ХАРЬКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА
КНИГА ТРЕТЬЯ

Г. ФРОБЕНИУС

ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРОВ и ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. К. СУШКЕВИЧА

ОНТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НКТП
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
Харьков 1937

Библиографическое описание этого издания помещено в „Летописи Укр. печати" „Карточном реперт," и других указателях Укр. книжн. Палаты.

5 — 4

Ответствен. редактор *Н. И. Ахиезер*
Литредактор *М. А. Чубарова*
Тех. оформление *О. А. Кадашевич*
Корректор Е. *В. Архангельская*

Типография Государственного научно-технического издательства Украины. Киев, ул. Воровского, 42.

Уполномоч. Главлита № 818. **Зак.** № 682. **Тираж** 2000—$13^1/_2$ **листа**

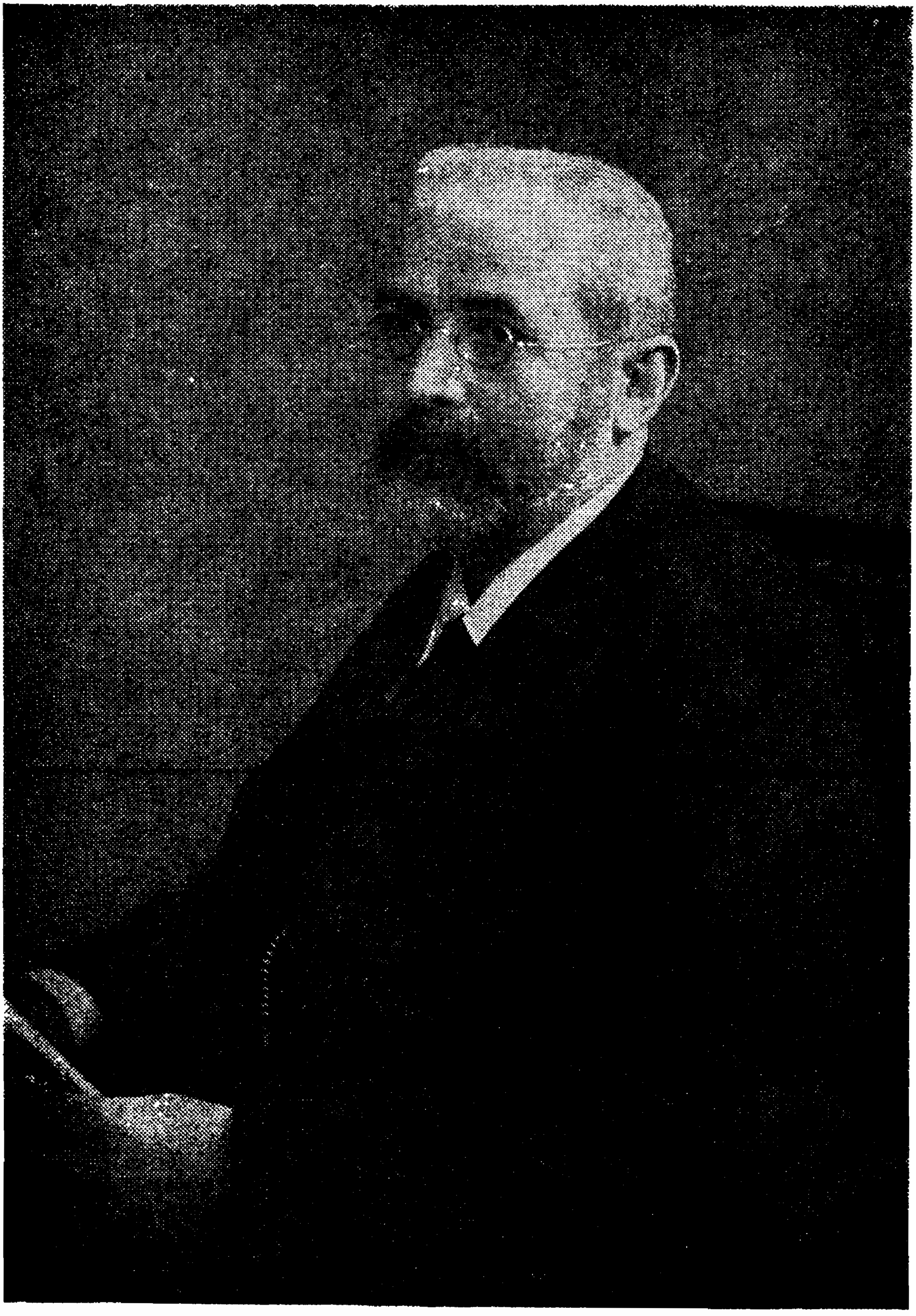
ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник девяти ставших классическими работ Фробениуса по теории характеров и представлений групп представляет собой связное целое, — полное изложение относящихся к 1896 — 1901 годам исследований Фробениуса по названным вопросам, — исследований, являющихся в этих вопросах первоисточником.

Хотя теория характеров групп позже (в 1905 г.) была весьма упрощена И. Шуром, и в распространенных в настоящее время учебниках по теории групп (О. Ю. Шмидта, А. Шпейзера) изложена именно эта упрощенная теория Шура, но первоисточник теории характеров — работы Фробениуса — далеко не утратил своего значения. Теория Фробениуса гораздо глубже и ознакомление с нею весьма ценно для всех, кто интересуется теорией групп. Поэтому издание на русском языке классических работ Фробениуса является вполне своевременным.

Для облегчения чтения издаваемых работ в конце книги дан ряд примечаний, содержащих характеристику каждой из работ и разъяснения наиболее трудных мест; число этих примечаний невелико.

В самом конце книги указана (без претензии на полноту) дальнейшая литература, относящаяся к теории характеров и представлений групп.



ФРОБЕНИУС (1849 — 1918)

ФРОБЕНИУС (1849—1918)

Один из величайших алгебраистов конца XIX и начала XX века Ferdinand Georg Frobenius родился в Берлине, в 1849 г., учился в Берлинском университете, при чем его учителями математики были Kummer, Kronecker и Weierstrass. В 1870 г. он получил степень доктора философии; его докторская диссертация была на тему: „De functionum analyticarum unius variabilis per series infinitas repraesentatione“ (Berlin, 1870). В 1874 г. он начал свою преподавательскую деятельность в качестве профессора в Берлинском университете, а в 1875 г. перешел профессором математики в Цюрихский политехникум. В 1893 г. он вновь возвратился в Берлин, выбранный действительным членом Берлинской академии наук и профессором Берлинского университета, и здесь оставался до самой своей смерти (в 1918 г.).

К первому периоду научной деятельности Фробениуса семидесятые и восьмидесятые годы XIX ст.) относятся его исследования в области теории дифференциальных уравнений и теории эллиптических функций; но уже и в этот период появились некоторые его алгебраические работы: Über lineare Substitutionen und bilineare Formen (Journ. Crelle, Bd. 84), Über Gruppen von vertauschbaren Elementen (вместе со Stickelberger'ом, Journ. Crelle, Bd. 86), Über die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul (Journ. Crelle, Bd. 101), Neuer Beweis des Sylow'schen Satzes (Journ. Crelle, Bd. 100).

С девяностых годов XIX ст. начинается, можно сказать, второй период научной деятельности Фробениуса, когда он исключительно посвятил себя алгебре и смежным с нею областям теории чисел.

Главнейшими его трудами являются труды, относящиеся к теории конечных групп. Кроме девяти работ, помещенных в настоящем сборнике, важнейшие его работы в теории групп следующие:

Über endliche Gruppen.	Sitzungsberg. der Berl. Ak.	1895, S.	163—194.
Über auflösbare Gruppen.	Sitzungsber. der Berl. Ak.	1893, S.	337—345.
Über auflösbare Gruppen II	„ „	1895, S.	1027—1044.
Über auflösbare Gruppen III	„ „	1901, S.	849—857.
Über auflösbare Gruppen IV	„ „	1901, S.	1216—1230.
Über auflösbare Gruppen V	„ „	1901, S.	1324—1329.
Verallgemeinerung des Sylowschen Satzes	„ „	1895, S.	981—993.

Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, 1903, S. 987—991.
Über die Kompositionsreihe einer Gruppe, 1916, S. 542—547,
и др. (см. в конце литературу по теории характеров).

Всеми этими своими работами Фробениус, можно сказать, создал современную теорию абстрактных конечных групп. Но этим не исчерпываются все его заслуги в алгебре: он является одним из основоположников теории форм и матриц, у него есть работы и в области чисел Бернулли, и по теореме Ферма, и по гиперкомплексным числам.

Общее количество работ Фробениуса — около сотни; он продолжал неутомимо работать почти до самой своей смерти.

Еще несколько слов о Фробениусе, как о преподавателе. Мне посчастливилось слушать его лекции в Берлинском университете в период 1907 — 1911 г.; в то время он читал 5 курсов (последовательно, по одному курсу в семестр): аналитическую геометрию, алгебру (I часть), алгебру (II часть — теория групп и теория Галуа), теорию детерминантов, теорию чисел; кроме того, я слушал его специальные доклады в семинаре, — по числам Бернулли, по теории матриц. Слушать его было довольно трудно, ибо читал он очень быстро, нисколько не стесняясь знаниями слушавших его студентов. Поэтому для начинающих он был совершенно неподходящ. Но подготовленному слушать его было большое удовольствие. Давая много фактического материала, он в то же время умел останавливаться на принципиальных вещах, выяснять их важность, давать общее представление о предмете в целом; в этом он был большой мастер, и лекции его представляли большую ценность. При этом он обладал большой скромностью, никогда не выдавая своим слушателям того, что многое из излагаемого им принадлежит ему же самому.

А. К. Сушкевич.

О ПЕРЕМЕСТИМЫХ МАТРИЦАХ [1]

(Über vertauschbare Matrizen. Sitzungsber. der Berliner Akademie, 1896, S. 601—614)

В 1884 году Weierstrass опубликовал в Göttinger Nachrichten работу *„Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen"* („К теории образованных из n главных единиц комплексных чисел"), результаты которой он уже в 1861 году изложил в своих лекциях; в 1885 году Dedekind опубликовал там же под тем же названием относящиеся к этому предмету свои собственные исследования, о которых он частично сообщил уже в 1871 году во втором издании лекций Dirichlet по теории чисел. Если откинуть философский облик этих исследований, как специально указывает и сам Dedekind (стр. 157, (90)), их краеугольной точкой является одна алгебраическая теорема, содержащая в себе все остальные результаты. Но эта теорема верна и в более широком объеме, т. е. при меньших условиях чем те, при которых она доказана в упомянутых работах; в чисто алгебраической форме ее можно формулировать так:

I. *Если* $a_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n;\ \gamma = 1, 2, \ldots m)$ *любые* mn^2 *величин, удовлетворяющих условиям*

$$\sum_\lambda a_{\alpha\lambda\gamma}\, a_{\lambda\beta\delta} = \sum_\lambda a_{\alpha\lambda\delta}\, a_{\lambda\beta\gamma},$$

и если положить

$$a_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}\, x_\gamma\,,$$

то детерминант n-ой степени [2] $|a_{\alpha\beta}|$ *есть произведение n линейных функций от m независимых переменных* $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Эту теорему можно еще немного обобщить. Уже Study в своей работе *Über Systeme von complexen Zahlen* („О системах комплексных чисел"), Göttinger Nachrichten, 1889, указал на то, что многие из выведенных в связи с этим результатов только своей формулировкой отличаются от известных теорем теории линейных преобразований. Поэтому я буду здесь пользоваться символическим обозначением для композиции матриц (форм), которое я ввел в моей работе (в дальнейшем цитируемой через L) *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* („О линейных подстановках в билинейных формах“), Crelle's Journal, Bd. 84. При помощи этого обозначения указанную теорему можно формулировать так:

II. *Если* $f(x, y, z, \ldots)$ *произвольная функция* m *переменных* $x, y, z, \ldots$, *а* $A, B, C, \ldots$ m *форм*[3]), *из которых каждые две переместимы, и* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *(соот.* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ $c_1, c_2, c_3, \ldots$*) корни характеристического уравнения формы* A *(соотв.* $B, C, \ldots$*), то эти корни можно, и при этом независимо от выбора* f, *— так сопоставить друг с другом, что детерминант формы* $f(A, B, C, \ldots)$ *будет равен произведению*

$$f(a_1, b_1, c_1, \ldots) f(a_2, b_2, c_2, \ldots) f(a_3, b_3, c_3, \ldots) \ldots$$

Если применить эту теорему к функции $r - f(x, y, z, \ldots)$, где r неопределенный коэффициент, то убедимся в том, что она тождественна со следующей, — по внешнему виду более общей теоремой:

III. *Величины* $f(a_1, b_1, c_1, \ldots)$, $f(a_2, b_2, c_2, \ldots)$, $f(a_3, b_3, c_3, \ldots), \ldots$ — *корни характеристического уравнения формы* $f(A, B, C, \ldots)$

Эта теорема содержит в себе средство для определения этого сопоставления корней, — одного и того же для всякой функции f. Именно, если $x, y, z, \ldots$ независимые переменные (неопределенные коэффициенты) и если применить указанную теорему к форме $Ax + By + Cz + \ldots$, то найдем, что

$$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots,\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + \ldots,\ \ldots$$

— корни ее характеристического уравнения, чем и определяется искомое сопоставление. Эта теорема является обобщением доказанной в *L.* § 3, III теоремы:

IV. *Если* $r_1, r_2, \ldots r_n$ — *корни характеристического уравнения формы* A, *то* $f(r_1), f(r_2), \ldots f(r_n)$ *корни характеристического уравнения формы* $f(A)$.

Если считать известной эту теорему, которую легко доказать, то, чтобы прийти к общей теореме III, достаточно доказать еще только следующий частный ее случай:

V. *Если* A *и* B *две переместимые друг с другом формы, а* x *и* y — *две переменные, то корни характеристического уравнения формы* $Ax + By$ *целые линейные функции от* x *и* y.

Ибо, если считать эту теорему доказанной, то детерминант формы $Er + Ax + By$ будет равен $(r + a_1x + b_1y)$ $(r + a_2x + b_2y) \ldots$ Положив $x = 1$, $y = 0$, увидим, что $a_1, a_2, \ldots$ корни характеристического уравнения A, или, как я сокращенно буду говорить, корни A, и подобно же, $b_1, b_2, \ldots$ имеют аналогичное значение для B. Если теперь форма C переместима с A и B, то C переместима также и с $Ax + By$. Поэтому корни $a_1x + b_1y$, $a_2x + b_2y, \ldots$ формы $Ax + By$ можно так сопоставить с корнями $c_1, c_2, \ldots$ формы C, что корни формы $(Ax + By) + Cz$ будут равны

$$(a_1x + b_1y) + c_1z,\ (a_2x + b_2y) + c_2z, \ldots$$

Подобно же убеждаемся в том, что аналогичная теорема правильна и для системы любого числа форм, из которых каждые две переместимы друг с другом. Но по теореме L. § 1, II система сохраняет это свойство, если к ее формам присоединить любые функции от $A, B, C,\ldots$ Если присоединить сначала A^2 и если $h_1, h_2,\ldots$ — корни A^2, подходящим образом расположенные, то

$$a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + \ldots + h_\nu u \qquad (\nu = 1, 2,\ldots n)$$

корни $Ax + By + Cz + \ldots + A^2u$. Если положить $y = z = \ldots = 0$, то $a_\nu x + h_\nu u$ корни $Ax + A^2u$, а так как они по теореме IV равны $a_\nu x + a_\nu^2 u$, то должно быть $h_\nu = a_\nu^2$. Подобно же, корни формы $Ax + By + Cz + \ldots + A^2u + B^2v + ABw$ равны $a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + \ldots + a_\nu^2 u + b_\nu^2 v + h_\nu w$, где $h_1, h_2,\ldots h_n$ корни формы $AB = BA$ в подходящем расположении. С другой стороны, корни формы $pA + qB$ равны $pa_\nu + qb_\nu$, и поэтому корни формы $Ax + By + Cz + \ldots + (pA + qB)^2$ равны $a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + \ldots + (pa_\nu + qb_\nu)^2$. Сравнивая оба эти результата, найдем, что $h_\nu = a_\nu b_\nu$. Таким образом, если из разложения детерминанта формы $Ax + By$ на линейные множители найдем, что корни $a_1, a_2,\ldots a_n$ формы A соответствуют корням $b_1, b_2,\ldots b_n$ формы B в этом расположении, то $a_1b_1, a_2b_2,\ldots a_nb_n$ — корни AB в соответствующем расположении (ср. L. § 7, XII). Поэтому корни $(AB)C$, расположенные соответствующим образом, равны

$$(a_1b_1)c_1,\ (a_2b_2)c_2,\ldots (a_nb_n)c_n.$$

Так получаем теорему III для произведения любого числа форм и, далее, для любого линейного соединения таких произведений, т. е. для любой функции от $A, B, C,\ldots$

После этих простых замечаний нам предстоит, таким образом, еще заняться только доказательством теоремы V. При этом я буду предполагать известным возможно меньше из того, что составляет содержание работы L., и воспользуюсь случаем доказать здесь более простым путем некоторые из теорем, которые я там получил при помощи бесконечных рядов.

Приведенные выше теоремы о переместимых формах были мне известны уже в то время, когда я писал работу L., что можно видеть из некоторых данных там указаний. Часть моих результатов о переместимых формах я изложил в L. § 7, в теоремах XII — XV. Эти теоремы доказаны Voss'ом (*Über die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen*, Sitzungsber. d. math.-phys. Classe der Akad. zu München, Bd. XIX, S. 283. „О билинейных формах, переместимых с данной билинейной формой") при помощи нормальной формы Weierstrass'а. Если я до сих пор не возвратился к этим результатам, то причина этому следующая: если формы $A, B, C\ldots$ — все функции одной и той же формы R, то каждые две из них переместимы. Для этого случая все вышеуказанные теоремы получаются из теоремы IV. Следовательно эти теоремы были бы тривиальными, если бы была верна теорема: „Если каждые две формы $A, B, C, \ldots$ переместимы, то все они могут быть представлены, как функции одной и той же формы R“. Эта теорема была бы аналогом известной Абелевой теоремы из теории алгебраических уравнений [4]. Но в то время, как в алгебраической теореме R может быть выражена, как функция от $A, B, C, \ldots$,—здесь это не имеет места, как показывает простой пример. Ибо, если

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \qquad B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

то $A^2 = B^2 = AB = BA = 0$, т. е. каждая функция от A и B имеет форму $F = aA + bB + cE$, а каждая функция от F—форму $pE + qF$. [5]

Но верна ли или нет эта теорема в теории форм без указанного добавления, мне до сих пор еще не удалось решить. В связи с этим стоит другой, до сих пор еще не решенный, вопрос в теории переместимых матриц,—именно, о строении системы m линейно независимых матриц (степени n), из которых каждые две переместимы, и о наибольшем значении, которое может иметь m.

§ 1.

Если детерминант $a = |A|$ формы A отличен от нуля, то существует **о б р а т н а я** форма A^{-1}, однозначно определенная каждым из обоих условий

(1) $$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Если умножить форму A^{-1} на детерминант a, то aA^{-1} называется *взаимной* (adjungiert) формой, которую мы обозначим через $\bar{A}$. Она составлена из элементов $b_{\alpha\beta}$, где $b_{\alpha\beta}$ в детерминанте $|A|$ есть минор, соответствующий элементу $a_{\beta\alpha}$, т. е. *целая* функция элементов из A, которую можно составить и при $a = 0$. Форма $\bar{A}$ удовлетворяет уравнениям:

(2) $$A\bar{A} = \bar{A}A = aE.$$

Детерминант

(3) $$|rE - A| = \varphi(r)$$

называется характеристической функцией, а уравнение $\varphi(r) = 0$ характеристическим уравнением для A. Взаимная форма для $rE - A$ есть форма F, элементы которой — целые функции $(n-1)$-ой степени от r, которую поэтому обозначим через $F(r)$. В таком случае

(4) $$(rE - A)F(r) = F(r)(rE - A),$$

и

(5) $$(rE - A)F(r) = \varphi(r)E.$$

Разложив

$$F(r)=F_0+F_1r+F_2r^2+\dots$$

по степеням r, получим из (4), что каждая из форм $F_0, F_1 F_2, \dots$ переместима с A. Если

$$\varphi(r)=a_0+a_1r+a_2r^2+\dots+a_nr^n,$$

то из (5) получаем уравнения:

$$\begin{aligned}
-AF_0 \qquad\qquad &= a_0E,\\
-AF_1 \quad +F_0 \quad &= a_1E,\\
-AF_2 \quad +F_1 \quad &= a_2E,\\
\dots\dots\dots\dots&\dots\\
-AF_{n-1}+F_{n-2} &= a_{n-1}E,\\
F_{n-1} &= a_nE.
\end{aligned}$$

Если B другая форма, то помножим эти уравнения справа на B^0, B^1, ... B^n и сложим их. Положив

$$F(B)=F_0+F_1B+\dots+F_{n-1}B^{n-1},$$

получим

(6) $$-AF(B)+F(B)B=\varphi(B).$$

Принимая во внимание особую осторожность, которую следует соблюдать относительно положения B при образовании функции $F(B)$, этот результат можно с успехом применять только в том случае, если B переместима с каждой из форм F_0, F_1 F_2, ... В таком случае

(7) $$(B-A)F(B)=\varphi(B),$$

т. е. из уравнения (5) получается правильное уравнение при замене неопределенной величины r какой-нибудь формой B, переместимой с A и с $F(r)$,— принцип, который я широко применял в работе L. Положив $B=A$, получим уравнение

(8) $$\varphi(A)=0.$$

Эта основная теорема теории форм найдена Cayley и опубликована в первый раз, как я полагаю, в *A Memoir on the Theory of Matrices* („Мемуар по теории матриц"), Phil. Trans. vol. 148, но без общего доказательства. В приведенном выше виде она доказана Pasch'ем; *Über bilineare Formen und deren geometrische Anwendung*. Math. Ann., Bd. 38, S. 48 („О билинейных формах и их геометрическом приложении"). Этим же путем можно прийти и ко второй основной теореме:

VI. *Если $\vartheta(r)$ общий наибольший делитель всех миноров $(n-1)$-ой степени формы $rE-A$, и $\dfrac{\varphi(r)}{\vartheta(r)}=\psi(r)$, то*

(9) $$\psi(A) = 0$$

уравнение наинизшей степени, которому удовлетворяет форма A, *и если* $\chi(A) = 0$ *какое-нибудь другое уравнение, которому удовлетворяет* A, *то* $\chi(r)$ *делится на* $\psi(r)$.

Уравнение

$$\frac{\varphi(r) - \varphi(s)}{r - s} = F(r, s) = F(s, r)$$

определяет *целую* функцию F обеих переменных r и s.

Из уравнения

$$\varphi(r) - \varphi(s) = (r - s) F(s, r)$$

следует

$$\varphi(r) E - \varphi(A) = (rE - A) F(A, r),$$

и, следовательно, по (8)

(10) $$(rE - A) F(A, r) = \varphi(r) E$$

и

(11) $$(rE - A)^{-1} = \frac{F(A, r)}{\varphi(r)}.$$

Взаимная с $rE - A$ форма поэтому равна $F(A, r)$; она — целая функция от A, элементы которой целые функции от r. Следовательно, и F_0, F_1, $F_2, \ldots$ целые функции от A, и для того, чтобы B было переместимым с каждой из этих форм, достаточно, чтобы B было переместимо с A. Таким образом, при этом условии имеет место уравнение

(7*) $$(B - A) F(A, B) = \varphi(B).$$

Элементы формы $F(A, r)$ — миноры $(n-1)$-ой степени для $rE - A$, т. е. все делятся на $\vartheta(r)$. Разложив детерминант (3) по элементам какой-нибудь строки, убедимся, что и $\varphi(r)$ делится на $\vartheta(r)$. Поэтому элементы формы

$$\frac{F(A, r)}{\vartheta(r)} = G(A, r),$$

являющиеся целой фунцией от A, будут *целыми* функциями от r, и по (10):

$$(rE - A) G(A, r) = \psi(r) E.$$

По изложенному выше принципу мы получим отсюда правильное уравнение, заменив r какой-нибудь переместимой с A, формой B. При $B = A$ получим уравнение (9).

С другой стороны, пусть $\chi(r)$ какая-нибудь целая функция, от r, для которой $\chi(A) = 0$. Если положить

$$\frac{\chi(r) - \chi(s)}{r - s} = H(r, s) = H(s, r) \;,$$

$$\chi(r)E-\chi(A)=(rE-A)H(A,\ r).$$

т. е.

$$(rE-A)H(A,\ r)=\chi(r)E$$

и, следовательно,

$$\chi(r)G(A,\ r)=\psi(r)H(A,\ r).$$

Форма $G(A,\ r)$ состоит из n^2 элементов $g_{\alpha\beta}(r)$, являющихся целыми функциями от r и, по условию, не имеющих общих делителей. n^2 элементов $h_{\alpha\beta}(r)$ формы $H(A,\ r)$ тоже целые функции от r. Поэтому из n^2 уравнений

$$\chi(r)g_{\alpha\beta}(r)=\psi(r)h_{\alpha\beta}(r),$$

символическим объединением которых является предыдущее уравнение, следует, что $\chi(r)$ делится на $\psi(r)$. Следовательно, $\psi(A)=0$ уравнение наинизшей степени, которому удовлетворяет A, и всякое другое такое уравнение имеет вид $\psi(A)g(A)=0$, где $g(r)$ целая функция от r. В частности, $\varphi(r)$ делится на $\psi(r)$. Но продифференцировав детерминат (3) по r, найдем, что каждый корень уравнения $\varphi(r)=0$ удовлетворяет также уравнению $\psi(r)=0$, т. е., что степень $\psi(r)$ делится на $\varphi(r)$.[6)]

Теорему VI я высказал в первый раз в *L.* § 3 и доказал при помощи бесконечного ряда, в который раскладывается $(rE-A)^{-1}$. Но и на только что изложенное доказательство я указывал в *L.* § 3 и в особенности в § 13. На эту важную теорему до сих пор обращали мало внимания. Частный ее случай, когда $\psi(r)$ делитель r^m-1, на который я также обратил особенное внимание в *L.* § 3, VIII, доказал Lipschitz в работе *Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen,* Acta Math. Bd. X („Доказательство одной теоремы из теории подстановок“) рассуждениями существенно такими же, как и приведенные выше, в которых, следовательно, не применяется разложение целой рациональной функции на линейные множители. Kronecker также подробно рассмотрел эту теорему в работе *Über die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst* („О композиции систем n^2 величин с самой собой“) Sitzungsber. 1890. Но эти авторы не заметили, что я уже в 1877 году доказал эту теорему, как частный случай общей теоремы VI. Английским и американским алгебраистам, которые так много занимались теорией матриц, моя работа, за немногими исключениями (Young, Taber), осталась также неизвестной, равно, как и большая работа *Laguerre*'а *Sur le calcul des systèmes linéaires* („Об исчислении линейных систем“), Journ. de l'école polyt., tome 25, cah. 42, p. 215. Другое, впрочем, менее простое доказательство теоремы VI дает E. Weyr: *Zur Theorie der bilinearen Formen* („К теории билинейных форм“), Monatshefte für Math. und Physik, Bd. I, S. 187.

§ 2.

Если форма A удовлетворяет уравнению $A^k=0$, то $\psi(r)$ делитель функции r^k, т. е. $\psi(r)=r^m$—степень r и, следовательно,

$\varphi(r) = r^n$. Обратно, если все корни характеристического уравнения формы A равны нулю, то $A^n = 0$. Для таких форм верна следующая теорема, частный случай теоремы V, доказательство которой я повторяю здесь по L. § 3, VII:

VII. *Если форма B переместима с формой A, некоторая степень которой равна нулю, то детерминант формы $A+B$ равен детерминанту формы B.*

Из уравнения $r^n = \varphi(r) = |rE - A|$ следует при $r = -1$ $|A+E| = 1$. Если s неопределенная величина, то $(B+sE)^{-1}$ тоже переместимо с A. Положив $(B+sE)^{-1} A = C$, получим вследствие этой переместимости $C^n = (B+sE)^{-n} A^n = 0$, и, следовательно, $|C+E| = 1$. Но $(B+sE)(C+E) = A+B+sE$, т. е. также $|B+sE| \cdot |C+E| = |A+B+sE|$, и, следовательно, при $s=0$ $|B| = |A+B|$.

Существенный успех, которого достиг Weierstrass в теории форм, по сравнению с Cauchy и Jacobi, состоит в том, что он показал, как можно разложить дальше формы, степень которых обращается в нуль, или,— в более общем виде,— характеристическое уравнение которых имеет только один корень,— за исключением случая, когда низшая, обращающаяся в нуль степень есть n-ая. Теорема VII дает возможность провести нижеследующие исследования без применения этого разложения, т. е. без использования теории элементарных делителей.

§ 3.

Пусть $a, b, c, \ldots$, различные значения, для которых характеристическая функция

$$\varphi(r) = (r-a)^\alpha (r-b)^\beta (r-c)^\gamma \ldots$$

формы A обращается в нуль. В таком случае, по обобщенной интерполяционной формуле Lagrange'а, существует вполне определенная целая функция $(n-1)$-ой степени $f(r)$, делящаяся на $(r-b)^\beta (r-c)^\gamma \ldots$, для которой $f(r)-1$ делится на $(r-a)^\alpha$. Если таким же образом корням $b, c, \ldots$ соответствуют функции $g(r), h(r), \ldots$, то

$$f(r) + g(r) + h(r) + \ldots = 1, \tag{1}$$

ибо разность между левой и правой частью — целая функция $(n-1)$-ой степени, делящаяся на $(r-a)^\alpha$, $(r-b)^\beta$, $(r-c)^\gamma, \ldots$, т. е. на целую функцию $\varphi(r)$ n-ой степени.

Функция $f(r)$ может быть определена также как коэффициент при $(s-a)^{-1}$ в разложении

$$\frac{\varphi(r)-\varphi(s)}{r-s} \frac{1}{\varphi(s)} \tag{2}$$

по возрастающим степеням $s-a$. Именно в разложении этой функции по убывающим степеням s коэффициент при s^{-1} равен 1. Так как, далее, эта функция обращается в бесконечность только для значений $s=a, b, c, \ldots$, но не при $s=r$, то, по теореме о вычетах, получается уравнение (1). Так как выражение (2) целая функция от r, то и его вычеты $f(r), g(r), h(r), \ldots$ целые функции от r степени не выше $(n-1)$-ой. Разложение второго члена разности

$$\frac{\varphi(r)}{(r-s)\,\varphi(s)}-\frac{1}{r-s}$$

по возрастающим степеням $s-a$ не содержит отрицательных степеней $s-a$, а разложение первого члена есть

$$\varphi(r)\left(\frac{1}{r-a}+\frac{s-a}{(r-a)^2}+\frac{(s-a)^2}{(r-a)^3}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(\frac{a_0}{(s-a)^\alpha}+\frac{a_1}{(s-a)^{\alpha-1}}+\ldots\right),$$

если последний ряд есть разложение $\dfrac{1}{\varphi(s)}$. Следовательно,

$$f(r)=\frac{\varphi(r)\,\vartheta(r)}{(r-a)^\alpha},$$

где $\vartheta(r)$ целая функция $(\alpha-1)$-ой степени от r. Таким образом, $f(r)$ делится на $\varphi(r)(r-a)^{-\alpha}$, подобно же $g(r)$ делится на $\varphi(r)(r-b)^{-\beta}, \ldots$; а так как каждая из функций $g(r)$, $h(r), \ldots$ делится на $(r-a)^\alpha$, то по (1) и $f(r)-1$ делится на $(r-a)^\alpha$.

Теперь я, изменяя прежние обозначения, обозначу через a_1, $a_2, \ldots a_n$ n корней $\varphi(r)$, через a_1, $a_2, \ldots a_m$ — различные из этих корней, а через $\varphi_1(r), \varphi_2(r), \ldots \varphi_m(r)$ — соответствующие им целые функции $(n-1)$-ой степени. В таком случае, по уравнению (1):

(3) $$\sum \varphi_\lambda(r)=1$$

и, следовательно,

(4) $$\sum \varphi_\lambda(A)=E.$$

Далее, $\varphi_\lambda(r)\big(\varphi_\lambda(r)-1\big)$ делится на $\varphi(r)$, а при различных $\varkappa$ и λ и $\varphi_\varkappa(r)\,\varphi_\lambda(r)$ делится на $\varphi(r)$. Следовательно[7],

(5) $$(\varphi_\lambda(A))^2=\varphi_\lambda(A), \quad \varphi_\varkappa(A)\,\varphi_\lambda(A)=0.$$

Если, наконец,

(6) $$\sum a_\lambda\varphi_\lambda(A)-A=A_0,$$

то по теореме IV корни характеристического уравнения A_0 — все равны нулю[8] и поэтому $A_0^n=0$. Выраженные уравнениями (4) и (5) свойства форм $\varphi_\lambda(A)$ рассмотрел также Study: ***Recurrirende Reihen und bilineare Formen*** („Возвратные ряды и билинейные формы"), Monatshefte für Math. und Physik, Bd. II. Другим путем я вывел их в моей работе *Über die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form* („О косом инварианте билинейной или квадратичной формы"), Crelle's Journ. Bd. 86, § 6.

Если B переместимая с A форма, а $x_1, x_2, \ldots x_m$ и y — переменные, то

$$(x_1 E + y\,\varphi_1(A)\,B)\,(x_2 E + y\,\varphi_2(A)\,B)\ldots(x_m E + y\,\varphi_m(A)\,B) =$$
$$= x_1 x_2 \ldots x_m \left(E + \frac{y\,\varphi_1(A)\,B}{x_1} + \frac{y\,\varphi_2(A)\,B}{x_2} + \cdots + \frac{y\,\varphi_m(A)\,B}{x_m}\right).$$

Все остальные члены разложения этого произведения обращаются в нуль, напр., $\varphi_1(A)\,\varphi_2(A)\,B = \varphi_1(A)\,\varphi_2(A)\,B^2 = 0$.

Помножив форму в правой части еще на $\sum x_\lambda \varphi_\lambda(A)$, получим по (5):

$$\sum x_\lambda \varphi_\lambda(A) + y\,(\varphi_1(A)\,B + \varphi_2(A)\,B + \ldots + \varphi_m(A)\,B).$$

Следовательно, по (4):

$$\begin{aligned}&(\textstyle\sum x_\lambda \varphi_\lambda(A)) \prod (x_\lambda E + y\,\varphi_\lambda(A)\,B) = \\ &= (yB + \textstyle\sum x_\lambda \varphi_\lambda(A)) \prod (x_\lambda),\end{aligned} \tag{7}$$

а поэтому и детерминанты этих обеих форм равны друг другу. Детерминант формы $x_\lambda E + y\,\varphi_\lambda(A)\,B$ есть (сделанная однородной) характеристическая функция для — $\varphi_\lambda(A)\,B$, т. е. целая однородная функция n-ой степени от x_λ и y, с коэффициентом при x_λ^n, равным 1. Детерминант формы $\sum x_\lambda \varphi_\lambda(A)$ по теореме IV есть произведение n множителей $\sum\limits_\lambda x_\lambda \varphi_\lambda(a_\varkappa)$. Он не обращается тождественно в нуль, так как по (4) при $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1$ имеет значение 1. Следовательно, и детерминант формы $yB + \sum x_\lambda \varphi_\lambda(A)$ отличен от нуля и есть произведение n линейных функций переменных $x_1, x_2, \ldots x_m$ и y. Положив $x_\lambda = xa_\lambda - r$, получим по (4) и (6):

$$\sum x_\lambda \varphi_\lambda(A) = x \sum a_\lambda \varphi_\lambda(A) - rE = xA - rE + xA_0.$$

Но так как A_0 переместимо с $xA + yB - rE$, и $A_0^n = 0$, то по § 2 детерминант $xA + yB - rE + xA_0$ равен детерминанту $xA + yB - rE$. Следовательно, этот детерминант — произведение n линейных функций от x, y и r. Этим доказана теорема V, из которой уже следует более общая теорема III.

§ 4.

Пусть $A_1, A_2, \ldots A_m$ m форм, из которых каждые две переместимы. Если при $\gamma = 1, 2, \ldots m$

$$a_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2, \ldots n)$$

элементы A_γ, то из $A_\gamma A_\delta = A_\delta A_\gamma$ следует

$$\sum_\lambda a_{\alpha\lambda\gamma} a_{\lambda\beta\delta} = \sum_\lambda a_{\alpha\lambda\delta} a_{\lambda\beta\gamma}. \tag{1}$$

В таком случае при переменных $x_1, x_2 \ldots x_m$ и r

$$\left| \sum_\gamma A_\gamma x_\gamma - rE \right| = \prod_\varkappa (r_1^{(\varkappa)} x_1 + \ldots + r_m^{(\varkappa)} x_m - r), \tag{2}$$

где $r_\gamma^{(1)}, r_\gamma^{(2)}, \ldots r_\gamma^{(n)}$ корни характеристического уравнения для A_γ. Если

$$A = \sum_\gamma A_\gamma x_\gamma, \quad a_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma,$$

то

$$r^{(\varkappa)} = \sum_\gamma r_\gamma^{(\varkappa)} x_\gamma \tag{3}$$

корни A. Формула (2) сопоставляет определенным образом корни форм $A_1, A_2, \ldots A_m$ и A; чтобы получить для этого соответствия удобное выражение, я обозначаю через $r_\gamma^{(\varkappa)}$ (соотв. $r^{(\varkappa)}$) $\varkappa$-й корень A_γ (соответств. A). В таком случае, если $f(u_1, u_2, \ldots u_m)$ функция от $u_1, u_2, \ldots u_m$, то $f(r_1^{(\varkappa)}, r_2^{(\varkappa)}, \ldots r_m^{(\varkappa)})$ $\varkappa$-й корень формы $f(A_1, A_2, \ldots A_m)$.

Сравнивая коэффициенты, получим из (2)

$$\sum_\varkappa r^{(\varkappa)} = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha, \lambda} a_{\alpha\alpha\lambda} x_\lambda$$

и

$$\sum_{\varkappa,\lambda}' r^{(\varkappa)} r^{(\lambda)} = \sum_{\alpha, \beta}' (a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta} a_{\beta\alpha}) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}' \left[\left(\sum_\varkappa a_{\alpha\alpha\varkappa} x_\varkappa \right) \left(\sum_\lambda a_{\beta\beta\lambda} x_\lambda \right) - \left(\sum_\varkappa a_{\alpha\beta\varkappa} x_\varkappa \right) \left(\sum_\lambda a_{\beta\alpha\lambda} x_\lambda \right) \right]$$

и, следовательно,

$$\sum_\varkappa (r^{(\varkappa)})^2 = \sum_{\alpha, \beta, \varkappa, \lambda} a_{\alpha\beta\varkappa} a_{\beta\alpha\lambda} x_\varkappa x_\lambda. \tag{4}$$

Если положить, таким образом,

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta\varkappa} a_{\beta\alpha\lambda} = c_{\varkappa\lambda} = c_{\lambda\varkappa}, \tag{5}$$

то

$$\sum_\varkappa (r^{(\varkappa)})^2 = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \tag{6}$$

следовательно,

$$c_{\alpha\beta} = \sum_\varkappa r_\alpha^{(\varkappa)} r_\beta^{(\varkappa)}. \tag{7}$$

Теперь к поставленным до сих пор условиям я присоединяю дальнейшее предположение, что $m=n$, и что величины

$$a_{\alpha\beta\gamma}=a_{\alpha\gamma\beta} \tag{8}$$

не изменяются от перестановки двух последних индексов. В таком случае элементы $g_{\rho\sigma}$ формы $A_\beta A_\gamma = A_\gamma A_\beta$ равны:

$$g_{\rho\sigma}=\sum_\alpha a_{\rho\alpha\beta}\, a_{\alpha\sigma\gamma}=\sum_\alpha a_{\rho\alpha\gamma}\, a_{\alpha\sigma\beta}\,.$$

Так как первое выражение не изменяется от перестановки σ и γ, то это же верно и для второго выражения. Следовательно, также

$$g_{\rho\sigma}=\sum_\alpha{}' a_{\rho\alpha\sigma}\, a_{\alpha\gamma\beta}=\sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}\, a_{\rho\sigma\alpha},$$

т. е.

$$A_\beta A_\gamma = A_\gamma A_\beta = \sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha\,. \tag{9}$$

По теореме III $\varkappa$-й корень формы $\sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha$ равен $\sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha^{(\varkappa)}$, а $\varkappa$-й корень $A_\beta A_\gamma$ равен $r_\beta^{(\varkappa)} r_\gamma^{(\varkappa)}$; таким образом, из (9) следует

$$r_\beta^{(\varkappa)}\, r_\gamma^{(\varkappa)}=\sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}\, r_\alpha^{(\varkappa)}. \tag{10}$$

Уравнения

$$r_\beta\, r_\gamma = \sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}\, r_\alpha \tag{11}$$

с неизвестными $r_1, r_2, \ldots r_n$ имеют, таким образом, n систем решений

$$r_1=r_1^{(\varkappa)},\quad r_2=r_2^{(\varkappa)},\quad \ldots\quad r_n=r_n^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa=1,\ 2,\ \ldots\ n) \tag{12}$$

и больше решений не имеют, за исключением $r_1=r_2=\ldots=r_n=0$, если оно уже не содержится в (12). Ибо, положив $\sum r_\gamma x_\gamma = r$, получим

$$r_\beta\, r = \sum_\alpha a_{\alpha\beta}\, r_\alpha\,. \tag{13}$$

Следовательно, детерминант

$$|\,A-rE\,| = \prod_\varkappa \left(r_1^{(\varkappa)} x_1+\ldots+r_n^{(\varkappa)} x_n - r\right)$$

равен нулю, т. е. $r=\sum r_\gamma x_\gamma$ есть одна из n функций $\sum_\gamma r_\gamma^{(\varkappa)} x_\gamma$, или имеет место одно из n уравнений (12). Таким образом, получается следующая теорема, отличающаяся от всех, полученных до сих пор в этой области результатов, тем, что в ее условиях не встречается никакого неравенства.

VIII. *Если n^3 величин $a_{\alpha\beta\gamma}$ удовлетворяют уравнениям:*

$$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}, \quad \sum_{\lambda} a_{\alpha\lambda\gamma}\, a_{\lambda\beta\delta} = \sum_{\lambda} a_{\alpha\lambda\delta}\, a_{\lambda\beta\gamma},$$

то коэффициенты линейных множителей, на которые раскладывается детерминант

$$\left| \sum_{\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\, x_\gamma - r e_{\alpha\beta} \right| = \prod_{\varkappa} (r_1^{(\varkappa)} x_1 + \ldots + r_n^{(\varkappa)} x_n - r),$$

удовлетворяют уравнениям

$$r_\beta r_\gamma = \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta\gamma}\, \gamma_\alpha$$

и являются единственными их решениями.

Из формулы (7) следует далее

$$(14) \qquad |c_{\alpha\beta}| = |r_\alpha^{(\varkappa)}|^2,$$

а отсюда получаем замечательную своей точностью теорему:

IX. *Если n^3 величин $a_{\alpha\beta\gamma}$ удовлетворяют уравнениям:*

$$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}, \qquad \sum_{\lambda} a_{\alpha\lambda\gamma}\, a_{\lambda\beta\delta} = \sum_{\lambda} a_{\alpha\lambda\delta}\, a_{\lambda\beta\gamma},$$

и детерминант n-й степени, составленный из величин

$$c_{\varkappa\lambda} = \sum_{\alpha,\,\beta} a_{\alpha\beta\varkappa}\, a_{\beta\alpha\lambda} = \sum_{\alpha,\,\beta} a_{\alpha\alpha\beta}\, a_{\beta\varkappa\lambda},$$

отличен от нуля, то уравнения

$$r_\beta r_\gamma = \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta\gamma}\, r_\alpha$$

имеют точно n различных решений $r_\alpha = r_\alpha^{(\varkappa)}$, и составленный из этих решений детерминант n-й степени отличен от нуля.

Если $|r_\alpha^{(\varkappa)}| = 0$, то можно выбрать n величин $x_1, x_2, \ldots x_n$, из которых не все равны нулю, так, чтобы n величин (3), — корни характеристического уравнения A, — обращались в нуль, вследствие чего и некоторая степень этой формы A будет равна нулю. Таким образом, необходимое и достаточное условие для равенства нулю этого детерминанта состоит в том, чтобы в системе форм $\sum A_\gamma x_\gamma$ находилась такая, отличная от нуля, форма, степень которой равна нулю (сравн. Weierstrass, a. a. O. S. 402).

Если $|r_\alpha^{(\varkappa)}|$ отлично от нуля, то пусть $(s_\alpha^{(\varkappa)})$ дополнительная система к $(r_\alpha^{(\varkappa)})$, т. е. сопряженная система к обратной, иными словами, если $e_{\alpha\beta}$ элементы E, то

$$(15) \qquad \sum_{\varkappa} r_\alpha^{(\varkappa)} s_\beta^{(\varkappa)} = e_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\alpha} r_\alpha^{(\varkappa)} s_\alpha^{(\lambda)} = e_{\varkappa\lambda}.$$

В таком случае из (10) следует уравнение

$$a_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\varkappa} s_{\alpha}^{(\varkappa)} r_{\beta}^{(\varkappa)} r_{\gamma}^{(\varkappa)} \tag{16}$$

и

$$s_{\alpha}^{(\varkappa)} r_{\gamma}^{(\varkappa)} = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta\gamma} s_{\beta}^{(\varkappa)}, \tag{17}$$

т. е. также

$$s_{\alpha}^{(\varkappa)} r^{(\varkappa)} = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} s_{\beta}^{(\varkappa)}. \tag{18}$$

Этими уравнениями вполне определяются отношения n величин

$$s_1^{(\varkappa)}, \; s_2^{(\varkappa)}, \ldots s_n^{(\varkappa)} .$$

Каждому корню r уравнения $|A - rE| = 0$ соответствует, таким образом, n величин $s_1, s_2, \ldots s_n$, отношения которых определяются уравнениями

$$s_{\alpha} r = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} s_{\beta}. \tag{19}$$

Пусть

$$| r e_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} | = \varphi (r), \tag{20}$$

и пусть в этом детерминанте соответствующий элементу $re_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}$ минор равен $\varphi_{\alpha\beta}(r)$. В таком случае, если r — корень уравнения

$$\varphi (r) = 0,$$

то из уравнений (13) и (19) следует, что

$$\varphi_{\alpha\beta} = \rho r_{\alpha} s_{\beta} ,$$

где ρ независимо от α и β. Но

$$\varphi' (r) = \sum \varphi_{\alpha\alpha} ,$$

и по (15)

$$\sum r_{\alpha} s_{\alpha} = 1.$$

Следовательно,

$$\rho = \varphi' (r),$$

т. е.

$$\varphi_{\alpha\beta} (r) = \varphi' (r) r_{\alpha} s_{\beta} . \tag{21}$$

Если теперь r есть снова неопределенная величина, то разложением на простейшие дроби получим

$$\frac{\varphi_{\alpha\beta} (r)}{\varphi (r)} = \sum_{\varkappa} \frac{\varphi_{\alpha\beta} (r^{(\varkappa)})}{\varphi' (r^{(\varkappa)})} \; \frac{1}{r - r^{(\varkappa)}} .$$

Следовательно, в детерминанте (20):

$$\varphi_{\alpha\beta}(r) = \psi(r) \sum_{\varkappa} \frac{r_{\alpha}^{(\varkappa)} s_{\beta}^{(\varkappa)}}{r - r^{(\varkappa)}} \tag{22}$$

— минор, соответствующий элементу $re_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}$.

Если $r_{\alpha}^{(\varkappa)}$ произвольная система n^2 величин, детерминант которой отличен от нуля, то определенные уравнениями (16) выражения $a_{\alpha\beta\gamma}$ представляют, как замечает Dedekind (цит. вначале работа, стр. 146), самую общую систему величин, удовлетворяющих условиям теоремы IX.

О ГРУППОВЫХ ХАРАКТЕРАХ[9)]

(Über Gruppencharaktere. Sitzungsber. der Berl. Ak., 1896, S. 985—1021)

При доказательстве теоремы, что всякая линейная функция одного переменного представляет бесконечное множество простых чисел, если ее коэффициенты — взаимно простые целые числа, Dirichlet использовал впервые некоторые системы корней из единицы, которые также играют роль в родственном вопросе о числе идеальных классов в круговом теле (ср. замечание Dedekind'а в лекциях по теории чисел Dirichlet, 4 изд., стр. 625), равно как и при обобщении этой теоремы на квадратичные формы и в исследованиях относительно их распределения по родам. Характерное свойство этих выражений состоит, по Dedekind'у, в том, что они являются величинами $\chi(n)$, зависящими от переменного положительного целого числа n, имеющими только конечное число значений и удовлетворяющими условию

$$\chi(m)\chi(n) = \chi(mn).$$

Как выводит Dedekind в чисто абстрактной форме, можно элементам $A, B, C, \ldots$ всякой конечной группы $\mathfrak{H}$ переместимых элементов (Абелевой группы) поставить в соответствие такие корни из единицы $\chi(A)$, $\chi(B)$, $\chi(C), \ldots$, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\chi(A)\chi(B) = \chi(AB);$$

эти корни из единицы он, по примеру Gauss'а, назвал *характерами группы.*

Под *характером* квадратичной формы Gauss, понимает (Disquisitiones arithm. Art. 230) соотношение между представляемыми формой числами и нечетными простыми делителями p (или 4 или 8) ее детерминанта. Это соотношение он выражает знаками Rp и Np. Эти символы Dirichlet (*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, § 3, — Crelle's Journ., Bd. 19) заменяет символом Legendre'а (и Jacobi) $\left(\frac{m}{p}\right)$, который представляет собой (вместе с резольвентой Lagrange'а), повидимому, самый ранний пример применения характеров коммутативных групп. Преимущество этой замены состоит в том, что родовые характеры Gauss'а представляют собой только соотношения, а у Dirichlet они являются числами, с которыми можно производить вычисления. Так, умножением этих характеристических чисел заменяется композиция характеров, соответствующая композиции родов (Art. 246 — 248)*.

Число h характеров Абелевой группы $\mathfrak{H}$ равно порядку группы. Можно получить h характеров, если представить элементы из $\mathfrak{H}$ через базис независимых элементов и базисным элементам поставить в соответствие любые корни из единицы, степень которых равна порядку этих элементов. Характеры могут (разными способами) быть поставлены в соответствие с элементами группы и, в связи с этим, обозначены через $\chi_B(A)$. Так как произведение двух характеров есть снова характер, то они образуют группу, причем она изоморфна с $\mathfrak{H}$. Их соотношения с подгруппами $\mathfrak{H}$ исчерпывающим образом исследованы Weber'ом (*Theorie der Abel'schen Zahlkörper*, I, § 3, IV, § 2 и 3, Acta Math. t. 8 и 9).

В апреле этого года Dedekind сообщил мне задачу, к которой он пришел в 1880 году, и которая, по его мнению, должна была бы меня заинтересовать, так как она принадлежит как к теории групп, так и к теории детерминантов, тогда как его самого более детальный ее разбор должен был бы отклонить далеко от его арифметических исследований. Решение этой задачи, которое, как я надеюсь, я изложу в ближайшее время, привело меня к обобщению понятия характеров на любые конечные группы. Это понятие я и хочу здесь изложить, полагая, что его введение будет способствовать значительному развитию и обогащению теории групп. Особенный интерес приобретает теория характеров еще благодаря ее замечательным соотношениям с теорией комплексных чисел, составленных из нескольких главных единиц [10].

§ 1.

Два элемента A и B конечной группы $\mathfrak{H}$ называются *сопряженными* (относительно $\mathfrak{H}$), если в $\mathfrak{H}$ имеется элемент T, который удовлетворяет условию $T^{-1}AT = B$. Если два элемента сопряжены с третьим, то они сопряжены также и друг с другом. Поэтому h элементов из $\mathfrak{H}$ можно распределить по *классам сопряженных элементов*,—распределение, которое я несколько раз с успехом применял, особенно в моем новом доказальстве теоремы Sylow'а (Crelle's Journ. Bd. 100). Главный элемент E сам образует особый класс—*главный класс*. Обозначим его через (0), а остальные классы—через (1), (2), ...(k—1), если k число всех классов группы $\mathfrak{H}$.

* Содержащиеся в этом абзаце замечания, я беру из письма Dedekind'а от 8-го июля 1896 года.

Если A какой-либо элемент α-го класса, то переместимые с A элементы из $\mathfrak{H}$ образуют группу, содержащуюся в $\mathfrak{H}$. Если $\frac{h}{h_\alpha}$ — ее порядок, то h_α число различных элементов α-го класса; таким образом, $h_0 = 1$. Так как каждый элемент из $\mathfrak{H}$ принадлежит к одному и только к одному из этих k классов, то

$$\sum h_\alpha = h. \tag{1}$$

Число k классов можно получить также следующим образом: если каждый из обоих переменных элементов R и S пробегает независимо один от другого h элементов из $\mathfrak{H}$, то нужно сосчитать, сколько раз будет $SR = RS$ и число решений (R, S) этого уравнения разделить на h. Именно, если R — определенный элемент α-го класса, то имеется $\frac{h}{h_\alpha}$ переместимых с R элементов S. Таким образом, если подставить вместо R последовательно каждый из h_α элементов α-го класса, то получим для вышеприведенного уравнения $\frac{h}{h_\alpha} \cdot h_\alpha$ решений. Так как это число одно и то же для каждого из k классов, то hk — число решений уравнения $SR = RS$.

Если A пробегает h_α элеметов α-го класса, то A^{-1} также пробегает все элементы определенного класса. Назовем этот последний класс *обратным* к (α) и обозначим через α'. Взаимно обратные классы содержат одинаковое число элементов:

$$h_{\alpha'} = h_\alpha\,. \tag{2}$$

Если, как, например, для главного класса, $(\alpha') = (\alpha)$, то этот α-ый класс назовем *двусторонним.*

Пусть (α), (β), (γ) — три каких-либо различных или одинаковых класса. Если A пробегает h_α различных элементов α-го класса, B — h_β элементов β-го класса и C — h_γ элементов γ-го класса, то пусть число $h_{\alpha\beta\gamma}$ (которое может быть также и нулем) показывает сколько из $h_\alpha h_\beta h_\gamma$ элементов ABC равны главному элементу, т. е. удовлетворяют уравнению

$$ABC = E. \tag{3}$$

Поскольку в этом случае $AB = C^{-1}$, то $h_{\alpha\beta\gamma}$ показывает также, сколько из $h_\alpha h_\beta$ элементов AB принадлежит к классу (γ'). Уравнение (3) равносильно уравнениям:

$$BCA = E \quad \text{и} \quad CAB = E.$$

Поэтому $h_{\alpha\beta\gamma}$ из $h_\beta h_\gamma$ произведений BC содержатся в (α'), и $h_{\alpha\beta\gamma}$ из $h_\gamma h_\alpha$ произведений CA содержатся в (β'). Следовательно, $h_{\alpha\beta\gamma}$ не больше наименьшего из трех чисел $h_\beta h_\gamma$, $h_\gamma h_\alpha$ и $h_\alpha h_\beta$.

Но оба элемента — AB и

(4) $$BA = A^{-1}(AB)A = B(AB)B^{-1}$$

— сопряжены друг с другом. Поэтому они или оба принадлежат к классу (γ') или оба не принадлежат к нему. Следовательно,

$$h_{\beta\alpha\gamma} = h_{\alpha\beta\gamma}.$$

Отсюда следует, в связи с приведенными выше замечаниями что число $h_{\alpha\beta\gamma}$ остается неизменным при любом перемещении трех индексов. Так как из уравнения (3) следует также, что

$$C^{-1}B^{-1}A^{-1} = E,$$

то

(5) $$h_{\alpha'\beta'\gamma'} = h_{\alpha\beta\gamma}.$$

Если подставить в уравнение (3) вместо A определенный элемент α-го класса, а B и C оставить переменными, как и выше, то пусть это уравнение имеет m решений. Если $A' = T^{-1}AT$ — какой-либо другой определенный элемент α-го класса и если положить $B' = T^{-1}BT$ и $C' = T^{-1}CT$, то также и $A'B'C' = E$. Но B' пробегает одновременно с B h_β элементов β-го класса, а C' одновременно с C — h_γ элементов γ-го класса. Поэтому это уравнение тоже имеет m решений. Если, таким образом, подставить в (3) для A последовательно h_α элементов α-го класса, то оно имеет в целом $h_\alpha m = h_{\alpha\beta\gamma}$ решений. Точно так же, это уравнение имеет $\frac{h_{\alpha\beta\gamma}}{h_\beta}$ решений, если B — определенный элемент β-го класса, а A и C — переменные элементы α-го и γ-го классов. Поэтому $h_{\alpha\beta\gamma}$ делится на каждое из трех чисел h_α, h_β, h_γ, т. е. и на их общее наименьшее кратное.

Если подставить для A последовательно h_α элементов α-го класса, а для B h_β элементов β-го класса, то получим $h_\alpha h_\beta$ элементов AB, которые могут не быть все различными. Каждый из таких элементов принадлежит или к классу (0), или к классу (1), ..., или к классу $(k-1)$. Поэтому

(6) $$\sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma} = h_\alpha h_\beta.$$

Рассуждение, приведенное для трех классов, может быть тем же путем проведено и для любого числа классов. Пусть, например, (α), (β), (γ), (δ) — четыре различных или одинаковых класса, пусть $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — число решений уравнения:

(7) $$ABCD = E,$$

если A (соответственно B, C, D) пробегает h_α (соответственно h_β, h_γ, h_δ) элементов класса (α) (соответственно (β), (γ), (δ)). В таком случае также

$$BCDA = CDAB = DABC = E,$$

так что $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ остается неизменным при циклическом перемещении индексов. Далее,

$$BCD = A^{-1}, \qquad CDA = B^{-1}$$

и т. д. Следовательно, $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ указывает, сколько из $h_\beta h_\gamma h_\delta$ элементов BCD принадлежит к классу (α'), или сколько из $h_\gamma h_\delta h_\alpha$ элементов CDA принадлежит к классу (β'), и т. д. Следовательно, $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не превышает самого малого из четырех чисел $h_\beta h_\gamma h_\delta$, $h_\gamma h_\delta h_\alpha$, $h_\delta h_\alpha h_\beta$, $h_\alpha h_\beta h_\gamma$. Если B — постоянный элемент β-го класса, а A, C, D — пробегают α-ый, γ-ый, δ-ый классы, то уравнение (7) имеет только $\dfrac{h_{\alpha\beta\gamma\delta}}{h_\beta}$ решений. Поэтому $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ делится на каждое из четырех чисел h_α, h_β, h_γ, h_δ. Наконец

$$\sum_\delta h_{\alpha\beta\gamma\delta} = h_\alpha h_\beta h_\gamma \,. \tag{8}$$

Если A, B, C, D — решение уравнения (7) и, если положить

$$B^{-1}AB = A', \qquad BA'B^{-1} = A,$$

то

$$BA'CD = E.$$ [11]

Так как A', как и A, принадлежит к α-му классу, то этим способом можно поставить в соответствие друг с другом решения этого уравнения и уравнения (7). Следовательно,

$$h_{\beta\alpha\gamma\delta} = h_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Этим путем выясняется, что $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ остается неизменным при любом перемещении четырех индексов [12]. Поэтому также и

$$h_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = h_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{9}$$

То же значение и аналогичные свойства имеет для n классов (α), (β), (γ), ... (ν) число $h_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu}$. Это обозначение мы не будем применять в случае $n = 1$, но применим его уже при $n = 2$. Таким образом, $h_{\alpha\beta}$ — число решений уравнения

$$AB = E \quad \text{или} \quad B = A^{-1}.$$

Поэтому, если (α) и (β) не обратные классы, то

$$h_{\alpha\beta} = 0.$$

Если же $(\beta) = (\alpha')$, то

$$h_{\alpha\alpha'} = h_\alpha = h_{\alpha'}. \tag{10}$$

Если $\nu = 0$, то $h_{\alpha\beta\gamma\ldots\mu 0}$ — число решений уравнения

$$ABC\ldots ME = E.$$

Поэтому

$$h_{\alpha\beta\gamma\ldots\mu 0} = h_{\alpha\beta\gamma\ldots\mu}\,. \tag{11}$$

В частности,

$$(12) \qquad h_{\alpha\beta 0} = h_{\alpha\beta},$$

т. е. $h_{\alpha\beta 0}$ равно нулю, за исключением случая $(\beta) = (\alpha')$, когда оно равно h_α.

§ 2.

Очень важное свойство чисел $h_{\alpha\beta\gamma}$ мы получим, если разложим уравнение

$$ABCD = E$$

на два уравнения:

$$AB = L^{-1}, \qquad CD = L.$$

Если подставить вместо L определенный элемент λ-го класса, то первое уравнение имеет $\frac{h_{\alpha\beta\lambda}}{h_\lambda}$ решений, а второе $\frac{h_{\lambda'\gamma\delta}}{h_\lambda}$ решений. Так получается $\frac{h_{\alpha\beta\lambda}\, h_{\lambda'\gamma\delta}}{h_\lambda^2} = m_\lambda$ решений уравнения (7) § 1. Если подставить вместо L последовательно каждый из h_λ элементов λ-го класса, то получаем $h_\lambda m_\lambda$ решений и, наконец, если подставить вместо (λ) каждый из k классов, то найдем, что уравнение (7) имеет в целом

$$(1) \qquad h_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_\lambda \frac{1}{h_\lambda} h_{\alpha\beta\lambda}\, h_{\lambda'\gamma\delta}$$

решений. Тем же путем получается

$$(2) \qquad h_{\alpha\beta\ldots\xi\eta\ldots\sigma\tau} = \sum_\lambda \frac{1}{h_\lambda} h_{\alpha\beta\ldots\xi\lambda}\, h_{\lambda'\eta\ldots\sigma\tau}.$$

Если учесть еще уравнения (10) и (12), § 1, то все числа $h_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu}$ можно составить из чисел $h_{\alpha\beta\gamma}$.

Следовательно, сумма в правой части уравнения (1) остается неизменной не только при перестановке α с β или γ с δ, но и при перестановке β с δ или вообще при любой перестановке четырех чисел α, β, γ, δ. Те же заключения делает Gauss в *Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. prima*, § 17. Ges. Werke, Bd. II, S. 81. Если, таким образом, положить,

$$\frac{1}{h_\alpha} h_{\alpha'\beta\gamma} = a_{\alpha\beta\gamma},$$

то [13])

$$(3) \qquad a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}, \qquad \sum_\lambda a_{\alpha\lambda\gamma}\, a_{\lambda\beta\delta} = \sum_\lambda a_{\alpha\lambda\delta}\, a_{\lambda\beta\gamma}.$$

Поэтому к этим величинам можно применить теоремы, которые были найдены Weierstrass'ом и Dedekind'ом в их работах *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* („К теории комплексных чисел, образованных из главных единиц") „Göttinger Nachrichten, 1884 и 1885 г., и которые я в моей работе *Über vertauschbare Matrizen* („О переместимых матрицах") снова вывел и обобщил, поскольку они образуют основу настоящего исследования. Если детерминант k-ой степени, составленный из k^2 величин

$$p_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa\lambda\alpha}\, a_{\lambda\varkappa\beta} = \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa\varkappa\lambda}\, a_{\lambda\alpha\beta}\,,$$

отличен от нуля, то уравнения

$$r_\beta\, r_\gamma = \sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}\, r_\alpha$$

имеют точно k различных решений $r_\alpha = r_\alpha^{(\varkappa)}$, и образованный из этих решений детерминант k-ой степени отличен от нуля. Если $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$ — переменные, и если положить

$$a_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}\, x_\gamma\,,$$

то получаем детерминант k-ой степени:

$$|a_{\alpha\beta} - r e_{\alpha\beta}| = \prod_\varkappa (r_0^{(\varkappa)}\, x_0 + \ldots + r_{k-1}^{(\varkappa)}\, x_{k-1} - r).$$

Если $(s_\alpha^{(\varkappa)})$ дополнительная [14] система к $(r_\alpha^{(\varkappa)})$, то отношения k величин

$$s_0 = s_0^{(\varkappa)}, \qquad s_1 = s_1^{(\varkappa)}, \ldots s_{k-1} = s_{k-1}^{(\varkappa)}$$

вполне определяются линейными уравнениями

$$s_\alpha r = \sum_\beta a_{\alpha\beta}\, s_\beta\,,$$

если в них положить

$$r = r_0^{(\varkappa)}\, x_0 + \ldots + r_{k-1}^{(\varkappa)}\, x_{k-1}$$

(см. § 4 предыдущей статьи: „О переместимых матрицах").

В разбираемом нами случае имеем:

$$p_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa, \lambda} \frac{h_{\varkappa'\lambda\alpha}\, h_{\lambda'\varkappa\beta}}{h_\varkappa\, h_\lambda}.$$

Так как $(\varkappa')$ одновременно с $(\varkappa)$ пробегает все k классов, то можно в этой сумме заменить $(\varkappa)$ через $(\varkappa')$, и тогда получим по (5), § 1:

(4) $$p_{\alpha\beta'} = \sum_{\varkappa, \lambda} \frac{h_{\varkappa\lambda\alpha}\, h_{\varkappa\lambda\beta}}{h_\varkappa\, h_\lambda},$$

т. е.

(5) $$p_{\alpha\beta'} = p_{\beta\alpha'} = p_{\alpha'\beta} = p_{\beta'\alpha}.$$

Детерминант k-ой степени $|p_{\alpha\beta'}|$ получается из $|p_{\alpha\beta}|$ посредством перестановки столбцов и, следовательно, отличается от него разве только знаком. Рассмотрим теперь k величин:

$$\frac{h_{\varkappa\lambda 0}}{\sqrt{h_\varkappa h_\lambda}}, \quad \frac{h_{\varkappa\lambda 1}}{\sqrt{h_\varkappa h_\lambda}}, \ldots \frac{h_{\varkappa\lambda, k-1}}{\sqrt{h_\varkappa h_\lambda}}.$$

Если подставить для $\varkappa$ и для λ значения $0, 1, \ldots k-1$, то получим систему k^3 величин, расположенную в k^2 строк и k столбцов. Из этой системы можно, выбрав каких-нибудь k строк, образовать детерминант k-ой степени, всего $\binom{k^2}{k}$ способами. Сумма квадратов всех этих детерминантов, на основании общей теоремы умножения теории детерминантов [15], согласно уравнению (4), равна $|p_{\alpha\beta'}|$. Если положить $\varkappa = 0$, а $\lambda' = 0, 1, \ldots k-1$, то получаем некоторую определенную систему из k строк. В детерминанте, образованном из ее элементов, элементы диагонали

$$\frac{h_{0\lambda'\lambda}}{\sqrt{h_\lambda}} = \sqrt{h_\lambda}\ ^{16)}$$

отличны от нуля, а остальные элементы равны нулю. Следовательно, детерминант k-ой степени $|p_{\alpha\beta}|$ отличен от нуля.

Пусть f пока неопределенный множитель пропорциональности, и

$$r_\alpha = \frac{h_\alpha \chi_\alpha}{f}.$$

В таком случае уравнения

(6) $$h_\beta h_\gamma \chi_\beta \chi_\gamma = f \sum_\alpha h_{\alpha'\beta\gamma} \chi_\alpha$$

имеют k различных систем решений:

(7) $$\chi_\alpha = \chi_\alpha^{(\varkappa)}, \qquad f = f^{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots k-1)$$

и детерминант k-ой степени

(8) $$|\chi_\alpha^{(\varkappa)}|$$

отличен от нуля. Позже я дам определенное указание о выборе множителя f, т. е. k множителей $f^{(\varkappa)}$ и назову величины $\chi_\alpha^{(\varkappa)}$ *k характерами группы $\mathfrak{H}$*. Характер χ, это — система из k чисел χ_0, $\chi_1, \ldots \chi_{k-1}$, соответствующих k классам (0), (1), ... $(k-1)$. $\varkappa$-ый характер $\chi^{(\varkappa)}$ представляет собой систему k чисел

$$\chi_0 = \chi_0^{(\varkappa)}, \qquad \chi_1 = \chi_1^{(\varkappa)}, \ldots \chi_{k-1} = \chi_{k-1}^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots k-1).$$

Значение уравнений (6) выясняется из следующего рассуждения: если $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$ и $y_0, y_1, \ldots y_{k-1}$ $2k$ независимых переменных, и если

(9) $$h_\gamma z_{\gamma'} = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha y_\beta$$

k билинейных функций этих переменных, то

$$f\sum_{\gamma} h_\gamma \chi_\gamma z_\gamma = f\sum_{\alpha,\beta,\gamma} h_{\alpha\beta\gamma'} \chi_\gamma x_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha,\beta} h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha h_\beta \chi_\beta y_\beta,$$

и, следовательно,

$$f\left(\sum_{\gamma} h_\gamma \chi_\gamma z_\gamma\right) = \left(\sum_{\alpha} h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha\right)\left(\sum_{\beta} h_\beta \chi_\beta y_\beta\right). \tag{10}$$

Я определяю соответствующую характеру $\chi^{(\varkappa)}$ линейную функцию $\xi^{(\varkappa)}$ от $x_0, x_1, \dots x_{k-1}$ уравнением

$$\sum_{\alpha} h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} x_\alpha = f^{(\varkappa)} \xi^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots k-1). \tag{11}$$

В этом случае имеем детерминант k-ой степени:

$$\left|\sum_{\gamma} h_{\alpha\beta'\gamma} x_\gamma - h_{\alpha\beta'} r\right| = \prod_{\varkappa} h_\varkappa (\xi^{(\varkappa)} - r). \tag{12}$$

Если положить $x_1 = \dots = x_{k-1} = 0$, а $x_0 = 1$, то

$$(1-r)^k = \prod_{\varkappa}\left(\frac{\chi_0^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} - r\right)$$

и, следовательно,

$$\chi_0^{(\varkappa)} = f^{(\varkappa)}, \qquad \chi_0 = f; \tag{13}$$

в уравнениях, которые имеют место для всякого значения верхнего индекса $\varkappa$, я буду этот индекс иногда отбрасывать. (Ср. исследования Dedekind'а о многозначных системах величин,— в упомянутой выше работе, стр. 144). Поэтому уравнение (12) не более общее, чем уравнение

$$\left|\sum_{\gamma} h_{\alpha\beta'\gamma} x_\gamma\right| = \prod_{\varkappa} h_\varkappa \xi^{(\varkappa)}, \tag{14}$$

так как оно получается из этого (14) уравнения при подстановке $x_0 - r$ вместо x_0. Если написать это уравнение в форме

$$\left|\sum_{\gamma} \frac{h_{\alpha\beta'\gamma}}{h_\alpha} x_\gamma - \frac{h_{\alpha\beta'}}{h_\alpha}\right| r = \prod_{\varkappa} (\xi^{(\varkappa)} - r),$$

то $\dfrac{h_{\alpha\beta'}}{h_\alpha}$ в элементах диагонали равно 1, а в остальных элементах $=0$. Далее, величины $\dfrac{h_{\alpha\beta'\gamma}}{h_\alpha}$ — целые числа. Если положить, таким образом, что все переменные $x_\gamma = 0$, кроме одной, то последнее уравнение показывает, что величины

$$\frac{h_\alpha \chi_\alpha}{f} \tag{15}$$

— целые алгебраические числа.

§ 3.

Элементы каждой строки дополнительной к $(r_\alpha^{(\varkappa)})$ системы $(s_\alpha^{(\varkappa)})$ определяются уравнениями

$$\sum_\beta \frac{h_{\alpha'\beta\gamma}}{h_\alpha} s_\beta = \frac{h_\gamma \chi_\gamma}{f} s_\alpha$$

с точностью до общего множителя. На основании свойств симметрии величин $h_{\alpha\beta\gamma}$ эти уравнения удовлетворяются, по (6), § 2, значениями $s_\beta = \chi_{\beta'}$. Поэтому можно положить

$$s_\beta = \frac{e}{h} \chi_{\beta'},$$

где e — новый множитель пропорциональности. Благодаря этому обе системы:

(1) $$\left(\frac{h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}}\right), \qquad \left(\frac{e^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)}}{h}\right)$$

— дополнительны. Следовательно, существуют уравнения

(2) $$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\lambda)} = 0,$$

если $\varkappa$ и λ — различны, а при $\varkappa = \lambda$

(3) $$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)} = \frac{hf^{(\varkappa)}}{e^{(\varkappa)}}.$$

Далее,

(4) $$\sum_\varkappa \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)} = \frac{hh_{\alpha\beta}}{h_\alpha h_\beta};$$

таким образом, по (13), § 2, для $\beta = 0$

(5) $$\sum_\varkappa e^{(\varkappa)} \chi_\alpha^{(\varkappa)} = 0,$$

если α отлично от 0; тогда как при $\alpha = 0$:

(6) $$\sum_\varkappa e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)} = h.$$

Уравнение (3) можно написать также в более простой форме:

(7) $$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha \chi_{\alpha'} = \frac{hf}{e},$$

а уравнение (2) — в форме

(8) $$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha \psi_{\alpha'} = 0,$$

где ψ_α означает характер, отличный от χ_α.

По уравнению (5), § 1, и (6), § 2 —

$$h_\alpha h_\gamma \chi_\alpha \chi_{\gamma'} = f \sum_\beta h_{\alpha\beta'\gamma'} \chi_\beta = f \sum_\beta h_{\alpha'\beta\gamma} \chi_\beta .$$

Если помножить обе части этого уравнения на χ_γ и просуммировать по γ, то получится по (7) формула

$$\frac{h}{e} h_\alpha \chi_\alpha = \sum_{\beta, \gamma} h_{\alpha'\beta\gamma} \chi_\beta \chi_\gamma , \tag{9}$$

которая при $\alpha = 0$ совпадает с (7). Тем же путем находим формулу

$$\sum_{\beta, \gamma} h_{\alpha\beta\gamma} \chi_\beta \psi_\gamma = 0, \tag{10}$$

которая при $\alpha = 0$ переходит в формулу (8).

Если исключить из уравнений (6), § 2, и (9) произведения $\chi_\beta \chi_\gamma$, то получим линейные уравнения

$$\frac{h}{ef} h_\alpha \chi_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta'} \chi_\beta . \tag{11}$$

Поэтому k величин $g^{(\varkappa)} = e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)}$ — корни уравнения k-ой степени

$$| g p_{\alpha\beta'} - h h_{\alpha\beta'} | = 0. \tag{12}$$

Согласно уравнению (4), § 2,

$$\sum p_{\alpha\beta'} x_\alpha x_\beta = \sum_{\varkappa, \lambda} \frac{1}{h_\varkappa h_\lambda} \left(\sum_\alpha h_{\alpha\varkappa\lambda} x_\alpha \right)^2 . \tag{13}$$

Таким образом, эта квадратичная форма, детерминант которой отличен от нуля, — положительная определенная форма. Поэтому k корней g уравнения (12) — все реальные положительные величины[17], а элементарные делители этого детерминанта все линейны. Поэтому для m-кратного корня $g = ef$ все миноры $(k - m + 1)$-ой и высших степеней этого детерминанта также обращаются в нуль. Следовательно, ранг системы линейных уравнений (11) равен $k - m$, и эти уравнения имеют m независимых решений. В таком случае m характеров χ_α, соответствующих m-кратному корню $g = ef$, могут быть представлены, как линейные соединения таких m независимых решений, и если вставить эти решения в уравнения (6), § 2, то мы найдем коэффициенты этих соединений, решив уравнение m-ой степени. Таким образом, найденное ранее для определения k характеров, уравнение k-ой степени (12), § 2, распадается после решения уравнения (12) на столько множителей, сколько различных корней имеет это уравнение, причем m-кратному корню уравнения (12) соответствует множитель m-ой степени.

Что же касается уравнения (12), то можно, далее показать что его корни не только реальные положительные, но что они — целые числа (§ 6) и даже квадраты целых чисел, входящих множителями в h. Однако, до сих пор мне не удалось доказать эти теоремы такими же простыми рассуждениями, как приведенные выше результаты.

До сих пор множители $f^{(\varkappa)}$ были взяты произвольными, но отличными от нуля. Посредством формул (3) из них получаются множители $e^{(\varkappa)}$. Так как $g^{(\varkappa)} = e^{(\varkappa)}f^{(\varkappa)}$ — реальная положительная величина, то и $f^{(\varkappa)}$ выберем также реальными и положительными. В таком случае и $e^{(\varkappa)}$ будут реальны и положительны. Самые простые формулы мы получим, если положим $f = \sqrt{g}$. Тогда $e = f = \chi_0$. Как уже упомянуто, e в этом случае — положительное целое число, входящее множителем в h, и можно показать, что χ_α — сумма f корней из единицы степени n, если n — порядок элементов α-ого класса.

По уравнению (1) и (6), § 1, и (4), § 2

$$\sum_\beta p_{\alpha\beta'} = hh_\alpha \,. \tag{14}$$

По (6), § 1, уравнения (6), § 2, удовлетворяются, если положить все величины $\chi_\alpha = f$. Соответствующее значение ef равно 1.[18] Поэтому можно положить $e = f = 1$, следовательно, $\chi_\alpha = 1$. Назовем этот характер — главным характером. Если в уравнении (8) считать ψ главным характером, то найдем, что всякий другой характер удовлетворяет уравнению

$$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha = 0. \tag{15}$$

Так как детерминант (8), § 2, отличен от нуля, то уравнение (6), § 2, не имеет кратных корней. Подобно же, если χ и ψ — два различных характера, то величины $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k-1}$ не могут быть пропорциональны величинам $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{k-1}$. Точно также всякий класс (α) вполне определяется k соответствующими значениями $\chi_\alpha^{(\varkappa)}$, т. е. если α и β различны, то не может быть $\chi_\alpha^{(\varkappa)} = \chi_\beta^{(\varkappa)}$ для всех значений $\varkappa$. Так как коэффициенты уравнения (12), § 2, реальны, то при реальных переменных $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$ каждому комплексному корню соответствует сопряженный комплексный корень. Если, таким образом, χ_α и χ'_α — сопряженные комплексные величины, то каждому характеру χ_α соответствует сопряженный комплексный характер χ'_α. Но должно быть $\chi'_\alpha = \chi_{\alpha'}$. Ибо прежде всего, по (6), § 2,

$$h_\beta\, h_\gamma\, \chi_{\beta'}\chi_{\gamma'} = f \sum_\alpha h_{\alpha\beta'\gamma'}\, \chi_{\alpha'} = f \sum_\alpha h_{\alpha'\beta\gamma}\chi_{\alpha'},$$

и, следовательно, $\psi_\alpha = \chi_{\alpha'}$ — характер. Если бы этот характер был отличен от χ'_α, то по (8) было бы

$$\sum h_\alpha\, \chi'_\alpha\, \psi_{\alpha'} = 0,$$

и, следовательно,

$$\sum h_\alpha \chi_\alpha \chi'_\alpha = 0,$$

тогда как каждый член, как произведение двух сопряженных комплексных величин, — положителен. Таким образом, в каждом характере (если взять f реальным) взаимно обратным классам соответствуют сопряженные комплексные значения χ_α и $\chi_{\alpha'}$; следовательно, двустороннему[19] классу соответствует реальное значение. Из каждого комплексного характера $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k-1}$ получается сопряженный комплексный характер, именно $\chi_{0'}$, $\chi_{1'}, \ldots \chi_{(k-1)'}$. Реальный характер назовем *двусторонним*, а два сопряженных комплексных характера *взаимно обратными* (ср. Weber, *Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist.* „Доказательство теоремы, что всякая собственно-первообразная квадратичная форма может представить бесчисленное множество простых чисел“. Math. Ann. Bd. 20, S. 308).

§ 4.

Если помножить уравнение (6), § 2,

$$h_\beta h_\gamma \chi_\beta^{(x)} \chi_\gamma^{(x)} = f^{(x)} \sum_\lambda h_{\lambda\beta\gamma} \chi_{\lambda'}^{(x)}$$

на $\dfrac{e^{(x)} \chi_\alpha^{(x)}}{f^{(x)}}$ и затем просуммировать по x, то получим

$$\frac{h h_{\alpha\beta\gamma}}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} = \sum_x \frac{e^{(x)}}{f^{(x)2}} \chi_\alpha^{(x)} \chi_\beta^{(x)} \chi_\gamma^{(x)}; \tag{1}$$

подобно же, для n индексов $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ имеет место формула

$$\frac{h h_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu}}{h_\alpha h_\beta h_\gamma \ldots h_\nu} = \sum_x \frac{e^{(x)}}{f^{(x)n-1}} \chi_\alpha^{(x)} \chi_\beta^{(x)} \chi_\gamma^{(x)} \ldots \chi_\nu^{(x)}, \tag{2}$$

которая при $n = 2$ переходит в формулу (4), § 3. Поэтому по (11), § 2,

$$h \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu} h_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu} x_\alpha x_\beta x_\gamma \ldots x_\nu = \sum e^{(x)} f^{(x)} \xi^{(x)n}. \tag{3}$$

По (4), § 2, и (5), § 1:

$$p_{\alpha\beta} = \sum_{x, \lambda} \frac{h_{x\lambda\alpha} h_{x'\lambda'\beta}}{h_x h_\lambda};$$

если, таким образом, выполнить суммирование по x посредством формулы (1), § 2, то:

$$p_{\alpha\beta} = \sum_\lambda \frac{1}{h_\lambda} h_{\alpha\beta\lambda\lambda'}, \tag{4}$$

и, следовательно, по (3), § 3, и (2)

$$\frac{p_{\alpha\beta}}{h_\alpha h_\beta} = \sum_{\varkappa} \frac{\chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)2}}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = \sum_{\varkappa} (\xi^{\varkappa})^2 \tag{6}$$

и

$$\sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha\beta'} x_\alpha x_\beta = \sum_{\varkappa} \xi^{(\varkappa)} \xi^{(\varkappa)'}. \tag{7}$$

Так как $\xi^{(\varkappa)}$ и $\xi^{(\varkappa)'}$ — сопряженные комплексные величины, то эта формула еще раз показывает, что рассматриваемая форма — положительна.

Коэффициенты уравнения (12), § 3, служащие для определения величин $g = ef$, можно также вычислить, если определить степенные суммы его корней. Если рассматривать $\frac{h}{g}$, как неизвестное, то сумма корней этого уравнения

$$\sum_{\varkappa} \frac{h}{e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)}} = \sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha\alpha'}}{h_\alpha} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{h_{\alpha\alpha'\beta\beta'}}{h_\alpha h_\beta} =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{h_{\alpha\beta\gamma} h_{\alpha'\beta'\gamma'}}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{h^2_{\alpha\beta\gamma}}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}.$$

Если систему $\frac{p_{\alpha\beta'}}{h_\alpha}$ скомпонировать саму с собой, то получим

$$\sum_{\varkappa} \frac{p_{\alpha\varkappa'} p_{\varkappa\beta'}}{h_\alpha h_\varkappa} = \sum_{\varkappa, \lambda, \mu} \frac{h_{\alpha\varkappa'\lambda\lambda'} h_{\varkappa\beta'\mu\mu'}}{h_\alpha h_\varkappa h_\lambda h_\mu} = \sum_{\lambda, \mu} \frac{h_{\alpha\beta'\lambda\lambda'\mu\mu'}}{h_\alpha h_\lambda h_\mu} =$$

$$= \frac{1}{h_\alpha} \sum_{\varkappa, \lambda, \mu} \frac{h_{\alpha\varkappa\lambda\mu} h_{\beta\varkappa\lambda\mu}}{h_\varkappa h_\lambda h_\mu}.$$

Поэтому сумма квадратов корней

$$\sum_{\varkappa} \left(\frac{h}{e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)}} \right)^2 = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{h_{\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'}}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \frac{h^2_{\alpha\beta\gamma\delta}}{h_\alpha h_\beta h_\gamma h_\delta}.$$

Если ту же систему скомпонировать $n - 2$ раза саму с собой, то тем же путем найдем сумму $(n - 2)$-ых степеней корней этого уравнения:

$$\sum_{\varkappa} \left(\frac{h}{e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)}} \right)^{n-2} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu} \frac{h_{\alpha\alpha'\beta\beta'\ldots\mu\mu'}}{h_\alpha h_\beta \ldots h_\mu} =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu} \frac{h^2_{\alpha\beta\ldots\mu\nu}}{h_\alpha h_\beta \ldots h_\mu h_\nu},$$

где n—число индексов $\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu$. (Ср. Borchardt, Crelle's Journ. Bd. 30. S, 38). Можно также k^2 величин $p_{\alpha\beta}$ свести к k величинам:

$$(9) \qquad p_{\alpha 0} = p_\alpha = p_{\alpha'} = \sum_\lambda \frac{h_{\alpha\lambda\lambda'}}{h_\lambda} = h_\alpha \sum_\chi \frac{\chi_\alpha^{(\chi)}}{f^{(\chi)}}$$

(которые Dedekind в цит. выше работе, стр. 147 (25) обозначил через σ_r). Ибо по (1), § 2 и (4)

$$p_{\alpha\beta} = \sum_\lambda \frac{1}{h_\lambda} \left(\sum_\gamma \frac{1}{h_\gamma} h_{\alpha\beta\gamma} h_{\gamma'\lambda\lambda'} \right),$$

и, следовательно,

$$(10) \qquad p_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \frac{1}{h_\gamma} h_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma .$$

Таким образом, (12), § 3, переходит в уравнение (12), § 2, если положить $x_\gamma = \frac{p_\gamma}{h_\gamma}$ и $\xi = \frac{h}{g}$. Действительно, по (11), § 3, и (13), § 2,

$$(11) \qquad \sum_\alpha p_\alpha \chi_\alpha = \frac{h}{e}.$$

Если поэтому выбрать f так, чтобы $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k-1}$ были целыми алгебраическими числами, то e будет делителем h. Формула (3) дает для этих значений переменных

$$(12) \qquad \sum_{(\chi)} \left(\frac{h}{e^{(\chi)} f^{(\chi)}} \right)^{n-1} =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu} h_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu} \frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma \ldots p_\nu}{h_\alpha h_\beta h_\gamma \ldots h_\nu}.$$

Число p_α имеет следующее значение: если A — определенный элемент α-ого класса и если каждый из обоих переменных элементов R и S пробегает независимо один от другого h элементов из $\mathfrak{H}$, то $\frac{hp_\alpha}{h_\alpha}$ — число решений уравнения

$$(13) \qquad SR = RSA.$$

Ибо, если A — определенный элемент α-ого класса, если R^{-1} пробегает h_λ элементов класса (λ), а R' h_λ элементов обратного класса (λ'), то уравнение $R^{-1}R'A = E$ имеет точно $\frac{h_{\alpha\lambda\lambda'}}{h_\alpha}$ решений. Если же подставить вместо R' каждый элемент класса (λ') $\frac{h}{h_\lambda}$ раз, то это уравнение будет иметь $\frac{hh_{\alpha\lambda\lambda'}}{h_\alpha h_\lambda}$ решений. Этого мы достигаем, положив для каждого R $R' = S^{-1}RS$ и заставив S пробегать все h элементов из $\mathfrak{H}$. Если, наконец, λ пробегает значения от 0 до $k-1$, то

$$\sum_\lambda \frac{hh_{\alpha\lambda\lambda'}}{h_\alpha h_\lambda} = \frac{hp_\alpha}{h}$$

— число решений уравнения $R^{-1}(S^{-1}RS)A=E$, т. е. уравнения (13). В частности, $p_0 = k$, т. е. hk число решений уравнения $SR = RS$.

Точно так же вообще $hp_{\alpha\beta}$ — число решений уравнения

(14) $$SR = RSAB,$$

если A пробегает h_α элементов α-ого класса, B — h_β элементов β-ого класса, а R и S — все h элементов из $\mathfrak{H}$. Если же подставить вместо A некоторый определенный элемент α-ого класса, то это уравнение будет иметь $\frac{hp_{\alpha\beta}}{h_\alpha}$ решений. При помощи формул (5) и (6), § 3, можно эти и подобные теоремы доказать также путем вычислений.

§ 5.

Для дальнейшего развития этой теории представляется удобным — если A элемент α-ого класса — заменить знак χ_α знаком χ_A или, используя χ, как знак функции, — знаком $\chi(A)$. В таком случае, поскольку эти величины имеют одинаковые значения для всех элементов α-го класса,

(1) $$\chi(B^{-1}AB) = \chi(A),$$

или, если подставить BA вместо A:

(2) $$\chi(AB) = \chi(BA).$$

В частности, $\chi(E) = f$. Точно так же я обозначаю переменные x_α и y_α через x_A и y_A, а постоянные h_α и p_α через h_A и p_A. Для всех этих величин имеет место уравнение, аналогичное с (2). Далее, $h_{A^{-1}} = h_A$ в то время, как $\chi(A^{-1})$ и $\chi(A)$ — сопряженные комплексные величины.

Уравнение (6), § 2, которое дает отношения χ_α, может быть в таком случае написано в форме:

(3) $$h_B\chi(A)\chi(B) = f\sum_S{}' \chi(AS),$$

где S пробегает h_B сопряженных с B элементов. Ибо, если (α) и (β) — классы, к которым принадлежат A и B, то для S нужно подставить h_β элементов β-ого класса. Так как A — определенный элемент α-го класса, то $\frac{h_{\alpha\beta\gamma'}}{h_\alpha}$ раз получается, что AS принадлежит к γ-му классу, т. е. $\chi(AS) = \chi_\gamma$. Следовательно,

$$\sum' \chi(AS) = \frac{1}{h_\alpha} \sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma'} \chi_\gamma .$$

Так как $\chi(E) = f$ и $\chi(S) = \chi(B)$, то уравнение (3) можно привести также к форме

(4) $$\sum_S{}' (\chi(E)\chi(AS) - \chi(A)\chi(S)) = 0,$$

где S пробегает элементы одного класса. Если положить $S = R^{-1}BR$, а для R подставлять все h элементов из $\mathfrak{H}$, то S будет равно каждому элементу β-ого класса и каждому по $\frac{h}{h_\beta}$ раз. Поэтому

(5) $$h\chi(A)\chi(B) = f \sum_R \chi(AR^{-1}BR).$$

Повторным применением этого соотношения получим:

(6) $$\left(\frac{h}{f}\right)^{n-1} \chi(A_1)\chi(A_2)\ldots\chi(A_n) = \\ = \sum \chi(A_1R_1A_2R_2\ldots A_nR_n),$$

где $R_1, R_2, \ldots R_n$ пробегают все системы из n элементов группы $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих уравнению

$$R_1R_2\ldots R_n = E.$$

Тем же путем получим формулу

(7) $$p_{\alpha\beta} = \sum_{R,S}{}' \frac{p_{RS}}{h_{RS}},$$

где R пробегает h_α элементов α-ого класса, а S h_β элементов β-ого класса.

Если R и S пробегают все элементы, которые удовлетворяют условию $RS = A$, то по (9) и (10), § 3:

(8) $$\begin{cases} \frac{h}{e}\chi(A) = \sum \chi(R)\chi(S), \\ 0 = \sum \chi(R)\psi(S); \qquad (RS = A). \end{cases}$$

Ибо, если A — постоянный элемент α-ого класса, то в то время, как R пробегает β-й класс, а S γ-й класс, случается $\frac{h_{\alpha'\beta\gamma}}{h_\alpha}$ раз, что $RS = A$. Вместо этого можно также написать

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{h}{e}\chi(AB^{-1}) = \sum\limits_R \chi(AR^{-1})\chi(RB^{-1}), \\ 0 = \sum\limits_R \chi(AR^{-1})\psi(RB^{-1}), \end{cases}$$

где R пробегает все элементы из $\mathfrak{H}$. В частности,

$$(10)\qquad \frac{hf}{e} = \sum_R \chi(R^{-1})\chi(R), \quad 0 = \sum_R \chi(R^{-1})\psi(R).$$

h переменных x_R (соотв. y_R), на основании условий:

$$(11)\qquad x_{AB} = x_{BA}, \quad y_{AB} = y_{BA},$$

приводятся только к k независимым переменным; они имеют одно и то же значение для всех элементов R, принадлежащих к одному и тому же классу. Я образую из них две системы по h^2 элементов каждая:

$$(12)\qquad (x_{PQ^{-1}}), \quad (y_{PQ^{-1}}).$$

h строк первой системы получаются, если подставить вместо P в какой-либо последовательности h элементов из $\mathfrak{H}$, а h столбцов получаются, если те же элементы и в той же последовательности подставить вместо Q. Эта система имеет некоторые, определяемые группой $\mathfrak{H}$, свойства симметрии, на основании которых из ее h^2 элементов только k будут различными. Система, составленная композицией обеих систем (12), имеет те же свойства симметрии и, кроме того, не зависит от порядка, в котором мы берем обе системы при их композиции. Имеем:

$$(13)\qquad z_{PQ^{-1}} = \sum_R x_{PR^{-1}} y_{RQ^{-1}} = \sum_S y_{PS^{-1}} x_{SQ^{-1}}.$$

Ибо, если положить $PR^{-1} = SQ^{-1}$, то $S = PR^{-1}Q$, т. е. S пробегает одновременно с R все h элементов из $\mathfrak{H}$, и $S^{-1}P = Q^{-1}R$, следовательно, $y_{PS^{-1}} = y_{S^{-1}P} = y_{Q^{-1}R} = y_{RQ^{-1}}$. Если подставить, далее, RP вместо R, то легко увидим, что первая сумма зависит только от произведения PQ^{-1}. Ее следовало бы сначала обозначить через $z_{P,Q}$, но можно положить равной величине $z_R = z_{PQ^{-1}}$, зависящей только от одного элемента $R = PQ^{-1}$. Наконец,

$$z_{AB} = \sum x_{AR^{-1}} y_{RB} = \sum y_{AS^{-1}} x_{SB} = \sum x_{BS} y_{S^{-1}A} =$$
$$= \sum x_{BR^{-1}} y_{RA} = z_{BA},$$

ибо $R = S^{-1}$ пробегает одновременно с S все h элементов из $\mathfrak{H}$.

Каждые две системы (12), которые обладают указанными здесь свойствами симметрии, переместимы друг с другом. Если положить $x_\varkappa = 1$, а остальные $k-1$ переменных $x_0, x_1 \ldots x_{k-1}$

равными нулю, то получаем k специальных систем этого рода при $\varkappa=0, 1, \ldots k-1$. Таким образом, каждые две из этих k систем переместимы между собой. Из них снова получается самая общая система, если их помножить на k переменных $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$ и сложить. Следовательно, детерминант h-ой степени

$$|x_{PQ^{-1}}| = \Theta(x_0, x_1, \ldots x_{k-1}) = \Theta((x)) \tag{14}$$

—произведение h линейных функций k переменных (см. *„О переместимых матрицах"*, стр. 7—21 этой книги). В этом детерминанте h элементов диагонали и только они равны x_0, таким образом x_0^h имеет коэффициент 1, поэтому можно положить, что в каждом линейном множителе Θ

$$\xi = \frac{1}{f} \sum h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha \tag{15}$$

коэффициент при x_0 равен 1. Здесь h_α имеет то же значение, что и раньше, f отлично от нуля, а $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k-1}$ означают пока еще неизвестные коэффициенты. Поэтому $\chi_0 = f$. Но по (13)

$$|z_{PQ^{-1}}| = |x_{PQ^{-1}}| \, |y_{PQ^{-1}}|.$$

Следовательно, и всякий линейный множитель $\Theta((z))$ также должен распадаться на произведение линейной функции от $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$ и линейной функции от $y_0, y_1, \ldots y_{k-1}$:

$$\frac{1}{f} \sum h_\gamma \chi_\gamma z_\gamma = \left(\sum a_\alpha x_\alpha\right)\left(\sum b_\beta y_\beta\right),$$

где $a_0 = b_0 = 1$. Если положить $y_0 = y_E = 1$, а $y_1 = \ldots = y_{k-1} = 0$ то $z_R = x_R$, т. е.

$$\frac{1}{f} \sum h_\gamma \chi_\gamma x_\gamma = \sum a_\alpha x_\alpha.$$

Следовательно,

$$f \sum h_\gamma \chi_\gamma z_\gamma = \left(\sum h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha\right)\left(\sum h_\beta \chi_\beta y_\beta\right). \tag{16}$$

Но уравнение (13) или

$$z_C = \sum x_R y_S \qquad (RS = C) \tag{17}$$

тождественно с

$$h_\gamma z_\gamma = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta\gamma'} x_\alpha y_\beta. \tag{18}$$

Ибо, если C элемент γ-ого класса, то когда R пробегает элементы α-ого класса, а S — элементы β-ого, случается $\frac{h_{\alpha\beta\gamma'}}{h_\gamma}$ раз, что $RS = C$. Путем сравнения коэффициентов у $x_\alpha y_\beta$ получается из (16)

$$h_\alpha h_\beta \chi_\alpha \chi_\beta = f \sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma'} \chi_\gamma, \tag{19}$$

и. следовательно, система значений $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k-1}$ равна одному из k различных характеров. Уравнение (15) можно привести к виду

$$f\xi = \sum \chi(R) x_R. \tag{20}$$

Если, обратно, χ — какой-либо из k характеров, то ξ — линейный множитель детерминанта Θ. Именно, если положить в уравнениях (17) и (18) $y_\beta = \chi_{\beta'}$, то будет

$$z_C = \sum_S x_{CS^{-1}} y_S = \sum_R x_{CR} \chi(R), \quad h_\gamma z_\gamma = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta\gamma'} x_\alpha \chi_{\beta'} =$$

$$= \frac{1}{f} \sum_\alpha h_\alpha h_\gamma \chi_\alpha \chi_{\gamma'} x_{\alpha'},$$

а, значит,

$$\sum_R \chi(R) x_{CR} = \chi(C^{-1})\xi, \quad \sum_R \chi(CR) x_R = \chi(C)\xi. \tag{21}$$

Умножим в детерминанте (14) элементы первой строки ($P = E$) на отличное от нуля число $\chi(E) = f$, а элементы строки с индексом P на $\chi(P)$ и затем прибавим все строки к первой. Тогда некоторый элемент первой строки будет равен

$$\sum_P \chi(P) x_{PQ^{-1}} = \chi(Q)\xi,$$

следовательно, Θ делится на ξ. Поэтому

$$\Theta = |x_{PQ^{-1}}| = \prod_\varkappa (\xi^{(\varkappa)})^{g^{(\varkappa)}} = \prod_\varkappa \left(\frac{1}{f^{(\varkappa)}} \sum_\varkappa h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} x_\alpha \right)^{g^{(\varkappa)}}, \tag{22}$$

где $g^{(\varkappa)}$ отличное от нуля целое число.

С помощью теорем о матрицах (линейных системах), которые я вывел в моей работе *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen* („О линейных подстановках и билинейных формах"), Crelle's Journal, Bd. 84, получается другое доказательство для этой теоремы, из которого вместе с тем выясняется значение чисел $g^{(\varkappa)}$. Систему из h строк и столбцов, обозначенную до сих пор через $(x_{PQ^{-1}})$, я буду обозначать еще короче — через (x). Если $\varepsilon_R = 0$ при R отличном от E, и $\varepsilon_E = 1$, то $(\varepsilon_{PQ^{-1}}) = (\varepsilon)$ — единичная система, которая получается из (x), если положить $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = 0$. В таком случае содержание уравнений (5) и (6), § 3, выражается формулой

$$\sum_\varkappa \left(\frac{1}{h} e^{(\varkappa)} \chi^{(\varkappa)} \right) = (\varepsilon), \tag{23}$$

а содержание уравнений (9) — формулами

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{h} e^{(\varkappa)} \chi^{(\varkappa)} \right)^2 = \left(\frac{1}{h} e^{(\varkappa)} \chi^{(\varkappa)} \right), \\ \left(\frac{1}{h} e^{(\varkappa)} \chi^{(\varkappa)} \right) \left(\frac{1}{h} e^{(\lambda)} \chi^{(\lambda)} \right) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Если в первой формуле опустить индекс $\varkappa$, то она говорит: уравнение наинизшей степени, которому удовлетворяет система $\left(\frac{e\chi}{h}\right)$, есть $\psi\left(\left(\frac{e\chi}{h}\right)\right)=0$, если $\psi(r)=r(r-1)$. Поэтому характеристический детерминант $\varphi(r)$ этой системы может обратиться в нуль только при $r=0$ и $r=1$, а так как $\psi(r)$ не имеет ни одного кратного линейного множителя, то все его элементарные делители — первой степени. Если, таким образом,

$$\varphi(r)=\left|r(\varepsilon)-\left(\frac{e\chi}{h}\right)\right|=r^{h-g}(r-1)^g, \tag{25}$$

то при $r=0$ обращаются в нуль все миноры детерминанта $\varphi(0)$ степеней $h, h-1, \ldots g+1$, но не все миноры степени g. Следовательно, g — ранг системы (χ).

Решая линейные уравнения (11), § 2, получим

$$h x_\alpha = \sum_\varkappa \chi_\alpha^{(\varkappa)} e^{(\varkappa)} \xi^{(\varkappa)} \tag{26}$$

Поэтому

$$(x)=\sum_\varkappa \xi^{(\varkappa)}\left(\frac{1}{h} e^{(\varkappa)} \chi^{(\varkappa)}\right) \tag{27}$$

и, следовательно,

$$\prod_\varkappa\left(r(\varepsilon)-\xi^{(\varkappa)}\left(\frac{1}{h} e^{(\varkappa)} \chi^{(\varkappa)}\right)\right)=r^h(\varepsilon)-r^{h-1}(x),$$

так как по (24) в разложении этого символического произведения все остальные члены обращаются в нуль. Поэтому также и детерминанты этих обеих систем равны:

$$\prod_\varkappa\left(r^{h-g^{(\varkappa)}}\left(r-\xi^{(\varkappa)}\right)^{g^{(\varkappa)}}\right)=r^{h(h-1)}\left|r(\varepsilon)-(x)\right|.$$

Поэтому степени r должны иметь в обеих частях этого уравнения одинаковые показатели. Если их сократить и положить, затем, $r=0$, то получится уравнение (22). Следовательно, в нем $g^{(\varkappa)}$ ранг системы:

$$\left(\chi^{(\varkappa)}(PQ^{-1})\right). \tag{28}$$

§ 6.

Пусть сначала в детерминанте h-ой степени $|x_{P,Q}|$ h^2 элементов $x_{P,Q}$ — независимые переменные. Если T — определенный элемент из $\mathfrak{H}$ и если положить

$$T^{-1}PT=P', \quad T^{-1}QT=Q',$$

то P' будет пробегать вместе с P h элементов из $\mathfrak{H}$, и Q' пробегает те же элементы в том же порядке. Поэтому

$$\Theta=|x_{P,Q}|=|x_{P',Q'}|. \tag{1}$$

При этом минор $\Theta_{A,B}$, дополнительный элементу $x_{A,B}$ в первом детерминанте, равен минору, дополнительному тому же элементу $x_{A,B}$ во втором детерминанте, только этот элемент стоит там на другом месте.

Теперь я ограничиваю изменяемость h^2 элементов детерминанта Θ в первую очередь тем, что полагаю $x_{P,Q} = x_{PQ^{-1}}$. В таком случае Θ зависит еще только от h независимых переменных; каждые h из h^2 элементов друг другу равны,— в каждой строке, равно как и в каждом столбце, имеются все h различных переменных. Различные строки отличаются друг от друга только порядком, в каком стоят переменные, причем этот порядок обусловлен структурой группы $\mathfrak{H}$. Но я утверждаю, что и минор $\Theta_{A,B}$ зависит не от A и B в отдельности, но только от $AB^{-1} = C$. Или: переменная x_C находится в Θ на h местах. На каждом из них к ней дополнителен тот же самый минор. Именно, для переменной, стоящей на диагонали, имеем $\Theta_{A,A} = | x_{R,S} |$, где R пробегает элементы из $\mathfrak{H}$ за исключением A, а S — те же $h-1$ элементов в том же самом порядке. Положив $R = UA$, $S = VA$, получим

$$x_{R,S} = x_{UA,VA} = x_{UAA^{-1}V^{-1}} = x_{UV^{-1}} = x_{U,V},$$

т. е. $\Theta_{A,A} = | x_{U,V} |$ где U и V пробегают все элементы из $\mathfrak{H}$, за исключением E. Следовательно, $| x_{U,V} | = \Theta_{E,E}$.

Если A и B — два определенных элемента из $\mathfrak{H}$, а $C = AB^{-1}$, то CP пробегает одновременно с P h элементов из $\mathfrak{H}$, только в другом порядке. Поэтому

$$\pm | x_{P,Q} | = | x_{CP,Q} | = | y_{P,Q} |,$$

если положить $x_{CPQ^{-1}} = y_{PQ^{-1}} = y_{P,Q}$. Но $\Theta_{B,B}(y) = \Theta_{E,E}(y)$, и поэтому

$$\Theta_{A,B} = \Theta_{C,E}. \tag{2}$$

Из этой теоремы получается соотношение:

$$\Theta_{A,B} = \frac{1}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial x_{AB^{-1}}}. \tag{3}$$

Теорию этих и еще более общих детерминантов, основу которой составляет настоящее исследование, я разрабатываю в упомянутой во введении работе. Сейчас же я ограничиваю изменяемость h величин x_R еще условием (11), § 5, т. е. я полагаю, что $x_R = x_S$, если R и S сопряжены. Если C принадлежит к γ-ому классу, то переменная $x_C = x_\gamma$, теперь встречается в каждой строке h_γ раз, а во всем детерминанте hh_γ раз. Но и здесь минор $\Theta_{A,B}$ имеет одно и то же значение для каждого из этих hh_γ мест.

При поставленных условиях не только оба детерминанта (1) имеют одно и то же значение, но и стоящие на соответственных местах переменные равны друг другу, $x_{P,Q} = x_{P',Q'}$. Поэтому и минор, сопряженный с переменной $x_{P,Q}$ в первом детерминанте, равен минору, сопряженному с переменной $x_{P', Q'}$ во втором; но последний, как уже выше замечено, равен минору, сопряженному с переменной $x_{P', Q'}$ в первом детерминанте. В соединении со (2) отсюда следует правильность формулы:

(4) $$\Theta_{P, Q} = \Theta_{R, S}, \quad \text{если} \quad RS^{-1} = T^{-1} PQ^{-1} T,$$

ибо

$$RS^{-1} = P'Q'^{-1},$$

т. е.

$$\Theta_{P, Q} = \Theta_{P', Q'} = \Theta_{R, S}.$$

Таким образом,

(5) $$\Theta_{A, B} = \frac{1}{hh_{AB^{-1}}} \frac{\partial \Theta}{\partial x_{AB^{-1}}}.$$

Поэтому из тождественных соотношений между элементами детерминанта и дополнительными им минорами получается

$$\sum_R \frac{1}{h_R} \frac{\partial \log \Theta}{\partial x_R} x_{RA^{-1}} = h\varepsilon_A,$$

т. е., если подставить для Θ его выражение (22), § 5,

$$\sum_R \sum_\varkappa \frac{g^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)} \xi^{(\varkappa)}} \chi_R^{(\varkappa)} x_{RA^{-1}} = h\varepsilon_A,$$

а так как по (21), § 5:

$$\sum_R \chi_R^{(\varkappa)} x_{RA^{-1}} = \chi^{(\varkappa)}(A) \xi^{(\varkappa)},$$

то

$$\sum_\varkappa \frac{g^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi^{(\varkappa)}(A) = h\varepsilon_A,$$

наконец, так как по (5) и (6), § 3, также

(6) $$\sum_\varkappa e^{(\varkappa)} \chi^{(\varkappa)}(A) = h\varepsilon_A,$$

то

$$\sum_\varkappa \left(\frac{g^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} - e^{(\varkappa)} \right) \chi_\alpha^{(\varkappa)} = 0.$$

В силу того, что детерминант (8), § 2, отличен от нуля, из последней формулы следует:

(7) $$g^{(\varkappa)} = e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)},$$

и этим доказано, что корни $g = ef$ уравнения (12), § 3, — целые числа.

Характеристическую функцию для Θ мы получим, заменив x_0 через $x_0 - r$, т. е. также и $\xi^{(\varkappa)}$ через $\xi^{(\varkappa)} - r$. Поэтому:

$$\Theta(x_0 - r, x_1, \ldots x_{k-1}) = \prod_{\varkappa} (\xi^{(\varkappa)} - r)^{g^{(\varkappa)}}$$

и следовательно, по (3), § 4

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \log \Theta (x_0 - r, x_1, \ldots x_{k-1})}{\partial r} = \frac{1}{h} \sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)} f^{(\varkappa)}}{r - \xi^{(\varkappa)}} = \tag{8}$$

$$= r^{-1} + x_0 r^{-2} + \Big(\sum_{\alpha, \beta,} h_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta\Big) r^{-3} +$$

$$+ \Big(\sum_{\alpha, \beta, \gamma,} h_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma\Big) r^{-4} + \Big(\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} h_{\alpha\beta\gamma\delta} x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta\Big) r^{-5} + \ldots$$

Таким образом, это выражение является порождающей функцией для всех определенных в § 1 чисел $h_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu}$. После того, как из этого разложения мы найдем числа $h_{\alpha\beta\gamma}$, детерминант (14), § 2, нам даст произведение k различных линейных множителей Θ. Соотношение между обоими этими детерминантами h-ой и k-ой степени является, пожалуй, одним из наиболее замечательных результатов излагаемой теории.

Из уравнения (5) следует еще, что если ξ^g множитель Θ, то все миноры $(h-1)$-ой степени детерминанта Θ делятся на ξ^{g-1}. Поэтому все миноры $(h-2)$-ой степени делятся на ξ^{g-2}, ..., все миноры $(h-g+1)$-ой степени делятся на ξ, но миноры $(h-g)$-ой степени не могут все делиться на ξ. Если, таким образом, $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$ независимые переменные, то Θ имеет только линейные элементарные делители.

Если каждые два элемента из $\mathfrak{H}$ переместимы, то $k = h$ характеры, определенные условиями [20])

$$\chi(AB) = \chi(A)\chi(B), \tag{9}$$

все степени $f = 1$, детерминант h-ой степени Θ, тождественно равный детерминанту k-ой степени (14), § 2, содержит каждый линейный множитель в степени $e = 1$, и его разложение легко непосредственно провести с помощью соотношений (9). Для циклических групп, у которых ξ переходит в резольвенту Lagrange'a, это разложение было дано уже в 1853 году Spottiswoode'ом, *Elementary Theorems relating to Determinants* („Элементарные теоремы относительно детерминантов"), Crelle's Journal, Bd. 51, S. 375. Другие случаи рассмотрели Nöther,—*Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten*, Math. Ann. Bd. 16. („Заметка об одном классе симметрических детерминантов"), Gegenbauer,— *Über eine specielle symmetrische Determinante* („Об одном специальном симметрическом детерминанте"), Wiener Ber. 1880, Puchta,— *Ein neuer Satz a s der Theorie der Determinanten* („Новая теорема из теории детерминантов"), Wiener Denkschriften, Bd. 43. Общую формулу для детерминанта коммутативной группы получил Dedekind в 1880 году перемножением детерминантов $|x_{PQ^{-1}}|$ и $|\chi^{(\varkappa)}(R)|$, в упомянутом во введении исследовании о групповых детерминантах. Как я узнал из 25-го тома *Fortschritte der Mathematik*, S. 220, Burnside тоже вывел эту формулу в работе: *On a property of certain determinants* „(О свойстве некоторых детерминантов“) в (недоступном мне) журнале *Messenger of Math.* (2) XXIII, p. 112.

§ 7.

Выведенные до сих пор теоремы и формулы сохраняют свою значимость, если понятие класса, на котором они базируются, рассматривать в более широком смысле. Если группа $\mathfrak{H}$ — инвариантная подгруппа другой группы $\mathfrak{H}'$, то назовем два элемента R и R' из $\mathfrak{H}$ *сопряженными* (относительно $\mathfrak{H}'$), если в $\mathfrak{H}'$ имеется элемент T, удовлетворяющий условию

$$R' = T^{-1} R T. \tag{1}$$

Пусть T — определенный элемент из $\mathfrak{H}'$. В таком случае, на основании уравнения (1), каждому элементу R из $\mathfrak{H}$ сооответствует элемент R' из $\mathfrak{H}$. Если R пробегает все элементы из $\mathfrak{H}$, то и R' пробегает их, только в другом порядке. Таким образом, мы получаем изоморфизм $\mathfrak{H}$ самой себе; при этом можем получить всякий возможный такой изоморфизм, выбирая подходящим образом группу $\mathfrak{H}'$ и в ней элемент T (*Über endliche Gruppen*, § 5,— „О конечных группах“ — Sitzungsber. 1895, S. 22).

Пусть A, B и P—элементы из $\mathfrak{H}$, и пусть $B=P^{-1}AP$ сопряжено с A относительно $\mathfrak{H}$. В таком случае и A' и $B'=P'^{-1}A'P'$ сопряжены относительно $\mathfrak{H}$ и обратно. Отсюда следует, что указанный изоморфизм переводит элементы класса (α) в элементы того же или иного класса (β). Поэтому для таких двух классов, которые я назову *сопряженными*, имеем $h_\alpha = h_\beta$. Если соединить теперь все элементы из $\mathfrak{H}$, сопряженные друг другу относительно $\mathfrak{H}'$ в один класс, то число этих новых классов $k' \leqq k$, и каждый новый класс (ρ') получается от соединения некоторого числа r сопряженных старых классов (α), (β), (γ), ... Он содержит

$$h'_\rho = h_\alpha + h_\beta + h_\gamma + \ldots = r h_\alpha \tag{2}$$

элементов из $\mathfrak{H}$, так как $h_\alpha = h_\beta = h_\gamma = \ldots$

k величин $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k-1}$, образующих характер χ, определены с точностью до общего множителя f тем, что

$$f\xi = \sum h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha, \tag{3}$$

— линейный множитель детерминанта Θ. Подобно же, каждый новый характер χ' определен тем, что

$$f'\xi' = \sum h'_\rho \chi'_\rho x'_\rho$$

— линейный множитель аналогичного детерминанта Θ'. Последний получается из Θ, если положить $x_\alpha = x_\beta = x_\gamma = \ldots = x'_\rho$ для всяких r сопряженных классов (α), (β), (γ), ..., объединяемых в один класс $(\rho)'$. Следовательно,

$$\frac{1}{f'}\, h'_\rho \chi'_\rho = \frac{1}{f}(h_\alpha \chi_\alpha + h_\beta \chi_\beta + h_\gamma \chi_\gamma + \ldots),$$

или по (2)

(4) $$\frac{f}{f'}\chi'_\rho = \frac{1}{r}(\chi_\alpha + \chi_\beta + \chi_\gamma + \ldots).$$

Если R элемент одного из этих r классов, то это уравнение можно заменить также через

(5) $$\frac{f}{f'}\chi'(R) = \frac{1}{h'}\sum_U{}' \chi(U^{-1}RU),$$

где U пробегает все h' элементов из $\mathfrak{H}'$. Ибо в этой сумме h' членов встречается каждый из r членов суммы (4), и при этом одинаковое число раз.

Но после того, как мы приравняем друг к другу определенные комплексы переменных из Θ, два различных линейных множителя ξ и η из Θ могут оказаться равными. Таким образом два различных характера χ и ψ могут породить один и тот же характер χ'. Это произойдет в следующем случае:

Если T — определенный элемент из $\mathfrak{H}'$, то каждому элементу R из $\mathfrak{H}$ соответствует по (1) элемент R' из $\mathfrak{H}$. Если S пробегает элементы класса (α), то и S' пробегает элементы некоторого класса (β). Поэтому по уравнению (4), § 5,

$$\sum_{S'}(\chi(E)\chi(A'S') - \chi(A')\chi(S')) = 0.$$

Если положить, таким образом,

$$\chi(R') = \chi(T^{-1}RT) = \psi(R),$$

то в силу того, что $A'S' = (AS)'$, получим:

$$\sum_S \Big(\psi(E)\psi(AS) - \psi(A)\psi(S)\Big) = 0.$$

Из этого соотношения, тождественного с уравнением (6), § 2, следует, что $\psi(R)$ есть характер. Два таких характера χ и ψ назовем *сопряженными* (относительно $\mathfrak{H}'$). Если подстановка T переводит не каждый из старых классов в самого себя, то характер χ можно выбрать так, чтобы ψ был от него отличен. Ибо, если, напр., A и A' представляют различные классы, то не может для всякого значения $\varkappa$ быть $\chi^{(\varkappa)}(A) = \chi^{(\varkappa)}(A')$. Если выбрать $\varkappa$ так, чтобы это уравнение не было верным, и положить, затем, $\chi^{(\varkappa)} = \chi$, то $\psi(A) = \chi(A')$ будет отличным от $\chi(A)$, т. е. ψ — характер, отличный от χ.

Два сопряженных характера различаются между собою только расположением k величин $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k-1}$. Но, по формуле (10), § 5:

$$\sum_R \chi(R^{-1})\chi(R) = \frac{hf}{e}, \tag{6}$$

т. е. также

$$\sum_R \psi(R^{-1})\psi(R) = \sum_{R'} \chi(R'^{-1})\chi(R') = \frac{hf}{e},$$

так как R' одновременно с R пробегает все элементы из $\mathfrak{H}$. Поэтому для двух сопряженных характеров, в силу того, что $f = \chi(E) = \psi(E)$, и число $g = ef$ — показатель линейного множителя ξ в Θ — имеет одно и то же значение.

Два сопряженных характера χ и ψ порождают один и тот же новый характер χ'. Ибо:

$$\frac{h'f}{f'}\chi'(R) = \sum_U{}' \chi(U^{-1}RU) = \sum_U{}' \psi(U^{-1}RU). \tag{7}$$

Именно, последняя сумма равна $\sum'\chi((UT)^{-1}R(UT))$, т. е. отличается от первой только расположением слагаемых, так как UT одновременно с U пробегает все элементы из $\mathfrak{H}'$.

Обратно, два характера χ и ψ, порождающие один и тот же характер χ', должны непременно быть сопряженными. Т. е. при существовании уравнения (7) в группе $\mathfrak{H}'$ должен находиться такой элемент T, что для всякого элемента R из $\mathfrak{H}$ $\psi(R) = \chi(T^{-1}RT)$, ибо из уравнения (7) следует

$$\sum_U{}' \sum_R \chi(U^{-1}RU)\psi(R^{-1}) = \sum_U{}' \sum_R \psi(U^{-1}RU)\psi(R^{-1}).$$

Пусть U — данный элемент из $\mathfrak{H}'$. Если $\psi(U^{-1}RU) = \psi(R)$ для всякого элемента R из $\mathfrak{H}$, то по (6)

$$\sum_R \psi(U^{-1}RU)\psi(R^{-1})$$

— положительная, отличная от нуля величина. Этому условию удовлетворяет всякий элемент U из $\mathfrak{H}'$, содержащийся в $\mathfrak{H}$. Если же оно не исполнено, то $\psi(U^{-1}RU) = \vartheta(R)$ — отличный от $\psi(R)$ характер, и, следовательно, приведенная выше сумма обращается в нуль по уравнению (10), § 5. Правая часть последнего уравнения имеет, таким образом, отличное от нуля значение, а, следовательно, то же самое относится и к сумме левой части. Но если U — снова определенный элемент из $\mathfrak{H}'$, а R — переменный элемент из $\mathfrak{H}$, то $\chi(U^{-1}RU) = \vartheta(R)$ есть характер. Если этот характер отличен от $\psi(R)$, то

$$\sum_R \chi(U^{-1}RU)\psi(R^{-1}) = 0.$$

Следовательно, ϑ не может для всякого U быть отличным от ψ, т. е. должен существовать элемент $U = T$, для которого $\chi(T^{-1}RT) = \psi(R)$, и, следовательно, χ и ψ — сопряженные характеры.

В сумме (5) находятся все сопряженные с χ характеры и каждый входит одно и то же число раз. Ибо те элементы U из $\mathfrak{H}'$, которые удовлетворяют уравнению $\chi(U^{-1}RU) = \chi(R)$ для всякого элемента R из $\mathfrak{H}$, образуют содержащуюся в $\mathfrak{H}'$ группу, которая сама содержит $\mathfrak{H}$. Поэтому число s характеров $\chi^{(\varkappa)}$, $\chi^{(\lambda)}$, $\chi^{(\mu)}$, ..., сопряженных с χ, есть делитель числа $\frac{h'}{h}$, и уравнение (5) можно привести к виду

$$\frac{f}{f'}\chi' = \frac{1}{s}\left(\chi^{(\varkappa)} + \chi^{(\lambda)} + \chi^{(\mu)} + \dots\right). \tag{8}$$

Формулы (4) и (8) представляют два различных способа образования новых характеров, которые я называю *относительными характерами* группы $\mathfrak{H}$ по отношению к $\mathfrak{H}'$, — из старых.

Если при переходе от Θ к Θ' различные линейные множители ξ, η, ... функции Θ делаются равными, то они соответствуют сопряженным характерам χ, ψ, ..., и обратно. Поэтому степени, в которых ξ, η, ... входят в Θ, имеют все один и тот же показатель g. Показатель g' степени, в которой соответствующий линейный множитель ξ' содержится в Θ', есть, следовательно,

$$g' = sg. \tag{9}$$

Поэтому можно, напр., положить $f' = sf$, $e' = e$. Но в то время, как, по упомянутому выше, g — есть квадрат, g' не должно быть обязательно квадратом. Этим объясняется, что доказательство той теоремы может быть проведено исключительно использованными до сих пор средствами.

Относительные характеры $\mathfrak{H}$ имеют для самой группы $\mathfrak{H}'$ простое значение. Новые классы, на которые я распределил элементы из $\mathfrak{H}$, являются также классами для $\mathfrak{H}'$, так как $\mathfrak{H}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}'$, Так как я теперь не буду больше упоминать о старых классах и о функции Θ, то я изменю обозначения и то, что я до сих пор обозначал через k' и Θ', обозначу теперь через k и Θ; новые классы обозначу через (0), (1), ... $(k-1)$, а соответствующие им переменные через x_0, x_1, ... x_{k-1}. В то же время пусть k' — число всех классов группы $\mathfrak{H}'$. В таком случае классы (k), $(k+1)$, ... $(k'-1)$ не содержат ни одного элемента из $\mathfrak{H}$. Соответствующий группе $\mathfrak{H}'$ детерминант (14), § 5, степени h' пусть будет

$$\Theta' = |x_{P,Q}| = |x_{PQ^{-1}}|,$$

где P и Q пробегают $h' = nh$ элементов из $\mathfrak{H}'$ в одном и том же порядке. Если $\mathfrak{H}'$ распадается по модулю $\mathfrak{H}$ на n комплексов

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}T + \mathfrak{H}U + \dots,$$

то я располагаю строки и столбцы детерминанта Θ' так, чтобы P пробегало сначала h элементов из $\mathfrak{H}$, затем h элементов из $\mathfrak{H}T$, затем — из $\mathfrak{H}U$ и т. д. Если положить в Θ' $x_k = \cdots = x_{k'-1} = 0$, то остаются еще только k переменных x_R, индексы которых R — элементы из $\mathfrak{H}$.

В первых h строках остаются только элементы первых h столбцов, образующие детерминант h-ой степени

$$\Theta = | x_{R,S} | = | x_{RS^{-1}} |,$$

где R и S пробегают элементы из $\mathfrak{H}$. В следующих h строках остаются только элементы $x_{RT,ST} = x_{RT(ST)^{-1}} = x_{RS^{-1}}$, стоящие в столбцах, начиная с номера $h+1$ и кончая номером $2h$; они образуют тоже детерминант Θ, и т. д. Поэтому, положив $x_k = \cdots = x_{k'-1} = 0$, получим

(10) $$\Theta' = \Theta^n.$$

Но коэффициенты линейных множителей Θ являются относительными характерами $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{k-1}$ для $\mathfrak{H}$, а коэффициенты линейных множителей Θ' — характерами группы $\mathfrak{H}'$. Таким образом, в каждом характере $\chi_0, \ldots \chi_{k-1}, \chi_k, \ldots \chi_{k'-1}$ группы $\mathfrak{H}'$ k первых значений $\chi_0, \ldots \chi_{k-1}$ образуют (если не обращать внимания на общий множитель f) относительный характер группы $\mathfrak{H}$, и обратно, — каждый относительный характер $\mathfrak{H}$ $\chi_0, \ldots \chi_{k-1}$ можно одним или несколькими способами дополнить до характера группы $\mathfrak{H}'$, присоединив подходящие значения $\chi_k, \ldots \chi_{k'-1}$.

§ 8.

Я проиллюстрирую теорию характеров на нескольких примерах. Четные перестановки четырех символов образуют группу $\mathfrak{H}$ порядка $h = 12$. Ее элементы распадаются на 4 класса; элементы порядка 2 образуют двойной класс (1), элементы порядка 3 — два двойных класса (2) и $(3) = (2')$. Пусть ρ первообразный кубический корень из единицы.

Тетраэдр

$h = 12.$

	$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	h_α
χ_0	1	3	1	1	1
χ_1	1	—1	1	1	3
χ_2	1	0	ρ	ρ^2	4
χ_3	1	0	ρ^2	ρ	4

Значения χ_0 являются одновременно значениями $f = e$.

1. Все перестановки 4 символов образуют группу $\mathfrak{H}'$ порядка $h'=24$, для которой $\mathfrak{H}$—инвариантная подгруппа. Классы (2) и (3) сопряжены и объединяются в один класс (2)'. Подобно же, и характеры $\chi^{(2)}$ и $\chi^{(3)}$ сопряжены. Относительные характеры следующие:

	$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	h_σ
χ_0	1	3	2	1
χ_1	1	—1	2	3
χ_2	1	0	—1	8

Чтобы получить эту таблицу, складываем, по формуле (8), § 7, в предыдущей таблице оба последних столбца и из двух последних строк, которые сделались одинаковыми, берем только одну. Или берем по формуле (4), § 7, среднее арифметическое элементов обеих последних строк, а из двух последних столбцов мы берем только один. Чтобы получить целые числа, умножим еще элементы последнего столбца на $f'=2$. Для обоих первых характеров $e=f=\chi_0$, а для последнего $e=1$, $f=2$, т. е. $g=2$ не квадрат.

В группе $\mathfrak{H}'$ четные перестановки порядка 2 образуют класс (1), нечетные — класс (2), перестановки порядков 3 и 4 — соотв. классы (3) и (4). Каждый из 5 классов двойной. Классы (2) и (4) содержат нечетные перестановки, классы (0), (1) и (3) содержат четные перестановки и образуют вместе группу $\mathfrak{H}$.

Октаэдр

$h=24.$

	$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	h_σ
χ_0	1	3	3	2	1	1
χ_1	1	—1	—1	2	1	3
χ_2	1	1	—1	0	—1	6
χ_3	1	0	0	—1	1	8
χ_4	1	—1	1	0	—1	6

Для каждого характера $e=f=\chi_0$.

2. Перестановки из 5 символов образуют группу $\mathfrak{H}'$ порядка $h'=120$, из которых четные в отдельности — группу $\mathfrak{H}$ порядка $h=60$. Элементы $\mathfrak{H}'$ распадаются на 7 классов. Элементы порядков 3, 4, 5, 6 образуют соотв. классы (3), (4), (5), (6). Из перестановок порядка 2 четные образуют класс (1), нечетные — класс (2). Классы (2), (4) и (6) содержат нечетные перестановки, остальные классы содержат четные перестановки и образуют вместе подгруппу $\mathfrak{H}$. Каждый из 7 классов двойной. Если рассматривать группу $\mathfrak{H}$ отдельно, то в ней класс (5) группы $\mathfrak{H}'$ распадается на 2 класса. Обозначим поэтому 5 классов группы $\mathfrak{H}$ через (0), (1), (3), (4), (5), где (4) и (5) содержат элементы порядка 5. В $\mathfrak{H}$, как и в $\mathfrak{H}'$, каждый класс двойной.

Икосаэдр

$h=60.$

	$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$	h_α
χ_0	1	5	4	3	3	1
χ_1	1	1	0	-1	-1	15
χ_3	1	-1	1	0	0	20
χ_4	1	0	-1	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	12
χ_5	1	0	-1	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	12

Здесь постоянно $e=f=\chi_0$. Но относительные характеры по отношению к $\mathfrak{H}'$ такие:

	$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(5)}$	h_α
χ_0	1	5	4	6	1
χ_1	1	1	0	-2	15
χ_3	1	-1	1	0	20
χ_5	1	0	-1	1	24

Здесь $e^{(5)}=3$, $f^{(5)}=6$, т. е. $g^{(5)}=18$ — не квадрат. Наконец, получаем для группы $\mathfrak{H}'$:

$h = 120.$

	$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$	$\chi^{(6)}$	h_α
χ_0	1	5	5	4	4	6	1	1
χ_1	1	1	1	0	0	—2	1	15
χ_2	1	1	—1	2	—2	0	—1	10
χ_3	1	—1	—1	1	1	0	1	20
χ_4	1	—1	1	0	0	0	—1	30
χ_5	1	0	0	—1	—1	1	1	24
χ_6	1	1	—1	—1	1	0	—1	20

Для симметрической группы n-ой степени $\mathfrak{H}$ — все характеры также целые рациональные числа. Причина этому заключается в том, что R и R^a всегда сопряжены в $\mathfrak{H}$, если a взаимно просто с порядком R.[21]

§ 9.

Для более общего примера я выберу группу $\mathfrak{H}$ порядка

(1) $$h = \frac{1}{2} p (p^2 - 1),$$

образованную линейными подстановками

(2) $$y \equiv \frac{\gamma + \delta x}{\alpha + \beta x} \pmod p$$

с детерминантами

(3) $$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod p$$

при нечетном простом числе p. Ее свойства, о которых будет здесь идти речь, очень подробно выведены Gierster'ом в работе: „*Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades* („Подгруппы группы Галуа модулярных уравнений для случая простой степени преобразования“), Math. Ann. Bd. 18, S. 319. Из этой интересной и важной работы я беру следующие результаты:

h элементов группы $\mathfrak{H}$ распадаются на

(4) $$k = \frac{1}{2}(p - 1) + 3$$

классов сопряженных элементов. Главный класс, образованный элементом E, обозначим не через (0), как в общей теории, а через (λ). Элементы порядка p образуют два класса, которые я тоже обозначу не цифрами, а буквами (μ) и (ν). Пусть P и Q — два несопряженных элемента порядка p. Если a — квадратичный вычет, а b — невычет числа p, то P^a сопряжено с P, а P^b не сопряжено с P. Поэтому, если $p \equiv 3 \pmod 4$, то (μ) и (ν) — обратные друг другу классы, и можно взять $Q = P^{-1}$. Если же $p \equiv 1 \pmod 4$, то P и P^{-1} сопряжены, подобно же Q и Q^{-1}, т. е. каждый из этих обоих классов двойной.

Порядок каждого иного элемента группы — делитель числа $\frac{1}{2}(p-1)$ или $\frac{1}{2}(p+1)$. Существует элемент R порядка $\frac{1}{2}(p-1)$ и элемент S порядка $\frac{1}{2}(p+1)$. Между степенями R каждые две с противоположными показателями R^a и R^{-a} сопряжены друг с другом; подобно же и степени S. В то же время элементы

$$(5)\qquad \begin{gathered} R,\ R^2, \ldots R^{\frac{p-1}{4}} \left(\text{соотв. } R^{\frac{p-3}{4}}\right), \\ S,\ S^2, \ldots S^{\frac{p-1}{4}} \left(\text{соотв. } S^{\frac{p+1}{4}}\right), \end{gathered}$$

— смотря по тому, что $p \equiv 1$, или $3 \pmod 4$, — представляют $\frac{1}{2}(p-1)$ различных классов. Присоединив сюда еще три элемента E, P и Q, получим для каждого из k классов одного и только одного представителя. Каждый класс двойной. Только при $p \equiv 3 \pmod 4$ классы (μ) и (ν) взаимно обратны. Выбрав каким-нибудь определенным образом R и S, назовем число $\pm a \left(\operatorname{mod} \frac{1}{2}(p-1)\right)$ индексом представляемого посредством R^a или R^{-a} класса, и подобно же число $\pm b \left(\operatorname{mod} \frac{1}{2}(p+1)\right)$ — индексом представляемого через S^b или S^{-b} класса.

Для каждых двух сопряженных подстановок (2) число

$$(6)\qquad \varkappa \equiv \frac{1}{2}(\alpha + \delta) \pmod p$$

имеет одну и ту же абсолютную величину, а, следовательно, и оба корня каждого из двух нижеследующих сравнений тоже с одной и той же абсолютной величиной

$$(7)\qquad x^2 \pm 2\varkappa x + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Поэтому я называю $\pm\varkappa$ *инвариантом* класса, к которому принадлежит подстановка (2). Обратно, если две подстановки имеют один и тот же инвариант $\pm\varkappa$, то они сопряжены, за исключением случая, когда $\varkappa \equiv \pm 1$. Подстановки с инвариантом $\varkappa \equiv \pm 1$

распадаются на 3 класса, сообразно с квадратичным характером по модулю p чисел, представляемых формой

$$\frac{1}{2}(\alpha+\delta)\left(\beta x^2+(\alpha-\delta)xy-\gamma y^2\right). \tag{8}$$

Если все эти числа делятся на p, то $\beta\equiv\gamma\equiv 0$, $\alpha\equiv\delta\equiv\pm 1$, и мы получаем главный класс (λ). Если они не все делятся на p, то числа, представляемые формой и взаимно простые с p, или все вычеты, или все невычеты числа p. В первом случае $\varkappa\beta$ — вычет, а если $\beta\equiv 0$, то и $-\varkappa\gamma$ вычет. Этот класс обозначим через (μ). Во втором случае $\varkappa\beta$ невычет, а если $\beta=0$, то и $-\varkappa\gamma$ невычет. Этот класс обозначим через (ν). Если же $\varkappa$ отлично от ± 1, то существует только один класс с инвариантом $\pm\varkappa$, который мы обозначим через $(\varkappa)$ или через $(\pm\varkappa)$ $\left(\varkappa=0,\ 2,\ 3,\ldots\frac{p-1}{2}\right)$. Если положить

$$\varepsilon_\varkappa=\left(\frac{\varkappa^2-1}{p}\right),\quad \varepsilon_0=\varepsilon=\left(\frac{-1}{p}\right),\quad \varepsilon_1=0, \tag{9}$$

то получим для числа элементов каждого из этих k классов формулы

$$\left\{\begin{aligned} &h_\lambda=1,\quad h_\mu=h_\nu=\frac{1}{2}(p^2-1),\quad h_0=\frac{1}{2}p(p+\varepsilon),\\ &\qquad\qquad h_\varkappa=p(p+\varepsilon_\varkappa).\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Все элементы классов (μ) и (ν) имеют порядок p. Класс (0) состоит из всех элементов $\mathfrak{H}$, которых порядок равен 2. Несколько отличные свойства этого класса, по сравнению с остальными классами $\varkappa$, объясняются следующим: если A — элемент класса $(\varkappa)$, то A и A^{-1}, хоть и сопряжены, но различны. Но если $\varkappa=0$, то оба эти элемента одинаковы. Если порядок R^a не 2 (или 1), то $\frac{1}{2}(p-1)$ степеней R являются единственными элементами из $\mathfrak{H}$, переместимыми с R^a. Но с группой этих степеней переместим еще элемент T порядка 2, удовлетворяющий условию $T^{-1}RT=R^{-1}$. Аналогичное имеем для S^b. Но если R^a (соотв. S^b) имеет порядок 2, то, кроме степеней R, и элемент T тоже переместим с R^a.

Если $\varkappa^2-1$ квадратичный вычет числа p, т. е. $\varepsilon_\varkappa=+1$, то порядок элемента класса $(\varkappa)$ есть показатель, к которому принадлежит $(\varkappa+\sqrt{\varkappa^2-1})^2$ по модулю p, т. е. делитель числа $\frac{1}{2}(p-1)$. Если же $\varkappa^2-1$ невычет, т. е. $\varepsilon_\varkappa=-1$, то этот порядок есть показатель, к которому принадлежит x^2 (modd. p,

$x^2 - 2\varkappa x + 1$), т. е. делитель числа $\frac{1}{2}(p+1)$; таким образом, в обоих случаях этот порядок — делитель числа $\frac{1}{2}(p-\varepsilon_\varkappa)$. Поэтому, обратно, для класса, к которому принадлежит R^a, $\varepsilon_\varkappa = +1$, а для класса S^b $\varepsilon_\varkappa = -1$. По (5) элементы, порядки которых — делители

$$\frac{1}{2}(p-1), \tag{11}$$

распадаются на

$$\frac{1}{4}(p-\varepsilon) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$$

классов, а элементы, порядки которых — делители

$$\frac{1}{2}(p+1), \tag{12}$$

распадаются на $\frac{1}{4}(p-\varepsilon)$ классов. При этом главный элемент не принимается во внимание. Или, иначе: элементы, порядки которых — делители

$$\frac{1}{2}(p-\varepsilon), \tag{13}$$

распадаются на

$$\frac{1}{4}(p-\varepsilon)$$

классов, а элементы, порядки которых — делители

$$\frac{1}{2}(p+\varepsilon) \tag{14}$$

распадаются на

$$\frac{1}{4}(p-\varepsilon) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$$

классов. Если $\pm\varkappa$ инвариант класса, то я определяю теперь следующим образом его индекс: если r и s первообразные корни сравнений

$$r^{p-1} \equiv 1, \quad s^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{15}$$

то r реально, а s мнимо, но $s^b + s^{-b}$ реально. Если $\varepsilon_\alpha = +1$, то каждое из двух сравнений (7) имеет два реальных корня $r^{\pm a}, r^{\frac{1}{2}(p-1)\pm a}$. В таком случае я называю взятое по модулю $\frac{1}{2}(p-1)$ число $\pm a$ индексом класса $(\pm\alpha)$. Но если $\varepsilon_\beta = -1$, то каждое из упомянутых сравнений имеет два мнимых корня $s^{\pm b}$, $s^{\frac{1}{2}(p+1)\pm b}$. В этом случае я называю взятое по модулю $\frac{1}{2}(p+1)$ число $\pm b$ индексом класса $(\pm\beta)$. Это определение сводится к прежнему, если за R выбрать подстановку $y \equiv \frac{rx}{r^{-1}}$, а за S подстановку, которая в мнимой форме имеет вид $y \equiv \frac{sx}{s^{-1}}$. (Giester, привед. выше работа, § 3). Ибо, если r и r^{-1} корни характеристического уравнения (7) для подстановки R, то r^a и r^{-a} — характеристические корни для подстановки R^a.

§ 10.

Три (различных или одинаковых) класса назовем *конкордантными,* если между инвариантами α, β, γ существует соотношение

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\pm 2\alpha\beta\gamma \equiv 1 \pmod p; \tag{1}$$

в противном случае назовем их *дискордантными.* Если, напр., $\gamma\equiv\pm 1$, то это соотношение сводится к $\beta\equiv\pm\alpha$. Если $\gamma\equiv 0$, то оно имеет вид $\alpha^2+\beta^2\equiv 1$. Я исключаю случай, когда один из инвариантов равен ± 1. Если написать уравнение (1) в форме

$$(\alpha^2-1)(\beta^2-1)\equiv(\alpha\beta\pm\gamma)^2,$$

то отсюда следует

$$\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\beta=\varepsilon_\gamma\,. \tag{2}$$

Если α и β даны, то с ними конкордантны

$$\begin{aligned}\pm\gamma&\equiv\alpha\beta+\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}\,,\\ \pm\delta&\equiv\alpha\beta-\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}\,,\end{aligned} \tag{3}$$

и $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_\beta=\varepsilon_\gamma=\varepsilon_\delta$. Если, напр., $\beta\equiv\pm\alpha$, то $\pm\gamma\equiv 2\alpha^2-1$ и $\pm\delta\equiv 1$, и, следовательно, всегда $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_{(2\alpha^2-1)}$. Порядки элементов трех конкордантных классов все делители числа $\frac{1}{2}(p-1)$ или все делители $\frac{1}{2}(p+1)$. Таким образом, если a, b, c их индексы, то все они относятся к одному и тому же первообразному корню r (или s). Если

$$2\alpha\equiv r^a+r^{-a},\quad 2\beta\equiv r^b+r^{-b},\quad 2\gamma\equiv r^c+r^{-c}$$

то сравнение (1) (для верхнего знака) переходит в

$$(r^{a+b+c}+1)(r^{a-b-c}+1)(r^{-a+b-c}+1)(r^{-a-b+c}+1)\equiv 0,$$

т. е. тождественно с условием

$$(4) \qquad a \pm b \pm c \equiv 0 \left(\bmod \frac{1}{2}(p-1), \text{ соотв. } \frac{1}{2}(p+1) \right).$$

Таким образом, индексы обоих классов (3):

$$(5) \qquad c \equiv a+b, \quad d \equiv a-b.$$

Я обозначаю, далее, сокращенно

$$(6) \qquad \begin{cases} 2\eta_\varkappa = \left(\frac{-2}{p}\right)\left(\left(\frac{1+\varkappa}{p}\right)+\left(\frac{1-\varkappa}{p}\right)\right), \\ \eta_0 = \left(\frac{-2}{p}\right), \quad 2\eta_1 = \varepsilon. \end{cases}$$

Если $\varepsilon_\beta = -\varepsilon$, то $\eta_\beta = 0$. Если же $\varepsilon_\alpha = +\varepsilon$, то

$$(7) \qquad \eta_\alpha = \left(\frac{-2}{p}\right)\left(\frac{1+\alpha}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right)\left(\frac{1-\alpha}{p}\right) = (-1)^a \varepsilon.$$

Ибо, если $\varepsilon = +1$ и $2\alpha \equiv r^a + r^{-a}$, то $2(\alpha+1) \equiv (r^{-a}+1)^2 r^a$, т. е.

$$\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{1+\alpha}{p}\right) = \left(\frac{r^a}{p}\right) = (-1)^a.$$

Но если $\varepsilon = -1$ и $2\alpha \equiv s^a + s^{-a}$, то $2\alpha + 2 \equiv s^a + s^{-a} + 2$. Таким образом, если $a = 2b$ четное, то $2\alpha + 2 \equiv (s^b + s^{-b})^2$, т. е. квадратичный вычет, так как $s^b + s^{-b}$ — реально. Обратно, если $2\alpha + 2 \equiv \equiv 4\beta^2$ — квадратичный вычет, то $2\alpha - 2 = 4(\beta^2 - 1)$ — невычет, так как $\varepsilon_\alpha = -1$, т. е. $\alpha^2 - 1 = (\alpha-1)(\alpha+1)$ — невычет. Если при этом s^b и s^{-b} корни сравнения $x^2 - 2\beta x + 1 \equiv 0$, то $2\beta \equiv s^b + s^{-b}$, т. е. $s^a + s^{-a} + 2 \equiv (s^b + s^{-b})^2$ или $s^a + s^{-a} \equiv s^{2b} + s^{-2b}$. Следовательно, $a \equiv \pm 2b \pmod{p+1}$, т. е. a четное.

Пусть теперь α, β, γ числа в промежутке от 2 до $\frac{1}{2}(p-1)$. В таком случае

$$h_{000} = \frac{1}{2} h, \quad h_{00\alpha} = h, \quad h_{0\alpha\beta} = 2h, \quad h_{\alpha\beta\gamma} = 4h,$$

если три класса дискордантны. Если же они конкордантны, то

$$h_{0\alpha\beta} = 2h + \varepsilon p^2 (p+\varepsilon), \quad h_{\alpha\beta\gamma} = 4h + \varepsilon_\alpha p^2 (p + \varepsilon_\alpha).$$

Далее:

$$h_{\lambda\lambda\lambda} = 1, \quad h_{\lambda\mu\mu} = h_{\lambda\nu\nu} = h_\mu \frac{1}{2}(1+\varepsilon), \quad h_{\lambda\mu\nu} = h_\mu \frac{1}{2}(1-\varepsilon),$$

$$h_{00\lambda} = \frac{1}{2} p(p+\varepsilon), \quad h_{\alpha\alpha\lambda} = p(p+\varepsilon_\alpha), \quad h_{\alpha\beta\lambda} = 0.$$

$$h_{\mu\mu\mu} = h_{\nu\nu\nu} = h_\mu \left(\frac{3}{4}(p-\varepsilon) + \frac{1}{2}(p-1) \right), \quad h_{\mu\mu\nu} = h_{\mu\nu\nu} =$$

$$= h_\mu \left(\frac{1}{4}(p-\varepsilon) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \right).$$

$$h_{00\mu} = h_{00\nu} = h\frac{1}{2}(1+\varepsilon), \quad h_{0\alpha\mu} = h_{0\alpha\nu} = h,$$

$$h_{\alpha\beta\mu} = h_{\alpha\beta\nu} = 2h, \quad h_{\alpha\alpha\mu} = h_{\alpha\alpha\nu} = 2h + \varepsilon_\alpha h.$$

$$h_{0\mu\mu} = h_{0\nu\nu} = h\frac{1}{2}(1+\varepsilon\eta), \quad h_{0\mu\nu} = h\frac{1}{2}(1-\varepsilon\eta),$$

$$h_{\alpha\mu\mu} = h_{\alpha\nu\nu} = h(1+\varepsilon\eta_\alpha), \quad h_{\alpha\mu\nu} = h(1-\varepsilon\eta_\alpha).$$

Я хочу кратко указать путь, которым я вычислил эти числа: чтобы получить $\frac{h_{0\alpha\beta}}{h_0}$, берем некоторую подстановку класса (0) и компонируем ее со всеми подстановками класса (α)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & 2\alpha-\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta & 2\alpha-\xi \\ -\xi & -\eta \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы полученная подстановка принадлежала к классу $(\beta)' = (\beta)$, должно быть

$$\zeta - \eta = \pm 2\beta, \quad \xi(2\alpha-\xi) - \eta\zeta \equiv 1,$$

т. е.

$$(\xi-\alpha)^2 + (\eta\pm\beta)^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 - 1.$$

Если β отлично от нуля, то число решений обоих этих сравнений вдвое больше числа решений сравнения $\xi^2 + \eta^2 \equiv \omega$, где $\omega \equiv \alpha^2 + \beta^2 - 1$. Если ω отлично от нуля, то это число $= p - \varepsilon$. Но если $\omega \equiv 0$, т. е. (0), (α), (β) конкордантные классы, то оно $= p - \varepsilon + \varepsilon p$. Но так как $h_0 = \frac{1}{2}p(p+\varepsilon)$, то $h_{0\alpha\beta} = 2h$, за исключением случая, когда $\alpha^2 + \beta^2 \equiv 1$; в этом последнем случае $h_{0\alpha\beta} = 2h + \varepsilon p^2(p+\varepsilon)$.

Группу $\mathfrak{H}$ можно расширить до группы порядка $2h$, в которой P и Q сопряженные элементы. Она имеет изоморфизм в себе, который переводит классы (μ) и (ν) друг в друга. Поэтому для класса (μ) получаются те же соотношения, что и для (ν). Напр., $h_{\mu\nu\nu} = h_{\nu\mu\mu}$. По формулам (10), § 9, имеем $h_{\lambda\mu\nu} = h_\mu \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$. Чтобы найти $\frac{1}{h_\mu}(h_{\mu\nu\mu} + h_{\mu\nu\nu} + h_{\mu\nu\lambda})$, берем некоторую подстановку из класса (μ), компонируем ее со всеми подстановками из (ν)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \zeta & 2-\xi \end{pmatrix}$$

и положим инвариант полученной подстановки равным ± 1; получаем уравнения

$$\zeta - \eta + 4 - 2\xi \equiv \pm 2, \quad 2\xi - \xi^2 - \eta\zeta \equiv 1.$$

Взяв нижний знак, получим, исключив ξ,

$$(\eta + \zeta + 4)^2 \equiv 16\eta.$$

Это сравнение не имеет годного для нас решения, ибо η должно быть невычетом, а при $\eta = 0$ ζ должно быть невычетом. Если взять верхний знак, то получам $(\eta+\zeta)^2 \equiv 0$, т. е. $\eta \equiv -\zeta$. Поэтому за η можно взять любой невычет и получим $\frac{1}{2}(p-1)$ решений.

Следовательно, $2h_{\mu\mu\nu} + h_\mu \frac{1}{2}(1-\varepsilon) = h_\mu \frac{1}{2}(p-1)$, т. е.

$$h_{\mu\mu\nu} = h_\mu \left(\frac{1}{4}(p-\varepsilon) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \right).$$

Таким образом для определения характеров группы $\mathfrak{H}$ надо решить следующие уравнения. Положим для краткости

$$x = \chi_0 + 2\sum \chi_\varkappa + \chi_\mu + \chi_\nu,$$
$$y = \eta_0\chi_0 + 2\sum \eta_\varkappa \chi_\varkappa + \eta_1(\chi_\mu + \chi_\nu),$$

где $\varkappa = 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$. Пусть α и β числа ряда $0, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$.

1) Если α отлично от β и $\varepsilon_\beta = -\varepsilon_\alpha$, то

$$p\chi_\alpha \chi_\beta = fx.$$

2) Если же $\varepsilon_\beta = +\varepsilon_\alpha$, то

$$\frac{p(p+\varepsilon_\alpha)}{f}\chi_\alpha \chi_\beta = x(p-\varepsilon_\alpha) + \varepsilon_\alpha p(\chi_\gamma + \chi_\delta),$$

где γ и δ определяются формулой (3).

3) $$\begin{cases} \dfrac{(p+\varepsilon_\alpha)}{f}\chi_\alpha \chi_\mu = x + \varepsilon_\sigma \chi_\sigma + \eta_\sigma(\chi_\mu - \chi_\nu), \\[2ex] \dfrac{(p+\varepsilon_\alpha)}{f}\chi_\alpha \chi_\nu = x + \varepsilon_\alpha \chi_\sigma + \eta_\alpha(\chi_\nu - \chi_\mu). \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dfrac{p(p+\varepsilon)}{f}\chi_0^2 = x(p-\varepsilon) + \varepsilon(p-\varepsilon)(\chi_\mu + \chi_\nu) + 2f, \\[2ex] \dfrac{p(p+\varepsilon_\alpha)}{f}\chi_\sigma^2 = x(p-\varepsilon_\alpha) + \dfrac{1}{2}\varepsilon_\sigma(p-\varepsilon_\alpha)(\chi_\mu + \chi_\nu) + \\ \qquad + f + \varepsilon_\sigma p\chi_{(2\alpha^2-1)}. \end{cases}$$

$$
(5)\begin{cases}
\dfrac{p^2-1}{pf}\chi_\mu^2 = x+\varepsilon y+\dfrac{f}{p}(1+\varepsilon)-\dfrac{1}{p}\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)(\chi_\mu+\chi_\nu)+\\
\qquad +\dfrac{\varepsilon(p-\varepsilon)}{p}(\chi_\mu-\chi_\nu),\\
\dfrac{p^2-1}{pf}\chi_\nu^2 = x+\varepsilon y+\dfrac{f}{p}(1+\varepsilon)-\dfrac{1}{p}\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)(\chi_\mu+\chi_\nu)+\\
\qquad +\dfrac{\varepsilon(p-\varepsilon)}{p}(\chi_\nu-\chi_\mu),\\
\dfrac{p^2-1}{pf}\chi_\mu\chi_\nu = x-\varepsilon y+\dfrac{f}{p}(1-\varepsilon)-\dfrac{1}{p}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)(\chi_\mu+\chi_\nu).
\end{cases}
$$

I. Исследуем сначала, существуют ли решения, у которых χ_μ и χ_ν различны. Из 3) следует $(p+\varepsilon_\alpha)\chi_\alpha = 2f\eta_\alpha$. Если $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon$, то $\eta_\alpha = 0$, т. е. также $\chi_\alpha = 0$. Если принять оставшийся вначале произвольным множитель пропорциональности $f = \frac{1}{2}(p+\varepsilon)$, то

$$
\chi_\alpha = \eta_\alpha, \qquad \left(\alpha = 0,\ 2,\ 3,\ldots \frac{1}{2}(p-1)\right).
$$

По 1) $x = 0$. По уравнению (2) $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{(2\alpha-1)}$, т. е., если в 4) $\varepsilon_\gamma = -\varepsilon$, то получим $\chi_\mu + \chi_\nu = \varepsilon$. В таком случае по 5) $y = \frac{1}{2}(p-\varepsilon-1)$ и 4) $\chi_\mu\chi_\nu = 1-\varepsilon p$, следовательно,

$$
\chi_\mu = \frac{1}{2}(\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon p}), \quad \chi_\nu = \frac{1}{2}(\varepsilon\mp\sqrt{\varepsilon p}).
$$

В том, что оба полученных решения действительно удовлетворяют всем уравнениям, напр., уравнениям 2)

$$
(8) \qquad 2\eta_\alpha\eta_\beta = \varepsilon_\sigma(\eta_\gamma+\eta_\delta),
$$

проще всего убедиться при помощи формулы (7), § 9, и (5).

II. Для всякого иного решения $\chi_\mu = \chi_\nu$. Этим уравнения значительно упрощаются, напр., 5) заменяются следующими

$$
5^*)\begin{cases}
\dfrac{p^2-1}{f}\chi_\mu^2 = px+f-2\chi_\mu,\\
py = \chi_\mu - f.
\end{cases}
$$

Исследуем теперь, существуют ли решения, в которых x отлично от нуля. В этом случае по 1) $\chi_0, \chi_2, \chi_3, \ldots \chi_{\frac{1}{2}(p-1)}$ отличны от нуля, при этом все χ_α, у которых ε_α имеют одно и то же значение, равны друг другу. Пусть $\varepsilon_\nu = +\varepsilon$ и $\varepsilon_\mu = -\varepsilon$ В таком случае

$$y = \eta_0 \chi_0 + 2\chi_0 \sum \eta_\sigma + \varepsilon\chi_\mu,$$

т. е. в силу того, что $\eta_0 + 2\sum \eta_\sigma = -\varepsilon$,

$$y = \varepsilon(\chi_\mu - \chi_0) = \frac{\chi_\mu - f}{p}.$$

Далее, в сумме

$$x = \chi_0 + 2\chi_\mu + 2\sum(\chi_\sigma + \chi_\beta)$$

число характеров χ_σ равно $\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-1$, а число характеров χ_β равно $\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)$. Поэтому

$$x = 2\chi_\mu + \left(\frac{1}{2}(p-\varepsilon)-1\right)\chi_0 + \left(\frac{1}{2}(p+\varepsilon)-1\right)\chi_\beta.$$

По 1) и 4) имеем:

$$fx = p\chi_0\chi_\beta, \qquad \frac{p(p-\varepsilon)}{f}\chi_\beta^2 = x(p+\varepsilon) - 2\varepsilon p\chi_\beta,$$

т. е.

$$(p-\varepsilon)\chi_\beta = (p+\varepsilon)\chi_0 - 2\varepsilon f, \qquad px = (p^2+1)\chi_\mu - f.$$

Подставив эти значения в 5*), получим

$$\chi_\mu(\chi_\mu - f) = 0,$$

т. е. или $\chi_\mu = f$, или $\chi_\mu = 0$. В первом случае пусть $f = 1$. Тогда

$$\chi_\mu = \chi_\nu = 1, \qquad \chi_0 = 1, \qquad \chi_\beta = 1, \qquad \chi_\sigma = 1 \qquad (x = p, \quad y = 0)$$

Во втором случае пусть $f = p$. Тогда

$$x = -1, \qquad y = -1,$$

и

$$\chi_0 = \varepsilon, \qquad \chi_\beta = -\varepsilon, \qquad \chi_\alpha = \varepsilon$$

или вообще

$$\chi_\varkappa = \varepsilon_\varkappa,$$

а также

$$\chi_\mu = \chi_\nu = \varepsilon_1 = 0.$$

III. Для всех остальных решений $x = 0$. Поэтому по 1) равны нулю или все χ_σ, для которых $\varepsilon_\sigma = -1$, или все χ_σ, для которых $\varepsilon_\alpha = +1$. Пусть сначала $\chi_\sigma = 0$ при $\varepsilon_\alpha = -1$, и $f = p+1$.

По 3) при $\varepsilon_\alpha = +1$ будет

$$\chi_\alpha \chi_\mu = \chi_\alpha,$$

а так как не все $\chi_\varkappa$ обращаются в нуль, то

$$\chi_\mu = +1.$$

Если

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1,$$

т. е. также

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\delta = +1,$$

то по 2) и 4)

$$\chi_\alpha \chi_\beta = \chi_\gamma + \chi_\delta, \qquad \chi_\alpha^2 = \chi_{(2\alpha^2-1)} + 2.$$

Положив, таким образом, если a и b — индексы классов (α) и (β)

$$\chi_\alpha = \xi_a, \qquad \chi_\beta = \xi_b, \qquad \text{и} \qquad \xi_0 = 2,$$

получим по 5)

$$\xi_a \xi_b = \xi_{a+b} + \xi_{a-b},$$

также и при $b=a$. Если ρ новая неизвестная, и $\xi_1 = \rho + \rho^{-1}$, то из

$$\xi_1 \xi_1 = \xi_2 + \xi_0$$

получается, что

$$\xi_2 = \rho^2 + \rho^{-2};$$

затем из

$$\xi_1 \xi_2 = \xi_3 + \xi_1,$$

что

$$\xi_3 = \rho^3 + \rho^{-3},$$

вообще, что

$$\xi_a = \rho^a + \rho^{-a}.$$

Из $\xi_{\frac{1}{2}(p-1)} = \xi_0$ следует, далее, что

$$\rho^{\frac{1}{2}(p-1)} = 1. \tag{9}$$

Таким образом, приходим к решениям

$$\chi_\lambda = p+1, \qquad \chi_\mu = \chi_\nu = 1, \qquad \chi_\alpha = \rho^a + \rho^{-a}$$

при $\varepsilon_\alpha = +1$ и $2\alpha \equiv r^a + r^{-a}$,

$$\chi_\beta = 0$$

при $\varepsilon_\beta = -1$.

Полученные значения удовлетворяют всем уравнениям, кроме уравнения $x=0$, если $\rho = 1$, или кроме уравнения $y = -1$ (5*) при $\frac{1}{2}(p-1)$ четным и $\rho = -1$. Поэтому их число:

$$n = \frac{1}{4}(p-\varepsilon) - 1. \tag{10}$$

IV. Пусть, наконец, $\chi_\alpha = 0$ при $\varepsilon_\alpha = +1$, и $f = p - 1$. В таком случае

$$\chi_\beta \chi_\mu = -\chi_\beta$$

и, следовательно,

$$\chi_\mu = -1.$$

Если $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\beta = -1$, то

$$\chi_\gamma \chi_\beta = -\chi_\gamma - \chi_\delta, \qquad \chi_\gamma^2 = -\chi_{(2\gamma^2-1)} + 2.$$

Положив затем

$$\chi_\alpha = -\xi_a, \qquad \chi_\beta = -\xi_b \quad \text{и} \quad \xi_0 = 2,$$

если a и b — индексы классов (α) и (β), получим

$$\xi_a \xi_b = \xi_{a+b} + \xi_{a-b}.$$

Если, таким образом,

$$\xi_1 = \sigma + \sigma^{-1},$$

то

$$\xi_b = \sigma^b + \sigma^{-b},$$

а так как

$$\xi_{\frac{1}{2}(p+1)} = \xi_0,$$

то

(11) $$\sigma^{\frac{1}{2}(p+1)} = 1.$$

Таким образом, приходим к решениям

$$\chi_\lambda = p - 1, \qquad \chi_\mu = \chi_\nu = -1, \qquad \chi_\beta = -\sigma^b - \sigma^{-b} \quad \text{при} \quad \varepsilon_\beta = -1$$

$$\text{и} \quad 2\beta \equiv s^b + s^{-b}, \qquad \chi_\alpha = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_\alpha = +1.$$

Значение $+1$, а при $\frac{1}{2}(p+1)$ четном и значение -1 для σ не подходят. Число этих решений, следовательно,

(12) $$n = \frac{1}{4}(p - \varepsilon) - \frac{1}{2}(1 - \varepsilon).$$

Таким образом, все $k = \frac{1}{2}(p-1) + 3$ характеров целиком определены. Для каждого остается еще определить число e при помощи формулы

$$\frac{hf}{e} = \sum h_\alpha \chi_\alpha \chi_{\alpha'}.$$

Найдем, что во всех k случаях $e = f$. Таким образом множители пропорциональности выбраны, согласно данному в § 3 правилу.

Сопоставим еще раз k характеров, применив введенное в § 5 обозначение:

n	1	1	2	$\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-1$	$\frac{1}{4}(p-\varepsilon)-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)$
$\chi(E)$	1	p	$\frac{1}{2}(p+\varepsilon)$	$p+1$	$p-1$
$\chi(P)$	1	0	$\frac{1}{2}(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon p})$	1	-1
$\chi(Q)$	1	0	$\frac{1}{2}(\varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon p})$	1	-1
$\chi(R^a)$	1	1	$\frac{1}{2}(1+\varepsilon)(-1)^a$	$\rho^a+\rho^{-a}$	0
$\chi(S^b)$	1	-1	$-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)(-1)^b$	0	$-\sigma^b-\sigma^{-b}$

Для $p=3$ и $p=5$ получаются отсюда данные в § 8 характеры групп тетраэдра и икосаэдра.

О ПРОСТЫХ МНОЖИТЕЛЯХ ГРУППОВОГО ДЕТЕРМИНАНТА [22]

(Über die Primfactoren der Gruppendeterminante. Sitzungsber. der Berl. Ak., 1896, S. 1343—1382)

Теория характеров группы, основы которой я изложил в моей последней работе, требует для своего дальнейшего построения рассмотрения детерминанта, степень которого равна порядку группы. По примеру Dedekind'а, который первый понял его значение для теории групп и обратил на него мое внимание, я называю его соответствующим группе *групповым детерминантом*. h элементов $A, B, C, \ldots$ группы $\mathfrak{H}$ я использую как индексы для h независимых переменных x_A, x_B, $x_C, \ldots$ Принимая это обозначение, я определяю, что при $L = MN$ должно также быть $x_L = x_{MN}$. Из этих h величин, различающихся между собою одним индексом, я образую h^2 величин, снабженных двумя индексами, полагая

$$x_{P,Q} = x_{PQ^{-1}}.$$

Если $G_1, G_2, \ldots G_h$ h элементов группы $\mathfrak{H}$ в некоторой определенной последовательности, то я рассматриваю матрицу

$$(x_{P,Q}) = (x_{PQ^{-1}}),$$

h строк которой получаются, если вместо P подставить h элементов $G_1, G_2, \ldots G_h$, а h колонн — если вместо Q подставить те же h элементов в том же порядке. Эта матрица имеет определенные, обусловленные структурой группы $\mathfrak{H}$ свойства симметрии. В каждой строке находятся все h переменных и подобно же в каждом столбце. Различные строки (столбцы) отличаются друг от друга только порядком, в котором стоят переменные. Групповой детерминант, соответствующий группе $\mathfrak{H}$, есть детерминант этой матрицы;

$$\Theta = |x_{P,Q}| = |x_{PQ^{-1}}|.$$

Если прибавить к элементам первой строки элементы всех остальных строк, то все они делаются равными

$$\sum x_R = \xi.$$

Поэтому целая функция h-ой степени Θ от h переменных x_A, x_B, $x_C, \ldots$ делится на линейную функцию ξ. Поэтому, за исключением тривиального случая $h=1$, Θ всегда распадается на множителей низшей степени. Число k различных неприводимых или простых множителей Θ равно числу классов сопряженных элементов, на которые распадаются элементы $\mathfrak{H}$. Если f степень такого простого множителя Φ, то Θ делится на f-ую, но не на высшую степень Φ. Степень f — делитель порядка h. Посредством линейной подстановки можно преобразовать Φ в функцию от f^2, но не от меньшего числа переменных, и, если преобразовать таким образом каждый простой множитель функции

$$\Theta = \Pi \Phi^f,$$

то $\sum f^2 = h$ новых переменных все независимы между собой. Если приравнять друг другу переменные x_R, индексы которых элементы одного и того же класса, то получим, что

$$\Phi = \xi^f$$

f-ая степень линейной функции ξ от k независимых переменных, и k линейных функций, получающихся таким образом из k простых множителей Θ, линейно-независимы. Из коэффициентов линейной функции ξ получается характер χ группы $\mathfrak{H}$, и из его k значений $\chi(R)$ можно вычислить все коэффициенты простой функции Φ. Теория общего группового детерминанта, где h величин x_R неограниченно переменны, сводится, таким образом, к теории специального группового детерминанта, в которой изменяемость этих величин ограничена условиями $x_{BA} = x_{AB}$. Но вычисление этого детерминанта h-ой степени

$$\Theta = \Pi \xi^{f^2}$$

можно свести к вычислению детерминанта k-ой степени

$$\left| \sum_{\gamma} \frac{1}{h_\alpha} h_{\alpha\beta'\gamma} \, x_\gamma \right| = \Pi \xi,$$

где линейный множитель ξ, встречающийся в Θ в степени f^2, содержится только один раз. Определение положительных целых чисел $h_{\alpha\beta\gamma}$ и рассмотрение их соотношений с характерами составляет существенную часть моей работы Über Gruppencharaktere, („О групповых характерах"), Sitzungsberichte, 1896, которую я в дальнейшем цитирую, как *Ch.*

Свойства, совершенно аналогичные свойствам такого простого делителя Φ группового детерминанта, имеет целая функция степени 2^ρ от $2^{2\rho}$ переменных, которую я исследовал в моей работе Uber Thetafunctionen mehrerer Variabelen („О функциях тета многих переменных", Crelle's Journal, Bd. 96), но к которой я там был приведен не из рассмотрения группы соотношений, имеющихся между функциями тета, а из теоремы сложения, имеющей место для этих функций. Кроме этого, до сих пор групповой детерминант исследован только для случая коммутативных групп, где его простые множители — все линейны. Для некоторых, особенно простых, не коммутативных групп Dedekind в 1886 году разложил детерминант Θ на простые множители вычислительным путем, и его интересные результаты, которые он мне недавно сообщил, побудили меня исследовать разложение группового детерминанта на простые множители в общем виде,— для любой данной группы.

§ 1.

Детерминант матрицы h-ой степени

(1) $$(x_{P,\,Q}) = (x_{PQ^{-1}}) = (x)$$

я обозначаю следующим образом:

(2) $$|x_{P,\,Q}| = |x_{PQ^{-1}}| = \Theta(x_E,\ x_A,\ x_B,\ x_C,\ \ldots) = \Theta(x_R) = \Theta(x) = \Theta.$$

Под E я всегда подразумеваю главный элемент. В обозначении $\Theta(x_R)$ R означает переменный элемент, вместо которого следует подставлять h элементов $E,\ A,\ B,\ C, \ldots$ группы $\mathfrak{H}$. При применении обозначения (x) или $\Theta(x)$ знак x получает смысл только тогда, если при нем имеются индексы $E,\ A,\ B,\ C, \ldots$

Пусть теперь $y_E,\ y_A,\ y_B,\ y_C \ldots$ другая система h независимых переменных. Из них я образую матрицу

(3) $$(y_{P,\,Q}) = (y_{PQ^{-1}}) = (y).$$

Ее строки (столбцы) получаются, если вместо $P(Q)$ подставлять h элементов $G_1,\ G_2, \ldots G_h$ группы $\mathfrak{H}$ в той самой последовательности, в какой они берутся при образовании матрицы (1).

Из этих двух систем по h переменных x_R и y_R я образую третью систему z_R, положив

(4) $$z_A = \sum x_R\, y_S \qquad (RS = A).$$

В этой сумме для R следует поставить h элементов из $\mathfrak{H}$, и каждый элемент R комбинировать с элементом $S\,(= R^{-1}A)$, удовлетворяющим условию $RS = A$ (не $SR = A$), так что S тоже должно пробегать h элементов из $\mathfrak{H}$, каждый раз в связи с

$$R = AS^{-1}.$$

В таком случае, компонируя обе матрицы (1) и (3), имеющие обусловленные структурой группы $\mathfrak{H}$ свойства симметрии, которые считаются здесь выполненными, получим матрицу

(5) $$(z_{P,\,Q}) = (z_{PQ^{-1}}) = (z) = (x)\,(y)$$

с теми же свойствами симметрии. Ибо

$$z_{P,\,Q} = \sum_R x_{P,\,R}\, y_{R,\,Q} = \sum_R x_{PR^{-1}}\, y_{RQ^{-1}}.$$

Если положить в этой сумме $R = SQ$, то S будет пробегать вместе с R h элементов из $\mathfrak{H}$, только в другой последовательности, и получим по (4)

$$z_{P,\,Q} = \sum_S x_{PQ^{-1}S^{-1}}\, y_S = z_{PQ^{-1}}.$$

Эта же теорема остается верной, если скомпонировать любое количество таких матриц. Если, например, $z_E, z_A, z_B, z_C, \ldots$ h любых величин, и если положить

$$v_A = \sum x_R\, y_S\, z_T \qquad (RST = A),$$

то матрица $(v_{PQ^{-1}}) = (v) = (x)\,(y)\,(z)$ скомпонирована из трех матриц (x), (y) и (z) в этой последовательности. Если матрицу (x) скомпонировать саму с собой n раз, то обозначим результат через

$$(x_{P,\,Q})^n = (x)^n = (x^{(n)}_{PQ^{-1}}) = (x^{(n)}).$$

В таком случае

(6) $$x^{(n)}_R = \sum x_{R_1}\, x_{R_2} \ldots x_{R_n} \qquad (R_1 R_2 \ldots R_n = R).$$

Поэтому всякая функция матрицы (x) имеет также упомянутые здесь свойства симметрии, например *взаимная* с (x) *матрица* (*Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Crelle's Journal, Bd. 84, S. 7 — „О линейных подстановках и ближайших формах“), а также *главная матрица* (единичная матрица)

$$(x)^0 = (\varepsilon_{P,\,Q}) = (\varepsilon_{PQ^{-1}}) = (\varepsilon),$$

где $\varepsilon_R = 0$ при всех R кроме $R = E$, когда $\varepsilon_E = 1$.

Пусть теперь Φ, Φ', Φ'',… различные, входящие в

(7) $$\Theta = \Phi^e\, \Phi'^{\,e'}\, \Phi''^{\,e''} \ldots = \Pi \Phi^e$$

неразложимые функции (простые функции), и пусть $f, f', f'', \ldots$ степени этих целых однородных функций от h переменных x_E, x_A, x_B, x_C, … В групповом детерминанте Θ элементы диагонали, и только они, равны x_E. Поэтому Θ сводится к x_E^h, если все переменные, кроме x_E, положить равными нулю; следовательно, в этом случае и Φ сводится к f-ой степени x_E. Поэтому можно еще остающийся неопределенным постоянный множитель у Φ выбрать так, чтобы в этой функции x_E^f имело коэффициент 1.

По теореме умножения детерминантов из уравнений (2) и (5) следует соотношение:

$$\Theta(z) = \Theta(x)\,\Theta(y). \tag{8}$$

Отсюда получается для всякого простого множителя функции Θ

$$\Phi = \Phi(x_E, x_A, x_B, x_C, \ldots) = \Phi(x_R) = \Phi(x)$$

аналогичное соотношение

$$\Phi(z) = \Phi(x)\,\Phi(y), \tag{9}$$

если

$$(z) = (x)(y);$$

оно характеризует функцию Φ независимо от ее связи с групповым детерминантом Θ. Ибо если разложить правую часть уравнения (8) на простых множителей, то отсюда следует, что $\Phi(z)$ есть произведение функции $\Lambda(x)$ только от h переменных x_R и функции $\mathrm{M}(y)$ только от h переменных y_R. Если, затем, в уравнении

$$\Phi(z) = \Lambda(x)\,\mathrm{M}(y)$$

положить $y_R = \varepsilon_R$, то получим $z_R = x_R$ и, следовательно,

$$\Phi(x) = \Lambda(x)\,\mathrm{M}(\varepsilon).$$

Подобно же,

$$\Phi(y) = \Lambda(\varepsilon)\,\mathrm{M}(y),$$

и

$$\Lambda(\varepsilon)\,\mathrm{M}(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) = 1.$$

Обратно, всякая неразложимая целая однородная функция Φ от $x_E, x_A, x_B, \ldots$, удовлетворяющая условию (9), есть множитель группового детерминанта $\Theta(x)$. Ибо если подставить в этом уравнении вместо (y) взаимную с (x) матрицу, то будет

$$z_R = \varepsilon_R\,\Theta(x),$$

следовательно,

$$\Phi(z) = \Theta(x)^f = \Phi(x)\,\Phi(y),$$

где y_A целая функция от h переменных x_R. Поэтому функция $\Phi(x)$, будучи неразложимой, должна быть множителем функции $\Theta(x)$.

При помощи соотношения (9) все свойства детерминантов, вытекающие из теоремы умножения, могут быть перенесены на простые множители группового детерминанта — именно, свойства, которые я изложил в моей работе *Über vertauschbare Matrizen*

(„О переместимых матрицах“, стр. 7 этой книги), которую я в дальнейшем цитирую, как V.

§ 2.

Каждый простой множитель $\Phi(x)$ группового детерминанта удовлетворяет условию

$$(1) \qquad \Phi(z) = \Phi(x)\Phi(y),$$

если

$$(2) \qquad z_C = \sum x_A y_B. \qquad (AB = C).$$

При помощи этого соотношения можно вполне определить линейные множители

$$(3) \qquad \Phi(x) = \sum \chi(A) x_A,$$

ибо из уравнения

$$\left(\sum \chi(A) x_A\right)\left(\sum \chi(B) y_B\right) = \left(\sum \chi(C) z_C\right) = \left(\sum \chi(AB) x_A y_B\right)$$

для коэффициентов $\chi(A)$ этих функций получается соотношение

$$(4) \qquad \chi(AB) = \chi(A)\chi(B).$$

Следовательно, $\chi(E) = 1$, $\chi(A)\chi(A^{-1}) = 1$, вообще

$$\chi(ABCD\ldots) = \chi(A)\chi(B)\chi(C)\chi(D)\ldots,$$

и, таким образом,

$$\chi(B^{-1}A^{-1}BA) = \chi(B^{-1})\chi(A^{-1})\chi(B)\chi(A) = 1.$$

Элемент F, определяемый уравнением

$$(5) \qquad BA = ABF$$

при данных A и B, я называю, по Dedekind'y, *коммутатором* элементов A и B. Таким образом, $\chi(F) = 1$ для всякого коммутатора F любых двух элементов группы $\mathfrak{H}$. Если T любой элемент из $\mathfrak{H}$ и если

$$T^{-1}AT = A', \quad T^{-1}BT = B', \quad T^{-1}FT = F',$$

то также $B'A' = A'B'F'$. Если, таким образом, F коммутатор, то и всякий, сопряженный с F элемент, F' тоже коммутатор. Если распределить элементы из $\mathfrak{H}$ по классам сопряженных элементов, то коммутаторы составят целиком некоторые из этих классов. Порожденная ими группа $\mathfrak{G}$ есть поэтому инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$. (Она может быть равной и всей группе $\mathfrak{H}$, или даже быть равной только главной группе $\mathfrak{E}$,— последнее всегда и только в том случае, если $\mathfrak{H}$ коммутативная группа). Если G элемент из $\mathfrak{G}$, то существуют такие коммутаторы

$F, F', F'', \ldots$ (которые не обязательно различны), что $G = FF'F'' \ldots$ Поэтому

$$\chi(G) = \chi(F)\chi(F')\chi(F'') \ldots = 1.$$

Пусть

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}A + \mathfrak{G}B + \mathfrak{G}C + \ldots,$$

т. е. пусть $A, B, C, \ldots$ все различные по модулю $\mathfrak{G}$ элементы из $\mathfrak{H}$. Их число есть $\frac{h}{g}$, если g порядок $\mathfrak{G}$. $\frac{h}{g}$ комплексов $\mathfrak{G}A = A\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}B = B\mathfrak{G}, \ldots$ образуют группу, которая обозначается через $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$. Если $\mathfrak{G}$ — группа коммутаторов, то $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ коммутативная (Абелева) группа, и для того, чтобы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ была коммутативной группой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ делилось на группу коммутаторов. Ибо если $\mathfrak{G}A$ и $\mathfrak{G}B$ два элемента из $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, то в $\mathfrak{G}$ существует такой элемент F, что $BA = ABF$, т. е также $\mathfrak{G}BA = \mathfrak{G}ABF$. Но $\mathfrak{G}ABF = (\mathfrak{G}A)(\mathfrak{G}B)(\mathfrak{G}F)$ и $\mathfrak{G}F = \mathfrak{G}$, следовательно:

$$(\mathfrak{G}B)(\mathfrak{G}A) = (\mathfrak{G}A)(\mathfrak{G}B).$$

Эти свойства группы коммутаторов нашел Dedekind в 1880 году. Но опубликованы они в первый раз Miller'ом, *The regular substitution groups whose order is less than 48* („Регулярные группы подстановок порядка, меньшего, чем 48“). Quarterly Journ of. Math. 1896, vol. 28, p. 266.

Если G — какой-либо элемент из $\mathfrak{G}$, то $\chi(GA) = \chi(G)\chi(A) = \chi(A)$. Поэтому $\chi(R)$ имеет для всех элементов R из комплекса $\mathfrak{G}A$ одно и то же значение. Следовательно, можно число $\chi(A)$ поставить в соответствие с комплексом $\mathfrak{G}A$. Так как эти комплексы образуют коммутативную группу, а соответствующие им числа $\chi(A)$ имеют свойство (4), то эти числа $\chi(A)$, $\chi(B)$, $\chi(C), \ldots$ образуют характер коммутативной группы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$. Для этой последней существует, как известно, всегда $\frac{h}{g}$ различных характеров, все значения которых — корни из единицы. Если ψ один из них и если положить для всякого элемента R, содержащегося в комплексе $\mathfrak{G}A$, $\chi(R) = \psi(\mathfrak{G}A)$, то для всякого элемента G группы $\mathfrak{G}$ будет $\chi(G) = 1$ и для всяких двух элементов из $\mathfrak{H}$ будет правильно уравнение (4). Далее, в этом случае функция (3), коэффициенты которой — эти значения $\chi(A)$, будет линейным множителем группового детерминанта Θ. Ибо если положить $y_R = \chi(R)\, x_R$, то

$$y_{PQ^{-1}} = \chi(PQ^{-1})\, x_{PQ^{-1}} = \chi(P)\chi(Q^{-1})\, x_{PQ^{-1}},$$

и, следовательно, $|y_{PQ^{-1}}| = |x_{PQ^{-1}}|$. Но этот детерминант имеет множителем

$$\sum y_R = \sum \chi(R) x_R = \Phi,$$

при этом только в первой степени. Ибо если прибавить элементы всех строк к элементам первой строки, то последние все делаются равными $\sum y_R = \Phi$, и если затем разделить на этого множителя Φ, то все они обратятся в 1. Если затем отнять элементы первого столбца от элементов всех следующих столбцов, то увидим, что $\Theta : \Phi$ зависит только от разностей $y_B - y_A$. Следовательно, это частное не может уже больше делиться на сумму $\sum y_R$.

Итак, число линейных множителей группового детерминанта равно частному от деления порядка группы на порядок ее группы коммутаторов, и каждый линейный множитель содержится в Θ только в первой степени.

Эту теорему Dedekind нашел индукцией. Один линейный множитель, именно $\sum x_R$, существует всегда. Соответствующий характер, $\chi(R) = 1$ для всякого элемента R,— называется *главным характером*. Если $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$, то больше линейных множителей не имеется. Это должно всегда иметь место, если $\mathfrak{H}$ — простая группа, порядок которой составное число.

§ 3.

Выберем теперь произвольное целое число $f \leqq h$ и попробуем построить целую функцию f-ой степени Φ от h переменных $x_E, x_A, x_B, \ldots$, которая удовлетворяла бы условию (9), § 1. В ней коэффициент при x_E^f должен быть равен 1. Ибо если положить $y_R = \varepsilon_R$, то будет $z_R = x_R$, т. е. $\Phi(x) = \Phi(x)\Phi(\varepsilon)$, и, следовательно, $\Phi(\varepsilon) = 1$. Но $\Phi(\varepsilon)$ есть коэффициент при x_E^f в $\Phi(x)$. При R отличном от E я обозначаю коэффициент при $x_E^{f-1} x_R$ в $\Phi(x)$ через $\chi(R)$, но полагаю

(1) $$\chi(E) = f.$$

В таком случае для всякого элемента R $\chi(R)$ есть коэффициент при x_E^{f-1} в $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_R}$. Если u переменная, то я обозначаю сокращенно

$$\Phi(x + u\varepsilon) = \Phi(x_E + u, x_A, x_B, x_C, \ldots).$$

Знак u, обозначающий переменную величину, следует здесь строго отличать от знаков x и ε, которые получают смысл только после приписки к ним индексов $E, A, B, C, \ldots$ Если положить

(2) $$\Phi(x + u\varepsilon) = u^f + \Phi_1 u^{f-1} + \Phi_2 u^{f-2} + \ldots + \Phi_f,$$

то Φ_n — целая однородная функция n-ой степени от h переменных x_E, x_A, x_B, x_C, ... и при этом $\Phi_f = \Phi$ и

$$(3) \qquad \Phi_n = \frac{1}{(f-n)!} \frac{\partial^{f-n}\Phi}{\partial x_E^{f-n}}, \quad \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial x_E} = (f-n)\Phi_n.$$

Наконец,

$$(4) \qquad \Phi_1 = \sum \chi(R) x_R.$$

h постоянных $\chi(R)$ я рассматриваю, как значения функции χ. Если Φ неразложима, то я называю χ *характером f-ой степени* группы $\mathfrak{H}$, соответствующим простой функции f-ой степени Φ.

Если, в частности, $\sum \psi(R) x_R$ линейный множитель функции Θ, то $\psi(R)$ называется характером первой степени группы $\mathfrak{H}$. Для этого, как показано выше, необходимым и достаточным условием является соотношение

$$\psi(A)\psi(B) = \psi(AB).$$

Если положить $\psi(R) x_R = y_R$, то $\Theta(y) = \Theta(x)$. Следовательно, если $\Phi(x)$ простой множитель f-ой степени для $\Theta(x)$, то и $\Phi(y)$ тоже. В последнем коэффициент при $x_E^{f-1} x_R$ равен $\chi(R)\psi(R)$. Таким образом, имеет место теорема:

Если $\chi(R)$ характер f-ой степени, а $\psi(R)$ характер первой степени группы $\mathfrak{H}$, то $\chi(R)\psi(R)$ тоже характер f-ой степени для $\mathfrak{H}$.

Этот новый характер равен $\chi(R)$, если $\psi(R)$ *главный характер*. Но он может и в других случаях не быть отличным от $\chi(R)$, именно, если $\chi(R) = 0$ для всякого элемента R, для которого $\psi(R)$ отлично от 1.

Пусть $u_1, u_2, \dots u_f$ f значений для $-u$, для которых

$$(5) \qquad \Phi(x + u\varepsilon) = (u + u_1)(u + u_2) \dots (u + u_f)$$

обращается в нуль. Пусть $a, v_1, v_2, \dots v_n$ постоянные, а

$$g(u) = a(u + v_1)(u + v_2) \dots (u + v_n)$$

целая функция от u. В таком случае также и при замене переменной u через матрицу (x):

$$(y) = g\big((x)\big) = a\big((x) + v_1(\varepsilon)\big)\big((x) + v_2(\varepsilon)\big) \dots \big((x) + v_n(\varepsilon)\big).$$

Отсюда найдем, применяя несколько раз соотношение (9), § 1:

$$\Phi(y) = a^f \Phi(x + v_1\varepsilon)\Phi(x + v_2\varepsilon) \dots \Phi(x + v_n\varepsilon).$$

Если положить здесь

$$\Phi(x + v\varepsilon) = (u_1 + v)(u_2 + v) \dots (u_f + v),$$

то получим теорему:

Если матрица $(y) = g\big((x)\big)$ целая функция матрицы (x), то

$$\Phi(y) = g(u_1) g(u_2) \dots g(u_f).$$

Если заменить здесь $g(u)$ через $g(u)+v$, где v параметр, и сохранить обозначение (y) для $g((x))$, то получим уравнение:

$$\Phi(y+v\varepsilon)=(v+g(u_1))(v+g(u_2))\ \ldots\ (v+g(u_f)).$$

Если, напр., $g(u)=u^n$, то

$$\Phi(x^{(n)}+v\varepsilon)=(v+u_1^n)(v+u_2^n)\ \ldots\ (v+u_f^n).$$

Сравнивая коэффициенты при v^{f-1}, получим отсюда по (4)

$$S_n=\sum_R \chi(R)\, x_R^{(n)}, \tag{6}$$

где S_n сумма n-ых степеней f величин $u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_f$. По формуле (6), § 1, можно вместо этого также написать

$$S_n=\sum_{R_1, R_2, \ldots R_n} \chi(R_1R_2\ \ldots\ R_n)\, x_{R_1}x_{R_2}\ \ldots\ x_{R_n}, \tag{7}$$

где каждая из n букв, суммированная $R_1,\ R_2, \ldots R_n$, независимо от остальных пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$.

Но из степенных сумм S_n можно вычислить коэффициенты Φ_n функции (2) по формуле [23])

$$(-1)^n\Phi_n=\sum\frac{(-1)^{a+b+c+\ldots}\, S_1^aS_2^bS_3^c\ldots}{1^a2^b3^c\ \ldots\ a!\,b!\,c!\ldots} \qquad (a+2b+3c+\ldots=n), \tag{8}$$

где $a,\ b,\ c,\ \ldots$ пробегают все целые числа (≥ 0), удовлетворяющие условию $a+2b+3c+\ldots=n$. Эта формула остается верной также и при $n>f$, если положить там $\Phi_n=0$. При ее помощи мы представим функции $\Phi_2,\ \Phi_3,\ \ldots$ и в особенности $\Phi_f=\Phi$. Коэффициенты функции Φ — целые функции от h постоянных $\chi(R)$ с рациональными коэффициентами. Если взять $n>f$, то из формулы (8) получаются соотношения, которым должны удовлетворятъ h величин $\chi(R)$. Но раньше, чем я перейду к этим вычислениям, я должен предпослать важное свойство функции $\chi(R)$.

Если в уравнении (9), § 1, положить все переменные $y_R=0$, кроме одной, y_A, то получим

$$\Phi(x_{RA^{-1}})=\vartheta(A)\,\Phi(x_R), \tag{9}$$

где $\vartheta(A)$ означает коэффициент при x_A^f в $\Phi(x_R)$. А если положить все переменные $x_R=0$, кроме одной, x_A (и заменить при этом букву y через x), то получим:

$$\Phi(x_{A^{-1}R})=\vartheta(A)\,\Phi(x_R). \tag{10}$$

Заменив здесь, если B постоянный элемент, для всякого индекса R переменную x_R через $x_{B^{-1}R}$, найдем

$$\Phi(x_{B^{-1}A^{-1}R})=\vartheta(A)\,\Phi(x_{B^{-1}R})=\vartheta(A)\,\vartheta(B)\,\Phi(x_R).$$

Но если заменить в уравнении (10) A через AB, то получим:

$$\Phi(x_{B^{-1}A^{-1}R}) = \vartheta(AB)\,\Phi(x_R).$$

Следовательно, $\vartheta(AB) = \vartheta(A)\,\vartheta(B)$, и поэтому $\vartheta(R)$ характер первой степени группы $\mathfrak{H}$, т. е. корень из единицы. Если A постоянный элемент и если положить для всякого R $y_R = x_{RA^{-1}}$, то

$$y_{P,Q} = y_{PQ^{-1}} = x_{PQ^{-1}A^{-1}} = x_{P,AQ}.$$

Если же заменить в детерминанте $|x_{P,Q}|$ Q через AQ, то от этого изменится только порядок, в котором стоят h столбцов. Если m порядок элемента A, то эта перестановка h столбцов состоит только из циклов порядка m. Следовательно, число этих циклов $\frac{h}{m}$ и, таким образом, эта перестановка четная или нечетная, в зависимости от того, четное или нечетное число $h - \frac{h}{m}$. Поэтому

$$\Theta(x_{RA^{-1}}) = (-1)^{h-\frac{h}{m}}\,\Theta(x_R).$$

Следовательно,

$$\prod (\vartheta A)^e = (-1)^{h-\frac{h}{m}}. \tag{11}$$

Если заменить в уравнении (10) x_R через x_{RA}, то получим

$$\Phi(x_{A^{-1}RA}) = \vartheta(A)\,\Phi(x_{RA}) = \vartheta(A)\,\vartheta(A^{-1})\,\Phi(x_R),$$

т. е.

$$\Phi(x_{A^{-1}RA}) = \Phi(x_R). \tag{12}$$

Следовательно, функция $\Phi(x_R)$ не изменится, если для всякого индекса R заменить переменную x_R через $x_{A^{-1}RA}$, где A постоянный элемент из $\mathfrak{H}$. При этом переменное x_E не меняется. Сравнивая коэффициенты при $x_E^{f-1}x_R$, получим из (12): $\chi(ARA^{-1}) = \chi(R)$ или, если положить $R = BA$:

$$\chi(AB) = \chi(BA). \tag{13}$$

Таким образом, если распределить h элементов группы $\mathfrak{H}$ по классам сопряженных элементов, то $\chi(R)$ имеет для всех элементов R одного и того же класса то же самое значение.

Теперь я перехожу к вычислению функции Φ_n при помощи формулы (8). Прежде всего, по (6)

$$\Phi_1 = S_1 = \sum \chi(A)\,x_R,$$
$$2\,\Phi_2 = S_1^2 - S_2 = \sum \big(\chi(A)\,\chi(B) - \chi(AB)\big)\,x_A x_B,$$
$$6\,\Phi_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 = \sum \big(\chi(A)\,\chi(B)\,\chi(C) - \chi(A)\chi(BC) -$$
$$- \chi(B)\,\chi(AC) - \chi(C)\,\chi(AB) +$$
$$+ \chi(ABC) + \chi(ACB)\big)\,x_A x_B x_C.$$

Поэтому я полагаю

$$\chi(A, B) = \chi(A)\chi(B) - \chi(AB); \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\chi(A, B, C) = \chi(A)\chi(B)\chi(C) - \chi(A)\chi(BC) - \\ - \chi(B)\chi(AC) - \chi(C)\chi(AB) + \\ + \chi(ABC) + \chi(ACB).\end{aligned}$$

Это выражение симметрично относительно A, B, C, так как $\chi(ABC)$ по (13) не изменяется от циклической перестановки элементов A, B, C. Общий закон образования коэффициентов функции:

$$n!\,\Phi_n(x) = \sum_{R_1, R_2, \ldots R_n} \chi(R_1, R_2, \ldots R_n)\, x_{R_1} x_{R_2} \ldots x_{R_n} \tag{15}$$

довольно сложен: пусть A, B, C, D, F, G, H, ... L, M какие-то n различных или равных между h элементами из $\mathfrak{H}$. Составим $n!$ перестановок n символов и разложим каждую из них на циклические множители. Если положить, затем, n символов равными n элементам A, B, C, ... L, M, то пусть, напр.,

$$(ABCD)(FGH) \ldots (LM) \tag{16}$$

одна из этих $n!$ перестановок. Сопоставляем с ней произведение

$$\pm\chi(ABCD)\chi(FGH) \ldots \chi(LM), \tag{17}$$

где следует взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, четная ли или нечетная перестановка (16). В перестановке (16) знак (FGH) означает, что три символа F, G, H циклически перемещаются, а в выражении (17) FGH означает произведение трех элементов F, G, H.

Данную перестановку можно только одним образом представить, как произведение циклических множителей. Но отдельные циклы можно расположить произвольным образом и внутри каждого цикла, не меняя его значения, можно циклически переставить символы. Никакие иные изменения недопустимы. Так, перестановка (16) равна

$$(GHF)(ML) \ldots (CDAB).$$

Но в соответствующем произведении (17) допустимы те же самые изменения, ибо $\chi(ABCD)$ останется неизменным при циклическом перемещений элементов A, B, C, D. Пусть сумма $n!$ произведений, соответствующих $n!$ перестановкам, есть

$$\chi(A, B, C, \ldots L, M) = \sum^{(n)} (\pm\prod\chi). \tag{18}$$

Эта функция остается неизменной, если n элементов

$$A, B, C, \ldots L, M$$

любым образом перемещаются между собою. Если перестановка (16) состоит из l циклов, то она четная или нечетная в зависимости от того, четное ли или нечетное число $n-l$. Поэтому можно также написать

$$(19) \qquad (-1)^n \chi(A, B, C, \dots L, M) = \sum^{(n)} (\prod \to \chi).$$

Напр., независимо от того, различны ли или нет обозначенные через A, B, C, D элементы,

$$(20) \qquad \chi(A, B, C, D) =$$

$$= \chi(A)\chi(B)\chi(C)\chi(D) - \chi(B)\chi(C)\chi(AD) - \chi(A)\chi(C)\chi(BD) -$$
$$- \chi(A)\chi(B)\chi(CD) - \chi(A)\chi(D)\chi(BC) - \chi(B)\chi(D)\chi(AC) -$$
$$- \chi(C)\chi(D)\chi(AB) + \chi(BC)\chi(AD) + \chi(AC)\chi(BD) +$$
$$+ \chi(AB)\chi(CD) + \chi(A)\chi(BCD) + \chi(B)\chi(ACD) +$$
$$+ \chi(C)\chi(ABD) + \chi(D)\chi(ABC) + \chi(A)\chi(BDC) +$$
$$+ \chi(B)\chi(ADC) + \chi(C)\chi(ADB) + \chi(D)\chi(ACB) -$$
$$- \chi(ABCD) - \chi(ACBD) - \chi(BACD) - \chi(BCAD) -$$
$$- \chi(CABD) - \chi(CBAD).$$

Я образую сумму

$$(-1)^n \sum \chi(A, B, C, \dots L, M)\, x_A x_B x_C \dots x_L x_M,$$

где каждая из n букв суммирования A, B, C, ... L, M независимо от остальных пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$. Выражение $(-1)^n \chi(A, B, C, \dots L, M)$ сумма $n!$ произведений $\prod(-\chi)$.

Перестановка n символов, из которой образовано одно из этих произведений, пусть состоит из a циклов по одному символу, b — по два символа, c — по три символа и т. д., так что

$$a + 2b + 3c + \dots = n.$$

Если, затем, помножить это произведение $\prod(-\chi)$ на $x_A x_B x_C \dots$ $\dots x_L x_M$ и просуммировать, то получим по (7) члены вида

$$(-1)^{a+b+c \dots} S_1^a S_2^b S_3^c \dots$$

Такой член получается столько раз, сколько существует перестановок, которые могут быть представлены указанным образом, как произведение циклических множителей, следовательно, (Cauchy, *Comptes rendus* tome 21, p. 604)

$$\frac{n!}{1^a 2^b 3^c \dots a!\, b!\, c! \dots}$$

раз. Итак, рассмотренная сумма равна

$$n! \sum \frac{(-1)^{a+b+c+\dots} S_1^a S_2^b S_3^c \dots}{1^a 2^b 3^c \dots a! \, b! \, c! \dots} = n! \, (-1)^n \, \Phi_n.$$

Этим доказана формула (15). Если, таким образом, $n > f$, то

(21) $$\chi(R_1, R_2, \dots R_n) = 0.$$

В каждом из $(n+1)!$ произведений суммы $\chi(R, R_1, R_2, \dots R_n)$ поставим на первое место множитель, содержащий обозначенный через R элемент, а в этом множителе передвинем R при помощи циклической перестановки на первое место. Далее, возьмем сначала произведения, содержащие множитель $\chi(R)$, затем те, в которых за R следует элемент R_1, затем те, в которых за R следует R_2 и т. д. Таким образом, получим формулу приведения

(22) $$\chi(R, R_1, R_2, R_3, \dots R_n) = \chi(R)\chi(R_1, R_2, R_3, \dots R_n) - \\ - \chi(RR_1, R_2, R_3, \dots R_n) - \chi(R_1, RR_2, R_3, \dots R_n) - \\ - \chi(R_1, R_2, RR_3, \dots R_n) - \dots - \chi(R_1, R_2, R_3, \dots RR_n).$$

Отсюда вытекает: если для некоторого значения n величины $\chi(R_1, R_2, \dots R_n)$ все обращаются в нуль, то это же должно быть и для всякого большего значения n. В частности,

(23) $$\chi(E, R_1, R_2, \dots R_n) = (f - n)\chi(R_1, R_2, \dots R_n).$$

§ 4.

Если продифференцировать уравнение $\Phi(z) = \Phi(x)\Phi(y)$ по y_A, то получим

$$\sum_R \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z_R} x_{RA^{-1}} = \Phi(x) \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_A},$$

а если положить $y_R = \varepsilon_R$, то:

(1) $$\sum_R \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_R} x_{RA^{-1}} = \chi(A)\Phi(x).$$

Но если то же уравнение продифференцировать по x_A, то найдем тем же путем

(2) $$\sum_R \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_R} x_{A^{-1}R} = \chi(A)\Phi(x).$$

В этих уравнениях заменим x_E на $x_E - u$. В таком случае, на основании соотношения [24)]

$$\frac{\partial l\Phi(x - u\varepsilon)}{\partial u} = \frac{1}{u - u_1} + \dots + \frac{1}{u - u_f} = \sum_n^{\infty} \frac{S_n}{u^{n+1}}$$

получим формулу приведения [25])

$$(3)\qquad \frac{1}{n+1}\frac{\partial S_{n+1}}{\partial x_A}=\frac{1}{n}\sum_R \frac{\partial S_n}{\partial x_R}x_{RA^{-1}}=\frac{1}{n}\sum_R \frac{\partial S_n}{\partial x_R}x_{A^{-1}R}\qquad (n>0),$$

из которой можно вывести новое доказательство формулы (7) § 3. Дифференцируя уравнение (1) по x_S, умножая его после этого на $x_{SB^{-1}}$ и суммируя по S, получим уравнение [26])

$$\sum_{R,S}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_R\,\partial x_S}x_{RA^{-1}}x_{SB^{-1}}=\big(\chi(A)\chi(B)-\chi(BA)\big)\Phi,$$

из которого получается формула (13) § 3. Подобно же вообще если $A, B, \ldots M$ — любые n элементов из $\mathfrak{H}$, то

$$\sum_{R,S,\ldots V}\frac{\partial^n\Phi}{\partial x_R\partial x_S\ldots\partial x_V}x_{RA^{-1}}x_{SB^{-1}}\ldots x_{VM^{-1}}=\chi(A,\ B,\ldots M)\,\Phi.$$

Здесь я делаю из этих соотношений другое применение. Если положить

$$y_{R^{-1}}=\frac{\partial\Phi(x-u\varepsilon)}{\partial x_R},$$

то они будут [27])

$$\sum_R y_{PR^{-1}}(x_{RQ^{-1}}-u\varepsilon_{RQ^{-1}})=\sum_R (x_{PR^{-1}}-u\varepsilon_{PR^{-1}})\,y_{RQ^{-1}}=$$
$$=\chi(QP^{-1})\,\Phi(x-u\varepsilon).$$

Я беру еще $\chi(R^{-1})=\chi'(R)$ и обозначаю матрицу $\big(\chi'(PQ^{-1})\big)$ сокращенно через (χ'). В таком случае эта формула выражает следующую зависимость между матрицами:

$$(4)\qquad (y)\big((x)-u(\varepsilon)\big)=\big((x)-u(\varepsilon)\big)(y)=(\chi')\,\Phi(x-u\varepsilon).$$

Следовательно, $(y)(x)=(x)(y)$. Если таким образом имеем $(y)=$ $=(p)+(q)u+(r)u^2+\ldots$, — разложение по степеням u, то (x) переместима с каждой из матриц (p), (q), $(r),\ldots$ Если разложить в соотношении (4) и $\Phi(x-u\varepsilon)$ по степеням u, то коэффициенты при одинаковых степенях u в обеих частях должны быть одинаковы. Полученные таким образом уравнения снова складываем, помножив их предварительно, вместо степеней переменного u, на соответствующие степени матриц (x). Этот процесс ведет к тому же результату, как если бы прямо в уравнении (4) заменить переменную u матрицею (x). (Подробнее этот способ изложен в *V.*, (стр. 11 этой книги). Тогда получим $(\chi')\,\Phi\big(x-$ $-(x)\varepsilon\big)=0$ или подробнее $(\chi')\,\Phi(x_E-(x),\ x_A,\ x_B,\ x_C,\ \ldots)=0$ и еще подробнее по (2), § 3:

$$(5)\qquad (\chi')\big((x)^f-(x)^{f-1}\Phi_1+(x)^{f-2}\Phi_2-\ldots+(-1)^f(x)^0\Phi_f\big)=0.$$

Если помножить еще на $(x)^{n-f}$, то получим

$$(6) \qquad \sum_R \chi(AR)\left(x_R^n - x_R^{(n-1)}\Phi_1 + x_R^{(n-2)}\Phi_2 - \ldots + (-1)^f x_R^{(n-f)}\Phi_f\right) = 0.$$

Положив $n = f$ и определив коэффициент при x_S^f, найдем

$$(7) \qquad \chi(AS^f) - \vartheta_1(S)\chi(AS^{f-1}) + \vartheta_2(S)\chi(AS^{f-2}) - \ldots + (-1)^f \vartheta_f(S)\chi(A) = 0,$$

где

$$(8) \qquad \vartheta_n(S) = \frac{1}{n!}\chi(S, S, \ldots S)$$

— коэффициент при x_S^n в Φ_n, т. е. не зависит от A. В частности, $\vartheta_1(S) = \chi(S)$ и $\vartheta_f(S) = \vartheta(S)$. Если положить в функции $\Phi(x_E + u, x_A, x_B, \ldots x_S, \ldots)$ все переменные равными нулю, кроме u и x_S, то будет

$$(9) \qquad \Phi(u, 0, 0, \ldots x_S, 0, \ldots) = u^f + \vartheta_1(S)u^{f-1}x_S + \vartheta_2(S)u^{f-2}x_S^2 + \ldots + \vartheta_f(S)x_S^f.$$

Поэтому

$$\vartheta_n(E) = \binom{f}{n}.$$ [28)]

§ 5.

Полученные до сих пор результаты выведены мною исключительно из соотношения (9), § 1, без использования при этом неразложимости функции Φ и показателя e степени, на которую делится групповой детерминант Θ. Каждое из h переменных x_R встречается по одному разу в каждой строке и в каждом столбце Θ, всего, таким образом, на h местах. Но на каждом из этих h мест ей дополнителен тот же самый минор, как я показал в *Ch.* § 6. Если, таким образом, $\Theta_{P,Q}$ минор, дополнительный к элементу $x_{P,Q}$ в детерминанте $\Theta = |x_{P,Q}|$, то

$$(1) \qquad \Theta_{P,Q} = \frac{1}{h}\frac{\partial\Theta}{\partial x_{PQ^{-1}}} = \Theta_{PQ^{-1}},$$

если положить $h\Theta_R = \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_R}$. Миноры детерминанта Θ образуют поэтому матрицу, имеющую те же свойства симметрии, что и матрица (x). По известным соотношениям между элементами детерминанта и дополнительными им минорами имеем:

$$\sum_R x_{P,R}\Theta_{Q,R} = \sum_R x_{R,P}\Theta_{R,Q} = \varepsilon_{P,Q}\Theta$$

или

$$(2) \qquad \sum_R x_{AR}\frac{\partial\Theta}{\partial x_R} = \sum_R x_{RA}\frac{\partial\Theta}{\partial x_R} = \varepsilon_A h\Theta.$$

По (7), § 1, $\Theta = \Phi^e \Psi$, где Ψ и Φ взаимно простые. Следовательно,

$$\sum_R x_{AR} \left(e \frac{\partial l \Phi}{\partial x_R} + \frac{\partial l \Psi}{\partial x_R} \right) = \varepsilon_A h$$

или

$$\sum_R x_{AR} \left(e\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_R} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x_R} \right) = \varepsilon_A h \Phi \Psi.$$

Так как Ψ и Φ взаимно простые, то $\sum x_{AR} \frac{\partial \Phi}{\partial x_R}$ делится на Φ, а так как обе функции одной и той же степени, то они могут различаться только постоянным множителем. Этот последний мы получим, сравнивая коэффициенты при x_E^f; таким образом, получаем формулу

$$(3) \qquad \sum_R x_{AR} \frac{\partial \Phi}{\partial x_R} = \sum_R x_{RA} \frac{\partial \Phi}{\partial x_R} = \chi(A^{-1}) \Phi,$$

которая иным путем была уже выведена в § 4. Умножив уравнение

$$\sum_S x_{RS} \frac{\partial \Phi}{\partial x_S} = \chi(R^{-1}) \Phi$$

на Θ_{RA} и суммируя по R, получим

$$h\Theta \frac{\partial \Phi}{\partial x_A} = \Phi \sum \chi(R^{-1}) \frac{\partial \Theta}{\partial x_{RA}} = \Phi \sum \chi(AR^{-1}) \frac{\partial \Theta}{\partial x_R}.$$

Положив здесь $\Theta = \Phi^e \Psi$, получим

$$h\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_A} = \sum \chi(AR^{-1}) \left(e\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_R} + \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x_R} \right),$$

и, следовательно,

$$(4) \qquad \frac{h}{e} \frac{\partial \Phi}{\partial x_A} = \sum_R \chi(AR^{-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_R},$$

так как разность обеих этих функций делится на Φ и имеет степень не выше $f-1$. Но если положить $\Theta = \Phi'^{e'} \Psi'$, где Φ' отличный от Φ простой множитель Θ, то получим:

$$h\Phi' \Psi' \frac{\partial \Phi}{\partial x_A} = \Phi \sum \chi(AR^{-1}) \left(e' \Psi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x_R} + \Phi' \frac{\partial \Psi'}{\partial x_R} \right),$$

и, следовательно,

$$(5) \qquad \sum \chi(AR^{-1}) \frac{\partial \Phi'}{\partial x_R} = 0,$$

так как эта функция делится на Φ'. Если сравнить в этих соотношениях коэффициенты при x_E^{f-1} (соотв. $x_E^{f'-1}$), то получим

$$\sum \chi(AR^{-1})\chi(R) = \frac{h}{e}\chi(A),\ \sum \chi(AR^{-1})\psi(R) = 0,$$

где $\psi(R)$ — характер, соответствующий простой функции Φ'. Эти уравнения можно еще написать в виде:

$$\sum \chi(R)\chi(S) = \frac{h}{e}\chi(A), \sum \chi(R)\psi(S) = 0 \qquad (RS = A) \tag{6}$$

или

$$\begin{cases} \sum_R \chi(PR^{-1})\chi(RQ^{-1}) = \frac{h}{e}\chi(PQ^{-1}), \\ \sum_R \chi(PR^{-1})\psi(RQ^{-1}) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

При $A = E$:

$$\sum_R \chi(R)\chi(R^{-1}) = \frac{hf}{e}, \quad \sum_R \chi(R)\psi(R^{-1}) = 0. \tag{8}$$

Отсюда следует, что значения $\chi(E)$, $\chi(A)$, $\chi(B), \ldots$ характера χ не могут быть пропорциональны соответствующим значениям $\psi(E)$, $\psi(A)$, $\psi(B), \ldots$ характера ψ. Если обозначить матрицу $(\chi(PQ^{-1}))$ сокращенно через (χ), то соотношение (7) можно также привести к форме

$$\left(\frac{e}{h}\chi\right)^2 = \left(\frac{e}{h}\chi\right), \quad (\chi)(\psi) = 0. \tag{9}$$

§ 6.

Одновременно с P и P^{-1} пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$, только в другом порядке. Поэтому

$$|x_{P,Q}| = |x_{P^{-1},Q^{-1}}| = |x_{Q^{-1},P^{-1}}|,$$

следовательно,

$$|x_{PQ^{-1}}| = |x_{Q^{-1}P}|. \tag{1}$$

В каждом из этих обоих детерминантов получаем строки, подставив вместо P элементы G_1, G_2, $\ldots$ G_h из $\mathfrak{H}$, а столбцы — подставив вместо Q эти элементы. Если, таким образом, x_R и y_R две системы по h переменных, то

$$|x_{PQ^{-1}}| = \prod(\Phi(x)^e), \quad |y_{Q^{-1}P}| = \prod(\Phi(y)^e).$$

Но обе матрицы $(x_{PQ^{-1}})$ и $(y_{Q^{-1}P})$ переместимы друг с другом, т. е.

$$\sum_R x_{PQ^{-1}}y_{Q^{-1}R} = \sum_S y_{S^{-1}P}x_{SQ^{-1}}.$$

Ибо если положить $SQ^{-1}=PR^{-1}$, т. е. $S=PR^{-1}Q$, то S пробегает одновременно с R h элементов из $\mathfrak{H}$, причем $S^{-1}P=Q^{-1}R$. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ h корней (характеристического уравнения) матрицы $(x_{PQ^{-1}})$, т. е. h корней уравнения $|x_{PQ^{-1}}-u\varepsilon_{PQ^{-1}}|=0$, а $b_1, b_2, b_3, \ldots$ h корней уравнения $|y_{Q^{-1}P}-u\varepsilon_{Q^{-1}P}|=0$, т. е. также уравнения $|y_{PQ^{-1}}-u\varepsilon_{PQ^{-1}}|=0$. Оба эти ряда по h корней можно поставить друг с другом в такое соответствие (*V.*, стр. 8—9 этой книги), чтобы a_1+b_1, a_2+b_2, $a_3+b_3, \ldots$ были корнями матрицы $(x_{PQ^{-1}}+y_{Q^{-1}P})$.

К этой общей теореме я позже (§ 10) еще вернусь. Здесь же я поставлю теперь условие, чтобы для всяких двух элементов из $\mathfrak{H}$ было:

$$y_{BA}=y_{AB}. \tag{2}$$

Таким образом, если распределить h элементов из $\mathfrak{H}$ по классам сопряженных элементов, то y_R будет иметь для всех элементов одного и того же класса одно и то же значение, напр., для элементов R ρ-ого класса — значение $y_R=y_\rho$. Если k число классов, то k переменных $y_0, y_1, \ldots y_{k-1}$, соответствующих k классам (0), (1) ... $(k-1)$, будем считать независимыми друг от друга. Так как $y_{Q^{-1}P}=y_{PQ^{-1}}$, то матрица $(y_{PQ^{-1}})$ переместима с матрицей $(x_{PQ^{-1}})$. Всякая матрица (x), имеющая определенные в § 1 свойства симметрии, переместима со всякой другой матрицей (y), элементы которой, кроме того, удовлетворяют еще условиям (2). Поэтому, если u, v, w — переменные, то детерминант

$$|ux_{PQ^{-1}}+vy_{PQ^{-1}}+w\varepsilon_{PQ^{-1}}|=\prod\left(\Phi\left(ux+vy+w\varepsilon\right)^e\right)$$

есть произведение линейных функций от u, v, w,[29] и, следовательно, также

$$\begin{aligned}\Phi(ux+vy+w\varepsilon)=(u_1u+v_1v+w)(u_2u+v_2v+w)\ \ldots\\ \ldots\ (u_fu+v_fv+w),\end{aligned} \tag{3}$$

где $u_1, v_1, \ldots u_f, v_f$ независимы от u, v, w. Коэффициент при w можно в каждой из этих f линейных функций предположить равным 1, так как левая часть при $u=v=0$ обращается в w^f. Положив $v=0$ и $u=1$, получим

$$\Phi(x+w\varepsilon)=(u_1+w)(u_2+w)\ \ldots\ (u_f+w), \tag{4}$$

а положив $u=0$, $v=1$, получим

$$\Phi(y+w\varepsilon)=(v_1+w)(v_2+w)\ \ldots\ (v_f+w). \tag{5}$$

Поэтому $u_1, u_2, \ldots u_f$ зависят только от h переменных x_R и имеют то же значение, что и в § 3, в то время, как $v_1, v_2, \ldots v_f$ зависит только от k переменных y_ρ.

Так как $\Phi(x)$ неразложима, то и $\Phi(x+w\varepsilon)$ неприводима, как функция от w, т. е. это выражение нельзя представить, как произведение двух целых функций от w, коэффициенты которых рациональные функции от k независимых переменных x_R.

Если рассматривать k величин y_ρ, как постоянные, то и v_1 — тоже постоянная, и, следовательно,

$$\Phi(x_E + v_1 + w,\ x_A,\ x_B,\ \ldots) =$$
$$= (u_1 + v_1 + w)(u_2 + v_1 + w)\ \ldots\ (u_f + v_1 + w)$$

тоже неприводима, как функция от w. Но эта функция имеет общий линейный множитель $u_1 + v_1 + w$ с функцией

$$\Phi(x + y + w) = (u_1 + v_1 + w)(u_2 + v_2 + w)\ \ldots\ (u_f + v_f + w).$$

Следовательно, обе функции должны быть тождественно равными друг другу. Положив $w = 0$, а $v_1 = \eta$, получим таким образом:

$$\Phi(x_E + y_E,\ x_A + y_A,\ x_B + y_B,\ \ldots) = \tag{6}$$
$$= \Phi(x_E + \eta,\ x_A,\ x_B,\ \ldots),$$

где η зависит только от переменных y_R. Если положить переменные x_R все равными нулю, кроме $x_E = u$, то получим

$$\Phi(y_E + u,\ y_A,\ y_B,\ \ldots) = (u + \eta)^f \qquad (y_{BA} = y_{AB}), \tag{7}$$

и отсюда, сравнив коэффициенты при u^{f-1}:

$$f\eta = \sum \chi(R)\, y_R. \tag{8}$$

Так получаем теорему:

Если для всяких двух элементов A и B группы $\mathfrak{H}$ $x_{BA} = x_{AB}$, то простая функция f-ой степени $\Phi(x)$ равна f-ой степени линейной функции $\xi = \frac{1}{f} \sum \chi(R)\, x_R$.

Для всех элементов R ρ-ого класса, число которых $h_R = h_\rho$, $\chi(R)$ имеет одно и то же значение χ_ρ. Если $x_{BA} = x_{AB}$, то и x_R имеет для этих h_ρ элементов одно и то же значение x_ρ. Поэтому $\sum \chi(R)\, x_R = \sum h_\rho\, \chi_\rho\, x_\rho$. Если Φ' отличный от Φ простой множитель Θ, а $\psi(R)$ — соответствующий ему характер, то по § 5 k величин ψ_ρ не могут быть пропорциональными k величинам χ_ρ и, следовательно, обе линейные функции $\sum h_\rho \psi_\rho x_\rho$ и $\sum h_\rho \chi_\rho\, x_\rho$ не могут отличаться друг от друга только постоянным множителем. Если применить приведенную выше теорему к каждому простому множителю Θ, то получим

$$|\, x_{PQ^{-1}}\,| = \prod \left(\frac{1}{f} \sum_R \chi(R)\, x_R \right)^{ef} = \prod (\xi^{ef}) \qquad (x_{BA} = x_{AB}). \tag{9}$$

Каждому простому множителю Φ детерминанта (7), § 1, где h переменных x_R независимы друг от друга, соответствует линейный множитель ξ детерминанта (9), где положено: $x_{BA} = x_{AB}$. Если k переменных x_ρ независимы, то двум различным простым множителям детерминанта (7), § 1, соответствуют два существенно различных линейных множителя детерминанта (9). Если f — степень простой функции Φ, а e — показатель входящей в Θ степени Φ, то $g=ef$ есть показатель степени соответствующего линейного множителя ξ, на которую делится детерминант (9).

Сравнив полученный результат с формулой (22), *Ch.* § 5, увидим, что величины χ_ρ, которые там введены совершенно другим путем, как характеры группы $\mathfrak{H}$, совпадают со введенными здесь величинами $\chi(R)$, а также и числа $g=ef$. Только там оба сомножителя e и f числа g были оставлены произвольными, в то время, как здесь каждое из них в отдельности имеет определенное значение. Поэтому можно было бы здесь использовать все выведенные там свойства характеров. Но я предпочитаю результаты той работы еще раз вывести с принятой здесь точки зрения.

§ 7.

Если продифференцировать по y_ρ уравнение (6), § 6, и затем положить все k переменных $y_\varkappa$ равными нулю, то найдем

$$\sum_{(\rho)}{}' \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_R} = \frac{h_\rho \chi_\rho}{f} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_E},$$

где буква суммирования R пробегает h_ρ элементов ρ-ого класса. Если A постоянный элемент и если заменить для всякого R переменную x_R через x_{AR}, то Φ по (10), § 3, изменится только на постоянный, отличный от нуля множитель. Следовательно, также

$$\sum_{(\rho)}{}' \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_{AR}} = \frac{h_\rho \chi_\rho}{f} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_A}, \tag{1}$$

где R снова пробегает h_ρ элементов класса (ρ). Сравнив коэффициенты при x_E^{f-1}, получим

$$\sum{}' \chi(AS) = \frac{h_B}{f} \chi(A)\chi(B), \tag{2}$$

где S пробегает h_B сопряженных с B элементов. Это соотношение получается непосредственно, если для функции, (7), § 6, вычислить выражение

$$S_2(y) = \sum \chi(PQ)\, y_P y_Q = f\eta^2.$$

Если положить $S=R^{-1}BR$ и заставить R пробегать все h элементов из $\mathfrak{H}$, то S делается равным каждому элементу из класса, к которому принадлежит B, при этом каждому $\dfrac{h}{h_B}$ раз. Поэтому $\big($*Ch.* § 5, (5)$\big)$

$$h\chi(A)\chi(B) = f\sum_R \chi(AR^{-1}BR). \tag{3}$$

К этому же результату можно прийти непосредственно из формулы (9), § 6, путем, указанным в *Ch.* (стр. 38—39 этой книги), т. е. теми же заключениями, которые в § 1 привели к формуле (9).

Число различных простых множителей группового детерминанта Θ обозначим через l. Эти l функций Φ и соответствующие им характеры χ будем различать друг от друга верхними индексами $\lambda = 0, 1, \ldots l-1$. В разложении детерминанта $\Theta(x + u\varepsilon)$ по степеням u коэффициент при u^{h-1} равен hx_E. Поэтому, если заменить в произведении

$$\Theta = \prod_{\lambda} (\Phi^{(\lambda)e^{(\lambda)}}) \tag{4}$$

x_E через $x_E + u$ и сравнить затем коэффициенты при x_E^{h-1}, то получим

$$\sum_{\lambda} e^{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(R) = h\varepsilon_R. \tag{5}$$

Но по (8), § 5, и (3)

$$\sum_{R} \chi(S^{-1}R^{-1}SR) = \frac{h}{f}\chi(S)\chi(S^{-1}), \quad \sum_{S} \chi(S)\chi(S^{-1}) = \frac{hf}{e},$$

и, следовательно, для всякого значения λ

$$\sum_{R,\,S} \frac{e^{(\lambda)}}{h} \chi^{(\lambda)}(S^{-1}R^{-1}SR) = h,$$

и, таким образом, так как это значение независимо от λ,

$$\sum_{\lambda} \sum_{R,\,S} \frac{e^{(\lambda)}}{h} \chi^{(\lambda)}(S^{-1}R^{-1}SR) = hl.$$

Теперь я переменю порядок обоих суммирований. Тогда по (5)

$$\sum_{\lambda} \frac{e^{(\lambda)}}{h} \chi^{(\lambda)}(S^{-1}R^{-1}SR) = 0$$

за исключением случая, когда

$$S^{-1}R^{-1}SR = E,$$

т. е.

$$SR = RS;$$

в этом случае сумма равна 1. Поэтому hl есть число решений уравнения

$$SR = RS.$$

Но это число, как я показал в *Ch.* (стр. 23 этой книги) очень простыми рассуждениями, равно hk и, следовательно, $l = k$.

Число различных простых множителей группового детерминанта равно числу классов сопряженных элементов группы.

Если R пробегает класс (α), то R^{-1} пробегает обратный класс, который я обозначу через (α'). Поэтому уравнения (8), § 5, равносильны с

(6) $$\sum_{\alpha} h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)} = \frac{hf^{(\varkappa)}}{e^{(\varkappa)}}, \qquad \sum_{\alpha} h_\alpha \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\lambda)} = 0.$$

Отсюда следует, что обе матрицы k-ой степени

(7) $$\left(\frac{h_\alpha}{h} \chi_\alpha^{(\varkappa)}\right), \qquad \left(\frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)}\right)$$

дополнительны друг другу, и, следовательно имеют место уравнения

$$\sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)} = \frac{h}{h_\alpha}, \qquad \sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_{\beta'}^{(\varkappa)} = 0.$$

Положив, таким образом, $h_{\alpha\beta} = h_\alpha$ или 0, смотря по тому, совпадает или нет класс (β) с классом (α'), получим

(8) $$\sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)} = \frac{h\, h_{\alpha\beta}}{h_\alpha\, h_\beta}.$$

Это уравнение получается непосредственно из соотношения (2). Именно, если $\chi(A) = \chi_\alpha$ и $\chi(B) = \chi_\beta$, то (2) имеет вид

$$\sum_{S}{}' \chi^{(\varkappa)}(AS) = \frac{h_\beta}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)},$$

где S пробегает h_β элементов β-ого класса. Поэтому

$$\sum_{\varkappa} \sum_{S}{}' \frac{e^{(\varkappa)}}{h} \chi^{(\varkappa)}(AS) = \frac{h_\beta}{h} \sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)}.$$

Но

$$\sum_{\varkappa} \frac{e^{(\varkappa)}}{h} \chi^{(\varkappa)}(AS) = 0,$$

— за исключением случая, когда

$$AS = E,$$

т. е.

$$S = A^{-1}.$$

В последнем случае эта сумма равна 1. Но это последнее имеет место тогда и только тогда, если $\beta) = (\alpha')$; таким образом получается уравнение (8). Как из него, так и из (6) следует, что детерминант k-ого порядка

(9) $$|\chi_\alpha^{(\varkappa)}|$$

отличен от нуля.

Пусть теперь A некоторый определенный элемент α-ого класса, а R переменный элемент, пробегающий h_α сопряженных с A элементов. Это же значение для β-ого класса пусть имеют буквы B и S, а для γ-ого класса — буквы C и T. Тогда по (2)

$$\sum_R{}' \chi(RSC) = \frac{h_\alpha}{f} \chi(A)\chi(SC), \qquad \sum_S{}' \chi(SC) = \frac{h_\beta}{f} \chi(B)\chi(C),$$

т. е.

$$\sum_{R,S}{}' \chi(RSC) = \frac{h_\alpha h_\beta}{f^2} \chi_\alpha \chi_\beta \chi_\gamma$$

и, следовательно

$$\sum_\varkappa \sum_{R,S}{}' \frac{e^{(\varkappa)}}{h} \chi^{(\varkappa)}(RSC) = \frac{h_\alpha h_\beta}{h} \sum_\varkappa \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)^2}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)} \chi_\gamma^{(\varkappa)}.$$

Левая часть равна числу решений уравнения $RSC = E$. Правая же часть показывает, что это число зависит не от самого элемента C, а только от класса (γ), к которому принадлежит C. Если обозначить это число через $\frac{h_{\alpha\beta\gamma}}{h_\gamma}$, то получим

$$(10) \qquad \frac{h\,h_{\alpha\beta\gamma}}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} = \sum_\varkappa \frac{e^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)^2}} \chi_\alpha^{(\varkappa)} \chi_\beta^{(\varkappa)} \chi_\gamma^{(\varkappa)}.$$

Если поставить вместо C последовательно h_γ элементов T класса (γ), то, следовательно, $h_{\alpha\beta\gamma}$ — число решений уравнения

$$RST = E,$$

если R пробегает h_α элементов класса (α), S — h_β элементов класса (β), а T — h_γ элементов класса (γ). Как показывает правая часть этого уравнения, число $h_{\alpha\beta\gamma}$ не изменяется при всякой перестановке трех его индексов. Поэтому $\frac{h_{\alpha\beta\gamma}}{h}$ есть также число решений уравнения $RBT = E$, где вместо S подставлен определенный элемент β-ого класса.

Из (6) и (10) получаются соотношения

$$h_\beta h_\gamma \chi_\beta^{(\varkappa)} \chi_\gamma^{(\varkappa)} = f^{(\varkappa)} \sum_\alpha h_{\alpha\beta\gamma} \chi_{\alpha'}^{(\varkappa)},$$

которые показывают, что величины χ_α удовлетворяют уравнениям

$$(11) \qquad h_\beta h_\gamma \chi_\beta \chi_\gamma = f \sum_\alpha h_{\alpha'\beta\gamma} \chi_\alpha.$$

Эти уравнения имеют поэтому k систем решений

$$\chi_\alpha = \chi_\alpha^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0,\ 1, \ldots k-1),$$

но не больше. Ибо, если $x_0, x_1, \dots x_{k-1}$ — переменные, и мы положим:

$$\sum_{\alpha} h_{\alpha} \chi_{\alpha}^{(x)} x_{\alpha} = f^{(x)} \xi^{(x)}, \tag{12}$$

то из (11) следует

$$h_{\alpha} \chi_{\alpha}^{(x)} \xi^{(x)} = \sum_{\beta} \Big(\sum_{\gamma} h_{\alpha\beta'\gamma} \chi_{\gamma} \Big) \chi_{\beta}^{(x)},$$

или

$$\sum_{\beta} \Big(\Big(\sum_{\gamma} h_{\alpha\beta'\gamma} x_{\gamma} \Big) - h_{\alpha\beta'} \xi^{(x)} \Big) \chi_{\beta}^{(x)} = 0 .$$

Следовательно, детерминант

$$\Big| \Big(\sum_{\gamma} h_{\alpha\beta'\gamma} x_{\gamma} \Big) - h_{\alpha\beta'} r \Big| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots k-1), \tag{13}$$

который является целой функцией k-ой степени от r, обращается в нуль при k значениях $r = \xi^{(x)}$, различных между собой (ср. Dedekind, *„Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.* — „К теории комплексных величин, образованных из n главных единиц". Göttinger Nachrichten, 1885, S. 146).

Уравнения (11) определяют величины $\frac{\chi_{\alpha}}{f}$. Затем, уравнение (6)

$$\frac{h}{ef} = \sum h_{\alpha} \frac{\chi_{\alpha}}{f} \frac{\chi_{\alpha'}}{f}$$

дает для каждого из k систем значений $\frac{\chi_{\alpha}}{f}$ соответствующее значение $ef = g$. Вследствие этого по § 3 для полного вычисления k простых функций Φ больше ничего не требуется, как только определения в отдельности чисел e и f, которых произведение g уже известно. Эта задача, являющаяся самым трудным из всех относящихся к групповому детерминанту вопросов, разрешается в § 9 теоремой, по которой всегда $e = f = \sqrt{g}$. Если к этому еще присоединить результат из § 12, что χ_{α} и $\chi_{\alpha'}$ сопряженные комплексные величины, то из (7) следует, что матрица

$$\left(\sqrt{\frac{h_{\alpha}}{h}} \chi_{\alpha}^{(x)} \right) \tag{14}$$

дополнительна сопряженной комплексной матрице.

§ 8.

В уравнении (7), § 6, дадим переменным y_R значения $\chi(R^{-1}) = \chi'(R)$, удовлетворяющие условию $y_{BA} = y_{AB}$ по (13), § 3. В таком случае по (8), § 5, $\eta = \frac{h}{e}$ и, следовательно,

(1) $$\Phi\left(\frac{e}{h}\chi'\right) = 1.^{30}$$

В силу свойства (13), § 3, матрица (χ') переместима со всякой матрицей (x). Положим

(2) $$\frac{h}{e}\xi_A = \sum\chi(R^{-1})x_S = \sum\chi(S^{-1})x_R \qquad (RS = A)$$

и образуем из величин $\xi_{PQ^{-1}}$ матрицу (ξ). Тогда

$$((x)+u(\varepsilon))\left(\frac{e}{h}\chi'\right) = (\xi)+u\left(\frac{e}{h}\chi'\right)$$

и, следовательно, по (9), § 1,

$$\Phi(x+u\varepsilon) = \Phi\left(\xi+u\frac{e}{h}\chi'\right).$$

Но по уравнению (6), § 6:

$$\Phi\left(\xi+u\frac{e}{h}\chi'\right) = \Phi(\xi+u\varepsilon),$$

так как соответствующее величинам $y_R = \frac{e}{h}\chi'(R)$ значение η по (8), § 5, равно 1. Следовательно,

(3) $$\Phi(x+u\varepsilon) = \Phi(\xi+u\varepsilon).$$

Но если Φ' отличный от Φ простой множитель группового детерминанта, f' его степень, а ψ соответствующий характер, то по (7), § 6,

$$\Phi'(y_R+u\varepsilon_R) = (u+\eta')^{f'} \qquad (y_{BA} = y_{AB}),$$

где $f'\eta' = \sum\psi(R)y_R$. Следовательно, если положить $y_R = \frac{e}{h}\chi'(R)$, то по (8), § 5, $\eta' = 0$. Поэтому, по (6), § 6, для h независимых переменных z_R

$$\Phi'\left(uz+\frac{e}{h}\chi'\right) = \Phi'(uz) = u^{f'}\Phi'(z).$$

Пусть $(z) = (x)^{-1}$, следовательно, $(z)(x) = (\varepsilon)$ и $\Phi(z)\Phi(x) = 1$. Тогда

$$\Phi'(x)\Phi'\left(uz+\frac{e}{h}\chi'\right) = u^{f'},$$

и поэтому, в силу того, что $(x)\left(u(z)+\left(\frac{e}{h}\chi'\right)\right) = u(\varepsilon)+(\xi)$,

(4) $$\Phi'(\xi+u\varepsilon) = u^{f'}.$$

Из этих обоих уравнений, являющихся частными случаями более общей формулы, получается по (7), § 1,[31]

$$(5)\qquad |\xi_{PQ^{-1}} + u\,\varepsilon_{PQ^{-1}}| = \Phi(x + u\,\varepsilon)^e\, u^{h-ef},$$

а при $x_R = \varepsilon_R$

$$(6)\qquad \left|\frac{e}{h}\chi(PQ^{-1}) + u\,\varepsilon_{PQ^{-1}}\right| = (u+1)^{ef}\, u^{h-ef}.$$

Поэтому характеристический детерминант матрицы (ξ) обращается в нуль при $f+1$ значениях $u = 0, u_1, u_2, \ldots u_f$. Именно, так как групповой детерминант $\Theta(x)$ содержит всегда линейный множитель $\sum x_R$ и при этом в первой степени, то должно быть необходимо $h - ef > 0$, если исключить тривиальный случай $h = 1$.

Пусть теперь $G((\xi)) = 0$ — уравнение низшей степени, которому удовлетворяет матрица (ξ) (V. § 1, VI). В таком случае целая функция $G(u)$, являющаяся делителем характеристического детерминанта $|\xi_{PQ^{-1}} - u\,\varepsilon_{PQ^{-1}}|$, должна обращаться в нуль для каждого корня матрицы (ξ), т. е. для каждого из $f+1$ значений $u = 0, u_1, u_2, \ldots u_f$ и, следовательно, должна делиться на $u\,\Phi(x - u\,\varepsilon)$. Так как, далее, матрица (χ') переместима с каждой матрицей (x), то по (9), § 5,

$$(7)\qquad (\xi)^n = \left(\left(\frac{e}{h}\chi'\right)(x)\right)^n = \left(\frac{e}{h}\chi'\right)^n (x)^n = \left(\frac{e}{h}\chi'\right)(x)^n.$$

Поэтому, если помножить соотношение (5), § 4, на (x), то получим

$$(8)\qquad (\xi)^{f+1} - (\xi)^f\,\Phi_1 + (\xi)^{f-1}\,\Phi_2 - \ldots + (-1)^f(\xi)\,\Phi_f = 0\,,$$

где по (3)

$$(9)\qquad \Phi_n = \Phi_n(x) = \Phi_n(\xi)\,,$$

или короче:

$$(\xi)\,\Phi\big(x - (\xi)\,\varepsilon\big) = 0\,.$$

Следовательно, $u\,\Phi(x - u\,\varepsilon)$ делится на $G(u)$, т. е. равна $G(u)$, и, следовательно, (8) уравнение низшей степени, которому удовлетворяет матрица (ξ).

Не используя соотношения (5), § 4, можно убедиться в правильности этой теоремы также и следующим образом: функция $G(u)$ получается, если детерминант h-ой степени $|\xi_{PQ^{-1}} - u\varepsilon_{PQ^{-1}}|$ разделить на общего наибольшего делителя всех его миноров $(h-1)$-ой степени. Если h переменных x_R независимы, то из уравнения (1), § 5, следует, что все миноры $(h-1)$-ой степени детерминанта $\Theta(x)$ делятся на $\Phi(x)^{e-1}$. Поэтому все миноры детерминанта $\Theta(\xi - u\,\varepsilon)$ делятся на $\Phi(\xi - u\,\varepsilon)^{e-1} = \Phi(x - u\,\varepsilon)^{e-1}$, т. е. также и на $(u - u_1)^{e-1}$, но не на высшую степень $u - u_1$, так как иначе $\Theta(\xi - u\,\varepsilon)$ должно было бы делиться на высшую чем e-ая, степень $u - u_1$. При помощи этих же теорем из уравнений (9), § 5, и (6) получается, что ранг матрицы (χ) равен ef, как я показал подробнее в *Ch.* § 5. Поэтому и ранг матрицы

$$(10) \qquad (\xi) = \left(\frac{e}{h}\chi'\right)(x) = (x)\left(\frac{e}{h}\chi'\right)$$

также равен ef. Следовательно, $h - ef$ элементарных делителей характеристического детерминанта матрицы (ξ) обращаются в нуль при $u = 0$, а так как произведение их по (6) равно u^{h-ef}, то каждый из них должен быть линейным. Следовательно, общий наибольший делитель миноров $(h-1)$-ой степени этого детерминанта содержит множителя u точно в $(h - ef - 1)$-ой степени, и поэтому должно быть:

$$(-1)^f G(u) = u\,\Phi(x - u\varepsilon).$$

§ 9.

После этих приготовлений я перехожу к доказательству основной теоремы теории групповых детерминантов:

Показатель степени, в которой простой множитель содержится в групповом детерминанте, равен степени самого множителя.

Случай $f = 1$ я уже рассмотрел в § 2. Вследствие трудности общего доказательства я ему предпосылаю еще разбор случаев $f = 2$ и 3.

Если $f = 2$, то

$$(1) \qquad 2\,\Phi(x) = S_1^2 - S_2,$$

и соответствующий характер χ удовлетворяет соотношению

$$\chi(A,\ B,\ C) = 0,$$

или

$$(2) \qquad \chi(A)\chi(B)\chi(C) - \chi(A)\chi(BC) - \chi(B)\chi(AC) - \chi(C)\chi(AB) + \\ + \chi(ABC) + \chi(ACB) = 0.$$

В этом уравнении я заменяю B через BC^{-1} и суммирую, затем, относительно C по h элементам группы $\mathfrak{H}$ (или можно во (2) суммировать по всем элементам B, C, удовлетворяющим условию $BC = B'$, где B' — постоянный элемент). При помощи формулы (7), § 5, и (3), § 7, найдем

$$\frac{h}{e}\chi(A)\chi(B) - h\chi(A)\chi(B) - \frac{h}{e}\chi(AB) - \frac{h}{e}\chi(AB) + h\chi(AB) + \\ + \frac{h}{f}\chi(A)\chi(B) = 0,$$

и, следовательно, так как $f=2$:

$$\left(\frac{h}{e}-\frac{h}{f}\right)\left(\chi(A)\chi(B)-2\chi(AB)\right)=0.$$

Поэтому $e=f$, ибо не может быть для всяких двух элементов

$$\chi(A)\chi(B)-2\chi(AB)=0.$$

Иначе мы получили бы, умножив это уравнение на $x_A x_B$ и просуммировав по A и B, $S_1^2-2S_2=0$. Следовательно, по (1) было бы $4\Phi=S_1^2$, тогда как Φ неразложима.

Если $f=3$, то

$$6\Phi=S_1^3-3S_1S_2+2S_3, \tag{3}$$

и соответствующий характер удовлетворяет соотношениям $\chi(A, B, C, D)=0$ ((20), § 3). Если заменить там C через CD^{-1} и просуммировать затем по D, то получим:

$$\frac{h}{e}\left(\chi(A)\chi(B)\chi(C)-\chi(B)\chi(AC)-\chi(A)\chi(BC)-\chi(A)\chi(BC)-\right.$$

$$-\chi(B)\chi(AC)-\chi(C)\chi(AB)+\chi(ABC)+\chi(ACB)+\chi(ABC)+$$

$$\left.+\chi(ABC)+\chi(ACB)+\chi(ACB)\right)+h\left(-\chi(A)\chi(B)\chi(C)+\right.$$

$$\left.+\chi(C)\chi(AB)+\chi(A)\chi(BC)+\chi(B)\chi(AC)-\chi(ABC)-\chi(ACB)\right)+$$

$$+\frac{h}{f}\left(\chi(A)\chi(B)\chi(C)+\chi(A)\chi(B)\chi(C)-\chi(B)\chi(AC)-\chi(A)\chi(BC)-\right.$$

$$\left.-\chi(C)\chi(AB)-\chi(C)\chi(AB)\right)=0,$$

следовательно, если заменить множитель h через $3\frac{h}{f}$, то:

$$\left(\frac{h}{e}-\frac{h}{f}\right)\left(\chi(A)\chi(B)\chi(C)-2\chi(A)\chi(BC)-2\chi(B)\chi(AC)-\right. \tag{4}$$

$$\left.-\chi(C)\chi(AB)+3\chi(ABC)+3\chi(ACB)\right)=0.$$

Если бы второй множитель постоянно равнялся нулю, то мы получили бы, умножив на $x_A x_B x_C$ и просуммировав, $S_1^3-5S_1S_2+6S_3=0$, а исключив при помощи этого уравнения S_3 из (3), нашли бы $9\Phi=S_1(S_1^2-2S_2)$, тогда как Φ неразложима. Поэтому $e=f=3$.

В общем случае характер χ удовлетворяет соотношениям:

$$\chi(A, B, C, \ldots Q, R, S)=0,$$

где $A, B, \ldots R, S$ — какие-нибудь $f+1$ элементов, — или, короче,

$$\sum\nolimits^{(f+1)}(\Pi-\chi)=0.$$

В каждом из $(f+1)!$ членов этой суммы заменим R через RS^{-1} и просуммируем затем по S. Каждый член соответствует некоторой перестановке $f+1$ символов, разложенной на циклические множители. Относительно этих перестановок я различаю три случая.

1. R и S входят в два разных цикла перестановки, напр.,

$$(-\chi(ABCD \ldots FR))(-\chi(S))(-\chi(G \ldots K)) \ldots$$

Заменив R через RS^{-1} и просуммировав затем по S, получим по (7), § 5,

$$-\frac{h}{e}(-\chi(ABCD \ldots FR))(-\chi(G \ldots K)) \ldots$$

Этот же самый результат получается тем же способом из члена

$$(-\chi(BCD \ldots FR))(-\chi(SA))(-\chi(G \ldots K)) \ldots$$

и из

$$(-\chi(CD \ldots FR))(-\chi(SAB))(-\chi(G \ldots K)) \ldots$$

и т. д., наконец, из

$$(-\chi(R))(-\chi(SABCD \ldots F))(-\chi(G \ldots K)) \ldots,$$

но не из какого-либо другого члена. Следовательно, если r число элементов $ABCD \ldots FR$, то получим этим путем:

$$-\frac{h}{e}\sum\nolimits^{(f)} r(\Pi-\chi). \tag{5}$$

$f!$ членов этой суммы, образованы аналогично тому, как образованы члены суммы (19), § 3, из $f!$ перестановок f элементов $A, B, C, \ldots Q, R$. Только в этой сумме, где элемент R выделен, каждый член $(\Pi-\chi)$ получает еще числового множителя r. Последний равен числу элементов того цикла, куда входят R (ср. (4)).

2. R и S оба входят в один и тот же цикл перестановки, причем S следует в цикле непосредственно за R (может также случиться, что S — первый, а R — последний элемент цикла), напр.,

$$(-\chi(AB \ldots FRS))(-\chi(G \ldots K)) \ldots$$

Если заменить R через RS^{-1} и просуммировать затем по S, то получим

$$h(-\chi(AB \ldots FR))(-\chi(G \ldots K)) \ldots,$$

причем каждый член войдет по одному разу, т. е. всего

$$h\sum\nolimits^{(f)}(\Pi-\chi). \tag{6}$$

3. R и S входят оба в один и тот же цикл, но S не следует непосредственно за R, напр.,

$$(-\chi(A\ldots RBCD\ldots FS))(-\chi(G\ldots K))(-\chi(L\ldots N))\ldots$$

Заменив R через RS^{-1} и просуммировав затем по S, получим по (3), § 7,

$$-\frac{h}{f}(-\chi(A\ldots R))(-\chi(BCD\ldots F))(-\chi(G\ldots K))(-\chi(L\ldots N))\ldots$$

Тот же результат мы получим тем же путем из члена

$$(-\chi(A\ldots RCD\ldots FBS))(-\chi(G\ldots K))(-\chi(L\ldots N))\ldots,$$

который получается из предыдущего циклическим перемещением стоящих между R и S элементов $BCD\ldots F$. Число циклических перемещений, которое таким образом можно проделать, равно числу элементов $BCD\ldots F$. Далее, тот же результат получим из члена

$$(-\chi(A\ldots RG\ldots KS))(-\chi(BCD\ldots F))(-\chi(L\ldots N))\ldots$$

И здесь можно циклически перемещать стоящие между R и S элементы $G\ldots K$; это возможно столькими способами, сколько всего элементов $G\ldots K$.

Этот же результат получается из члена

$$(-\chi(A\ldots RL\ldots NS))(-\chi(BCD\ldots F))(-\chi(G\ldots K))\ldots$$

и т. д., всего, следовательно, столькими способами, сколько всего элементов $BCD\ldots FG\ldots KL\ldots N\ldots$, но не больше, т. е. $f-r$ способами, если число элементов $A\ldots R$, как выше, обозначить через r. Таким образом получим

$$-\frac{h}{f}\sum^{(f)}(f-r)(\Pi-\chi). \tag{7}$$

Соединив три выражения (5), (6) и (7), получим уравнение

$$\left(\frac{h}{f}-\frac{h}{e}\right)\left(\sum^{(f)}r(\Pi-\chi)\right)=0. \tag{8}$$

Следовательно, $e=f$, если мы покажем, что не для всяких f элементов $AB\ldots QR$ имеет место уравнение

$$\sum^{(f)}r(\Pi-\chi)=0.$$

Помножив это уравнение на $x_A x_B\ldots x_Q x_R$ и просуммировав по каждому из f элементов $A, B, \ldots Q, R$, получим соотношение между $S_1, S_2, \ldots S_f$. Это последнее не тождественно (т. е. безотносительно к значениям $S_1, S_2, \ldots S_f$) исполнено, так как оно линейно относительно S_f, и коэффициент при S_f — целое число, не равное нулю. Но я покажу, что $S_1, S_2, \ldots S_f$ f независимых функций от h независимых переменных x_R, — что, следовательно, между ними нет никакого соотношения, коэффициенты которого независимы от переменных x_R. Отсюда будет следовать, что $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_f$ тоже независимы, а также и $U_1, U_2, \ldots U_f$.

Если бы между f функциями $S_1, S_2, \ldots S_f$ от h независимых переменных x_R имелось уравнение, то после дифференцирования его по x_R мы получили-бы соотношение вида

$$\Psi_1 \frac{\partial S_1}{\partial x_R} + \Psi_2 \frac{\partial S_2}{\partial x_R} + \ldots + \Psi_f \frac{\partial S_f}{\partial x_R} = 0,$$

где $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_f$ — целые функции от h переменных, независимые от R. Но мы имеем

$$S_n = \sum_{R_1, R_2, R_3, \ldots R_n} \chi(R_1 R_2 R_3 \ldots R_n) x_{R_1} x_{R_2} x_{R_3} \ldots x_{R_n}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial S_n}{\partial x_R} = \sum_{R_2, R_3, \ldots R_n} \chi(R R_2 R_3 \ldots R_n) x_{R_2} x_{R_3} \ldots x_{R_n} +$$
$$+ \sum_{R_1, R_3, \ldots R_n} \chi(R_1 R R_3 \ldots R_n) x_{R_1} x_{R_3} \ldots x_{R_n} + \ldots +$$
$$+ \sum_{R_1, R_2, \ldots R_{n-1}} \chi(R_1 R_2 \ldots R_{n-1} R) x_{R_1} x_{R_2} \ldots x_{R_{n-1}},$$

т. е., так как $\chi(ABC \ldots F)$ не меняется при циклическом перемещении элементов, то

(9) $$\frac{\partial S_n}{\partial x_R} = n \sum_{R_1, R_2, \ldots R_{n-1}} \chi(R R_1 R_2 \ldots R_{n-1}) x_{R_1} x_{R_2} \ldots x_{R_{n-1}}$$

или по (6), § 1, и (7), § 8,

(10) $$\frac{\partial S_n}{\partial x_R} = n \sum_S \chi(RS) x_S^{(n-1)} = \frac{nh}{e} \xi_{R^{-1}}^{(n-1)},$$

где $\xi_R^{(n)}$ образованы из величин ξ_R таким же путем, как $x_R^{(n)}$ из величин x_R. В частности

(11) $$\frac{\partial S_n}{\partial x_E} = n S_{n-1}.$$

Подставив это выражение в приведенное выше соотношение, получим, заменив еще R через R^{-1}:

$$\Psi_1 \frac{e}{h} \chi(R^{-1}) + 2\Psi_2 \xi_R + 3\Psi_3 \xi_R^{(2)} + \ldots + f \Psi_f \xi_R^{(f-1)} = 0.$$

Если положить $R = PQ^{-1}$, то получим отсюда уравнение между матрицами, которое, будучи умножено на (x), имеет вид

$$(\xi)\Psi_1 + 2(\xi)^2 \Psi_2 + 3(\xi)^3 \Psi_3 + \ldots + f(\xi)^f \Psi_f = 0.$$

Но я показал в § 8, что уравнение низшей степени, которому удовлетворяет матрица (ξ), имеет степень $f+1$. Следовательно, второй множитель выражения (8) не может для всякой системы из f элементов обращаться в нуль, и поэтому должно быть

$$e = f. \tag{12}$$

§ 10.

Если x_R и y_R — две системы по h переменных, то по § 6 матрица $(x_{PQ^{-1}})$ переместима с матрицей $(y_{Q^{-1}P})$, и, следовательно, детерминант:

$$|ux_{PQ^{-1}} + vy_{Q^{-1}P} + w\varepsilon_{PQ^{-1}}| \tag{1}$$

есть произведение h линейных функций от трех переменных u, v, w вида $ua_\alpha + vb_\alpha + w$. Здесь $a_1, a_2, a_3, \ldots$ h корней матрицы $(x_{PQ^{-1}})$, а $b_1, b_2, b_3, \ldots$ корни матрицы $(y_{Q^{-1}P})$ или, что по § 6 одно и то же, матрицы $(y_{PQ^{-1}})$. Возникает вопрос, каким образом корни этих обеих матриц должны быть сопоставлены друг с другом, чтобы $ua_\alpha + vb_\alpha + w$ было линейным множителем детерминанта (1). Положим

$$\sum_R x_R \chi(RS^{-1}) = \frac{h}{e}\xi_S, \quad \sum_R y_R \chi(RS^{-1}) = \frac{h}{e}\eta_S,$$

далее,

$$(x_{PQ^{-1}}) = (x), \quad (\xi_{PQ^{-1}}) = (\xi), \quad (y_{Q^{-1}P}) = (\bar{y}), \quad (\eta_{Q^{-1}P}) = (\bar{\eta}),$$

где всегда P обозначает строки, а Q — столбцы матрицы. Тогда

$$\left(\frac{e}{h}\chi'\right)(x) = (x)\left(\frac{e}{h}\chi'\right) = (\xi), \quad \left(\frac{e}{h}\chi'\right)(\bar{y}) = (\bar{y})\left(\frac{e}{h}\chi'\right) = (\bar{\eta}).$$

k различных характеров χ я обозначаю верхними индексами: $\chi^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots k-1)$. Матрицы (ξ) и $(\bar{\eta})$, соответствующие характеру $\chi^{(\varkappa)}$, я обозначаю через $(\xi^{(\varkappa)})$ и $(\bar{\eta}^{(\varkappa)})$. Если $\varkappa$ и λ различны, то из (9), § 5, следует:

$$(\xi^{(\varkappa)})(\xi^{(\lambda)}) = 0, \quad (\bar{\eta}^{(\varkappa)})(\bar{\eta}^{(\lambda)}) = 0, \quad (\xi^{(\varkappa)})(\bar{\eta}^{(\lambda)}) = 0, \quad (\bar{\eta}^{(\varkappa)})(\xi^{(\lambda)}) = 0. \tag{2}$$

По уравнению (5), § 7,

$$\sum_\varkappa \left(\frac{e^{(\varkappa)}}{h}\chi'\right) = (\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$\sum(\xi^{(\varkappa)}) = (x), \quad \sum_\varkappa(\bar{\eta}^{(\varkappa)}) = (\bar{y}).$$

Таким образом, если разложить произведение k матриц

$$\prod_{\varkappa}\left(u\left(\xi^{(\varkappa)}\right)+v\left(\overline{\eta}^{(\varkappa)}\right)+w(\varepsilon)\right)$$

по степеням w, то получим

$$w^k(\varepsilon)+w^{k-1}\left(u(x)+v(y)\right),$$

тогда как остальные члены по (2) обращаются в нуль. Между детерминантами этих матриц получается поэтому соотношение

$$(3)\quad \prod_{\varkappa}\left|u\xi^{(\varkappa)}_{PQ^{-1}}+v\eta^{(\varkappa)}_{Q^{-1}P}+w\varepsilon_{PQ^{-1}}\right| = w^{h(k-1)}\left|ux_{PQ^{-1}}+vy_{Q^{-1}P}+w\varepsilon_{PQ^{-1}}\right|$$

(ср. аналогичное рассуждение *V.*, стр. 16). Пусть один из k множителей левой части есть

$$(4)\qquad \left|u\xi_{PQ^{-1}}+v\eta_{Q^{-1}P}+w\varepsilon_{PQ^{-1}}\right|.$$

Как показывает правая часть, этот детерминант равен степени w, помноженной на некоторое число линейных множителей $ua_\alpha+vb_\alpha+w$ детерминанта (1). С другой стороны, детерминант (4) можно рассматривать, как специальный случай детерминанта (1): корни матрицы (ξ) являются по (5), § 8, f корнями u_1, $u_2, \ldots u_f$ уравнения $\Phi(x-u\varepsilon)=0$, причем каждый считается e раз, и кроме того $(h-ef)$ раз считается число 0. Подобно же, корнями матрицы $(\overline{\eta})$ являются число 0 и корни $v_1, v_2, \ldots v_f$ уравнения $\Phi(y-v\varepsilon)=0$. Поэтому детерминант (4) есть произведение линейных множителей $au+bv+w$, где a — одна из $f+1$ величин $0, u_1, u_2, \ldots u_f$, а b — одна из $f+1$ величин $0, v_1, v_2, \ldots v_f$. Но, как показывает правая часть уравнения (3), комбинация, подобная такой: $a=u_1$, $b=0$ не может встретиться. Поэтому, за исключением степени w, детерминант (4) содержит еще только линейные множители вида $uu_\alpha+vv_\beta+w$, где u_α — одна из f величин $u_1, u_2, \ldots u_f$, а v_β — одна из f величин $v_1, v_2, \ldots v_f$. Но мы имеем:

$$u(\xi)+v(\overline{\eta}) = \left(\frac{e}{h}\chi'\right)\left(u(x)+v(\overline{y})\right),$$

и поэтому эта матрица имеет ранг ef. Следовательно, детерминант содержит множителя w в степени $h-ef$, но не выше, так как последнее не имеет места по (5), § 8, даже для $v=0$. Остальные ef линейных множителей поэтому все вида $uu_\alpha+vv_\beta+w$. Пусть uu_1+vv_1+w — один из них. Если рассматривать h величин y_R, а, следовательно, и f величин v_β, как постоянные, то детерминант (4), как функция от w, имеет общий линейный множитель uu_1+vv_1+w с неприводимой функцией $\Phi(ux_\varepsilon+vv_1+$ $+w, ux_A, ux_B, \ldots)$. Следовательно, он имеет с нею общими все множители $uu_\alpha+vv_1+w$ $(\alpha=1, 2, \ldots f)$. Подобно же убедимся в том, что этот детерминант содержит все f^2 линейных функций

$$uu_\alpha+vv_\beta+w \qquad (\alpha, \beta=1, 2, \ldots f)$$

и каждую одно и то же число раз. Если каждый множитель входит m раз, то $ef = mf^2$, т. е. $e = fm$. Таким образом, можно, не используя результатов § 9, показать, что e делится на f. Но по этому параграфу $e = f$, и, следовательно, $m = 1$, т. е.

(5) $$| u\xi_{PQ^{-1}} + v\eta_{Q^{-1}P} + w\varepsilon_{PQ^{-1}} | = w^{h-ef} \prod_{\alpha, \beta}{}_1^f (uu_\alpha + vv_\beta + w).$$

Этими рассуждениями дается способ, как нужно сопоставить друг с другом корни обеих матриц (x) и (y), чтобы получить линейные множители детерминанта (1). Если Φ и Φ' — два различных простых множителя Θ, то каждый корень уравнения $\Phi(x - w\varepsilon) = 0$ следует комбинировать с каждым корнем уравнения $\Phi(y - w\varepsilon) = 0$, но не с корнями уравнения $\Phi'(y - w\varepsilon) = 0$. Общность полученной формулы не уменьшится, если положить $u = v = 1$, а $w = 0$. Если

(6) $$\Psi(x, y) = \prod_{\alpha, \beta}{}_1^f (u_\alpha + v_\beta)$$

результант обеих функций $\Phi(x - \varepsilon w)$ и $\Phi(y - \varepsilon w)$ переменной w, то

(7) $$| x_{PQ^{-1}} + y_{Q^{-1}P} | = \Pi\Psi(x, y).$$

Если бы можно было прямо доказать, что этот детерминант, рассматриваемый, как функция от $2h$ независимых переменных x_R, y_R, не имеет кратных множителей, то мы получили бы новое доказательство равенства $e = f$. Если положить h величин $y_R = 0$, то получим: $\Psi(x, y) = \Phi(x)^f$. Этим путем достигается более глубокое понимание причины замечательного явления, что групповой детерминант содержит каждого своего простого множителя в степени, показатель которой равен степени самого множителя.

Особенно интересен специальный случай, когда $y_R = -x_R$. Тогда детерминант

(8) $$| x_{PQ^{-1}} - x_{Q^{-1}P} + w\varepsilon_{PQ^{-1}} | = w^s \Pi\Psi,$$

где

(9) $$\Psi = \prod_{\alpha > \beta} (w - (u_\beta - u_\alpha)^2)$$

и

(10) $$s = \sum f.$$

Уравнению $\Psi = 0$ удовлетворяют, таким образом, квадраты разностей корней уравнения $\Phi(x - w\varepsilon) = 0$. Я покажу, что все, обращающиеся при $w = 0$ в нуль элементарные делители этого детерминанта — линейны, или, что то же самое, что ранг r матрицы

(11) $$(x_{PQ^{-1}} - x_{Q^{-1}P})$$

(12) $$r = h - s.$$

По формуле (8) $r \geqq h - s$. Так как обе матрицы (x) и $(x)^n$ переместимы друг с другом, то

$$x_A^{(n+1)} = \sum x_R x_S^{(n)} = \sum x_R^{(n)} x_S \qquad (RS = A)$$

или

$$x_A^{(n+1)} = \sum_R x_{AR^{-1}} x_R^{(n)} = \sum_R x_R^{(n)} x_{R^{-1}A},$$

т. е.

$$\sum_R (x_{AR^{-1}} - x_{R^{-1}A}) x_R^{(n)} = 0.$$

Если подставить вместо A последовательно все h элементов из $\mathfrak{H}$, то

(13) $$\sum_R (x_{AR^{-1}} - x_{R^{-1}A}) y_R = 0$$

будет системою h линейных уравнений с h неизвестными y_R. Ранг матрицы, образованной из их коэффициентов, есть r. Следовательно, полная система их решений образует матрицу ранга $h - r$, а ранг какой-нибудь системы их решений, напр., системы

$$y_R = x_R^{(n)} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

будет $\leqq h - r$. Если характеристический детерминант $|x_{PQ^{-1}} - u\varepsilon_{PQ^{-1}}|$ матрицы (x) содержит линейного множителя $u - u_1$ в e-ой степени, то по § 8 общий наибольший делитель всех его миноров $(h-1)$-ой степени содержит этого множителя в $(e-1)$-ой степени. Следовательно, уравнение низшей степени, которому удовлетворяет матрица (x), имеет степень $\sum f = s$, именно $G\big((x)\big) = 0$, где

$$(-1)^s G(u) = \Pi\Phi(x - u\varepsilon).$$

Поэтому матрицы $(x)^0, (x)^1, \ldots (x)^{s-1}$ линейно независимы, т. е. и s решений

(14) $$y_R = x_R^{(n)}$$

независимы, и, следовательно, $s \leqq h - r$. Таким образом, $r = h - s$, и величины (14) образуют полную систему независимых решений h линейных уравнений (13), среди которых r независимых.

§ 11.

По уравнениям (9), § 8, имеем:

(1) $$\Phi(x) = \Phi(\xi), \quad \Phi_n(x) = \Phi_n(\xi), \quad S_n(x) = S_n(\xi),$$

т. е.

(2) $$n!\,\Phi_n(x) = \sum_{R_1, R_2, \ldots R_n} \chi(R_1, R_2, \ldots R_n)\, \xi_{R_1} \xi_{R_2} \ldots \xi_{R_n}$$

и

$$(3)\qquad S_n(x) = \sum_{R_1, R_2, \ldots R_n} \chi(R_1, R_2, \ldots R_n)\, \xi_{R_1} \xi_{R_2} \ldots \xi_{R_n}.$$

Другое представление получается из формул (10), § 9, именно:

$$(4)\qquad \frac{e}{h} S_n(x) = \xi_E^{(n)} = \sum_{R_1, R_2, \ldots R_n} \xi_{R_1} \xi_{R_2} \ldots \xi_{R_n} \quad (R_1 R_2 \ldots R_n = E).$$

В силу этого функции S_n и Φ_n, в частности, саму функцию Φ можно выразить через h переменных

$$(5)\qquad \xi_S = \frac{e}{h} \sum_R \chi(RS^{-1})\, x_R,$$

между которыми только ef независимых, так как по § 8 ранг матрицы, образованной коэффициентами этих h линейных функций от h переменных x_R, равен ef. Проделав это преобразование для каждого простого множителя Θ, мы выразим групповой детерминант через

$$(6)\qquad \sum ef = h$$

новых переменных.

Преобразовываем каждую из k простых функций $\Phi, \Phi', \ldots$ отдельно линейной подстановкой в функцию от возможно меньшего числа новых переменных. Если числа этих переменных для $\Phi, \Phi', \ldots$ равны $g, g', \ldots,$ то $g \leqq ef$, $g' \leqq e f'$, ... После этого могло бы еще случиться, что функции $\Phi, \Phi', \ldots$ все вместе могли бы быть представлены, как функции от еще меньшего числа, чем $g + g' + \ldots$, новых переменных, линейных соединений h независимых переменных x_R. Если бы это было, или если бы было $g < ef$ или $g' < e'f', \ldots,$ то функция Θ преобразовывалась бы линейной подстановкой в функцию от меньшего числа, чем h, переменных. Но мы имеем

$$\sum_R \frac{\partial l\Theta}{\partial x_R} x_{RA^{-1}} = \varepsilon_A h.$$

Дифференцируя это уравнение по $x_{B^{-1}}$, получим

$$\sum_R \frac{\partial^2 l\Theta}{\partial x_R\, \partial x_{B^{-1}}} x_{RA^{-1}} = -\frac{\partial l\Theta}{\partial x_{B^{-1}A}} = -\frac{h}{\Theta}\, \Theta_{B^{-1}, A^{-1}}$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\partial^2 l\Theta}{\partial x_P\, \partial x_{Q^{-1}}} \right| \left| x_{PQ^{-1}} \right| = \left(-\frac{h}{\Theta} \right)^h |\Theta_{P, Q}|,$$

т. е.

$$(7)\qquad \left| \frac{\partial^2 l\Theta}{\partial x_P\, \partial x_{Q^{-1}}} \right| = \frac{(-h)^h}{\Theta^2}.$$

Но если можно было бы линейной подстановкой преобразовать Θ в функцию меньше, чем от h переменных, то этот детерминант должен был бы обратиться в нуль. Следовательно, Φ можно выразить через ef, но не через меньше, чем ef, переменных, являющихся линейными соединениями h переменных x_R, и эти ef переменных функции Φ, $e'f'$ переменных функции Φ', ... все между собою независимы.

Особенно простым образом представляется Φ^e через переменные ξ_R. Для этого я пользуюсь следующей теоремой о детерминантах (ср. мою работу *Über das Pfaff'sche Problem*, Crelle's Journal, Bd, 82; § 4, I. — „О проблеме Пфаффа"):

Если r ранг матрицы

$$a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n),$$

то детерминанты r-ой степени, которые можно образовать из элементов r столбцов этой матрицы, относятся так же, как соответствующие детерминанты r-ой степени, которые можно образовать из элементов каких-либо r других столбцов этой матрицы.

При этом два детерминанта называются соответствующими, если для их образования взяты одни и те же строки и при этом в том же самом порядке. Эта же теорема остается верной, если переместить строки со столбцами. Она обобщается следующим образом.

Если матрица $(c_{\alpha\beta})$ составлена из обеих матриц $(a_{\alpha\beta})$ и $(b_{\alpha\beta})$, и r ранг матрицы $(a_{\alpha\beta})$, то детерминанты r-ой степени, которые можно образовать из элементов r столбцов матрицы $(a_{\alpha\beta})$, относятся, как соответствующие детерминанты r-ой степени, которые можно образовать из элементов любых r столбцов матрицы $(c_{\alpha\beta})$.

В таком случае ранг матрицы

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha 1} b_{1\beta} + a_{\alpha 2} b_{2\beta} + \dots + a_{\alpha n} b_{n\beta}$$

не выше r. Но значение имеет эта теорема только в том случае, если ранг $(c_{\alpha\beta})$ равен r. Это должно иметь место, если детерминант n-ой степени матрицы $(b_{\alpha\beta})$ отличен от нуля.

Знаком

$$\left| a^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r} \right|$$

я обозначаю детерминант r-ой степени, образованный из элементов строк с номерами α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_r$ и столбцов с номерами β_1, $\beta_2, \dots \beta_r$ матрицы $(a_{\alpha\beta})$ в данной последовательности. В таком случае отношение

$$\left| a^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_r}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \right| : \left| c^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_r}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r} \right|$$

не зависит от выбора индексов ρ_1, $\rho_2, \dots \rho_r$.

Если опять $(c_{\alpha\beta}) = (a_{\alpha\beta})\,(b_{\alpha\beta})$ и r — ранг матрицы $(b_{\alpha\beta})$, то детерминанты r-ой степени, которые можно образовать из элементов r **строк** матрицы $(b_{\alpha\beta})$, относятся так же, как соответствующие детерминанты r-ой степени, которые можно образовать из элементов каких-нибудь r строк матрицы $(c_{\alpha\beta})$.

Эту теорему я применяю к матрице

$$(8)\qquad (\xi) = \left(\frac{e}{h}\chi'\right)(x) = (x)\left(\frac{e}{h}\chi'\right).$$

Ранг матриц (χ') есть $g = ef$, таков же и ранг матрицы (ξ). Поэтому приведенная выше теорема верна как для строк, так и для столбцов, и мы имеем

$$\left|\xi\begin{matrix}A_1, A_2, \dots A_g\\ B_1, B_2, \dots B_g\end{matrix}\right| = \left(\frac{e}{h}\right)^g \left|\chi'\begin{matrix}A_1, A_2, \dots A_g\\ B_1, B_2, \dots B_g\end{matrix}\right|\Psi,$$

где Ψ не зависит от выбора элементов $A_1, A_2, \dots A_g, B_1, B_2, \dots B_g$. Сравнивая в соотношениях

$$\left|\xi_{PQ^{-1}} + u\,\varepsilon_{PQ^{-1}}\right| = \Phi(x+u\varepsilon)^e u^{h-g},\quad \left|\frac{e}{h}\chi'(PQ^{-1}) + u\,\varepsilon_{PQ^{-1}}\right| = (u+1)^g u^{h-g}$$

коэффициенты при u^{h-g}, получим: сумма всех главных миноров r-ой степени для матрицы (ξ) равна $\Phi(x)^e$, а для матрицы $\left(\frac{e}{h}\chi'\right)$ равна 1. Следовательно, $\Psi = \Phi^e$, т. е.

$$(9)\qquad \left|\xi\begin{matrix}A_1, A_2, \dots A_g\\ B_1, B_2, \dots B_g\end{matrix}\right| = \left(\frac{e}{h}\right)^g \left|\chi\begin{matrix}B_1, B_2, \dots B_g\\ A_1, A_2, \dots A_g\end{matrix}\right|\Phi(x)^e.$$

Если выбрать $2g$ элементов $A_1, B_1, \dots A_g, B_g$ так, чтобы входящий в (9) детерминант g-ой степени матрицы (χ) был отличен от нуля, то соответствующий детерминант матрицы (ε) будет равен Φ^e с точностью до постоянного множителя. Между отличными от нуля детерминантами r-ой степени этих обеих матриц имеются также и главные миноры (где $B_1 = A_1, \dots B_g = A_g$), так как сумма всех главных миноров g-ой степени не равна нулю.

Таким же образом получается более общая формула

$$(10)\qquad \left|\xi_{PQ^{-1}} + \eta_{Q^{-1}P}\right| = \left(\frac{e}{h}\right)^g \left|\chi(QP^{-1})\right|\Psi(x, y)\quad \begin{pmatrix}P = A_1, A_2, \dots A_g\\ Q = B_1, B_2, \dots B_g\end{pmatrix},$$

где $\Psi(x, y)$ имеет то же значение, что и в уравнении (6), § 10.

§ 12.

Нахождение k простых множителей, на которые распадается групповой детерминант, свелось к определению постоянных $\chi_\alpha^{(\varkappa)}$, которое зависит от решения уравнения k-ой степени[32].

Исследуем подробнее алгебраическую и арифметическую природу этих величин. Сначала я определю алгебраическое тело, к которому принадлежат эти числа.

Пусть $\mathfrak{G}$ — подгруппа $\mathfrak{H}$, g — ее порядок, $h = gn$, и пусть H — принадлежащий к $\mathfrak{G}$ групповой детерминант. Пусть $E, A, B, \ldots$ g элементов из $\mathfrak{G}$, а $L, M, \ldots$ не содержащиеся в $\mathfrak{G}$ элементы из $\mathfrak{H}$ Если положить затем в Θ переменные $x_L, x_M \ldots$ все равными нулю, то будет, как я показал в *Ch.*, § 7, (10)

$$\Theta = \mathrm{H}^n. \tag{1}$$

Поэтому коэффициенты тех членов в Θ, которые зависят только от $x_E, x_A, x_B, \ldots$, равны коэффициентам соответственных членов в H^n.

Если $\mathfrak{G}$ коммутативная группа, то H произведение g линейных множителей

$$\mathrm{H} = \left(\Sigma\psi_1(R)\,x_R\right)\left(\Sigma\,\psi_2(R)\,x_R\right)\ldots,$$

и характеры $\psi_1(R), \psi_2(R), \ldots$ все первой степени, т. е. корни из единицы. В частности, $\psi_1(E) = \psi_2(E) = \ldots = 1$. Поэтому, если Φ — простой множитель f-ой степени для Θ, то эта функция при $x_L = x_M = \ldots = 0$ обращается в произведение f таких линейных множителей, хотя бы

$$\Phi = \left(\Sigma\psi_1(R)\,x_R\right)\left(\Sigma\psi_2(R)\,x_R\right)\ldots\left(\Sigma\psi_f(R)\,x_R\right). \tag{2}$$

Заменив x_E через $x_E - u$, увидим, что f корней уравнения $\Phi(x - u\varepsilon) = 0$ при $x_L = x_M = \ldots = 0$ делаются линейными функциями от переменных $x_E, x_A, x_B, \ldots$, напр.,

$$u_\lambda = \sum_\lambda \psi_\lambda(R)\,x_R \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots f), \tag{3}$$

коэффициенты которых — корни из единицы. Таким образом, если A какой-нибудь элемент из $\mathfrak{G}$, то коэффициент при $x_E^{f-1}x_A$ в $\Phi(x)$ равен

$$\chi(A) = \psi_1(A) + \psi_2(A) + \ldots + \psi_f(A), \tag{4}$$

и это уравнение верно также при $A = E$. Если, далее, A и B два элемента из $\mathfrak{G}$, то в силу того, что ψ_λ характер первой степени, будет $\psi_\lambda(AB) = \psi_\lambda(A)\,\psi_\lambda(B)$, и, следовательно,

$$\chi(AB) = \psi_1(A)\,\psi_1(B) + \psi_2(A)\,\psi_2(B) + \ldots + \psi_f(A)\,\psi_f(B). \tag{5}$$

Поэтому матрица $(\chi(PQ^{-1}))$, имеющая для группы $\mathfrak{H}$ ранг ef, будет иметь ранг не выше f, если P и Q будут пробегать только элементы из $\mathfrak{G}$.

Если A любой элемент из $\mathfrak{H}$, а m его порядок, то степени A образуют коммутативную группу порядка m. Если взять эту группу за $\mathfrak{G}$, то m характеров $\psi_1(A) = \rho_1, \psi_2(A) = \rho_2, \ldots$ будут все m-ми корнями из единицы. Следовательно,

$$\chi(A) = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_f, \quad \chi(A^n) = \rho_1^n + \rho_2^n + \ldots + \rho_f^n \tag{6}$$

для всякого значения n. Отсюда при $n=m-1$ следует, что $\chi(A)$ и $\chi(A^{-1})$ сопряженные комплексные величины ($Ch.$ § 3).

Если A элемент m-ого порядка, а χ — характер f-ой степени, то $\chi(A)$ представляется, как сумма f m-ых корней из единицы.

Последние определяются в отдельности тем, что $\chi(A^n)$ равно сумме их n-ых степеней. Положив в Φ все переменные равными нулю, кроме x_E, x_A, $x_{A^2}, \ldots x_{A^{m-1}}$, получим по (2)

$$\Phi = (x_E+\rho_1 x_A+\rho_1^2 x_{A^2}+\ldots+\rho_1^{m-1} x_{A^{m-1}})\ldots$$

$$\ldots(x_E+\rho_f x_A+\rho_f^2 x_{A^2}+\ldots+\rho_f^{m-1} x_{A^{m-1}}).$$

Если положить поэтому в Φ все переменные равными нулю, кроме x_E и x_A, то получим

(7) $$\Phi(x_E, x_A, 0, 0, \ldots) = (x_E+\rho_1 x_A)(x_E+\rho_2 x_A)\ldots(x_E+\rho_f x_A)$$

и, следовательно, по (9), § 4,

(8) $$u^f+\vartheta_1(A)u^{f-1}+\vartheta_2(A)u^{f-2}+\ldots+$$
$$+\vartheta_f(A)=(u+\rho_1)(u+\rho_2)\ldots(u+\rho_f).$$

В частности, так как $\vartheta_f(A)=\vartheta(A)$, то

(9) $$\vartheta(A) = \rho_1\rho_2\ldots\rho_f.$$

Применив формулу (1) к группе $\mathfrak{G}$, образованной степенями A, получим

$$\Theta = \left(\prod_{\rho}(x_E+\rho x_A+\rho^2 x_{A^2}+\ldots+\rho^{m-1} x_{A^{m-1}})\right)^{\frac{h}{m}},$$

где ρ пробегает все m-ые корни из единицы. Поэтому если положить в Θ все переменные равными нулю, кроме x_E и x_A, то получим

(10) $$\Theta(x_E, x_A, 0, 0, \ldots) = (x_E^m+(-x_A)^m)^{\frac{h}{m}}.$$

Следовательно, как я в § 3 показал другим путем, коэффициент при x_A^h в Θ равен

(11) $$\prod \vartheta(A)^e = (-1)^{h-\frac{h}{m}}.$$

Пусть B — другой элемент из $\mathfrak{H}$ и пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_f$ f соответствующих характеру $\chi(B)$ корней из единицы, т. е.

(12) $$\chi(B) = \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_f, \quad \chi(B^n) = \sigma_1^n+\sigma_2^n+\ldots+\sigma_f^n.$$

Если A и B переместимы друг с другом, то они порождают группу $\mathfrak{G}$. Поэтому можно применить формулу (5) и получим: корни из единицы обеих систем можно так сопоставить друг с другом, что будет

(13) $$\chi(AB) = \rho_1\sigma_1+\ldots+\rho_f\sigma_f, \quad \chi(A^r B^s) = \rho_1^r\sigma_1^s+\ldots+\rho_f^r\sigma_f^s.$$

Положив в простой функции Φ, соответствующей характеру χ, все переменные равными нулю, кроме x_E, x_A, и x_B, получим по (2)

(14) $\Phi(x_E, x_A, x_B, 0, 0, \ldots) = (x_E + \rho_1 x_A + \sigma_1 x_B) \ldots (x_E + \rho_f x_A + \sigma_f x_B)$

чем вместе с тем определяется соответствие друг с другом корней из единицы.

Как пример к выведенным теоремам, рассмотрим инвариантный элемент B группы $\mathfrak{H}$, т. е. такой элемент, который перестим со всяким элементом R из $\mathfrak{H}$. В таком случае в формуле (3), § 7, $R^{-1}BR = B$, и, следовательно, если A какой-либо другой элемент из $\mathfrak{H}$, то

$$\chi(A)\chi(B) = f\chi(AB).$$

Все инвариантные элементы из $\mathfrak{H}$ образуют коммутативную группу $\mathfrak{G}$. Если положить для всякого элемента G этой группы $\chi(G) = f\psi(G)$, то для всяких двух элементов A и B из $\mathfrak{G}$ будет $\psi(A)\psi(B) = \psi(AB)$. Следовательно, $\psi(G)$ есть характер G, т. е. корень из единицы ρ. Далее, $\psi(G^n) = \psi(G)^n$, следовательно, $\chi(G) = f\rho$ и $\chi(G^n) = f\rho^n$. Таким образом, для инвариантного элемента G из $\mathfrak{H}$ все f корней из единицы, встречающихся в формуле (6), равны друг другу.

К этому же результату приводит замечание, что инвариантный элемент A один образует класс сопряженных элементов. Поэтому если положить в Φ все переменные равными нулю, кроме x_E и x_A, то Φ, по формуле (7), § 6, обращается в f-ую степень линейной функции от x_E и x_A и, следовательно, по формуле (7), $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_f$.

Пусть снова A — любой элемент из $\mathfrak{H}$, а m—его порядок. Если ρ первообразный m-ый корень из единицы, то все величины ρ_1, $\rho_2, \ldots \rho_f$ в формуле (6) — степени ρ, и поэтому $\chi(A)$ — число тела $K(\rho)$, образованного всеми рациональными функциями от ρ. Между сопряженными с A элементами группы $\mathfrak{H}$ могут находиться и степени A^r, A^s, $A^t, \ldots$ элемента A. Их показатели взаимно простые с m и образуют группу, т. е., если r и s — любые два из них, то между ними имеется и $\equiv rs \pmod m$. Так как A и A^r сопряжены, то $\chi(A) = \chi(A^r)$, т. е. $\rho_1 + \ldots + \rho_f = \rho_1^r + \ldots + \rho_f^r$. Если выразить $\chi(A)$ через ρ, то полученное таким образом число не изменяется, если ρ заменить через ρ^r. Те числа тела $K(\rho)$, которые не изменяются при замене ρ через ρ^r, или ρ^s, или $\rho^t, \ldots$, образуют тело $\Lambda(\rho)$, делитель тела $K(\rho)$. Число $\chi(A)$ принадлежит, таким образом, к этому телу $\Lambda(\rho)$.

Например, если $\mathfrak{H}$—симметрическая группа n-ой степени, т. е. $h = n!$, то A сопряжено (подобно) со всякой степенью A^r, показатель r которой взаимно простой с m. Поэтому характеры симметрической группы все целые рациональные числа [33] (ср. примеры при $n = 4$ и 5, *Ch.*, § 8).

В теле $\Lambda(\rho)\chi(A)$, как сумма корней из единицы, *целое* алгебраическое число. Но и каждый коэффициент из Φ, а следовательно, и из Φ_n тоже целое число. Ибо, если в произведении $\Theta = \Phi\Psi$ двух целых функций от любого числа переменных с алгебраическими коэффициентами, все коэффициенты целые алгебраические числа, то и произведение каждого коэффициента из Φ и каждого коэффициента из Ψ тоже целое алгебраическое число (ср. *Dedekind*, *Über einen arithmetischen Satz von Gauss*.— „Об одной арифметической теореме Гаусса". Prager Math. Ges. 1892). Если $A, B, C, \ldots$ различные элементы из $\mathfrak{H}$ и $r+s+ +t+\ldots=n$, то произведение $x_A^r x_B^s x_C^t \ldots$ в Φ_n имеет коэффициент

$$\frac{1}{r!\,s!\,t!\ldots} \chi(A, \ldots A, B, \ldots B, C, \ldots C, \ldots). \tag{15}$$

Следовательно, это выражение целое алгебраическое число. Если применить эту теорему ко множителям произведения (9), § 6, то увидим, что

$$\frac{h_\alpha \chi_\alpha}{f} \tag{16}$$

целое алгебраическое число. Следовательно, по (6), § 7,

$$\sum \frac{h_\alpha \chi_\alpha}{f} \chi_{\alpha'} = \frac{h}{e}$$

также целое число. Поэтому число $e=f$ делитель порядка h.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ПОДСТАНОВКИ[34)]

(Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. Sitzungsber. der Berl. Ak., 1897, S. 994—1015)

В моей работе *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante* („О простых множителях группового детерминанта", Sitzungsberichte, 1896; в дальнейшем цитируется: *Pr.*) я поставил в соответствие с каждой конечной группой $\mathfrak{H}$ порядка h матрицу степени h, элементы которой зависят от h переменных. Ее важность основывается на связи, в которой находятся она сама и простые множители ее детерминанта с теми линейными подстановками, через которые могут быть представлены группа $\mathfrak{H}$ и изоморфные ей группы. Из каждого такого представления можно вывести соответствующую группе $\mathfrak{H}$ матрицу, детерминант которой содержится в некоторой степени группового детерминанта (§ 2). Если детерминант неразложим, т. е. равен простому множителю группового детерминанта, то я называю такое представление примитивным. Обратно, каждому простому множителю f-ой степени группового детерминанта соответствует одно и,— если не считать разными представления, различающиеся только выбором переменных[35)],— только одно примитивное представление группы через подстановки f переменных (§ 4).

Групповая матрица может быть преобразована в подобную матрицу, респадающуюся на частичные матрицы. Если при этом использовать только k групповых характеров, то ее можно разложить на k матриц, из которых каждая имеет детерминантом f-ую степень простой функции Φ f-ой степени (§ 3). А если использовать высшие иррациональности, то можно ее разложить на Σf матриц, из которых каждая имеет детерминантом самоё простую функцию Φ (§ 5).

При помощи некоторых замечательных теорем о детерминантах n-ой степени, элементы которых являются n^2 независимыми переменными, я показываю следующее (§ 7): можно так выполнить указанное преобразование, что каждые f частичных матриц с детерминантами, равными одному и тому же простому множителю f-ой степени Φ, будут тождественно равны друг другу. В таком случае элементы всех частичных матриц вместе являются $\Sigma f^2 = h$ друг от друга независимыми переменными. Из такой частичной матрицы, имеющей детерминантом Φ, получается h линейных подстановок, образующих группу, изоморфную $\mathfrak{H}$. Изоморфизм может быть и мероэдрическим[36]. Это зависит от особого соотношения, в котором характер χ группы $\mathfrak{H}$, соответствующий простой функции Φ, может стоять с некоторой инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{H}$ (§ 1). Примитивные представления группы через линейные подстановки бросают новый свет на значение тех соотношений, из которых вычисляются характеры группы и вместе с ними коэффициенты простых множителей группового детерминанта (§ 6). Основные результаты этой работы я сообщил в апреле этого года Dedekind'у, которому я обязан тем, что он именно побудил меня к этим исследованиям.

§ 1.

Среди характеров группы $\mathfrak{H}$ преимущественное положение занимает главный характер, все значения которого равны 1. Если $\mathfrak{H}$ — составная группа, а $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$, то имеются определенные характеры $\mathfrak{H}$, стоящие в особом отношении к $\mathfrak{G}$. Именно такой характер имеет одно и то же значение для всяких двух элементов из $\mathfrak{H}$, эквивалентных по модулю $\mathfrak{G}$. Поэтому я говорю, что он *принадлежит* к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ на основании теоремы:

Если $\mathfrak{G}$ инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{H}$, то каждый характер для $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ есть также характер и для $\mathfrak{H}$.

Это нужно понимать следующим образом: если $A, B, C, \ldots$ образуют полную систему вычетов $\mathfrak{H}$ по модулю $\mathfrak{G}$, то

$$\mathfrak{H} = A\mathfrak{G} + B\mathfrak{G} + C\mathfrak{G} + \ldots$$

Комплексы $A\mathfrak{G} = \mathfrak{G}A$, $B\mathfrak{G} = \mathfrak{G}B, \ldots$ можно рассматривать, как элементы группы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$. Пусть ψ характер этой группы, и $\psi(A\mathfrak{G})$

его значение для элемента $A\mathfrak{G}$. Каждый элемент R группы $\mathfrak{H}$ принадлежит одному и только одному из этих комплексов. Для всех элементов R комплекса $A\mathfrak{G}$ пусть будет $\chi(R)=\psi(A\mathfrak{G})$. Определенные таким образом h величин $\chi(R)$ образуют характер для $\mathfrak{H}$. Обратно, пусть $\chi(R)$ есть характер группы $\mathfrak{H}$, имеющей одно и то же значение для всяких двух элементов из $\mathfrak{H}$, эквивалентных друг другу по модулю $\mathfrak{G}$. Если принять для каждого элемента R из $\mathfrak{H}$, эквивалентного A по модулю $\mathfrak{G}$, т. е. принадлежащего к комплексу $A\mathfrak{G}$, что $\psi(A\mathfrak{G})=\chi(R)$, то ψ будет характером для $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$. Оба соответственных характера имеют одну и ту же степень

$$f=\chi(E)=\psi(\mathfrak{G}).$$

Если характер χ принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, то он принадлежит также и к $\frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{G}'}$, где $\mathfrak{G}'$ является инвариантной подгруппой для $\mathfrak{H}$, заключающейся в $\mathfrak{G}$.

Для того, именно, чтобы h величин $\chi(R)$ образовали характер для $\mathfrak{H}$, необходимы и достаточны следующие условия:

$$\chi(E)=f \tag{1}$$

должно быть положительным (целым) числом. Для каждых двух элементов A и B из $\mathfrak{H}$:

$$\chi(AB)=\chi(BA) \tag{2}$$

и

$$h\chi(A)\chi(B)=f\sum_R\chi(AR^{-1}BR). \tag{3}$$

Наконец,

$$h=\sum_R\chi(R)\chi(R^{-1}). \tag{4}$$

По второму условию $\chi(R)$ имеет одинаковое значение для всех элементов класса сопряженных элементов, хотя бы, напр., для элементов ρ-ого класса значение χ_ρ ($\rho=0, 1, \ldots k-1$). Поэтому равенства (3) и (4) тождественны с (ср. *Pr.* § 7)

$$h_\alpha h_\beta \chi_\alpha \chi_\beta = f\sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma'}\chi_\gamma, \tag{3}$$

$$h=\sum_\rho h_\rho \chi_\rho \chi_{\rho'}. \tag{4}$$

Каждое решение уравнений (3) дает отношения значений характера χ. Затем, уравнение (4) дает квадрат пока еще неопределенного множителя пропорциональности, наконец, уравнение (1) дает его знак.

Но $\chi(E)=\psi(\mathfrak{G})=f$. Далее, $A\mathfrak{G}B\mathfrak{G}=AB\mathfrak{G}$. Таким образом, если R — элемент комплекса $A\mathfrak{G}$, а S — элемент из $B\mathfrak{G}$, то RS является элементом из $AB\mathfrak{G}$.

Поэтому $\chi(RS)=\psi(AB\mathfrak{G})=\psi(A\mathfrak{G}B\mathfrak{G})$, и $\chi(SR)=\psi(B\mathfrak{G}A\mathfrak{G})$, и, следовательно, поскольку ψ обладает свойством (2), $\chi(RS)=\chi(SR)$. Далее:

$$\frac{h}{g}\psi(A\mathfrak{G})\psi(B\mathfrak{G})=f\sum_S\psi(AS^{-1}BS\mathfrak{G}),$$

где S пробегает полную систему вычетов $\mathfrak{H}$ по модулю $\mathfrak{G}$. Но $AS^{-1}BS\mathfrak{G}=A\mathfrak{G}S^{-1}BS\mathfrak{G}$; это не изменится, если S заменить через SG, где G какой-нибудь элемент из $\mathfrak{G}$. Поэтому также:

$$h\psi(A\mathfrak{G})\psi(B\mathfrak{G})=f\sum_R\psi(AR^{-1}BR\mathfrak{G}),$$

где R пробегает все элементы из $\mathfrak{H}$, т. е. также

$$h\chi(A)\chi(B)=f\sum_R\chi(AR^{-1}BR).$$

Точно также из соотношения

$$\frac{h}{g}=\sum_S\psi(S\mathfrak{G})\psi(S^{-1}\mathfrak{G})$$

следует уравнение

$$h=\sum_R\chi(R)\chi(R^{-1}).$$

Поэтому $\chi(R)$ является характером группы $\mathfrak{H}$.

Обратно, пусть $\chi(R)$ есть характер для $\mathfrak{H}$, и пусть $\chi(R)=\chi(S)$ при $R\sim S\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{G})$. В таком случае мы таким же путем заключаем, что $\psi(R\mathfrak{G})=\chi(R)$ есть характер группы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$.

Главный характер принадлежит группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}}$, характеры первой степени — коммутативной группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, если $\mathfrak{G}$ группа коммутаторов для $\mathfrak{H}$.

Если G пробегает элементы группы $\mathfrak{G}$, то пусть,

$$\sum_G x_{RG}=y_{R\mathfrak{G}}. \tag{5}$$

Тогда согласно вышеприведенным условиям (ср. *Pr.* § 8)

$$\frac{h}{f}\xi_A=\sum_R\chi(R)x_{RA}=\sum_S\psi(S\mathfrak{G})y_{SA\mathfrak{G}}=\frac{h:g}{f}\eta_{A\mathfrak{G}}.$$

Ранг матрицы $(\xi_{PQ^{-1}})$ равен f^2. Если $\Phi(x)$ простой множитель группового детерминанта $\Theta(x)$ для $\mathfrak{H}$, который соответствует характеру χ, то каждый минор степени f^2 этой матрицы равен $\Phi(x)^f$ с точностью до постоянного множителя. Если $\Psi(y)$ — простой множитель группового детерминанта $\mathrm{H}(y)$ для $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, соответствующий характеру ψ, то каждый минор степени f^2 матрицы $\eta_{PQ^{-1}}\mathfrak{G}$ равен $\Psi(y)^f$. Но $g^2_A = \eta_A\mathfrak{G}$, и следовательно, при условии (5) $\Phi(x)\Psi = (y)$. Так как $\Theta(x)$ и $\mathrm{H}(y)$ содержатм ножители $\Phi(x)$ и $\Psi(y)$ как раз в f-ой степени, то $\Theta(x)$ делится на $\mathrm{H}(y)$, и частное от этого деления взаимно простое с $\mathrm{H}(y)$ (ср. *Pr.* § 2).

§ 2.

Конечное число линейных подстановок

$$(A) \qquad x_\alpha = a_{\alpha 1} y_1 + a_{\alpha 2} y_2 + \ldots + a_{\alpha n} y_n, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

$$(B) \qquad x_\alpha = b_{\alpha 1} y_1 + b_{\alpha 2} y_2 + \ldots + b_{\alpha n} y_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

детерминанты которых отличны от нуля, образуют группу $\mathfrak{H}'$, если подстановка $(C) = (A)(B)$, составленная из каких-либо двух из них, (A) и (B), также содержится между ними. Коэффициенты из (C) имеют следующий вид:

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha 1} b_{1\beta} + a_{\alpha 2} b_{2\beta} + \ldots + a_{\alpha n} b_{n\beta}.$$

Можно также по примеру Gauss'а совершенно отвлечься от обозначения переменных и под (A), (B), (C), ... разуметь матрицы n-ой степени, образованные из систем коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$,...

Пусть $\mathfrak{H}$ — абстрактная группа, а A, B, C, ... ее элементы. Пусть элемент A поставлен в соответстьие с матрицей (A), элемент B — с матрицей (B) и т. д., и пусть эти матрицы (A), (B),... образуют группу $\mathfrak{H}'$ изоморфную с группой $\mathfrak{H}$, т. е. пусть $(A)(B) = (AB)$. В этом случае я говорю, что подстановки или матрицы (A), (B), (C),.. *представляют* группу $\mathfrak{H}$. Изоморфизм может быть также и мероэдрическим. В этом случае $\mathfrak{H}'$ голоэдрически изоморфна группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, где $\mathfrak{G}$ — некоторая инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$, образованная элементами из $\mathfrak{H}$, которым соответствует гла ный элемент (E) из $\mathfrak{H}'$. Эта подстановка (E) соответствует главному элементу E из $\mathfrak{H}$. Так как $E^2 = E$, то также и $(E)^2 = (E)$. Таким образом (E) является тождественной подстановкой, так как никакая другая подстановка с отличным от нуля детерминантом не удовлетворяет этому условию.

Если (P) — некоторая матрица n-ой степени с отличным от нуля детерминантом, то матрицы $(P)^{-1}(A)(P)$, $(P)^{-1}(B)(P)$,... также представляют группу $\mathfrak{H}$. Соответствующие подстановки получаются из первоначальных тем, что каждая система n переменных $x_1, \ldots x_n$; $y_1, \ldots y_n$; ... подвергается подстановке (P). Два таких *представления* группы $\mathfrak{H}$ я называю *эквивалентными*. Все представления, эквивалентные заданному, образуют *класс* эквивалентных представителей для $\mathfrak{H}$.

h элементам A, B, C, ... из $\mathfrak{H}$ я ставлю в соответствие h независимых переменных x_A, x_B, x_C,... и составляю затем из матриц (A), (B), (C), ... матрицу

$$(A)x_A + (B)x_B + (C)x_C + \ldots = \sum (R)x_R,$$

элементы которой — линейные функции этих независимых переменных. Каждую матрицу, *соответствующую* таким именно образом *определенному представлению для* $\mathfrak{H}$, я называю *матрицей, принадлежащей к группе* $\mathfrak{H}$.

Пусть $y_A, y_B, y_C, \ldots$ вторая система h независимых переменных и пусть (*Pr.* § 1)

$$z_T = \sum x_R y_S \qquad (RS = T). \tag{1}$$

В таком случае произведение обеих матриц:

$$\left(\sum (R) x_R\right) \left(\sum (S) y_S\right) = \sum (RS) x_R y_S = \sum (T) z_T. \tag{2}$$

Обратно, это свойство характеризует матрицу $\sum (R) x_R$, как матрицу, принадлежащую к группе $\mathfrak{H}$. Такой будет, например, групповая матрица $(x_{PQ^{-1}})$[37]. Если обозначим детерминант: $|\sum (R) x_R| = F(x)$, то $F(x)\ F(y) = F(z)$. Отсюда по *Pr.* § 1 следует, что $F(x)$ входит множителем в некоторую степень группового детерминанта:

$$\Theta(x) = |x_{PQ^{-1}}| = \Phi^f\, \Phi'^{f'}\, \Phi''^{f''} \ldots,$$

т. е. есть произведение степеней простых множителей Φ, Φ' Φ'', ... из Θ:

$$|\sum (R) x_R| = \Phi^s\, \Phi'^{s'}\, \Phi''^{s''} \ldots, \tag{3}$$

причем некоторые из показателей s, s', s'', ... могут быть равны нулю.

Если Φ простой множитель f-ой степени из Θ, то Θ делится точно на f-ую степень Φ. По *Pr.* § 5 минор $(h-1)$-ой степени для Θ, дополнительный к элементу $x_{PQ^{-1}}$, равен $\frac{1}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial x_{PQ^{-1}}}$. Таким образом, общий наибольший делитель всех миноров $(h-1)$-ой степени для Θ содержит простой множитель Φ точно в $(f-1)$-ой степени. По известным свойствам элементарных делителей детерминанта общий наибольший делитель всех миноров $(h-m)$-ой степени для Θ содержит поэтому множитель Φ точно в $(f-m)$-ой степени $(m < f)$, а миноры $(h-f)$-ой степени для Θ не все делятся на Φ. Характеристический детерминант $\Theta(x - u\varepsilon)$ групповой матрицы имеет поэтому, как функция от u, все линейные элементарные делители, и если подставить вместо u корень уравнения $\Phi(x - u\varepsilon) = 0$, то этот детерминант будет иметь ранг $h - f$.

Если подставить в формуле (1) $y_R = \frac{1}{h\Phi^{f-1}} \frac{\partial \Theta}{\partial x_R}$, то получим $z_R = \frac{\Theta}{\Phi^{f-1}} \varepsilon_R$[38]; таким образом, так как $\sum (R) \varepsilon_R = (E)$, то:

$$\left(\sum (R) x_R\right)\ \left(\sum (S) y_S\right) = \frac{\Theta}{\Phi^{f-1}}\ (E). \tag{4}$$

Но элементарные делители детерминанта последней матрицы, являющиеся степенями Ф, все равны первой степени Ф. С другой стороны, по (4) эти элементарные делители делятся на соответствующие элементарные делители детерминанта $|\sum x_R(R)|$ (*Über die Elementartheiler der Determinanten*, Satz. IX, Sitzungsberichte 1894. — „Об элементарных делителях детерминантов"). Таким образом, элементарные делители детерминанта $|\sum x_R(R)|$, являющиеся степенями Ф, все равны первой степени Ф, и их число равно s.

Заменив x_R через $x_R - u\varepsilon_R$, увидим, что характеристический детерминант этой матрицы $|(\sum x_R(R)) - u(E)|$ имеет все линейные элементарные делители.

§ 3.

Если матрица, принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$, распадается на частичные матрицы, то по формуле (2), § 2, каждая из последних тоже будет матрицей, принадлежащей к этой группе. Произведение детерминантов частичных матриц равно детерминанту всей матрицы. Как я покажу далее, можно найти матрицу, эквивалентную групповой матрице и распадающуюся на $\sum f$ частичных матриц. Их детерминанты являются $\sum f$ простыми множителями Θ. Дальше провести разложение групповой матрицы уже невозможно. Но прежде, чем я перейду к изложению этого преобразования, я хочу сначала провести другое, более простое, при котором детерминант каждой частичной матрицы равен f-ой степени простого множителя Ф f-ой степени. Следовательно, отдельные частичные матрицы имеют все различные детерминанты, каждая пара которых взаимно простые. Для того, чтобы провести это разложение, вполне достаточно знания характеров.

Пусть Ф — простой множитель f-ой степени для Θ, а χ соответствующий характер. Тогда матрица h-ой степени $(\chi(PQ^{-1}))$ имеет ранг $r = f^2$, и у нее имеется отличный от нуля главный минор r-ой степени (*Pr.* § 11). Пусть мы получим такой минор, подставляя вместо P и Q r элементов $A_1, A_2, \ldots A_r$. Пусть ψ — отличный от χ характер, s — ранг матрицы $(\psi(PQ^{-1}))$, и пусть в ней получается отличный от нуля главный минор s-ой степени, если принять P и Q равными $B_1, B_2, \ldots B_s$. Эти s элементов могут целиком или частично совпадать с $A_1, A_2, \ldots A_r$. Если принять такое определение для каждого из k характеров $\mathfrak{H}$, то сумма k чисел:

$$r + s + \ldots = \sum r = \sum f^2 = h.$$

Пусть теперь M — матрица h-ой степени, h строк которой получаются из строки

$$\chi(PA_1^{-1}), \ldots \chi(PA_r^{-1}), \ \psi(PB_1^{-1}), \ldots \psi(PB_s^{-1}), \ldots,$$

если вместо P подставить h элементов группы $\mathfrak{H}$. Пусть, далее

L' матрица, строки которой аналогичным образом получаются из:

$$\chi(A_1Q^{-1}), \ldots \chi(A_rQ^{-1}),\ \psi(B_1Q^{-1}), \ldots \psi(B_sQ^{-1}), \ldots$$

Если переставить в L' строки со столбцами, то получим сопряженную матрицу L. Составим матрицу LM. Если α и β два из индексов $1, 2, \ldots r$, то β-ый элемент α-ой строки этой матрицы есть:

$$\sum_R \chi(A_\alpha R^{-1})\,\chi(RA_\beta^{-1}) = \frac{h}{f}\,\chi(A_\alpha A_\beta^{-1}).$$

Детерминант r-ой степени, образованный из этих r^2 элементов, согласно условию, отличен от нуля. Если, затем, α — один из индексов $1, 2, \ldots r$, а β — один из индексов $1, 2, \ldots s$, то $(r+\beta)$-й элемент α-ой строки есть:

$$\sum_R \chi(A_\alpha R^{-1})\,\psi(RB_\beta^{-1}) = 0.$$

Следовательно, матрица LM распадается на k частичных матриц, и ее детерминант равен:

$$\prod \left| \frac{h}{f}\,\chi(A_\alpha A_\beta^{-1}) \right|,$$

т. е. отличен от нуля. Таким образом, детерминанты $|L|$ и $|M|$ оба отличны от нуля.

Пусть, далее, X групповая матрица $(x_{PQ^{-1}})$ и $Y = LXM$. Если α и β два из чисел $1, 2, \ldots r$, то β-ый элемент α-ой строки в Y есть:

$$\sum_{R,S} \chi(A_\alpha R^{-1})\,x_{RS^{-1}}\,\chi(SA_\beta^{-1}).$$

Но так как $\chi(PQ) = \chi(QP)$, то матрицы $(x_{PQ^{-1}})$ и $(\chi(PQ^{-1}))$ переместимы друг с другом (*Pr.* § 6), и сумма в предыдущей формуле равна:

$$\sum_{R,S} \chi(A_\alpha R^{-1})\,\chi(RS^{-1})\,x_{SA_\beta^{-1}} = \frac{h}{f}\sum_S \chi(A_\alpha S^{-1})\,x_{SA_\beta^{-1}}\,.$$

Если α — одно из чисел $1, 2, \ldots r$, а β — одно из чисел $1, 2, \ldots s$, то $(r+\beta)$-ый элемент α-й строки:

$$\sum_{R,S} \chi(A_\alpha R^{-1})\,x_{RS^{-1}}\,\psi(SB_\beta^{-1}) = \sum_{R,S} \chi(A_\alpha R^{-1})\,\psi(RS^{-1})x_{SB_\beta^{-1}} = 0.$$

Следовательно, Y распадается на k частичных матриц, из которых первая образована из r^2 элементов:

$$\frac{h}{f}\sum_R \chi(A_\alpha R^{-1})\,x_{RA_\beta^{-1}} = \sum_R \frac{h}{f}\,\chi(A_\alpha A_\beta^{-1}R^{-1})\,x_R.$$

В этой сумме x_E умножается на матрицу

$$N_1 = \left(\frac{h}{f}\chi(A_\alpha A_\beta^{-1})\right) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots r),$$

детерминант которой отличен от нуля. Подобно же, пусть

$$N_2 = \left(\frac{h}{f}\psi(B_\alpha B_\beta^{-1})\right) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots s),$$

и т. д. Из этих матриц степеней r, s, ... образуем матрицу:

$$\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & N_2 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & N_3 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = N$$

степени h; в таком случае матрица $YN^{-1} = Z$ также распадается на k частичных матриц, первая из которых есть:

$$(1) \quad \left(\sum \frac{h}{f}\chi(A_\alpha A_\beta^{-1}\ R^{-1})\, x_R\right)\left(\frac{h}{f}\chi(A_\alpha A_\beta^{-1})\right)^{-1} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots f^2).$$

Здесь x_E умножается на главную матрицу. Если, таким образом, сравнить в уравнении $LXMN^{-1} = Z$ матрицы, помноженные на x_E, то получаем $LMN^{-1} = E$ и, следовательно [39],

$$(2) \qquad LXL^{-1} = Z$$

есть матрица, эквивалентная матрице X. Поэтому Z и каждая частичная матрица в Z, как, напр., (1), принадлежит к группе $\mathfrak{H}$. По *Pr.* § 11 детерминант матрицы (1), равен Ψ^f, где Ψ — простой множитель Θ, сопряженный с Φ.

Если $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$, если характер χ принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, и если матрица (1) равна $\sum (R)\, x_R$, то $(R) = (S)$ при $R \sim S \pmod{\mathfrak{G}}$. Поэтому матрицы (A), (B), (C), ... представляют группу $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$.

Вышеприведенное преобразование может быть проведено таким же образом без применения новых вспомогательных средств для любой, принадлежащей к группе, матрицы. Если ее детерминант (3), § 2 делится на различные простые множители группового детерминанта, то она может быть также преобразована — с использованием одних только характеров — в эквивалентную распадающуюся матрицу, отдельные части которой имеют детерминанты Φ^s, Φ', ...

§ 4.

Теперь я перехожу к упомянутому в начале предыдущего параграфа полному разложению групповой матрицы. Ее характеристический детерминант $\Theta(x-u\varepsilon)$ имеет только простые элементарные делители и поэтому имеет для корня u уравнения $\Phi(x-u\varepsilon)=0$ ранг $h-f$. Я подставляю затем вместо переменных x_R такие постоянные k_R, что уравнение $\Phi(k-u\varepsilon)=0$ имеет простой корень ρ, для которого ни одна из функций $\Phi'(k-u\varepsilon)$, $\Phi''(k-u\varepsilon), \ldots$ не обращается в нуль. В таком случае и матрица $(k_{PQ^{-1}}-\rho\varepsilon_{PQ^{-1}})$ также имеет ранг $h-f$. Следовательно, h линейных уравнений

$$\sum_Q k_{PQ^{-1}}\, a_Q = \rho a_P \tag{1}$$

имеют f независимых решений $a'_Q, a''_Q, \ldots a^{(f)}_Q$. Из них составляется всякое иное решение, если их помножить на определенные множители и затем сложить. Если заменить P и Q через PR^{-1} и QR^{-1}, то получим:

$$\sum_Q k_{PQ^{-1}}\, a_{QR^{-1}} = \rho a_{PR^{-1}},$$

следовательно, если $x_A, x_B, x_C, \ldots$ независимые переменные, то

$$\sum_{Q,R} k_{PQ^{-1}}\, a_{QR^{-1}}\, x_R = \rho \sum_R a_{PR^{-1}}\, x_R.$$

Таким образом, $a_Q = \sum\limits_R a^{(\varkappa)}_{QR^{-1}} x_R$ также будет решением уравнений (1). Поэтому имеются такие множители $x_{k_1}, \ldots x_{\varkappa f}$, что

$$\sum_R a^{(\varkappa)}_{QR^{-1}}\, x_R = \sum_\lambda x_{\varkappa\lambda}\, a^{(\lambda)}_Q \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots f). \tag{2}$$

Множители $x_{\varkappa\lambda}$ вполне определяются этими условиями и являются, следовательно, линейными функциями переменных x_R. Полученные таким образом f новых решений уравнений (1) линейно независимы или зависимы, смотря по тому, отличен ли от нуля или нет детерминант f-ой степени $|x_{\varkappa\lambda}|$. Так как при $x_R=\varepsilon_R$ имеем $x_{\varkappa\lambda}=e_{\varkappa\lambda}$ то этот детерминант не может тождественно равняться нулю.

Если $x_{\varkappa\lambda}$ переходит в $y_{\varkappa\lambda}$ или в $z_{\varkappa\lambda}$ при замене переменных x_R другими переменными y_R или z_R, то также

$$\sum_R a^{(\varkappa)}_{QR^{-1}}\, y_R = \sum_\lambda y_{\varkappa\lambda}\, a^{(\lambda)}_Q, \quad \sum_R a^{(\varkappa)}_{QR^{-1}}\, z_R = \sum_\lambda z_{\varkappa\lambda}\, a^{(\lambda)}_Q$$

и, следовательно:

$$\sum_{Q,R} a^{(\varkappa)}_{PQ^{-1}}\, x_{QR^{-1}}\, y_R = \sum_\lambda x_{\varkappa\lambda} \sum_R a^{(\lambda)}_{PR^{-1}}\, y_R = \sum_{\lambda,\mu} x_{\varkappa\lambda}\, y_{\lambda\mu}\, a^{(\mu)}_Q,$$

таким образом, при условии (1), § 2,

$$\sum_\mu z_{\varkappa\mu}\, a^{(\mu)}_Q = \sum_Q a^{(\varkappa)}_{PQ^{-1}}\, z_Q = \sum_{\lambda,\mu} x_{\varkappa\lambda}\, y_{\lambda\mu}\, a^{(\mu)}_Q$$

и тем самым:

$$z_{\varkappa\mu} = \sum_\lambda x_{\varkappa\lambda}\, y_{\lambda\mu}.$$

Поэтому $(x_{\varkappa\lambda})$ — матрица f-ой степени, принадлежащая к $\mathfrak{H}$; следовательно, ее детерминант:

$$|x_{\varkappa\lambda}| = \Phi^s \Phi'^{s'} \ldots$$

Если χ характер, соответствующий простой функции Φ, и если обозначить: $\frac{h}{f} \chi(R^{-1}) = c_R$, то по *Pr.* § 8

$$\Phi(c) = 1,\ \Phi'(c) = 0, \ldots,\ \Phi(c - u\varepsilon) = (1-u)^f,\ \Phi'(c - u\varepsilon) = (-u)^{f'}, \ldots,$$

где Φ' какая-либо из отличных от Φ простых функций степени f'. Если $\rho, \rho', \rho'', \ldots f$ корней уравнения $\Phi(k - u\varepsilon) = 0$, то по *Pr.* § 6 $\rho - \lambda$, $\rho' - \lambda$, $\rho'' - \lambda, \ldots$ — корни уравнения $\Phi(k - \lambda c - u\varepsilon) = 0$. Если, таким образом, λ — постоянная, отличная от 0, $\rho' - \rho$, $\rho'' - \rho, \ldots$, то $\Phi(k - \lambda c - \rho\varepsilon)$ отлично от нуля. Далее, $\Phi'(k - \lambda c - \rho\varepsilon) = \Phi'(k - \rho\varepsilon)$ отлично от нуля, и поэтому детерминант $\Theta(k - \lambda c - \rho\varepsilon)$ не может быть равным нулю.

При $x_R = c_R$ детерминант $|x_{\varkappa\lambda}|$ неравен нулю. Ибо иначе f решений

$$\sum_Q a^{(\varkappa)}_{PQ^{-1}} c_Q \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots f)$$

не были бы линейно независимыми. Из них можно было бы, таким образом, составить решение $\sum\limits_Q a_{PQ^{-1}} c_Q = 0$, в котором величины a_R удовлетворяли бы уравнениям (1) и были бы не все равны нулю. Так как $c_{PQ} = c_{QP}$, то матрицы $a_{PQ^{-1}}$ и $c_{PQ^{-1}}$ переместимы, и следовательно, было бы также $\sum\limits_Q c_{PQ^{-1}} a_Q = 0$. Поэтому было бы и

$$\sum_Q (k_{PQ^{-1}} - \lambda c_{PQ^{-1}} - \rho\varepsilon_{PQ^{-1}}) a_Q = 0.$$

Но так как детерминант этих h уравнений отличен от нуля, то им могут удовлетворить только значения $a_Q = 0$.

Но произведение $\Phi(c)^s \Phi'(c)^{s'} \Phi''(c)^{s''} \ldots$ может лишь тогда быть отличным от нуля, когда $s' = s'' = \ldots = 0$. Так как $|x_{\varkappa\lambda}|$ степени f, то, следовательно,

$$(3) \qquad |x_{\varkappa\lambda}| = \Phi(x), \quad |x_{\varkappa\lambda} - u e_{\varkappa\lambda}| = \Phi(x - u\varepsilon).$$

В *Pr.* § 11 я показал, что $\Phi(x)$ может быть представлено через f^2, но не через меньшее число, линейных соединений переменных x_R. Поэтому f^2 линейных функций $x_{\varkappa\lambda}$ от h переменных x_R друг от друга независимы.

Эту замечательную теорему о том, что имеется принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$ матрица, f^2 элементов которой — независимые переменные, нашел также и Molien в своей выдающейся работе: *Über Systeme höherer complexer Zahlen* („О системах высших комплексных чисел“, Math. Ann., Bd. 41, S. 124), на которую недавно обратил мое внимание Study. В одной из дальнейших работ *Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen* („Замечание к теории однородных групп подстановок“, Sitzungsberichte der Naturforschergesellschaft zu Dorpat, 1897, Jahrg. 18, S. 259) Molien применил найденные там общие результаты к групповому детерминанту.

Если $X = (x_{\varkappa\lambda}) = \sum (R) x_R$, то из сравнения коэффициентов при u^{f-1} в (3) следует, что

$$\sum_R \chi(R) x_R = \sum_\lambda x_{\lambda\lambda}. \tag{4}$$

Если, таким образом, $(R) = (r_{\varkappa\lambda})$, то

$$\chi(R) = \sum_\lambda r_{\lambda\lambda}. \tag{5}$$

Если группа, образованная из матриц (A), (B), (C), ..., изоморфна группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, то $(R) = (S)$ при $R \sim S \pmod{\mathfrak{G}}$. Поэтому также $\chi(R) = \chi(S)$. Характер χ принадлежит, таким образом, также к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$.

Пусть $L = (l_{\varkappa\lambda})$ какая-либо постоянная матрица f-ой степени с отличным от нуля детерминантом. Если выбрать вместо f решений a'_Q, a''_Q, ... уравнений (1) какие-либо f других независимых решений, то получим вместо X всегда некоторую подобную X матрицу $L^{-1}XL$, а при подходящем выборе f решений — всякую такую матрицу.

Но за ρ можно выбрать другой корень уравнения $\Phi(k - u\varepsilon) = 0$, и затем, за k_R можно взять всякую систему h чисел, удовлетворяющую определенным неравенствам. В таком случае вместо величин a'_Q, a''_Q, ... получим другие величины, а вместо матрицы X получается матрица $U = (u_{\varkappa\lambda})$, элементы которой $u_{\varkappa\lambda}$ — линейные функции переменных x_R. Но при всяком выборе произвольных величин U — принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$ матрица f-ой степени, характеристический детерминант которой есть $\Phi(x - u\varepsilon)$. Так как $\Phi(x)$ содержит h величин x_R только в f^2 независимых линейных комбинациях $x_{\varkappa\lambda}$, то f^2 величин $u_{\varkappa\lambda}$ должны быть линейными комбинациями переменных $x_{\varkappa\lambda}$. По теореме, которую я изложу в § 7, можно поэтому определить постоянную матрицу L так, что будет или $U = L^{-1}XL$, или $U = L^{-1}X'L$, где X' — сопряженная с X матрица, причем, если $f > 1$, то возможен только один из этих случаев.

Но для рассматриваемых здесь матриц — при $f > 1$ — не может быть $U = L^{-1}X'L$. Ибо, пусть при замене переменных x_R через y_R или z_R X переходит в Y или Z, а U в V или W. В таком случае $XY = Z$ и $UV = W$. Если же $U = L^{-1}X'L$, $V = L^{-1}Y'L$, $W = L^{-1}Z'L$, то также и $X'Y' = Z'$, и следовательно, — поскольку $X'Y' = (YX)'$, $Z = YX = XY$. Если поэтому

$X = \sum (R)\, x_R$, то каждые две из матриц (A), (B), (C), ... переместимы между собой. Следовательно, образованная ими группа и голоэдрически изоморфная ей группа $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ коммутативна, и относящийся к ней характер χ имеет степень $f = 1$ (*Pr.* § 2). Отсюда следует, что $U = L^{-1}XL$, и при всяком выборе произвольных величин можно f решений a'_Q, a''_Q, ... выбрать так, что будет $U = X$.

Если характер χ принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, то имеется простой множитель f-ой степени $\Psi(y)$ детерминанта этой группы, который посредством подстановки (5), § 1, переходит в $\Phi(x)$. Он может быть представлен, как детерминант матрицы f-ой степени $(y_{\varkappa\lambda})$, элементы которой — линейные функции переменных $y_{R\mathfrak{G}}$, и которая принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$. Если произвести подстановку (5), § 1, то она переходит в матрицу $X = (x_{\varkappa\lambda})$, принадлежащую к группе $\mathfrak{H}$ и имеющую детерминант, равный $\Phi(x)$. Так как всякая другая матрица, обладающая теми же свойствами, равна $L^{-1}XL$, то этим доказывается обратная к полученной выше теорема, именно, что, если χ принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, то всегда

$$(R) = (S), \text{ если } R \sim S \pmod{\mathfrak{G}}.$$

§ 5.

Теперь выберем величины k_R так, чтобы уравнение

$$\Phi(k - u\varepsilon)\, \Phi'(k - u\varepsilon)\, \Phi''(k - u\varepsilon) \ldots = 0$$

не имело кратных корней. В таком случае детерминант системы билинейных форм [40]

$$(1) \qquad \sum_{P,\,Q} (k_{PQ^{-1}} - u\,\varepsilon_{PQ^{-1}})\, u_P v_Q$$

будет иметь все линейные элементарные делители. Поэтому форма $\sum k_{PQ^{-1}} u_P v_Q$ может — по известной теореме Weierstrass'а линейной подстановкой, с отличным от нуля детерминантом:

$$(2) \qquad u'_\nu = \sum_R a_R^{(\nu)} u_R, \quad v_R = \sum a_R^{(\nu)} v'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots h),$$

переводящей $\sum u_R v_R$ в $\sum u'_\nu v'_\nu$, — быть преобразована в [41]

$$(3) \qquad \rho u'_1 v'_1 + \rho u'_2 v'_2 + \ldots + \rho u'_f v'_f + \rho' u'_{f+1} v'_{f+1} + \ldots + \\ + \rho' u_{f+f'} v_{f+f'} + \ldots,$$

если ρ f-кратный, $\rho' f'$-кратный, ... корни характеристического уравнения $\Theta(k - u\varepsilon) = 0$. В таком случае:

$$\sum_{P,Q} k_{PQ^{-1}} u_P a_Q^{(\nu)} v'_\nu = \rho \left(\sum_P a_P^{(1)} u_P\right) v'_1 + \rho \left(\sum_P a_P^{(2)} u_P\right) v'_2 + \dots,$$

и, следовательно:

$$\sum_Q k_{PQ^{-1}} a_Q^{(\varkappa)} = \rho\, a_P^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots f).$$

Так как детерминант h-ой степени $|a_R^{(\nu)}|$ отличен от нуля, то в системе fh величин $a_Q^{(\varkappa)}$ не все детерминанты f-ой степени равны нулю, и поэтому эти величины образуют f независимых решений уравнений (1), § 4. Если их заменить какими-либо f другими независимыми решениями, то подстановка (2) сохраняет двойное свойство: ее детерминант отличен от нуля и она преобразует систему форм (1) в нормальную форму (3). Поэтому h^2 величин $a_R^{(\nu)}$ можно определить линейными уравнениями (1) § 4 и аналогичными уравнениями, соответствующими корням $\rho', \rho'', \dots$, и существенное значение примененной выше теоремы Weierstrass'а заключается в том, что детерминант h-ой степени $|a_R^{(\nu)}|$ отличен от нуля. Пусть теперь, как выше,

$$\sum_Q a_{PQ^{-1}}^{(\varkappa)} x_Q = \sum_\lambda x_{\varkappa\lambda} a_P^{(\lambda)},$$

или

$$\sum_P a_{P^{-1}}^{(\varkappa)} x_{PQ^{-1}} = \sum_\lambda x_{\varkappa\lambda} a_{Q^{-1}}^{(\lambda)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots f).$$

Таким же образом пусть соответственно f'-кратному корню ρ'

$$\sum_P a_{P^{-1}}^{\prime(\varkappa)} x_{PQ^{-1}} = \sum_\lambda x_{\varkappa\lambda} a_{Q^{-1}}^{\prime(\lambda)} \quad (\varkappa, \lambda = f+1, f+2, \dots f+f').$$

В частном случае, когда ρ'—корень того же уравнения $\Phi(x - u\varepsilon) = 0$, что и ρ (т. е. $f' = f$), можно, при соответствующем выборе решения аналогичных (1), § 4, уравнений достигнуть того, что будет $x_{f+\varkappa, f+\lambda} = x_{\varkappa\lambda}$.

Тогда билинейная форма

(4) $$\sum_{P,Q} x_{PQ^{-1}} u_P v_Q$$

через подстановку:

(5) $$u_R = \sum_\nu a_{R^{-1}}^{(\nu)} u'_\nu, \quad v'_\nu = \sum_R a_{R^{-1}}^{(\nu)} v_R$$

переходит в форму

(6) $$\sum_{\varkappa,\lambda}{}_1^f x_{\varkappa\lambda} u'_\varkappa v'_\lambda + \sum_{\varkappa,\lambda}{}_{f+1}^{f+f'} x_{\varkappa\lambda} u'_\varkappa v'_\lambda + \dots,$$

которая распадается на f форм от f^2 переменных, f' форм от f'^2 переменных и т. д. Посредством этой же подстановки $\sum u_R v_R$ переходит в $\sum u'_\nu v'_\nu$. Если, таким образом, X групповая матрица $(x_{PQ^{-1}})$, то имеется постоянная матрица L h-ой степени с отличным от нуля детерминантом такого рода, что эквивалентная матрица $L^{-1}XL$ распадается на f равных друг другу частичных матриц степени f, у которых характеристические детерминанты равны $\Phi(x-u\varepsilon)$, на f' равных друг другу частичных матриц степени f' с характеристическим детерминантом $\Phi'(x-u\varepsilon)$ и т. д., и $f^2+f'^2+\ldots=h$ элементов этих частичных матриц являются h независимыми друг от друга переменными, так как $\Theta(x)$ не может быть выраженным через меньше, чем h, линейных комбинаций h переменных x_R.

Представление группы через линейные подстановки, для которого соответствующий детерминант (3), § 2, неразложим, я называю *примитивным представлением.* Число классов примитивных представлений для группы $\mathfrak{H}$ и для изоморфных с ней групп равно числу k классов сопряженных элементов, на которые распадаются элементы из $\mathfrak{H}$. Если f число переменных, которые преобразовываются одной из таких подстановок, то k чисел $g=f^2$ находится путем решения уравнения k-ой степени, которое я вывел в моей работе *Über Gruppencharaktere* („О групповых характерах“, Sitzungsberichte, 1896, § 3, (12)).

Для иллюстрации этого преобразования групповой матрицы я даю пример, который нашел Dedekind в 1886 году и сообщил мне в апреле 1896 года.

Пусть

$$1.\ abc\quad 2.\ bca\quad 3.\ cab\quad 4.\ acb\quad 5.\ cba\quad 6.\ bac$$

6 перестановок 3 символов. Те подстановки, которые переводят abc в эти 6 перестановок, обозначим вместо $A, B, C, \ldots$ цифрами 1, 2, ... 6. Пусть ρ — кубический корень из единицы и

$$\begin{aligned} u &= x_1+x_2+x_3, & v &= x_4+x_5+x_6,\\ u_1 &= x_1+\rho x_2+\rho^2 x_3, & v_1 &= x_4+\rho x_5+\rho^2 x_6,\\ u_2 &= x_1+\rho^2 x_2+\rho x_3, & v_2 &= x_4+\rho^2 x_5+\rho x_6. \end{aligned}$$

Пусть, далее, X, L и U — три матрицы:

$$\begin{matrix} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & x_6\\ x_2 & x_1 & x_3 & x_5 & x_6 & x_4\\ x_3 & x_2 & x_1 & x_6 & x_4 & x_5\\ x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_3 & x_2\\ x_5 & x_6 & x_4 & x_2 & x_1 & x_3\\ x_6 & x_4 & x_5 & x_3 & x_2 & x_1 \end{matrix}\qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & \rho^2 & 0 & 0 & \rho\\ 1 & -1 & \rho & 0 & 0 & \rho^2\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & \rho & \rho^2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & \rho^2 & \rho & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} u+v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & u-v & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & u_1 & v_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & v_2 & u_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 & u_2 \end{matrix}$$

Тогда X — групповая матрица, и

$$XL = LU, \quad L^{-1}XL = U;$$

составляя $L'L$, можно убедиться, что детерминант L неравен нулю.

§ 6.

Формула (5), § 4, ведет к более глубокому пониманию значения уравнений, которые я получил для вычисления характеров группы $\mathfrak{H}$. Если детерминант принадлежащей к группе матрицы

$$X = (x_{\varkappa\lambda}) = \sum_R (R)\, x_R \quad \cdot \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots f)$$

— простой множитель f-ой степени Φ группового детерминанта, то f^2 величин $x_{\varkappa\lambda}$ являются независимыми переменными. Поэтому можно h переменным x_R дать такие значения, что X будет равно любой матрице f-ой степени.

Обе подобные матрицы (A) и $(R)^{-1}(A)(R) = (B)$ имеют ту же самую характеристическую функцию: $|(A) - u(E)| = |(B) - u(E)|$. Если сравнить коэффициенты при u^{f-1} в обеих частях этого уравнения, то получим по (5), § 4, $\chi(A) = \chi(B)$. Поэтому $\chi(R^{-1}AR) = \chi(A)$ или, что то же самое, $\chi(QP) = \chi(PQ)$.

Если распределить элементы из $\mathfrak{H}$ по k классам сопряженных элементов, то пусть α-ый класс состоит из h_α элементов $(\alpha = 0, 1, \ldots k - 1)$. Если R пробегает все h элементов из $\mathfrak{H}$, и если A — определенный элемент α-ого класса, то $R^{-1}AR$ представляет каждый элемент этого класса и при этом по $\frac{h}{h_\alpha}$ раз. Поэтому

$$\sum_R (R^{-1}AR) = \frac{h}{h_\alpha} \sum_{(\alpha)}{}' (R),$$

где правая сумма распространяется на h_α элементов α-ого класса. Но

$$(S)\sum_R (R^{-1}AR) = \sum_R (SR^{-1}AR) = \sum_R (R^{-1}ARS) = \Big(\sum_R (R^{-1}AR)\Big)(S).$$

Третья сумма получается из второй, если R заменить через RS. Следовательно, матрица $\sum\limits_{(\alpha)}{}'(R)$ переместима с (S), т. е. также и с $\sum (S) x_S$, а поэтому — и с каждой матрицей f-ой степени. Но это свойство имеет только главная матрица, помноженная на скалярный множитель. Следовательно:

$$(1) \qquad f\sum_{(\alpha)}{}'(R) = (E)\, h_\alpha \chi_\alpha, \quad f\sum_R (R^{-1}AR) = (E)\, h\, \chi_\alpha.$$

Для того, чтобы определить еще неизвестный множитель χ_α, возьмем в обеих частях сумму диагональных элементов. Эта сумма для каждой из h_α матриц (R), подобных (A), равна $\chi(R) = \chi(A)$, а для (E) равна f. Поэтому

$$\chi_\alpha = \chi(A).$$

Если матрицу (A) компонировать с матрицей

$$f\sum_{(\beta)}'(S) = (E)\,h_\beta\,\chi_\beta,$$

то получим

$$f\sum_{(\beta)}'(AS) = (A)\,h_\beta\,\chi_\beta,$$

а если снова взять в обеих частях сумму диагональных элементов, то:

$$(2)\quad f\sum_{(\beta)}'\chi(AS) = h_\beta\,\chi(A)\,\chi(B),\quad f\sum_{R}\chi(AR^{-1}BR) = h\,\chi(A)\,\chi(B).$$

Это — уравнения, которые определяют отношения k значений каждого из k характеров.

Но этим формулам можно дать и другое толкование: пусть e_A, e_B, $e_C, \ldots$ h независимых единиц системы гиперкомплексных чисел, для которой верны обычные правила сложения, а также дистрибутивный и ассоциативный, но не коммутативный, законы умножения. Этим условиям удовлетворяет такой закон умножения:

$$(3)\qquad e_A\,e_B = e_{AB}.$$

При этом e_E заменяет число 1. Если положить

$$(4)\qquad \sum_{(\alpha)}' e_R = \frac{h_\alpha}{f}\,e_\alpha,$$

то k комплексных чисел e_0, $e_1, \ldots e_{k-1}$ будут переместимы со всяким числом системы, т. е. также и друг с другом[42]. Произведение двух этих коммутативных чисел есть:

$$\frac{h_\alpha h_\beta}{f^2}\,e_\alpha e_\beta = \Bigl(\sum_{(\alpha)}' e_R\Bigr)\Bigl(\sum_{(\beta)}' e_S\Bigr) = \sum_T h_{\alpha,\beta,T}\,e_T,$$

где $h_{\alpha,\beta,T}$ указывает, сколько из $h_\alpha h_\beta$ произведений RS равны определенному элементу T. По *Pr.* § 7 это число равно $\frac{1}{h_\gamma}h_{\alpha\beta\gamma'}$, при T, принадлежащем к γ-ому классу, т. е. имеет для всех сопряженных элементов T одно и то же значение. Следовательно:

$$(5)\qquad \frac{h_\alpha h_\beta}{f^2}\,e_\alpha e_\beta = \sum_{\gamma}\Big|_0^{k-1}\frac{1}{h_\gamma}\,h_{\alpha\beta\gamma'}\,e_\gamma.$$

Поэтому k независимых чисел e_0, $e_1, \ldots e_{k-1}$ образуют сами по себе базис комплексных чисел, для которых также верен и коммутативный закон умножения. Как я показал в моей работе *Über Gruppencharaktere* („О характерах групп“), тут имеют место те же условия, при которых Weierstrass и Dedekind исследовали подобные системы чисел. Поэтому действительно существуют числа χ_α, которые, будучи подставлены вместо e_α, удовлетворяют уравнениям (5):

$$h_\alpha h_\beta \chi_\alpha \chi_\beta = f \sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma'} \chi_\gamma. \tag{6}$$

Поэтому мы не придем к противоречиям, если ограничим предполагавшуюся до сих пор независимость h комплексных единиц e_R линейными уравнениями $e_\alpha = \chi_\alpha e_0$, или

$$f \sum_{(\alpha)}' e_R = h_\alpha \chi_\alpha e_E. \tag{7}$$

Умножая на e_B, выведем отсюда по (3) дальнейшие линейные уравнения:

$$f \sum_\alpha' e_{BR} = h_\alpha \chi_\alpha e_B. \tag{8}$$

В силу этих соотношений число линейно независимых единиц e_R сводится на f^2 и их можно выбрать так, чтобы формулы их умножения совпали бы с формулами композиции всех матриц f-ой степени.

Указанное здесь вычисление провел Dedekind для приведенного в § 5 примера группы порядка $h = 6$ и для некоторых иных групп наименьших порядков, — так, например, для группы $\mathfrak{Q}$ 8-го порядка, которую он назвал кватернионной группой, так как выведенная из нее система гиперкомплексных чисел совпадает с системой Гамильтоновых кватернионов. В своей работе *Über Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind,* Math. Ann. Bd. 48 („О группах, все делители которых — нормальны“) он указывает на стр. 551 на эти соотношения в таких словах: „Имеется, как я выяснил уже в феврале 1886 г., еще более глубокое соотношение между группой $\mathfrak{Q}$ и Гамильтоновыми кватернионами“. Исчисление кватернионов, ведь, вполне эквивалентно исчислению с матрицами второй степени, если брать за скалярные коэффициенты обычные комплексные числа, так как обе кватернарные квадратичные формы $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ и $xt - yz$ могут быть преобразованы одна в другую. Если ограничиться реальными коэффициентами, то тогда только кватернионы получат самостоятельное значение, суть которого состоит в том, что, кроме них и обычных комплексных чисел, не существует никакой системы чисел, где произведение не может обратиться в нуль без того, чтобы один из сомножителей был бы равен нулю, как я впервые показал в моей работе: *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen* („О линейных подстановках и билинейных формах“), Crelle's Journ. Bd. 84, § 14.

§ 7.

Пусть элементы $x_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n$) матрицы n-ой степени X n^2 независимых друг от друга переменных. Если переставить в X строки с колоннами, то получится *сопряженная* с X матрица X'. Пусть элементы обеих матриц A и B — постоянные величины, а детерминанты $|A|$ и $|B|$ — отличные от нуля величины, произведение которых равно k. В этом случае обе матрицы AXB и $AX'B$ имеют детерминант $k|X|$, и в каждой из них элементы — линейные функции от n^2 переменных $x_{\alpha\beta}$. Обратно, имеет место теорема:

I. *Если элементы матрицы X — независимые переменные, а элементы матрицы Y — линейные функции этих переменных, и если детерминант матрицы Y отличается от детерминанта матрицы X только постоянным, неравным нулю множителем, — то или $Y = AXB$ или $Y = AX'B$, где A и B — постоянные матрицы; причем, если степень X больше единицы, то имеет место только один из этих случаев, и матрицы A и B — вполне определены с точностью до скалярного множителя.*

Вторую часть этой теоремы легко доказать. Действительно, пусть $Y = AXB = CXD$. Если подставить сюда $x_{\alpha\beta} = 0$ или 1, смотря по тому, различны ли или равны α и β, то отсюда следует, что $AB = CD$, а если положить $BD^{-1} = A^{-1}C = F$, то $XF = FX$. Таким образом, F переместимо со всякой матрицей и, следовательно, $F = hE$, где h скалярный множитель, а E — главная матрица. Следовательно, $C = hA$ и $D = \frac{1}{h} B$. Если, далее, $n > 1$, то не может быть $AXB = CX'D$. Ибо отсюда следует точно таким же образом, что $XF = FX'$, следовательно, например, для $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}.$$

Этим четырем линейным уравнениям удовлетворяют только равные нулю значения постоянных, если неизвестные a, b, c, d должны быть независимыми от переменных x, y, z, t.

Между минорами m-ой степени ($0 < m < n$) матрицы X не существует никакого линейного соотношения с постоянными коэффициентами. Действительно, пусть $u, v, w, \ldots$ эти миноры, $a, b, c, \ldots$ постоянные, и пусть $au + bv + cw + \ldots = 0$. Если здесь принять все переменные $x_{\alpha\beta} = 0$, кроме тех m^2, которые входят в u, то $v, w, \ldots$ обращаются в нуль и поэтому должно быть $a = 0$. Миноры $(n-1)$-ой степени — первые производные от $|X|$ по переменным $x_{\alpha\beta}$. Так как между ними не имеется никаких линейных соотношений с постоянными коэффициентами, то $|X|$ нельзя представить, как функцию менее, чем от n^2 переменных, которые были бы линейными функциями от n^2 переменных $x_{\alpha\beta}$. Итак, если $|Y| = k|X|$, то n^2 переменных $y_{\alpha\beta}$ — друг от друга независимы. Поэтому между минорами m-ой степени матрицы Y также не существует никакого линейного соотношения с постоянными коэффициентами.

Пусть коэффициент при $x_{\varkappa\varkappa}$ в $y_{\alpha\beta}$ есть $c_{\alpha\beta}^{(\varkappa)}$ или, — принимая $\varkappa$ за постоянный индекс, — просто $c_{\alpha\beta}$. Если r — новая переменная, и если заменить $x_{\varkappa\varkappa}$ через $x_{\varkappa\varkappa}+r$, то $y_{\alpha\beta}$ переходит в $y_{\alpha\beta}+ + rc_{\alpha\beta}$, Поэтому $|y_{\alpha\beta}+rc_{\alpha\beta}|$ равен детерминанту, который получается из $k|x_{\alpha\beta}|$, если заменить $x_{\varkappa\varkappa}$ через $x_{\varkappa\varkappa}+r$. Но этот детерминант — функция первой степени от r; следовательно, в детерминанте $|y_{\alpha\beta}+rc_{\alpha\beta}|$ коэффициент при r^2 обращается в нуль. Этот коэффициент равен сумме произведений каждого детерминанта второй степени матрицы $c_{\alpha\beta}$ и дополнительного детерминанта $(n-2)$-ой степени матрицы $y_{\alpha\beta}$. Но между последними, если $n>2$, не имеется никаких линейных соотношений с постоянными коэффициентами. Следовательно, все детерминанты второй степени матрицы $c_{\alpha\beta}$ должны обращаться в нуль. Для $n=2$ это и так ясно. Поэтому можно так выбрать $2n$ величин p_α, q_α, что будет $c_{\alpha\beta}=p_\alpha q_\beta$.

Пусть $c_{\alpha\beta}^{(\varkappa)}=p_{\alpha\varkappa}q_{\varkappa\beta}$. Если принять переменные $x_{\alpha\beta}$, у которых индексы α и β различны, равными нулю, то пусть X и Y перейдут в X_0 и Y_0. Элементы матрицы Y_0 будут, в таком случае,

$$\sum_\varkappa c_{\alpha\beta}^{(\varkappa)}x_{\varkappa\varkappa}=\sum_\varkappa p_{\alpha\varkappa}x_{\varkappa\varkappa}q_{\varkappa\beta}\,.$$

Если, таким образом, P — матрица, образованная из величин $p_{\alpha\beta}$, а Q — из величин $q_{\alpha\beta}$, то

$$Y_0=PX_0Q$$

т. е., так как $|Y_0|=k|X_0|=kx_{11}x_{22}\ldots x_{nn}$, то $|P|\,|Q|=k$. Следовательно, $|P|$ и $|Q|$ отличны от нуля.

Элементы $z_{\alpha\beta}$ матрицы $Z=P^{-1}YQ^{-1}$ будут, таким образом, равны элементам из X_0 в случае, если принять равными нулю переменные $x_{\alpha\beta}$ с различными индексами, т. е. эти элементы будут равными $x_{\alpha\alpha}$ или 0, смотря по тому, будет ли $\beta=\alpha$ или нет. Иными словами, величины $z_{\alpha\beta}\,(\alpha\lessgtr\beta)$ и $z_{\alpha\alpha}-x_{\alpha\alpha}=v_\alpha$ зависят только от переменных $x_{\alpha\beta}$ с различными индексами. Если разложить тождество $|X|=|Z|$ по степеням x_{11}, x_{22}, $\ldots x_{nn}$, то из сравнения коэффициентов произведения $x_{22}x_{33}\ldots x_{nn}$ получается, что $v_1=0$. Точно также $v_\alpha=0$. Если сравнить, затем, члены, помноженные на $x_{33}x_{44}\ldots x_{nn}$, то найдем, что $x_{12}x_{21}=z_{12}z_{21}$, и вообще

(1) $$x_{\alpha\beta}x_{\beta\alpha}=z_{\alpha\beta}z_{\beta\alpha}.$$

Если, наконец, сравнить коэффициенты при $x_{44}x_{55}\ldots x_{nn}$, то получим

$$\begin{vmatrix}0 & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & 0 & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & z_{12} & z_{13}\\ z_{21} & 0 & z_{23}\\ z_{31} & z_{32} & 0\end{vmatrix}$$

и подобно же вообще:

$$x_{\beta\gamma} x_{\gamma\alpha} x_{\alpha\beta} + x_{\gamma\beta} x_{\alpha\gamma} x_{\beta\alpha} = z_{\beta\gamma} z_{\gamma\alpha} z_{\alpha\beta} + z_{\gamma\beta} z_{\alpha\gamma} z_{\beta\alpha}.$$

Согласно (1) и произведение обоих слагаемых в левой части равно произведению слагаемых в правой части. Поэтому или

$$x_{\beta\gamma} x_{\gamma\alpha} x_{\alpha\beta} = z_{\beta\gamma} z_{\gamma\alpha} z_{\alpha\beta}, \quad x_{\gamma\beta} x_{\alpha\gamma} x_{\beta\alpha} = z_{\gamma\beta} z_{\alpha\gamma} z_{\beta\alpha}$$

или

$$x_{\beta\gamma} x_{\gamma\alpha} x_{\alpha\beta} = z_{\gamma\beta} z_{\alpha\gamma} z_{\beta\alpha}, \quad x_{\gamma\beta} x_{\alpha\gamma} x_{\beta\alpha} = z_{\beta\gamma} z_{\gamma\alpha} z_{\alpha\beta}.$$

Так как величины $z_{\alpha\beta}$ — линейные функции n^2 независимых переменных $x_{\alpha\beta}$, то по (1) с точностью до постоянного множителя, которого мы пока не примем во внимание, или $z_{\alpha\beta} = x_{\alpha\beta}$, $z_{\beta\alpha} = x_{\beta\alpha}$, или $z_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha}$, $z_{\beta\alpha} = x_{\alpha\beta}$.

Пусть $z_{12} = x_{12}$, $z_{21} = x_{21}$. Тогда не может быть $x_{12} x_{2\alpha} x_{\alpha 1} = z_{21} z_{\alpha 2} z_{1\alpha}$ $(\alpha > 2)$, так как правая сторона не делится на x_{12}. Поэтому $x_{12} x_{2\alpha} x_{\alpha 1} = z_{12} z_{2\alpha} z_{\alpha 1}$, следовательно, $z_{\alpha 1} = x_{\alpha 1}$, $z_{2\alpha} = x_{2\alpha}$, и отсюда $z_{1\alpha} = x_{1\alpha}$, $z_{\alpha 2} = x_{\alpha 2}$. Далее, в таком случае должно быть $x_{1\alpha} x_{\alpha\beta} x_{\beta 1} = z_{1\alpha} z_{\alpha\beta} z_{\beta 1}$ и, следовательно, $z_{\alpha\beta} = x_{\alpha\beta}$. Если же $z_{12} = x_{21}$, то тем же путем выясняется, что вообще $z_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha}$.

Но эти уравнения верны только с точностью до постоянных множителей. Если $z_{\alpha 1} = \frac{k_\alpha}{k_1} x_{\alpha 1}$, то по (1) $z_{1\alpha} = \frac{k_1}{k_\alpha} x_{1\alpha}$ и согласно уравнению $z_{1\alpha} z_{\alpha\beta} z_{\beta 1} = x_{1\alpha} x_{\alpha\beta} x_{\beta 1}$ вообще $z_{\alpha\beta} = \frac{k_\alpha}{k_\beta} x_{\alpha\beta}$. Если, следовательно, положить

$$R = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & k_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k_3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

то $Z = RXR^{-1}$ и $Y = PRXR^{-1}Q = AXB$. Подобно же и в другом случае: $z_{\alpha\beta} = \frac{k_\alpha}{k_\beta} x_{\beta\alpha}$, $Y = PRX'R^{-1}Q = AX'B$.

II. *Если выполнены условия теоремы I, и если характеристические функции матриц X и Y равны друг другу, то или $Y = AXA^{-1}$, или $Y = AX'A^{-1}$.*

Пусть $e_{\alpha\beta} = 1$ или 0 — в зависимости от того, будет ли $\alpha = \beta$ или нет. Тогда $|X - rE| = |Y - rE|$ характеристические функции для X и Y. Если взять $x_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}$, то пусть $y_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}$. Если затем заменить в уравнении $|Y| = |X|$ каждое $x_{\alpha\beta}$ через $x_{\alpha\beta} - re_{\alpha\beta}$, то получим:

$$|Y - rC| = |X - rE| = |Y - rE|.$$

Если сравнить в обеих частях коэффициенты у первых степеней r, то найдем:

$$\sum c_{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta} = \sum e_{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta},$$

где $Y_{\alpha\beta}$ — минор $(n-1)$-ой степени для Y, дополнительный к элементу $y_{\alpha\beta}$. Так как между этими минорами не имеется никакого линейного соотношения, то $c_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}$. Но по теореме I можно выбрать матрицы A и B так, что $Y = AXB$ или $Y = AX'B$. Если здесь принять $X = E$, то, как только что показано, будет также и $Y = E$, а, следовательно, $AB = E$, т. е. $B = A^{-1}$.

Выведенные теоремы остаются справедливыми и в том случае, когда изменяемость n^2 переменных $x_{\alpha\beta}$ будет ограничена соотношениями $x_{\beta\alpha} = x_{\alpha\beta}$.

III. *Если в симметрической матрице X элементы $x_{\alpha\beta}$ $(\beta \geqq \alpha)$ — независимые переменные, и если элементы симметрической матрицы Y — линейные функции этих переменных, и если, кроме того, детерминант $|Y|$ отличается от $|X|$ только на постоянный, отличный от нуля множитель, — то $Y = AXA'$, где A — с точностью до знака вполне определенная, постоянная матрица. Если, кроме того, характеристические функции матриц X и Y равны друг другу, то A — ортогональная матрица.*

Если $AXA' = BXB'$, то получается при $X = E$, что $AA' = BB'$. Если положить $A^{-1}B = A'B'^{-1} = F$, то получим $XF = FX$ и $FF' = E$. Если принять равными нулю переменные $x_{\alpha\beta}$ с различными индексами, то $x_{\alpha\alpha} f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} x_{\beta\beta}$, т. е. $f_{\alpha\beta} = 0$, если α отлично от β. Из $FF' = E$ следует, затем, что $f_{\alpha\alpha} = \pm 1$. Общее уравнение $XF = FX$ дает поэтому $x_{\alpha\beta} f_{\beta\beta} = f_{\alpha\alpha} x_{\alpha\beta}$. Отсюда $F = \pm E$, и $B = \pm A$, и, следовательно, A с точностью до знака вполне определено.

Между первыми производными от $|X|$ по переменным $x_{\alpha\beta}$ $(\beta \geqq \alpha)$ не имеется никакого соотношения, так как, обратно, элементы $x_{\alpha\beta}$ могут быть представлены, как функции этих производных. Но между минорами m-ой степени $u, v, w, \ldots$ существуют линейные соотношения (Kronecker, *Über die Subdeterminante symmetrischer Systeme*, *Sitzungsberichte* 1882. — „О миноре симметрических систем“). Если $au + bv + cw + \ldots = 0$ такое соотношение и если u — главный минор, то должно быть $a = 0$. Ибо, если взять все переменные $x_{\alpha\beta} = 0$ кроме тех, которые встречаются в u, то получится $v = w = \ldots = 0$.

Если $c_{\alpha\beta}^{(\varkappa)}$ — коэффициент при $x_{\varkappa\varkappa}$ в $y_{\alpha\beta}$, то отсюда получается тем же путем, что и выше, что в симметрической матрице $c_{\alpha\beta}^{(\varkappa)}$ все главные миноры второй и третьей степени обращаются в нуль. Следовательно, как я показал в моей работе *Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen* („О законе инерции квадратичных форм“) § 2, теорема 2-я (Sitzungsberichte 1894), все миноры второй степени обращаются в нуль и поэтому $c_{\alpha\beta}^{(\varkappa)} = p_{\alpha\varkappa} p_{\beta\varkappa}$. Далее следуют те же заключения, что и выше. Только можно, в силу того, что $z_{\alpha\beta}^2 = x_{\alpha\beta}^2$, взять величины $k_\alpha = \pm 1$. Тогда $R^{-1} = R = R'$ и $Y = PRXR'P' = AXA'$.

Если характеристические функции матриц X и Y равны друг другу, то можно показать, как выше, что для $X = E$ также и $Y = E$ и, следовательно, $AA' = E$, т. е. A—ортогональная матрица.

О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ХАРАКТЕРАМИ ГРУППЫ И ХАРАКТЕРАМИ ЕЕ ПОДГРУПП[43].

(Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen. Sitzungsber. der Berl. Ak., 1898, S. 501—515).

В моей работе *Über Gruppencharaktere* (Sitzungsberichte, 1896.— „О групповых характерах“, стр. 21—64 этой книги) я развил общий метод для вычисления характеров конечной группы с известной структурой и проиллюстрировал его практическое применение на ряде простых примеров. Но так как применение этого метода для более сложных групп связано со значительными трудностями, то я занялся изысканием других путей, чтобы получить характеры группы и вместе с тем ее примитивные представления через линейные подстановки; я нашел два совершенно различных метода, которые в частных случаях могут скорее привести к этой цели, чем тот общий метод.

Первый из них, который я хочу здесь изложить, опирается на рассмотрение групп $\mathfrak{G}$, содержащихся в данной группе $\mathfrak{H}$, и на соотношения, которые существуют между характерами $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$. Эти соотношения получаются двумя различными путями. Один путь (§ 1) ведет от простых множителей детерминанта группы $\mathfrak{H}$ к простым множителям детерминанта группы $\mathfrak{G}$, другой путь (§ 3) — обратно, от последних к первым. Эти рассуждения приводят к чрезвычайно простым результатам в случае, когда $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$ (§ 2, 4). Полученные формулы находятся в тесной связи с разложением группы $\mathfrak{H}$ на комплексы элементов, эквивалентных по двойному модулю, который образуется из двух групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$, содержащихся в $\mathfrak{H}$. Исследование специального случая, когда $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$, приводит прямо к нахождению характера всякой дважды транзитивной группы перестановок (§ 5).

Другой метод вычисления характера группы вытекает из теории композиции характеров, которую я изложу в другой раз.

§ 1.

Пусть $\mathfrak{H}$ — группа порядка h и пусть

$$\Theta = \prod_\lambda \Phi_\lambda^{f_\lambda} \qquad (\lambda = 0,\ 1,\ \ldots\ l-1)$$

— ее групповой детерминант, разложенный на простые множители. Пусть $\mathfrak{G}$ — содержащаяся в $\mathfrak{H}$ группа порядка $g = \frac{h}{n}$, и пусть

$$\mathrm{H} = \prod_\varkappa \Psi_\varkappa^{e_\varkappa} \qquad (\varkappa = 0,\ 1,\ \ldots\ k-1)$$

— ее групповой детерминант. Если положить в Θ, что все переменные $x_R=0$, кроме тех, индексы которых — элементы из $\mathfrak{G}$, то (*Gruppencharaktere*, § 7)

$$(1) \qquad \Theta = \mathrm{H}^n,$$

и, следовательно, также каждый простой множитель Φ_λ из Θ будет произведением простых множителей из H

$$(2) \qquad \Phi_\lambda = \prod_\varkappa \Psi_\varkappa^{r_{\varkappa\lambda}}.$$

Здесь нужно положить $r_{\varkappa\lambda}=0$, если Φ_λ не делится на $\Psi_\varkappa$. Если заменить в этом уравнении x_E через x_E+u, то из сравнения коэффициентов при $u^{f_\lambda-1}$ получим

$$(3) \qquad \sum_\varkappa r_{\varkappa\lambda}\,\psi^{(\varkappa)}(P) = \chi^{(\lambda)}(P),$$

где $\psi^{(\varkappa)}$ — характер для $\Psi_\varkappa$, а $\chi^{(\lambda)}$ — характер для Φ_λ, и где P означает элемент из $\mathfrak{G}$. Отсюда, с помощью уравнений

$$\sum_P \psi^{(\varkappa)}(P^{-1})\,\psi^{(\varkappa)}(P) = g, \quad \sum_P \psi^{(\varkappa)}(P^{-1})\,\psi^{(\lambda)}(P) = 0$$

получаем

$$(4) \qquad \sum_P \psi^{(\varkappa)}(P^{-1})\,\chi^{(\lambda)}(P) = g r_{\varkappa\lambda}.$$

Если поэтому R — элемент из $\mathfrak{H}$, то

$$g\sum_\lambda r_{\varkappa\lambda}\,\chi^{(\lambda)}(R) = \sum_P \psi^{(\varkappa)}(P)\left(\sum_\lambda \chi^{(\lambda)}(P^{-1})\,\chi^{(\lambda)}(R)\right).$$

Но по *Gruppencharaktere* § 3, (4):

$$\sum_\lambda \chi^{(\lambda)}(P^{-1})\,\chi^{(\lambda)}(R) = 0,$$

кроме того случая, когда P и R сопряжены (относительно $\mathfrak{H}$). Но тогда рассматриваемая сумма равна $\frac{h}{h_R}=\frac{h}{h_\rho}$, если R и P — элементы ρ-ого класса из $\mathfrak{H}$. Следовательно,

$$(5) \qquad \sum_\lambda r_{\varkappa\lambda}\,\chi^{(\lambda)}(R) = \frac{h}{gh_\rho}\sum_{(\rho)} \psi^{(\varkappa)}(P),$$

где P пробегает элементы ρ-ого класса, которые содержатся в $\mathfrak{G}$. Если положить $\psi(R)=0$ при R, не содержащемся в $\mathfrak{G}$, то вместо P можно подставить и все сопряженные с R элементы из $\mathfrak{H}$. Но при этом предположении следует строго учитывать, что уравнение (3) верно только для тех элементов P, которые принадлежат к группе $\mathfrak{G}$.

Если известны k характеров $\psi^{(\varkappa)}$ подгруппы $\mathfrak{G}$, то новое свойство l характеров $\chi^{(\lambda)}$, которые выражаются уравнениями

(3), (4) и (5) в трех различных, но эквивалентных друг другу формах, — состоит в том, что

$$\text{(4a)} \qquad \frac{1}{g}\sum_{P}\psi(P^{-1})\,\chi(P)=r$$

— положительное целое число.

При определенном значении λ не все k чисел $r_{\varkappa\lambda}$ равны нулю; точно также, при определенном значении $\varkappa$ не все l чисел $r_{\varkappa\lambda}$ равны нулю. Это вытекает из уравнения (2), в связи с соотношением (1).

Если (0) — главный класс, то, подставив в уравнения (3) и (5) $P=R=E$, получим уравнения [44)]

$$\text{(6)} \qquad \sum_{\varkappa} r_{\varkappa\lambda}\, e_{\varkappa}=f_{\lambda}, \quad \sum_{\lambda} r_{\varkappa\lambda}\, f_{\lambda}=\frac{h}{g}\, e_{\varkappa},$$

которые непосредственно получаются и из формул (2) и (1). Следовательно,

$$\text{(7)} \qquad e_{\varkappa}\, r_{\varkappa\lambda} \leqq f_{\lambda}, \quad r_{\varkappa\lambda} \leqq f_{\lambda}.$$

Если выбрать для главного характера индекс 0, то

$$\text{(8)} \qquad r_{00}=1, \quad r_{\varkappa 0}=0 \qquad (\varkappa>0),$$

а если положить $r_{0\lambda}=r_{\lambda}$, то

$$\text{(9)} \qquad \sum_{\rho} g_{\rho}\,\chi_{\rho}^{(\lambda)}=g r_{\lambda}, \quad \sum_{\lambda} r_{\lambda}\,\chi_{\rho}^{(\lambda)}=\frac{h g_{\rho}}{g h_{\rho}},$$

где g_{ρ} означает число элементов ρ-ого класса из $\mathfrak{H}$, принадлежащих к группе $\mathfrak{G}$.

Так как значения характеров являются целыми алгебраическими числами, то, согласно последней формуле, hg_{ρ} делится на gh_{ρ}. Эту теорему можно легко доказать непосредственно: если H пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$, а R — определенный элемент ρ-ого класса, то h элементов $H^{-1}RH$ являются h_{ρ} различными элементами ρ-ого класса, причем каждый считается $\frac{h}{h_{\rho}}$ раз. Поэтому в $\mathfrak{H}$ имеется $g_{\rho}\frac{h}{h_{\rho}}$ различных элементов H такого рода, что $H^{-1}RH$ содержится в $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{K}$ — комплекс этих элементов H. Если $A^{-1}RA$ содержится в $\mathfrak{G}$ и G — элемент из $\mathfrak{G}$, то и

$$G^{-1}(A^{-1}RA)\,G=(AG)^{-1}R\,(AG)$$

также содержится в $\mathfrak{G}$. Если, таким образом, A — элемент из $\mathfrak{K}$, то и все элементы комплекса $A\mathfrak{G}$ также принадлежат к комплексу $\mathfrak{K}$. Следовательно, $\mathfrak{K}$ распадается на определенное число комплексов $A\mathfrak{G}+B\mathfrak{G}+C\mathfrak{G}+\ldots$, из которых каждые два — взаимно просты [45]. Поэтому порядок $\frac{hg_\rho}{h_\rho}$ комплекса $\mathfrak{R}$ делится на g. Число $\frac{hg_\rho}{gh_\rho}$ указывает, сколько именно из n комплексов

$$A_0\mathfrak{G}+A_1\mathfrak{G}+\ldots+A_{n-1}\mathfrak{G}=\mathfrak{H} \tag{10}$$

удовлетворяют условию $A_\nu\mathfrak{G}=RA_\nu\mathfrak{G}$.

По формуле (3)

$$\sum_P \chi^{(\lambda)}(P^{-1})\,\chi^{(\mu)}(P)=\sum_{\alpha,\beta} r_{\alpha\lambda}\,r_{\beta\mu}\left(\sum_P \psi^{(\alpha)}(P^{-1})\,\psi^{(\beta)}(P)\right)$$

и, следовательно,

$$\sum_P \chi^{(\lambda)}(P^{-1})\,\chi^{(\mu)}(P)=g\sum_{\varkappa} r_{\varkappa\lambda}\,r_{\varkappa\mu}, \tag{11}$$

где P пробегает только элементы из $\mathfrak{G}$, или:

$$\sum_\rho g_\rho\,\chi_\rho^{(\lambda)}\,\chi_{\rho'}^{(\mu)}=g\sum_{\varkappa} r_{\varkappa\lambda}\,r_{\varkappa\mu}. \tag{12}$$

Но

$$\sum_R \chi^{(\lambda)}(R^{-1})\,\chi^{(\lambda)}(R)=h,$$

где R пробегает все элементы из $\mathfrak{H}$. Так как $\chi(R)$ и $\chi(R^{-1})$ — сопряженные комплексные величины, то их произведение — реальная положительная величина. Следовательно,

$$\sum_{\varkappa} r_{\varkappa\lambda}^2\leqq\frac{h}{g}. \tag{13}$$

Но если в (11) положить $\mu=\lambda$ и просуммировать затем по λ, то получим

$$\sum_{\varkappa,\lambda} r_{\varkappa\lambda}^2=\sum_\lambda\frac{hg_\lambda}{gh_\lambda}, \tag{14}$$

где в правой части нужно суммировать по l классам из $\mathfrak{H}$. Это число, помноженное на g, есть число решений уравнения $QR=RQ$, если Q пробегает g элементов из $\mathfrak{G}$, а R — h элементов из $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ — две подгруппы из $\mathfrak{H}$, то обозначим через g', g'_ρ, $r'_{\varkappa\lambda}$ числа для группы $\mathfrak{G}'$, которые для группы $\mathfrak{G}$ обозначены через g, g_ρ, $r_{\varkappa\lambda}$. Тогда по (9)

$$gg'\sum_\lambda r_\lambda r'_\lambda=\sum_{\rho,\sigma} g_\rho\,g'_\sigma\left(\sum_\lambda \chi_\rho^{(\lambda)}\,\chi_\sigma^{(\lambda)}\right).$$

Последняя, взятая по λ, сумма равна нулю, за исключением случая, когда $(\sigma)=(\rho')$; в этом случае эта сумма равна $\frac{h}{h_\rho}$.

Следовательно,

$$gg' \sum_{\lambda} r_\lambda r'_\lambda = h \sum_{\rho} \frac{g_\rho g'_\rho}{h_\rho}.$$

В моей работе *Über die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul* („О сравнении по образованному из двух конечных групп двойному модулю"), Crelle's Journal, Bd. 101, я установил в § 2, (8) для числа $(\mathfrak{H}:\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ классов, на которые элементы из $\mathfrak{H}$ распадаются по двойному модулю $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$, следующее соотношение:

$$\frac{gg'}{h}(\mathfrak{H}:\mathfrak{G}, \mathfrak{G}') = \sum_{\rho} \frac{g_\rho g'_\rho}{h_\rho}. \tag{15}$$

Отсюда получается формула:

$$\sum_{\lambda} r_\lambda r'_\lambda = (\mathfrak{H}:\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'), \quad \sum_{\lambda} r_\lambda^2 = (\mathfrak{H}:\mathfrak{G}, \mathfrak{G}). \tag{16}$$

Если положить все переменные $x_R = 0$, у которых индекс R не содержится в $\mathfrak{G}$, то Φ_λ будет содержать множителем $\Psi_0'^{r_\lambda'}$. Если $\mathfrak{G}'$ — подгруппа $\mathfrak{G}$, то эти значения можно подставить в выражение (2) для Φ_λ, и тогда $\Psi_0'^{r_\lambda}$, перейдет в $\Psi_0'^{r_\lambda}$. Следовательно:

$$r'_\lambda \geqq r_\lambda, \text{ если } \mathfrak{G}' < \mathfrak{G}, \tag{17}$$

т. е. если $\mathfrak{G}'$ содержится в $\mathfrak{G}$.

Если $g < h$, то в $\mathfrak{H}$ всегда имеются классы, ни один элемент которых не содержится в $\mathfrak{G}$. Ибо, согласно условию (10), $A_\nu \mathfrak{G} A_\nu^{-1} = \mathfrak{G}_\nu$ n сопряженных с $\mathfrak{G}$ групп, которые не обязательно различны. Пусть t_μ число элементов из $\mathfrak{H}$, которые содержатся как раз в μ из этих n групп. В таком случае

$$t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n = h.$$

С другой стороны, комплекс $\mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_1 + \ldots + \mathfrak{G}_{n-1}$ содержит $gn = h$ элементов, если входящие несколько раз элементы и считаются несколько раз, т. е. каждый из t_μ элементов, который входит как раз в μ из этих n групп, считается μ раз. Отсюда

$$t_1 + 2t_2 + \ldots + nt_n = h$$

и, следовательно,

$$t_0 = t_2 + 2t_3 + \ldots + (n-1)\, t_n.$$

Так как главный элемент E входит во все n групп, то $t_n > 0$. Если, таким образом, $n > 1$, то $t_0 > 0$. Если R один из этих t_0 элементов, и если H пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$, то R не встречается ни в одной из групп $H\mathfrak{G}H^{-1}$, т. е. в $\mathfrak{G}$ не содержится ни одного элемента $H^{-1}RH$, сопряженного с R. Поэтому согласно уравнению (5),

$$\sum_{\lambda} r_{\varkappa\lambda}\,\chi^{(\lambda)}(R) = 0.$$

Если, таким образом, $k \geqq l$, то в матрице

$$(18) \qquad r_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots k-1;\ \lambda = 0, 1, \ldots l-1)$$

все детерминанты l-ой степени обращаются в нуль [46].

§ 2.

kl чисел $r_{\varkappa\lambda}$ можно определить более точно, если $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$. Для этого случая я доказал в *Gruppencharaktere*, § 7 (стр. 45—49 этой книги) следующие теоремы: Пусть S — постоянный элемент из $\mathfrak{H}$, а P — переменный элемент из $\mathfrak{G}$. Так как $S^{-1}\mathfrak{G}S = \mathfrak{G}$, то $S^{-1}PS$ пробегает одновременно с P g элементов из $\mathfrak{G}$. Если положить $\psi^{(\varkappa)}(S^{-1}PS) = \psi^{(\varkappa')}(P)$, то $\psi^{(\varkappa')}(P)$ — характер для $\mathfrak{G}$. Если этот характер отличается от $\psi^{(\varkappa)}(P)$, то я его называю *сопряженным* с $\psi^{(\varkappa)}(P)$ (относительно $\mathfrak{H}$). Сопряженные характеры имеют ту же самую степень $e_\varkappa = e_{\varkappa'}$ и различаются между собою только расположением своих значений. Пусть $s_\varkappa = s_{\varkappa'} = \ldots$ число различных характеров $\mathfrak{G}$, которые сопряжены с $\psi^{(\varkappa)}$ и, следовательно, также друг с другом. Каждому характеру $\psi^{(\varkappa)}$ для $\mathfrak{G}$ соответствуют один или несколько характеров $\chi^{(\lambda)}$, $\chi^{(\lambda')}$, ... для $\mathfrak{H}$, так что равенство

$$(1) \qquad \psi^{(\varkappa)}(P) + \psi^{(\varkappa')}(P) + \ldots = \frac{s_\varkappa e_\varkappa}{f_\lambda}\chi^{(\lambda)}(P) = \frac{s_\varkappa e_\varkappa}{f_{\lambda'}}\chi^{(\lambda')}(P) = \ldots$$

имеет место для всех g элементов P из G. Обратно, каждому характеру $\chi^{(\lambda)}$ для $\mathfrak{H}$ соответствует по крайней мере один такой характер $\psi^{(\varkappa)}$ для $\mathfrak{G}$, что исполнено уравнение (1), а если ему соответствуют несколько характеров, то каждые два из них сопряжены. Если $\chi^{(\lambda)}$ дано, то $\chi^{(\lambda')}$, $\chi^{(\lambda'')}$, ... определяются тем, что g значений $\chi^{(\lambda')}(P)$ пропорциональны g значениям $\chi^{(\lambda)}(P)$. Если R пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$, и если $\chi^{(\lambda)}$ и $\chi^{(\mu)}$ различные характеры, то по *Gruppencharaktere* § 3 (стр. 30—33 этой книги) h значений $\chi^{(\lambda)}(R)$ не могут быть пропорциональными h значениям $\chi^{(\mu)}(R)$.

Если в формулу (3), § 1, подставить для $\chi^{(\lambda)}(P)$ выражение (1), то получим, что всегда $r_{\varkappa\lambda} = 0$, кроме того случая, когда $\psi^{(\varkappa)}$ и $\chi^{(\lambda)}$ соответствуют друг другу. В этом же последнем случае

$$(2) \qquad r_{\varkappa\lambda} = r_{\varkappa'\lambda} = \ldots = \frac{f_\lambda}{s_\varkappa e_\varkappa}$$

отлично от нуля; здесь $\psi^{(\varkappa)}, \psi^{(\varkappa')}, \ldots$ $s_\varkappa$ сопряженных друг с другом характеров для $\mathfrak{G}$, соответствующих $\chi^{(\lambda)}$.

Поэтому уравнение (2), § 1, сводится к

$$\Phi_\lambda = (\Psi_\varkappa \Psi_{\varkappa'} \ldots)^{\frac{f_\lambda}{s_\varkappa e_\varkappa}},$$

а из (6), § 1, следует

$$f_\lambda^2 + f_{\lambda'}^2 + \ldots = n s_\varkappa e_\varkappa^2, \quad r_{\varkappa\lambda'}^2 + r_{\varkappa\lambda'}^2 + \ldots = \frac{n}{s_\varkappa}. \tag{4}$$

Следовательно, f_λ делится на $s_\varkappa e_\varkappa$, и частное $\frac{f_\lambda}{s_\varkappa e_\varkappa}$ является общим делителем g целых алгебраических чисел $\chi^{(\lambda)}(P)$. Что n делится на $s_\varkappa$, я показал уже в *Gruppencharaktere* § 7 (стр. 45—49 этой книги).

Если R не содержится в $\mathfrak{G}$, то к группе $\mathfrak{G}$ не принадлежит также никакой сопряженный с R элемент P. Поэтому из (5), § 1, следует:

$$f_\lambda \chi^{(\lambda)}(R) + f_{\lambda'} \chi^{(\lambda')}(R) + \ldots = 0, \tag{5}$$

если R не содержится в $\mathfrak{G}$.

§ 3.

От l простых множителей Φ детерминанта Θ группы $\mathfrak{H}$ пришли к k простым множителям Ψ детерминанта H подгруппы $\mathfrak{G}$, полагая все переменные $x_R = 0$, индекс которых R есть элемент $\mathfrak{H}$, не содержащийся в $\mathfrak{G}$. Теперь я хочу показать, как можно при помощи другого построения перейти от k функций Ψ к l функциям Φ.

Пусть X — принадлежащая к группе $\mathfrak{G}$ матрица степени e. Ее элементы — линейные функции g переменных x_P, а ее детерминант не обращается тождественно в нуль. Она характеризуется следующим свойством: если подставить y_P или z_P вместо x_P, то пусть X перейдет в Y или Z. Если в таком случае

$$z_Q = \sum_P x_{P^{-1}} y_{PQ},$$

то $Z = XY$. Если заменить в X каждую из g переменных x_P через $x_{APB^{-1}}$, где A и B — два элемента из $\mathfrak{H}$, то получается матрица, которую я обозначаю через $X_{A,B}$. Пусть n элементов A_0, $A_1, \ldots A_{n-1}$ образуют полную систему вычетов для $\mathfrak{H}$ по модулю $\mathfrak{G}$, так что

$$\mathfrak{H} = A_0\mathfrak{G} + A_1\mathfrak{G} + \ldots + A_{n-1}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}A_0^{-1} + \mathfrak{G}A_1^{-1} + \ldots + \mathfrak{G}A_{n-1}^{-1}. \tag{1}$$

В таком случае я рассматриваю n^2 матриц e-ой степени, которые получаются из $X_{A,B}$, если подставлять вместо A и B каждый из n элементов $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$, и образую из этих матриц новую матрицу ne-ой степени $(X_{A,B})$. Если подставить y_R или z_R вместо x_R, то пусть $X_{A,B}$ переходит в $Y_{A,B}$ или $Z_{A,B}$. Если A, B и N — элементы из $\mathfrak{H}$, то матрица $X_{A,N} Y_{N,B}$ получается из X при замене x_Q через

$$\sum_P x_{AP^{-1}N^{-1}} y_{NPQB^{-1}}.$$

Здесь, как и выше, P и Q — элементы из $\mathfrak{G}$. Но элементы матрицы X линейные функции g переменных x_Q. Поэтому элементы матрицы

$$\sum_N X_{A,N} Y_{N,B} \qquad (N = A_0, A_1, \ldots A_{n-1})$$

получаются из X при замене x_Q через

$$\sum_{N,P} x_{AP^{-1}N^{-1}} y_{NPQB^{-1}} = \sum_R x_{AR^{-1}} y_{RQB^{-1}}.$$

Если P пробегает g элементов из $\mathfrak{G}$, а N пробегает n элементов $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$, то $R = NP$ пробегает по (1) $gn = h$ различных элементов из $\mathfrak{H}$. Если, таким образом, положить теперь

$$z_S = \sum_R x_{R^{-1}} y_{RS},$$

где R и S — элементы из $\mathfrak{H}$, то последняя сумма равна $z_{AQB^{-1}}$ и, следовательно,

$$\sum_N X_{A,N} Y_{N,B} = Z_{A,B}$$

или

$$(X_{A,B})\,(Y_{A,B}) = (Z_{A,B}).$$

Таким образом, $(X_{A,B})$ — матрица степени ne, принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$, и поэтому ее детерминант — произведение простых множителей группового детерминанта Θ:

$$|(X_{A,B})| = \prod_\lambda \Phi_\lambda^{r_\lambda}. \tag{2}$$

В каждой принадлежащей к данной группе матрице x_E умножается на главную матрицу. Если, таким образом, подставить вместо x_E $x_E + u$, то только к каждому элементу диагонали прибавится член u. Поэтому коэффициент при u^{ne-1} в детерминанте ne-ой степени (2) равен сумме диагональных элементов.

Если $\Psi(x)$ — простой множитель e-ой степени для Н, то можно найти такую, принадлежащую к группе $\mathfrak{G}$ матрицу X, детерминант которой равен $\Psi(x)$ (*Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsber. 1897, стр. 106—127 этой книги).

Коэффициент при u^{e-1} в $\Psi(x+u\varepsilon)$ равен $\sum_P \psi(P) x_P$. Поэтому сумма диагональных элементов в матрице $X_{N,N}$ равна

$$\sum_P \psi(P) x_{NPN^{-1}} = \sum_R \psi(N^{-1}RN) x_R.$$

Здесь P и $R = NPN^{-1}$ могут пробегать все элементы из $\mathfrak{H}$, если, как выше, положить, что $\psi(R) = 0$ при R, не принадлежащем к группе $\mathfrak{G}$. Сравнивая коэффициенты при u^{ne-1} в уравнении (2), получаем поэтому, если подставить $r_\lambda = r_{\varkappa\lambda}$ при $\Psi = \Psi_\varkappa$,

$$\sum_N \psi^{(\varkappa)}(N^{-1}RN) = \sum_\lambda r_{\varkappa\lambda}\,\chi^{(\lambda)}(R). \tag{3}$$

Если P — элемент из $\mathfrak{G}$, то $\psi(P^{-1}SP) = \psi(S)$. Именно, если S элемент из $\mathfrak{G}$, то это — уравнение § 5 (2) из *Gruppencharaktere* (стр. 36 нашей книги). Если же S не содержится в $\mathfrak{G}$, то $P^{-1}SP$ также не принадлежит к группе $\mathfrak{G}$, и обе части уравнения равны нулю. Поэтому

$$g \sum_N \psi(N^{-1}RN) = \sum_{N,P} \psi(P^{-1}N^{-1}RNP) = \sum_S \psi(S^{-1}RS),$$

где $S = NP$ пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$; таким образом

$$g \sum_\lambda r_{\varkappa\lambda}\, \chi^{(\lambda)}(R) = \sum_S \psi^{(\varkappa)}(S^{-1}RS). \tag{4}$$

Если R — элемент ρ-ого класса в $\mathfrak{H}$, то $S^{-1}RS$ представляет каждый из h_ρ различных элементов этого класса по $\frac{h}{h_\rho}$ раз. Следовательно:

$$\sum_\lambda r_{\varkappa\lambda}\, \chi^{(\lambda)}(R) = \frac{h}{gh_\rho} \sum_{(\rho)} \psi^{(\varkappa)}(P), \tag{5}$$

где P пробегает h_ρ элементов ρ-ого класса, или только те из них, которые содержатся в $\mathfrak{G}$. Так как kl чисел $r_{\varkappa\lambda}$ вполне определяются этими уравнениями, то они тождественно равны показателям, входящим в уравнения

$$\Phi_\lambda = \prod_\varkappa \Psi_\varkappa^{r_{\varkappa\lambda}}. \tag{6}$$

Вследствие неравенств (7), § 1, $e_\varkappa$ -ая степень выражения

$$\left|\left(\cdot\ {}^{(\varkappa)}_{A,B}\right)\right| = \prod_\lambda \Phi_\lambda^{r_{\varkappa\lambda}} \tag{7}$$

— делитель группового детерминанта Θ.

Если $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$, то, применяя введенные выше обозначения, получим

$$\left|\left(X^{(\varkappa)}_{A,B}\right)\right|^{s_\varkappa e_\varkappa} = \Phi_\lambda^{f_\lambda} \Phi_{\lambda'}^{f_{\lambda'}} \ldots \tag{8}$$

Таким образом, этот детерминант—делитель Θ, взаимно простой с дополнительным делителем.

§ 4.

В заслуживающем особого внимания случае, когда $\varkappa = 0$, для упрощения изложения, при данном комплексе элементов:

$$\mathfrak{A} = P + Q + R + \ldots$$

я буду обозначать:

$$x_{\mathfrak{A}} = x_P + x_Q + x_R + \ldots \tag{1}$$

В этом случае матрица n-ой степени

(2) $$(x_{A\mathfrak{G}B^{-1}}) \qquad (A, B = A_0, A_1, \ldots A_{n-1})$$

—принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$ матрица, а ее детерминант равен:

(3) $$|x_{A\mathfrak{G}B^{-1}}| = \prod_{\lambda} \Phi_{\lambda}^{r_\lambda}.$$

Каждой принадлежащей к $\mathfrak{H}$ матрице соответствует представление группы $\mathfrak{H}$ или мероэдрически изоморфной с $\mathfrak{H}$ группы через линейные подстановки. Матрице (2) соответствует представление изоморфной с $\mathfrak{H}$ группы посредством перестановок n символов, о котором я говорю в моей работе[47] *Über endliche Gruppen*, § 4 („О конечных группах“, Sitzungsberichte, 1895).

Если $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$, то, поскольку $e_0 = s_0 = 1$,

(4) $$|x_{AB^{-1}\mathfrak{G}}| = \prod_{\lambda} \Phi_{\lambda}^{r_\lambda} = \Phi_{\nu}^{f_\nu} \Phi_{\nu'}^{f_{\nu'}}, \ldots,$$

если $\chi^{(\nu)}, \chi^{(\nu')}, \ldots$ характеры для $\mathfrak{H}$, соответствующие характеру $\psi^{(0)}$ для $\mathfrak{G}$. Левая часть формулы (4) представляет собой детерминант группы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, рассмотренный мною в *Darstellung*, § 1. Там я также показал, что отличные от нуля показатели r_λ равны f_λ. Из этого же уравнения получается одно замечательное следствие: индексы $\lambda = \nu, \nu', \ldots$ характеризуются тем, что $\chi^{(\lambda)}(P)$ имеет одинаковое значение для всех g элементов P группы $\mathfrak{G}$. Но так как левая часть уравнения содержит h величин x_R только в n линейных соединениях $x_{N\mathfrak{G}}$, то это свойство относится к каждой из простых функций Φ_ν, $\Phi_{\nu'}, \ldots$ и, следовательно, если N — некоторый постоянный элемент из $\mathfrak{H}$, а P — переменный элемент из $\mathfrak{G}$, то $\chi^{(\lambda)}(NP)$ имеет также для всех g элементов P из $\mathfrak{G}$ одно и тоже значение. Отсюда вытекает следующая теорема:

I. *Для того, чтобы характер группы $\mathfrak{H}$ принадлежал к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, необходимо и достаточно, чтобы он имел для всех элементов из $\mathfrak{G}$ одно и то же значение. В этом случае он имеет также одинаковые значения для каждых двух элементов из $\mathfrak{H}$, эквивалентных друг другу по модулю $\mathfrak{G}$.*

Эту теорему можно вывести также из формулы (*Gruppencharaktere* § 5):

(5) $$h_\beta \chi(A) \chi(B) = f \sum_{(\beta)} \chi(AS),$$

где S пробегает h_β элементов, сопряженных с B. Таким образом, так как $\chi(S) = \chi(B)$, то это уравнение можно написать также и в форме:

$$\chi(R) \sum_{(\beta)} \chi(S) = f \sum_{(\beta)} \chi(RS).$$

Если $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$, то она или не содержит ни одного элемента β-го класса, или содержит их все. Если подставить для (β) последовательно все классы, элементы которых содержатся в $\mathfrak{G}$, то суммируя соответствующие уравнения, получим

$$\chi(R)\sum\chi(P)=f\sum\chi(P'),$$

где P пробегает элементы группы $\mathfrak{G}$, а P' — элементы комплекса $R\mathfrak{G}$. Поэтому, если $\Sigma\chi(P)=0$, то для каждого элемента R из $\mathfrak{H}$ $\Sigma\chi(P')=0$. Если, далее, $S\sim R\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{G})$, то $R\mathfrak{G}=S\mathfrak{G}$ и, следовательно, также

$$\chi(S)\sum\chi(P)=f\sum\chi(P'),$$

где P' пробегает те же элементы, что и выше. Если, таким образом, $\Sigma\chi(P)$ отлично от нуля, то должно быть

$$\chi(R)=\chi(S),\ \text{ если }\ R\sim S\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{G}). \tag{6}$$

Последний случай имеет место наверное, тогда когда все g значений $\chi(P)$ равны друг другу, т. е. все равны $\chi(E)=f$. Следовательно, в этом случае характер $\chi=\chi^{(\nu)}$ принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, а функция Φ_ν содержит h переменных x_R, только в n линейных соединениях $x_{N\mathfrak{G}}$ и делается равной соответствующему простому множителю группы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ с точностью до числового множителя, если в ней положить:

$$x_R=x_S\ \text{ при }\ R\sim S\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{G}). \tag{7}$$

Если же характер $\chi=\chi^{(\lambda)}$ не принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, то уравнение (6) не будет исполненным для всяких двух эквивалентных элементов; поэтому $\Sigma\chi(P)=0$, и, следовательно, для каждого элемента N из $\mathfrak{H}$:

$$\sum_P\chi(NP)=0. \tag{8}$$

Теорему I можно частично обернуть. Из формулы (5) получается уравнение

$$h_\beta f=\sum\chi(AS),$$

если $\chi(A)=\chi(B)=f$. Так как $\chi(R)$ — сумма f корней из единицы, то правая часть последнего равенства — сумма $h_\beta f$ корней из единицы. Но такая сумма может только тогда быть равной $h_\beta f$, если каждый член равен единице. Следовательно, $\chi(AS)=f$. Если, таким образом, $\chi(A)=f$ и $\chi(B)=f$, то также и $\chi(AB)=f$. Следовательно, все элементы R из $\mathfrak{H}$, для которых $\chi(R)=f$, образуют группу $\mathfrak{G}$. Если эта группа содержит элемент B, то она содержит также все элементы S сопряженные с B, так как $\chi(S)=\chi(B)$. Поэтому $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$.

II. *Если $\chi(R)$ — характер f-ой степени группы $\mathfrak{H}$, то все элементы R из $\mathfrak{H}$, для которых $\chi(R)=f$, образуют инвариантную подгруппу $\mathfrak{G}$ для $\mathfrak{H}$, и характер χ принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$.*

При помощи этих двух теорем можно, зная характеры группы, найти все ее инвариантные подгруппы. Этот способ в частном случае, когда $\mathfrak{H}$ — коммутативная группа, был указан уже Weber'ом [48].

Среди h линейных функций

$$\frac{h}{f}\xi_R=\sum_S \chi(S)\,x_{RS}$$

имеется f^2 независимых друг от друга, и через эти f^2 соединений h переменных x_R можно выразить Φ. Если P пробегает g элементов из $\mathfrak{G}$, а N — полная система вычетов $\mathfrak{H}$ по модулю $\mathfrak{G}$, то $S=NP$ пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$. Поэтому

$$\frac{h}{f}\xi_R=\sum_{N,P}\chi(NP)\,x_{RNP},$$

и, следовательно, $\xi_R=0$, если поставлено условие (7). Если Φ представляется каким-либо образом, как функция от f^2 независимых переменных, то эти переменные являются линейными соединениями переменных ξ_R и обладают поэтому тем же свойством. Таким образом, имеет место теорема:

III. *Если Φ — простой множитель f-ой степени детерминанта группы $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}$, и если положить в Φ $x_R=x_S$ всякий раз, когда $R\sim S \pmod{\mathfrak{G}}$, то функция Φ, если ее характер χ принадлежит к $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, делается равной простому множителю этой группы; если же χ не принадлежит к $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, то каждая из f^2 независимых переменных, через которые можно представить Φ, обращается в нуль.*

Если преобразовать групповую матрицу X к приведенной форме $L^{-1}XL$ (*Darstellung*, § 5), то при условии (7) эта групповая матрица переходит в приведенную форму матрицы группы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, ранг для $L^{-1}XL$ делается равным $\frac{h}{g}=n$ и среди ее миноров степени n только один отличен от нуля. Следовательно ранг групповой матрицы X также делается равным n, и каждый минор n-ой степени матрицы X делается равным детерминанту группы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ с точностью до постоянного множителя.

§ 5.

Формула (5), § 1, и содержащаяся в ней формула (9), § 1,

$$\sum_{\lambda} r_{\varkappa\lambda}\, \chi^{(\lambda)}(R) = \frac{h}{gh_\rho} \sum_{(\rho)} \psi^{(\varkappa)}(P), \quad \sum_{\lambda} r_\lambda\, \chi_\rho^{(\lambda)} = \frac{hg_\rho}{gh_\rho} \tag{1}$$

особенно удобны для того, чтобы из характеров подгруппы $\mathfrak{G}$ вывести характеры группы $\mathfrak{H}$. При помощи последней формулы мне удалось, как я это изложу в другой раз[49], определить в общем виде характеры симметрической группы степени n. Особенно простое применение этого уравнения дает следующая теорема:

Если группа $\mathfrak{H}$ порядка h содержит группу $\mathfrak{G}$ порядка g, если ρ-ый класс сопряженных элементов в $\mathfrak{H}$ состоит из h_ρ элементов и если g_ρ из этих элементов принадлежит к группе $\mathfrak{G}$, то необходимое и достаточное условие для того, чтобы величины

$$\chi_\rho = \frac{hg_\rho}{gh_\rho} - 1 \tag{1a}$$

составляли характер для $\mathfrak{H}$, состоит в том, чтобы число классов, на которые распадаются элементы из $\mathfrak{H}$ по двойному модулю $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$, было равно д в у м.

Если χ_ρ — характер, то

$$\sum_\rho h_\rho \chi_\rho \chi_{\rho'} = h, \tag{2}$$

следовательно,

$$\sum_\rho h_\rho \left(\frac{hg_\rho}{gh_\rho} - 1\right)^2 = h, \quad \sum_\rho \frac{g_\rho^2}{h_\rho} = 2\frac{g^2}{h}.$$

По формуле (10), § 1, имеем, таким образом:

$$(\mathfrak{H} : \mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 2. \tag{3}$$

Главный элемент E представляет по двойному модулю $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ комплекс $\mathfrak{G}E\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Если L элемент из $\mathfrak{H}$, который не содержится в $\mathfrak{G}$, то эквивалентные с L элементы из $\mathfrak{H}$ образуют комплекс $\mathfrak{G}L\mathfrak{G}$. Так как $(\mathfrak{H} : \mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 2$, то, следовательно,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}L\mathfrak{G}. \tag{4}$$

Если, таким образом, разложить $\mathfrak{H}$ по модулю $\mathfrak{G}$ на n различных комплексов

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + P\mathfrak{G} + Q\mathfrak{G} + R\mathfrak{G} + \ldots,$$

то в $\mathfrak{G}$ имеется такой элемент G, что $G(P\mathfrak{G}) = Q\mathfrak{G}$.

Наконец, найденное условие можно выразить также следующим образом. Если $\mathfrak{D}$ — общий наибольший делитель всех подгрупп группы $\mathfrak{H}$, сопряженных с $\mathfrak{G}$, то $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{D}}$ можно всегда представить, как транзитивную группу перестановок n символов таким образом, что подгруппа $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ образуется всеми перестановками, которые не изменяют некоторого определенного символа. Поставленное выше условие заключается в том, что эта группа перестановок дважды транзитивна[50]. Если разложить перестановку, соответствующую элементу R, на ее циклические множители, то по (10), § 1, $1+\chi(R)$ равно числу циклов первой степени или равно числу символов, которые не изменяются данной перестановкой[51].

Что условие (3) также достаточно, следует из формулы (16), § 1, по которой $\sum r_\lambda^2 = 2$. Так как $r_0 = 1$, то, следовательно, одно и только одно число $r_\nu = 1$, а каждое из остальных $l-2$ чисел $r_\lambda = 0$. Если при этом $\chi^{(\nu)} = \chi$, то по (9), § 1,

$$\chi_\rho^{(0)} + \chi_\rho^{(\nu)} = \frac{hg_\rho}{gh_\rho}, \quad \chi_\rho = \frac{hg_\rho}{gh_\rho} - 1.$$

Можно также и прямо доказать, что при условии (4) величины χ_ρ удовлетворяют уравнениям, которые служат для вычисления характера. Из элементов ρ-ого класса $h_\rho - g_\rho$ не содержатся в $\mathfrak{G}$. Из этих $h_\rho - g_\rho$ элементов находится в каждом из $n-1$ комплексов $P\mathfrak{G}$, $Q\mathfrak{G}$, $R\mathfrak{G}, \ldots$ одно и то же количество, т. е. $\frac{h_\rho - g_\rho}{n-1}$. Ибо пусть

$$PA, PB, PC, \ldots$$

элементы ρ-ого класса, которые принадлежат к комплексу $P\mathfrak{G}$, так что $A, B, C, \ldots$ элементы из $\mathfrak{G}$. Но в $\mathfrak{G}$ имеется такой элемент G, что $GP\mathfrak{G} = Q\mathfrak{G}$. В таком случае элементы

$$GPAG^{-1}, GPBG^{-1}, GPCG^{-1}, \ldots$$

различны между собой и сопряжены с вышеприведенными элементами, т. е. также содержатся в ρ-ом классе. Наконец, они принадлежат к комплексу $Q\mathfrak{G}$. Этот комплекс содержит поэтому не меньше элементов ρ-ого класса, чем $P\mathfrak{G}$, а так как и обратное этому имеет место, то каждый из $n-1$ комплексов $P\mathfrak{G}$, $Q\mathfrak{G}$, $R\mathfrak{G}, \ldots$ содержит одинаковое количество элементов ρ-ого класса.

Пусть теперь (α') и (β) — два каких-либо одинаковых или различных класса и пусть A — элемент из (α'), т. е. A^{-1} элемент из (α), а B — элемент из (β). Если A и B оба содержатся в $\mathfrak{G}$, то $A^{-1}B$ также содержится в $\mathfrak{G}$. Если же из этих двух элементов один содержится в $\mathfrak{G}$, а другой нет, то $A^{-1}B$ не содержится в $\mathfrak{G}$. Если оба элемента не содержатся в $\mathfrak{G}$, то $A^{-1}B$ будет содержаться в $\mathfrak{G}$ или нет, смотря по тому, принадлежат-ли

A и B оба к одному и тому же комплексу $P\mathfrak{G}$ (или $Q\mathfrak{G}$, или $R\mathfrak{G},\ldots$) или нет. Поэтому, если A пробегает h_α элементов из (α'), а B пробегает h_β элементов из (β), то из $h_\alpha h_\beta$ элементов $A^{-1}B$

$$g_\alpha g_\beta + (n-1)\frac{h_\alpha - g_\alpha}{n-1}\,\frac{h_\beta - g_\beta}{n-1}$$

элементов содержится в $\mathfrak{G}$.

Если C — элемент класса (γ), то $\frac{h_{\alpha\beta\gamma'}}{h_\gamma}$ из $h_\alpha h_\beta$ элементов $A^{-1}B$ равны C. Поэтому $\frac{h_{\alpha\beta\gamma'}}{h_\gamma} g_\gamma$ из них находится в классе (γ) и одновременно содержатся в группе $\mathfrak{G}$, и, следовательно, из этих $h_\alpha h_\beta$ элементов

$$\sum_\gamma \frac{h_{\alpha\beta\gamma'}}{h_\gamma} g_\gamma = g_\alpha g_\beta + \frac{1}{n-1}(h_\alpha - g_\alpha)(h_\beta - g_\beta)$$

элементов принадлежат группе $\mathfrak{G}$. При помощи соотношения

$$\sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma'} = h_\alpha h_\beta$$

можно легко это уравнение преобразовать к виду

$$h_\alpha h_\beta \chi_\alpha \chi_\beta = f \sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma'} \chi_\gamma, \tag{5}$$

где χ_ρ определяется уравнением (1). Но из этих соотношений следует, в связи с (2), что величины χ_ρ образуют характер $\mathfrak{H}$.

Для группы степени $\frac{1}{2}p(p^2-1)$, которую я исследовал в *Gruppencharaktere*, §§ 9, 10 (стр. 52—64 этой книги) получается из формулы (1) характер p-ой степени, ибо эту группу можно представить, как дважды транзитивную группу степени $p+1$.

О КОМПОЗИЦИИ ХАРАКТЕРОВ ГРУППЫ [52)]

(Über die Composition der Charaktere einer Gruppe. Sitzungsberichte der Berl. Ak., 1899, S. 330—339)

Для того, чтобы облегчить вычисление характеров группы, я вывел в моей последней работе (Sitzungsberichte, 1898, стр. 128—142 этой книги) соотношения между характерами группы и характерами ее подгрупп. Другой метод, служащий для той же цели, вытекает из теоремы, которую я намереваюсь изложить в этой работе. По этой теореме можно произведение двух характеров группы представить, как линейное соединение ее характеров с положительными целыми коэффициентами. Эти коэффициенты, которые я обозначаю через $f_{\varkappa\lambda\mu}$, имеют такие же свойства, как и числа $h_{\alpha\beta\gamma}$, которые я ввел в моей работе *Über Gruppencharaktere*

(Sitzungsberichte, 1896, — „О групповых характерах групп“, стр. 22—29 этой книги). Впрочем, мне не удалось исследовать, каково значение чисел $f_{\varkappa\lambda\mu}$ для данной группы. Но уже уверенность в том, что между характерами группы существуют соотношения данного рода, позволяет во многих случаях из одного или нескольких известных характеров вывести новые.

§ 1.

Из двух линейных подстановок

$$(a) \qquad u_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots f)$$

и

$$(a') \qquad u'_\gamma = \sum_\delta a'_{\gamma\delta} v'_\delta \qquad (\gamma, \delta = 1, 2, \ldots f')$$

можно вывести третью подстановку

$$(A) \qquad u_\alpha u'_\gamma = \sum_{\beta, \delta} a_{\alpha\beta} a'_{\gamma\delta} v_\beta v'_\delta,$$

если обозначить ff' произведений $u_\alpha u'_\gamma$, взятых в некоторой последовательности, через U_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots ff')$, а произведения $v_\alpha v'_\gamma$, взятые в той же последовательности, через V_λ. Если, по примеру Dedekind'а, назвать сумму диагональных элементов подстановки или матрицы ее *следом*, то след (A) равен произведению следов (a) и (a'). Таким же путем образуем из матриц (b) и (b') степеней f и f' матрицу (B) степени ff', а из матриц (c) и (c') — матрицу (C). Если теперь $(c) = (a)(b)$ и $(c') = (a')(b')$, то также $(C) = (A)(B)$, что можно непосредственно усмотреть из вышеуказанного составления (A) из (a) и (a').

Пусть Φ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots k-1)$ k простых множителей детерминанта группы, $\mathfrak{H}$ а $\chi^{(\nu)}$ — их характеры. Пусть в примитивном представлении группы $\mathfrak{H}$ через линейные подстановки, принадлежащем к $\Phi_\varkappa$, элементам $A, B, C, \ldots$ из $\mathfrak{H}$ соответствуют матрицы (a), (b), $(c), \ldots$, а в представлении, принадлежащем к Φ_λ, тем же элементам соответствуют матрицы (a'), (b'), (c'), ... Если в этом случае $AB = C$, то и $(a)(b) = (c)$, и $(a')(b') = (c')$ и, следовательно, также и $(A)(B) = (C)$. Таким образом, $(A)x_A + (B)x_B + (C)x_C + \ldots$ — матрица, принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$; ее детерминант:

$$(1) \qquad \prod_\mu \Phi_{\mu'}^{f_{\varkappa\lambda\mu}}$$

где $f_{\varkappa\lambda\mu}$ — положительное целое число или нуль, а через $\Phi_{\mu'}$ мы обозначили сопряженную с Φ_μ комплексную простую функцию.

Так как след (a) равен $\chi^{(\varkappa)}(A)$, а след (a') равен $\chi^{(\lambda)}(A)$, то след (A) равен $\chi^{(\varkappa)}(A)\chi^{(\lambda)}(A)$. Но из формулы (1) получаем для этого следа выражение:

$$\chi^{(\varkappa)}(A)\chi^{(\lambda)}(A) = \sum_{\mu} f_{\varkappa\lambda\mu}\chi^{(\mu')}(A) = \sum_{\mu} f_{\varkappa\lambda\mu}\chi^{(\mu)}(A^{-1}),$$

или также, поскольку μ' пробегает одновременно с μ значения $0, 1, \ldots k-1$,

(2) $$\chi^{(\varkappa)}(R)\chi^{(\lambda)}(R) = \sum_{\mu} f_{\varkappa\lambda\mu'}\chi^{(\mu)}(R), \quad \chi_{\rho}^{(\varkappa)}\chi_{\rho}^{(\lambda)} = \sum_{\mu} f_{\varkappa\lambda\mu'}\chi_{\rho}^{(\mu)}.$$

Эта формула содержит правила, по которым производится *композиция* характеров. Если положить

(3) $$hf_{\varkappa\varkappa'} = \sum_{R}\chi^{(\varkappa)}(R)\chi^{(\varkappa')}(R) = h, \quad hf_{\varkappa\lambda} = \sum_{R}\chi^{(\varkappa)}(R)\chi^{(\lambda)}(R) = 0$$

(где λ отлично от $\varkappa'$), то при помощи этих соотношений получается [53])

(4) $$hf_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{R}\chi^{(\varkappa)}(R)\chi^{(\lambda)}(R)\chi^{(\mu)}(R),$$

или, если ρ пробегает k классов сопряженных элементов,

(5) $$hf_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\rho} h_{\rho}\chi_{\rho}^{(\varkappa)}\chi_{\rho}^{(\lambda)}\chi_{\rho}^{(\mu)}.$$

Следовательно, $f_{\varkappa\lambda\mu}$ остается неизменным при всех перестановках индексов, а так как R^{-1} одновременно с R пробегает h элементов из $\mathfrak{H}$, то

(6) $$f_{\varkappa'\lambda'\mu'} = f_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Легко непосредственно выяснить, что правая часть уравнения (4) — целое число. Ибо эта сумма — целая функция с целыми коэффициентами от первообразного h-ого корня ϑ из единицы, и она не изменится, если заменить ϑ через какую-либо сопряженную величину ϑ^n, где n взаимно простое с h. Ибо для того, чтобы произвести замену ϑ через ϑ^n, достаточно только заменить в каждом члене суммы R через R^n (*Primfactoren* § 12, стр. 102 этой книги). При этом сумма остается неизменной, так как R^n пробегает одновременно с Rh элементов из $\mathfrak{H}$. Но этим путем нельзя усмотреть, что это целое число положительно, а также, что оно делится на h.

Так как $\chi^{(\varkappa)}(E) = f_{\varkappa} = f'_{\varkappa}$ — степень $\Phi_{\varkappa}$, то из (2) следует

(7) $$f_{\varkappa} f_{\lambda} = \sum_{\mu} f_{\varkappa\lambda\mu} f_{\mu}.$$

Следовательно,

(8) $$f_{\varkappa\lambda\mu} \leqq \frac{f_{\varkappa} f_{\lambda}}{f_{\mu}},$$

где за f_{μ} можно взять наибольшее из трех чисел $f_{\varkappa}$, f_{λ}, f_{μ}, и $f_{\varkappa\lambda\mu} \leqq f_{\varkappa}$.

Если положить

$$(9) \qquad \sum_{\rho} f_{\varkappa\lambda\rho'}\,,\ f_{\rho\mu\nu} = f_{\varkappa\lambda\mu\nu}\,,$$

то

$$h^2 f_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \sum_{R,\,S} \chi^{(\varkappa)}(R)\,\chi^{(\lambda)}(R)\,\chi^{(\mu)}(S)\,\chi^{(\nu)}(S)\left(\sum_{\rho} \chi^{(\rho')}(R)\,\chi^{(\rho)}(S)\right).$$

Но

$$\sum_{\rho} \chi^{(\rho')}(R)\,\chi^{(\rho)}(S) = 0\,,$$

кроме случая, когда S сопряжено с R; а в этом случае такая сумма равна $\frac{h}{h_R}$. Если R дано, то последний случай имеет место для h_R различных значений S, для которых $\chi(S) = \chi(R)$. Следовательно,

$$(10) \qquad hf_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \sum_{R} \chi^{(\varkappa)}(R)\,\chi^{(\lambda)}(R)\,\chi^{(\mu)}(R)\,\chi^{(\nu)}(R)\,.$$

Поэтому также и это число остается неизменным при всяком перемещении индексов, чего нельзя усмотреть из формулы (9). Подобным же образом можно определить символ $f_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ для любого количества индексов, но не для единственного индекса, в каковом случае $f_\varkappa$ означает степень $\Phi_\varkappa$. Как уже выше замечено, $f_{\varkappa\varkappa'} = 1$ и $f_{\varkappa\lambda} = 0$, если $\chi_\varkappa$ и χ_λ не обратные друг другу характеры. Далее, $f_{\varkappa\lambda 0} = f_{\varkappa\lambda}$, $f_{\varkappa\lambda\mu 0} = f_{\varkappa\lambda\mu}$.

Если $\chi_\varkappa$ характер первой степени, т. е. $f_\varkappa = 1$, то по (8) $f_{\varkappa\lambda\mu}$ не больше, чем $\frac{f_\lambda}{f_\mu}$ или $\frac{f_\mu}{f_\lambda}$, т. е. равно нулю. Только если $f_\lambda = f_\mu$, то может быть $f_{\varkappa\lambda\mu} = 1$. Согласно (7) $f_\lambda = \sum_{\mu} f_{\varkappa\lambda\mu} f_\mu$, и, следовательно, последний случай при данном λ должен иметь место для одного и только для одного значения μ. Если, таким образом, $f_\varkappa = 1$, то для каждого значения λ из k чисел $f_{\varkappa\lambda\mu}$ одно число равно 1, а остальные $k-1$ чисел равны нулю; и если $f_{\varkappa\lambda\mu} = 1$, то $f_\lambda = f_\mu$. Следовательно, произведение характера f-ой степени $\chi^{(\lambda)}(R)$ и характера первой степени $\chi^{(\varkappa)}(R)$ является характером f-ой степени $\chi^{(\mu)}(R) = \chi^{(\varkappa)}(R)\,\chi^{(\lambda)}(R)$, как я уже показал другим путем в *Primfactoren*, § 3 (стр. 72 этой книги). Формулу (2) следует рассматривать, как обобщение этой теоремы.

При помощи формулы

$$(11) \qquad \sum_{\varkappa} \chi^{(\varkappa')}(R)\,\chi^{(\varkappa)}(R) = \frac{h}{h_R}$$

легко получается

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum f_{\varkappa\lambda\lambda'} = \sum_{\rho} \chi_\rho^{(\mu)}, \quad \sum_{\mu} f_{\varkappa\lambda\mu\mu'} = \sum_{\rho} \chi_\rho^{(\varkappa)}\,\chi_\rho^{(\lambda)}\,, \\ &\qquad \sum_{\nu} f_{\varkappa\lambda\mu\nu\nu'} = \sum_{\rho} \chi_\rho^{(\varkappa)}\,\chi_\rho^{(\lambda)}\,\chi_\rho^{(\mu)}\,. \end{aligned}\right.$$

$$\sum_{\lambda,\mu} f_{\lambda\lambda',\mu\mu'} = \sum_{\rho}\Bigl(\sum_{\lambda}\chi_{\rho}^{(\lambda')}\chi_{\rho}^{(\lambda)}\Bigr) = \sum_{\rho}\frac{h}{h_\rho},$$

и, следовательно, по (9) и (6)

$$\sum_{\varkappa,\lambda,\mu} f^2_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\rho}\frac{h}{h_\rho}. \tag{13}$$

Таким образом, числа $f_{\varkappa\lambda\mu}$ имеют сравнительно малые значения.

Что суммы (12) — рациональные целые числа, можно усмотреть непосредственно, подобно тому, как это выше было показано для суммы (5). Как показывают формулы (12), эти числа — положительны и их можно выразить через числа $f_{\varkappa\lambda\mu}$.

Введенные здесь числа $f_{\varkappa\lambda\mu}$ имеют много общих свойств с ранее использованными числами $h_{\alpha\beta\gamma}$. Например, имеем детерминант k-ой степени:

$$\Bigl|\Bigl(\sum_{\mu} f_{\varkappa\lambda',\mu}x_\mu\Bigr) - f_{\varkappa\lambda'}u\Bigr| = \prod_{\lambda}\Bigl(\Bigl(\sum_{\varkappa}\chi_\lambda^{(\varkappa)}x_\varkappa\Bigr) - u\Bigr) \tag{14}$$

$$(\varkappa,\ \lambda = 0,\ 1, \ldots k-1).$$

Его индексы $\varkappa$, λ, μ относятся к k простым множителям группового детерминанта, в то время, как индексы α, β, γ относятся к k классам сопряженных элементов, на которые распадаются h элементов из $\mathfrak{H}$. Выведенные здесь формулы можно также обобщить, если присоединить, как в моей последней работе, к характерам $\mathfrak{H}$ характеры какой-нибудь ее подгруппы.

§ 2.

Из двух линейных подстановок (a) и (a') от f и f' переменных мы образовали линейную подстановку (A) от ff' переменных. Корнями ее характеристического уравнения являются ff' произведений, получаемых при умножении каждого из f корней характеристического уравнения (a) на каждый из f' корней характеристического уравнения (a'). Это легко следует из замечания, что, если $(c)^{-1}(a)(c) = (b)$ и $(c')^{-1}(a')(c') = (b')$, то также должно быть $(C)^{-1}(A)(C) = (B)$.

Если матрицы (a), (b), $(c), \ldots$ образуют примитивное представление $\mathfrak{H}$, соответствующее простой функции $\Phi(x)$, то получим характеристическую функцию для (a), положив в $\Phi(x+\varepsilon u)$ $x_A = -1$, а остальные переменные $x_R = 0$. Если эта характеристическая функция равна

$$F_A(u) = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_f),$$

то $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_f$ m-ые корни из единицы, если m — порядок элемента A (*Primfactoren*, § 12, стр.102—106 этой книги). Их сумма равна

$$\chi(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_f. \tag{1}$$

Если $\Phi = \Phi_\varkappa$, то обозначим $F_A(u)$ через $F_A^{(\varkappa)}(u)$ или через $F_\alpha^{(\varkappa)}(u)$, если A принадлежит к α-му классу. Из формулы (2), § 1, в связи с уравнением (1) вытекает следующая теорема:

Корни уравнения

$$\prod_\mu \left(F_\alpha^{(\mu)}(u)\right)^{f_{\varkappa\lambda\mu'}} \tag{2}$$

степени $f_\varkappa f_\lambda$ [54] *получаются путем умножения каждого из* $f_\varkappa$ *корней уравнения* $F_\alpha^{(\varkappa)}(u) = 0$ *на каждый из* f_λ *корней уравнения* $F_\alpha^{(\lambda)}(u) = 0$.

Если разложить логарифмическую производную выражения (2) по убывающим степеням u, то коэффициент при u^{-n-1} равен

$$\sum_\mu f_{\varkappa\lambda\mu'}\chi^{(\mu)}(A^n) = \chi^{(\varkappa)}(A^n)\,\chi^{(\lambda)}(A^n)\,.$$

Отсюда видно, что соотношение, выраженное в этой теореме, является не более общим, чем формула (2), § 1.

В функции

$$(-1)^f F_\alpha^{(\varkappa)}(-u) = (u+\alpha_1)(u+\alpha_2)\ldots(u+\alpha_f) \tag{3}$$

коэффициент при u^{f-1} равен $\chi_\alpha^{(\varkappa)}$. Постоянный член — характер первой степени (*Primfactoren*, § 12). Вообще, коэффициент при u^{f-n}, для которого я применяю обозначение, введенное в *Primfactoren*, § 4 (8), равен выражению вида

$$\vartheta_n(A) = \frac{1}{n!}\chi(A,\ A,\ldots A) = \sum_\lambda s_{\varkappa\lambda}\,\chi^{(\lambda)}(A)\,, \tag{4}$$

где величины $s_{\varkappa\lambda}$ положительные целые числа, независимые от α.

Чтобы доказать это, образуем из подстановки (a) n различных подстановок

$$u_\alpha^{(\nu)} = \sum_\beta a_{\alpha\beta}\, v_\beta^{(\nu)} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ldots f), \tag{5}$$

где

$$u_1^{(\nu)},\ u_2^{(\nu)},\ldots u_f^{(\nu)} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ldots n)$$

nf независимых переменных. $\binom{f}{n} = g$ детерминантов n-ой степени, которые можно образовать из этих переменных, обозначим в какой-либо последовательности через $U_1, U_2,\ldots U_g$, а детерминанты, образованные аналогичным путем из переменных

$$v_1^{(\nu)},\ v_2^{(\nu)},\ldots v_f^{(\nu)} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ldots n),$$

через $V_1, V_2,\ldots V_g$. По уравнениям (5) $U_1, U_2,\ldots U_g$ будут линейными функциями от $V_1, V_2,\ldots V_g$, коэффициенты которых — g^2 миноров n-ой степени матрицы $a_{\alpha\beta}$. Полученную таким образом линейную подстановку обозначим теперь через (A). Корни ее характеристического уравнения — произведения каждых n из корней $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_f$, а ее след — сумма главных миноров n-ой степени матрицы (a), т. е. равен выражению $\vartheta_n(A)$. Если таким же образом матрицам f-ой степени (b), (c), ... соответствуют матрицы g-ой степени (B), (C), ..., то при $(c) = (a)(b)$ также $(C) = (A)(B)$. Следовательно, $(A)x_A + (B)x_B + (C)x_C + \ldots$ матрица, принадлежащая к $\mathfrak{H}$. Эта матрица была также рассмотрена Molien'ом в работе *Ueber die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen*, § 5 („Об инвариантах линейных групп подстановок". Sitzungsberichte, 1897). Ее детерминант — выражение вида $\prod\limits_{\lambda} \Phi_{\lambda}^{s_{\varkappa\lambda}}$, из которого получается соотношение (4).

Далее, корни уравнения

$$\prod_{\lambda} (F_{\alpha}^{(\lambda)}(u))^{s_{\varkappa\lambda}} = 0$$

степени $\binom{f_\varkappa}{n}$ произведения каждых n из $f_\varkappa$ корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ уравнения $F_{\alpha}^{(\varkappa)}(u) = 0$.

Выражения (4) имеют вид

(6) $\quad 2\vartheta_2(R) = \chi(R)^2 - \chi(R^2), \quad 6\vartheta_3(R) = \chi(R)^3 - 3\chi(R)\chi(R^2) + 2\chi(R^3)$

или в общем виде:

(7) $$\vartheta_n(R) = \sum (-1)^{\beta+\delta+\ldots} \frac{\chi(R)^\alpha}{1^\alpha\,\alpha!} \frac{\chi(R^2)^\beta}{2^\beta\,\beta!} \frac{\chi(R^3)^\gamma}{3^\gamma\,\gamma!} \frac{\chi(R^4)^\delta}{4^\delta\,\delta!} \cdots,$$

где сумма распространяется на все положительные решения уравнения

(8) $$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \ldots = n.$$

Как показал Molien (вышеприв. работа, § 2), для коэффициента $\zeta_n(R)$ при u^{-f-n} в разложении функции $\frac{1}{F_{\alpha}^{(\varkappa)}(u)}$ имеет место формула, аналогичная формуле (4). Этот коэффициент равен сумме:

(9) $$\zeta_n(R) = \sum \frac{\chi(R)^\alpha}{1^\alpha\,\alpha!} \frac{\chi(R^2)^\beta}{2^\beta\,\beta!} \frac{\chi(R^3)^\gamma}{3^\gamma\,\gamma!} \frac{\chi(R^4)^\delta}{4^\delta\,\delta!} \cdots,$$

распространенной на все положительные решения уравнения (8).

§ 3.

В заключение, я сообщу еще некоторые примеры групп, характеры которых я вычислил при помощи методов, изложенных здесь и в моей последней работе.

Элементы симметрической группы степени $n = 6$ представляют собой 720 перестановок 6 символов a, b, c, d, e, f, а элементы полусимметрической группы — 360 четных перестановок этих символов. В первом столбце прилагаемой таблицы каждый класс сопряженных элементов представлен перестановкой, разложенной на свои циклы. Путем композиции с характером первой степени $\chi^{(1)}$ из характеров $\chi^{(2)}$, $\chi^{(4)}$, $\chi^{(6)}$, $\chi^{(8)}$ получаются характеры $\chi^{(3)}$, $\chi^{(5)}$, $\chi^{(7)}$, $\chi^{(9)}$, в то время как $\chi^{(10)}$ остается неизменным. Особенного внимания заслуживает характер $\chi = \chi^{(2)}$. Если λ символов перестановки R не переставляются (если R содержит λ циклов первой степени), то $\chi(R) = \lambda - 1$.

Согласно выводам моей последней работы (§ 5, стр. 128—142 этой книги) можно следующим образом выразить правило для вычисления χ_ρ: перестановки из $\mathfrak{H}$, которые оставляют неизменным определенный символ, образуют группу $\mathfrak{G}$ степени $g = \frac{h}{n}$. Если ρ-ый класс содержит h_ρ элементов и если из них g_ρ содержатся в $\mathfrak{G}$, то

$$\chi_\rho = \frac{hg_\rho}{gh_\rho} - 1. \tag{1}$$

Из той же формулы определяется характер $\chi^{(6)}$, если за $\mathfrak{G}$ взять содержащуюся в $\mathfrak{H}$ группу порядка $g = 72$. Эта импримитивная группа получается, если $n = 6$ символов распределить по $s = 2$ системам по $r = 3$ символа в каждой, abc, def, и затем переставлять всеми возможными способами s систем и r символов в каждой системе. Порядок этой группы есть: $g = (r!)^s s! = (3!)^2\, 2! = 72$.

Наконец, посредством формулы (1) можно вычислить также характер $\chi^{(4)}$, если взять за $\mathfrak{G}$ трижды транзитивную группу порядка 120, изоморфную симметрической группе степени 5. Вместо этого можно вывести $\chi^{(4)}$ из $\chi^{(2)}$ при помощи известного изоморфизма $\mathfrak{H}$ в себе, который перемещает между собою классы 1 и 7, 4 и 10, 5 и 9 в то время, как остальные классы остаются неизменными. Этот изоморфизм переводит также $\chi^{(8)}$ в $\chi^{(9)} = \chi^{(8)}\chi^{(1)}$.

Симметрическая группа 6-й степени

$h = 720$

		$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$	$\chi^{(6)}$	$\chi^{(7)}$	$\chi^{(8)}$	$\chi^{(9)}$	$\chi^{(10)}$	h_α
	χ_0	1	1	5	5	5	5	9	9	10	10	16	1
(ab)	χ_1	1	−1	3	−3	−1	1	3	−3	2	−2	0	15
$(ab)(cd)$	χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	−2	−2	0	45
$(abcd)$	χ_3	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	0	0	0	90
(abc)	χ_4	1	1	2	2	−1	−1	0	0	1	1	−2	40
$(abc)(de)$	χ_5	1	−1	0	0	−1	1	0	0	−1	1	0	120
$(abcde)$	χ_6	1	1	0	0	0	0	−1	−1	0	0	1	144
$(ab)(cd)(ef)$	χ_7	1	−1	−1	1	3	−3	3	−3	−2	2	0	15
$(abcd)(ef)$	χ_8	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	0	0	0	90
$(abcdef)$	χ_9	1	−1	−1	1	0	0	0	0	1	−1	0	120
$(abc)(def)$	χ_{10}	1	1	−1	−1	2	2	0	0	1	1	−2	40

$h = 360$

		$\chi^{(0)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(6)}$	$\chi^{(8)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(\overline{10})}$	h_χ
	χ_0	1	5	5	9	10	8	8	1
$(ab)(cd)$	χ_2	1	1	1	1	-2	0	0	45
(abc)	χ_4	1	2	-1	0	1	-1	-1	40
$(abcde)$	χ_6	1	0	0	-1	0	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	72
$(acebd)$	$\chi_{\overline{6}}$	1	0	0	-1	0	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	72
$(abcd)(ef)$	χ_8	1	-1	-1	1	0	0	0	90
$(abc)(def)$	χ_{10}	1	-1	2	0	1	-1	-1	40

§ 4.

Бинарные [55] группы тетраэдра, октаэдра и икосаэдра имеют порядки $h = 24$, 48 и 120. Классы элементов этих групп по большей части уже определены порядками их элементов, находящимися в первом столбце каждой таблицы. Только там, где порядок недостаточен для определения класса, в этом столбце находится элемент класса, причем в группе тетраэдра (октаэдра, икосаэдра) знак $R\,(S,\,T)$ означает любой элемент порядка 6 (8, 10). Класс (4) группы октаэдра содержит каждый элемент порядка 4, который не может быть представлен, как квадрат элемента порядка 8; остальные элементы порядка 4 образуют класс (5), характеризуемый символом S^2.

Каждая из этих групп содержит инвариантную подгруппу $\mathfrak{F} = E + F$ порядка 2. Элемент F порядка 2 переместим с каждым элементом группы и образует сам по себе класс (1). Группа $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{F}}$ есть группа порядка 12 (24, 60), характеры которой я вычислил в *Gruppencharaktere*, § 8 (стр. 49—52 этой книги). Из этих таблиц можно непосредственно находить значения характеров для которых $\chi_0 = \chi_1$ и которые принадлежат к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{F}}$. Для этих характеров вообще $\chi(RF) = \chi(R)$, для всех же остальных $\chi(RF) = -\chi(R)$.

Любопытнейшее свойство этих групп состоит в том, что они имеют собственные характеры второй степени. (В таблице группы октаэдра, *Gruppencharaktere*, § 8, характер $\chi^{(3)}$ степени $f = 2$ принадлежит к группе $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$, где $\mathfrak{G}$ — инвариантная подгруппа порядка 4 для $\mathfrak{H}$). Их значения получаются непосредственно из известных представлений этих групп через бинарные линейные подстановки при помощи формулы (5) в *Darstellung*, § 4 (стр. 117)

Тетраэдр

$h = 24$

		$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$	$\chi^{(6)}$	h_α
1	χ_0	1	1	1	3	2	2	2	1
2	χ_1	1	1	1	3	-2	-2	-2	1
4	χ_2	1	1	1	-1	0	0	0	6
R^2	χ_3	1	ρ	ρ^2	0	-1	$-\rho$	$-\rho^2$	4
R^4	χ_4	1	ρ^2	ρ	0	-1	$-\rho^2$	$-\rho$	4
R^5	χ_5	1	ρ	ρ^2	0	1	ρ	ρ^2	4
R	χ_6	1	ρ^2	ρ	0	1	ρ^2	ρ	4

Октаэдр

$h = 48$

		$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$	$\chi^{(6)}$	$\chi^{(7)}$	h_γ
1	χ_0	1	1	3	3	2	2	2	4	1
2	χ_1	1	1	3	3	2	-2	-2	-4	1
3	χ_2	1	1	0	0	-1	-1	-1	1	8
6	χ_3	1	1	0	0	-1	1	1	-1	8
4	χ_4	1	-1	1	-1	0	0	0	0	12
S^2	χ_5	1	1	-1	-1	2	0	0	0	6
S^3	χ_6	1	-1	-1	1	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	6
S	χ_7	1	-1	-1	1	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	6

этой книги). Для группы октаэдра имеется как раз два неэквивалентных представления этого рода, отличающихся, однако, только знаком при $\sqrt{2}$ $\left(\text{так как характер } \chi^{(4)} \text{ принадлежит к группе } \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{F}}\right)$.

То же имеет место и для группы икосаэдра. Для группы же тетраэдра имеется три неэквивалентных представления. Их характеры $\chi^{(4)}$, $\chi^{(5)}$ и $\chi^{(6)}$ получаются из одного из них путем

Икосаэдр

$h = 120$

		$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$	$\chi^{(6)}$	$\chi^{(7)}$	$\chi^{(8)}$	h_α
1	χ_0	1	5	4	3	3	2	2	4	6	1
2	χ_1	1	5	4	3	3	-2	-2	-4	-6	1
4	χ_2	1	1	0	-1	-1	0	0	0	0	30
3	χ_3	1	-1	1	0	0	-1	-1	1	0	20
6	χ_4	1	-1	1	0	0	1	1	-1	0	20
T^4	χ_5	1	0	-1	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$	-1	1	12
T^2	χ_6	1	0	-1	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$	-1	1	12
T^3	χ_7	1	0	-1	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	1	-1	12
T	χ_8	1	0	-1	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	1	-1	12

композиции с тремя характерами первой степени. Этим путем определяются все характеры этих трех групп без использования чисел $h_{\alpha\beta\gamma}$. Ибо недостающие еще характеры $\chi^{(7)}$ группы октаэдра и $\chi^{(7)}$ и $\chi^{(8)}$ группы икосаэдра получаются из имеющихся между характерами квадратных соотношений.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ПОДСТАНОВКИ. II [56]

(Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. II. Sitzungsberichte der Berl. Ak., 1899, S. 482—500.

Сопряжем с h различными элементами $A, B, C, \ldots$ конечной группы $\mathfrak{H}$ h однородных линейных подстановок $a, b, c, \ldots$ n переменных так, чтобы всегда при $AB = C$ было бы также и $ab = c$. В таком случае эти подстановки образуют группу, которая голоэдрически или мероэдрически изоморфна $\mathfrak{H}$, или, иначе выражаясь, образует представление группы $\mathfrak{H}$. Под знаками $a, b, c, \ldots$ можно также подразумевать матрицы подстановок, а под ab — матрицу, составленную из a и b.

Из данного представления можно вывести новое, если ввести в подстановки другие переменные. Это сводится к тому, что матрицы $a, b, c, \ldots$ заменяются через $p^{-1}ap$, $p^{-1}bp$, $p^{-1}cp, \ldots$, где p — любая матрица с отличным от нуля детерминантом. Два таких представления я назвал в первой части этой работы (Sitzungsberichte, 1897, в дальнейшем цитируется, как *D.*, § 2 стр. 110 этой книги) эквивалентными.

Если для той же группы $\mathfrak{H}$ известно второе представление через матрицы a', b', c', ... степени n', то матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}, \ldots$$

образуют новое представление степени $n+n'$. При этом также не исключена возможность, что второе представление будет тождественно или эквивалентно первому. Тем же путем можно из нескольких известных, одинаковых или различных представлений вывести новое представление. Эта новая группа подстановок может иногда оказаться и голоэдрически изоморфной группе $\mathfrak{H}$, несмотря на то, что данные представления ей только мероэдрически изоморфны; это и является причиной того, что при исследовании всех представлений данной группы $\mathfrak{H}$ нельзя исключить и тех, которые в действительности представляют только мероэдрически изоморфную с $\mathfrak{H}$ группу.

Всякое представление, которое вышеуказанным образом получается из нескольких представлений, я называю *распадающимся* или *разложимым*, а всякое представление, которое эквивалентно распадающемуся, — *импримитивным* или *приводимым*. Если же представление не эквивалентно никакому разложимому, то его я называю *примитивным* или *неприводимым* (ср. прежнее предварительное определение D. § 5).

Если не рассматривать эквивалентные представления, как различные, то имеется только конечное число различных примитивных представлений группы $\mathfrak{H}$ через линейные подстановки или их матрицы. Это число k равно числу классов сопряженных элементов, на которые распадаются элементы из $\mathfrak{H}$. Каждое импримитивное представление эквивалентно другому, которое целиком распадается на примитивные представления, причем каждое отдельное из k примитивных представлений может входить в данное и несколько раз. При этом такое разложение возможно только одним образом.

Пусть x_A, x_B, x_C, ... h независимых переменных и пусть

$$\Theta = |x_{PQ^{-1}}| = \Phi^f \Phi'^{f'} \Phi''^{f''} \ldots$$

— детерминант группы $\mathfrak{H}$, а Φ, Φ', Φ'', ... его различные простые множители. Если матрицы n-ой степени a, b, c,... образуют представление $\mathfrak{H}$, то я называю (D. § 2) матрицу n-ой степени $ax_A+bx_B+cx_C+\ldots$ матрицей, соответствующей представлению $\mathfrak{H}$, или матрицей, принадлежащей к группе $\mathfrak{H}$. Ее n^2 элементов — линейные функции от h переменных x_A, x_B, x_C, ..., а ее детерминант

$$|ax_A+bx_B+cx_C+\ldots| = \Phi^s \Phi'^{s'} \Phi''^{s''} \ldots$$

— произведение простых множителей группового детерминанта. Обратно, каждому такому произведению соответствует одно и только одно представление $\mathfrak{H}$, т. е. два представления, у которых соответствующие матрицы имеют одинаковые детерминанты, — эквиваленты. Каждому из k простых множителей Φ группового детерминанта Θ соответствует одно из k примитивных представлений, которое я обозначаю через $[\Phi]$. Произведению $\Phi^s \Phi'^{s'} \ldots$ соответствует представление, которое распадается на s представлений $[\Phi]$, s' представлений $[\Phi']$, ... Исследуя детерминант матрицы, соответствующей данному представлению, можно, таким образом, узнать, примитивно ли это представление или нет, и в последнем случае — на какие примитивные представления оно может быть разложено.

Изложенные здесь исключительные по своей простоте результаты образуют заключительную часть моих общих исследований о групповом детерминанте. Иным путем получил их Molien в работе, цитированной в D. § 4.

В заключение я рассматриваю подробнее нахождение примитивных представлений. Чтобы получить одно из них, нужно только найти решение определенной системы линейных и квадратных уравнений. Поэтому я называю каждое такое решение **системой значений, определяющей представлением.**

§ 1.

Пусть в матрице f-ой степени u элементы

$$u_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots f)$$

f^2 друг от друга независимых переменных. Пусть $v_{\alpha\beta}$ f других переменных и пусть

$$w_{\alpha\beta} = u_{\alpha 1} v_{1\beta} + u_{\alpha 2} v_{2\beta} + \ldots + u_{\alpha f} v_{f\beta}.$$

Если матрица u переходит в матрицу v или в матрицу w при замене $u_{\alpha\beta}$ через $v_{\alpha\beta}$ или $w_{\alpha\beta}$, то $w = uv$.

Пусть n^2 элементов $x_{\varkappa\lambda}$ матрицы X n-ой степени — линейные функции f^2 переменных $u_{\alpha\beta}$. Пусть матрица X переходит в Y или Z, если заменить $u_{\alpha\beta}$ через $v_{\alpha\beta}$ или $w_{\alpha\beta}$. Исследуем, каковы должны быть эти линейные функции, чтобы было $Z = XY$, если $w = uv$. Я ограничусь при этом только случаем, когда детерминант $|X|$ отличен от нуля.

Если матрица X обладает этим свойством, то им обладает также и PXP^{-1}, где P — матрица с n^2 постоянными элементами, и $|P|$ отличен от нуля. Если, далее, 0 матрица f-ой степени, все элементы которой равны нулю, и если $n = fg$ кратное f, то

$$U = \begin{matrix} u & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & u & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & u & \ldots \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

имеет требуемое свойство, а также и $P^{-1}UP=X$. Но я хочу показать обратное: если X — любая матрица рассматриваемого рода, то $n=fg$ должно быть кратным f и можно выбрать постоянную матрицу P так, чтобы было $PXP^{-1}=U$.

Если B — главная матрица степени g, то можно матрицу U степени fg путем определенной перестановки строк и такой же перестановки столбцов привести к форме:

$$V=\begin{pmatrix} u_{11}B & u_{12}B & \dots & u_{1f}B \\ u_{21}B & u_{22}B & \dots & u_{2f}B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{f1}B & u_{f2}B & \dots & u_{ff}B \end{pmatrix}$$

Перестановка столбцов производится путем композиции U с матрицей Q, у которой в каждой строке и в каждом столбце один из элементов равен 1, а остальные равны 0. Если произвести в UQ такую же перестановку строк, то получим $Q'UQ$, где Q' — матрица, сопряженная с Q. Но так как Q — ортогональная матрица, то $Q'=Q^{-1}$, т. е. $V=Q^{-1}UQ$.

Так как элементы матрицы X — линейные функции от u_{11}, $u_{12}, \dots u_{ff}$, то можно положить $X=\sum A_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}$, где $A_{\alpha\beta}$ — постоянная матрица n-ой степени. Но должно быть $XY=Z$, т. е.

$$(\sum A_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta})(\sum A_{\gamma\delta}v_{\gamma\delta})=\sum A_{\alpha\gamma}w_{\alpha\gamma}=\sum A_{\alpha\gamma}u_{\alpha\beta}v_{\beta\gamma}.$$

Поэтому $A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta}=0$, если β отлична от γ, тогда как $A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}=A_{\alpha\gamma}$. Так как $A_{11}^2=A_{11}$, то

$$|A_{11}+rE|=r^{n-g_1}(1+r)^{g_1}.\,[57]$$

Если бы было $g_1=0$, то было бы и $A_{11}=0$ [58], т. е. также $A_{\alpha\beta}=A_{\alpha 1}A_{11}A_{1\beta}=0$. Поэтому $g_1>0$, и можно P определить так, чтобы $P^{-1}A_{11}P$ было матрицей, в которой $c_{11}=\dots=c_{g_1g_1}=1$, а все остальные элементы равны нулю [59]. Мы заменяем X через $P^{-1}XP$, т. е. предполагаем, что само A_{11} и есть эта матрица. Но $A_{11}A_{22}=A_{22}A_{11}=0$, и, следовательно, в A_{22} элементы первых g_1 строк и столбцов все равны нулю, так что A_{22} можно рассматривать и преобразовывать, как матрицу степени $n-g_1$. Следовательно, можно определить матрицу n-ой степени P, у которой элементы первых g_1 строк и столбцов совпадают с соответствующими элементами в A_{11}, так, чтобы в $P^{-1}A_{22}P$ было $c_{g_1+1,\,g_1+1}=\dots=c_{g_1+g_2,\,g_1+g_2}=1$, [60] а все остальные элементы были равны нулю. В таком случае в $A_{12}=A_{11}A_{12}A_{22}$ только те элементы могут быть отличны от нуля, которые стоят на пересечении строк с номерами $1, 2, \dots g_1$ и столбцов с номерами $g_1+1,\ g_1+2, \dots, g_1+g_2$. Проведя эти преобразования, получим:

$$A_{11}=\begin{matrix} B_{11} & N_{12} & N_{13} & \dots \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & \dots \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}, \qquad A_{12}=\begin{matrix} N_{11} & B_{12} & N_{13} & \dots \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & \dots \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix},$$

где $B_{\alpha\beta}$ — матрица с g_α строками и g_β столбцами, а $N_{\alpha\beta}$ — матрица такого же рода со всеми элементами, равными нулю. $B_{\alpha\alpha}$ — главная[61] матрица степени g_α. Из $A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}=A_{\alpha\gamma}$ следует, что $B_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}=B_{\alpha\gamma}$. Таким образом, $B_{12}B_{21}=B_{11}$. Если бы поэтому было $g_2<g_1$, то детерминант B_{11} обратился бы в нуль. Точно также из $B_{21}B_{12}=B_{22}$ следует, что $g_2\leqq g_1$. Следовательно, $g_1=g_2=g_3=\ldots=g$ и $n=fg$, ибо при $n>fg$ последние строки и столбцы в X состояли бы из нулей. Если B — главная матрица степени g, то $B_{\alpha\alpha}=B$ и $B_{\alpha\beta}B_{\beta\alpha}=B$. Следовательно, $B_{\alpha\beta}$ и $B_{\beta\alpha}$ обратные друг другу матрицы степени g, и их детерминанты отличны от нуля. Пусть N — матрица из g^2 равных нулю элементов. В этом случае детерминант матрицы n-ой степени

$$L=\begin{matrix} B_{11} & N & N & \ldots \\ N & B_{12} & N & \ldots \\ N & N & B_{13} & \ldots \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

отличен от нуля, и

$$L^{-1}=\begin{matrix} B_{11} & N & N & \ldots \\ N & B_{21} & N & \ldots \\ N & N & B_{31} & \ldots \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

Матрица $LA_{\alpha\beta}L^{-1}$ отличается от матрицы $A_{\alpha\beta}$ только тем, что вместо $B_{\alpha\beta}$ стоит $B_{1\alpha}B_{\alpha\beta}B_{\beta 1}=B_{11}=B$. Поэтому $LXL^{-1}=V$, и этим доказано высказанное выше утверждение.

§ 2.

Если $(x_{PQ^{-1}})$ матрица группы h-ого порядка $\mathfrak{H}$ и если

$$z_R=\sum x_P y_Q \qquad (PQ=R), \tag{1}$$

то $(z_{PQ^{-1}})=(x_{PQ^{-1}})(y_{PQ^{-1}})$. Пусть

$$X=(x_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa,\ \lambda=1,\ 2,\ \ldots n)$$

матрица n-ой степени, детерминант которой отличен от нуля и у которой n^2 элементов $x_{\varkappa\lambda}$ — линейные функции h переменных x_R. Пусть эта матрица переходит в Y или Z, если x_R заменить через y_R или z_R. Если в этом случае, согласно условию (1), $Z=XY$, то X называется **матрицей, принадлежащей к группе** $\mathfrak{H}$.

Пусть Φ, Φ', ... различные простые множители детерминанта Θ группы $\mathfrak{H}$ и пусть f, f', ... — их степени, $\chi(R)$, $\psi(R)$, ... их характеры, $\chi'(R)=\chi(R^{-1})$, $\psi'(R)=\psi(R^{-1})$, ... сопряженные характеры. В таком случае, по *Primfactoren*, § 8

$$\Phi\left(\varepsilon+u\frac{f}{h}\chi'\right)=(1+u)^f,\quad \Phi\left(\varepsilon+u\frac{f'}{h}\psi'\right)=1,\ \ldots \tag{2}$$

Если подставить $x_R=\frac{f}{h}\chi'(R)$, то пусть $X=A$, если $x_R=\frac{f'}{h}\psi'(R)$, то пусть $X=B$, и т. д. Тогда

$$\sum\frac{f}{h}\chi'(P)\frac{f}{h}\chi'(Q)=\frac{f}{h}\chi'(R),\quad \sum\frac{f}{h}\chi'(P)\frac{f'}{h}\psi'(Q)=0 \qquad (PQ=R),$$

и, следовательно, $A^2=A$, $B^2=B$, $AB=BA=0$. Так как

$$\sum\frac{f}{h}\chi'(P)x_Q=\sum x_P\frac{f}{h}\chi'(Q) \qquad (PQ=R),$$

то $A(B, C, \ldots)$ переместимо со всякой матрицей X. Так как, наконец,

$$\frac{f}{h}\chi'(R)+\frac{f'}{h}\psi'(R)+\ldots=\varepsilon_R,$$

если сумму распространить на все k характеров группы $\mathfrak{H}$, то

(3) $$A+B+C+\ldots=E.$$

Следовательно,

$$(E+uAX)(E+uBX)(E+uCX)\ldots=$$
$$=E+u(A+B+C+\ldots)X=E+uX.$$

Все остальные члены в разложении символического произведения по степеням u равны нулю, так как $AXBX=ABXX=0$. Следовательно, также

(4) $$|E+uAX|\,|E+uBX|\ldots=|E+uX|.$$

Но поскольку X — матрица, принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$, то этот детерминант будет произведением степеней простых функций $\Phi(\varepsilon+ux)$, $\Phi'(\varepsilon+ux)$, ... Поэтому также и

$$|E+uAX|=\Phi(\varepsilon+ux)^s\Phi'(\varepsilon+ux)^t\ldots$$

Но t должно быть равно нулю. Ибо, если подставить $x_R=\frac{f'}{h}\psi'(R)$, т. е. $X=B$, то получим $AX=AB=0$, — таким образом, детерминант в левой части предыдущей формулы будет равен 1. А в правой части: $\Phi'\left(\varepsilon+\frac{f'}{h}\psi'\right)=(1+u)^{f'}$. Следовательно,

(5) $$|E+uAX|=\Phi(\varepsilon+ux)^s,\quad |E+uBX|=\Phi'(\varepsilon+ux)^{s'},\ldots$$

и, таким образом, по (4)

(6) $$|X|=\Phi(x)^s\Phi'(x)^{s'}\ldots,$$

и

$$n=fs+f's'+\ldots$$

Если в уравнении (5) подставить $x_R=\dfrac{f}{h}\chi'(R)$, т. е. $X=A$, то получим

(7) $$|E+uA|=(1+u)^{fs}, \quad |uE-A|=(u-1)^{fs}u^{n-fs}.$$

Так как $A^2=A$, то элементарные делители этого детерминанта — все линейные. Следовательно, ранг A есть $r=fs$, и главные миноры r-ой степени для A не все равны нулю, так как их сумма равна единице. Если $s=0$, то $r=0$ и, следовательно, $A=0$. В сумму (3) поэтому действительно входят только матрицы $A, B, C, \ldots$, которые образованы из характеров χ тех простых функций Φ, которые являются делителями $|X|$. Если, например, $|X|$ есть некоторая степень Φ, то $A=E$. Пусть

(8) $$|a_{\varkappa\lambda}| \qquad (\varkappa, \lambda=\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r)$$

отличный от нуля главный минор r-ой степени матрицы A. Пусть $r'=f's'$ ранг B и пусть

$$|b_{\varkappa\lambda}| \qquad (\varkappa, \lambda=\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{r'})$$

отличный от нуля главный минор r'-ой степени матрицы B, и т. д.

Пусть M — матрица степени $n=r+r'+\ldots$, у которой n строк получаются из строки

$$a_{\lambda\alpha_1}, \ldots a_{\lambda\alpha_r}, b_{\lambda\beta_1}, \ldots b_{\lambda\beta_{r'}}, \ldots,$$

если положить $\lambda=1, 2, \ldots n$. Пусть также L' — матрица

$$a_{\alpha_1\varkappa}, \ldots a_{\alpha_r\varkappa}, b_{\beta_1\varkappa}, \ldots b_{\beta_{r'}\varkappa}, \ldots,$$

а L сопряженная с ней матрица. В таком случае я образую матрицу LXM. Если ρ и σ — два из индексов $1, 2, \ldots r$, то σ-й элемент ρ-й строки равен

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\alpha\varkappa}x_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\beta},$$

где $\alpha=\alpha_\rho$, $\beta=\alpha_\sigma$. Это элемент матрицы $AXA=XAA=XA=AX$, следовательно, он равен:

(9) $$\xi_{\alpha\beta}=\sum_\lambda a_{\alpha\lambda}x_{\lambda\beta}=\sum_\lambda x_{\alpha\lambda}a_{\lambda\beta}$$

и получается из $x_{\alpha\beta}$, если там подставить вместо x_R:

(10) $$\xi_R=\sum_S \frac{f}{h}\chi'(RS^{-1})x_S.$$

Если ρ — одно из чисел $1, 2, \ldots r$, а σ — одно из чисел $1, 2, \ldots r'$, то $(r+\sigma)$-й элемент ρ-ой строки есть

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\alpha\varkappa}x_{\varkappa\lambda}b_{\lambda\beta},$$

где $\alpha = \alpha_\rho$, $\beta = \beta_\sigma$. Это — элемент матрицы $AXB = XAB = 0$. Следовательно, X распадается на частичные матрицы степеней $r, r', \ldots$, из которых первая образована из r^2 элементов

$$(\xi_{\varkappa\lambda}).$$

Здесь x_E умножено на матрицу

$$N_1 = (a_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r),$$

детерминант которой неравен нулю. Пусть также

$$N_2 = (b_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{r'})$$

и

$$N = \begin{matrix} N_1 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & N_2 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & N_3 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot \end{matrix}$$

В таком случае $LXMN^{-1} = Z$ также распадается на частичные матрицы степеней $r, r', \ldots$, из которых первая матрица

$$(11) \qquad (\xi_{\varkappa\lambda})(a_{\varkappa\lambda})^{-1} \qquad (\varkappa, \lambda = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r).$$

При этом в матрице Z x_E умножено на главную матрицу E. Если теперь положить $x_R = \varepsilon_R$, т. е. $X = E$, то получится $Z = E$ и, следовательно, $LMN^{-1} = E$. Поэтому $|L|$ и $|M|$ отличны от нуля, и $MN^{-1} = L^{-1}$. Следовательно, $Z = LXL^{-1}$ — матрица, принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$; к этой же группе $\mathfrak{H}$ принадлежит каждая из частичных матриц, как, например, (11), на которые Z распадается.

Матрица A имеет ранг r. Следовательно, по *Primfactoren*, § 11 (стр. 99—102 этой книги) детерминанты r-ой степени матрицы $AX = XA$ относятся друг к другу, как соответствующие детерминанты матрицы A, т. е. отличаются друг от друга только постоянными множителями. Но по (5) и (7) сумма главных миноров r-ой степени матрицы AX равна $\Phi(x)^s$, а для матрицы A эта сумма равна единице. Следовательно, детерминант матрицы (11) равен $\Phi(x)^s$.

§ 3.

В *Darstellung*, § 5 (стр. 118—121 этой книги) я преобразовал матрицу $(x_{PQ^{-1}})$ группы $\mathfrak{H}$ в эквивалентную, которая распадается на f равных друг другу частичных матриц

$$(1) \qquad (u_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots f)$$

степени f, на f' равных друг другу частичных матриц

$$(2) \qquad (u'_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 2, 1, \ldots f')$$

степени f', и т. д. $f^2 + f'^2 + \ldots = h$ элементов $u_{\alpha\beta}, u'_{\alpha\beta}, \ldots$ этих матриц h независимых друг от друга линейных функций от h переменных x_R. Их детерминанты:

$$|u_{\alpha\beta}| = \Phi(x), \quad |u'_{\alpha\beta}| = \Phi'(x), \ldots$$

Таким же путем можно преобразовать рассмотренную в предыдущем параграфе матрицу X, принадлежащую к группе $\mathfrak{H}$, в эквивалентную ей, которая распадается на s частичных матриц (1), на s' частичных матриц (2) и т. д.

Если $|X|$ делится на несколько различных простых функций $\Phi, \Phi', \ldots$, то X по § 2 можно преобразовать в распадающуюся матрицу, у которой каждая частичная матрица имеет детерминантом степень простой функции. Поэтому достаточно привести доказательство нашего утверждения только для случая, когда $|X| = \Phi^s$ — степень простой функции Φ.

h переменных x_R являются линейными функциями от h переменных $u_{\alpha\beta}, u'_{\alpha\beta}, \ldots$ Если выразить элементы $x_{\varkappa\lambda}$ матрицы X через эти переменные, то Φ, а, следовательно, также и $|X|$ будет зависеть только от f^2 переменных $u_{\alpha\beta}$. Но то, что каждый из n^2 элементов $x_{\varkappa\lambda}$ зависит только от этих величин, следует из рассуждений § 2. Из этих рассуждений видно, что в данном случае $A = E$, следовательно, $X = XA$, т. е. $x_{\varkappa\lambda} = \xi_{\varkappa\lambda}$ и, следовательно, $x_{\varkappa\lambda}$ может быть представлена, как функция h переменных ξ_R. Среди этих переменных имеется как раз f^2 линейно-независимых. С другой стороны, Φ может быть представлено через f^2 друг от друга независимых переменных $u_{\alpha\beta}$ и не может быть преобразовано линейной подстановкой в функцию от меньшего, чем f^2, числа переменных. Поэтому h величин ξ_R и, следовательно, также n^2 величин $x_{\varkappa\lambda}$ — линейные функции f^2 переменных $u_{\alpha\beta}$.

Если заменить x_R через y_R или z_R, то пусть $(u) = (u_{\alpha\beta})$ переходит в (v) или (w), а X — в Y или Z. В этом случае $w = uv$ и $Z = XY$, если z_R определяется уравнением (1), § 2. Таким образом, элементы $x_{\varkappa\lambda}$ матрицы X — такие линейные функции элементов $u_{\alpha\beta}$ из u, что $Z = XY$, если $w = uv$. На основании этого из рассуждений § 1 следует возможность указанного преобразования матрицы.

При этом доказательстве можно было бы совершенно не прибегать к теоремам § 2 и только придать теоремам § 1 несколько более общее понимание. Вместо одной матрицы u можно исходить из нескольких матриц $u, u', \ldots$ степеней $f, f', \ldots$, у которых все $f^2 + f'^2 + \ldots$ элементов — независимые друг от друга переменные. В таком случае элементы матрицы X — линейные функции всех этих переменных, и $Z = XY$, если одновременно $w = uv$, $w' = u'v', \ldots$ Тем не менее преобразование, выведенное в § 2, интересно само по себе, так как для него необходимо только знание характеров.

§ 4.

Каждый простой множитель f-ой степени Φ группового детерминанта Θ может быть представлен, как детерминант f-ой степени, элементы которого — f^2 друг от друга независимых линейных функций h переменных x_R. Это представление может быть выбрано так, что элементы детерминанта образуют матрицу, принадлежащую к группе $\mathfrak{H}$. f-ую степень функции Φ я выразил (*Darstellung*, § 3, стр. 112—114 этой книги) через детерминант степени f^2. Это представление замечательно тем, что все эти элементы могут быть получены из линейной функции $\Sigma \chi(R) x_R$, если переставить подходящим образом h переменных x_R. Каждый детерминант степени f^2, образованный из элементов матрицы

$$\sum_R \chi(R) x_{PRQ^{-1}}, \tag{1}$$

равен Φ^f с точностью до постоянного множителя.

Я покажу, что к подобной форме может быть приведен и детерминант f-ой степени, равный Φ, и для определения этого детерминанта достаточно вычислить только одну линейную функцию $\Sigma a_{R^{-1}} x_R$. В таком случае каждый детерминант f-ой степени матрицы

$$x_{P,Q} = \sum_R a_{R^{-1}} x_{PRQ^{-1}} \tag{2}$$

равен Φ с точностью до постоянного множителя. Но в то время, как характер $\chi(R)$ целиком определяется простой функцией Φ, h величин a_R могут быть выбраны бесчисленным множеством способов, за исключением случая $f=1$, когда оба представления совпадают друг с другом. Это имеет свою причину в том, что $\chi(PQ) = \chi(QP)$ в то время, как величины a_R этому условию не удовлетворяют.

Чтобы прийти к этому представлению Φ, мне нужны некоторые вспомогательные теоремы о матрицах, которые я здесь вкратце изложу, хотя они и известны. Для удобства представления я обозначаю через A, B, C, ... не только матрицы h-ой степени, но одновременно и билинейные формы, коэффициенты которых — элементы этих матриц, как я это сделал в моей работе: *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen* („О линейных подстановках и билинейных формах“) Crelle's Journal, Bd. 84. Нижеследующие теоремы верны для любой матрицы K (см. названную работу, § 13), но здесь они будут выведены только для таких матриц, характеристический детерминант $|uE-K|$ которых имеет только линейные элементарные делители. В этом случае можно так определить подстановку P (т. е. матрицу P с детерминантом, отличным от нуля), чтобы билинейная форма $P^{-1}KP$ приняла нормальный вид

$$\rho\,(u_1 v_1 + \ldots + u_f v_f) + \rho'\,(u_{f+1} v_{f+1} + \ldots + u_{f+f'} v_{f+f'}) + \ldots$$

Здесь ρ, ρ', ... различные корни этого характеристического уравнения, причем ρ f-кратный, ρ' f'-кратный и т. д. Так как обращающиеся в нуль при $u=\rho$ элементарные делители $|uE-K|$ все линейны, то разложение

$$(3)\qquad (uE-K)^{-1}=\frac{A}{u-\rho}+\dots$$

начинается с (-1)-ой степени $u-\rho$. Из нормальной формы видно, что $P^{-1}AP=u_1v_1+\dots+u_fv_f$.[63] Следовательно, A имеет ранг f и удовлетворяет уравнению

$$(4)\qquad A^2=A,$$

причем

$$(5)\qquad |E+uA|=(u+1)^f.$$

Следовательно, сумма главных миноров f-ой степени в A равна 1. Поэтому в матрице A, в которой все миноры $(f+1)$-ой степени обращаются в нуль, главные миноры f-ой степени не могут быть все равны нулю. Если, далее:

$$(uE-K)^{-1}=\frac{B}{u-\rho'}+\dots,$$

то

$$P^{-1}BP=u_{f+1}v_{f+1}+\dots+u_{f+f'}v_{f+f'},$$

и, следовательно,

$$(6)\qquad AB=BA=0.$$

Не прибегая к нормальной форме, можно получить эти теоремы следующими рассуждениями. Возвышая один раз уравнение (3) в квадрат, в другой раз дифференцируя его по u, получим следующие два соотношения:

$$(uE-K)^{-2}=\frac{A^2}{(u-\rho)^2}+\dots,\quad -(uE-K)^{-2}=-\frac{A}{(u-\rho)^2}+\dots,$$

из которых непосредственно получается свойство (4). (Ср. Weierstrass, Monatsber. 1858, S. 215).

Из тождества

$$(uE-K)\left((uE-K)^{-1}-(vE-K)^{-1}\right)(vE-K)=(vE-K)-$$
$$-(uE-K)=(v-u)E$$

следует соотношение:

$$-\frac{(uE-K)^{-1}-(vE-K)^{-1}}{u-v}=(uE-K)^{-1}(vE-K)^{-1}.$$

Если разложить эти выражения по возрастающим степеням $u-\rho$ и $v-\rho'$, то получим:

$$-\frac{1}{(u-\rho)-(v-\rho')+(\rho-\rho')}\left(\frac{A}{u-\rho}+\dots-\frac{B}{v-\rho'}-\dots\right)=$$
$$=\frac{AB}{(u-\rho)(v-\rho')}+\dots$$

Если $u-\rho$ и $v-\rho'$ достаточно малы, то в разложении первого множителя левой части встречаются только положительные степени $u-\rho$ и $v-\rho'$, и, следовательно, в левой части не будет произведения отрицательных степеней $u-\rho$ и $v-\rho'$. Поэтому $AB=0$.

Так как $(uE-K)^{-1}$ — правильная дробная рациональная функция от u, то

$$(uE-K)^{-1}=\frac{A}{u-\rho}+\frac{B}{u-\rho'}+\dots \tag{7}$$

Если разложить обе части этого уравнения по убывающим степеням u, то, сравнивая коэффициенты, получим:

$$E=A+B+C+\dots,\quad K=\rho A+\rho' B+\rho'' C+\dots \tag{8}$$

Наконец, в том, что ранг A равен f, можно убедиться следующим образом. Если $\psi(u)=(u-\rho)(u-\rho')(u-\rho'')\dots$, то $\psi(K)=0$ — уравнение наинизшей степени, которому удовлетворяет K. Если, затем,

$$\frac{\psi(u)-\psi(v)}{u-v}=\psi(u, v),$$

то также

$$\frac{\psi(u)E-\psi(K)}{uE-K}=\psi(u, K),$$

следовательно,

$$(uE-K)^{-1}=\frac{\psi(u, K)}{\psi(u)}.$$

Поэтому

$$A=\frac{\psi(\rho, K)}{\psi'(\rho)}=g(K),$$

где

$$\psi'(\rho)\,g(v)=\psi(\rho, v)=\frac{\psi(v)}{v-\rho}=(v-\rho')(v-\rho'')\dots$$

Следовательно, $g(\rho)=1,\ g(\rho')=0,\ g(\rho'')=0,\dots$

Из (3) следует:

$$\Big((\rho E-K)+(u-\rho)E\Big)\Big(\frac{A}{u-\rho}+\dots\Big)=E,$$

и, таким образом,

$$(\rho E-K)A=0. \tag{9}$$

Так как детерминант $|uE-K|$ имеет f линейных элементарных делителей $u-\rho$, то ранг матрицы $\rho E-K$ равен $h-f$. Поэтому, согласно уравнению (9), ранг матрицы A не выше f. Он должен быть равен f, если среди различных столбцов в A имеются f независимых решений линейных уравнений

$$(\rho e_{\alpha 1}-k_{\alpha 1})\,v_1+(\rho e_{\alpha 2}-k_{\alpha 2})\,v_2+\ldots+(\rho e_{\alpha h}-k_{\alpha h})\,v_h=0,$$

т. е. если можно показать следующее: если X — какое-либо решение уравнения $(\rho E-K)X=0$, то можно так определить Y, что $X=AY$. Но из $KX=\rho X$ следует, что $K^2X=\rho KX=\rho^2 X,\ldots,K^nX=\rho^n X$, т. е. также и $g(K)X=g(\rho)X$, если $g(v)$ — целая функция от v. Если, как выше, $(v-\rho)\psi'(\rho)g(v)=\psi(v)$, то $g(K)=A$, $g(\rho)=1$, следовательно, $AX=X$, чем и доказывается наше утверждение.

§ 5.

В групповой матрице $X=(x_{PQ^{-1}})$ дадим h независимым переменным x_R такие постоянные значения $x_R=k_R,\ldots$, чтобы все $f+f'+\ldots$ корней $\rho,\rho',\ldots$ уравнения $\Phi(k-u\varepsilon)\,\Phi'(k-u\varepsilon)\ldots=0$ были различны между собой. Если тогда ρ — корень уравнения f-ой степени $\Phi(k-u\varepsilon)=0$, то характеристический детерминант матрицы $K=(k_{PQ^{-1}})$ имеет f линейных элементарных делителей $u-\rho$. Если, далее, имеем следующее разложение по степеням $u-\rho$ (или $u-\rho',\ldots$):

$$(uE-K)^{-1}=\frac{A}{u-\rho}+\ldots=\frac{B}{u-\rho'}+\ldots,\tag{1}$$

то матрицы $A, B,\ldots$ дают те же соотношения симметрии, что и X, т. е. можно положить $A=(a_{PQ^{-1}})$, $B=(b_{PQ^{-1}}),\ldots$ В таком случае $A^2=A$, $AB=0$, следовательно,

$$\sum a_Pa_Q=a_R \qquad (PQ=R)\tag{2}$$

и

$$\sum a_Pb_Q=0 \qquad (PQ=R)\tag{3}$$

Матрица A имеет ранг f и является целой функцией от K, $A=g(K)$, причем $g(\rho)=1$, для всякого же другого корня $g(\rho')=0$. Если, таким образом, $\rho,\rho_1,\ldots\rho_{f-1}$ корни уравнения $\Phi(k-u\varepsilon)=0$, то $g(\rho)=1$, $g(\rho_1)=0,\ldots g(\rho_{f-1})=0$ — корни уравнения $\Phi(a-u\varepsilon)=0$, как я показал в *Primfactoren*, § 3 (стр. 71—77 этой книги).

Следовательно:

$$\Phi(a+u\varepsilon)=u^{f-1}(u+1),\quad \Phi'(a+u\varepsilon)=u^{f'},\quad \Phi''(a+u\varepsilon)=u^{f''},\ldots\tag{4}$$

Если $x_{PQ}=x_{QP}$, то $\Phi(x)$ равно f-ой степени линейной функции переменных x_R. Поэтому согласно первому уравнению (4) величины a_R не могут обладать этим свойством при $f>1$.

Сумма корней уравнения, $\Phi(x-u\varepsilon)=0$ равна $\Sigma\chi(R)x_R$. Поэтому если ψ означает какой-либо из $k-1$ отличных от χ характеров, то

$$\sum_R\chi(R)a_R=1,\quad \sum_R\psi(R)a_R=0.\tag{5}$$

Систему h величин a_R, которая удовлетворяет уравнениям (2) и (5), я называю **системой значений, определяющей** простую функцию Φ или соответствующее ей примитивное представление группы $\mathfrak{H}$.

Если R пробегает h_ρ элементов ρ-ого класса, то пусть

$$\sum_{(\rho)} a_R = h_\rho a_\rho \, .$$

Так как $\chi(R)$ имеет для этих h_ρ элементов одно и то же значение χ_ρ, то из (5) следует:

$$\sum_\rho h_\rho \chi_\rho a_\rho = 1, \quad \sum h_\rho \psi_\rho a_\rho = 0 \, .$$

Но этими k уравнениями вполне определяются k величин a_ρ. По *Gruppencharaktere*, § 3 (стр. 30 этой книги) им удовлетворяют значения:

$$a_\rho = \frac{1}{h}\chi_{\rho'}.$$

Следовательно,

$$(6) \qquad \sum_{(\rho)} a_R = \frac{h_\rho}{h}\chi_{\rho'}, \quad \sum_S a_{S^{-1}RS} = \chi(R^{-1}).$$

Например,

$$(7) \qquad a_E = \frac{f}{h}.$$

k линейных уравнений (5) вполне эквивалентны k линейным уравнениям (6). Но уравнения (2) и (4) также эквивалентны уравнениям (2) и (5), при помощи которых мы определили систему значений a_R, определяющую простую функцию Φ. Ибо выше мы получили (5) из (4). Если же использовать обозначения *Primfactoren*, § 1, (6) (стр. 67 этой книги), то, согласно (2), $a_R^{(2)} = a_R$, т. е. также $a_R^{(n)} = a_R$. Но сумма n-ых степеней корней уравнения $\Phi(a - u\varepsilon) = 0$ равна:

$$\sum_R \chi(R)\, a_R^{(n)} = \sum_R \chi(R)\, a_R = 1,$$

а так как корни вполне определяются степенными суммами, то один из этих корней $= 1$, а остальные $f - 1$ — нули. Точно также выявляется, что все f' корней уравнения $\Phi'(a - u\varepsilon) = 0$ равны нулю. Поэтому детерминант h-ой степени:

$$| a_{PQ^{-1}} + u\varepsilon_{PQ^{-1}} | = (u + 1)^f u^{h-f}.$$

Из уравнения $A^2 = A$ следует, что все элементарные делители этого детерминанта — линейны. Поэтому матрица A имеет ранг f, а матрица $A - E$ — ранг $h - f$.

Если H — постоянный, а R — переменный элемент из $\mathfrak{H}$, и если подставить $b_R = a_{H^{-1}RH}$ (независимо от обозначения, примененного в уравнении (3)) то h величин b_R удовлетворяют уравнениям (2) и (5), т. е. образуют систему значений, определяющую функцию Ф. Вообще, если v_R h независимых переменных и $V=(v_{PQ^{-1}})$, $V^{-1}AV=B=(b_{PQ^{-1}})$, то h величин b_R образуют такую систему значений (*Primfactoren*, § 1, (9)). Как я сейчас покажу, каждую такую систему значений можно получить таким путем, т. е. подставляя вместо V всякую групповую матрицу с отличным от нуля детерминантом.

Если в групповой матрице $X=(x_{PQ^{-1}})$ h величин x_R — независимые переменные, то можно (D. § 5) постоянную матрицу L (у которой h^2 элементов независимы от переменных x_R, а детерминант отличен от нуля) выбрать так, чтобы $L^{-1}XL=Z$ распалось на f матриц $Z_1, Z_2, \ldots Z_f$ степени f, элементы которых соответственно равны, на f' матриц $Z_{f+1}, \ldots Z_{f+f'}$ степени f' и т. д. $f^2+f'^2+\ldots=h$ элементов матриц $Z_1, Z_{f+1}, \ldots$ h друг от друга независимых линейных функций от h переменных x_R. Поэтому если C — какая-либо матрица, которая распадается таким же образом, как и Z, и для которой $C_1=C_2=\cdots=C_f$, $C_{f+1}=\cdots=C_{f+f'}, \ldots$, то LCL^{-1} можно получить из X, если дать переменным x_R определенные значения. Характеристический детерминант для Z_1 есть $\Phi(x-u\varepsilon)$, для Z_{f+1} — $\Phi'(x-u\varepsilon)$ и т. д. Знаки L, Z, C означают здесь не групповые матрицы.

Если подставить $x_R=a_R$, то пусть Z и Z_λ переходят в C и C_λ. Так как $A^2=A$, то все элементарные делители для $|uE-A|$ линейны, а значит, и все элементарные делители для $|uE-C|$ тоже линейны. Но если детерминант распадается на части, то его элементарные делители являются элементарными делителями отдельных частей, взятыми вместе. Следовательно, элементарные делители для

$$|uE_1-C_1|=(u-1)\,u^{f-1}$$

также линейны. Пусть теперь $B=(b_{PQ^{-1}})$ — другая матрица, элементы которой удовлетворяют условиям (2) и (6). Тогда $L^{-1}BL=D$ распадается соответственно на части $D_1, D_2, \ldots$, и uE_1-C_1 и uE_1-D_1 имеют одинаковые элементарные делители. Поэтому можно матрицу M_1 с детерминантом, отличным от нуля, определить таким образом, чтобы было $M_1^{-1}C_1M_1=D_1$. Если $M_2, \ldots M_f$ имеют те же элементы, что и M_1, то также и $M_2^{-1}C_2M_2=D_2$ и т. д. Таким же образом определим $M_{f+1}, M_{f+2}, \ldots$ и из этих частей составим матрицу M. В таком случае $LML^{-1}=K$ — групповая матрица, а из $M^{-1}CM=D$ следует:

$$(LML^{-1})^{-1}\,(LCL^{-1})\,(LML^{-1})=LDL^{-1}$$

или: $K^{-1}AK=B$.

Теперь также легко получить самую общую групповую матрицу V, которая преобразовывает A в B. Именно, если u_R h независимых переменных и если $U=(u_{PQ^{-1}})$, то

$$V=AUB+(E-A)\,U(E-B). \tag{8}$$

Ибо, из уравнений $A^2 = A$ и $B^2 = B$ следует, что $AV = AUB$ и $VB = AUB$, значит $AV = VB$. Если, далее, K — какая-либо групповая матрица, удовлетворяющая условию $K^{-1}AK = B$, то можно переменным u_R дать такие значения, чтобы стало $V = K$. Ибо тогда $AK = KB$, $(E - A)K = K(E - B)$. Если, таким образом, положить $U = K$, то получим:

$$V = A(KB) + (E - A)\left(K(E - B)\right) = A(AK) + (E - A)\left((E - A)K\right) = \\ = AK + (E - A)K = K.$$

Но выше я доказал существование групповой матрицы K с детерминантом, отличным от нуля, которая удовлетворяет условию $AK = KB$. Поэтому для $U = K$ $|V|$ отличен от нуля, и, следовательно, $|V|$ для неопределенных u_R не может тождественно быть равным нулю.

С помощью доказанной выше теоремы можно из квадратных и линейных уравнений (2) и (5) вывести более общие линейные соотношения между величинами a_R. Групповая матрица

$$C = \left(\frac{f}{h}\chi'(PQ^{-1})\right)$$

переместима со всякой групповой матрицей и удовлетворяет уравнению $C^2 = C$. Если, таким образом, подставить $AC = L = (l_{PQ^{-1}})$, то будет $L^2 = L$. Уравнениям (5) удовлетворяют также величины l_R, как легко следует из *Primfactoren*, § 5, (6) или § 8. Поэтому групповую матрицу K можно определить так, чтобы было $A = K^{-1}ACK = K^{-1}AKC$ или, положив $K^{-1}AK = M$, чтобы было $MC = A$.

Следовательно, $AC = MC^2 = MC = A$. Если Ψ — отличный от Φ простой множитель Θ, ψ — его характер, а $D = \left(\frac{h}{f'}\psi'(PQ^{-1})\right)$, то $CD = 0$ и поэтому также $AD = (AC)D = A(CD) = 0$. Если b_R какая-либо система значений, определяющая простую функцию Ψ, и если $B = (b_{PQ^{-1}})$, то $B = BD$, и, следовательно $AB = (AC)(BD) = (AB)(CD) = 0$. Если X — любая групповая матрица, то можно B заменить через XBX^{-1}. Поэтому также $A(XBX^{-1}) = 0$ и, следовательно,

$$AXB = 0. \tag{9}$$

Таким образом, h величин a_R удовлетворяют уравнениям $AC = A$, или

$$\sum_R \chi(RS^{-1})a_R = \frac{h}{f}a_S \tag{10}$$

и $AD = 0$, или

$$\sum_R \psi(RS^{-1})a_R = 0. \tag{11}$$

Последние уравнения являются следствием первых, как показывает приведенный выше вывод соотношения $AD = 0$

из $AC=0$. Эти уравнения (10) или $(E-C)A=0$, поскольку ранг матрицы $E-C$ равен $h-f^2$, содержат как раз $h-f^2$ независимых однородных линейных соотношений между h величинами a_R. Но k уравнений (5) содержатся в уравнениях (10) и (11), если еще присоединить к ним неоднородное уравнение (7). В самом деле, число выведенных независимых линейных уравнений между h величинами a_R будет $h-f^2+1 \geqq k$, так как $h-k=(f^2-1)+(f'^2-1)+(f''^2-1)+\ldots$

Уравнения (5) можно привести к форме (6). Таким образом, можно уравнения (10) и (11) преобразовать в

$$f\sum_{(\rho)} a_{PRQ} = h_\rho \chi_{\rho'} a_{PQ}, \tag{12}$$

где R пробегает h_ρ элементов ρ-го класса.

§ 6.

Если $X=(x_{PQ^{-1}})$ — какая-либо групповая матрица, то я обозначаю: $\overline{X}=(x_{Q^{-1}P})$. Если, далее, $Z=XY$, то $\overline{Z}=\overline{Y}\overline{X}$. Обе матрицы X и $\overline{Y}$ переместимы друг с другом. Пусть $u_1, \ldots u_f$ корни уравнения $\Phi(x-u\varepsilon)=0$, а $v_1, \ldots v_f$ — корни уравнения $\Phi(y-u\varepsilon)=0$. Если тогда $g(u, v)$ — целая функция от u и v, то корни характеристического уравнения матрицы $g(X, \overline{Y})$ являются f^2 величинами

$$g(u_1, v_1),\ g(u_1, v_2), \ldots g(u_1, v_f),\ g(u_2, v_1), \ldots g(u_f, v_f)$$

и $f'^2+f''^2+\ldots$ величинами, которые аналогичным способом образованы из других простых множителей Φ', Φ'', ... детерминанта Θ (*Primfactoren*, § 10, стр. 96—99 этой книги).

Поэтому корни характеристического уравнения матрицы $X\overline{A}$ равны $u_1, u_2, \ldots u_f$, 0, 0, ... 0 и, следовательно,

$$|E+uX\overline{A}|=(1+u_1u)\ldots(1+u_fu)=\Phi(\varepsilon+ux). \tag{1}$$

Элементы матрицы $X\overline{A}=\overline{A}X$ будут

$$x_{P,Q}=\sum_R x_{PR^{-1}}a_{Q^{-1}R}=\sum_R a_{R^{-1}P}x_{RQ^{-1}}= \tag{2}$$
$$=\sum_R a_{Q^{-1}R^{-1}P}x_R=\sum_R a_{R^{-1}}x_{PRQ^{-1}}.$$

Если в матрице $X=(x_{PQ^{-1}})$ заменить P через P^{-1} и Q через Q^{-1}, то получим матрицу $(x_{P^{-1}Q})$. Следовательно, эта последняя матрица получается из предыдущей, если одинаковым образом переставить между собою строки и столбцы. Поэтому обе матрицы подобны друг другу. Тот же результат получается из тождества

$$(y_{PQ})(x_{PQ^{-1}})=(x_{P^{-1}Q})(y_{PQ}),$$

которое легко доказать. Если, затем, в $(x_{P^{-1}Q})$ переставить строки со столбцами, то получим матрицу $\bar{X} = (x_{Q^{-1}P})$. Поэтому для матрицы $\bar{X}$ совокупность всех миноров f-ой степени та же самая, что и для X. Следовательно, и ранг $\bar{A}$ равен f. Согласно *Primfactoren*, § 11, миноры f-ой степени матрицы $X\bar{A} = \bar{A}X$ пропорциональны соответствующим минорам f-ой степени матрицы $\bar{A}$. Но по (1), сумма всех миноров f-ой степени матрицы $X\bar{A}$ равна $\Phi(x)$. Следовательно, каждый минор f-ой степени матрицы $X\bar{A}$ равен соответствующему минору матрицы $\bar{A}$, помноженному на $\Phi(x)$,

$$(3) \qquad |x_{P,Q}| = \Phi(x)\,|a_{Q^{-1}P}| \qquad (P = A_1, \dots A_f;\ Q = B_1, \dots B_f).$$

В матрице f-ой степени

$$(x_{P,Q})_f \qquad (P = A_1, \dots A_f;\ Q = B_1, \dots B_f)$$

x_R множится на матрицу $(a_{Q^{-1}P})_f$. Если детерминант этой матрицы отличен от нуля, то, как я сейчас хочу показать,

$$(4) \qquad (x_{P,Q})_f (a_{Q^{-1}P})_f^{-1} \qquad (P = A_1, \dots A_f;\ Q = B_1, \dots B_f)$$

есть матрица, принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$.

Если положить $E - A = B$, то ранг B будет равен $h - f = g$, и

$$\sum a_P a_Q = a_R,\ \sum b_P b_Q = b_R,\ \sum a_P b_Q = \sum b_P a_Q = 0 \qquad (PQ = R).$$

Пусть оба детерминанта f-ой и g-ой степени

$$(5) \qquad |a_{Q^{-1}P}| \qquad (P = A_1, \dots A_f;\ Q = B_1, \dots B_f)$$

и

$$|b_{Q^{-1}P}| \qquad (P = C_1, \dots C_g;\ Q = D_1, \dots D_g)$$

отличны от нуля. Пусть, далее, M — матрица h-ой степени строки которой получаются из строки

$$a_{B_1^{-1}R}, \dots a_{B_f^{-1}R},\ b_{D_1^{-1}R}, \dots b_{D_g^{-1}R},$$

если подставить вместо R h элементов из $\mathfrak{H}$. Пусть L' — матрица, строки которой получаются тем же путем из

$$a_{R^{-1}A_1}, \dots a_{R^{-1}A_f},\ b_{R^{-1}C_1}, \dots b_{R^{-1}C_g},$$

и пусть L — матрица, сопряженная с L'.

Далее, я образую матрицу LXM. Пусть α и β — два из индексов $1, 2, \dots f$, а γ и δ — два из индексов $1, 2, \dots g$. В таком случае в этой матрице β-ый элемент α-ой строки равен

$$\sum_{R,S} a_{R^{-1}A_\alpha} x_{RS^{-1}} a_{B_\beta^{-1}S} = \sum_{R,S} a_{R^{-1}P} x_{RS^{-1}} a_{Q^{-1}S},$$

если положить $A_\alpha = P$, $B_\beta = Q$. Это — элемент матрицы $\bar{A}X\bar{A} = X\bar{A}\bar{A} = X\bar{A}$, т. е., он равен $x_{P,Q}$. Если положить $A_\alpha = P$, $D_\delta = Q$, то $(f+\delta)$-ый элемент α-ой строки будет

$$\sum_{R,S} a_{R^{-1}P} x_{RS^{-1}} b_{Q^{-1}S}.$$

Это элемент матрицы $\overline{B}X\overline{B} = XB\overline{B} = X\overline{B} = X - X\overline{A}$, следовательно, он равен нулю. Точно также обращается в нуль β-ый элемент $(f+\gamma)$-ой строки. Наконец, если положить $C_\gamma = P$, $D_\delta = Q$, то $(f+\delta)$-ый элемент $(f+\gamma)$-ой строки будет равен

$$\sum_{R,S} b_{R^{-1}P}\, x_{RS^{-1}}\, b_{Q^{-1}S}.$$

Это — элемент матрицы $\overline{B}X\overline{B} = X\overline{B}\,\overline{B} = X\overline{B} = X - X\overline{A}$, следовательно, он равен $x_{PQ^{-1}} - x_{P,Q}$.

Элементы матрицы LXM — линейные функции h переменных x_R. Поэтому эту матрицу можно рассматривать, как линейное соединение h постоянных матриц, из которых каждая множится на одно из h переменных x_R. В частности, x_E множится на матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{B_\beta^{-1} A_\gamma} & 0 \\ 0 & b_{D_\delta^{-1} C_\gamma} \end{pmatrix} = N,$$

детерминант которой отличен от нуля. Матрица $LXMN^{-1}$ распадается на матрицу f-ой степени:

$$(x_{P,Q})\,(a_{Q^{-1}P})^{-1} \qquad (P = A_1, \ldots A_f;\ Q = B_1, \ldots B_f)$$

и на матрицу g-ой степени:

$$(x_{PQ^{-1}} - x_{P,Q})\ (\varepsilon_{PQ^{-1}} - a_{Q^{-1}P})^{-1} \qquad (P = C_1, \ldots C_g;\ Q = D_1, \ldots D_g).$$

Если в этом представлении дать переменным x_R значения ε_R, т. е. если положить $X = E$, то получим $LMN^{-1} = E$. Поэтому детерминанты L и M отличны от нуля и $MN^{-1} = L^{-1}$. Но LXL^{-1} — матрица, принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$. Так как она распадается на две матрицы f-ой и g-ой степени, то каждая из обеих частей имеет то же свойство. Поэтому (4) — матрица, принадлежащая к группе $\mathfrak{H}$, детерминант которой равен $\Phi(x)$.

Если, таким образом, Φ — один из k простых множителей детерминанта группы $\mathfrak{H}$, то достаточно знать только какую-либо систему значений a_R, определяющую эту функцию, чтобы найти соответствующее простой функции Φ примитивное представление группы $\mathfrak{H}$ через линейные подстановки.

О ХАРАКТЕРАХ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ [64)]

(Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe. Sitzungsberichte der Berl. Ak., 1900, S. 516 — 534)

§ 1.

Все перестановки n символов $1, 2, \ldots n$ являются элементами группы $\mathfrak{H}$ порядка $h = n!$, которую называют *симметрической* группой. Перестановка может быть всегда и только одним образом представлена, как произведение циклических перемещений, никакая пара которых не имеет общих символов. Для того, чтобы две перестановки были сопряжены относительно $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы они были составлены из одинакового числа циклов одинаковых порядков. Если перестановки ρ-ого класса ($\rho = 0, 1, \ldots k-1$) состоят из α циклов порядка 1, β циклов порядка 2, γ циклов порядка 3, ..., то их число по Cauchy равно

$$h_\rho = \frac{n!}{1^\alpha \alpha!\, 2^\beta \beta!\, 3^\gamma \gamma! \ldots}. \tag{1}$$

Число k классов сопряженных элементов, на которые распадаются h перестановок, равно числу решений уравнения

$$n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots \tag{2}$$

в положительных целых числах $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, которые могут быть и равны нулю, или также равно числу различных разложений числа

$$n = n_1 + n_2 + \ldots \tag{3}$$

на неопределенное число положительных частей.

Для того, чтобы вычислить k характеров группы $\mathfrak{H}$

$$\chi_\rho^{(\varkappa)} \qquad (\rho = 0, 1, \ldots k-1;\ \varkappa = 0, 1, \ldots k-1),$$

я использую k определенных подгрупп для $\mathfrak{H}$. Разложив число n на слагаемые (3), образуем все перестановки, которые перемещают между собой только первые n_1 символов, затем, подобно же, только следующие n_2 символов и т. д. Эти перестановки образуют группу $\mathfrak{G}$ порядка

$$g = n_1!\, n_2! \ldots \tag{4}$$

Каждая перестановка R из $\mathfrak{G}$ распадается на перестановку R_1 первых n_1 символов, перестановку R_2 следующих n_2 символов и т. д. Если R_ν состоит из α_ν циклов порядка 1, β_ν циклов порядка 2, ..., то

$$n_1 = \alpha_1 + 2\beta_1 + \ldots, \quad n_2 = \alpha_2 + 2\beta_2 + \ldots, \tag{5}$$

а если R в $\mathfrak{H}$ принадлежит к ρ-ому классу, то

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots \tag{6}$$

Поэтому число содержащихся в $\mathfrak{G}$ перестановок этого класса равно:

$$g_\rho = \sum \frac{n_1!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\, 2^{\beta_1}\beta_1! \ldots} \cdot \frac{n_2!}{1^{\alpha_2}\alpha_2!\, 2^{\beta_2}\beta_2! \ldots} \ldots;$$

эта сумма берется по всем решениям уравнений (5) и (6). Если же эти уравнения не имеют решений, то $g_\rho = 0$. В противном случае, так как

$$\frac{h}{h_\rho} = 1^\alpha \alpha!\, 2^\beta \beta!\, 3^\gamma \gamma! \ldots, \tag{7}$$

то

$$\frac{hg_\rho}{gh_\rho} = \sum \frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots}\;\frac{\beta!}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots}\ldots$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots x_m$ независимые переменные, число которых m не меньше, чем число частей $n_1\, n_2, \ldots$, на которые разложено n. В таком случае эта сумма, распространенная на все решения уравнений (5) и (6), равна коэффициенту при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots$ в разложении произведения

(8) $$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^\alpha\, (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)^\beta \times$$
$$\times (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_m^3)^\gamma \ldots$$

по степеням переменных.

Этот результат, служащий основой для дальнейшего исследования, может быть усмотрен и без всякого вычисления следующим образом. Пусть $R = C_1 C_2 \ldots C_s$ — перестановка ρ-ого класса, состоящая из s циклов по $c_1, c_2, \ldots c_s$ символов, так что

(9) $$n = c_1 + c_2 + \ldots + c_s.$$

Согласно исследованиям в § 1 моей работы *Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen*, Sitzungsberichte 1898 (стр. 128—133 этой книги), которую я буду в дальнейшем цитировать через *U.*, число $\frac{hg_\rho}{gh_\rho}$ указывает, сколько из $\frac{h}{g}$ подгрупп из $\mathfrak{H}$, сопряженных с $\mathfrak{G}$, содержат перестановку R. Эти группы можно найти, если n символов всеми возможными способами распределять в системы по n_1, $n_2, \ldots$ символов, а затем символы каждой из этих систем всеми возможными способами перемещать между собой. Число полученных таким образом групп равно числу:

$$\frac{h}{g} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots},$$

но эти группы не должны быть все непременно отличными друг от друга. Для того, чтобы R входило в одну из этих групп, должно быть возможным из некоторых циклов $C_1, C_2, \ldots C_s$ образовать перестановку из n_1 символов, из некоторых других — перестановку из n_2 символов и т. д. Это выполнимо столькими способами, сколькими можно числа $n_1, n_2, \ldots$ представить, как суммы чисел $c_1, c_2, \ldots c_s$. Но число этих способов равно коэффициенту при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots$ в разложении произведения

(10) $$(x_1^{c_1} + x_2^{c_1} + \ldots + x_m^{c_1})\,(x_1^{c_2} + x_2^{c_2} + \ldots + x_m^{c_2}) \ldots$$
$$\ldots (x_1^{c_s} + x_2^{c_s} + \ldots + x_m^{c_s}),$$

которое только обозначением отличается от выражения (8). Если среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ или среди чисел $c_1, c_2, \ldots$ имеются равные друг другу, то два разложения следует и тогда считать различными, если они отличаются только обозначением входящих туда чисел. Ибо если даже $c_1 = c_2$, то—все таки C_1 отлично от C_2.

По формуле U. § 1, (9) $\frac{hg_\rho}{gh_\rho}$ может быть представлено, как линейное соединение характеров $\mathfrak{H}$ с целыми коэффициентами (или, иначе выражаясь, система k чисел $\frac{hg_\rho}{gh_\rho}$ делится на модуль, образованный из k^2 значений k характеров). Каждое такое соединение я буду называть *сложным характером* $\mathfrak{H}$. Поэтому в разложении целых симметрических функций n-ой степени (8) по степеням $x_1, x_2, \ldots x_m$ каждый коэффициент является сложным характером $\mathfrak{H}$, т. е. значением такого характера для класса (ρ), определенного показателями $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

§ 2.

Пусть

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots x_m) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_m - x_{m-1})$$

—произведение разностей m переменных $x_1, x_2, \ldots x_m$. В разложении этой функции степени $\frac{1}{2}m(m-1)$ каждый член ряда имеет вид

$$\pm x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

где $k_1, k_2, \ldots k_m$—числа $0, 1, \ldots m-1$ в какой-либо последовательности. В зависимости от того, положительная ли или отрицательная эта перестановка, коэффициент соответствующего члена равен $+1$ или -1. Также и тогда, когда $k_1, k_2, \ldots k_m$ какие-либо m положительных или отрицательных чисел, я употребляю в дальнейшем обозначение [65]

$$(1) \qquad [k_1, k_2, \ldots k_m] = \operatorname{sign} \Delta(k_1, k_2, \ldots k_m).$$

Оно имеет значение нуль, если два из m чисел равны друг другу; в других же случаях оно равно $+1$ или -1, в зависимости от того, будет ли среди разностей $k_2-k_1, k_3-k_1, k_3-k_2, \ldots$ четное или нечетное число отрицательных или, иначе, в зависимости от того, имеется ли в ряде $k_1, k_2, \ldots k_m$ четное или нечетное число инверсий.

В таком случае в произведении

$$(2) \quad (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^\alpha (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)^\beta (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_m^3)^\gamma \ldots$$
$$\ldots \Delta(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

каждый коэффициент—целочисленное линейное соединение определенных коэффициентов выражения (8), § 1, и, следовательно, есть точно также сложный характер для $\mathfrak{H}$. Как я пришел к тому, чтобы симметрическую функцию (8), § 1 умножением на произведение разностей обратить в полусимметрическую, вытекает из нижеследующего доказательства. В этой полусимметрической функции я обозначаю коэффициенты при

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_m^{\lambda_m} \text{ через } [\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m] \chi_\rho^{(\lambda)}.$$

Символ (λ) обозначает систему m показателей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, сумма которых равна

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n + \frac{1}{2} m(m-1), \tag{3}$$

а символ (ρ) означает определенный числами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ разложения (2), § 1, класс сопряженных элементов из $\mathfrak{H}$. Точно также, как и классы, перенумеруем совершенно произвольно различные решения уравнения (3), в котором последовательность слагаемых не имеет значения, и обозначим их через (0), (1) ... вообще через (λ).

При определенном λ, как я сейчас покажу, k чисел

$$\chi_\rho^{(\lambda)} \qquad (\rho = 0, 1, \ldots k-1)$$

образуют простой характер для $\mathfrak{H}$, причем для различных λ — различные характеры. Если $m = n$, то имеется как раз k систем из n различных чисел каждая, которые удовлетворяют условию

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n = \frac{1}{2} n(n+1). \tag{4}$$

Ибо, если в решении расположить слагаемые так, чтобы

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_n, \tag{5}$$

то ему соответствует разложение числа n на части [66]

$$\varkappa_1 \leqq \varkappa_2 - 1 \leqq \varkappa_3 - 2 \leqq \ldots \leqq \varkappa_n - n + 1$$

и обратно. Следовательно, полусимметрическая функция

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^\alpha (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^\beta (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + \tag{6}$$
$$+ x_n^3)^\gamma \ldots \Delta(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{(\varkappa)} [\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n] \chi_\rho^{(\varkappa)} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$$

дает значения k характеров симметрической группы $\mathfrak{H}$. Мы получим их уже все, если в этой сумме из $n!k$ членов рассмотрим только те k членов, в которых показатели удовлетворяют условию (5).

Между характерами $\psi_\rho^{(\varkappa)}$ группы $\mathfrak{H}$ имеются соотношения

$$\sum_\rho h_\rho \psi_\rho^{(\varkappa)} \psi_\rho^{(\varkappa')} = h, \quad \sum_\rho h_\rho \psi_\rho^{(\varkappa)} \psi_\rho^{(\lambda)} = 0, \tag{7}$$

если (λ) отлично от характера ($\varkappa'$), обратного (сопряженного комплексного) к ($\varkappa$). Пусть тепер

$$\chi_\rho = \sum_\varkappa r_\varkappa \psi_\rho^{(\varkappa)}$$

сложный характер, пусть, таким образом, коэффициенты $r_\varkappa$ положительные или отрицательные целые числа. В таком случае, поскольку $\psi_\rho^{(\varkappa')} = \psi_{\rho'}^{(\varkappa)}$,

$$\sum_\rho h_\rho \chi_\rho \chi_{\rho'} = h \sum_\varkappa r_\varkappa^2.$$

Если, таким образом, можно показать, что эта сумма равна h, то одно из чисел $r_\varkappa$ должно быть равно ± 1, а остальные $k-1$ чисел должны быть равны 0. Если, кроме того, χ_0 — положительное целое число (при (0) — главном классе), то отсюда следует, что χ_ρ — (простой) характер. Если известно несколько таких характеров $\chi_\rho^{(\varkappa)}$, $\chi_\rho^{(\lambda)}$, ... и если

$$\sum_\rho h_\rho \chi_\rho^{(\varkappa)} \chi_{\rho'}^{(\lambda)} = 0,$$

то они все отличны друг от друга.

Для симметрической группы эти формулы упрощаются еще тем, что входящие в формулу (6) характеры $\chi_\rho^{(\varkappa)}$ имеют только реальные значения, т. е. совпадают со своими обратными характерами.

§ 3.

Для того, чтобы доказать поставленное выше утверждение, я ввожу вторую систему m независимых переменных $y_1, y_2, \dots y_m$ и образую сумму [67])

$$(1) \quad \sum_\rho \frac{h_\rho}{h} (x_1 + \dots + x_m)^\alpha (x_1^2 + \dots + x_m^2)^\beta \dots (y_1 + \dots + y_m)^\alpha \times$$

$$\times (y_1^2 + \dots + y_m^2)^\beta \dots = \sum \frac{1}{1^\alpha \alpha!} (x_1 + \dots + x_m)^\alpha (y_1 + \dots + y_m)^\alpha$$

$$\times \frac{1}{2^\beta \beta!} (x_1^2 + \dots + x_m^2)^\alpha (y_1^2 + \dots + y_m^2)^\beta \dots$$

Если не ограничивать показатели α, β, γ, ... условием

$$(2) \qquad \alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = n,$$

а давать каждому значения от 0 до ∞, то сумма этого ряда равна

$$e^{(x_1 + \dots + x_m)(y_1 + \dots + y_m) + \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_m^2) + \dots}$$

Если выполнить в каждом члене умножение, то показатель будет равен

$$-l(1 - x_1 y_1) - l(1 - x_1 y_2) - l(1 - x_2 y_1) - \dots - l(1 - x_m y_m).$$

Следовательно, сумма (1) равна обратному значению произведения

$$(1-x_1y_1)(1-x_1y_2)(1-x_2y_1)\dots(1-x_my_m).$$

Если, таким образом, рассматриваемое выражение еще помножить на

$$\Delta(x_1, x_2, \dots x_m)\,\Delta(y_1, y_2, \dots y_m),$$

то это выражение, по известной формуле Cauchy[68], будет равно детерминанту m-ой степени

$$\left|\frac{1}{1-x_\mu y_\nu}\right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots m)$$

или, вычислив,

$$\sum [\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m]\,\frac{1}{(1-x_{\mu_1}y_1)(1-x_{\mu_2}y_2)\dots(1-x_{\mu_m}y_m)}.$$

Но

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_\lambda{}_0^\infty x^\lambda y^\lambda,$$

и, следовательно, детерминант равен:

$$\sum_\lambda \sum_\mu [\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m]\, x_{\mu_1}^{\lambda_1} y_1^{\lambda_1} x_{\mu_2}^{\lambda_2} y_2^{\lambda_2} \dots x_{\mu_m}^{\lambda_m} y_m^{\lambda_m},$$

или, если подходящим образом переставить множители в каждом члене, то:

$$(3) \qquad \sum_{\varkappa, \lambda} [\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_m]\,[\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m]\, x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \dots x_m^{\varkappa_m} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots y_m^{\lambda_m}.$$

Каждый из m показателей $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ пробегает значения от 0 до ∞. Если два из этих показателей равны друг другу, то соответствующий член имеет коэффициент 0. Для каждой системы из m различных показателей $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_m$ пробегают $m!$ перестановок этих показателей $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$.

Если в сумме (1) взять только те члены, которые удовлетворяют условию (2), то в ряде (3) нужно ограничиться теми членами, в которых

$$(4) \qquad \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m = n+\frac{1}{2}m(m-1).$$

Следовательно, этот конечный ряд по (6), § 2 равен

$$\sum_{\varkappa, \lambda}\left(\sum_\rho \frac{h_\rho}{h}\chi_\rho^{(\varkappa)}\chi_\rho^{(\lambda)}\right)[\varkappa_1, \dots \varkappa_m]\,[\lambda_1, \dots \lambda_m]\, x_1^{\varkappa_1} \dots x_m^{\varkappa_m} y_1^{\lambda_1} \dots y_m^{\lambda_m},$$

где нужно просуммировать по всем системам значений $\varkappa$, λ, которые удовлетворяют условию (4) и аналогичному условию:

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\dots+\varkappa_m = n+\frac{1}{2}m(m-1).$$

Если, следовательно, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m$ отличаются от $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ не одним только порядком, в каком они стоят, то

$$\sum_\rho h_\rho \chi_\rho^{(\varkappa)} \chi_{\cdot\rho}^{(\lambda)} = 0 .$$

В противном же случае эта сумма равна h. Этим уже выполнена существенная часть доказательства и нужно еще только показать, что числа $\chi_0^{(\varkappa)} = f^{(\varkappa)}$ положительны.

Для главного класса (0) $\alpha = n$, $\beta = 0$, $\gamma = 0, \ldots$, и поэтому:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n \Delta(x_1, x_2, \ldots x_m) = \tag{5}$$
$$= \sum [\lambda_1, \ldots \lambda_m] f^{(\lambda)} x_1^{\lambda_1}, \ldots x_m^{\lambda_m} .$$

Левая часть (5) равна:

$$\left(\sum \frac{n!}{\mu_1! \ldots \mu_m!} x_1^{\mu_1} \ldots x_m^{\mu_m}\right)\left(\sum [\varkappa_1, \ldots \varkappa_m] x_1^{\varkappa_1} \ldots x_m^{\varkappa_m}\right),$$

где $n = \mu_1 + \ldots + \mu_m$ и где $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m$ означает одну из $m!$ перестановок чисел $0, 1, \ldots m-1$. Функция $\frac{1}{\mu!} = \frac{1}{\Pi(\mu)}$ равна нулю, если μ — отрицательно. Произведение обеих сумм равно помноженному на $n!$ выражению

$$\sum [\varkappa_1, \ldots \varkappa_m] \frac{1}{(\lambda_1 - \varkappa_1)!} \cdots \frac{1}{(\lambda_m - \varkappa_m)!} x_1^{\lambda_1} \ldots x_m^{\lambda_m} .$$

В этой сумме коэффициент при $x_1^{\lambda_1} \ldots x_m^{\lambda_m}$ равен детерминанту m-ой степени

$$\frac{f^{(\lambda)}}{h} = \left| \frac{1}{(\lambda_\mu - \nu + 1)!} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots m).$$

Если помножить элементы μ-ой строки на $\lambda_\mu!$ и разделить элементы ν-ого столбца на $(\nu - 1)!$, то получим:

$$\frac{\lambda_1! \ldots \lambda_m!}{0! \ldots (m-1)!} \frac{f^{(\lambda)}}{h} = \left| \binom{\lambda_\mu}{\nu - 1} \right| .$$

Знак

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \ldots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

я употребляю также и в том случае, когда x — переменная. Строки последнего детерминанта являются значениями функций

$$\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \ldots \binom{x}{m-1} \quad \text{при} \quad x = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m .$$

Степени этих функций: $0, 1, \ldots m-1$. Если, таким образом, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ — независимые переменные, то этот детерминант равен $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m)$ с точностью до постоянного делителя, который равен детерминанту $\Delta(0, 1, \ldots m-1)$; последний получается, если принять $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \ldots \lambda_m = m-1$. Так как

$$\Delta(0, 1, \ldots m-1) = 0!\ 1! \ldots (m-1)!$$

то, следовательно,

$$f^{(\lambda)} = \frac{n!\,\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m)}{\lambda_1!\ \lambda_2! \ldots \lambda_m!} \tag{6}$$

положительно, если $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$.

§ 4.

Для того, чтобы получить k различных характеров, мы должны положить $m = n$. В таком случае $\chi^{(\varkappa)}$ характеризуется системой n чисел

$$(\varkappa) = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n, \tag{1}$$

которые удовлетворяют условиям

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n = \frac{1}{2} n(n+1), \tag{2}$$

$$0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_n.$$

Что касается соотношения между обоими разложениями (2) и (6), § 2, то [69]

$$[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m]\,\chi_\rho^{(\lambda)} = [\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n]\,\chi_\rho^{(\varkappa)},$$

если при $m < n$ $(\varkappa)$ означает систему n чисел:

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n = 0, 1, \ldots \mu-1, \mu+\lambda_1, \ldots \mu+\lambda_m \qquad (m+\mu = n). \tag{3}$$

Наоборот, при $m > n$:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m = 0, 1, \ldots \mu-1, \mu+\varkappa_1, \ldots \mu+\varkappa_n \qquad (n+\mu = m). \tag{4}$$

Таким образом, для того, чтобы не зависеть от m, можно употребить для определения характера χ те из чисел

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 - 1 \leqq \lambda_3 - 2 \leqq \ldots \leqq \lambda_m - m + 1,$$

которые отличны от нуля. Однако, оказывается более практичным использовать для этого следующую *характеристику*.

Каждое из n чисел (1) $\leqq 2n-1$, так как $\varkappa_n$ достигает максимального значения $2n-1$, когда остальные $n-1$ чисел имеют минимальные значения $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 1, \ldots \varkappa_{n-1} = n-2$. Пусть $a_1, a_2, \ldots a_n$ — числа $0, 1, \ldots n-1$ в какой-либо последовательности. В таком случае

$$n-1-a_1,\ n-1-a_2, \ldots n-1-a_n$$

те же самые числа. Пусть $n-r$ из них встречаются среди чисел (1), например, $n-1-a_{r+1}, \ldots n-1-a_n$. Остальные r

чисел (1) $\geqq n$; обозначим их через $n+b_1, \dots n+b_r$. В этом случае я называю

$$(5) \qquad (\varkappa) = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 \dots a_r \\ b_1\, b_2 \dots b_r \end{pmatrix}$$

характеристикой $\chi^{(\varkappa)}$. Для того, чтобы она была вполне определена, пусть

$$(6) \qquad a_1 < a_2 < \dots < a_r, \quad b_1 < b_2 < \dots < b_r.$$

Уравнение (2) имеет теперь вид

$$(n-1-a_{r+1}) + \dots + (n-1-a_n) + (n+b_1) + \dots + (n+b_r) =$$
$$= \frac{1}{2} n(n+1).$$

Далее:

$$a_1 + \dots + a_r + a_{r+1} + \dots + a_n = 0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2} n(n-1)$$

и, следовательно:

$$(7) \qquad a_1 + a_2 + \dots + a_r + b_1 + b_2 + \dots + b_r = n - r.$$

Левая часть $\geqq 2\big(0+1+\dots+(r-1)\big) = r(r-1)$, и поэтому число r, которое я обозначаю, как *ранг характеристики* (5):

$$(8) \qquad r \leqq \sqrt{n}.$$

Степень характера $\chi^{(\varkappa)}$ есть [70)]

$$(9) \qquad f^{(\varkappa)} = \frac{n!\,\Delta(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_n)}{\varkappa_1!\ \varkappa_2! \dots \varkappa_n!} = \frac{n!\,\Delta(a_1, \dots a_r)\,\Delta(b_1, \dots b_r)}{a_1! \dots a_r!\, b_1! \dots b_r!\, \Pi(a_\alpha + b_\beta + 1)},$$

причем в последнем произведении α и β пробегают значения $1, 2, \dots r$.

При проведении этого преобразования мы можем, поскольку $f^{(\varkappa)}$ — положительно, не обращать внимания на знак. В этом случае нужно показать, что

$$a_1! \dots a_r!\, b_1! \dots b_r!\, \Pi(a_\alpha + b_\beta + 1)\,\Delta(-a_{r+1}-1, \dots -a_n-1, b_1, \dots b_r) =$$
$$= \pm (n-a_{r+1}-1)! \dots (n-a_n-1)!\,(n+b_1)! \dots$$
$$\dots (n+b_r)!\,\Delta(a_1, \dots a_r)\,\Delta(b_1, \dots b_r).$$

Но

$$\frac{(b_\beta+n)!}{b_\beta!} = \prod_\alpha (a_\alpha + b_\beta + 1) \prod_\gamma (a_\gamma + b_\beta + 1),$$

где γ пробегает значения $r+1, \dots n$, и

$$\pm\,\Delta(-a_{r+1}-1, \dots -a_n-1,\ b_1, \dots b_r) =$$
$$= \Delta(a_{r+1}, \dots a_n)\,\Delta(b_1, \dots b_r) \cdot \prod_{\gamma, \beta} (a_\gamma + b_\beta + 1).$$

Поэтому нужно еще доказать, что

$$a_1! \dots a_r!\, \Delta(a_{r+1}, \dots a_n) =$$
$$= (n-1-a_{r+1})! \dots (n-1-a_n)!\, \Delta(a_1, \dots a_r).$$

Но (если опустить в произведениях множитель $a_\alpha - a_\alpha$)

$$(a_\alpha - a_1)(a_\alpha - a_2) \dots (a_\alpha - a_n) =$$
$$= (a_\alpha - 0)(a_\alpha - 1) \dots (a_\alpha - n + 1) = \pm a_\alpha!\,(n-1-a_\alpha)!.$$

Если, таким образом, помножить вышеприведенное уравнение на $(n-1-a_1)! \dots (n-1-a_r)!$, то получим

$$\Delta(a_1, \dots a_r)^2\, \Pi(a_\alpha - a_\gamma)\, \Delta(a_{r+1}, \dots a_n) =$$
$$= \pm 0!\, 1! \dots (n-1)!\, \Delta(a_1, \dots a_r).$$

Но эта формула получается из уравнения

$$0!\, 1! \dots (n-1)! = \Delta(0,\ 1, \dots n-1) = \pm \Delta(a_1, \dots a_r,\ a_{r+1}, \dots a_n) =$$
$$= \pm \Delta(a_1, \dots a_r)\, \Delta(a_{r+1}, \dots a_n)\, \Pi(a_\gamma - a_\alpha).$$

Выражение (9) может быть приведено к форме детерминанта r-ой степени [71])

(9a) $$f^{(\varkappa)} = \frac{n!}{a_1! \dots a_r!\, b_1! \dots b_r!} \left| \frac{1}{a_\alpha + b_\beta + 1} \right|$$

$$(\alpha,\ \beta = 1,\ 2, \dots r).$$

Характеристику (5) можно вывести также из m чисел, которые обозначены выше через $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$. r таких чисел $\geqq m$ и равны $m+b_1,\ m+b_2, \dots m+b_r$, а из чисел $0, 1, \dots m-1$ r чисел недостает среди $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, именно, нет чисел $m-1-a_1, m-1-a_2, \dots m-1-a_r$. Для того, чтобы вычислить $\chi_\rho^{(\lambda)}$ путем развертывания выражения (2), § 2, достаточно только принять там $m \geqq a_r + 1$.

Характер, соответствующий характеристике (5), я буду также обозначать через

$$\chi_\rho^{(\varkappa)} = \chi \begin{pmatrix} a_1\, a_2 \dots a_r \\ b_1\, b_2 \dots b_r \end{pmatrix}_\rho.$$

Если, например, в формуле (2), § 2, положить $m=2$, то получим

(10) $$(1-x)(1+x)^\alpha (1+x^2)^\beta (1+x^3)^\gamma \dots =$$

$$= 1 + x\chi\begin{pmatrix} & 1 \\ n & -2 \end{pmatrix} + x^2\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & n-3 \end{pmatrix} + x^3\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n-4 \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ x^\lambda \chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda-2 & n-\lambda-1 \end{pmatrix} + \dots$$

при $\lambda < \frac{1}{2}(n+1)$. Если $n+1$ четное и $\lambda = \frac{1}{2}(n+1)$, то коэффициент при x^λ равен 0. В таком случае те же самые коэффициенты повторяются в обратном порядке, но с противоположными знаками. Поэтому, например,

$$\chi\begin{pmatrix} & 1 \\ n-2 \end{pmatrix} = \alpha - 1 \quad \chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & n-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\alpha(\alpha-3)+\beta,$$

(11) $$\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-5)+(\alpha-1)\beta+\gamma,$$

$$\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & n-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-7)+\frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2)\beta+$$
$$+\frac{1}{2}\beta(\beta-3)+(\alpha-1)\gamma+\delta.$$

Таким образом, последнее выражение для всех решений уравнения $\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta=7$ имеет значение 0.

§ 5.

Особенно простым путем вычисляются характеры первого ранга. Сюда относится характер $\chi(R)=\alpha-1$, который (*U.*, § 5) имеется в каждой дважды транзитивной группе подстановок. Его характеристическая функция

(1) $$F(x) = (1-x)^{\alpha-1}(1-x^2)^\beta(1-x^3)^\gamma\ldots$$

Ибо сумма корней уравнения $F(x)=0$ равна $\chi(R)=\alpha-1$, а сумма их $\varkappa$-ых степеней есть $\chi(R^\varkappa)$, именно, равна уменьшенному на 1 числу символов, которых не изменяет подстановка $R^\varkappa$. Из результатов § 2 моей работы *Über die Composition der Charaktere einer Gruppe*, Sitzungsberichte, 1899 („О композиции характеров группы", стр. 146—148 этой книги) следует, что коэффициент при $(-x)^{n-1-\lambda}$ в разложении $F(x)$ по степеням x представляет собой линейное соединение характеров группы $\mathfrak{H}$ с целыми положительными числовыми коэффициентами. Для того чтобы их найти, я делаю $F(x)$ однородной и образую сумму

$$\sum_\rho \frac{h_\rho}{h}(u-v)^\alpha(u^2-v^2)^\beta(u^3-v^3)^\gamma\ldots(x_1+\ldots+x_n)^\alpha(x_1^2+\ldots+$$
$$+x_n^2)^\beta(x_1^3+\ldots+x_n^3)^\gamma\ldots,$$

где

$$\frac{h_\rho}{h} = \frac{1}{1^\alpha\alpha!\,2^\beta\beta!\,3^\gamma\gamma!\ldots}.$$

Если отвлечься от условия суммирования

$$n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots,$$

то получим, как в § 3, для бесконечного ряда выражение

$$\left(\frac{(1 - x_1 v) \ldots (1 - x_n v)}{(1 - x_1 u) \ldots (1 - x_n u)} - 1\right).$$

При этом, чтобы избежать излишних длиннот, следует исключить при суммировании систему значений $\alpha = \beta = \gamma$. Это выражение нужно умножить на

$$\frac{\Delta (x_1, x_2, \ldots x_n)}{u - v}$$

и затем в его разложении по возрастающим степеням u и v определить коэффициент при $u^\lambda (-v)^{n-1-\lambda}$. Если подставить вместо u и v их обратные значения и положить

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

то в разложении выражения

$$\frac{\Delta (x_1, x_2, \ldots x_n)}{v - u}\left(\frac{f(v)}{f(u)} - \frac{v^n}{u^n}\right)$$

по убывающим степеням u и v нужно определить коэффициент при

$$(-1)^{n-1-\lambda} u^{-n-1-\lambda} v^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n-1).$$

Но

$$\frac{1}{v-u}\left(\frac{f(v)}{f(u)} - \frac{v^n}{u^n}\right) = \frac{1}{u^n}\frac{u^n - v^n}{u - v} + \sum_\nu \frac{f(v)}{f'(x_\nu)(v - x_\nu)(u - x_\nu)};$$

здесь коэффициент при $u^{-n-1-\lambda}$, помноженный на $\Delta (x_1, x_2, \ldots x_n)$ равен

$$\Delta (x_1, x_2, \ldots x_n) \sum \frac{f(v) x_\nu^{n+\lambda}}{f'(x_\nu)(v - x_\nu)} =$$

$$= \sum_\nu \Delta (x_1, \ldots x_{\nu-1}, v, x_{\nu+1}, \ldots x_n) x_\nu^{n+\lambda}.$$

В этой сумме нужно определить коэффициент при

$$(-1)^{n-1-\lambda} v^\lambda x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n},$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ удовлетворяют условиям (2), § 4. Этот коэффициент равен нулю, кроме того случая, когда $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{n-1} \leqq n-1$ и $\varkappa_n = n + \lambda$. Поэтому это разложение имеет ранг $r = 1$ и

$$(\varkappa) = \binom{n-1-\lambda}{\lambda}.$$

Наконец, коэффициент при

$$(-1)^{n-1-\lambda} v^{\lambda} x_1^0 x_2^1 \ldots x_{\lambda}^{\lambda-1} x_{\lambda+1}^{\lambda+1} \ldots x_{n-1}^{n-1} x_n^{n+\lambda}$$

в $\Delta(x_1, \ldots x_{n-1}, v)\, x_n^{n+\lambda}$ равен $+1$.

Отсюда

$$(2) \qquad F(x) = \chi\binom{0}{n-1} - x\chi\binom{1}{n-2} + x^2\chi\binom{2}{n-3} - \ldots +$$

$$+(-x)^{\lambda}\chi\binom{\lambda}{n-1-\lambda} + \ldots + (-x)^{n-2}\chi\binom{n-2}{1} +$$

$$+(-x)^{n-1}\chi\binom{n-1}{0}.$$

Следовательно, характеры первого ранга

$$\chi\binom{0}{n-1} = 1, \quad \chi\binom{1}{n-2} = \alpha - 1, \quad \chi\binom{2}{n-3} = \binom{\alpha-1}{2} - \beta,$$

$$(3) \quad \chi\binom{3}{n-4} = \binom{\alpha-1}{3} - (\alpha-1)\beta + \gamma,$$

$$\chi\binom{4}{n-5} = \binom{\alpha-1}{4} - \binom{\alpha-1}{2}\beta + (\alpha-1)\gamma + \binom{\beta}{2} - \delta, \ldots$$

Далее,

$$(4) \qquad \chi\binom{n-1}{0} = (-1)^{\beta+\delta+\cdots} = (-1)^{n-s},$$

если $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$ число циклов в R и вообще

$$\chi\binom{b}{a}_{\rho} = (-1)^{\beta+\delta+\cdots}\chi\binom{a}{b}_{\rho}.$$

§ 6.

Если $\mathfrak{H}$ — симметрическая, а $\mathfrak{G}$ — полусимметрическая группа степени n и если T — какая-либо нечетная перестановка, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}T$, где комплекс $\mathfrak{G}$ содержит $\frac{1}{2}n!$ четных перестановок, а комплекс $\mathfrak{G}T = T\mathfrak{G}$ $\frac{1}{2}n!$ нечетных перестановок. Оба эти комплекса — элементы группы $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ порядка 2. Она имеет два характера 1, 1 и 1, -1. Следовательно, группа $\mathfrak{H}$ имеет характер

$$(1) \qquad \chi_{\rho}^{(1)} = \chi\binom{n-1}{0}_{\rho} = (-1)^{\beta+\delta+\cdots} = (-1)^{n-s},$$

который имеет для элементов из $\mathfrak{G}$ значение $+1$, а для элементов из $\mathfrak{G}T$ — значение -1. Путем умножения на этот характер первой степени получается из каждого характера $\chi^{(\varkappa)}$ другой характер $\chi^{(\lambda)}$. Два таких характера, для которых

$$(2) \qquad \chi^{(\lambda)} = \chi^{(\varkappa)}\chi^{(1)}, \quad \chi^{(\varkappa)} = \chi^{(\lambda)}\chi^{(1)}$$

я называю *ассоциированными*. Если $\chi^{(\varkappa)}(R)$ имеет для каждой нечетной перестановки R значение 0, то такой характер ассоциирован сам с собой. Вообще же два ассоциированных характера отличны друг от друга. Мы характеризуем $\chi^{(\lambda)}$ системою n чисел, которые удовлетворяют условиям

$$(3) \qquad \frac{1}{2}n(n+1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \quad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n,$$

а $\chi^{(\varkappa)}$ — аналогичным разложением (2), § 4, и оба эти разложения мы также называем ассоциированными. Теперь я хочу показать, что числа

$$(4) \qquad \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n, \; 2n-1-\lambda_1, \; 2n-1-\lambda_2, \ldots 2n-1-\lambda_n,$$

независимо от последовательности, совпадают с числами $0, 1, \ldots 2n-1$. Прежде всего этим путем разложения (3) попарно сопряжены друг с другом. Ибо $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ n из $2n$ чисел $0, 1, \ldots 2n-1$. Если обозначить n остальных чисел через $2n-1-\lambda_1, 2n-1-\lambda_2, \ldots 2n-1-\lambda_n$, то

$$\sum(\varkappa) + \sum(2n-1-\lambda) = 0+1+\ldots+2n-1 = n(2n-1),$$

и отсюда $\sum\varkappa = \sum\lambda$. Что в таком случае имеют место соотношения (2), следует из уравнения

$$(5) \qquad \sum_{\rho} \frac{h_\rho}{h}\chi_\rho^{(1)}\chi_\rho^{(\varkappa)}\chi_\rho^{(\lambda)} = 1.$$

Чтобы доказать его, я образую бесконечный ряд

$$\sum (-1)^{\beta+\delta+\ldots}\frac{1}{\alpha!}(x_1+\ldots+x_n)^\alpha(y_1+\ldots+y_n)^\alpha \times$$
$$\times \frac{1}{2^\beta \beta!}(x_1^2+\ldots+x_n^2)^\beta(y_1^2+\ldots+y_n^2)^\beta \ldots =$$
$$= e^{(x_1+\ldots+x_n)(y_1+\ldots+y_n) - \frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)\ldots} = \Pi(1+x_\mu y_\nu).$$

Тогда сумма (5) равна коэффициенту при $x_1^{\varkappa_1}\ldots x_n^{\varkappa_n}y_1^{\lambda_1}\ldots y_n^{\lambda_n}$ в разложении произведения

$$\Delta(x_1, \ldots x_n)\Delta(y_1, \ldots y_n)\Pi(1+x_\mu y_\nu).$$

Если заменить $y_1, \ldots y_n$ через $-\frac{1}{y_1}, \ldots -\frac{1}{y_n}$, то это будет коэффициент при $\pm x_1^{\varkappa_1} \ldots x_n^{\varkappa_n} y_1^{2n-1-\lambda_1} \ldots y_n^{2n-1-\lambda_n}$ в разложении выражения

$$\Delta(x_1, \ldots x_n)\Delta(y_1, \ldots y_n)\Pi(y_\nu - x_\mu) = \Delta(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n).$$

Но это выражение равно 0, если не все $2n$ чисел (4) различны, т. е. независимо от последовательности совпадают с числами $0, 1, \ldots 2n-1$. В этом случае коэффициент равен ± 1. Даже не обращаясь к точному определению знака, можно усмотреть, что отсюда получается уравнение (5), так как сумма в левой части может иметь только одно из двух значений: 0 или $+1$.

Соотношение между двумя ассоциированными характерами удобнее представить, если определить $\chi^{(\varkappa)}$ через характеристику (5), § 4. Пусть $b_1, \ldots b_r, b_{r+1}, \ldots b_n$ числа $0, 1, \ldots n-1$. Если теперь $\varkappa_1, \ldots \varkappa_n$ числа $n-1-a_{r+1}, \ldots n-1-a_n, n+b_1, \ldots n+b_r$, то $2n-1-\lambda_1, \ldots 2n-1-\lambda_n$ числа $n-1-a_1, \ldots n-1-a_r, n+b_{r+1}, \ldots n+b_n$, а $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ — числа $n-1-b_{r+1}, \ldots n-1-b_n, n+a_1, \ldots n+a_r$. Поэтому

$$(6) \qquad (\varkappa) = \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_r \\ b_1 \ldots b_r \end{pmatrix}, \quad (\lambda) = \begin{pmatrix} b_1 \ldots b_r \\ a_1 \ldots a_r \end{pmatrix}$$

— ассоциированные характеристики, или:

$$(7) \qquad \chi\begin{pmatrix} b_1 \ldots b_r \\ a_1 \ldots a_r \end{pmatrix}_\rho = (-1)^{n-s}\chi\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_r \\ b_1 \ldots b_r \end{pmatrix}_\rho.$$

Следовательно, каждая характеристика всегда и только тогда ассоциирована сама с собой, если $a_1 = b_1, \ldots a_r = b_r$. Но в таком случае из уравнения (7), § 4, получается

$$(8) \qquad n = (2a_1 + 1) + \ldots + (2a_r + 1)$$

— представление n в виде суммы всех различных нечетных чисел. Обратно, каждому такому представлению соответствует сама с собой ассоциированная характеристика

$$(9) \qquad (\varkappa) = \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_r \\ a_1 \ldots a_r \end{pmatrix}, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_r = \frac{1}{2}(n-r).$$

Число v характеров, ассоциированных сами с собой, для $\mathfrak{H}$ равно, таким образом, числу представлений n в виде суммы различных нечетных чисел. На основании известной формулы

$$\Pi(1 + x^{2\varkappa-1}) = 1 : \Pi(1 - (-1)^{\varkappa-1}x^\varkappa)$$

это число равно разности между числом разложений

$$(10) \qquad n = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$$

при $\sum(c-1)$ четном и числом таких разложений при $\sum(c-1)$

нечетном, т. е. равно разности между числом четных и числом нечетных классов. Поэтому k классов распадаются на

(11) $\frac{1}{2}(k+v)=u+v$ четных и $\frac{1}{2}(k-v)=u$ нечетных классов.

Каждому представлению (8) соответствует разложение

$$n = 1+(2a_1+1)+\ldots+(2a_{r-1}+1)+2a_r,$$

для которого $\sum(c-1)$ — нечетное.

Выведенные здесь теоремы чрезвычайно важны при исчислении характеров полусимметрической группы, которые, как я покажу в ближайшем будущем, могут быть также вполне определены из их соотношений с характерами подгрупп.

§ 7.

Я займусь еще несколькими специальными случаями, в которых можно простым путем вычислить определенные значения характеров. Пусть подстановки ρ-ого класса состоят из s циклов, а отдельные циклы из $c_1, c_2, \ldots c_s$ символов. Тогда

(1) $$n = c_1+c_2+\ldots+c_s,$$

и пусть

(2) $$c_1 \leqq c_2 \leqq \ldots \leqq c_s.$$

Но $[\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n]\,\chi_\rho^{(\varkappa)}$ коэффициент при $x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$ в разложении произведения

(3) $$\left(x_1^{c_1}+\ldots+x_n^{c_1}\right)\ldots\left(x_1^{c_s}+\ldots+x_n^{c_s}\right)\Delta(x_1, \ldots x_n).$$

Если характеристика для $\chi^{(\varkappa)}$

(4) $$(\varkappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_r \end{pmatrix},$$

то

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n = n-1-a_{r+1}, \ldots n-1-a_n, n+b_1, \ldots n+b_r.$$

Каждый член в разложении $\Delta(x_1, \ldots x_n)$ имеет вид $\pm x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, где $k_1, k_2, \ldots k_n$ — числа $0, 1, \ldots n-1$. Общий член в разложении произведения

(5) $$\left(x_1^{c_1}+\ldots+x_n^{c_1}\right)\ldots\left(x_1^{c_s}+\ldots+x_n^{c_s}\right)$$

есть $x_\sigma^{l_1} x_\tau^{l_2} \ldots x_\omega^{l_{s'}}$, где $l_1 = c_{\sigma_1}+c_{\sigma_2}+\ldots$, $l_2 = c_{\tau_1}+c_{\tau_2}+\ldots$, а

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \tau_1, \tau_2, \ldots$$

все вместе суть числа $1, 2, \ldots s$. Следовательно, $s' \leqq s$ и лишь тогда $s'=s$, если $l_1, l_2, \ldots l_s$ независимо от порядка совпадают с $c_1, c_2, \ldots c_s$. Если перемножить оба эти члена, то s' из показателей $k_1, k_2, \ldots k_n$ увеличатся. Если, таким образом, получается член $x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$, то r из n показателей $k_1, k_2, \ldots k_n$, которые $\leqq n-1$, будут, благодаря этому увеличению, бо́льшими, чем $n-1$, а именно, равны

$$n+b_1, \ldots n+b_r.$$

Поэтому должно быть $s' \geqq r$. Это невозможно при $s<r$, и, следовательно, в этом случае $\chi_\rho^{(\varkappa)}=0$.

Если число s циклов, из которых состоят подстановки ρ-ого класса, меньше, чем ранг r характеристики $(\varkappa)$, то $\chi_\rho^{(\varkappa)}=0$.

Пусть теперь $s=r$. В таком случае ровно s из показателей $k_1, k_2, \ldots k_n$ должны увеличиться для того, чтобы они сделались равными $n+b_1, \ldots n+b_s$, а остальные $n-s$ показателей должны совпадать с $n-1-a_{s+1}, \ldots n-1-a_n$. Далее, должно быть $s'=s$ и $l_1, l_2, \ldots l_s=c_1, c_2, \ldots c_s$. Каждый из s показателей $n-1-a_1, \ldots n-1-a_s$ увеличивается на одно из чисел $c_1, \ldots c_s$, и, таким образом, получаются числа $n+b_1, \ldots n+b_s$. Поэтому

$$(6) \qquad c_1-1=a_\alpha+b_\lambda,\ c_2-1=a_\beta+b_\mu, \ldots\ c_s-1=a_\vartheta+b_\tau,$$

где $\alpha, \beta, \ldots \vartheta$ и $\lambda, \mu, \ldots \tau$ — две перестановки чисел $1, 2 \ldots s$. В другой последовательности пусть эти s уравнений будут

$$c_\xi-1=a_\gamma+b_1,\ c_\eta-1=a_\delta+b_2, \ldots\ c_\zeta-1=a_\nu+b_s.$$

К члену

$$[n+b_1, \ldots n+b_s,\ n-1-a_{s+1}, \ldots n-1-a_n] \times$$
$$\times \chi_\rho^{(\varkappa)} x_1^{n+b_1} \ldots x_s^{n+b_s} x_{s+1}^{n-1-a_{s+1}} \ldots x_n^{n-1-a_n}$$

в (3) получаем добавку от того, что член

$$x_1^{n-1-a_\gamma} \ldots x_s^{n-1-a_\nu} x_{s+1}^{n-1-a_{s+1}} \ldots x_n^{n-1-a_n}$$

в $\Delta(x_1, \ldots x_n)$ умножается на член $x_1^{c_\xi} \ldots x_s^{c_\zeta}$ в (5). Поэтому

$$\chi_\rho^{(\varkappa)}=[-a_{s+1}-1, \ldots -a_n-1,\ b_1, \ldots b_s] \times$$
$$\times \sum [-a_{s+1}, \ldots -a_n, -a_\gamma, \ldots -a_\nu]$$

или, если снова взять последовательность (6):

$$\chi_\rho^{(\varkappa)}=[-a_{s+1}-1, \ldots -a_n-1,\ b_\lambda, \ldots b_\tau] \times$$
$$\times \sum [-a_{s+1}, \ldots -a_n, -a_\alpha, \ldots -a_\vartheta],$$

причем сумма распространяется на все решения уравнений (6). Произведение обоих знаков равно

$$[b_\lambda \ldots b_\tau]\,[a_\alpha \ldots a_\vartheta]\,(-1)^{\frac{1}{2}s(s-1)}.$$

$$\operatorname{sign}(a_{s+1}-a_\alpha) \ldots (a_n-a_\alpha) \ldots (a_{s+1}-a_\vartheta) \ldots (a_n-a_\vartheta).$$

Последний знак, поскольку $\alpha, \beta, \ldots \vartheta$ отличаются от $1, 2, \ldots s$ только последовательностью, равен

$$\operatorname{sign}(a_{s+1}-a_1)\ldots(a_n-a_1)\ldots(a_{s+1}-a_s)\ldots(a_n-a_s).$$

Так как $a_1 < a_2 < \ldots < a_s$ и $a_1, \ldots a_s, a_{s+1}, \ldots a_n = 0, 1, \ldots n-1$, то среди чисел $a_{s+1}, \ldots a_n$ встречаются числа $0, 1, \ldots a_1-1$, и поэтому среди $n-s$ разностей $a_{s+1}-a_1, \ldots a_n-a_1$ имеется точно a_1 отрицательных. Точно также среди чисел $a_{s+1}, \ldots a_n$ встречаются числа $0, 1, \ldots a_2-1$, за исключением a_1, и поэтому среди $n-s$ разностей $a_{s+1}-a_2, \ldots a_n-a_2$ имеется точно a_2-1 отрицательных.

Поэтому последний знак равен

$$(-1)^{a_1+(a_2-1)+(a_3-2)+\ldots+(a_s-s+1)}.$$

Так как, наконец, $b_1 < b_2 < \ldots < b_s$, то $[b_\lambda, b_\mu, \ldots b_\tau] = [\lambda, \mu, \ldots \tau]$ и, следовательно,

$$\chi_\rho^{(\varkappa)} = (-1)^{a_1+a_2+\ldots+a_s} \sum [\alpha, \beta, \ldots \vartheta][\lambda, \mu, \ldots \tau], \tag{7}$$

причем сумма распространяется на все решения уравнений (6). Каждый член этой суммы имеет значение $+1$ или -1, в зависимости от того, будет ли $\lambda, \mu, \ldots \tau$ положительной или отрицательной перестановкой $\alpha, \beta, \ldots \vartheta$.

Если, например,

$$c_1-1 = a_1+b_1, \; c_2-1 = a_2+b_2, \ldots \; c_s-1 = a_s+b_s, \tag{8}$$

то этим дано решение уравнений (6). Другого решения они иметь не могут. Ибо, если $a_1+b_1 = c_1-1 = a_\alpha + b_\lambda$, то, поскольку $a_\alpha \geqq a_1$ и $b_\lambda \geqq b_1$, должно быть $a_\alpha = a_1$ и $b_\lambda = b_1$ и, следовательно, $\alpha = 1$ и $\lambda = 1$ и т. д. Поэтому при условии (8) имеем

$$\chi_{\rho_*}^{(\varkappa)} = (-1)^{a_1+a_2+\ldots+a_s}. \tag{9}$$

Каждый характер $\chi^{(\varkappa)}$ имеет, таким образом, по крайней мере для одного класса значение ± 1. Если же в более специальном случае $a_1 = b_1, \ldots a_s = b_s$, т. е. по (8)

$$c_1 = 2a_1+1, \; c_2 = 2a_2+1, \ldots \; c_s = 2a_s+1, \tag{10}$$

то

$$\chi_\rho^{(\varkappa)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)} = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}, \tag{11}$$

где

$$p = c_1 c_2 \ldots c_s, \tag{12}$$

ибо это произведение есть:

$$(1+2a_1)\ldots(1+2a_s) \equiv 1+2(a_1+\ldots+a_s) \pmod 4.$$

Но если $r = s$ и $a_1 = b_1, \dots a_s = b_s$ без выполнения условия (10), то

$$\chi_\rho^{(\varkappa)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)} \sum [\alpha, \beta, \dots \vartheta] [\lambda, \mu, \dots \tau],$$

причем сумма распространяется на все решения уравнений

$$c_1 - 1 = a_\alpha + a_\lambda, \ c_2 - 1 = a_\beta + a_\mu, \dots c_s - 1 = a_\vartheta + a_\tau.$$

Но этим уравнениям нельзя удовлетворить, если принять

$$\alpha = \lambda, \ \beta = \mu, \dots \vartheta = \tau,$$

так как иначе по (2) было бы $\alpha = \lambda = 1, \beta = \mu = 2, \dots \vartheta = \tau = s$. Поэтому каждому решению соответствует другое решение

$$c_1 - 1 = a_\lambda + a_\alpha, \ c_2 - 1 = a_\mu + a_\beta, \dots c_s - 1 = a_\tau + a_\vartheta,$$

отличное от первого, и, следовательно, $\chi_\rho^{(\varkappa)}$ — четное число. Как я покажу, $\chi_\rho^{(\varkappa)}$ — четное и для всех других классов, за исключением класса (10).

Чтоб разобрать еще иной пример, я хочу вычислить $\chi_\rho^{(\varkappa)}$ для того случая, когда перестановки ρ-ого класса состоят из одного цикла с c символами и из $n - c$ циклов, каждый из одного символа, причем это вычисление я хочу провести по методу, примененному в § 3 для определения $f^{(\lambda)}$. Если использовать принятые там обозначения, то

$$\sum [\lambda_1, \dots \lambda_n] \chi_\rho^{(\lambda)} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} =$$

$$= (x_1^c + \dots + x_n^c)(x_1 + \dots + x_n)^{n-c} \Delta(x_1, \dots x_n) =$$

$$= (x_1^c + \dots + x_n^c) \left(\sum \frac{(n-c)!}{\mu_1! \dots \mu_n!} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \left(\sum [\varkappa_1 \dots \varkappa_n] x_1^{\varkappa_1} \dots x_n^{\varkappa_n} \right), \right.$$

где $\mu_1 + \dots + \mu_n = n - c$, а $\varkappa_1, \dots \varkappa_n$ — числа $0, 1, \dots n-1$. Если $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, то $\chi_\rho^{(\lambda)} : (n-c)!$ состоит из n частей. Первую часть можно получить, если взять в сумме $x_1^c + \dots + x_n^c$ только первый член. Он равен

$$\sum [\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_n] \frac{1}{(\lambda_1 - c - \varkappa_1)!} \frac{1}{(\lambda_2 - \varkappa_2)!} \dots \frac{1}{(\lambda_n - \varkappa_n)!},$$

следовательно, по § 3 равен

$$\frac{\Delta(\lambda_1 - c, \lambda_2, \dots \lambda_n)}{(\lambda_1 - c)! \ \lambda_2! \dots \lambda_n!}.$$

Если его разделить на

$$f^{(\lambda)} = \frac{n! \, \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)}{\lambda_1! \ \lambda_2! \dots \lambda_n!}$$

и помножить на

$$h_\rho = \frac{n!}{c(n-c)!},$$

то

$$\frac{-c^2 h_\rho \chi_\rho^{(\lambda)}}{f^{(\lambda)}}$$

будет суммой n членов, из которых первый равен

$$\frac{(\lambda_1-c-\lambda_1)(\lambda_1-c-\lambda_2)\ldots(\lambda_1-c-\lambda_n)\lambda_1(\lambda_1-1)\ldots(\lambda_1-c+1)}{(\lambda_1-\lambda_2)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}.$$

Если положить

$$\varphi(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n),$$

$$\psi(x) = (x-c-\lambda_1)\ldots(x-c-\lambda_n)\,x(x-1)\ldots(x-c+1),$$

то, следовательно,

$$\frac{-c^2 h_\rho \chi_\rho^{(\lambda)}}{f^{(\lambda)}} = \frac{\psi(\lambda_1)}{\varphi'(\lambda_1)} + \ldots + \frac{\psi(\lambda_n)}{\varphi'(\lambda_n)};$$

это равно коэффиценту при x^{-1} разложения $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ по убывающим степеням x. Если

$$(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_r \\ b_1\, b_2 \ldots b_r \end{pmatrix},$$

то помножим эту дробь на

$$\big(x-(n-1-a_1)\big)\ldots\big(x-(n-1-a_r)\big)\big(x-c-(n-1-a_1)\big)\ldots$$
$$\ldots\big(x-c-(n-1-a_r)\big).$$

Но числа

$$\lambda_1, \ldots \lambda_n,\ n-1-a_1, \ldots n-1-a_r$$

равны числам

$$0,\ 1, \ldots n-1,\ n+b_1, \ldots n+b_r.$$

Если заменить x через $x+n$, то полученная дробь делается равной

$$\frac{(x+a_1+1)\ldots(x+a_r+1)(x-c-b_1)\ldots(x-c-b_r)x(x-1)\ldots(x-c+1)}{(x-b_1)\ldots(x-b_r)(x-c+a_1+1)\ldots(x-c+a_r+1)}.$$

Если, таким образом,

$$f(x) = \frac{(x-b_1)\ldots(x-b_r)}{(x+a_1+1)\ldots(x+a_r+1)}, \tag{13}$$

то

$$\frac{-c^2 h_\rho \chi_\rho^{(\lambda)}}{f^{(\lambda)}} = \left[\frac{f(x-c)\,x(x-1)\ldots(x-c+1)}{f(x)}\right]_{x^{-1}} = \tag{14}$$

$$= \left[\frac{\varphi(x-c)\,x(x-1)\ldots(x-c+1)}{\varphi(x)}\right]_{x^{-1}};$$

это равно коэффициенту при x^{-1} в разложении этой рациональной функции по убывающим степеням x, и эта формула остается верной также и тогда, если, применяя обозначения (3) или (4), § 4, положить

$$\varphi(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_m). \tag{15}$$

Поэтому при $c = 2$:

$$\frac{h_\rho \chi_\rho^{(\lambda)}}{f^{(\lambda)}} = \frac{1}{2}\left(\sum b(b+1) - \sum a(a+1)\right), \tag{16}$$

Что это выражение есть целое число, я доказал уже в § 2 моей работы *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte, 1896 (стр. 26—29 этой книги).

О ХАРАКТЕРАХ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ [72)]

(Über die Charaktere der alternierenden Gruppe. Sitzungsberichte der Berl. Ak., 1901, S. 303—315)

§ 1.

Характеры полусимметрической группы перестановок n символов можно определить способом, подобным тому, который я (Sitzungsberichte, 1900) применил для вычисления характеров симметрической группы (стр. 170—191 этой книги).

Полусимметрическая группа $\mathfrak{H}$ степени n состоит из четных или положительных перестановок симметрической группы $\mathfrak{H}'$. Перестановка, состоящая из s циклов $C_1, C_2, \ldots C_s$ по $c_1, c_2, \ldots c_s$ символов, будет четной или нечетной в зависимости от того, четное ли или нечетное выражение $\Sigma(c-1) = n - s$. Группы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ имеют порядки $h = \frac{1}{2}n!$ и $h' = 2h$; пусть их элементы распадаются на k и k' классов. И в $\mathfrak{H}$ две перестановки только тогда могут быть сопряжены друг с другом, если они состоят из одного и того же числа циклов одинаковых порядков. Но, возникает вопрос, образуют ли все такие перестановки и в $\mathfrak{H}$ только один класс. Ибо две четные перестановки R и S всегда и только тогда сопряжены друг с другом в $\mathfrak{H}$, если имеется **четная** перестановка P, которая удовлетворяет условию $P^{-1}RP = S$.

Если R и S сопряжены в $\mathfrak{H}'$, то это условие всегда выполняется, если R переместимо с отрицательной перестановкой T. Ибо в $\mathfrak{H}'$ имеется такая перестановка Q, что $Q^{-1}RQ = S$. Далее $(TQ)^{-1}R(TQ) = Q^{-1}(T^{-1}RT)Q = Q^{-1}RQ = S$, и из обеих перестановок Q и TQ — одна всегда четная. Следовательно, в этом случае, класс в $\mathfrak{H}$ вполне определяется числами $c_1, c_2, \ldots c_s$.

Но если R не переместимо ни с какой отрицательной перестановкой, то R и $T^{-1}RT = S$ не могут быть в $\mathfrak{H}$ сопряжены друг с другом, если T — нечетная перестановка. Ибо, иначе, имелась бы такая положительная перестановка P, для которой

$P^{-1}SP = R$, а поэтому отрицательная перестановка TP была бы переместима с R.

Если $P_1, P_2, \ldots P_h$ h положительных перестановок, то TP_1, $TP_2, \ldots TP_h$ h отрицательных перестановок. Поэтому

$$P_\lambda^{-1}RP_\lambda, \quad P_\lambda^{-1}T^{-1}RTP_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots h)$$

— все перестановки, сопряженные с R в $\mathfrak{H}'$. Они образуют в $\mathfrak{H}'$ один класс, а в $\mathfrak{H}$ — два класса, представителями которых являются перестановки R и $T^{-1}RT = S$. Два таких *сопряженных класса* в $\mathfrak{H}$ имеют один и тот же порядок.

Но для того, чтобы R было переместимо только с положительными перестановками, необходимо и достаточно, чтобы порядки циклов в R были различными нечетными числами. Ибо каждый отдельный цикл C из R — переместимая с R перестановка и именно отрицательная, если порядок c этого цикла четный. Если же порядок c нечетный и если два таких цикла, к примеру $(1, 2, \ldots c)$ и $(c+1, c+2, \ldots 2c)$, одного и того же порядка, то R переместимо с перестановкой $(1, c+1)(2, c+2)\ldots$ $\ldots(c, 2c)$, которая состоит из нечетного числа c транспозиций, следовательно, сама нечетная.

Если же порядки $c_1, c_2, \ldots c_s$ циклов $C_1, C_2 \ldots C_s$ перестановки R все различные нечетные числа, то R переместимо только с положительными перестановками. Эти последние перестановки образуют группу переместимых элементов:

(1) $$C_1^{\gamma_1}C_2^{\gamma_2}\ldots C_s^{\gamma_s} \qquad (\gamma_1 = 0, 1, \ldots c_1 - 1; \ldots \gamma_s = 0, 1, \ldots c_s - 1)$$

порядка

(2) $$p = c_1 c_2 \ldots c_s,$$

и все они четные, так как все их базисные элементы $C_1, C_2, \ldots$ C_s четные.

Пусть в симметрической группе $\mathfrak{H}'$ u — число нечетных, а $u+v$ — число четных классов. В таком случае v — число тех классов $\mathfrak{H}'$, перестановки которых состоят только из циклов различных нечетных порядков. В группе $\mathfrak{H}$ каждый из этих v классов $\mathfrak{H}'$ распадается на два сопряженных класса, а каждый из u остальных четных классов $\mathfrak{H}'$ остается и в $\mathfrak{H}$ одним классом. Поэтому

(3) $$k = u + 2v, \quad k' = 2u + v,$$

и так как $u > v$, то также и $k' > k$.

§ 2.

С помощью правил, выведенных мною в § 1 моей работы *Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen*, Sitzungsberichte, 1898 („О соотношениях между характерами группы и характерами ее подгрупп", в дальнейшем цитируемой, как U.) k характеров $\mathfrak{H}$ можно в большей своей части вывести из характеров $\mathfrak{H}'$. Если подставить в характере $\chi(S)$ для $\mathfrak{H}'$ вместо S только h элементов R из $\mathfrak{H}$, то $\chi(R)$ будет линейным соединением k характеров $\varphi^{(\varkappa)}(R)$ группы $\mathfrak{H}$:

$$\chi(R) = \sum_{\varkappa} r_{\varkappa} \varphi^{(\varkappa)}(R)$$

с положительными целыми коэффициентами $r_{\varkappa}$; следовательно,

$$\sum_R \chi(R)\chi(R^{-1}) = h\sum_{\varkappa} r_{\varkappa}^2.$$

Для симметрической группы оба (вообще сопряженных комплексных) значения $\chi(R)$ и $\chi(R^{-1})$ равны друг другу. Если S пробегает $2h$ элементов из $\mathfrak{H}'$, то

$$\sum_S \chi(S)^2 = 2h.$$

Если T — некоторая отрицательная перестановка, то R и RT оба вместе пробегают $2h$ элементов S из $\mathfrak{H}'$ и, следовательно,

$$\sum_R \chi(R)^2 + \sum_R \chi(RT)^2 = 2h.$$

Ассоциированный с $\chi(S)$ характер для $\mathfrak{H}'$ имеет значения $\omega(R) = \chi(R)$, $\omega(RT) = -\chi(RT)$. Если характер $\chi(S)$ не ассоциирован сам с собой, то $\chi(S)$ и $\omega(S)$ различные характеры для $\mathfrak{H}'$ и, следовательно,

$$\sum \chi(S)\omega(S) = 0, \quad \sum \chi(R)^2 = \sum \chi(RT)^2;$$

таким образом,

$$\sum \chi(R)\chi(R^{-1}) = h, \quad \sum r_{\varkappa}^2 = 1.$$

Поэтому из k положительных чисел $r_{\varkappa}$ одно равно 1, а остальные равны 0, и, следовательно, $\chi(R)$ — характер для $\mathfrak{H}$. Так из каждой из u пар ассоциированных характеров для $\mathfrak{H}'$ возникает характер для $\mathfrak{H}$, который удовлетворяет условию

$$\chi(T^{-1}RT) = \chi(R), \tag{1}$$

т. е. сопряжен сам с собой.

Но если $\chi(S)$ сопряжен сам с собой, то $\chi(RT) = 0$,

$$\sum \chi(R)^2 = 2h, \quad \sum r_{\varkappa}^2 = 2.$$

Следовательно, два из чисел $r_{\varkappa}$ равны 1, а остальные равны 0, и $\chi(R)$ равно сумме двух различных характеров $\varphi(R)$ и $\psi(R)$ для $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ — инвариантная подгруппа для $\mathfrak{H}'$, то по U. § 2 $\varphi(R)$ и $\psi(R)$ — два сопряженных характера, т. е.

$$\psi(R) = \varphi(T^{-1}RT), \quad \chi(R) = \varphi(R) + \psi(R) = \varphi(R) + \varphi(T^{-1}RT). \tag{2}$$

Если R принадлежит к одному из u нераспадающихся классов $\mathfrak{H}'$, то R и $T^{-1}RT$ также сопряжены в $\mathfrak{H}$, и поэтому для такого элемента R

$$\varphi(R) = \psi(R) = \frac{1}{2}\chi(R). \tag{u.}$$

В частности, это имеет место при $R=E$. Степени обоих сопряженных характеров φ и ψ, таким образом, равны друг другу,— именно равны половине степени χ. Если же все порядки циклов R — различные нечетные числа, если, таким образом, R принадлежит к одному из v распадающихся классов $\mathfrak{H}'$, то значения $\varphi(R)$ и $\psi(R)$ могут быть различны, а именно, если положить $T^{-1}RT=S$, то

$$(\text{v.})\qquad \varphi(R)=\psi(S),\quad \varphi(S)=\psi(R).$$

Из каждого из v ассоциированных сами с собой характеров для $\mathfrak{H}'$ возникает, таким образом, два различных и при этом сопряженных характера для $\mathfrak{H}$.

Полученные таким образом $u+2v=k$ характеров для $\mathfrak{H}$ все отличны друг от друга. Действительно, пусть $\varphi(R)=\chi(R)$ и $\overline{\varphi}(R)=\overline{\chi}(R)$ — два из числа первых u характеров для $\mathfrak{H}$, и пусть при S, пробегающем $2h$ элементов из $\mathfrak{H}'$, $\overline{\chi}(S)$ отличается как от $\chi(S)$, так и от ассоциированного с $\chi(S)$ характера. В таком случае

$$\sum_R \chi(R)\overline{\chi}(R)+\sum_R \chi(RT)\overline{\chi}(RT)=0,$$

а также, если подставить вместо $\chi(R)$ ассоциированный характер,

$$\sum \chi(R)\overline{\chi}(R)-\sum \chi(RT)\overline{\chi}(RT)=0,$$

и, следовательно,

$$\sum_R \varphi(R)\overline{\varphi}(R^{-1})=0,$$

т. е. $\overline{\varphi}$ отлично от $\varphi(R)$.

Если же $\overline{\varphi}(R)=\overline{\chi}(R)$ — один из u первых, а $\varphi(R)$ — один из $2v$ последних характеров для $\mathfrak{H}$, — именно, происходящий из $\chi(R)=\varphi(R)+\psi(R)$, то $\chi(RT)=0$, а следовательно,

$$\sum \overline{\chi}(S^{-1})\chi(S)=0,\qquad \sum \overline{\varphi}(R^{-1})\bigl(\varphi(R)+\psi(R)\bigr)=0.$$

Но φ и ψ различны. Поэтому если бы $\overline{\varphi}$ было равно одному из этих обоих характеров, то эта сумма была бы равна h. Наконец, тем же путем можно выяснить, что каждые два из последних $2v$ характеров для $\mathfrak{H}$ отличны друг от друга.

Таким образом, для того, чтобы определить $u+2v=k$ различных характеров из $\mathfrak{H}$, нужно еще только разбить каждый из v ассоциированных сами с собою характеров χ для $\mathfrak{H}'$ на два сопряженных характера φ и ψ и при этом только для v перестановок R, состоящих из циклов различных нечетных порядков.

$k'=2u+v$ характеров для $\mathfrak{H}'$ состоят из u пар ассоциированных характеров и v характеров, ассоциированных сами с собою. $k=u+2v$ характеров для $\mathfrak{H}$ состоят из v пар сопряженных характеров и u характеров, сопряженных сами с собой.

§ 3.

Прежде всего я укажу на примеры $n=4$ и $n=5$ в § 3 моей работы *Über Gruppencharaktere* („О групповых характерах", стр. 49—52 этой книги) и на пример $n=6$ в § 4 моей работы *Über die Composition der Charaktere einer Gruppe*, Sitzungsberichte, 1896 и 1899 („О композиции характеров группы", стр. 148—150 этой книги). В этих случаях $v=1$; то же самое имеем и при $n=7$. Поэтому здесь я даю еще пример $n=8$, где $v=2$.

В первом столбце прилагаемой таблицы дается класс перестановки посредством формулы $n=1\cdot\alpha+2\cdot\beta+\ldots$, т. е. тем, что она состоит из α циклов порядка 1, β циклов порядка 2 и т. д. Если имеется только один цикл определенного порядка, то множитель α, β и т. д. опускается. Сначала идут $u=10$ нечетных классов, затем $u+v=12$ четных.

Из каждой из $u=10$ пар ассоциированных характеров дан только один характер. Другой характер получается из данного путем умножения на характер первой степени $\chi\binom{7}{0}$, ассоциированный с главным характером $\chi\binom{0}{7}=1$. В двух последних столбцах стоят $v=2$ характера, ассоцированных сами с собой.

Характеры даются формулами (11), § 4 и (3), § 5 моей работы *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe* („О характерах симметрической группы", стр. 181 и 183 этой книги), а также следующими формулами:

$$\chi\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & n-4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)-\gamma,$$

$$\chi\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & n-5\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-6)+\frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2)\beta-$$
$$-\frac{1}{2}\beta(\beta-1)-\delta,$$

$$\chi\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & n-5\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\alpha(\alpha-1)(\alpha-4)(\alpha-5)+\beta(\beta-2)-(\alpha-1)\gamma,$$

$$(1)\quad\chi\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & n-5\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\alpha(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-5)-\frac{1}{2}\alpha(\alpha-3)\beta-$$
$$-\frac{1}{2}\beta(\beta-1)+\delta,$$

$$\chi\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & n-6\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-5)(\alpha-7)+$$
$$+\frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-5)\beta+\frac{1}{2}(\alpha-1)\beta(\beta-1)-$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2)\gamma+\beta\gamma-(\alpha-1)\delta.$$

В полусимметрической группе класс $(1+7)$ распадается на два класса, которые я различаю знаком $+$ или $-$. Точно также характер $\chi\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ распадается на два характера. Это же относится и к классу (3+5) и к соответствующему этому классу характеру $\chi\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тем же путем, как и в этих примерах, можно найти для каждого значения n характеры полусимметрической группы $\mathfrak{H}$. Пусть

$$(2)\qquad c_1 = 2a_1+1,\quad c_2 = 2a_2+1,\ldots\ c_s = 2a_s+1\quad (c_1 < c_2 < \ldots < c_s)$$

s различных нечетных чисел, сумма которых:

$$(3)\qquad c_1+c_2+\ldots+c_s = n.$$

Классу (2) симметрической группы $\mathfrak{H}'$ соответствует сам с собой ассоциированный характер

$$(4)\qquad \chi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_s \\ a_1 & a_2 \ldots a_s \end{pmatrix},$$

и, обратно,— этому характеру соответствует класс (2). Этим путем v сами с собой ассоциированных характеров (4) группы $\mathfrak{H}'$ и v классов (2) взаимно-однозначно сопряжены друг с другом. Если R принадлежит к классу (2) и если T какая-либо отрицательная перестановка, то R и $T^{-1}RT = S$ представляют оба сопряженных класса, на которые класс (2) распадается в полусимметрической группе $\mathfrak{H}$. Таким же образом характер (4) в $\mathfrak{H}'$ распадается на два сопряженных характера в $\mathfrak{H}$:

$$(5)\qquad \chi(P) = \varphi(P)+\psi(P),$$

где

$$\psi(P) = \varphi(T^{-1}PT).$$

В таком случае для каждого, представленного через Q класса в $\mathfrak{H}$

$$(6)\qquad \varphi(Q) = \psi(Q) = \frac{1}{2}\chi(Q)$$

за исключением обоих классов (R) и (S). Я уже показал в § 2 что это уравнение действительно для u классов из $\mathfrak{H}$, циклы которых не удовлетворяют условиям (2). Но это уравнение верно и для $2v-2$ остальных классов. Тогда как:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \varphi(R) &= \frac{1}{2}(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon p}),\quad \psi(R) = \frac{1}{2}(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon p}),\\ \varphi(S) &= \frac{1}{2}(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon p}),\quad \psi(S) = \frac{1}{2}(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon p}), \end{aligned}$$

$h = 8! = 40\,320$

$1\cdot\alpha+2\cdot\beta+\ldots$	h_ρ	$\binom{7}{0}$	$\binom{1}{6}$	$\binom{2}{5}$	$\binom{3}{4}$	$\binom{0\,1}{0\,5}$	$\binom{0\,1}{1\,4}$	$\binom{0\,1}{2\,3}$	$\binom{0\,2}{0\,4}$	$\binom{0\,2}{1\,3}$	$\binom{1\,2}{0\,3}$	$\binom{0\,3}{0\,3}$	$\binom{1\,2}{1\,2}$
$1\cdot6+2$	28	—1	5	9	5	10	10	4	16	10	4	0	0
$1\cdot4+4$	420	—1	3	3	1	2	—2	—2	0	—4	0	0	0
$1\cdot3+2+3$	1120	—1	2	0	—1	1	1	1	—2	1	—2	0	0
$1\cdot2+2\cdot3$	420	—1	1	—3	—3	2	2	0	0	—2	4	0	0
$1\cdot2+6$	3360	—1	1	0	0	—1	—1	0	0	1	1	0	0
$1+2+5$	4032	—1	0	—1	0	0	0	—1	1	0	—1	0	0
$1+3+4$	3360	—1	0	0	1	—1	1	1	0	—1	0	0	0
$2\cdot2+4$	1260	—1	—1	—1	1	2	—2	2	0	0	0	0	0
$2+3\cdot2$	1120	—1	—1	0	2	1	1	—2	—2	1	1	0	0
8	5040	—1	—1	1	—1	0	0	0	0	0	0	0	0
$1\cdot8$	1	1	7	21	35	20	28	14	64	70	56	90	42
$1\cdot5+3$	112	1	4	6	5	5	1	—1	4	—5	—4	0	—6
$1\cdot4+2\cdot2$	210	1	3	1	—5	4	4	2	0	2	0	—6	2
$1\cdot3+5$	1344	1	2	1	0	0	—2	—1	—1	0	1	0	2
$1\cdot2+2+4$	2520	1	1	—1	—1	0	0	0	0	0	0	2	—2
$1\cdot2+3\cdot2$	1120	1	1	0	2	—1	1	2	—2	1	—1	0	0
$1+2\cdot2+3$	1680	1	0	—2	1	1	1	—1	0	—1	0	0	2
$2\cdot4$	105	1	—1	—3	3	4	—4	6	0	—2	8	—6	—6
$2+6$	3360	1	—1	0	0	1	—1	0	0	1	—1	0	0
$4\cdot2$	1260	1	—1	1	—1	0	0	2	0	—2	0	2	2
$1+7$	5760	1	0	0	0	—1	0	0	1	0	0	—1	0
$3+5$	2688	1	—1	1	0	0	1	—1	—1	0	1	0	—1

где

$$(8) \qquad p = c_1 c_2 \ldots c_s = \frac{h}{h_R}, \quad \varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)}.$$

Циклическая перестановка $C=(0,\ 1,\ 2,\ldots a,\ a+1,\ldots 2a-1,\ 2a)$ порядка $c=2a+1$ преобразуется посредством перестановки

$$G = (1,\ 2a)\,(2,\ 2a-1)\ldots(a,\ a+1)$$

в

$$G^{-1}CG = (0,\ 2a,\ 2a-1,\ \ldots\ a+1,\ a,\ \ldots\ 2,\ 1) = C^{-1}.$$

Полусимметрическая группа

$$h = \frac{1}{2}\,8\,! = 20\,160$$

$1\cdot\alpha+2\cdot\beta$	h_ρ	$\binom{0}{7}$	$\binom{1}{6}$	$\binom{2}{5}$	$\binom{3}{4}$	$\binom{0\,1}{0\,5}$	$\binom{0\,1}{1\,4}$	$\binom{0\,1}{2\,3}$	$\binom{0\,2}{0\,4}$	$\binom{0\,2}{1\,3}$	$\binom{1\,2}{0\,3}$	$\binom{0\,3}{0\,3}_+$	$\binom{0\,3}{0\,3}_-$	$\binom{1\,2}{1\,2}_+$	$\binom{1\,2}{1\,2}_-$
$1\cdot 8$	1	1	7	21	35	20	28	14	64	70	56	45	45	21	21
$1\cdot 5+3$	112	1	4	6	5	5	1	−1	4	−5	−4	0	0	−3	−3
$1\cdot 4+2\cdot 2$	210	1	3	1	−5	4	4	2	0	2	0	−3	−3	1	1
$1\cdot 3+5$	1344	1	2	1	0	0	−2	−1	−1	0	1	0	0	1	1
$1\cdot 2+2+4$	2520	1	1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	1	1	−1	−1
$1\cdot 2+3\cdot 2$	1120	1	1	0	2	−1	1	2	−2	1	−1	0	0	0	0
$1+2\cdot 2+3$	1680	1	0	−2	1	1	1	−1	0	−1	0	0	0	1	1
$2\cdot 4$	105	1	−1	−3	3	4	−4	6	0	−2	8	−3	−3	−3	−3
$2+6$	3360	1	−1	0	0	1	−1	0	0	1	−1	0	0	0	0
$4\cdot 2$	1260	1	−1	1	−1	0	0	2	0	−2	0	1	1	1	1
$(1+7)_+$	2880	1	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-7})$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-7})$	0	0
$(1+7)_-$	2880	1	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-7})$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-7})$	0	0
$(3+5)_+$	1344	1	−1	1	0	0	1	−1	−1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-15})$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-15})$
$(3+5)_-$	1344	1	−1	1	0	0	1	−1	−1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-15})$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-15})$

G состоит из $a=\frac{1}{2}(c-1)$ транспозиций. Поэтому $R=C_1C_2\ldots C_s$ посредством перестановки H, состоящей из $\frac{1}{2}\sum(c-1)=\frac{1}{2}(n-s)$ транспозиций, преобразуется в $H^{-1}RH=R^{-1}$. Но по условию (2) перестановки, преобразующие R в R^{-1}, — или все четные, или все нечетные. Поэтому R и R^{-1} принадлежат в $\mathfrak{H}$ к одному и тому же классу, или к двум различным сопряженным классам, — в зависимости от того, будет ли $\varepsilon=+1$ или -1. В первом случае $\varphi(R)=\varphi(R^{-1})$ — действительная величина, а во втором — $\varphi(R)$ и $\varphi(R^{-1})=\psi(R)$ сопряженные комплексные величины.

§ 4.

Доказательству вышеустановленной теоремы [73)] я предпосылаю два замечания, касающиеся любых групп.

1. Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — две группы порядков h_1 и h_2, имеющие общим только главный элемент. Пусть, далее, каждый элемент из $\mathfrak{H}_1$ переместим с каждым элементом из $\mathfrak{H}$. В таком случае $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_1$ — группа порядка $h=h_1h_2$. Если элементы из $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ распадаются на k_1 и k_2 классов, то элементы из $\mathfrak{H}$ распадаются на $k=k_1k_2$ классов. Если $A_1, B_1, \ldots R_1, \ldots$ $(A_2, B_2, \ldots R_2, \ldots)$ — представители k_1 (k_2) классов из $\mathfrak{H}_1$ $(\mathfrak{H}_2)$, то A_1A_2, A_1B_2, A_2B_1, $A_2A_1, \ldots R_1R_2, \ldots$ представляют $k_1k_2=k$ классов для $\mathfrak{H}$. Если $\chi_1(R_1)$ $(\chi_2(R_2))$ — характер для $\mathfrak{H}_1$ $(\mathfrak{H}_2)$ и если $R=R_1R_2$, то $\chi(R)=\chi_1(R_1)\chi_2(R_2)$ характер для $\mathfrak{H}$. Если подставить вместо χ_1 (χ_2) по порядку каждый из k_1 (k_2) различных характеров для $\mathfrak{H}_1$ $(\mathfrak{H}_2)$, то получим $k_1k_2=k$ различных характеров для $\mathfrak{H}$. Эти теоремы получаются из тех свойств, посредством которых я определил характеры в § 1 моей работы *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte 1897 („О представлении конечных групп через линейные подстановки“, стр. 108 этой книги).

2. Между характерами χ группы $\mathfrak{G}$ и характерами ψ какой-либо из ее подгрупп $\mathfrak{H}$ имеется по *U.* § 1 (5), соотношение

$$\sum_{\lambda} r_{\varkappa\lambda}\,\chi^{(\lambda)}(R)=\frac{h}{gh_\rho}\sum_{(\rho)}\psi^{(\varkappa)}(P). \tag{1}$$

Целые положительные числа $r_{\varkappa\lambda}$ не зависят от класса (ρ) элемента R. g_ρ содержащихся в $\mathfrak{G}$ элементов P ρ-ого класса из $\mathfrak{H}$ распределяются по нескольким, хотя бы по m, различным классам в $\mathfrak{G}$. Пусть элементы $P_1, P_2, \ldots P_m$ представляют эти классы. Если класс P_μ состоит из l_μ элементов, то

$$\sum_{(\rho)}\psi(P)=l_1\psi(P_1)+l_2\psi(P_2)+\ldots+l_m\psi(P_m).$$

Группа элементов из $\mathfrak{G}$, переместимых с P, содержится в группе элементов из $\mathfrak{H}$, переместимых с P. В этом случае, который я в дальнейшем рассматриваю, обе эти группы тождественны друг другу для каждого из g_ρ элементов P из $\mathfrak{G}$, принадлежащих к определенному классу (ρ) в $\mathfrak{H}$; иначе говоря, каждый переместимый с P элемент из $\mathfrak{H}$ содержится в $\mathfrak{G}$. Число переместимых с P элементов из $\mathfrak{H}$ равно $\frac{h}{h_\rho}$, а число переместимых с P_μ элементов из $\mathfrak{G}$ равно $\frac{g}{l_\mu}$. Поэтому

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_m = \frac{g_\rho}{m}, \quad \frac{h}{h_\rho} = \frac{g}{l_\mu} = \frac{gm}{g_\rho}$$

и по (1)

$$\psi^{(\varkappa)}(P_1) + \psi^{(\varkappa)}(P_2) + \ldots + \psi^{(\varkappa)}(P_m) = \sum_\lambda r_{\varkappa\lambda}\chi^{(\lambda)}(R). \tag{2}$$

§ 5.

Теперь я обращаюсь к доказательству правила, которое я установил в § 3, для вычисления характера полусимметрической группы $\mathfrak{H}$ степени n. При этом я принимаю, что это правило является уже доказанным для всякой полусимметрической группы $\mathfrak{H}_1$ степени $n_1 < n$.

Я пользуюсь обозначениями (2) и (3), § 3, но предполагаю $s > 1$ при n нечетном. Я распределяю n символов на c_1 первых символов и $n - c_1$ последних символов и образую симметрическую и полусимметрическую группы $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_2$ как для первых c_1, так и для последних $n - c_1$ символов. Если $c_1 = 1$, то дальнейшие рассуждения нуждаются в некоторой модификации, которую я опускаю из-за ее простоты.

В таком случае $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$ — подгруппа полусимметрической группы $\mathfrak{H}$, степени n. Пусть R_1 состоит из одного цикла c_1 первых символов, а R_2 — из $s-1$ циклов по $c_2, \ldots c_s$ последних $n - c_1$ символов. Пусть $T_1\,(T_2)$ некоторая отрицательная перестановка из $\mathfrak{H}_1'\,(\mathfrak{H}_2')$. Пусть, далее, $T_1^{-1}R_1T_1 = S_1$ и $T_2^{-1}R_2T_2 = S_2$. В таком случае, если

$$p_1 = c_1, \quad p_2 = c_2 \ldots c_s, \quad \varepsilon_1 = (-1)^{\frac{1}{2}(p_1-1)}, \quad \varepsilon_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(p_2-1)},$$

то в $\mathfrak{H}_1$ имеются два сопряженных характера $\varphi_1(P_1)$ и $\psi_1(P_1) = \varphi_1(T_1^{-1}P_1T_1)$, для которых

$$\varphi_1(R_1) = \psi_1(S_1) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\right), \quad \varphi_1(S_1) = \psi_1(R_1) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\right),$$

а в $\mathfrak{H}_2$ имеются два сопряженных характера $\varphi_2(P_2)$ и $\psi_2(P_2) = \varphi_2(T_2^{-1}P_2T_2)$, для которых

$$\varphi_2(R_2) = \psi_2(S_2) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_2 p_2}\right), \quad \varphi_2(S_2) = \psi_2(R_2) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2 - \sqrt{\varepsilon_2 p_2}\right),$$

в то время, как для всякого другого класса $\varphi_1(Q_1) = \psi_1(Q_1)$ и $\varphi_2(Q_2) = \psi_2(Q_2)$ — целые рациональные числа. Отсюда по § 4 получаются четыре различных характера для $\mathfrak{G}$: $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_1\psi_2$, $\varphi_2\psi_1$, $\varphi_2\psi_2$. Если

$$R_1 R_2 = R, \quad R_1 S_2 = S, \quad T_1 T_2 = T,$$

то T — положительная перестановка, и

$$T^{-1} RT = S_1 S_2, \quad T^{-1} ST = S_1 R_2, \quad T_2^{-1} RT_2 = S.$$

Поэтому оба класса $(R_1 R_2)$ и $(S_1 S_2)$ в $\mathfrak{G}$ соединяются в один класс (R) в $\mathfrak{H}$, а оба класса $(R_1 S_2)$ и $(S_1 R_2)$ — в один класс (S), но оба класса (R) и (S) в $\mathfrak{H}$ различны, так как T_2 нечетно.

Класс (R) может содержать только такие элементы из $\mathfrak{G}$, которые принадлежат к одному из двух классов $(R_1 R_2)$ или $(S_1 S_2)$, ибо каждая перестановка P класса (R) состоит из s циклов $C_1, C_2, \ldots C_s$ по $c_1, c_2, \ldots c_s$ символов. Если она должна принадлежать группе $\mathfrak{G}$, то должно быть $P = P_1 P_2$, где P_1 переставляет только первые c_1 символов, а P_2 — только последние $n - c_1$ символов. Но это возможно только тогда, когда $P_1 = C_1$, а $P_2 = C_2 \ldots C_s$, ибо c_1 — наименьшее из чисел $c_1, c_2, \ldots c_s$ и, следовательно, оно не может быть представлено, как сумма некоторых чисел из $c_2, \ldots c_s$.

На этом основании я разделил n символов таким именно образом на две части из $n_1 = c_1$ и $n_2 = n - c_1$ символов. Той же цели можно, однако, достигнуть также, если положить $n_1 = c_2$, $n_2 = c_1 + c_3 + \ldots + c_s$, и этот случай имеет то преимущество, что n_1 не может быть равно 1.

Поэтому P_1 принадлежит к классу (R_1) или (S_1), а P_2 — к классу (R_2) или (S_2). Но, как показано выше, возможны только следующие комбинации:

$$(R) = (R_1 R_2) + (S_1 S_2), \quad (S) = (R_1 S_2) + (S_1 R_2).$$

По (1), § 1, все элементы из $\mathfrak{H}$, переместимые с R, содержатся в $\mathfrak{G}$. Поэтому имеется такой сложный характер $\varphi(P)$ группы $\mathfrak{H}$, для которого

$$\varphi(R) = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\right)\left(\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_2 p_2}\right) + \frac{1}{4}\left(\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\right)\left(\varepsilon_2 - \sqrt{\varepsilon_2 p_2}\right).$$

Если положить

$$p = p_1 p_2 = c_1 c_2 \ldots c_s, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)}$$

и если $\psi(P) = \varphi(T_2^{-1} P T_2)$ — сопряженный с $\varphi(P)$ характер, то

$$\varphi(R) = \psi(S) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon p}\right), \quad \varphi(S) = \psi(R) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon p}\right).$$

Для каждого элемента Q_2 из $\mathfrak{H}_2$, который не принадлежит к классу (R_2), $\varphi_2(Q_2) = \varphi_2(T_2^{-1} Q_2 T_2)$. Если применить формулу

(1), § 4, к элементу $Q = R_1 Q_2$ из $\mathfrak{H}$, то в правой части рядом с каждым членом $\varphi_1(R_1)\varphi_2(Q_2)$ будет стоять также член $\varphi_1(T_1^{-1}R_1 T_1)\varphi_2(T_2^{-1} Q_2 T_2)$, и сумма этих обоих членов — рациональное число, которое не меняется, если подставить $T_2^{-1} Q T_2$ вместо Q. Поэтому $\varphi(Q) = \psi(Q)$ целое рациональное число, и это же относится к элементу $Q = Q_1 R_2$ или $Q = Q_1 Q_2$.

Таким образом, $\mathfrak{H}$ имеет сложный характер $\varphi - \psi = \vartheta$ со значениями:

$$(1) \qquad \vartheta(R) = \sqrt{\varepsilon p}, \quad \vartheta(S) = -\sqrt{\varepsilon p}, \quad \vartheta(Q) = 0,$$

если (Q) — какой-либо класс, который отличается от обоих данных сопряженных классов (R) и (S). Для каждого из этих обоих классов $h_\rho = \frac{h}{p}$ и, следовательно

$$\sum_\rho h_\rho \vartheta_\rho \vartheta_{\rho'} = 2h,$$

если $\vartheta_{\rho'}$ обозначает сопряженную с ϑ_ρ комплексную величину. Если, таким образом, как в § 2, $\vartheta(P) = \sum r_\varkappa \varphi^{(\varkappa)}(P)$, то $\sum r_\varkappa^2 = 2$, поэтому два из чисел $r_\varkappa$ равны ± 1, а остальные равны нулю. Но $\varphi^{(\varkappa)}(E)$ — положительное целое число, а $\vartheta(E) = 0$. Следовательно, $\vartheta(P)$ — разность двух простых характеров группы $\mathfrak{H}$. Оба характера φ и ψ для $\mathfrak{H}$, разность которых ϑ получена выше, могут быть сложными. В дальнейшем я буду обозначать через φ и ψ оба простых характера для $\mathfrak{H}$, разность которых: $\varphi - \psi = \vartheta$.

Если $\chi(P)$ один из u характеров для $\mathfrak{H}$, которые происходят из пары ассоциированных характеров группы $\mathfrak{H}'$, то $\chi(R) = \chi(S)$, и, следовательно, по (1) $\sum h_\rho \vartheta_\rho \chi_{\rho'} = 0$. Поэтому ни один из обоих характеров φ и ψ не равен χ, но вместе с тем φ и ψ принадлежат к $2v$ характерам группы $\mathfrak{H}$, которые происходят из v ассоциированных сами с собой характеров группы $\mathfrak{H}'$ и распадаются на v пар сопряженных характеров. Сопряженный с φ характер ω отличается, таким образом, от φ. Если $\chi = \varphi + \omega$, то $\chi(R) = \chi(S)$ и, следовательно, $\sum h_\rho \vartheta_\rho \chi_{\rho'} = 0$ или $\sum h_\rho (\varphi_\rho - \psi_\rho)(\varphi_{\rho'} + \omega_{\rho'}) = 0$, и так как φ и ψ отличны от ω, то $\sum h_\rho \psi_\rho \omega_{\rho'} = h$. Следовательно, $\omega = \psi$, или φ и ψ — сопряженные характеры.

Я ставлю в соответствие друг с другом пару сопряженных классов (R) и (S) и пару сопряженных характеров φ и ψ. В таком случае по (1) различным парам (R), (S) соответствуют различные пары φ, ψ, и обратно. Значения характера — целые алгебраические числа. Поэтому $\chi(R) = \chi(S) = 2\varphi(R) - \sqrt{\varepsilon p}$ — нечетное (рациональное) число, а $\chi(Q) = 2\varphi(Q)$ — четное число.

Для того, чтобы иметь возможность применить заключение по индукции, мы предполагали до сих пор $s > 1$. Если, таким образом, n нечетное, то остается еще лишняя пара сопряженных классов (R), (S), перестановки которых состоят из одного единственного цикла из n символов, и, следовательно, также лишняя пара сопряженных характеров φ, ψ, сумму и разность которых я обозначаю через χ и ϑ. Если теперь $(\bar{R})$, $(\bar{S})$ какая-нибудь иная пара сопряженных классов, а $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ — соответствующая пара сопряженных характеров, и если $\bar{\vartheta} = \bar{\varphi} - \bar{\psi}$, то $\sum h_\rho \bar{\vartheta}_{\rho'} \varphi_\rho = 0$, и, следовательно, $\varphi(\bar{R}) = \varphi(\bar{S}) = \psi(\bar{R}) = \psi(\bar{S})$. Если, таким образом, (Q) какой-либо отличный от (R) и (S) класс, который отличается от сопряженного с ним класса, то $\vartheta(Q) = 0$, $\varphi(Q) = \psi(Q) = = \frac{1}{2}\chi(Q)$. По § 2 $\varphi(R) = \psi(S)$ и $\varphi(S) = \psi(R)$. Элементы R и R^{-1} принадлежат к одному и тому же классу, если $n \equiv 1 \pmod 4$, и к двум сопряженным классам, если $n \equiv -1 \pmod 4$. Поэтому в первом случае $\varphi(R)$ и $\varphi(S)$ реальные величины, а во втором — сопряженные комплексные. Но $\sum h_\rho \varphi_{\rho'} \vartheta_\rho = h$, следовательно, если $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} = +1$, то $h_R(\varphi(R)\vartheta(R) + \varphi(S)\vartheta(S)) = h$, и, таким образом, $\vartheta(R)^2 = \frac{h}{h_R} = p = n$. Если же $\varepsilon = -1$, то $h_R(\varphi(R)\vartheta(S) + \varphi(S)\vartheta(R)) = h$, поэтому $\vartheta(R)^2 = -p$. Следовательно, $\vartheta(R) = =\sqrt{\varepsilon p}$, $\vartheta(S) = -\sqrt{\varepsilon p}$, и поэтому для этого соответствия верны те же законы, что и выше.

Условием, что $\chi(R) = \chi(S)$ — нечетное, а в остальных случаях $\chi(Q)$ — четное, вполне определяется соответствие между парой сопряженных характеров, сумма которых $= \chi$, и соответствующей парой сопряженных классов (R), (S), причем, как сказано выше, χ должно иметь характеристику

$$\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_s \\ a_1\, a_2 \ldots a_s \end{pmatrix},$$

если

$$c_1 = 2a_1 + 1, \quad c_2 = 2a_2 + 1, \ldots c_s = 2a_s + 1$$

порядки циклов R. Ибо по формуле (11), § 7 моей работы *Über die Charaktere des symmetrischen Gruppe* („О характерах симметрической группы“, стр. 188 этой книги)

$$\chi\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_s \\ a_1 \ldots a_s \end{pmatrix}(R) = \varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-s)}$$

— нечетное. Этим вполне определяются k характеров группы $\mathfrak{H}$.

Если класс $(\varkappa)$ и сопряженный класс соответствует характеру $\chi^{(\varkappa)}$ и сопряженному характеру, то, по формуле (9), § 4 только что цитированной работы и по формуле (6), § 3 данной работы,

$$f^{(\varkappa)} = \frac{1}{2}\,\frac{n!\,\Delta(a_1, \ldots a_s)^2}{(a_1! \ldots a_s!)^2\,\Pi(a_\alpha + a_\beta + 1)}.$$

Но

$$\frac{h}{h_\varkappa} = (2a_1 + 1) \ldots (2a_s + 1),$$

и, следовательно:

$$\frac{h_\varkappa}{f^{(\varkappa)}} = \left(\frac{a_1! \ldots a_s!) \Pi' (a_\alpha + a_\beta + 1)}{\Delta (a_1, \ldots a_s)} \right)^2 \tag{2}$$

— квадрат целого числа. Произведение Π' берется только по $\frac{1}{2} s (s-1)$ парам различных индексов. Квадратный корень, встречающийся в $\chi_\varkappa^{(\varkappa)}$, может поэтому быть извлечен из

$$\frac{\varepsilon h}{h_\varkappa} \text{ или } \frac{\varepsilon h}{f^{(\varkappa)}}.$$

В исключительных случаях этот корень может быть рациональным, например, если $n = 9$ и R состоит из цикла в 9 символов.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1]) Эта первая работа настоящего сборника является вспомогательной для дальнейшего. В § 1 — 3 изложены довольно элементарные теоремы о характеристической функции матрицы. В § 4 излагаются весьма важные для дальнейшего теоремы VIII и IX о решениях системы квадратных уравнений (11), которую рассматривали еще Weierstrass и Dedekind.

[2]) Здесь, как и всюду в дальнейшем, Фробениус называет степенью (Grad) детерминанта или матрицы (формы) то, что мы теперь называем порядком (Ordnung) детерминанта или матрицы.

[3]) Здесь, как и в дальнейшем в этой работе, Фробениус, говоря о формах (подразумевая „билинейные формы"), имеет в ввиду матрицы их коэффициентов.

[4]) Здесь имеется в виду теорема о том, что, если α, β, $\gamma, \ldots$ (в конечном числе) алгебраические количества, происходящие из области рациональности P, то существует такое алгебраическое относительно P количество ω, которое само является рациональной функцией (в P) от α, β, $\gamma, \ldots$ и от которого, в свою очередь, каждое из количеств α, β, $\gamma, \ldots$ выражается рационально (в теле P). Иными словами, каждое конечное алгебраическое расширение числового тела P есть простое расширение.

[5]) Иными словами, если A должно быть функцией от F, то должно быть $b=0$, $a \neq 0$; если же и B одновременно функция от F, то $a=0$, $b \neq 0$, что дает противоречие.

[6]) Именно, из формулы (3) заключаем, что $\varphi'(r)$ представляется, как сумма миноров $n-1$ порядка матрицы $rE-A$, соответствующих диагональным элементам этой матрицы; каждый из этих миноров делится на $\vartheta(r)$, т. е. и $\varphi'(r)$ делится на $\vartheta(r)$:

$$\varphi'(r) = \vartheta(r)\omega(r);$$

с другой стороны: $\varphi(r) = \vartheta(r)\psi(r)$; это показывает, что все корни функции $\vartheta(r)$ — кратные для $\varphi(r)$ и кратность их в $\varphi(r)$ выше, чем в $\vartheta(r)$; т. е. каждый такой корень является корнем и для $\psi(r)$.

[7]) Формулы (5) следуют на основании формулы (8) в § 1.

[8]) Ибо $\varphi_\lambda(a_\lambda) = 1$, $\varphi_\lambda(a_\mu) = 0$ при $\mu \neq \lambda$; на основании этого из (6) при подстановке a_μ вместо A получим:

$$\sum_\lambda a_\lambda \varphi_\lambda(a_\mu) - a_\mu = a_\mu - a_\mu = 0.$$

[9]) Работа „О групповых характерах" является одною из двух основных работ настоящего сборника: здесь дается определение характеров и выводятся их основные свойства. § 1 этой работы — вступительный; выходя из понятия классов сопряженных элементов (число этих классов в данной группе обозначено через k), Фробениус здесь вводит целые неотрицательные числа $h_{\alpha\beta\gamma}$, играющие основную роль во всей его теории. В § 2 основу составляют формулы (3), дающие возможность применить здесь результаты § 4 предыдущей работы („О переместимых матрицах");

главный из этих результатов — существование k различных систем решений уравнений

$$r_\beta r_\gamma = \sum_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha$$

здесь весьма важен, так как он доказывает существование характеров χ_α, определяемых, как числа, пропорциональные этим решениям r_α:

$$r_\alpha = \frac{h_\alpha \chi_\alpha}{f}.$$

Множитель пропорциональности f по формуле (13) оказывается равным χ_0 (где номеру 0 соответствует „главный класс", образованный единицей E группы).

Таким образом, характеры здесь вводятся, как решения определенной системы квадратных однородных (если принять во внимание, что $f=\chi_0$) уравнений, при этом сразу доказывается существование k различных характеров (это те характеры, которые обычно называются „простыми",— соответствующие неприводимым представлениям), и сами характеры являются функциями от классов сопряженных элементов. Отметим также полную независимость такого определения характеров от какого-бы ни было конкретного представления данной абстрактной группы. Зато это определение весьма не наглядно и не дает никаких указаний для эффективного вычисления характеров; мало того, количества $f=\chi_0$ остаются по существу неопределенными. В § 3 и 4 выводится ряд формул, выражающих свойства характеров. Вводя новые множители пропорциональности e для, так наз., „дополнительных" систем, Фробениус выводит уравнение (12) (в § 3) k-й степени, которому удовлетворяют числа $g=ef$, и доказывает, что эти числа реальные положительные; но „отделить" множителей e и f друг от друга здесь невозможно: остается в их определении известный произвол.

В § 5 меняются обозначения: характер рассматривается, как функция от отдельных элементов группы. Далее, тут же вводится и понятие о групповой матрице, правда, в частном виде: $(x_{PQ^{-1}})$, где $x_{AB}=x_{BA}$. Формула (15) дает новое определение характеров, как коэффициентов в линейных множителях, на которые распадается „групповой детерминант":

$$|x_{PQ^{-1}}| = \Theta\left((x)\right).$$

Доказывается, что это новое определение сводится к первоначальному. В § 6 выводится, что введенные в § 3 числа $g=ef$ являются показателями, с которыми линейные множители входят в детерминант $\Theta\left((x)\right)$, а следовательно, — целыми положительными числами. В § 7 вводится понятие о так называемых, „относительных" характерах, когда данная группа рассматривается, как подгруппа более широкой группы. Наконец, § 8—10 посвящены разбору примеров отдельных типов групп.

[10]) Т. е. с теорией гиперкомплексных чисел.

[11]) Это следует из того, что, ведь, $AB = BA'$.

[12]) Ибо группа всех подстановок четырех символов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ порождается двумя подстановками: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и (α, β).

[13]) Формулы (3) следуют из (1) и из того, что $h_{\alpha\beta\gamma}$ и $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не меняются при перестановках индексов.

[14]) Определение дополнительной системы дается формулами (15), § 4 предыдущей работы („О переместимых матрицах").

[15]) Здесь имеется ввиду, так наз., „обобщенная теорема умножения детерминантов" (см. хотя бы мой учебник „Основы высшей алгебры", § 33).

[16]) На основании формул (12) и (10) в § 1 $h_{0\lambda\lambda'} = h_\lambda$.

[17]) Это следует из того, что уравнение (12) является по существу характеристическим уравнением матрицы $(p_{\alpha\beta'})$.

[18]) Это следует из формулы (9) при всех $\chi = f$ и из (6) § 1.

[19]) Двусторонний (zweiseitig) или двойной класс — содержащий взаимнообратные элементы.

[20]) В Абелевой группе число классов сопряженных элементов равно порядку группы, т. е. $k = h$; каждый класс состоит только из одного элемента; отсюда из формулы (6) § 3 следует, что все числа $f = 1$; а отсюда и из формулы (3) § 5 следует формула (9).

[21]) См. примечание [33]).

[22]) Работа „О простых множителях группового детерминанта" является второй основной работой настоящего сборника. Здесь весьма глубоко и подробно исследуется разложение на простых (т. е. неразложимых) множителей, так наз., группового детерминанта $|x_{PQ^{-1}}|$, специальный случай которого уже рассматривался в § 5 и 6 предыдущей работы. О главнейших результатах этого исследования говорится уже во введении. В § 1 основной является формула (9), на которой базируются исследования в § 2—4. В § 2 исследуются линейные множители группового детерминанта; их коэффициенты оказываются характерами 1-й степени данной группы; они же — все характеры Абелевой группы, дополнительной до группы коммутаторов (коммутанта) данной группы. В § 3 исследуется общий случай — простого множителя f-й степени $\Phi(x)$ группового детерминанта. Здесь же дается новое определение характера $\chi(R)$, как коэффициента при $x_E^{f-1}x_R$ в функции $\Phi(x)$ при $R \neq E$ и, кроме того, просто определяется: $\chi(E) = f$. Выходя из этого нового определения, Фробениус в § 3—5 выводит свойства характеров и функции $\Phi(x)$. В § 6 он вновь возвращается к специальному случаю, рассматривавшемуся в § 5 и 6 предыдущей работы, именно к случаю, когда $x_{AB} = x_{BA}$ для всяких A и B. Здесь всякая функция $\Phi(x)$ f-ой степени обращается в f-ю степень линейной функции. В конце § 6 выявляется тождественность этих, определенных новым путем, характеров с теми, которые были определены в предыдущей работе; при этом только оставшиеся там произвольными числа f и e (произведение которых только $= g$) теперь получают каждое в отдельности определенное значение. В § 7 продолжается исследование свойств характеров. § 8 — подготовительный к § 9, где доказывается основная теорема о том, что $e = f$. § 10—12 посвящены дальнейшим исследованиям функций $\Phi(x)$ и характеров; главнейшие из результатов § 12 следующие: всякий характер f-й степени для элемента A m-го порядка есть сумма f корней m-й степени из единицы; каждое значение f — делитель порядка h группы.

[23]) Это — так наз., формула Waring'а, дающая непосредственно выражения элементарных симметрических функций через степенные суммы (вывод ее имеется в учебнике E. Netto. Vorlesungen über Algebra, Bd. I).

[24]) Буквою l Фробениус (здесь и в дальнейшем) обозначает натуральный логарифм

[25]) Делим обе части формулы (1) на $\Phi(x)$ и заменяем x_E на $x_E - u$:

$$\sum_R \frac{\partial l\,\Phi(x - u\varepsilon)}{\partial x_R}\, x_{RA^{-1}} = \chi(A) + u\,\frac{\partial l\,\Phi(x - u\varepsilon)}{\partial x_A}$$

(второй член правой части получается оттого, что мы в левой заменяем при $R = A x_{AA^{-1}} = x_E$ на $x_E - u$). Обе части полученного равенства дифференцируем два раза по u, переставляя дифференцирования по x_R и по u и, применяя формулу: $\dfrac{\partial l\,\Phi(x - u\varepsilon)}{\partial u} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{S_n}{u^{n+1}}$, получаем:

$$-\sum_n \sum_R x_{RA^{-1}} \frac{\partial S_n}{\partial x_R} \frac{n+1}{u^{n+2}} = -\sum_n \frac{\partial S_n}{\partial x_A} \frac{n}{u^{n+1}} + \sum_n \frac{\partial S_n}{\partial x_A} \frac{1}{u^{n+1}}.$$

Сравнивая в обеих частях коэффициенты при $\frac{1}{u^{n+2}}$, получаем первую часть формулы (3); вторая часть выводится аналогично.

[26]) Именно, получаем:

$$\sum_{R, S} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_R \, \partial x_S} x_{RA^{-1}} x_{SB^{-1}} + \sum_S \frac{\partial \Phi}{\partial x_{SA}} x_{SB^{-1}} = \chi(A) \sum_S \frac{\partial \Phi}{\partial x_S} x_{SB^{-1}};$$

но формула (1) дает для последних двух сумм:

$$\sum_S \frac{\partial \Phi}{\partial x_{SA}} x_{SB^{-1}} = \chi(BA)\, \Phi(x); \quad \sum_S \frac{\partial \Phi}{\partial x_S} x_{SB^{-1}} = \chi(B)\, \Phi(x),$$

откуда и следует формула в тексте.

[27]) Это следует при замене в (1) и (2) x_E на $x_E - u$, A на QP^{-1}, R — один раз на RP^{-1}, другой раз — на QR^{-1}.

[28]) Ибо, ведь, $\Phi(u, x_E, 0, \ldots 0) = (x_E + u)^f$.

[29]) См. „О переместимых матрицах", введение, теорему I.

[30]) Это следует из формулы (7) § 6 при $\eta = \frac{h}{e}$ (так как, ведь, Φ однородная функция f-й степени).

[31]) Ибо по (4) $\Phi'^{e'} \Phi''^{e''} \ldots = u^{h-ef}$.

[32]) Здесь имеется в виду уравнение (12) § 3 работы „О групповых характерах".

[33]) Именно, в данном случае $\chi(A) = \psi(\rho) = \psi(\rho^r)$ — для всякого r, взаимно простого с порядком m элемента A; ψ означает некоторую целую рациональную функцию с (целыми) рациональными коэффициентами, а ρ — некоторый первообразный корень m-й степени из единицы. Но при r взаимно простом с $m \rho^r$ тоже первообразный корень m-й степени из единицы, и всякий такой первообразный корень представляется в этом виде. Иными словами, функция $\psi(\rho)$ допускает все подстановки группы Галуа уравнения деления окружности на m равных частей: $\Phi_m(x) = 0$; т. е. эта функция имеет рациональное значение; что это значение и целое, следует из того, что каждый характер есть целое (алгебраическое) число.

[34]) Работа „О представлении конечных групп через линейные подстановки" по важности — следующая за двумя предыдущими. В § 1 излагается соотношение между характерами данной группы и ее дополнительных групп. Формулы (1) — (4) этого параграфа дают новое, аксиоматическое обоснование теории характеров. Основываясь на этих формулах, строит, напр., теорию характеров H. Weber во II томе своей знаменитой книги „Lehrbuch der Algebra" (2-te Aufl.. Braunschweig, 1899, S. 193 и след.). В § 2 рассматриваются самые представления данной абстрактной группы посредством матриц, вводится понятие о „матрице, принадлежащей к данной группе" и устанавливается ее связь с групповой матрицей в виде весьма важной формулы (3). В § 3 — 5 приводится разложение групповой матрицы на неразложимые частичные матрицы, соответствующие примитивным представлениям. Особенно важна формула (5) § 4, дающая новое определение характеров, — общепринятое в настоящее время. В § 6 выводятся снова основные свойства характеров, определенных для данного представления формулой (5) § 4 и дается связь групп с гиперкомплексными числами. Наконец, в § 7 доказываются три вспомогательных теоремы о матрицах.

[35]) Представления, различающиеся только выбором переменных, — т. е. такие, у которых соответствующие матрицы подобны друг другу.

36) **Мероэдрический**, иначе, кратный изоморфизм, гомоморфизм простой изоморфизм, иначе, — **голоэдрический** (см. далее, § 2).

37) Как известно, групповая матрица $(x_{PQ^{-1}})$ соответствует, так наз. **регулярному** представлению группы.

38) Это значение для z_R получается на основании известных формул разложения детерминанта по элементам ряда (так как, ведь, $\frac{1}{h} \frac{\partial\Theta}{\partial x_{PQ^{-1}}}$ есть минор, соответствующий элементу $x_{PQ^{-1}}$ в Θ).

39) Именно, $Z = LXL^{-1} \cdot LMN^{-1} = LXL^{-1}$.

40) Здесь имеется в виду совокупность форм (1), получаемая, если давать различные значения для u.

41) Форма (3) соответствует, так наз., нормальной форме Вейерштрасса или Жордана для матрицы $(k_{PQ^{-1}})$.

42) Это следует из того, что произведения AB и BA всегда сопряжены друг с другом.

43) Работа „О соотношениях между характерами группы и характерами ее подгрупп" представляет собою дальнейшее развитие теории характеров; ее содержание выявляется из введения к ней. Зависимость между характерами группы и ее подгруппы дается формулами (2), (4), (5), (9) в § 1; важны также формулы (14), (16), (17) в том же § 1. Обращаем внимание на теоремы в § 4 и 5.

44) e_χ — степень функции Ψ_χ (т. е. числа e_χ для группы $\mathfrak{G}$ — то же самое, что f_λ для группы $\mathfrak{H}$).

45) „Взаимно простые" в данном случае — не имеющие ни одного общего элемента (в то время, как взаимно простые **группы** имеют общим единичный элемент).

46) Равенства $\sum_\lambda r_{\varkappa\lambda}\chi^{(\lambda)}(R) = 0$ представляют собою систему k линейных однородных уравнений с l неизвестными $\chi^{(\lambda)}(R)$, которые не все равны нулю $\left(\chi^{(0)}(R) = 1\right)$; следовательно, ранг матрицы коэффициентов этих уравнений меньше l.

47) Здесь идет речь об обычном представлении группы $\mathfrak{H}$ посредством подстановок вида (см. § 1 (10)):

$$\bar{A}_\lambda = \begin{pmatrix} A_0\mathfrak{G} & A_1\mathfrak{G} & \ldots & A_{n-1}\mathfrak{G} \\ A_\lambda^{-1}A_0\mathfrak{G} & A_\lambda^{-1}A_0\mathfrak{G} & \ldots & A_\lambda^{-1}A_{n-1}\mathfrak{G} \end{pmatrix}.$$

48) См. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, 2-te Aufl. (Braunschweig, 1899), § 14.

49) См. „О характерах симметрической группы" (стр. 170—191 этой книги.

50) Дважды транзитивная группа, переводящая два определенных символа в два любых символа. В нашем случае символами служат комплексы: $A_0\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, $A_1\mathfrak{G}, \ldots A_{n-1}\mathfrak{G}$ (или $\mathfrak{G}$, $P\mathfrak{G}$, $Q\mathfrak{G}$, $R\mathfrak{G}, \ldots$). Возьмем символы $\mathfrak{G}$ и $P\mathfrak{G}$ и найдем подстановку $\bar{R}^{-1}$, переводящую $\mathfrak{G}$ в $R\mathfrak{G}$, а $P\mathfrak{G}$ в $Q\mathfrak{G}$; вместо R можно взять RG с любым G из $\mathfrak{G}$: нам надо выбрать G так, чтобы было:

$$RGP\mathfrak{G} = Q\mathfrak{G},$$

или

$$G(P)\mathfrak{G} = R^{-1}Q\mathfrak{G},$$

а это по предыдущей формуле в тексте всегда возможно, чем и доказывается двойная транзитивность группы подстановок.

51) Из формулы (1 а) имеем: $1 + \chi(R) = 1 + \chi_\rho = \frac{hg_\rho}{gh_\rho}$; с другой сто-

роны, мы должны сосчитать, сколько раз будет: $R^{-1}P\mathfrak{G} = P\mathfrak{G}$ (при $P = A_0$, $A_1, \cdots A_{n-1}$), или $R^{-1}PG = P$ при $G \subset \mathfrak{G}$, или, иначе:

$$P^{-1}RP = G \subset \mathfrak{G}.$$

Преобразовывая R всеми h элементами P из $\mathfrak{H}$, мы получим всего h_ρ различных элементов, т. е. $\frac{h}{h_\rho}$ раз будем получать по одному и тому же элементу; но из h_ρ элементов, сопряженных с R, только g_ρ входят в $\mathfrak{G}$; т. е. мы получим $\frac{h}{h_\rho} g_\rho$ раз, что $P^{-1}RP$ будет из $\mathfrak{G}$; с другой стороны, элемент P можно заменить любым элементом из комплекса $P\mathfrak{G}$; т. е. всего получим $\frac{hg_\rho}{gh_\rho}$ различных случаев, когда $R^{-1}P\mathfrak{G} = P\mathfrak{G}$.

[52]) „О композиции характеров группы"—небольшая, но интересная работа; значение ее выясняется во введении к ней. Речь идет о составлении из двух представлений группы при помощи матриц f-го и f'-го порядков нового представления — при помощи матриц (ff')-го порядка; характер этого нового представления равен произведению характеров соответствующих представлений. Отсюда получается возможность представления произведения двух простых характеров, как линейное соединение простых характеров, (см. (2) в § 1). В первых двух параграфах исследуются коэффициенты $f_{\chi\lambda\mu}$ этих представлений, в двух последних — даются примеры построения при помощи этой композиции характеров некоторых групп.

[53]) Заменив в формуле (2) букву μ через ν', помножив обе части на $\chi^{(\mu)}(R)$ и просуммировав по R, получим:

$$\sum_R \chi^{(\varkappa)}(R)\chi^{(\lambda)}(R)\chi^{(\mu)}(R) = \sum_\nu \sum_R f_{\varkappa\lambda\nu}\chi^{(\mu)}(R)\chi^{(\nu')}(R);$$

отсюда на основании (3) получим (4).

[54]) Что уравнение (2) степени $f_\varkappa\ f_\lambda$, следует из (7) в § 1.

[55]) Если $\mathfrak{G}$ — обычная группа тетраэдра, октаэдра или икосаэдра, то *бинарная* группа (соотв. тетраэдра, октаэдра или икосаэдра) есть прямое произведение:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \times F,$$

где $F = E + F$ группа 2-го порядка.

[56]) Эта вторая часть работы о представлении конечных групп через линейные подстановки рассматривает, главным образом, одну основную задачу: данную, принадлежащую к группе $\mathfrak{H}$ матрицу $X = (x_{\varkappa\lambda})$ n-го порядка, где $x_{\varkappa\lambda}$ — линейные однородные функции от h переменных x_R, преобразовать в целиком распадающуюся матрицу из s частичных, равных друг другу, матриц порядка f, s' частичных, равных друг другу, матриц порядка f', и т. д., где

$$|X| = \Phi(x)^s\,\Phi'(x)^{s'}\ldots;$$

$\Phi, \Phi', \ldots$ — различные простые множители группового детерминанта группы $\mathfrak{H}$. Эта задача решается вполне; в связи с ней решается задача нахождения примитивного представления группы $\mathfrak{H}$, соответствующего простой функции Φ.

[57]) Эта формула следует из того, что характеристические корни матрицы A_{11} могут быть только 0 и 1 (как видно из соотношения: $A_{11}^2 = A_{11}$).

[58]) Ибо тогда все характеристические корни матрицы A_{11} были бы равны 0.

[59]) Приведя A_{11}, напр., к нормальной форме Вейерштрасса (или Жордана).

[60]) Это опять на основании того, что и $A_{22}^2 = A_{22}$.

[61]) „Главной" матрицей Фробениус называет единичную матрицу (соответствующую тождественной подстановке).

[62]) Вторая формула (7) получается из первой, если подставить вместо u — $\frac{1}{u}$.

[63]) Пусть K уже взята в нормальной форме; тогда $uE - K$ имеет вид:

$$uE - K = \begin{pmatrix} u-\rho & & & & \text{нули} \\ & \ddots & & & \\ & & u-\rho & & \\ & & & u-\rho' & \\ \text{нули} & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

т. е. вдоль главной диагонали стоит f раз $u - \rho$, f' раз $u - \rho'$, и т. д. а все остальные элементы $= 0$. Но тогда:

$$(uE - K)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u-\rho} & & & & \text{нули} \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{u-\rho} & & \\ & & & \frac{1}{u-\rho'} & \\ \text{нули} & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

ибо $(uE - K)(uE - K)^{-1} = E$; но в таком случае, очевидно:

$$(uE - K)^{-1} = \frac{A}{u-\rho} + \frac{B}{u-\rho'} + \ldots,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underbrace{0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0}_{f} & & & & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \Bigg\} f,$$

т. е. A матрица, где по главной диагонали стоят f единиц, а остальные элементы диагонали и, вообще, все остальные элементы равны 0. Аналогично и для B, и т. д. Написав, вместо матрицы, соответствующую билинейную форму, получим:

$$A = u_1 v_1 + \ldots + u_f v_f ;$$

это то, что в тексте обозначено через $P^{-1}AP$.

[64]) В работе „О характерах симметрической группы" Фробениус с большим искусством и изяществом дает путь для вычисления характеров симметрической группы любой (n-й) степени. В § 1 находятся числа k (число классов) и h_ρ (число элементов в ρ-м классе) и вводятся k подгрупп $\mathfrak{G}$ порядков $n_1! \, n_2! \ldots$ (где $n = n_1 + n_2 + \ldots$). В § 2 важны выражения (2) и (6), ибо простые характеры симметрической группы явля-

ются коэффициентами этих выражений, что доказывается в § 3. В § 4 вводится понятие о, так наз., характеристике данного характера и о ее ранге. В § 5 вычисляются характеры 1-го ранга. В § 6 вводится понятие об ассоциированных характерах и характеристиках. Наконец, в § 7 рассматриваются некоторые специальные случаи.

[65]) Обозначение (1) есть, так наз., символ Kronecker'а, введенный последним в его лекциях по теории детерминантов.

[66]) См. § 1, (3) и (8).

[67]) См. формулу для h_ρ в § 1, (1).

[68]) Cauchy, Exercices d'analyse et de phys. math., t. 2, 2-me éd., p. 151 - 159 (Paris, 1841). См. также Pólya und Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. 11 (Berlin, 1925), 7-ter Abschn., Aufg. 3; там рассматривается детерминант $\left|\frac{1}{a_\lambda + b_\mu}\right|$; но положив: $a_\lambda = \frac{1}{y_\lambda}$, $b_\mu = -x_\mu$, сведем его к $\left|\frac{1}{1 - x_\mu y_\lambda}\right|$.

[69]) Формулы (3) и (4) следуют из того, что и при их выполнении коэффициенты при $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_m^{\lambda_m}$ в § 2, (2) и при $x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$ в § 2, (6) действительно равны; легко проверить, что при наличии формул (3) и (4) формулы (3) и (4) в § 2 одновременно исполнены.

[70]) По § 3 (6) в следующий за (9) формуле просто подставлены значения для $\varkappa_1, \ldots \varkappa_n$, именно, $n-1-a_{r+1}, \ldots n-1-a_n$, $n+b_1, \ldots n+b_r$.

[71]) См. аналогичный детерминант в выноске [68]).

[72]) Последняя работа данного сборника — „О характерах полусимметрической группы" — непосредственно примыкает к предыдущей, выводя характеры полусимметрической группы $\mathfrak{H}$ из характеров соответствующей группы $\mathfrak{H}'$. § 1 и 2 дают зависимость между характерами обеих групп; в § 3 рассматривается случай симметрической и полусимметрической групп 8-й степени, причем дается правило вычисления характеров полусимметрической группы, которое в общем виде доказывается в § 5; в § 4, как подготовление к § 5, даются два замечания, из которых первое относится к нахождению характеров прямого произведения.

[73]) Здесь имеется в виду данное в § 3 правило для вычисления характеров полусимметрической группы n-й степени (см. § 5).

ДАЛЬНЕЙШАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ ХАРАКТЕРОВ И ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

G. Frobenius. Über die Primfactoren der Gruppendeterminante. Siztunsgber. der Berl. Ak., 1903, S. 401—409.

„ Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen. Gruppe. Там же, 1903. S. 328—358.

„ Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen. Там же, 1904. S. 558—571.

„ Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen. Там же, 1906, S. 186—208.

„ Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen. Там же. 1906, S. 209—217.

„ Gruppentheoretische Ableitung der 32 Kristallklassen. Там же, 1911, S. 681—691.

W. Burnside. Theory of groups of finite order. 2-nd ed. Cambridge, 1911. (Ch. XIII—XV).

I. Schur. Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere Sitzungsber. der Berl. Ak., 1905, S. 406—432.

H. Weber. Lehrbuch der Algebra. Bd. 2; 2-te Aufl. Braunschweig, 1899. Abschn. VI—VII.

Miller, Blichfeldt, Dickson. Theory and applications of finite groupes. New-York, 1916. (Ch. IX—XIII).

L. E. Dickson An elementary exposition of Frobenius's theory of group-charakters and group-determinants. Annals of Math., 2-nd ser., vol. 4 (1902—1903), p. 25—49.

L. E Dickson. Höhere Algebra. Hrsg. v. Bodewig. Lpz. u. Berl. 1929, Kap. XIV.

A. Speiser A. Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. 2-te Aufl. Kap. 11—13.

О. Ю Шмидт. Абстрактная теория групп. 2-е изд. Гл. IX—X.

A. Haar Über unendliche kommutative Gruppen. Math. Zeitschr. Bd. 33, 1931, p. 129—159.

A. Haar. Über die Gruppencharaktere gewisser unendlichen Gruppen. Acta Litterarum ac Scientiarum regiae univers. Hungar. t V, 1932, p. 172—186.

Peter und *Weyl*. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. Math Ann., Bd. 97, 1927, S. 737—755. Есть русский перевод во II вып. „Успехов математических наук".

Emmy Noether. Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie. Math. Zeitschr. Bd. 30, 1929, S. 641—692.

Л. С. Понтрягин Линейные представления топологических групп. „Успехи математических наук", вып. II, 1936, стр. 121—143.

И. Адо. О представлении конечных непрерывных групп помощью линейных подстановок. Известия физ.-мат. об-ва и н.-и. института мат. и мех. при Казанском ун-те, сер. 3, т. 7, 1934—35.

B. L. van der Waerden. Gruppen von linearen Transformationen. Berlin, 1935.

Béla v. Sz. Nagy. Zur Theorie der charaktere Abelscher Gruppen. Math. Ann. Bd. 114 (1937), S. 373—384.

СОДЕРЖАНИЕ

ДНТВУ. Сдано в набор 14/III 1937 г. Подписано к печати 13/VI 1937 г. Формат бумаги $^1/_{16}$ 62×94 см. Вес метр. стопы 38 кг. На печ. листе 48.000 знаков.