \quad \operatorname{arctg} x.$$

7.4. ВЫВОД ФОРМУЛ ЭЙЛЕРА НА МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Введем понятие предела на множестве комплексных чисел $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy\}$, где $i = \sqrt{-1}$, а x, y — действительные числа. Воспользуемся обозначением для модуля комплексного числа $z = (x; y)$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Определение 7.5. Комплексное число z_0 называется *пределом* последовательности комплексных чисел $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Предел z_0 последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$, что равносильно сходимости к нулю последовательности действительных чисел $\{|z_n - z_0|\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ при $n \to \infty$, а это условие эквивалентно существованию пределов

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

последовательностей действительных чисел $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $x_0 = \operatorname{Re} z_0$, $x_n = \operatorname{Re} z_n$; $y_0 = \operatorname{Im} z_0$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$.

Используя это утверждение, можно доказать теоремы об арифметических свойствах пределов суммы, разности, произведения и частного последовательностей комплексных чисел.

2. Определим функцию e^z равенством $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ и докажем формулу Эйлера

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y).$$

$\triangleright$ Запишем члены последовательности $\left\{\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ в тригонометрической форме

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n =$$
$$= \left(\sqrt{1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n,$$

где $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x+n}$. Воспользуемся формулой Муавра и получим

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^n =$$
$$= \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot (\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

В полученной формуле перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \times$$
$$\times \lim_{n\to\infty}(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Найдем пределы сомножителей в правой части полученной формулы.

При выводе второго предела воспользуемся следствием к первому замечательному пределу

i) $$\lim_{n\to\infty}(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} n\theta\right) + i\sin\left(\lim_{n\to\infty} n\theta\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} n\theta = \lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x+n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{\frac{x}{n}+1} = y,$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \cos y + i\sin y$.

Для вывода первого предела в произведении воспользуемся вторым замечательным пределом

ii) $$\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} =$$
$$= \left(\left(1+\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \to e^x \text{ при } n\to\infty,$$

где $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ обозначает отношение $\dfrac{x^2+y^2}{n^2}$, которое по порядку величины меньше, чем $\dfrac{1}{n}$. В результате получим доказываемую формулу

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x\cdot(\cos y + i\sin y). \qquad \blacktriangleleft$$

Полагая в формуле Эйлера $x = 0$, получим следующую формулу:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Возьмем $y = \pi$ и получим другую формулу Эйлера, связывающую числа 0, 1, e, π и мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$, а именно: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Упражнение 7.3. Доказать формулы:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}.$$

7.5. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ВИЕТА

1. Вычислим предел последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$, где

$$a_n = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\alpha}{2^n}, \quad \alpha \neq 0.$$

$\triangleright$ Домножим и разделим a_n на $\sin\dfrac{\alpha}{2^n}$. Преобразуем числитель полученной дроби к выражению $\dfrac{\sin\alpha}{2^n}$ и найдем $a_n = \dfrac{\sin\alpha}{2^n \sin\dfrac{\alpha}{2^n}}$.

Воспользуемся первым замечательным пределом и выведем предел при $n \to \infty$ последовательности $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\alpha}{2^n \sin\dfrac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\alpha}{2^n}}{\sin\dfrac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot 1 = \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

так как при $n \to \infty$ величина $\dfrac{\alpha}{2^n} \to 0$. В результате получим равенство

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\alpha}{2^n},$$

которое перепишем в виде

$$\alpha = \frac{\sin\alpha}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{\alpha}{2^n}}. \tag{7.6}$$

С помощью формулы $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$, выводятся следующие формулы:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\dfrac{\alpha}{4} = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}}, \\ \cos\dfrac{\alpha}{8} = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (7.6_1)$$

При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ имеем: $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, и из равенства (7.6) с помощью формул (7.6_1) выведем формулу Виета:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}\cdots}. \quad ◀$$

2. Геометрическая интерпретация полученной формулы связана с квадратурой круга (т. е. вычислением площади круга). Рассмотрим круг радиуса 1, в который вписаны правильные 2^n-угольники, где $n = 3, 4, \dots$ Соединяя все вершины 2^n-угольника с центром круга, получим 2^n равнобедренных треугольников, имеющих угол $\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$ при вершине, площадью $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$ каждый. При этом площадь 2^n-угольника равна

$$S_{2^n} = 2^{n-1}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}.$$

Аналогично, площадь 2^{n+1}-угольника равна

$$S_{2^{n+1}} = 2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}.$$

Отношение величин этих площадей равно

$$\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}} = \frac{2^{n-1}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{2^n\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^n}} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^n}}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^n}}{\cos\dfrac{\pi}{2^n}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^n} = \cos\frac{\pi}{2^n}.$$

С учетом полученной формулы вычислим отношение

$$\frac{S_4}{S_{2^n}} = \frac{S_{2^2}}{S_{2^3}}\cdot\frac{S_{2^4}}{S_{2^5}}\cdot\ldots\cdot\frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^n}} = \;=\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\cos\frac{\pi}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-1}},$$

и найдем

$$\frac{S_4}{S_{2^n}} = \prod_{\nu=2}^{\nu=n-1}\cos\frac{\pi}{2^\nu}.$$

По доказанному выше, значение $S_4 = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = \pi$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в предыдущем равенстве, получим формулу Виета, записанную в виде

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots$$

7.6. ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 7.10 (теорема Вейерштрасса). 1) Каждая функция $f(x)$, невозрастающая и ограниченная снизу на промежутке $\boldsymbol{X}$, имеющем точку сгущения a, конечную или $-\infty$, расположенную левее всех значений x, имеет при $x\to a$ конечный предел.

1_1) Невозрастающая, неограниченная снизу функция $f(x)$ при $x\to a$ стремится к $-\infty$.

2) Каждая функция $f(x)$, неубывающая и ограниченная сверху на промежутке $\boldsymbol{X}$, имеющем точку сгущения a, конечную или $+\infty$, расположенную правее всех значений x, имеет при $x\to a$ конечный предел.

2_1) Неубывающая, неограниченная сверху функция $f(x)$ при $x \to a$ стремится к $+\infty$.

$\triangleright$ Доказательство. Пусть неубывающая функция $f(x)$ имеет ограниченное множество значений $\boldsymbol{E}(f)$ на промежутке $\boldsymbol{X}$. По теореме 1.4, существует верхняя грань $\beta = \sup\{\boldsymbol{E}(f)\}$. Докажем, что β и есть искомый предел.

Согласно определению верхней грани, выполнены свойства:

1) для любого x из $\boldsymbol{X}$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant \beta$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, x' \in \boldsymbol{X})\colon (f(x') > \beta - \varepsilon)$.

Вследствие возрастания функции $f(x)$, при всех $x > x'$ также выполнено неравенство $f(x) > \beta - \varepsilon$, или

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, x' \in \boldsymbol{X})\,(\forall x > x')\colon (\beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon).$$

Таким образом, при конечном a, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = a - x' > 0$, что $(\forall x \in \boldsymbol{U}_\delta(a))\colon (|f(x) - \beta| < \varepsilon)$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \beta$.

Заметим, что при $a = +\infty$ следует взять $N(\varepsilon) = x'$ и тогда $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, N \in \mathbb{N})\,(\forall x > N)\colon (|f(x) - \beta| < \varepsilon) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta\right)$.

Аналогично рассматривается случай невозрастающей функции $f(x)$. Утверждение доказано. ◀

Теорема о пределе монотонной последовательности есть частный случай доказанной теоремы.

7.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ПО ГЕЙНЕ

Пусть числовое множество $\boldsymbol{X} = \{x\}$ имеет точку сгущения a, конечную или бесконечную.

Лемма 7.3. Во множестве $\boldsymbol{X}$ бесконечным числом способов можно построить последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \neq a$, сходящуюся к точке сгущения a.

$\triangleright$ Доказательство. 1. Если значение a конечно, то возьмем какую-нибудь последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n > 0$, сходящуюся к 0. Например, $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ По определению точки сгущения, в каждой проколотой δ_n-окрестности точки a

существует по крайней мере одна точка x'_n из множества $\boldsymbol{X}$. Построим к а к у ю-н и б у д ь последовательность $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. По построению, $0 < |x'_n - a| < \delta_n$; следовательно, все члены последовательности $\{x'_n\}$ меньше заданного положительного числа $\varepsilon > 0$ при $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, т. е. $\{x'_n\}$ сходится к a.

2. Если значение a б е с к о н е ч н о, то возьмем какую-нибудь последовательность $\{\Delta_n\}$, $\Delta_n > 0$, сходящуюся к $+\infty$. Например, $\Delta_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ При этом

$$(\forall\,\Delta_n > 0)\,(\exists\,x''_n \in \boldsymbol{X})\colon\,(x''_n > \Delta_n).$$

Построим последовательность $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. По построению, $x''_n > \Delta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, следовательно, при $n > N$ все члены последовательности $\{x''_n\}$ больше заданного положительного числа N, т. е. $\{x''_n\}$ сходится к $+\infty$. ◀

Определение 7.6 (определение предела функции в точке по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, имеющей предел a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел A.

Теорема 7.11. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.

▷ Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проведем в два этапа: сначала докажем, что из определения Коши следует определение Гейне, а потом докажем обратное утверждение.

1. (К) $\to$ (Г). Напомним определение предела функции по Коши:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = A\right) = (\forall\,\varepsilon > 0)\,(\exists\,\delta > 0)\,(\forall\,x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \delta)\colon$$
$$(|f(x) - A| < \varepsilon). \quad \text{(К)}$$

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, имеющую предел a, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Тогда

$$(\forall\,\delta^* > 0)\,(\exists\,N \in \mathbb{N})(\forall\,n > N)\colon\,(0 < |x_n - a| < \delta^*).$$

Если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta^* = \delta(a, \varepsilon)$, то в силу определения (К), выполнено неравенство $|f(x_n) - A)| < \varepsilon$. Таким образом, произвольной последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, соответствует последовательность $\{f(x_n)\}$, сходящаяся к A, что означает сходимость по Гейне функции $f(x)$ к A при $x \to a$.

2. (Г) $\to$ (К). Доказательство проведем методом «от противного». Пусть произвольная последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к a, индуцирует последовательность $\{f(x_n)\}$, сходящуюся к A, однако A не является пределом по Коши функции $f(x)$ при $x \to a$, т. е. выполнено отрицание (К)

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) \neq A\right) = (\exists\,\varepsilon > 0)\,(\forall\,\delta > 0)\,(\exists\,x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \delta)\colon$$
$$(|f(x) - A| \geqslant \varepsilon).$$

Покажем, что в этом случае можно построить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a, которая индуцирует последовательность $\{f(x_n)\}$, не сходящуюся к A. Для этого возьмем какую-нибудь последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n > 0$, сходящуюся к 0. Например, $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, где $n = 1, 2, \ldots$

Ввиду принятого допущения,

$$(\forall\,\delta = \delta_n)\,(\exists\,x' \in \mathbb{R},\ 0 < |x' - a| < \delta)\colon (|f(x') - A| \geqslant \varepsilon).$$

Из этих значений x' составим последовательность $\{x_n\}$, для которой $0 < |x_n - a| < \delta_n = \dfrac{1}{n}$, однако $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $\{f(x_n)\}$ не сходится по Гейне к A. Полученное противоречие доказывает, что антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

Следствие 1. Если последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, то

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Следствие 2. Если последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

ГЛАВА

8 СВОЙСТВО НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Опираясь на определение предела функции по Коши, естественно вводится определение *непрерывности* функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 8.1. Функция $f(x)$, определенная в области $\boldsymbol{X}$, для которой x_0 является точкой сгущения, причем в точке x_0 функция имеет определенное значение $f(x_0)$, называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Сформулированное на «языке ε-δ», это определение имеет такой вид:

Определение 8.1$_1$. Функция $f(x)$, определенная на множестве $\boldsymbol{X}$, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in \boldsymbol{X}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta(x_0, \varepsilon)$, что при любом $x \in \boldsymbol{X}$ и $|x - x_0| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, или

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta > 0)\,(\forall x \in \boldsymbol{X}, 0 < |x - x_0| < \delta) \colon (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Определение непрерывности функции в точке на языке последовательностей имеет следующий вид:

Определение 8.2. Функция $f(x)$, определенная на множестве $\boldsymbol{X}$, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in \boldsymbol{X}$, если для каждой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \boldsymbol{X}$, сходящейся к x_0, индуцированная последовательность $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $f(x_0)$.

Например, постоянная $y = C$ — непрерывная функция.

Определение 8.3. Функция называется *непрерывной на интервале* $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$.

Графиком непрерывной функции является непрерывная (т. е. без разрывов) кривая. Например, функции $y = x$ и $y = x^n$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

Для исследования непрерывности графика функции $f(x)$ в точке $\overline{x}$, возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и проведем две прямые, параллельные оси абсцисс: одну — с уравнением $y = f(\overline{x}) + \varepsilon$, другую — с уравнением $y = f(\overline{x}) - \varepsilon$, ограничивающие полоску шириной 2ε. Затем исследуем, найдется ли такой отрезок оси абсцисс с центром в точке $\overline{x}$, имеющий длину $2\delta > 0$, чтобы соответствующая этому отрезку часть графика целиком лежала в упомянутой полоске. В случае непрерывной кривой такой отрезок существует при любом $\varepsilon > 0$.

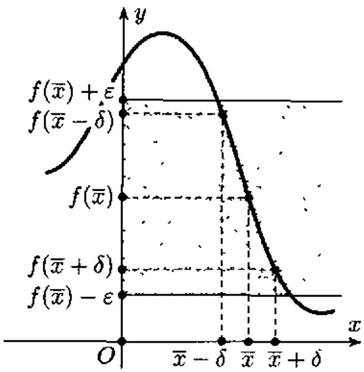


Рис. 8.1

Обратно, если такой отрезок существует при любом выборе числа $\varepsilon > 0$, то график функции непрерывен в точке $\overline{x}$ (рис. 8.1).

Пример 8.1. Доказать непрерывность функций: 1) линейной функции $y = kx + b$, $k \neq 0$; 2) квадратичной функции $y = x^2$; 3) функции $y = \sqrt{x}$.

$\triangleright$ Решение. 1) Докажем непрерывность линейной функции в некоторой фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Выберем любое число $\varepsilon > 0$ и составим неравенство для модуля разности:

$$|kx + b - kx_0 - b| = |k| \cdot |x - x_0| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|k|} = \delta,$$

из которого вытекает непрерывность линейной функции.

2) Для некоторой фиксированной точки $x_0 \in \mathbb{R}$ выберем любое число $\varepsilon > 0$ и составим неравенство для модуля разности:

$$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)^2 + 2x_0(x - x_0)| \leqslant |x - x_0|^2 + 2|x_0| \cdot |x - x_0| < \varepsilon.$$

Квадратичное неравенство $|x - x_0|^2 + 2|x_0| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$ имеет решение относительно неизвестной $|x - x_0| \geqslant 0$

$$|x - x_0| < \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon} - |x_0| = \delta(x_0, \varepsilon).$$

Таким образом, $(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)$, такое, что $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, как только $|x - x_0| < \delta$. Непрерывность квадратичной функции доказана.

3) Для некоторой фиксированной точки $x_0 > 0$ выберем любое $\varepsilon > 0$ и составим неравенство

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon,$$

которое выполнено, если только $|x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0} = \delta$, откуда вытекает непрерывность функции $y = \sqrt{x}$ на луче $[0; +\infty)$. ◀

Из определения непрерывности функции в точке и из теорем о пределе функции вытекает следующая теорема.

Теорема 8.1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.

Подобно тому как определялись правосторонний и левосторонний пределы, можно ввести определения *непрерывности функции слева* и *справа*, а именно:

(1) Функция $f(x)$, определенная в точке x_0, а также в некотором интервале с правым концом в точке x_0, называется *непрерывной слева* в точке x_0, если существует $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

(2) Функция $f(x)$, определенная в точке x_0, а также в некотором интервале с левым концом в точке x_0, называется *непрерывной справа* в точке x_0, если существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Замечание. При изучении теории пределов было несущественно, определена функция в точке x_0 или нет. Для непрерывности функции в точке x_0 необходимо, чтобы функция была определена при $x = x_0$.

Упражнение 8.1. Доказать следующее утверждение: для непрерывности функции $f(x)$ во внутренней точке $x_0 \in \boldsymbol{X}$, необходимо и достаточно, чтобы функция была непрерывна в этой точке слева и справа, или

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 8.3$_1$. Функция называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Нарушение непрерывности функции в точке x_0, лежащей внутри или на границе области изменения аргумента, может происходить различными способами. Такая точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$ (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Классификация точек разрыва

Тип точки разрыва x_0	Определение	Примеры
Устранимый разрыв	$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq$ $\neq f(x_0)$	$y = \dfrac{x-x_0}{x-x_0}$, $y = \dfrac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}$
Неустранимый разрыв 1-го рода	$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) < \infty$; $0 < \omega(x_0) < \infty$, где $\omega(x_0) =$ $= \left\lvert \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \right\rvert$ — *скачок* функции $f(x)$ в точке x_0	$y = \operatorname{sign}(x-x_0)$, $y = [x-x_0]$, $y = \{x-x_0\}$
Неустранимый разрыв 2-го рода	$\omega(x_0) = \infty$ или не существуют $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и/или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$	$y = \dfrac{1}{x-x_0}$, $y = \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$, $y = 2^{\frac{1}{x-x_0}}$, $y = \sin\dfrac{1}{x-x_0}$

Пример 8.2. Функция $y = [x]$ непрерывна всюду, за исключением целочисленных значений переменной x, в которых функция непрерывна справа.

Пример 8.3. Функция

$$y = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

ограничена $\left(\text{так как } \left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1\right)$, однако не является непрерывной при $x = 0$, в силу того, что последовательность

$$x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)} \to 0$$

при $n \to \infty$ и $\left\{\sin \dfrac{1}{x_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ принимает значения $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$, а значит, расходится.

Пример 8.4. Функции

$$y = \frac{x}{1+x^4} \quad \text{и} \quad y = \begin{cases} \dfrac{x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывны на всей числовой оси.

Лемма 8.1. Монотонная (хотя бы и в широком смысле) на промежутке $\boldsymbol{X}$ функция $f(x)$ может иметь в $\boldsymbol{X}$ только разрывы первого рода, или скачки.

$\triangleright$ Докажем лемму 8.1 для неубывающей функции $f(x)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in \boldsymbol{X}$, не совпадающую с левым концом промежутка $\boldsymbol{X}$, и рассмотрим часть промежутка, состоящую из точек $x < x_0$, лежащих левее точки x_0. При этом выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.

По теореме о пределе монотонной функции существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Если он равен $f(x_0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева. В противном случае имеет место скачок.

Аналогично, в каждой точке $x_0 \in \boldsymbol{X}$, не совпадающей с правым концом промежутка $\boldsymbol{X}$, функция $f(x)$ либо непрерывна в точке x_0 справа, либо имеет разрыв первого рода. ◀

8.1. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ

Используя теоремы теории пределов, можно доказать теорему об арифметических свойствах непрерывных функций.

Теорема 8.2. Если функции $v(x)$ и $w(x)$ непрерывны в точке x_0, то в ней непрерывны сумма, разность, произведение и частное (при условии $w(x_0) \neq 0$) этих функций.

Упражнение 8.2. 1) Доказать следствие из леммы 7.1 о стабилизации знака для функции, непрерывной в данной точке, а именно: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $f(x_0) > 0$, то существует такое число $a > 0$, что для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) > a > 0$.

2) Доказать следствие из леммы 7.1 для функции, непрерывной в данной точке x_0, в случае $f(x_0) < 0$.

З а м е ч а н и е. Сформулированные утверждения истинны также для односторонне непрерывных функций.

Теорема 8.3 (о непрерывности сложной функции). Если функция $u = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(u)$ непрерывна в точке $u_0 = f(x_0)$, то суперпозиция $h = g(f(x))$ непрерывна в x_0.

Теорема 8.4. Если монотонная функция $f(x)$ непрерывна и область определения $\boldsymbol{D}(f)$ — связное множество, то обратная функция $F(x)$ монотонна в том же смысле и непрерывна.

$\triangleright$ Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для строго возрастающей функции $f(x)$.

1. Докажем монотонность обратной функции методом «от противного». Предположим, что функция $x = F(y)$ не является строго возрастающей. В этом случае имеются по меньшей мере две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2), для которых $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, удовлетворяющие неравенствам $y_1 > y_2$, $x_1 \leqslant x_2$, что противоречит условию. Значит антитеза неверна. Функция $x = F(y)$ монотонно возрастает на $\boldsymbol{E}(f)$.

2. Докажем непрерывность обратной функции. Зададимся любым числом $c \in \boldsymbol{X}$ и произвольным числом $\varepsilon > 0$, так, чтобы $(c - \varepsilon; c + \varepsilon) \subset \boldsymbol{X}$. Введем обозначения $\gamma = f(c)$, $f(c - \varepsilon) = \gamma_1$, $f(c + \varepsilon) = \gamma_2$ (рис. 8.2).

Из возрастания функции $f(x)$ следует неравенство $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, поэтому число $\delta = \min(\gamma - \gamma_1, \gamma_2 - \gamma) > 0$. На оси ординат рассмотрим произвольное число y из промежутка (γ_1, γ_2), для которого выполнено двойное неравенство $F(\gamma_1) <$ $< F(y) < F(\gamma_2)$, равносильное условиям

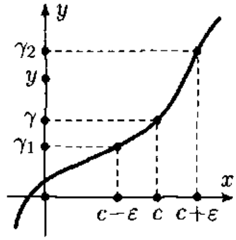


Рис. 8.2

$$c - \varepsilon < F(y) < c + \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad |F(y) - c| = |F(y) - F(\gamma)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для произвольного малого числа $\varepsilon > 0$ имеется такое число $\delta > 0$, что для произвольного числа y, удовлетворяющего неравенству $|y - \gamma| < \delta$, выполняется неравенство $|F(y) - F(\gamma)| < \varepsilon$, что и означает непрерывность по y обратной функции в точке $\gamma = f(c)$. ◀

8.2. ПРИЗНАК НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Для доказательства непрерывности функций часто применяется следующая теорема.

Теорема 8.5. Если функция $f(x)$, определенная на промежутке $\boldsymbol{X}$, монотонна, а значения функции $f(x)$ содержатся в промежутке $\boldsymbol{Y}$ и сплошь заполняют его так, что каждое значение y из $\boldsymbol{Y}$ принимается функцией хоть раз, то $f(x)$ непрерывна в каждой точке $\boldsymbol{X}$.

Замечание 1. Здесь промежуток — это отрезок, интервал, луч, числовая прямая. Такой промежуток будем обозначать $\boldsymbol{X} = \langle a, b \rangle$, соответственно, $\boldsymbol{Y} = \langle f(a), f(b) \rangle$.

Замечание 2. Немонотонная разрывная функция из примера 8.3

$$y = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет множество значений $\boldsymbol{E}(y) = [-1; 1]$ при изменении x на любом промежутке, содержащем точку разрыва $x = 0$, так как на последовательностях вида $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \lambda}$, где $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \geqslant 0$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right)$ выполнены равенства

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin\lambda.$$

$\triangleright$ Доказательство теоремы 8.5 проведем методом «от противного». Предположим, что в некоторой точке x_0 из промежутка $\boldsymbol{X}$ функция $f(x)$ имеет разрыв, например, слева. По лемме 8.1, этот разрыв может быть только скачком. При этом существует предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) < f(x_0)$. Поскольку при $x < x_0$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, а для $x > x_0$ будет $f(x) \geqslant f(x_0)$, то $f(x)$ не может принимать значений y, лежащих между числами $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $f(x_0)$ из промежутка $\boldsymbol{Y}$. Это заключение противоречит условию теоремы. Таким образом, антитеза неверна. Теорема доказана. ◀

Пример 8.5. Функция $f(x) = x^n$, $n > 0$, монотонно возрастает при $x \in [0; +\infty)$. Множество значений $\boldsymbol{E}(f) = [0, +\infty)$. Обратная функция $F(x) = \sqrt[n]{x}$, определенная на $[0; +\infty)$, монотонна в том же смысле, что и функция $f(x)$, причем $\boldsymbol{E}(F) = [0; +\infty)$. По теореме 8.5, функции $y = x^n$, $n > 0$ и $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывны на луче $[0; +\infty)$.

Пример 8.6. Функция $y = a^x$ $(a > 1)$ монотонна при всех $x \in \mathbb{R}$, ее значения положительны и заполняют сплошь промежуток $(0; +\infty)$, что вытекает из существования логарифма $x = \log_a y$ любого числа $y > 0$. Следовательно, функция a^x $(a > 1)$ непрерывна при любом значении x.

По теореме 8.5, обратная функция $y = \log_a x$, определенная на луче $(0; +\infty)$, монотонно возрастает и непрерывна.

Пример 8.7. Доказательство непрерывности тригонометрических функций и обратных к ним функций в областях их определения проводится аналогично.

Следствие. Все основные элементарные функции непрерывны в области своего определения.

Замечание 1. Если x_0 — изолированная точка множества $\boldsymbol{X}$, то она не является предельной точкой для $\boldsymbol{X}$, поскольку имеется окрестность $U_\delta(x_0)$, содержащая только одну точку $x_0 \in \boldsymbol{X}$. При этом, если какая-нибудь последовательность

$\{x_n\} \subset \boldsymbol{X}$ сходится к x_0, то существует такое натуральное число N, что $x_n = x_0$ для всех $n > N$ и равенство

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ x_n\to x_0,\\ x_n\in \boldsymbol{X}}} f(x_n) = f(x_0)$$

выполнено для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \subset \boldsymbol{X}$, сходящейся к x_0. Из эквивалентности определений предела функции в точке по Гейне и по Коши следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Поэтому функция $f(x)$, определенная на $\boldsymbol{X}$, непрерывна в точке x_0.

Замечание 2. Заметим, что функции

$$f(x) = \sqrt{\ln|\cos x|} \quad \text{и} \quad g(x) = \sqrt{\ln(\sin(\pi e^x))},$$

полученные из элементарных функций применением конечного числа алгебраических операций и суперпозиций, имеют области определения, состоящие из отдельных точек числовой прямой — это, соответственно, $\boldsymbol{D}(f) = \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\boldsymbol{D}(g) = \left\{\ln\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$. Функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в своей области определения.

8.3. ТЕОРЕМЫ О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ФУНКЦИИ

Теорема 8.6 (I теорема Больцано–Коши о нуле непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков (т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$), то на этом отрезке существует хотя бы одна точка $x = c$, в которой $f(c) = 0$.

$\triangleright$ Доказательство. 1. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Если $f(c_1) = 0$, то $c = c_1$. В противном случае на концах одного из отрезков $[a, c_1]$ или $[c_1, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ (при этом $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$). Опять разделим отрезок $[a_1, b_1]$

пополам точкой $c_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ и, если $f(c_2) \neq 0$, то выберем из получившихся двух такой отрезок $[a_2, b_2]$, что $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

Продолжая этот процесс деления, на n-м шаге в случае $f(c_n) \neq 0$, отберем такой отрезок $[a_n, b_n]$, что $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. При этом длина n-го отрезка $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, для границ каждого из полученных вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

выполнены неравенства

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1;$$
$$a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

По теореме Вейерштрасса и принципу вложенных отрезков, каждая из монотонных ограниченных последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ имеет один и тот же предел: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

2. Докажем, что $f(c) = 0$. Воспользуемся методом доказательства «от противного». Пусть $f(c) > 0$. По теореме о стабилизации знака непрерывной функции, существует такая окрестность $U(c)$ в каждой точке которой выполнено неравенство $f(x) > 0$. Поскольку длина n-го отрезка

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то, начиная с некоторого номера N, все точки отрезков $[a_n, b_n]$ будут лежать в окрестности $U(c)$. При этом $f(a_n) \cdot f(b_n) > 0$, что противоречит способу получения отрезков $[a_n, b_n]$. Таким образом, антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

Следствие 1. Если функция $f(x)$, непрерывная на интервале (a, b), не обращается в нуль ни в какой его точке, то $f(x)$ сохраняет постоянный знак на (a, b).

Следствие 2. Если монотонная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то имеется единственная точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.

Теорема 8.7 (II теорема Больцано—Коши о промежуточном значении непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то $f(x)$ принимает на отрезке любое значение γ между $f(a)$ и $f(b)$.

$\triangleright$ Доказательство. Пусть $f(a) < f(b)$ и число $\gamma \in \in (f(a), f(b))$. Непрерывная функция $\Phi(x) = f(x) - \gamma$ удовлетворяет условию $\Phi(a) \cdot \Phi(b) < 0$, так как $\Phi(a) = f(a) - \gamma < 0$ и $\Phi(b) = f(b) - \gamma > 0$. По теореме 8.6, на отрезке $[a,b]$ найдется такая точка c, что $\Phi(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - \gamma = 0 \Leftrightarrow f(c) = \gamma$. ◀

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на промежутке $X = \langle a,b\rangle$ (не обязательно отрезке), то множество ее значений на X есть промежуток $Y = \langle f(a), f(b)\rangle$.

Теорема 8.8. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, принимает на этом отрезке все значения между наименьшим и наибольшим ее значениями.

Иначе говоря, если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, то

$$(\forall \gamma \in [m,M])\,(\exists x \in [a,b])\colon (f(x) = \gamma).$$

Пример 8.8. 1) Алгебраическое уравнение нечетной степени $P_{2n+1}(x) = 0$ имеет действительный корень (возможно, не один).

2) Доказать, что уравнение $2^x = 4x$ имеет корень $x \in \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

$\triangleright$ Решение. Рассмотрим функцию $y = 2^x - 4x$, очевидно

$$y(0) = 1, \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 2 < 0.$$

Следовательно, корень лежит на интервале $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. ◀

Теорема 8.9 (признак монотонности непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и принимает в разных точках этого интервала разные значения, то $f(x)$ строго монотонна на $(a;b)$.

▷ Доказательство теоремы проведем методом «от противного». Предположим, что функция $f(x)$ не монотонна. Это значит, что существуют такие числа α, β, γ, лежащие в интервале $(a; b)$, что

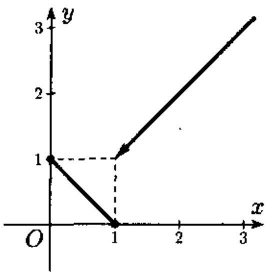


Рис. 8.3

$$\alpha < \beta < \gamma,$$

однако число $f(\beta)$ не лежит между $f(\alpha)$ и $f(\gamma)$, например,

$$f(\gamma) > f(\alpha) > f(\beta).$$

Согласно теореме 8.8 на интервале (β, γ) существует точка $\theta \neq \alpha$ (поскольку $\alpha \notin (\beta, \gamma)$), в которой $f(\theta) = f(\alpha)$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, антитеза неверна. Теорема доказана. ◀

В том случае, когда не выполнено условие непрерывности, функция $y = f(x)$ может оказаться немонотонной. На рис. 8.3 показан график разрывной одно-однозначной немонотонной функции $y = f(x)$, определенной на множестве $\boldsymbol{X} = [0; +\infty)$, заданной условиями

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|x-1|}{x-1} + 1\right), & x \in [0; 1) \cup (1; +\infty), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

8.4. ТЕОРЕМЫ О НАИМЕНЬШЕМ И НАИБОЛЬШЕМ ЗНАЧЕНИЯХ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Сформулированные ниже теоремы применяются при нахождении наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на замкнутом множестве.

Теорема 8.10 (I теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Другими словами, существуют такие числа m и M, что

$$(\forall x \in [a, b]) \colon (m \leqslant f(x) \leqslant M).$$

▷ Доказательство. Воспользуемся методом «от противного». Предположим, что $f(x)$ не ограничена на $[a; b]$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in [a,b]$, что $|f(x_n)| > n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ввиду ограниченности последовательности $\{x_n\}$, из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $c \in [a,b]$ (теорема 5.8 Больцано—Вейерштрасса). Ввиду непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, имеется окрестность $U(c)$, в каждой точке которой $f(x)$ ограничена, что противоречит способу построения последовательности $\{x_n\}$. Таким образом, антитеза неверна. Следовательно, $f(x)$ должна быть ограничена на $[a;b]$. Теорема доказана. ◀

Замечание. Из непрерывности $f(x)$ на интервале (a,b), полуинтервале $[a,b)$ или $(a,b]$ не следует ее ограниченность на нем. Так, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, непрерывная на полуинтервале $(0;1]$, не ограничена на нем.

Теорема 8.11 (II теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на $[a,b]$ существует по крайней мере одна точка x_1, в которой $f(x)$ принимает наименьшее значение, и по крайней мере одна точка x_2, в которой функция принимает наибольшее значение.

Другими словами, на отрезке $[a,b]$ существуют такие две точки x_1, x_2, что

$$(\forall x \in [a,b])\colon (f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)).$$

Доказательство. По I теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, а по теореме 1.4 множество ее значений $E(f)$ имеет нижнюю грань α и верхнюю грань β, которые могут не принадлежать $E(f)$, а значит — не быть значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Докажем, что на $[a;b]$ всегда найдутся такие точки x_1, x_2, что $f(x_1) = \alpha$, $f(x_2) = \beta$. Проведем рассуждение методом «от противного» для верхней грани β (для нижней грани оно проводится аналогично.)

Допустим, что $(\forall x \in [a,b])$: $(f(x) < \beta)$. Функция $\varphi(x) = \beta - f(x) > 0$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, следовательно, функция $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ непрерывна, а по I теореме Вейерштрасса она и ограничена на отрезке $[a;b]$. Поэтому имеется такое число $C > 0$, что

$$(\forall\, x \in [a,b])\colon \left(\frac{1}{\varphi(x)} < C\right),$$

$$\text{или } (\forall\, x \in [a,b])\colon \left(f(x) < \beta - \frac{1}{C}\right),$$

что противоречит определению верхней грани β, согласно которому

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, \gamma \in \boldsymbol{E}(f))\colon (\gamma > \beta - \varepsilon).$$

Таким образом, антитеза неверна. Теорема доказана. ◀

Упражнение 8.3. Доказать, что уравнение имеет решение на указанном отрезке изменения неизвестной:

1) $x^3 - 11x + 121 = 0, \qquad x \in [-11; 0]$;
2) $3\sin 3x - 5\sin x + 1 = 0, \qquad x \in [0; \pi]$.

ГЛАВА 9

СВОЙСТВО ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ

9.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 9.1. 1) График непрерывной функции называется *выпуклым вверх* на промежутке, если любая дуга графика лежит над стягивающей ее хордой или на ней (рис. 9.1, *а*).

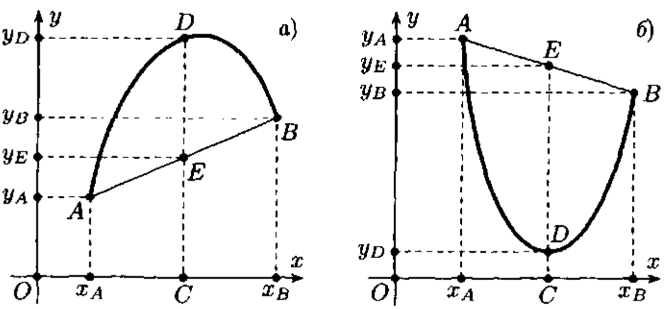


Рис. 9.1

2) График непрерывной функции называется *выпуклым вниз* на промежутке, если любая дуга кривой лежит под стягивающей ее хордой или на ней (рис. 9.1, *б*).

На рис. 9.1, *б* показана часть графика функции $y = f(x)$. Пусть произвольные x_A, $x_B \in \boldsymbol{X}$. Через точки $A(x_A; f(x_A))$ и $B(x_B; f(x_B))$ графика проведена хорда $[AB]$. Пусть точка C — середина отрезка $[x_A; x_B]$. Через точку C параллельно оси ординат проведем прямую, пересекающую кривую AB в точке D, а хорду $[AB]$ — в точке E. Если кривая выпуклая вниз, как на рис. 9.1, *б*, то выполнено неравенство $y_E > y_D$, причем

$$y_E = \frac{f(x_A) + f(x_B)}{2}, \qquad y_D = f\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right).$$

Таким образом, *необходимое условие* выпуклости вниз графика функции $y = f(x)$ на промежутке $\boldsymbol{X}$ имеет вид

$$(\forall x_A, x_B \in \boldsymbol{X}):\ \left(\frac{f(x_A)+f(x_B)}{2} \geqslant f\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)\right). \tag{9.1}$$

Необходимое условие выпуклости вверх графика функции $y = f(x)$ на промежутке $\boldsymbol{X}$ имеет вид (рис. 9.1, *a*)

$$(\forall x_A, x_B \in \boldsymbol{X}):\ \left(\frac{f(x_A)+f(x_B)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)\right). \tag{9.2}$$

Рассмотрим точку $C(x;0)$, $x \in [x_A, x_B]$ (теперь x — это не обязательно середина $[x_A, x_B]$). Запишем уравнение хорды $[AB]$ в виде

$$y = \frac{x_B - x}{x_B - x_A} y_A + \frac{x - x_A}{x_B - x_A} y_B, \quad x \in [x_A, x_B].$$

Очевидно, $f(x_A) = y_A$, $f(x_B) = y_B$, а также

$$p\,f(x_A) + q\,f(x_B) \geqslant f(px_A + qx_B), \tag{9.1_1}$$

где $p = \dfrac{x_B - x}{x_B - x_A} \geqslant 0$, $q = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} \geqslant 0$ и $p+q=1$. Таким образом, для любых точек x_A, x_B из $\boldsymbol{X}$ и для произвольных неотрицательных чисел p, q, в сумме дающих единицу, выполнено неравенство (9.1_1). Это иная формулировка необходимого условия выпуклости вниз графика непрерывной функции, равносильная (9.1).

Необходимое условие выпуклости вверх графика непрерывной функции $y = f(x)$, равносильное (9.2), имеет вид

$$p\,f(x_A) + q\,f(x_B) \leqslant f(px_A + qx_B) \quad (p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p+q=1). \tag{9.2_1}$$

Простейший пример выпуклого вверх (и вниз!) графика — график линейной функции $y = kx + b$, для которого каждое из нестрогих неравенств (9.1_1), (9.2_1) выполнено со знаком равенства.

При доказательстве выпуклости вверх (и вниз) графиков элементарных функций часто используются неравенства (9.1), (9.2).

Следует отметить, что наряду с графиком, выпуклой вверх (вниз) называют также саму функцию $y = f(x)$.

Из определения выпуклости функции, по свойствам неравенств, следуют утверждения следующей леммы.

Лемма 9.1. 1) Произведение выпуклой вверх (вниз) функции на положительную постоянную - выпуклая вверх (вниз) функция.

2) Сумма конечного числа выпуклых вверх (вниз) функций выпуклая вверх (вниз) функция.

9.2. ПРИЗНАКИ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ

Ниже доказаны необходимые и достаточные условия выпуклости вверх и вниз графика функции $y = f(x)$, использующие вспомогательные утверждения, сформулированные в леммах 9.2, 9.3.

Лемма 9.2. Выпуклая вниз на промежутке $\boldsymbol{X}$ функция $f(x)$, отличная от постоянной, не может достигать максимального значения во внутренних точках промежутка $\boldsymbol{X}$ (рис. 9.1, *б*).

$\triangleright$ Для доказательства воспользуемся методом «от противного». Пусть функция $f(x)$ имеет максимум во внутренней точке $x_0 \in \boldsymbol{X}$. По условию, имеется интервал (x_1, x_2), содержащий точку x_0, такой, что выполнена одна из систем неравенств

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_0), \\ f(x_2) \leqslant f(x_0) \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} f(x_1) \leqslant f(x_0), \\ f(x_2) < f(x_0) \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} f(x_1) < f(x_0), \\ f(x_2) < f(x_0). \end{cases}$$

Пусть, например,

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_0), \\ f(x_2) < f(x_0) \end{cases} \tag{9.3}$$

Положим $x_0 = px_1 + qx_2$, причем $p = \dfrac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} > 0$, $q = \dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} > 0$ $(p + q = 1)$. Домножим первое из неравенств (9.3) на p, второе — на q, сложим их и получим неравенство:

$$p\, f(x_1) + q\, f(x_2) < (p + q) \cdot f(x_0) = f(px_1 + qx_2),$$

из которого следует выпуклость вверх функции $f(x)$ на (x_1, x_2), что противоречит условию леммы. Поэтому антитеза неверна. Лемма доказана. ◀

Лемма 9.3. 1) Если при всех значениях x_A, x_B, лежащих в $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{D}(f)$, выполнено неравенство (9.1_1), то график функции $y = f(x)$ — в ы п у к л ы й в н и з.

2) Если выполнено неравенство (9.2_1), то график функции $y = f(x)$ — в ы п у к л ы й в в е р х.

▷ Доказательство. 1) Докажем, что если для произвольного отрезка $[x_A; x_B] \subseteq \boldsymbol{X}$ выполнено неравенство (9.1_1), то дуга AB либо сливается с хордой $[AB]$, либо вся лежит под хордой (за исключением концов).

Рассмотрим линейную функцию

$$\lambda(x) = \frac{x_B - x}{x_B - x_A} f(x_A) + \frac{x - x_A}{x_B - x_A} f(x_B),$$
$$\lambda(x_A) = f(x_A), \quad \lambda(x_B) = f(x_B).$$

По условию, функция $f(x)$ — выпуклая вниз, $\lambda(x)$ и $-\lambda(x)$ — линейные функции, следовательно, и функция $\varphi(x) = f(x) - \lambda(x) = f(x) + (-\lambda(x)) \leqslant 0$ — выпуклая вниз. Если $\varphi(x) \equiv 0$ на $[x_A, x_B]$, то $f(x) \equiv \lambda(x)$, откуда следует, что нестрогое неравенство (9.1_1) выполнено со знаком равенства, и дуга графика сливается с хордой. Если $\varphi(x) \neq 0$ хотя бы в одной точке, то $\forall x \in [x_A, x_B]$ выполнено неравенство $\varphi(x) < 0$, так как если бы для некоторого $x \in (x_A, x_B)$ выполнялось равенство $\varphi(x) = 0$, то *$\varphi(x)$ достигала бы своего максимума во внутренней точке* $[x_A, x_B]$, что невозможно для отличной от постоянной выпуклой вниз функции ввиду леммы 9.2. Поэтому $\forall x \in [x_A, x_B]$ истинно неравенство $f(x) < \lambda(x)$. Нестрогое неравенство (9.1_1) выполнено всегда со знаком неравенства, и график функции $f(x)$ лежит под хордой $[AB]$. ◀

Вторую часть леммы 9.3 докажите самостоятельно.

Теорема 9.1. 1) Необходимым и достаточным условием выпуклости вниз графика непрерывной функции $y = f(x)$ на множестве $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{D}(f)$ является выполнение неравенства (9.1_1) при всех x_A, x_B, лежащих в $\boldsymbol{X}$, для любых чисел $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ и таких, что $p + q = 1$.

2) Необходимым и достаточным условием выпуклости вверх графика непрерывной функции $y = f(x)$ на множестве $\boldsymbol{X}$ является выполнение неравенства (9.2_1) при любых x_A, x_B, лежащих в $\boldsymbol{X}$, для таких чисел $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, что $p + q = 1$.

Так, график функции $y = x^2$ — выпуклый вниз, в силу того, что для любых действительных чисел x_1, x_2 истинно равенство

(в котором $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p+q=1$)

$$(px_1+qx_2)^2 = p^2x_1^2 + q^2x_2^2 + 2pqx_1x_2 = p(1-q)x_1^2 + \\ + q(1-p)x_2^2 + 2pqx_1x_2 = px_1^2 + qx_2^2 - pq(x_1-x_2)^2,$$

приводящее к следующему неравенству:

$$(px_1+qx_2)^2 - (px_1^2+qx_2^2) = -pq(x_1-x_2)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (px_1+qx_2)^2 \leqslant px_1^2+qx_2^2.$$

Следствие. Если a, $b \in \mathbb{R}$, то $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (равенство при $a=b$).

Введем следующие определения.

Определение 9.2. Пусть $\boldsymbol{X}$ — числовое множество. Множество, симметричное $\boldsymbol{X}$ относительно начала координат O, состоящее из чисел, противоположных по знаку числам множества $\boldsymbol{X}$, обозначим $\boldsymbol{X}_-$.

Например, если $\boldsymbol{X} = [1;100)$, то $\boldsymbol{X}_- = (-100;-1]$.

Определение 9.3. Если $\boldsymbol{X}$ — числовое множество, то множество, состоящее из всех чисел вида $x+t$ ($\forall x \in \boldsymbol{X}$), где t — фиксированное действительное число, обозначим $\boldsymbol{X}_t$.

Например, если $\boldsymbol{X} = [0;\pi]$, то $\boldsymbol{X}_{2\pi n} = [2\pi n; \pi + 2\pi n]$.

Из определений четной и нечетной функции, периодической функции и выпуклой функции вытекают утверждения 1—4.

1. а) Если четная функция $f(x)$ выпукла вверх на множестве $\boldsymbol{X}$, то она также выпукла вверх на множестве $\boldsymbol{X}_-$.

б) Если четная функция $f(x)$ выпукла вниз на множестве $\boldsymbol{X}$, то она также выпукла вниз на множестве $\boldsymbol{X}_-$.

2. а) Если нечетная функция выпукла вверх на множестве $\boldsymbol{X}$, то она выпукла вниз на множестве $\boldsymbol{X}_-$.

б) Если нечетная функция выпукла вниз на множестве $\boldsymbol{X}$, то она выпукла вверх на множестве $\boldsymbol{X}_-$.

3. Если периодическая функция с периодом T выпукла вверх (вниз) на множестве $\boldsymbol{X}$, то она также выпукла вверх (вниз) на множестве X_{nT}, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Графики тригонометрических функций на рис. 3.3—3.6, иллюстрируют утверждения 1—3.

4. Если функция $f(x)$ выпукла вверх (вниз) на множестве $\boldsymbol{X}$, то функция $(-f(x))$ выпукла вниз (вверх) на множестве $\boldsymbol{X}$ (рис. 9.1, *а*, *б*).

Ниже сформулированы общие утверждения, основанные на свойстве выпуклости функций.

9.3. НЕРАВЕНСТВО ЙЕНСЕНА

Лемма 9.4. Если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в ограниченном множестве $\boldsymbol{X}$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — любые неотрицательные числа, причем $\overline{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$ то число

$$\overline{x} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\overline{\alpha}}$$

также лежит в множестве $\boldsymbol{X}$.

$\triangleright$ Доказательство. Найдем наименьшее и наибольшее среди чисел из набора $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Пусть $x' = \min(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$, $x'' = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом выполнены двойные неравенства

$$x' \leqslant x_\nu \leqslant x'' \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_\nu x' \leqslant \alpha_\nu x_\nu \leqslant x'' \alpha_\nu$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, из которых следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x' \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x''.$$

Преобразуем полученное неравенство к виду

$$x' \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu \leqslant x'' \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \quad \Leftrightarrow \quad x' \leqslant \overline{x} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu} \leqslant x'',$$

реализующему доказываемое утверждение. $\blacktriangleleft$

Следствие. Если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в ограниченном числовом множестве $\boldsymbol{X}$, то среднее арифметическое этих чисел $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ также лежит в множестве $\boldsymbol{X}$.

Теорема 9.2 (неравенство о средних). Если выпуклая вверх функция $f(x)$ определена на множестве $\boldsymbol{X}$, то для произвольных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из $\boldsymbol{X}$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \qquad (9.4)$$

$\triangleright$ Доказательство Коши. 1. Воспользуемся методом математической индукции и докажем неравенство (9.4) для чисел n вида 2^m.

1°. Для $n=2$ утверждение истинно ввиду неравенства (9.2).

2°. Пусть неравенство (9.4) истинно при $n=2^m$; докажем его для $n=2^{m+1}$. Положим

$$x' = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^m}}{2^m}, \quad x'' = \frac{x_{2^m+1}+x_{2^m+2}+\ldots+x_{2^{m+1}}}{2^m}.$$

Тогда

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) = f\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \geqslant \frac{f(x')+f(x'')}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^m}}{2^m}\right)+f\left(\frac{x_{2^m+1}+x_{2^m+2}+\ldots+x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{2^m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Таким образом, неравенство (9.4) доказано для всех чисел n вида 2^m.

2. Рассмотрим числа n, не имеющие вид 2^m. Пусть произвольный набор чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \boldsymbol{X}$; положим $\overline{x} = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \in \boldsymbol{X}$. Это число удовлетворяет линейному равенству, в котором m таково, что $2^m > n$,

$$2^m \cdot \overline{x} = x_1+x_2+\ldots+x_n+(2^m-n)\cdot\overline{x},$$

из которого следует равенство

$$\overline{x} = \frac{\underbrace{x_1+x_2+\ldots+x_n}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{\overline{x}+\overline{x}+\ldots+\overline{x}}_{2^m - n \text{ слагаемых}}}{2^m},$$

причем в числителе полученной дроби содержится 2^m слагаемых. В силу неравенства (9.4), доказанного при $n=2^m$, имеем неравенство

$$f(\overline{x}) \geqslant \frac{\underbrace{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{f(\overline{x})+f(\overline{x})+\ldots+f(\overline{x})}_{2^m - n \text{ слагаемых}}}{2^m},$$

которое перепишем в виде

$$f(\overline{x}) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)+(2^m-n)\cdot f(\overline{x})}{2^m}.$$

Преобразовав его, докажем утверждение теоремы для каждого $n \in \mathbb{N}$:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \quad \blacktriangleleft$$

С л е д с т в и е. Докажем равносильность двух определений (9.2) и (9.2$_1$) выпуклости вверх непрерывной функции.

$\triangleright$ а) При $p = q = \dfrac{1}{2}$ из неравенства (9.2$_1$) получим неравенство (9.2).

б) Докажем обратное утверждение. Воспользуемся неравенством (9.4), записанным в виде

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{m+n}}{m+n}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{m+n})}{m+n},$$

в котором положим

$$x_A = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{m}, \quad x_B = \frac{x_{m+1}+x_{m+2}+\ldots+x_{m+n}}{n};$$

$$x_A \in \boldsymbol{X}, \quad x_B \in \boldsymbol{X}$$

и, с учетом неравенства (9.4), получим следующее неравенство:

$$f\left(\frac{mx_A+nx_B}{m+n}\right) =$$

$$= \frac{\underbrace{f(x_A)+f(x_A)+\ldots+f(x_B)}_{m \text{ слагаемых}} + \underbrace{f(x_B)+f(x_B)+\ldots+f(x_B)}_{n \text{ слагаемых}}}{m+n} =$$

$$= \frac{m}{m+n}f(x_A) + \frac{n}{m+n}f(x_B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(p_{m,n}x_A + q_{n,m}x_B) \geqslant p_{m,n}\, f(x_A) + q_{n,m} f(x_B),$$

где $p_{m,n} = \dfrac{m}{m+n}$, $q_{n,m} = \dfrac{n}{m+n}$ (очевидно, $q_{n,m} = p_{n,m}$) — положительные рациональные числа, в сумме дающие единицу: $p_{m,n} + q_{n,m} = 1$. Общий случай, в силу непрерывности $f(x)$, получается в процессе все более точных рациональных приближений действительных чисел p и q. ◀

Упражнение 9.1. Сформулировать и доказать неравенство о средних для функции, выпуклой вниз.

Упражнение 9.2. Доказать равносильность определений (9.1) и (9.1$_1$) выпуклости вниз непрерывной функции.

Теорема 9.3 (неравенство Йенсена). Пусть функция $f(x)$ выпукла вверх на промежутке $\boldsymbol{X}$; произвольный набор чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \boldsymbol{X}$ и α_1, α_2, ..., α_n — любые неотрицательные числа, такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Тогда выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \tag{9.5}$$

▷ Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. Для $n = 2$ утверждение истинно в силу неравенства (9.2$_1$), в котором $p = \alpha_1$, $q = \alpha_2$.

2°. Пусть неравенство (9.5) истинно для $n = k$; докажем его для $n = k+1$. Рассмотрим любые числа $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\} \subset \subset \boldsymbol{X}$ и любые неотрицательные числа α_1, α_2, ..., α_k, α_{k+1}, такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + \alpha_{k+1} = 1$.

Введем обозначения:

$$\overline{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k; \quad \overline{x} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k}{\overline{\alpha}}.$$

По лемме 9.4, $\overline{x} \in \boldsymbol{X}$. При этом выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}) &= f(\overline{\alpha}\,\overline{x} + \alpha_{k+1} x_{k+1}) \geqslant \\ &\geqslant \overline{\alpha} f(\overline{x}) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) = \\ &= \overline{\alpha} f\left(\frac{\alpha_1}{\overline{\alpha}} x_1 + \frac{\alpha_2}{\overline{\alpha}} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_k}{\overline{\alpha}} x_k\right) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}). \end{aligned}$$

Воспользуемся предположением индукции и получим следующее неравенство:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}) \geqslant$$
$$\geqslant \overline{\alpha}\left(\frac{\alpha_1}{\overline{\alpha}} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{\overline{\alpha}} f(x_2) + \ldots + \frac{\alpha_k}{\overline{\alpha}} f(x_k)\right) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) =$$
$$= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}),$$

откуда следует истинность неравенства (9.5) для каждого $n \in \mathbb{N}$. ◀

Упражнение 9.3. 1) Доказать, что для произвольнопо набора чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и любых неотрицательных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n, таких, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, выполнено неравенство

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^2 \leqslant a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2.$$

(Указание. Для выпуклой вниз функции $y = x^2$ воспользуйтесь неравенством Йенсена.)

2) Для любых действительных чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\{b_1, b_2, \ldots \ldots, b_n\}$ доказать неравенство Коши—Буняковскопо

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

(Указание. Воспользуйтесь неравенством из пункта 1), в котором следует положить $a_i = \dfrac{b_i^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu^2}$, $x_i = \dfrac{a_i}{b_i} \sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 = b_i$. При этом

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu^2} \cdot \left(\frac{a_i^2}{b_i^2}\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\right)^2\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2.)$$

Пример 9.1. 1) Используя неравенство (9.1), докажите, что функция $f(x) = x^{-2}$ выпуклая вниз при $x < 0$ и при $x > 0$.

2) Для любых положительных чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ доказать неравенство

$$\frac{n^3}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2} \leqslant \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}.$$

▷ Доказательство 2). Рассмотрим выпуклую вниз функцию $f(x) = x^{-2}$.

Положим $a_\nu = \dfrac{1}{n}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, воспользуемся неравенством (9.4) для функции $f(x)$ и получим неравенство

$$\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right)^{-2} \leqslant \frac{1}{nx_1^2} + \frac{1}{nx_2^2} + \ldots + \frac{1}{nx_n^2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}\right),$$

из которого вытекает доказываемое неравенство. ◀

Упражнение 9.4. 1) Доказать, что функция $f(x) = \ln x$ — выпуклая вверх.

(Указание. Воспользуйтесь II обобщенным неравенством Бернулли (п. 2.10). Полагая $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\dfrac{x_2}{x_1} > 1$; $p > 0$, $q > 0$ и $p + q = 1$, преобразуем:

$$\ln(px_1 + qx_2) \geqslant p\ln x_1 + q\ln x_2 \ \Leftrightarrow\ px_1 + qx_2 \geqslant x_1^p \cdot x_2^q \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (1-q)x_1 + qx_2 \geqslant x_1^{1-q} \cdot x_2^q \ \Leftrightarrow\ q\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right) \geqslant \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^q - 1 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (1+t)^q \leqslant 1 + qt,$$

где $t = \dfrac{x_2}{x_1} - 1 > -1$. Полученное неравенство есть II неравенство Бернулли, $0 < q < 1$ по определению числа q.)

2) Для любых положительных чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ доказать неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geqslant n \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)^{-1}.$$

▷ Решение. Запишем неравенство Йенсена для выпуклой вверх функции $f(x) = \ln x$, точек $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$ и чисел $\alpha_\nu = \dfrac{1}{n}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$\ln\left(\frac{1}{nx_1} + \frac{1}{nx_2} + \ldots + \frac{1}{nx_n}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n}\ln\frac{1}{x_1} + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{x_n} = \ln\left(\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \geqslant n\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)^{-1}.$$

Неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом доказано. ◄

Упражнение 9.5. Для любых положительных чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ доказать неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом (неравенство Коши)

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Упражнение 9.6. Преобразовать формулу, исследовать функцию и построить ее график, если:

1) $f(x) = \left(\dfrac{(1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} - 2 - \sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{x-1}{(x+4)^2+3}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{3}\cdot\left(3-\sqrt{7}+\dfrac{(x+3)\sqrt{7(x+10)}}{(x+10)\sqrt{7}-7\sqrt{x+10}} - \sqrt{x+10}\right)\times$
$\times\dfrac{x^2+8x+12}{x+5}$;

3) $f(x) = \left(\dfrac{(2-x)\sqrt{5(x+3)}}{\sqrt{125(x+3)}-5x-15} - \sqrt{\dfrac{x+3}{5}}\right)\cdot\dfrac{x+5}{(x+2)^2+1}$;

4) $f(x) = \dfrac{3}{2}\cdot\left(4-\sqrt{17}+\dfrac{(x-12)\sqrt{17(x+5)}}{(x+5)\sqrt{17}-17\sqrt{x+5}} - \sqrt{x+5}\right)\times$
$\times\dfrac{x+4}{(x+5)^2+3}$.

(Указания: 1) $D(f) = (0;1)\cup(1;+\infty)$, $\{1\}$ — устранимый разрыв; 2) $D(f) = (-10;-5)\cup(-5;-3)\cup(-3;+\infty)$, $\{-5\}$ — разрыв 2-го рода, $\{-3\}$ — устранимый разрыв; 3) $D(f) = (-3;2)\cup(2;+\infty)$, $\{2\}$ — устранимый разрыв; 4) $D(f) = (-5;12)\cup(12;+\infty)$, $\{12\}$ — устранимый разрыв.)

Упражнение 9.7. Доказать утверждения о выпуклости суперпозиции $\Phi(x) = f(g(x))$ функций $f(u)$ и $u = g(x)$ из табл. 9.1.

▷ 1. Докажем утверждение из последней строки табл. 9.1.

Пусть возрастающая функция $f(x)$ выпукла вверх, как и функция $g(x)$. Для любых положительных чисел p, q, $p+q = 1$, выполнено неравенство

$$g(px_1 + qx_2) \geqslant p\,g(x_1) + q\,g(x_2).$$

Воспользуемся свойством возрастания, а также свойством выпуклости вверх функции $f(x)$, и оценим снизу суперпозицию $\Phi(px_1 + qx_2)$:

$$\Phi(px_1 + qx_2) = f(g(px_1 + qx_2)) \geqslant f(p\,g(x_1) + q\,g(x_2)) \geqslant$$
$$\geqslant p\,f(g(x_1)) + q\,f(g(x_2)) = p\,\Phi(x_1) + q\,\Phi(x_2),$$

откуда следует, что суперпозиция $\Phi(x)$ — выпуклая вверх функция аргумента x.

Таблица 9.1

Поведение суперпозиции $\Phi(x) = f(g(x))$ в зависимости от поведения функций $f(x)$ и $g(x)$

$f(u)$	$u = g(x)$	$\Phi(x) = f(g(x))$
Выпуклая вниз, убывает	Выпуклая вверх	Выпуклая вниз
Выпуклая вниз, возрастает	Выпуклая вниз	Выпуклая вниз
Выпуклая вверх, убывает	Выпуклая вниз	Выпуклая вверх
Выпуклая вверх, возрастает	Выпуклая вверх	Выпуклая вверх

2. Докажем утверждение из предпоследней строки табл. 9.1.

Пусть теперь убывающая функция $f(x)$ выпукла вверх, а функция $g(x)$ выпукла вниз. Для любых положительных чисел p, q, $p + q = 1$, выполнено неравенство

$$g(px_1 + qx_2) \leqslant p\,g(x_1) + q\,g(x_2).$$

Воспользуемся свойством убывания, а также свойством выпуклости вверх функции $f(x)$, и оценим снизу суперпозицию $\Phi(px_1 + qx_2)$:

$$\Phi(px_1 + qx_2) = f(g(px_1 + qx_2)) \geqslant f(p\,g(x_1) + q\,g(x_2)) \geqslant$$
$$\geqslant p\,f(g(x_1)) + q\,f(g(x_2)) = p\,\Phi(x_1) + q\,\Phi(x_2),$$

откуда следует, что суперпозиция $\Phi(x)$ — выпуклая вверх функция аргумента x.

КОЛЛОКВИУМ ПО ТЕМЕ: СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Общие свойства функций

1. Монотонность, ограниченность, четность, нечетность, периодичность. Суперпозиция функций.

2. Максимум и минимум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

3. Необходимое и достаточное условие обратимости функции. Признак обратимости функции. Свойство графиков взаимно обратных функций. Отыскание обратных для алгебраических и трансцендентных функций.

4. Свойства графиков четных и нечетных функций. Доказать арифметические теоремы о четных и нечетных функциях. Асимптоты графика функции.

5. Периодические функции, основной период. Доказать теорему о связи периода функции $y = f(kx)$ с периодом функции $y = f(x)$ и арифметические теоремы о периодических функциях. Доказать теорему о периодичности суперпозиции функций.

6. Линейные преобразования графиков функций.

7. Классификация элементарных функций.

Предел функции

1. Два определения предела функции в точке, их эквивалентность.

2. Теорема о функции, ее пределе и бесконечно малой функции.

3. Теорема о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций.

4. Арифметические свойства функций, имеющих пределы.

5. Односторонние пределы. Критерий существования предела функции в точке.

6. Теоремы о единственности предела в точке и о предельном переходе в равенстве двух функций. Теорема о предельном переходе в неравенстве для двух функций. Теорема о «зажатой» функции.

7. Первый и второй замечательные пределы. Вывод формулы Эйлера на множестве комплексных чисел. Показательная форма комплексных чисел.

8. Необходимое условие и признак существования предела функции в точке.

9. Теорема о пределе сложной функции.

10. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентность бесконечно малых функций. Доказать эквивалентность бесконечно малых при $x \to 0$ функций

$$\ln(1+x) \sim x; \qquad e^x - 1 \sim x;$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}; \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

Непрерывность функции в точке

1. Непрерывность функции в точке. Доказать арифметические теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

2. Признак непрерывности функциии в точке. Классификация точек разрыва. Непрерывность элементарных функций в области их определения.

3. Теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

4. Теорема о наименьшем и наибольшем значениях непрерывной функции.

Свойство выпуклости функции

1. Определение выпуклости функции на промежутке. Признаки выпуклости функции. Свойство выпуклости и классические неравенства.

ЧАСТЬ 3

МНОГОЧЛЕНЫ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

ГЛАВА 10

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ

Определение 10.1. 1) *Многочленом* степени n называется целая рациональная функция вида

$$y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

определенная на множестве действительных чисел, $D(P_n) = \mathbb{R}$.

2) Постоянная, отличная от нуля, есть многочлен нулевой степени.

3) Степень тождественного нуля не определена.

4) *Корнем* многочлена $P_n(x)$ называется такое число α, что $P_n(\alpha) = 0$.

Определение 10.1$_1$. Многочлены

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \ \ a_n \neq 0$$
$$\text{и } \ Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \ \ b_m \neq 0,$$

называются *равными*, если их степени совпадают и коэффициенты при одинаковых степенях x равны, т. е. $n = m$ и $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

Поэтому равные многочлены тождественно равны при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. Скажем, многочлены $P_4(x)$ и $Q_5(x)$, заданные формулами

$$P_4(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$$
$$\text{и } \ Q_5(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + 2x^2 + x + 1,$$

тождественно равны тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 4$, $c = 3$.

Предыдущее утверждение служит обоснованием *метода неопределенных коэффициентов*, находящего широкое применение в алгебре многочленов.

10.1. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Определение 10.2. *Суммой* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ $(n > m)$ называется многочлен $U_n(x)$, коэффициенты которого при x^μ $(0 \leqslant \mu \leqslant m)$ равны суммам коэффициентов слагаемых многочленов при соответствующих степенях неизвестной, а при $m + 1 \leqslant \mu \leqslant n$ — коэффициентам многочлена $P_n(x)$:

$$U_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + \\ + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Определение 10.3. *Произведением* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен $W_{n+m}(x) = P_n(x) \cdot Q_m(x)$, коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_\nu &= a_\nu b_0 + a_{\nu-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{\nu-1} + a_0 b_\nu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n+m} &= a_n b_m. \end{aligned}$$

Многочлены удобно умножать «*столбиком*». Например,

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 3x^3 + 5x^2 - x + 7 \\ x^2 + 2x - 3 \end{array} \\ \hline -9x^3 - 15x^2 + 3x - 21 \\ 6x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 14x \phantom{{}-21} \\ 3x^5 + 5x^4 - x^3 + 7x^2 \phantom{{}+14x-21} \\ \hline 3x^5 + 11x^4 \phantom{{}-x^3} - 10x^2 + 17x - 21 \end{array}$$

Тем самым,

$$(3x^3 + 5x^2 - x + 7) \cdot (x^2 + 2x - 3) = 3x^5 + 11x^4 - 10x^2 + 17x - 21.$$

Определение 10.4. Многочлен $\overline{P}_n(x)$ называется *противоположным* для многочлена $P_n(x)$, если $P_n(x) + \overline{P}_n(x) \equiv 0$. Очевидно $P_n(x) = -\overline{P}_n(x)$.

Определение 10.5. *Разностью* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ $(n > m)$ называется многочлен

$$V_n(x) = P_n(x) + \overline{Q}_m(x) = P_n(x) - Q_m(x).$$

Определение 10.6. Если для данных многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ $(n > m)$ существует многочлен $G_{n-m}(x)$, удовлетворяющий равенству

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot G_{n-m}(x),$$

то говорят, что $Q_m(x)$ — *целый делитель* многочлена $P_n(x)$ (обозначение: $P_n(x) \vdots Q_m(x)$), а многочлен $G_{n-m}(x)$ — *частное* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

Заметим, что в рассматриваемом случае многочлен $G_{n-m}(x)$ также является целым делителем многочлена $P_n(x)$. Сформулируем основные теоремы о делимости многочленов ($P_n(x)$, $Q_m(x)$ и $S_l(x)$ — многочлены, $c \neq 0$ — постоянная).

1. $P_n(x) \vdots P_n(x)$ — свойство *рефлексивности* деления.
2. Если $P_n(x) \vdots Q_m(x)$ и $Q_m(x) \vdots S_l(x)$, то $P_n(x) \vdots S_l(x)$ — свойство *транзитивности* деления.
3. Если $P_n(x) \vdots S_l(x)$ и $Q_m(x) \vdots S_l(x)$, то $P_n(x) + Q_m(x) \vdots S_l(x)$.
4. Если $P_n(x) \vdots S_l(x)$, то $P_n(x) \cdot Q_m(x) \vdots S_l(x)$.
5. а) $P_n(x) \vdots c$; б) если $P_n(x) \vdots Q_m(x)$, то $P_n(x) \vdots cQ_m(x)$.
6. Многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ делятся друг на друга тогда и только тогда, когда $n = m$ и $P_n(x) = cQ_m(x)$, или

$$P_n(x) \vdots Q_m(x) \quad \text{и} \quad Q_m(x) \vdots P_n(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad n = m \quad \text{и} \quad P_n(x) = cQ_m(x).$$

Часто при делении многочленов возникает *остаток*, т. е. многочлен $R_k(x)$, степень которого меньше степени многочлена-делителя $(k < m \leqslant n)$. На практике деление многочленов осуществляют *«уголком»*. Например,

$$\begin{array}{r|l} \text{делимое} & \text{делитель} \\ -\begin{array}{r} 8x^3+16x^2-\ \ 2x+4 \\ 8x^3-\ \ 4x^2+\ \ 2x \end{array} & \begin{array}{l} 4x^2-2x+1 \\ \hline 2x+5\ \text{— неполное частное} \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 20x^2-\ \ 4x+4 \\ 20x^2-10x+5 \end{array} & \\ \hline 6x-1 & \text{— остаток} \end{array}$$

Очевидно, $8x^3+16x^2-2x+4=(4x^2-2x+1)\cdot(2x+5)+(6x-1)$.

Теорема 10.1 (алгоритм деления с остатком). Для любых многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ $(n \geqslant m)$ существуют такие многочлены $G_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$ $(m > k)$, что выполнено равенство

$$P_n(x) = Q_m(x)\cdot G_{n-m}(x) + R_k(x), \quad k < m, \tag{10.1}$$

причем многочлены $G_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$ определяются однозначно.

$\triangleright$ 1. Доказательство существования. Сущность процесса деления многочленов состоит в понижении степени последовательно получаемых остатков. Вначале старший член $P_n(x)$ делится на старший член $Q_m(x)$, это дает старший член частного. Вычитая из делимого произведение делителя на старший член частного, получаем первый остаток, степень которого меньше n, и т. д. Процесс деления прекращается, когда степень полученного остатка станет меньше степени делителя.

2. Доказательство единственности проведем методом «от противного». Предположим, что имеются другие многочлены $G'_{n-m}(x)$, $R'_k(x)$, удовлетворяющие равенству

$$P_n(x) = Q_m(x)\cdot G'_{n-m}(x) + R'_l(x), \quad l < m. \tag{10.1$_1$}$$

Из равенств (10.1), (10.1$_1$) вытекает следующее равенство:

$$Q_m(x)\cdot(G_{n-m}(x) - G'_{n-m}(x)) = R'_l(x) - R_k(x). \tag{10.1$_2$}$$

Старшая степень правой части полученного равенства меньше m, тогда как степень левой его части при не меньше m. Таким образом, равенство (10.1$_2$) неверно. Антитеза неверна.

Следовательно, должны выполняться равенства

$$G_{n-m}(x) - G'_{n-m}(x) = 0, \quad G_{n-m}(x) = G'_{n-m}(x),$$
$$R'_l(x) - R_k(x) = 0, \quad R'_l(x) = R_k(x).$$

Теорема доказана. ◀

Замечание. В случае $n < m$ формула (10.1) сохраняет свой вид, если положить в ней $G_{n-m}(x) = 0$ и $R_k(x) = P_n(x)$, при этом $m > k = n$.

Пример 10.1. Разделить с остатком многочлен $P_5(x) = x^5 + 2x^4 + 6x^2 + x + 2$ на многочлен $Q_2(x) = x^2 + 2x + 2$.

▷ Решение. Воспользуемся теоремой 10.1, согласно которой $P_5(x) = Q_2(x) \cdot T_3(x) + R_1(x)$.

Для нахождения неполного частного $T_3(x)$ и остатка $R_1(x)$ применим метод неопределенных коэффициентов. Запишем

$$T_3(x) = t_3x^3 + t_2x^2 + t_1x + t_0,$$
$$R_1(x) = r_1x + r_0.$$

При этом

$$P_5(x) \equiv (x^2 + 2x + 2)(t_3x^3 + t_2x^2 + t_1x + t_0) + r_1x + r_0 =$$
$$= x^5t_3 + x^4(t_2 + 2t_3) + x^3(t_1 + 2t_2 + 2t_3) + x^2(t_0 + 2t_1 + 2t_2) +$$
$$+ x(2t_0 + 2t_1 + r_1) + 2t_0 + r_0.$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях неизвестной x, получим систему шести линейных уравнений для определения коэффициентов $\{t_3, t_2, t_1, t_0, r_1, r_0\}$:

$$\begin{cases} t_3 = 1, \\ t_2 + 2t_3 = 2, \\ t_1 + 2t_2 + 2t_3 = 0, \\ t_0 + 2t_1 + 2t_2 = 6, \\ 2t_0 + 2t_1 + r_1 = 1, \\ 2t_0 + r_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_3 = 1, \\ t_2 = 0, \\ t_1 = -2, \\ t_0 = 10, \\ r_1 = -15, \\ r_0 = -18. \end{cases}$$ ◀

Ответ: $T_3(x) = x^3 - 2x + 10$, $R_1(x) = -15x - 18$.

Упражнение 10.1. Используя метод неопределенных коэффициентов, выполнить деление с остатком многочленов

а) $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ и $x^2 - x + 1$;

б) $2x^6 - 3x^4 - 5x^3 + x - 6$ и $x^4 + 3x^3 + 5$.

Ответы: а) $T_3(x) = x^3 + x^2 - 6x + 5$, $R_1(x) = x + 1$; б) $T_2(x) = 2x^2 - 6x + 15$, $R_3(x) = -50x^3 - 10x^2 + 31x - 81$.

10.2. ТЕОРЕМА БЕЗУ. СХЕМА ГОРНЕРА

Теорема 10.2 (теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен $P_n(\alpha)$.

$\triangleright$ Доказательство. В соответствии с алгоритмом деления, остаток r от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - \alpha$ определяется формулой

$$P_n(x) = (x - \alpha) \cdot Q_{n-1}(x) + r. \qquad (10.1_3)$$

Он многочлен нулевой степени, или постоянная. При $x = \alpha$ это равенство имеет вид

$$P_n(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q_{n-1}(\alpha) + r = 0 \cdot Q_{n-1}(\alpha) + r = r,$$

или $P_n(\alpha) = r$. ◀

Следствие 1. Для любого многочлена $P_n(x)$ разность $P_n(x) - P_n(\alpha)$ делится без остатка на $x - \alpha$.

Следствие 2. Число α является корнем уравнения $P_n(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $P_n(x)$ делится без остатка на $x - \alpha$.

Следствие 3. Если целое число α является корнем многочлена $P_n(x)$ с целочисленными коэффициентами, то частное $Q_{n-1}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x - \alpha}$ — также многочлен с целочисленными коэффициентами.

$\triangleright$ Доказательство. С помощью метода неопределенных коэффициентов, считая неизвестными коэффициенты частного, преобразуем формулу (10.1_3):

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= (x - \alpha) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) + r.$$

Выполняя умножение многочленов в правой части этого равенства, получим формулу

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (b_0 - \alpha b_1) x + r - \alpha b_0,$$

из которой, ввиду тождественного равенства многочленов в левой и правой части, следует, что коэффициенты делимого, неполного частного и остаток связаны рекуррентными формулами

$$\begin{gathered} a_n = b_{n-1}, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_1 = b_0 - \alpha b_1, \\ a_0 = r - \alpha b_0 \end{gathered}$$

или

$$\left.\begin{gathered} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = b_{n-1}\alpha + a_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_0 = b_1 \alpha + a_1, \\ r = b_0 \alpha + a_0, \end{gathered}\right\} \quad (10.2)$$

из которых вытекает доказываемое утверждение. ◄

Для организации вычислений по формулам (10.2), воспользуемся табл. 10.1, называемой *схемой Горнера*, в которой клетки верхней строки, начиная со второй, заполнены коэффициентами многочлена $P_n(x)$; в нижней строке первого столбца стоит число α; незанятые клетки нижней строки заполнены последовательно вычисляемыми по формулам (10.2) коэффициентами неполного частного $Q_{n-1}(x)$ и остатком от деления $r = P_n(\alpha)$.

Таблица 10.1

Схема Горнера

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_k	$\ldots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	$b_{n-2} = b_{n-1}\alpha + a_{n-1}$	$\ldots$	$b_{k-1} = b_k \alpha + a_k$	$\ldots$	$b_0 = b_1 \alpha + a_1$	$r = b_0 \alpha + a_0$

Рассмотрим примеры.

Пример 10.2. Разделить многочлен $P_4(x) = 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 7$ на $Q_1(x) = x - 2$.

▷ Составим таблицу

	3	2	-6	1	-7
2	3	8	10	21	35

Неполное частное равно $G_3(x) = 3x^3+8x^2+10x+21$; остаток от деления равен $P_4(2) = 35$. ◀

Пример 10.3. Разделить многочлен $P_4(x) = 2x^4 - (1-2i)x^3 - (2+3i)x - 4$ на двучлен $Q_1(x) = x - 1 - i$.

▷ Составим таблицу

	2	$-1+2i$	0	$-2-3i$	-4
$1+i$	2	$1+4i$	$-3+5i$	$-10-i$	$-13-11i$

Неполное частное равно $G_3(x) = 2x^3+(1+4i)x^2+(-3+5i)x-(10+i)$; остаток от деления равен $P_4(1+i) = -13-11i$. ◀

Замечание. Если целое число α является корнем многочлена $P_n(x)$ с целочисленными коэффициентами, то $P_n(t)$ делится без остатка на $t-\alpha$, или на $\alpha - t$, при любом целом t. Так, полагая, $t = 0$ получим, что число $P_n(0) = a_0$ делится без остатка на α. Если $t = 1$, число $P_n(1)$ делится без остатка на $\alpha-1$. Если $t = -1$, то число $P_n(-1)$ делится без остатка на $\alpha+1$. Отсюда следует, что, если целое число α — корень многочлена $P_n(x)$, то каждое из значений $\dfrac{P_n(0)}{\alpha}$, $\dfrac{P_n(1)}{\alpha-1}$ и $\dfrac{P_n(-1)}{\alpha+1}$ — целое число. Делители α свободного члена $a_0 = P_n(0)$, для которых это условие не выполнено, не являются корнями, их можно сразу отбросить. Делители, для которых оно выполнено, подлежат дальнейшему испытанию.

Пример 10.4. Решить уравнение

$$2x^3 + 7x^2 + 5x + 6 = 0.$$

▷ Делители свободного члена суть $\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm6\}$. Здесь $P_3(1) = 20$, $P_3(-1) = 6$; значения $\dfrac{P_3(1)}{\alpha-1}$ и $\dfrac{P_3(-1)}{\alpha+1}$ при $\alpha = 2$, соответственно, равны $\frac{20}{1}$ и $\frac{6}{3}$ – это целые числа, значит число 2 подлежит испытанию:

	2	7	5	6
2	2	11	27	60

Остаток $P_3(2) = 60$; следовательно, число 2 — не корень. При $\alpha = -2$ значение $\frac{P_3(1)}{\alpha - 1} = \frac{20}{-3}$ — число дробное, необходимое условие не выполнено и число (-2) можно отбросить. При $\alpha = 3$ значение $\frac{P_3(-1)}{\alpha+1} = \frac{6}{4}$ — число дробное, значит число 3 можно отбросить. При $\alpha = -3$ значения $\frac{P_3(1)}{\alpha-1} = \frac{20}{-4} = -5$ и $\frac{P_3(-1)}{\alpha+1} = \frac{6}{-2} = -3$ – целые числа; число (-3) подлежит испытанию:

	2	7	5	6
-3	2	1	2	0

Остаток $r = P_3(-3) = 0$; число (-3) — корень данного уравнения. Частное от деления $P_3(x)$ на $x+3$ есть $Q_2(x) = 2x^2+x+2$; значит,

$$P_3(x) = (x+3)(2x^2+x+2).$$

Квадратное уравнение имеет комплексные корни $\left\{\frac{-1+i\sqrt{5}}{4}; \frac{-1-i\sqrt{5}}{4}\right\}$. ◀

Ответ: $\left\{-3; \frac{-1+i\sqrt{5}}{4}; \frac{-1-i\sqrt{5}}{4}\right\}$.

Упражнение 10.2. 1) Известно, что при делении многочлена на двучлен $x - \alpha$ получается остаток a, а при делении многочлена на двучлен $x - \beta$ остаток равен b $(\alpha \neq \beta)$. Найти остаток от деления многочлена на трехчлен $(x - \alpha)(x - \beta)$.

▷ Решение. Из теоремы Безу вытекают равенства $P_n(\alpha) = a$, $P_n(\beta) = b$. С другой стороны, ввиду формулы

$$P_n(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \cdot Q_{n-2}(x) + r_1 x + r_2,$$

выполнены равенства $P_n(\alpha) = r_1\alpha + r_2$, $P_n(\beta) = r_1\beta + r_2$. Таким образом, получается система двух линейных уравнений с неизвестными r_1, r_2:

$$\begin{cases} r_1\alpha + r_2 = a, \\ r_1\beta + r_2 = b. \end{cases}$$

Воспользуемся методом исключения неизвестных и получим решение в виде

$$r_1 = \frac{a-b}{\alpha-\beta}, \qquad r_2 = \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha - \beta}. \blacktriangleleft$$

Ответ: $\dfrac{a-b}{\alpha-\beta}x + \dfrac{\alpha b - \beta a}{\alpha-\beta}$.

2) Доказать, что многочлен $P_n(x)$ с целыми коэффициентами, принимающий значение 1 при трех различных целых значениях x, не может иметь ни одного целого корня.

$\triangleright$ Доказательство. Если $P_n(x)$ имеет целый корень α, то при делении $P_n(x)$ на $x-\alpha$ все коэффициенты частного $Q_{n-1}(x)$ суть целые числа.

Затем, из равенств

$$\begin{aligned} P_n(\nu_1) &= (\nu_1 - \alpha)\cdot Q_{n-1}(\nu_1) = 1, \\ P_n(\nu_2) &= (\nu_2 - \alpha)\cdot Q_{n-1}(\nu_2) = 1, \\ P_n(\nu_3) &= (\nu_3 - \alpha)\cdot Q_{n-1}(\nu_3) = 1 \end{aligned}$$

следует, что числа $\nu_1-\alpha$, $\nu_2-\alpha$, $\nu_3-\alpha$ принимают только значения 1 и (-1). Поэтому какие-то из чисел ν_1, ν_2, ν_3 равны друг другу, что противоречит условию. Но тогда антитеза неверна. Утверждение доказано. $\blacktriangleleft$

10.3. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА ОТЫСКАНИЯ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Определение 10.7. Многочлен $D_l(x)$ называется *общим делителем* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ $(n \geqslant 1, m \geqslant 1)$, если $D_l(x)$ является делителем $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

Произвольные многочлены всегда имеют общий делитель — это постоянная, не равная нулю. Если не имеется других общих делителей, то многочлены называются *взаимно простыми*.

Определение 10.8. *Наибольшим общим делителем* многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен

$$D_l(x) = (P_n(x), Q_m(x)),$$

который является их общим делителем и сам делится на любой общий делитель этих многочленов.

Из всех многочленов вида $C \cdot D_l(x)$ наибольшим общим делителем называется многочлен, у которого старший коэффициент равен 1.

Например, многочлены $(x^2+1)^3$ и $(x^2+1)^2 \cdot (x+1)$ имеют наибольший общий делитель $(x^2+1)^2$. Многочлены $(x^2+1)^3$ и $x+1$ имеют наибольший общий делитель 1 — это взаимно простые многочлены.

Для решения вопроса о существовании общих корней у многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ можно воспользоваться свойствами наибольшего общего делителя. Докажем следующую теорему.

Теорема 10.3. Для того чтобы число α было общим корнем многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, необходимо и достаточно, чтобы α было корнем их наибольшего общего делителя $D_l(x)$.

▷ Доказательство. 1. Если $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ имеют общий корень α, то у них есть и общий делитель $x - \alpha$, а поскольку $D_l(x)$ — наибольший общий делитель $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, то $D_l(x)$ делится на всякий общий делитель этих многочленов. Следовательно, $D_l(x)$ делится на $x - \alpha$, т. е. α — корень $D_l(x)$.

2. Обратно. Если α — корень $D_l(x)$, то $D_l(x)$ делится на $x - \alpha$. Учитывая, что каждый из многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ делится на $D_l(x)$, а потому и на $x - \alpha$, делаем вывод, что α является общим корнем $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

Таким образом, корни $D_l(x)$ суть общие корни многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, и обратно. Теорема доказана. ◀

Следствие. Для того чтобы многочлены не имели общих корней, необходимо и достаточно, чтобы они были взаимно простыми.

Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — произвольные многочлены, $n > m$. Опишем алгоритм отыскания их наибольшего общего делителя, сводящийся к процессу последовательного деления многочленов.

1. Разделим многочлен $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, и найдем неполное частное и остаток $R_{m_1}(x)$:

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot H_{n-m}(x) + R_{m_1}(x), \quad m_1 < m.$$

Затем разделим многочлен $Q_m(x)$ на $R_{m_1}(x)$ и получим остаток $R_{m_2}(x)$:

$$Q_m(x) = R_{m_1}(x) \cdot H^{(1)}_{m-m_1}(x) + R_{m_2}(x), \quad m_2 < m_1.$$

Продолжая, разделим многочлен $R_{m_1}(x)$ на $R_{m_2}(x)$ и получим остаток $R_{m_3}(x)$ ($m_3 < m_2$) и т. д. Степени остатков на каждом шаге понижаются, так как $m_1 > m_2 > m_3 > \ldots$ Следовательно, среди $R_{m_1}(x)$, $R_{m_2}(x)$, $R_{m_3}(x)$, $\ldots$ через конечное число шагов будут получены многочлены $R_{m_{p-1}}(x)$ и $R_{m_p}(x)$, причем $R_{m_{p-1}}(x)$ разделится на $R_{m_p}(x)$ нацело, а заключительная формула будет иметь вид

$$R_{m_{p-1}}(x) = R_{m_p}(x) \cdot H^{(p)}_{m_{p-1}}(x).$$

2. Докажем, что многочлен $R_{m_p}(x)$ — искомый наибольший общий делитель многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

▷ В самом деле, если $D_l(x)$ — какой-нибудь общий делитель многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, то ввиду формул алгоритма деления, $D_l(x)$ будет делителем $R_{m_1}(x)$, $R_{m_2}(x)$, $\ldots$, $R_{m_{p-1}}(x)$, а также $R_{m_p}(x)$.

С другой стороны, из заключительной формулы вытекает, что многочлен $R_{m_p}(x)$ — делитель $R_{m_{p-1}}(x)$, $R_{m_{p-2}}(x)$, $\ldots$ Наконец, $R_{m_p}(x)$ является делителем многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

Таким образом, многочлен $R_{m_p}(x)$ делится на любой общий делитель многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, которые сами делятся на $R_{m_p}(x)$. Это означает, что $R_{m_p}(x)$ — искомый наибольший общий делитель многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$. ◀

Пример 10.5. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$P_5(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$$

$$\text{и } Q_3(x) = x^3 - 1.$$

▷ Решение. Разделим многочлен $P_5(x)$ на $Q_3(x)$ «уголком»:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & x^5 & -\,x^4 & -\,2x^3 & +\,2x^2 & +\,x & -\,1 & x^3-1 \\ \cline{8-8}
 & x^5 & & & -\,x^2 & & & x^2-x-2 \\ \cline{2-5}
- & & -\,x^4 & -\,2x^3 & +\,3x^2 & +\,x & & \\
 & & -\,x^4 & & & -\,x & & \\ \cline{3-6}
- & & & -2x^3 & +\,3x^2 & & -\,1 & \\
 & & & -2x^3 & & & +\,2 & \\ \cline{4-7}
 & & & & 3x^2 & & -\,3 &
\end{array}
$$

Сократим остаток на 3 и получим $R_{m_1}(x) = R_2(x) = x^2 - 1$.

Разделим $Q_3(x)$ на $R_2(x)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
- & x^3 & & -\,1 & x^2-1 \\ \cline{5-5}
 & x^3 & -\,x & & x \\ \cline{2-3}
 & & x & -\,1 &
\end{array}
$$

и получим остаток $R_{m_2}(x) = R_1(x) = x - 1$. Разделим $R_2(x)$ на $R_1(x)$ и получим $x^2-1 = (x-1)\cdot(x+1)$. Многочлен $R_2(x)$ разделился нацело на $R_1(x)$. Следовательно, $(P_5(x), Q_3(x)) = x-1$. ◀

Замечание. В процессе применения алгоритма Евклида к многочленам с целыми коэффициентами допустимо умножать или сокращать делитель на произвольное, не равное нулю число, причем не только в начале деления, но и в процессе деления. В результате частное будет искажено, однако остатки от деления будут получать лишь несущественный числовой множитель.

Пример 10.6. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15 \text{ и } Q_2(x) = x^2 - x - 20.$$

▷ Решение. Разделим многочлен $P_3(x)$ на $Q_2(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
- & x^3 & -\,7x^2 & +\,7x & +\,15 & x^2-x-20 \\ \cline{6-6}
 & x^3 & -\,x^2 & -\,20x & & x-6 \\ \cline{2-4}
- & & -6x^2 & +\,27x & +\,15 & \\
 & & -6x^2 & +\,6x & +\,120 & \\ \cline{3-5}
 & & & 21x & +\,105 &
\end{array}
$$

Сократим остаток на 21 и получим $R_{m_1}(x) = R_1(x) = x - 5$. Далее,

$$Q_2(x) = x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4).$$

Следовательно, $(P_3(x); Q_2(x)) = x - 5$. ◀

10.4. СВОЙСТВА И ГРАФИК ЦЕЛОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Представим многочлен $P_n(x)$ в следующем виде:

$$y = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right). \tag{10.3}$$

При больших значениях $|x|$ величина в скобках близка к a_n, а многочлен $P_n(x)$ ведет себя подобно степенной функции $y = a_n x^n$.

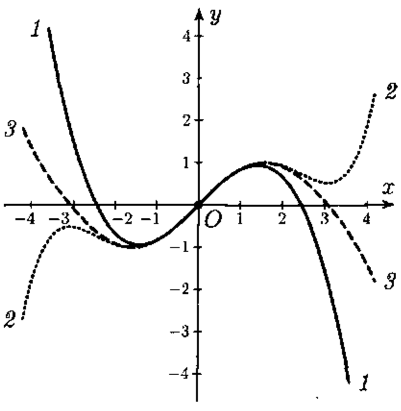


Рис. 10.1

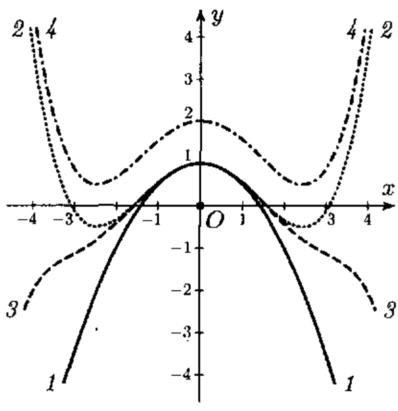


Рис. 10.2

Множество значений $\boldsymbol{E}(P_n)$ зависит от знака его старшего коэффициента a_n и старшей степени n. Из формулы (10.3) следуют выводы:

1) Если n — нечетное число, то при $a_n > 0$ многочлен неограниченно возрастает, когда $x \to +\infty$, и неограниченно убывает, когда $x \to -\infty$, а при $a_n < 0$ — наоборот; $\boldsymbol{E}(P_n) = \mathbb{R}$ (рис. 10.1, кривые *1*—*3*). Многочлен нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

2) Если n — четное число, то при $a_n > 0$ многочлен ограничен снизу и неограниченно возрастает, когда $x \to \pm\infty$, его левая и правая ветви уходят вверх. При $a_n < 0$ многочлен ограничен сверху, при $x \to \pm\infty$ его левая и правая ветви уходят вниз (рис. 10.2). Многочлен четной степени может не иметь действительных корней.

а) Если n — четное число, и $a_n > 0$, $a_0 > 0$ или $a_n < < 0$, $a_0 < 0$, многочлен может иметь действительные корни (рис. 10.2, кривая *2*), а может и не иметь таковых (рис. 10.2, кривая *4*).

б) Если n — четное число, и $a_n > 0$, $a_0 < 0$ или $a_n < 0$, $a_0 > 0$, многочлен имеет действительные корни разных знаков (рис. 10.2, линии *1*, *3*).

Если коэффициенты многочлена при четных степенях x равны 0, то многочлен — нечетная функция, как на рис. 10.1,

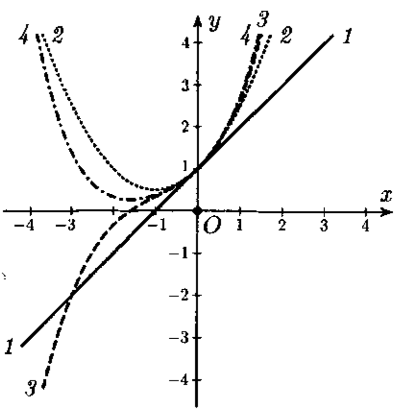


Рис. 10.3

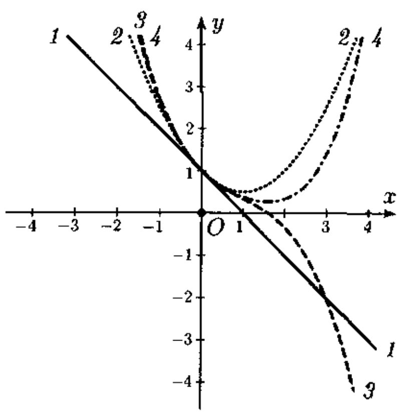


Рис. 10.4

где линии *1* отвечает график многочлена $y = x - \dfrac{x^3}{6}$; линии *2* — многочлен $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$; линии *3* — многочлен $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040}$. Если коэффициенты многочлена при нечетных степенях x равны нулю, то многочлен — четная функция, как на рис. 10.2, где линии *1* отвечает график многочлена $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$; линии *2* — многочлен $y = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$; линии *3* — многочлен $y = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720}$; линии *4* — многочлен $y = 2 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

На рис. 10.3, 10.4 показаны графики многочленов, не обладающих свойствами четности или нечетности. Так, на рис. 10.3 линии *1* отвечает график многочлена $y = 1 + x$; линии *2* — график $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$; линии *3* — график $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$; линии *4* — график $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$. На рис. 10.4 линии *1* отвечает график многочлена $y = 1 - x$; линии *2* — многочлен $y = 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$; линии *3* — многочлен $y = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$; линии *4* — многочлен $y = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$.

Многочлен — естественное обобщение линейных и степенных функций с целым показателем. Для вычисления многочлена требуются три основные операции: сложение, вычитание и умножение. Поэтому многочлен является суперпозицией конечного числа непрерывных линейных функций и, значит тоже является непрерывной функцией на множестве действительных чисел.

Упражнение 10.3. Решить уравнение

$$x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 37x - 60 = 0.$$

Ответ: $\{-5; 4; -1 \pm i\sqrt{2}\}$.

ГЛАВА 11 ТЕОРЕМЫ О КОРНЯХ МНОГОЧЛЕНА

11.1. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Теорема 11.1. Между корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и коэффициентами многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ $(a_n \neq 0)$ существуют зависимости, называемые *формулами Виета*:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{n-1}}{a_n} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n), \\ \dfrac{a_{n-2}}{a_n} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_0}{a_n} = (-1)^n \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n. \end{cases} \qquad (11.1)$$

$\triangleright$ Доказательство. Уравнение $P_n(x) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\widetilde{P}_n(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \ldots + p_1 x + p_0 = 0, \quad (11.2)$$

в котором $p_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, $p_{n-2} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$, $\ldots$, $p_1 = \dfrac{a_1}{a_n}$, $p_0 = \dfrac{a_0}{a_n}$.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни приведенного уравнения (11.2), то

$$\widetilde{P}_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n). \qquad (11.2_1)$$

Произведение в формуле (11.2_1) тождественно равно приведенному многочлену в уравнении (11.2). Перемножим скобки в правой части (11.2_1), сгруппируем коэффициенты при x^{n-1}, $x^{n-2}, \ldots, x, x^0$, приравняем множители при степенях неизвестного числам $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_1, p_0$ соответственно и получим формулы (11.1). ◀

Следствие. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами суть делители его свободного члена.

Упражнение 11.1. Вывести формулы Виета
1) для приведенного квадратного уравнения $x^2 + p_1x + p_0 = 0$;
2) для приведенного кубического уравнения
$$x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 = 0.$$

Ответ: $p_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, $p_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$, $p_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Пример 11.1. 1) Из формул Виета следует, что сумма всех корней уравнения $x^3 + x - 2 = 0$ равна нулю, поскольку здесь $p_2 = 0$.

2) Вычислить сумму квадратов корней уравнения $x^3 + 2x - 3 = 0$.

▷ Решение. По теореме Виета, между корнями и коэффициентами данного уравнения выполнены соотношения
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2;$$
из первого вытекает равенство $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0$, откуда найдем
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -4. \quad ◀$$

Ответ: $\{-4\}$.

3) Найти значение выражения
$$f(x, y, z) = x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3,$$
если x, y, z суть корни уравнения $u^3 - u^2 - 4u + 1 = 0$.

▷ Решение. По теореме Виета, имеем равенства
$$x + y + z = 1,$$
$$xy + yz + zx = -4,$$
$$xyz = -1.$$

Из первого и второго равенств получим формулы
$$(x + y + z)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2 \cdot (xy + yz + zx) = 1 - 2 \cdot (-4) = 9,$$
откуда, используя формулы Виета и условие $xyz = 1$, на-

ходим

$$f(x,y,z) = xy\cdot(x^2+y^2) + yz\cdot(y^2+z^2) + zx\cdot(z^2+x^2) =$$
$$= xy\cdot(9-z^2) + yz\cdot(9-x^2) + zx\cdot(9-y^2) =$$
$$= 9(xy+yz+zx) - xyz(z+x+y) = 9\cdot(-4)+1 = -35. \blacktriangleleft$$

О т в е т: $\{-35\}$.

П р и м е р 11.2. Известно, что многочлен $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + 1$ с неотрицательными коэффициентами имеет n действительных корней. Доказать неравенства:

1) $P_n(9) \geqslant 10^n$; 2) $P_n(m) \geqslant (m+1)^n$.

$\triangleright$ Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Очевидно, многочлен $P_n(x)$ не имеет положительных корней. Введем обозначения $\beta_\nu = -\alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ и представим $P_n(x)$ в виде произведения линейных множителей:

$$P_n(x) = (x+\beta_1)\cdot(x+\beta_2)\cdot\ldots\cdot(x+\beta_n).$$

Положим $x=9$, запишем равенство $9+\beta_\nu = 1+1+\ldots+1+\beta_\nu$ и воспользуемся неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\frac{1+1+\ldots+1+\beta_\nu}{10} \geqslant \sqrt[10]{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\cdot\beta_\nu} = \sqrt[10]{\beta_\nu}.$$

По теореме Виета $\beta_1\cdot\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_n = (-1)^n\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n = 1$. Поэтому

$$P_n(9) = (9+\beta_1)\cdot(9+\beta_2)\cdot\ldots\cdot(9+\beta_n) \geqslant 10^n\cdot\sqrt[10]{\beta_1\cdot\beta_2\cdot\ldots\cdot\beta_n} = 10^n.$$

Равенство имеет место только тогда, когда все $\beta_\nu = 1$, при этом

$$P_n(x) = (x+1)\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+1) = (x+1)^n,\ \ P_n(9) = 10^n.$$

Неравенство доказано. $\blacktriangleleft$

Упражнение 11.2. Найти все пары действительных чисел p, q, для которых многочлен $x^4 + px^2 + q$ имеет четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

(У к а з а н и е. Среди корней имеются два положительных и два отрицательных; они образуют пары, симметричные относительно нуля, и суть члены арифметической прогрессии. Поэтому корни имеют вид $\{-3\gamma, -\gamma, \gamma, 3\gamma\}$. Далее, по формулам Виета найдите коэффициенты p и q многочлена.)

11.2. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для нахождения рациональных корней многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

с целочисленными коэффициентами часто используется теорема 11.2.

Теорема 11.2 (необходимое условие существования рациональных корней). Если рациональная дробь $\dfrac{m}{p}$ — корень уравнения $P_n(x) = 0$ ($m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$), то число m является делителем свободного члена a_0, а число p — делителем старшего коэффициента a_n.

Следствие. Если коэффициенты многочлена, старший из которых равен 1, — целые числа, то рациональными корнями этого многочлена могут быть только целые числа.

Применение этой теоремы позволяет получить множество рациональных чисел, которые могут быть корнями данного уравнения.

Пример 11.3. Решить уравнение

$$P_4(x) = 4x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 7x + 3 = 0. \tag{11.3}$$

$\triangleright$ Первое решение. Число 3 имеет делители $\{1; 3\}$; число 4 имеет делители $\{1; 2; 4\}$. Поэтому множество возможных значений числа m есть $\{-1; 1; -3; 3\}$, а множество допустимых значений числа p есть $\{1; 2; 4\}$. Тогда корнями уравнения (11.3) могут быть рациональные дроби вида $\dfrac{m}{p}$ из множества $\left\{\pm 1; \pm 3; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{1}{4}; \pm\dfrac{3}{4}; \pm\dfrac{3}{2}\right\}$. Корнями уравнения (11.3) являются числа $\left\{\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right\}$. Для нахождения оставшихся корней понизим степень данного уравнения делением на двучлены $x - \dfrac{1}{2}$

и $x + \frac{3}{2}$, дважды применяя схему Горнера:

	4	8	−3	−7	3
1/2	4	10	2	−6	0
−3/2	4	4	−4	0	

Таким образом, $P_4(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x^2 + x - 1)$; квадратный трехчлен имеет корни $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. ◀

Ответ: $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

▷ Усовершенствуем первое решение. Преобразуем уравнение (11.3) к приведенному уравнению с целочисленными коэффициентами. Для этого домножим обе его части на 2^2, сделаем замену неизвестной $t = 2x$ и найдем

$$4x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x)^4 + 4(2x)^3 - 3(2x^2) - 14(2x) + 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^4 + 4t^3 - 3t^2 - 14t + 12 = 0.$$

Рациональные корни полученного уравнения, если они есть, — суть целые числа, являющиеся делителями свободного члена — это $\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12\}$, из которых корнями являются числа $\{1; -3\}$, причем для отбора корней опять дважды применяется схема Горнера

	1	4	−3	−14	12
1	1	5	2	−12	0
−3	1	2	−4	0	

Оставшиеся корни находим из квадратного уравнения

$$t^2 + 2t - 4 = 0.$$

Это суть $\{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\}$. Отсюда следует, что корни данного уравнения — числа

$$x = \frac{t}{2} \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}. \quad ◀$$

Замечание. Чтобы исследовать вопрос о рациональных корнях общего уравнения $P_n(x) = 0$, домножим обе его части на a_n^{n-1}, сделаем замену неизвестной $t = a_n x$ и получим уравнение

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}a_n t^{n-2} + \ldots + a_1 a_n^{n-2} t + a_0 a^{n-1} = 0, \quad (11.4)$$

которое может иметь только целые рациональные корни, причем каждому целому корню t соответствует рациональный корень $x = \dfrac{t}{a_n}$, целый или дробный. Если уравнение (11.4) не имеет целых корней, то уравнение исходное $P_n(x) = 0$ не имеет рациональных корней.

11.3. РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

Рассмотрим примеры исследования корней многочленов.

Пример 11.4. Доказать, что уравнение

$$x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0$$

имеет действительные корни, среди которых только один положительный и только один отрицательный.

▷ Решение (методом разложения). Сгруппируем одночлены: первый — с четвертым, второй — с третьим и получим равенства

$$x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = (x^4 - 9) + 5x(x^2 + 3) =$$
$$= (x^2 - 3)(x^2 + 3) + 5x(x^2 + 3) = (x^2 + 5x - 3)(x^2 + 3),$$

причем в последнем выражении вторая скобка положительна, а квадратный трехчлен имеет действительные корни разных знаков так как их произведение равно (-3). ◀

Пример 11.5. Доказать, что уравнение

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$$

не имеет отрицательных корней.

▷ Решение (методом группировки). Преобразуем левую часть и получим выражение

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = (x^4 - 4x^2 + 4) - x(5x^2 + 7) = \\ = (x^2 - 2)^2 - x(5x^2 + 7),$$

которое больше 0 при всех $x < 0$, так как $(x^2 - 2)^2 \geqslant 0$, $-x(5x^2 + 7) > 0$. ◀

Пример 11.6. Имеет ли уравнение

$$P_3(x) = 4x^3 - 5x^2 - 6x + 3 = 0$$

действительные корни на промежутке $[2, +\infty)$?

▷ Решение (заменой неизвестной). Введем новую неизвестную $y = x - 2$ (при этом $x = y + 2 \geqslant 2 \Leftrightarrow y \geqslant 0$) и покажем, что многочлен $Q_3(y) = P_3(y + 2)$ не имеет положительных корней. Действительно, при $y \geqslant 0$ выражение

$$Q_3(y) = 4(y+2)^3 - 5(y+2)^2 - 6(y+2) + 3 = 4y^3 + 19y^2 - 2y + 3 = \\ = 4y^3 + 18y^2 + 2 + (y^2 - 2y + 1) = 4y^3 + 18y^2 + 2 + (y-1)^2 > 0.$$ ◀

Пример 11.7. Доказать, что уравнение

$$P_8(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$$

не имеет действительных корней.

▷ Доказательство (разбором случаев). Так как $P_8(0) = 1 > 0$, то достаточно показать, что $P_8(x) > 0$ при всех действительных x. Доказательство проведем разбором случаев, а именно:

i) если $x \in (-\infty; 0]$, то $P_8(x) > 0$, так как первые четыре слагаемые левой части неотрицательны, а $1 > 0$;

ii) если $x \in (0; 1)$, то

$$P_8(x) = x^8 + x^2(1 - x^3) + 1 - x > 0;$$

iii) если $x \in [1; +\infty)$, то

$$P_8(x) = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0.$$

Таким образом, на каждом из рассмотренных промежутков изменения неизвестной с очевидностью выполняется неравенство $P_8(x) > 0$. Следовательно $P_8(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. ◀

Пример 11.8. Доказать, что не все корни уравнения $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ являются действительными числами.

▷ Проведем доказательство методом «от противного».

Предположим, что корни α_1, α_2, α_3 — действительные. Тогда имеют место формулы Виета

$$p_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 1, \quad p_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 2,$$
$$p_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -1.$$

Воспользуемся формулой

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_3\alpha_1,$$

из которой следует, что

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) = -3.$$

Таким образом, сумма квадратов действительных чисел — отрицательное число. Полученное противоречие доказывает, что антитеза неверна. Утверждение доказано. ◀

11.4. ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 11.1. *Возвратным* уравнением называется уравнение вида $W_{2n}(x) = 0$, где

$$W_{2n}(x) = b_0x^{2n} + b_1x^{2n-1} + b_2x^{2n-2} + \ldots + b_{n-1}x^{n+1} + b_nx^n +$$
$$+ \lambda b_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2 b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1}b_1x + \lambda^n b_0 = 0, \quad b_0 \neq 0,$$

если старшая степень четная. Если старшая степень нечетная, то возвратное уравнение имеет вид $V_{2n+1}(x) = 0$, где

$$V_{2n+1}(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \ldots + a_{n-1}x^{n+2} + a_nx^{n+1} +$$
$$+ \lambda a_nx^n + \lambda^3 a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lambda^{2n-1}a_1x + \lambda^{2n+1}a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

а $\lambda \in \mathbb{R}$ — действительное число.

Так, возвратное уравнение четвертой степени имеет вид

$$b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + \lambda b_1x + \lambda^2 b_0 = 0,$$

здесь $n = 2$; возвратное уравнение пятой степени имеет вид

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + \lambda a_2x^2 + \lambda^3 a_1x + \lambda^5 a_0 = 0,$$

здесь также $n = 2$.

Пример 11.9. 1) Уравнение $4x^4+2x^3+x^2-6x+36=0$ — возвратное, здесь равенства $\lambda^2 b_0 = 36$, $\lambda b_1 = -6$ выполнены при $\lambda = -3$ (так как $b_0 = 4$, $b_1 = 2$).

2) Уравнение пятой степени $2x^5+3x^4-2x^3-6x^2+81x+486 = 0$ — возвратное, здесь равенства $\lambda^5 a_0 = 486$, $\lambda^3 a_1 = 81$, $\lambda a_2 = -6$ выполнены при $\lambda = 3$ (так как $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = -2$).

Утверждение 1. Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $(-\lambda)$: $V_{2n+1}(-\lambda) = 0$.

Утверждение 2. В результате деления левой и правой части возвратного уравнения нечетной степени на двучлен $x+\lambda$ получается возвратное уравнение четной степени:

$$V_{2n+1} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+\lambda)\cdot W_{2n}(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = -\lambda, \\ W_{2n}(x) = 0. \end{array}\right.$$

Утверждение 3. Возвратное уравнение четной степени подстановкой $y = x + \dfrac{\lambda}{x}$ сводится к целому рациональному уравнению степени n и к n уравнениям второй степени.

▷ Доказательство. Разделим обе части данного уравнения на x^n и получим

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + b_{n-1}x^{n+1} + b_nx^n + b_{n-1}\cdot\frac{\lambda}{x} + b_{n-2}\cdot\frac{\lambda^2}{x^2} + \ldots$$
$$\ldots + b_1\cdot\frac{\lambda^{n-1}}{x^{n-1}} + b_0\cdot\frac{\lambda^n}{x^n} = 0, \qquad b_0 \neq 0.$$

Сгруппируем попарно слагаемые в левой части и получим редуцированное уравнение

$$b_0\cdot\left(x^n + \frac{\lambda^n}{x^n}\right) + b_1\cdot\left(x^{n-1} + \frac{\lambda^{n-1}}{x^{n-1}}\right) + b_2\cdot\left(x^{n-2} + \frac{\lambda^{n-2}}{x^{n-2}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + b_{n-1}\cdot\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + b_n = 0,$$

в котором выполним замену неизвестной $y = x + \dfrac{\lambda}{x}$.

▷ Докажем, что при любом натуральном k сумму $x^k + \dfrac{\lambda^k}{x^k}$ можно записать в виде многочлена от y степени k. Воспользуемся методом математической индукции.

1°. При $k = 1$: $x + \dfrac{\lambda}{x} = y$. При $k = 2$: $x^2 + \dfrac{\lambda^2}{x^2} = y^2 - 2\lambda$.

2°. Допустим, что суммы $x^k + \dfrac{\lambda^k}{x^k}$, $x^{k+1} + \dfrac{\lambda^{k+1}}{x^{k+1}}$ можно представить, соответственно, в виде многочленов $P_k(y)$, $P_{k+1}(y)$, где $k \geqslant 1$, и покажем, что сумму $x^{k+2} + \dfrac{\lambda^{k+2}}{x^{k+2}}$ можно представить в виде многочлена $P_{k+2}(y)$. Для этого выполним тождественное преобразование суммы и найдем:

$$x^{k+2} + \frac{\lambda^{k+2}}{x^{k+2}} = \left(x^{k+1} + \frac{\lambda^{k+1}}{x^{k+1}}\right) \cdot \left(x + \frac{\lambda}{x}\right) - \lambda\left(x^k + \frac{\lambda^k}{x^k}\right) =$$
$$= y\,P_{k+1}(y) - \lambda\,P_k(y) = P_{k+2}(y).$$

Утверждение доказано. ◀

Заменим скобки в редуцированном уравнении на многочлены $P_k(y)$ и получим уравнение n-й степени от y, имеющее n корней в области комплексных чисел — это $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Неизвестную x найдем из n уравнений вида

$$x + \frac{\lambda}{x} = y_1, \quad x + \frac{\lambda}{x} = y_2, \quad \ldots, \quad x + \frac{\lambda}{x} = y_n,$$

каждое из которых преобразуется в квадратное уравнение.

Таким образом, решение возвратного уравнения $W_{2n}(x) = 0$ сводится к решению целого рационального уравнения степени n и к решению n квадратных уравнений. ◀

Пример 11.10. Рассмотрим возвратное уравнение

$$b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + \lambda b_1x + \lambda^2 b_0 = 0, \quad b_0 \neq 0.$$

Разделим на x^2 обе его части, сгруппируем попарно слагаемые и получим редуцированное уравнение

$$b_0\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) + b_1\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + b_2 = 0, \quad b_0 \neq 0.$$

Выполним замену неизвестной $y = x + \frac{\lambda}{x}$, воспользуемся формулой $x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} = y^2 - 2\lambda$ и получим квадратное уравнение относительно y

$$b_0 y^2 + b_1 y + (b_2 - 2\lambda b_0) = 0,$$

имеющее два комплексных корня $\{y_1, y_2\}$. Неизвестную x найдем из уравнений $x + \frac{\lambda}{x} = y_1$, $x + \frac{\lambda}{x} = y_2$, или из квадратных уравнений вида

$$x^2 - xy_1 + \lambda = 0, \quad x^2 - xy_2 + \lambda = 0.$$

Пример 11.11. Решить уравнение

$$2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 66x^3 + 80x^2 - 72x + 32 = 0.$$

▷ Решение. Это возвратное уравнение четной степени, $\lambda = 2$. Поделим обе его части на x^4, сгруппируем попарно слагаемые и получим уравнение

$$2\left(x^4 + \frac{16}{x^4}\right) - 9\left(x^3 + \frac{8}{x^3}\right) + 20\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \\ - 33\left(x + \frac{2}{x}\right) + 46 = 0.$$

Выполним замену неизвестной $y = x + \frac{2}{x}$, учтем формулы

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4, \quad x^3 + \frac{8}{x^3} = y^3 - 6y, \quad x^4 + \frac{16}{x^4} = y^4 - 8y^2 + 8$$

и получим уравнение

$$2y^4 - 9y^3 + 4y^2 + 21y - 18 = 0,$$

которое сведем к решению приведенного уравнения с целыми коэффициентами, для чего домножим его левую и правую части на 8, выполним замену неизвестной $z = 2y$ и получим уравнение

$$z^4 - 9z^3 + 8z^2 + 84z - 144 = 0,$$

целые корни которого суть делители свободного члена.

Проверка с применением схемы Горнера показывает, что это уравнение имеет корни $z \in \{-3; 2; 4; 6\}$, тогда $y \in \left\{-\frac{3}{2}; 1; 2; 3\right\}$. Остается решить четыре уравнения

$$x + \frac{2}{x} = -\frac{3}{2}, \quad x + \frac{2}{x} = 1, \quad x + \frac{2}{x} = 2, \quad x + \frac{2}{x} = 3,$$

имеющих восемь корней $\left\{\frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{4}; \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}; 1 \pm i; 1; 2\right\}$. ◀

Ответ: $\left\{\frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{4}; \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}; 1 \pm i; 1; 2\right\}$.

11.4.1. СИММЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 11.2. Уравнение n-й степени называется *симметрическим*, если у него равны коэффициенты при x^ν и при $x^{n-\nu}$.

Симметрическое уравнение имеёт вид

$$a_0 + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_\nu x^{n-\nu} + \ldots + a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Это частный случай возвратного уравнения, когда $\lambda = 1$.

Симметрическое уравнение четвертой степени имеет вид

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Симметрическое уравнение пятой степени имеет вид

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Сформулированные ранее утверждения 1—3, модифицируются для симметрических уравнений.

Утверждение 1_1. Симметрическое уравнение нечетной степени имеет корень $\{-1\}$: $V_{2n+1}(-1) = 0$.

Утверждение 2_1. В результате деления левой и правой части симметрического уравнения нечетной степени на двучлен $x+1$ получается симметрическое уравнение четной степени:

$$V_{2n+1} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1) \cdot W_{2n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ W_{2n}(x) = 0. \end{array}\right.$$

Утверждение 3$_1$. Симметрическое уравнение четной степени $W_{2n}(x) = 0$ подстановкой $y = x + \dfrac{1}{x}$ сводится к целому рациональному уравнению степени n и к n уравнениям второй степени.

Симметрические уравнения решаются с помощью того же приема, что и возвратные уравнения.

Пример 11.12. Решить уравнение

$$x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

$\triangleright$ Решение. Это симметрическое уравнение нечетной степени, имеющее корень $\{-1\}$. После деления левой и правой частей данного уравнения на $x + 1$, получим симметрическое уравнение шестой степени

$$x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на x^3, объединим попарно слагаемые и получим уравнение

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0.$$

в котором сделаем замену $y = x + \dfrac{1}{x}$. Ввиду равенств

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

получим уравнение $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = (y - 1)^3 = 0$, имеющее корень $\{1\}$. Возвращаясь к неизвестной x, решим уравнение $x + \dfrac{1}{x} = 1$, имеющее корни $\left\{\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$. $\blacktriangleleft$

Ответ: $\left\{-1; \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Упражнение 11.3. Найти действительные корни уравнения

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}; \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.

11.4.2. КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 11.3. Возвратное уравнение называется *кососимметрическим*, если $\lambda = -1$.

Так, кососимметрическое уравнение четвертой степени имеет вид

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = 0.$$

Кососимметрическое уравнение пятой степени имеет вид

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0.$$

Утверждение 1_2. Кососимметрическое уравнение нечетной степени имеет корень $\{1\}$: $V_{2n+1}(1) = 0$.

Утверждение 2_2. В результате деления левой и правой части кососимметрического уравнения нечетной степени на двучлен $x - 1$ получается симметрическое уравнение четной степени.

Утверждение 3_2. Кососимметрическое уравнение четной степени $W_{2n}(x) = 0$ подстановкой $y = x - \dfrac{1}{x}$ сводится к целому рациональному уравнению степени n и к n уравнениям второй степени.

Пример 11.13. Найти действительные корни уравнения

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$\triangleright$ Решение. Это кососимметрическое уравнение нечетной степени, имеющее корень $\{1\}$. Понизим степень данного уравнения с помощью схемы Горнера

	1	2	3	−3	−2	−1
1	1	3	6	3	1	0

и получим симметрическое уравнение четной степени с $\lambda = 1$,

$$x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Значение $x = 0$ не является корнем этого уравнения. Разделив обе его части на x^2 и группируя попарно целые и рациональные одночлены получим эквивалентное уравнение

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0.$$

Выполним замену $y=x+\dfrac{1}{x}$ и получим квадратное уравнение относительно неизвестной y,

$$y^2+3y+4=0,$$

не имеющее действительных корней ($D=9-4\cdot4=-7<0$). ◀

Ответ: $\{1\}$.

Пример 11.14. Решить уравнение

$$2x^4+3x^3-3x^2-3x+2=0.$$

▷ Решение. Это кососимметрическое уравнение четной степени. Значение $x=0$ не является корнем этого уравнения. Разделив обе его части на x^2 и группируя попарно целые и рациональные одночлены, получим эквивалентное уравнение

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0.$$

Выполним замену неизвестной $x-\dfrac{1}{x}=y$ $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2+2\right)$ и получим квадратное уравнение $2y^2+3y+1=0$ относительно y, имеющее действительные корни $\left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$. Поэтому данное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x}=-1,\\[2mm] x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2},\end{array}\right.$$

причем первое уравнение имеет корни $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}\right\}$, а второе уравнение — корни $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$. ◀

Ответ: $\left\{\dfrac{-1-\sqrt5}{2};\dfrac{-1+\sqrt5}{2};\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

ГЛАВА 12 ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

12.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В том случае, когда имеется отображение комплексной плоскости (z) на комплексную плоскость (w), при котором каждой точке z какой-либо области G плоскости (z) поставлено в соответствие определенное комплексное число w, то говорят, что в области G определена функция комплексного переменного z. При этом w называют значением функции в точке z и записывают $w = f(z)$, или

$$\begin{cases} w = f(z), \\ z = x + iy, \quad w = U + iV. \end{cases}$$

Ниже рассмотрены комплексные функции частного вида, зависящие от комплексного аргумента. Это целые рациональные функции, или многочлены

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

степени $n \in \mathbb{N}$, имеющие действительные или комплексные коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, а переменная $z \in \mathbb{C}$.

При доказательстве теоремы существования корня у многочлена $P_n(z)$ используются свойство непрерывности модуля многочлена и лемма о модуле старшего члена целой рациональной функции, доказанные ниже.

Определение 12.1. Комплексная функция $f(z)$ комплексного аргумента $z \in \mathbb{C}$ называется *непрерывной* в точке z_0, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое действительное число $\delta > 0$, что для каждого комплексного приращения h, модуль которого меньше δ (или $|h| < \delta$), выполнено неравенство $|f(z_0 + h) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Функция $f(z)$ называется *непрерывной*, если она непрерывна во всех точках комплексной плоскости.

Определение 12.2. 1) *Производной* многочлена $P_n(z)$ называется многочлен

$$Q_{n-1}(z) = P_n'(z) =$$
$$= nz^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + (n-2)a_{n-2}z^{n-3} + \ldots + 2a_2x + a_1.$$

Производная многочлена нулевой степени считается равной нулю.

2) Производная от первой производной многочлена называется *второй* производной многочлена $P_n(z)$ и обозначается $P_n''(z)$. По аналогии определяется *третья*, *четвертая* и т. д. производные многочлена $P_n(z)$; ν-я производная многочлена $P_n(z)$ обозначается $P_n^{(\nu)}(z)$; n-я производная $P_n^{(n)}(z) = n!\,a_n$ — постоянная; очевидно, $P_n^{(n+1)}(z) = P_n^{(n+2)}(z) = \ldots = 0$.

12.2. НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ МОДУЛЯ МНОГОЧЛЕНА

Лемма 12.1 (о модуле старшего члена). Для любого положительного числа K, при достаточно больших значениях $|z|$, выполнено неравенство

$$|a_n z^n| > k|a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0|. \quad (12.1)$$

▷ Доказательство. Введем обозначение

$$A = \max(|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n-1}|) > 0,$$

(коэффициент a_n не входит) и оценим сверху выражение

$$|a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0| \leqslant$$
$$\leqslant |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_{n-2}z^{n-2}| + \ldots + |a_2z^2| + |a_1z| + |a_0| =$$
$$= |a_{n-1}|\cdot|z^{n-1}| + |a_{n-2}|\cdot|z^{n-2}| + \ldots + |a_2|\cdot|z^2| + |a_1|\cdot|z| + |a_0| \leqslant$$
$$\leqslant A\cdot(|z^{n-1}| + |z^{n-2}| + \ldots + |z^2| + |z| + 1) = A\cdot\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}.$$

(Здесь использовано свойство модуля комплексного числа: $|a_{n-1}z^{n-1}| = |a_{n-1}|\cdot|z|^{n-1}$.)

При $|z| > 1$ выполнено неравенство $\dfrac{|z|^n - 1}{|z| - 1} < \dfrac{|z|^n}{|z| - 1}$, а с учетом условия $A > 0$, выполнено строгое неравенство

$$|a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0| < A \cdot \frac{|z|^n}{|z| - 1}.$$

Умножим левую и правую части этого неравенства на число $K > 0$ и получим

$$K \cdot |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0| < K \cdot A \cdot \frac{|z|^n}{|z| - 1}.$$

Наконец, найдем такое число $N_K > 0$, чтобы при $|z| \geqslant N_K$ выполнялось неравенство

$$K \cdot A \cdot \frac{|z|^n}{|z| - 1} \leqslant |a_n| \cdot |z|^n;$$

решим его относительно $|z|$:

$$|z| \geqslant \frac{K \cdot A}{|a_n|} + 1 = N_K. \tag{12.2}$$

Таким образом, при любом $K > 0$ найдутся такие z, для которых истинно неравенство (12.1)

$$|a_nz^n| > k|a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0|. \quad ◀$$

Следствие 1. При $K = 1$ из соотношения (12.2) получим неравенства

$$|z| \geqslant \frac{A}{|a_n|} + 1 \ \Leftrightarrow\ |a_n| \cdot |z| \geqslant A + |a_n|,$$
$$|a_nz^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0|. \tag{12.3}$$

Отсюда следует, что при $|z| \geqslant \dfrac{A}{|a_n|} + 1 = N_1$ модуль старшего члена больше модуля суммы всех остальных членов многочлена $P_n(z)$.

Следствие 2. При значениях $|x| \geqslant N_1$ ($x \in \mathbb{R}$) во-первых, знак $P_n(x)$ совпадает со знаком его старшего члена; во-вторых, никакое значение неизвестной x при значениях $x \geqslant N_1$ не может служить корнем многочлена.

▷ Действительно, если бы уравнение $P_n(x) = 0$ имело решение, то из равенства $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ следовали бы равенства $a_n x^n = -(a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)$ и $|a_n x^n| = |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0|$, что противоречит неравенству (12.3). ◀

Число $N_1 = \dfrac{A}{|a_n|} + 1$ служит верхней границей для модулей всех корней многочлена, действительных и комплексных (рис. 12.1).

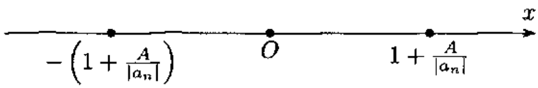


Рис. 12.1

Замечание 1. Лемма о модуле старшего члена доказывается почти дословно для многочлена с действительными коэффициентами от действительного аргумента.

Замечание 2. Полученная оценка для верхней границы действительных корней обычно завышена (см. п. 13.4). Кроме того, многочлен может не иметь действительных корней.

Докажем утверждение о неограниченности модуля многочлена.

Теорема 12.1. Модуль многочлена $P_n(z)$ больше любого наперед заданного числа для достаточно больших значений $|z|$.

▷ Доказательство. Представим $P_n(z)$ в виде суммы двух слагаемых

$$P_n(z) = a_n z^n + (a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0).$$

По свойству модуля получим неравенство

$$|P_n(z)| = |a_n z^n + (a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)| \geqslant \\ \geqslant |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0|. \quad (12.4)$$

По лемме 12.1, при $K = 2$ и $|z| \geqslant \dfrac{2 \cdot A}{|a_n|} + 1$ выполнены неравенства

$$|a_n| \cdot |z|^n > 2 \cdot |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\cdot|a_n|\cdot|z|^n > |a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0|\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ |a_n|\cdot|z|^n - |a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0| >$$

$$> \frac{1}{2}\cdot|a_n|\cdot|z|^n.$$

Сравнивая последнее из полученных неравенств с неравенством (12.4), выводим следующее неравенство:

$$|P_n(z)| > \frac{1}{2}\cdot|a_n|\cdot|z|^n. \tag{12.5}$$

Таким образом, неравенство $|z| \geqslant \dfrac{2\cdot A}{|a_n|} + 1 = N_2$ влечет неравенство (12.5).

Пусть теперь задано произвольное число $M > 0$. Неравенство (12.5) позволяет найти подходящие значения $|z|$, при которых выполнено условие

$$|P_n(z)| > \frac{1}{2}\cdot|a_n|\cdot|z|^n > M; \tag{12.6}$$

решим его относительно $|z|$:

$$|z| > \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_n|}} = N_2'.$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенства $|z| > \max(N_2, N_2')$ истинно неравенство (12.6), и тогда $|P_n(z)| > M$.

Таким образом, при достаточно больших значениях $|z|$, модуль многочлена принимает значения, большие любого числа $M > 0$. ◀

12.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ МОДУЛЯ МНОГОЧЛЕНА

Теорема 12.2. Модуль многочлена $|P_n(z)|$ является непрерывной функцией на множестве $\mathbb{C}$.

▷ Доказательство. Запишем $P_n(z)$ в виде разложения по степеням разности $z - a$:

$$P_n(z) = c_n(z-a)^n + \ldots + c_1(z-1) + c_0, \quad c_n \neq 0.$$

Поскольку $P_n(a) = c_0$, то

$$P_n(z) - P_n(a) = c_n(z-a)^n + \ldots + c_1(z-a),$$

и по свойству модуля комплексного числа выполнено неравенство

$$|P_n(z) - P_n(a)| \leqslant |c_n| \cdot |z-a|^n + \ldots + |c_1| \cdot |z-a|.$$

Положим $b = \max(|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|)$, очевидно, $b \neq 0$. Кроме того, при $k \geqslant 1$ и $|z-a| \leqslant 1$ выполнены неравенства $|z-a|^k \leqslant |z-a| \leqslant 1$ и

$$|P_n(z) - P_n(a)| \leqslant nb|z-a|.$$

Поэтому, если для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $nb \cdot |z-a| \leqslant \varepsilon$, или $|z-a| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{nb}$, то выбирая число $\delta = \min\left(1; \dfrac{\varepsilon}{nb}\right)$, получим неравенство $|P_n(z) - P_n(a)| < \varepsilon$, если только $|z-a| < \delta$. По свойству модуля разности, для комплексного числа z имеем

$$\big||P_n(z)| - |P_n(a)|\big| \leqslant |P_n(z) - P_n(a)| < \varepsilon, \text{ если } |z-a| \leqslant \delta.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для каждого числа $z \in \mathbb{C}$ и $|z-a| < \delta$ выполнено неравенство

$$\big||P_n(z)| - |P_n(a)|\big| < \varepsilon,$$

означающее непрерывность $|P_n(z)|$ при $z = a$. ◀

12.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ

Мы докажем, что для каждого многочлена $P_n(z)$ уравнение $P_n(z) = 0$ имеет хотя бы один корень $z \in \mathbb{C}$.

Так уравнение $z^2+pz+q = 0$ ($p, q \in \mathbb{C}$) решается в комплексной области также, как и в действительной, путем выделения квадрата:

$$z^2 + pz + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \Leftrightarrow \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

причем знак радикала имеется в виду с двойным значением, в соответствии с операцией извлечения корня, определенной в п. 4.3.

12.4.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО К. Ф. ГАУССА

Теорема 12.3 (теорема Гаусса). Всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Изложим идею доказательства Гаусса основной теоремы алгебры.

▷ 1. Каждый многочлен $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ с действительными или комплексными коэффициентами можно представить в виде $P_n(x+iy) = U(x,y) + i\,V(x,y)$, где $U(x,y)$ и $V(x,y)$ — некоторые действительные многочлены от действительных переменных x, y. Исходное уравнение равносильно системе:

$$P_n(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} U(x,y) = 0, \\ V(x,y) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если графики соответствий $U(x,y) = 0$ и $V(x,y) = 0$ пересекаются в некоторой точке (x_0, y_0) действительной плоскости Oxy, то в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ комплексной плоскости (z) выполнено равенство $P_n(z_0) = 0$, и уравнение $P_n(z) = 0$ имеет не менее одного комплексного корня.

2. Исследуем взаимное расположение графиков соответствий $U(x,y) = 0$ и $V(x,y) = 0$ на бесконечности, где абсолютная величина $|z| = r$ может принимать значения, большие любого наперед заданного числа N, так что в многочлене $P_n(z)$ можно пренебречь низшими степенями z по сравнению с $z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. При этом графики соответствий

$\widetilde{U}(r,\varphi) = U(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0$ и $\widetilde{V}(r,\varphi) = V(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0$, записанные в полярной системе координат $Or\varphi$, ведут себя подобно графикам соответствий

$$r^n \cos n\varphi = 0 \quad \text{и} \quad r^n \sin n\varphi = 0,$$

а уравнения $\widetilde{U}(r,\varphi) = 0$ и $\widetilde{V}(r,\varphi) = 0$ на бесконечном удалении от точки O имеют корни, близкие к корням уравнений

$$\cos n\varphi = 0, \qquad \sin n\varphi = 0 \tag{12.7}$$

(рис. 12.2).

График соответствия $\sin n\varphi = 0$ состоит из n прямых, проходящих через начало координат O, образующих с осью абсцисс углы $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{\pi(n-1)}{n}$, а график $\cos n\varphi = 0$ — из n биссектрис углов между этими прямыми.

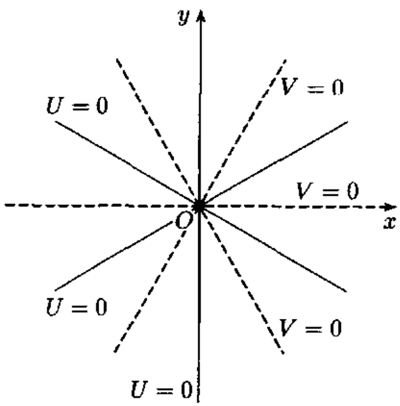


Рис. 12.2

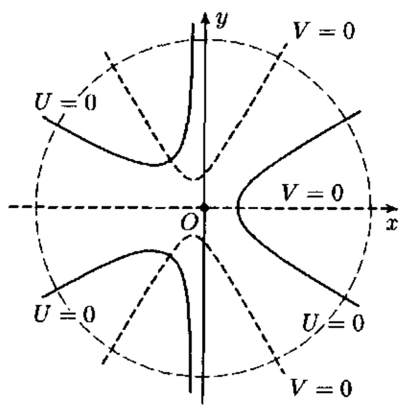


Рис. 12.3

3. В конечной части плоскости графики соответствий $\widetilde{U}(r,\varphi) = 0$ и $\widetilde{V}(r,\varphi) = 0$ могут заметно отклоняться от прямых (12.7), хотя и приближаются к ним при удалении от начала координат O. В действительности ветви этих графиков по-прежнему близки к прямым (12.7) за пределами некоторой окружности достаточно большого радиуса с центром в точке O, тогда как внутри этой окружности они непрерывно переходят одна в другую (рис. 12.3).

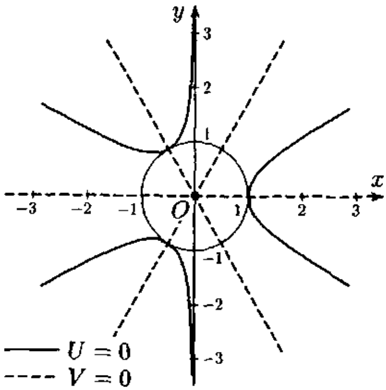


Рис. 12.4. $n = 3$

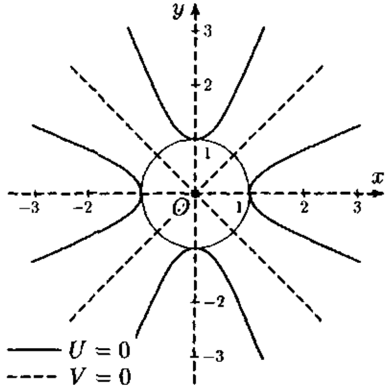


Рис. 12.5. $n = 4$

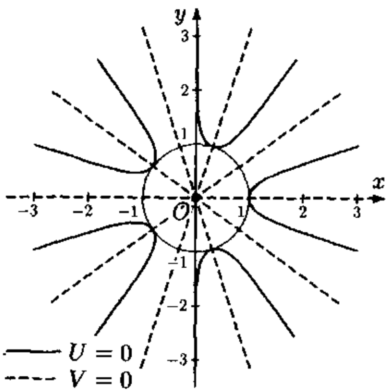


Рис. 12.6. $n = 5$

При этом непрерывная кривая $\widetilde{U} = 0$, переходящая с одной стороны непрерывной кривой $\widetilde{V} = 0$ на другую, хотя бы раз пересечет ее, что и доказывает существование корня уравнения $P_n(z) = 0$. ◀

Пример 12.1. Решить графически уравнение $P_n(z) = z^n - 1 = 0$ в случае

а) $n = 3$;

б) $n = 4$;

в) $n = 5$.

▷ Решение. Воспользуемся тригонометрической формой числа

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r = |z| > 0,$$

и преобразуем уравнение $z^n - 1 = 0$ к тригонометрической форме, эквивалентной системе уравнений, записанной отдельно для действительной и мнимой части:

$$r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \widetilde{U} = r^n \cos n\varphi - 1 = 0, \\ \widetilde{V} = r^n \sin n\varphi = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\dfrac{1}{\cos n\varphi}}, \\ \sin n\varphi = 0. \end{cases}$$

График соответствия $\widetilde{V}(r, \varphi) = 0$ состоит из n ветвей (штриховые линии на рис. 12.4—12.6), график соответствия $\widetilde{U}(r, \varphi) = 0$ состоит из n гиперболовидных ветвей (сплошные линии на рис. 12.4—12.6).

На рис. 12.4—12.6 показаны окружности радиуса 1, на которых размещены корни уравнения $z^n = 1$. В общих точках графиков ($\widetilde{U} = 0$ и $\widetilde{V} = 0$), или ($\widetilde{U} = 0$ и $r = 1$), или ($\widetilde{V} = 0$ и $r = 1$) выполнено равенство $z^n - 1 = 0$. ◀

12.4.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО А. Н. КОЛМОГОРОВА

Приведем доказательство основной теоремы алгебры, принадлежащее А. Н. Колмогорову. В современной терминологии оно было изложено академиком Л. С. Понтрягиным.

▷ Пусть точка z *описывает окружность с центром в точке* O и радиуса r против часовой стрелки, при этом

$$z = r \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \alpha \in [0; 2\pi].$$

Рассмотрим соответствующий замкнутый путь в плоскости (w):

$$w = P_n(r \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)), \qquad \alpha \in [0; 2\pi]. \tag{12.8}$$

В случае $a_0 = 0$ многочлен $P_n(z)$ имеет корень $z = 0$. Поэтому в дальнейшем положим $a_0 \neq 0$. Замкнутый путь (12.8) в плоскости (w) зависит от параметра r и деформируется при изменении r; он может иметь самопересечения, попадая в одну и ту же точку $w(\alpha') = w(\alpha'')$ плоскости (w) при различных значениях $\alpha' \neq \alpha''$. Если путь замкнут, то точки $w(0)$ и $w(2\pi)$ совпадают, при этом их аргументы могут отличаться лишь на $2\pi k$. Целое число k называется *индексом* замкнутого пути. Индекс k указывает, сколько раз точка w, описывая замкнутый путь, обходит начало координат. Индекс замкнутого пути можно определить только для пути, не проходящего через начало координат (рис. 12.7, 12.8).

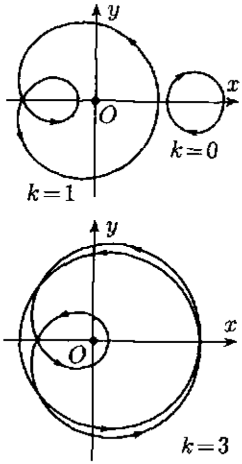


Рис. 12.7

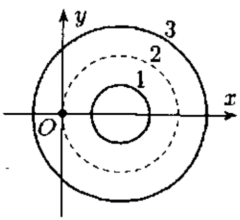


Рис. 12.8. $k_1 = 0$; k_2 не определен; $k_3 = 1$

Заметим, что при $r = 0$ число $z = 0$, путь (12.8) состоит из неподвижной точки a_0, а индекс пути равен 0.

Докажем, что при достаточно большом r индекс пути (12.8) равен n. В этом случае, при изменении r от большого значения до нуля, путь (12.8), деформируясь, пройдет через начало координат; это означает, что при некотором значении z_0 многочлен $P_n(z)$ обращается в нуль и тогда z_0 – его корень.

Продеформируем путь (12.8) в более простой путь, индекс которого легко подсчитать. Представим многочлен $P_n(z)$ в виде суммы

$$P_n(z) = z^n + Q_{n-1}(z),$$

где $Q_{n-1}(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Обозначим $\max(|a_{n-1}|; \ldots; |a_1|; |a_0|) = c > 0$.

Из свойства модуля суммы, записанного для произвольного числа комплексных слагаемых, вытекает, что при $|z| > 1$ выполнено неравенство

$$|Q_{n-1}(z)| \leqslant nc \cdot |z^{n-1}|.$$

Введем многочлен $\widetilde{P}_n(z, s) = z^n + s \cdot Q_{n-1}(z)$, где $s \in [0; 1]$ – параметр. Из этой формулы вытекает равенство $z^n = \widetilde{P}_n - s \cdot Q_{n-1}(z)$, позволяющее оценить сверху величину $|z|^n$:

$$|z|^n \leqslant |\widetilde{P}_n(z, s)| + |-s \cdot Q_{n-1}(z)| \leqslant$$
$$\leqslant |\widetilde{P}_n(z, s)| + s \cdot nc \cdot |z^{n-1}| \leqslant |\widetilde{P}_n(z, s)| + nc \cdot |z^{n-1}|.$$

Полученное неравенство преобразуем к виду

$$|\widetilde{P}_n(z, s)| \geqslant z^n - nc \cdot |z^{n-1}|,$$

в котором правая часть уже не зависит от параметра s. Учитывая, что $|z| = r$, запишем это неравенство в виде

$$|\widetilde{P}_n(z, s)| \geqslant r^n - nc \cdot r^{n-1} = r^{n-1}(r - nc).$$

При $r > cn$ правая часть последнего неравенства положительна, и $\widetilde{P}_n(z,s) \neq 0 \ \forall s \in [0;1]$. Это означает, что индексы путей, соответствующих многочленам $\widetilde{P}_n(z,s)$ (для всех $s \in [0;1]$), совпадают. Заметим, что при $s = 0$ многочлен $\widetilde{P}_n(z,s) = z^n$. Индекс пути z^n, когда z описывает окружность радиуса r, равен n. При значении $s = 1$ многочлен $\widetilde{P}_n(z,s) = P_n(z)$ и индекс определяемого им пути (12.8) также равен n.

Таким образом, индекс пути, определяемый многочленом $P_n(z)$, при $r > cn$ равен n. В процессе изменения r от 0 до $cn+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, путь деформируется, а индекс пути изменяется от 0 при $r = 0$ до n при $r = cn + \varepsilon$. Следовательно, при изменении r путь (12.8) при некотором r_0 проходит через начало координат, и многочлен $P_n(z)$ при некотором значении z_0 обращается в нуль, а тогда z_0 — его корень. Теорема доказана. ◀

З а м е ч а н и е. Все известные доказательства основной теоремы алгебры основаны на использовании свойства непрерывности множества действительных и комплексных чисел, вследствие чего они не могут рассматриваться как чисто алгебраические доказательства.

12.4.3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Ж. Р. АРГАНА

1. Воспользуемся теоремой Больцано—Вейерштрасса, которую сформулируем в следующем виде.

Теорема 12.4. Каждое ограниченное бесконечное множество $\boldsymbol{E}$ комплексной плоскости (z) имеет предельную точку.

Если бесконечное множество $\boldsymbol{E}$ комплексной плоскости (z) неограниченно, то имеются две возможности, а именно:

— либо имеется круг радиусом R с центром в начале координат (т. е. все точки $|z| \leqslant R$), содержащий бесконечное множество точек из $\boldsymbol{E}$, а значит и предельную точку этого множества;

— либо в каждом таком круге содержится лишь конечное множество точек из $\boldsymbol{E}$, а бесконечное множество точек лежит в любой окрестности бесконечно удаленной точки $|z| > R$. В этом случае предельной точкой множества $\boldsymbol{E}$ будет ∞.

Таким образом, в расширенной комплексной плоскости (z) каждое бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку (конечную или бесконечно удаленную).

По теореме 1.4, каждое бесконечное числовое множество, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю границу. Рассмотрим действительную функцию $|P(z)|$ комплексной переменной, где $P(z)$ — многочлен. Она ограничена снизу и имеет точную нижнюю границу m на круге радиуса $r > 0$ с центром в начале координат:

$$m = \inf_{|z| \leqslant r} |P(z)|.$$

$\triangleright$ Докажем, что существует такое число $\zeta \in \mathbb{C}$, что $|P(\zeta)| = m$ и $|\zeta| \leqslant r$. Рассмотрим последовательность положительных действительных чисел $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к нулю. По определению точной нижней границы, для каждого члена α_n найдется такое число z_n, что

$$m \leqslant |P(z_n)| \leqslant m + \alpha_n, \quad |z_n| \leqslant r.$$

Поэтому последовательность $\{|P(z_n)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ при $n \to \infty$ сходится к m,

$$\lim_{n \to \infty} |P(z_n)| = m.$$

Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена, все ее члены лежат в круге $|z| \leqslant r$. По теореме 12.4, имеется подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке ζ, лежащей в круге $|z| \leqslant r$:

$$\lim_{k \to \infty} |z_{n_k}| = |\zeta|, \quad |\zeta| \leqslant r.$$

По теореме о непрерывности модуля многочлена отсюда следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} |P(z_{n_k})| = |P(\zeta)|$, а по теореме о единственности предела

$$\lim_{k \to \infty} |P(z_{n_k})| = m.$$

Таким образом, $|P(\zeta)| = m$ и $|\zeta| \leqslant r$. ◀

Перейдем к доказательству основной теоремы алгебры.

$\triangleright$ Рассмотрим многочлен $P_n(z)$ степени $n > 0$. По предыдущему, имеется такая точка $\zeta \in \mathbb{C}$, в которой функция $|P_n(z)|$, ограниченная снизу, достигает своего минимума. Методом «от противного» докажем равенство $|P_n(\zeta)| = 0$. Предположим, что $P_n(\zeta) \neq 0$, и рассмотрим многочлен

$$\widetilde{P}_n(z) = \frac{P_n(z+\zeta)}{P_n(\zeta)}.$$

Очевидно, $\widetilde{P}_n(0) = 1$ и $|\widetilde{P}_n(z)| \geqslant 1$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Запишем $\widetilde{P}_n(z)$ в явном виде:

$$\widetilde{P}_n(z) = 1 + a_\nu z^\nu + \ldots + a_n z^n, \quad \text{где } a_\nu \neq 0.$$

Выполним линейную замену переменной $z \to cz$, причем в качестве c возьмем такое число, что степень $c^\nu = -\dfrac{1}{a_\nu}$. Многочлен $\widetilde{P}_n(z)$ преобразуется к следующему виду (коэффициент при z^ν становится равным (-1)):

$$\widetilde{P}_n(cz) = 1 - z^\nu + \ldots + a^n c^n z^n,$$

причем $|\widetilde{P}_n(cz)| \geqslant 1$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Обозначим $T_n(z) = \widetilde{P}_n(cz)$,

$$|T_n(z)| = |1 - z^\nu + \psi(z)| \geqslant 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Если $z \to 0$, то значение $|\psi(z)|$ бесконечно мало по сравнению с $|z^\nu|$.

В частном случае, когда $z = x > 0$ — достаточно малое положительное число, значение $|\psi(x)| < x^\nu$. При этом

$$|T_n(x)| = |1 - x^\nu + \psi(x)| \leqslant 1 - x^\nu + |\psi(x)| < 1,$$

что противоречит неравенству $|T_n(z)| \geqslant 1$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Но тогда антитеза неверна. Теорема доказана. ◀

З а м е ч а н и е 1. По основной теореме алгебры, многочлен нулевой степени не имеет корней.

З а м е ч а н и е 2. Основная теорема алгебры не применима к нулевому многочлену (числу нуль), степень которого не определена.

Упражнение 12.1*). 1) Доказать, что наименьший корень многочлена $x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x - 1$ — иррациональное число.

---

*) Авторы задач упражнения 12.1: М. Л. Галицкий и Л. И. Звавич.

2) Доказать, что наименьший корень многочлена $x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 1$ — рациональное число.

3) В разложении многочлена $(2x-1)^{17} + x^{55}$ по степеням переменной x найти коэффициент при x^2.

Ответ: $\{-544\}$.

4) Разложить многочлен $x^3 - 5x^2 + x - 3$ по степеням $x - 1$.

Ответ: $(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 6(x-1) - 6$.

5) Доказать, что график многочлена четной степени имеет ось симметрии $x = x_0$ тогда и только тогда, когда все его производные нечетного порядка имеют общий корень x_0.

6) Найти ось симметрии графика многочлена $P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ и решить уравнение $P_4(x) = 0$.

Ответ: $x = 1$; $\left\{1 \pm \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}; 1 \pm \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}\right\}$.

7) Доказать, что график многочлена нечетной степени имеет центр симметрии тогда и только тогда, когда все его производные четного порядка имеют общий корень x_1. При этом центр симметрии графика $P_{2\nu+1}(x)$ имеет координаты $(x_1, P_{2\nu+1}(x_1))$ (ν — натуральное число).

8) Найти центр симметрии графика многочлена

а) $P_5(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 3x + 2$; б) $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 1$.

Ответы: а) $(1, 1)$; б) $(2, -11)$.

ГЛАВА 13

ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ

13.1. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ

Основная теорема алгебры, или теорема Гаусса, утверждает, что всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет хотя бы один корень — действительный или комплексный.

Следствие 1. Любой многочлен n-й степени ($n \geqslant 1$) можно разложить в произведение n линейных множителей:

$$P_n(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

▷ Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. При $n = 1$ утверждение истинно, поскольку

$$P_1(z) = a_1 \cdot \left(z + \frac{a_0}{a_1}\right).$$

2°. Предположим, что утверждение истинно при $n = k$, т. е.

$$P_k(z) = a_k \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n),$$

и докажем его при $n = k + 1$. По основной теореме алгебры, уравнение $P_{k+1}(z) = 0$ имеет корень, который обозначим z_{k+1}. По теореме Безу, многочлен $P_{k+1}(z)$ делится на $z - z_{k+1}$ и потому

$$P_{k+1}(z) = (z - z_{k+1}) \cdot Q_k(z).$$

По предположению индукции, многочлен $Q_k(z)$ раскладывается в произведение:

$$Q_k(z) = b \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_k),$$

стало быть

$$P_{k+1}(z) = b \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_k) \cdot (z - z_{k+1}).$$

Сравнивая коэффициенты при z^{k+1} многочленов $P_{k+1}(z)$ и его разложения в произведение линейных множителей, получаем равенство $b = a_n + 1$. На основании принципа математической индукции заключаем, что утверждение истинно для любого $n \in \mathbb{N}$. ◀

Определение 13.1. Число k называется *кратностью* корня ζ многочлена $P_n(z)$, если он делится без остатка на $(z-\zeta)^k$, однако не делится на $(z-\zeta)^{k+1}$; при этом ζ называют *k-кратным корнем* многочлена.

Если $k = 1$, то корень ζ называется *простым.*

Следствие 2. Любой многочлен n-й степени имеет n комплексных корней, взятых с учетом их кратности.

▷ Доказательство. По следствию 1, левую часть уравнения $P_n(z) = 0$ можно представить в виде произведения

$$a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) = 0,$$

откуда следует, что его корни суть числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и только они. ◀

Теорема 13.1. Если комплексное число ζ является корнем многочлена $P_n(z)$, имеющего действительные коэффициенты, то сопряженное число $\overline{\zeta}$— также корень этого многочлена.

▷ Доказательство. По условию теоремы, имеем верное равенство

$$P_n(\zeta) = a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + a_1\zeta + a_0 = 0,$$

из которого, по свойству комплексно сопряженных чисел, выведем другие верные равенства:

$$\overline{P_n(\zeta)} = \overline{a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + a_1\zeta + a_0} = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \overline{P_n(\zeta)} = P_n(\overline{\zeta}) = a_n\overline{\zeta}^n + a_{n-1}\overline{\zeta}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\zeta} + a_0 = 0,$$

откуда следует, что $\overline{\zeta}$ — также корень многочлена $P_n(z)$. ◀

Следствие 3. Если ζ — корень многочлена с действительными коэффициентами кратности k, то и $\overline{\zeta}$ — тоже корень этого многочлена кратности k.

Следствие 4. Каждый многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами можно разложить в произведение неприводимых (т. е. не допускающих дальнейшего разложения на множестве действительных чисел) многочленов, единственное с точностью до порядка следования сомножителей:

$$P_n(x) = a_n \cdot (x - \zeta_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - \zeta_l)^{k_l} \times \\ \times (x^2 + t_1 x + s_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + t_q x + s_q)^{p_q},$$

где $n = \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=l} k_\lambda + 2 \sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} p_\varkappa$, и все коэффициенты — действительные числа, k_λ — кратность действительного корня ζ_λ; $p_\varkappa$ — кратность квадратного трехчлена $x^2 + t_\varkappa x + s_\varkappa$, не имеющего действительных корней.

Из основной теоремы алгебры следует, что количество действительных корней многочлена n-й степени не превышает n. Следовательно, график многочлена пересекает ось абсцисс не более чем в n точках.

График многочлена пересекает ось ординат в точке $(0; a_0)$.

На координатной плоскости Oxy через $n+1$ точек, которые не лежат на одной прямой, причем никакие две из этих точек не располагаются на одной прямой, параллельной оси ординат, можно провести график многочлена степени n.

Если многочлен $P_n(x)$ имеет k действительных корней, то имеется $k+1$ интервалов, на каждом из которых $P_n(x)$ сохраняет знак.

Упражнение 13.1. 1) Доказать, что k-я производная многочлена степени n есть многочлен степени $n-k$ $(k \leqslant n)$.

2) Доказать, что каждое свое значение многочлен степени n принимает не более чем n раз.

3) Доказать, что график многочлена $y = P_n(x)$ при достаточно больших x направлен выпуклостью в ту же сторону, что и график степенной функции $y = a_n x^n$.

13.2. РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

13.2.1. СЛУЧАЙ ТРЕХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

В неполном кубическом уравнении

$$x^3 + px + q = 0, \quad p < 0, \ q \neq 0, \tag{13.1}$$

не имеющем корней $\{-1; 1\}$, положим $x = \chi \cdot \cos\psi$. С помощью формулы тройного аргумента $\cos^3\psi = \frac{1}{4} \cdot (\cos 3\psi + 3\cos\psi)$ получим уравнение, содержащее неизвестные χ и ψ:

$$\frac{1}{4}\chi^3 \cdot \cos 3\psi + \left(\frac{3}{4}\chi^3 + p\chi\right) \cdot \cos\psi + q = 0,$$

для решения которого приравняем нулю коэффициент в скобках, и получим систему двух уравнений для определения χ и ψ:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\chi^3 + p\chi = 0, \\ \frac{1}{4}\chi^3 \cdot \cos 3\psi + q = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы вытекают равенства

$$\chi^2 = -\frac{4}{3}p, \quad \chi = 2\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

а из второго уравнения — формула

$$\cos 3\psi = -\frac{4q}{\chi^3} = -\frac{q}{2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{13.1$_1$}$$

Ввиду неравенства $0 < |\cos 3\psi| < 1$, из (13.1$_1$) следует соотношение

$$\left|-\frac{q}{2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = Q < 0. \tag{13.1$_2$}$$

Обратно, при выполнении условия (13.1$_2$) уравнение (13.1) имеет три различных действительных корня, вычисляемых по формуле

$$\left.\begin{aligned} x_k = \chi \cdot \cos\psi_k, \text{ где } \chi = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \\ \psi_k = \frac{1}{3} \cdot \left(\arccos\left(-\frac{q}{2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) + 2\pi(k-1)\right), \\ k = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \quad (13.1_3)$$

Пример 13.1. Решить уравнение $x^3 - 19x + 30 = 0$.

$\triangleright$ Решение. Легко проверить, что это уравнение имеет три действительных корня — это $\{-5; 2; 3\}$. Вычислим эти корни, используя равенства (13.1_2), (13.1_3). В данном случае $p = -19$, $q = 30$;

$$Q = 15^2 + \left(-\frac{19}{3}\right)^3 = -\frac{784}{27} < 0, \quad \chi = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \approx 5{,}033223;$$

$$\cos 3\psi = -\frac{4 \cdot 30}{8 \cdot \left(\frac{19}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = -15 \cdot \left(\frac{3}{19}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Тригонометрическое уравнение (13.1_1) имеет три различных корня

$$\psi_k = \frac{1}{3} \cdot \left(\arccos\left(-15 \cdot \left(\frac{3}{19}\right)^{\frac{3}{2}}\right) + 2\pi(k-1)\right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Очевидно, $\cos\left(\psi_1 + \frac{2\pi(k-1)}{3}\right) = \cos\psi_1 \cdot \cos\frac{2\pi(k-1)}{3} - \sin\psi_1 \cdot \sin\frac{2\pi(k-1)}{3}$.

Ввиду равенств

$$\psi_1 = \frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-15 \cdot \left(\frac{3}{19}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \approx \frac{1}{3} \cdot \arccos(-0{,}941115) \approx \approx 0{,}932237,$$

находим $\cos\psi_1 \approx 0{,}596039$, $\sin\psi_1 \approx 0{,}802955$. Формулы для вычисления корней принимают вид

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cdot (\cos\psi_1 \cdot 1 - \sin\psi_1 \cdot 0),$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cdot \left(\cos\psi_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin\psi_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cdot \left(\cos\psi_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin\psi_1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

Вычисления, выполненные на калькуляторе «Электроника МК-85» с шестью цифрами после запятой, показали, что

$$x_1 \approx 5{,}033223 \cdot (0{,}596039 \cdot 1 - 0{,}802955 \cdot 0) \approx 2{,}999997,$$

$$x_2 \approx 5{,}033223 \cdot \left(0{,}596039 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0{,}802955 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx$$
$$\approx -4{,}999999,$$

$$x_3 \approx 5{,}033223 \cdot \left(0{,}596039 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0{,}802955 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \approx$$
$$\approx 1{,}999996,$$

Абсолютная погрешность вычислений составила $4 \cdot 10^{-6}$. Относительная погрешность вычислений равна $2 \cdot 10^{-6}$. ◀

13.2.2. СЛУЧАЙ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО И ПАРЫ КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫХ КОРНЕЙ

В начале гл. 4 была получена формула (4.1_5) для вычисления действительного корня уравнения (4.1_1):

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}.$$

Корень третьей степени на множестве комплексных чисел имеет три значения. Для каждого значения радикала α следует брать такое из трех значений радикала β, чтобы выполнялось условие $\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}$. Если, например, $\alpha_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$ одно из трех значений α, то два другие значения корня можно получить умножением α_1 на кубические корни ε, ε^2 из единицы:

$$\alpha_1 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \varepsilon, \quad \alpha_3 = \alpha_1 \cdot \varepsilon^2.$$

Соответствующие значения β суть

$$\beta_1 = -\frac{p}{3\alpha_1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad \beta_2 = \beta_1 \cdot \varepsilon, \quad \beta_3 = \beta_1 \cdot \varepsilon^2.$$

Ввиду равенства $\varepsilon^3 = 1$, выполнены следующие соотношения:

$$\alpha_2 \cdot \beta_3 = \alpha_1\varepsilon \cdot \beta_1\varepsilon^2 = \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \varepsilon^3 = \alpha_1 \cdot \beta_1 = -\frac{p}{3},$$

$$\alpha_3 \cdot \beta_2 = \alpha_1\varepsilon^2 \cdot \beta_1\varepsilon = \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \varepsilon^3 = \alpha_1 \cdot \beta_1 = -\frac{p}{3}.$$

Таким образом, значению α_2 радикала α соответствует значение β_3, а значению α_3 — значение β_2. Поэтому корни уравнения (4.1_1) выражаются формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1, \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2, \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon. \end{aligned}$$

С учетом равенств

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon^2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

запишем окончательные формулы для вычисления корней:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1, \\ x_2 &= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\sqrt{3}, \\ x_3 &= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

В частном случае $Q = 0$ корни x_2 и x_3 совпадают.

Пример 13.2. Решить уравнение

$$x^3+3x^2-6x+4=0. \tag{13.2}$$

▷ Решение. С помощью замены $x=y-1$ преобразуем уравнение (13.2) к виду

$$y^3-9y+12=0. \tag{13.2$_1$}$$

Здесь $p=-9$, $q=12$, $Q=6^2-3^3=9>0$. Уравнение (13.2_1) имеет действительный и пару комплексно сопряженных корней;

$$\alpha=\sqrt[3]{-6-3}=-\sqrt[3]{9},\quad \beta=\sqrt[3]{-6+3}=-\sqrt[3]{3}.$$

Формулы для корней уравнения (13.2_1) имеют вид

$$y_1=-(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}),$$

$$y_2=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt{3},\ y_3=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}{2}-i\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt{3}.$$

Вернемся к неизвестной x и запишем ответ. ◀

Ответ: $\left\{-(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1),\ \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-2}{2}+i\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt{3},\ \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-2}{2}-i\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{2}\sqrt{3}\right\}.$

Пример 13.3. Решить уравнение

$$P_5(x)=x^5+2x^4+6x^2+x+2=0$$

на множестве действительных чисел.

▷ Решение. Применим метод разложения на множители.

1. Предположим, что данный многочлен раскладывается в произведение многочленов третьей и второй степени с целыми коэффициентами, подлежащими определению:

$$\begin{aligned}P_5(x)&=(x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)\cdot(x^2+b_1x+b_0)=\\&=x^5+(b_1+a_2)x^4+(b_0+a_2b_1+a_1)x^3+(a_2b_0+a_1b_1+a_0)x^2+\\&\qquad+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0.\end{aligned}$$

Приравняем коэффиценты многочлена $P_5(x)$ и коэффиценты разложения при соответственных степенях неизвестной и получим систему пяти нелинейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными коэффицентами $\{a_2,a_1,a_0,b_1,b_0\}$, а именно:

$$\begin{array}{c|l} 1 & a_0b_0 = 2, \\ x & a_1b_0 + a_0b_1 = 1, \\ x^2 & a_2b_0 + a_1b_1 + a_0 = 6, \\ x^3 & b_0 + a_2b_1 + a_1 = 0, \\ x^4 & b_1 + a_2 = 2. \end{array}$$

2. Из первого уравнения вытекает, что a_0, b_0 — целые числа одного знака, которые могут принимать значения ± 1, ± 2.

i) Если $a_0 = -1$, то $b_0 = -2$. Подставим эти значения в четыре последних уравнения и получим переопределенную систему четырех уравнений с тремя неизвестными $\{a_2, a_1, b_1\}$:

$$\begin{cases} 2a_1 + b_1 = -1, \\ 2a_2 - a_1b_1 = -7, \\ a_1 + a_2b_1 = 2, \\ a_2 + b_1 = 2. \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнений этой системы выразим a_1 и a_2 через b_1:

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + b_1), \qquad a_2 = 2 - b_1.$$

Подставим эти формулы во второе уравнение и получим

$$2(2 - b_1) + \frac{1}{2} \cdot (1 + b_1)b_1 = -7 \quad \Leftrightarrow \quad b_1^2 - 3b_1 + 22 = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения равен $D = 9 - 4 \cdot 22 = -79 < 0$, поэтому оно не имеет действительных корней, а система не имеет решений.

ii) Если $a_0 = 1$, то $b_0 = 2$. Последние четыре уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{cases} 2a_1 + b_1 = 1, \\ 2a_2 + a_1b_1 + 1 = 6, \\ 2 + a_1 + a_2b_1 = 0, \\ a_2 + b_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + b_1 = 1, \\ 2a_2 + a_1b_1 = 5, \\ a_1 + a_2b_1 = -2, \\ a_2 + b_1 = 2. \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнений этой системы выразим a_1 и a_2 через b_1:

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - b_1), \qquad a_2 = 2 - b_1.$$

ii$_1$) Подставим полученные формулы во второе уравнение и найдем

$$2(2-b_1)+\frac{1}{2}\cdot(1-b_1)b_1=5 \quad\Leftrightarrow\quad b_1^2+3b_1+2=0,$$

причем квадратное уравнение имеет множество корней $\boldsymbol{B}' = \{-2;-1\}$.

ii$_2$) Подставив полученные формулы в третье уравнение, найдем

$$\frac{1}{2}\cdot(1-b_1)+(2-b_1)b_1=-2 \quad\Leftrightarrow\quad 2b_1^2-3b_1-5=0.$$

Здесь множество корней квадратного уравнения $\boldsymbol{B}'' = \left\{-1;\frac{5}{2}\right\}$. Множества $\boldsymbol{B}'$ и $\boldsymbol{B}''$ имеют непустое пересечение: $\boldsymbol{B}'\cap\boldsymbol{B}''=\{-1\}$.

При $b_1=-1$ коэффициенты $a_1=1$, $a_2=3$.

3. Таким образом, левая часть данного уравнения раскладывается в произведение многочленов. Это уравнение эквивалентно совокупности уравнений третьей и второй степени:

$$(x^3+3x^2+x+1)\cdot(x^2-x+2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x^3+3x^2+x+1=0,\\ x^2-x+2=0.\end{array}\right.$$

Дискриминат квадратного уравнения этой системы $D = 1-4\cdot 2=-7<0$, и, следовательно, оно не имеет действительных корней.

Кубическое уравнение преобразуем к виду: $(x+1)^3-2x=0$. После замены неизвестной $\xi=x+1$ получим неполное кубическое уравнение

$$\xi^3-2\xi+2=0,$$

коэффициенты которого $p=-2$, $q=2$; $Q=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}>0$.

Следовательно, это уравнение имеет один действительный корень, вычисляемый по формуле Кардано (4.1$_5$):

$$\xi=\sqrt[3]{-1-\sqrt{\frac{19}{27}}}+\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{19}{27}}}.$$

Выражая через ξ неизвестную x, получим формулу

$$x = \xi - 1 = \sqrt[3]{-1 - \sqrt{\frac{19}{27}}} + \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{19}{27}}} - 1. \quad \blacktriangleleft$$

Ответ: $\left\{\sqrt[3]{-1 - \sqrt{\frac{19}{27}}} + \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{19}{27}}} - 1\right\}$.

Упражнение 13.2. Преобразовав левую часть в произведение многочленов, найти действительные корни уравнения

$$x^5 + 2x^4 + 4x^2 - x + 2 = 0.$$

Ответ: $\left\{\sqrt[3]{-\frac{44}{27} - \sqrt{\frac{59}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{44}{27} + \sqrt{\frac{59}{27}}} - \frac{2}{3}\right\}$.

13.3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

Основная теорема алгебры — классический пример теоремы существования, которая не дает практического метода отыскания корней многочлена. Рассмотрим непрерывную целую рациональную функцию $y = P_n(x)$, причем все коэффициенты многочлена $P_n(x)$ — действительные числа. Действительные корни многочлена $P_n(x)$ суть абсциссы точек пересечения его графика с осью x, и только они.

Пример 13.4. Коэффициенты многочлена $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$ — действительные числа; показатель старшей степени — нечетное число 5. Следовательно, существуют действительные корни, которых может быть 1, или 3, или 5.

Из табл. 13.1, в которой представлены значения функции $y = P_5(x)$, следует, что функция $y = P_5(x)$ имеет три перемены знака на интервалах $(-4; -3)$, $(-1; 0)$, $(1; 2)$, где располагаются по меньшей мере три действительных корня многочлена $P_5(x)$.

Таблица 13.1

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$P_5(x)$	-39	144	83	18	-3	-4	39

Шаг вычислений Δx в табл. 13.1 равен 1, хотя возможно, что при $\Delta x = 0{,}1$ или $\Delta x = 0{,}01$ могут появиться и другие перемены знака многочлена.

Пример 13.5. По лемме 12.1 (следствие 2), все действительные корни многочлена $P_5(x) = x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$, у которого $a_n = 1$, $A = 8$, лежат на интервале $(-9; 9)$, так как число $N_P = 1 + \frac{8}{1} = 9$.

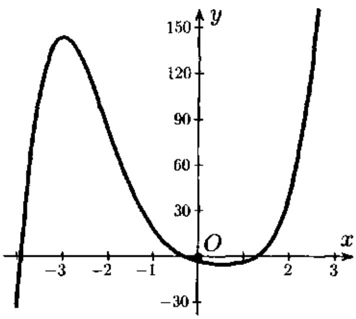


Рис. 13.1

На рис. 13.1 показан график многочлена $P_5(x)$, построенный по точкам с шагом 0,002.

Заметим, что если $\alpha > 0$, $\beta < 0$ — корни многочлена $P_n(x)$, то многочлен $Q_n(x) = x^n \cdot P_n(x^{-1})$ имеет положительный корень α^{-1}; многочлен $R_n(x) = P_n(-x)$ имеет положительный корень $-\beta$; многочлен $S_n(x) = x^n \cdot P_n(-x^{-1})$ имеет положительный корень $-\beta^{-1}$.

Пусть каким-то образом удалось установить верхние границы положительных корней: у многочлена $P_n(x)$ – N_P; у многочлена $Q_n(x)$ – N_Q; у многочлена $R_n(x)$ – N_R; у многочлена $S_n(x)$ – N_S.

Тогда с очевидностью выполнены следующие неравенства:

$$\alpha < N_P; \quad \alpha^{-1} < N_Q; \quad -\beta < N_R; \quad -\beta^{-1} < N_S, \tag{13.3}$$

позволяющие установить верхние и нижние оценки соответственно для положительных и отрицательных корней многочлена $P_n(x)$:

$$\frac{1}{N_Q} < \alpha < N_p, \qquad -N_R < \beta < -\frac{1}{N_S}. \tag{13.3$_1$}$$

Пример 13.6. Рассмотрим многочлен $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$. В этом случае

$$Q_5(x) = x^5 \cdot P_5(x^{-1}) = -(3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1),$$
$$R_5(x) = P_5(-x) = -(x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3),$$
$$S_5(x) = x^5 \cdot P_5(-x^{-1}) = -(3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1),$$

так что

$$N_Q = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}, \quad N_R = \frac{8}{1} + 1 = 9, \quad N_S = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3},$$

кроме того, $N_P = 9$.

Из неравенств (13.3_1) следует, что корни многочлена $P_5(x)$ лежат на промежутках $\left(\frac{3}{11}; 9\right)$ и $\left(-9; -\frac{3}{11}\right)$.

13.4. УСТАНОВЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

Лемма 13.1. Если многочлен $P_n(x)$ записан по убывающим степеням x так, что сначала идут члены только с положительными коэффициентами, а затем — только с отрицательными,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n-p}x^{n-p} - \\ - a_{n-p-1}x^{n-p-1} - \ldots - a_1 x - a_0, \text{ где } a_i > 0 \ (i = 0, \ldots, n),$$

и при $x = c$, где $c > 0$, значение $P_n(c) > 0$, то $P_n(x) > 0$ при всех $x > c$.

$\triangleright$ Доказательство. Функцию $P_n(x)$ представим в виде произведения

$$P_n(x) = x^{n-p} \cdot \Bigg((a_n x^p + a_{n-1}x^{p-1} + \ldots + a_{n-p}) - \\ - \left(\frac{a_{n-p-1}}{x} + \frac{a_{n-p-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^{n-p}} \right) \Bigg). \quad (13.4)$$

В том случае, когда $0 < x_1 < x_2$ выполнено неравенство $P_n(x_1) < P_n(x_2)$, так как с ростом $x > 0$ уменьшаемое в скобках монотонно возрастает, а вычитаемое монотонно убывает. Поэтому, если при каком-то $x = c > 0$ выполнено неравенство $P_n(c) > 0$, то и при всех $x > c$ будет $P_n(c) > 0$. $\blacktriangleleft$

Следствие 1. Ни при каком значении $x > c > 0$ функция $P_n(x)$ не равна нулю, а число c— верхняя граница положительных корней $P_n(x)$.

Следствие 2. Каждую целую рациональную функцию $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \ldots + \Phi_q(x),$$

где $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_q(x)$ - функции вида (13.4). Если существует такое значение $x = c$, где $c > 0$, при котором $\Phi_i(c) > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, q$), то они будут положительны и при всех $x > c$. Поэтому число c будет верхней границей положительных корней $P_n(x)$.

Пример 13.7. Многочлен $P_5(x) = x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 4x^2 - 9x + 4$ можно представить как $P_5(x) = (x^5 + 3x^4 - 12x^3) + (4x^2 - 9x) + 4$. При $x = 3$ каждая из функций в скобках положительна, третье слагаемое $4 > 0$. Следовательно, $P_5(x) > 0$ при всех $x > 3$. Поэтому число 3 — верхняя граница положительных корней $P_5(x)$.

13.5. ТЕОРЕМА ДЕКАРТА О ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЯХ МНОГОЧЛЕНА

В этом разделе приводится теорема, позволяющая судить о количестве действительных корней многочлена по его коэффициентам.

Определение 13.2. Если в конечной последовательности чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ имеется ν переходов от одного знака к другому, то говорят, что в ней содержится ν *перемен знака*.

Например, в последовательности чисел $\{+1; +2; -1; -5; -4; -7; +3; -2\}$ имеется три перемены знака. Заметим также, что в этой последовательности чисел содержится четыре сохранения знака: между 1-м и 2-м, 3-м и 4-м, 4-м и 5-м, 5-м и 6-м числами.

Теорема 13.2 (теорема Декарта). Количество положительных корней многочлена с действительными коэффициентами, с учетом их кратностей, равно или на четное число меньше количества перемен знака в ряду его коэффициентов. При этом нулевые коэффициенты при подсчете количества перемен знака не учитываются.

Если все корни многочлена — действительные числа, то теорема Декарта дает точное количество корней.

▷ Доказательство. Будем предполагать, что многочлен $P_n(x)$ не имеет кратных корней.

1. Из теоремы Больцано—Коши для непрерывной функции $P_n(x)$ следует, что если $P_n(a) \cdot P_n(b) < 0$, то на интервале $(a; b)$ имеется по крайней мере один корень $P_n(x)$. Докажем некоторые следствия.

i) Если $P_n(a) \cdot P_n(b) < 0$, то на интервале $(a; b)$ содержится нечетное число корней $P_n(x)$.

Действительно, точки $A(a; P_n(a))$ и $B(b; P_n(b))$, лежащие на графике функции $y = P_n(x)$, расположены в разных полуплоскостях, на которые разбивает координатную плоскость ось абсцисс. Пусть точка $T(t; P_n(t))$, где $t \in [a, b]$, перемещается по графику от точки A к точке B. Поскольку $P_n(x)$ имеет только простые корни, то в точке пересечения с осью абсцисс точка T перейдет из одной полуплоскости в другую. Чтобы попасть в точку B, лежащую в другой полуплоскости, точка T должна пройти через нечетное число точек пересечения с осью абсцисс. Отсюда следует доказываемое утверждение.

Аналогично можно обосновать следующее утверждение.

ii) Если $P_n(a) \cdot P_n(b) > 0$, то на интервале (a, b) содержится четное число корней $P_n(x)$. Это четное число может быть равно 0.

2. Предположим, что коэффициент $a_n > 0$. Рассмотрим два случая.

i) Если n — четное число, то старший член $a_n x^n > 0$. По лемме о модуле старшего члена, для достаточно больших по абсолютной величине значений x, как положительных, так и отрицательных, выполнено неравенство $P_n(x) > 0$. При этом точки графика функции $y = P_n(x)$ расположены в одной полуплоскости. Следовательно, функция $P_n(x)$ может иметь только четное число действительных корней.

В виду равенства $P_n(0) = a_0$, график функции $y = P_n(x)$ пересекает ось ординат в точке $K(0; a_0)$. Если $a_0 > 0$, то точка K лежит в верхней полуплоскости и функция $P_n(x)$ может иметь только четное число отрицательных и четное число положительных корней. Если же $a_0 < 0$, то точка K лежит в нижней полуплоскости, и $P_n(x)$ имеет нечетное число отрицательных и нечетное число положительных корней.

ii) Если n — нечетное число, то старший член $a_n x^n > 0$ при $x > 0$, и $a_n x^n < 0$ при $x < 0$. По лемме о модуле старшего члена, для достаточно больших по абсолютной величине значений x многочлен $P_n(x) > 0$ при $x > 0$, и $P_n(x) < 0$ при $x < 0$. При этом точки графика функции $y = P_n(x)$, расположены в разных полуплоскостях. Следовательно, функция $P_n(x)$ может иметь только нечетное число действительных корней.

Если теперь $a_0 > 0$, то точка K лежит в верхней полуплоскости, и функция $P_n(x)$ может иметь нечетное число отрицательных корней и четное число положительных корней. Если же $a_0 < 0$, то точка K лежит в нижней полуплоскости и $P_n(x)$ может иметь только четное число отрицательных корней и нечетное число положительных корней.

В обоих случаях (четного и нечетного n) функция $P_n(x)$ имеет четное число положительных корней, если $a_0 > 0$; $P_n(x)$ имеет нечетное число положительных корней, если $a_0 < 0$.

3. Из формул Виета следует, что, если все корни многочлена $P_n(x)$ положительные числа, то знаки его коэффициентов чередуются. При этом число перемен знака в ряду коэффициентов равно числу положительных корней уравнения $P_n(x) = 0$. Обратное, однако, неверно.

i) Докажем, что количество положительных корней многочлена $P_n(x)$ не превышает количества перемен знака в ряду его коэффициентов.

В самом деле, если действительное число α — положительный корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x) = (x - \alpha) \cdot Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$. Пусть $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$. С помощью метода неопределенных коэффициентов устанавливается, что коэффициенты многочленов $Q_{n-1}(x)$ и $P_n(x)$ связаны рекуррентными формулами (см. п. 10.2)

$$\begin{aligned} &b_{n-1} = a_n, \\ &b_{k-1} = b_k\alpha + a_k \quad (k = n-2, n-3, \ldots, 0). \end{aligned} \tag{13.5}$$

Если число α — корень многочлена $P_n(x)$, то остаток от деления $P_n(x)$ на $x - \alpha$ равен нулю,

$$r = b_0\alpha + a_0 = 0. \tag{13.5$_1$}$$

Если коэффициенты b_k и b_{k-1} имеют разные знаки, то из равенства (13.5), записанного в виде $a_k = b_{k-1} - b_k\alpha$ ($\alpha > 0$), следует, что a_k имеет тот же знак, что и b_{k-1}. В самом деле, если $b_k > 0$ и $b_{k-1} < 0$, то $a_k < 0$; а если $b_k < 0$ и $b_{k-1} > 0$, то $a_k > 0$ — в обоих случаях a_k имеет тот же знак, что и b_{k-1}.

В частном $Q_{n-1}(x)$ сгруппируем одночлены с коэффициентами одного знака, не изменяя их порядка. Каждой из полученных групп соответствует группа одночленов с коэффициентами того же знака многочлена $P_n(x)$. В силу равенства (13.5$_1$), свободные члены b_0 и a_0 имеют разные знаки, поэтому количество групп одночленов с коэффициентами одного знака для $P_n(x)$ по крайней мере на 1 больше, чем для $Q_{n-1}(x)$. При этом количество перемен знака в ряду коэффициентов $P_n(x)$ по крайней мере на 1 больше, чем в ряду коэффициентов $Q_{n-1}(x)$.

ii) Следовательно, если α — положительный корень многочлена $P_n(x)$, то при делении на $x - \alpha$ количество перемен знака в ряду коэффициентов уменьшается по крайней мере на 1, а при делении последовательно на $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, ..., $x-\alpha_p$, где α_1, α_2, ..., α_p — положительные корни $P_n(x)$, получим многочлен, количество перемен знака в ряду коэффициентов которого по крайней мере на p меньше числа перемен знака в ряду коэффициентов многочлена $P_n(x)$.

4. Количество перемен знака в ряду коэффициентов многочлена $P_n(x)$ может отличаться от количества его положительных корней только на четное число.

В самом деле, если $a_n > 0$, а число перемен знака в ряду a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 четное, то и $a_0 > 0$. При этом число положительных корней $P_n(x)$ четное. Если же число перемен знака в ряду коэффициентов a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 нечетное, то $a_0 < 0$. При этом число положительных корней $P_n(x)$ будет нечетным. В обоих случаях разность между количеством перемен знака в ряду коэффициентов $P_n(x)$ и количеством его положительных корней — четное число. Теорема Декарта доказана. ◀

Следствие. Рассматривая многочлен $P_n(-x)$, с помощью теоремы Декарта можно найти количество отрицательных корней многочлена $P_n(x)$. При этом, если все коэффициенты многочлена $P_n(x)$ не равны нулю, то переменам знака в ряду коэффициентов многочлена $P_n(-x)$ соответствуют сохранения знака в ряду коэффициентов многочлена $P_n(x)$, и обратно. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Если многочлен не имеет нулевых коэффициентов, то количество его отрицательных корней, взятых с учетом их кратностей, равно количеству сохранений знака в ряду его коэффициентов или меньше его на четное число.

Так, уравнение $P_4(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ имеет корни $\{2; 3; 4; -5\}$, а уравнение $P_4(-x) = x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ имеет корни $\{-2; -3; -4; 5\}$.

Пример 13.8. Применить теорему Декарта к многочлену

$$h_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3.$$

$\triangleright$ Решение. Число перемен знака в ряду коэффициентов $h_5(x)$ равно 3. По теореме Декарта многочлен $h_5(x)$ может иметь 3 или 1 положительный корень.

Многочлен $h_5(x)$ не имеет нулевых коэффициентов, а в ряду его коэффициентов имеется 2 сохранения знака; следовательно, $h_5(x)$ имеет либо 2, либо ни одного отрицательного корня, а поскольку при больших по модулю отрицательных значениях x многочлен $h_5(x) < 0$, $h_5(-1) = 18 > 0$ и $h_5(0) = -3 < 0$, то получаем, что 2 есть точное число отрицательных корней многочлена $h_5(x)$. ◀

КОЛЛОКВИУМ ПО ТЕМЕ: МНОГОЧЛЕНЫ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Общие свойства многочленов

1. Действия над многочленами. Алгоритм деления многочленов с остатком.

2. Теорема Безу. Следствия. Схема Горнера. Простой и кратный корень многочлена.

3. Свойства и график целой рациональной функции.

Теоремы о корнях многочленов

1. Обобщенная теорема Виета. Теорема о целом и рациональном корнях многочлена с целыми коэффицентами.

Основная теорема алгебры и следствия из нее

1. Леммы о неограниченности модуля многочлена и о непрерывности модуля многочлена на множестве комплексных чисел.

2. Различные доказательства основной теоремы алгебры.

3. Следствия о разложении многочлена n-й степени в произведение n линейных сомножителей и о количестве корней многочлена n-й степени.

Многочлены с действительными коэффицентами

1. Леммы о комплексно сопряженных корнях и о делимости многочлена на квадратный трехчлен с действительными коэффицентами.

2. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых сомножителей.

3. Установление верхней и нижней границ действительных корней многочлена.

4. Теорема Декарта о числе корней многочлена с действительными коэффициентами.

5. Формулы корней многочлена третьей степени.

Список литературы

[1] Энциклопедия элементарной математики / Под ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. Кн. 3: Функции и пределы (основы анализа). — М.–Л.: ГТТИ, 1952.

[2] Детская энциклопедия. Т. 2: Числа и фигуры. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1964.

[3] Большой энциклопедический словарь. Математика. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.

[4] Энциклопедия для детей. Т. 11: Математика. — М.: Аванта+, 1994.

[5] *В. Грэнвиль, Н. Лузин.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Ч. 1: Дифференциальное исчисление. — М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.

[6] *А. Г. Курош.* Курс высшей алгебры. — М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.

[7] *П. С. Александров.* Введение в общую теорию множеств и функций. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.

[8] *А. М. Яглом, И. М. Яглом.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении. — М.: ГИТТЛ, 1954. — (Библиотека математического кружка; вып. 5).

[9] *С. Банах.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: ГИФМЛ, 1958.

[10] *А. Я. Хинчин.* О воспитательном эффекте уроков математики // Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 6. 1961. С. 7–28.

[11] *И. С. Соминский.* Элементарная алгебра. Дополнительный курс. — М.: Наука, 1964.

[12] *И. Б. Юдина.* О применении сведений из математической логики к некоторым вопросам школьного курса математики // Математика в школе. № 6. 1965. С. 69–73.

[13] *Э. Беккенбах, Р. Беллман.* Введение в неравенства. — М.: Мир, 1965.

[14] *А. И. Маркушевич.* Краткий курс теории аналитических функций. — 3-е изд. — М.: Наука, 1966.

[15] *Г. М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — 6-е изд. — М.: Наука, 1966.

[16] *С. Г. Крейн, В. Н. Ушакова.* Математический анализ элементарных функций. — М.: Наука, 1966.

[17] Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы / Под ред. М. И. Сканави. — М.: Высшая школа, 1969.

[18] *В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин.* Лекции и задачи по элементарной математике. — М.: Наука, 1971.

[19] *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной. — 3-е изд. — М.: Наука, 1974.

[20] Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9—10 кл.: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1978.

[21] *В. М. Монахов, Э. С. Беляева, Н. Я. Краснер.* Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1978.

[22] Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9—10 кл. / Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1980.

[23] Избранные главы анализа и высшей алгебры: Учеб. пособие / Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, И. Н. Уральцева и др. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.

[24] *В. В. Кузнецов.* Математический анализ: Метод. указания. — М.: Изд-во МГТУ, 1981.

[25] *Л. Б. Горохова, В. В. Кузнецов.* Тригонометрические преобразования и векторы. — М.: Изд-во МГТУ, 1983.

[26] Алгебра и начала анализа в 10—12 кл. вечерней (сменной) школы: Пособие для учителя / И. Г. Вяльцева, А. С. Алексеев, Г. Д. Глейзер, С. М. Саакян. — М.: Просвещение, 1984.

[27] *В. М. Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука, 1986. — (Библиотечка «Квант»; вып. 56).

[28] *Е. С. Канин, Е. М. Канина, М. Д. Чернявский.* Упражнения по началам математического анализа в 9—10 кл. — М.: Просвещение, 1986.

[29] *Ф. Клейн.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1: Арифметика. Алгебра. Анализ: Пер. с нем. / Под ред. В. Г. Болтянского. — 4-е изд. — М.: Наука, 1987.

[30] *Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.* Алгебра и математический анализ: Учеб. пособие для 9 кл. с угл. изуч. курса математики. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1988.

[31] *Л. С. Понтрягин.* Математический анализ для школьников. — М.: Наука, 1988.

[32] *А. Г. Цыпкин.* Справочник по математике для средних учебных заведений. — 4-е изд. — М.: Наука, 1988.

[33] *Л. Д. Кудрявцев.* Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1989.

[34] *В. В. Кузнецов, А. А. Коньков, С. К. Соболев.* Множества и элементы математической логики. — М.: Изд-во МГТУ, 1989.

[35] Конкурсные задачи по математике и физике / Под ред. С. В. Белова. — М.: Изд-во МГТУ, 1989.

[36] Повышение эффективности обучения математике в школе: Кн. для учителя / Сост. Г. Д. Глейзер. — М.: Просвещение, 1989. — (Из опыта работы).

[37] *И. Ф. Шарыгин.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 кл. — М.: Просвещение, 1989.

[38] *С. М. Никольский.* Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1990.

[39] *В. С. Крамор.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. — М.: Просвещение, 1990.

[40] Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. – М.: Наука, 1990.

[41] *А. Г. Мордкович, А. С. Солодовников.* Математический анализ: Учеб. для техникумов. — М.: Высшая школа, 1990.

[42] *И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. — М.: Просвещение, 1991.

[43] *В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик.* Математика: Учеб. пособие для техникумов. — М.: Высшая школа, 1991.

[44] *Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.* Алгебра и математический анализ: Учеб. пособие для 10 кл. с угл. изуч. курса математики. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 1992.

[45] *К. Слойер.* Математические фантазии. Приложения элементарной математики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1993.

[46] *В. В. Кузнецов, А. С. Лыскова.* Многочлены и дробно-рациональные функции: Учебно-метод. пособие. — М.: Изд-во МГТУ, 1995.

[47] *А. Б. Будак, Б. М. Щедрин.* Элементарная математика: Руководство для поступающих в МГУ. — М.: Изд-во УНЦ ДО МГУ, 1996.

[48] *В. М. Тихомиров, В. В. Успенский.* Десять доказательств основной теоремы алгебры // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 1. 1997. С. 50–70.

[49] *Р. Б. Райхмист.* Графики функций: задачи и упражнения. — М. Школа-Пресс, 1997.

[50] *Е. В. Якушева, А. В. Попов, А. Г. Якушев.* Математика: ответы на вопросы. — М.: 1-я Федеративная книготорговая компания, 1997.

[51] *А. Г. Мордкович, А. М. Суходский.* Справочник школьника по математике. 10–11 кл. Алгебра и начала анализа. — М.: Аквариум, 1997.

[52] *Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.* Алгебра и математический анализ: Учеб. пособие для 11 кл. — 6-е изд. — М.: Просвещение, 1998.

[53] Математика для бакалавров технических направлений / Л. В. Васильев, Ю. Д. Максимов, М. Ф. Романов, А. В. Ястребов. Т. 1: Общие разделы. — СПб.: Специальная литература, 1999.

[54] Математика: ответы на вопросы / С. В. Кравцев, Ю. Н. Макаров, Т. П. Лукашенко и др. — М.: Экзамен, 2001.

[55] Математика: Учеб. пособие / Под ред. А. А. Никитина. — М.: Научный мир, 2001.

[56] *А. Б. Будак, Б. М. Щедрин.* Элементарная математика: Руководство для поступающих в вузы. — 3-е изд. — М.: Изд-во УНЦ ДО МГУ, 2001.

[57] *О. С. Игудисман.* Математика на устном экзамене. — М.: Рольф, 2001.

[58] Задачи и упражнения по началам математического анализа: Пособие для учащихся / Под ред. Е. С. Канина. — М.: Московский лицей, 2001.

[59] Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9—10 кл. / Под ред. акад. А. Н. Колмогорова. — 11-е изд. — М.: Просвещение, 2001.

[60] *О. А. Иванов.* Практикум по элементарной математике: алгеброаналитические методы. — М.: МЦНМО, 2001.

[61] *И. Ф. Шарыгин.* Сборник задач по математике с решениями: Учеб. пособие для 11 кл. — М.: Астрель: АСТ, 2001.

[62] *И. Ф. Шарыгин.* Сборник задач по математике с решениями: Учеб. пособие для 10 кл. — М.: Астрель: АСТ, 2001.

[63] Математика: Сборник задач с решениями для поступающих в вузы / Под. ред. В. М. Говорова, Н. В. Мирошина. — М.: Астрель, 2002.

[64] *Т. В. Облакова, Л. А. Тарба.* Основы математического анализа. — М.: Физ.-мат. лицей № 1580 при МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

[65] *Н. М. Седракян, А. М. Авоян.* Неравенства. Методы доказательства: Пер. с арм. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[66] *Р. Курант, Г. Робинс.* Что такое математика?: Элементарный очерк идей и методов: Пер с англ. / Под ред. А. Н. Колмогорова. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004.

[67] Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 11 кл. / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 2004.

[68] *Я. П. Понарин.* Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся. — М.: МЦНМО, 2004.

[69] Материалы физико-математического журнала для школьников и студентов «Квант».

Предметный указатель

Это учебное пособие поможет вам расширить и углубить свои знания по математике

В нем представлены теоретические сведения и упражнения по следующим разделам:

- **введение в теорию множеств**
- **числовые системы**
- **теория пределов**
- **свойства функций**
- **корни многочленов**
- **основная теорема алгебры и ее применения**

Для физико-математического и естественно-научного профилей

ISBN 5-94774-449-X