У.Фейт

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Работа крупного американского алгебранста У. Фейта, одного из лучших знатоков теории представлений, впитала в себя последиие достижения модулярной теории представлений, совершеино не отражеиной в отечествеиной литературе. Книгу отличает умереиное сочетание солидности, методической продуманиости и новизны излагаемого материала.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов универсптетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	7
Предисловие	9
Глава I	11
§ 1. Предварнтельные результаты	11
§ 2. Модульные конструкции	14
§ 3. Условия конечности	15
§ 4. Проективные и относнтельно проективные модули	17
§ 5. Полная приводимость	23
§ 6. Радикал	26
§ 7. Идемпотенты и блоки	28
§ 8. Кольца эндоморфизмов	30
§ 9. Полнота	35
§ 10. Локальные кольца	39
§ 11. Однозначность разложения	41
§ 12. Крнтерии подъема ндемпотентов	43
§ 13. Главные неразложимые модули	46
§ 14. Двойствеиность в алгебрах	50
§ 15. Относнтельно инъективные модули над алгебрами.	53
§ 16. Алгебры над полем	56
§ 17. Алгебры над полными локальными областями	66
§ 18. Расширеиие областей	70
§ 19. Представления и следы	74
Глава II	79
§ 1. Групповые алгебры	79
§ 2. Модули над групповыми алгебрами	79
§ 3. Относнтельные следы	85
§ 4. Алгебра представлений алгебры R[G]	90
§ 5. Алгебраические модули	91
§ 6. Проективные резольвенты	93
Глава III	95
§ 1. Основные соглашения и обозначения	95
§ 2. F[G] модули	95
§ 3. Групповые кольца над полными локальными областями	101

§ 4. Вертексы и источники 107
§ 5. Соответствие Гриша 110
§ 6. Дефектные группы 117
§ 7. Гомоморфизмы Брауэра 121
§ 8. R[GxG]-модули 124
§ 9. Соответствие Брауэра 127
Глава IV 132
§ 1. Характеры 132
§ 2. Характеры Брауэра 134
§ 3. Соотношения ортогональности 136
§ 4. Характеры в блоках 140
§ 5. Некоторые открытые проблемы 154
§ 6. Высшие чнсла разложения 159
§ 7. Центральные ндемпотенты и характеры 165
§ 8. Некоторые естественные отображения 168
§ 9. Индекс Шура относнтельно Q_p 171
§ 10. Кольцо $A^{\circ}_{z}(R[G])$ 172
§ 11. Самодуальные модули в характеристике 2 174
Глава V 178
§ 1. Некоторые элементарные результаты 178
§ 2. Группы иперции 180
§ 3. Блоки и нормальные подгруппы 183
§ 4. Блоки и факторгруппы ;,. 187
§ 5. Свойства соответствия Брауэра 190
§ 6. Блоки и их ростки 193
§ 7. Изометрии 199
§ 8. π-высоты 209
§ 9. Подсекции 212
§ 10. Низшие дефектные группы 221
§ 11. Группы заданиого дефицитного класса 226
Глава VI 228
§ 1. Блоки и расширения кольца R 228
§ 2. Радикалы и нормальные подгруппы 229
§ 3. Однорядные модули и нормальные подгруппы 232
§ 4. Радикал алгебры $\bar{R}[G]$ 235
§ 5. Радикал алгебры R[G] 240
§ 6. p-радикальные группы 243
Глава VII 246
§ 1. Блоки с циклической дефектной группой 246
§ 2. Формулировки результатов 250
§ 3. Некоторые предварнтельные результаты 256
§ 4. Доказательства теорем 2.1-2.10 264
§ 5. Доказательства теорем 2.11-2.17 в случае K=K^ 265

§ 6. Дерево Браура 273
§ 7. Доказательства теорем 2.11-2.19 275
§ 8. Доказательства утверждений 2.20-2.25 276
§ 9. Некоторые свойства дерева Брауэра 278
§ 10. Некоторые следствия 282
§ 11. Некоторые примеры 289
§ 12. Неразложимые $\overline{R}[G]$-модули в B 294
§ 13. Индексы Шура неприводимых характеров из B 304
§ 14. Дерево Браура и расширения поля 307
§ 15. Неприводимые модули с циклическим вертексом 30S
Глава VIII 311
§ 1. Группы с сндовской подгруппой простого порядка 311
§ 2. Теизорные произведения $\overline{R}[N]$-модулей 312
§ 3. Группы тиа $L_2(p)$ 317
§ 4. Характеризания некоторых групп 321
§ 5. Некоторые следствия теоремы 4.1 327
§ 6. Группы перестановок простой степеии 329
§ 7. Характеры степеии, меньшей p-1 333
§ 8. Доказательство теоремы 7.1 339
§ 9. Доказательство теоремы 7.2 347
§ 10. Доказательство теоремы 7.3 348
§ 11. Некоторые свойства групп перестановок 351
§ 12. Группы перестановок степеии 2p 354
§ 13. Характеры степеии p 358
Глава IX 363
§ 1. Структура алгебры A(G) 364
§ 2. Алгебра A(G) в случае циклической S_p-подгруппы группы G и поля R 368
§ 3. Перестановочные модули 371
§ 4. Эндо-перестановочные модули для p-групп 372
Глава X 376
§ 1. Группы с нормальной p'-подгруппой 376
§ 2. Характеры Брауэра p-разрешимых групп 383
§ 3. Главные неразложимые характеры p-разрешимых групп 385
§ 4. Блоки p-разрешимых групп 388
§ 5. Модули главного ряда p-разрешимой группы 390
§ 6. Проблемы из § 5 главы IV для p-разрешимых групп 391
§ 7. Неприводимые модули p-разрешимых групп 396
§ 8. Изоморфные блоки 402
Глава XI 406
§ 1. Аналог теоремы Жордана 406
Глава XII 412
§ 1. Типы блоков 412
§ 2. Некоторые свойства главного блока 416

§ 3. Инволюции и блоки 417
§ 4. Некоторые вычисления со столбцами 420
§ 5. Группы с абелевой S_2-подгруппой типа $(2^m, 2^m)$ 423
§ 6. Блоки со специальными дефектными группами 425
§ 7. Группы с кватернионной S_2-подгруппой 427
§ 8. Z*-теорема 431
Список литературы 435
Указатель обозначений 457
Предметный указатель 459

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра Гриша 90
— Гротендика 90
— конечно порожденная 13
— однорядная (рядная) 60
— свободная 13
— симметрическая 52
— фробениусова 52
Аннулятор модуля 26
Базис модуля 11
— — дуальный 51
Базисное множество блока 127
Блок 30
— главный 144
— заданного типа 414
— — — для подсекции 414
— — — — элемента 414
— накрывает 182
— определен 128
— регулярный 184
— слабо регулярный 184
Блоки одного типа 414
Блочная пара 191
— — расширяет 191
— — слабо расширяет 191
— — собственно расширяет 191
Вертекс модуля 108
Вещественный ствол дерева 281
Высота характера 142
Гомоморфизм Брауэра 122
Граф Брауэра блока 271
Группа дефектная блока 120
— —ндемпотента 119
— инерции блока 181
— — функции 181
— низшая дефектная 222
—р-дефектная 117
— — ндемпотента 119
— — класса 117
— р-радикальная 244
Группа представлений характера 379
— типа $L_2(p)$ 317
— хорошего поведения 396
— элементарная 132
Дефект ндемпотента 119
— класса 118
Дерево Брауэра блока 275, 278
Идеал примитивный 26
— нильпотентный 27
— Рейнольдса 237
Идемпотент примитивный центральный 11
Идемпотенты ортогональные 11
— связанные 49
Инварианты Картана алгебры 58
— — — относительно базисного множества 138
Индекс ветвления модуля 99
— — области 71
— инерции (инерционный индекс) блока 217, 249
— Шура 171
Класс *P*- дефектный 117
Кольцо артиново 16
— вполне примарное 39

— локальное 39
— нётерово 16
— полное 37
— полупростое 27
— со свойством однозначности разложения 42
Конституэнта модуля 12
— — неприводимая 12
Лемма Брауэра 118
— Гриша 113
— Накаямы 37
— Осимы 118, 166
— Судзуки 164
Лемма Фиттинга 34
— Шануэля 18
— Шура 30
Матрица Картана алгебры 58
— — блока 58
— разложения алгебры 68
— — блока 69
Метрика 35
— определена 35
Метрики эквивалентные 35
Модули совместимые 374
Модуль абсолютно неразложимый 73
— алгебраический 91
— без кручения 66
— вполне приводимый 23
— B-проективный 20
— главного ряда 390
— главный неразложимый 46
— двусторонний 14
— дуальный 50
— индуцированный 79
— инъективный 54
— — относнтельно 54
— квадратичного типа 174
— левый регулярный 12
— неприводимо порожденный 93
— неприводимый 12
— однорядный (рядный) 60
— перестановочный 371
— периодический 93
— полный 37
— — относнтельно 35
— представления 75
— принадлежит блоку 30
— проективный 17
— — относнтельно 20
— регулярный 12
— свободный 11
— точный 85
— транзитивный перестановочный 371
— чистый 66
— эндо-перестановочный 372
— эндо-тривиальный 372
— *(G,H)*-проективный 91
— *H*-проективный 91
Ниль-идеал 27
Нормальный ряд модуля 12
— — — без повторений 13
Относнтельный след 85
Отображение Брауэра 122
—— относнтельно (G, *P, H)* 122
Период модуля 93
Подсекция 212
Подсекция относнтельно базисного множества 413
— старшая 212
Поле разложения алгебры 56
— — модуля 56
Представления алгебры 74
Проективная резольвента 93
p-дефект класса 118
p-секция 160
π-секция 199
π -высота функции 209
π -высота элемента 209
Радикал Джекобсона 25
— модуля 25
Расширение области 70
— — конечное 71
— — неразветвленное 71
Росток блока 193
— — относнтельно 193

Соответствие Брауэра 128
— Грина 112
Соотношения Накаямы 96
Теорема Алперина 127
— Артина—Веддербарна 33
— Бернсайда 330
— Блау 334
— Брайанта--Ковача 100
— Брауэра 69, 77, 118, 132, 213, 216, 318
— — (первая основная) 129
— — (вторая основная) 160
— — (третья основная) 191
— Брауэра—Накаямы 43
— Брауэра—Несбитт 158
— Брауэра—Розенберга 126
— Брауэра—Туана 328
— Брауэра—Фейта 148, 406
— Бруё 211
— взаимности Фробениуса 96
— Вилаида 353
— Грина 126, 127, 134, 364, 368
— Жордана 351, 406
— Жордана—Гёльдера 13
— Ито 334, 353, 354, 358
— Клиффорда 99
— Коилона 123, 364
— Кхатри 245
— Макки 96
— — о тензорном произведении 84
— Машке 89
— Неймана 331
— о разбиении 351
— Рейнольдса 182
— Рихена 358
— Скотта 354
Теорема Смита—Тирера 421
— Томпсона 70, 452
— Уоллеса 239
— Фейта 333, 334
— Фонга 182, 183, 185, 186
— Цушимы 242
— Шрайера 13
Трансверсаль 79
— левая 79
Уплотнение нормального ряда 12
— — — собственное 13
Условие обрыва возрастающих цепочек (DCC) 15
— — убывающих цепочек (ACC) 15
Факторы нормального ряда 12
Функция следа модуля 75
— — представления 75
Характер Брауэра 133
— главный 144
— канонический блока 189
— лежит в блоке 137
— модуля 132
— обобщенный 132
— p-рациональный 165
Характер центральный 57
Характеры p-сопряженные 165
Цоколь модуля 25
Числа разложения 68
— — высшие 160
— — относительно базисного множества 138, 413
Число зацеплений 56
Ширина 231
Эквивалентные метрики 35
— представления 75
Элемент алгебраический 91
— инвариантный 81
— квазирегулярный 26
— невырожденный 52
— правый (левый) квазирегулярный 26
— симметрический 52
Элементы H-сопряженные 117
Ядро блока 117
— модуля 144

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теории представлений конечных групп, по самым скромным подсчетам, сто лет. Ее развитие неотделимо от становления не только собственно теории групп, но и всей алгебры. Более того, произошло взаимное обогащение и сложное переплетение идей теории представлений, структурных вопросов теории групп, теории чисел, гомологической алгебры, комбинаторики, порядков в алгебрах, алгебраической геометрии. Быстро меняющийся, динамичный облик теории представлений контрастирует с кругом извечных волнующих ее проблем, многие из которых остаются открытыми на протяжении десятилетий. Это обстоятельство делает ее привлекательной для молодых исследователей и, вместе с тем, трудной областью, в которой накоплен огромный фактический материал.

Почти с самого начала было известно, что при изучении линейных представлений конечных групп над полями необходимо учитывать деление теории на две части — классическую, когда характеристика основного поля не является делителем порядка группы, и неклассическую, или модулярную, когда характеристика делит порядок. По техническим причинам, да и по существу, в модулярную теорию включаются также представления групп над кольцами. Хорошо разработанные основы классической теории, аккумулированные в теории линейных представлений над $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$, давно стали достоянием университетского курса алгебры и нашли многочисленные приложения в физике, химии, кристаллографии. Ее высшие разделы, связанные с тонкими вопросами конкретных классов групп, активно развивались все послевоенные годы: достаточно упомянуть роль понятия когерентности в доказательстве теоремы Томпсона — Фейта о разрешимости групп нечетного порядка и новаторскую идею Дринфельда — Делиня — Люстига по конструированию основной массы неприводимых характеров конечных групп типа Ли.

В неклассической части теории представлений наблюдается несколько иная ситуация. Такие ее разделы, как, например, представления конечных групп над «глобальными» кольцами, находятся в зачаточном состоянии. Многие принципиальные вопросы теории модулярных представлений пока ждут своего решения. И вместе с тем яркое творение Р. Брауэра, подхваченное и развитое в сотнях работ, приобрело черты внушительного сооружения, недостроенные фрагменты которого лишь подчеркивают величие замысла. К настоящему времени теория модулярных представлений доказала свою работоспособность во многих разделах алгебры. С тем большей остротой воспринималось отсутствие в нашей математической литературе монографии, целиком посвященной результатам и методам теории

модулярных представлений и представлений над локальными кольцами. Двух глав изданной 20 лет назад книги Ч. Кэртиса и И. Райнера [1969], а также третьей части небольшой книги Ж.-П. Серра [1977] для этого явно недостаточно.

Теперь, с выходом в свет русского перевода книги У. Фейта, указанный пробел в значительной мере ликвидируется. Сам автор относится к числу крупнейших специалистов по теории представлений конечных групп, что нашло отражение в той основательности, с которой написана предлагаемая читателю книга. По сути дела, многие результаты впервые изложены с максимальной общностью в монографической форме. Книга написана простым лаконичным языком и отражает, но, разумеется, далеко не исчерпывает важнейшие направления теории модулярных представлений. Можно выразить надежду, что издание на русском языке книги У. Фейта окажет стимулирующее влияние на творческую активность студентов-математиков, аспирантов, всех специалистов, работающих в теории представлений и использующих ее приложения.

При переводе были учтены те опечатки и неточности, список которых любезно прислал автор. Многие неточности исправлены переводчиками — П. Г. Гресем (главы I—V, X) и И. А. Чубаровым (главы VI—IX, XI, XII), а также профессором П. М. Гудивоком, комментарии которого были весьма полезны.

А. И. Кострикин

Ноябрь, 1988

Посвящается Сидни

ПРЕДИСЛОВИЕ

Определение обыкновенных характеров конечных групп было впервые дано Фробениусом в 1896 году. Последующие 15 лет теория характеров и комплексных представлений развивалась благодаря усилиям Фробениуса, Шура и Бернсайда[1]. На протяжении этого времени Л. Е. Диксон [1902], [1907a], [1907b] рассматривал представления групп с коэффициентами из конечного поля. Он назвал их модулярными представлениями и показал, что если характеристика p поля коэффициентов не делит порядок группы G, то методы, применяемые для комплексных представлений группы G, можно использовать без существенных изменений. Однако, как показал Диксон, если p делит порядок группы G, теория совершенно другая. Он доказал, что кратность любого неприводимого представления как компоненты регулярного представления группы G делит порядок силовской p-подгруппы. По-видимому, после Диксона никто не рассматривал модулярные представления до тех пор, пока Шпайзер [1923] не изучил связь между обыкновенными и модулярными представлениями. Он показал, что если характеристика p конечного поля не делит порядок группы G, то модулярные представления группы G можно получить из обыкновенных представлений путем приведения по модулю простого дивизора для p в кольце целых чисел подходящего числового поля.

Предмет оставался в забвении до тех пор, пока Брауэр [1935], по совету Шура, не показал, что число абсолютно неприводимых представлений конечной группы над полем характеристики p равно числу p'-классов группы G. Вскоре после этого было осознано, что для получения более глубоких свойств модулярных представлений необходимо изучить теоретико-кольцевые свойства групповых алгебр. Эта работа была начата Брауэром и Несбитт [1937a], [1937b] и независимо Накаямой [1938]. На протяжении последующих 10—15 лет теория модулярных представлений развивалась усилиями Брауэра, Осимы и других. Среди прочих результатов Брауэр [1941c] получил полное описание обыкновенных и модулярных характеров в блоке дефекта 1. Для работы Брауэра было характерно то, что сразу после получения основных свойств проективных модулей он устранил модули и представления настолько, насколько это было возможно, и попытался иметь дело лишь с характерами. Однако в своей работе о блоках дефекта 1 он счел необходимым использовать некоторые деликатные рассуждения о представлениях. Используя

[1] См. также Ф. Э. Молин [1985*]. *Примеч. ред.*

результат Д. Г. Хигмана [1954] в качестве отправной точки, Грин [1959a], [1962b] ввел новую точку зрения на предмет, которая делала упор на изучение модулей. Томпсон [1967] показал, как эта точка зрения могла бы привести к обобщению работы Брауэра, сделав возможным описание блоков с циклической дефектной группой. Это было проделано в полной общности Дейдом [1966].

Я читал курс теории модулярных представлений на протяжении 1968/69 академического года. В то время книг по предмету не было, и я написал записки лекций, которые составляют примерно первые пять глав настоящей книги. Вторая часть записок, покрывающая примерно главы VI—XI, появилась почти десять лет спустя. Задержка, по крайней мере частично, была вызвана тем, что материал о блоках с циклической дефектной группой имел вид, не очень легкий для изложения. С течением времени были найдены некоторые упрощения и обобщения. Этот материал содержится в главе VII.

Настоящая книга имеет целью дать картину общей теории модулярных представлений, существующую в данное время. Она не содержит материал о модулярных представлениях конкретных классов групп, таких как симметрические группы и группы лиева типа. Первые шесть глав следует читать более или менее по порядку, хотя часть результатов потребуется лишь в самом конце книги. Последующие шесть глав по существу не зависят друг от друга, за исключением материала главы VIII, которая основана на результатах главы VII.

Лекции по этому материалу и циркулирующие записки вызвали ценные советы коллег и студентов. Я выражаю свою благодарность М. Бенарду, Э. Клайну, Е. С. Дейду, Л. Дорнхоффу, Д. Фенделу, Р. Гордону, М. Айзексу, В. Кнаппу, М. Шехеру, П. Шмиду, Л. Л. Скотту, Г. Селигману, Р. Стейнбергу, Т. Тамагаве, Ю. Цушиме, А. Ватанабе и В. Виллемсу, предложившим многочисленные улучшения и поправки.

Я многим обязан прежде всего Г. Блау, Д. Барри, Дж. Г. Линдси II и Д. Пассману. Пассман прочитал первоначальную версию записок, вышедших в 1969 году. Блау и Барри прочитали первые семь глав рукописи, а Линдси — главы VII—XI. Они высказали многочисленные и существенные замечания, а их критическая проверка устранила многие ошибки и многое прояснила. Влияние их советов сказалось на всей книге. Особенно это касается главы VII, которая значительно выиграла от многих улучшений, предложенных Блау, Барри и Линдси, и параграфов 6 и 7 главы V, которые основаны на значительном расширении предложений Блау.

Наконец, мне доставляет большое удовольствие выразить благодарность Донне Белли за ее неизменное терпение при преобразовании моего рукописного текста в прекрасно напечатанную рукопись.

Несколько замечаний относительно обозначений. Например, (IV.a.b) указывает на ссылку из главы IV, параграфа a, отмеченную как лемма, теорема, следствие или равенство a.b. Однако ссылки на это утверждение внутри самой главы IV обозначаются просто как (a.b). Символ □ всегда указывает на конец доказательства. Все ссылки на литературу указывают автора, год и, возможно, букву, например, Брауэр [1942a], и могут быть найдены в библиографии.

У. Фейт

Сентябрь, 1980

ГЛАВА I

§ 1. Предварительные результаты

Цель этой главы — привести некоторые основополагающие результаты из теории колец, которые впоследствии будут нужны для изучения представлений конечных групп. При этом мы не будем делать попыток доказать наиболее общие результаты о кольцах. Большую часть этого материала можно найти в одной или нескольких из тех книг, которые перечислены в конце настоящего параграфа.

Предполагается, что читатель знаком с основными свойствами колец и модулей. В этом параграфе мы введем некоторую терминологию и соглашения, а также сформулируем без доказательства некоторые основные результаты, которые нам будут необходимы.

Везде в книге термин *кольцо* будет означать кольцо с единичным элементом. Все модули предполагаются унитарными. Другими словами, если V есть A-модуль для кольца A, то $v \cdot 1 = v$ для всех $v \in V$.

Пусть A — кольцо.

Элемент e из A называется *идемпотентом*, если $e^2 = e \neq 0$. Идемпотенты e_1, e_2 *ортогональны*, если $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$. Идемпотент e из A называется *примитивным*, если его нельзя представить в виде суммы двух ортогональных идемпотентов из A, и *примитивным центральным*, если он принадлежит центру A и его нельзя представить в виде суммы двух ортогональных идемпотентов, принадлежащих центру кольца A.

Под *A-модулем* будем всегда понимать правый A-модуль. Иногда будет необходимо обращаться к левым A-модулям или двусторонним A-модулям. В этих случаях будут даваться дополнительные пояснения. Большинство результатов будет формулироваться в терминах модулей. Однако, очевидно, всегда существуют аналоги этих результатов для левых модулей.

Пусть V есть A-модуль.

Подмножество $\{v_i\}$ из V *порождает* V, если $V = \sum v_i A$. Модуль V называется *конечно порожденным*, если V порождается конечным множеством.

Множество $\{v_i\}$ называется *базисом* V, если:

(i) $\{v_i\}$ порождает V;

(ii) если $\sum v_i a_i = 0$, $a_i \in A$, то $a_i = 0$ для всех i.

Если V обладает базисом, то V называется *свободным* модулем.

Термины *A-базис* и *A-свободный* будут применяться в тех случаях, когда из контекста не будет ясно, какое кольцо используется.

Регулярный A-модуль A_A определяется как аддитивная группа кольца A, превращенная в A-модуль умножением справа. *Левый регулярный* A-модуль ${}_AA$ определяется аналогично. Правые идеалы или левые идеалы кольца A будут часто отождествляться с подмодулями модуля A_A или с левыми подмодулями левого модуля ${}_AA$.

Приведем без доказательства следующие элементарные, но важные результаты.

Лемма 1.1. *A-модуль свободен тогда и только тогда, когда он является прямой суммой подмодулей, каждый из которых изоморфен* A_A.

Лемма 1.2. *Конечно порожденный свободный A-модуль обладает конечным базисом.*

Лемма 1.3. *Любой A-модуль V является гомоморфным образом свободного A-модуля. Если V конечно порожден, то он является гомоморфным образом конечно порожденного свободного A-модуля.*

Иногда будет удобно применять терминологию и обозначения точных последовательностей. В этих обозначениях лемма 1.3, например, формулировалась бы следующим образом.

Лемма 1.4. *Для любого A-модуля V существует такая последовательность*

$$0 \to W \to U \to V \to 0,$$

где U — свободный A-модуль. Если V конечно порожден, то такая точная последовательность существует с конечно порожденным свободным модулем U.

Если $V = V_1 \oplus V_2$, где V_1, V_2 — подмодули, то V_1 и V_2 называются *компонентами* модуля V. Если U изоморфен компоненте модуля V, будем писать $U \mid V$. Модуль V *неразложим*, если (0) и V — единственные компоненты V. Модуль V *разложим*, если он не является неразложимым.

Если m — целое неотрицательное число, то mV будет обозначать прямую сумму m модулей, каждый из которых изоморфен V. Тогда леммы 1.1 и 1.2 утверждают, что конечно порожденный A-модуль является свободным тогда и только тогда, когда он изоморфен mA_A для подходящего неотрицательного целого m.

Пусть $V \neq (0)$. Модуль V *неприводим*, если (0) и V — единственные подмодули V. Модуль V *приводим*, если он не является неприводимым. Заметим, что (0) ни неприводим, ни приводим.

Если $(0) \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V$ — цепочка A-модулей, то V_2/V_1 называется *конституэнтой* модуля V, причем *неприводимой конституэнтой*, если модуль V_2/V_1 неприводим.

Нормальным рядом модуля V называется упорядоченное конечное множество подмодулей $(0) = V_0 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$. *Факторами* нормального ряда являются модули V_{i+1}/V_i.

Нормальный ряд $(0) = W_0 \subseteq \ldots \subseteq W_m = V$ называется *уплотнением* нормального ряда $(0) = V_0 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$, если существует такое множест-

во индексов $0 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant m$, что $V_i = W_{j_i}$. Уплотнение называется *собственным*, если $m > n$.

Нормальный ряд без повторений — это нормальный ряд, в котором нет фактора (0).

Композиционный ряд — это такой нормальный ряд без повторений, у которого каждое его собственное уплотнение является нормальным рядом с повторениями.

Два нормальных ряда модуля V *эквивалентны*, если существует такая биекция между множествами их факторов, что соответствующие факторы изоморфны.

Следующий результат очевиден.

Лемма 1.5. *Нормальный ряд является композиционным тогда и только тогда, когда каждый его фактор неприводим.*

Два следующих результата являются основными фактами относительно нормальных рядов. Приведем их здесь без доказательства.

Теорема 1.6 (Шрейер). *Два нормальных ряда модуля V имеют эквивалентные уплотнения.*

Теорема 1.7 (Жордан — Гёльдер). *Если V обладает композиционным рядом, то любые два его композиционных ряда эквивалентны.*

Пусть R — коммутативное кольцо. Кольцо A называется *R-алгеброй*, если:

(i) A является R-модулем;

(ii) $(ab)r = a(br) = (ar)b$ для любых $a, b \in A$, $r \in R$.

Кольцо A называется *конечно порожденной R-алгеброй*, если оно является R-алгеброй, конечно порожденной как R-модуль.

Кольцо A называется *свободной R-алгеброй*, если оно является R-алгеброй, свободной как R-модуль.

Непосредственно из этих определений следует, что если A является R-алгеброй, то $br = (1 \cdot r)b$, где $r \in R$, $b \in A$. Если A — свободная R-алгебра, то отображение, переводящее r в $1 \cdot r$, является изоморфизмом R в центр алгебры A. В этом случае мы, как правило, будем отождествлять R с подкольцом центра алгебры A. Если R — поле, то, очевидно, каждая R-алгебра является свободной R-алгеброй.

Пусть R — коммутативное кольцо, G — конечная группа. Положим $R[G] = \{\sum_{x \in G} r_x x \mid x \in G,\ r_x \in R\}$, причем

$$\sum r_x x \pm \sum s_x x = \sum (r_x \pm s_x) x,$$

$$\sum r_x x \cdot \sum s_x x = \sum_{x,y \in G} r_x s_y xy = \sum_{z \in G} \Big(\sum_{y \in G} r_{zy^{-1}} s_y \Big) z.$$

Тогда $R[G]$ — это групповая алгебра группы G над R. Очевидно, $R[G]$ — свободная R-алгебра.

ЛИТЕРАТУРА

Artin E., Nesbitt C., Trall R. M. Rings with Minimum Condition.— University of Michigan, 1944.

Бурбаки Н. Алгебра.– М.: Наука, 1965.
Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960.
Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М.: Наука, 1969.
Джекобсон Н. Строение колец.— М.: ИЛ, 1961.
Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. I, II.— М.: ИЛ, 1963.

§ 2. Модульные конструкции

Пусть A — кольцо, V, W — некоторые A-модули.

$\mathrm{Hom}_A(V, W)$ — это аддитивная абелева группа всех гомоморфизмов из V в W. Такое же обозначение будем применять и в том случае, когда V и W — левые A-модули. При подходящих условиях $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ может быть превращена в A-модуль или левый A-модуль. Для обозначения этих модулей будем применять тот же символ. Контекст будет предотвращать возможную путаницу.

Если $f \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$, то образ v относительно f будем обозначать через fv. Если V, W — левые A-модули, то этот образ будем обозначать через vf. Таким образом, для $v \in V$, $a \in A$ имеем $(fv)a = f(va)$ $(a(vf) = (av)f)$, если V — модуль (соответственно левый модуль).

Символом $E_A(V)$ будем обозначать кольцо эндоморфизмов модуля V. Очевидно, V является левым $E_A(V)$-модулем. Аналогично, если V — левый A-модуль, то V является $E_A(V)$-модулем. Кольцо $E_A(V)$ иногда называют *инверсным кольцом эндоморфизмов* модуля V.

Пусть V_A $({}_AV)$ обозначает тот факт, что V является A-модулем (соответственно левым A-модулем). Если B — другое кольцо, то символ ${}_AV_B$ означает, что V является левым A-модулем и B-модулем, причем

$$(av)b = a(vb), \quad a \in A, \quad b \in B, \quad v \in V.$$

В этом случае, $V = {}_AV_B$ называется *двусторонним* (A, B)*-модулем*. Если $A = B$, то $V = {}_AV_B$ является *двусторонним* A*-модулем*.

Под идеалом кольца A всегда будем понимать двусторонний идеал. Мы часто будем отождествлять идеалы кольца A с двусторонними подмодулями модуля ${}_AA_A$.

Пусть A, B — кольца, $a \in A$, $b \in B$, $f \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$, $v \in V$, $w \in W$. Имеют место следующие леммы.

Лемма 2.1. *$V_A \underset{A}{\otimes} {}_AW_B$ является B-модулем, таким, что* $(v \otimes w)b = v \otimes wb$.

Лемма 2.2. *${}_BV_A \underset{A}{\otimes} {}_AW$ является левым B-модулем, таким, что* $b(v \otimes w) = bv \otimes w$.

Лемма 2.3. $\mathrm{Hom}_A({}_AV_B, {}_AW)$ *является левым B-модулем, таким, что* $v(bf) = (vb)f$.

Лемма 2.4. $\mathrm{Hom}_A({}_BV_A, W_A)$ *является B-модулем, таким, что* $(fb)v = f(bv)$.

Лемма 2.5. $\mathrm{Hom}_A(V_A, {}_BW_A)$ *является левым B-модулем, таким, что* $(bf)v = b(fv)$.

Лемма 2.6. $\mathrm{Hom}_A({}_AV, {}_AW_B)$ *является* B*-модулем, таким, что* $v(fb)=(vf)b$.

В частности, из (2.5) следует

Лемма 2.7. $\mathrm{Hom}_A(V_A, {}_AA_A)$ *является левым* A*-модулем, таким, что* $(af)v=a(fv)$.

Если A есть R-алгебра, причем кольцо R коммутативно, то любой A-модуль является одновременно левым и правым R-модулем. Следовательно, из (2.3) вытекает

Лемма 2.8. *Если* R*—коммутативное кольцо,* A*—некоторая* R*-алгебра, то для любого* A*-модуля* V $\mathrm{Hom}_R(V, R)$ *является левым* A*-модулем, таким, что* $v(af)=(va)f$.

§ 3. Условия конечности

Пусть A — кольцо, V — некоторый A-модуль.

Модуль V удовлетворяет *условию обрыва возрастающих цепочек* (ascending chain condition), или V удовлетворяет ACC, если каждая возрастающая цепочка подмодулей содержит лишь конечное число различных подмодулей. Модуль V удовлетворяет *условию обрыва убывающих цепочек* (descending chain condition), или V удовлетворяет DCC, если каждая убывающая цепочка подмодулей содержит лишь конечное число различных подмодулей.

Следующие два результата хорошо известны.

Лемма 3.1. *Для* A*-модуля* V *следующие утверждения эквивалентны:*

(i) V *удовлетворяет* ACC;

(ii) *каждое непустое множество подмодулей* V *содержит максимальный элемент;*

(iii) *каждый подмодуль* V *конечно порожден.*

Лемма 3.2. *Для* A*-модуля* V *следующие условия эквивалентны:*

(i) V *удовлетворяет* DCC;

(ii) *каждое непустое множество подмодулей* V *содержит минимальный элемент.*

Лемма 3.3. *Пусть* V_1, V_2, W*—подмодули* V. *Если* $V_1+W\subseteq V_2+W$ *и* $V_1\cap W\subseteq V_2\cap W$, *то* $V_2\not\subset V_1$.

Доказательство. Предположим, что $V_2\subset V_1$. Выберем $v\in V_1$, $v\notin V_2$. Тогда $v\in W_1+W\subseteq V_2+W$, и потому $v=v_2+w$ для подходящих $v\in V$, $w\in W$. Следовательно, $v-v_2=w\in V_1\cap W\subseteq V_2\cap W\subseteq V_2$. Таким образом, $v\in V_2$ вопреки выбору v. □

Лемма 3.4. *Пусть* W*—подмодуль* V. *Если* W *и* V/W *оба удовлетворяют* ACC *или* DCC, *то такому же условию удовлетворяет* V. *Справедливо также обратное утверждение.*

Доказательство. Обратное утверждение очевидно.

Предположим, что W и V/W удовлетворяют ACC (DCC). Пусть $\{V_i\}$ — возрастающая (убывающая) цепочка подмодулей V. Тогда $\{V_i\cap W\}$ и $\{(V_i+W)/W\}$ — возрастающие (убывающие) цепочки модулей. Поэтому в $\{V_i\cap W\}$ и $\{V_i+W\}$ существует лишь конечное

число различных модулей. Если $V_i \cap W = V_j \cap W$ и $V_i + W = V_j + W$, то, в силу (3.3), $V_i = V_j$, так как $\{V_i\}$ является цепочкой. Таким образом, $\{V_i\}$ содержит лишь конечное множество различных модулей. □

Говорят, что кольцо A удовлетворяет ACC, или что A *нётерово*, если условию ACC удовлетворяет A_A.

Говорят, что кольцо A удовлетворяет DCC, или что A *артиново*, если условию DCC удовлетворяет A_A. *Левая артиновость* и *левая нётеровость* определяются аналогично.

Лемма 3.5. *Пусть V — конечно порожденный A-модуль. Если A удовлетворяет* ACC *или* DCC, *то тому же условию удовлетворяет и V.*

Доказательство. Так как $mA_A / A_A \cong (m-1)A_A$, то по индукции и по (3.4), конечно порожденный свободный A-модуль удовлетворяет ACC или DCC, если такому условию удовлетворяет A. Результат теперь вытекает из (1.3) и (3.4). □

Несмотря на то, что в некоторых случаях нет нужды накладывать одно из условий обрыва цепочек, основной темой этой главы будет изучение конечно порожденных модулей над кольцами, которые удовлетворяют ACC или DCC, и потому (3.5) будет применяться постоянно.

Следствие 3.6. *Пусть R — коммутативное кольцо, A — конечно порожденная R-алгебра. Если R удовлетворяет* ACC (DCC), *то A удовлетворяет* ACC *и левому* ACC (DCC *и левому* DCC).

Доказательство. Так как R коммутативно, то утверждение следует из (3.5). □

Лемма 3.7. *Модуль V обладает композиционным рядом тогда и только тогда, когда V удовлетворяет одновременно* ACC *и* DCC.

Доказательство. Предположим, что V удовлетворяет одновременно ACC и DCC. Множество подмодулей V, которые обладают композиционным рядом, содержит (0) и потому непусто. Тогда существует подмодуль W, максимальный среди тех подмодулей, которые обладают композиционным рядом. Если $W \neq V$, выберем модуль U, минимальный относительно свойства $W \subset U$. Таким образом, U/W неприводим и, значит, U обладает композиционным рядом, вопреки выбору W. Отсюда $W = V$, что и утверждалось.

Предположим, что V обладает композиционным рядом с n факторами. Ввиду теоремы Шрейера (1.6), любая цепочка подмодулей содержит не больше n различных членов. Поэтому V удовлетворяет ACC и DCC. □

Лемма 3.8. *Если V удовлетворяет* ACC *или* DCC, *то V разлагается в прямую сумму конечного числа неразложимых модулей.*

Доказательство. Предположим, что V удовлетворяет ACC. Пусть $\{V_i\}$ — такое множество подмодулей из V, что V/V_i не разлагается в прямую сумму конечного числа неразложимых модулей. Если лемма неверна, то (0) принадлежит этому множеству, и потому оно непусто. Пусть W — максимальный элемент этого множества.

Тогда V/W разложим. Следовательно, существуют подмодули W_1, W_2 модуля V, такие, что $W \subset W_1$, $W \subset W_2$ и $V/W \cong W_1/W \oplus W_2/W$. Из максимальности W следует, что модули $W_1/W \cong V/W_2$ и $W_2/V \cong V/W_1$ являются прямыми суммами конечного числа неразложимых модулей. Тогда этим свойством обладает также и V/W, вопреки выбору W.

Предположим теперь, что V удовлетворяет DCC. Если лемма неверна, то выберем W минимальным среди тех подмодулей модуля V, которые не разложимы в прямую сумму конечного числа неразложимых модулей. Тогда $W = W_1 \oplus W_2$ для некоторых $W_1 \neq (0)$, $W_2 \neq (0)$. Следовательно, каждый из модулей W_1, W_2 разлагается в прямую сумму конечного числа неразложимых модулей, и тогда этим свойством обладает также W, вопреки выбору W. □

Следствие 3.9. *Предположим, что A удовлетворяет* ACC *или* DCC. *Пусть V — конечно порожденный A-модуль. Тогда V является прямой суммой конечного числа неразложимых модулей.*

Доказательство. Очевидно, ввиду (3.5) и (3.8). □

§ 4. Проективные и относительно проективные модули

На протяжении этого параграфа A будет кольцом, удовлетворяющим ACC.

Все результаты этого параграфа будут формулироваться для конечно порожденных модулей. Этого будет достаточно для наших последующих целей. Однако хорошо известно, что аналогичные результаты верны для произвольных модулей, даже если A не удовлетворяет какому-либо условию обрыва цепочек.

Конечно порожденный A-модуль P называется *проективным*, если каждая точная последовательность

$$0 \to W \to V \to P \to 0$$

с конечно порожденными A-модулями W и V расщепляема.

Приведем без доказательства следующий базисный результат.

Теорема 4.1. *Пусть P — конечно порожденный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *P проективен;*

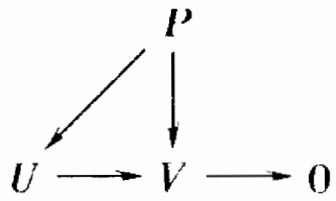
(ii) *$P \mid V$ для некоторого конечно порожденного свободного A-модуля V;*

(iii) *каждая диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow & & \\ U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с конечно порожденными A-модулями U и V и точной нижней

строкой может быть дополнена до коммутативной диаграммы



Следствие 4.2. *Пусть V, V_1, V_2 — конечно порожденные A-модули, причем $V=V_1\oplus V_2$. A-модуль V проективен тогда и только тогда, когда проективны V_1 и V_2.*

Доказательство. Очевидно ввиду 4.1 (ii). □

Лемма 4.3 (Шануэль). *Предположим, что P_1 и P_2 — конечно порожденные проективные A-модули, а следующие последовательности*

$$0\to W_1\xrightarrow{f_1}P_1\xrightarrow{t_1}V\to 0,$$

$$0\to W_2\xrightarrow{f_2}P_2\xrightarrow{t_2}V\to 0$$

точны, где W_1, W_2, V — конечно порожденные A-модули. Тогда $P_1\oplus W_2\cong P_2\oplus W_1$.

Доказательство. Пусть U — подмодуль $P_1\oplus P_2$, определенный как

$$U=\{(u_1, u_2)\mid t_1u_1=t_2u_2\}.$$

Зададим g: $U\to P_1$, полагая $g(u_1, u_2)=u_1$. Тогда g является эпиморфизмом с ядром $\{(0, u_2)\mid u_2\in f_2(W_2)\}\cong W_2$. Значит, $U\cong P_1\oplus W_2$, поскольку P_1 проективен. Аналогично, $U\cong P_2\oplus W_1$. □

Лемма 4.4. *Пусть P — конечно порожденный проективный A-модуль. Предположим, что U, V, W — конечно порожденные A-модули, а последовательность*

$$0\to U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{t}W\to 0$$

точна. Тогда существует точная последовательность абелевых групп:

$$0\to\mathrm{Hom}_A(P, U)\to\mathrm{Hom}_A(P, V)\to\mathrm{Hom}_A(P, W)\to 0.$$

Если A — алгебра над некоторым коммутативным кольцом R, то эта последовательность является точной последовательностью R-модулей.

Доказательство. Для $h\in\mathrm{Hom}_A(P, V)$ положим $s(h)=th\in\mathrm{Hom}_A(P, W)$. Тогда s является гомоморфизмом групп, а в случае, когда A является R-алгеброй, s является R-гомоморфизмом. Ядром s является, очевидно, $\mathrm{Hom}_A(P, f(U))\cong\mathrm{Hom}_A(P, U)$. Поскольку P проективен, то из (4.1) (iii) следует, что s — эпиморфизм. □

Пусть B — подкольцо A, причем $1\in B$. Для A-модуля V через V_B будем обозначать ограничение V на B. Будем писать также $A_B=(A_A)_B$.

Если $V=V_B$ — произвольный B-модуль, то, в силу (2.1), $V_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A$ является A-модулем.

Лемма 4.5. *Пусть B — такое подкольцо A, что ${}_B A$ — конечно порожденный свободный левый B-модуль, а A_B — конечно порожденный свободный B-модуль. Пусть V — конечно порожденный A-модуль. Тогда существует такая точная последовательность*

$$0 \to W \xrightarrow{h} V_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A \xrightarrow{f} V \to 0,$$

что

$$0 \to W_B \xrightarrow{h} \left(V_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A\right)_B \xrightarrow{f} V_B \to 0$$

является расщепляемой точной последовательностью. Если, кроме того, V_B — проективный B-модуль, то W_B — проективный B-модуль.

Доказательство. Пусть $\{y_1, \ldots, y_n\}$ — базис ${}_B A$. Тогда

$$V_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A = \left\{ \sum_{i=1}^{h} v_i \otimes y_i \mid v_i \in V \right\}$$

и $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes y_i = 0$ тогда и только тогда, когда $v_i = 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Положим

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes y_i \mid \sum_{i=1}^{n} v_i y_i = 0 \right\}.$$

Если V_B — проективный B-модуль, то, учитывая, что A_B свободен, из (4.2) и первой части доказываемого результата будет следовать, что W_B проективен. Определим f, полагая

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} v_i y_i.$$

Пусть h — тождественное отображение модуля W.

Если $a \in A$, то $y_i a = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j$, где $i = 1, \ldots, n$, $b_{ij} \in B$. Тогда

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes y_i \right) a = \sum_{i=1}^{n} v_i y_i a = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i b_{ij} y_j = f\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i b_{ij} \otimes y_j \right) =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes y_i a \right).$$

Значит, f является A-гомоморфизмом. Очевидно, ядром f является W.

Пусть $1 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, где $c_i \in B$. Определим g: $V_B \to \left(V_B \otimes {}_B A_A\right)_B$, полагая $gv = \sum_{i=1}^{n} v c_i \otimes y_i$. Если $b \in B$, то

$$(gv)b = \left(\sum_{i=1}^{n} v c_i \otimes y_i \right) b = v \otimes \sum_{i=1}^{n} c_i y_i b = v \otimes b \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = \sum_{i=1}^{n} v b c_i \otimes y_i = g(vb).$$

Значит, g есть B-гомоморфизм. Поскольку $fgv=v$, $v\in V$, то f — эпиморфизм, а g — мономорфизм и $g(V_B)\cap W_B=(0)$. Осталось лишь показать, что $(V_B\underset{B}{\otimes}{}_BA_A)_B=W_B+g(V_B)$. Однако это следует из того, что если $w\in(V_B\underset{B}{\otimes}{}_BA_A)_B$, то $f(w-gfw)=0$, и потому $w-gfw\in W_B$ и $w=(w-gfw)+gfw$. □

Пусть B — такое подкольцо A, что $1\in B$. B удовлетворяет ACC, а ${}_BA$, A_B конечно порождены как левый и правый B-модули соответственно. Конечно порожденный A-модуль P называется *проективным относительно* B или просто *B-проективным*, если для каждой пары конечно порожденных A-модулей W, V точная последовательность

$$0\to W\xrightarrow{h}V\xrightarrow{f}P\to 0$$

расщепляема при условии расщепляемости последовательности

$$0\to W_B\xrightarrow{h}V_B\xrightarrow{f}P_B\to 0.$$

Лемма 4.6. *Пусть B — такое подкольцо A, что $1\in B$, B удовлетворяет* ACC. *A_B — конечно порожденный свободный B-модуль, а ${}_BA$ — конечно порожденный левый B-модуль. Пусть, далее, V — конечно порожденный A-модуль. A-модуль V проективен тогда и только тогда, когда V_B — проективный B-модуль, а V B-проективен.*

Доказательство. Очевидно, ввиду определения и (4.1). □

Следствие 4.7. *Пусть A — конечно порожденная алгебра над полем F, V — конечно порожденный A-модуль. V проективен тогда и только тогда, когда он F-проективен.*

Доказательство. Очевидно ввиду (4.6). □

Теорема 4.8. *Пусть B — подкольцо A, такое, что $1\in B$, B удовлетворяет* ACC, *A_B — конечно порожденный свободный B-модуль, а ${}_BA$ — конечно порожденный свободный левый B-модуль. Пусть P — конечно порожденный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *P B-проективный;*

(ii) $P\mid P_B\underset{B}{\otimes}{}_BA_A$;

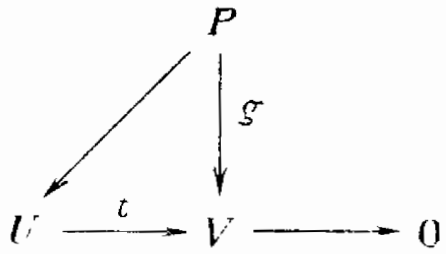
(iii) $P\mid W\underset{B}{\otimes}{}_BA_A$ *для некоторого конечно порожденного B-модуля W;*

(iv) *каждая диаграмма*

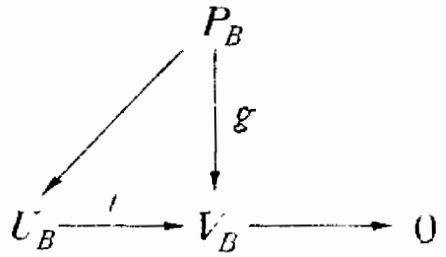
$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow g & & \\ U & \xrightarrow{t} & V & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с конечно порожденными A-модулями U и V и точной нижней

строкой может быть дополнена до коммутативной диаграммы



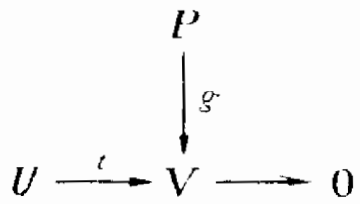
при условии, что существует коммутативная диаграмма



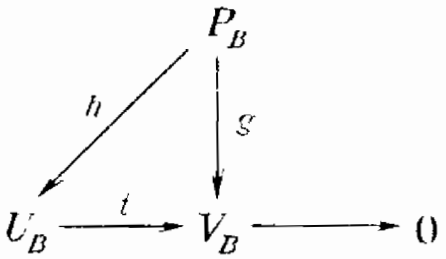
Доказательство. (i)⇒(ii). Очевидно ввиду (4.5).

(ii)⇒(iii). Тривиально.

(iii)⇒(iv). Предположим, что U, V — такие конечно порожденные A-модули, что нижняя строка в следующей диаграмме



точна, а диаграмма



коммутативна. Пусть $W \underset{B}{\otimes} {}_B A_A = P \oplus P'$. Определим g_0, h_0, полагая $g_0(u+u') = gu$, $h_0(u+u') = hu$, где $u \in P$, $u' \in P'$. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ есть B-базис модуля ${}_B A$. Определим f: $W \underset{B}{\otimes} {}_B A_A \to U$ как $f\left(\sum_{i=1}^n w_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^n h_0(w_i \otimes 1) y_i$, где $w_i \in W$. Покажем, что f является A-гомоморфизмом. Пусть $a \in A$, $y_i a = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j$, где $b_{ij} \in B$. Тогда

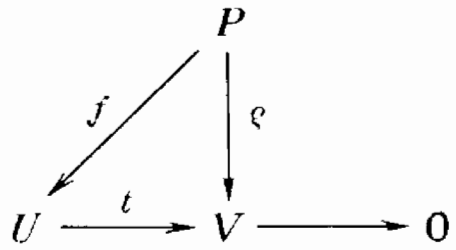
$$f\left(\sum_{i=1}^n w_i \otimes y_i a\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i b_{ij} \otimes y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_0\left(w_i b_{ij} \otimes 1\right) y_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_0(w_i \otimes 1) b_{ij} y_j = \sum_{i=1}^n h_0(w_i \otimes 1) y_i a = f\left(\sum_{i=1}^n w_i \otimes y_i\right) a.$$

Теперь по определению имеем

$$tf\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} th_0(w_i \otimes 1) y_i = \sum_{i=1}^{n} g_0(w_i \otimes 1) y_i = g_0\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes y_i\right).$$

Следовательно, если через f обозначить также ограничение f на P, то диаграмма



коммутативна, что и требовалось доказать.

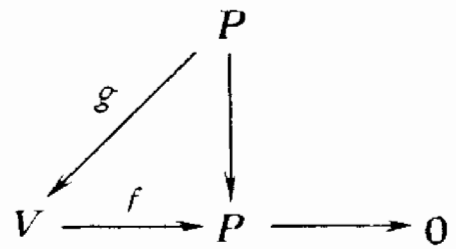
(iv)⇒(i). Предположим, что V, W — конечно порожденные A-модули, такие, что

$$0 \to W \xrightarrow{h} V \xrightarrow{f} P \to 0$$

— точная, а

$$0 \to W_B \xrightarrow{h} V_B \xrightarrow{f} P_B \to 0$$

— точная расщепляемая последовательность. Тогда, по предположению, существует коммутативная диаграмма



где $fgw = w$, $w \in P$. Поэтому g — мономорфизм и $g(P) \cap h(W) = (0)$. Если $v \in V$, то $fv = fgfv$. Следовательно,

$$v = (v - gfv) + gfv \in h(W) + g(P).$$

Значит, $V = h(W) \oplus g(P)$, что и утверждалось. □

Следствие 4.9. *Предположим, что A и B удовлетворяют условиям теоремы* 4.8. *Пусть V, V_1, V_2 — конечно порожденные A-модули, причем $V = V_1 \oplus V_2$. Модуль V B-проективен тогда и только тогда, когда V_1 и V_2 B-проективны.*

Доказательство. Очевидно ввиду (4.8) (iii). □

Следствие 4.10. *Предположим, что A и B удовлетворяют условиям теоремы* 4.8. *Пусть P — такой конечно порожденный A-модуль, что P_B B-свободен. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *P B-проективен;*

(ii) *для каждой пары конечно порожденных A-модулей W и V, таких, что W_B и V_B — конечно порожденные проективные B-модули, точная последовательность*

$$0 \to W \xrightarrow{h} V \xrightarrow{f} P \to 0$$

расщепляема при условии, что

$$0 \to W_B \xrightarrow{h} V_B \xrightarrow{f} P_B \to 0$$

— точная расщепляемая последовательность.

Доказательство. (i)⇒(ii). Очевидно.

(ii)⇒(i). Так как $\left(P_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A\right)_B$ — проективный B-модуль, то из (4.5) следует, что $P \mid P_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A$. Таким образом, по (4.8), P B-проективен. □

Лемма 4.11. *Предположим, что A и B удовлетворяют условиям теоремы* 4.8. *Пусть S — такое подмножество B, что $AS = SA$. Если P есть A-модуль, то PS — также A-модуль. Если, кроме того, P B-проективен, то PS и P/PS также B-проективны.*

Доказательство. По определению, $PSA = PAS = PS$, и потому PS является A-модулем.

Предположим, что P B-проективен. В силу (4.8), $P_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A = P' \oplus V$, где $P' \cong P$. Тогда

$$P'S \oplus VS = (P' \oplus V)S = \left(P_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A\right)S = PS_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A.$$

Значит, ввиду (4.8), $PS \cong P'S$ B-проективен. Кроме того,

$$P'/P'S \oplus V/VS \cong (P' + V)/(P' + V)S =$$

$$= P_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A / PS_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A \cong (P/PS)_B \underset{B}{\otimes} {}_B A_A.$$

Значит, по (4.8), $P/PS = P'/P'S$ B-проективен. □

Заметим, что если R — коммутативное кольцо, удовлетворяющее ACC, а G — конечная группа и H — ее подгруппа, то $A = R[G]$ и $B = R[H]$ удовлетворяют условиям утверждений (4.5)—(4.11).

§ 5. Полная приводимость

Пусть A — кольцо, V — некоторый A-модуль.

Модуль V называется *вполне приводимым*, если каждый подмодуль из V является компонентой.

Лемма 5.1. *Пусть V вполне приводим. Тогда каждый гомоморфный образ модуля V изоморфен подмодулю модуля V и каждый подмодуль модуля V изоморфен гомоморфному образу модуля V.*

Доказательство. Если $W \subseteq V$, то $V = W \oplus W'$, где W' — подмодуль из V. Тогда $W \cong V/W'$ и $V/W \cong W'$. □

Лемма 5.2. *Если V вполне приводим, то каждый подмодуль и каждый гомоморфный образ V вполне приводим.*

Доказательство. Положим $U = V/W$. Пусть $U_1 \subseteq U$. Тогда существует такой подмодуль V_1 модуля V, что $W \subseteq V_1$ и $U_1 = V_1/W$. Выберем V_2 таким, чтобы $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда $U = U_1 \oplus (V_2 + W)/W$. Таким образом, U вполне приводим. Результат теперь следует из (5.1). □

Лемма 5.3. *Если V вполне приводим и $V \neq (0)$, то V содержит неприводимый подмодуль.*

Доказательство. Пусть $v \in V$, $v \neq 0$. По лемме Цорна существует максимальный подмодуль W модуля V относительно свойства $v \notin W$. Пусть $V = W \oplus W'$. Если W' не является неприводимым, то $W' = W_1 \oplus W_2$ для ненулевых подмодулей W_1, W_2 модуля V. Так как $(W \oplus W_1) \cap (W \oplus W_2) = W$, то $v \notin W \oplus W_i$ либо для $i = 1$, либо для $i = 2$. Тем самым получаем противоречие с максимальностью W. Значит, W' неприводим. □

Теорема 5.4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *V вполне приводим;*

(ii) *V — прямая сумма неприводимых подмодулей;*

(iii) *V — сумма неприводимых подмодулей.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Рассмотрим семейство тех множеств неприводимых подмодулей из V, чьи суммы прямые. По лемме Цорна в этом семействе существует максимальный элемент $\{V_i\}$. Пусть $W = \oplus V_i$ и $V = W \oplus W'$. Если $W' \neq (0)$, то, в силу (5.2) и (5.3), W' содержит неприводимый подмодуль V'. Поэтому $W + V' = V' \oplus (\oplus V_i)$, вопреки максимальности $\{V_i\}$. Следовательно, $W' = (0)$ и $V = W$, что и утверждалось.

(ii)⇒(iii). Очевидно.

(iii)⇒(i). Пусть W — подмодуль V. По лемме Цорна существует подмодуль W' из V, максимальный относительно свойства $W \cap W' = (0)$. Тогда $W + W' = W \oplus W'$. Предположим, что $W \oplus W' \neq V$. Выберем $v \in V$, $v \notin W \oplus W'$. По условию, $v = v_1 + \ldots + v_n$, где $v_i \in V_i$ и V_i неприводим, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $v_j \notin W \oplus W'$ для некоторого j и, значит, $V_j \cap (W \oplus W') \neq V_j$. Так как V_j неприводим, то $V_j \cap (W \oplus W') = (0)$. Поэтому $W \oplus W' + V_j = W \oplus W' \oplus V_j$, и тогда $W \cap (W' \oplus V_j) = (0)$, — противоречие с максимальностью W'. Следовательно, $V = W \oplus W'$. □

Следствие 5.5. *Пусть V вполне приводим. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *V удовлетворяет* ACC;

(ii) *V удовлетворяет* DCC;

(iii) *V обладает композиционным рядом;*

(iv) *V является прямой суммой конечного числа неприводимых подмодулей.*

Доказательство. В силу (3.7) и (5.4), утверждение из (iv) очевидно эквивалентно каждому из утверждений (i), (ii), (iii). □

Цоколем модуля V называется сумма всех его неприводимых подмодулей. В том случае, когда V не содержит неприводимых подмодулей, мы полагаем цоколь V равным (0).

Радикалом модуля V называется пересечение всех его максимальных подмодулей. В том случае, когда V не содержит максимальных подмодулей, мы полагаем радикал V равным V.

В качестве непосредственных следствий (5.4) получаем

Следствие 5.6. *Цоколь V совпадает с наибольшим вполне приводимым подмодулем модуля V.*

Следствие 5.7. *Если V вполне приводим, то его радикал равен* (0).

Следствие 5.8. *Если A_A вполне приводим, то каждый A-модуль также вполне приводим.*

Доказательство. Пусть V — некоторый A-модуль, $v \in V$. Отображение из A_A в vA, переводящее a в va, является гомоморфизмом. Поэтому, ввиду (5.2), vA вполне приводим. Так как $v \in vA$, то учитывая (5.6), отсюда получаем, что v лежит в цоколе V. Таким образом, V совпадает со своим цоколем, и результат теперь следует из (5.6). □

Лемма 5.9. *Предположим, что V удовлетворяет* DCC. *Модуль V вполне приводим тогда и только тогда, когда его радикал равен* (0).

Доказательство. Если V вполне приводим, то, ввиду (5.7), его радикал равен (0).

Предположим, что радикал модуля V равен (0). Ввиду условия DCC, можно выбрать такой подмодуль, который является минимальным во множестве всех подмодулей модуля V, являющихся пересечениями конечного числа максимальных подмодулей модуля V. Этот модуль содержится в каждом максимальном подмодуле модуля V и, значит, лежит в радикале. Поэтому он равен (0). Следовательно, $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$, где каждый из W_i максимален в V. Тогда V/W_i неприводим, и потому, согласно (5.4), $\oplus_{i=1}^{n} V/W_i$ вполне приводим. Пусть f_i: $V \to V/W_i$ — естественная проекция, а f: $V \to \oplus_{i=1}^{n} V/W_i$ определено как $fv = \sum_{i=1}^{n} f_i v$. Тогда f — мономорфизм. Значит, V изоморфен подмодулю вполне приводимого модуля. Результат теперь следует из (5.2). □

Лемма 5.10. *Пусть $V = \oplus V_i$, где каждый из V_i неприводим. Пусть, далее, W — неприводимый подмодуль модуля V. Тогда $W \subseteq \oplus V_j$, где j пробегает множество тех индексов i, для которых $W \cong V_i$.*

Доказательство. Пусть $w \in W$, $w \neq 0$. Тогда $w = \sum v_i$, где $v_i \in V_i$. Если $v_i \neq 0$, то отображение, переводящее wa в $v_i a$ ($a \in A$), является ненулевым гомоморфизмом $W = wA$ в $v_i A = V_i$. Поскольку W и V_i неприводимы, оно является изоморфизмом. Значит, $W \cong V_i$. □

Следствие 5.11. *Пусть $V = \oplus V_i = \oplus W_j$, где каждый из V_i, W_j неприводим. Пусть W — неприводимый модуль. Тогда $\oplus V_s = \oplus W_t$, где s пробегает все те i, для которых $W_i \cong W$, а t — все те j, для которых $W_j \cong W$. Кроме того, $\oplus V_s$ является подмодулем модуля V, порожденным всеми теми подмодулями, которые изоморфны W.*

Доказательство. Очевидно ввиду (5.10). □

§ 6. Радикал

Пусть A — кольцо, V — некоторый A-модуль.

Аннулятором V называется множество всех таких $a \in A$, что $Va = (0)$. Очевидно, аннулятор I модуля V является идеалом в A, и V можно рассматривать как A/I-модуль. Модуль V является *A-точным*, если его аннулятор равен (0).

Идеал I кольца A называется *примитивным*, если кольцо A/I обладает A/I-точным неприводимым модулем. Очевидно, идеал I примитивен тогда и только тогда, когда он является аннулятором некоторого неприводимого A-модуля.

Радикал Джекобсона кольца A, или просто *радикал* A, — это пересечение всех примитивных идеалов кольца A. Он будет обозначаться через $J(A)$.

Лемма 6.1. *Модуль V неприводим тогда и только тогда, когда $V \cong A_A/W$ для некоторого максимального подмодуля W из A_A.*

Доказательство. Очевидно, A_A/W неприводим. Предположим, что V неприводим. Пусть $v \in V$, $v \neq 0$. Тогда $v \in vA$. Поэтому vA — ненулевой подмодуль модуля V и, значит, $vA = V$. Следовательно, V является гомоморфным образом модуля A_A. Ввиду неприводимости V, отсюда следует результат. □

Лемма 6.2. *Каждый максимальный правый идеал содержит примитивный идеал. Каждый примитивный идеал является пересечением содержащих его правых идеалов.*

Доказательство. Пусть M — максимальный правый идеал кольца A. В силу (6.1), A_A/M неприводим. Аннулятором A_A/M является примитивный идеал, содержащийся в M.

Пусть I — примитивный идеал кольца A, V — неприводимый A-модуль, аннулятором которого является I. Для $v \in V$, $v \neq 0$, положим $M_v = \{a \mid va = 0\}$. Очевидно, M_v — правый идеал кольца A. Из неприводимости V вытекает, что $V = vA \cong A_A/M_v$ для $v \neq 0$, $v \in V$. Поэтому, ввиду (6.1), M_v — максимальный правый идеал кольца A. Следовательно, $\bigcap_{v \in V,\, v \neq 0} M_v$ является аннулятором V. □

Непосредственно из (6.1) и (6.2) вытекает

Лемма 6.3. *$J(A)$ является пересечением всех максимальных правых идеалов кольца A.*

Таким образом, в силу (6.3), $J(A)$ совпадает с радикалом A-модуля A_A.

Элемент a из A называется *правым* (*левым*) *квазирегулярным*, если $1-a$ обладает правым (левым) обратным. Элемент a называется *квазирегулярным*, если a является одновременно как правым, так и левым квазирегулярным.

Легко видеть, что a квазирегулярен тогда и только тогда, когда $1-a$ обратим в A, или, эквивалентно, когда $1-a$ обладает единственным (двусторонним) обратным в A.

Лемма 6.4. *Пусть $a \in A$, N — правый идеал в A.*

(i) *a является правым квазирегулярным в A тогда и только тогда, когда $a+b=ab$ для подходящего $b \in A$;*

(ii) *если каждый элемент в N является правым квазирегулярным, то каждый элемент в N является квазирегулярным.*

Доказательство. $(1-a)(1-b)=1$ тогда и только тогда, когда $a+b=ab$, что и доказывает (i).

Если $a\in N$, то, ввиду (i), $a+b=ab$ для некоторого b из A. Значит, b является правым квазирегулярным в A и $b=ab-a\in N$. Следовательно, $(1-b)$ обратим и $(1-a)=(1-b)^{-1}$. Поэтому a квазирегулярный. □

Лемма 6.5. *$J(A)$ состоит из квазирегулярных элементов и содержит каждый правый идеал, состоящий из квазирегулярных элементов.*

Доказательство. Если $a\in J(A)$, то $1=a+(1-a)$, и потому $A=J(A)+(1-a)A$. Если $(1-a)A\neq A$, то существует такой максимальный правый идеал M, что $(1-a)A\subseteq M$. Так как, по (6.3), $J(A)\subseteq M$, то $A=M$, что невозможно. Значит, $(1-a)A=A$ и a является правым квазирегулярным. В силу (6.4) (ii), a квазирегулярный.

Пусть N — правый идеал, состоящий из квазирегулярных элементов. Если $N\not\subseteq J(A)$, то по (6.3) существует такой максимальный правый идеал M, что $N\not\subseteq M$. Следовательно, $M+N=A$. Значит, $1=a+b$, где $a\in M$, $b\in N$, и тогда $a=1-b$ обладает обратным — противоречие с тем, что $a\in M$ и $M\neq A$. Следовательно, $N\subseteq J(A)$. □

Левый радикал кольца A определим аналогично $J(A)$, используя левые модули вместо модулей.

Теорема 6.6. *$J(A)$ содержит каждый правый или левый идеал, состоящий из квазирегулярных элементов. Кроме того, следующие множества совпадают:*

(i) $J(A)$;

(ii) *левый радикал кольца A;*

(iii) *пересечение всех максимальных правых идеалов кольца A;*

(iv) *пересечение всех максимальных левых идеалов кольца A.*

Доказательство. Пусть $J_0(A)$ — левый радикал кольца A. В силу (6.5) и его левого аналога, $J(A)=J_0(A)$. Результат теперь следует из (6.3) и его левого аналога. □

Кольцо A является *полупростым*, если $J(A)=(0)$.

Лемма 6.7. *Пусть I — такой идеал кольца A, что $I\subseteq J(A)$. Тогда $J(A/I)=J(A)/I$. В частности, $A/J(A)$ — полупростое кольцо.*

Доказательство. Непосредственно следует из (6.3). □

Правый (левый) идеал N кольца A называется *правым* (*левым*) *ниль-идеалом*, если каждый его элемент нильпотентен. Идеал N называется *нильпотентным*, если $N^m=(0)$ для некоторого натурального m.

Лемма 6.8. *Если N — правый или левый ниль-идеал, то $N\subseteq J(A)$.*

Доказательство. Если a — нильпотентный элемент, то $a^m=0$ для некоторого натурального m. Значит, $(1-a)(1+a+\ldots+a^{m-1})=1$, и потому a квазирегулярен. Поэтому, в силу (6.6), $N\subseteq J(A)$. □

Теорема 6.9. *Предположим, что A удовлетворяет* DCC. *Тогда $J(A)$ — нильпотентный идеал.*

Доказательство. В силу DCC, существует такое целое число $n\geqslant 0$, что $J(A)^n=J(A)^{n+i}$ для всех $i\geqslant 0$. Положим $N=J(A)^n$. Предположим, что $N\neq(0)$. Так как $N^2=N\neq(0)$, то, ввиду DCC, в A можно

выбрать правый идеал M, минимальный относительно свойства $MN\neq(0)$. Поэтому $aN\neq(0)$ для некоторого $a\in M$. Далее, $aN\subseteq M$ и $aNN=aN\neq(0)$. Следовательно, $M=aN$ по минимальности M. Таким образом, $a\in aN$, и тогда $a=ab$ для некоторого $b\in N$. Следовательно, $a(1-b)=0$. Из квазирегулярности b следует, что $a=0$, вопреки тому, что $aN\neq(0)$. Поэтому $J(A)^n=N=(0)$. □

Лемма 6.10. *Если A полупросто и удовлетворяет* DCC, *то каждый A-модуль вполне приводим.*

Доказательство. Ввиду (6.3), радикал модуля A_A равен (0). Тогда, в силу (5.9), A_A вполне приводим. Результат теперь следует из (5.8). □

Лемма 6.11. *Предположим, что A удовлетворяет* DCC. *Пусть V — конечно порожденный A-модуль. Тогда V удовлетворяет* ACC *и* DCC.

Доказательство. Положим $V_i=VJ(A)^i$, $i=0, 1, \ldots$ В силу (6.9), $V_n=(0)$ для некоторого натурального n. Так как V конечно порожден, то V, а значит, и V_i/V_{i+1} удовлетворяют DCC, ввиду (3.4) и (3.5). Поскольку $J(A)$ аннулирует V_i/V_{i+1} для каждого i, то V_i/V_{i+1} является $A/J(A)$-модулем. В силу (6.10), каждый из V_i/V_{i+1} вполне приводим и, следовательно, по (5.5) каждый из V_i/V_{i+1} обладает композиционным рядом. Результат теперь следует из (3.7). □

Следствие 6.12. *Если A удовлетворяет* DCC, *то A удовлетворяет* ACC.

Доказательство. Непосредственно следует из (6.11). □

Для большинства результатов этого параграфа наши предположения о том, что $1\in A$ и что каждый A-модуль унитарен, являются лишь незначительными удобствами. Однако читатель должен иметь в виду, что они существенны для (6.11) и (6.12).

Лемма 6.13. *Предположим, что A удовлетворяет* ACC *и $A/J(A)$ удовлетворяет* DCC. *Тогда для каждого целого $m\geqslant 0$ $A/J(A)^m$ удовлетворяет* DCC.

Доказательство. Индукция по m. Если $m=1$, то результат справедлив по условию. Так как A удовлетворяет ACC, то $J(A)^m$ конечно порожден как правый идеал. Значит, $J(A)^m/J(A)^{m+1}$ удовлетворяет DCC, поскольку он является конечно порожденным $A/J(A)$-модулем. Поэтому, если $A/J(A)^m$ удовлетворяет DCC, то и $A/J(A)^{m+1}$ удовлетворяет DCC, и шаг индукции обоснован. □

§ 7. Идемпотенты и блоки

Пусть A — кольцо.

Лемма 7.1. *Пусть $A_A=V_1\oplus\ldots\oplus V_n$, $V_i\neq(0)$, $i=1, \ldots, n$. Пусть, далее, $1=e_1+\ldots+e_n$, $e_i\in V_i$. Тогда $\{e_i\}$ является множеством попарно ортогональных идемпотентов из A и $V_i=e_iA$. Обратно, если $\{e_i\}$ — конечное множество попарно ортогональных идемпотентов, то $(\sum e_i)A=\oplus e_iA$.*

Доказательство. Если $a\in A$, то $a=1\cdot a=e_1a+\ldots+e_na$. Поэтому $e_i=e_1e_i+\ldots+e_ne_i$. Следовательно, $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$ для всех i, j. Далее,

$e_iA \subseteq V_i$ и $A_A = e_1A \oplus \ldots \oplus e_nA$. Поэтому $e_iA = V_i$. Обратно, пусть $\{e_i\}$ — конечное множество попарно ортогональных идемпотентов. Пусть $e = \sum e_i$. Тогда $e^2 = e$ и $ee_i = e_ie = e_i$ для всех i. Поэтому $eA = \sum e_iA$. Если $\sum e_ia_i = 0$, то, умножая слева на e_j, получаем, что $e_ja_j = 0$ для всех j. Следовательно, $eA = \oplus e_iA$. □

Следствие 7.2. *Пусть e — идемпотент кольца A. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *eA неразложим;*

(ii) *e — примитивный идемпотент;*

(iii) *Ae — неразложимый левый A-модуль.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Прямое следствие (7.1).

(ii)⇒(i). Если e — примитивный идемпотент, то $A_A = (1-e)A \oplus eA$. Если $eA = V_1 \oplus V_2$, где V_1, $V_2 \neq (0)$, то, по (7.1), e не является примитивным идемпотентом, вопреки выбору e.

Аналогичные рассуждения показывают, что (ii) эквивалентно (iii). □

Лемма 7.3. *Пусть $A = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$, где каждый из I_j является ненулевым левым идеалом в A. Пусть $1 = e_1 + \ldots + e_n$, где $e_i \in I_i$. Тогда $\{e_i\}$ — множество попарно ортогональных центральных идемпотентов и $I_i = e_iA$ — кольцо с единичным элементом e_i для каждого i. Обратно, если $\{e_i\}$ — конечное множество попарно ортогональных центральных идемпотентов, то $(\sum e_i)A = \oplus e_iA$, где $e_iA = Ae_i$ — идеал кольца A.*

Доказательство. Если $a \in A$, то $a = 1 \cdot a = a \cdot 1 = e_1a + \ldots + e_na = ae_1 + \ldots + ae_n$. Следовательно, $e_ia = ae_i$ и $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$ для всех i, j. Так как $e_iA \subseteq I_i$ и $A = \oplus e_iA$, то $e_iA = I_i$ и $e_ia = a = ae_i$ для всех $a \in I_i$. Обратно, в силу (7.1), $(\sum e_i)A = \oplus e_iA$ и $e_iA = Ae_i$, поскольку каждый из e_i централен. □

Следствие 7.4. *Пусть e — центральный идемпотент из A. Идемпотент e является примитивным центральным идемпотентом тогда и только тогда, когда eA не разлагается в прямую сумму двух ненулевых идеалов.*

Доказательство. Непосредственно следует из (7.3). □

Лемма 7.5. *Если A удовлетворяет* ACC, *то 1 является суммой попарно ортогональных примитивных идемпотентов.*

Доказательство. В силу (3.8), A_A является прямой суммой конечного числа неразложимых модулей. Результат теперь следует из (7.1) и (7.2). □

Лемма 7.6. *Предположим, что A удовлетворяет* ACC. *Тогда:*

(i) *A содержит лишь конечное множество центральных идемпотентов;*

(ii) *два примитивных центральных идемпотента либо равны, либо ортогональны;*

(iii) *$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$, где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — множество всех примитивных центральных идемпотентов кольца A.*

Доказательство. (i) В силу (7.5), $1 = \sum f_i$, где $\{f_i\}$ — множество попарно ортогональных примитивных идемпотентов. Пусть e — центральный идемпотент. Тогда $e = \sum ef_i$ и $f_i = ef_i + (1-e)f_i$. Поэтому либо

$ef_i=0$, либо $ef_i=f_i$, так как f примитивный. Следовательно, $e=\sum f_j$, где f_j пробегает те слагаемые, для которых $ef_j=f_j$. Поэтому e является суммой элементов из подмножества множества $\{f_i\}$. Это доказывает (i).

(ii) Если e_1, e_2 — примитивные центральные идемпотенты, то $e_1=e_1e_2+e_1(1-e_2)$. Поэтому либо $e_1=e_1e_2$, либо $e_1e_2=0$. Аналогично, либо $e_2=e_1e_2$, либо $e_1e_2=0$. Таким образом, либо $e_1e_2=0$, либо $e_1=e_1e_2=e_2$.

(iii) Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — множество всех примитивных центральных идемпотентов кольца A. Тогда, в силу (ii), $e=\sum_{i=1}^{n} e_i$ — центральный идемпотент. Если $e\neq 1$, то $1-e$ — центральный идемпотент, и тогда по (i) он является суммой примитивных центральных идемпотентов. Так как $e_i(1-e)=0$ при $i=1, \ldots, n$, то это невозможно. □

Лемма 7.7. *Предположим, что A удовлетворяет* ACC. *Тогда $A=\oplus_{i=1}^{n} Ae_i$, где $\{e_i\}$ — множество примитивных центральных идемпотентов кольца A. Для каждого i идеал Ae_i не разлагается в прямую сумму двух ненулевых идеалов кольца A. Если $A=\oplus_{i=1}^{m} A_i$, где каждый из A_i является ненулевым идеалом, который не разлагается в прямую сумму двух ненулевых идеалов (кольца A или A_i), то $m=n$ и, после подходящей перенумерации, $A_i=Ae_i$.*

Доказательство. Непосредственно следует из (7.3), (7.4) и (7.6). □

Пусть e — примитивный центральный идемпотент кольца A. *Блоком $B=B(e)$, соответствующим e*, называется категория всех таких конечно порожденных A-модулей V, что $Ve=V$. Если $Ve=V$, то говорят, что V *принадлежит блоку* $B=B(e)$. В этом случае мы будем писать просто $V\in B$.

Теорема 7.8. *Предположим, что A удовлетворяет* ACC. *Пусть V — конечно порожденный ненулевой неразложимый A-модуль. Тогда существует такой единственный блок B, что $V\in B$. Если $V\in B$, то каждый подмодуль и каждый гомоморфный образ V принадлежит B. Кроме того, $V\in B=B(e)$ тогда и только тогда, когда $ve=v$ для всех $v\in V$.*

Доказательство. Пусть $\{e_i\}$ — множество примитивных центральных идемпотентов кольца A. В силу (7.6), $1=\sum e_i$. Поэтому если V — произвольный A-модуль, то $V=\oplus Ve_i$. Следовательно, если V неразложим и $V\neq(0)$, то $V=Ve_i$ для единственного i. Если W — подмодуль V, то $We_i=W$, $(V/W)e_i=V/W$ и $We_j=(0)=(V/W)e_j$ при $i\neq j$.

Очевидно, $ve=v$ для всех $v\in V=Ve$. □

§ 8. Кольца эндоморфизмов

Пусть A — кольцо.

Лемма 8.1 (Шур). *Пусть V, W — неприводимые A-модули. Тогда* $\mathrm{Hom}_A(V, W)=(0)$ *при $V\not\cong W$, а $E_A(V)$ — тело.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathrm{Hom}_A(V, W)$. Тогда f либо изоморфизм, либо $f(V)=(0)$, так как V и W неприводимы. Поэтому

$\mathrm{Hom}_A(V, W)=(0)$ при $V\not\cong W$, а каждый ненулевой элемент из $E_A(V)$ является автоморфизмом модуля V и, следовательно, обладает обратным. Значит, $E_A(V)$ — тело. □

Лемма 8.2. *Пусть e — идемпотент кольца A, V — некоторый A-модуль. Определим f: $Ve\to\mathrm{Hom}_A(eA, V)$, полагая $f(v)ea=vea$. Тогда f является изоморфизмом групп. Если A есть R-алгебра, то Ve и $\mathrm{Hom}_A(eA, V)$ являются R-модулями, а f является R-изоморфизмом. Если $V=eA$, то f: $eAe\to E_A(eA)$ — кольцевой изоморфизм. В частности, $E_A(A_A)\cong A\cong E_A({}_AA)$.*

Доказательство. Если A есть R-алгебра, то, в силу (2.4) и (2.5), Ve и $\mathrm{Hom}_A(eA, V)$ являются R-модулями. В этом случае, очевидно, f является R-гомоморфизмом. В любом случае f является гомоморфизмом групп, а если $V=eA$, то — кольцевым гомоморфизмом.

Если $f(v)=0$, то $v=ve=0$, и значит, f — мономорфизм. Если $h\in\mathrm{Hom}_A(eA, V)$, то $f(h(e))=h$. Поэтому f — эпиморфизм.

Последнее утверждение получаем при $e=1$. □

Лемма 8.3. *Пусть e — идемпотент кольца A. Если N — правый идеал кольца eAe, то $N=NA\cap eAe$. Отображение, переводящее N в NA, устанавливает биекцию между множеством правых идеалов кольца eAe и множеством правых идеалов кольца A. Таким образом, если A удовлетворяет* ACC *или* DCC, *то этому же условию удовлетворяет и eAe.*

Доказательство. Пусть N — правый идеал кольца eAe. Очевидно, $NA\cap eAe$ является правым идеалом кольца eAe и $N\subseteq NA\cap eAe$. Так как $N=Ne$ и $NA\cap eAe\subseteq eAe$, то $NA\cap eAe=NAe\cap eAe=NeAe\cap\cap eAe\subseteq N$. Отсюда следуют и остальные утверждения. □

Лемма 8.4. *Пусть e — идемпотент кольца A. Тогда $J(eAe)=eJ(A)e$.*

Доказательство. Пусть $a\in J(A)$. Тогда $eae\in J(A)$ и из (6.4) (i) и (6.5) вытекает, что $eae+b=eaeb$ для некоторого $b\in A$. Умножая на e с обеих сторон, получаем, что $eae+ebe=eae\cdot ebe$, и тогда, по (6.4) (i), eae является правым квазирегулярным в eAe. Так как $eJ(A)e$ — идеал в eAe, то, в силу (6.4) (ii) и (6.5), $eJ(A)e\subseteq J(eAe)$.

Пусть I — примитивный идеал в A, V — точный неприводимый A/I-модуль. Тогда Ve является eAe-модулем. Если $Ve=(0)$, то $J(eAe)\subseteq eAe\subseteq I$. Предположим, что $Ve\neq(0)$. Пусть $(0)\subset W=We\subseteq Ve$, где W есть eAe-модуль. Так как V неприводим, то $WA=V$. Следовательно, $Ve=WeAe\subseteq W$, и потому $Ve=W$. Таким образом, Ve — неприводимый eAe-модуль, и тогда $VJ(eAe)=VeJ(eAe)=(0)$. Поэтому $J(eAe)\subseteq I$. Так как I — произвольный примитивный идеал в A, то $J(eAe)\subseteq J(A)$, и тогда $J(eAe)=eJ(eAe)e\subseteq eJ(A)e$. □

Для любого целого $n>0$ будем обозначать через A_n кольцо всех $n\times n$-матриц с коэффициентами из A. Другими словами, A_n является A-свободным A-модулем с базисом $\{e_{ij}\,|\,i=1, \ldots, n\}$, причем

$$\left(\sum_{i,j}e_{ij}a_{ij}\right)\left(\sum_{i,j}e_{ij}b_{ij}\right)=\sum_{i,k}e_{ik}\left(\sum_j a_{ij}b_{jk}\right).$$

Это определение эквивалентно утверждению о том, что $A_n = A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_n$, где $\mathbf{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел. Легко проверить, что $e_{ii}^2 = e_{ii}$, $e_{ii} A_n e_{ii} \cong A$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, A_n является также левым A-модулем, если $ae_{ij} = e_{ij}a$, $a \in A$. Таким образом, A_n является двусторонним A-модулем.

Лемма 8.5. *Если A удовлетворяет* ACC *или* DCC, *то A_n также удовлетворяет этим условиям.*

Доказательство. Следует из (3.5), поскольку A_n — конечно порожденный A-модуль. □

Лемма 8.6. *Пусть V есть A-модуль. Предположим, что $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, причем $V_i \cong V_j$ при $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда $E_A(V) \cong E_A(V_1)_n$.*

Доказательство. Пусть $\hat{e}_{i1}$, $i = 1, \ldots, n$, — изоморфизм V_1 на V_i, причем $\hat{e}_{11}$ — тождественное отображение. Пусть, далее, $\hat{e}_{1i}$ — обратное отображение, переводящее V_i на V_1. Положим $\hat{e}_{ij} = \hat{e}_{i1}\hat{e}_{1j}$. Для $i, j = 1, \ldots, n$ определим $e_{ij} \in E_A(V)$, полагая $e_{ij}v_s = \hat{e}_{ij}(\delta_{js}v_s)$, $v_s \in V_s$, $s = 1, \ldots, n$.

Если $\hat{x} \in E_A(V_1)$, определим $x \in E_A(V)$, полагая

$$xv_s = e_{s1}\hat{x}e_{1s}v_s, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{8.7}$$

Легко видеть, что отображение, переводящее $\hat{x}$ в x, является мономорфизмом $E_A(V_1)$ в $E_A(V)$. Пусть E — образ $E_A(V_1)$ при этом отображении, F — кольцо, порожденное E и всеми e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$.

Из (8.7) следует, что для всех i, j и всех $x \in E$

$$(e_{ij}x)v_s = 0 = x(e_{ij}v_s) = (xe_{ij})v_s, \quad s \neq j;$$

$$(e_{is}x)v_s = e_{is}e_{s1}\hat{x}e_{1s}v_s = e_{i1}\hat{x}e_{1i}e_{is}v_s = xe_{is}v_s.$$

Следовательно, если $x \neq 0$, то

$$xe_{ij} = e_{ij}x \neq 0 \text{ для всех } i, j. \tag{8.8}$$

Кольцо F является E-модулем, порожденным элементами e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Если $\sum e_{ij}x_{ij} = 0$, то из (8.8) следует, что для $s, t = 1, \ldots, n$, $x_{ij} \in E$,

$$0 = e_{ss}\sum_{i,j} e_{ij}x_{ij}e_{tt} = e_{st}x_{st}.$$

Поэтому, ввиду (8.8), $x_{st} = 0$ для всех s, t. Следовательно, F является E-свободным E-модулем. Значит, $F = E_n$. Осталось показать, что $E_A(V) \subseteq F$.

Пусть $y \in E_A(V)$. Так как $\sum e_{ii} = 1$, то $y = \sum_{i,j} e_{ii}ye_{jj}$. Поэтому достаточно показать, что $e_{ii}ye_{jj} \in F$ для всех i, j. Существует такой $z \in E_A(V_j)$, что $e_{ii}ye_{jj} = e_{ij}z$. Однако $z = e_{j1}\hat{x}e_{1j}$ для некоторого $\hat{x} \in E_A(V_1)$. Поэтому, по (8.7), $e_{ii}ye_{jj} = e_{ij}xe_{jj} \in F$. □

Теорема 8.9. *Пусть V — вполне приводимый ненулевой A-модуль, обладающий композиционным рядом. Пусть, далее, $V = \oplus_{i=1}^{m} \oplus_{j=1}^{n_i} V_{ij}$, где каждый из V_{ij} неприводим и $V_{ij} \cong V_{st}$ тогда и только тогда, когда $i = s$. Пусть, наконец, $D_i = E_A(V_{i1})$ и $U_i = \oplus_{j=1}^{n_i} V_{ij}$ для всех i. Тогда:*

(i) D_i — *тело*, $i=1, \ldots, m$;

(ii) $E_A(U_i)\cong(D_i)_{n_i}$ — *простое кольцо для всех* $i=1, \ldots, m$;

(iii) $E_A(V)\cong\oplus_{i=1}^m E_A(U_i)$; *каждый идеал из* $E_A(V)$ *изоморфен прямой сумме* $\oplus E_A(U_j)$, *где* j *пробегает подмножество множества* $\{1, \ldots, m\}$;

(iv) $E_A(V)$ *является полупростым кольцом, удовлетворяющим* DCC *и левому* DCC.

Доказательство. (i) Следует из (8.1).

(ii) По (8.6), $E_A(U_i)\cong(D_i)_{n_i}$. Легко проверить, что $(D_i)_{n_i}$ — простое кольцо.

(iii) Пусть e_i — проекция V на U_i, $i=1, \ldots, m$. Тогда $e_i\neq 0$ и $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$ для всех i, j. Если $x\in E_A(V)$, то, по (5.11), $xe_i=e_ixe_i$ для всех i. Так как $\sum_j e_j=1$, то $x=\sum_j xe_j$. Следовательно,

$$e_ix=\sum_j e_ixe_j=e_ixe_i=xe_i.$$

Таким образом, e_i принадлежит центру $E_A(V)$ для всех i. Тогда, ввиду (7.3), $E_A(V)=\oplus_{i=1}^m e_iE_A(V)$. Очевидно, $e_iE_A(V)\cong E_A(U_i)$.

Если I — идеал кольца $E_A(V)$, то $I=\oplus_{i=1}^m e_iI$ и e_iI — идеал кольца $e_iE_A(V)$. Так как $e_iE_A(V)$ — простое кольцо, то либо $e_iI=(0)$, либо $e_iI=e_iE_A(V)$. Следовательно, $I=\oplus e_jE_A(V)$, где j пробегает все те i, при которых $e_iI\neq(0)$.

(iv) В силу (iii), каждый ненулевой идеал кольца $E_A(V)$ содержит идемпотент. Тогда $J(E_A(V))=(0)$ и $E_A(V)$ полупросто. Так как $\oplus_{i=1}^m D_i$ содержит лишь конечное множество правых или левых идеалов, то $\oplus_{i=1}^m D_i$ удовлетворяет DCC или левому DCC. В силу (ii) и (iii), $E_A(V)$ является конечно порожденным модулем и левым модулем над $\oplus_{i=1}^m D_i$. Следовательно, $E_A(V)$ удовлетворяет DCC и левому DCC.

Теорема 8.10 (Артин — Веддербарн). *Пусть* A — *полупростое кольцо, удовлетворяющее* DCC. *Тогда* $A=\oplus_{i=1}^n A_i$, *где каждое из* A_i — *идеал кольца* A, *который является простым кольцом, удовлетворяющим* DCC. *Кроме того,* A_i *определено однозначно.*

Доказательство. В силу (6.10), A_A вполне приводим. Ввиду (8.2), $A\cong E_A(A_A)$. Результат теперь следует из (8.9). □

Теорема 8.11 (Артин — Веддербарн). *Пусть* A — *простое кольцо, удовлетворяющее* DCC. *Тогда* $A\cong D_n$ *для подходящего тела* D *и подходящего натурального* n. *Кроме того,* D *и* n *однозначно определены с точностью до изоморфизма и любые два неприводимых* A*-модуля изоморфны. Если* V — *неприводимый* A*-модуль, то* $E_A(V)\cong D$.

Доказательство. В силу (8.2), $A\cong E_A(A_A)$, а по (6.10), A_A вполне приводим. Так как A — простое кольцо, то, по (8.9), $A\cong D_n$ для некоторого тела D и некоторого натурального n. Далее, любые два неприводимых подмодуля модуля A_A изоморфны. Ввиду (6.1), любые два неприводимых A-модуля изоморфны. Таким образом, если e — примитивный идемпотент кольца A, то, согласно (8.2), $D\cong eAe$. Поэтому D однозначно определено с точностью

до изоморфизма. В силу (8.9), A_A является суммой n неприводимых подмодулей. Ввиду (1.7), $D_m \cong D_n$ тогда и только тогда, когда $m=n$. □

Лемма 8.12. *Предположим, что A полупросто и удовлетворяет* DCC. *Тогда каждый ненулевой идеал содержит центральный идемпотент, а каждый ненулевой правый идеал содержит идемпотент.*

Доказательство. Первое утверждение следует из (8.10). Пусть V — правый идеал кольца A. В силу (6.10), $A_A = V \oplus V'$ для некоторого правого идеала V' из A. Пусть $1=e+e'$, $e \in V$, $e' \in V'$. Тогда, согласно (7.1), e — идемпотент и $V=eA$. □

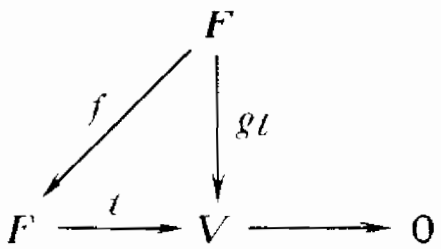
Лемма 8.13. *Пусть V — конечно порожденный свободный A-модуль. Тогда $E_A(V)$ — конечно порожденный A-модуль.*

Доказательство. $V \cong mA_A$ для некоторого натурального m. Следовательно, учитывая (8.2) и (8.6), $E_A(V) \cong A_m$. □

Лемма 8.14. *Пусть R — коммутативное кольцо, удовлетворяющее* ACC, *V — конечно порожденный R-модуль. Тогда $E_R(V)$ является конечно порожденной R-алгеброй, а также удовлетворяет* ACC *и левому* ACC.

Доказательство. В силу (1.3), существует такой конечно порожденный свободный R-модуль F, что $F/W \cong V$ для некоторого подмодуля W. Пусть E_1 — подкольцо кольца $E_R(F)$, состоящее из всех тех эндоморфизмов модуля F, которые переводят W в себя. Так как R коммутативно, то V, F, W — двусторонние R-модули. В силу (2.4) и (2.5), $E_R(F)$ и E_1 являются R-модулями. Согласно (8.13), $E_R(F)$ удовлетворяет ACC, и тогда E_1 — конечно порожденный R-модуль, удовлетворяющий ACC.

Если $f \in E_1$, то f индуцирует эндоморфизм $\hat{f}$ модуля $F/W \cong V$. Отображение, переводящее f в $\hat{f}$, является гомоморфизмом E_1 в $E_R(V)$. В силу (4.1), F проективен, поскольку он свободен. Тогда для любого $g \in E_R(V)$ существует коммутативная диаграмма,



где t является естественной проекцией F на V. Если $w \in W$, то $tfw = gtw = 0$, и, следовательно, $fw \in W$. Значит, $f \in E_1$ и $\hat{f} = g$. Таким образом, отображение, переводящее f в $\hat{f}$, является эпиморфизмом E_1 на $E_R(V)$. Поэтому $E_R(V)$ — конечно порожденная R-алгебра, удовлетворяющая ACC. Так как R коммутативно, то $E_R(V)$ удовлетворяет также и левому ACC. □

Лемма 8.15. *Пусть R — коммутативное кольцо, удовлетворяющее* ACC, *A — конечно порожденная R-алгебра. Тогда $J(R)A \subseteq J(A)$. Если V — конечно порожденный A-модуль, то $E_A(V)$ — конечно порожденная R-алгебра.*

Доказательство. Если V — конечно порожденный A-модуль, то V_R — конечно порожденный R-модуль. Тогда, в силу (8.14), $E_R(V)$

является конечно порожденной R-алгеброй, удовлетворяющей ACC. Так как $E_A(V)$ — подмодуль R-модуля $E_R(V)$, то $E_A(V)$ — конечно порожденная R-алгебра.

Пусть V — неприводимый A-модуль. Тогда $E_A(V)$ — конечно порожденная R-алгебра. В силу (8.1), $E_A(V)$ — тело. Следовательно, центром $E_A(V)$ будет конечно порожденная R-алгебра, которая является полем. Поэтому образ R в $E_A(V)$ является полем. Значит, $J(R)E_A(V)=E_A(V)J(R)=(0)$. Следовательно, $J(R)A$ аннулирует каждый неприводимый A-модуль, и потому $J(R)A \subseteq J(A)$. □

§ 9. Полнота

Пусть A — кольцо, V — некоторый A-модуль. Предположим, что I — такой идеал кольца A, что $\bigcap_{i=0}^{\infty} VI^i=(0)$, где $I^0=A$. Тогда для любого действительного числа c, $0<c<1$, определим норму $\| \ \|_I^c$ на V следующим образом:

$$\| 0 \|_I^c = 0;$$
$$\| v \|_I^c = c^i, \text{ если } v \in VI^i, \ v \notin VI^{i+1}.$$

Определим d_I^c, полагая

$$d_I^c(v, w) = \| v-w \|_I^c.$$

Легко проверить, что для $u, v, w \in V$

$$d_I^c(u, w) \leqslant \max\{d_I^c(u, v), d_I^c(w, v)\}$$

и что d_I^c является метрикой на V.

Две такие метрики *эквивалентны* (обозначение: $d_I^c \sim d_I^{c'}$), если последовательность в V является последовательностью Коши относительно d_I^c тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши относительно $d_I^{c'}$. Легко видеть, что $d_I^c \sim d_I^{c'}$, если $0<c, c'<1$. Зафиксируем c, $0<c<1$, и будем писать $d_I=d_I^c$.

Если I — идеал кольца A, такой, что $\bigcap_{i=0}^{\infty} VI^i=(0)$, то мы будем говорить, что d_I *определена* на V. Модуль V *полон относительно* d_I, если d_I определена на V и каждая последовательность Коши сходится относительно метрики d_I. В частном случае $V=A_A$ эти определения будут применяться к кольцу A. Разумеется, аналогичные определения могут быть даны и для левых A-модулей.

Лемма 9.1. *Пусть на A-модуле V определена метрика d_I, $\{v_i\}$ — последовательность элементов из V. Тогда:*

(i) *$\{v_i\}$ является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда для каждого натурального m существует такое натуральное n, такое, что $v_i-v_j \in VI^m$ для $i, j>n$;*

(ii) $\lim_{i\to\infty} v_i=v$ *тогда и только тогда, когда для каждого натурального m существует такое натуральное n, что $v_i-v \in VI^m$ для $i>n$.*

Доказательство. Непосредственно следует из определений. □

Лемма 9.2. *Пусть V есть A-модуль. Предположим, что d_1 определена на V и на A. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Сложение является непрерывным отображением из $V\times V$ в V.*

(ii) *Умножение является непрерывным отображением из $V\times A$ в V.*

(iii) *Сложение и умножение непрерывны на A.*

(iv) *Если d_1 определена на A-модуле W и $f\in \mathrm{Hom}_A(V, W)$, то f непрерывен.*

Доказательство. (i) Непосредственно следует из (9.1) (ii), так как $\lim(v_i\pm w_i)=\lim v_i\pm\lim w_i$.

(ii) Пусть $\lim v_i=v$, $\lim a_i=a$, $v_i\in V$, $a_i\in A$ для всех i. В силу (9.1) (ii) для каждого натурального m существует такое натуральное n, что $v_i-v\in VI^m$ и $a_i-a\in I^m$ при $i>n$. Поэтому

$$v_ia_i-va=v_ia_i-v_ia+v_ia-va=v_i(a_i-a)+(v_i-v)a\in VI^m.$$

Следовательно, $\lim v_ia_i=va$.

(iii) Очевидно ввиду (i) и (ii).

(iv) Предположим, что $\{v_i\}$ — такая последовательность в V, что $\lim v_i=0$. Тогда, в силу (9.1) (ii), для каждого натурального m существует такое натуральное n, что $v_i=u_ia_i$ для подходящих $u_i\in V$, $a_i\in I^m$ при всех $i>n$. Поэтому $fv_i=(fu_i)a_i\in WI^m$ для $i>n$. Следовательно, $\lim fv_i=0$. Если $\lim w_i=w$, то

$$(\lim fw_i)-fw=\lim(fw_i-fw)=\lim f(w_i-w)=0.$$

Значит, f непрерывно. □

Теорема 9.3. *Пусть V — конечно порожденный A-модуль. Предположим, что A полно относительно d_1 и d_1 определена на V. Тогда V полон относительно d_1.*

Доказательство. Пусть $\{v_1, \ldots, v_s\}$ — множество порождающих модуля V, $\{w_j\}$ — последовательность Коши в V. Существует такая последовательность $\{m(n)\}$ натуральных чисел, что $w_i-w_j\in VI^{m(n)}$ для всех $i, j\geqslant n$, $m(n)\leqslant m(n+1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m(n)=\infty$.

Пусть $w_1=\sum_{t=1}^s v_tb_{1t}$, $b_{1t}\in A$ и $w_{n+1}-w_n=\sum_{t=1}^s v_ta_{nt}$, $a_{nt}\in I^{m(n)}$. Положим $b_{nt}=b_{1t}+\sum_{j=1}^{n-1}a_{jt}$ для всех n, t. Тогда $w_n=\sum_{t=1}^s v_tb_{nt}$ и

$$b_{n+k,t}-b_{nt}=\sum_{j=n}^{n+k-1}a_{jt}\in I^{m(n)}.$$

Значит, для каждого t $\{b_{nt}\}$ является последовательностью Коши в A. Пусть $b_t=\lim\limits_{n\to\infty} b_{nt}$ и $w=\sum_{t=1}^s v_tb_t$. Тогда

$$\lim(w-w_n)=\sum_{t=1}^{s}v_t(\lim(b_t-b_{nt}))=0.$$

Поэтому $w=\lim w_n$ и V полон. □

Лемма 9.4. *Пусть метрика d_I определена на A-модуле V. Положим $J=J(A)$. Если $I\subseteq J$, I и A/I удовлетворяют* DCC, *то d_J определена на V и $d_I\sim d_J$.*

Доказательство. Согласно (6.7), $J(A/I)=J/I$. Поэтому, в силу (6.9), $J^n\subseteq I$ для некоторого натурального n. Следовательно $\bigcap_{i=0}^{\infty}VJ^i\subseteq \subseteq\bigcap_{i=0}^{\infty}VI^i=(0)$ и d_J определена на V. Так как $J^{mn}\subseteq I^m\subseteq J^m$ для каждого натурального m, то, учитывая (9.1) (i), получаем $d_I\sim d_J$. □

Лемма 9.5. *Предположим, что A полно относительно d_I. Тогда $I\subseteq J(A)$.*

Доказательство. Пусть $a\in I$. Положим $b_i=1+a+\ldots+a^i$ для $i=0, 1, \ldots$ Тогда $b_i-b_j\in I^m$ при $i, j\geqslant m$. Поэтому $\{b_i\}$ — последовательность Коши в кольце A. Пусть $b=\lim b_i$. Тогда

$$(1-a)b=\lim(1-a)b_i=\lim(1-a^{i+1})=1.$$

Следовательно, элемент a является правым квазирегулярным. Так как a — произвольный элемент из I, то, согласно (6.4) и (6.5), $I\subseteq J$. □

Пусть $J=J(A)$. Кольцо A называется *полным*, если d_J определена на A и A полно относительно d_J. A-модуль V называется *полным*, если d_J определена на V и V полон относительно d_J. Кольцо A называется *полным на модулях*, если каждый конечно порожденный A-модуль полон.

Лемма 9.6. *Предположим, что d_J определена на каждом конечно порожденном A-модуле. Если V — конечно порожденный A-модуль, то каждый подмодуль в V замкнут. Если, кроме того, A полно, то A полно на модулях.*

Доказательство. Пусть W — подмодуль V. Так как d_J определена на V/W, то (0) замкнут в V/W. Пусть f — естественная проекция V на V/W. Тогда $W=f^{-1}(0)$, и потому, в силу непрерывности f, W замкнут, ввиду (9.2) (iv).

Если A полно, то, по (9.3), A полно на модулях. □

В оставшейся части этого параграфа мы будем изучать критерии полноты кольца A на модулях.

Лемма 9.7. *Если $J(A)$ нильпотентен, то A полно на модулях. В частности, если A удовлетворяет* DCC, *то A полно на модулях.*

Доказательство. Если $J(A)$ нильпотентен и V — некоторый A-модуль, то любая последовательность Коши из V обязательно стабилизируется и потому сходится. □

Лемма 9.8 (Накаяма). *Пусть W — конечно порожденный A-модуль. Предположим, что $WJ(A)=W$. Тогда $W=(0)$.*

Доказательство. Предположим, что $W\neq(0)$. Выберем такое множество порождающих $w_1, \ldots, w_n$, что n минимально. Так как $WJ(A)=W$, $w_n=\sum_{i=1}^{n}w_ia_i$, $a_i\in J(A)$. Поэтому $w_n(1-a_n)=\sum_{i=1}^{n-1}w_ia_i$. Так как $a_n\in J(A)$, то $(1-a_n)$ обладает обратным в A. Следовательно, w_n принадлежит модулю, порожденному $w_1, \ldots, w_{n-1}$, и тогда W порождается $w_1, \ldots, w_{n-1}$, вопреки минимальности n. Значит, $W=(0)$. □

Доказательство следующего результата принадлежит И. Н. Херстейну.

Лемма 9.9. *Предположим, что R — коммутативное кольцо, удовлетворяющее* ACC. *Пусть V — конечно порожденный R-модуль, I — идеал в R. Если $W=\bigcap_{i=0}^{\infty} VI^i$, то $WI=W$.*

Доказательство. Очевидно, $WI \subseteq W$. Используя ACC, выберем максимальный подмодуль U среди всех таких подмодулей T модуля V, что $T \cap W = WI$.

Пусть $a \in I$. Покажем сначала, что $Va^m \subseteq U$ для некоторого целого m. Для каждого s положим $V_s = \{v \mid va^s \in U\}$. Так как R коммутативно, то V_s — подмодуль модуля V. Очевидно, $V_s \subseteq V_{s+1}$ для каждого s. В силу ACC, существует такое m, что $V_m = \bigcup_{s=0}^{\infty} V_s$.

Очевидно, $WI \subseteq (Va^m + U) \cap W$. Предположим, что $w \in (Va^m + U) \cap W$. Тогда $w = va^m + u$ для некоторых $v \in V$, $u \in U$. Так как $wa \in WI \subseteq U$ и $ua \in U$, то $va^{m+1} \in U$ и $v \in V_{m+1} = V_m$. Следовательно, $va^m \in U$, и тогда $w = va^m + u \in U$. Значит, $w \in U \cap W = WI$. Таким образом, $(Va^m + U) \cap W = WI$. Максимальность U влечет $Va^m \subseteq U$, что и утверждалось.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — множество, порождающее идеал I. Выберем m таким, чтобы $Va_i^m \subseteq U$, $i = 1, \ldots, n$. Так как R коммутативно, то $I^{mn} \subseteq I_0$, где I_0 — идеал в R, порожденный $a_1^m, \ldots, a_n^m$. Поэтому $VI^{mn} \subseteq U$, и тогда $W \subseteq VI^{mn} \subseteq U$. Значит, $W = U \cap W = WI$. □

Теорема 9.10. *Предположим, что R коммутативно и удовлетворяет* ACC. *Пусть $J = J(R)$. Тогда d_I определена на каждом конечно порожденном R-модуле. В частности, $\bigcap_{i=0}^{\infty} J^i = (0)$.*

Доказательство. Пусть V — конечно порожденный R-модуль. Положим $W = \bigcap_{i=0}^{\infty} VJ^i$. В силу (9.9), $WJ = W$. Поэтому, учитывая (9.8), получаем $W = (0)$. □

Теорема 9.11. *Пусть A — конечно порожденная алгебра над коммутативным кольцом R. Предположим, что R удовлетворяет* ACC, *$R/J(R)$ удовлетворяет* DCC *и R полно. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *A удовлетворяет* ACC, *$A/J(A)$ удовлетворяет* DCC *и A полна на модулях.*

(ii) *Если V — конечно порожденный A-модуль, то $E_A(V)$ удовлетворяет* ACC, *$E_A(V)/J(E_A(V))$ удовлетворяет* DCC *и $E_A(V)$ полно на модулях.*

Доказательство. В силу (8.15), (ii) следует из (i). Очевидно, A удовлетворяет ACC. Так как $A/J(R)A$ — конечно порожденный $R/J(R)$-модуль, то он удовлетворяет DCC. Тогда, в силу (8.15), $A/J(A)$ удовлетворяет DCC. Осталось лишь показать, что алгебра A полна на модулях.

$AJ(R) = J(R)A$ является идеалом A и $(AJ(R))^i = AJ(R)^i$ для всех i. Тогда $d_{AJ(R)}$ совпадает с метрикой $d_{J(R)}$, определенной на A_R как на R-модуле. Следовательно, по (9.6) и (9.10), A полна относительно $d_{AJ(R)}$. Если V — конечно порожденный A-модуль, то, ввиду (9.10),

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} V(AJ(R))^i = \bigcap_{i=0}^{\infty} VAJ(R)^i = \bigcap_{i=0}^{\infty} VJ(R)^i = (0).$$

Поэтому, согласно (9.3), V полон относительно $d_{AJ(R)}$. Так как $A/AJ(R)$ является конечно порожденным $R/J(R)$-модулем, то он удовлетворяет DCC. Поэтому, ввиду (9.4), V полон относительно $d_{J(A)}$. Следовательно, A полна на модулях. □

Лемма 9.12. *Пусть R коммутативно. Предположим, что R удовлетворяет* ACC, *$R/J(R)$ удовлетворяет* DCC *и R полно. Пусть $B \subseteq A$ — конечно порожденные R-алгебры, причем $1 \in B$. Тогда $B \cap J(A) \subseteq J(B)$.*

Доказательство. Пусть $x \in B \cap J(A)$. В силу (9.11), A полна. Поэтому $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ сходится в A. Поскольку B является R-подмодулем R-модуля A, то, ввиду (9.6), он замкнут. Так как $1 \in B$, то $\sum_{i=0}^{\infty} x^i \in B$. Поскольку $(1-x)\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1$, то x квазирегулярен справа в B. Так как $B \cap J(A)$ является идеалом в B, то из (6.5) следует, что $B \cap J(A) \subseteq J(B)$. □

§ 10. Локальные кольца

Кольцо A называется *локальным*, если множество всех его необратимых элементов образует идеал. Про локальное кольцо говорят также, что оно *вполне примарно*.

Лемма 10.1. *Пусть A — кольцо. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *A — локальное кольцо;*

(ii) *$J(A)$ — единственный максимальный идеал в A и содержит все необратимые элементы кольца;*

(iii) *$J(A)$ содержит все необратимые элементы кольца A;*

(iv) *$A/J(A)$ — тело.*

Доказательство. (i) ⇒ (ii). Пусть I — идеал в A, состоящий из всех необратимых элементов кольца A. Так как каждый правый идеал кольца A состоит из необратимых элементов, то I содержит любой правый идеал кольца A и, следовательно, I — единственный максимальный правый идеал кольца A. Поэтому $J(A) = I$, так как $J(A)$ — пересечение всех максимальных правых идеалов кольца A.

(ii) ⇒ (iii). Очевидно.

(iii) ⇒ (ii). Пусть $\bar{a}$ обозначает образ a в $\bar{A} = A/J(A)$. Если $\bar{a} \neq 0$, то a обратим в A и $ab = ba = 1$ для некоторого $b \in A$. Поэтому $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a} = \bar{1}$, т. е. $A/J(A)$ — тело.

(iv) ⇒ (i). Предположим, что $a \notin J(A)$. Тогда существует такой $b \in A$, что $ab = 1 - c$ для некоторого $c \in J(A)$. Поэтому ab обратим, и тогда a обладает правым обратным в A. Аналогично, a обладает левым обратным в A. Значит, a обратим. □

Лемма 10.2. *Пусть A — коммутативное кольцо. Кольцо A локально тогда и только тогда, когда A обладает единственным максимальным идеалом.*

Доказательство. Если A локально, то, в силу (10.1) (ii), A обладает единственным максимальным идеалом. Если I — единственный максимальный идеал кольца A, то A/I — коммутативное кольцо без нетривиальных идеалов. Следовательно, A/I — поле, и тогда, ввиду (10.1) (iv), A локально. □

Лемма 10.3 (Фиттинг). *Пусть A — кольцо. Предположим, что A-модуль V удовлетворяет* DCC *и* ACC. *Пусть $f\in E_A(V)$. Тогда существуют такое целое число n и такие подмодули U, W, что $V=U\oplus W$, где U является ядром f^{n+j} для всех $j=0, 1, \ldots$, а $W=f^{n+j}V$ для всех $j=0, 1, \ldots$*

Доказательство. Пусть U_j — ядро f^j, $W_j=f^jV$. Тогда $U_j\subseteq U_{j+1}$, $W_{j+1}\subseteq W_j$ для всех j. Положим $U=\bigcup_{n=0}^{\infty}U_n$, $W=\bigcap_{n=0}^{\infty}W_n$. В силу ACC и DCC, существует такое целое число n, что $U_n=U$ и $W_n=W$. Осталось показать, что $V=U\oplus W$.

Предположим, что $u\in U\cap W$. Тогда $f^nu=0$ и $u=f^nv$ для некоторого $v\in V$. Поэтому $f^{2n}v=0$. Значит, $v\in U$ и $u=f^nv=0$. Следовательно, $U\cap W=(0)$ и $U+W=U\oplus W$.

Если $v\in V$, то $f^nv\in W=W_{2n}$, и тогда $f^nv=f^{2n}w$ для некоторого $w\in V$. Следовательно, $f^n(v-f^nw)=0$ и $v-f^nw\in U$. Тогда $v=(v-f^nw)+f^nw\in U+W$. Значит, $V=U\oplus W$. □

Теорема 10.4. *Предположим, что A — кольцо, удовлетворяющее* ACC *и полное на модулях, а $A/J(A)$ удовлетворяет* DCC, *V — конечно порожденный неразложимый A-модуль. Тогда $E_A(V)$ — локальное кольцо.*

Доказательство. Пусть $J=J(A)$. Так как V/VJ^m — конечно порожденный A/J^m-модуль для каждого натурального m, то из (6.11) и (6.13) следует, что V/VJ^m удовлетворяет ACC и DCC.

Пусть $f\in E_A(V)$. Для каждого целого $m\geqslant 0$ имеем $fVJ^m\subseteq VJ^m$. Поэтому f индуцирует эндоморфизм модуля V/VJ^m. Лемма 10.3, примененная к V/VJ^m, приводит к существованию такого целого числа $n(m)$ и таких подмодулей U_m, W_m модуля V, что

$$U_m=\{u\mid f^{n(m)+j}u\in VJ^m\} \text{ для всех } j\geqslant 0; \tag{10.5}$$

$$W_m=f^{n(m)+j}V+VJ^m \text{ для всех } j\geqslant 0; \tag{10.6}$$

$$V/VJ^m=U_m/VJ^m\oplus W_m/VJ^m. \tag{10.7}$$

Можно предполагать, что $n(m+1)\geqslant n(m)$ для всех m. Тогда

$$W_{m+1}=f^{n(m)+1}V+VJ^{m+1}\subseteq f^{n(m)}V+VJ^m=W_m.$$

Если $v\in U_{m+1}$, то $f^{n(m+1)}v\in VJ^{m+1}\subseteq VJ^m$, и потому $f^{n(m)+j}v\in VJ^m$ для подходящего $j\geqslant 0$. Значит, $v\in U_m$. Поэтому $U_{m+1}\subseteq U_m$, $W_{m+1}\subseteq W_m$ и $V=U_m+W_m$ для всех m. Пусть $U=\bigcap_{m=0}^{\infty}U_m$, $W=\bigcap_{m=0}^{\infty}W_m$. Покажем, что $V=U\oplus W$.

Предположим, что $u\in U\cap W$. Тогда $u\in U_m\cap W_m$ для любого m, и поэтому, ввиду (10.7), $u\in VJ^m$. Значит, $u\in\bigcap_{m=0}^{\infty}VJ^m=(0)$. Поэтому $U\cap W=(0)$ и $U+W=U\oplus W$.

Предположим, что $v\in V$. В силу (10.7), $v=u_m+w_m$ для любого целого m, где $u_m\in U_m$, $w_m\in W_m$. Тогда для любых i, j

$$0=v-v=u_i-u_j+w_i-w_j.$$

Значит, для i, $j>m$

$$u_i-u_j=w_j-w_i\in U_m\cap W_m\subseteq VJ^m.$$

Следовательно, $\{u_i\}$, $\{w_i\}$ являются последовательностями Коши в V. Пусть $u=\lim u_i$, $w=\lim w_i$. В силу (9.6), U_m и W_m замкнуты в V. Поскольку $u_i\in U_m$ при $i>m$ и $w_i\in W_m$ при $i>m$, то $u\in U_m$ и $w\in W_m$ для любого целого m. Значит, $u\in U$ и $w\in W$. Кроме того,

$$v=\lim v=\lim u_i+\lim w_i=u+w.$$

Поэтому $V=U\oplus W$.

Предположим, что $U=(0)$. Тогда $V=W=W_m$ для всех m, и поэтому, ввиду (10.7), $U_m=VJ^m$ для всех m. Если $v\in V$, причем $fv=0$, то $v\in U$, и потому $v=0$. Значит, f является мономорфизмом. Пусть $v\in V$. Тогда, в силу (10.6), $v=fv_m+z_m$ для всех m, где $z_m\in VJ^m$. Значит, $\lim z_m=0$, и тогда $\{fv_m\}$ является сходящейся последовательностью. Если $fu\in VJ^m$ для некоторого m, то $u\in U_m=VJ^m$, и тогда $\{v_m\}$ является последовательностью Коши. Так как, по (9.2), f непрерывен, то $v=\lim fv_m=f(\lim v_m)$. Следовательно, f является эпиморфизмом и, значит, f — автоморфизм.

Пусть для каждого $f\in E_A(V)$ модули $U=U_f$ и $W=W_f$ определены как выше. Тогда либо $V=U_f$, либо $V=W_f$. Если $V=W_f$, то f обратим в $E_A(V)$. Кроме того, если $V=U_f$, то $V=W_{1-f}$. Значит, любой элемент из $E_A(V)$ либо обратим, либо квазирегулярен.

Пусть $E_A(V)$ не является локальным кольцом. Тогда существуют два таких необратимых элемента f, g, что $f+g=1$. Тогда $g=1-f$ необратим, вопреки тому, что f квазирегулярен. Значит, $E_A(V)$ — локальное кольцо. □

§ 11. Однозначность разложения

Лемма 11.1. *Пусть A — кольцо, и пусть V — такой A-модуль, что $V\cong\oplus_{i=1}^m V_i$ и $V\cong\oplus_{j=1}^n W_j$, где каждый из V_i, W_j — ненулевой неразложимый A-модуль. Предположим, далее, что для всех i, j $E_A(V_i)$ и $E_A(W_j)$ — локальные кольца. Тогда $m=n$ и после подходящей перенумерации $V_i\cong W_j$, $i=1, \ldots, m$.*

Доказательство. Индукция по меньшему из чисел m и n. Если $m=1$ или $n=1$, то результат очевиден, так как V неразложим. Можно предполагать, что

$$V=\bigoplus_{i=1}^{m} V_i=\bigoplus_{j=1}^{n} W_j.$$

Пусть e_i, f_j — проекции V на V_i, W_j соответственно. Тогда ограничение e_1 на V_1 и $e_1f_je_1$ принадлежат $E_A(V_1)$. Так как $e_1=\sum_{j=1}^n e_1f_je_1$ и $E_A(V_1)$ — локальное кольцо, то $e_1f_je_1$ обратимо в $E_A(V_1)$ для некоторого j. Следовательно, изменяя обозначения, можем считать, что $e_1f_1e_1$ — автоморфизм модуля $V_1=e_1V$. Тогда $f_1V_1\subseteq W_1$ и ядро f_1 (как отображения, заданного на V_1) равно (0). Покажем, что

$$V=f_1V_1\oplus\left(\bigoplus_{i=2}^{m} V_i\right).$$

Если $u \in f_1V_1 \cap \oplus_{i=2}^m V_i$, то $e_1u=0$ и $u=f_1e_1v$ для некоторого $v \in V$. Поэтому $e_1f_1e_1v=e_1u=0$ и $e_1v=0$, так как $e_1f_1e_1$ — автоморфизм модуля V_1. Следовательно, $u=f_1e_1v=0$. Таким образом, $f_1V_1 \cap \oplus_{i=2}^m V_i=(0)$.

Пусть $v \in V$. Тогда $e_1v \in e_1V=e_1f_1e_1V$. Следовательно, $e_1v=e_1fe_1w$ для некоторого $w \in W$. Поэтому $e_1(v-f_1e_1w)=0$ и $v-f_1e_1w \in \oplus_{i=2}^m V_i$. Значит, $v=f_1e_1w+(v-f_1e_1w) \in f_1V_1+\sum_{i=2}^m V_i$. Таким образом, $V=f_1V_1 \oplus (\oplus_{i=2}^m V_i)$.

Так как $f_1V_1 \subseteq W_1$, то $W_1=f_1V_1 \oplus \{W_1 \cap \oplus_{i=2}^m V_i\}$. Поскольку W_1 неразложим и $f_1V_1 \neq (0)$, то $W_1=f_1V_1$ изоморфен V_1 и $V=W_1 \oplus (\oplus_{i=2}^m V_i)$. Поэтому

$$\bigoplus_{i=2}^{m} V_i \cong V/W_1 \cong \bigoplus_{j=2}^{n} W_j.$$

По индукции, $m=n$, и после подходящей перенумерации $V_i \cong W_i$, $i=1, \ldots, m$. □

Кольцо A обладает свойством *однозначности разложения*, если для любого конечно порожденного A-модуля выполняются следующие условия:

(i) V является прямой суммой конечного числа неразложимых A-модулей;

(ii) если $V \cong \oplus_{i=1}^m V_i \cong \oplus_{j=1}^n W_j$, где V_i, W_j — неразложимы, то $m=n$ и $V_i \cong W_i$ после подходящей перенумерации.

Следствие 11.2. *Пусть A — такое кольцо, что каждый конечно порожденный A-модуль является прямой суммой конечного числа неразложимых модулей. Предположим, далее, что $E_A(V)$ является локальным кольцом для каждого конечно порожденного A-модуля V. Тогда A обладает свойством однозначности разложения.*

Доказательство. Очевидно ввиду (11.1). □

Теорема 11.3. *Предположим, что A — кольцо, которое удовлетворяет* ACC, *а $A/J(A)$ удовлетворяет* DCC. *Пусть A полно на модулях. Тогда A обладает свойством однозначности разложения.*

Доказательство. Непосредственно следует из (10.4) и (11.2). □

Теорема 11.4 (Крулль — Шмидт). *Предположим, что A удовлетворяет* DCC. *Тогда A обладает свойством однозначности разложения.*

Доказательство. В силу (6.11), A удовлетворяет ACC. Кроме того, A полно на модулях. Результат теперь следует из (11.3). □

Следующий результат был независимо получен Боревичем и Фаддеевым [1959], Райнером [1961] и Суоном [1960] в случае, когда R — полное дискретно нормированное кольцо.

Теорема 11.5. *Предположим, что R — полное коммутативное кольцо, которое удовлетворяет* ACC, *а $R/J(R)$ удовлетворяет* DCC. *Пусть A — конечно порожденная R-алгебра. Тогда A обладает свойством однозначности разложения.*

Доказательство. Непосредственно следует из (9.11) и (11.3). □

§ 12. Критерии подъема идемпотентов

Пусть A — кольцо, $\mathbf{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел.

Я благодарен С. Хюнеке и Н. Джекобсону за доказательства утверждений 12.1—12.3, приведенных ниже.

Лемма 12.1. *Пусть I — ниль-идеал кольца A. Для $x \in A$ обозначим через $\bar{x}$ образ x в $\bar{A} = A/I$. Если $\bar{a}$ — идемпотент, то существует такой $f(t) \in \mathbf{Z}[t]$ без свободного члена, что $f(a)$ является идемпотентом A и $\overline{f(a)} = \bar{a}$.*

Доказательство. Поскольку $a(1-a) \in I$ и, значит, является нильпотентным, существует такое натуральное n, что $a^n(1-a)^n = 0$. Возводя $\{a + (1-a)\} = 1$ в $(2n-1)$-ю степень, получаем

$$a^n g(a) + (1-a)^n h(a) = 1,$$

где $g(t)$, $h(t) \in \mathbf{Z}[t]$. Положим $f(t) = t^n g(t)$. Тогда

$$f(a) = a^n g(a) = a^n g(a)\{a^n g(a) + (1-a)^n h(a)\} = f(a)^2 + a^n(1-a)^n g(a) h(a) = f(a)^2.$$

Значит, $f(a)$ либо идемпотент, либо $f(a) = 0$. Поэтому достаточно показать, что $\overline{f(a)} = \bar{a}$. Поскольку $a(a^n g(a) + (1-a)^n h(a)) = a$, имеем $\overline{a^{n+1} g(a)} = \bar{a}$. Так как $\bar{a}$ — идемпотент, то $\overline{a^{n+1}} = \overline{a^n}$, и, следовательно, $\overline{a^n g(a)} = \bar{a}$. □

Лемма 12.2. *Пусть I — ниль-идеал кольца A. Пусть $\bar{x}$ — образ $x \in A$ в $A = A/I$. Если коммутирующие идемпотенты e_1 и e_2 из A таковы, что $\bar{e}_1 = \bar{e}_2$, то $e_1 = e_2$.*

Доказательство. Так как элементы $(1-e_1)e_2$ и $(1-e_2)e_1$ лежат в I, то они нильпотентны. Однако $\{(1-e_i)e_j\}^2 = (1-e_i)e_j$ для всех i, j. Значит, $(1-e_1)e_2 = 0 = (1-e_2)e_1$. Поэтому $e_1 = e_2 e_1 = e_1 e_2 = e_2$. □

Теорема 12.3. *Предположим, что A полно на модулях. Пусть I — идеал кольца A, причем $I \subseteq J(A)$. Пусть $\bar{x}$ — образ $x \in A$ в $\bar{A} = A/I$. Если $\bar{a}$ — идемпотент $\bar{A}$, то существует такая последовательность полиномов $f_j(t) \in \mathbf{Z}[t]$ без свободных членов, что $\{f_j(a)\}$ сходится в A, и если $e = \lim f_j(a)$, то e — идемпотент, причем $\bar{e} = \bar{a}$.*

Доказательство. Поскольку $J(A)/J(A)^n$ нильпотентен в $A/J(A)^n$, можно применять (12.1). Тогда существует такой $f_n(t) \in \mathbf{Z}[t]$, что $f_n(a)^2 - f_n(a) \in J(A)^n$ и $\overline{f_n(a)} = \bar{a}$. Кроме того, $f_n(a)$ и $f_{n+1}(a)$ коммутируют и отображаются в идемпотенты кольца $A/J(A)^n$, причем $\overline{f_{n+1}(a)} = \bar{a} = \overline{f_n(a)}$. Значит, по (12.2), $f_n(a) - f_{n+1}(a) \in J(A)^n$. Следовательно, $\{f_n(a)\}$ является последовательностью Коши и потому сходится в A, так как A полно. Отсюда вытекает доказываемое утверждение. □

Теорема 12.4 (Брауэр, Накаяма). *Предположим, что A полно на модулях. Пусть I — такой идеал кольца A, что $I \subseteq J(A)$, пусть $\bar{a}$ обозначает образ $a \in A$ в $\bar{A} = A/I$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — множество попарно ортогональных идемпотентов из A, то $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — множество попарно ортогональных идемпотентов из $\bar{A}$. Если $x_1, \ldots, x_n$ — множество попарно ортогональных идемпотентов из $\bar{A}$, то существует такое множество попарно ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ из A, что $\bar{e}_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как $I \subseteq J(A)$, то $\bigcap_{i=0}^{\infty} I^i = (0)$. Таким образом, если e — идемпотент из A и $\bar{e} = 0$, то $e = e^i \in I^i$ для всех i, и потому $e \in \bigcap_{i=0}^{\infty} I^i = (0)$. Значит, $\bar{e} \neq 0$, и тогда $\bar{e}$ является идемпотентом. Отсюда следует первое утверждение.

Второе докажем индукцией по n. Если $n = 1$, то утверждение следует из (12.3). Предположим, что $n > 1$.

По индукции существует такое множество попарно ортогональных идемпотентов $e, e_3, \ldots, e_n$, что $\bar{e} = x_1 + x_2$ и $\bar{e}_i = x_i$, $i = 3, \ldots, n$. Положим $x_1 = \bar{b}$ и $a = ebe$. Тогда $\bar{a} = x_1$ и $ea = ae = a$. В силу (12.3), существует идемпотент e_0, который является пределом последовательности полиномов от a, причем $\bar{e}_0 = \bar{a}$. Так как e коммутирует с a, то $ee_0 = e_0 e$. Значит, $e_1 = ee_0$ является таким идемпотентом, что $\bar{e}_1 = x_1$ и $ee_1 = e_1 e = e_1$. Положим $e_2 = e - e_1$. Тогда $\bar{e}_2 = x_2$, $e_2 e_1 = 0 = e_1 e_2$ и $e_2^2 = e_2$. Значит, если $i = 1, 2$, $j = 3, \ldots, n$, то $e_i e_j = e_i e e_j = 0$ и $e_j e_i = e_j e e_i = 0$. Следовательно, $e_1, \ldots, e_n$ является множеством попарно ортогональных идемпотентов, причем $\bar{e}_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. □

Следствие 12.5. *Предположим, что A полно на модулях, а $A/J(A)$ удовлетворяет* DCC. *Пусть N — правый идеал кольца A. Тогда либо $N \subseteq J(A)$, либо N содержит идемпотент.*

Доказательство. Предположим, что $N \not\subseteq J(A)$. Пусть $\bar{a}$ — образ $a \in A$ в $\bar{A} = A/J(A)$. Тогда $\bar{N}$ является ненулевым правым идеалом в $\bar{A}$, $\bar{A}$ полупросто и удовлетворяет DCC. В силу (8.12), существует идемпотент $x \in \bar{N}$. Поскольку $N + J(A)$ является полным прообразом в A идеала $\bar{N}$, то можно считать, что $x = \bar{a}$ для $a \in N$. Если $f(t) \in \mathbf{Z}[t]$ — полином без свободного члена, то $f(a) \in N$. Следовательно, в силу (12.3), существует такая последовательность $\{a_j\}$ элементов из N, что $\lim a_j = e$ является идемпотентом. В силу (9.6), N замкнут в A, и, значит, $e \in N$. □

Следствие 12.6. *Предположим, что A удовлетворяет* DCC. *Пусть N — правый идеал в A. Тогда либо N нильпотентен, либо N содержит идемпотент.*

Доказательство. Если в N идемпотентов нет, то, в силу (12.5), $N \subseteq J(A)$. Следовательно, ввиду (6.9), N нильпотентен. □

Следствие 12.7. *Предположим, что A полно на модулях и удовлетворяет* ACC, *а $A/J(A)$ удовлетворяет* DCC. *Кольцо A локально тогда и только тогда, когда 1 является единственным идемпотентом в A.*

Доказательство. Предположим, что A — локальное кольцо. Пусть e — идемпотент в A, $e \neq 1$. Тогда $(1-e)e = e(1-e) = 0$, и потому e и $1-e$ оба необратимы. Значит, $1 = e + (1-e)$ лежит в $J(A)$, что неверно.

Предположим теперь, что 1 — единственный идемпотент в A. Тогда, в силу (12.5), каждый максимальный правый идеал кольца A лежит в $J(A)$. Значит, $A/J(A)$ не содержит собственных правых идеалов и потому является телом. Согласно (10.1), кольцо A локально. □

В качестве следствия (12.7) можно получить следующее альтернативное доказательство утверждения (11.5): в силу (11.2) достаточно

показать, что $E_A(V)$ — локальное кольцо для каждого неразложимого A-модуля V; поскольку, очевидно, 1 является единственным идемпотентом в $E_A(V)$ для неразложимого V, то следует лишь проверить для $E_A(V)$ выполнимость условий утверждения (12.7); они, однако, следуют из (8.15) и (9.11). Это доказательство дано Суоном [1960].

Полученные результаты можно использовать для доказательства следующей версии леммы Гензеля.

Лемма 12.8. *Пусть R — область целостности, полная относительно метрики d_I. Предположим, что R удовлетворяет* ACC, *а R/I удовлетворяет* DCC *и R целозамкнуто в своем поле частных K. Пусть $\bar{x}$ — образ элемента $x \in R$ в $\bar{R} = R/J(R)$. Тогда R является локальным кольцом. Если $f(t) \in R[t]$, $f(t)$ — приведенный полином и $\overline{f(t)} = g_0(t)h_0(t)$, причем $(g_0(t), h_0(t)) = 1$, то существуют такие $g(t)$, $h(t) \in R[t]$, что $\overline{g(t)} = g_0(t)$, $\overline{h(t)} = h_0(t)$ и $f(t) = g(t)h(t)$.*

Доказательство. Согласно (9.4) и (9.5), $I \subseteq J(R)$ и R полно. Так как R не содержит идемпотентов, отличных от 1, то, в силу (12.5), каждый собственный идеал кольца R содержится в $J(R)$, и тогда, по (10.2), R — локальное кольцо, а $\bar{R}$ — поле.

Пусть $p(t) \in R[t]$, $p(t)$ — приведенный полином и $p(t)$ неприводим в $K[t]$. Положим $L = K(a)$, где a — корень $p(t)$, и $S = R(a)$. Тогда S — область целостности, которая является конечно порожденной R-алгеброй. Поэтому 1 — единственный идемпотент в S. Согласно (6.13) и (9.11), S удовлетворяет ACC, $S/SJ(R)$ удовлетворяет DCC и S полна. Тогда, в силу (12.4), $\bar{S} = S/SJ(R)$ не содержит идемпотентов, отличных от 1. Так как $\bar{R}$ — поле и $\bar{S} \cong \bar{R}[t]/(\overline{p(t)})$, то из китайской теоремы об остатках следует, что $\overline{p(t)}$ является степенью неприводимого полинома из $\bar{R}[t]$.

Пусть теперь $f(t)$, $g_0(t)$, $h_0(t)$ определены как в формулировке леммы. Можно считать, что $g_0(t)$, $h_0(t)$ — приведенные полиномы. Так как R целозамкнуто в K, то $f(t) = \prod_{i=1}^{m} p_i(t)^{n_i}$, где каждый из $p_i(t)$ неприводим в $K[t]$, приведен и $p_i(t) \in R[t]$. Следовательно, по предыдущему абзацу, для каждого i либо $\overline{p_i(t)} \mid g_0(t)$, либо $\overline{p_i(t)} \mid h_0(t)$. Пусть $g(t) = \prod p_j(t)^{n_j}$, где j пробегает все те значения i, при которых $\overline{p_i(t)} \mid g_0(t)$. Пусть $h(t) = f(t)/g(t)$. Тогда $g(t)$ и $h(t)$ обладают требуемыми свойствами. □

Из леммы Гаусса следует, что если R — область с однозначным разложением, и, в частности, если R — область главных идеалов, то R целозамкнута в своем поле частных. Поэтому лемма (12.8) применима в этой ситуации.

Доказательство следующего результата принадлежит, по существу, Дейду [1973]. Мое внимание на него было обращено Д. Барри.

Теорема 12.9. *Пусть A — конечно порожденная алгебра над коммутативным кольцом R. Предположим, что R удовлетворяет* ACC, *а $R/J(R)$ удовлетворяет* DCC *и R полно. Пусть $\bar{x}$ — образ $x \in A$ в $\bar{A} = A/J(R)A$. Тогда отображение $x \to \bar{x}$ определяет биекцию между множеством всех центральных идемпотентов из A и множеством всех центральных идемпотентов из $\bar{A}$.*

Доказательство. В силу (8.15), $J(R)A \subseteq J(A)$. Значит, в частности, $J(R)A$ не содержит идемпотентов. Поэтому если e — центральный идемпотент из A, то $\bar{e}$ — центральный идемпотент из $\bar{A}$.

Обратно, предположим, что $\bar{a}$ — центральный идемпотент из $\bar{A}$. В силу (9.11), A полна на модулях. Поэтому из (12.4) следует, что $\bar{a}=\bar{e}$ для подходящего идемпотента e. Покажем, что e — центральный идемпотент. Рассмотрим разложение Пирса:

$$A = eAe \oplus eA(1-e) \oplus (1-e)Ae \oplus (1-e)A(1-e).$$

Поскольку $\bar{e}$ — центральный идемпотент кольца $\bar{A}$, то

$$\bar{e}\bar{A}\overline{(1-e)} = \bar{e}\overline{(1-e)}\bar{A} = 0, \quad \overline{(1-e)}\bar{A}\bar{e} = \overline{(1-e)}\bar{e}\bar{A} = 0.$$

Значит, $eA(1-e) \subseteq J(R)A = AJ(R)$, и потому $eA(1-e) \subseteq eA(1-e)J(R)$. Поскольку $eA(1-e)$ является R-модулем, то из леммы Накаямы (9.8) следует, что $eA(1-e)=(0)$. Аналогично, $(1-e)Ae=(0)$. Значит, $A = eAe \oplus (1-e)A(1-e)$, и потому каждый элемент из A имеет вид $eae + (1-e)b(1-e)$. Поэтому e лежит в центре A.

Предположим, что $\bar{e}_1 = \bar{e}_2$ для центральных идемпотентов e_1 и e_2. Тогда $e_i - e_1e_2 \in J(A)$ и $(e_i - e_1e_2)^2 = e_i - e_1e_2$, $i=1, 2$. Значит, $e_i - e_1e_2 = 0$, и потому $e_1 = e_1e_2 = e_2$. □

§ 13. Главные неразложимые модули

Пусть A — кольцо, удовлетворяющее ACC.

A-модуль V является *главным неразложимым модулем*, если V неразложим, $V \neq (0)$ и $V \mid A_A$.

Лемма 13.1. *Предположим, что A обладает свойством однозначности разложения. Тогда каждый главный неразложимый A-модуль является конечно порожденным проективным модулем. Обратно, каждый конечно порожденный проективный A-модуль является прямой суммой главных неразложимых модулей.*

Доказательство. Если $V \mid A_A$, то V является гомоморфным образом A_A и потому конечно порожден. В силу свойства однозначности разложения, последнее утверждение леммы будет выполняться, если каждый неразложимый проективный модуль является главным неразложимым модулем.

Пусть V — конечно порожденный проективный модуль. Тогда $V \mid mA_A$ для некоторого натурального m. Пусть $A_A = \oplus V_i$, где каждый из V_i неразложим. Тогда $mA_A = \oplus mV_i$ и, значит, $V \cong V_i$ для некоторого i, ввиду свойства однозначности разложения. □

В оставшейся части этого параграфа будем рассматривать кольца, удовлетворяющие следующим условиям.

Условия 13.2. (i) *A удовлетворяет* ACC.

(ii) *Если N — правый идеал кольца A, то либо $N \subseteq J(A)$, либо N содержит идемпотент.*

(iii) *Если V — конечно порожденный неразложимый A-модуль, то $E_A(V)$ — локальное кольцо.*

Лемма 13.3. *Предположим, что A удовлетворяет* ACC, *$A/J(A)$ удовлетворяет* DCC *и A полно на модулях. Тогда A удовлетворяет* (13.2). *В частности, если A удовлетворяет* DCC, *то A удовлетворяет* (13.2).

Доказательство. Выполнимость (13.2) (i) очевидна. Справедливость (13.2) (ii) следует из (12.5). Из (10.4) следует (13.2) (iii). □

Лемма 13.4. *Предположим, что A удовлетворяет* (13.2). *Пусть e — идемпотент из A. Идемпотент e примитивен тогда и только тогда, когда eAe — локальное кольцо.*

Доказательство. Если e примитивен, то, согласно (7.2), eA неразложим, и тогда eAe — локальное кольцо, ввиду (8.2) и (13.2) (iii).

Если e не примитивен, то eAe содержит два идемпотента, сумма которых равна e. Тогда eAe не является локальным кольцом. □

Теорема 13.5. *Предположим, что A удовлетворяет* (13.2). *Пусть e — примитивный идемпотент из A. Тогда $eJ(A)$ является единственным максимальным подмодулем модуля eA и $eA/eJ(A)$ неприводим. Если e_1 — другой примитивный идемпотент из A, то $eA \cong e_1A$ тогда и только тогда, когда $eA/eJ(A) \cong e_1A/e_1J(A)$.*

Доказательство. Пусть N — правый идеал в A, причем $N \subseteq eA$, $N \neq eA$. Если $N \not\subseteq J(A)$, то, согласно (13.2) (ii), N содержит идемпотент f. Поэтому $ef=f$, $e \neq f$. Следовательно,

$$(efe)^2 = efefe = efe.$$

Поэтому $efe=0$ или efe — идемпотент в eAe. В силу (13.4), eAe является локальным кольцом, и тогда e — единственный идемпотент в eAe. Поэтому $fe=efe=e$ или $fe=efe=0$. Если $fe=e$, то $eA \subseteq fA \subseteq N$, что в этом случае невозможно. Значит, $fe=0$. Следовательно, $(e-f)^2=e$, и тогда e коммутирует с f. Поэтому $f=ef=fe=0$, вопреки тому, что f — идемпотент. Следовательно, $N \subseteq J(A)$, и тогда $N=eN \subseteq eJ(A)$. Если $eA=eJ(A)$, то $e \in eJ(A) \subseteq J(A)$, и тогда $1-e$ — обратимый элемент,— противоречие с тем, что $e(1-e)=0$. Первое утверждение доказано.

Если $eA \cong e_1A$, то поскольку $eJ(A)$ и $e_1J(A)$ являются единственными максимальными подмодулями модулей eA и e_1A соответственно, то $eA/eJ(A) \cong e_1A/e_1J(A)$.

Предположим, что $eA/eJ(A) \cong e_1A/e_1J(A)$. Так как eA, e_1A — проективные модули, то существует такое отображение f: $eA \to e_1A$, что $t_1f=t$, где t, t_1 — естественные проекции eA и e_1A на $eA/eJ(A) \cong e_1A/e_1J(A)$. Так как $t_1e_1J(A)=(0)$, то первое утверждение теоремы влечет, что f — эпиморфизм. Пусть V — ядро f. Тогда $eA/V \cong e_1A$, откуда $eA \cong V \oplus e_1A$, так как e_1A — проективный модуль. Поскольку eA неразложим, то $V=(0)$ и $eA \cong e_1A$, что и утверждалось. □

Следствие 13.6. *Предположим, что A удовлетворяет* (13.2). *Пусть V — произвольный A-модуль и* $\mathrm{Rad}(V)$ *— радикал модуля V. Тогда отображение, переводящее V в $V/\mathrm{Rad}(V)$, является биекцией*

между классами изоморфизма главных неразложимых модулей и классами изоморфизма неприводимых модулей.

Доказательство. Следует из (6.1) и (13.5). □

Теорема 13.7. *Предположим, что A полно на модулях и удовлетворяет* ACC, *а $A/J(A)$ удовлетворяет* DCC. *Пусть I — такой идеал кольца A, что $I \subseteq J(A)$. Для любого A-модуля V и любого $v \in V$ обозначим через $\bar{v}$ образ v в $\bar{V} = V/VI$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если W — конечно порожденный проективный $\bar{A}$-модуль, то $W = \bar{P}$ для некоторого конечно порожденного проективного A-модуля P.*

(ii) *Если P — конечно порожденный проективный A-модуль, то $\bar{P}$ — конечно порожденный проективный $\bar{A}$-модуль; если P — главный неразложимый A-модуль, то $\bar{P}$ — главный неразложимый $\bar{A}$-модуль.*

(iii) *Отображение, переводящее P в $\bar{P}$, осуществляет биекцию между классами изоморфизма конечно порожденных проективных A-модулей и классами изоморфизма конечно порожденных проективных $\bar{A}$-модулей.*

Доказательство. Ввиду (11.3), A и $\bar{A}$ обладают свойством однозначности разложения.

(i) Достаточно рассмотреть случай, когда W неразложим. Тогда, в силу (13.1), $W \cong x\bar{A}$, где x — идемпотент из $\bar{A}$. Согласно (12.4), $x = \bar{e}$ для некоторого идемпотента e из A. Таким образом, $W \cong \overline{eA}$.

(ii) Можно считать, что $P \cong eA$ для некоторого примитивного идемпотента e из A. Тогда $\bar{P} \cong \bar{e}\bar{A}$ проективен. Далее, в силу (13.5), $\bar{P}$ обладает единственным максимальным подмодулем, и потому является неразложимым.

(iii) В силу (i) и (ii), достаточно показать, что если P_1 и P_2 — главные неразложимые модули, то $P_1 \cong P_2$ тогда и только тогда, когда $\bar{P}_1 \cong \bar{P}_2$. Поскольку $P_i/\mathrm{Rad}(P_i) \cong \bar{P}_i/\mathrm{Rad}(\bar{P}_i)$, так как $A/J(A) \cong \bar{A}/J(\bar{A})$ (изоморфизм A-модулей), то результат вытекает из (13.6). □

Лемма 13.8. *Предположим, что A удовлетворяет* (13.2). *Пусть e — примитивный идемпотент из A. Тогда $E_A(eA/eJ(A)) \cong eAe/J(eAe) \cong eAe/eJ(A)e$. Если A — конечно порожденная R-алгебра для некоторого коммутативного кольца R, то эти изоморфизмы являются R-изоморфизмами.*

Доказательство. Второе равенство следует из (8.4).

Пусть $f \in E_A(eA)$. Поскольку f является A-эндоморфизмом, то $f(eJ(A)) \subseteq eJ(A)$. Значит, f индуцирует эндоморфизм $\hat{f}$ модуля $eA/eJ(A)$. Отображение, переводящее f в $\hat{f}$, является, очевидно, кольцевым гомоморфизмом и R-гомоморфизмом в случае, когда A является R-алгеброй. Если $h \in E_A(eA/eJ(A))$, то h можно рассматривать как отображение $h\colon eA \to eA/eJ(A)$. Из проективности eA следует существование такого $f \in E_A(eA)$, что $tf = h$, где $t\colon eA \to eA/eJ(A)$ — естественная проекция. Тогда $\hat{f} = h$. Таким образом, отображение, переводящее f в $\hat{f}$, является эпиморфизмом $E_A(eA)$ на $E_A(eA/eJ(A))$. Поскольку, по лемме Шура (8.1), $E_A(eA/eJ(A))$ — тело,

а по (8.2) и (13.4), $E_A(eA) \cong eAe$ — локальное кольцо, то отсюда вытекает доказываемый результат. □

Теорема 13.9. *Предположим, что A удовлетворяет* (13.2). *Пусть V — конечно порожденный A-модуль, обладающий композиционным рядом, e — примитивный идемпотент из A. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathrm{Hom}_A(eA, V) \neq (0)$;

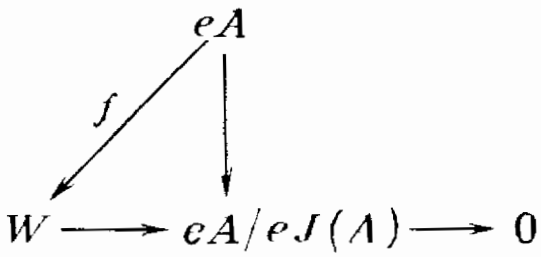
(ii) $Ve \neq (0)$;

(iii) *V обладает композиционным фактором, изоморфным $eA/eJ(A)$.*

Доказательство. Ввиду (8.2), утверждения (i) и (ii) эквивалентны.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $f \in \mathrm{Hom}_A(eA, V)$, $f \neq 0$. Можно предполагать, возможно, изменив обозначения, что $f(eA) = V$. В силу (13.5), ядро f лежит в $eJ(A)$. Поэтому $V/f(eJ(A)) \cong eA/eJ(A)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Существует такой подмодуль W модуля V, гомоморфным образом которого является $eA/eJ(A)$. Так как eA проективен, то существует коммутативная диаграмма



Поэтому $f \neq 0$ и $f \in \mathrm{Hom}_A(eA, V)$. □

Предположим, что A удовлетворяет (13.2). Два примитивных идемпотента e_0 и e из A называются *связанными*, если существует такое множество $e_0, e_1, \ldots, e_n = e$ примитивных идемпотентов, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ можно найти главный неразложимый A-модуль U_i, для которого $\mathrm{Hom}_A(U_i, e_{i-1}A) \neq (0)$ и $\mathrm{Hom}_A(U_i, e_iA) \neq (0)$.

Следствие 13.10. *Предположим, что A удовлетворяет* DCC. *Пусть e_0, e — примитивные идемпотенты из A. Идемпотенты e_0 и e связаны тогда и только тогда, когда существует такое множество $e_0, e_1, \ldots, e_n = e$ примитивных идемпотентов, что $e_{i-1}A$ и e_iA имеют общую неприводимую конституэнту для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Очевидно, учитывая (13.9). □

Теорема 13.11. *Предположим, что A удовлетворяет* (13.2). *Пусть e_0 и e — примитивные идемпотенты из A. Идемпотенты e и e_0 связаны тогда и только тогда, когда eA и e_0A принадлежат одному блоку.*

Доказательство. Пусть f — примитивный центральный идемпотент, причем $e_0A \in B$, где B — блок, соответствующий идемпотенту f. Предположим, что e_0 и e связаны. Пусть $e_0, e_1, \ldots, e_n = e$ — такое множество примитивных идемпотентов, что для каждого $i = 1, \ldots n$, $\mathrm{Hom}_A(U_i, e_{i-1}A) \neq (0)$ и $\mathrm{Hom}_A(U_i, e_iA) \neq (0)$ для некоторого главного неразложимого модуля U_i. Для доказательства по индукции принадлежности $e_iA \in B$ достаточно показать, что если U и V — главные

неразложимые A-модули, причем $\mathrm{Hom}_A(U, V)\neq(0)$, то U и V принадлежат одному блоку. Однако это непосредственно следует из (7.8).

Обратно, предположим, что $eA\in B$. Тогда $e_0f=e_0$, $ef=e$ и e_0, $e\in fAf$. Если e и e_0 не являются ортогональными, то либо $eAe_0\neq(0)$, либо $e_0Ae\neq(0)$. Поэтому, в силу (8.2), e и e_0 связаны. Предположим поэтому, что e и e_0 ортогональны. Если утверждение ложно, то

$$f=e_0+\ldots+e_s+e_{s+1}+\ldots+e_n,$$

где $\{e_i\}$ — множество попарно ортогональных примитивных идемпотентов из fAf, $e_n=e$, причем обозначения выбраны так, что e связан с e_0 тогда и только тогда, когда $0\leqslant i\leqslant s$. Положим $f_1=e_0+\ldots+e_s$, $f_2=e_{s+1}+\ldots+e_n$. Так как $f_2\neq0$, то f_1 и f_2 — ортогональные идемпотенты в fAf. В силу (8.2), $e_iAe_j=e_jAe_i=(0)$ для $0\leqslant i\leqslant s$; $s+1\leqslant j\leqslant n$. Значит, $f_1Af_2=f_2Af_1=(0)$. Следовательно, $fAf_1=f_1Af_1$ и тогда $Af_1A=fAf_1A\subseteq f_1A$. Таким образом, f_1A является идеалом в A. Аналогично, идеалом в A является f_2A. Так как $fA=f_1A\oplus f_2A$ и f — примитивный центральный идемпотент, то из (7.7) следует, что либо $f_1A=(0)$, либо $f_2A=(0)$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

§ 14. Двойственность в алгебрах

На протяжении этого параграфа R будет обозначать коммутативное кольцо, A — конечно порожденную R-свободную R-алгебру.

Для любого A-модуля V определим *дуальный* модуль $\hat{V}$ по отношению к V, полагая, как в (2.8), $\hat{V}=\mathrm{Hom}_R(V, R)$. Тогда $\hat{V}$ является левым A-модулем. Если $v\in V$, $t\in\hat{V}$, пишем $(v)t=vt$ для образа элемента v относительно гомоморфизма t. Поскольку R коммутативно, а V является двусторонним R-модулем, то это не противоречит ранее принятым соглашениям.

Для A-модулей V и W и $f\in\mathrm{Hom}_A(V, W)$ определим $\hat{f}\in\mathrm{Hom}_A(\hat{W}, \hat{V})$ равенством

$$v(t\hat{f})=(fv)t, \tag{14.1}$$

где $v\in V$, $t\in\hat{W}$.

Если V является левым A-модулем, то $\hat{V}$ определяется аналогично.

Лемма 14.2. *Пусть V, W — два A-модуля, $f\in\mathrm{Hom}_A(V, W)$. Тогда:*

(i) $\widehat{(V\oplus W)}\cong\hat{V}\oplus\hat{W}$;

(ii) *если f — эпиморфизм, то $\hat{f}$ — мономорфизм.*

Доказательство. Очевидно ввиду определения и (14.1). □

Пусть W — подмодуль A-модуля V. Положим

$$W^{\perp}=\{t\mid t\in\hat{V},\ wt=0\ \text{для всех}\ w\in W\}.$$

Очевидно, если $W_1\subseteq W$, то $W^{\perp}\subseteq W_1^{\perp}$. Непосредственно из определения следует, что $W^{\perp}$ является левым подмодулем левого модуля $\hat{V}$.

Для $v \in V$ определим $\hat{v} \in \hat{\hat{V}}$, полагая $\hat{v}(t) = (v)t$ для всех $t \in \hat{V}$. Нетрудно убедиться, что отображение, переводящее v в $\hat{v}$, является A-гомоморфизмом.

Если V_R свободен и $\{v_i\}$ — его конечный R-базис, определим $\hat{v}_i \in \hat{V}$, полагая $(v_j)\hat{v}_i = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Из определения следует, что $\{\hat{v}_i\}$ является базисом $\hat{V}$ и что $\hat{\hat{v}}_i$ имеет такой же смысл, что и выше. Базис $\{\hat{v}_i\}$ называется *дуальным базисом* к базису $\{v_i\}$.

Лемма 14.3. *Пусть V — такой A-модуль, что V_R R-свободен с конечным базисом $\{v_i\}$. Если $a \in A$ и $v_i a = \sum_j r_{ij} v_j$, где $r_{ij} \in R$, то $a\hat{v}_i = \sum_j r_{ji} \hat{v}_j$.*

Доказательство. Для всех i, j,

$$(v_j)a\hat{v}_i = (v_j a)\hat{v}_i = \Big(\sum_k r_{jk} v_k\Big)\hat{v}_i = r_{ji}.$$

Таким образом, $a\hat{v}_i = \sum_j r_{ji}\hat{v}_j$. □

Лемма 14.4. *Пусть U, W — конечно порожденные A-модули, причем $V = U \oplus W$. Предположим, что V_R — конечно порожденный свободный R-модуль. Тогда $\hat{V} = W^{\perp} \oplus U^{\perp}$, $W^{\perp} \cong \hat{U}$, $U^{\perp} \cong \hat{W}$ и отображение, переводящее w в $\hat{w}$, является изоморфизмом между W и $\hat{\hat{W}} \cong W^{\perp\perp}$.*

Доказательство. Первые три утверждения следуют из определений и (14.2). Последнее вытекает из (14.3), так как из него следует, что отображение, переводящее v в $\hat{\hat{v}}$, является изоморфизмом V на $\hat{V}$. □

В том случае, когда W является таким конечно порожденным A-модулем, что W_R проективен, мы, как правило, будем отождествлять W с $\hat{\hat{W}}$ с помощью изоморфизма, который отображает w в $\hat{\hat{w}}$.

Лемма 14.5. *Если V, W — такие A-модули, что V_R и W_R — конечно порожденные свободные R-модули и $f \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$, то $\hat{\hat{f}} = f$. Если, кроме того, f — изоморфизм V на W, то $\hat{f}$ — изоморфизм $\hat{W}$ на $\hat{V}$.*

Доказательство. Если $v \in V$, $t \in \hat{W}$, то из (14.1) следует, что

$$(\hat{\hat{f}}\hat{\hat{v}})t = \hat{\hat{v}}(t\hat{f}) = v(t\hat{f}) = (fv)t.$$

Значит, $fv = \hat{\hat{f}}\hat{\hat{v}}$. Если f — изоморфизм, а $\{v_i\}$ — базис V, то $\hat{f}$ отображает дуальный базис $\{\widehat{fv_i}\}$ на $\{\hat{v}_i\}$ и потому является эпиморфизмом. В силу (14.2), $\hat{f}$ — изоморфизм. □

Лемма 14.6. *Пусть V — такой конечно порожденный A-модуль, что V_R является конечно порожденным свободным R-модулем. Тогда $V_R \widehat{\otimes}_R {}_R A_A \cong {}_R \hat{A}_A \underset{R}{\otimes} \hat{V}_R$. Кроме того, существует такая точная последовательность*

$$0 \to V \xrightarrow{f} V_R \underset{R}{\widehat{\otimes}}_A \hat{A}_R \xrightarrow{h} W \to 0,$$

что

$$0 \to V_R \xrightarrow{f} (V_R \underset{R}{\otimes}_A \hat{A})_R \xrightarrow{h} W_R \to 0$$

является расщепляемой точной последовательностью, а W_R *— проективным* R*-модулем.*

Доказательство. Пусть $\{v_i\}$ — базис V_R, $\{y_j\}$ — базис ${}_R A$. Тогда $\{v_i \otimes y_j\}$ — базис $(V_R \underset{R}{\otimes}_R A_A)_R$, а $\{\hat{y}_j \otimes \hat{v}_i\}$ — базис $({}_R \hat{A}_A \underset{R}{\otimes} \hat{V}_R)_R$. Определим R-линейное отображение g: ${}_R \hat{A}_A \underset{R}{\otimes} \hat{V}_R \to (\widehat{V_R \underset{R}{\otimes}_R A_A})$, полагая $(\hat{y}_j \otimes \hat{v}_i) g = \widehat{v_i \otimes y_j}$. Очевидно, g является R-изоморфизмом. Осталось лишь показать, что g является A-гомоморфизмом.

Пусть $a \in A$ и $y_j a = \sum_k r_{jk} y_k$, где $r_{jk} \in R$. Ввиду (14.3), $a\hat{y}_j = \sum_k r_{kj} \hat{y}_k$. Поэтому $(v_i \otimes y_j) a = \sum_k r_{jk} (v_i \otimes y_k)$ и $a(\widehat{v_i \otimes y_j}) = \sum_k r_{kj} (\widehat{v_i \otimes y_k})$. Следовательно,

$$\{a(\hat{y}_j \otimes \hat{v}_i)\} g = \{\sum_k r_{kj} (\hat{y}_k \otimes \hat{v}_i)\} g = \sum_k r_{kj} (\widehat{v_i \otimes y_k}) = a(\widehat{v_i \otimes y_j}) = a\{(\hat{y}_j \otimes \hat{v}_i) g\}.$$

Значит, g является A-изоморфизмом, и тем самым первое утверждение доказано.

Заменим V на $\hat{V}$ в левом аналоге утверждения (4.5) при $B = R$ и перейдем к дуальным модулям. Тогда (14.2) и предыдущий абзац влекут, что

$$0 \to V \xrightarrow{t} V_R \underset{R}{\otimes}_A \hat{A}_R \xrightarrow{h} \hat{W}$$

является точной последовательностью, а

$$0 \to V_R \xrightarrow{f} (V_R \underset{R}{\otimes}_A \hat{A}_R)_R \xrightarrow{h} \hat{W}_R \to 0$$

— точной расщепляемой последовательностью. Поэтому h является эпиморфизмом, что и доказывает утверждение. □

Элемент t из $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ называется *невырожденным*, если ядро t не содержит ненулевых левых идеалов и каждый элемент из $\hat{A}_A$ имеет вид at для некоторого $a \in A$, причем $b(at) = (ba)t$, $b \in A$.

Элемент t из $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ называется *симметрическим*, если $t(ab) = t(ba)$ для всех a, $b \in A$.

Алгебра A называется *фробениусовой*, если в $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ существует невырожденный элемент t.

Алгебра A называется *симметрической*, если в $\mathrm{Hom}_R(A, R)$ существует невырожденный симметрический элемент t.

Лемма 14.7. *Пусть* t *— невырожденный элемент из* $\mathrm{Hom}_R(A, R)$. *Тогда*:

(i) *ядро t не содержит ненулевых правых идеалов*;

(ii) *пусть $f\colon {}_AA\to\hat{A}_A$ определено равенством $af=at$, $a\in {}_AA$; тогда f является изоморфизмом*;

(iii) *пусть $g\colon A_A\to {}_A\hat{A}$ определено равенством $ga=ta$, $a\in A_A$; тогда $g=\hat{f}$, где f — как в* (ii), *и g является изоморфизмом*;

(iv) *каждый элемент из ${}_A\hat{A}$ имеет вид ta для некоторого $a\in A$.*

Доказательство. (i) Предположим, что $(aA)t=0$. Тогда $a(bt)=0$ для всех $b\in A$, и потому $as=0$ для всех $s\in\hat{A}_A$. Значит, $\hat{a}=0$, и, ввиду (14.4), $a=0$.

(ii) Очевидно, f является A-гомоморфизмом. По условию, f — эпиморфизм. Если $af=0$, то $at=0$, и потому $(Aa)t=(A)at=0$. Значит, Aa является левым идеалом, принадлежащим ядру t, и поэтому $Aa=0$. Следовательно, $a=0$ и f — мономорфизм.

(iii) Если a отождествить с $\hat{a}$ для всех $a\in {}_AA$, то, в силу (14.1), $b(a\hat{g})=(gb)a=t(ba)$ для всех a, $b\in A$. Если t записать справа, то $t(ba)=(ba)t$ и $\hat{g}=f$. Значит, по (ii) и (14.5), $\hat{f}=g$ является изоморфизмом.

(iv) Поскольку g является, ввиду (iii), изоморфизмом, то утверждение очевидно. □

Теорема 14.8. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *A является фробениусовой алгеброй*;

(ii) $\hat{A}_A\cong {}_AA$;

(iii) ${}_A\hat{A}\cong A_A$.

Доказательство. Согласно (14.4), (ii) и (iii) эквивалентны.

(i)⇒(ii). Вытекает из (14.7) (ii).

(ii)⇒(i). Пусть $f\colon {}_AA\to\hat{A}_A$ — изоморфизм. Положим $t=(1)f$. Тогда каждый элемент из $\hat{A}_A$ имеет вид at. Если $(Aa)t=0$, то $A(at)=0$, и тогда $af=at=0$. Поэтому $a=0$. □

Лемма 14.9. *Пусть G — конечная группа, $A=R[G]$. Определим t, полагая $(\sum_{x\in G}r_xx)t=r_1$. Тогда t — симметрический и невырожденный элемент. При этом A — симметрическая алгебра.*

Доказательство. По определению, $t\in\hat{A}_A$. Если $\sum r_xx\neq 0$, то $r_y\neq 0$ для некоторого $y\in G$. Поэтому $\left(y^{-1}\sum_{x\in G}r_xx\right)t=\left(\sum_{x\in G}r_xxy^{-1}\right)t\neq 0$. Следовательно, ядро t не содержит ни левых, ни правых идеалов. Легко видеть, что $\{x^{-1}t\mid x\in G\}$ является дуальным базисом к $\{x\mid x\in G\}$. Значит, каждый элемент из $\hat{A}_A$ имеет вид at для некоторого $a\in A$. Так как

$$\{(\sum r_xx)(\sum s_xx)\}t=\sum r_xs_x\cdot 1=\{(\sum s_xx)(\sum r_xx)\}t,$$

то A — симметрическая алгебра. □

§ 15. Относительно инъективные модули над алгебрами

На протяжении этого параграфа R будет обозначать коммутативное кольцо, удовлетворяющее ACC, а A — конечно порожденную R-свободную R-алгебру.

Пусть B — подкольцо кольца A, причем $R\subseteq B$ и B является конечно порожденной R-свободной R-алгеброй. Конечно порожденный

A-модуль Q называется *инъективным относительно* B или *B-инъективным*, если любая точная последовательность

$$0 \to Q \xrightarrow{f} V \xrightarrow{h} W \to 0$$

с конечно порожденными A-модулями V, W расщепляема, коль скоро последовательность

$$0 \to Q_B \xrightarrow{f} V_B \xrightarrow{h} W_B \to 0$$

является точной расщепляемой.

Конечно порожденный A-модуль Q называется *инъективным*, если любая точная последовательность

$$0 \to Q \to V \to W \to 0,$$

где V, W — конечно порожденные A-модули, расщепляема.

Очевидно, любой инъективный модуль является B-инъективным для любого B. Многие кольца не обладают конечно порожденными инъективными модулями, и поэтому это понятие не будет играть далее существенной роли. Заметим, однако, что ввиду расщепляемости любой точной последовательности векторных пространств, верно следующее утверждение.

Лемма 15.1. *Пусть R — поле, Q — конечно порожденный A-модуль. Модуль Q инъективен тогда и только тогда, когда Q R-инъективен.*

Теорема 15.2. *Пусть Q — такой конечно порожденный A-модуль, что Q_R является конечно порожденным свободным R-модулем. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Q является R-инъективным;*

(ii) $Q \mid Q_R \underset{R}{\otimes} {}_A\hat{A}_R$;

(iii) $\hat{Q} \mid \hat{Q}_R \underset{R}{\otimes} {}_A A_R$;

(iv) *$\hat{Q}$ R-проективен.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Вытекает из (14.6).

(ii)⇒(iii). Очевидно ввиду (14.6).

(iii)⇒(ii). Следствие (4.8).

(iv)⇒(i). Пусть V, W — такие конечно порожденные A-модули, что

$$0 \to Q \xrightarrow{f} V \xrightarrow{h} W \to 0$$

является точной последовательностью, а

$$0 \to Q_R \xrightarrow{f} V_R \xrightarrow{h} W_R \to 0$$

— точной расщепляемой последовательностью. Тогда

$$0 \to \hat{W}_R \xrightarrow{\hat{h}} \hat{V}_R \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Q}_R \to 0$$

— точная расщепляемая последовательность, и потому

$$0 \to \hat{W} \xrightarrow{\hat{h}} \hat{V} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Q} \to 0$$

— также точная расщепляемая последовательность, так как $\hat{Q}$ является R-проективным. Значит, по (14.4),

$$0 \to \hat{\hat{Q}} \xrightarrow{\hat{\hat{f}}} \hat{\hat{V}} \xrightarrow{\hat{\hat{h}}} \hat{\hat{W}} \to 0$$

— точная расщепляемая последовательность.

Пусть $g\colon Q \to \hat{\hat{Q}}$ — отображение, переводящее x в $\hat{\hat{x}}$, и $k\colon V \to \hat{\hat{V}}$. Если $t \in \hat{V}$ и $x \in Q$, то $(\hat{\hat{f}}\hat{\hat{x}})t = \hat{x}(t\hat{f}) = x(t\hat{f}) = (fx)t = (\hat{\hat{fx}})t$. Значит, $\hat{\hat{f}}g = kf$. Поскольку $\hat{\hat{f}}(\hat{\hat{Q}})$ является компонентой $\hat{\hat{V}}$, то существует такой гомоморфизм $\bar{d}\colon \hat{\hat{V}} \to \hat{\hat{Q}}$, что $\bar{d}\hat{\hat{f}}$ тождественно на $\hat{\hat{Q}}$. Поскольку, по (14.4), g — изоморфизм, можно определить $d\colon V \to Q$, полагая $d = g^{-1}\bar{d}k$. Тогда

$$df = g^{-1}\bar{d}kf = g^{-1}\bar{d}\hat{\hat{f}}g = g^{-1}g = 1.$$

Следовательно,

$$0 \to Q \xrightarrow{f} V \xrightarrow{h} W \to 0$$

является точной расщепляемой последовательностью. □

Следствие 15.3. *Пусть Q, Q_1, Q_2 — такие A-модули, что $Q = Q_1 \oplus Q_2$ и $(Q_1)_R$, $(Q_2)_R$ являются R-свободными модулями с конечными базисами. Модуль Q R-инъективен тогда и только тогда, когда Q_1 и Q_2 R-инъективны.*

Доказательство. Очевидно, согласно (15.2) (iv) и (4.9). □

Следствие 15.4. *Пусть Q — такой конечно порожденный A-модуль, что Q_R является R-свободным. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) *R-инъективность Q;*

(ii) *для каждой пары таких A-модулей W, V с конечно порожденными проективными R-модулями W_R, V_R точная последовательность*

$$0 \to Q \xrightarrow{f} V \xrightarrow{h} W \to 0$$

расщепляется всякий раз, когда последовательность

$$0 \to Q_R \xrightarrow{f} V_R \xrightarrow{h} W_R \to 0$$

является точной расщепляемой последовательностью.

Доказательство. (i)⇒(ii). Очевидно.

(ii)⇒(i). Согласно (14.6), $Q \mid Q_R \underset{R}{\otimes} {}_A\hat{A}_R$. Поэтому Q является R-инъективным, согласно (15.2). □

Теорема 15.5. *Предположим, что A — фробениусова алгебра. Пусть V — такой A-модуль, что V_R является R-свободным модулем с конечным базисом. Модуль V R-проективен тогда и только тогда, когда V R-инъективен.*

Доказательство. Согласно (14.8), ${}_A\hat{A} \cong A_A$. Следовательно, ${}_A\hat{A}_R \cong {}_RA_A$. Результат теперь следует из (4.8) (ii) и (15.2) (ii). □

Следствие 15.6. *Предположим, что A — фробениусова алгебра, обладающая свойством однозначности разложения. Пусть A-модули V_1, V_2, W являются R-свободными без ненулевых проективных слагаемых, причем*

$$0 \to V_1 \oplus P_1 \to W \oplus P \to V_2 \oplus P_2 \to 0$$

— точная последовательность, когда P, P_1, P_2 проективны. Тогда существует такой проективный модуль P', что

$$0 \to V_1 \to W \oplus P' \to V_2 \to 0$$

точна.

Доказательство. Поскольку P_2 проективный, $P_2 \mid W \oplus P$. Значит, $P \cong P_0 \oplus P_2$ в силу свойства однозначности разложения. Поэтому существует точная последовательность

$$0 \to V_1 \oplus P_1 \to W \oplus P_0 \to V_2 \to 0.$$

В силу (15.5), P_1 R-инъективен. Значит, в силу свойства однозначности разложения, $P_0 \cong P_1 \oplus P'$, откуда и следует результат. □

§ 16. Алгебры над полем

На протяжении настоящего параграфа F — поле, A - конечно порожденная F-алгебра. Тогда A удовлетворяет DCC, ACC, левому DCC и левому ACC.

Если V, W — конечно порожденные A-модули, положим

$$I(V, W) = I_F(V, W) = \dim_F \{\mathrm{Hom}_1(V, W)\}.$$

$I(V, W)$ является *числом зацеплений* V и W. Из определения очевидно, что

$$I(V_1 \oplus V_2, W) = I(V_1, W) + I(V_2, W),$$
$$I(V, W_1 \oplus W_2) = I(V, W_1) + I(V, W_2).$$

Если V — неприводимый A-модуль, то, в силу (8.1), $E_A(V)$ является телом, которое является также конечно порожденной F-алгеброй. F является *полем разложения* модуля V, если $E_A(V) \cong F$. F является *полем разложения* алгебры A, если F — поле разложения для каждого неприводимого A-модуля.

Если V — неприводимый A-модуль, то, очевидно, F является полем разложения модуля V тогда и только тогда, когда $I(V, V)=1$. Если F алгебраически замкнуто, то F является полем разложения алгебры A, поскольку лишь поле F является одновременно конечномерной F-алгеброй и телом.

Лемма 16.1. *Пусть Z — центр алгебры A, B — подалгебра в Z, содержащая 1. Если F — поле разложения алгебры A, то F — поле разложения алгебры B.*

Доказательство. В силу (7.3) результат достаточно доказать лишь в случае, когда 1 является единственным центральным идемпотентом алгебры A. Тогда 1 является единственным идемпотентом в Z. Значит, Z_Z неразложим и, в силу (13.6), Z обладает единственным неприводимым модулем V. В силу (13.8), $Z/J(Z)\cong E_Z(V)$. Поэтому достаточно показать, что $Z/J(Z)\cong F$. Если W — неприводимый A-модуль, то существует ненулевой F-гомоморфизм Z на $E_A(W)\cong F$. Поскольку F-алгебра $Z/J(Z)$, в силу (8.1), является полем, $Z/J(Z)\cong F$. Значит, $B/J(B)\cong F$. □

Центральный характер алгебры A — это ненулевой гомоморфизм центра алгебры A на F.

Лемма 16.2. *Предположим, что F — поле разложения алгебры A, $e_1, \ldots, e_n$ — все примитивные центральные идемпотенты алгебры A. Тогда A имеет ровно n различных центральных характеров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\lambda_i(e_j)=\delta_{ij}$.*

Доказательство. Пусть λ — центральный характер алгебры A. Если a лежит в центре Z алгебры A и $a^m=0$, то $\lambda(a)^m=0$, и, значит, $\lambda(a)=0$. Следовательно, $J(Z)$ лежит в ядре λ. В силу (16.1), $Z/J(Z)\cong\oplus_{i=1}^n e_iF$. Отсюда легко следует результат. □

Теорема 16.3. *Предположим, что F — поле разложений алгебры A. Пусть S есть F-пространство, порожденное всеми элементами $ab-ba$, где $a, b\in A$. Если* $\operatorname{char} F=p>0$, *положим $T=\{c \mid c^{p^i}\in S$ для некоторого $i>0\}$. Пусть k — число попарно неизоморфных неприводимых A-модулей. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если A полупроста, то $k=\dim_F A-\dim_F S$.*

(ii) *Если* $\operatorname{char} F=p>0$, *то $(a+b)^{p^n}\equiv a^{p^n}+b^{p^n} \pmod S$ для всех $a, b\in A$ и всех n. Кроме того, $S\subseteq T$, T является F-пространством и $k=\dim_F A-\dim_F T$.*

Доказательство. (i) Если A — простая алгебра, то $A\cong F_n$ для подходящего $n>0$, согласно второй теореме Артина — Веддербарна (8.11). Значит, $k=1$. Хорошо известно, что в этом случае S состоит из всех матриц со следом 0. Поэтому $\dim_F A-\dim_F S=1$, что и доказывает результат в случае простой A. Из первой теоремы Артина — Веддербарна (8.10) следует (i).

(ii) Предположим, что $\operatorname{char} F=p>0$. Пусть $\sigma=(1, 2, \ldots, p)$ — p-цикл, x, y — некоммутирующие неизвестные. Для любого монома $t_1 \ldots t_p$, где $t_i=x$ или y для каждого i, определим $\sigma(t_1 \ldots t_p)=t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(p)}$. Легко видеть, что это задает действие группы $\langle\sigma\rangle$ как группы перестановок на множестве всех мономов степени p от x и y.

Кроме того, если $f(x, y)$ — такой моном, то $\sigma(f(x, y))=f(x, y)$ тогда и только тогда, когда $f(x, y)=x^p$ или $f(x, y)=y^p$. Значит, если $a, b\in A$, то

$$(a+b)^p-a^p-b^p=\sum_{i=0}^{p-1}\sigma^i\{f(a, b)\},$$

где $f(x, y)$ пробегает множество мономов от x и y. Поскольку $\sigma\{f(a, b)\}\equiv f(a, b)(\mathrm{mod}\, S)$, то $(a+b)^p\equiv a^p+b^p(\mathrm{mod}\, S)$. Поэтому

$$(ab-ba)^p\equiv(ab)^p-(ba)^p\equiv a\{b(ab)^{p-1}\}-\{b(ab)^{p-1}\}a\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, S).$$

Значит, если $c\in S$, то $c^p\in S$. Следовательно, $c^{p^i}\in S$ для всех i, и потому $S\subseteq T$. Кроме того, для всех i

$$(a+b)^{p^{i+1}}-a^{p^{i+1}}-b^{p^{i+1}}\equiv(a+b)^{p^{i+1}}-(a^{p^i}+b^{p^i})^p\equiv$$
$$\equiv\{(a+b)^{p^i}-a^{p^i}-b^{p^i}\}^p\ (\mathrm{mod}\, S).$$

Тем самым, по индукции, $(a+b)^{p^n}\equiv a^{p^n}+b^{p^n}\ (\mathrm{mod}\, S)$ для всех n. Следовательно, T является F-пространством.

Поскольку $J(A)$ нильпотентен, то $J(A)\subseteq T$, и если $c^{p^i}\in S+J(A)$, то $c^{p^j}\in S$ для некоторого j. Следовательно, факторизуя по $J(A)$, можно предполагать, что A полупроста. Тогда, в силу первой теоремы Артина — Веддербарна (8.10), достаточно рассмотреть случай, когда A простая. В этом случае, по второй теореме Артина — Веддербарна (8.11), $A=F_n$ и S состоит из всех матриц со следом 0. Поскольку $\dim_F A-\dim_F S=1=k$ и $S\subseteq T\subseteq A$, достаточно показать, что $T\neq A$. Существует идемпотент e из A, след которого не равен 0. Значит, никакая степень e не лежит в S, и потому $e\notin T$. □

В оставшейся части параграфа будем применять следующие обозначения:

$U_1, \ldots, U_k$ — полное множество представителей классов изоморфизма главных неразложимых A-модулей. Для $i=1, \ldots, k$ положим $L_i=U_i/\mathrm{Rad}\, U_i$, где $\mathrm{Rad}\, U_i$ — радикал U_i. В силу (13.6), $L_1, \ldots, L_k$ — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых A-модулей.

Если V_1, V_2 — конечно порожденные A-модули, будем писать $V_1\leftrightarrow V_2$ в том случае, когда V_1 и V_2 имеют одинаковые множества композиционных факторов (учитывая кратности). Очевидно, $\leftrightarrow$ является отношением эквивалентности.

Определим c_{ij}, полагая $U_i\leftrightarrow\oplus c_{ij}L_j$. Целые числа c_{ij} называются *инвариантами Картана* алгебры A, а $k\times k$-матрица $C=(c_{ij})$ — *матрицей Картана* алгебры A. Если $B=B(e)$ — блок алгебры A, где e — примитивный центральный идемпотент алгебры A, то матрица Картана алгебры eA называется *матрицей Картана блока* B. Разумеется, матрица Картана определена лишь с точностью до перестановки строк и столбцов.

Лемма 16.4. *Пусть V — конечно порожденный A-модуль. Предположим, что $V\leftrightarrow\oplus_{i=1}^k n_iL_i$. Пусть e_i, $i=1, \ldots, k$, — такой примитивный идемпотент из A, что $U_i\cong e_iA$. Тогда для каждого i*

$$\dim_F Ve_i=I(U_i, V)=n_iI(L_i, L_i).$$

Доказательство. Первое равенство следует из (8.2). В силу (4.4) и (13.5),

$$I(U_i, V)=\sum_j n_j I(U_i, L_j)=\sum_j n_j I(L_i, L_j).$$

В силу (8.1), $I(L_i, L_j)=0$ при $i\neq j$. Это доказывает второе равенство. □

Следствие 16.5. *Пусть V — конечно порожденный A-модуль, $E=E_A(V)$. Если e — примитивный идемпотент из E, то кратность неприводимого левого E-модуля $Ee/J(E)e$ как композиционного фактора левого E-модуля V равна $(1/m)\dim_F eV$, где $m=I(Ee/J(E)e, Ee/J(E)e)$.*

Доказательство. Вытекает из левого аналога (16.4). □

Лемма 16.6. *Пусть A — симметрическая алгебра над полем F, e, e_1, e_2 — идемпотенты из A. Тогда $\dim_F e_1Ae_2=\dim_F e_2Ae_1$. Кроме того, $eA\cong\widehat{Ae}$.*

Доказательство. По определению, существует такой $t\in\hat{A}_A$, что в ядре отображения t нет правого или левого идеала и $(ab)t=(ba)t$ для всех a, $b\in A$. Для $a\in e_1Ae_2$ определим $fa\in\widehat{e_2Ae_1}$, полагая $(fa)(e_2be_1)=(ae_2be_1)t$. Если $fa=0$, то

$$(be_1ae_2)t=(ae_2be_1)t=0$$

для всех $b\in A$, и потому $(Ae_1ae_2)t=(0)$. Значит, $a=e_1ae_2=0$. Поэтому f является F-мономорфизмом. Следовательно,

$$\dim_F e_1Ae_2\leqslant\dim_F\widehat{e_2Ae_1}=\dim_F e_2Ae_1.$$

Тогда, меняя местами e_1 и e_2, получаем $\dim_F e_1Ae_2=\dim_F e_2Ae_1$.

Для доказательства последнего утверждения достаточно показать, что f является A-гомоморфизмом в том случае, когда $e_1=e$, $e_2=1$. Однако это вытекает из

$$\{(fa)b\}ce=(fa)(bce)=(abce)t=(fab)(ce)$$

для всех a, b, $c\in A$. □

Теорема 16.7. *Пусть $B_1, \ldots, B_m$ — все различные блоки алгебры A, и пусть $C^{(s)}$ — матрица Картана блока B_s. Пусть, далее, C — матрица Картана алгебры A. Тогда, после подходящей перенумерации строк и столбцов,*

$$C=\begin{pmatrix} C^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Далее, не существует такой перенумерации строк и столбцов, чтобы

$$C^{(s)}=\begin{pmatrix} C_1^{(s)} & 0 \\ 0 & C_2^{(s)} \end{pmatrix}$$

для некоторых матриц $C_1^{(s)}$, $C_2^{(s)}$. Если, кроме того, A — симметрическая алгебра, а F — ее поле разложения, то каждая матрица $C^{(s)}$ является симметрической.

Доказательство. Если U_i, U_j лежат в различных блоках, то, в силу (7.8), $c_{ij}=0$. Это доказывает первое утверждение. Второе следует из (13.11) и (16.4). Если A — симметрическая алгебра, а F — ее поле разложения, то C и каждая из $C^{(s)}$ является симметрической, ввиду (16.4) и (16.5). □

Лемма 16.8. *Предположим, что алгебра A фробениусова. Тогда для каждого i модуль U_i содержит единственный минимальный подмодуль W_i. Если, кроме того, A — симметрическая алгебра, то $W_i\cong L_i$ и $eA/eJ(A)\cong\widehat{Ae/J(A)e}$ для любого примитивного идемпотента e из A.*

Доказательство. Можно предполагать, что $U_i=eA$ для некоторого примитивного идемпотента e из A. В силу (14.7), $U_i\cong\hat{V}$ для некоторого главного неразложимого левого A-модуля V. Ввиду левого аналога теоремы (13.5), V содержит единственный максимальный левый подмодуль W. Тогда $W_i=W^{\perp}$ является единственным минимальным подмодулем модуля U_i.

Предположим, что A — симметрическая алгебра. Тогда, ввиду (16.5), $U_i=eA\cong\widehat{Ae}$. Значит, $W_i\cong\widehat{Ae/J(A)e}$. Поскольку e порождает $Ae/J(A)e$, существует такой $f\in\widehat{Ae/J(A)e}$, для которого $f(e)\neq 0$. Значит, $fe\neq 0$ и поэтому $W_ie\neq 0$. Тем самым, в силу (13.9), $W_i\cong eA/eJ(A)\cong L_i$. □

Теорема 16.9. *Предположим, что A — симметрическая алгебра над F и F — поле разложения алгебры A. Тогда*:

(i) $I(U_i, L_j)=I(L_i, L_j)=I(L_j, U_i)=\delta_{ij}$;

(ii) $A_A\cong\oplus_{j=1}^{k}(\dim_F L_j)U_j$;

(iii) $A_A\leftrightarrow\oplus_{j=1}^{k}(\dim_F U_j)L_j$.

Доказательство. (i) следует из (16.8). Пусть $A_A\cong\oplus a_jU_j$. В силу (8.2), $I(A_A, L_j)=\dim_F L_j$, и поэтому, по (i), $a_j=I(A_A, L_j)=\dim_F L_j$. (iii) является непосредственным следствием (ii) и (16.7). □

Конечно порожденный A-модуль называется *однорядным* или просто *рядным*, если он имеет единственный композиционный ряд. Алгебра A называется *однорядной* или *рядной*, если каждый конечно порожденный неразложимый A-модуль одноряден.

Лемма 16.10. *Предположим, что A однорядна. Пусть V_1, V_2 — конечно порожденные неразложимые A-модули. Следующие условия эквивалентны*:

(i) $V_1\cong V_2$;

(iii) *композиционные ряды модулей V_1 и V_2 имеют равные длины, и $V_1/\operatorname{Rad}V_1\cong V_2/\operatorname{Rad}V_2$;*

(iii) *композиционные ряды модулей V_1 и V_2 имеют равные длины, и цоколи модулей V_1 и V_2 изоморфны.*

Доказательство. Очевидно, из (i) следуют (ii) и (iii).

(ii)⇒(i). Поскольку A однорядна, V_i является гомоморфным образом проективного неразложимого A-модуля U_i, $i=1, 2$. Так как $V_1/\operatorname{Rad} V_1 \cong V_2/\operatorname{Rad} V_2$, то, в силу (13.6), $U_1 \cong U_2$. Поскольку U_1 одноряден, каждый гомоморфный образ модуля U_1 определен с точностью до изоморфизма длиной его композиционного ряда.

(iii)⇒(i). В силу (14.4), $W \cong \hat{\hat{W}}$ для любого A-модуля W. Значит, двойственный к однорядному модулю является однорядным левым модулем. Следовательно, каждый левый модуль алгебры A одноряден. Тогда левый аналог предыдущего абзаца влечет $\hat{V}_1 \cong \hat{V}_2$. Результат теперь следует из (14.4). □

Лемма 16.11. *Предположим, что A — однорядная алгебра. Тогда A обладает, с точностью до изоморфизма, конечным числом конечно порожденных неразложимых модулей.*

Доказательство. Однорядный модуль является гомоморфным образом A_A и потому обладает композиционным рядом ограниченной длины. Так как A обладает, с точностью до изоморфизма, конечным числом неприводимых модулей, то результат следует из (16.10). □

Теорема 16.12. *Пусть $A=F[x, y]$, где $x^2=y^2=xy=yx=0$ и 1, x, y линейно независимы над F. Тогда существует неразложимый A-модуль сколь угодно большой размерности.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число, V, W — векторные пространства над F с базисами $\{v_0, \ldots, v_n\}$ и $\{w_1, \ldots, w_n\}$ соответственно. Положим

$$w_i x = v_i, \quad w_i y = v_{i-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n;$$
$$v_i x = 0, \quad v_i y = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Легко видеть, что $M = V \oplus W$ является A-модулем. Достаточно показать, что M неразложим.

Предположим, что $M = M_1 \oplus M_2$, где M_j — ненулевой A-модуль, $j=1, 2$. Пусть t — проекция M на W. Положим $m_j = \dim_F t(M_j)$. Тогда $m_1 + m_2 \geqslant n$.

Предположим, что $m_j = 0$ при $j=1$ или 2, скажем, $m_2 = 0$. Тогда $t(M_1) = W$, и потому $V = Wx + Wy \subseteq M_1$. Значит, $M = M_1$, вопреки предположению. Поэтому $m_j \neq 0$ при $j=1, 2$. Пусть фиксировано j и $s = s_j$ — такое наибольшее натуральное число, что пространство $t(M_j)$ порождено $\{w_s, \ldots, w_n\}$. Тогда $M_j x$ лежит в пространстве U, порожденном $\{v_s, \ldots, v_n\}$, и $v_{s-1} \in M_j y + U$. Поэтому $\dim_F(M_j x + M_j y) \geqslant 1 + \dim_F M_j x$. Поскольку x является мономорфизмом W в V и $M_j x \subseteq M_j$, то $\dim_F M_j x = m_j$. Так как $t(M_j x + M_j y) \subseteq t(V) = (0)$, то

$$\dim_F M_j \geqslant \dim_F(M_j x + M_j y) + \dim_F t(M_j) \geqslant 2m_j + 1.$$

Поэтому

$$2n+1 = \dim_F M = \dim_F M_1 + \dim_F M_2 \geqslant 2(m_1 + m_2) + 2 \geqslant 2n+2.$$

Это противоречие доказывает теорему. □

Следующий результат является частичным обращением (16.11) и принадлежит, по существу, Михлеру [1976b]. См. также Накаяма [1940], Эйсенбад и Гриффитс [1971].

Теорема 16.13. *Пусть A — алгебра, обладающая, с точностью до изоморфизма, единственным неприводимым модулем и такая, что для любого расширения K поля F выполняются следующие условия:*

(I) *A_K — прямая сумма алгебр, каждая из которых обладает единственным, с точностью до изоморфизма, неприводимым модулем;*

(II) *$(A/J(A))_K$ полупростая;*

(III) *существует такое целое число, зависящее от K, которое ограничивает сверху размерность каждого неразложимого A_K-модуля.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) *Существуют алгебра с делением D над F и такие натуральные m, n, что $A \cong B_n$, где $B/J(B) \cong D$, B содержит элемент x, для которого $x^m = 0$, $x^{m-1} \neq 0$, и $J(B)^s = Bx^s = x^s B$ для всех s.*

(ii) *A однорядна; существует ровно m конечно порожденных A-модулей $V_1, \ldots, V_m$ с точностью до изоморфизма; для каждого $s = 1, \ldots, m$*

$$V_s \supseteq V_s x \supseteq \ldots \supseteq V_s x^{s-1} \supseteq V_s x^s = (0)$$

является композиционным рядом для V_s; кроме того, V_s проективен тогда и только тогда, когда $s = m$.

Доказательство. В силу (13.6), существует единственный, с точностью до изоморфизма, главный неразложимый A-модуль U. Значит, $A_A \cong nU$ для подходящего целого n. Пусть $B = E_A(U)$. В силу (8.2) и (8.6), $A \cong E_A(A_A) \cong B_n$. В силу (13.8), $B/J(B) = D$ является алгеброй с делением. В частности, B обладает единственным, с точностью до изоморфизма, неприводимым модулем. Положим $J = J(B)$. Тогда $J(A) \cong J_n$.

Пусть K — расширение поля F, M — некоторый B_K-модуль. Тогда nM превращается в A_K-модуль обычным способом. Обозначим его через $\tilde{M}$. Тогда $\tilde{M}_{B_K} \cong nM$. Значит, если M неразложим, то каждое неразложимое слагаемое модуля $\tilde{M}$ имеет K-размерность не меньше $\dim_K M$. Следовательно, существует целое число, ограничивающее сверху K-размерность каждого неразложимого B_K-модуля.

Положим $\bar{B} = B/J^2$. Пусть $\bar{y}$ обозначает образ $y \in B$ в $\bar{B}$. Тогда $\bar{J}$ является D-модулем. Пусть $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ — D-базис $\bar{J}$. Тогда $\bar{x}_i \bar{x}_j = 0$ для всех i, j. Покажем сначала, что $r \leqslant 1$.

Поскольку $A \cong B_n$, то B и $\bar{B}$ удовлетворяют тем же условиям, что и A. Тогда в силу условий (I) и (II), существует такое конечное расширение K поля F, что $\bar{B}_K = \oplus_{i=1}^t B^{(i)}$, $J(\bar{B})_K \cong J(\bar{B}_K) \cong \oplus_{i=1}^t J(B^{(i)})$ и $B^{(i)}/J(B^{(i)}) \cong K_{n_i}$ при $i = 1, \ldots, t$. Рассуждения первого абзаца, примененные к $B^{(i)}$, влекут, что $B^{(i)} \cong (C^{(i)})_{n_i}$ для некоторой такой $C^{(i)}$, для которой $C^{(i)}/J(C^{(i)}) \cong K$. В силу (16.12) и условия (III), $\dim_K J(C^{(i)}) \leqslant 1$, и потому $\dim_K J(B^{(i)}) \leqslant n_i^2$. Значит,

$$r \dim_F D = \dim_F \bar{J} = \dim_K J(\bar{B})_K \leqslant \sum_{i=1}^t n_i^2 = \dim_F D.$$

Поэтому $r \leqslant 1$, что и утверждалось.

Если $r=0$, доказательство закончено. Предположим, что $r=1$. Пусть $x \in J$, причем $\bar{x}=\bar{x}_1$. Поскольку J нильпотентен, то существует такое целое m, что $x^m=0$, $x^{m-1} \neq 0$.

(i) По определению элемента x, $J=xB+J^2$. Значит, $(J/xB)J=J/xB$. Поэтому по лемме Накаямы (9.8), $J=xB$. Поскольку F-размерность J/J^2 равна F-размерности D, то J/J^2 является одномерным левым D-модулем. Значит, $J=Bx+J^2$, и поэтому $J=Bx$, как и выше. Следовательно, $J^s=Bx^s=x^sB$ для всех s, что и утверждалось.

(ii) B-модуль $Jx^{s-1}/Jx^s \cong J/Jx$, $s=1, \ldots, m$, неприводим, так как его размерность над D равна 1. Значит, B_B — однорядный модуль с композиционным рядом $B_B \supseteq B_Bx \supseteq \ldots \supseteq B_Bx^m=(0)$. В частности, B_Bx^{m-1} неприводим и является цоколем модуля B_B. Аналогично, ${}_BB$ обладает неприводимым цоколем, и потому ${}_B\hat{B}/\mathrm{Rad}({}_B\hat{B})$ неприводим. Существует следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & B_B \\ & & \downarrow \\ {}_B\hat{B} & \to & B_B/J(B)_B \to 0 \end{array}$$

Поскольку B_B проективен, то существует эпиморфизм f: $B_B \to {}_B\hat{B}$. Так как $\dim_F B_B = \dim_F {}_B\hat{B}$, то f — мономорфизм. Значит, $B_B \cong {}_B\hat{B}$.

Поскольку $A \cong B_n$, то $A_A \cong {}_A\hat{A}$. В силу (14.8), A является фробениусовой алгеброй. Так как $A_A \cong nU$, то, ввиду (15.5), U инъективен. Кроме того, $J(A)^s=Ax^s=x^sA$ для всех s и $J(A)x^{s-1}/J(A)x^s \cong A/J(A)$ является прямой суммой n экземпляров единственного неприводимого A-модуля. Значит, U однорядный с композиционным рядом $U \supseteq Ux \supseteq \ldots \supseteq Ux^m=(0)$.

Докажем индукцией по m, что A однорядна. Если $m=0$, то $A \cong D_m$ полупроста и результат очевиден. Пусть V — конечно порожденный неразложимый A-модуль. Если $Vx^{m-1}=(0)$, то V является A/Ax^{m-1}-модулем, и, значит, V однорядный по индукции. Предположим, что $Vx^{m-1} \neq (0)$. Тогда существует такой $v \in V$, что $vx^{m-1} \neq 0$. Существует следующая точная последовательность:

$$0 \to W \to A_A \xrightarrow{f} vA \to 0.$$

Так как $vx^{m-1} \neq (0)$, то цоколь A_A не лежит в ядре f. Значит, существует такое прямое слагаемое U_1 модуля A_A, что цоколь модуля U_1 не лежит в ядре f. Так как $U_1 \cong U$ обладает неприводимым цоколем, то $U_1 \cong f(U_1)$. Значит, vA содержит подмодуль, изоморфный U, и потому V содержит подмодуль, изоморфный U. Так как U инъективен, то $U \mid V$. Так как V неразложим, то $V \cong U$ однорядный.

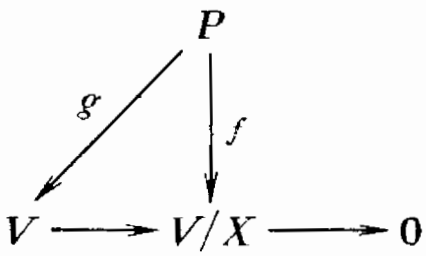
Оставшиеся утверждения теоремы являются непосредственными следствиями этого факта. □

На следующий результат, принадлежащий Т. Накаяме, мое внимание обратил Д. Барри.

Теорема 16.14. *Предположим, что каждый неразложимый проективный и инъективный A-модуль однорядный. Тогда A — однорядная алгебра.*

Доказательство. Пусть V — некоторый A-модуль. Докажем индукцией по $\dim_F V$, что V является прямой суммой однорядных модулей. Если $\dim_F V=1$, то утверждение очевидно. Предположим, что $\dim_F V>1$.

Пусть W — однорядный подмодуль модуля V, причем размерность $\dim_F W$ — наибольшая из возможных. Пусть X — подмодуль модуля V, максимальный относительно свойства: $W\cap X=(0)$. Из максимальности X следует, что V/X обладает неприводимым цоколем. Значит, V/X изоморфен подмодулю неразложимого инъективного A-модуля и потому является однорядным. Пусть $L\cong(V/X)/\mathrm{Rad}(V/X)$, а P — такой неразложимый проективный A-модуль, для которого $P/\mathrm{Rad}\,P\cong L$. Тогда существует эпиморфизм $f\colon P\to V/X$, и значит, существует отображение $g\colon P\to V$, относительно которого коммутативна следующая диаграмма:



Следовательно, $g(P)$ является однорядным подмодулем модуля V. Поскольку $W\cap X=(0)$, то W изоморфен подмодулю модуля V/X. Максимальность $\dim_F W$ влечет, что $g(P)\cong V/X\cong W$. Поэтому $g(P)\cap X=(0)$ и $V=g(P)+X$. Следовательно, $V=g(P)\oplus X$, и результат теперь следует по индукции. □

Если S — подмножество из A, положим

$$l(S)=\{a\mid aS=0\},\quad r(S)=\{a\mid Sa=0\}.$$

Тогда $l(S)$, $r(S)$ являются соответственно левым и правым аннуляторами множества S. Очевидно, $l(S)$ — левый идеал, а $r(S)$ — правый идеал.

Лемма 16.15. *Пусть A — фробениусова алгебра, t — невырожденный элемент из $\mathrm{Hom}_F(A, F)$. Тогда:*

(i) *если N — левый идеал алгебры A, то $r(N)=\{a\mid at\in N^{\perp}\}$, $l(r(N))=N$ и $\dim_F N+\dim_F r(N)=\dim_F A$;*

(ii) *если N — правый идеал алгебры A, то $l(N)=\{a\mid ta\in N^{\perp}\}$, $l(r(N))=N$ и $\dim_F N+\dim_F l(N)=\dim_F A$.*

Доказательство. Пусть N — левый идеал алгебры A. По определению, $r(N)=\{a\mid Na=0\}$. Поскольку Na — левый идеал для

любого $a\in A$ и t невырожден, то

$$r(N)=\{a\,|\,(Na)t=0\}=\{a\,|\,(N)at=0\}=\{a\,|\,at\in N^{\perp}\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\dim_F N+\dim_F r(N)=\dim_F A$. Аналогично, если N — правый идеал, то $l(N)=\{a\,|\,Na\in N^{\perp}\}$ и $\dim_F N+\dim_F l(N)=\dim_F A$. Значит, если N — левый идеал, то $r(N)$ является правым идеалом, и потому $\dim_F N=\dim_F l(r(N))$. Поскольку $N\subseteq l(r(N))$, то $N=l(r(N))$. Утверждение для правых идеалов доказывается аналогично. □

Следствие 16.16. *Предположим, что A — симметрическая алгебра. Пусть I — идеал алгебры A. Тогда $r(I)=l(I)$.*

Доказательство. Пусть t — симметрический невырожденный элемент из $\mathrm{Hom}_F(A, F)$. Тогда, в силу (16.15),

$$r(I)=\{a\,|\,t(aI)=0\}=\{a\,|\,t(aI)=0\}=l(I).\ \square$$

Для симметрической алгебры A и ее идеала I положим $\mathrm{Ann}(I)=r(I)=l(I)$. В этом случае $\mathrm{Ann}(I)$ является аннулятором I, если I рассматривать как подмодуль модуля A_A или как левый подмодуль левого модуля ${}_AA$.

Два следующих результата принадлежат Накаяме [1939] и [1941]. См. также Цушима [1971а].

Теорема 16.17. *Пусть I — идеал алгебры A. Предположим, что обе алгебры A и A/I являются фробениусовыми. Пусть s, t — невырожденные элементы из $\mathrm{Hom}_F(A/I, F)$, $\mathrm{Hom}_F(A, F)$ соответственно. Тогда существует такой элемент $c\in A$, что $s=ct$, и при этом для любого такого c окажется $r(I)=cA$. Если, кроме того, A и A/I — симметрические алгебры, а s, t — симметрические элементы, то любой такой c лежит в центре алгебры A.*

Доказательство. Поскольку t невырожденный, существует такой $c\in A$, что $s=ct$. Значит, $(Ic)t=Is=(0)$, и поэтому $Ic=(0)$. Следовательно, $IcA=(0)$ и $cA\subseteq r(I)$.

Если $x\in l(cA)$, то $xcA=(0)$, и поэтому $xs=(xc)t=0$. Значит, $l(cA)s=(0)$. Так как s — невырожденный элемент из $\mathrm{Hom}_F(A/I, F)$, то $l(cA)\subseteq I$. Поэтому, по (16.15), $r(I)\subseteq r(l(cA))=cA$. Следовательно, $r(I)=cA$.

Предположим теперь, что s и t оба симметрические. Тогда для всех a, $b\in A$

$$(abc)t=(ab)s=(ba)s=(bac)t=(acb)t.$$

Значит, $(a(bc-cb))t=0$ для всех a, $b\in A$, и потому $A(bc-cb)$ лежит в ядре гомоморфизма t. Поэтому $bc-cb=0$ для всех $b\in A$, т. е. c лежит в центре алгебры A. □

Лемма 16.18. *Предположим, что A — симметрическая алгебра. Пусть $A_A=\oplus e_iA_A$, где $\{e_i\}$ — множество попарно ортогональных примитивных идемпотентов. Тогда каждый из e_iA_A содержит единственный минимальный правый идеал N_i и $\mathrm{Ann}(J(A))=\oplus N_i$.*

Доказательство. В силу (16.8), каждый из e_iA_A содержит единственный минимальный правый идеал N_i. Поскольку N_i — неприводимый A-модуль, $N_iJ(A)=(0)$ для каждого i. Значит, $\oplus N_i\subseteq \mathrm{Ann}(J(A))$. В силу (16.8), $\dim_F e_iJ(A)+\dim_F N_i=\dim_F e_iA_A$. Так как $J(A)=\oplus e_iJ(A)$, то $\dim_F J(A)+\dim_F(\oplus N_i)=\dim_F A$. Результат теперь следует из (16.15) и (16.16). □

§ 17. Алгебры над полными локальными областями

На протяжении этого параграфа будем применять следующие обозначения.

R — область целостности, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) R удовлетворяет ACC, а $R/J(R)$ удовлетворяет DCC;

(ii) R полна;

(iii) $J(R)=(\pi)$ является главным идеалом.

В силу (9.10) и (12.7), R — область главных идеалов, а локальное кольцо $R/(\pi)$ является полем. Значит, либо R — полное дискретно нормированное кольцо, либо $\pi=0$ и R — поле. В последнем случае большинство результатов настоящего параграфа тривиализуется.

Для наших целей наиболее важными примерами колец R, удовлетворяющих перечисленным условиям, являются кольца следующего типа. Пусть p — простое рациональное число, R_0 — кольцо целых в конечном расширении поля p-адических чисел, а R — кольцо целых в пополнении неразветвленного расширения поля частных кольца R_0.

K — поле частных кольца R.

A — конечно порожденная R-свободная R-алгебра.

Пусть V есть A-модуль, $v\in V$. Тогда $\bar{v}$ — образ v в $\bar{V}=V/(\pi)V$. Аналогично, $\bar{R}=R/(\pi)$, $\bar{A}=A/(\pi)A$. Очевидно, $\bar{V}$ является $\bar{A}$-модулем, и если V — конечно порожденный A-модуль, то $\bar{V}$ — конечно порожденный $\bar{A}$-модуль.

Если S — коммутативная (не обязательно конечно порожденная) R-алгебра, то $A_S=A\otimes_R S$ и $V_S=V\otimes_R S$ для любого A-модуля V. Разумеется, A_S — конечно порожденная S-алгебра, а V_S является A_S-модулем. Если V — конечно порожденный A-модуль, то V_S — конечно порожденный A_S-модуль. Особую важность представляет случай $S=K$. Если A-модуль V R-свободен, то, как правило, V будем отождествлять с $V\otimes_R R\subseteq V\otimes_R K$.

R-модуль V называется модулем *без кручения*, если из $rv=0$, $r\in R$, $v\in V$, следует, что $r=0$ или $v=0$. Подмодуль W R-модуля V называется *чистым подмодулем*, если $(r)W=W\cap(r)V$ для любого $r\in R$.

То обстоятельство, что R является областью главных идеалов, делает возможным применение «основной теоремы об абелевых группах». Сформулируем некоторые ее следствия без доказательства.

Лемма 17.1. *Пусть V — конечно порожденный R-модуль.*

(i) *V свободен тогда и только тогда, когда V — модуль без кручения.*

(ii) *V проективен тогда и только тогда, когда он свободен.*

(iii) *Подмодуль W модуля V является чистым тогда и только тогда, когда $W \mid V$.*

(iv) *Эпиморфизм V на V является автоморфизмом.*

Лемма 17.2. *Пусть V — конечно порожденный свободный R-модуль, W — подмодуль модуля V. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *W — чистый подмодуль модуля V;*

(ii) $(\pi)W = (\pi)V \cap W$;

(iii) $(W+(\pi)V)/(\pi)V = W/(\pi)W$;

(iv) *образ модуля W в $\bar{V}$ изоморфен $\bar{W}$.*

(v) *V/W свободен.*

Если V есть A-модуль, а W — подмодуль модуля V, то W — модуль *без кручения* или *чистый модуль*, если таковым является W, рассматриваемый как R-подмодуль R-модуля V.

Теорема 17.3. *Отображение, переводящее a в $\bar{a}$, устанавливает биекцию между множествами центральных идемпотентов алгебр A и $\bar{A}$. Если e — центральный идемпотент алгебры A, то e является примитивным центральным идемпотентом тогда и только тогда, когда $\bar{e}$ является примитивным центральным идемпотентом.*

Доказательство. Непосредственно следует из (12.9). □

Следствие 17.4. *Существует биекция $B \to \bar{B}$ между блоками алгебры A и блоками алгебры $\bar{A}$, где $B = B(e)$ для примитивного центрального идемпотента e алгебры A, $\bar{B} = B(\bar{e})$. Если V есть A-модуль, $V \in B$, то $\bar{V} \in \bar{B}$. Если W есть $\bar{A}$-модуль, $W \in \bar{B}$, то W, рассматриваемый как A-модуль, лежит в B.*

Доказательство. Первое утверждение следует из (17.3), если положить $\overline{B(e)} = B(\bar{e})$. Если $V \in B(e)$, то $Ve = V$ и $(\pi)Ve = (\pi)V$. Значит, $\bar{V}\bar{e} = \overline{Ve} = \bar{V}$ и $\bar{V} \in B(\bar{e})$. Если $W \in B(e)$, то $We = W\bar{e} = W$, и потому $W \in B(e)$. □

Лемма 17.5. *Пусть L — конечно порожденный A_K-модуль. Тогда существует такой конечно порожденный R-свободный A-модуль V, что $V_K = L$.*

Доказательство. Рассмотрим K-базис $\{v_i\}$ модуля L и R-базис $\{a_i\}$ алгебры A. Пусть, далее, V есть R-модуль, порожденный $\{v_i a_j\}$. Тогда $L = V_K$ и V — конечно порожденный A-модуль. Модуль V R-свободен, поскольку он без кручения. □

Лемма 17.6. *Пусть P — конечно порожденный проективный A-модуль, а V — конечно порожденный R-свободный A-модуль. Тогда $\mathrm{Hom}_A(P, V)$ является R-свободным R-модулем и $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{P}, \bar{V}) \cong \overline{\mathrm{Hom}_A(P, V)}$. Если, кроме того, $\mathrm{rank}_R\{\mathrm{Hom}_A(P, V)\} = d$, то $I_{\bar{R}}(\bar{P}, \bar{V}) = d = I_K(P_K, V_K)$.*

Доказательство. В силу (13.1), можно предполагать, что $P = eA$ для некоторого примитивного идемпотента e из A. В силу (8.2), $\mathrm{Hom}_A(eA, V) \cong Ve$ R-проективен и $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{e}\bar{A}, \bar{V}) \cong \bar{V}\bar{e} = \overline{Ve}$. Значит, $d = \mathrm{rank}_R Ve$ и

$$I_K(P_K, V_K) = \dim_K V_K e = \mathrm{rank}_R Ve = \dim_{\bar{R}} \overline{Ve} = I_{\bar{R}}(\bar{P}, \bar{V}). \quad \square$$

Теорема 17.7 (Брауэр). *Пусть V, W — такие конечно порожденные R-свободные A-модули, что $V_K \cong W_K$. Тогда $\bar{V} \leftrightarrow \bar{W}$.*

Доказательство. Пусть e — примитивный идемпотент из A, а m, n — кратности $eA/eJ(A)$ в $\bar{V}$, $\bar{W}$ соответственно. Тогда, в силу (16.4) и (17.6),

$$mI(eA/eJ(A),\ eA/eJ(A)) = I_{\bar{R}}(\bar{e}\bar{A},\ \bar{V}) = I_K(eA_K,\ V_K) =$$
$$= I_K(eA_K,\ W_K) = I_{\bar{R}}(\bar{e}\bar{A},\ \bar{W}) = nI(eA/eJ(A),\ eA/eJ(A)).$$

Значит, $m = n$. Поскольку e — произвольный примитивный идемпотент, то отсюда следует результат. □

Теорема 17.7 имеет первостепенную важность для всего предмета. Мы дадим другое ее доказательство, которое не зависит от большей части предшествующей теории. См. Серр. [1977, p. 125] (с. 106 русского перевода).

Альтернативное доказательство теоремы 17.7. Поскольку $V_K \cong W_K$, можно предполагать, что $V_K = W_K$, и после замены W на модуль $\dot{W}$, умноженный на скаляр, можно считать, что $W \subseteq V$. Значит, существует такое целое $n > 0$, что $\pi^n V \subseteq W \subseteq V$. Покажем индукцией по n, что если $\pi^n V \subseteq W \subseteq V$, то $\bar{V} \leftrightarrow \bar{W}$.

Предположим, что $n = 1$. Тогда $\pi W \subseteq \pi V \subseteq W \subseteq V$. Значит, существует точная последовательность

$$0 \to \pi V/\pi W \to W/\pi W \to V/\pi V \to V/W \to 0.$$

Пусть $T = V/W$. Тогда $T \cong \pi V/\pi W$. Поэтому существует точная последовательность

$$0 \to T \to \bar{W} \to \bar{V} \to T \to 0.$$

Отсюда следует, что $\bar{V} \to \bar{W}$.

Продолжим рассуждения по индукции. Предположим, что $n > 1$. Положим $M = \pi^{n-1} V + W$. Тогда $\pi^{n-1} V \subseteq M \subseteq V$ и $\pi M \subseteq W \subseteq M$. По индукции, $\bar{M} \leftrightarrow \bar{V}$ и $\bar{M} \leftrightarrow \bar{W}$. Значит, $\bar{V} \leftrightarrow \bar{W}$. □

В оставшейся части параграфа будем применять следующие обозначения.

$U_1, \ldots, U_k$ — полное множество представителей классов изоморфизма главных неразложимых A-модулей. Положим $L_i = U_i/\operatorname{Rad} U_i$, $i = 1, \ldots, k$, где $\operatorname{Rad} U_i$ — радикал модуля U_i. Тогда, в силу (13.7), $L_1, \ldots, L_k$ — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых $\bar{A}$-модулей.

$X_1, \ldots, X_n$ — такое множество R-свободных A-модулей, что $(X_1)_K, \ldots, (X_n)_K$ — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых A_K-модулей. Очевидно, каждый из X_s неразложим. Эти модули существуют ввиду (17.5).

Пусть $\bar{X} \leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} d_{sj} L_j$, $s = 1, \ldots, n$. Неотрицательные целые числа d_{ij} называются *числами разложения алгебры A*. В силу (17.7), они не зависят от выбора X_s. Матрица $D = (d_{sj})$ размера $n \times k$ называется *матрицей разложения алгебры A*. Если e — примитивный центральный

идемпотент из A, то матрица разложения алгебры eAe называется *матрицей разложения блока* B, где $B=B(e)$.

Теорема 17.8 (Брауэр). *Предположим, что алгебра A_K полупростая. Тогда*

$$(U_i)_K \cong \bigoplus_{s=1}^{n} \frac{I_{\bar{R}}(L_i, L_i)}{I_K((X_s)_K, (X_s)_K)} d_{si}(X_s)_K.$$

Кроме того, если $\{c_{ij}\}$ — инварианты Картана алгебры A, то

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} \frac{I_R(L_i, L_j)}{I_K((X_s)_K, (X_s)_K)} d_{si}d_{sj}.$$

Доказательство. Поскольку алгебра A_K полупростая, $(U_i)_K \cong \oplus_{s=1}^{n} \tilde{d}_{si}(X_s)_K$. В силу (16.4) и (17.7), имеем

$$I_{\bar{R}}(L_i, L_j)d_{si}=I_{\bar{R}}(\bar{U}_i, \bar{X}_s)=I_K((U_i)_K, (X_s)_K)=\tilde{d}_{si}I_K((X_s)_K, (X_s)_K).$$

Это доказывает первое утверждение. Второе является непосредственным следствием определения инвариантов Картана. □

Следствие 17.9. *Предположим, что алгебра A_K полупростая. Пусть K — поле разложения алгебры A_K и $\bar{R}$ — поле разложения алгебры $\bar{A}$. Тогда $(U_i)_K \cong \oplus_{s=1}^{n} d_{si}(X_s)_K$ и $C=D'D$, где C — матрица Картана алгебры $\bar{A}$. Если $B_1, \ldots, B_m$ — все блоки алгебры A, а $D^{(t)}$, $C^{(t)}$ — матрица разложения и матрица Картана блока B_t соответственно, то после подходящей перенумерации строк и столбцов*

$$D=\begin{pmatrix} D^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D^{(m)} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D^{(t)'}D^{(t)}=C^{(t)}.$$

Кроме того, не существует такой перенумерации строк и столбцов, что

$$D^{(t)}=\begin{pmatrix} D_1^{(t)} & 0 \\ 0 & D_2^{(t)} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из (17.8). В силу (7.8), $d_{si}=0$, если X_s и L_i лежат в разных блоках. Последнее утверждение следует из (16.7). □

Лемма 17.10. *Предположим, что* $\det C \neq 0$, *где C — матрица Картана алгебры $\bar{A}$. Пусть P, Q — конечно порожденные проективные A-модули. $P \cong Q$ тогда и только тогда, когда $P_K \cong Q_K$.*

Доказательство. Если $P \cong Q$, то, очевидно, $P_K \cong Q_K$. Обратно, предположим, что $P_K \cong Q_K$. Пусть $P=\oplus_{i=1}^{k} a_i U_i$, $Q=\oplus_{i=1}^{k} b_i U_i$. Тогда, в силу (16.4) и (17.6),

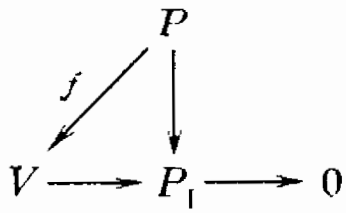
$$\sum_{i=1}^{k} a_i c_{ij} I_R(L_i, L_j)=I_{\bar{R}}(\bar{U}_j, \bar{P})=I_K((U_j)_K, P_K)=$$

$$=I_K((U_j)_K, Q_K)=\sum_{i=1}^{k} b_i c_{ij} I_R(L_i, L_j)$$

для $j=1, \ldots, k$. Значит, $\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)c_{ij}=0$ для всех j. Отсюда $a_i=b_i$ для всех i, так как $\det C\neq 0$. □

Лемма 17.11. *Предположим, что алгебра A является фробениусовой. Пусть V — такой конечно порожденный R-свободный A-модуль, что $\bar{V}=P_1\oplus W_1$, где P_1 — проективный $\bar{A}$-модуль. Тогда существует такой конечно порожденный проективный A-модуль P и такой конечно порожденный R-свободный A-модуль W, что $V\cong P\oplus W$, $\bar{P}\cong P_1$ и $\bar{W}\cong W_1$.*

Доказательство. В силу (13.7), существует такой конечно порожденный проективный A-модуль P, что $\bar{P}\cong P_1$. Поскольку P проективен, существует коммутативная диаграмма



Тогда образ $f(P)$ в $\bar{V}$ равен $\overline{f(P)}$. Значит, в силу (17.2), $f(P)$ является прямым слагаемым V как R-модуля, а f — изоморфизмом. Поскольку P, в силу (15.5), R-инъективен, то $P\,|\,V$, и потому $V\cong P\oplus W$ для подходящего A-модуля W. Значит, $\bar{P}\oplus\bar{W}\cong\bar{V}=P_1\oplus W_1$, и поэтому $\bar{W}\cong W_1$ по свойству однозначности разложения. □

Теорема 17.12 (Томпсон [1967b]). *Пусть U — главный неразложимый A-модуль, V — такой A_K-модуль, что $V\,|\,U_K$. Тогда существует такой R-свободный A-модуль W, что $W_K\cong V$ и $\bar{W}/\operatorname{Rad}\bar{W}$ неприводим, где $\operatorname{Rad}\bar{W}$ — радикал модуля W. В частности, $\bar{W}$ неразложим. Если $\bar{A}$ — фробениусова алгебра, то существует также R-свободный A-модуль W', такой, что $W'_K\cong V$ и цоколь модуля W' неприводим.*

Доказательство. Можно предполагать, что $U_K=V\oplus M$. Положим $L=U\cap M$ и $W=U/L$. Легко проверить, что L является чистым подмодулем модуля U. Значит, $\bar{L}\subseteq\bar{U}$ и $\bar{U}/\bar{L}\cong\bar{W}$. Следовательно, в силу (13.6), $\bar{W}/\operatorname{Rad}\bar{W}$ неприводим.

Если $\bar{A}$ — фробениусова алгебра, положим $W'=U\cap V$. Тогда W' является чистым подмодулем модуля U, и потому $\bar{W}'\subseteq U$. Значит, в силу (14.8), цоколь модуля $\bar{W}'$ неприводим. □

Следствие 17.13. *Предположим, что алгебра A_K полупростая. Пусть V — неприводимый A_K-модуль. Тогда существует такой R-свободный A-модуль X, что $X_K\cong V$ и $\bar{X}$ неразложим.*

Доказательство. Так как $V\,|\,U_K$ для некоторого главного неразложимого A-модуля U, то результат следует из (17.12). □

§ 18. Расширение областей

В этом параграфе будем применять те же обозначения, что и в параграфе 17.

Область целостности S, содержащая R, называется *расширением* R, если выполнены следующие условия:

(i) S — область главных идеалов и локальное кольцо;
(ii) S свободна как R-модуль;
(iii) $J(S)^e = J(R)S = (\pi)S$ для некоторого целого e.

Если S — расширение R, то e называется *индексом ветвления* области S. Область S называется *неразветвленным расширением* R, если ее индекс ветвления равен 1. Заметим, что если S — расширение R, то $S/J(S)$ является полем, расширяющим поле $\bar{R}$.

Если R — поле или, что то же самое, если $\pi = 0$, то расширение области R является просто полем, содержащим R. В этом случае все его расширения неразветвленные. Если S — расширение R и S конечно порождена как R-алгебра, то S — *конечное расширение* R.

Если L — конечное расширение K, то целое замыкание R в L является конечным расширением R. Поэтому, если S_1 и S_2 — конечные расширения R, то существует такое конечное расширение S кольца R, что $S_i \subseteq S$, $i = 1, 2$.

Лемма 18.1. *Пусть B — подкольцо алгебры A, причем $R \subseteq B$. Предположим, что A_B является конечно порожденным свободным B-модулем, а ${}_BA$ — конечно порожденным свободным левым B-модулем. Пусть S — расширение R, V — конечно порожденный B-проективный A-модуль. Тогда V_S — конечно порожденный B_S-проективный A_S-модуль.*

Доказательство. Если $V \mid V_B \underset{B}{\otimes} {}_BA_A$, то $V_S \mid V_{B_S} \underset{B_S}{\otimes} {}_{B_S}(A_S)_{A_S}$. Результат теперь следует из (4.8). □

Следующий результат, который в какой-то степени контрастирует с (17.12) и (17.13), показывает, что расширения появляются сами по себе естественным образом. См. Фейт [1967b].

Лемма 18.2. *Пусть M — конечно порожденный R-свободный A-модуль, и пусть $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = \bar{M}$ — цепочка $\bar{A}$-модулей. Положим $W_i = V_i / V_{i-1}$. Пусть S — расширение R с индексом ветвления $e \geqslant n$. Пусть L — поле частных кольца S. Тогда существует такой S-свободный A_S-модуль M', что $M'_L \cong M_L$ и*

$$M'/J(S)M' \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (W_i)_{S/J(S)}.$$

Доказательство. Для $i = 1, \ldots, n$ пусть $d_i = \dim_{\bar{R}} W_i$. Существует такой R-базис $\{m_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant d_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ модуля M, что для каждого $k = 1, \ldots, n$ множество $\{\bar{m}_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant d_i;\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ является $\bar{R}$-базисом V_K. Пусть $(\Pi) = J(S)$. Тогда $(\Pi)^e = (\pi)S$ и $\{m_{ij}\}$ является S-базисом M_S. Определим элементы m'_{ij} из M_S, полагая $m'_{ij} = \Pi^{i-1} m_{ij}$ для всех i, j. Пусть M' есть A_S-модуль, порожденный $\{m'_{ij}\}$. Очевидно, $M' \subseteq M_S$ и $M'_L = M_L$. Если $a \in A$, то существуют такие $r_{ijkt} \in R$, что для каждого k

$$m_{kt}a \equiv \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} r_{ijkt} m_{ij} \pmod{(\pi)M}.$$

Значит, для $a \in A_S$ существуют такие $s_{ijkt} \in S$, что для каждого k

$$m_{kt}a \equiv \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} s_{ijkt} m_{ij} \pmod{(\Pi)^n M_S}.$$

Поэтому

$$m'_{kt}a \equiv \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} s_{ijkt} \Pi^{k-i} m'_{ij} \pmod{(\Pi)^k M'}$$

и, значит,

$$m'_{kt}a \equiv \sum_{j=1}^{d_k} s_{kjkt} m'_{kj} \pmod{(\Pi) M'}.$$

Отсюда следует, что $M'/J(S)M' \cong \oplus_{i=1}^{n} (W_i)_{S/J(S)}$. □

Следствие 18.3. *Предположим, что* $\pi \neq 0$. *Пусть* M — *конечно порожденный* R-*свободный* A-*модуль. Тогда существуют такое конечное расширение* S *кольца* R *с полем частных* L *и такой* S-*свободный* A_S-*модуль* M', *что* $M'_L \cong M_L$ *и* $\bar{M}' = M'/J(S)M'$ *вполне приводим.*

Доказательство. Для любого натурального n положим $L = K(\sqrt[n]{\pi})$ и обозначим через S R-алгебру, порожденную элементом $\sqrt[n]{\pi}$ в L. Тогда S — конечное расширение R с индексом ветвления n. Результат теперь следует из (18.2). □

Лемма 18.4. *Пусть* V, W — *конечно порожденные* A-*модули,* S — *расширение* R. *Тогда* $\mathrm{Hom}_A(V, W) \otimes_R S \cong \mathrm{Hom}_{A_S}(V_S, W_S)$ *и* $E_A(V) \otimes_R S \cong E_{A_S}(V_S)$.

Доказательство. Пусть $\{s_i\}$ есть R-базис S. Тогда каждый элемент из $\mathrm{Hom}_A(V, W) \otimes_R S$ можно записать в виде $\sum f_i \otimes s_i$, где $f_i \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$. В этой записи f_i определены однозначно. Зададим g: $\mathrm{Hom}_A(V, W) \otimes_R S \to \mathrm{Hom}_{A_S}(V_S, W_S)$, полагая $g(f \otimes s_i)(v \otimes s) = f(v) \otimes s_i s$. Тогда g, очевидно, является S-гомоморфизмом, а в случае $V = W$ — кольцевым гомоморфизмом.

Если $g(\sum f_i \otimes s_i) = 0$, то $\sum f_i(v) \otimes s_i = 0$ для всех $v \in V$. Значит, $f_i = 0$ для всех i. Следовательно, g является мономорфизмом.

Пусть $h \in \mathrm{Hom}_{A_S}(V_S, W_S)$. Для каждого i определим f_i, полагая $h(v \otimes 1) = \sum f_i(v) \otimes s_i$. Поскольку V конечно порожден, существует лишь конечное число ненулевых f_i. Очевидно, $f_i \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$ для каждого i и $g(\sum f_i \otimes s_i) = h$. Значит, g — эпиморфизм. □

Если V — неприводимый A-модуль, то $V = \bar{V}$ можно рассматривать как $\bar{A}$-модуль. Модуль V является *абсолютно неприводимым*, если для каждого неразветвленного расширения S кольца R модуль V_S — неприводимый A_S-модуль.

Лемма 18.5. *Пусть* V — *неприводимый* A-*модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $V = \bar{V}$ — *абсолютно неприводимый* $\bar{A}$-*модуль;*

(ii) V — *абсолютно неприводимый* A-*модуль;*

(iii) *для каждого конечного неразветвленного расширения* S *кольца* R V_S *является неприводимым* A_S-*модулем;*

(iv) $E_A(V) \cong \bar{R}$;

(v) $\bar{R}$ — *поле разложения модуля* $\bar{V}$.

Доказательство. (i)⇒(iii). Если S — неразветвленное расширение R, то $S/J(S)$ является расширением поля $\bar{R}$ и $V_S = V_{S/J(S)}$.

(ii)⇒(iii). Очевидно.

(iii)⇒(ii). Если $E_A(V) \not\cong \bar{R}$, то существует неприводимый полином $f(t) \in \bar{R}[t]$ со старшим коэффициентом, равным 1, который обладает корнем в $E_A(V) - \bar{R}$. Пусть $f_0(t) \in R[t]$ такой, что старший коэффициент $f_0(t)$ равен 1 и $f_0(t) = f(t)$. Пусть $S = R[a]$, где a — корень $f_0(t)$. Поскольку $S/(\pi)S$ является полем, S — конечное неразветвленное расширение R и $f(t)$ обладает корнем в $\bar{S}$. Значит, $E_A(V) \otimes_R S$ не является телом. Поэтому, в силу (18.4), $E_{A_S}(V_S)$ не является телом и потому, ввиду (8.1), V_S приводим.

(iv)⇒(v). Очевидно следует из определения поля разложения.

(v)⇒(i). Пусть $U_1, \ldots, U_R$ — полное множество представителей классов изоморфизма главных неразложимых $\bar{A}$-модулей. В силу (16.4), существует такое j, что $I_{\bar{R}}(U_j, V) = 1$. Пусть F — расширение поля $\bar{R}$. Тогда, в силу (18.4), $I_F((U_j)_F, V_F) = 1$.

Пусть $U'_1, \ldots, U'_m$ — полное множество представителей классов изоморфизма главных неразложимых $\bar{A}_F$-модулей. Поскольку $(U_j)_F \mid \bar{A}_F$, существует такое i, что $I_F(U'_i, V_F) = 1$. Значит, в силу (16.4), V_F неприводим. □

A-модуль V *абсолютно неразложим*, если для любого конечного расширения S кольца R V_S — неразложимый A_S-модуль.

Лемма 18.6. *Пусть V — конечно порожденный неразложимый A-модуль и $E = E_A(V)$. Если $E/J(E) \cong \bar{R}$, то V абсолютно неразложим. Если $\bar{R}$ алгебраически замкнуто, то каждый конечно порожденный неразложимый A-модуль абсолютно неразложим.*

Доказательство. Поскольку $E/J(E)$ — тело, которое является конечно порожденной $\bar{R}$-алгеброй, второе утверждение следует из первого.

Предположим, что $E/J(E) \cong \bar{R}$. Пусть S — конечное расширение R. По условию, $J(R)S \subseteq J(S) \subseteq J(E_S)$. Значит, $J(R)E_S \subseteq J(E_S)$. Поскольку $J(E)_S/J(R)E_S$ является нильпотентным идеалом в $E_S/J(R)E_S$, то $J(E)_S \subseteq J(E_S)$. Так как $E_S/J(E)_S \cong S/J(R)S$, то $E_S/J(E_S) \cong S/J(S)$ обладает единственным идемпотентом. Значит, в силу (12.3), E_S обладает единственным идемпотентом, и поэтому, по (18.4), $E_{A_S}(V_S)$ обладает единственным идемпотентом. Следовательно, V_S неразложим. □

Лемма 18.7. *Пусть V — конечно порожденный неразложимый A-модуль. Существует такое неразветвленное расширение S кольца R, что $V_S = \oplus_{i=1}^n V_i$, где каждый из V_i — абсолютно неразложимый A_S-модуль и $E_{A_S}(V_i)/J(E_{A_S}(V_i)) \cong \bar{S}$.*

Доказательство. Если S — конечное неразветвленное расширение R, то V_S является прямой суммой $n(S)$ ненулевых неразложимых A_S-модулей для некоторого целого $n(S)$, $1 \leqslant n(S) < \dim_R(\bar{V})$. Выберем S так, чтобы $n(S)$ было максимальным. Очевидно, каждая компонента модуля V_S остается неразложимой после ее тензорного умножения на произвольное конечное неразветвленное расширение кольца S. Заменяя R на S, можно считать, что V_S неразложим для любого конечного неразветвленного расширения S кольца R.

Для произвольного конечного неразветвленного расширения S кольца R положим $D(S)=E_{A_S}(V_S)/J(E_{A_S}(V_S))$. Тогда $D(S)$ — конечномерная $\bar{S}$-алгебра, являющаяся телом. Если T — конечное неразветвленное расширение кольца S, то, по условию, $J(S)T\subseteq J(T)\subseteq J(E_{A_T}(V_T))$, и потому $J(S)E_{A_T}(V_T)\subseteq J(E_{A_T}(V_T))$. Тогда, поскольку $J(E_{A_S}(V_S))_T/J(S)E_{A_T}(V_T)$ нильпотентен, $D(T)$ является гомоморфным образом алгебры $D(S)\otimes_S T$.

Выберем конечное неразветвленное расширение S кольца R так, чтобы $\dim_{\bar{S}} D(S)$ была минимальной. Если $D(S)\neq\bar{S}$, то существует неприводимый полином $f(t)\in\bar{S}[t]$ со старшим коэффициентом, равным 1, степени не меньше двух и обладающий корнем в $D(S)$. Выберем $f_0(t)\in S[t]$ так, чтобы старший коэффициент $f_0(t)$ был равен 1 и $\overline{f_0(t)}=f(t)$. Пусть $T=S[a]$, где a — корень $f_0(t)$. Легко видеть, что T является конечным неразветвленным расширением кольца S. Поскольку $f(t)$ обладает корнем в T, $D(S)\otimes_S T$ не является телом и, значит, $\dim_{\bar{T}} D(T)<\dim_{\bar{S}} D(S)$, вопреки выбору S. Следовательно, $D(S)=\bar{S}$ и, по (18.6), V_S абсолютно неразложим. □

Обратное к первому утверждению из (18.6) ложно. Оно, однако, почти всегда верно; трудности возникают лишь в случае, когда $\bar{R}$ обладает несепарабельными расширениями. Эта ситуация обсуждается у Хупперта [1975]. Там же приведен контрпример, принадлежащий Грину. Следует отметить, что определение Хупперта абсолютной неразложимости отличается от приведенного в тексте. В любом случае, (18.7) важно для приложений.

Лемма 18.8. *Пусть U — главный неразложимый A-модуль, $L=U/\mathrm{Rad}(U)$, где $\mathrm{Rad}(U)$ — радикал модуля U. Модуль L абсолютно неприводим тогда и только тогда, когда $E_A(U)/J(E_A(U))\cong\bar{R}$.*

Доказательство. В силу (13.8), $E_A(L)\cong E_A(U)/J(E_A(U))$. Результат теперь следует из (18.5). □

Следствие 18.9. *Существует такое конечное неразветвленное расширение S кольца R, что $\bar{S}$ является полем разложения алгебры $\bar{A}_S$.*

Доказательство. В силу (18.7), существует конечное неразветвленное расширение S кольца R такое, что $(A_S)_{A_S}=\oplus U_i$, где $E_{A_S}(U_i)/J(E_{A_S}(U_i))\cong\bar{S}$ для каждого i. В силу (18.5) $\bar{S}$ является полем разложения алгебры $\bar{A}_S$. □

§ 19. Представления и следы

Пусть R — коммутативное кольцо, A — конечно порожденная R-свободная R-алгебра. *R-представление* алгебры A или просто *представление* алгебры A — это гомоморфизм алгебр $f\colon A\to E_K(V)$, где V — конечно порожденный R-свободный R-модуль, причем $f(1)=1$.

Если $f\colon A\to E_A(V)$ — представление алгебры A, определим $va=vf(a)$, где $v\in V$, $a\in A$. Тем самым V превращается в A-модуль. Обратно, если V есть R-свободный A-модуль, определим $f\colon A\to E_R(V)$, полагая $vf(a)=va$, где $v\in V$, $a\in A$. Тогда f является R-представлением алгебры

A. Таким образом, существует естественная биекция между представлениями алгебры A и конечно порожденными R-свободными A-модулями. Модуль, соответствующий представлению, называется *модулем представления*. Все прилагательные такого типа, как неприводимый и т. д., будут употребляться по отношению к представлению f, если они употребимы к модулю представления f.

Два представления f_1, f_2 с модулями представлений V_1, V_2 соответственно *эквивалентны*, если V_1 изоморфен V_2. Легко видеть, что f_1 эквивалентно f_2 тогда и только тогда, когда существует R-изоморфизм g: $V_1 \to V_2$, такой, что $f_2 = g^{-1} f_1 g$.

Пусть V — конечно порожденный R-свободный R-модуль с базисом, состоящим из n элементов. В силу (8.6), $E_A(V) \cong R_n$. Тогда представление алгебры A определяет гомоморфизм алгебры A в R_n.

Предположим, что R — область целостности, а f — некоторое R-представление алгебры A с модулем представления V. Определим функцию t_V: $A \to R$, полагая $t_V(a)$ равным следу эндоморфизма $f(a)$, где $f(a) \in R_n$ [1]. Очевидно, t_V не зависит от выбора изоморфизма, отображающего $E_R(V)$ на R_n. Функция t_V называется *функцией следа модуля* V или *функцией следа представления* f.

Легко видеть, что если $V \cong W$, то $t_V = t_W$. Кроме того, если K — поле частных кольца R, то $t_{V_K}(a) = t_V(a)$, где $a \in A$, а V — конечно порожденный R-свободный A-модуль.

Предположим, что R удовлетворяет тем же условиям, что и в § 17. Пусть S — расширение кольца R. Тогда для любого конечно порожденного R-свободного A-модуля V имеем $t_{V_S}(a) = t_V(a)$, где $a \in A$.

На протяжении оставшейся части параграфа F будет обозначать поле, A — конечно порожденную F-алгебру. Все модули предполагаются конечно порожденными.

Принимая эти соглашения, функции следа иногда называют характерами. См., например, Кэртис и Райнер [1962]. Мы, однако, зарезервируем термин «характер» для другого, хотя и близкого понятия, которое будет введено впоследствии.

Теорема 19.1. *Пусть V, W — абсолютно неприводимые A-модули. $V \cong W$ тогда и только тогда, когда $t_V = t_W$.*

Доказательство. Если $V \cong W$, то $t_V = t_W$. Предположим, что $V \cong W$. Пусть I_V, I_W — аннуляторы модулей V, W соответственно. Положим $I = I_V \cap I_W$. Теорему достаточно доказать для алгебры A/I. Поэтому, изменяя обозначения, можно предполагать, что $I = (0)$. Тогда $J(A) = (0)$. Поскольку A имеет два неизоморфных неприводимых модуля, то из теорем Артина — Веддербарна (8.10) и (8.11) получим $A = A_V \oplus A_W \oplus \ldots$, где A_V, A_W — простые кольца, а V, W — точные неприводимые A_V-, A_W-модули соответственно. Поскольку V и W абсолютно неприводимы, из (8.11) следует, что $A_V \cong F_m$ и $A_W \cong F_n$ для подходящих m и n, а изоморфизмы, переводящие A_V в F_m и A_W

[1] Здесь алгебра $E_R(V)$ отождествлена с R_n с помощью изоморфизма $E_R(V) \cong R_n$. — *Примеч. пер.*

в F_n, эквивалентны представлениям с модулями представлений V и W соответственно. Выберем $a \in A_V$ так, чтобы a соответствовала матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ из } F_m.$$

Тогда $t_V(a)=1$ и $t_W(a)=0$. Значит, $t_V \neq t_W$. □

Предположим, что K — конечное расширение Галуа поля F, σ — автоморфизм поля K над F. Тогда σ определяет автоморфизм алгебры A_K, если положить $(a \otimes x)^\sigma = a \otimes x^\sigma$, где $a \in A$, $x \in K$. Этот автоморфизм также будем обозначать через σ. Для A_K-модуля V положим $V^\sigma = \{v_\sigma \mid v \in V\}$, где

$$v_\sigma + w_\sigma = (v+w)_\sigma, \quad v, \ w \in V,$$

$$v_\sigma a^\sigma = (va)_\sigma, \quad v \in V, \ a \in A_K.$$

Очевидно, V^σ является A_K-модулем и $V^{\sigma\tau} \cong (V^\sigma)^\tau$ для автоморфизмов σ, τ поля K над F. Кроме того, $\{t_{V^\sigma}(a)\}^\sigma = t_V(a)$. Значит, $t_{V^\sigma} = t_V^{\sigma^{-1}}$.

Два следующих результата являются, по существу, следствиями теорем Артина — Веддербарна (8.10) и (8.11).

Лемма 19.2. *Пусть L — конечное расширение Галуа поля F, $A = L_n$ для некоторого натурального n. Пусть G — группа Галуа поля L над F. Тогда A обладает единственным, с точностью до изоморфизма, неприводимым модулем W и*

(i) *$A_L \cong \oplus_{\sigma \in G} A_\sigma$, причем $A_\sigma \cong L_n$ для всех $\sigma \in G$;*

(ii) *существует такой неприводимый A_L-модуль M, что $W_L \cong \oplus_{\sigma \in G} M^\sigma$, $\{M^\sigma\}$ — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых A_L-модулей, причем каждый из M^σ абсолютно неприводим; кроме того, если $t_{M^\sigma}(a) = t_{M^\tau}(a)$ для всех $a \in A$, то $\sigma = \tau$.*

Доказательство. Пусть W — неприводимый A-модуль. В силу (8.11), каждый неприводимый A-модуль изоморфен W. Легко видеть, что $\dim_F W = n[L:F]$.

Если $\sigma \in G$, то σ определяет автоморфизм алгебры $A = L_n$ естественным образом. Его мы также будем обозначать через σ.

Пусть $L = F(c)$ и

$$b = \begin{pmatrix} c & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \in A.$$

Пусть U есть n-мерное L-пространство. Для $\sigma \in G$ определим f_σ: $A_L \to E_L(U)$, полагая $u(f_\sigma a) = ua^\sigma$. Тогда каждое из f_σ является абсолютно неприводимым представлением алгебры A_L. Пусть U_σ — модуль этого представления, и пусть $t_\sigma = t_{V^\sigma}$. Тогда $t_\sigma = t_1^\sigma$. Значит, если $\sigma \neq \tau$, то $t_\sigma(b) = c^\sigma \neq c^\tau = t_\tau(b)$. Тогда, ввиду (19.1), $U_\sigma \not\cong U_\tau$ при $\sigma \neq \tau$.

Пусть I — аннулятор модуля $\oplus U_\sigma$. В силу (8.10) и (8.11), $A_L/I=\oplus_{\sigma\in G}A_\sigma$, где U_σ — точный неприводимый A_σ-модуль. Тогда $A_\sigma\cong L_n$ для всех $\sigma\in G$ и

$$\dim_L A_L=n^2(L:F)=\dim_L\Big(\bigoplus_{\sigma\in G}A_\sigma\Big)=\dim_L(A_L/I).$$

Значит, $I=(0)$ и тем самым (i) доказано. Далее, каждый неприводимый A_L-модуль изоморфен некоторому из U_σ и каждый из модулей U_σ абсолютно неприводим.

Для некоторого $\sigma\in G$ имеем $U_\sigma\,|\,W_L$. Так как $W_L^\sigma\cong W_L$, то свойство однозначности разложения (11.4) влечет, что $\oplus_{\sigma\in G}U_G\,|\,W_L$. Тогда $W_L\cong\oplus_{\sigma\in G}U_\sigma$, поскольку

$$\dim_L W_L=\dim_F W=n\big[L:F\big]=\dim_L(\oplus_{\sigma\in G}U_\sigma).$$

Положим $M=U_1$. В силу (19.1), $M^{\sigma^{-1}}=U_\sigma$, где $\sigma\in G$. □

Для доказательства двух следующих результатов нам будет нужна теорема Веддербарна, которая утверждает, что конечное тело является полем. Доказательство этой теоремы см. у Кэртиса и Райнера [1962] (с. 420 русского перевода). Нам также будут нужны другие хорошо известные результаты, например, такие, как утверждение о том, что конечное расширение конечного поля является расширением Галуа с циклической группой Галуа.

Теорема 19.3 (Брауэр). *Пусть a_1, ..., a_k — некоторый F-базис алгебры A, K — расширение поля F, V — абсолютно неприводимый A_K-модуль. Предположим, что F конечно и $t_V(a_i)\in F$, $i=1$, ..., k. Тогда существует такой абсолютно неприводимый A-модуль W, что $W_K\cong V$ и $t_V(a)=t_W(a)$ для всех $a\in A$.*

Доказательство. Пусть W — такой неприводимый A-модуль, что V является композиционным фактором модуля W_K. Факторизуя по аннулятору модуля W и изменяя обозначения, можно считать, что W является точным A-модулем. Тогда $J(A)=(0)$, и, в силу теорем Артина — Веддербарна (8.10) и (8.11) и того факта, что конечное тело является полем, имеем $A\cong L_n$ для подходящего конечного расширения L поля F. Можно предполагать, что $A=L_n$.

Заменяя K на KL и V на V_{KL}, можно считать, что $L\subseteq K$.

Пусть M и G определены как в (19.2). Тогда $V\cong M_K^\sigma$ для некоторого $\sigma\in G$. Значит, по условию, $t_{M^\sigma}(a)=t_{M^\tau}(a)$ для всех $a\in A$ и всех σ, $\tau\in G$. Тогда из (19.2) следует, что $G=\langle 1\rangle$ и, значит, $F=L$. Поэтому $W\cong M$ и $W_K\cong V$. □

Теорема 19.4. *Пусть F — конечное поле, K — конечное расширение поля F.*

(i) *Предположим, что V — абсолютно неприводимый A_K-модуль, $[F(t_V):F]=m$*[1]*, $\langle\sigma\rangle$ — группа Галуа поля $F(t_V)$ над F. Существует такой неприводимый A-модуль W, что $W_K\cong\oplus_{i=1}^m V_i$, причем $t_{V_i}=t_V^{\sigma^i}$.*

---

[1] $F(t_V)$ — расширение поля F, полученное присоединением всех значений функции t_V. — *Примеч. пер.*

(ii) *Пусть W — неприводимый A-модуль. Тогда $W_K \cong \oplus_{i=1}^{s} V_i$, где $\{V_i\}$ — множество попарно неизоморфных неприводимых A_K-модулей и $s=[K\cap L:F]$. Кроме того, существует такой элемент σ из группы Галуа поля K над F, что $V^{\sigma^s}\cong V$ и $V_i\cong V^{\sigma^i}$, $i=1, \ldots, s$.*

Доказательство. (i) Поскольку V является конституэнтой модуля A_K, в силу (6.1), существует такой неприводимый A-модуль W, что V является конституэнтой модуля W. Можно считать, что W — точный модуль. Из теорем Артина — Веддербарна (8.10) и (8.11) следует, что $A\cong L_n$ для конечного расширения L поля F. В силу (19.2), $L=F(t_V)$. В силу (19.3), можно считать, что $K=F(t_V)=L$. Результат теперь следует из (19.2).

(ii) Без ограничения общности можно считать, что модуль W точный. Тогда, как и выше, $A\cong L_n$ для подходящего конечного расширения L поля F. Пусть M определен как в (19.2). Применим (i) к M_{KL} и рассмотрим такой A_K-модуль V, что

$$V_{KL}\cong \bigoplus_{i=1}^{[KL:K]} M_{KL}^{\sigma^i}.$$

Поскольку $\dim_L M=n$, то $\dim_{KL} V_{KL}=[KL:K]n=[L:K\cap L]n$. Значит, если U — неприводимый $A_{K\cap L}$-модуль, то U_K неприводим. Поэтому, заменяя K на $K\cap L$, можно считать, что $K=K\cap L\subseteq L$. Пусть $\langle\sigma\rangle$ — группа Галуа поля L над K. Если $s=[K:F]$ и $H=\langle\sigma^s\rangle$, то G/H является группой Галуа поля K над F. Так как $V_L \mid W_L$, то $V \mid W_K$. Значит, $V^{\sigma} \mid W_K$, поскольку $W_K^{\sigma}=W_K$. Легко видеть, что $V^{\sigma^i}\cong V^{\sigma^j}$ тогда и только тогда, когда $s\mid(i-j)$. Значит, $\oplus_{i=1}^{s} V^{\sigma^i} \mid W_K$. Поскольку

$$\dim_K W_K=n[L:F]=ns[L:K]=\dim_K\left(\bigoplus_{i=1}^{s} V^{\sigma^i}\right),$$

имеем

$$W_K\cong \bigoplus_{i=1}^{s} V^{\sigma^i}. \quad \square$$

ГЛАВА II

§ 1. Групповые алгебры

Если не будет оговорено противное, все группы предполагаются конечными.

Если H — подгруппа группы G, то ее *трансверсалью* в G называется такое множество $\{x_i\}$ элементов из G, что $G=\bigcup Hx_i$ и $Hx_i \neq Hx_j$ при $i \neq j$ [1]. *Левая трансверсаль* подгруппы H в G определяется аналогично.

Если $x \in G$ и A — подмножество в G, то $A^x = x^{-1}Ax$.

Мы будем свободно использовать стандартную терминологию из теории групп. См., например, Горенстейн [1968], Хупперт [1967].

На протяжении настоящей главы R будет коммутативным кольцом, удовлетворяющим ACC, а G — группой. Цель главы — изучить те свойства $R[G]$, которые в большей степени свойственны ей именно как групповой алгебре, а не как произвольной R-свободной R-алгебре. Строение кольца будет играть здесь незначительную роль, и многие из результатов настоящей главы верны, даже если R не удовлетворяет ACC. Однако для части результатов необходимо сделать подходящие ограничения на R.

Если A — подмножество в G, определим $\hat{A}$ из $R[G]$, полагая $\hat{A} = \sum_{x \in A} x$.

§ 2. Модули над групповыми алгебрами

Если H — подгруппа группы G, V — некоторый $R[G]$-модуль, то $V_H = V_{R[H]}$ обозначает ограничение V на $R[H]$. Если W есть $R[H]$-модуль, то

$$W^G = W \otimes_{R[H]} R[G]_{R[G]}.$$

Говорят, что $R[G]$-модуль W^G *индуцирован* модулем W.

Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль подгруппы H в G. Тогда $R[G]$ является свободным левым $R[H]$-модулем с базисом $\{x_i\}$. Таким образом,

---

[1] Другими словами, трансверсаль — это полное множество представителей правых смежных классов G по H. — *Примеч. пер.*

если V является $R[H]$-модулем, то $V^G=\oplus_i V\otimes x_i$ — прямая сумма R-модулей, и если $v\in V$, $x\in G$, то

$$(v\otimes x_i)x=v\otimes x_i x=v\otimes yx_j=vy\otimes x_j,$$

где $x_i x=yx_j$, $y\in H$.

Предположим, что σ — такой автоморфизм алгебры $R[G]$, что $R^\sigma=R$ и $G^\sigma=G$. Тогда σ определяет автоморфизмы кольца R и группы G. Пусть H — подгруппа группы G, V — некоторый $R[H]$-модуль. Определим $R[H]^\sigma$-модуль V^σ следующим образом: $V^\sigma=\{v_\sigma\mid v\in V\}$, где

$$v_\sigma+w_\sigma=(v+w)_\sigma,\quad v,\ w\in V,$$

$$v_\sigma a^\sigma=(va)_\sigma,\quad v\in V,\ a\in R[H].$$

Если σ — автоморфизм кольца R, положим $V^\sigma=V^{\sigma_1}$, где σ_1 — автоморфизм алгебры $R[G]$, определенный как $(\sum_{x\in G} r_x x)^{\sigma_1}=\sum_{x\in G} r_x^\sigma x$. Заметим, что это определение совпадает с определением из § 19 гл. I, где уже применялись оба эти определения.

Если σ — автоморфизм группы G, положим $V^\sigma=V^{\sigma_1}$, где σ_1 — автоморфизм алгебры $R[G]$, определенный равенством $(\sum_{x\in G} r_x x)^{\sigma_1}=\sum_{x\in G} r_x x^\sigma$.

Для $x\in G$ определим $R[H^x]$-модуль

$$V^x=V\otimes x=\{v\otimes x\mid v\in V\},$$

где $(v\otimes x)y^x=vy\otimes x$, $y\in H$. Очевидно, $V^x\cong V^\sigma$, где $z^\sigma=x^{-1}zx$ для всех $z\in H$.

Лемма 2.1. *Пусть H — подгруппа группы G, V и W — соответственно $R[G]$- и $R[H]$-модуль.*

(i) *Если $V=V_1\oplus V_2$, то $V_H=(V_1)_H\oplus(V_2)_H$.*

(ii) *Если $W=W_1\oplus W_2$, то $W^G\cong W_1^G\oplus W_2^G$.*

(iii) *Если σ — такой автоморфизм алгебры $R[G]$, что $R^\sigma=R$ и $G^\sigma=G$, то $(W^\sigma)^G\cong(W^G)^\sigma$. В частности, $W^G\cong(W^x)^G$, $x\in G$.*

(iv) *Если $H\subseteq A\subseteq G$ для некоторой подгруппы A группы G, то $W^G\cong(W^A)^G$.*

(v) *Пусть σ — такой автоморфизм алгебры $R[G]$, что $R^\sigma=R$ и $G^\sigma=G$. Отображение, переводящее U в U^σ, является биективным отображением множества всех подмодулей U модуля W на множество всех подмодулей U^σ модуля W^σ, сохраняющим включения, пересечения, суммы и прямые суммы. В частности, U неприводим или неразложим тогда и только тогда, когда соответственно неприводим или неразложим U^σ.*

Доказательство. Непосредственно следует из определений. □

Лемма 2.2. *Пусть H — подгруппа группы G, $\{x_i\}$ — ее трансверсаль в G. Пусть V есть $R[G]$-модуль. Тогда $V\cong W^G$ для некоторого $R[H]$-модуля W в том и только том случае, если существует такой подмодуль W_0 модуля V_H, что $W\cong W_0$, и $V=\oplus W_0 x_i$ — прямая сумма R-модулей.*

Доказательство. Если $V=W^G$, положим $W_0=W\otimes 1$. Тогда $V=\oplus W_0 x_i$. Обратно, легко видеть, что R-линейное отображение W_0^G в V, переводящее $w\otimes x_i$ в wx_i, является изоморфизмом. □

Рассмотрим $R[G]$-модули U и V. Очевидно, что $U \otimes_R V$ является R-модулем. Для $u \in U$, $v \in V$, $x \in G$ положим $(u \otimes v)x = ux \otimes vx$. Легко видеть, что таким способом $U \otimes_R V$ превращается в $R[G]$-модуль. Его мы будем обозначать через $U \otimes V$. Непосредственно из определения следует, что

$$U \otimes V \cong V \otimes U,$$

$$(U_1 \oplus U_2) \otimes V \cong (U_1 \otimes V) \oplus (U_2 \otimes V).$$

Лемма 2.3. *Пусть H — подгруппа группы G, V и W — соответственно $R[G]$- и $R[H]$-модуль. Тогда $V \otimes W^G \cong (V_H \otimes W)^G$.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль H в G. Определим f: $V \otimes W^G \to (V_H \otimes W)^G$, полагая $f\{v \otimes (w \otimes x_i)\} = (vx_i^{-1} \otimes w) \otimes x_i$, где $v \in V$, $w \in W$. Очевидно, f является R-изоморфизмом. Пусть $x \in G$. Предположим, что $x_i x = y x_j$, где $y \in H$. Тогда

$$f\{v \otimes (w \otimes x_i)\} x = (vx_i^{-1} \otimes w) y \otimes x_j =$$

$$= (vx_i^{-1} y \otimes wy) \otimes x_j = (vxx_j^{-1} \otimes wy) \otimes x_j$$

и

$$f[\{v \otimes (w \otimes x_i)\} x] = f\{vx \otimes (wy \otimes x_j)\} = (vxx_i^{-1} \otimes wy) \otimes x_j.$$

Таким образом, f является $R[G]$-гомоморфизмом, что и утверждалось. □

Пусть V есть $R[G]$-модуль. Элемент $v \in V$ называется *G-инвариантным* или просто *инвариантным*, если $vx = v$ для всех $x \in G$. Символом $\mathrm{Inv}_G(V)$ будем обозначать множество всех G-инвариантных элементов из V. Очевидно, $\mathrm{Inv}_G(V)$ является R-модулем.

Пусть V, W — два $R[G]$-модуля. Для $f \in \mathrm{Hom}_R(V, W)$ и $x \in G$ определим fx, полагая $(v)(fx) = \{(vx^{-1})f\}x$, где $v \in V$. Очевидно, $fx \in \mathrm{Hom}_R(V, W)$ и $(fx)y = f(xy)$. Тем самым $\mathrm{Hom}_R(V, W)$ превращается в $R[G]$-модуль.

Если V, W — конечно порожденные R-свободные $R[G]$-модули рангов m и n соответственно, то $\mathrm{Hom}_R(V, V) \cong R_m$ и $\mathrm{Hom}_R(W, W) \cong R_n$, а $\mathrm{Hom}_R(V, W)$ состоит из всех $m \times n$-матриц с коэффициентами из R [1]. Для $x \in G$ обозначим через a_x, b_x — отображения, переводящие соответственно v в vx w в wx, где $v \in V$, $w \in W$. Тогда $a_x \in \mathrm{Hom}_R(V, V)$, $b_x \in \mathrm{Hom}_R(W, W)$, и если $f \in \mathrm{Hom}_R(V, W)$, то $fx = a_x^{-1} f b_x$.

В случае, когда $W = R$ и $rx = r$ для всех $r \in R$, имеем $\mathrm{Hom}_R(V, R) = \hat{V}$ как R-модуль. Если $f \in \hat{V}$, а $v \in V$, то $(v)(fx) = (vx^{-1})f = v(x^{-1}f)$, где $x \in G$. R-модуль $\mathrm{Hom}_R(V, R)$, превращенный в $R[G]$-модуль таким способом, будем обозначать через $V^{*(R)}$ или просто V^*, если R ясно из контекста.

---

[1] Разумеется, здесь допущена вольность речи. $\mathrm{Hom}_R(V, W)$ можно отождествить с множеством всех $m \times n$-матриц над R. — *Примеч. пер.*

Лемма 2.4. *Пусть V, W — два $R[G]$-модуля. Тогда* $\mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(V, W)) = \mathrm{Hom}_{R[G]}(V, W)$.

Доказательство. По определению $f \in \mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(V, W))$ тогда и только тогда, когда $f = fx$ для всех $x \in G$. Это возможно в том и только том случае, когда $(v)f = (v)(fx) = \{(vx^{-1})f\}x$ для всех $v \in V$, $x \in G$. Последнее условие эквивалентно тому, что $f \in \mathrm{Hom}_{R[G]}(V, W)$. □

Лемма 2.5. *Пусть H — подгруппа группы G, V и W — соответственно $R[G]$- и $R[H]$-модуль. Тогда*:

(i) $\{\mathrm{Hom}_R(W, V_H)\}^G \cong \mathrm{Hom}_R(W^G, V)$;

(ii) $\{\mathrm{Hom}_R(V_H, W)\}^G \cong \mathrm{Hom}_R(V, W^G)$.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль H в G.

(i) Если $f \in \{\mathrm{Hom}_R(W, V_H)\}^G$, то $f = \sum f_i \otimes x_i$, где $f_i \in \mathrm{Hom}_R(W, V_H)$. Определим $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_R(W^G, V)$, полагая $(\sum w_i \otimes x_i)\hat{f} = \sum \{(w_i)f_i\}x_i$. Пусть g — отображение, переводящее f в $\hat{f}$. Очевидно, g является R-гомоморфизмом. Если $\hat{f} = 0$, то $\sum \{(w_i)f_i\}x_i = 0$ для всех $w_i \in W$. Поэтому $f_i = 0$ для всех i. Следовательно, $f = 0$. Значит, g является мономорфизмом. Если $h \in \mathrm{Hom}_R(W^G, V)$, то $(\sum w_i \otimes x_i)h = \sum \{(w_i)h_i\}x_i$ для некоторого $h_i \in \mathrm{Hom}_R(W, V_H)$. Значит, $h = \hat{f}$ для $f = \sum h_i \otimes x_i$, и потому g является эпиморфизмом.

Пусть $x \in G$. Для каждого i имеем $x_i x = y_i x_{i'}$, где $y_i \in H$ и $x_i \to x_{i'}$ является перестановкой множества $\{x_i\}$. Значит, если $f = \sum f_i \otimes x_i$, то $fx = \sum f_i y_i \otimes x_{i'}$. Далее,

$$(\sum w_i \otimes x_i)(\hat{fx}) = \{(\sum w_{i'} \otimes x_{i'}x^{-1})\hat{f}\}x =$$

$$= \{(\sum w_{i'}y_i^{-1} \otimes x_i)\hat{f}\}x = \sum \{(w_{i'}y_i^{-1})f_i\}x_i x$$

и

$$(\sum w_i \otimes x_i)\widehat{(fx)} = (\sum w_{i'} \otimes x_{i'})\widehat{(\sum f_i y_i \otimes x_{i'})} =$$

$$= \sum \{(w_{i'})(f_i y_i)\}x_{i'} = \sum \{(w_{i'}y_i^{-1})f_i\}y_i x_{i'},$$

где $w_{i'} = w_i y_i$. Поскольку $y_i x_{i'} = x_i x$, g является $R[G]$-изоморфизмом.

(ii) Если $f \in \{\mathrm{Hom}_R(V_H, W)\}^G$, то $f = \sum f_i \otimes x_i$, где $f_i \in \mathrm{Hom}_R(V_H, W)$. Определим $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_R(V, W^G)$, полагая $(v)\hat{f} = \sum (vx_i^{-1})f_i \otimes x_i$. Пусть g — отображение, переводящее f в $\hat{f}$. Легко видеть, что g является R-изоморфизмом.

Пусть $x \in G$ и $x_i x = y_i x_{i'}$, где $y_i \in H$ для каждого i. Тогда если $f = \sum f_i \otimes x_i$, то

$$(v)(\hat{fx}) = \{(vx^{-1})\hat{f}\}x = \sum (vx^{-1}x_i^{-1})f_i \otimes x_i x = \sum \{(vx^{-1}x_i^{-1})f_i\}y_i \otimes x_{i'}$$

и

$$(v)\widehat{(fx)} = (v)\widehat{(\sum f_i y_i \otimes x_{i'})} = \sum \{(vx_{i'}^{-1}y_i^{-1})f_i\}y_i \otimes x_{i'}.$$

Поскольку $x_{i'}^{-1}y_i^{-1} = x^{-1}x_i^{-1}$, g является $R[G]$-изоморфизмом. □

Следствие 2.6. *Пусть H — подгруппа группы G, W — некоторый $R[H]$-модуль. Тогда* $(W^*)^G \cong (W^G)^*$.

Доказательство. Очевидно ввиду (2.5) (i). □

Лемма 2.7. *Предположим, что R удовлетворяет* ACC. *Пусть H — подгруппа группы G, U, V — конечно порожденные $R[G]$-модули. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если модуль V R-свободен, а U — проективный или свободный $R[G]$-модуль, то каждый из модулей $U \otimes V$, U^*, $\mathrm{Hom}_R(U, V)$ и $\mathrm{Hom}_R(V, U)$ является проективным или свободным $R[G]$-модулем соответственно.*

(ii) *Если модуль U $R[H]$-проективен, то $U \otimes V$, U^*, $\mathrm{Hom}_R(U, V)$ и $\mathrm{Hom}_R(V, U)$ также $R[H]$-проективны.*

Доказательство. (i) Пусть $V_{\langle 1\rangle} = nR_R$. В силу (2.3), $V \otimes mR_R^G \cong mnR_R^G$ является свободным. Согласно (I.8.2) и (2.5), модуль

$$\mathrm{Hom}_R(mR_R^G, V) \cong \{\mathrm{Hom}_R(mR_R, nR_R)\}^G \cong mn\{\mathrm{Hom}_R(R_R, R_R)\}^G \cong mnR_R^G$$

является свободным и модуль

$$\mathrm{Hom}_R(V, mR_R^G) \cong \{\mathrm{Hom}_R(nR_R, mR_R)\}^G \cong mnR_R^G$$

также является свободным. Остальные утверждения в (i) следуют из (ii) при $H = \langle 1\rangle$.

(ii) В силу (1.4.8), $U \mid (U_H)^G$. Поэтому, по (2.3),

$$U \otimes V \mid (U_H)^G \otimes V \cong (U_H \otimes V_H)^G = \{(U \otimes V)_H\}^G.$$

Значит, ввиду (1.4.8), модуль $U \otimes V$ является $R[H]$-проективным. Согласно (2.5),

$$\mathrm{Hom}_R(U, V) \mid \mathrm{Hom}_R((U_H)^G, V) \cong \{\mathrm{Hom}_R(U, V)_H\}^G,$$
$$\mathrm{Hom}_R(V, U) \mid \mathrm{Hom}_R(V, (U_H)^G) \cong \{\mathrm{Hom}_R(V, U)_H\}^G.$$

Значит, по (1.4.8), модули $\mathrm{Hom}_R(U, V)$ и $\mathrm{Hom}_R(V, U)$ являются $R[H]$-проективными. □

Утверждение (2.7) впервые было доказано Осимой [1941]. Это было ответом на вопрос, поставленный Брауэром и Несбитт [1941].

Лемма 2.8. *Пусть V — конечно порожденный R-свободный $R[G]$-модуль, а W — произвольный $R[G]$-модуль. Тогда*

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_R(V, W).$$

Доказательство. Пусть $\{v_i\}$ есть R-базис модуля V, $\{v_i^*\}$ — дуальный базис модуля V^*. Определим g: $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_R(V, W)$, полагая $(v)\{g(f \otimes w)\} = \{(v)f\}w$, где $v \in V$, $w \in W$, $f \in V^*$. Очевидно, g является R-гомоморфизмом. Если $g(\sum v_i^* \otimes w_i) = 0$, то $w_j = (v_j)\{g(\sum v_i^* \otimes w_i)\} = 0$. Поэтому g является мономорфизмом. Если $h \in \mathrm{Hom}_R(V, W)$, то $h = g(\sum v_i^* \otimes (v_i)h)$. Значит, g является R-изоморфизмом.

Если $x \in G$, то для $v \in V$, $w \in W$, $f \in V^*$,

$$(v)[g\{(f \otimes w)x\}] = (v)\{g(fx \otimes wx)\} = \{v(fx)\}wx = \{(vx^{-1})f\}wx$$

и

$$(v)\left[\{g(f\otimes w)\}x\right]=\left[(vx^{-1})\{g(f\otimes w)\}\right]x=\{(vx^{-1})f\}wx.$$

Значит, g является $R[G]$-изоморфизмом. □

Два следующих результата принадлежат Макки [1951].

Теорема 2.9 (разложение Макки). *Пусть H, A — подгруппы группы G, $\{x_i\}$ — трансверсаль H в G. Для любого $R[H]$-модуля W и любого двойного (H, A)-смежного класса D определим $R[A]$-модуль $W(D)=\oplus_{x_i\in D}W\otimes x_i$. Тогда $W(D)\cong(W^{x}_{H^x\cap A})^{A}$ для любого $x\in D$ и*

$$(W^G)_A=\bigoplus_D W(D)\cong\bigoplus_x\{W^x_{H^x\cap A}\}^A,$$

где D и HxA пробегают все двойные (H, A)-смежные классы группы G.

Доказательство. Положим $W_0(H, x, A)=\{W^x_{H^x\cap A}\}^A$. Если $x_0\in HxA$, то $x_0=yxa$, где $y\in H$, $a\in A$. Тогда

$$W_0(H, x_0, A)=\{W^{yxa}_{H^{yxa}\cap A}\}^A\cong\{W^{xa}_{H^{xa}\cap A}\}^A\cong\{(W^x_{H^x\cap A})^a\}^A\cong W_0(H, x, A).$$

Значит, $W_0(H, x, A)=W_0(HxA)$ зависит лишь от двойного смежного класса HxA.

Достаточно показать, что $W(D)\cong W_0(D)$ для любого двойного смежного класса D. Пусть $D=HxA$. Если $x_i\in D$, то существует такой $a_i\in A$, что $Hx_i=Hxa_i$. Кроме того, $Hxa_i=Hxa_j$ тогда и только тогда, когда $a_ja_i^{-1}\in H^x\cap A$. Значит, $\{a_i\}$ является трансверсалью пересечения $H^x\cap A$ в A, где i пробегает все те значения, для которых $x_i\in D$. Поэтому

$$W_0(D)=\bigoplus_i W^x_{H^x\cap A}\otimes a_i,$$

$$W(D)=\bigoplus_{x_i\in D}W\otimes x_i\cong\bigoplus_i W\otimes xa_i.$$

Определим f: $W(D)\to W_0(D)$, полагая $f(w\otimes xa_i)=wx\otimes a_i$. Очевидно, f является R-изоморфизмом. Предположим, что $a\in A$ выбрано так, что $a_ia=x^{-1}yxa_j$, причем $x^{-1}yx\in H^x\cap A$. Тогда

$$\{f(w\otimes xa_i)\}a=wx\otimes a_ia=wyx\otimes a_j=$$

$$=f(wy\otimes xa_j)=f(w\otimes yxa_j)=f(w\otimes xa_ia),$$

т. е. f является $R[A]$-изоморфизмом. □

Теорема 2.10 (Макки о тензорном произведении). *Пусть H, A — подгруппы группы G, V и W — соответственно $R[H]$- и $R[A]$-модули. Тогда*

$$V^G\otimes W^G\cong\bigoplus_x(V^x_{H^x\cap A}\otimes W_{H^x\cap A})^G,$$

где x пробегает полное множество представителей двойных (H, A)-смежных классов группы G.

Доказательство. В силу (2.3) и (2.9),

$$V^G \otimes W^G \cong \{(V^G)_A \otimes W\}^G \cong \bigoplus_x [\{V^x_{H^x \cap A}\}^A \otimes W]^G.$$

В силу (2.3),

$$\{W^x_{H^x \cap A}\}^A \otimes W \cong \{V^x_{H^x \cap A} \otimes W_{H^x \cap A}\}^A.$$

Результат теперь следует из (2.1) (iv). □

Пусть $H \lhd G$, V является $R[H]$-модулем. *Группа инерции* $T_H(V) = T(V)$ модуля V определяется как

$$T(V) = \{x \mid V^x \cong V,\ x \in G\}.$$

Очевидно, $T(V)$ является подгруппой группы G и $H \subseteq T(V)$.

Следствие 2.11. *Предположим, что* $H \lhd G$. *Пусть* W *есть* $R[H]$*-модуль,* $\{x_i\}$ *— трансверсаль* $T(W)$ *в* G. *Тогда*

$$(W^G)_H \cong |T(W):H| \{\bigoplus_i W^{x_i}\}.$$

Доказательство. Очевидно ввиду (2.9). □

Если V есть $R[G]$-модуль, то *ядро* модуля V — это множество всех тех $x \in G$, для которых $vx = v$ для всех $v \in V$. Модуль V *точен*, если его ядро равно $\langle 1 \rangle$.

Лемма 2.12. *Пусть* V *— некоторый* $R[G]$*-модуль с ядром* H. *Тогда* $H \lhd G$. *Кроме того,* $V = \mathrm{Inv}_A(V)$ *для подгруппы* A *из* G *тогда и только тогда, когда* $A \subseteq H$.

Доказательство. Следует из определения. □

Лемма 2.13. *Пусть* H *— подгруппа группы* G, W *— некоторый* $R[H]$*-модуль. Тогда ядро модуля* W^G *содержится в ядре модуля* W.

Доказательство. Пусть A — ядро модуля W^G. В силу (2.9), $\{W_{H \cap A}\}^A$ является $R[A]$-подмодулем в W^G и, значит, является A-инвариантным. Отсюда следует, что $A = H \cap A$, и поэтому $A \subseteq H$. Результат теперь следует из (2.11). □

§ 3. Относительные следы

Пусть H — подгруппа группы G, $\{x_i\}$ — ее трансверсаль в G. Для $R[G]$-модуля V определим Tr^G_H: $\mathrm{Inv}_H(V) \to \mathrm{Inv}_G(V)$, полагая $\mathrm{Tr}^G_H(v) = \sum_i v x_i$. Очевидно, определение Tr^G_H не зависит от выбора трансверсали $\{x_i\}$. Кроме того, Tr^G_H является R-гомоморфизмом. Если $H \subseteq A \subseteq G$ для некоторой подгруппы A, то непосредственно из определения следует, что $\mathrm{Tr}^G_A \mathrm{Tr}^A_H = \mathrm{Tr}^G_H$. Если $v \in \mathrm{Inv}_H(V)$, то $\mathrm{Tr}^G_H(v)$ называется *относительным* (G, H)*-следом* элемента v. Если $v \in V$, то $\mathrm{Tr}^G_{\langle 1 \rangle}(v)$ называется G*-следом* элемента v или просто *следом* элемента v.

Пусть $\mathfrak{H}$ — непустое множество подгрупп группы G. Для $R[G]$-модуля V положим

$$H^0(G, \mathfrak{H}, V) = \mathrm{Inv}_G(V) / \sum_{H \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}_H^G \{\mathrm{Inv}_H(V)\}.$$

Если $\mathfrak{H} = \{H\}$, будем писать $H^0(G, \mathfrak{H}, V) = H^0(G, H, V)$. Очевидно, $H^0(G, \mathfrak{H}, V)$ является R-модулем, и если V конечно порожден, то $H^0(G, \mathfrak{H}, V)$ — также конечно порожденный R-модуль.

Лемма 3.1. *Пусть V_1, V_2, V — такие $R[G]$-модули, что $V = V_1 \oplus V_2$. Пусть $\mathfrak{H}$ — непустое множество подгрупп группы G. Тогда*

(i) $\sum_{H \in \mathfrak{H}} \mathrm{Inv}_H(V_1) \oplus \sum_{H \in \mathfrak{H}} \mathrm{Inv}_H(V_2) = \sum_{H \in \mathfrak{H}} \mathrm{Inv}_H(V)$.

(ii) $\sum_{H \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}_H^G \{\mathrm{Inv}_H(V_1)\} \oplus \sum_{H \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}_H^G \{\mathrm{Inv}_H(V_2)\} = \sum_{H \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}_H^G \{\mathrm{Inv}_H(V)\}$.

(iii) $H^0(G, \mathfrak{H}, V_1) \oplus H^0(G, \mathfrak{H}, V_2) = H^0(G, \mathfrak{H}, V)$.

Доказательство. Непосредственно следует из определений. □

Лемма 3.2. *Пусть H — подгруппа группы G, V — некоторый $R[G]$-модуль, $x \in G$. Тогда $v \in \mathrm{Inv}_H(V)$ в том и только том случае, если $vx \in \mathrm{Inv}_{H^x}(V)$. Кроме того, $\mathrm{Tr}_H^G \{\mathrm{Inv}_H(V)\} = \mathrm{Tr}_{H^x}^G \{\mathrm{Inv}_{H^x}(V)\}$.*

Доказательство. Если $\{x_i\}$ — трансверсаль H в G, то $\{x_i^x\}$ — трансверсаль H^x в G. Отсюда следует результат. □

Лемма 3.3. *Пусть H — подгруппа группы G. Пусть, далее, $H \in \mathfrak{H} \subseteq \{A \mid A$ — такая подгруппа из G, что $A^x \subseteq H$ для некоторого $x \in G\}$. Тогда $\mathrm{Tr}_H^G \{\mathrm{Inv}_H(V)\} = \sum_{A \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}_A^G \{\mathrm{Inv}_A(V)\}$ для любого $R[G]$-модуля V и $H^0(G, H, V) = H^0(G, \mathfrak{H}, V)$.*

Доказательство. В силу (3.2),

$$\mathrm{Tr}_H^G \{\mathrm{Inv}_H(V)\} \subseteq \sum_{A \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}_A^G (\mathrm{Inv}_A(V)) \subseteq \sum_{A \subseteq H} \mathrm{Tr}_A^G \{\mathrm{Inv}_A(V)\} =$$

$$= \sum_{A \subseteq H} \mathrm{Tr}_H^G \mathrm{Tr}_A^H \{\mathrm{Inv}_A(V)\} \subseteq \mathrm{Tr}_H^G \{\mathrm{Inv}_H(V)\}.$$

Отсюда вытекает результат. □

Лемма 3.4. *Пусть H — подгруппа группы G, W — некоторый $R[H]$-модуль. Тогда $v \in \mathrm{Inv}_G(W^G)$ в том и только том случае, если существует такой $w \in \mathrm{Inv}_H(W)$, что $v = \mathrm{Tr}_H^G(w \otimes 1)$. Кроме того, $H^0(G, H, W^G) = (0)$.*

Доказательство. Если $w \in \mathrm{Inv}_H(W)$, то $\mathrm{Tr}_H^G(w \otimes 1) \in \mathrm{Inv}_G(W^G)$. Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль H в G, причем $x_1 = 1$. Предположим, что $v = \sum w_i \otimes x_i \in \mathrm{Inv}_G(W^G)$. Тогда для каждого j и каждого $y \in H$

$$v = v x_j^{-1} y = w_j y \otimes 1 + \sum_{i > 1} w_i' \otimes x_i$$

для подходящих $w_i' \in W$. Значит, $w_j y = w_1$ для всех j и всех $y \in H$. Следовательно, $w_1 \in \mathrm{Inv}_H(W)$ и $v = \sum_i w_i \otimes x_i = \mathrm{Tr}_H^G(w_1 \otimes 1)$. □

Лемма 3.5. *Пусть H — подгруппа группы G, $\mathfrak{A}$ — непустое множество подгрупп группы H, $\mathfrak{B} = \{H \cap A^x \mid A \in \mathfrak{A}, x \in G\}$, W — некоторый*

$R[H]$-модуль. Тогда $v\in\sum_{A\in\mathfrak{A}}\mathrm{Tr}_A^G\{\mathrm{Inv}_A(W^G)\}$ в том и только в том случае, если существует такой $w\in\sum_{B\in\mathfrak{B}}\mathrm{Tr}_B^H\{\mathrm{Inv}_B(W)\}$, что $v=\mathrm{Tr}_H^G(w\otimes 1)$. Кроме того, $H^0(G,\mathfrak{A},W^G)\cong H^0(H,\mathfrak{B},W)$. В частности, $H^0(G,\langle 1\rangle,W^G)\cong H^0(H,\langle 1\rangle,W)$.

Доказательство. Предположим, что $v=\mathrm{Tr}_H^G(w\otimes 1)$, причем $w=\mathrm{Tr}_B^H(u)$, где $B=H\cap A^x$, $A\in\mathfrak{A}$, $u\in\mathrm{Inv}_B(W)$. Тогда $v=\mathrm{Tr}_B^G(u\otimes 1)$. Следовательно, в силу (3.2), $u\otimes x^{-1}\in\mathrm{Inv}_{H^{x^{-1}}\cap A}(W^G)$ и

$$v=\mathrm{Tr}_{H\cap A^x}^G(u\otimes 1)=\mathrm{Tr}_{H^{x^{-1}}\cap A}^G(u\otimes x^{-1})=\mathrm{Tr}_A^G\{\mathrm{Tr}_{H^{x^{-1}}\cap A}^A(u\otimes x^{-1})\}.$$

Таким образом,

$$v\in\sum_{A\in\mathfrak{A}}\mathrm{Tr}_A^G\{\mathrm{Inv}_A(W^G)\}.$$

Обратно, предположим, что $v=\mathrm{Tr}_A^G(u)$ для некоторой $A\in\mathfrak{A}$ и $u\in\mathrm{Inv}_A(W^G)$. Пусть $\{x_i\}$ — полное множество представителей двойных (H,A)-смежных классов группы G. В силу разложения Макки (2.9) и (3.4), $u=\sum u_i$, где $u_i=\mathrm{Tr}_{H^{x_i}\cap A}(w_i\otimes x_i)$ для подходящих $w_i\in W$. Поэтому, используя (3.2), имеем

$$v=\sum_i\mathrm{Tr}_{H^{x_i}\cap A}^G(w_i\otimes x_i)=\sum_i\mathrm{Tr}_{H\cap A^{x_i^{-1}}}^G(w_i\otimes 1)=$$

$$=\mathrm{Tr}_H^G\{\sum_i\mathrm{Tr}_{H\cap A^{x_i^{-1}}}^H(w_i\otimes 1)\}=\mathrm{Tr}_H^G\{\sum_i\mathrm{Tr}_{H\cap A^{x_i^{-1}}}^H(w_i)\otimes 1\}.$$

Значит, $v=\mathrm{Tr}_H^G(w\otimes 1)$, где

$$w=\sum_i\mathrm{Tr}_{H\cap A^{x_i^{-1}}}^H(w_i)\in\sum_{B\in\mathfrak{B}}\mathrm{Tr}_B^H\{\mathrm{Inv}_B(W)\},$$

что и утверждалось.

Пусть f: $\mathrm{Inv}_H(W)\to\mathrm{Inv}_G(W^G)$, определенное как $f(w)=\mathrm{Tr}_H^G(w\otimes 1)$. В силу (3.4), f является изоморфизмом. По предыдущему абзацу,

$$f\left(\sum_{B\in\mathfrak{A}}\mathrm{Tr}_B^H\{\mathrm{Inv}_B(W)\}\right)=\sum_{A\in\mathfrak{A}}\mathrm{Tr}_A^G\{\mathrm{Inv}_A(W^G)\}.$$

Значит, f индуцирует изоморфизм $H^0(H,\mathfrak{A},W)$ на $H^0(G,\mathfrak{B},W^G)$.

Если $\mathfrak{A}=\{\langle 1\rangle\}$, то $\mathfrak{B}=\{\langle 1\rangle\}$, и поэтому

$$H^0(H,\langle 1\rangle,W)\cong H^0(G,\langle 1\rangle,W^G).\ \square$$

Лемма 3.6. *Пусть H — подгруппа группы G, V, W — конечно порожденные $R[G]$-модули, причем V $R[H]$-проективен. Тогда*

(i) $H^0(G,H,V)=(0)$.

(ii) $H^0(G,H,\mathrm{Hom}_R(V,W))=H^0(G,H,\mathrm{Hom}_R(W,V))=(0)$.

Доказательство. (i) В силу (I.4.8), $V|(V_H)^G$. Значит, учитывая (3.4), $H^0(G,H,V)|H^0(G,H,(V_H)^G)=(0)$.

(ii) Непосредственно следует из (i) и (2.7). $\square$

Лемма 3.7. *Пусть H — подгруппа группы G. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если* U, V, W — *три* $R[G]$-*модуля и* $g\in \mathrm{Hom}_{R[G]}(V, W)$, $f\in \mathrm{Hom}_{R[H]}(U, V)$, *то* $\mathrm{Tr}_H^G(gf)=g\,\mathrm{Tr}_H^G(f)$; *если* $g\in \mathrm{Hom}_{R[H]}(V, W)$ *и* $f\in \in \mathrm{Hom}_{R[G]}(U, W)$, *то* $\mathrm{Tr}_H^G(gf)=\mathrm{Tr}_H^G(g)f$.

(ii) *Пусть* A — *кольцо, являющееся* $R[G]$-*модулем; предположим, что* $(ab)x=(ax)(bx)$, *где* a, $b\in A$, $x\in G$; *тогда* $\mathrm{Tr}_H^G(ab)=a\,\mathrm{Tr}_H^G(b)$ *и* $\mathrm{Tr}_H^G(ba)=\mathrm{Tr}_H^G(b)a$, *где* $a\in \mathrm{Inv}_G(A)$, $b\in \mathrm{Inv}_H(A)$; *кроме того,* $\mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{Inv}_H(A))$ *является идеалом кольца* $\mathrm{Inv}_G(A)$.

(iii) *Если* V *есть* $R[G]$-*модуль, то* $\mathrm{Tr}_H^G(E_{R[H]}(V))$ — *идеал в* $E_{R[G]}(V)$.

Доказательство. Непосредственно следует из определения и (2.4). □

Следующий фундаментальный результат принадлежит, по существу, Д. Г. Хигману [1954].

Теорема 3.8. *Пусть* H — *подгруппа группы* G, V — *конечно порожденный* $R[G]$-*модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *модуль* V $R[H]$-*проективен;*

(ii) $V\mid (V_H)^G$;

(iii) $V\mid W^G$ *для некоторого конечно порожденного* $R[H]$-*модуля* W;

(iv) *модуль* $\mathrm{Hom}_R(V, V)$ $R[H]$-*проективен;*

(v) $H^0(G, H, \mathrm{Hom}_R(V, V))=(0)$;

(vi) *существует такой* $f\in \mathrm{Hom}_{R[H]}(V, V)=\mathrm{Inv}_H\{\mathrm{Hom}_R(V, V)\}$, *что* $\mathrm{Tr}_H^G(f)=1$;

(vii) *модуль* V $R[H]$-*инъективен.*

Доказательство. В силу (I.4.8), (i), (ii), (iii) эквивалентны между собой.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Очевидно ввиду (2.7).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Очевидно ввиду (3.6).

(v) $\Rightarrow$ (vi). Непосредственно следует из определения и (2.4).

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Предположим, что W — такой $R[G]$-модуль, что $V\subseteq W$ и $V_H\mid W_H$. Тогда существует проекция e модуля W на V, являющаяся $R[H]$-гомоморфизмом. Значит, $\mathrm{Tr}_H^G(ef)\in \mathrm{Hom}_{R[G]}(W, W)$. Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль подгруппы H в G. Если $w\in W$, то

$$w\,\mathrm{Tr}_H^G(ef)=\sum_i\{(wx_i^{-1})ef\}x_i\in\sum_i(Wef)x_i\subseteq\sum_i(Vf)x_i\subseteq V,$$

а если $v\in V$, то

$$v\,\mathrm{Tr}_H^G(ef)=\sum_i\{[(vx_i^{-1})]f\}x_i=\sum_i\{(vx_i^{-1})f\}x_i=v\sum(fx_i)=v\,\mathrm{Tr}_H^G(f)=v.$$

Значит, $\mathrm{Tr}_H^G(ef)$ является проекцией W на V, и поэтому $V\mid W$, что и утверждалось.

(vii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль H в G, причем $x_1=1$. Определим g: $V\to (V_H)^G$, полагая $gv=\sum_i vx_i^{-1}\otimes x_i$. Тогда $g=\mathrm{Tr}_H^G(h)$, где h: $V\to V\otimes 1$, причем $hv=v\otimes 1$. Если $gv=0$, то $vx_1^{-1}\otimes x_1=v\otimes 1=0$. Значит, g является $R[G]$-мономорфизмом. Пусть $W=\{\sum_{i\neq 1}v_i\otimes x_i\}$. Тогда W является $R[H]$-модулем. Очевидно, $g(V)\cap W=(0)$. Если $\sum v_i\otimes x_i\in V^G$, то

$$\sum v_i\otimes x_i=\sum v_1x_i^{-1}\otimes x_i+\sum_i(v_i-v_1x_i^{-1})\otimes x_i=$$
$$=g(v_1)+\sum_{i\neq 1}(v_i-v_1x_i^{-1})\otimes x_i\in g(V)+W.$$

Значит, $\{(V_H)^G\}_H = g(V)_H \oplus W$. Поэтому $V_H \mid \{(V_H)^G\}_H$, и тогда $V \mid (V_H)^G$, поскольку V $R[H]$-инъективен. □

Следствие 3.9. *Пусть H — подгруппа группы G. V — конечно порожденный R-свободный $R[G]$-модуль. Модуль V является $R[H]$-проективным тогда и только тогда, когда $H^0(G, H, V^* \otimes V) = (0)$.*

Доказательство. Очевидно ввиду (2.8) и (3.8). □

Следствие 3.10. *Предположим, что индекс $|G:H|$ обратим в R для некоторой подгруппы H из G. Тогда каждый конечно порожденный $R[G]$-модуль является $R[H]$-проективным.*

Доказательство. Пусть $f = (1/|G:H|) \cdot 1 \in \mathrm{Hom}_{R[H]}(V, V)$. Тогда $\mathrm{Tr}_H^G(f) = 1$. Результат теперь следует из (3.8). □

Следствие 3.11. *Предположим, что $|G|$ обратим в R. Тогда любой конечно порожденный $R[G]$-модуль является R-проективным и любой конечно порожденный R-свободный $R[G]$-модуль является проективным. Если, кроме того, V — неразложимый $R[G]$-модуль и W — подмодуль модуля V, причем $W_R \mid V_R$, то $W = (0)$ или $W = V$.*

Доказательство. Очевидно ввиду (3.10) и (1.4.6). □

Следствие 3.12 (Машке). *Пусть F — поле, характеристика которого не делит $|G|$. Тогда любой конечно порожденный $F[G]$-модуль проективен, алгебра $F[G]$ полупроста, а каждый конечно порожденный $F[G]$-модуль вполне приводим.*

Доказательство. В силу (3.11), каждый конечно порожденный $F[G]$-модуль является проективным. Значит, каждый конечно порожденный $F[G]$-модуль вполне приводим. Поскольку $F[G]_{F[G]}$ является вполне приводимым, то $F[G]$ полупроста. □

Следующий результат в случае $H = \langle 1 \rangle$ принадлежит Грину [1974а].

Лемма 3.13. *Пусть H — подгруппа группы G, V, W — конечно порожденные R-свободные $R[G]$-модули, $g \in \mathrm{Hom}_{R[G]}(V, W)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $g \in \mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{Hom}_{R[H]}(V, W))$;

(ii) *пусть U — конечно порожденный $R[H]$-проективный $R[G]$-модуль, такой, что $U \xrightarrow{f} W \to 0$ является точной последовательностью, для которой $U_H \xrightarrow{f} W_H \to 0$ расщепляема; тогда существует такой $h \in \mathrm{Hom}_{R[G]}(V, U)$, что $g = fh$;*

(iii) *пусть U — конечно порожденный $R[H]$-инъективный $R[G]$-модуль, такой, что $0 \to V \xrightarrow{f} U$ является точной последовательностью, для которой $0 \to V_H \xrightarrow{f} U_H$ расщепляема; тогда существует такой $h \in \mathrm{Hom}_{R[G]}(U, W)$, что $g = hf$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Существует такой $t \in \mathrm{Hom}_{R[H]}(W, U)$, что $ft = 1$. Пусть $g = \mathrm{Tr}_H^G(g_0)$, причем $g_0 \in \mathrm{Hom}_{R[H]}(V, W)$. Пусть $h = \mathrm{Tr}_H^G(tg_0) \in \mathrm{Hom}_{R[G]}(V, U)$. Тогда, в силу (3.7),

$$fh = \mathrm{Tr}_H^G(ftg_0) = \mathrm{Tr}_H^G(g_0) = g.$$

(ii)$\Rightarrow$(i). По теореме Хигмана (3.8), существует такой $g_0 \in \in \mathrm{Hom}_{R[H]}(U, U)$, для которого $\mathrm{Tr}_H^G(g_0)=1$. Значит, в силу (3.7),

$$\mathrm{Tr}_H^G(fg_0h)=f\mathrm{Tr}_H^G(g_0)h=fh=g.$$

Рассуждения, двойственные приведенным выше, показывают, что (i) эквивалентно (iii). □

§ 4. Алгебра представлений алгебры $R[G]$

Для конечно порожденного $R[G]$-модуля V символ (V) будет обозначать класс всех $R[G]$-модулей, изоморфных V.

Для произвольного коммутативного кольца C *алгебра представлений*, или *алгебра Грина* $A_C(R[G])$, определяется следующим образом: $A_C(R[G])$ является C-модулем, порожденным множеством всех классов изоморфизма (V) конечно порожденных R-свободных $R[G]$-модулей, удовлетворяющих соотношениям $(V_1 \oplus V_2)=(V_1)+(V_2)$; умножение определяется как $(V_1)(V_2)=(V_1 \otimes V_2)$. Легко видеть, что $A_C(R[G])$ является коммутативным кольцом с $1=(R)$, где $R=\mathrm{Inv}_{R[G]}(R)$.

Алгебра Гротендика $A_C^0(R[G])$ равна $A_C(R[G])/I$, где I — идеал алгебры $A_C(R[G])$, порожденный всеми элементами $(U)-(V)+(W)$ с такими конечно порожденными $R[G]$-модулями U, V, W, для которых существует точная последовательность

$$0 \to U \to V \to W \to 0.$$

Лемма 4.1. *Если $R[G]$ обладает свойством однозначности разложения, то $A_C(R[G])$ свободна как C-модуль с базисом (V_i), где V_i пробегает полное множество представителей классов изоморфизма конечно порожденных неразложимых $R[G]$-модулей.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 4.2. *Пусть R — поле, C — область целостности, поле частных которой имеет характеристику 0. Пусть, далее, $(V)^0$ обозначает образ (V) в $A_C^0(R[G])$. Пусть, наконец, $L_1, \ldots, L_n$ — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых $R[G]$-модулей. Для выполнения равенства $(V)^0=\sum_{i=1}^n c_i(L_i)^0$ необходимо и достаточно, чтобы модуль L_i встречался как композиционный фактор модуля V_i с кратностью c_i. В частности, $(V_1)^0=(V_2)^0$ тогда и только тогда, когда $V_1 \leftrightarrow V_2$.*

Доказательство. Ясно из определений. □

Ввиду (4.2), алгебра Гротендика не так интересна в случае, когда R является полем. Тем не менее, даже в этом случае алгебра представлений может быть бесконечномерной как C-модуль.

Если $\mathfrak{H}$ — непустое множество подгрупп группы G, то $A_{C,\mathfrak{H}}(R[G])$ — это подмодуль модуля $A_C(R[G])$, порожденный всеми теми (V), для которых модуль V $R[H]$-проективен для некоторого $H \in \mathfrak{H}$.

Лемма 4.3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустое множество подгрупп группы G. Тогда $A_{C,\mathfrak{H}}(R[G])$ — идеал в $A_C(R[G])$. Если, кроме того, $R[G]$*

обладает свойством однозначности разложения, то $A_{C,\mathfrak{H}}(R[G])$ *свободен как* C*-модуль с базисом* (V_i)*, где* V_i *пробегает полное множество представителей классов изоморфизма конечно порожденных неразложимых* $R[G]$*-модулей, являющихся* $R[H]$*-проективными для некоторых* $H \in \mathfrak{H}$.

Доказательство. Очевидно ввиду (2.3). □

Пусть $\mathbf{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел. Конечно порожденный $R[G]$-модуль V называется $(R, \mathfrak{H})$-*проективным* или просто $\mathfrak{H}$-*проективным*, если $(V) \in A_{\mathbf{Z},\mathfrak{H}}(R[G])$. Если $R[G]$ обладает свойством однозначности разложения, то очевидно, что модуль V $\mathfrak{H}$-проективен тогда и только тогда, когда $V = \oplus V_i$, где для каждого i существует такая $H_i \in \mathfrak{H}$, что V_i является $R[H_i]$-проективным.

Для последующих ссылок введем следующие обозначения. Если V и W — конечно порожденные $R[G]$-модули, то запись $V \equiv W$ $(\mathfrak{H})$ означает, что $(V) - (W) \in A_{\mathbf{Z},\mathfrak{H}}(R[G])$. В частности, если V есть $\mathfrak{H}$-проективный модуль, то $V \equiv 0$ $(\mathfrak{H})$. Верно и обратное утверждение.

§ 5. Алгебраические модули

На протяжении этого параграфа $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел.

Кольцо Грина $A_{\mathbf{C}}(R[G])$, как правило, необозримо. В настоящем параграфе приведены определения и основные свойства некоторых его интересных подколец. Эти идеи принадлежат Алперину [1976ç], [1976e].

Для $R[G]$-модуля V положим $V^n = \overbrace{V \otimes \ldots \otimes V}^{n}$.

Элемент $x \in A_{\mathbf{C}}(R[G])$ называется *алгебраическим*, если x — корень ненулевого полинома с целыми коэффициентами. Другими словами, элемент x алгебраический, если существуют такие целые числа $a_0, \ldots, a_k$, не все равные нулю, что $a_0 + \ldots + a_k x^k = 0$. $R[G]$-модуль V называется *алгебраическим*, если он R-свободен и (V) — алгебраический элемент кольца $A_{\mathbf{C}}(R[G])$.

Лемма 5.1. *Предположим, что* $R[G]$ *обладает свойством однозначности разложения. Пусть* V *есть* R*-свободный* $R[G]$*-модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *модуль* V *алгебраический;*

(ii) *существует конечное число таких неразложимых* R*-свободных* $R[G]$*-модулей* $W_1, \ldots, W_m$*, что если* W *неразложим и* $W \mid V^n$ *для некоторого* n*, то* $W = W_i$ *для подходящего* i.

Доказательство. (i) ⇒ (ii). Существуют такие целые неотрицательные числа $a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_j$, $j < k$, что $a_k \neq 0$ и $\sum_{i=0}^{k} a_i (V)^i = \sum_{i=0}^{j} b_i (V)^i$. Значит, любая неразложимая компонента модуля V^k является также компонентой модуля V^i для некоторого $i < k$, ввиду свойства однозначности разложения. Поэтому если $s \geqslant k$, то стандартные рассуждения по индукции показывают, что каждая неразложимая компонента модуля V^s является также компонентой модуля V^i для некоторого $i < k$. Тем самым (ii) выполнено.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Существуют такие целые числа a_{ij}, что

$$(V)=a_{11}(W_1)+\ldots+a_{1m}(W_m),$$
$$(V)^2=a_{21}(W_1)+\ldots+a_{2m}(W_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(V)^{m+1}=a_{m+1,1}(W_1)+\ldots+a_{m+1,m}(W_m).$$

Линейная зависимость этой системы показывает, что (V) должен удовлетворять ненулевому полиномиальному уравнению степени не больше чем $m+1$ с целыми коэффициентами. □

Лемма 5.2. *Предположим, что $R[G]$ обладает свойством однозначности разложения. Пусть V, V_1, V_2 — некоторые R-свободные $R[G]$-модули.*

(i) *Если V — алгебраический модуль и $W|V$, то W — также алгебраический модуль.*

(ii) *Если V_1 и V_2 — алгебраические модули, то $V_1\oplus V_2$ и $V_1\otimes V_2$ — также алгебраические модули.*

Доказательство. (i) Непосредственно следует из (5.1).

(ii) В силу (5.1), существуют такие неразложимые $R[G]$-модули W_{11}, ..., W_{1m}, W_{21}, ..., W_{2m}, что для всех s, $t>0$ модуль $V_1^s\otimes V_2^t$ является прямой суммой модулей вида $W_{1i}\otimes W_{2j}$. Поэтому (5.1) и свойство однозначности разложения влекут алгебраичность модулей $V_1\otimes V_2$ и $V_1\oplus V_2$. □

Лемма 5.3. *Предположим, что $R[K]$ обладает свойством однозначности разложения для любой подгруппы K группы G. Пусть H — подгруппа группы G.*

(i) *Если V — алгебраический $R[G]$-модуль, то V_H — также алгебраический $R[H]$-модуль.*

(ii) *Если U — алгебраический $R[H]$-модуль и $V|U^G$, то V является алгебраическим $R[G]$-модулем.*

Доказательство. (i) Очевидно, поскольку $(V^n)_H=(V_H)^n$.

(ii) Индукция по $|H|$. В силу (2.3) и теорем Макки (2.9) и (2.10),

$$(U^G)^{n+1}=(U^G)^n\otimes U^G\cong\{((U^G)^n)_H\otimes U\}^G\cong$$
$$\cong\{((U^G)_H)^n\otimes U\}^G\cong\{(\oplus_x(U^x_{H^x\cap H})^H)^n\otimes U\}^G.$$

Значит, $(U^G)^{n+1}$ является прямой суммой выражений вида $\{\otimes_{i=1}^{n+1}(U^{x_i}_{H^{x_i}\cap H})^H\}^G$.

Если $x\in G$, то U^x является алгебраическим $R[H^x]$-модулем. Значит, в силу (i), $U^x_{H^x\cap H}$ является алгебраическим модулем, и поэтому, по индукции, $(U^x_{H^x\cap H})^H$ также является алгебраическим модулем. Далее, существует не больше чем $|G:H|$ попарно неизоморфных $R[H]$-модулей вида $(U^x_{H^x\cap H})^H$. Значит, в силу (5.1) и (5.2), существует конечное число таких $R[H]$-модулей W_1, ..., W_m, что каждая неразложимая компонента модуля $\otimes_{i=1}^{n+1}(U^{x_i}_{H^{x_i}\cap H})^H$ изоморфна некоторому W_j при всех $n\geqslant 0$. Следовательно, существует конечное число таких неразложимых $R[G]$-модулей V_1, ..., V_k, что каждая нераз-

ложимая компонента модуля W_i^G изоморфна некоторому V_j. В силу (5.1), модуль U^G алгебраический. Результат теперь следует из (5.2). □

Предположим, что $R=F$ — алгебраически замкнутое поле. Неразложимый $F[G]$-модуль V называется *неприводимо порожденным*, если существуют такие неприводимые модули $L_1, \ldots, L_s$, что $V \mid L_1 \otimes \ldots \otimes L_s$. Произвольный $F[G]$-модуль называется *неприводимо порожденным*, если каждая его неразложимая компонента неприводимо порождена.

Пусть $R=F$ — алгебраически замкнутое поле и G — группа. Ввиду (5.1), каждый неприводимо порожденный $F[G]$-модуль является алгебраическим тогда и только тогда, когда каждый неприводимый $F[G]$-модуль — алгебраический. Естественно спросить, когда это условие выполнено. Если $\operatorname{char} F=2$ и $G=\mathrm{SL}_2(2^n)$, то Алперин [1976c] показал, что в этом случае это так. Если G разрешима, то это условие также выполнено. См. (X.7.1)[1].

В силу (5.2) и (5.3), проективные $F[G]$-модули являются алгебраическими. В (III.2.18) будет доказано, что если $\operatorname{char} F=p$, то каждый проективный $F[G]$-модуль алгебраически порожден тогда и только тогда, когда $O_p(G)=\langle 1\rangle$.

§ 6. Проективные резольвенты

Пусть V — некоторый $R[G]$-модуль. *Проективная резольвента* модуля V — это точная последовательность

$$\to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \xrightarrow{d_0} V \to 0, \tag{6.1}$$

где каждый из P_i является проективным $R[G]$-модулем. Если $M_n=d_n(P_n) \subseteq P_{n-1}$, то, очевидно, последовательность

$$0 \to M_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to V \to 0 \tag{6.2}$$

точна.

Лемма 6.3. *Пусть V есть $R[G]$-модуль,*

$$0 \to M_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to V \to 0,$$
$$0 \to M_n' \to P_{n-1}' \to \ldots \to P_0' \to V \to 0$$

— точные последовательности с проективными модулями P_i, P_i' для всех i. Тогда существуют такие проективные $R[G]$-модули Q, Q', что $M_n \oplus Q \cong M_n' \oplus Q'$.

Доказательство. Непосредственно следует из леммы Шануэля (I.4.3). □

$R[G]$-модуль называется *периодическим*, если $V \cong M_n$ в (6.2) для подходящего $n \geqslant 0$. Наименьшее из тех целых $n \geqslant 0$, для которых $V \cong M_n$, называется *периодом* модуля V.

---

[1] В книге Гудивок П. М., Рудько В. П. [1985*], с. 35, показано, что естественный модуль для группы $\mathrm{GL}(p^2-1, F)$, где $\operatorname{char} F>2$, не является алгебраическим. — *Примеч. пер.*

Пусть $V_0(G) \cong R$ — изоморфизм R-модулей, причем $V_0(G) = \mathrm{Inv}_G(V_0(G))$.

Лемма 6.4. *Пусть F — поле. Предположим, что $V_0(G)$ — периодический $F[G]$-модуль с периодом n. Если $n>0$, то каждый $F[G]$-модуль является периодическим и его период делит n. Если $n=0$, то каждый $F[G]$-модуль проективен.*

Доказательство. Поскольку $V \cong V \otimes V_0(G)$, результат следует из (2.7) и (6.3) при тензорном умножении каждого члена в (6.2) на V. □

Проективные резольвенты $F[G]$-модулей и периодические $F[G]$-модули изучались различными авторами. См., например, Алперин [1973], [1976b], [1977b], Карлсон [1977], [1978], [1979]. В нашей книге мы не будем рассматривать эти объекты, исключая специальный случай, разобранный в § 10 главы VII.

ГЛАВА III

§ 1. Основные соглашения и обозначения

На протяжении оставшейся части книги будут применяться следующие обозначения.

G — группа.

p — фиксированное простое рациональное число.

R — область целостности, обладающая следующими свойствами:

(i) R удовлетворяет ACC, а $R/J(R)$ удовлетворяет DCC;

(ii) R полна;

(iii) $J(R)=(\pi)$ — главный идеал;

(iv) $p=\underbrace{1+\ldots+1}_{p}\in(\pi)$;

K — поле частных кольца R.

Все модули предполагаются конечно порожденными.

Пусть V — некоторый $R[G]$-модуль. Через $\bar{v}$ будем обозначать образ элемента $v\in V$ в $\bar{V}=V/(\pi)V$. Аналогично, $\bar{R}=R/(\pi)$ и $\overline{R[G]}=R[G]/(\pi)R[G]\cong\bar{R}[G]$.

В случае $\pi=0$ $R=\bar{R}=K$ является просто полем характеристики p. В противном случае R — полное дискретно нормированное кольцо.

Учитывая эти соглашения, результаты § 17, 18, 19 главы I, а также результаты главы II можно применять непосредственно к $R[G]$. Кроме того, большая часть результатов главы 1 также будет использоваться, разумеется, в тех случаях, когда они применимы.

Изложение большинства материала настоящей главы можно найти у Грина [1974b] или у Михлера [1972a]. См. также Алперин [1986*], Кэртис и Райнер [1981*], [1987*].

Основная цель этой главы, а на самом деле и всей книги состоит в изучении $R[G]$-модулей. Однако прежде чем перейти к этому, необходимо изучить $F[G]$-модули, где F — поле. Это проделано в следующем параграфе.

§ 2. $F[G]$-модули

На протяжении этого параграфа F — поле, G — группа. Через $V_0(G)$ будем обозначать $F[G]$-модуль, состоящий из инвариантных элементов, причем $\dim_F V_0(G)=1$. Заметим, что все $F[G]$-модули F-свободны.

Лемма 2.1. *Для любых $F[G]$-модулей V и W*

$$\dim_F(\mathrm{Inv}_F(V^*\otimes W))=I(V,\ W).$$

Доказательство. Непосредственно следует из (II.2.4) и (II.2.8). □

Лемма 2.2. *Предположим, что* $\mathrm{char}\,F=p>0$. *Пусть V — некоторый $F[G]$-модуль.*

(i) *Если $p\mid\dim_F V$, то кратность $V_0(G)$ в $V^*\otimes V$ не меньше 2. Если V абсолютно неприводим, то $V^*\otimes V$ не является вполне приводимым.*

(ii) *Если $p\nmid\dim_F V$, то $V_0(G)\mid V^*\otimes V$.*

Доказательство. В силу (II.2.8), $V^*\otimes V\cong\mathrm{Hom}_F(V,\ V)\cong F_n$, где $n=\dim_F V$. Группа G действует на F_n сопряжениями. Значит, если W_0 — множество скалярных матриц из F_n, а W_1 — множество матриц со следом 0, то W_0 и W_1 являются $F[G]$-модулями. Очевидно, $W_0\cong V_0(G)$. Если $p\nmid n$, то $V^*\otimes V\cong W_0\oplus W_1$, и тогда (ii) доказано. Предположим, что $p\mid n$. Тогда $W_0\subseteq W_1$. Если $w\in F_n$ и $x\in G$, то $(wx-w)\in W_1$. Значит, $F_n/W_1\cong V_0(G)$. Поэтому кратность $V_0(G)$ в $V^*\otimes V$ не меньше 2.

Если V абсолютно неприводим, то в силу (I.8.1) и (2.1). $\dim_F(\mathrm{Inv}_G(V^*\otimes V))=1$. Если $V^*\otimes V$ вполне приводим, то из первого утверждения следует, что $\dim_F(\mathrm{Inv}_G(V^*\otimes V))\geqslant 2$. Значит, $V^*\otimes V$ не может быть вполне приводимым. □

Лемма 2.3. *Пусть H — подгруппа группы G, W — некоторый $F[H]$-модуль. Тогда* $\dim_F\{\mathrm{Inv}_H(W)\}=\dim_F\{\mathrm{Inv}_G(W^G)\}$.

Доказательство. Непосредственно следует из (II.34). □

Теорема 2.4 (Макки [1951]). *Пусть H, A — подгруппы группы G, V и W — соответственно $F[H]$- и $F[A]$-модуль. Тогда*

$$I(V^G,\ W^G)=\sum_x I(V^x_{H^x\cap A},\ W_{H^x\cap A}),$$

где x пробегает полное множество представителей двойных $(H,\ A)$-смежных классов группы G.

Доказательство. В силу (II.2.6), (II.2.10),

$$(V^G)^*\otimes W^G\cong\bigoplus_x(V^x_{H^x\cap A}\otimes W_{H^x\cap A})^G.$$

Результат теперь следует из (2.1) и (2.3). □

Теорема 2.5 (взаимность Фробениуса). *Пусть H — подгруппа группы G, V и W — соответственно $F[G]$- и $F[H]$-модуль. Тогда $I(W^G,\ V)=I(W,\ V_H)$ и $I(V,\ W^G)=I(V_H,\ W)$.*

Доказательство. Очевидно, ввиду (2.4). □

Теорема 2.6 (соотношения Накаямы). *Пусть H — подгруппа группы G. Предположим, что F — поле разложения для $F[H]$ и $F[G]$. Пусть $\{U_i\}$, $\{V_j\}$ — полные множества представителей классов изоморфизма главных неразложимых $F[G]$-, $F[H]$-модулей соответст-*

венно, а L_i, M_j — *неприводимые* $F[G]$-, $F[H]$-*модули, отвечающие* U_i, V_j *соответственно. Тогда:*

(i) $(L_i)_H \leftrightarrow \oplus a_{ij}M_j$ *для каждого* i *в том и только в том случае, когда* $V_j^G \cong \oplus a_{ij}U_i$ *для каждого* j;

(ii) $(U_i)_H \cong \oplus b_{ij}V_j$ *для каждого* i *в том и только в том случае, когда* $M_j^G \leftrightarrow \oplus b_{ij}L_i$ *для каждого* j.

Доказательство. (i) Пусть $(L_i)_H \leftrightarrow \oplus a_{ij}M_j$ и $V_j^G \cong \oplus a'_{ij}U_i$. В силу (1.16.4), $a_{ij} = I(V_j, (L_i)_H)$. В силу (I.16.9), $a'_{ij} = I(V_j^G, L_i)$. Результат теперь следует из (2.5).

(ii) Пусть $(U_i)_H \cong \oplus b_{ij}V_j$ и $M_j^G \leftrightarrow \sum b'_{ij}L_i$. В силу (I.16.4), $b'_{ij} = I(U_i, M_j^G)$. В силу (I.16.9), $b_{ij} = I((U_i)_H, M_j)$. Результат теперь следует из (2.5). □

Лемма 2.7. *Пусть* $T \lhd G$, V, V_1, ..., V_n — *такие* $F[G/T]$-*модули, что* $V \leftrightarrow \oplus V_i$. *Пусть, далее,* U *есть* $F[T]$-*проективный* $F[G]$-*модуль. Тогда* $U \otimes V \cong \oplus (U \otimes V_i)$.

Доказательство. Очевидно, результат достаточно доказать лишь в случае, когда все V_i неприводимы. Проведем индукцию по n. Если $n=1$, то доказывать нечего. Пусть W — неприводимый подмодуль модуля V. Тогда $U \otimes W \subseteq U \otimes V$. Поскольку $(U \otimes W)_T \cong (\dim_F W)U$ и $(U \otimes V)_T \cong (\dim_F V)U$, то $(U \otimes W)_T \mid (U \otimes V)_T$. По теореме Хигмана (II.3.8) и по (II.2.7), модуль $U \otimes W$ является $F[T]$-инъективным. Значит, $U \otimes W \mid U \otimes V$, и потому $U \otimes V \cong (U \otimes W) \oplus (U \otimes V/W)$. Результат теперь следует по индукции. □

Особый интерес лемма 2.7 представляет в случае $T = \langle 1 \rangle$. Однако она будет нужна и в полном объеме в § 1 гл. IX.

Теорема 2.8 (Брауэр [1935], [1956]). *Предположим, что* F *является полем разложения для* $F[G]$. *Если* $\operatorname{char} F = 0$, *то число неприводимых* $F[G]$-*модулей равно числу сопряженных классов группы* G. *Если* $\operatorname{char} F = p > 0$, *то это число равно числу сопряженных классов группы* G, *состоящих из* p'-*элементов.*

Доказательство. Пусть $\{C_i\}$ — множество сопряженных классов группы G. Для каждого i выберем $x_i \in C_i$. Пусть S является F-подпространством $F[G]$, порожденным всеми элементами $ab - ba$, где $a, b \in F[G]$. Положим

$$S_0 = \{\sum_G a_x x \mid \sum_{x \in C_i} a_x = 0 \text{ для всех } i\}.$$

Если $\sum a_x x \in S_0$, то $\sum a_x x = \sum_i \sum_{x \in C_i} a_x (x - x_i)$. Поэтому $S_0 \subseteq S$, поскольку $x - x_i \in S$ для всех $x \in C_i$. Так как

$$(\sum a_x x)(\sum b_x x) - (\sum b_x x)(\sum a_x x) = \sum_z (\sum_x a_x b_{x^{-1}z} - a_x b_{zx^{-1}})z =$$

$$= \sum_z \{\sum_x a_x (b_{x^{-1}zxx^{-1}} - b_{zx^{-1}})\} z,$$

то $S \subseteq S_0$ и, значит, $S = S_0$.

Очевидно, $\sum_i a_i x_i \in S_0$ тогда и только тогда, когда $a_i = 0$ для всех i. Поэтому разность $\dim_F F[G] - \dim_F S$ равна числу сопряженных классов группы G.

Если $\operatorname{char} F = 0$, то в силу (II.3.12), алгебра $F[G]$ полупроста, и в этом случае результат следует из (I.16.3).

Предположим, что $\operatorname{char} F = p > 0$. Обозначения выберем таким образом, чтобы $C_1, \ldots, C_k$ были всеми сопряженными классами группы G, состоящими из p'-элементов. Положим $T = \{c \mid c^{p^j} \in S$ для некоторого $j\}$. В силу (I.16.3), T является F-пространством, и достаточно показать, что $k = \dim_F F[G] - \dim_F T$.

Если $x \in G$, то $x = yz = zy$, где y и z — соответственно p-элемент и p'-элемент. Так как $(z - yz)^{p^j} = z^{p^j} - z^{p^j} = 0$ для достаточно большого j, то $z - yz \in T$, и, значит, $x \equiv z \pmod{T}$. Так как $S \subseteq T$, то $z \equiv x_i \pmod{T}$ для некоторого $i \leqslant k$. Значит, $x \equiv x_i \pmod{T}$ для некоторого i и $\dim_F F[G] - \dim_F T \leqslant k$.

Предположим, что $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in T$. Тогда, в силу (I.16.3),

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{p^j} x_i^{p^j} \equiv \left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \right)^{p^j} \in S$$

для достаточно большого j. Выберем m так, чтобы $x_i^{p^m} = x_i$ для всех i. Тогда $\sum_{i=1}^{k} a_i^{p^m} x_i \in S$. Ввиду первой части доказательства, $a_i^{p^m} = 0$ для всех i, и поэтому $a_i = 0$ для всех i. Значит, $\dim_F F[G] - \dim_F T \geqslant k$. □

Следствие 2.9. *Предположим, что* $\operatorname{char} F = p > 0$. *Пусть* P *есть* p*-группа. Тогда* $V_0(P)$ *является единственным неприводимым* $F[P]$*-модулем, а* $F[P]_{F[P]}$ *— единственным главным неразложимым* $F[P]$*-модулем. Каждый проективный* $F[P]$*-модуль свободен, а* $F[P]$ *— локальное кольцо.*

Доказательство. Пусть F_1 — поле разложения для $F[P]$. В силу (2.8) $V_0(P) \otimes_F F_1$ является единственным (с точностью до изоморфизма) неприводимым $F_1[P]$-модулем. Значит, $V_0(P)$ является единственным (с точностью до изоморфизма) неприводимым $F[P]$-модулем, а F — полем разложения для $F[P]$. В силу (I.16.9), отсюда следует, что алгебра $F[P]$ неразложима. Значит, $V_0(P) \cong F[P]_{F[P]}/J(F[P])_{F[P]}$, и поэтому $\dim_F F[P]/J(F[P]) = 1$. Поэтому $F[P]$ — локальное кольцо. Остальные утверждения очевидны. □

Следствие 2.10. *Предположим, что* $\operatorname{char} F = p > 0$. *Пусть* P *есть* S_p*-подгруппа группы* G. *Если* U *— проективный* $F[G]$*-модуль, то* $U_P \cong nF[P]_{F[P]}$ *для подходящего целого* n. *В частности,* $\dim_F U \equiv 0 \pmod{|P|}$.

Доказательство. Очевидно ввиду (2.9). □

Лемма 2.11. *Пусть* $H \lhd G$, W *— неприводимый* $F[H]$*-модуль, причем* $T(W) = H$. *Тогда* W^G *является неприводимым* $F[G]$*-модулем.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль подгруппы H в G. В силу (II.2.11), $(W^G)_H = \oplus W^{x_i}$ и $W^{x_i} \cong W^{x_j}$ тогда и только тогда,

когда $i=j$. Пусть V — подмодуль модуля W^G, $V\neq(0)$. В силу (I.5.11), $W^{x_i}\subseteq V_H$ для некоторого i. Значит, $W^{x_i}\subseteq V_H$ для всех i, и поэтому $(W^G)_H=V_H$. Значит, $W^G=V$. Таким образом, W^G неприводим. □

Теорема 2.12 (Клиффорд). *Пусть $H\lhd G$, V — неприводимый $F[G]$-модуль. Тогда существуют такой неприводимый $F[H]$-модуль W и такое целое число $e=e_H(V)$, что $V_H\cong e\{\oplus W^{x_i}\}$, где x_i пробегает трансверсаль $T(W)$ в G. В частности, V_H вполне приводим.*

Доказательство. Пусть W — минимальный подмодуль модуля V_H. Тогда $Wx=W^x$ для $x\in G$, и потому Wx неприводим. Значит, $\sum_{x\in G}W^x$ вполне приводим. Поскольку $\sum W^x$ переходит в себя после умножения на элементы из $F[G]$, неприводимость V влечет, что $V_H=\sum W^x$. Значит, если $\{x_i\}$ — трансверсаль $T(W)$ в G, то из (II.2.11) следует, что $V_H\cong\oplus e_iW^{x_i}$. В силу (2.5),

$$e_iI(W,\ W)=e_iI(W^{x_i},\ W^{x_i})=I(V_H,\ W^{x_i})=I(V,\ (W^{x_i})^G)=I(V,\ W^G).$$

Значит, $e=e_i$ не зависит от i, что и доказывает результат. □

Целое число $e_H(V)$ в (2.12) — это *индекс ветвления модуля V относительно H*.

Следствие 2.13. *Предположим, что* $\operatorname{char}F=p$.

(i) *Пусть H является p-группой и $H\lhd G$. Пусть, далее, V — неприводимый $F[G]$-модуль. Тогда H лежит в ядре модуля V.*

(ii) *Пересечение ядер всех неприводимых $F[G]$-модулей совпадает с $O_p(G)$.*

Доказательство. (i) Очевидно согласно (2.9) и (2.12).

(ii) В силу (I.19.4), можно предполагать, что F — поле разложения для G и всех ее подгрупп. Пусть H — пересечение ядер всех неприводимых $F[G]$-модулей. В силу (2.8), у групп G и G/H равное число сопряженных классов, состоящих из p'-элементов. Значит, H является p-группой. В силу (i), $H=O_p(G)$. □

В общем случае найти индекс ветвления чрезвычайно сложно. Здесь мы докажем лишь очень частный результат.

Теорема 2.14. *Предположим, что поле F алгебраически замкнуто. Пусть $H\lhd G$, G/H — циклическая группа, W — неприводимый $F[H]$-модуль, причем $T(W)=G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Существует такой $F[G]$-модуль V, что $V_H=W$.*

(ii) *Если X — неприводимый $F[G]$-модуль, причем $W\mid X_H$, то $X_H=W$ и $X\cong W\otimes Z$ для неприводимого $F[G/H]$-модуля Z.*

Доказательство. (i) Выберем $x\in G$ так, чтобы $G=\langle x,\ H\rangle$. Пусть A — представление алгебры $F[H]$ с модулем представления W. Поскольку $T(W)=G$, существует такое линейное преобразование M, что $A(x^{-1}yx)=M^{-1}A(y)M$ для всех $y\in H$. Значит, если $n=|G:H|$, то

$$M^{-n}A(y)M^n=A(x^{-n}yx^n)=A(x^n)^{-1}A(y)A(x^n)$$

для всех $y\in H$. Из леммы Шура следует, что $M^n=cA(x^n)$ для некоторого $c\in F$. Выберем $c_0\in F$ так, чтобы $c_0^n=c$. Положим

$A(x)=c_0^{-1}M$. Тогда A продолжается до представления алгебры $F[G]$. В качестве модуля V осталось взять модуль этого представления.

(ii) Пусть $Y=F[G/H]$, рассматриваемый как $F[G]$-модуль. Тогда $W^G\cong V\otimes Y$. Значит, любая неприводимая конституэнта модуля W^G имеет вид $V\otimes Z$, где Z — неприводимый $F[G/H]$-модуль. По взаимности Фробениуса (2.5), $X\cong V\otimes Z$ для подходящего Z. Так как G/H циклическая, то $\dim_F Z=1$, и потому $\dim_F X=\dim_F V=\dim_F W$. Значит, $X_H\cong V$. □

В доказательстве приводимого ниже технического результата применим следующее обозначение.

Если S — подмножество $F[G]$-модуля V, то $\langle S\rangle$ — это F-пространство, порожденное S.

Лемма 2.15. (i) *Пусть V — некоторый $F[G]$-модуль. Элемент x скалярен на V тогда и только тогда, когда $v\in\langle vx\rangle$ для всех $v\in V$.*

(ii) *Для $F[G]$-модуля V свойство $F[G]_{F[G]}|V$ выполнено тогда и только тогда, когда $v\notin\langle vx\,|\,x\in G-\{1\}\rangle$ для некоторого $v\in V$.*

(iii) *Пусть V и W — два $F[G]$-модуля, A и B — подмножества из $G-\{1\}$. Предположим, что $v\in V$, $w\in W$, причем $v\notin\langle vx\,|\,x\in A\rangle$ и $w\notin\langle wx\,|\,x\in B\rangle$. Тогда $v\otimes w\in V\otimes W$, причем $v\otimes w\notin\langle(v\otimes w)x\,|\,x\in A\cup B\rangle$.*

Доказательство. (i) Элементарная линейная алгебра.

(ii) Очевидно, $vy\notin\langle vx\,|\,x\in G-\{1\}\rangle$ в точности тогда, когда $vy\notin\langle vx\,|\,x\in G-\{y\}\rangle$, $y\in G$. Это возможно тогда и только тогда, когда множество $\{vx\,|\,x\in G\}$ линейно независимо или, эквивалентно, когда $F[G]_{F[G]}$ изоморфен подмодулю модуля V. Так как $F[G]_{F[G]}$ инъективен, то отсюда следует результат.

(iii) Существуют такие линейные преобразования a, b пространств V и W соответственно, что $va=v$ и $wb=w$. Однако $\langle vx\,|\,x\in A\rangle a=0$ и $\langle wy\,|\,y\in B\rangle b=0$. Значит, если $y\in A\cup B$, то

$$(v\otimes w)y(a\otimes b)=vya\otimes wyb=0,$$

поскольку $vya=0$ или $wyb=0$. Таким образом, $\langle(v\otimes w)x\,|\,x\in A\cup B\rangle(a\otimes b)=0$ и $(v\otimes w)(a\otimes b)=v\otimes w\neq 0$. □

Теорема 2.16 (Брайнт и Ковач [1972]). *Пусть V_x есть $F[G]$-модуль, на котором $x\in G-\{1\}$ действует не скалярно. Тогда $F[G]|\otimes_{x\in G-\{1\}}V_x$.*

Доказательство. В силу (2.15) (i), существует такой $v_x\in V_x$, что $v_x\notin\langle v_x x\rangle$ для каждого $x\in G-\{1\}$. Повторное применение (2.15) (iii) влечет, что $w=\otimes_{x\in G-\{1\}}v_x\in\otimes_{x\in G-\{1\}}V_x$ удовлетворяет условию $w\notin\langle wy\,|\,y\in G-\{1\}\rangle$. Результат теперь следует из (2.15) (ii). □

Следствие 2.17. *Пусть для $x\in G-\{1\}$, V_x — такой $F[G]$-модуль, для которого x не лежит в ядре V_x. Тогда*

$$F[G]_{F[G]}\Big|\bigotimes_{x\in G-\{1\}}(V_0(G)\oplus V_x)\cong\sum_{A\subseteq G-\{1\}}\Big(\bigotimes_{x\in A}V_x\Big).$$

Доказательство. Очевидно, ввиду (2.16). □

Следствие 2.18. *Предположим, что F алгебраически замкнуто и что* $\operatorname{char} F=p$. *Каждый проективный $F[G]$-модуль неприводимо порожден тогда и только тогда, когда $O_p(G)=\langle 1\rangle$.*

Доказательство. В силу (2.13), $O_p(G)$ является пересечением ядер всех неприводимых $F[G]$-модулей. Значит, если $O_p(G)\neq\langle 1\rangle$, то, в силу (2.10), не существует неприводимо порожденного проективного $F[G]$-модуля. Если $O_p(G)=\langle 1\rangle$, то, по (2.13) (ii), каждый модуль V_x из (2.17) можно выбрать неприводимым и результат теперь следует из (2.17). □

§ 3. Групповые кольца над полными локальными областями

Лемма 3.1. *Пусть H — подгруппа группы G. Если W есть $R[H]$-модуль, то $(W_K)^G\cong(W^G)_K$ и $\overline{W^G}\cong\overline{W^G}$.*

Доказательство. Ясно из определений. □

Лемма 3.2. *Пусть V есть R-свободный $R[G]$-модуль. Тогда:*

(i) $(V^{*(R)})_K\cong(V_K)^{*(R)}\cong\operatorname{Hom}_R(V, K)$;

(ii) $V^{*(\bar R)}\cong\bar V^{*(R)}\cong\overline{V^{*(R)}}$.

Доказательство. (i) Непосредственно следует из определения.

(ii) Очевидно, $V^{*\cdot\bar R)}\cong\overline{V^{*(R)}}$ и $V^{*(\bar R)}\cong\bar V^{(*)(\bar R)}$.

Лемма 3.3. *Предположим, что $p\nmid|G|$. Тогда каждый $R[G]$-модуль R-проективен. Отображения, переводящие V в $\bar V$ и V в V_K, задают биекции между классами изоморфизма R-свободных $R[G]$-модулей и классами изоморфизма $\bar R[G]$- и $K[G]$-модулей соответственно. В частности, если V есть R-свободный $R[G]$-модуль, то V неприводим тогда и только тогда, когда V_K неприводим.*

Доказательство. В силу (II.3.10), все $\bar R[G]$- или $K[G]$-модули проективны и все R-свободные $R[G]$-модули также проективны. Значит, в силу (I.13.7), отображение, переводящее V в $\bar V$, задает требуемую биекцию между классами изоморфизма R-свободных $R[G]$-модулей и классами изоморфизма $\bar R[G]$-модулей. Следовательно, после надлежащего упорядочения неприводимых $\bar R[G]$-модулей можно считать, что матрица разложения D кольца $R[G]$ совпадает с I. Значит, в силу (I.17.8), C является невырожденной диагональной матрицей, где C — матрица Картана кольца $\bar R[G]$. Таким образом, в силу (I.17.10), отображение, переводящее V в V_K, также задает требуемую биекцию.

Пусть V является R-свободным $R[G]$-модулем. Модуль V неразложим тогда и только тогда, когда $\bar V$ неразложим и, значит, неприводим. Далее, V неразложим тогда и только тогда, когда V_K неразложим и, значит, неприводим. □

Лемма 3.4. *Пусть V — точный R-свободный $R[G]$-модуль. Тогда ядром модуля V является p-группа. Если $\pi\neq 0$ и $P\lhd G$, где P является p-группой, то существуют такое конечное расширение S кольца R с полем частных L и такой конечно порожденный S-свободный $S[G]$-модуль W, что $W_L\cong V_L$ и P лежит в ядре модуля $W/J(S)W$.*

Доказательство. Пусть x — некоторый p'-элемент из G. Тогда $\langle x\rangle$ является p'-группой, а V является R-свободным $R\langle x\rangle$-модулем. В силу (3.3), x не лежит в ядре $\bar{V}$.

В силу (I.18.3), существуют такое конечное расширение S кольца R с полем частных L и такой конечно порожденный S-свободный $S[G]$-модуль W, что $V_L \cong W_L$ и $W/J(S)W$ вполне приводим. В силу (2.13), P лежит в ядре $W/J(S)W$. □

Лемма 3.5. *Предположим, что $H \lhd G$, а W — такой неразложимый $R[H]$-модуль, что $T(W)=H$. Тогда W^G неразложим.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль подгруппы H в G, причем $x_1=1$. Положим $W_i = W^{x_i}$. В силу (II.2.11), $(W^G)_H \cong \oplus W_i$, где $W_i \ncong W_j$ при $i \neq j$ и каждый из W_i неразложим. Предположим, что $W^G = V_1 \oplus V_2$. Тогда $(W^G)_H = (V_1)_H \oplus (V_2)_H$. Значит, в силу свойства однозначности разложения, $W \mid (V_1)_H$ или $W \mid (V_2)_H$. Будем считать, что $W \mid (V_1)_H$. Тогда $W_i \mid (V_1)_H$ для всех i. Значит, $(W^G)_H = \oplus W_i \mid (V_1)_H$ по свойству однозначности разложения. Таким образом, $V_2=(0)$, и потому W^G неразложим. □

Лемма 3.6. *Предположим, что $G = H \times A$. Пусть V есть R-свободный $R[H] \cong R[G/A]$-модуль, а W есть R-свободный $R[A] \cong R[G/H]$-модуль. Тогда*

(i) $\mathrm{Inv}_G(V \otimes W) = \mathrm{Inv}_G(V) \otimes \mathrm{Inv}_G(W)$;

(ii) $E_{R[G]}(V \otimes W) = E_{R[H]}(V) \otimes_R E_{R[A]}(W)$;

(iii) *$V \otimes W$ абсолютно неразложимый $R[G]$-модуль тогда и только тогда, когда V и W — абсолютно неразложимые $R[G]$-модули.*

Доказательство. (i) Поскольку V и W оба являются R-свободными R-модулями, таковыми являются и любые подмодули модулей V и W. Пусть $\{w_i\}$ — некоторый R-базис модуля W. Очевидно, $\mathrm{Inv}_G(V)$ и $\mathrm{Inv}_G(W)$ — чистые подмодули модулей V и W соответственно и $\mathrm{Inv}_G(V) \otimes \mathrm{Inv}_G(W) \subseteq \mathrm{Inv}_G(V \otimes W)$. Пусть $v \in \mathrm{Inv}_G(V \otimes W)$. Тогда $v = \sum v_i \otimes w_i$, где $v_i \in V$, $w_i \in W$. Значит, $\sum v_i x \otimes w_i = \sum v_i \otimes w_i$ для всех $x \in H$. Следовательно, $v_i \in \mathrm{Inv}_G(V)$ для всех i. Пусть $\{u_i\}$ — некоторый R-базис в $\mathrm{Inv}_G(V)$. Тогда $v = \sum u_i \otimes w_i'$, где $w_i' \in W$. Значит, $\sum u_i \otimes w_i' x = \sum u_i \otimes w_i'$ для всех $x \in A$, и потому $w' \in \mathrm{Inv}_G(W)$ для всех i. Следовательно, $v \in \mathrm{Inv}_G(V) \otimes \mathrm{Inv}_G(W)$, что и утверждалось.

(ii) В силу (II.2.8), $\mathrm{Hom}_R(V, V)$ и $\mathrm{Hom}_R(W, W)$ являются R-свободными $R[G]$-модулями. Поэтому из (i) и (II.2.8) следует, что

$$\mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(V, V)) \otimes \mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(W, W) = \mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(V \otimes W, V \otimes W)).$$

Результат теперь следует из (II.2.4).

(iii) В силу (I.18.7), существует такое конечное расширение S кольца R, что любая ненулевая неразложимая компонента U модулей V_S, W_S или $(V \otimes W)_S$ абсолютно неразложима и $E_{S[G]}(U)/J(E_{S[G]}(U)) \cong \bar{S}$.

Положим $L = E_{S[G]}((V \otimes W)_S)$, $L_V = E_{S[G]}(V_S)$ и $L_W = E_{S[G]}(W_S)$. Поскольку $\bar{L}$, $\bar{L}_V$, $\bar{L}_W$ являются конечно порожденными $\bar{R}$-алгебрами, их радикалы нильпотентны. Из (I.8.15) и (ii) следует, что $L_V \otimes_S J(L_W) \subseteq J(L)$ и $J(L_V) \otimes_S L_W \subseteq J(L)$. Поэтому существует эпиморфизм $L_V/J(L_V) \otimes_S L_W/J(L_W)$ на $L/J(J)$.

Если V_S и W_S неразложимы, то существует эпиморфизм $S=S\otimes S$ на $L/J(L)$. Поэтому $L/J(L)$ изоморфен $\bar{S}$ и, значит, $(V\otimes W)_S$ неразложим. Если V_S или W_S разложим, то, очевидно, $V_S\otimes W_S$ разложим. □

Лемма 3.7. *Предположим, что $G=H\times A$, где A является p'-группой. Пусть U есть R-свободный $R[G]$-модуль. Для абсолютной неразложимости U необходимо и достаточно, чтобы существовали конечное расширение S кольца R и абсолютно неразложимые S-свободные $S[G]$-модули V и W, такие, что H лежит в ядре модуля W, A — в ядре модуля V и $U_S=V\otimes W$. Если, кроме того, R является полем, то можно считать, что W абсолютно неприводим.*

Доказательство. Если V и W существуют, то, в силу (3.6), U абсолютно неразложим.

Предположим теперь, что U абсолютно неразложим. Тогда существует такое конечное расширение S кольца R, что каждая неразложимая компонента модуля U_H и модуля $S[A]_{S[A]}$ абсолютно неразложима. Изменяя обозначения, заменим S на R. В силу (II.3.10), U является $R[H]$-проективным. Значит, $U\mid (U_H)^G$, и потому $U\mid V^G$ для некоторой неразложимой компоненты V модуля U_H. Непосредственно из определения модуля V^G следует, что $V^G\cong V\otimes R[A]_{R[A]}$, где V является $R[G:A]\cong R[H]$-модулем. Пусть $R[A]_{R[A]}=\oplus W_i$, где каждый из W_i неразложим. Тогда $U\mid V^G\cong\oplus_i V\otimes W_i$, и потому $U\mid V\otimes W_i$ для некоторого i, ввиду свойства однозначности разложения. В силу (3.6), $V\otimes W_i$ неразложим. Значит, $U\cong V\otimes W_i$, что и утверждалось.

Если R — поле, то, в силу (II.3.12), W_i абсолютно неприводим. □

Если абсолютную неразложимость заменить на неразложимость, то лемма (3.7) становится неверной в общем случае. Подробно обсуждение этой ситуации можно найти у Блау [1974a] и у Гудивока [1974], [1977].

Следующий результат о R-свободных модулях принадлежит Дж. А. Грину [1959a], [1962a]. Близкие результаты можно найти у Бруё [1976a].

Теорема 3.8. *Предположим, что $H\lhd G$ и $|G:H|=p$. Пусть V — абсолютно неразложимый $R[H]$-модуль. Тогда V^G абсолютно неразложим.*

Доказательство. В силу (1.18.7), R можно заменить на его подходящее конечное расширение, для которого каждая неразложимая компонента модуля V^G абсолютно неразложима и $E_{R[H]}(V)/J(E_{R[H]}(V))\cong\bar{R}$.

Если $T(V)=H$, то результат следует из (3.5). Предположим, что $T(V)\neq H$. Тогда $T(V)=G$. Выберем $x\in G-H$. Тогда $\{x^i\mid 0\leqslant i\leqslant p-1\}$ является трансверсалью подгруппы H в G. Положим $y=x^p\in H$.

В силу (I.18.6), достаточно показать, что для некоторого конечного расширения S кольца R

$$E_{S[G]}(V_S^G)/J(E_{S[G]}(V_S^G))\cong\bar{S}.$$

Положим $E=E_{R[H]}(V)$. Тогда $E/J(E)\cong\bar{R}$, $E\subseteq E_R(V)$ и

$$E_{R[G]}(V^G)\subseteq E_{R[H]}(V^G)\subseteq E_R(V^G).$$

Поскольку $V\cong V^x$, существует R-изоморфизм h: $V\to V$, такой, что $h(v)z=h(vz^x)$, где $v\in V$, $z\in H$. Значит, $h(v)y=h(vy)$ и $h^i(v)z=h^i(vz^{x^i})$ для всех i. Кроме того, если $g\in E$, то $h^{-1}gh\in E$.

Определим f: $V\to V$, полагая $f(v)=h^p(vy)$. Очевидно, f является R-изоморфизмом. Если $z\in H$, то

$$f(v)z=h^p(vy)z=h^p(vyz^y)=h^p(vzy)=f(vz).$$

Поэтому $f\in E$.

В силу (II.2.11), $(V^G)_H=\otimes_{i=0}^{p-1}V^{x^i}$. Таким образом, если $a\in E_R(V^G)$, то существуют такие $g_{ij}\in E_R(V)$, $i, j=0, \ldots, p-1$, что при $s=0, \ldots, p-1$

$$a(v\otimes x^s)=\sum_{i=0}^{p-1}h^i g_{is}h^{-s}(v)\otimes x^i.$$

Положим $\tilde{a}=(g_{ij})\in(E_R(V))_p$. Отображение, переводящее a в $\tilde{a}$, является, очевидно, R-изоморфизмом $E_R(V^G)$ в $(E_R(V))_p$. Если a, $a'\in E_R(V^G)$, причем $\tilde{a}=(g_{ij})$, $\tilde{a}'=(g'_{ij})$, то для $s=0, \ldots, p-1$

$$aa'(v\otimes x^s)=a\left\{\sum_{i=0}^{p-1}h^i g'_{is}h^{-s}(v)\otimes x^i\right\}=\sum_{j=0}^{p-1}\left\{\sum_{i=0}^{p-1}h^i g_{ji}g'_{is}h^{-s}(v)\right\}\otimes x^j.$$

Таким образом, $\widetilde{aa'}=\tilde{a}\tilde{a}'$, и тем самым отображение, переводящее a в $\tilde{a}$, является кольцевым изоморфизмом. Если $z\in H$, $a\in E_R(V)$, то для $s=0, \ldots, p-1$

$$a(v\otimes x^s)z=\sum_{i=0}^{p-1}\{h^i g_{is}h^{-s}(v)\}z^{x^i}\otimes x^i=\sum_{i=0}^{p-1}h^i(\{g_{is}h^{-s}(v)\}z)\otimes x^i,$$

$$a(v\otimes x^s z)=a(vz^{x^s}\otimes x^s)=\sum_{i=0}^{p-1}h^i g_{is}h^{-s}(vz^{x^s})\otimes x^i.$$

Поэтому $a\in E_{R[H]}(V^G)$ тогда и только тогда, когда для всех i, s, $\{g_{is}h^{-s}(v)\}z=g_{is}\{h^{-s}(v)z\}$. Поскольку h является R-изоморфизмом, последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $g_{is}(w)z=g_{is}(wz)$ для всех $w\in V$, т. е. когда $g_{is}\in E$. Поэтому $\widetilde{E_{R[H]}(V^G)}=E_p$.

Для $a\in E_R(V^G)$ определим a^h, полагая $\tilde{a}^h=(h^{-1}g_{ij}h)$, где $\tilde{a}=(g_{ij})$. Заметим, что $a^h\in E_{R[H]}(V^G)$ тогда и только тогда, когда $a\in E_{R[H]}(V^G)$.

Определим $b\in E_R(V^G)$ равенством $b(v\otimes x^i)=h(v)\otimes x^{i+1}$, где $i=0, \ldots, p-1$. Очевидно,

$$\tilde{b}=\begin{pmatrix}0 & & & 0 & f\\ 1 & 0 & & & 0\\ & 1 & \ddots & & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad b^h=b.$$

Таким образом, $b\in E_{R[H]}(V^G)$. Кроме того,

$$b(v\otimes x^i)x=h(v)\otimes x^{i+2}=b(v\otimes x^{i+1}),\ i=0,\ \ldots,\ p-2;$$
$$b(v\otimes x^{p-1})x=h(v)\otimes x^{p+1}=h(vy)\otimes x=b(vy\otimes 1)=b(v\otimes x^p).$$

Значит, $b\in E_{R[G]}(V^G)$.

В силу (I.9.12),

$$\widetilde{E_{R[G]}(V^G)}\cap J(E_p)\subseteq\widetilde{J(E_{R[G]}(V^G))}. \tag{3.9}$$

Докажем теперь два вспомогательных результата.

(3.10). *Если* $g\in E$, *то* $h^{-1}gh-g\in J(E)$.

Доказательство. Поскольку $E/J(R)\cong\bar{R}$, существует такой $r\in R$, что $g-r\in J(E)$. Значит,

$$h^{-1}gh-r=h^{-1}(g-r)h\in h^{-1}J(E)h=J(E).$$

Таким образом, $h^{-1}gh-g\in J(E)$, что и утверждалось.

(3.11). *Пусть* $a\in E_{R[H]}(V^G)$. *Тогда* $a\in E_{R[G]}(V^G)$ *в точности при* $b^{-1}ab=a^h$.

Доказательство. Положим $\tilde{a}=(g_{ij})$. Для $s=0,\ \ldots,\ p-1$ имеем

$$\{ba^h(v\otimes x^s)\}x^{-1}=\sum_{i=0}^{p-1}h^{i+1}h^{-1}g_{is}hh^{-s}(v)\otimes x^i=a\{b(v\otimes x^s)x^{-1}\}.$$

Значит, $a^h(v\otimes x^s)x^{-1}=b^{-1}ab\{(v\otimes x^s)x^{-1}\}$, что и доказывает (3.11).

Возвратимся теперь к доказательству (3.8).

Положим $R(b)=\{\sum_{i=0}^{p-1}r_ib^i\mid r_i\in R\}$ и $A=\widetilde{E_{R[G]}(V^G)}$. Пусть $B=\widetilde{R(b)}$. Тогда $B=\{\sum_{i=0}^{p-1}r_i\tilde{b}^i\mid r_i\in R\}\subseteq A$. Заметим, что B может не быть кольцом.

Так как $E_p/J(E)E_p\cong(E/J(E))_p\cong\bar{R}_p$, то $J(E_p)=J(E)E_p$. Пусть $\hat{a}$ обозначает образ $a\in E_p$ в $\hat{E}_p=E_p/J(E_p)$.

Поскольку $E/J(E)\cong\bar{R}$, существует такой $s\in R$, $s\neq 0$, что $f-s\in J(E)$. Заменяя R подходящим конечным его расширением, можно предполагать, что $f-r^p\in J(E)$ для некоторого $r\in R$. Значит,

$$\hat{\tilde{b}}=\begin{pmatrix}0 & & & 0 & \bar{r}^p\\ 1 & 0 & & & 0\\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть C есть $\bar{R}$-алгебра, состоящая из всех $p\times p$-матриц с коэффициентами из $\bar{R}$ и коммутирующих с $\hat{\tilde{b}}$. Так как $(t-\bar{r})^p$ является минимальным полиномом для $\hat{\tilde{b}}$, то C состоит из всех полиномов от $\hat{\tilde{b}}$ с коэффициентами из $\bar{R}$. Значит,

$$\hat{B}=C\cong\bar{R}[t]/(t-\bar{r})^p\bar{R}[t]. \tag{3.12}$$

В силу (3.10) и (3.11), $\hat{A}\subseteq C=\hat{B}$. Поскольку $B\subseteq A$, получаем $\hat{A}=\hat{B}$. Значит, $\hat{B}=\hat{A}=A+J(E_p)/J(E_p)\cong A/A\cap J(E_p)$. Поэтому

$\hat{B}/J(\hat{B}) \cong A/J(A)$, ввиду (3.9). Таким образом, достаточно показать, что $\hat{B}/J(\hat{B}) \cong \bar{R}$. Однако это очевидно, ввиду (3.12). □

Следует отметить, что теорема 3.8 неверна, если подгруппа H не является нормальной в G, даже когда R — поле. Например, пусть $G = A_5$, $H = A_4$, $p = 5$, V — неприводимый $R[H]$-модуль, для которого $\dim_R V = 3$. Тогда V^G проективен и $\dim_R V^G = 15$. Однако нетрудно показать, что главных неразложимых $R[G]$-модулей размерности 15 не существует. Эти вычисления сравнительно легко следуют из результатов главы IV.

Следствие 3.13. *Предположим, что $H \lhd G$ и G/H является p-группой. Пусть V — абсолютно неразложимый $R[H]$-модуль. Тогда V^G абсолютно неразложим.*

Доказательство. Индукция и (3.8). □

Следствие 3.14. *Предположим, что G есть p-группа, а H — подгруппа из G. Пусть V — абсолютно неразложимый $R[H]$-модуль. Тогда V^G абсолютно неразложим.*

Доказательство. Индукция и (3.8). □

Следствие 3.15. *Предположим, что $H \lhd G$ и G/H является p-группой. Пусть L — абсолютно неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, $e = e_H(L)$ — индекс ветвления L относительно H. Тогда $e = 1$. Если L_1 — абсолютно неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, не изоморфный L, то L_H не имеет неприводимой конституэнты, изоморфной неприводимой конституэнте модуля $(L_1)_H$.*

Доказательство. Изменяя обозначения, можно предполагать, что $\bar{R}$ является полем разложения для $\bar{R}[G]$ и $\bar{R}[H]$ и что каждый главный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль или $\bar{R}[H]$-модуль абсолютно неразложим. В силу (2.12), $L_H = \oplus eM_i$, где M_i — попарно неизоморфные неприводимые $\bar{R}[H]$-модули. Пусть U — главный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль, соответствующий L, а V_i — главный неразложимый $\bar{R}[H]$-модуль, соответствующий M_i. Тогда $eU \mid V_i^G$, ввиду соотношений Накаямы (2.6). Однако, в силу (3.13), V_i^G неразложим. Значит, $e = 1$. Кроме того, $U \cong V_i^G$ для всех i. Пусть U_1 — главный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль, соответствующий L_1. Если $M_j \mid L_{1H}$ для некоторого j, то $U_1 \cong V_j^G \cong U$. Значит, $L \cong L_1$. □

Следствие 3.16. *Предположим, что $H \lhd G$ и G/H является p-группой. Пусть $\bar{R}$ — поле разложения для $\bar{R}[G]$, M — абсолютно неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль, причем $T(M) = G$. Тогда существует неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль L, такой, что $L_H \cong M$. Кроме того, L однозначно определен с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. В силу (II.2.9), $M \mid (M^G)_H$. Поэтому существует неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль L, такой, что $M \mid L_H$. Поскольку $T(M) = G$, то из (3.15) следует, что $L_H \cong M$ и что L однозначно определен с точностью до изоморфизма. □

Лемма 3.17. *Пусть V — некоторый $R[G]$-модуль, H — подгруппа группы G. Если модуль V $R[H]$-проективен, то $\bar{V}$ — также $\bar{R}[H]$-проективный модуль.*

Доказательство. В силу (II.3.8), $V \mid (V_H)^G$. Значит, $\bar{V} \mid (\bar{V}_H)^G$. Результат теперь следует из (II.3.8). □

Следующий пример показывает, что утверждение, обратное к (3.17), неверно в общем случае.

Пусть $G=\langle x, y \mid x^8=1=y^2,\ y^{-1}xy=x^{-1}\rangle$. Положим $H=\langle x^2, y\rangle$. Тогда $H \lhd G$. G — диэдральная группа порядка 16, а H — диэдральная группа порядка 8.

Рассмотрим 2-адическое пополнение $\mathbf{Q}_2$ поля рациональных чисел. Пусть $K=\mathbf{Q}_2(\varepsilon)$, где ε — примитивный корень 8-й степени из единицы. Обозначим через R кольцо целых поля K. Положим

$$X=\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon^{-1}-\varepsilon & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что отображение, переводящее x в X, y в Y, задает представление группы G. Пусть V — модуль этого представления. Можно проверить, что $\mathrm{Hom}_{R[H]}(V_H, V_H)\cong R$. Значит, V_H абсолютно неразложим. Поэтому, в силу (3.8), $(V_H)^G$ абсолютно неразложим. Поскольку V и $(V_H)^G$ имеют различные ранги, $V\not\cong(V_H)^G$. Тогда $V\not\mid(V_H)^G$, и потому V не является $R[H]$-проективным.

Так как $\varepsilon\equiv 1 \pmod{(\pi)}$, то отсюда следует, что

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \bar{Y}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, H лежит в ядре $\bar{V}$. Отсюда легко заключить, что $\bar{V}\cong W^G$, где W — одномерный $\bar{R}[H]$-модуль, состоящий из инвариантных элементов. Значит, $\bar{V}$ является $\bar{R}[H]$-проективным.

§ 4. Вертексы и источники

В значительной части этого параграфа мы близко следуем Грину [1959а]. См. также Грин [1971], Дресс [1976].

Другой подход к большей части материала настоящего и следующего параграфов недавно был предложен Барри [1979].

Если H, A — подгруппы группы G, то $H\subseteq_G A$ будет означать, что $H^x\subseteq A$ для некоторого $x\in G$, а $H=_G A$ — что $H\subseteq_G A$ и $A\subseteq_G H$. Таким образом, $H=_G A$ тогда и только тогда, когда $H^x=A$ для некоторого $x\in G$.

Лемма 4.1. *Пусть A, H — подгруппы группы G, W — некоторый $R[A]$-модуль, V — компонента W^G. Предположим, что $V_H=U_1\oplus\ldots\oplus U_t$, где каждый из U_i — неразложимый $R[H]$-модуль. Тогда для каждого i существует такой $x_i\in G$, что модуль U_i $R[H\cap A^{x_i}]$-проективен. Более того, $U_i \mid \{W_{H\cap A^{x_i}}^{x_i}\}^H$.*

Доказательство. Непосредственно следует из (II.29). □

Для $R[G]$-модуля V обозначим через $\mathfrak{V}(V)$ множество таких подгрупп H группы G, для которых V $R[H]$-проективен.

Лемма 4.2. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль. Предположим, что:*

(i) *A — минимальный элемент множества $\mathfrak{V}(V)$;*

(ii) *W — такой $R[A]$-модуль, что $V \mid W^G$;*

(iii) *$H\in\mathfrak{V}(V)$.*

Тогда $V|U^G$ по крайней мере для одной неразложимой компоненты U модуля V_H. Кроме того, для любой такой компоненты U существует $x\in G$, для которого $A^x\subseteq H$ и $U|(W^x)^H$.

Доказательство. Поскольку V является $R[H]$-проективным, $V|(V_H)^G$. Значит, $V|U^G$ для некоторой неразложимой компоненты U модуля V_H, поскольку V неразложим. В силу (4.1), для любой такой U существует $x\in G$, что U $R[H\cap A^x]$-проективен. Значит, V является $R[H^{x^{-1}}\cap A]$-проективным. Минимальность A влечет, что $A\subseteq H^{x^{-1}}$, т. е. $A^x\subseteq H$. Последнее утверждение леммы следует из (4.1). □

Следствие 4.3. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль. Существует такая подгруппа A группы G, что V $R[A]$-проективен, и если V $R[H]$-проективен, то $A\subseteq_G H$. Кроме того, A однозначно определена с точностью до сопряженности в G.*

Доказательство. Непосредственно следует из (4.2). □

Если V — неразложимый $R[G]$-модуль, то минимальный элемент множества $\mathfrak{V}(V)$ называется *вертексом* модуля V. В силу (4.3), вертекс модуля V однозначно определен с точностью до сопряженности в G. Мы часто будем говорить просто вертекс. Это не должно вызвать недоразумений.

Лемма 4.4. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом A. Тогда A является p-группой.*

Доказательство. Пусть P — некоторая S_p-подгруппа группы G. В силу (II.3.10), модуль V $R[P]$-проективен. По (4.3), $A\subseteq_G P$. □

Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом A. Неразложимый $R[A]$-модуль W называется *источником* модуля V, если $V|W^G$. Если W — источник модуля V, то, очевидно, $R[A^x]$-модуль W^x — также источник модуля V.

Лемма 4.5. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом A, W, W' — два $R[A]$-модуля, являющиеся источниками модуля V. Тогда $W'\cong W^x$ для некоторого $x\in N_G(A)$.*

Доказательство. По условию, $V|W^G$ и $V|W'^G$. Значит, в силу (4.2), при $H=A$, существует такой $x\in G$, что $A^x\subseteq A$ и $W'|W^x$. Поэтому $x\in N_G(A)$. Поскольку W^x неразложим, $W'\cong W^x$. □

Лемма 4.6. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом A, H — такая подгруппа группы G, что V $R[H]$-проективен и $V_H=U_1\oplus\ldots\oplus U_t$, где каждый из U_i неразложим и имеет вертекс A_i. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *$A_i\subseteq_G A$ для каждого i.*

(ii) *$V|U_j^G$ для некоторого j, и в этом случае $A_j=_G A$; кроме того, если $A\subseteq H$, то $A_j=_H A$ для некоторого j.*

(iii) *Если $A_j=_G A$, то V и U_j имеют общий источник.*

Доказательство. (i) В силу (4.1), U_i является $R[H\cap A^{x_i}]$-проективным для подходящего $x_i\in G$. Значит, $A_i\subseteq_G H\cap A^{x_i}\subseteq_G A$.

(ii) Поскольку V $R[H]$-проективен, $V|(V_H)^G$. Значит, $V|U_j^G$ для некоторого j, поскольку V неразложим. Следовательно, $A\subseteq_G A_j$, и поэтому, ввиду (i), $A=_G A_j$. Если, кроме того, $A\subseteq H$, то $V|(V_A)^G$,

и потому $V \mid W^G$ для некоторой неразложимой компоненты W модуля $(U_j)_A$ при подходящем j. Значит, вертексом модуля W является A. В силу (i), примененного к компонентам модуля $(U_j)_A$, имеем $A \subseteq_H A_j$, и, следовательно, в силу (i), $A =_H A_j$.

(iii) Если $A_j =_G A$, то $A_j = H \cap A^x$ для некоторого $x \in G$. Значит, $H \cap A^x$ является вертексом модуля U_j и $A^x \subseteq H$. Пусть $R[A]$-модуль W является источником модуля V. Тогда, в силу (4.1), $U_j \mid (W_A^x)^H$. Значит, W^x является источником модуля U_j. □

Следствие 4.7. *Пусть H — подгруппа группы G, W — неразложимый $R[H]$-модуль. Тогда W^G обладает такой неразложимой компонентой V, что V и W имеют общий вертекс и источник.*

Доказательство. Выберем $V \mid W^G$ так, чтобы $W \mid V_H$. Результат теперь следует из (4.6). □

Лемма 4.8. *Пусть A — некоторая p-подгруппа группы G, W — такой $R[A]$-модуль, что $\bar{W} = \bar{R} = \mathrm{Inv}_A(\bar{W})$. Тогда некоторая неразложимая компонента модуля W^G имеет вертекс A и источник W. В частности, всякая p-подгруппа группы G является вертексом некоторого неразложимого $R[G]$-модуля.*

Доказательство. В силу (4.7), результат достаточно доказать в случае $A = G$. Пусть A_0 — вертекс W, а $R[A_0]$-модуль W_0 является источником W. Поскольку W является, очевидно, абсолютно неразложимым, то в силу (I.18.7), можно предполагать, после замены R подходящим конечным его расширением, что W_0 абсолютно неразложим. Значит, в силу (3.14), $W \cong W_0^A$. Тогда $|A : A_0| \dim_R \bar{W}_0 = \dim_R \bar{W} = 1$. Поэтому $A = A_0$ и $W \cong W_0$. □

Лемма 4.9. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом A, $\mathfrak{H}$ — непустое множество подгрупп группы G. Тогда $H^{(0)}(G, \mathfrak{H}, \mathrm{Hom}_R(V, V)) = (0)$ в том и только в том случае, если $A \underset{G}{\subseteq} H$ для некоторой $H \in \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Если $A \subseteq_G H$ для некоторой $H \in \mathfrak{H}$, то, в силу (II.3.3) и (II.3.8), имеем $H^{(0)}(G, \mathfrak{H}, \mathrm{Hom}_R(V, V)) = (0)$.

Предположим, что $A \not\subseteq_G H$ для любой $H \in \mathfrak{H}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Тогда V не является $R[H]$-проективным. Значит, в силу (II.3.8), $\mathrm{Tr}_H^G(E_{R[H]}(V)) \neq E_{R[G]}(V)$. Поскольку $E_{R[G]}(V)$ — локальное кольцо, то из (II.3.7) следует, что $\mathrm{Tr}_H^G(E_{R[H]}(V)) \subseteq J(E_{R[H]}(V))$. Поэтому

$$\sum_{H \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}_H^G(E_{R[H]}(V)) \subseteq J(E_{R[G]}(V)) \neq E_{R[G]}(V). \quad \square$$

Лемма 4.10. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом A, $H < G$ и $A \subseteq H$. Тогда существуют такое целое число e и такой неразложимый $R[H]$-модуль W, что $V_H = \oplus_i e W^{x_i}$, где $\{x_i\}$ — трансверсаль подгруппы $T(W)$ в G.*

Доказательство. Существует такой неразложимый $R[H]$-модуль W, что $V \mid W^G$ и $W \mid V_H$. Значит, в силу (II.2.11), $V_H \cong \oplus_i e_i W^{x_i}$ для подходящих целых e_i. Поскольку V является $R[G]$-модулем, $e_i = e_j$ для всех i, j. □

Лемма 4.11. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом H, $y \in G$, причем p-часть элемента y не лежит ни в какой группе, сопряженной с H. Пусть $A = \langle y \rangle$ и $B = \langle y^p \rangle$. Тогда $(V_S)_A = W^A$ для некоторых конечного расширения S кольца R и $S[B]$-модуля W.*

Доказательство. Для $x \in G$, $A \cap H^x \neq A$, и потому $A \cap H^x \subseteq B$. Значит, в силу (4.1), $V_A = \oplus U_i$, где каждый из U_i является неразложимым $R[B]$-проективным модулем. Значит, $V_A \mid M^A$ для некоторого $R[B]$-модуля M. В силу (I.18.7), существует такое конечное расширение S кольца R, что $M_S = \oplus M_i$, где каждый из M_i абсолютно неразложим. В силу (3.8), M_i^A абсолютно неразложим для каждого i. Поскольку $(V_S)_A \mid \oplus M_i^A$, то $(V_S)_A \cong \oplus M_j^A$, где j пробегает подмножество множества $\{i\}$. Полагая $W = \oplus M_j$, получим требуемый результат. □

Лемма 4.12. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль, P — некоторая p-подгруппа, лежащая в ядре модуля V. Тогда P лежит в вертексе модуля V.*

Доказательство. Пусть W_0 — такой $R[P]$-модуль, что $W_0 = \mathrm{Inv}_P(W_0)$ и $\dim_{\bar{R}} \bar{W}_0 = 1$. Тогда $V_P \cong mW_0$ для подходящего целого $m > 0$. В силу (3.14), P является вертексом каждой компоненты модуля V_P. Значит, по (4.1), P содержится в вертексе модуля V. □

Следствие 4.13. *Пусть $P \lhd G$, причем P является p-группой. Пусть, далее, V — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль с вертексом P_0. Тогда $P \subseteq P_0$ и P_0/P является вертексом модуля V, рассматриваемого как $\bar{R}[G/P]$-модуль.*

Доказательство. Непосредственно следует из (2.13), (4.12) и определения. □

Доказательство следующего результата принадлежит Барри. См. Грин [1971, Proposition 3.41], Эрдманн [1977b, Lemma 4.6].

Лемма 4.14. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль, S — конечное расширение кольца R, A — вертекс модуля V. Тогда A является вертексом каждой компоненты модуля V_S.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа группы G; $S[H]$-модуль W, рассматриваемый как $R[H]$-модуль, будем обозначать через $\tilde{W}$. Из определения следует, что $\tilde{W}^G \cong \widetilde{W^G}$. Аналогично, $(M^G)_S \cong (M_S)^G$ для $R[H]$-модуля M.

Пусть W — ненулевой неразложимый $S[G]$-модуль, такой, что $W \mid V_S$. Так как $V \mid (V_A)^G$, то $V_S \mid \{(V_A)_S\}^G$ и, значит, W является $S[A]$-проективным. Если A не является вертексом модуля W, то существует такая подгруппа B группы A, что $|A:B| = p$ и модуль W $S[B]$-проективен. Так как $W \mid V_S$, то $\tilde{W} \mid (\tilde{V}_S) \cong [S:R]\, V$. Значит, $\tilde{W} \cong nV$ для некоторого целого $n > 0$, и поэтому $V \mid (\tilde{W}_B)^G$, поскольку $(\widetilde{W_B})^G \cong (\tilde{W}_B)^G$, вопреки тому, что A является вертексом модуля V. □

§ 5. Соответствие Грина

В большей части этого параграфа мы следуем Грину [1964]. На протяжении настоящего параграфа будем применять следующие обозначения.

P — это p-подгруппа группы G, H — такая подгруппа группы G, что $N_G(P) \subseteq H$.

Если $\mathfrak{H}$ — множество подгрупп группы G, будем писать $A \in_G \mathfrak{H}$, коль скоро $A^x \in \mathfrak{H}$ для некоторого $x \in G$. Определим следующие множества подгрупп.

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(P, H) = \{A \mid A \subseteq P \cap P^x \text{ для некоторого } x \in G - H\},$$

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(P, H) = \{A \mid A \subseteq H \cap P^x \text{ для некоторого } x \in G - H\},$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(P, H) = \{A \mid A \subseteq P \text{ и } A \notin_G \mathfrak{X}\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{X}$ состоит из собственных подгрупп группы P, поскольку $N_G(P) \subseteq H$, и значит, $P \in \mathfrak{A}$. Очевидно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$.

Цель параграфа — установить биективное соответствие между множествами неразложимых $R[G]$-модулей с вертексом, лежащим в $\mathfrak{A}$, и множеством неразложимых $R[H]$-модулей с вертексом, лежащим в $\mathfrak{A}$, которое сохраняет многие свойства модулей. Это соответствие часто используют для изучения различных свойств $R[G]$-модулей, рассматривая соответствующие $R[H]$-модули. Следующие четыре результата предварительны.

Лемма 5.1. *Пусть A — подгруппа группы P. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $A \in_G \mathfrak{X}$;

(ii) $A \in \mathfrak{X}$;

(iii) $A \in \mathfrak{Y}$;

(iv) $A \in_H \mathfrak{Y}$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). $A^z \subseteq P \cap P^x$ для некоторых $z \in G$, $x \in G - H$. Значит, $A \subseteq P \cap P^{z^{-1}} \cap P^{xz^{-1}}$. Так как либо $z^{-1} \in H$, либо $xz^{-1} \notin H$, то $A \in \mathfrak{X}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Очевидно, поскольку $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Очевидно.

(iv) $\Rightarrow$ (i). $A^y \subseteq H \cap P^x$ для некоторых $y \in H$, $x \in G - H$. Значит, $A \subseteq P \cap H^{y^{-1}} \cap P^{xy^{-1}}$. Следовательно, $A \in \mathfrak{X}$, поскольку $xy^{-1} \notin H$. □

Лемма 5.2. *Пусть W является $R[P]$-проективным $R[H]$-модулем. Тогда $(W^G)_H \equiv W(\mathfrak{Y})$.*

Доказательство. Существует такой $R[P]$-модуль U, что $W \mid U^H$. Пусть $U^H = W \oplus W_1$. В силу разложения Макки (II.2.9), $(W^G)_H = W \oplus W'$, $(W_1^G)_H = W_1 \oplus W_1'$ для подходящих W', W_1'. Значит, $(U^G)_H = W \oplus W_1 \oplus W' \oplus W_1'$. Поскольку $H \cap P^x \in \mathfrak{Y}$ при $x \notin H$, из (II.2.9) следует, что $(U^G)_H \equiv U^H(\mathfrak{Y})$. Значит,

$$W \oplus W_1 \oplus W' \oplus W_1' \equiv (U^G)_H \equiv U^H \equiv W \oplus W_1 (\mathfrak{Y}).$$

Поэтому $W' + W_1' \equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$. Следовательно, $(W^G)_H \equiv W(\mathfrak{Y})$. □

Лемма 5.3. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом $A \subseteq P$. Тогда существует такой неразложимый $R[H]$-модуль W с вертексом A, что $V \mid W^G$ и $V_H \equiv W(\mathfrak{Y})$. Кроме того, $V \equiv 0$ $(\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда $W \equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$.*

Доказательство. Пусть U — неразложимый $R[A]$-модуль, причем $V \mid U^G$. Пусть $W \mid U^H$ такой, что $V \mid W^G$. Тогда A является

вертексом модуля W. Значит, $V_H | (W^G)_H$ и, в силу (5.2), $(W^G)_H \equiv W$ $(\mathfrak{Y})$. Следовательно, $V_H \equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$ или $V_H \equiv W$ $(\mathfrak{Y})$.

Если $W \equiv 0$ $(\mathfrak{X})$, то $A \in_G \mathfrak{X}$, и поэтому $A \in \mathfrak{Y}$, ввиду (5.1). Значит, $V_H \equiv W \equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$.

Если $V \not\equiv 0$ $(\mathfrak{X})$, то $A \notin_G \mathfrak{X}$, и поэтому $A \notin_H \mathfrak{Y}$, ввиду (5.1). Значит, в силу (4.6) (ii), $V_H \not\equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$, и поэтому $V_H \equiv W \not\equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$. □

Лемма 5.4. *Пусть W — неразложимый $R[H]$-модуль с вертексом $A \subseteq P$. Тогда существует такой неразложимый $R[G]$-модуль V с вертексом A, что $W | V_H$ и $W^G \equiv V$ $(\mathfrak{X})$. Кроме того, $W \equiv 0$ $(\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда $V \equiv 0$ $(\mathfrak{X})$.*

Доказательство. Пусть $W^G = \oplus V_i$, где каждый из V_i неразложим. В силу разложения Макки (II.2.9), $W | (W^G)_H$, и потому $W | (V_i)_H$ для некоторого i, скажем $W | (V_1)_H$. Если $W \equiv 0$ $(\mathfrak{X})$, то $W^G \equiv 0$ $(\mathfrak{X})$, и поэтому $V_1 \equiv 0 \equiv W^G$ $(\mathfrak{X})$.

Предположим, что $W \not\equiv 0$ $(\mathfrak{X})$. Тогда $W \not\equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$, ввиду (5.1), и поэтому $(V_1)_H \not\equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$. Так как, ввиду (5.2), $(W^G)_H \equiv W$ $(\mathfrak{Y})$, то $(V_i)_H \equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$ при $i > 1$. Значит, в силу (5.3), $V_1 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{X})$ и $V_i \equiv 0$ $(\mathfrak{X})$ при $i > 1$. Следовательно, $W^G \equiv V_1 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{X})$. □

Пусть $V = \oplus V_i$, где каждый из V_i является неразложимым $R[G]$-модулем с вертексом, лежащим в P. Определим $R[H]$-модуль $f(V)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &f(V) = \oplus f(V_i); \\ &f(V_i) = (0), \text{ если } V_i \equiv (0) \ (\mathfrak{X}); \\ &f(V_i) = W, \text{ если } V_i \equiv 0 \ (\mathfrak{X}), \text{ где } W \\ &\qquad \text{определен как в (5.3).} \end{aligned} \tag{5.5}$$

В силу (5.3), отображение f определено корректно на классах изоморфизма неразложимых $R[G]$-модулей. Комбинируя (5.2), (5.3) и (5.4), немедленно получаем следующую теорему.

Теорема 5.6 (Грин [1964]). *Отображение f, определенное с помощью (5.5), задает биективное соответствие из множества всех классов изоморфизма неразложимых $R[G]$-модулей, вертекс которых лежит в $\mathfrak{A}$, на множество всех классов изоморфизма неразложимых $R[H]$-модулей, вертекс которых лежит в $\mathfrak{A}$. Отображение f обладает следующими свойствами:*

(i) *если V есть $R[P]$-проективный $R[G]$-модуль, то $f(V) \equiv V_H$ $(\mathfrak{Y})$ и $f(V)^G \equiv V$ $(\mathfrak{X})$;*

(ii) *пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль, вертекс которого лежит в $\mathfrak{A}$; тогда V и $f(V)$ имеют общий вертекс и источник; если W — неразложимый $R[H]$-модуль, вертекс которого лежит в $\mathfrak{A}$, то $f(V) = W$ тогда и только тогда, когда $V | W^G$ или, эквивалентно, $W | V_H$.*

Отображение, переводящее V в $f(V)$, определенное в (5.5), называется *соответствием Грина относительно* (G, P, H). В случае, когда P, G и H уточняются из контекста, его называют просто *соответствием Грина*. Оставшаяся часть параграфа посвящена изучению других свойств этого отображения.

Лемма 5.7. *Пусть V, V_1, V_2 — неразложимые $R[G]$-модули, вертекс которых лежит в P. Пусть, далее, f — соответствие Грина относительно (G, P, H). Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) $f(V_1)\otimes f(V_2)\equiv f(V_1\otimes V_2)$ $(\mathfrak{X})$.

(ii) $f(\mathrm{Hom}_R(V_1, V_2))\equiv \mathrm{Hom}_R(f(V_1), f(V_2))$ $(\mathfrak{X})$.

(iii) *Если σ — автоморфизм $R[G]$, причем $R^\sigma=R$ и $G^\sigma=G$, то $f(V)^\sigma=f^\sigma(V^\sigma)$, где f^σ — соответствие Грина относительно (G, P^σ, H^σ).*

(iv) *Если модуль V R-свободен, то V^* имеет вертекс, лежащий в P и $f(V^*)=f(V)^*$.*

Доказательство. В силу (II.2.7), вертекс любой компоненты модуля $V_1\otimes V_2$ или $\mathrm{Hom}_R(V_1, V_2)$ лежит в P. Значит, $f(V_1\otimes V_2)$ и $f(\mathrm{Hom}_R(V_1, V_2))$ определены. В силу (5.6) и (II.2.7),

$$f(V_1\otimes V_2)\equiv (V_1)_H\otimes (V_2)_H\equiv f(V_1)\otimes f(V_2)\ (\mathfrak{Y}),$$

$$f(\mathrm{Hom}_R(V_1, V_2))\equiv \mathrm{Hom}_R((V_1)_H, (V_2)_H)\equiv \mathrm{Hom}_R(f(V_1), f(V_2))\ (\mathfrak{Y}).$$

Поскольку $f(V_1\otimes V_2)$, $f(V_1)\otimes f(V_2)$, $f(\mathrm{Hom}_R(V_1, V_2))$ и $\mathrm{Hom}_R(f(V_1), f(V_2))$ являются $R[P]$-проективными по (5.3) и (II.2.7), из (5.1) следует, что приведенные выше сравнения верны и по модулю $\mathfrak{X}$. Это доказывает (i) и (ii).

(iii) Ясно из определения.

(iv) Поскольку $V^{**}\cong V$, из (II.2.7) следует, что V и V^* имеют общий вертекс. В силу (II.2.6), $f(V^*)\cong f(V)^*$. □

Лемма 5.8. *Пусть f — соответствие Грина относительно (G, P, H). Предположим, что $\mathfrak{X}=\{\langle 1\rangle\}$. Пусть V является R-свободным $R[G]$-модулем, и пусть он $R[P]$-проективен, а $\bar{V}$ неразложим. Тогда $\overline{f(V)}\cong f(\bar{V})$.*

Доказательство. Если V проективный, то $\overline{f(V)}=f(\bar{V})=(0)$. Предположим, что V не является проективным. В силу (3.17), $\bar{V}$ $\bar{R}[P]$-проективен. Значит, по (5.6), $f(\bar{V})\equiv\overline{f(V)}$ $(\mathfrak{Y})$. Следовательно, $\overline{f(V)}\cong f(\bar{V})\oplus(\oplus W_i)$, где каждый из W_i — неразложимый $\bar{R}[H]$-модуль, являющийся $\bar{R}[P]$-проективным, и $W_i\equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$. Пусть A — вертекс W_i, причем $A\subseteq P$. Поскольку $W_i\equiv 0$ $(\mathfrak{Y})$, существует такой $z\in H$, что $A^z\subseteq H\cap P^x$ для некоторого $x\in G-H$. Значит, $A\subseteq P\cap P^{xz^{-1}}\in\mathfrak{X}$. Следовательно, $A=\langle 1\rangle$ и W_i $\bar{R}$-проективен. Поэтому $\overline{f(V)}\cong f(\bar{V})\oplus U$ для некоторого проективного модуля U. В силу (I.17.11), $U=(0)$. □

Лемма 5.9 (Грин). *Пусть C — коммутативное кольцо, $\mathfrak{H}$ — множество подгрупп группы G. Тогда $A_{C,\mathfrak{H}}(R[G])$ является идеалом в $A_C(R[G])$. Кроме того, если $\mathfrak{H}$ — множество подгрупп группы P, причем $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{H}$, то*

$$A_{C,\{P\}}(R[G])/A_{C,\mathfrak{H}}(R[G])\cong A_{C,\{P\}}(R[H])/A_{C,\mathfrak{H}}(R[H]).$$

Доказательство. Непосредственно следует из (II.3.5), (5.6) и (5.7). □

Лемма 5.10. *Пусть V, V_1, V_2 — неразложимые $R[G]$-модули с вертексами, лежащими в P. Тогда:*

(i) $H^0(G, \mathfrak{X}, V)\cong H^0(H, \mathfrak{Y}, f(V))\cong H^0(H, \mathfrak{X}, f(V))$;

(ii) $\mathrm{Hom}_R(V_1, V_2)$ *$R[P]$-проективен и*

$$H^0(G, \mathfrak{X}, \mathrm{Hom}_R(V_1, V_2)) \cong H^0(H, \mathfrak{Y}, \mathrm{Hom}_R(f(V_1), f(V_2))) \cong$$
$$\cong H^0(H, \mathfrak{X}, \mathrm{Hom}_R(f(V_1), f(V_2))).$$

Доказательство. (i) Существует такой $R[P]$-модуль U, что $f(V)|U^H$. Если B — подгруппа группы H, то разложение Макки (II.2.9) и (II.3.4) влекут

$$\mathrm{Inv}_B(U^H) = \sum_{z \in H} \mathrm{Tr}^B_{B \cap P^z}(\mathrm{Inv}_{B \cap P^z}(U^H)).$$

Поскольку $f(V)|U^h$,

$$\mathrm{Inv}_B(f(V)) = \sum_{z \in H} \mathrm{Tr}^B_{B \cap P^z}(\mathrm{Inv}_{B \cap P^z}(f(V))).$$

Следовательно, если $\mathfrak{B}_0$ — непустое множество подгрупп группы H, то $H^0(H, \mathfrak{B}_0, f(V)) \cong H^0(H, \mathfrak{B}, f(V))$, где $\mathfrak{B} = \{B \cap P^z \mid B \in \mathfrak{B}_0, z \in H\}$.

Определим следующие множества подгрупп группы G.

$$\mathfrak{X}_0 = \{A \mid A \subseteq H \cap P^y \cap P^{xy},\ x \in G - H,\ y \in G\},$$
$$\mathfrak{X}_1 = \{A \mid A \subseteq H \cap P^y \cap P^{xy} \cap P^z,\ x \in G - H,\ y \in G,\ z \in H\} =$$
$$= \{A \mid A \subseteq P^y \cap P^{xy} \cap P^z,\ x \in G - H,\ y \in G,\ z \in H\},$$
$$\mathfrak{Y}_1 = \{A \mid A \subseteq H \cap P^x \cap P^z,\ x \in G - H,\ z \in H\} =$$
$$= \{A \mid A \subseteq P^x \cap P^z,\ x \in G - H,\ z \in H\}.$$

Если $A \in \mathfrak{X}_1$, то $A \subseteq P^y \cap P^{xy} \cap P^z$ для некоторых $x \in G - H$, $y \in G$, $z \in H$. Значит, $A \subseteq P^y \cap P^z$ и $A \subseteq P^{xy} \cap P^z$. Либо $y \in G - H$, либо $xy \in G - H$. Значит, $A \in \mathfrak{Y}_1$. Если $A \in \mathfrak{Y}_1$, $A \subseteq P^x \cap P^z$ для некоторого $x \in G - H$, $z \in H$. Значит, $A \subseteq P^z \cap P^{(xz^{-1})z} \cap P^z$ и $xz^{-1} \in G - H$. Поэтому $A \in \mathfrak{X}_1$. Таким образом, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$. Первый абзац теперь влечет

$$H^0(H, \mathfrak{Y}, f(V)) \cong H^0(H, \mathfrak{Y}_1, f(V)) \cong H^0(H, \mathfrak{X}_1, f(V)) \cong H^0(H, \mathfrak{X}_0, f(V)).$$

Значит, в силу (II.3.5),

$$H^0(H, \mathfrak{Y}, f(V)) \cong H^0(H, \mathfrak{X}_0, f(V)) \cong H^0(G, \mathfrak{X}, f(V)^G).$$

Следовательно, ввиду (5.6) (i) и (II.3.6),

$$H^0(H, \mathfrak{Y}, f(V)) \cong H^0(G, \mathfrak{X}, f(V)^G) \cong H^0(G, \mathfrak{X}, V).$$

В силу (II.3.2), $H^0(H, \mathfrak{Y}_1, f(V)) \cong H^0(H, \mathfrak{X}, f(V))$. Это устанавливает второй изоморфизм.

(ii) В силу (II.3.8), $\mathrm{Hom}_R(V_1, V_2)$ является $R[P]$-проективным. Результат теперь следует из (5.7) и (i). □

Лемма 5.11. (i) *Если V — абсолютно неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, вертекс которого лежит в $\mathfrak{A}$, то* $H^0(H, \mathfrak{Y}, \mathrm{Hom}_R(f(V), f(V))) \cong \bar{R}$.

(ii) *Если V — такой R-свободный $R[G]$-модуль, вертекс которого лежит в $\mathfrak{A}$, что V_K абсолютно неприводим, то* $H^0(H, \mathfrak{Y}, \mathrm{Hom}_R(f(V), f(V)))$ — *ненулевой циклический R-модуль.*

Доказательство. (i) В силу (II.2.4), $\mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(V, V)) \cong \bar{R}$. Значит, по (4.9), $H^0(G, \mathfrak{X}, \mathrm{Hom}_R(V, V)) \cong \bar{R}$. Результат теперь следует из (5.10).

(ii) В силу (II.2.4), $\mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(V, V))_K \cong K$, и поэтому $\mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_R(V, V))$ является ненулевым циклическим R-модулем. Поэтому, с учетом (4.9), $H^0(G, \mathfrak{X}, \mathrm{Hom}_R(V, V))$ является ненулевым циклическим R-модулем. Результат теперь следует из (5.10). □

Одной из наиболее важных проблем всей теории является получение характеризации $R[H]$-модулей W с вертексом в $\mathfrak{P}$, обладающих тем свойством, что $W = f(V)$ для подходящего $R[G]$-модуля V или подходящего R-свободного $R[G]$-модуля V, для которого V_K неприводим. В этом направлении известно очень мало. Лемма 5.11 дает довольно скудное необходимое условие. Подобным образом, можно задать вопрос о нахождении критерия того, когда подгруппы и модули являются вертексами и источниками неприводимых модулей. В этой связи, по существу, ничего не известно, за исключением некоторых результатов для разрешимой группы G. См. § 7 гл. X.

Следующий результат иллюстрирует, в какой степени условия из (5.11) могут быть достаточными.

Лемма 5.12. *Пусть V_i, W_i, U_i, $i = 1, 2$, — R-свободные $R[G]$-модули, где U_i проективен, причем для $i = 1, 2$*

$$0 \to W_i \to U_i \to V_i \to 0$$

является точной последовательностью. Пусть $\mathfrak{H}$ — непустое множество подгрупп группы G. Тогда $(W_1 \otimes W_2^*) \oplus U_3 \cong (V_1 \otimes V_2^*) \oplus U_4$ для подходящих проективных модулей U_3, U_4 и

$$H^0(G, \mathfrak{H}, \mathrm{Hom}_R(V_1, V_2)) \cong H^0(G, \mathfrak{H}, \mathrm{Hom}_R(W_1, W_2)).$$

Доказательство. Поскольку все модули R-свободны, следующие последовательности

$$0 \to W_1 \otimes W_2^* \to U_1 \otimes W_2^* \to V_1 \otimes W_2^* \to 0,$$
$$0 \to V_2^* \to U_2^* \to W_2^* \to 0,$$
$$0 \to V_2^* \otimes V_1 \to U_2^* \otimes V_1 \to W_2^* \otimes V_1 \to 0$$

точны. Значит, в силу (I.4.3), $(W_1 \otimes W_2^*) \oplus U_3 \cong (V_1 \otimes V_2^*) \oplus U_4$ для подходящих проективных модулей U_3, U_4. Следовательно, по (II.2.8), $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) \oplus U_3 \cong \mathrm{Hom}_R(V_1, V_2) \oplus U_4$. Результат теперь следует из (II.3.6). □

Пусть H — подгруппа группы G, и пусть V является $R[G]$-модулем. Как правило, получить какую-либо информацию относительно строения $\mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{Inv}_H(V))$ довольно трудно. Мы завершим настоящий параграф некоторыми результатами, относящимися к этому вопросу.

Лемма 5.13. *Пусть V_1, V_2 — два $\bar{R}[G]$-модуля, не являющиеся проективными. Предположим, что V неприводим, а V_2 неразложим. Тогда при $\{i, j\} = \{1, 2\}$*

(i) $\mathrm{Tr}^G_{<1>}(\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(V_i, V_j)) = (0)$;

(ii) $H^0(G, <1>, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(V_i, V_j)) \cong \mathrm{Hom}_{\bar{R}[G]}(V_i, V_j)$.

Доказательство. Очевидно, из (i) следует (ii). Пусть U — такой проективный $\bar{R}[G]$-модуль, для которого последовательность $U \xrightarrow{f} V_2 \to 0$ точна. Предположим, что $g \in \mathrm{Tr}^G_{<1>}(\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(V_1, V_2))$, причем $g \neq 0$. В силу (II.3.13), существует такой $h \in \mathrm{Hom}_{\bar{R}[G]}(V_1, U)$, что $g = fh$. Так как V_1 неприводим, то $h(V_1)$ лежит в цоколе модуля U. Поэтому цоколь модуля U не лежит в ядре f. Следовательно, для некоторого неразложимого прямого слагаемого U_1 модуля U цоколь модуля U_1 не лежит в ядре f. Поскольку U_1 обладает неприводимым цоколем, $U_1 \cong f(U_1) \subseteq V_2$. Значит, $U_1 | V_2$, вопреки условию.

Если $g \in \mathrm{Tr}^G_{<1>}(\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(V_2, V_1))$, то $g^* \in \mathrm{Tr}^G_{<1>}(\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(V_1^*, V_2^*))$. Ввиду предыдущего абзаца, $g^* = g = 0$. □

Лемма 5.14. *Пусть P — некоторая p-группа, A — подгруппа группы P, V — такой $\bar{R}[P]$-модуль, что $\mathrm{Tr}^P_A(\mathrm{Inv}_A(V)) \neq (0)$. Тогда существуют такие подмодули $W_1 \subseteq W_2 \subseteq V$, что W_2/W_1 $\bar{R}[A]$-проективен и $\mathrm{Tr}^P_A(\mathrm{Inv}_A(W_2/W_1)) \neq (0)$. Кроме того, $\dim_{\bar{R}} V \geqslant |P:A|$.*

Доказательство. Пусть $v \in \mathrm{Inv}_A(V)$, причем $w = \mathrm{Tr}^P_A(v) \neq 0$. Можно предполагать, что V порождается элементом v, а w порождает цоколь модуля V. Тогда существует точная последовательность $0 \to V \xrightarrow{f} U$, где $U \cong \bar{R}[P]_{\bar{R}[P]}$. Поскольку U_A — проективный $\bar{R}[A]$-модуль, каждый инвариантный элемент из U_A является следом, Значит, $f(v) = \mathrm{Tr}^A_{<1>}(u)$ для некоторого $u \in U$. Поскольку $\mathrm{Tr}^P_{<1>}(u) = f(w) \neq 0$, из строения U следует, что $\{ux \mid x \in P\}$ является $\bar{R}$-базисом U. Значит, если $\{x_i\}$ — трансверсаль A в P, то $\{f(v)x_i\}$ — линейно независимое над $\bar{R}$ множество и $\{wf(v)x_i\}$ является $\bar{R}$-базисом модуля $f(V) \cong V$. Пусть V_0 — одномерный $\bar{R}[A]$-модуль, причем $V_0 = \mathrm{Inv}_A(V_0)$. Тогда $f(V) \cong V_0^P$, и, значит, $V \cong f(V)$ является $\bar{R}[A]$-проективным. □

Лемма 5.15. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустой набор подгрупп группы G, V — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль.*

(i) $\{\pi V + \sum_{A \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}^G_A(\mathrm{Inv}_A(V))\}/\pi V$ *изоморфен подмодулю модуля* $\sum_{A \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}^G_A(\mathrm{Inv}_A(\bar{V}))$.

(ii) *Если* $H^0(G, \mathfrak{H}, \bar{V}) \cong \mathrm{Inv}_G(\bar{V})$, *то* $\overline{H^0(G, \mathfrak{H}, V)} \cong \overline{\mathrm{Inv}_G V}$.

Доказательство. (i) Пусть $t: V \to \bar{V}$ — естественная проекция. Поскольку $t(\mathrm{Tr}^G_A(v)) = \mathrm{Tr}^G_A(tv)$, t отображает $\sum_{A \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}^G_A(\mathrm{Inv}_A(V))$ в $\sum_{A \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}^G_A(\mathrm{Inv}_A(\bar{V}))$. Кроме того, ядро отображения t, ограниченного на $\sum_{A \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}^G_A(\mathrm{Inv}_A(\bar{V}))$, совпадает с $\pi V \cap \sum_{A \in \mathfrak{H}} \mathrm{Tr}^G_A(\mathrm{Inv}_A(\bar{V}))$. Отсюда следует результат.

(ii) Непосредственно следует из (i). □

Следует заметить, что утверждение, обратное к (5.15), может оказаться неверным. Например, пусть V, G, H определены, как в примере после (3.17). Тогда $\bar{V}$ $\bar{R}[H]$-проективен и, значит

$$H^0(G, \{H\}, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(\bar{V}, \bar{V})) = (0) \neq \mathrm{Hom}_{\bar{R}[G]}(\bar{V}, \bar{V}).$$

Однако $V\otimes_R K$ абсолютно неприводим и V не $R[H]$-проективен. Значит,

$$\overline{H^0(G, \{H\}, \mathrm{Hom}_R(V, V))}\cong \bar{R}\cong \overline{\mathrm{Hom}_{R[G]}(V, V)}.$$

Следующий результат анонсирован Фейтом [1969]. Близкие результаты можно найти у Фейта и Линдси [1978].

Лемма 5.16. *Пусть V — такой R-свободный $R[G]$-модуль, вертекс которого лежит в $\mathfrak{N}$ и V_K абсолютно неприводим. Предположим, что $\{\mathrm{rank}_R f(V)\}^2<\min_{A\in\mathfrak{X}}|P:A|$ и что характеристика поля K равна 0. Тогда $f(V)_K$ абсолютно неприводим.*

Доказательство. В силу (5.14), $\mathrm{Tr}_A^H(\mathrm{Inv}_A(\overline{\mathrm{Hom}_R(f(V), f(V))}))=(0)$ при $A\in\mathfrak{X}$. Значит,

$$H^0(H, \mathfrak{X}, \overline{\mathrm{Hom}_R(f(V), f(V))})=\mathrm{Inv}_H(\overline{\mathrm{Hom}_R(f(V), f(V))}).$$

Следовательно, из (5.15) (ii) вытекает, что

$$\overline{H^0(H, \mathfrak{X}, \mathrm{Hom}_R(f(V), f(V)))}\cong \overline{\mathrm{Inv}_H(\mathrm{Hom}_R(f(V), f(V)))}.$$

В силу (5.10), $H^0(H, \mathfrak{X}, \mathrm{Hom}_R(f(V), f(V)))\cong H^0(H, \mathfrak{Y}, \mathrm{Hom}_R(f(V), f(V)))$ является ненулевым циклическим R-модулем. Так как $\overline{\mathrm{Inv}_H(\mathrm{Hom}_R(f(V), f(V)))}\cong\bar{R}$, то $\mathrm{Inv}_H(\mathrm{Hom}_R(f(V), f(V)))\cong R$. Значит, $I_K(f(V)_K, f(V)_K)=1$. Отсюда следует результат, поскольку алгебра $K[G]$ полупроста из-за нулевой характеристики поля K. □

§ 6. Дефектные группы

В этом параграфе мы следуем Грину [1962a]. См. также Брауэр [1956], Осима [1955], Розенберг [1961]. На протяжении настоящего параграфа будем применять следующие обозначения и терминологию.

H — подгруппа группы G.

Два элемента $x_1, x_2\in G$ называются *H-сопряженными*, если $x_1=x_2^y$ для некоторого $y\in H$. Очевидно, H-сопряженность является отношением эквивалентности. Пусть $L_1, L_2, \ldots$ — все классы эквивалентности группы G относительно H-сопряженности. Если $G=H$, то $L_1, L_2, \ldots$ являются просто сопряженными классами группы G.

Для $x\in L_k$ через a_{ijk} будем обозначать число всех тех упорядоченных пар (x_i, x_j), для которых $x_i\in L_i$, $x_j\in L_j$ и $x_ix_j=x$. Легко видеть, что a_{ijk} не зависит от выбора x из L_k. Кроме того, $\hat{L}_i\hat{L}_j=\sum_k a_{ijk}\hat{L}_k$.

Пусть $P\subseteq H$ является p-группой. Класс L_i называется *P-дефектным*, если $x^y=x$ для некоторого $x\in L_i$ и для всех $y\in P$. Очевидно, L_i P-дефектен тогда и только тогда, когда существует $x\in L_i\cap C_G(P)$.

Пусть $x\in L_i$, P_i является S_p-подгруппой группы $C_G(x)\cap H=C_H(x)$. Тогда P_i называется *p-дефектной группой* класса L_i или просто *дефектной группой* класса L_i. Непосредственно можно проверить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 6.1. *Пусть P_i — дефектная группа класса L_i. Тогда:*

(i) *L_i является P_i-дефектным;*

(ii) *если L_i P-дефектен для некоторой p-подгруппы P из H, то $P\subseteq_H P_i$.*

В силу (6.1), любые две дефектные группы класса L_i сопряжены в H. На протяжении настоящего параграфа P_i будет обозначать дефектную группу класса L_i.

Если $|P_i|=p^{d_i}$, то d_i называется *p-дефектом* или просто *дефектом* класса L_i.

Для $x\in G$ определим $r_x\in E_R(R[G]_{R[G]})$, полагая $ar_x=ax$, где $a\in R[G]$. Отображение, переводящее x в r_x, задает кольцевой мономорфизм $R[G]$ в $E_R(R[G]_{R[G]})$. Если x, $y\in G$, то по определению (см. текст после (II.2.3)) $r_{(x^y)}=(r_x)y$. Значит, $R[G]$ приобретает структуру $R[G]$-модуля, если действие задать как $(x)y=(x^y)$, где x, $y\in G$. Обозначим этот модуль через $E(G)$. Тогда, как кольцо, $E(G)=R[G]$. Положим

$$Z(G:H)=Z(R;\ G:H)=\mathrm{Inv}_H(E(G)).$$

Легко видеть, что $Z(G:H)$ является R-свободной R-алгеброй и что $\{\hat{L}_i\}$ образует R-базис в $Z(G:H)$. Очевидно, что $Z(G:\langle 1\rangle)=E(G)=R[G]$, а $Z(G:G)$ — центр в $R[G]$.

Лемма 6.2 (Брауэр). *Если $a_{ijk}\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ и L_R P-дефектен для некоторой p-подгруппы P из H, то L_i и L_j P-дефектны.*

Доказательство. Пусть $x\in L_k\cap C_G(P)$. Положим

$$A_{ij}=\{(x_i,\ x_j)\,|\,x_i\in L_i,\ \ x_j\in L_j,\ \ x_ix_j=x\}.$$

Тогда $|A_{ij}|=a_{ijk}$. Если $y\in P$, определим $(x_i,\ x_j)^y=(x_i^y,\ x_j^y)$. Тогда P действует как группа перестановок на множестве A_{ij}. Мощность любой орбиты относительно действия группы P является степенью числа p. Поскольку $a_{ijk}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$, существует орбита длины один. Значит, существует такая пара $(u,\ v)\in A_{ij}$, что $P\subseteq C_H(u)$ и $P\subseteq C_H(v)$. □

Для любой p-группы P из H положим

$$Z_P(G:H)=\{\textstyle\sum r_i\hat{L}_i\,|\,r_i\in R,\ r_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\pi),$$

если не выполняется включение $P_i\subseteq_H P\}$.

Тогда $(\pi)Z(G:H)\subseteq Z_P(G:H)$ и $Z_Q(G:H)\subseteq Z_P(G:H)$, если $Q\subseteq P$. Кроме того, если P является S_p-подгруппой группы H, то $Z(G:H)=Z_P(G:H)$.

Лемма 6.3 (Осима). *Пусть P и Q — две p-группы, лежащие в H. Тогда*

$$Z_P(G:H)\,Z_Q(G:H)\subseteq\textstyle\sum Z_A(G:H),$$

где A пробегает все те p-подгруппы из H, для которых $A\subseteq_H Q$ и $A\subseteq_H P$. Кроме того, $Z_P(G:H)$ — идеал в $Z(G:H)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $P_i\subseteq_H P$ и $P_j\subseteq_H P$, то $\hat{L}_i\hat{L}_j\in\sum Z_A(G:H)$.

Если $a_{ijk}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\pi)$, то $a_{ijk}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$. Значит, в силу (6.1) и (6.2), $P_k\subseteq_H P_i$ и $P_k\subseteq_H P_j$. Это доказывает первое утверждение. Второе также следует, если в качестве Q взять S_p-подгруппу группы H. □

Лемма 6.4. *Пусть e — примитивный идемпотент из $Z(G:H)$, $\mathfrak{P}$ — такое множество p-подгрупп группы H, что $e\in\sum_{P\in\mathfrak{P}}Z_P(G:H)$. Тогда $e\in Z_Q(G:H)$ для некоторой $Q\in\mathfrak{P}$.*

Доказательство. Поскольку e — идемпотент,

$$e \in \sum_{P \in \mathfrak{P}} Z_P(G:H)\, e \subseteq eZ(G:H)\, e.$$

Так как e примитивен, то из (I.7.2), (I.8.2) и (I.10.4) следует, что $eZ(G:H)e$ — локальное кольцо. В силу (6.3), каждый из $eZ_P(G:H)e$ является идеалом в $eZ(G:H)e$. Значит, $eZ_Q(G:H)e = eZ(G:H)e$ для некоторой $Q \in \mathfrak{P}$. Следовательно, в силу (6.3), $e \in eZ_Q(G:H)e \subseteq$ $\subseteq Z_Q(G:H)$. □

Лемма 6.5. *Пусть e — примитивный идемпотент из $Z(G:H)$. Тогда существует такая p-подгруппа P группы H, что*

(i) $e \in Z_P(G:H)$;

(ii) *если $e \in Z_Q(G:H)$ для некоторой p-подгруппы Q группы H, то $P \subseteq_H Q$; кроме того, если $e \in \sum a_i \hat{L}_i$, то $a_j \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ для некоторого j, которому отвечает P-дефектный класс L_j.*

Доказательство. Если Q есть S_p-подгруппа группы H, то $e \in Z(G:H) = Z_Q(G:H)$. Выберем P минимальной среди тех, для которых $e \in Z_P(G:H)$. Тем самым выполнено свойство (i).

Если $e \in Z_Q(G:H)$, то, в силу (6.3),

$$e = e^2 = Z_P(G:H)\, Z_Q(G:H) \subseteq \sum Z_A(G:H),$$

где A пробегает те подгруппы группы H, для которых $A \subseteq_H P$ и $A \subseteq_H Q$. В силу (6.4), $e \in Z_{A_0}(G:H)$ для некоторой $A_0 \subseteq_H P$ и $A_0 \subseteq_H Q$. Минимальность P влечет $A_0 =_H P$, и потому $P \subseteq_H Q$, что доказывает первое утверждение из (ii).

Если $\mathfrak{P} = \{P_i \mid a_i \not\equiv 0 \pmod{\pi}\}$, то $e \in \sum_{A \in \mathfrak{P}} Z_A(G:H)$. Значит, в силу (6.4), $e \in Z_{A_0}(G:A)$ для некоторой $A_0 \in \mathfrak{P}$. Поэтому, по первому утверждению из (ii), $P \subseteq_H A_0$, что в полном объеме доказывает (ii). □

Если e — примитивный идемпотент из $Z(G:H)$, то группа P, определенная в (6.5), называется *p-дефектной группой* или просто *дефектной группой* идемпотента e. В силу (6.5), две любые дефектные группы идемпотента e сопряжены в H. Если $|P| = p^d$, то d называется *дефектом* идемпотента e.

Лемма 6.6. *Пусть P есть p-подгруппа группы H, Tr_P^H — относительный след модуля $E(G)$. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если $a \in Z_P(G:H)$, то существует такой элемент $b \in Z(G:P)$, что*

$$a \equiv \mathrm{Tr}_P^H(b) \pmod{(\pi) Z(G:H)}.$$

(ii) *Если e — идемпотент из $Z_P(G:H)$, то существует такой $c \in Z(G:P)$, что $ece = e$ и $e = \mathrm{Tr}_P^H(c)$.*

Доказательство. (i) Результат достаточно доказать в случае $a = \hat{L}_i$ для некоторого i, причем $P_i \subseteq P$. Выберем $x \in L_i \cap C_G(P_i)$ и положим $C = C_H(x)$. Тогда $\hat{x} \in Z(G:P_i)$ и

$$\mathrm{Tr}_P^H(\mathrm{Tr}_{P_i}^P(\hat{x})) = \mathrm{Tr}_{P_i}^H(\hat{x}) = \mathrm{Tr}_C^H(\mathrm{Tr}_{P_i}^C(\hat{x})) = |C:P_i|\, \mathrm{Tr}_C^H(\hat{x}) = |C:P_i|\, \hat{L}_i.$$

Поскольку $|C:P_i|^{-1} \in R$, отсюда следует требуемый результат.

(ii) В силу (i), существует такой $b\in Z(G:P)$, что $\mathrm{Tr}_P^H(b)=e-d$, где $d\in(\pi)Z(G:H)$. Значит, по (II.3.7), $\mathrm{Tr}_P^H(ebe)=e-ede$ и $ede\in\in(\pi)eZ(G:H)e\subseteq J(eZ(G:H)e)$. Поэтому ede — квазирегулярный элемент из $eZ(G:H)e$, и существует такой $d_1\in eZ(G:H)e$, что $e=d_1(e-ede)$. Положим $c=d_1ebe$. Тогда $ece=e$ и, по (II.3.7), $\mathrm{Tr}_P^H(c)=e$. □

Теорема 6.7 (Грин). *Пусть V есть $R[G]$-модуль, P — некоторая p-подгруппа группы H, e — идемпотент из $Z_P(G:H)$. Тогда $(V_H)e$ $R[P]$-проективен.*

Доказательство. Выберем c как в (6.6). Положим $fv=vc$, где $v\in V$. Тогда $f\in E_{R[P]}((V_H)e)$ и $\mathrm{Tr}_P^H(f)=1$ в $E_{R[P]}((V_H)e)$. Значит, по (II.3.8), $(V_H)e$ $R[P]$-проективен. □

В оставшейся части параграфа мы будем рассматривать случай $H=G$.

В этом случае $Z(G:G)$ является центром алгебры $R[G]$. Поэтому примитивные идемпотенты из $Z(G:G)$ являются примитивными центральными идемпотентами алгебры $R[G]$. Если $B=B(e)$ — блок в $R[G]$, соответствующий примитивному центральному идемпотенту e алгебры $R[G]$, то назовем *дефектной группой блока B* дефектную группу идемпотента e, а дефектом блока B дефект идемпотента e.

Следствие 6.8. *Пусть B — блок алгебры $R[G]$ с дефектной группой D, и пусть V есть $R[G]$-модуль из B. Тогда V $R[D]$-проективен.*

Доказательство. Пусть $B=B(e)$, где e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$. Тогда $V=Ve$. Результат теперь следует из (6.7), где $H=G$ и $P=D$. □

Следствие 6.9. *Предположим, что $P\lhd G$. P есть p-группа. Тогда P содержится в дефектной группе каждого блока.*

Доказательство. В силу (I.17.3), блок B содержит неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль. Согласно (4.13), P лежит в вертексе каждого неприводимого $\bar{R}[G]$-модуля. Результат теперь следует из (6.8). □

Теорема 6.10. *Пусть $B=B(e)$ — блок $R[G]$, соответствующий примитивному центральному идемпотенту e, λ — центральный характер алгебры $\bar{R}[G]$, причем $\lambda(\bar{e})=1$, D — дефектная группа блока B. Тогда:*

(i) *если $\lambda(\bar{L}_i)\neq 0$, то $D\subseteq_G P_i$;*

(ii) *существует такой j, что $\lambda(\bar{L}_j)\neq 0$ и D — дефектная группа класса L_j.*

Доказательство. Если $A\subseteq_G D$, то, ввиду (6.3), $eZ_A(G:G)e$ является идеалом локального кольца $eZ_D(G:G)e$. Так как, по (6.5), $e\notin Z_A(G:G)$, то $eZ_A(G:G)e\subseteq J(eZ_D(G:G)e)$. Значит,

$$\overline{\lambda(Z_A(G:G))}=\overline{\lambda(eZ_A(G:G)e)}=0.$$

Если $D\not\subseteq_G P_i$ для некоторого i, то, в силу (6.3),

$$eZ_{P_i}(G:G)\subseteq Z_D(G:G)Z_{P_i}(G:G)\subseteq\sum Z_A(G:G),$$

где A пробегает множество тех подгрупп, для которых $A\subset_G D$. Значит, $\lambda(\overline{Z_{P_i}(G:G)})=\lambda(\overline{eZ_{P_i}(G:G)})=0$, что доказывает (i).

Пусть $e=\sum a_i\hat{L}_i$. Поскольку $\lambda(\bar{e})\neq 0$, существует такой индекс j, что $a_j\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi)$ и $\lambda(\bar{\hat{L}}_j)\neq 0$. В силу (i), $D\subseteq {}_GP_j$. Значит, $D={}_GP_j$, поскольку $a_j\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi)$ и $e\in Z_D(G:G)$. □

Следствие 6.11. *Пусть P является p-группой и $P\lhd G$. Если сопряженный класс L_i группы G не P-дефектен, то $\bar{\hat{L}}_i$ нильпотентен в $\bar{R}[G]$.*

Доказательство. Если $\bar{\hat{L}}_i$ не нильпотентен в $\bar{R}[G]$, то он не нильпотентен и в $\bar{S}[G]$ для любого конечного расширения S кольца R. Таким образом, заменяя R подходящим конечным расширением, результат достаточно доказать в случае, когда $\bar{R}$ является полем разложения для $\bar{R}[G]$. Пусть λ — центральный характер алгебры $\bar{R}[G]$, $\bar{e}$ — примитивный центральный идемпотент из $\bar{R}[G]$, причем $\lambda(\bar{e})\neq 0$ и дефектной группой для e является D. По (6.9), $P\subseteq D$. Значит, в силу (6.10) (i), $\lambda(\bar{\hat{L}}_i)=0$. Поэтому $\bar{\hat{L}}_i$ лежит в ядре каждого центрального характера алгебры $\bar{R}[G]$. Следовательно, $\bar{\hat{L}}_i$ лежит в радикале алгебры $\overline{Z(G:G)}$ и потому является нильпотентным. □

§ 7. Гомоморфизмы Брауэра

Результаты этого параграфа принадлежат, в основном, Брауэру [1956], [1959]. См. также Конлон [1964], Грин [1962a] и Нагао [1963]. Результаты последующих трех параграфов можно также найти у Гамерника [1974b].

На протяжении настоящего параграфа будем применять следующие обозначения.

Пусть P есть p-подгруппа группы G, H — такая подгруппа группы G, что $PC_G(P)\subseteq H\subseteq N_G(P)$; C_1, C_2, ... — все сопряженные классы группы G. Для каждого i положим $C_i^{(1)}=C_i\cap C_G(P)$ и $C_i^{(2)}=C_i-C_i^{(1)}$. Определим R-гомоморфизм s: $Z(G:G)\to Z(H:H)$, полагая $s(\hat{C}_i)=\hat{C}_i^{(1)}$. Естественным образом s определяет $\bar{R}$-гомоморфизм $\bar{s}$: $\overline{Z(G:G)}\to\overline{Z(H:H)}$.

Теорема 7.1. *$\bar{s}$ — кольцевой гомоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\hat{C}_i\hat{C}_j=\sum_k a_{ijk}\hat{C}_k$, L_1, L_2, ... — все H-сопряженные классы группы G. Положим $C_i^{(m)}=\sum_t b_{it}^{(m)}\hat{L}_t$, где $m=1, 2$. Если $L_t\subseteq C_i^{(2)}$ для некоторого i, то L_t не P-дефектен. Значит, по (6.2),

$$\hat{C}_i^{(2)}\hat{C}_j^{(1)}+\hat{C}_i^{(1)}C_j^{(2)}+\hat{C}_i^{(2)}\hat{C}_j^{(2)}\equiv\sum c_t\hat{L}_t\ (\mathrm{mod}(\pi)Z(G:H)),$$

где L_t — не P-дефектен при $c_t\not\equiv 0(\pi)$. Поэтому

$$\hat{C}_i^{(1)}\hat{C}_j^{(1)}\equiv\hat{C}_i\hat{C}_j-(\hat{C}_i^{(2)}\hat{C}_j^{(1)}+\hat{C}_i^{(1)}\hat{C}_j^{(2)}+\hat{C}_i^{(2)}\hat{C}_j^{(2)})\equiv$$

$$\equiv\sum a_{ijk}\hat{C}_k^{(1)}+\sum a_{ijk}\hat{C}_k^{(2)}-\sum c_t\hat{L}_t\ (\mathrm{mod}(\pi)Z(G:H)).$$

Каждый H-сопряженный класс группы G, который лежит в $C_i^{(1)}$ для некоторого i, является сопряженным классом группы H, лежащим в $C_G(P)$, и потому он P-дефектен. Поэтому

$$s(\hat{C}_i)s(\hat{C}_j)\equiv s(\hat{C}_i^{(1)}\hat{C}_j^{(1)})\equiv\sum a_{ijk}s(\hat{C}_i\hat{C}_j)\equiv s(\hat{C}_i\hat{C}_j)\ (\mathrm{mod}(\pi)Z(G:H)).$$

Тогда

$$s(\hat{C}_i)s(\hat{C}_j)-s(\hat{C}_i\hat{C}_j)\in(\pi)Z(G:H)\cap Z(H:H)=(\pi)Z(H:H).$$

Значит, $\bar{s}(\bar{\hat{C}}_i)\bar{s}(\bar{\hat{C}}_j)=\bar{s}(\bar{\hat{C}}_i\bar{\hat{C}}_j)$. □

Отображение s называется *отображением Брауэра относительно* (G, P, H), а $\bar{s}$ — *гомоморфизмом Брауэра относительно* (G, P, H). В случае, когда G, P, H ясны из контекста, s называется просто *отображением Брауэра*, а $\bar{s}$ — *гомоморфизмом Брауэра*.

Следствие 7.2. *Пусть e — центральный идемпотент из $R[G]$. Если $\bar{s}(\bar{e})\neq 0$, то существует такой единственный центральный идемпотент $s_0(e)$ из $R[H]$, что $\bar{s}(\bar{e})=\overline{s_0(e)}$.*

Доказательство. В силу (7.1), либо $\bar{s}(\bar{e})=0$, либо $\bar{s}(\bar{e})$ — центральный идемпотент из $\bar{R}[H]$. Результат теперь следует из (I.17.3). □

В оставшейся части параграфа $s_0(e)$ будет определен как в (7.2), причем $s_0(e)=0$, если $\bar{s}(\bar{e})=0$.

Лемма 7.3. *Пусть e — центральный идемпотент из $R\{G\}$. Тогда $e-s_0(e)\in\sum Z_Q(G:H)$, где Q пробегает те p-подгруппы группы H, для которых $P\not\leqslant Q$.*

Доказательство. Положим $e=\sum a_i\hat{C}_i$. Тогда $e-s_0(e)\equiv\equiv\sum a_i\hat{C}_i^{(2)}\ (\mathrm{mod}(\pi)Z(G:H))$. По определению, $C_i^{(2)}$ является объединением тех H-сопряженных классов группы G, дефектная группа которых не лежит в P. Отсюда следует результат. □

Лемма 7.4. *Пусть e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$ с дефектной группой D. Пусть, далее, $s_0(e)=\sum e_i$, где $\{e_i\}$ — множество попарно ортогональных примитивных центральных идемпотентов из $R[G]$, D_i — дефектная группа идемпотента e_i из $R[H]$. Тогда $D_i\subseteq_G D$.*

Доказательство. Пусть C_i — сопряженный класс группы G с дефектной группой $P_i\subseteq D$. Если L_t — сопряженный класс группы H, лежащий в C_i, то дефектная группа класса L_t содержится в $P_i^x\cap H\subseteq D^x\cap H$ для некоторого $x\in G$. Так как $e\in Z_D(G:G)$, то $s_0(e)\in\sum_{x\in G}Z_{D^x\cap H}(H:H)$. В силу (6.3), $e_i=e_is_0(e)\in\sum_{x\in G}Z_{D^x\cap H}(H:H)$. Значит, по (6.4) и (6.5), $D_i\subseteq_H D^x\cap H\subseteq_G D$ для некоторого $x\in G$. □

Следующий результат содержит информацию по теории колец и используется при доказательстве второй основной теоремы о блоках (IV.6.1) ниже. В связи с этим его иногда называют второй основной теоремой о блоках.

Теорема 7.5 (Нагао [1963]). *Пусть e — центральный идемпотент из $R[G]$, V — такой $R[G]$-модуль, что $Ve=V$, $\mathfrak{H}$ — множество всех тех p-подгрупп Q группы H, для которых $P\not\leqslant Q$. Тогда $V_H\equiv V_Hs_0(e)(\mathfrak{H})$.*

Доказательство. Положим $f=e-es_0(e)$. Поскольку $e\in Z(G:G)$, то либо $f=0$, либо f — идемпотент, причем $s_0(e)f=fs_0(e)=0$. В силу (6.3) и (7.3), $f\in\sum_{Q\in\mathfrak{H}}Z_Q(G:H)$ и

$$V_H=V_He=V_Hes_0(e)\oplus V_Hf=V_Hs_0(e)\oplus V_Hf.$$

Пусть $f=\sum f_i$, где $\{f_i\}$ — множество попарно ортогональных примитивных идемпотентов из $Z(G:H)$. В силу (6.3), $f_i=f_if\in\sum_{Q\in\mathfrak{H}}Z_Q(G:H)$. Значит, по (6.4), $f_i\in Z_Q(G:H)$ для некоторой $Q\in\mathfrak{H}$. Поскольку, по (6.7), V_Hf_i является $R[Q]$-проективным, $V_Hf\equiv\oplus V_Hf_i\equiv 0(\mathfrak{H})$. □

Лемма 7.6. *Пусть e — центральный идемпотент из $R[G]$, W — такой $R[H]$-модуль, что $W=Ws_0(e)$, $\{x_i\}$ — трансверсаль H в G, причем $x_1=1$. Определим f: $W\to((W^G)_H)e$ и g: $(W^G)_H\to W$, полагая $f(w)=(w\otimes 1)e$ и $g(\sum w_i\otimes x_i)=w_1$. Пусть U — ядро g. Тогда $W\cong f(W)$ и $((W^G)_H)e=f(W)\oplus Ue$. В частности, $W\mid((W^G)_H)e$.*

Доказательство. Результат достаточно доказать в случае, когда W неразложим и $s_0(e)\neq 0$. По определению, $(W^G)_H=(W\otimes 1)\oplus W_0$, где $W_0=\oplus_{i>1}W\otimes x_i$. Значит, если $y\in H$, то $(W\otimes 1)y=W\otimes 1$, а если $y\in G-H$, то $(W\otimes 1)y\subseteq W_0$.

Поскольку $e\in Z(G:H)$ и $s_0(e)\in Z(H:H)$, то $e=s_0(e)+a+b$, где $a\in Z(H:H)$, b — линейная R-комбинация H-сопряженных классов [1] группы G, которые не пересекаются с H. Значит, $(W\otimes 1)(s_0(e)+a)\subseteq W\otimes 1$ и $(W\otimes 1)b\subseteq W_0$.

Так как $s_0(e)=s(e)$, то определение s влечет, что a является $\bar{R}$-линейной комбинацией сопряженных классов [2] из H, которые не пересекаются с $C_G(P)$. Следовательно, в силу (6.11), $\bar{a}\in J(Z(H:H))$, и потому $a\in J(Z(H:H))$. Значит, существует такой $c\in s_0(e)Z(H:H)$, что $(s_0(e)+a)s_0(e)c=s_0(e)$. Поэтому $W=W(s_0(e)+a)s_0(e)c$, и, значит, $W=W(s_0(e)+a)$.

Если $w\in W$, то

$$gf(w)=g\{(w\otimes 1)(s_0(e)+a)+(w\otimes 1)b\}=w(s_0(e)+a).$$

Следовательно, по (I.17.1) (iv), gf является $R[H]$-автоморфизмом модуля W, поскольку, очевидно, f и g $R[H]$-линейны. Поэтому $W\cong f(W)$, откуда следует результат. □

Теорема 7.7 (Конлон [1964]). *Пусть e — центральный идемпотент из $R[G]$, W — такой $R[H]$-модуль, что $Ws_0(e)=W$. Тогда существует такой $R[G]$-модуль V, что $Ve=V$, $V\mid W^G$ и $W\mid V_H$.*

Доказательство. В (7.6) положить $V=(W^G)e$. □

Следующий результат был сформулирован Грином [1964] в случае, когда P является дефектной группой идемпотента e. См. также Грин [1972, p. 375].

Теорема 7.8. *Пусть f — соответствие Грина относительно $(G, P, H=N_G(P))$, $\mathfrak{N}$ определено как в § 5, e — центральный идемпотент*

---

[1] Разумеется, не самих H-сопряженных классов, а элементов из $R[G]$, которые им соответствуют.— *Примеч. пер.*

[2] См. подстрочное примечание выше.— *Примеч. пер.*

из $R[G]$, V *—такой неразложимый* $R[G]$*-модуль с вертексом, лежащим в* $\mathfrak{P}$, *что* $Ve=V$. *Тогда* $f(V)s_0(e)=f(V)$.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}$ — множество всех примитивных центральных идемпотентов из $R[G]$. Тогда $1=\sum e_i$. Значит, $1=\sum s_0(e_i)$. Поэтому $f(V)s_0(e_j)=f(V)$ для единственного j. Тогда, в силу (5.6) и (7.6), $Ve_j=V$. Следовательно, $e=e_je+e'$, где e_je, e' — ортогональные идемпотенты, и потому $s_0(e)=s_0(e_je)+s_0(e')$, где $s_0(e_je)$ и $s_0(e')$ — ортогональные идемпотенты. Таким образом, $f(V)s_0(e)=f(V)$. □

Используя результаты этого параграфа, можно показать, что если дефектная группа блока B нециклическая, то B содержит неразложимые модули с вертексом D сколь угодно большой размерности над $\bar{R}$. См. Гамерник [1974а], [1975а]. Барри [1980]. Если D циклическая, то из теоремы Хигмана (II.3.8) легко следует, что B содержит лишь конечное число попарно неизоморфных неразложимых модулей. Более подробно эти результаты будут доказаны в главе VII.

§ 8. $R[G\times G]$-модули

Результаты этого параграфа принадлежат Брауэру [1956], Грину [1962а], [1964], [1968], и Розенбергу [1961]. См. также Сринавасан [1964а]. Близкие результаты можно найти у Алперина [1977а]. См. также Грин [1978], Окаяма [1978], Алперин и Барри [1980], Алперин [1986*].

Для любого подмножества S из G через $R[S]$ будем обозначать R-модуль из $R[G]$ с базисом S. Если A, B — подгруппы группы G и $y\in G$, то $R[AyB]$ является $R[A\times B]$-модулем, где $x(a,b)=a^{-1}xb$ для $x\in AyB$, $a\in A$, $b\in B$. Будем обозначать его также через $R[AyB]$. В частности, если $A=B=G$, то $R(G]$ является $R[G\times G]$-модулем, определенным этим способом.

Для подгрупп A, B из G и для $y\in G$ положим $(A,B,y)=\{(a,a^y)\mid a\in A\cap yBy^{-1}\}$. Очевидно, (A,B,y) является подгруппой группы $A\times B$.

Пусть Δ: $G\to G\times G$ — диагональное отображение. Для подмножества S из G через S^Δ будем обозначать образ S в $G\times G$ относительно Δ.

Лемма 8.1. *Пусть* A, B *— подгруппы группы* G, $y\in G$. *Тогда*:

(i) $(A,B,y)=\{(A\cap yBy^{-1})^\Delta\}^{(1,y)}=\{(A^y\cap B)^\Delta\}^{(y^{-1},1)}$;

(ii) *если* $u\in A$, $v\in B$, *то* $(A,B,y)^{(u,v)}=(A,B,u^{-1}yv)$.

Доказательство. Непосредственно следует из определения. □

Лемма 8.2. *Пусть* A, B *— подгруппы группы* G, $y\in G$, A_0, B_0 *— подгруппы групп* A *и* B *соответственно,* $\{y_i\}$ *— полное множество представителей двойных* (A_0,B_0)*-смежных классов, лежащих в* AyB. *Пусть* R *обозначает* $R[G\times G]$*-модуль, состоящий из* $G\times G$*-инвариантных элементов. Тогда*:

(i) $R[AyB]\cong\{R_{(A,B,y)}\}^{A\times B}$; $R[G]\cong\{R_{G^\Delta}\}^{G\times G}$;

(ii) $R[AyB]_{A_0\times B_0}=\oplus_i R[A_0y_iB_0]\cong\oplus_i\{R_{(A_0,B_0,y_i)}\}^{A_0\times B_0}$;

(iii) *если* $A=B=G$, *то*

$$R[G]_{A_0\times B_0}=\oplus_i R[A_0y_iB_0]\cong\oplus_i\{R_{(A_0,B_0,y_i)}\}^{A_0\times B_0};$$

(iv) *если* $A=B=G$, $A_0=B_0=H$ *и* e *—идемпотент из* $Z(H:H)$, *то*

$$eR[G]e_{H\times H}\cong R[H]e\oplus\Big(\bigoplus_{t_i\notin H} eR[Hy_iH]e\Big).$$

Доказательство. (i) Элементы из $A\times B$ переставляют базис модуля $R[AyB]$, а (A, B, y)—подгруппа из $A\times B$, оставляющая элемент y неподвижным. Это доказывает первое утверждение. Второе следует из первого, если положить $A=B=G$ и $y=1$.

(ii) Очевидно ввиду (i).

(iii) В (ii) положить $A=B=G$.

(iv) Очевидно ввиду (iii), поскольку $eR[H]e=R[H]e$. □

Лемма 8.3. *Пусть* A, B *—подгруппы группы* G. P, Q *—соответственно p-подгруппы групп* A *и* B. *Пусть, далее,* $y\in G$, V *—такой неразложимый* $R[A\times B]$*-модуль, что* $V\mid R[AyB]$ *и* V $R[P\times Q]$*-проективен. Тогда существует такой* $z\in AyB$, *что* (P, Q, z) *является вертексом модуля* V.

Доказательство. В силу (4.6) (ii), некоторая неразложимая компонента W модуля $V_{P\times Q}$ имеет тот же вертекс, что и V. Значит, по (8.2) (ii), $W\mid\{R_{(P,Q,z)}\}^{P\times Q}$ для некоторого $z\in AyB$. В силу (3.14), $\{R_{(P,Q,z)}\}^{P\times Q}$ абсолютно неразложим. Значит, $W\cong\{R_{(P,Q,z)}\}^{P\times Q}$. Следовательно, согласно (4.8), (P, Q, z) является вертексом модуля W. □

Следствие 8.4. *Пусть* A, B *—подгруппы группы* G, *а* P *и* Q *—соответственно* S_p*-подгруппы в* A *и* B. *Пусть* $y\in G$, *а* V *—неразложимая компонента модуля* $R[AyB]$. *Тогда существует такой* $z\in AyB$, *что* (P, Q, z) *является вертексом модуля* V.

Доказательство. Поскольку $P\times Q$ является S_p-подгруппой группы $A\times B$, модуль V $R[P\times Q]$-проективен. Результат теперь следует из (8.3). □

Компоненты $R[G\times G]$-модуля $R[G]$ являются в точности (двусторонними) идеалами кольца $R[G]$, которые являются прямыми слагаемыми R-модуля $R[G]$. Значит, если $\{e_i\}$ —множество всех примитивных центральных идемпотентов кольца $R[G]$, то $R[G]=\oplus_i R[G]e_i$ и каждый из $R[G]e_i$ является неразложимой компонентой $R[G\times G]$-модуля $R[G]$.

Следствие 8.5. *Пусть* e *—примитивный центральный идемпотент из* $R[G]$, P *—некоторая* S_p*-подгруппа группы* G. *Тогда существует такой* $z\in G$, *что* $(P\cap P^z)^\Delta$ *является вертексом* $R[G\times G]$*-модуля* $R[G]e$.

Доказательство. В силу (8.4), существует такой $z\in G$, что (P, P, z)—вертекс $R[G]e$. Результат теперь следует из (8.1). □

Следствие 8.6. *Пусть* e *—примитивный центра ный идемпотент из* $R[G]$, $Q\lhd G$ *и* Q *является p-группой. Тогда* Q^Δ *лежит в некотором вертексе* $R[G\times G]$*-модуля* $R[G]e$.

Доказательство. Для S_p-подгруппы P группы G и элемента $z\in G$ имеем $Q\subseteq P\cap P^z$. Результат теперь следует из (8.5). □

Лемма 8.7. *Пусть* A, B *—подгруппы группы* G, *и пусть* P, Q *—некоторые p-подгруппы групп* A *и* B *соответственно,* e_1, e_2 *—*

идемпотенты из $Z_P(G:A)$ *и* $Z_Q(G:B)$ *соответственно. Тогда* $R[A\times B]$*-модуль* $e_1R[G]e_2$ *является* $R[P\times Q]$*-проективным.*

Доказательство. Пусть $e_1=\sum a_y y$, $e_2=\sum b_y y$. Легко видеть, что $e=\sum a_x b_y (x^{-1}, y)$ является идемпотентом из $Z_{P\times Q}(G\times G: A\times B)$. Кроме того, $R[G]e=e_1R[G]e_2$. Результат теперь следует из (6.7). □

В оставшейся части параграфа будем применять следующие обозначения.

e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$.

D — дефектная группа идемпотента e. $N=N_G(D)$.

s — отображение Брауэра относительно (G, D, N), $s_0(e)$ определено как в (7.2).

f — соответствие Грина относительно $(G\times G, D^\Delta, N\times N)$.

Основными результатами настоящего параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 8.8 (Брауэр, Розенберг). $s_0(e)$ *является примитивным центральным идемпотентом алгебры* $R[N]$ *с дефектной группой* D.

Теорема 8.9 (Грин). D^Δ *является вертексом* $R[G\times G]$*-модуля* $R[G]e$ *и* $f(R[G]e)=R[N]s_0(e)$.

Для доказательства (8.8) и (8.9) нам будут нужны некоторые предварительные леммы.

Лемма 8.10. $R[G\times G]$*-модуль* $R[G]e$ *является* $R[D\times D]$*-проективным.*

Доказательство. В (8.7) положить $A=B=G$, $e=e_1=e_2$ и $P=Q=D$. □

Лемма 8.11. *Если* $D\lhd G$, *то* D^Δ *является вертексом* $R[G\times G]$*-модуля* $R[G]e$.

Доказательство. В силу (8.10) и (8.3), (D, D, z) является вертексом $R[G]e$ для некоторого $z\in G$. Поскольку $D\lhd G$, то из (8.1) (i) следует, что D^Δ является вертексом модуля $R[G]e$. □

Лемма 8.12. D^Δ *является вертексом каждой неразложимой компоненты* $R[N\times N]$*-модуля* $R[N]s_0(e)$.

Доказательство. Пусть $s_0(e)=\sum e_i$, где $\{e_i\}$ — множество примитивных центральных идемпотентов из $R[N]$. В силу (6.9) и (7.4), D является дефектной группой каждого из идемпотентов e_i. Значит, в силу (8.11), D^Δ является вертексом модуля $R[N]e_i$ для всех i, что и утверждалось. □

Лемма 8.13. $R[N]s_0(e)\,|\,R[G]e_{N\times N}$.

Доказательство. Положим $H=N$ и $W=R[N]s_0(e)$. Пусть f, g и U определены как в (7.6). Тогда по (7.6), $R[G]e_N=f(W)\oplus Ue$. Очевидно, f и g $R[N\times N]$-линейны. Значит, $f(W)$ и Ue являются $R[N\times N]$-модулями и $f(W)\cong R[N]s_0(e)$. □

Доказательство теорем 8.8 и 8.9. В силу (8.5), $R[G]e$ имеет вертекс D_0^Δ для подходящей p-подгруппы D_0. В силу (8.10), $D_0^\Delta\subseteq_{G\times G} D\times D$. Значит, $D_0\subseteq_G D$. В силу (4.6), (8.12) и (8.13), $D^\Delta\subseteq_{G\times G} D_0^\Delta$. Поэтому $D_0=_G D$. Тем самым D^Δ является вертексом модуля $R[G]e$.

Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(D^\Delta, N\times N)$ и $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}(D^\Delta, N\times N)$ определены как в § 5. Поскольку каждая из групп, лежащая в $\mathfrak{X}$, имеет порядок, строго меньший чем $|D|$, то $D^\Delta\in\mathfrak{A}$. Значит, по (5.6), единственная нераз-

ложимая компонента модуля $R[G]e_{N\times N}$ обладает вертексом D^{Δ}. Следовательно, в силу (8.12) и (8.13), $R[N\times N]$-модуль $R[N]s_0(e)$ неразложим. Поэтому $s_0(e)$ — примитивный центральный идемпотент из $R[N]$, а в силу (5.6), $f(R[G]e)=R[N]s_0(e)$. Это завершает доказательство (8.8) и (8.9). □

Теорема 8.14 (Грин). *Пусть P — такая S_p-подгруппа группы G, что $D\subseteq P$. Тогда $D=P\cap P^z$ для некоторого $z\in C_G(D)$.*

Доказательство. В силу (8.6) и (8.9), $R[G]e$ имеет вертекс D^{Δ}. Так как $R[G]e\,|\,R[G]$, то каждая компонента модуля $(R[G]e)_{P\times P}$ имеет вертекс (P, P, y) для некоторого $y\in G$, вследствие (8.2) и (8.3). Значит, $D^{\Delta}=_{P\times P}(P, P, y)$. Поэтому, по (8.1), $D^{\Delta}=(P, P, z)$ для некоторого $z\in G$. Значит, $\{(a, a)\,|\,a\in D\}=D^{\Delta}=(P, P, z)=\{(a, a^z)\,|\,a\in P\cap zPz^{-1}\}$. Следовательно, $D=P\cap zPz^{-1}$ и $z\in C_G(D)$. Тем самым $D=D^z=P\cap P^z$. □

Альтернативное доказательство теоремы 8.14 можно найти у Томпсона [1967a], ее уточнения — у Лэма [1976] и О'Рейли [1975].

Грин [1968] заметил, что (8.14) можно применить для доказательства следующего результата.

Теорема 8.15 (Алперин [1967]). *Существуют такие S_p-подгруппы P, Q группы G, что $D=P\cap Q$ и $N_P(D)$, $N_Q(D)$ — обе являются S_p-подгруппами группы $N_G(D)$.*

Доказательство. Пусть A и P — такие S_p-подгруппы групп $N_G(D)$ и G соответственно, что $A\subseteq P$. В силу (8.14), существует такой $z\in C_G(D)\subseteq N_G(D)$, что $D=P\cap Q$, где $Q=P^z$. Значит, $N_P(D)=P\cap N_G(D)=A$ и $N_Q(D)=P^z\cap N_G(D)^z=A^z$ обе являются S_p-подгруппами группы $N_G(D)$. □

§ 9. Соответствие Брауэра

Результаты этого параграфа принадлежат, в основном, Брауэру [1956], [1959]. См. также Розенберг [1961]. Альтернативные подходы можно найти у Гамерника и Михлера [1972], Михлера [1972b], Рейнольдса [1966b].

На протяжении настоящего параграфа S будет обозначать такое конечное расширение кольца R, что $\bar{S}$ — поле разложения для $\bar{S}[H]$, где H — произвольная подгруппа группы G. Тогда, по (I.16.1), $\bar{S}$ является полем разложения для центра алгебры $\bar{S}[H]$. В силу (I.16.2), между блоками алгебры $S[H]$ и центральными характерами алгебры $\bar{S}[H]$ существует биекция.

Пусть $\tilde{G}$ — подгруппа группы G. Для $\bar{S}$-линейного отображения h: $\overline{Z(S;\tilde{G}:\tilde{G})}\to\bar{S}$ определим h^G: $\overline{Z(S;G:G)}\to\bar{S}$ следующим образом. Если C — сопряженный класс группы G, то $h^G(\bar{\tilde{C}})=\sum h(\bar{\tilde{C}}_i)$, где $\tilde{C}_i$ пробегает все такие сопряженные классы группы $\tilde{G}$, что $\tilde{C}_i\subseteq C$. Очевидно, h^G является $\bar{S}$-линейным отображением. Кроме того, если $\tilde{G}\subseteq A\subseteq G$ для некоторой подгруппы A, то

$$(h^A)^G=h^G. \tag{9.1}$$

Пусть $\tilde{B}$ — блок $S[\tilde{G}]$, $\tilde{\lambda}$ — центральный характер для $\bar{S}(\tilde{G}]$, соответствующий блоку $\tilde{B}$. В общем случае $\bar{S}$-линейное отображение $\tilde{\lambda}^G$ может не быть центральным характером алгебры $\bar{S}[G]$. Если же $\tilde{\lambda}^G$ является центральным характером алгебры $\bar{S}[G]$, то будем говорить, что $\tilde{B}^G$ *определен*. Пусть $\tilde{B}^G$ — блок алгебры $S[G]$, соответствующий $\tilde{\lambda}^G$. В том случае, когда $\tilde{B}^G$ определен, отображение, переводящее $\tilde{B}$ в $\tilde{B}^G$, называется *соответствием Брауэра*.

Лемма 9.2. *Пусть $\tilde{G} \subseteq A \subseteq G$ для групп $\tilde{G}$ и A, $\tilde{B}$ — блок алгебры $S[\tilde{G}]$. Если $\tilde{B}^A$ определен и определен один из блоков $\tilde{B}^G$ или $(\tilde{B}^A)^G$, то определен также и другой, причем $(\tilde{B}^A)^G = \tilde{B}^G$.*

Доказательство. Очевидно ввиду (9.1). □

Лемма 9.3. *Пусть σ — такой автоморфизм алгебры $S[G]$, что $S^\sigma = S$ и $x^\sigma = x$ для всех $x \in G$. Пусть $\tilde{B}$ — блок $S[\tilde{G}]$. Тогда B^G определен в том и только в том случае, если $(\tilde{B}^\sigma)^G$ определен. Если $\tilde{B}^G$ определен, то $(\tilde{B}^\sigma)^G = (\tilde{B}^G)^\sigma$.*

Доказательство. Непосредственно следует из определений. □

Теорема 9.4. *Пусть P есть p-подгруппа группы G и H — такая подгруппа в G, что $PC_G(P) \subseteq H \subseteq N_G(P)$. Если $\tilde{B}$ — блок алгебры $S[H]$, то $\tilde{B}^G$ определен. Пусть $\tilde{e}$, e — примитивные центральные идемпотенты алгебр $S[H]$ и $S[G]$, отвечающие $\tilde{B}$ и $\tilde{B}^G$ соответственно, а $\tilde{\lambda}$ — центральный характер алгебры $\bar{S}[H]$, соответствующий $\tilde{B}$. Тогда $\tilde{\lambda}^G = \tilde{\lambda}\bar{s}$ и $s_0(e)\tilde{e} = \tilde{e}$, где s — отображение Брауэра относительно (G, P, H).*

Доказательство. Если C — сопряженный класс группы G, то по определению, $\tilde{\lambda}^G(\bar{C}) = \tilde{\lambda}(\overline{C \cap H})$. Значит, по (6.11),

$$\tilde{\lambda}^G(\bar{C}) = \tilde{\lambda}(\overline{C \cap C_P(H)}) = \tilde{\lambda}\{\bar{s}(\bar{C})\}.$$

Поэтому $\tilde{\lambda}^G = \tilde{\lambda} \cdot \bar{s}$. Поскольку $\bar{s}$ — кольцевой гомоморфизм, $\tilde{\lambda}^G$ — кольцевой гомоморфизм. Так как $\tilde{\lambda}^G(1) = 1$, то $\tilde{\lambda}^G \neq 0$, и потому $\tilde{\lambda}^G$ является центральным характером алгебры $\bar{S}[G]$. Значит, $\tilde{B}^G$ определен. Так как $1 = \tilde{\lambda}^G(\bar{e}) = \tilde{\lambda}(\bar{s}(\bar{e}))$, то $\bar{s}(\bar{e})\bar{\tilde{e}} = \bar{\tilde{e}}$, и тогда $s_0(e)\tilde{e} = \tilde{e}$. □

Лемма 9.5. *Пусть $D \subseteq \tilde{G}$ — подгруппы группы G, причем $C_G(D) \subseteq \tilde{G}$. Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$ с дефектной группой D. Тогда $\tilde{B} = B^{\#G}$ для некоторого блока $B^\#$ группы $N_G(D)$ и $B^{\#G} = \tilde{B}^G$ определен.*

Доказательство. Положим $H = N_{\tilde{G}}(D)$. Пусть $\bar{s}$ — отображение Брауэра относительно $(\tilde{G}, D, H)$, $\tilde{e}$ — примитивный центральный идемпотент из $S[\tilde{G}]$, соответствующий $\tilde{B}$. В силу (8.8), $\bar{s}_0(\bar{\tilde{e}})$ является примитивным центральным идемпотентом из $S[H]$. Положим $B^\# = B(\bar{s}_0(\bar{\tilde{e}}))$. Поскольку

$$DC_G(D) = \tilde{D}C_{\tilde{G}}(\tilde{D}) \subseteq H \subseteq N_G(D),$$

из (9.4) следует, что $B^{\#G}$ определен и $B^{\#\tilde{G}} = \tilde{B}$ также определен. Значит, в силу (9.2), $\tilde{B}^G$ определен. □

Лемма 9.6. *Пусть $\tilde{G}$ — подгруппа группы G, $\tilde{B}$ — блок алгебры $S[\tilde{G}]$ с дефектной группой $\tilde{D}$. Предположим, что $\tilde{B}^G$ определен. Пусть D — дефектная группа блока $\tilde{B}^G$. Тогда $\tilde{D} \subseteq_G D$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\lambda}$ — центральный характер алгебры $\bar{S}[\tilde{G}]$, соответствующий $\tilde{B}$. Тогда $\lambda=\tilde{\lambda}^G$ является центральным характером алгебры $\bar{S}[G]$, соответствующим $\tilde{B}^G$. В силу (6.10), существует такой сопряженный класс C группы G с дефектной группой D, что $\lambda(\bar{C})\neq 0$. Значит, $\tilde{\lambda}(\bar{L})\neq 0$ для некоторого сопряженного класса L группы $\tilde{G}$, такого, что $L\subseteq C$. Пусть D_0 — дефектная группа класса L. Очевидно, что $D_0\subseteq_G D$. В силу (6.10), имеем $\tilde{D}\subseteq_G D_0$. Значит, $\tilde{D}\subseteq_G D$. □

Теорема 9.7 (Брауэр). (Первая основная теорема о блоках.) *Пусть D есть p-подгруппа группы G, $\tilde{G}$ — такая подгруппа группы G, что $N_G(D)\subseteq\tilde{G}$. Отображение, переводящее $\tilde{B}$ в $\tilde{B}^G$, задает биекцию между множеством всех блоков алгебры $S[\tilde{G}]$ с дефектной группой D и множеством всех блоков алгебры $S[G]$ с дефектной группой D.*

Прежде чем доказать (9.7), докажем следующую чисто теоретико-групповую лемму.

Лемма 9.8. *Пусть D является p-подгруппой группы G, $N=N_G(D)$. Если C — сопряженный класс группы G с дефектной группой D, то $C\cap C_G(D)$ является сопряженным классом группы N с дефектной группой D. Обратно, если L — сопряженный класс группы N с дефектной группой D, то $L=C\cap C_G(D)$ для некоторого сопряженного класса C группы G с дефектной группой D.*

Доказательство. Пусть C — сопряженный класс группы G с дефектной группой D. Тогда $C\cap C_G(D)$ является непустым объединением сопряженных классов группы N. Если $x\in C\cap C_G(D)$, то $D\subseteq C_G(x)$, и потому D является S_p-подгруппой группы $C_G(x)$, поскольку D — дефектная группа класса C. Пусть L — сопряженный класс группы N, причем $L\subseteq C\cap C_G(D)$. Тогда D является дефектной группой класса L. Пусть $x\in L$, $y\in C\cap C_G(D)$. Тогда существует такой $z\in G$, что $y^z=x$. Следовательно, группы D и D^z являются S_p-подгруппами группы $C_G(x)$. Поэтому существует такой элемент $u\in C_G(x)$, что $D^{zu}=D$. Значит, $zu\in N$ и $y^{zu}=x^u=x$. Следовательно, $y\in L$, и потому $L=C\cap C_G(D)$.

Пусть L — сопряженный класс группы N с дефектной группой D, C — такой сопряженный класс группы G, что $L\subseteq C$. Выберем $x\in L$ и обозначим через D_0 такую S_p-подгруппу группы $C_G(x)$, что $D\subseteq D_0$. Если $D\neq D_0$, то существует такая D_1, что

$$D\lhd D_1\subseteq D_0 \quad \text{и} \quad |D_1:D|=p.$$

Значит,

$$D_1\subseteq N\cap C_G(x)=C_N(x),$$

вопреки тому, что D — дефектная группа класса L. Таким образом, $D=D_0$ и D — дефектная группа класса C. Поскольку $L\subseteq C\cap C_G(D)$, из предыдущего абзаца следует, как и утверждалось, что $L=C\cap C_G(D)$. □

Доказательство теоремы 9.7. Ввиду (9.2), результат достаточно доказать в случае $\tilde{G}=N_G(D)$.

Пусть $B=B(e)$—блок алгебры $S[G]$ с дефектной группой D. В силу (8.8), $s_0(e)$ является примитивным центральным идемпотентом из $S[\tilde{G}]$ с дефектной группой D. Значит, если $\tilde{B}$—блок алгебры $S[\tilde{G}]$, то (9.4) влечет, что $B=\tilde{B}^G$ тогда и только тогда, когда $\tilde{B}=\tilde{B}(s_0(e))$. Осталось лишь показать, что если $\tilde{B}$—блок алгебры $S[\tilde{G}]$ с дефектной группой D, то D является дефектной группой блока $\tilde{B}^G$.

Пусть $\tilde{B}$—блок алгебры $S[\tilde{G}]$ с дефектной группой D, $\tilde{\lambda}$—центральный характер алгебры $S[\tilde{G}]$, соответствующий $\tilde{B}$. В силу (9.4) и (9.6), существует такая дефектная группа D_0 блока $\tilde{B}^G$, что $D\subseteq D_0$. Предположим, что $D\subset D_0$. Тогда, в силу (6.10), $\tilde{\lambda}^G(\hat{C})=0$ для сопряженного класса C группы G, дефектная группа которого лежит в D, и поэтому, по (9.4), $\tilde{\lambda}(\bar{s}(\hat{C}))=0$. Тогда из (9.8) следует, что $\tilde{\lambda}(\hat{L})=0$, если L—сопряженный класс группы $\tilde{G}$ с дефектной группой D. Это противоречит (6.10) (ii). Следовательно, $D=D_0$. □

Часть теоремы 9.7 была обобщена Розенбергом [1961] следующим образом.

Теорема 9.9. *Пусть D есть p-подгруппа группы G, $N=N_G(D)$, s—отображение Брауэра относительно (G, D, N). Отображение, переводящее e в $s_0(e)$, определяет биекцию между множествами всех примитивных центральных идемпотентов алгебры $R[G]$ с дефектной группой D и всех примитивных центральных идемпотентов алгебры $R[N]$ с дефектной группой D.*

Теорема 9.9 является непосредственным следствием (9.3), (9.7) и следующей леммы.

Лемма 9.10. (i) *Существует такое конечное неразветвленное расширение T кольца R, что $\bar{T}$ является полем разложения алгебры $\bar{T}[H]$ для произвольной подгруппы H группы G и циклическим расширением Галуа поля $\bar{R}$.*

(ii) *Пусть H—подгруппа группы G, e—примитивный центральный идемпотент из $R[H]$. Пусть $e=\sum e_i$, где каждый из e_i—примитивный центральный идемпотент алгебры $T[H]$. Если D—дефектная группа идемпотента e, то D—дефектная группа каждого идемпотента e_i. Группа Галуа поля $\bar{T}$ над $\bar{R}$ действует транзитивно на множестве $\{e_i\}$.*

Доказательство. (i) Пусть F_0—простое поле, лежащее в $\bar{R}$. Тогда существует конечное расширение F поля F_0, являющееся полем разложения алгебры $F[H]$ для любой подгруппы H группы G.

Поскольку поле F конечно, оно является циклическим расширением Галуа поля F_0. Пусть F_1—композит полей F и $\bar{R}$ в некотором алгебраическом замыкании, T—неразветвленное расширение кольца R, причем $\bar{T}\cong F_1$. Тогда, как легко видеть, T удовлетворяет нужным условиям.

(ii) Автоморфизм σ кольца T продолжается до автоморфизма кольца $T[H]$, если положить $x^\sigma=x$ для всех $x\in N$. Тогда группа Галуа $\bar{T}/\bar{R}$ продолжается до группы автоморфизмов кольца $T[H]$

таким образом, что $R[H]$ является множеством всех неподвижных точек для каждого автоморфизма этой группы. Значит, для любого i существует такой автоморфизм $\sigma=\sigma_i$ кольца $T[H]$, что $e_1^{\sigma}=e_i$ и $x^{\sigma}=x$ для всех $x\in H$. Значит, если D_0 — дефектная группа идемпотента e_1, то она является дефектной группой идемпотента e_i для каждого i.

Пусть P является p-подгруппой группы G. Если $e\in Z_P(R; G:G)$, то $e\in Z_P(T; G:G)$, и потому, в силу (6.3), $e_1=ee_1e\in Z_P(T; G:G)$. Если $e_1\in Z_P(T; G:G)$, то $e_i\in Z_P(T; G:G)$ для каждого i, и потому справедливо

$$e=\sum e_i\in Z_P(T; G:G)\cap Z(R; G:G)=Z_P(R; G:G).$$

Значит, $D=D_0$, что и утверждалось. □

ГЛАВА IV

Обозначения, введенные в начале главы III, будем применять также на протяжении настоящей главы. Кроме того, будем предполагать выполнимость следующих условий.

Характеристика поля K равна 0, $\bar{R}$ алгебраично над конечным полем.

K и $\bar{R}$ — поля разложения для каждой подгруппы группы G.

Блок B алгебры $R[G]$ будем также называть *блоком* группы G.

Основные результаты этой главы можно найти у Брауэра и Несбитт [1941] и у Брауэра [1941a], [1941b]. См. также Осима [1952a], Иидзука [1960c].

Многие из этих результатов впоследствии были упрощены и обобщены. См. Брауэр и Фейт [1959], Брауэр [1946a], [1946b], [1956], [1959]. По поводу подхода, использованного нами, см., например, Грин [1959a]. Изложение этого материала можно найти также у Дейда [1971b] и Рейнольдса [1962].

§ 1. Характеры

Пусть K_0 — множество всех алгебраических чисел в K. Положим $R_0 = R \cap K_0$. Хорошо известно, что существует такой $\pi_0 \in R_0$, что $(\pi_0) = J(R)$. Кроме того, $J(R_0) = J(R) \cap R_0$ и $\bar{R}_0 = \bar{R} \cong R_0/J(R_0)$.

Выберем мономорфизм σ из K_0 в поле комплексных чисел. Будем отождествлять K_0 с $\sigma(K_0)$. Если $a \in K_0$, будем писать $a^* = \sigma(a)^*$ для комплексно сопряженного к a, и $|a| = |\sigma(a)|$. Если $a \in R_0$, то (как и прежде) $\bar{a}$ будет обозначать класс вычетов элемента a в $\bar{R}$.

Поскольку, вообще говоря, существует много возможностей для выбора σ, здесь имеется некоторая степень произвола, и читатель должен сознавать, что часть определений, приведенных ниже, зависит от выбора σ. Тем не менее, однажды выбранный σ никогда не будет изменяться. Заметим, что если $a \in K_0$ и a рационально, то $\sigma(a)$ не зависит от выбора σ.

Пусть V — некоторый $K[G]$-модуль, t_V — его функция следа. Для $x \in G$ положим $\theta(x) = t_V(x)$. Тогда $\theta(x)$ является суммой корней из единицы, и потому $\theta(x) \in K_0$. Функция θ (комплекснозначная)

называется *характером модуля* V. *Характером* R-свободного $R[G]$-модуля W называется характер модуля $W \otimes_R K$.

Мы свободно будем пользоваться терминологией и результатами классической теории комплексных представлений и характеров. По этому поводу см., например, Дорнхофф [1972], Фейт [1967c], Айзекс [1976]. Тем не менее, основные соотношения этой теории можно вывести в частном случае $p \nmid |G|$ из соответствующих результатов, полученных ниже.

Учитывая ее первостепенную важность. мы сформулируем здесь фундаментальную характеризацию характеров. См., например, Брауэр и Тейт [1955]. Приведем сначала некоторые определения.

Обобщенный характер группы G — это рациональная целочисленная комбинация неприводимых характеров группы G.

Подгруппа E группы G называется *элементарной*, если $E = Q \times A$, где Q есть q-группа для простого числа q, A — циклическая группа.

Теорема 1.1 (Брауэр [1953]). *Пусть* θ — *комплекснозначная функция на группе* G. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) θ *является обобщенным характером группы* G;

(ii) (a) θ — *функция классов группы* G;

(b) *для любой элементарной подгруппы* E *группы* G *ограничение* θ_E *является обобщенным характером группы* E;

(iii) $\theta = \sum a_i \lambda_i^G$, *где все* a_i *являются целыми рациональными числами,* λ_i — *характерами подходящих элементарных подгрупп группы* G.

Если α, β — комплекснозначные функции на G, положим

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \alpha(x) \beta(x)^*,$$

$$\|\alpha\|^2 = |\alpha|_G^2 = (\alpha, \alpha).$$

Теорема 1.2 (Брауэр [1953]). *Пусть* p^a — *порядок* S_p-*подгруппы группы* G. *Для любой комплекснозначной функции* α, *определенной на* p'-*элементах группы* G, *зададим* η_α *следующим образом:*

$$\eta_\alpha(x) = \begin{cases} p^a \alpha(x), & \text{если } x \text{ является } p'\text{-элементом группы } G; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если α_H — *обобщенный характер группы* H *для любой* p'-*подгруппы* H *группы* G, *то* η_α — *обобщенный характер группы* G.

Доказательство. Очевидно, η_α является функцией классов группы G. Пусть E — элементарная подгруппа группы G. Тогда $E = P \times A$, где P и A — соответственно p-группа и p'-группа. Положим $|P| = p^b$. Тогда $b \leqslant a$. Пусть ρ — характер регулярного представления группы P. Тогда $(\eta_\alpha)_E = (p^{a-b} \rho) \alpha_A$. Значит, $(\eta_\alpha)_E$ является обобщенным характером группы E. Результат теперь следует из (1.1). □

Следствие 1.3. *Пусть* $\{q_i\}$ — *множество простых чисел,* $q_i^{a_i}$ — *порядок* S_{q_i}-*подгруппы группы* G. *Определим комплекснозначную функцию*

θ, *полагая*

$$\theta(x)=\begin{cases} \Pi q_i^{a_i}, & \text{если } x \text{ есть } \{q_i\}'\text{-элемент}^{1)}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда θ *— обобщенный характер группы* G.

Доказательство. Пусть для каждого i, η_i — функция, определенная в (1.2) при $p=q_i$ и $\alpha=1_G$. Тогда $\theta=\Pi\eta_i$, и результат теперь следует из (1.2). □

§ 2. Характеры Брауэра

Пусть V — некоторый $R[G]$-модуль. Если x есть p'-элемент из G, то, в силу (III.3.3), существует такой R-свободный $R[\langle x\rangle]$-модуль W, что $\bar{W}=\bar{V}_{\langle x\rangle}$ и W единственен с точностью до изоморфизма. Пусть $\beta_V(x)=\theta(x)$, где θ — характер модуля W. Комплекснозначная функция β_V, определенная на множестве p'-элементов группы G, называется *характером Брауэра* модуля V. Для произвольного $R[G]$-модуля V через β_V будем обозначать характер Брауэра модуля V. Если W является $R[H]$-модулем для некоторой подгруппы H группы G, то $(\beta_W)^G=\beta_{W^G}$.

Лемма 2.1. *Пусть* V *является* $R[G]$*-модулем. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) $\beta_V=\beta_{\bar{V}}$.

(ii) *Если* x *есть* p'*-элемент из* G, *то* $\beta_V(x)$ *— сумма корней* p'*-й степени из единицы; в частности,* $\beta_V(x)$ *— целое алгебраическое.*

(iii) $\beta_{\bar{V}}^*(x)=\beta_{\bar{V}}(x^{-1})=\{\beta_{\bar{V}}(x)\}^*$ *для* p'*-элемента* x *из* G.

(iv) *Если* σ *— автоморфизм кольца* R, *то* $\beta_{(V^\sigma)}=(\beta_V)^\sigma$.

(v) β_V *является функцией классов на множестве* p'*-элементов группы* G.

(vi) *Если* V *является* R*-свободным* $R[G]$*-модулем с характером* θ, *то* $\theta(x)=\beta_V(x)$ *для* p'*-элемента* x *из* G.

(vii) *Если* G *есть* p'*-группа, то каждый характер Брауэра является обыкновенным характером группы* G.

Доказательство. (i), (ii), (iii) и (iv) доказываются непосредственной проверкой.

(v) Пусть x есть p'-элемент из G и $y^{-1}xy=z$. Пусть f — представление алгебры $\bar{R}[G]$ в модуле $\bar{V}$. Тогда $f(y)^{-1}f(x^i)f(y)=f(z^i)$ для всех i. Значит, если $g(x^i)=f(z^i)$ для всех i, то f и g — эквивалентные представления алгебры $\bar{R}[\langle x\rangle]$. Следовательно, по (III.3.3), $\beta_V(x)=\beta_V(z)$, что и утверждалось.

(vi) Поскольку β_V является характером модуля $V_{\langle x\rangle}$, результат следует из (III.3.3).

(vii) Очевидно, согласно (i) и (III.3.3). □

Следует отметить, что если σ является автоморфизмом поля всех алгебраических чисел, то $(\beta_V)^\sigma$ может не быть характером

[1)] То есть элемент, порядок которого не делится ни на одно из q_i. — *Примеч. пер.*

Брауэра некоторого $R[G]$-модуля. Эта аномалия вызвана тем, что был осуществлен произвол в отождествлении алгебраических чисел из K с множеством комплексных чисел.

Лемма 2.2. *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом A, P — такая S_p-подгруппа группы G, что $A \subseteq P$. Тогда $|P:A| \beta_V(1)$. В частности, если $p \nmid \beta_V(1)$, то вертексом V является S_p-подгруппа группы G.*

Доказательство. Если S — конечное расширение кольца R, то каждая компонента модуля V_S является $S[A]$-проективной. Поэтому, заменяя R конечным неразветвленным расширением, можно предполагать, что V и каждая неразложимая компонента модуля V_H являются абсолютно неразложимыми для любой подгруппы H группы G. Пусть $V_P = \oplus W_i$, где каждый из W_i неразложим, и пусть A_i — вертекс W_i. В силу (III.4.6), $|P:A| \mid |P:A_i|$ для каждого i. В силу (III.3.14), $|P:A_i| \mid \beta_{W_i}(1)$. □

Для p-подгрупп Q и A группы G определим $s(Q:A) = s_G(Q:A)$ как наибольшее целое среди тех s, для которых $p^s \mid |Q:Q \cap A^x|$ для всех $x \in G$. Заметим, что $s(Q:A) = 0$ тогда и только тогда, когда $Q \subseteq_G A$.

Теорема 2.3 (Грин). *Пусть V — неразложимый $R[G]$-модуль с вертексом A, x — некоторый p'-элемент из G, и пусть Q является S_p-подгруппой группы $C_G(x)$. Тогда $p^{s(Q:A)} \mid \beta_V(x)$ лежит в кольце целых алгебраических чисел кольца R. В частности, если $p \nmid \beta_V(x)$, то $Q \subseteq_G A$.*

Доказательство. Пусть $\bar{V}_Q = \oplus W_i$, где каждый из W_i неразложим. Для каждого i существует такой x_i, что W_i является, ввиду (III.4.1), $R[Q_i]$-проективным, где $Q_i = Q \cap A^{x_i}$. Значит, $A_i \subseteq_Q Q_i$, где A_i — вертекс модуля W_i. В силу (2.2), $|Q:Q_i| \mid \beta_{W_i}(1)$ для каждого i, и потому $p^{s(Q:A)} \mid \beta_{W_i}(1)$ для каждого i.

Поскольку $\bar{R}$ — поле разложения для $\langle x \rangle$, из (I.16.4) следует, что $\dim_{\bar{R}} \bar{V}e$ является кратностью неприводимого $\bar{R}[\langle x \rangle]$-модуля как конституэнты модуля $\bar{V}_{\langle x \rangle}$, где e — некоторый идемпотент из $\bar{R}[\langle x \rangle]$. Поскольку $Q \subseteq C_G(x)$, то $\bar{V}e_Q \mid \bar{V}_Q$. Значит, $p^{s(Q:A)} \mid \dim_{\bar{R}} \bar{V}e$ ввиду предыдущего абзаца. Поэтому, если f — представление алгебры $\bar{R}[G]$ в модуле $\bar{V}$, то каждое собственное значение преобразования $f(x)$ встречается с кратностью, делящейся на $p^{s(Q:A)}$. Следовательно, ввиду (III.3.3), $p^{s(Q:A)} \mid \beta_V(x)$. □

Лемма 2.4. *Пусть V — неразложимый R-свободный $R[G]$-модуль с вертексом A, y — элемент из G, p-часть которого не сопряжена с некоторым элементом из A. Тогда $\theta(y) = 0$, где θ — характер модуля V. В частности, если p-часть элемента y не сопряжена с элементом из дефектной группы блока, который содержит θ, то $\theta(y) = 0$.*

Доказательство. Очевидно, ввиду (III.4.11) и (III.6.8). □

Следствие 2.5. *Пусть U — проективный $R[G]$-модуль, Φ — характер модуля U. Если y есть p-сингулярный элемент*[1], *то $\Phi(y) = 0$.*

[1] То есть элемент, порядок которого делится на p.— *Примеч. пер.*

Если x есть p'-элемент и Q является S_p-подгруппой группы $C_G(x)$, то $\Phi(x)/|Q|$ — целое алгебраическое число.

Доказательство. Поскольку $\langle 1\rangle$ является вертексом каждой компоненты модуля U, то результат следует из (2.3) и (2.4). □

§ 3. Соотношения ортогональности

На протяжении оставшейся части главы будем применять следующие обозначения.

$L_1, L_2, \ldots$ — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых $\bar{R}[G]$-модулей. Для каждого i

U_i — такой проективный неразложимый $R[G]$-модуль, что $U_i/\mathrm{Rad}\, U_i \cong L_i$.

φ_i — характер Брауэра модуля L_i.

Φ_i — (обыкновенный) характер модуля U_i.

$\chi_1, \chi_2, \ldots$ — неприводимые характеры группы G.

$D=(d_{si})$ — матрица разложения алгебры $R[G]$.

$C=(c_{ij})$ — матрица Картана алгебры $\bar{R}[G]$.

Если C_0 — сопряженный класс группы G и $x\in C_0$, положим

$$\omega_s(\hat{C}_0)=\frac{|C_0|\chi_s(x)}{\chi_s(1)}.$$

Будем также писать $\omega_s(x)=\omega_s(C_0)=\omega_s(\hat{C}_0)$. Хорошо известно, что $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — все центральные характеры алгебры $K[G]$ и что $\omega_s(\hat{C}_0)$ — целое алгебраическое число.

$\{x_i\}$ — полное множество представителей сопряженных классов группы G, состоящих из p'-элементов.

$\sum'_{x\in G}$ будет обозначать сумму по всем p'-элементам x группы G.

Если α, β — комплекснозначные функции, определенные на множестве p'-элементов группы G, то

$$(\alpha, \beta)'=(\alpha, \beta)'_G=\frac{1}{|G|}\sum'_{x\in G}\alpha(x)\beta(x)^*.$$

$\|\alpha\|'=\|\alpha\|'_G=\sqrt{(\alpha, \alpha)'_G}$.

$\gamma_{ij}=(\varphi_i, \varphi_j)'$.

ν — экспоненциальное нормирование на K, причем $\nu(p)=1$, т. е. $\nu(\pi)=1/n$, если $(\pi)^n=(p)$.

Лемма 3.1 (i) $(\chi_s(x_j))=D(\varphi_i(x_j))$.

(ii) $(\Phi_i(x_j))=D'(\chi_s(x_j))$ [1].

(iii) $(\Phi_i(x_j))=C(\varphi_i(x_j))$.

Доказательство. Непосредственно следует из (I.17.9). □

Лемма 3.2. *Пусть V — некоторый $K[G]$-модуль, θ — характер модуля V. Тогда*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\theta(x)=\dim_K(\mathrm{Inv}_G(V)).$$

[1] A' обозначает матрицу, транспонированную к A. — *Примеч. пер.*

Доказательство. Для $v \in V$ положим $Tv = \sum_{x \in G} vx$. Тогда $(\sum_{x \in G} \theta(x))/|G|$ является следом K-линейного отображения $T/|G|$. Поскольку $(T/|G|)^2 = T/|G|$, $(\sum_{x \in G} \theta(x))/|G|$ равно рангу $T/|G|$. Так как, очевидно, $(T/|G|)V = \mathrm{Inv}_G(V)$, то отсюда следует результат. □

Лемма 3.3. $(\Phi_i, \varphi_j)' = \delta_{ij}$.

Доказательство. Пусть V_0 — такой R-свободный $R[G]$-модуль ранга 1, что $V_0 = \mathrm{Inv}_G(V_0)$. Поскольку $\bar{U}_i \otimes L_j^*$ — проективный $\bar{R}[G]$-модуль, существует такой проективный $R[G]$-модуль U, что $\bar{U} = \bar{U}_i \otimes L_j^*$. Пусть θ — характер модуля U. Тогда $\theta(x) = \Phi_i(x)\varphi_j(x)^*$, где x есть p'-элемент, и, ввиду (2.5), $\theta(x) = 0$, если x p-сингулярен. Значит, по (3.2),

$$(\Phi_i, \varphi_j)' = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G}{}' \Phi_i(x)\varphi_i(x)^* = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \theta(x) = \dim_K(\mathrm{Inv}_G(U_K)).$$

Тогда из (I.17.6), (II.2.4) и (II.2.8) следует, что

$$(\Phi_i, \varphi_j)' = \dim_K(\mathrm{Inv}_G(U_K)) = I_K(U_K, (V_0)_K) = I_{\bar{R}}(\bar{U}, \bar{V}_0) =$$
$$= \dim_{\bar{R}}(\mathrm{Inv}_G(\bar{U}_i^* \otimes L_j)) = I_{\bar{R}}(\bar{U}_i, L_j) = \delta_{ij}. \quad \square$$

Лемма 3.4. *Каждое из множеств* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ *и* $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots\}$ *образует базис пространства комплекснозначных функций классов* p'*-элементов группы* G.

Доказательство. В силу (3.3), каждое из этих множеств линейно независимо. Результат теперь следует из (III.2.8). □

Лемма 3.5. *Пусть* V *есть* $\bar{R}[G]$*-модуль. Композиционные факторы модуля* V *(с кратностями) однозначно определяются характером* β_V.

Доказательство. Очевидно ввиду (3.4). □

Лемма 3.6. *Матрицы* $(\varphi_i(x_j))$, $(\Phi_i(x_j))$ *и* C *невырождены.*

Доказательство. Очевидно, согласно (3.4) и (3.1) (iii). □

Два следующих результата являются обобщенными соотношениями ортогональности. При $p \nmid |G|$ они превращаются в классические.

Лемма 3.7. (i) $(\Phi_i, \Phi_j) = (\Phi_i, \Phi_j)' = c_{ij}$.

(ii) $(\chi_s, \chi_t) = \delta_{st}$.

(iii) $(\gamma_{ij}) = C^{-1}$.

Доказательство. (i) Очевидно ввиду (2.5), (3.1) (iii) и (3.3).

(ii) Выберем p так, чтобы $p \nmid |G|$. Тогда утверждение следует из (i).

(iii) В силу (3.1) (iii) и (3.3),

$$\sum_j \gamma_{ij} c_{jk} = \sum_j c_{jk} (\varphi_i, \varphi_j)' = (\varphi_i, \Phi_k)' = \delta_{ik}. \quad \square$$

Лемма 3.8. *Пусть* $N = (|C_G(x_i)|\delta_{ij})$. *Тогда*

$$(\Phi_i(x_j))'(\varphi_i(x_j^{-1})) = (\varphi_i(x_j))' C (\varphi_i(x_j^{-1})) = N.$$

Кроме того, $\sum_j \Phi_j(x_i)\varphi_j(x_k^{-1}) = |C_G(x_i)|\delta_{ik}$.

Доказательство. $(\varphi_i(x_j^{-1}))N^{-1}(\Phi_i(x_j))' = I$, согласно (3.3). Результат теперь следует из (3.1) (iii). □

Теорема 3.9. $\det C$ *является степенью числа* p.

Доказательство. Пусть $\eta_j=\eta_{\varphi_j}$ определена как в (1.2). Тогда, в силу (1.2),

$$|P|^2\gamma_{ij}=|P|^2(\varphi_i, \varphi_j)'=(\eta_i, \eta_j)$$

является целым рациональным числом (P есть S_p-подгруппа группы G). Значит, по (3.7), $p^n\det(\gamma_{ij})=p^n/\det C$ является целым рациональным числом для некоторого n. □

Лемма 3.10. *Для каждого i существует такая R-линейная комбинация ψ_i неприводимых характеров группы G, что $\psi_i(x_j)=0$ при $i\neq j$ и $\psi_i(x_i)\not\equiv 0 \pmod{\pi}$.*

Доказательство. Пусть P есть S_p-подгруппа группы $C_G(x_i)$. Определим комплекснозначную функцию α на $\langle x_i\rangle\times P$ следующим образом: $\alpha(x)=0$, если $x\notin x_i P$, и $\alpha(x)=1$, если $x\in x_i P$. Тогда α является R-линейной комбинацией неприводимых характеров группы $\langle x_i\rangle\times P$. Следовательно, $\psi_i=\alpha^G$ обладает нужными свойствами. □

Теорема 3.11. *Элементарные делители матрицы D все равны 1, $\det(\varphi_i(x_j))^2$ является целым рациональным числом и $\det(\varphi_i(x_j))\not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Если d_j — дефект класса, содержащего x_j, то $\{p^{d_j}\}$ — множество элементарных делителей матрицы C.*

Доказательство. В силу (3.8), $\det(\varphi_i(x_j))^2$ является целым рациональным числом.

Согласно (3.9), элементарные делители матрицы D все являются степенями числа p. Значит, если утверждение ложно, то $(\chi_s(x_j))=D(\varphi_i(x_j))$ имеет элементарный делитель, делящийся на π в R. Поэтому существует такое множество элементов $\{a_j\}$ из R, что $\sum_j a_j\chi_s(x_j)\equiv 0 \pmod{\pi}$ для всех s и $a_i\not\equiv 0 \pmod{\pi}$ для некоторого i. Значит, $\sum_j a_j\theta(x_j)\equiv 0 \pmod{\pi}$ для любой R-линейной комбинации θ неприводимых характеров группы G. Это противоречит (3.10).

Последнее утверждение непосредственно следует из (3.8) и (3.9). □

Характер или характер Брауэра лежит в блоке B, если он является характером или характером Брауэра модуля из блока B. Ввиду (3.5), каждый характер и характер Брауэра, являющиеся характером или характером Брауэра неразложимого $R[G]$-модуля, лежат ровно в одном блоке.

Следствие 3.12. *Существуют такие целые рациональные числа e_{js}, что $\varphi_j(x)=\sum_s e_{js}\chi_s(x)$ для всех p'-элементов x из G, где χ_s пробегает неприводимые характеры того блока, в котором лежит φ_j.*

Доказательство. В силу (I.17.9) и (3.11), $D'_0 D_0=C_0$ невырождена, где D_0, C_0 — матрица разложения и матрица Картана блока соответственно. Отсюда следует результат. □

Существование таких целых чисел e_{js}, что $\varphi_j(x)=\sum e_{js}\chi_s(x)$ для всех p'-элементов x из G, совершенно другим методом доказал Люстиг [1974].

Пусть B — блок группы G. *Базисное множество блока B* — это множество $\{f_i\}$ комплекснозначных функций классов, определенных на множестве p'-элементов группы G, которое образует базис абелевой группы, порожденной ограничениями всех χ_s из B на множество

p'-элементов группы G. Ввиду (3.12), $\{\varphi_j | \varphi_j \in B\}$ [1] образует базисное множество блока B. Во многих приложениях нельзя отдать предпочтение одному базисному множеству перед другим и бывает более удобно работать с базисным множеством, отличным от множества неприводимых характеров Брауэра из B. Если $\{f_j\}$ — базисное множество блока B, можно формально определить *числа разложения* d'_{si} и *инварианты Картана* c'_{ij} *относительно множества* $\{f_j\}$, полагая $\chi_s(x)=\sum_i d'_{si} f_i(x)$ для всех p'-элементов x из G и $c'_{ij}=\sum_s d'_{si} d'_{sj}$.

Следствие 3.13. *Пусть* T *— некоторое кольцо комплексных чисел, и пусть* θ *есть* T*-линейная комбинация неприводимых характеров группы* G*, обращающаяся в нуль на всех* p*-сингулярных элементах. Тогда* θ *является* T*-линейной комбинацией характеров* Φ_i.

Доказательство. В силу (2.5) и (3.4), $\theta=\sum c_i \Phi_i$ для комплексных чисел c_i. В силу (3.3), $c_i=(\theta, \varphi_i)'$. Результат теперь следует из (3.12). □

Лемма 3.14. *Пусть* B *— блок. Для* $\theta=\sum_s b_s \chi_s$, *где* $b_s \in K$, *определим* $\theta^B=\sum_{\chi_s \in B} b_s \chi_s$.

(i) *Если* $\theta=\sum_s b_s \chi_s$ *обращается в нуль на всех* p*-сингулярных элементах группы* G, *то этим свойством обладает также и* θ^B.

(ii) $\sum_{\chi_s \in B} \chi_s(x)\chi_s(y)=0$ *для всех* x, y, *где* x *есть* p'*-элемент из* G, *а* y p*-сингулярен* [2].

Доказательство. (i) В силу (2.5) и (3.4), $\theta=\sum c_i \Phi_i$, где $c_i \in K$. Значит, $\theta^B=\sum_{\Phi_i \in B} c_i \Phi_i$.

(ii) Пусть x является p'-элементом из G. Положим $\theta=\sum_s \chi_s(x)\chi_s$. Тогда, в силу второго соотношения ортогональности, $\theta(y)=0$ для всех p-сингулярных элементов y из G. Результат теперь следует из (i). □

Лемма 3.15. *Пусть* β *— точный характер Брауэра группы* G. *Предположим, что* β *принимает ровно* n *различных значений. Тогда каждый из* φ_i *является неприводимой конституэнтой одного из характеров Брауэра* β^0, β^1, $\beta^2, \ldots, \beta^{n-1}$.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные значения, которые по условию принимает β, A_j — множество тех p'-элементов z из G, для которых $\beta(x)=a_j$. Выберем элементы $z_j \in A_j$. Если φ_j не является конституэнтой характера β^s, $s=0, \ldots, n-1$, то в силу (3.3), $\sum_j \beta^s(z_j) \sum_{z \in A_j} \Phi_i(z^{-1})=0$ при $s=0, \ldots, n-1$. Из неравенства нулю определителя Вандермонда следует, что $\sum_{z \in A_j} \Phi_i(z^{-1})=0$ для всех j. Так как β точный, то $A_j=\{1\}$ для некоторого j, и поэтому $\Phi_i(1)=0$. Полученное противоречие доказывает результат. □

---

[1] Здесь и далее символ $\varphi_i \in B$ имеет не теоретико-множественный смысл, а смысл принадлежности характера блоку.— *Примеч. пер.*

[2] Соотношения ортогональности более общего вида рассматривал Белоногов [1984*], [1986*].— *Примеч. пер.*

Лемма 3.16. *Пусть* α *— характер или характер Брауэра группы* G, P *— некоторая* S_p*-подгруппа группы* G. *Пусть* C_j *— сопряженный класс группы* G *и* $x_j \in C_j$. *Пусть* η_α *определена как в* (1.2). *Тогда*

$$(\chi_s, \eta_\alpha) = \frac{|P|}{|G|} \chi_s(1) \sum_j \alpha(x_j^{-1}) \omega_s(\hat{C}_j).$$

Если $\alpha = \chi_t$, *то*

$$(\chi_s, \eta_\alpha) = \frac{|P|}{|G|} \chi_t(1) \sum_j \chi_s(x_j^{-1}) \omega_t(\hat{C}_j).$$

Доказательство. По определению,

$$(\chi_s, \eta_\alpha) = \frac{|P|}{|G|} \sum_{x \in G}{}' \chi_s(x) \alpha(x^{-1}) = \frac{|P|}{|G|} \sum_j |C_j| \chi_s(x_j) \alpha(x_j^{-1}) =$$

$$= \frac{|P|}{|G|} \sum_j \chi_s(1) \omega_s(\hat{C}_j) \alpha(x_j^{-1}).$$

Это доказывает первую формулу. Если $\alpha = \chi_t$, то

$$(\chi_s, \eta_\alpha) = \frac{|P|}{|G|} \sum_{x \in G}{}' \chi_s(x) \chi_t(x^{-1}) = \frac{|P|}{|G|} \sum_{x \in G}{}' \chi_s(x^{-1}) \chi_t(x)$$

симметричны по s и t. Теперь вторая формула следует из первой. □

§ 4. Характеры в блоках

В этом и последующих параграфах будем применять следующие обозначения.

C_j — сопряженный класс группы G, содержащий x_j; $v(|G|) = a$.

Для каждого s функция $\eta_s = \eta_\alpha$ определена как в (1.2) при $\alpha = \chi_s$; $\eta_s = \sum_t a_{st} \chi_t$.

Лемма 4.1. (i) $a_{st} = a_{ts}$ *для всех* s, t.

(ii) $a_{st} = 0$, *если* χ_s, χ_t *лежат в различных блоках.*

(iii) $\sum_s a_{st} a_{su} = p^a a_{tu}$ *для всех* t, u.

Доказательство. (i) Очевидно, согласно (3.16).

(ii) В силу (3.7) (iii),

$$a_{st} = (\eta_s, \chi_t) = p^a (\sum_i d_{si} \varphi_i, \sum_j d_{ij} \varphi_j)' = p^a \sum_{i,j} d_{si} d_{tj} \gamma_{ij} = 0$$

для χ_s, χ_t из различных блоков.

(iii) $\sum_s a_{st} a_{su} = (\eta_t, \eta_u) = p^a (\chi_t, \eta_u) = p^a a_{tu}$. □

Лемма 4.2. *Пусть* B *— блок,* λ *— центральный характер алгебры* $\bar{R}[G]$, *соответствующий* B. *Если* $\chi_s \in B$, *то* $\bar{\omega}_s = \lambda$. *Таким образом,* χ_s *и* χ_t *лежат в одном блоке тогда и только тогда, когда* $\bar{\omega}_s = \bar{\omega}_t$.

Доказательство. Пусть e — центральный идемпотент из $R[G]$, соответствующий B. Тогда $\omega_s(e) = 1$, и, значит, $\bar{\omega}_s(\bar{e}) \neq 0$. Так как $\bar{\omega}_s$ является центральным характером алгебры $\bar{R}[G]$, то $\bar{\omega}_s = \lambda$. □

Лемма 4.3. *Предположим, что дефект блока B равен d. Пусть $\chi_s \in B$. Тогда $\overline{\omega_s(x)}=0$, если x лежит в сопряженном классе дефекта меньше d, и $\overline{\omega_s(x)} \neq 0$ для некоторого x из сопряженного класса C_0 дефекта d такого, что дефектная группа C_0 совпадает с дефектной группой блока B.*

Доказательство. Очевидно, ввиду (III.6.10) и (4.2). □

Лемма 4.4. *Пусть B — блок дефекта d, $\chi_s \in B$. Тогда $p^{a-d} | \chi_s(1)$. Если для некоторого j имеем $\chi_s(x_j^{-1}) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то дефект класса C_j не больше d. Если $\chi_s(x_j^{-1})\omega_s(C_j) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то дефект класса C_j равен d и $\nu(\chi_s(1))=a-d$.*

Доказательство. В силу (III.6.8) и (2.3), $p^{a-d} | \chi_s(1)$. Поскольку

$$\frac{|C_j|\chi_s(x_j^{-1})}{\chi_s(1)} = \omega_s(x_j^{-1})$$

является целым алгебраическим, $\nu(|C_j|) \geqslant \nu(\chi_s(1)) \geqslant a-d$, когда $\chi_s(x_j^{-1}) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Значит, дефект класса C_j не больше d. Если, кроме того, $\omega_s(C_j) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то, в силу (4.3), $a-d \leqslant \nu(\chi_s(1)) \leqslant \nu(|C_j|) \leqslant a-d$. Значит, дефект C_j равен d и $\nu(\chi_s(1))=a-d$. □

Теорема 4.5. *Пусть B — блок дефекта d. Тогда:*

(i) *d — такое наименьшее целое число, что $p^{a-d} | \chi_s(1)$ для всех $\chi_s \in B$.*

(ii) *d — такое наименьшее целое число, что $p^{a-d} | \varphi_i(1)$ для всех $\varphi_i \in B$.*

(iii) *Если α — такая рациональная целочисленная линейная комбинация неприводимых характеров из B, что $\nu(\alpha(1))=a-d$, и функция η_α определена как в (1.2), то η_α/p^{a-d} — обобщенный характер группы G, но η_α/p^{a-d+1} уже не является обобщенным характером группы G.*

Доказательство. Пусть n — такое наибольшее целое число, что $p^{a-d+n} | \chi_s(1)$ для всех $\chi_s \in B$. В силу (4.4), $n \geqslant 0$. Выберем $\chi_t \in B$ так, чтобы $\nu(\chi_t(1))=a-d+n$. Пусть β — такая целочисленная линейная комбинация характеров χ_s, что $\nu(\beta(1))=a-d+n$. В силу (3.16) и (4.1), η_β/p^{a-d+n} является обобщенным характером группы G. Поскольку $\nu(\eta_\beta(1)/p^{a-d+n})=a$ и η_β обращается в нуль на p-сингулярных элементах, из (3.13) следует, что $\eta_\beta/p^{a-d+n+1}$ не является обобщенным характером. Тем самым (i) и (ii) будут доказаны, если будет показано, что $n=0$.

Выберем $\beta=\chi_t$ как выше. Поскольку $\eta_t/p^{a-d+n+1}$ не является обобщенным характером группы G, $\nu(a_{ts})=a-d+n$ для некоторого s. Значит, в силу (3.16), $\sum_j \chi_s(x_j^{-1})\omega_t(C_j) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, и потому существует такой j, что $\chi_s(x_j^{-1})\omega_t(C_j) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Тогда из (4.1) и (4.2) следует, что $\chi_s(x_j^{-1})\omega_s(C_j) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Поэтому, по (4.4), $n=0$.

(ii) Каждое из $\chi_s(1)$ является рациональной целочисленной линейной комбинацией элементов множества $\{\varphi_i(1) | \varphi_i \in B\}$. В силу (3.12), каждое из $\varphi_i(1)$ является рациональной целочисленной линейной комбинацией элементов множества $\{\chi_s(1) | \chi_s \in B\}$. Результат теперь следует из (i). □

Лемма 4.6. *Пусть P — некоторая p-подгруппа группы G. Группа P является дефектной группой блока B тогда и только тогда, когда каждый модуль из B $R[P]$-проективен и выполнено одно из условий:*

(i) *существует неприводимый* $\bar{R}[G]$*-модуль из* B *с вертексом* P;
(ii) *существует такой* R*-свободный* $R[G]$*-модуль* V *из* B *с вертексом* P, *что* V_K *неприводим.*

Доказательство. Пусть P_0 — дефектная группа блока B. В силу (III.6.8), каждый модуль из B является $R[P_0]$-проективным. В силу (2.2) и (4.5), P_0 удовлетворяет (i) и (ii). Предположим, что каждый модуль из B $R[P]$-проективен. Тогда $P_0 \subseteq_G P$. Если P удовлетворяет (i) или (ii), то $P \subseteq_G P_0$. □

Пусть B — блок дефекта d. Если χ_s лежит в B и $\nu(\chi_s(1)) = a - d + h_s$, то целое число h_s называется *высотой* характера χ_s. Аналогично, если φ_i лежит в B, то $\nu(\varphi_i(1)) - (a-d)$ называется *высотой* φ_i. В силу (3.12) и (4.4) все высоты неотрицательны и в B существуют φ_i и χ_s, имеющие высоту 0.

Лемма 4.7. *Пусть* B — *блок дефекта* d, χ_r — *характер высоты* 0 *из* B, α — *рациональная целочисленная комбинация элементов множества* $\{\varphi_i | \varphi_i \in B\}$, $\eta_\alpha = \sum_s b_s \chi_s$, *где* η_α *определена как в* (1.2). *Тогда:*

(i) $$b_s \equiv \frac{\chi_s(1)}{\chi_r(1)} b_r \pmod{p^{a-d+h_s+1}};$$

$$\frac{a_{st}}{p^{a-d}} \equiv \frac{\chi_s(1)\chi_t(1)}{\chi_r(1)^2} \frac{a_{rr}}{p^{a-d}} \pmod{p^{1+h_s}}, \quad \chi_s, \chi_t \in B;$$

(ii) *если* $\nu(\alpha(1)) = a-d$, *то* $\nu(b_s) = \nu(\chi_s(1))$, $\chi_s \in B$, *причем* $b_s \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\chi_s \in B$.

Доказательство. В силу (3.12) и (4.1), $b_s = 0$, если $\chi_s \notin B$. В силу (3.16) и (4.2), $\nu(b_s) \geqslant \nu(\chi_s(1))$ и

$$\frac{b_s}{\chi_s(1)} \equiv \frac{p^a}{|G|} \sum_j \alpha(x_j^{-1}) \omega_s(C_j) \equiv \frac{p^a}{|G|} \sum_j \alpha(x_j^{-1}) \omega_t(C_j) \equiv \frac{b_t}{\chi_t(1)} \pmod{\pi},$$

где $\chi_s, \chi_t \in B$.

Поскольку b_s рационально, первое сравнение из (i) доказано, если выбрать $t = r$. Если $\nu(\alpha(1)) = a-d$, то ввиду (4.5) (iii), последнее равенство влечет $\nu(b_r) = \nu(\chi_r(1))$. Отсюда следует (ii).

Предыдущий абзац, примененный к $\alpha = \chi_t$ и χ_r, приводит к следующим сравнениям:

$$a_{st} \equiv a_{ts} \equiv \frac{\chi_s(1)}{\chi_r(1)} a_{tr} \pmod{p^{a-d+h_s+1}}, \qquad a_{tr} \equiv a_{rt} \equiv \frac{\chi_t(1)}{\chi_r(1)} a_{rr} \pmod{p^{a-d+h_t+1}}.$$

Значит,

$$\frac{\chi_s(1)}{\chi_r(1)} a_{tr} \equiv \frac{\chi_s(1)\chi_t(1)}{\chi_r(1)^2} a_{rr} \pmod{p^{a-d+h_s+h_t+1}}.$$

Следовательно,

$$a_{st} \equiv \frac{\chi_s(1)\chi_t(1)}{\chi_r(1)^2} a_{rr} \pmod{p^{a-d+h_s+1}}.$$

Это дает второе сравнение из (i). □

Лемма 4.8. *Пусть B — блок дефекта d, и пусть χ_r — характер высоты 0 из B. Положим $J=J_d=\{j|C_j$ имеет дефект $d\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) $$\frac{a_{rs}}{\chi_s(1)}\equiv\frac{p^a}{|G|}\sum_{j\in J}\chi_r(x_j^{-1})\omega_s(C_j)\pmod{\pi}$$

для всех s, где χ_s лежит в блоке дефекта d.

(ii) $\chi_r(x_j^{-1})\omega_r(C_j)\not\equiv 0 \pmod{\pi}$ *для некоторого* $j\in J$.

(iii) *Пусть χ_s, χ_t принадлежат блокам дефекта d. Характеры χ_s и χ_t лежат в одном блоке тогда и только тогда, когда* $\omega_s(C_j)\equiv\omega_t(C_j)\pmod{\pi}$ *для всех* $j\in J$.

Доказательство. (i) $\sum_j\chi_r(x_j^{-1})\omega_s(C_j)\equiv\sum_{j\in J}\chi_r(x_j^{-1})\omega_s(C_j)\pmod{\pi}$ ввиду (4.3) и (4.4). Результат теперь следует из (3.16).

(ii) Если $\chi_r(x_j^{-1})\omega_r(C_j)\equiv 0\pmod{\pi}$ для всех $j\in J$, то в силу (i) и (4.2), $\nu(a_{rr})>a-d$. Значит, по (4.7) (i), $\nu(a_{rs})>a-d$ для всех $\chi_s\in B$, вопреки (4.5) (iii).

(iii) Выберем обозначения таким образом, чтобы $\chi_s\in B$. Если $\chi_t\in B$, то $\bar\omega_s=\bar\omega_t$ ввиду (4.2). Предположим обратное, т. е. что $\omega_s(C_j)\equiv\omega_t(C_j)\pmod{\pi}$ для всех $j\in J$. Тогда, по (i),

$$\frac{a_{rt}}{\chi_t(1)}\equiv\frac{a_{rs}}{\chi_s(1)}\pmod{p}.$$

Значит, в силу (4.7) (ii), $\nu(a_{rt}/\chi_t(1))=0$ и потому $a_{rt}\not\equiv 0$. Следовательно, по (4.1), $\chi_t\in B$. □

Лемма 4.9. *Пусть K_0 — множество всех алгебраических чисел в K, σ — автоморфизм алгебры $K_0[G]$, для которого $K_0^\sigma=K_0$ и $G^\sigma=G$. Для K_0-значной функции α на G определим $\alpha^\sigma(x)$, полагая $\alpha^\sigma(x)=(\alpha(x^{\sigma^{-1}}))^\sigma$. Пусть B — блок группы G.*

(i) *Существует такой блок B^σ, что $\chi_t\in B^\sigma$ тогда и только тогда, когда $\chi_t=\chi_s^\sigma$ для некоторого $\chi_s\in B$.*

(ii) *Если $\varphi_i\in B$ и если φ_i^σ — неприводимый характер Брауэра группы G, то $\varphi_i^\sigma\in B^\sigma$.*

(iii) *Если $\chi_s^\sigma=\chi_s$ для некоторого $\chi_s\in B$ или $\varphi_i^\sigma=\varphi_i$ для некоторого $\varphi_i\in B$, то $B^\sigma=B$.*

Доказательство. Пусть $\tilde B$ обозначает множество обыкновенных характеров в блоке B, и пусть $\chi_{\sigma(s)}=\chi_s^\sigma$. Если χ_r лежит в B и имеет в нем высоту 0, то в силу (4.7) (ii), $a_{rs}\not\equiv 0$ для всех $\chi_s\in B$. Значит, $a_{\sigma(r)\sigma(s)}\not\equiv 0$, и поэтому, в силу (4.1), $\tilde B^\sigma\subseteq B'$ для некоторого блока B'. Аналогично, $\tilde B\subseteq\tilde B'^{\sigma^{-1}}\subseteq\tilde B''$. Значит, $B=B''$, $\tilde B^\sigma=\tilde B'$ и, следовательно, $B'=B^\sigma$.

В силу (3.12), $\varphi_i(x)=\sum e_s\chi_s(x)$ для всех p'-элементов x и подходящих целых рациональных e_s, причем $e_s=0$, если $\chi_s\notin B$. Значит, $\varphi_i^\sigma(x)=\sum e_s\chi_s^\sigma(x)$, и потому $\varphi_i^\sigma\in B^\sigma$. Утверждение (iii) очевидно. □

Предположим, что $H\lhd G$. Если B_0 — блок группы H и $z\in G$, положим $B_0^z=B_0^\sigma$, где σ — автоморфизм группы H, индуцированный сопряжением с помощью элемента z. В силу (4.9), B_0^z — корректно определенный блок группы H.

Лемма 4.10. *Пусть* $H \lhd G$, B — *блок группы* G. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Существует такой блок* B_0 *группы* H, *что если* χ_s *или* $\varphi_i \in B$, *то каждая неприводимая конституэнта* $(\chi_s)_H$ *или* $(\varphi_i)_H$ *лежит в* $\bigcup_{z\in G} B_0^z$.

(ii) *Если* ζ — *неприводимый характер группы* H *и* B_0^z, *то существует такой* $\chi_s \in B$, *что* ζ *является конституэнтой* $(\chi_s)_H$.

(iii) *Если* ψ — *неприводимый характер Брауэра группы* H, *лежащий в* B_0, *то существует такой* $\varphi_i \in B$, *что* ψ *является конституэнтой характера* $(\varphi_i)_H$.

Доказательство. (i) Пусть $\chi_s \in B$ и B_0 — блок группы H, содержащий неприводимую конституэнту характера $(\chi_s)_H$. В силу (III.2.12), каждая неприводимая конституэнта характера $(\chi_s)_H$ лежит в $\bigcup_{z\in G} B_0^z$. Значит, если $d_{si} \neq 0$, то каждая неприводимая конституэнта характера Брауэра $(\varphi_i)_H$ лежит в $\bigcup_{z\in G} B_0^z$. Если $d_{ti} \neq 0$ и B_1 — блок группы H, такой, что каждая неприводимая конституэнта характера $(\chi_t)_H$ лежит в $\bigcup_{z\in G} B_1^z$, то каждая неприводимая конституэнта характера Брауэра $(\varphi_i)_H$ лежит в $\bigcup_{z\in G} B_1^z$. Значит, $B_1 = B_0^z$ для некоторого $z \in G$. Результат теперь следует из (I.17.9).

(ii) Выберем неприводимый характер ζ_1 группы H, лежащий в B_0, так, чтобы ζ_1 был конституэнтой характера $(\chi_s)_H$ для некоторого $\chi_s \in B$. Ввиду (I.17.9), результат достаточно доказать в случае, когда ζ и ζ_1 имеют неприводимый характер Брауэра ψ в качестве их общей конституэнты. Тогда существует такой i, что $d_{si} \neq 0$ и ψ — конституэнта характера Брауэра $(\varphi_i)_H$. Пусть V — неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль с характером Брауэра ψ. В силу (III.2.12), $(L_i)_H$ вполне приводим, и поэтому $V \mid (L_i)_H$. Значит, $I((L_i)_H, V) \neq 0$, и потому, в силу (III.2.5), φ_i является конституэнтой ψ^G. Следовательно, ψ^G, а значит, и ζ^G обладают неприводимой конституэнтой, лежащей в B. Результат теперь следует из (III.2.5).

(iii) Пусть ζ — неприводимый характер группы H, лежащий в B_0 и имеющий ψ в качестве своей конституэнты. В силу (ii), существует такой $\chi_s \in B$, что ζ является конституэнтой характера $(\chi_s)_H$. Значит, ψ является конституэнтой некоторого характера Брауэра $(\varphi_i)_H$, такого, что $d_{si} \neq 0$. □

Главный характер группы G — это неприводимый характер одномерного $K[G]$-модуля, состоящего из инвариантных элементов. *Главный характер Брауэра* группы G — это характер Брауэра одномерного $\bar{R}[G]$-модуля, состоящего из инвариантных элементов. Выберем обозначения таким образом, чтобы χ_1 и φ_1 были главным характером и главным характером Брауэра группы G соответственно. Очевидно, $\chi_1(z) = 1$ для всех $z \in G$ и $\varphi_1(x) = 1$ для всех p'-элементов x из G. Поэтому $d_{11} = 1$ и χ_1 и φ_1 лежат в одном блоке. Блок B_1 группы G, содержащий χ_1 и φ_1, называется *главным блоком* группы G.

Ядром блока B группы G называется пересечение ядер всех характеров χ_s из B.

Лемма 4.11. *Пусть* B — *блок группы* G, H — *ядро блока* B. *Тогда* H *является* p'-*группой и* H *лежит в ядре каждого модуля из* B.

Доказательство. Пусть $\Phi_i \in B$. Если y является p-сингулярным элементом из G, то $\Phi_i(y)=0$, ввиду (2.5). Значит, y не лежит в ядре Φ_i, и потому y не лежит в ядре некоторого характера χ_s, такого, что $d_{si} \neq 0$. Следовательно, H является p'-группой.

Ввиду полной приводимости, H лежит в ядре каждого R-свободного $R[G]$-модуля из B. Пусть V — некоторый $R[G]$-модуль из B. Тогда существует такой проективный $R[G]$-модуль $U \in B$, что $V = U/W$ для некоторого подмодуля W модуля U. Поскольку U R-свободен, H лежит в ядре U и, значит, — в ядре V. □

Ядра блоков изучал Палингс [1974], [1975а]. Заметим, что он употреблял этот термин для пересечения ядер всех неприводимых характеров Брауэра из блока. Результат, по существу эквивалентный (4.11), был доказан Михлером [1973а]. По поводу близких результатов см. Виллемс [1980].

Лемма 4.12. *Пусть B_1 — главный блок группы G. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Пусть K_0 — множество всех алгебраических чисел из K, σ — такой автоморфизм $K_0[G]$, что $K_0^\sigma = K_0$ и $G^\sigma = G$. Тогда $B_1^\sigma = B_1$.*

(ii) *Ядро блока B_1 равно $O_{p'}(G)$.*

(iii) *Пересечение ядер всех φ_i из B_1 равно $O_{p',p}(G)$.*

(iv) *Группа G обладает нормальным p-дополнением тогда и только тогда, когда φ_1 — единственный неприводимый характер Брауэра блока B_1.*

Доказательство. (i) Следует из (4.9), поскольку $\chi_1^\sigma = \chi_1$.

(ii) Пусть $H = O_{p'}(G)$. В силу (4.11), ядро блока B_1 лежит в H. Если $\chi_s \in B_1$, то, в силу (4.9) и (i), каждая неприводимая конституэнта характера $(\chi_s)_H$ лежит в главном блоке группы H. Поскольку H является p'-группой, главный характер группы H является единственным неприводимым характером в главном блоке группы H. Значит, $\chi_s(x) = \chi_s(1)$ для всех $\chi_s \in B_1$ и $x \in H$, что и доказывает (ii).

(iii) Пусть H — пересечение ядер всех $\varphi_i \in B_1$. В силу (4.11) и (ii), $O_{p'}(G) \subseteq H$. Если x — некоторый p'-элемент из H, то $\varphi_i(x) = \varphi_i(1)$ для всех $\varphi_i \in B_1$. Значит, $\chi_s(x) = \chi_s(1)$ для всех $\chi_s \in B_1$, и, в силу (ii), x принадлежит $O_{p'}(G)$ — ядру блока B_1. Поэтому $H \subseteq O_{p',p}(G)$. Поскольку каждый φ_i из B_1 является неприводимым характером Брауэра группы $G/O_{p'}(G)$, из (III.2.13) следует, что $H = O_{p',p}(G)$.

(iv) Если φ_1 — единственный неприводимый характер Брауэра в B_1, то, в силу (iii), $O_{p',p}(G) = G$. Если $G = O_{p',p}(G)$, то, согласно (iii), G лежит в ядре каждого неприводимого характера Брауэра из B_1. □

Лемма 4.13. *Предположим, что $\gamma_{ij} \neq 0$ для некоторых i, j. Тогда $\varphi_i \varphi_j^*$ обладает неприводимой конституэнтой, лежащей в главном блоке B_1 группы G.*

Доказательство. Пусть η_{φ_i} определена как в (1.2). Если $\varphi_i \varphi_j^* = \sum e_k \varphi_k$, то $\eta_{\varphi_i} \varphi_j^* = \sum e_k \eta_{\varphi_k}$. Значит, $(\chi_1, \eta_{\varphi_k}) \neq 0$ для некоторого такого φ_k, что $e_k \neq 0$. Следовательно, в силу (3.12) и (4.1), $\varphi_i \in B_1$. □

Лемма 4.14 (Блау). *Пусть B — блок, λ — центральный характер $\bar{R}[G]$, соответствующий B, φ_i, $\varphi_j \in B$.*

(i) *Если высота характера* φ_i *равна* 0, *то*

$$\frac{|C_k|\varphi_i(x_k)}{\varphi_i(1)} \in R \quad и \quad \left\{\overline{\frac{|C_k|\varphi_i(x_k)}{\varphi_i(1)}}\right\} = \lambda(\hat{C}_k) \quad для\ всех\ k.$$

(ii) *Если* φ_i *и* φ_j *имеют высоту* 0, *то* $\nu(p^a\gamma_{ij}) = a-d$ *и* $\varphi_i\varphi_j^*$ *обладает неприводимой конституэнтой, лежащей в главном блоке группы* G.

Доказательство. (i) В силу (3.12), существуют такие целые e_{is}, что $\varphi_i(x_k) = \sum_s e_{is}\chi_s(x_k)$ для всех k. Поэтому

$$\frac{|C_k|\varphi_i(x_k)}{\varphi_i(1)} = \sum_s e_{is}\frac{|C_k|\chi_s(x_k)}{\varphi_i(1)} = \sum_s e_{is}\frac{|C_k|\chi_s(x_k)\chi_s(1)}{\chi_s(1)\varphi_i(1)} = \sum_s \frac{e_{is}\chi_s(1)}{\varphi_i(1)}\omega_s(\hat{C}_k).$$

Значит,

$$\left\{\overline{\frac{|C_k|\varphi_i(x_k)}{\varphi_i(1)}}\right\} = \left\{\sum_s \frac{e_{is}\chi_s(1)}{\varphi_i(1)}\right\}\lambda(\hat{C}_k) = \lambda(\hat{C}_k).$$

(ii) Пусть χ_r — характер высоты 0 из B, $\eta = \eta_{\varphi_j}$ определена как в (1.2). Тогда

$$p^a\gamma_{ij} = (\eta, \varphi_i)' = \frac{p^a}{|G|}{\sum_{x\in G}}'\varphi_i(x)\varphi_j(x^{-1}) = \frac{p^a\varphi_i(1)}{|G|}\sum_k \frac{|C_k|\varphi_i(x_k)}{\varphi_i(1)}\varphi_j(x_k^{-1}).$$

Значит, в силу (i),

$$p^d\gamma_{ij} = \frac{p^a\varphi_i(1)}{|G|p^{a-d}}\sum_k \frac{|C_k|\varphi_i(x_k)}{\varphi_i(1)}\varphi_j(x_k^{-1}) \in R.$$

В силу (3.16),

$$\frac{p^d\varphi_i(1)}{|G|}\sum_k \omega_r(\hat{C}_k)\varphi_j(x_k^{-1}) = \frac{\varphi_i(1)}{\chi_r(1)}p^{a-d}(\eta, \chi_r).$$

Поэтому, по (i),

$$p^d\gamma_{ij} \equiv \frac{\varphi_i(1)}{\chi_r(1)}p^{d-a}(\eta, \chi_r) \pmod{\pi}.$$

Согласно (4.7) (iii), $\nu((\eta, \chi_r)) = \nu(\chi_r(1)) = a-d$, и потому $p^d\gamma_{ij} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

Результат теперь следует из (4.13). □

Если высоты φ_i и φ_j не равны 0, то заключение утверждения (4.14) (ii) может оказаться ложным, даже если φ_i и φ_j заменить на обыкновенные характеры. Например, $G = \mathrm{SL}_2(5)$ имеет 2 неприводимых характера степени 2 в главном 2-блоке, произведение которых является неприводимым характером из 2-блока дефекта 1.

Лемма 4.15. (i) $\Phi_1(1)/\varphi_i(1) \leqslant \Phi_i(1) \leqslant \Phi_1(1)\varphi_i(1)$ *для всех* i.

(ii) $c_{ij} \leqslant (\Phi_1(1) - c_{jj})\varphi_j(1)/\varphi_i(1)$ *для всех* $i \neq j$. *Кроме того,* $c_{ij} \leqslant \Phi_1(1)$ *для всех* i, j.

(iii) $\Phi_1(1) \leqslant |G:H|$ *для любой* p'*-подгруппы* H *группы* G.

(iv) $c_{11} \leqslant n$, *где* n — *число двойных* (H_1, H_2)*-смежных классов группы для любых* p'*-подгрупп* H_1, H_2.

Доказательство. (i) В силу (3.3), $\bar{U}_1 \mid \bar{U}_i \otimes L_i^*$ и $\bar{U}_i \mid L_i \otimes U_1$. Значит, $\Phi_1(1) \leqslant \Phi_i(1)\varphi_i(1)$ и $\Phi_i(1) \leqslant \Phi_1(1)\varphi_i(1)$.

(ii) Предположим, что $i \neq j$. Поскольку $c_{ij}\varphi_i(1) + c_{jj}\varphi_j(1) \leqslant \Phi_j(1)$, из (i) следует, что

$$c_{ij} \leqslant \frac{\Phi_j(1)}{\varphi_i(1)} - c_{jj}\frac{\varphi_j(1)}{\varphi_i(1)} \leqslant (\Phi_1(1) - c_{jj})\frac{\varphi_j(1)}{\varphi_i(1)}.$$

Кроме того, $c_{jj} \leqslant \Phi_1(1)$, так как $c_{ij} \geqslant 0$. Значит, $c_{ij} \leqslant \sqrt{c_{ii}c_{jj}} \leqslant \Phi_1(1)$.

Пусть H является p'-подгруппой группы G, и пусть $R[G]$-модуль V индуцирован тривиальным R-свободным $R[H]$-модулем ранга 1. В силу (III.2.6), $U_1 \mid V$. Теперь (iii) и (iv) следуют из (II.2.9). □

Теорема 4.16. *Пусть B — блок дефекта d, D^0 — матрица разложения, соответствующая B, а C^0 — матрица Картана, соответствующая B. Положим $A = (a_{st}/p^{a-d})$, где χ_s и χ_t пробегают все неприводимые характеры из B. Тогда существует такая унимодулярная матрица X с целыми рациональными коэффициентами, что*

$$XAX' = p^d \begin{pmatrix} (C^0)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того:

(i) *каждый элементарный делитель матрицы C^0 делит p^d и ровно один из них равен p^d;*

(ii) *если C^0 имеет n элементарных делителей, равных p^{d-1}, то B содержит по крайней мере $n+1$ неприводимых характеров высоты 0.*

Доказательство. В силу (3.7) (iii),

$$\frac{a_{st}}{p^{a-d}} = p^d(\chi_s, \chi_t)' = p^d \sum_{i,j} d_{si}d_{tj}\gamma_{ij}.$$

Значит, $A = p^d D^0 (C^0)^{-1} (D^0)'$. Согласно (3.11), все элементарные делители матрицы D равны 1. Значит, существует такая унимодулярная матрица D_1 с целыми рациональными коэффициентами, что

$$A = p^d D_1 \begin{pmatrix} (C^0)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_1'.$$

Осталось положить $X = D_1^{-1}$.

(i) Поскольку $p^d(C^0)^{-1}$ — матрица с целыми коэффициентами, каждый элементарный делитель матрицы C^0 делит p^d. Согласно (4.7) (i), ранг матрицы $\bar{A}$ равен единице. Значит, ранг матрицы $\overline{p^d(C^0)^{-1}}$ равен единице и ровно один элементарный делитель C^0 равен p^d.

(ii) Выберем $\chi_r \in B$ высоты 0. Для χ_s, $\chi_t \in B$ положим $e_{st} = \frac{a_{st}}{p^{a-d}} - \frac{\chi_s(1)a_{rt}}{\chi_r(1)p^{a-d}}$ при $s \neq r$, и $e_{rt} = \frac{a_{rt}}{p^{a-d}}$.

В силу (4.7), каждое из e_{st} является целым рациональным и $e_{st} \equiv 0 \pmod{p^2}$, если χ_s имеет высоту $h_s > 0$. Значит, если B содержит

$m+1$ неприводимых характеров высоты 0, то у матрицы (e_{st}) не больше чем m строк, не все элементы которых $\equiv 0 \pmod{p^2}$. Отсюда следует, что матрица A, а значит, и $p^d(C^0)^{-1}$ имеет не больше чем $m+1$ элементарных делителей, не делящихся на p^2. Значит, C^0 имеет не больше чем $m+1$ элементарных делителей, делящихся на p^{d-1}. Поэтому, согласно (i), $n \leqslant m$. □

В частных случаях можно получить более точные, чем (4.16), результаты. См., например, Фьюи [1980].

Следствие 4.17. *Предположим, что для каждого целого d группа G содержит ровно m_d сопряженных классов p'-элементов дефекта d. Тогда G имеет не больше чем m_d блоков дефекта d. Кроме того, G имеет ровно m_a блоков дефекта a.*

Доказательство. Пусть d_j — дефект класса C_j. В силу (3.11), $\{p^{d_j}\}$ является множеством элементарных делителей матрицы C. Результат теперь следует из (4.16) (i). □

Следующий результат впоследствии будет улучшен. См. (VII.10.14) ниже. Относительно интересных его приложений см. Ито [1962a].

Теорема 4.18 (Брауэр и Фейт [1959]). *Пусть B — блок дефекта d. Для каждого целого h через k_h обозначим число неприводимых характеров из блока B высоты h. Пусть $k=\sum k_h$ — число всех неприводимых характеров в B. Тогда*

$$k \leqslant \sum_h k_h p^{2h} \leqslant \frac{1}{4} p^{2d} + 1.$$

Если B содержит неприводимый характер положительной высоты, то $k \leqslant \frac{1}{2} p^{2d-2}$. Кроме того, высота каждого неприводимого характера из B равна 0, если $d=0$ или 1, и не больше $d-2$ при $d \geqslant 2$.

Доказательство. В силу (4.1) (iii), $\sum_s a_{st}^2 = p^a a_{tt}$. Значит, если χ_r лежит в B и имеет высоту 0, то, по (4.7),

$$\left(\frac{a_{rr}}{p^{a-d}}\right)^2 + (k_0 - 1) + \sum_{h=1}^{d} k_h p^{2h} \leqslant \sum_s \left(\frac{a_{sr}}{p^{a-d}}\right)^2 = p^d \left(\frac{a_{rr}}{p^{a-d}}\right).$$

Поэтому $k \leqslant \sum_{h=0}^{d} k_h p^{2h} \leqslant p^d u - u^2 + 1$ для некоторого u. Поскольку $p^d u - u^2 \leqslant \frac{1}{4} p^{2d}$ для всех u, то $\sum_{h=0}^{d} k_h p^{2h} \leqslant \frac{1}{4} p^{2d} + 1$. Следовательно, в частности, $\sum_{h=1}^{d} k_h \leqslant \frac{1}{4} p^{2d-2}$.

Предположим, что высота характера χ_t положительна. Тогда, по (4.7),

$$\left(\frac{a_{tt}}{p^{a-d}}\right)^2 + k_0 p^2 \leqslant \sum_s \left(\frac{a_{st}}{p^{a-d}}\right)^2 = p^d \left(\frac{a_{tt}}{p^{a-d}}\right).$$

Значит,

$$k_0 p^2 \leqslant p^d\left(\frac{a_{tt}}{p^{a-d}}\right)-\left(\frac{a_{tt}}{p^{a-d}}\right)^2;\quad 0<\frac{a_{tt}}{p^{a-d}}<p^d.$$

В силу (4.7), $a_{tt}/p^{a-d}\equiv 0 \pmod{p^{1+h}}$. Поэтому второе неравенство влечет $p^{1+h}<p^d$ и потому $h+1<d$. Следовательно, $h\leqslant d-2$.

Из первого неравенства следует, что $k_0 p^2 \leqslant p^d u-u^2 \leqslant \frac{1}{4}p^{2d}$ для некоторого u. Тогда $k=k_0+\sum_{h=1}^{d} k_h \leqslant \frac{1}{4}p^{2d-2}+\frac{1}{4}p^{2d-2}=\frac{1}{2}p^{2d-2}$. □

В случае, когда G p-разрешима, Хаггати [1977] нашел несколько лучшие оценки для возможных высот неприводимых характеров и показал, что они неулучшаемы.

Лемма 4.19. *Пусть B — блок дефекта d, k — число неприводимых характеров в B, l — число неприводимых характеров Брауэра в B. Тогда $l\leqslant k$. Кроме того, следующие условия эквивалентны:*

(i) $d=0$;

(ii) $k=l=1$;

(iii) $k=l$;

(iv) $\det C^0=1$, *где* C^0 — *матрица Картана блока* B;

(v) $C^0=(1)$;

(vi) *Все* $\bar{R}[G]$-*модули из* B *проективны.*

Доказательство. Так как $C^0=(D^0)^t D^0$, где D^0 — матрица разложения блока B, то из невырожденности C^0 следует, что $l\leqslant k$.

(i)⇒(ii). В силу (4.18), $k<2$, и потому $l=k=1$.

(ii)⇒(iii). Очевидно.

(iii)⇒(iv). В силу (3.11), $\det C^0=(\det D^0)^2=1$.

(iv)⇒(v). В силу (4.16) (i), $C^0=(1)$.

(v)⇒(vi). Для единственного неприводимого $\bar{R}[G]$-модуля L_i из B имеем $\bar{U}_i=L_i$.

(vi)⇒(i). $v(\varphi_i(1))=a$ для всех $\varphi_i\in B$. Согласно (4.5), $d=0$. □

Лемма 4.20. *Если* $v(\chi_s(1))=a$, *то* χ_s *лежит в блоке дефекта* 0 *и* $\chi_s(y)=0$ *для всех* p-*сингулярных элементов* $y\in G$.

Доказательство. В силу (4.18), высота характера χ_s равна 0, и потому он лежит в блоке дефекта 0. Последнее утверждение следует из (2.5) и (4.19). □

Лемма 4.21. *Пусть B — блок дефекта d. Предположим, что B содержит единственный неприводимый характер Брауэра. Пусть k — число неприводимых характеров в B. Тогда $k\leqslant p^d$. Если $k=p^d$, то каждое из чисел разложения для B равно* 1, *каждый неприводимый характер имеет высоту* 0 *и единственный инвариант Картана равен p^d.*

Доказательство. Пусть $\varphi=\varphi_i$ — единственный неприводимый характер Брауэра в B. Тогда (c_{ij}) — матрица Картана блока B. В силу (4.16) (i), $c_{ii}=p^d$. Значит, $\sum d_{ui}^2=p^d$. Если $\chi_u\in B$, то $d_{ui}\neq 0$, и тогда $d_{ui}^2\geqslant 1$. Следовательно, $k\leqslant p^d$, и если $k=p^d$, то $d_{ui}=1$ для всех $\chi_u\in B$. Отсюда вытекает результат. □

Если $k<p^d$ в (4.21), то ситуация значительно более сложная. Это становится ясно, если рассмотреть случай p-группы G.

Лемма 4.22. *Пусть* $\rho=\sum a_s\omega_s$, *где* $a_s\in K$ *такие, что* $\rho(\hat{C}_j)\in R$ *для всех* j, *и* $\bar{\rho}$ *является центральным характером алгебры* $\bar{R}[G]$. *Пусть* e — *такой примитивный центральный идемпотент алгебры* $R[G]$, *что* $\bar{e}$ — *примитивный центральный идемпотент алгебры* $\bar{R}[G]$ *и* $\bar{\rho}$ *соответствует* $\bar{e}$. *Если* B — *блок, положим* $\rho^B=\sum_{\chi_s\in B}a_s\omega_s$. *Тогда* $\rho^B(\hat{C}_j)\in R$ *для всех* j. *Кроме того,* $\overline{\rho^B}=0$, *если* B *не совпадает с блоком* $B(e)$, *соответствующим* e, *и* $\overline{\rho^{B(e)}}=\bar{\rho}$ *является центральным характером алгебры* $\bar{R}[G]$.

Доказательство. Пусть f — примитивный центральный идемпотент алгебры $R[G]$, $B(f)$ — блок, соответствующий f. По определению, $\rho^{B(f)}(\hat{C}_j)=\rho(f\hat{C}_j)$ для всех j. Значит, $\rho^{B(f)}(\hat{C}_j)\in R$. Поскольку $\bar{\rho}(\bar{\hat{C}}_j)=\bar{\rho}(\bar{e}\bar{\hat{C}}_j)$, то $\overline{\rho^{B(f)}}(\bar{\hat{C}}_j)=\bar{\rho}(\bar{f}\bar{\hat{C}}_j)=\bar{\rho}(\bar{f}\bar{e}\bar{\hat{C}}_j)$. Следовательно, $\overline{\rho^{B(f)}}=0$, если $e\neq f$, и $\overline{\rho^{B(e)}}=\bar{\rho}$. □

Три следующих результата параграфа более специальны и принадлежат Брауэру и Туану [1945].

Лемма 4.23. *Пусть* P — *некоторая* S_p-*подгруппа группы* G. *Предположим, что главный блок группы* G *содержит точный неприводимый характер* $\chi=\chi_s$, *причем* $\chi(1)<2p$. *Если* $G=G'$, *то* $C_G(P)$ *является* p-*группой.*

Доказательство. В силу (4.2), $|C_j|\chi(x_j)/\chi(1)\equiv|C_j|\pmod{\pi}$ для всех j. Предположим, что $x\in C_i$ является p'-элементом из $C_G(P)$. Тогда $|C_i|\not\equiv 0\pmod{p}$, и поэтому $\chi(z)\equiv\chi(1)\pmod{\pi}$ для всех $z\in\langle x\rangle$. Поскольку $\langle x\rangle$ является p'-группой, $(\chi_{\langle x\rangle},\mu)=0$ для каждого неглавного линейного характера μ группы $\langle x\rangle$. Поскольку $\chi(1)<2p$, то $\chi(z)=n+p\mu(z)$ для всех $z\in\langle x\rangle$ и некоторого линейного характера μ группы $\langle x\rangle$, где n — наименьший неотрицательный вычет $\chi(1)\pmod{p}$. Пусть f есть $K[\langle x\rangle]$-представление с характером $\chi_{\langle x\rangle}$. Тогда $\det f(x)=\mu(x)^p$. Так как $G=G'$, то $\mu(x)^p=1$. Значит, $\mu(x)=1$, поскольку $\langle x\rangle$ является p'-группой. Итак, x лежит в ядре характера χ. Следовательно, $x=1$, поскольку χ точен. Поэтому $C_G(P)$ является p-группой. □

Лемма 4.24. *Пусть* $Z(G)=\langle 1\rangle$, P — *некоторая* S_p-*подгруппа группы* G *и* $|Z(P)|=p^b$. *Если* G *имеет точный неприводимый характер* $\chi=\chi_s$ *степени* $\chi(1)=p^n$ *для некоторого целого* n, *то* χ *лежит в блоке дефекта* $d\leqslant a-b$. *В частности, если* P *абелева, то* χ *лежит в блоке дефекта* 0.

Доказательство. Положим $Z=Z(P)$. Для $z\in Z$ обозначим через C_z сопряженный класс группы G, содержащий z. Тогда $|C_z|\not\equiv 0\pmod{p}$ для $z\in Z$, и потому $\chi(z)/\chi(1)$ является целым алгебраическим числом. Поскольку $\chi(z)$ является суммой $\chi(1)$ корней из единицы, из хорошо известного рассуждения Бернсайда следует, что либо $\chi(z)=0$, либо $|\chi(z)|=\chi(1)$. Поскольку χ точен и $Z(G)=\langle 1\rangle$, последняя возможность может быть реализована лишь при $z=1$. Значит, $\chi(z)=0$ для $z\in Z$, $z\neq 1$.

Пусть B — блок группы G, содержащий χ, и d — дефект блока B. Выберем характер χ_r высоты 0 в B. Тогда, по (4.2),

$$\frac{|C_z|\chi_r(z)}{\chi_r(1)} \equiv \frac{|C_z|\chi(z)}{\chi(1)} \equiv 0 \pmod{\pi}$$

при $z \in Z$, $z \neq 1$. Значит, $\chi_r(z) \equiv 0 \pmod{\pi p^{a-d}}$ для $z \in Z$, $z \neq 1$. Поэтому

$$\sum_{z \in Z} \chi_r(z) \equiv \chi_r(1) \pmod{\pi p^{a-d}},$$

и потому $\nu\left(\sum_{z \in Z} \chi_r(z)\right) = a - d$. Так как $\sum_{z \in Z} \chi_r(z) \equiv 0 \pmod{p^b}$, то $a - d \geqslant b$, что и утверждалось. □

Лемма 4.25. *Пусть* $|G| = p^a q^b g_0$, *где* p *и* q — *различные простые числа и* $(pq, g_0) = 1$. *Предположим, что* G *не содержит элементов порядка* pq.

(i) *Пусть* $B(p)$ — *фиксированный* p-*блок группы* G, $B(q)$ — *фиксированный* q-*блок группы* G. *Тогда* $\sum \chi_s(1)\chi_s(y) \equiv 0 \pmod{q^b}$ *для каждого* p-*сингулярного элемента* y *из* G, *где* χ_s *пробегает все неприводимые характеры, лежащие как в* $B(p)$, *так и в* $B(q)$.

(ii) *Если* $pq \mid |G|$, *то существует неглавный неприводимый характер, лежащий как в главном* p-*блоке, так и в главном* q-*блоке.*

Доказательство. (i) Пусть y — некоторый p-сингулярный элемент из G. Положим $\theta(x) = \sum \chi_s(y)\chi_s(x)$, где χ_s пробегает все неприводимые характеры из $B(p)$, $x \in G$. В силу (3.14) (ii), θ обращается в нуль на всех p'-элементах группы G. Значит, по условию, θ обращается в нуль на всех q-сингулярных элементах группы G. Тогда, в силу (3.14), где p заменено на q, $\theta^{B(q)}$ обращается в нуль на всех q-сингулярных элементах группы G. Значит, по (3.13) и (2.5), $\theta^{B(q)}(1) \equiv 0 \pmod{q^b}$, что доказывает (i).

(ii) Пусть $B(p)$ — главный p-блок, $B(q)$ — главный q-блок. Теперь результат непосредственно вытекает из (i). □

Следующий результат впервые сформулировал, по существу, Люстиг [1976].

Лемма 4.26. *Пусть* D — *такая* p-*группа, что* $D \lhd G$. *Положим* $G^0 = G/D$. *Пусть* φ — *неприводимый характер Брауэра группы* G^0, Φ, Φ^0 — *главные неразложимые характеры групп* G *и* G^0 *соответственно, отвечающие* φ. *Если* y *является* p'-*элементом группы* G, *то*

$$\Phi(y) = \frac{|C_G(y)|}{|C_{G^0}(y^0)|}\Phi^0(y^0) = |C_G(y) \cap D|\Phi^0(y^0).$$

В частности, $\Phi(1) = |D|\Phi^0(1)$.

Доказательство. В силу (III.2.13), каждый неприводимый характер Брауэра группы G содержит D в своем ядре. Поэтому, если $\{\varphi_i\}$ — множество всех неприводимых характеров Брауэра группы G, то оно является также множеством всех неприводимых характеров Брауэра группы G^0. Следовательно, если α — линейная комбинация характеров φ_i, то $(\Phi, \alpha)'_G = (\Phi^0, \alpha)'_{G^0}$.

Пусть y — некоторый p'-элемент группы G. Определим функцию α, полагая

$$\alpha(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ сопряжен с } y^{-1},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{|G|}\Phi(y)|G:C_G(y)|=(\Phi,\alpha)_G=(\Phi^0,\alpha)_{G^0}=\frac{1}{|G^0|}\Phi^0(y^0)|G^0:C_{G^0}(y^0)|.$$

Тем самым первое равенство доказано. Второе следует из изоморфизма $C_{G^0}(y^0)\cong C_G(y)/C_G(y)\cap D$, так как D является p-группой, а y — p'-элементом. □

Следствие 4.27. *Пусть D — некоторая p-группа, причем $G=DC_G(D)$. Пусть $\{\varphi_i\}$ — множество всех неприводимых характеров Брауэра группы G^0, c_{ij}, c_{ij}^0 — инварианты Картана групп G, G^0 соответственно, отвечающие φ_i, φ_j. Тогда $c_{ij}=|D|c_{ij}^0$.*

Доказательство. Пусть Φ_i, Φ_i^0 — главные неразложимые характеры групп G, G^0 соответственно, отвечающие φ_i. Если y есть p'-элемент группы G, то из (4.26) следует, что $\Phi(y)=|D|\Phi_i^0(y^0)$. Поэтому

$$c_{ij}=\frac{1}{|G|}\sum\Phi_i(y^{-1})\Phi_j(y)=\frac{|D|^2}{|G|}\sum\Phi_i^0((y^0)^{-1})\Phi_j^0(y^0)=|D|c_{ij}^0.\ \square$$

Для области целостности S через $H_{n,d}(S)$ обозначим пространство однородных полиномов степени d от n переменных $x_1,\ldots,x_n$ с коэффициентами из S. Группа $\mathrm{GL}_n(S)$, а значит, и любая ее подгруппа действуют на $H_{n,d}(S)$ естественным образом.

Следующий результат принадлежит Э. Клайну.

Лемма 4.28. *Пусть F — поле, $\operatorname{char}F=p>0$, I — идеал в $F[x_1,\ldots,x_n]$, порожденный всеми полиномами x^p, где $x\in F[x_1,\ldots,x_n]$ и свободный член полинома x равен 0. Тогда коразмерность в $H_{n,(p-1)n}(F)$ пространства $I\cap H_{n,(p-1)n}(F)$ равна 1 и $I\cap H_{n,(p-1)n}(F)$ переходит в себя под действием $\mathrm{GL}_n(F)$.*

Доказательство. Очевидно, I, как и $I\cap H_{n,(p-1)n}(F)$, отображаются на себя под действием $\mathrm{GL}_n(F)$. Поскольку $\operatorname{char}F=p$, I является F-пространством, порожденным всеми мономами $x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$, где $\max\{a_i\}\geqslant p$. Отсюда следует результат, поскольку $H_{n,(p-1)n}(F)$ содержит лишь один такой моном, который не удовлетворяет неравенству, а именно, $x_1^{p-1}\ldots x_n^{p-1}$. □

Теорема 4.29 (Томпсон [1981]). *Пусть G — конечная группа, V — некоторый n-мерный $\mathbf{C}[G]$-модуль, $d(G)$ — наименьшее среди тех целых d, для которых $H_{n,d}(\mathbf{C})$ содержит одномерное инвариантное подпространство. Тогда $d(G)\leqslant(p-1)n$ для произвольного простого p, не делящего $|G|$.*

Доказательство. Существуют поле алгебраических чисел F_0 и $F_0[G]$-модуль V_0 такие, что $V_0\otimes_{F_0}\mathbf{C}=V$. Можно предполагать, что $F_0\subseteq K$. Положим $V_1=V_0\otimes_{F_0}K$. Поскольку $p\nmid|G|$, из (III.3.3) следует, что с точностью до изоморфизма существует такой един-

ственный R-свободный $R[G]$-модуль W, что $W\otimes_R K=V_1$. Кроме того, $H_{n,\,(p-1)n}(\bar{R})=H_{n,\,(p-1)n}(R)$ вполне приводим. Значит, по (4.28), $H_{n,\,(p-1)n}(\bar{R})$ обладает одномерным подпространством, инвариантным относительно G. Следовательно, в силу (III.3.3), $H_{n,\,(p-1)n}(R)$ обладает чистым $R[G]$-подмодулем ранга 1. Отсюда вытекает результат. □

Следующее следствие (4.29), принадлежащее Томпсону, можно доказать, привлекая основной результат Фейта и Томпсона [1961].

Следствие 4.30. *Пусть G, V, n, $d(G)$ определены как в* (4.29). *Тогда* $d(G)\leqslant 4n^2$.

Доказательство. Индукция по n. Можно предполагать, что V неприводим. Предположим, что $V=W^G$ для некоторого $\mathbf{C}[H]$-модуля W и такой подгруппы H группы G, что $|G:H|=k>1$. Пусть $n=km$. По индукции существует элемент $v\in H_{m,\,d_0}(\mathbf{C})$, $d_0\leqslant 4m^2$, $v\neq 0$, такой, что одномерное пространство, порожденное v, фиксируется подгруппой H. Если $\{x_i\}$ — трансверсаль H в G и $w=\Pi_i(vx_i)\in H_{mk,\,d_0^k}(\mathbf{C})$, то G сохраняет одномерное пространство, порожденное w. Результат теперь следует по индукции. Таким образом, можно предполагать, что V не индуцирован никаким $\mathbf{C}[H]$-модулем для произвольной собственной подгруппы H группы G. Отсюда следует, что любая нормальная абелева подгруппа группы G центральна.

В силу постулата Бертрана, существует такое простое p, что $2n+1<p<2(2n+1)$. Значит, $p\leqslant 4n+1$, и потому $p-1\leqslant 4n$. Пусть P — некоторая S_p-подгруппа группы G. Тогда P абелева и $P\lhd G$ (см. Фейт и Томпсон [1961]). Следовательно, $P\subseteq Z(G)$, и потому $G=P\times G_0$ по теореме Бернсайда о перемещении. Очевидно, $d(G)=d(G_0)$. Согласно (4.29), $d(G_0)\leqslant(p-1)n\leqslant 4n^2$. □

Используя лучшие оценки для простых чисел, число 4 в (4.30) можно уменьшить. Но, по-видимому, это не так интересно. Тем не менее, вполне вероятно, что существует такая константа c, что $d(G)\leqslant cn$ для всех конечных групп G. Эту оценку нельзя улучшить в общем случае, что показывает следующий пример. Пусть G — неабелева группа порядка p^3 для некоторого простого p; тогда G обладает точным неприводимым характером степени p. Легко видеть, что $d(G)=p$.

Два следующих результата нам будут нужны в главе X.

Лемма 4.31. *Пусть $\tilde{G}$ — подгруппа группы G. Предположим, что для фиксированного i характер $(\chi_u)_{\tilde{G}}$ неприводим для всех тех u, при которых $d_{ui}\neq 0$. Тогда $(\varphi_i)_{\tilde{G}}$ является неприводимым характером Брауэра.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\varphi}_s$ — характер Брауэра неприводимого $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуля $\tilde{L}_s$, $\tilde{U}_s$ — проективный $R[\tilde{G}]$-модуль, соответствующий $\tilde{L}_s$, $\tilde{\Phi}_s$ — характер модуля $\tilde{U}_s$.

Предположим, что $\tilde{L}_s$ изоморфен подмодулю модуля $(L_i)_{\tilde{G}}$. Тогда $\tilde{L}_s$ изоморфен подмодулю $(U_i)_{\tilde{G}}$. Значит, $\tilde{U}_s\,|\,(U_i)_{\tilde{G}}$. Тогда

$$\tilde{\Phi}_s(1)=\sum_u \tilde{d}_{us}\chi_u(1)\leqslant\sum_u d_{ui}\chi_u(1)=\Phi_i(1), \tag{4.32}$$

где $\tilde{d}_{us}$ обозначают подходящие числа разложения группы G.

Пусть e_{is} — кратность $\tilde{L}_s$ как композиционного фактора модуля $(L_i)_{\tilde{G}}$. Тогда $\tilde{d}_{us} \geqslant d_{ui} e_{is}$ для всех u. Значит, по (4.32), $e_{is}=1$ и $\tilde{\Phi}_s(1)=\Phi_i(1)$. Следовательно, $\tilde{U}_s \cong (U_i)_{\tilde{G}}$. Отсюда, в частности, следует, что цоколь модуля $(L_i)_{\tilde{G}}$ неприводим и изоморфен $\tilde{L}_s$.

Применим аналогичные рассуждения к φ_i^*. Тогда $(\Phi_i^*)_{\tilde{G}}=\tilde{\Phi}_s^*$ и $\tilde{L}_s^*$ изоморфен цоколю модуля $(L_i^*)_{\tilde{G}}$. Следовательно, существует точная последовательность $(L_i)_{\tilde{G}} \to \tilde{L}_s \to 0$. Так как $e_{is}=1$, то $\tilde{L}_s \mid (L_i)_{\tilde{G}}$, и потому $(L_i)_{\tilde{G}}=\tilde{L}_s$. □

Следствие 4.33. *Пусть $\tilde{G}$ — подгруппа группы G, B — блок группы G. Предположим, что $(\chi_u)_{\tilde{G}}$ неприводим для каждого χ_u из B. Тогда $(\varphi_i)_{\tilde{G}}$ является неприводимым характером Брауэра для каждого φ_i из B.*

Доказательство. Очевидно, учитывая (4.31). □

В качестве следствия (4.33) докажем следующий результат Айзекса и Смита. Относительно различных его уточнений см. Айзекс и Смит [1976], Палингс [1977].

Следствие 4.34. *Пусть P — силовская S_p-подгруппа группы G, $N=N_G(P)$, B — главный блок группы G. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *p-длина G равна* 1;

(ii) *если χ_u лежит в B, то $(\chi_u)_N$ неприводим;*

(iii) *если φ_i лежит в B, то $(\varphi_i)_N$ неприводим.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Так как $G=O_{p',p,p'}(G)$, то, по лемме Фраттини, $G=O_{p'}(G)N$. Если $\chi_u \in B$, то $O_{p'}(G)$ лежит в ядре характера χ_u, ввиду (4.12), и потому $(\chi_u)_N$ неприводим.

(ii)⇒(iii). Следует из (4.33).

(iii)⇒(ii) Группа $P=O_p(N)$ лежит в ядре неприводимых характеров Брауэра группы N, и, значит, P лежит в ядре φ_i для каждого φ_i из B. Следовательно, по (4.12), $P \subseteq O_{p',p}(G)$. □

§ 5. Некоторые открытые проблемы

В настоящем параграфе мы приведем список открытых проблем теории. Обсуждение их и связанных с ними вопросов можно найти у Брауэра [1963][1]. Нетривиальные примеры таблиц модулярных характеров и инвариантов Картана содержатся у Джеймса [1973], [1978]. Их можно использовать для иллюстрации приведенных ниже проблем.

(I) *Если $|C_i|\varphi_j(x_i)/\varphi_j(1) \in R$, верно ли, что $|\overline{C_i}|\overline{\varphi_j(x_i)}/\varphi_j(1)=\lambda(\hat{C}_i)$, где λ — центральный характер алгебры $\bar{R}[G]$, соответствующий блоку B?*

Отвечая на более ранний вопрос, Виллемс [1981] заметил, что $|C_i|\varphi_j(x_i)/\varphi_j(1)$ может не лежать в R. В качестве примера следует взять $p=2$, $G=J_1$ — наименьшую группу Янко. Если x_i — элемент

[1] Обсуждение, в связи с классификацией простых конечных групп, части проблем, сформулированных в этом параграфе, см. у Фейта [1984*] и у Михлера [1986b*]. — *Примеч. пер.*

порядка 3, а φ_j выбран так, что $\varphi_j(1)=56$ и $\varphi_j(x_i)=-1$, то $|C_i|\varphi_j(x_i)/\varphi_j(1)=-209/2\notin R$. См. Фонг [1974].

(II) *Верно ли, что* $|G|/\varphi_j(1)\in R$ *для всех* j?

Виллемс [1981] показал, что ответ на (II) утвердителен тогда и только тогда, когда $|C_i|\Phi_j(x_i)/\Phi_j(1)\in R$ для всех i, j.

В случае, когда G p-разрешима, ответы на оба вопроса (I) и (II) утвердительны; см. § 6 гл. X. Результаты, связанные с этими вопросами, можно найти у Торреса [1971].

Дополнение при корректуре. Дж. Г. Текрей показал, что простая группа Маклафлина G обладает неприводимым характером Брауэра степени $2^9\cdot 7$. Поскольку S_2-подгруппа группы G имеет порядок 2^7, отсюда следует, что ответ на вопрос (II) в общем случае отрицательный.

(III) *Однозначно ли определяет таблица характеров группы* G *таблицу* $(\varphi_i(x_j))$ *неприводимых характеров Брауэра? (Разумеется, единственность можно ожидать лишь тогда, когда зафиксирован мономорфизм из* K_0 *в поле комплексных чисел.)*

(IV) *Однозначно ли определяет таблица характеров группы* G *множество целых чисел* $\{\varphi_i(1)\}$?

По существу, в общем случае ничего не известно относительно этих вопросов. Утвердительный ответ даже на более слабый чем (IV) вопрос был бы очень полезен в изучении строения конечных простых групп. В § 6 гл. X содержатся близкие к этим вопросам результаты для p-разрешимой группы G.

(V) *Можно ли число блоков характеризовать в терминах структуры группы* G [1)]?

Используя первую основную теорему о блоках (III.9.7), можно описать число блоков положительного дефекта. Поэтому вопрос на самом деле относится к блокам дефекта 0. Более слабым является следующий вопрос.

(VI) *Какое необходимое и достаточное условие существования блоков дефекта* 0 [2)]?

В связи с проблемами (V) и (VI), Вада [1977] доказал следующий и близкие результаты. В случае, когда класс C в (5.1) состоит из инволюций, результат впервые доказан Брауэром и Фаулером [1955].

Лемма 5.1. *Пусть* P *— некоторая* p*-подгруппа из* G. *Предположим, что* C *— такой сопряженный класс группы* G, *что* $xy^{-1}\notin P-\{1\}$, *где* x, $y\in C$. *Пусть* $|P|=p^a$ *и* $|C_G(x)|_p=p^b$, $x\in C$. *Тогда существует такой неприводимый характер* χ *группы* G, *что* $p^{a-b}|\chi(1)$. *Если, кроме того,* P *является* S_p*-подгруппой группы* G, *то* χ *имеет высоту* 0 *в блоке* B *с дефектной группой* D, *где* D *— дефектная группа класса* C.

Доказательство. Пусть $x\in C$. Положим

$$\psi=\sum_{\chi}\frac{\chi(x)\chi(x^{-1})}{\chi(1)}\chi,$$

[1)] В работе Робинсона [1983*] получена характеризация числа блоков с заданной дефектной группой.— *Примеч. пер.*

[2)] Ряд критериев получил С. П. Струнков [1989*], [1990а*]. *Примеч. пер.*

где χ пробегает все неприводимые характеры группы G. По условию, $\psi(z)=0$ для $z\in P-\{1\}$. Поскольку $\psi(1)=|C_G(x)|$,

$$\frac{|C_G(x)|}{|P|}=(\psi_P,\ 1_P)_P=\sum_\chi \frac{\chi(x)\chi(x^{-1})}{\chi(1)}(\chi_P,\ 1_P)_P.$$

Так как p^{a-b} — точная степень p, делящая знаменатель дроби, стоящей в левой части равенства, и $\chi(x)$, $\chi(x^{-1})$, $(\chi_P,\ 1_P)_P$ — целые алгебраические числа, то существует такой характер χ, что $p^{a-b}|\chi(1)$.

Предположим теперь, что P является S_p-подгруппой группы G. Тогда

$$\sum_\chi \frac{|G:C_G(x)|\chi(x)\chi(x^{-1})}{\chi(1)}(\chi_P,\ 1_P)_P=|G:P|.$$

Поскольку $|G:P|\not\equiv 0 \pmod p$ и $|G:C_G(x)|\chi(x)/\chi(1)$ является целым алгебраическим, существует такой характер χ, что

$$\frac{|G:C_G(x)|\chi(x)}{\chi(1)}\not\equiv 0,\ \chi(x^{-1})\not\equiv 0 \pmod\pi$$

для простого π в подходящем поле p-адических чисел. Пусть B — блок, содержащий χ. В силу (4.4), D является дефектной группой блока B и χ имеет в B высоту 0. □

В случае разрешимой группы G Ито [1951a], [1951b] также получил результаты в этом направлении. По поводу части из них см. § 6 гл. X. Близкие результаты доказаны ниже. См. (VI.5.6), (X.6.3), (X.6.5). Другие условия существования характеров дефекта 0 можно найти у Ито [1965c], Ито и Вады [1977]. Относительно связанных с ними результатов см. Гоу [1978], Виллемс [1978].

(VII) *Существует ли функция, зависящая от p и d, которая ограничивает c_{ij}, где φ_i, φ_j лежат в блоке дефекта d?*

Если G обладает p-дополнением, в частности, если G p-разрешима, то из (4.15) следует, что $c_{ij}\leqslant p^a$, где $p^a=|G|_p$. Фонг [1961] показал, что для p-разрешимой G $c_{ij}\leqslant p^d$ (см. (X.4.6)). На протяжении некоторого времени предполагалось, что неравенство $c_{ij}\leqslant p^d$ выполняется для произвольной группы G. Эта гипотеза оказалась неверной, как показал Лэндрок [1973] для группы $\mathrm{Suz}(8)$, $p=2$, где $p^a=64$, $c_{11}=160$. Следующий результат, доказанный Частковским и Фейтом [1978], [1980a], [1980b], показывает, что результат Лэндрока не является изолированным примером.

Пусть $p=2$, P_m есть S_2-подгруппа группы G_m, $c_{11}^{(m)}$ — инвариант Картана, соответствующий главному характеру Брауэра. Если $G_m=\mathrm{Suz}(2^m)$ или $\mathrm{Sp}_4(2^m)$, то

$$\lim_{m\to\infty} c_{11}^{(m)}/|P_m|^{3/2}=1.$$

Если $G_m=\mathrm{SL}_3(2^m)$ или $\mathrm{SU}_3(2^m)$, то $|P_m|=8^m$ и

$$\lim_{m\to\infty} c_{11}^{(m)}/9^m\geqslant 1.$$

Информация относительно чисел разложения групп $\mathrm{Suz}(2^m)$ и $\mathrm{SU}_3(2^m)$ содержится у Буркхарда [1979a], [1979b].

Матрица Картана блока с циклической дефектной группой может быть вычислена в терминах дерева Брауэра. Этот результат будет получен в главе VII. В общем случае, по-видимому, вычислить инварианты Картана простых групп трудно, даже когда известна таблица характеров. Например, у всех групп Ри ${}^2G_2(3^{2n+1})$ S_2-группа является элементарной абелевой группой порядка 8. Однако матрица Картана главного 2-блока вычислена лишь недавно и показана ее независимость от n. Эти вычисления основаны на очень тонких и сложных рассуждениях. См. Фонг [1974], Лэндрок и Михлер [1980a], [1980b]. По поводу аналогичных результатов относительно наименьшей группы Янко см. Лэндрок и Михлер [1978].

Общий подход к вопросам о неприводимых и главных неразложимых $\bar{R}[G]$-модулях для групп Шевалле в характеристике p можно найти у Дж. Е. Хамфри [1973b], [1976]. Тем не менее, группы $\mathrm{SL}_2(p^n)$ составляют единственный класс групп Шевалле, для которых довольно много известно об инвариантах Картана. Например, каждый инвариант Картана является суммой не более двух степеней числа 2 и $c_{11}=2^n$ для $\mathrm{SL}_2(p^n)$ в характеристике p. См. Дж. Е. Хамфри [1973a], Джеякумар [1974], Сринивасан [1964c], Упадхия [1978].

Наиболее полные результаты относительно инвариантов Картана для бесконечного класса групп лиева типа $\mathrm{SL}_2(2^n)$ при $p=2$ принадлежат Алперину [1976c], [1979]. Прежде чем сформулировать эти результаты, приведем некоторые обозначения.

Пусть φ — характер Брауэра естественного 2-мерного представления $\mathrm{SL}_2(2^n)$ над полем F из 2^n элементов, σ — автоморфизм Фробениуса, S — группа вычетов по модулю n. Положим $\varphi_i=\varphi^{\sigma^i}$, $i\in S$, и $\varphi_I=\Pi_{i\in I}\varphi_i$ для $I\subseteq S$. Тогда каждый неприводимый характер Брауэра группы $\mathrm{SL}_2(2^n)$ имеет вид φ_I для некоторого подмножества I из S; обратно, каждый из характеров φ_I является неприводимым характером Брауэра группы $\mathrm{SL}_2(2^n)$.

Теорема. *$c_{IJ}=0$, кроме тех случаев, когда для каждого $i\in S$, $i\in I\cap J$ и $i+1\notin I\cap J$, имеем $i+1\notin I$ и $i+1\notin J$; в этих случаях $c_{IJ}=2^{n-|I\cap J|}$.*

По поводу чисел разложения групп $\mathrm{SL}_2(p^n)$ см. Сринивасан [1964c]; Буркхард [1976a], [1976b].

Вопрос (VII) также тесно связан со старой гипотезой Фробениуса следующим образом.

Лемма 5.2. *Пусть $|G|=p^a g_0$, где $(p, g_0)=1$. Предположим, что G содержит ровно g_0 p'-элементов. Если $c_{11}\leqslant p^a$, то G обладает нормальным p-дополнением.*

Доказательство. В силу неравенства Коши — Шварца и (3.3),

$$p^{2a}=(\Phi_1, \eta_1)^2\leqslant(\Phi_1, \Phi_1)(\eta_1, \eta_1)=c_{11}p^a\leqslant p^{2a}.$$

Значит, η_1 и Φ_1 пропорциональны. Следовательно, $\Phi_1(z)=\Phi_1(1)$ тогда и только тогда, когда z является p'-элементом группы G. Таким образом, множество всех p'-элементов группы G лежит в ядре Φ_1 и это ядро является p-дополнением. □

Следствие 5.3 (Брауэр и Несбитт [1941]). *Пусть* $|G|=p^aq^br^c$, *где* p, q, r — *различные простые числа. Если* G *содержит ровно* q^br^c p'-*элементов, то* G *обладает нормальным* p-*дополнением.*

Доказательство. В силу (4.15) (iv), $c_{11}\leqslant p^a$. Результат теперь вытекает из (5.2). □

(VIII) *Верно ли, что* $d_{ui}^2\leqslant p^d$, *когда* χ_u *и* φ_i *лежат в блоке дефекта* d?

В силу (X.4.6), (VIII) допускает утвердительный ответ для p-разрешимых групп.

(IX) *Верно ли, что каждый неприводимый характер из блока* B *имеет высоту* 0 *тогда и только тогда, когда дефектная группа блока* B *абелева*?

В силу (4.18) блоки дефекта $d\leqslant 2$ не имеют неприводимых характеров положительной высоты, и потому (IX) имеет утвердительный ответ при $d\leqslant 2$. Для p-разрешимой группы G Фонг [1960] показал, что если дефектная группа блока B абелева, то каждый неприводимый характер из B имеет высоту 0, и что обратное утверждение верно по крайней мере для главного блока. См. (X.4.3) и (X.4.5).

Кнёрр [1979] недавно получил результат, из которого следует, что если V либо такой R-свободный $R[G]$-модуль, что V_K неприводим, либо V — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, и V лежит в блоке с абелевой дефектной группой D, то D является вертексом модуля V.

Некоторые следствия утвердительного ответа на (IX) отмечены у Брауэра [1962b].

(X) *Пусть* $k(B)$ — *число неприводимых характеров в блоке* B, $k_0(d)$ — *минимум* $k(B)$, *когда* B *пробегает все блоки дефекта* d *во всех группах* G, $k(d)$ — *максимум* $k(B)$, *когда* B *пробегает все блоки дефекта* d *во всех группах* G.

(i) $\lim\limits_{d\to\infty} k_0(d)=\infty$?

(ii) $k(d)\leqslant p^d$?

По-видимому, ничего неизвестно относительно (X) (i). (4.8) дает верхнюю оценку, которая будет уточнена ниже. Можно показать, что если дефектная группа блока B абелева и порождена двумя элементами, то $k(d)\leqslant p^d$, что обобщает известный факт о том, что это неравенство верно при $d\leqslant 2$. См. (VII.10.13).

П. Фонг заметил следующий результат, в котором естественно возникает функция $k(d)$.

Лемма 5.4. *Пусть* H — *некоторая* d-*мерная линейная группа над полем из* p *элементов. Если* H *является* p'-*группой и* $H\neq\langle 1\rangle$, *то она имеет не больше чем* $k(d)-1$ *сопряженных классов.*

Доказательство. Пусть P — элементарная абелева p-группа порядка p^d. Тогда ее можно отождествить с d-мерным векторным пространством над полем из p элементов. Положим $G=HP$, где $P\lhd G$, причем действие H на P задано линейной структурой H. Тогда $H\cong G/P$. Пусть n — число сопряженных классов группы H. Тогда G имеет по крайней мере $n+1$ неприводимых характеров, поскольку G содержит p-сингулярные элементы. В силу (III.6.9),

P является дефектной группой каждого блока группы G. Поскольку $C_G(P)=P$, из (4.17) следует, что G обладает лишь одним блоком. Значит, $n+1\leqslant k(d)$, что и утверждалось. □

Следствие 5.5. *Предположим, что H удовлетворяет тем же условиям, что и в* (5.4). *Тогда у H не больше чем $\frac{1}{4}p^{2d}$ сопряженных классов.*

Доказательство. Очевидно ввиду (4.18) и (5.4). □

Этот результат можно слегка уточнить, используя (VII.10.14) ниже.

Нагао [1962] показал, что если число сопряженных классов полупрямого произведения H на векторное пространство из (5.4) всегда не больше p^d, то (X) (ii) допускает утвердительный ответ для p-разрешимых групп.

(XI) *Пусть B — блок с дефектной группой D, $\tilde{B}$ — блок группы $N_G(D)$, причем $\tilde{B}^G=B$. Равно ли число неприводимых характеров высоты 0 из B такому же числу из $\tilde{B}$?*

(XII) *Пусть $m_p(G)$ — число неприводимых характеров группы G, степень которых не делится на p. Верно ли, что $m_p(G)=m_p(N_G(P))$, где P является S_p-подгруппой группы G?*

Очевидно, утвердительный ответ на (XI) влечет утвердительный ответ на (XII). Маккей [1972] впервые заметил, что (XII) имеет утвердительный ответ для многих простых групп, и поставил вопрос в общем случае. Алперин [1976] предположил, что (XI) всегда имеет утвердительный ответ, и доказал это для групп $G=\mathrm{GL}_n(q)$, где q — степень p. Утверждения о том, что (XI) и (XII) имеют утвердительный ответ, известны как гипотезы Алперина — Маккея.

Макдональд [1971] показал, что для симметрической группы G вопрос (XII) допускает утвердительный ответ при всех простых числах. Близкие результаты можно найти у Макдональда [1973], Палингса [1975b]. Олссон [1976] проверил, что ответ на (XII) утвердительный для всех простых чисел, если $G=\mathrm{GL}_n(q)$. Грин, Лерер и Люстиг [1976] получили результат, из которого следует, что оба вопроса имеют утвердительный ответ для редуктивной группы G лиева типа со связным центром над полем характеристики p.

В случае p-разрешимой G известно, что (XII) имеет утвердительный ответ. См. Айзекс [1973], Вольф [1978], Дейд [1980], Окаяма и Вийама [1979], [1980], Гресь [1980*]. Результаты главы VII показывают, что (XI) имеет утвердительный ответ, если дефектная группа B циклическая.

§ 6. Высшие числа разложения

Пусть y — некоторый p-элемент группы G, $\{\varphi_i^y\}$ — множество всех неприводимых характеров Брауэра группы $C_G(y)$. Если ζ — неприводимый характер группы $C_G(y)$, то $\zeta(yx)=\varepsilon\zeta(x)$ для всех $x\in C_G(y)$, где ε — корень p^a-й степени из единицы, поскольку y лежит в центре

$C_G(y)$. Значит, $\chi_s(yx)=\sum_i d_{si}^y \varphi_i^y(x)$ для всех p'-элементов x из $C_G(y)$, где каждое из d_{si}^y является целым алгебраическим числом в поле p^a-х корней из единицы над полем рациональных чисел. Линейная независимость $\{\varphi_i^y\}$ влечет, что d_{si}^y определены корректно. Числа d_{si}^y называются *высшими числами разложения* относительно y. Очевидно, высшие числа разложения относительно $y=1$ совпадают с обычными числами разложения.

Предположим, что $z=y^u$ для некоторого $u\in G$. Тогда $C_G(z)=C_G(y)^u$. Далее, после подходящего переупорядочения, $\varphi_i^z(x^u)=\varphi_i^y(x)$ для всех p'-элементов $x\in C_G(y)$. Поскольку $\chi_s(zx^u)=\chi_s((yx)^u)=\chi_s(yx)$ для $x\in C_G(y)$, то $\chi_s(zx^u)=\sum d_{si}^y\varphi_i^z(x^u)$. Значит, $d_{si}^y=d_{si}^z$. Следовательно, множество высших чисел разложения относительно y зависит лишь от сопряженного класса, содержащего y.

Если σ — автоморфизм поля p^a-х корней из единицы над полем рациональных чисел, то непосредственно из определения следует, что σ задает перестановку множества $\{d_{si}^y\}$, где i, y фиксированы.

Доказательство следующего результата, приведенное здесь, принадлежит Нагао [1963]. Другие доказательства, отличные от первоначального доказательства Брауэра, можно найти у Иидзуки [1961] и Дейда [1965].

Теорема 6.1 (Брауэр). (Вторая основная теорема о блоках.) *Пусть y — некоторый p-элемент из G. Предположим, что $d_{ti}^y\neq 0$ для некоторых t, i. Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $C_G(y)$, содержащий φ_i^y. Тогда $\tilde{B}^G$ определен и $\chi_t\in\tilde{B}^G$. Кроме того, y сопряжен с элементом дефектной группы блока $\tilde{B}^G$.*

Доказательство. Пусть $P=\langle y\rangle$, $H=C_G(P)=C_G(y)$, $\tilde{e}$ — такой примитивный центральный идемпотент алгебры $R[H]$, что $\tilde{B}=B(\tilde{e})$. В силу (III.9.4), $\tilde{B}^G$ определен. Пусть $\chi_t\in B=B(e)$, где e — примитивный центральный идемпотент алгебры $R[G]$, V — R-свободный $R[G]$-модуль с характером χ_t. Обозначим через s отображение Брауэра относительно (G, P, H), а через θ характер модуля $V_H s_0(e)$. В силу (III.4.11) и теоремы Нагао (III.7.5), $\chi_t(xy)=\theta(xy)$ для всех p'-элементов x из H. Поскольку $d_{ti}^y\neq 0$, φ_i^y является характером Брауэра неприводимой конституэнты модуля $V_H s_0(e)$. Поэтому $s_0(e)\tilde{e}=\tilde{e}$. Тем самым, по (III.9.4), $\tilde{B}^G=B$. Последнее утверждение следует из (2.4). □

Для любого p-элемента y назовем *p-секцией, содержащей y*, или просто *секцией, содержащей y*, множество всех тех элементов группы G, p-части которых сопряжены с y. Очевидно, p-секция, содержащая $y=1$, совпадает с множеством p'-элементов группы G.

Пусть $\{x_i^y\}$ — полное множество представителей p'-классов группы $C_G(y)$. Нетрудно видеть, что $\{yx_i^y\}$ — полное множество представителей сопряженных классов группы G, лежащих в секции, содержащей y.

Пусть $C^y=(c_{ij}^y)$ — матрица Картана группы $C_G(y)$.

Лемма 6.2. *Пусть B — блок группы G, y, z — два p-элемента группы G.*

(i) *Если y не сопряжен с z в G, то для всех i, j*

$$\sum_s (d_{si}^y)^* d_{sj}^z=\sum_{\chi_s\in B}(d_{si}^y)^* d_{sj}^z=0.$$

(ii) $\sum_s (d^y_{si})^* d^y_{sj} = c^y_{ij}$ *для всех* i, j.

(iii) $\sum_{\chi_s \in B} (d^y_{si})^* d^z_{sj} = 0$, *кроме случая, когда* φ^y_i *и* φ^z_j *лежат в одном блоке* $\tilde{B}$ *группы* $C_G(y)$ *и* $\tilde{B}^G = B$. *В этом случае* $\sum_{\chi_s \in B} (d^y_{si})^* d^z_{sj} = c^{yz}_{ij}$.

Доказательство. По определению,

$$(\varphi^y_i(x^y_j))^{*\prime}(d^y_{si})^{*\prime}(d^z_{si})(\varphi^z_i(x^z_j)) = (\chi_s(yx^y_j))^{*\prime}(\chi_s(zx^z_j)) = (\sum_s \chi_s(yx^y_i)^* \chi_s(zx^z_j)).$$

Если y не сопряжен с z, то $\sum_s \chi_s(yx^y_i)^* \chi_s(zx^z_j) = 0$ для всех i, j. В силу (3.6), матрица $(\varphi^y_i(x^y_j))$ невырождена. Отсюда следует первое равенство из (i). Поскольку

$$\sum_s \chi_s(yx^y_i)^* \chi_s(yx^y_j) = |C_G(yx^y_i)| \delta_{ij} = |C_{C_G(y)}(x^y_i)| \delta_{ij},$$

из (3.8) следует, что

$$(\sum_s \chi_s(yx^y_i)^* \chi_s(yx^y_j)) = (\varphi^y_i(x^y_j))^{*\prime}(c^y_{ij})(\varphi^y_i(x^y_j)).$$

Невырожденность $(\varphi^y_i(x^y_j))$ влечет (ii).

Зафиксируем i, j. Пусть $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ — блоки групп $C_G(y)$, $C_G(z)$ соответственно, причем $\varphi^y_i \in \tilde{B}_1$ и $\varphi^z_j \in \tilde{B}_2$. Если $(d^y_{si})^* d^z_{sj} \neq 0$ для некоторого s, то, по (6.1), $\tilde{B}_1^G = \tilde{B}_2^G$ и $\chi_s \in \tilde{B}_1^G$. Поэтому

$$\sum_{\chi_s \in B} (d^y_{si})^* d^z_{sj} = \begin{cases} \sum_s (d^y_{si})^* d^z_{sj}, & \text{если } \tilde{B}_1^G = \tilde{B}_2^G = B, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это завершает доказательство (i). Теперь, по (ii),

$$\sum_{\chi_s \in B} (d^y_{si})^* d^y_{sj} = \begin{cases} c^y_{ij}, & \text{если } \tilde{B}_1^G = \tilde{B}_2^G = B, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку $c^y_{ij} = 0$, если $\tilde{B}_1 \neq \tilde{B}_2$, отсюда следует (iii). □

Следующий результат уточняет (3.14). См. Осима [1960b].

Лемма 6.3. *Пусть* B *— блок. Для* $\theta = \sum_s b_s \chi_s$, $b_s \in K$, *положим* $\theta^B = \sum_{\chi_s \in B} b_s \chi_s$.

(i) *Если* θ *обращается в нуль на* p*-секции группы* G, *то* θ^B *обращается в нуль на этой же* p*-секции.*

(ii) *Если* z_1 *и* z_2 *лежат в различных* p*-секциях группы* G, *то*

$$\sum_{\chi_s \in B} \chi_s(z_1)^* \chi_s(z_2) = 0.$$

Доказательство. (i) Предположим, что θ обращается в нуль на p-секции группы G, которая содержит p-элемент y. Тогда $\sum_{s,i} b_s d^y_{si} \varphi^y_i(x) = \theta(xy) = 0$ для всех p'-элементов x из $C_G(y)$. Значит, $\sum_s b_s d^y_{si} = 0$ для всех i. Поэтому, по (6.1), $\sum_{\chi_s \in B} b_s d^y_{si} = 0$ для всех i, и потому $\theta^B(xy) = \sum_{\chi_s \in B} \sum_i b_s d^y_{si} \varphi^y_i(x) = 0$ для каждого p'-элемента x из $C_G(y)$, что и утверждалось.

(ii) Положим $\theta = \sum_s \chi_s(z_1)^* \chi_s$. Тогда $\theta(z) = 0$ для каждого элемента z из p-секции, содержащей z_2. Результат теперь следует из (i). □

Результаты из (6.3) можно использовать для доказательства следующего обобщения (4.23) (ii).

Лемма 6.4. *Пусть p, q — различные простые числа. Предположим, что для некоторого p-элемента y из G и некоторого q-элемента x из G не существует элементов, сопряженных с x и коммутирующих с любым элементом, сопряженным с y.*

(i) *Пусть $B(p)$ — фиксированный p-блок группы G, $B(q)$ — фиксированный q-блок группы G. Тогда $\sum \chi_s(x)\chi_s(y)=0$, где χ_s пробегает все неприводимые характеры, которые лежат как в $B(p)$, так и в $B(q)$.*

(ii) *Существует неглавный неприводимый характер, который лежит как в главном p-блоке, так и в главном q-блоке.*

Доказательство. (i) Положим $\theta=\sum_{\chi_s\in B(q)}\chi_s(x)\chi_s$. По условию, в G нет элемента, одновременно лежащего как в p-секции, содержащей y, так и в q-секции, содержащей x^{-1}. Значит, по (6.3) (ii), $\theta(z)=0$ для каждого элемента z из p-секции, содержащей y. Поэтому, в силу (6.3) (i), $\theta^{B(p)}(y)=0$.

(ii) Непосредственно следует из (i). □

В оставшейся части параграфа будем применять следующие обозначения.

B_1, B_2, ... — все блоки алгебры $R[G]$.

$\{y_i\}$ — полное множество представителей сопряженных классов группы G, состоящих из p-элементов. Тогда $\{y_i x_j^{y_i}\}$ — полное множество представителей сопряженных классов группы G.

k — число сопряженных классов группы G.

$k(B_m)$ — число неприводимых характеров в B_m.

$l(y_i)$ — число сопряженных классов из $C_G(y_i)$, состоящих из p'-элементов.

$l(y_i, B_m)$ — число неприводимых характеров Брауэра, лежащих в тех блоках $\tilde{B}$ группы $C_G(y_i)$, для которых $\tilde{B}^G=B_m$.

$\chi=(\chi_s(y_i x_j^{y_i}))$ — таблица характеров группы G.

Для p-элемента $y\in G$: $\boldsymbol{\varphi}^y=(\varphi_i^y(x_j^y))$ — таблица неприводимых характеров Брауэра группы $C_G(y)$; $\boldsymbol{\varphi}$ — прямая сумма матриц $\boldsymbol{\varphi}^{y_i}$; $\mathbf{D}=(d_{sj}^{y_i})$, где s — индекс строки, (i, j) — индекс столбца.

$\mathbf{D}_m$ — подматрица матрицы $\mathbf{D}$, в которой индекс строки пробегает все те значения s, для которых $\chi_s\in B_m$, а индекс (i, j) столбца пробегает все те значения, при которых $\varphi_j^{y_i}$ лежит в таком блоке $\tilde{B}$ группы $C_G(y_i)$, для которого $\tilde{B}^G=B_m$. Следовательно, $\mathbf{D}_m$ является матрицей размера $k(B_m)\times(\sum_i l(y_i, B_m))$.

Если T — кольцо целых алгебраических чисел в K, а S — подмножество в G, положим

$$\mathrm{Ch}_T(S)=\{\alpha\mid\alpha=\sum_s a_s\chi_s,\ a_s\in T,\ \alpha(z)=0,\ \text{если}\ z\notin S\},$$

$$\mathrm{Ch}_T(S, B_m)=\{\alpha\mid\alpha=\sum_{\chi_s\in B_m} a_s\chi_s,\ a_s\in T,\ \alpha(z)=0,\ \text{если}\ z\notin S\}.$$

В том случае, когда T — кольцо целых рациональных чисел, будем писать $\mathrm{Ch}(S)=\mathrm{Ch}_T(S)$ и $\mathrm{Ch}(S, B_m)=\mathrm{Ch}_T(S, B_m)$.

Лемма 6.5. (i) $l(y_i)=\sum_m l(y_i, B_m)$ *для всех* i.

(ii) $k=\sum_m k(B_m)=\sum_i l(y_i)$.

(iii) χ, φ, $\mathbf{D}$ *являются матрицами размера* $k\times k$, *и, после подходящего упорядочения строк и столбцов,* $\chi=\mathbf{D}\varphi$.

Доказательство. Из (III.2.8) и (6.1) следует (i). Из определений очевидно следуют (ii) и (iii). □

Лемма 6.6. (i) *После подходящего упорядочения строк и столбцов матрица* $\mathbf{D}$ *является прямой суммой матриц* $\mathbf{D}_m$.

(ii) *Пусть* T *— поле алгебраических чисел в* K. *Тогда для всех* m,

$$\dim_T(\mathrm{Ch}_T(G, B_m))=k(B_m)=\sum_i l(y_i, B_m).$$

(iii) *Матрица* $\mathbf{D}$ *является невырожденной* $k(B_m)\times k(B_m)$*-матрицей и* $\pm(\det \mathbf{D}_m)^2$ *— степень числа* p *для каждого* m.

(iv) *Пусть* y *является* p*-элементом. Блок* $\tilde{B}$ *группы* $C_G(y)$, *такой, что* $\tilde{B}^G=B_m$, *существует тогда и только тогда, когда* y *сопряжен с элементом дефектной группы блока* B_m.

Доказательство. (i) Непосредственно следует из (6.1).

По определению, $\dim_T(\mathrm{Ch}_T(G, B_m))=k(B_m)$. В силу (6.5), $\mathbf{D}$ является квадратной матрицей. Так как $\mathbf{D}$ невырождена, то каждая из $\mathbf{D}_m$ является квадратной матрицей. Таким образом, по (i), оба утверждения (ii) и (iii) будут сразу доказаны, если будет показано, что $\pm(\det \mathbf{D}_m)^2$ является степенью числа p.

Отображение, которое переводит каждый элемент группы G в его обратный, переставляет строки и столбцы матрицы $\mathbf{D}$ и переводит $\mathbf{D}_m$ в $\mathbf{D}_m^*$. Значит, $(\det \mathbf{D}_m)^2=\pm\det(\mathbf{D}_m^{*\prime}\mathbf{D}_m)$. В силу (6.2) $\mathbf{D}_m^{*\prime}\mathbf{D}_m$ является прямой суммой матриц Картана. Значит, согласно (3.9), $\pm(\det \mathbf{D}_m)^2$ является степенью числа p.

(iv) Предположим, что y не сопряжен ни с одним из элементов дефектной группы P блока B_m. Согласно (2.4), $d_{si}^y=0$ для всех $\chi_s\in B_m$. Поскольку $\mathbf{D}_m$ невырождена, $B_m\neq\tilde{B}^G$ для любого блока $\tilde{B}$ группы $C_G(y)$.

Предположим, что y сопряжен с элементом группы P. Можно считать, что $y\in P$. В силу (III.6.10) и (4.2), существует такой p'-элемент $x\in C_G(P)$, что для $\chi_s\in B_m$, $\overline{\omega_s(C)}\neq 0$, где x лежит в сопряженном классе C. Пусть χ_s — характер высоты 0 в B_m. Тогда $\overline{\chi_s(x)}\neq 0$. Так как $x\in C_G(P)$, то $x\in C_G(y)$ и $\overline{\chi_s(xy)}\neq 0$. Поэтому $\chi_s(xy)\neq 0$. Значит, $d_{si}^y\neq 0$ для некоторого i. Результат теперь следует из второй основной теоремы о блоках (6.1). □

Лемма 6.7. *Пусть* T *— подкольцо в* K, *состоящее из алгебраических чисел,* S *— объединение* p*-секций группы* G. *Тогда*

(i) $\mathrm{Ch}_T(S)=\oplus_m \mathrm{Ch}_T(S, B_m)$.

(ii) *Если* T *— поле, то* $\dim_T(\mathrm{Ch}_T(S, B_m))\leqslant\sum_{y_i\in S} l(y_i, B_m)$ *для всех* m.

Доказательство. (i) Поскольку $G-S$ является объединением p-секций, утверждение очевидно ввиду (6.3) (i).

(ii) Предположим, что $\sum_s a_s\chi_s\in\mathrm{Ch}_T(S, B_m)$. Тогда $\sum_{s,j} a_s d_{sj}^y\varphi_j^y(x)=0$ для всех $y=y_i\notin S$ и всех p'-элементов $x\in C_G(y)$. Значит, $\sum_s a_s d_{sj}^y=0$

для всех $y=y_i\notin S$ и всех таких j, для которых φ_j^y лежит в таком блоке $\tilde{B}$ группы $C_G(y)$, что $\tilde{B}^G=B_m$. Таким образом, вектор (a_s) удовлетворяет системе из $\sum_{y_i\in S} l(y_i, B_m)$ однородных линейных уравнений. По (6.6) (ii) эти уравнения линейно независимы. Поэтому, в силу (6.6) (ii),

$$\dim_T(\mathrm{Ch}_T(S, B_m))\leqslant k(B_m)-\sum_{y_i\in S} l(y_i, B_m)=\sum_{y_i\notin S} l(y_i, B_m). \quad \square$$

Лемма 6.8 (Судзуки [1959]). *Пусть S — объединение n сопряженных классов группы G. Предположим, что если $z\in S$, то $z^h\in S$ для всех таких целых h, что $(h, |G|)=1$. Тогда* $\mathrm{rank}(\mathrm{Ch}(S))=n$.

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{rank}(\mathrm{Ch}(S))\leqslant n$. Поэтому достаточно предъявить n линейно независимых элементов из $\mathrm{Ch}(S)$.

Пусть $\{\alpha_h\}$ — нормальный базис поля $|G|$-х корней из единицы над полем рациональных чисел, где h пробегает все такие целые, что $1\leqslant h\leqslant |G|$, $(h, |G|)=1$ и α_h является образом α_1 относительно автоморфизма, который переводит корень $|G|$-й степени из единицы в его h-ю степень. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — полное множество представителей сопряженных классов из S. Для $i=1, \ldots, n$ положим $\theta_i=\sum_s a_{si}\chi_s$, где $a_{si}=\sum_h \alpha_h\chi_s(z_i^{-h})$. Тогда каждый коэффициент a_{si} является целым рациональным. Если $z\in G$ и z не сопряжен с z_i^m для некоторого m, взаимно простого с $|G|$, то $\theta_i(z)=\sum_h \alpha_h\sum_s \chi_s(z_i^{-h})\chi_s(z)=0$, и, значит, $\theta_i\in\mathrm{Ch}(S)$.

Предположим, что $\sum_j b_j\theta_j=0$ для целых рациональных b_j. Тогда для каждого i

$$0=\sum_j b_j\theta_j(z)=\sum_h \alpha_h\sum_j b_j\sum_s \chi_s(z_j^{-h})\chi_s(z_i)=|C_G(z_i)|\sum b_j\alpha_h,$$

где в последней сумме (j, h) пробегает все те пары, для которых z_i сопряжен с z_j^h. Поскольку $\{\alpha_h\}$ является базисом поля $|G|$-х корней из единицы над полем рациональных чисел, $b_i=0$. Значит, $\{\theta_i\}$ — линейно независимое множество. $\square$

Следующее обобщение (6.6) (ii) принадлежит У. Уонгу [1966].

Лемма 6.9. *Пусть T — подполе в K, состоящее из алгебраических чисел, S — объединение p-секций группы G. Предположим, что выполнено по крайней мере одно из условий:*

(i) *T содержит примитивный корень $|G|_p$-й степени из единицы;*

(ii) *если $z\in S$, то $z^h\in S$ для всех таких целых h, что $(h, |G|)=1$.*

Тогда $\dim_T(\mathrm{Ch}_T(S, B_m))=\sum_{y_i\in S} l(y_i, B_m)$ *для всех m.*

Доказательство. Ввиду (6.8), $\dim_T(\mathrm{Ch}_T(S))=\sum_{y_i\in S} l(y_i)$ при выполнимости одного из условий формулировки леммы. Поэтому, если утверждение ложно, то в силу (6.7) (ii), для некоторого m',

$$\dim_T(\mathrm{Ch}_T(S, B_{m'}))<\sum_{y_i\in S} l(y_i, B_{m'}).$$

Поэтому, по (6.7),

$$\dim_T(\mathrm{Ch}_T(S))=\sum_m \dim_T(\mathrm{Ch}_T(S, B_m))<\sum_m \sum_{y_i\in S} l(y_i, B_m)=\sum_{y_i\in S} l(y_i)=$$
$$=\dim_T(\mathrm{Ch}_T(S)).$$

Полученное противоречие доказывает результат. □

Характер χ_s называется *p-сопряженным* с χ_t, если $\chi_t=\chi_s^\sigma$ для некоторого автоморфизма σ поля $|G|$-х корней из единицы над полем рациональных чисел, который оставляет неподвижными корни p'-й степени из единицы. Два p-сопряженных характера обладают одинаковым набором неприводимых характеров Брауэра как конституэнт и потому лежат в одном блоке. Характер χ_s называется *p-рациональным*, если с ним совпадают все его p-сопряженные.

Лемма 6.10. *Пусть M — такая группа автоморфизмов $|G|$-х корней из единицы над полем рациональных чисел, что корни p'-й степени лежат в поле неподвижных точек группы M. Разобьем неприводимые характеры из B_m на семейства сопряженных относительно действия M. Пусть n_i — число неприводимых характеров в i-м семействе. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Число орбит столбцов матрицы $\mathbf{D}_m$ относительно действия M равно числу семейств в B_m.*

(ii) *Если $p\neq 2$ или если корень 4-й степени из единицы лежит в поле неподвижных точек группы M, то после подходящей перенумерации i-я орбита столбцов матрицы $\mathbf{D}_m$ состоит из n_i элементов.*

Доказательство. Если $p\neq 2$ или если корень 4-й степени из единицы лежит в поле неподвижных точек группы M, то M циклическая. Поскольку $\mathbf{D}_m$ невырождена, то ввиду (6.6) (iii), результат вытекает из комбинаторной леммы Брауэра (см. Брауэр [1941c], лемма 2.1 или Фейт [1967c], (12.1)). □

Следствие 6.11. *Предположим, что $p\neq 2$. Число p-рациональных неприводимых характеров из B_m не меньше числа $l(1, B_m)$ неприводимых характеров Брауэра из B_m.*

Доказательство. Поскольку обыкновенные числа разложения рациональны, то $\mathbf{D}_m$ имеет по крайней мере $l(1, B_m)$ рациональных столбцов. Результат теперь следует из (6.10). □

Некоторые результаты относительно полей, порожденных значениями элементов матриц χ, φ, $\mathbf{D}$, можно найти у Рейнольдса [1974].

§ 7. Центральные идемпотенты и характеры

Некоторые из формул настоящего параграфа послужили Осиме в качестве отправной точки альтернативного развития большей части теории блоков. По поводу этого подхода см. Осима [1952b], [1955], [1960a], [1964], Иидзука [1956], [1960a], [1960b] и Кэртис и Райнер [1962].

Следующий результат хорошо известен и легко проверяем.

Лемма 7.1. *Пусть e_s — примитивный центральный идемпотент из $K[G]$, соответствующий ω_s. Тогда*

$$e_s=\frac{\chi_s(1)}{|G|}\sum_{z\in G}\chi_s(z^{-1})z.$$

Лемма 7.2 (Осима). *Пусть B — блок алгебры $R[G]$, e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$, соответствующий B. Тогда*

$$e=\frac{1}{|G|}\sum_{z\in G}\left\{\sum_{\varphi_i\in B}\varphi_i(1)\Phi_i(z^{-1})\right\}z=\frac{1}{|G|}\sum_{z\in G}'\left\{\sum_{\varphi_i\in B}\Phi_i(1)\varphi_i(z^{-1})\right\}z.$$

Доказательство. $\chi_s\in B$ тогда и только тогда, когда $\omega_s(e)\neq 0$. Значит, в силу (7.1),

$$e=\sum_{\chi_s\in B}e_s=\frac{1}{|G|}\sum_{z\in G}\left\{\sum_{\chi_s\in B}\chi_s(1)\chi_s(z^{-1})\right\}z.$$

Тогда первое равенство вытекает из

$$\sum_{\chi_s\in B}\chi_s(1)\chi_s(z^{-1})=\sum_{\varphi_i\in B}\sum_{\chi_s\in B}\varphi_i(1)d_{si}\chi_s(z^{-1})=\sum_{\varphi_i\in B}\varphi_i(1)\Phi_i(z^{-1}).$$

Отсюда, в частности, следует, ввиду (2.5), что коэффициент при любом p-сингулярном элементе в записи e равен нулю. Если z — некоторый p'-элемент, то

$$\sum_{\chi_s\in B}\chi_s(1)\chi_s(z^{-1})=\sum_{\varphi_i\in B}\sum_{\chi_s\in B}\varphi_i(z^{-1})d_{si}\chi_s(1)=\sum_{\varphi_i\in B}\varphi_i(z^{-1})\Phi_i(1).$$

Это доказывает второе равенство. □

Лемма 7.3. *Пусть e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$, B — блок, соответствующий e, λ — центральный характер алгебры $\bar{R}[G]$, соответствующий B. Для каждого j обозначим через C_j такой сопряженный класс группы G, что $x_j\in C_j$. Тогда $e=\sum_j a_j\hat{C}_j$, где $a_j\in R$. Если $\bar{a}_j\lambda(\hat{C}_j)\neq 0$, то B и C_j имеют общую дефектную группу.*

Доказательство. В силу (7.2), $e=\sum_j a_j\hat{C}_j$, где $a_j\in R$. Пусть D — дефектная группа блока B, а P_j — дефектная группа C_j. Если $\bar{a}_j\neq 0$, то $P_j\subseteq_G D$, ввиду (III.6.5), поскольку $e\in Z_D(G;G)$. Если $\lambda(\hat{C}_j)\neq 0$, то $D\subseteq_G P_j$ ввиду (III.6.10). □

Следующий результат принадлежит Осиме [1966] в случае, когда α является главным характером Брауэра.

Теорема 7.4. *Пусть e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$, B — блок, соответствующий e, χ_r — характер высоты 0 из B, α — такая рациональная целочисленная линейная комбинация характеров Брауэра из множества $\{\varphi_i\mid\varphi_i\in B\}$, что $\nu(\alpha(1))=\nu(\chi_r(1))$. Пусть η_α определена как в (1.2) и $\eta_\alpha=\sum_s b_s\chi_s$. Положим*

$$f_\alpha=\frac{1}{|G|}\frac{\chi_r(1)}{b_r}\sum_{z\in G}\eta_\alpha(z^{-1})z.$$

Тогда $f_\alpha\in R[G]$ и $\bar{e}-\bar{f}_\alpha\in\overline{J(Z(G:G))}$.

Доказательство. В силу (4.7), $f_\alpha \in R[G]$. Используя (4.1) и (7.1), имеем

$$f_\alpha = \frac{\chi_r(1)}{b_r} \sum_{\chi_s \in B} \frac{b_s}{\chi_s(1)} \frac{\chi_s(1)}{|G|} \sum_{z \in G} \chi_s(z^{-1}) z = \sum_{\chi_s \in B} \frac{\chi_r(1)}{b_r} \frac{b_s}{\chi_s(1)} e_s,$$

где e_s — примитивный центральный идемпотент из $K[G]$, соответствующий ω_s. Поэтому, если $\chi_s \notin B$, то $\omega_s(e-f_\alpha) = \omega_s(e) - \omega_s(f_\alpha) = 0$. Если же $\chi_s \in B$, то

$$\omega_s(e-f_\alpha) = \omega_s(e) - \omega_s(f_\alpha) = 1 - \frac{\chi_r(1) b_s}{b_r \chi_s(1)}.$$

Значит, по (4.7), $\omega_s(e-f_\alpha) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Тогда $\omega_s(e-f_\alpha) \equiv 0 \pmod{\pi}$ для всех s, и потому $\lambda(\bar{e}-\bar{f}_\alpha) = 0$ для каждого центрального характера алгебры $\bar{R}[G]$. □

Следующий результат принадлежит Иидзуке и Ватанабе [1972]. Ими же получены похожие результаты для блоков положительного дефекта. Теорема 7.5 обобщает более ранние результаты Брауэра [1946а], [1956].

Теорема 7.5. *Пусть Z — центр алгебры $\bar{R}[G]$, M — подпространство, порожденное всеми теми $\hat{C}_i$, для которых C_i — сопряженный класс дефекта 0. Тогда M — идеал в Z и число блоков дефекта 0 равно* $\dim_{\bar{R}} M^2$.

Доказательство. В силу (III.6.2), M является идеалом в Z. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — все примитивные центральные идемпотенты $R[G]$, соответствующие блокам дефекта 0. Согласно (7.3), $\bar{e}_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $e_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Тогда $M = M\bar{e}_0 \oplus M(1-\bar{e}_0)$. Покажем, что $M^2 = (M\bar{e}_0)^2$.

Пусть C_i, C_j — классы дефекта 0, e — примитивный центральный идемпотент алгебры $R[G]$, соответствующий блоку B положительного дефекта. Тогда, в силу (7.1),

$$\hat{C}_i \hat{C}_j e = \sum_s \sum_{\chi \in B} \frac{|C_i||C_j| \chi(x_i) \chi(x_j) \chi(x_s)^*}{|G| \chi(1)} \hat{C}_s,$$

где $x_i \in C_i$, $x_j \in C_j$, $x_s \in C_s$. Если $|G|_p = p^a$, то $|C_i| \equiv |C_j| \equiv 0 \pmod{p^a}$, однако $|G|\chi(1) \not\equiv 0 \pmod{p^{2a}}$. Значит, $\hat{C}_i \hat{C}_j e = 0$. Поэтому $\{M(1-\bar{e}_0)\}^2 = 0$. Поскольку $M\bar{e}M(1-\bar{e}) = 0$, $M^2 = (M\bar{e}_0)^2$.

Так как e_i соответствует блоку B_i дефекта 0, то B_i содержит единственный неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль и $Z\bar{e}_i = \bar{R}\bar{e}_i$. Значит, $M\bar{e}_i = Z\bar{e}_i = \bar{R}\bar{e}_i$, и потому $M\bar{e}_0 = \oplus_{i=1}^{n} \bar{R}e_i$. Следовательно, $M^2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \bar{R}\bar{e}_i^2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \bar{R}\bar{e}_i$. □

§ 8. Некоторые естественные отображения

Настоящий параграф в значительной степени состоит из результатов, которые являются переформулировками части утверждений, полученных в этой главе ранее. При этом мы будем близко следовать Бруё [1976b], [1978b]. См. также Серр [1977].

Обозначения, введенные в § 6 после (6.4), будем использовать со следующими модификациями.

Символ T будет обозначать произвольное подкольцо поля K.

Вместо $\mathrm{Ch}_T(S, B)$ будем писать $\mathrm{Ch}_T(G:S, B)$, чтобы подчеркнуть зависимость от G. Положим $\mathrm{Ch}_T(G:G)=\mathrm{Ch}_T(G)$.

G_{reg} будет обозначать множество всех p'-элементов группы G.

Очевидно, алгебра Гротендика $A_Z^0(K[G])$ изоморфна $\mathrm{Ch}(G)$. Согласно (3.12), $\mathrm{Ch}(G:G_{\mathrm{reg}})$ изоморфна алгебре Гротендика $A_Z^0(\bar{R}[G])$. Пусть $\mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(G)$ обозначает кольцо всех T-линейных комбинаций характеров $\{\Phi_i\}$. Положим $\mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(G:B)=\mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(G)\cap\mathrm{Ch}_T(G:G, B)$. Как обычно, индекс T будем опускать в случае, когда $T=\mathbf{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел.

Определим линейные отображения $b=b^G$, $c=c^G$, $d=d^G$ следующим образом:

$$b:\mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(G)\to\mathrm{Ch}_T(G),\ \text{где}\ b(\Phi_i)=\sum_u d_{ui}\chi_u;$$
$$c:\mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(G)\to\mathrm{Ch}_T(G:G_{\mathrm{reg}}),\ \text{где}\ c(\Phi_i)=\sum_j c_{ij}\varphi_j;$$
$$d:\mathrm{Ch}_T(G)\to\mathrm{Ch}_T(G:G_{\mathrm{reg}}),\ \text{где}\ d(\chi_u)=\sum_i d_{ui}\varphi_i.$$

Согласно (3.1), следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(G) & \\ {\scriptstyle b}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle c} \\ \mathrm{Ch}_T(G) & \xrightarrow{\ d\ } & \mathrm{Ch}_T(G:G_{\mathrm{reg}}) \end{array}$$

Из определений ясно, что b, c, d можно связать с блоками. Другими словами, можно определить $(d(\theta))^B=d(\theta^B)$, где $\theta\in\mathrm{Ch}_T(G)$. Аналогично, $(b(\theta))^B=b(\theta^B)$ и $(c(\theta))^B=c(\theta^B)$, где $\theta\in\mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(G)$. Кроме того, если $\chi\in\mathrm{Ch}_T(G)$ и $\Phi\in\mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(G)$, то, в силу (3.4),

$$(d(\chi),\ \Phi)=(\chi,\ b(\Phi)). \tag{8.1}$$

Обобщим теперь эту ситуацию. Пусть y — некоторый p-элемент из G. Предположим, что T содержит примитивный корень $|\langle y\rangle|$-й степени из единицы. Если ζ — неприводимый характер группы $C_G(y)$, то существует такой корень $\omega_\zeta(y)$ степени $|\langle y\rangle|$ из 1, что $\zeta(xy)=\omega_\zeta(y)\zeta(x)$, где $x\in C_G(y)$. Определим линейное отображение ω_y линейного пространства $\mathrm{Ch}_T(C_G(y))$, полагая $\omega_y(\zeta)=\omega_\zeta(y)\zeta$ для любого неприводимого характера ζ группы $C_G(y)$. Тогда для любого $\zeta\in\mathrm{Ch}_T(C_G(y))$ и любого $x\in C_G(y)$ имеем $(\omega_y(\zeta))(x)=\zeta(xy)$.

Для любой подгруппы H группы G определим Res_H^G: $\mathrm{Ch}_T(G) \to \mathrm{Ch}_T(H)$, полагая $\mathrm{Res}_H^G(\theta) = \theta_H$. Зададим также Ind_H^G: $\mathrm{Ch}_T(H) \to \mathrm{Ch}_T(G)$, считая $\mathrm{Ind}_H^G(\theta) = \theta^G$.

Пусть $c^{y,G}$ обозначает отображение $c = c^{C_G(y)}$ для группы $C_G(y)$. Положим

$$b^{y,G} = \mathrm{Ind}_{C_G(y)}^G \circ (\omega_y)^{-1} \circ b^{C_G(y)}, \quad d^{y,G} = d \circ \omega_y \circ \mathrm{Res}_{C_G(y)}^G.$$

Лемма 8.2. (i) *Следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(C_G(y)) & \\ {\scriptstyle b^{y,G}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle c^{y,G}} \\ \mathrm{Ch}_T(G) & \xrightarrow{\quad d^{y,G} \quad} & \mathrm{Ch}_T(C_G(y) : C_G(y)_{\mathrm{reg}}) \end{array}$$

(ii) *Если* $\eta \in \mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(C_G(y))$, *то* $b^{y,G}(\eta)$ *обращается в нуль вне* p*-секции, которая содержит* y, *и* $b^{y,G}(\eta)$ *является такой функцией классов, что*

$$(b^{y,G}(\eta))(yx) = \eta(x), \quad \textit{где} \quad x \in C_G(y)_{\mathrm{reg}}.$$

(iii) *Если* $\theta \in \mathrm{Ch}_T(G)$, *то* $d^{y,G}(\theta)$ *является* R*-значной функцией на* $C_G(y)$, *определенной равенством*

$$(d^{y,G}(\theta))(x) = \theta(xy), \quad x \in C_G(y)_{\mathrm{reg}}.$$

Доказательство. Утверждения (ii) и (iii) являются непосредственными следствиями определений, а (i) следует из (ii) и (iii). □

Лемма 8.3. *Если* $\theta \in \mathrm{Ch}_T(G)$ *и* $\eta \in \mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(C_G(y))$, *то*

$$(d^{y,G}(\theta),\ \eta)_{C_G(y)} = (\theta,\ b^{y,G}(\eta))_G.$$

Доказательство. Согласно (8.1) и теореме взаимности Фробениуса (III.2.5),

$$(d^{y,G}(\theta),\ \eta)_{C_G(y)} = (\mathrm{Res}_{C_G(y)}^G(\theta),\ (\omega_y^{-1}) \circ b^{C_G(y)}(\eta))_{C_G(y)} = (\theta,\ b^{y,G}(\eta))_G. \quad \square$$

Пусть B — блок группы G, $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$, ... — все такие блоки группы $C_G(y)$, что $\tilde{B}_i^G = B$. Если ζ — функция классов, определенная на $C_G(y)$, положим $\zeta^{\tilde{B}} = \sum_i \zeta^{\tilde{B}_i}$.

Следующий результат эквивалентен второй основной теореме о блоках (6.1).

Теорема 8.4. *Пусть* $\theta \in \mathrm{Ch}_T(G)$, $\eta \in \mathrm{Ch}_{T,\mathrm{proj}}(C_G(y))$. *Тогда*:

(i) $b^{y,G}(\eta^{\tilde{B}}) = b^{y,G}(\eta)^B$;

(ii) $d^{y,G}(\theta^B) = (d^{y,G}(\theta))^{\tilde{B}}$.

Доказательство. Согласно (8.3), (i) и (ii) эквивалентны. Следовательно, достаточно доказать (ii).

Поскольку $\chi_u(yx) = \sum_i d_{ui}^y \varphi_i(x)$ для $x \in C_G(y)_{\mathrm{reg}}$, из (8.2) (iii) следует, что $d^{y,G}(\chi_u) = \sum_i d_{ui}^y \varphi_i$. Результат теперь представляет собой переформулировку теоремы (6.1). □

Пусть $Z_T(G)$ обозначает центр алгебры $T[G]$. Если S — произвольное подмножество группы G, то $Z_T(G:S)$ будет обозначать множество всех тех $a=\sum_{x\in G}a_x x\in Z_T(G)$, для которых $a_x=0$ при $x\notin S$.

В оставшейся части параграфа мы будем рассматривать лишь случай $T=K$. Заметим, что

$$\mathrm{Ch}_{K,\,\mathrm{proj}}(G)=\mathrm{Ch}_K(G:G_{\mathrm{reg}}).$$

По определению, $\mathrm{Ch}_K(G)$ является дуальным пространством к $Z_K(G)$. Пусть B — блок, e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$, соответствующий B. Если $\theta\in\mathrm{Ch}_K(G)$, то $\theta^B=\theta\circ e$, где $(\theta\circ e)(a)=\theta(ea)$, $a\in Z_K(G)$.

Пусть S — некоторая p-секция группы G. Для $\theta\in\mathrm{Ch}_K(G)$ определим $d_S(\theta)$, полагая

$$(d_S(\theta))(x)=\begin{cases}\theta(x), & \text{если } x\in S,\\ 0, & \text{если } x\notin S.\end{cases}$$

Для $a=\sum_{x\in G}a_x x\in Z_K(G)$ положим $\delta_S(a)=\sum_{x\in S}a_x x$. Тогда d_S является транспонированным к δ_S. Другими словами, $\theta(\delta_S(a))=(d_S(\theta))(a)$, где $a\in Z_K(G)$, $\theta\in\mathrm{Ch}_K(G)$.

Лемма 8.5. *Пусть S — некоторая p-секция группы G, B — блок группы G, e — примитивный центральный идемпотент алгебры $R[G]$, соответствующий B. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если y есть p-элемент из S, то $b^{y,G}\cdot d^{y,G}=d_S$.*

(ii) *Если $\theta\in\mathrm{Ch}_K(G)$, то $(d_S(\theta))^B=d_S(\theta^B)$.*

(iii) *Если $a\in Z_K(G)$, то $\delta_S(ea)=e\delta_S(a)$.*

Доказательство. Поскольку $T=K$, (i) следует из (8.2) (ii) и (iii). Далее, (ii) следует из (8.4). Поскольку δ_S транспонированно к d_S, (iii) следует из (ii).

Заметим, что (8.5) (ii), по существу, эквивалентно (6.3) (i), а (8.5) (iii) эквивалентно утверждению о том, что если e — идемпотент из $Z_K(G)$, S является p-секцией группы G и $\alpha=\sum_{x\in S}a_x x\in Z_K(G)$, то $\alpha e=\sum_{x\in S}b_x x$. В такой форме эквивалентность (8.5) (ii) и (8.5) (iii) впервые была доказана и использована Иидзукой [1961].

Пусть y есть p-элемент из G. Положим $b^y=b^{y,G}$, $d^y=d^{y,G}$. Если $\eta\in\mathrm{Ch}_K(C_G(y):C_G(y)_{\mathrm{reg}})$, то в силу (8.2) (ii), $b^y(\eta)$ обращается в нуль вне p-секции, содержащей y, и является такой функцией классов, что $(b^y(\eta))(yx)=\eta(x)$, где $x\in C_G(y)_{\mathrm{reg}}$. Если $\theta\in\mathrm{Ch}_K(G)$, то, по (8.2) (iii), $(d^y(\theta))(x)=\theta(yx)$, где $x\in C_G(y)_{\mathrm{reg}}$. По аналогии определим β^y, δ^y следующим образом. Для p-секции S группы G, которая содержит y, положим

$$\beta^y\colon\ Z_K(C_G(y):C_G(y)_{\mathrm{reg}})\to Z_K(G:S),$$

где

$$\beta^y\left(\sum_{x\in C_G(y)_{\mathrm{reg}}}a_x x\right)=\sum_z\left\{\sum_x a_x (yx)^z\right\},$$

а z пробегает трансверсаль подгруппы $C_G(y)$ в G. Далее,

$$\delta^y\colon\ Z_K(G)\to Z_K(C_G(y)),\ \text{где}\ \delta^y\Big(\sum_{x\in G} a_x x\Big)=\sum_{x\in C_G(y)_{\mathrm{reg}}} a_{yx}x.$$

Лемма 8.6. (i) *Если* $a\in Z_K(C_G(y):C_G(y)_{\mathrm{reg}})$ *и* $\theta\in \mathrm{Ch}_K(G)$, *то*

$$(d^y(\theta))(a)=|G:C_G(y)|^{-1}\theta(\beta^y(a)).$$

(ii) *Если* $\eta\in \mathrm{Ch}_K(C_G(y):C_G(y)_{\mathrm{reg}})$ *и* $a\in Z_K(G)$, *то*

$$(b^y(\eta))(a)=|G:C_G(y)|\,\eta(\delta^y(a)).$$

Доказательство. Непосредственно следует из определений. □

Лемма 8.7. *Пусть* y *есть* p*-элемент,* e *— примитивный центральный идемпотент из* $R[G]$, s *— отображение Брауэра относительно* $(G, \langle y\rangle, C_G(y))$. *Пусть* $s_0(e)$ *— такой центральный идемпотент из* $R[C_G(y)]$, *что* $\overline{s_0(e)}=\bar{s}(\bar{e})$. *Тогда:*

(i) $\beta^y(s_0(e)a)=e\beta^y(a)$, $a\in Z_K(C_G(y):C_G(y)_{\mathrm{reg}})$;

(ii) $\delta^y(ea)=s_0(e)\delta^y(a)$, $a\in Z_K(G)$.

Доказательство. Ввиду (8.4) доказываемое двойственно к (8.4), если y заменить на y^{-1}. Поэтому оно следует из (8.4). □

§ 9. Индекс Шура относительно $\mathbf{Q}_p$

Пусть φ — неприводимый характер Брауэра группы G, F — такое конечное поле, что $\overline{\varphi(x)}\in F$ для всех $x\in G$. В силу (I.19.3), существует неприводимый $F[G]$-модуль с характером φ. Для полей характеристики 0 ситуация более сложная.

Пусть F — поле характеристики 0, χ — неприводимый характер группы G, $F(\chi)=F(\chi(x), x\in G)$. Тогда существует такое натуральное число $m_F(\chi)$, что $m_F(\chi)\chi$ является характером $F(\chi)[G]$-модуля, и если $n\chi$ является характером некоторого $F(\chi)[G]$-модуля, то $m_F(\chi)|n$. Число $m_F(\chi)$ называется *индексом Шура характера* χ *относительно* F.

Доказательство следующего результата, так же как и доказательство существования индекса Шура, можно найти, например, у Фейта [1967c, § 11].

Лемма 9.1. *Пусть* F *— поле характеристики* 0, χ *— неприводимый характер группы* G. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) $m_F(\chi)=m_{F(\chi)}(\chi)$.

(ii) *Если* θ *— характер* $F[G]$*-модуля, то* $m_F(\chi)|(\theta,\chi)$.

(iii) *Если* $F\subseteq L$, *то* $m_F(\chi)|m_L(\chi)[L(\chi):F(\chi)]$.

(iv) *Существует такое расширение* L *поля* $F(\chi)$, *что* $[L:F(\chi)]=m_F(\chi)$ *и* $m_L(\chi)=1$.

Предположим, что $F(\chi)=F$. Пусть V — некоторый $F[G]$-модуль с характером $m_F(\chi)\chi$, $E(V)$ — кольцо эндоморфизмов модуля V. Тогда $E(V)$ является центральной алгеброй с делением над F, причем $[E(V):F]=m_F(\chi)^2$. Кроме того, если L — расширение поля F, то $m_L(\chi)=1$ тогда и только тогда, когда L является полем разложения для $E(V)$. См., например, Кэртис и Райнер [1962], гл. X.

Структурная теория алгебр с делением, центр которых является конечным расширением поля $\mathbf{Q}_p$ p-адических чисел, хорошо известна. Индексы Шура относительно $\mathbf{Q}_p$ изучались, например, Ямадой [1970]. Сформулируем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 9.2. *Пусть F — конечное расширение поля $\mathbf{Q}_p$, χ — неприводимый характер группы G. Если L — произвольное конечное расширение поля $F(\chi)$ и $m_F(\chi) \mid [L:F(\chi)]$, то $m_L(\chi)=1$.*

Из (9.2) в частности следует, что L можно выбрать неразветвленным или вполне разветвленным. В зависимости от ситуации можно делать тот или иной выбор.

Следующий результат принадлежит Брауэру [1945]. См. также Брауэр [1947], Гоу [1975].

Теорема 9.3. *Предположим, что $d_{ui} \neq 0$. Тогда*

$$m_{\mathbf{Q}_p}(\chi_u) \mid d_{ui}[\mathbf{Q}_p(\chi_u, \varphi_i):\mathbf{Q}_p(\chi_u)].$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел в $\mathbf{Q}_p$. В силу (I.19.3), существует неприводимый $\bar{\mathbf{Z}}_p(\bar{\varphi}_i)\,[G]$-модуль с характером Брауэра φ_i. Пусть V_i — соответствующий проективный неразложимый $\bar{\mathbf{Z}}_p(\bar{\varphi}_i)\,[G]$-модуль. Согласно (I.13.7), существует проективный $\mathbf{Z}_p(\varphi_i)\,[G]$-модуль U_i с характером Φ_i, причем $\bar{U}_i = V_i$. Тогда $\Phi_i \in \mathbf{Q}_p(\varphi_i)$. Значит, $m_{\mathbf{Q}_p(\chi_u, \varphi_i)}(\chi_u) \mid d_{ui}$, ввиду (9.1) (ii). Поскольку по (9.1) (i), $m_{\mathbf{Q}_p}(\chi_u) = m_{\mathbf{Q}_p(\chi_u)}(\chi_u)$, то результат следует из (9.1) (iii). □

Следствие 9.4. *Если χ_u неприводим как характер Брауэра, то $m_{\mathbf{Q}_p}(\chi_u)=1$.*

Доказательство. Непосредственно следует из (9.3). □

Следствие 9.5. *Если $p \nmid |G|$ и χ — неприводимый характер группы G, то $m_{\mathbf{Q}_p}(\chi_u)=1$.*

Доказательство. Очевидно ввиду (9.4). □

Близкие результаты относительно индекса Шура см. у Бруё [1977].

§ 10. Кольцо $A_{\mathbf{Z}}^0(\bar{R}\,[G])$

Пусть $A^0(G) = A_{\mathbf{Z}}^0(\bar{R}\,[G])$ — кольцо целочисленных линейных комбинаций неприводимых характеров Брауэра. Идеал $A_{\langle 1\rangle}^0(G)$ кольца $A^0(G)$ можно отождествить с кольцом целочисленных линейных комбинаций характеров проективных $R\,[G]$-модулей. Основной результат настоящего параграфа дает критерий того, когда элемент является образующим идеала из $A_{\langle 1\rangle}^0(G)$ и, значит, в частности, критерий того, когда $A_{\langle 1\rangle}^0(G)$ является главным идеалом. Рассуждения взяты из Фейта [1976]. См. также Алперин [1976е].

Теорема 10.1. *Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — полное множество представителей всех сопряженных классов группы G, состоящих из p'-элементов. Пусть $\nu(|C_G(x_i)|) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Предположим, что $\eta \in A_{\langle 1\rangle}^0(G)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\eta(x_i) = p^{a_i} u_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *для некоторой единицы u_i из подходящего поля алгебраических чисел;*

(ii) $\prod_{i=1}^m \eta(x_i) = \pm \prod_{i=1}^m p^{a_i}$;

(iii) *для всякого* $\alpha \in A^0_{\langle 1\rangle}(G)$ *существует такой* $\gamma_\alpha \in A^0(G)$, *что* $\eta\gamma_\alpha = \alpha$.

Кроме того, если η *удовлетворяет* (i), (ii), (iii), *то* γ_α *однозначно определен элементом* α.

Прежде чем доказывать (10.1), выведем несколько следствий.

Следствие 10.2. *Пусть* P *— такая* p*-группа, что* $P \lhd G$, *и пусть существует* $\bar{\eta} \in A^0_{\langle 1\rangle}(G/P)$, *удовлетворяющий* (i), (ii), (iii) *из* (10.1). *Тогда существует* $\eta \in A^0_{\langle 1\rangle}(G)$, *удовлетворяющий* (i), (ii) *и* (iii) *из* (10.1).

Доказательство. Очевидно ввиду (4.26). □

Следствие 10.3. *Пусть* P *— такая* S_p*-подгруппа группы* G, *что* $P \lhd G$, φ_1 *— такой характер Брауэра группы* G, *что* $\varphi_1(x) = 1$ *для всех* p'*-элементов* x *из* G. *Тогда* Φ_1 *удовлетворяет* (i), (ii) *и* (iii) *из* (10.1), *причем* $u_i = 1$ *для всех* i.

Доказательство. Очевидно, $1_{G/P} \in A^0_{\langle 1\rangle}(G/P)$ удовлетворяет (i), (ii) и (iii) из (10.1). Результат теперь следует из (4.26). □

Значительно более важный класс подобных примеров возникает из работы Стейнберга [1968]. Он показал, что если G — простая группа лиева типа, то характер Стейнберга группы G удовлетворяет условию (i) из (10.1), причем $u_i = \pm 1$ для всех i. Это побудило Болларда [1976] и, независимо, Люстига [1976] доказать, что характер Стейнберга удовлетворяет условию (iii) из (10.1). Их работы привели к (10.1).

Утверждение о том, что $A^0_{\langle 1\rangle}(G)$ является главным идеалом в $A^0(G)$, не всегда верно. Подходящими вычислениями можно показать, что при $p = 5$, $G = \mathrm{PSL}_2(9) \cong A_6$ не существует такого η из $A^0_{\langle 1\rangle}(G)$, который бы удовлетворял условиям из (10.1). Кроме того, если $G = J_1$ — первая группа Янко, то нетрудно проверить, что в $A^0_{\langle 1\rangle}(G)$ нет такого η, который бы удовлетворял условиям из (10.1) для любого $p \mid |J_1|$.

Доказательство (10.1) основано на следующем элементарном результате.

Лемма 10.4. *Пусть* θ *— комплекснозначная функция классов группы* G, $y_1, \ldots, y_m$ *— множество таких попарно несопряженных элементов группы* G, *что* $\theta(y_i) \neq 0$ *для* $1 \leqslant i \leqslant m$. *Пусть* X *— векторное пространство над полем комплексных чисел, состоящее из всех таких комплекснозначных функций* f, *определенных на* G, *что* $f(y) = 0$, *если* y *не сопряжен с одним из* y_i. *Пусть* $L(\theta)$ *— линейное преобразование пространства* X, *определенное как* $L(\theta)f = \theta f$. *Тогда* $\dim X = m$, *собственные значения преобразования* $L(\theta)$ *равны* $\theta(y_1), \ldots, \theta(y_m)$ *и* $\det L(\theta) = \prod_{i=1}^m \theta(y_i)$.

Доказательство. Определим $f_i \in X$, полагая $f_i(y_j) = \delta_{ij}$. Тогда $\{f_i\}$ образует базис пространства X, и поэтому $\dim X = m$. Кроме того, $L(\theta)f_i = \theta(y_i)f_i$ для всех i. Следовательно, $L(\theta)$ имеет нужные собственные значения и определитель. □

Доказательство теоремы 10.1. Пусть P_i есть S_p-подгруппа группы $C_G(y_i)$. Поскольку $\eta \in A^0_{\langle 1\rangle}(G)$, то $\eta_{\langle y_i\rangle \times P_i} \in A^0_{\langle 1\rangle}(\langle y_i\rangle \times P_i)$. Значит, $\eta(y_i) = p^{a_i}u_i$ для некоторого целого алгебраического u_i.

Поэтому $\prod_{i=1}^{m}\eta(y_i)=\prod_{i=1}^{m}u_i\prod_{i=1}^{m}p^{a_i}$. Очевидно, функция $\prod_{i=1}^{m}\eta(y_i)$ рациональнозначная, и потому $\prod_{i=1}^{m}u_i$ — целое рациональное число. Эквивалентность (i) и (ii) теперь очевидна.

Условие (iii) выполняется тогда и только тогда, когда $\eta A^0(G)=A^0_{\langle 1\rangle}(G)$. Поскольку $\eta A^0(G)\subseteq A^0_{\langle 1\rangle}(G)$, оно выполняется тогда и только тогда, когда $|A^0(G):\eta A^0(G)|=|A^0(G):A^0_{\langle 1\rangle}(G)|$. В силу (10.4),

$$|A^0(G):\eta A^0(G)|=|\det L(\eta)|=\pm\prod_{i=1}^{m}\eta(y_i)=\pm\prod_{i=1}^{m}u_i\prod_{i=1}^{m}p^{a_i}.$$

По определению, $|A^0(G):A^0_{\langle 1\rangle}(G)|=\det C$, где C — матрица Картана группы G. В силу (3.11), $\det C=\prod_{i=1}^{m}p^{a_i}$. Следовательно, условие (iii) выполняется тогда и только тогда, когда $\prod_{i=1}^{m}u_i=\pm 1$, что эквивалентно (i).

Если η удовлетворяет (ii), то $\eta(y_i)\neq 0$ для всех i. Значит, $\gamma_\alpha(y_i)=\alpha(y_i)\eta(y_i)^{-1}$ и потому γ_α однозначно определен элементом α. □

§ 11. Самодуальные модули в характеристике 2

На протяжении этого параграфа F — поле характеристики 2, V — абсолютно неприводимый $F[G]$-модуль с вещественнозначным характером Брауэра. Это эквивалентно тому, что $V\cong V^*$.

Модуль V называется модулем *квадратичного типа*, если существует невырожденная G-инвариантная квадратичная форма на V.

Модуль V называется модулем *симплектического типа*, если существует невырожденная G-инвариантная знакопеременная форма на V.

Мы покажем, что, по существу, всегда V является модулем симплектического типа, и затем получим критерий того, когда V является модулем квадратичного типа. Результаты настоящего параграфа принадлежат, главным образом, Виллемсу [1977]. Однако первые два результата более старые. См., например, Фонг [1974, Lemma 1] или Джеймс [1976, Theorem 1.1]. Введем сначала некоторые обозначения.

A — представление группы G в модуле V.

E — пространство матриц всех операторов на V, превращенное в $F[G]$-модуль действием $X\to A(x)'XA(x)$, где $x\in G$, а штрих обозначает транспонирование. Учитывая (II.2.8), имеем $E\cong V\oplus V\cong V\oplus V^*$. Положим

$$S=\{X\in E\mid X=X'\},\quad T=\{X+X'\mid X\in E\}.$$

Очевидно, $T\subseteq S$ и S, T оба являются $F[G]$-модулями.

$V_0(G)$ — такой $F[G]$-модуль, что $\mathrm{Inv}_G(V_0(G))=V_0(G)$ и $\dim_F V_0(G)=1$.

Теорема 11.1: *Если $V\neq V_0(G)$, то V является модулем симплектического типа.*

Доказательство. Поскольку $V\cong V^*$, существует такая матрица $M\in E$, что $M^{-1}A(x)M=A(x^{-1})'$ для всех $x\in G$. Значит,

$M'A(x)'(M')^{-1}=A(x^{-1})$, и потому $A(x^{-1})'=(M')^{-1}A(x)M'$ для всех $x\in G$. Поэтому $M'M^{-1}A(x)=A(x)M'M^{-1}$ для всех $x\in G$. По лемме Шура, $M'=cM$ для некоторого $c\in F$. Тогда $M=cM'=c^2M$. Следовательно, $c^2=1$, и поэтому $c=1$. Значит, $M=M'$. Далее, $A(x)'MA(x)=M$ для всех $x\in G$. Таким образом, M определяет G-инвариантную симметрическую билинейную форму на V. Пусть W — подпространство, состоящее из всех изотропных векторов пространства V. Тогда W является G-инвариантным подпространством, и потому $W=(0)$ или $W=V$. Если $W=(0)$, то $\dim_F V=1$ и $V\cong V_0(G)$. Если $W=V$, то M определяет невырожденную симметрическую форму на V. □

Следствие 11.2. *Пусть* φ *— вещественнозначный неприводимый характер Брауэра группы* G *для характеристики* 2. *Тогда либо* $\varphi=1_G$, *либо* $\varphi(1)$ *четно.*

Доказательство. Пусть $F[G]$-модуль U имеет характер Брауэра φ. Если U является модулем симплектического типа, то $\varphi(1)=\dim_F U$ четно. Результат теперь следует из (11.1) при $U=V$. □

Пусть X_{ij}, $i<j$, обозначает матрицу из E с 1 на (i, j)-м и (j, i)-м местах и 0 на всех прочих местах. Пусть, далее, X_{ii} — матрица с 1 на (i, i)-м месте и 0 на всех остальных местах. Тогда $\{X_{ij}\mid i\leqslant j\}$ и $\{X_{ij}\mid i<j\}$ являются F-базисами соответственно пространства S и пространства T.

В силу (1.19.3), существует конечное подполе F_0 поля F и такой $F_0[G]$-модуль V_0, что $V=(V_0)_F$. Пусть $V_0^{(2)}$ обозначает $F_0[G]$-модуль, полученный из V применением автоморфизма поля F_0, который a переводит в a^2. Положим $V^{(2)}=(V_0^{(2)})_F$.

Лемма 11.3. (i) *Существует такой подмодуль* E_0 *модуля* E, *что* $E/E_0\cong V_0(G)$.

(ii) $E/S\cong T$.

(iii) $S/T\cong V^{(2)}$.

Доказательство. (i) Пусть E_1 — пространство матриц всех операторов на V, превращенное в $F[G]$-модуль действием $X\to A(x^{-1})XA(x)$, где $x\in G$. Тогда

$$E_1\cong V\otimes V^*\cong V\otimes V\cong E$$

(изоморфизм $F[G]$-модулей). Пусть E_2 — множество всех скалярных матриц из E. Тогда $E_2\cong V_0(G)$ является подмодулем модуля E_1. Отсюда следует результат, так как $E_1\cong E_1^*$.

(ii) Определим $f: E\to T$, полагая $f(X)=X+X'$. Тогда f является $F[G]$-гомоморфизмом E на T с ядром S.

(iii) Без ограничения общности F можно заменить его алгебраическим замыканием. Тогда отображение, переводящее a в a^2, является автоморфизмом поля F. Пусть $x\in G$ и $A(x)=(a_{ij})$. Тогда

$$A(x)'X_{ss}A(x)=(a_{si}a_{sj})=\sum_i a_{si}^2X_{ii}+X$$

для некоторой $X\in T$. □

Пусть $M=(m_{ij})$ — верхняя треугольная матрица из E, т. е. $m_{ij}=0$ при $i>j$. Определим на V квадратичную форму Q_M, полагая

$$Q_M(v)=\sum_{i,j} m_{ij}x_ix_j, \text{ где } v=(x_1, \ldots, x_n).$$

Определим $f_M\in \mathrm{Hom}_F(S, F)$ равенством

$$f_M((x_{ij}))=\sum_{i,j} m_{ij}x_{ij}.$$

Лемма 11.4. *Пусть M — верхняя треугольная матрица из E. Форма Q_M G-инвариантна тогда и только тогда, когда $f_M\in \mathrm{Hom}_{F[G]}(S, F)$, где $F\cong V_0(G)$.*

Доказательство. Положим $v=(x_1, \ldots, x_n)\in V$. Пусть $A=(a_{ij})\in E$. Тогда

$$Q_M(vA)=\sum_{i,j,s,t} m_{ij}a_{is}a_{jt}x_sx_t.$$

Значит, $Q_M(vA)=Q_M(v)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два равенства при всех $s<t$:

$$\sum_{i,j} m_{ij}a_{is}a_{js}=m_{ss}, \tag{11.5}$$

$$\sum_{i,j} m_{ij}(a_{is}a_{jt}+a_{js}a_{it})=m_{st}. \tag{11.6}$$

Для всех $s<t$

$$f_M(A'X_{ss}A)=\sum_{i,j} m_{ij}a_{is}a_{js},$$

$$f_M(A'X_{st}A)=\sum_{i,j} m_{ij}(a_{is}a_{jt}+a_{it}a_{js}).$$

Таким образом, $f_M(A'XA)=f_M(X)$ для всех $X\in S$ тогда и только тогда, когда выполнены (11.5) и (11.6). Следовательно, $f_M(A'XA)=f_M(X)$ для всех $X\in S$ тогда и только тогда, когда форма Q_M A-инвариантна. □

Теорема 11.7. *Модуль V является модулем квадратичного типа тогда и только тогда, когда существует такой подмодуль S_0 модуля S, что $S/S_0\cong V_0(G)$.*

Доказательство. Каждая квадратичная форма на V совпадает с формой Q_M для подходящей верхней треугольной матрицы M. Каждое отображение, принадлежащее $\mathrm{Hom}_F(S, F)$, совпадает с формой f_M для подходящей верхней треугольной матрицы M. Результат теперь следует из (11.4). □

Следствие 11.8. *Если V не является модулем квадратичного типа, то существует нерасщепляемая точная последовательность*

$$0 \to V_0(G) \to W \to V \to 0.$$

Доказательство. В силу (11.7), $V_0(G)$ не является гомоморфным образом S. Значит, в силу (11.3) (i) и (ii), существует точная последовательность

$$0 \to T_0 \to T \to V_0(G) \to 0.$$

Таким образом, в силу (11.3) (iii) существует точная последовательность

$$0 \to V_0(G) \to S/T_0 \to V^{(2)} \to 0.$$

Так как $V_0(G)$ не является гомоморфным образом S, то эта последовательность не расщепляема. Поэтому существует также нерасщепляемая последовательность требуемого вида. □

Следствие 11.9. *Если V не лежит в главном 2-блоке, то V является модулем квадратичного типа.*

Доказательство. Очевидно ввиду (11.8). □

Следствие 11.10. *Если G разрешима, то V является модулем квадратичного типа.*

Доказательство. Индукция по $|G|$. Если $|G|=1$, результат очевиден. Предположим, что $|G|>1$. Если V не лежит в главном 2-блоке, то результат следует из (11.9). Если V лежит в главном 2-блоке, то, ввиду (4.12), $O_{2',2}(G)$ лежит в ядре V. Так как $O_{2',2}(G) \neq \langle 1 \rangle$, то результат следует из соображений индукции. □

ГЛАВА V

На протяжении настоящей главы будем использовать обозначения и соглашения, введенные в начале главы IV. Будем применять также следующие обозначения.

Если B — блок группы G, то λ_B — центральный характер алгебры $\bar{R}[G]$, соответствующий B.

ν — экспоненциальное нормирование, определенное на K, причем $\nu(p)=1$.

$\chi_1, \chi_2, \ldots$ — все неприводимые характеры группы G.

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — все неприводимые характеры Брауэра группы G.

ω_s — центральный характер алгебры $K[G]$, соответствующий χ_s.

Если H — подгруппа группы G и $h\colon Z(K; H:H) \to K$ — линейное отображение, определим $h^G\colon Z(K; G:G) \to K$, полагая

$$h^G(\hat{C}) = h(\widehat{C \cap H})$$

для любого сопряженного класса C группы G.

Часть результатов этой главы можно доказать без предположения о том, что K и $\bar{R}$ — поля разложения для произвольной подгруппы группы G. См., например, Бруё [1972], [1973]; Хуббарт [1972]; Рейнольдс [1971].

§ 1. Некоторые элементарные результаты

По поводу результатов этого и следующего параграфов см. Брауэр [1967], Фонг [1961] и Рейнольдс [1963].

Лемма 1.1. *Пусть H — подгруппа группы G, ζ — неприводимый характер группы H, $\zeta^G = \sum_s a_s \chi_s$, ω — центральный характер алгебры $K[H]$, соответствующий ζ. Тогда*

$$\sum_s a_s \chi_s(1)\,\omega_s = \zeta^G(1)\,\omega^G.$$

Доказательство. Пусть $\{L_i\}$ — множество всех сопряженных классов группы H, $z_i \in L_i$. Пусть $\zeta(x)=0$, если $x \in G-H$. Если C — сопряженный класс группы G и $z \in C$, то из определения

индуцированного характера следует, что

$$\sum_s a_s\chi_s(z)=\zeta^G(z)=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\zeta(z^y)=|C_G(z)|\sum_{L_i\subseteq C}\frac{\zeta(z_i)}{|C_H(z_i)|}.$$

Значит,

$$\sum_s a_s\chi_s(1)\omega_s(C)=\sum_s a_s\frac{|G|}{|C_G(z)|}\chi_s(z)=|G:H|\zeta(1)\sum_{L_i\subseteq C}\omega(L_i)=\zeta^G(1)\omega^G(G). \ \square$$

Лемма 1.2. *Пусть H — подгруппа группы G, B_0 — блок группы H. Предположим, что B_0 содержит такой неприводимый характер ζ, что ζ^G неприводим. Тогда B_0^G определен и $\zeta^G\in B_0^G$.*

Доказательство. Пусть $\zeta^G=\chi_s$, а ω — центральный характер алгебры $K[H]$, соответствующий ζ. В силу (1.1), $\omega_s=\omega^G$. Значит, $\bar\omega^G=\bar\omega_s$ является центральным характером алгебры $\bar R[G]$. $\square$

Лемма 1.3. *Пусть B_0 — блок подгруппы H группы G, для которого B_0^G определен. Пусть ζ — неприводимый характер из B_0 и $\zeta^G=\sum_s a_s\chi_s$. Если B — блок группы G, то*

$$\nu\left(\sum_{\chi_s\in B}a_s\chi_s(1)\right)>\nu(\zeta^G(1)) \quad \textit{при} \quad B\neq B_0^G,$$

$$\nu\left(\sum_{\chi_s\in B}a_s\chi_s(1)\right)=\nu(\zeta^G(1)) \quad \textit{при} \quad B=B_0^G.$$

Доказательство. Пусть ω — центральный характер алгебры $K[H]$, соответствующий ζ, e — центральный идемпотент $R[G]$, соответствующий B. Тогда $\omega_s(e)=1$, если $\chi_s\in B$, и $\omega_s(e)=0$, если $\chi_s\notin B$. Кроме того, $\bar\omega^G(\bar e)=0$, если $B\neq B_0^G$, и $\bar\omega^G(\bar e)=1$, если $B=B_0^G$. Результат теперь следует из (1.1). $\square$

Следствие 1.4. *Пусть B_0 — блок подгруппы H группы G, для которого B_0^G определен. Пусть B_0 и B_0^G имеют равные дефекты. Если ζ — неприводимый характер высоты 0 из B_0, то некоторый характер χ_s высоты 0 из B_0^G является конституэнтой ζ^G с кратностью $a_s\not\equiv 0 \pmod p$.*

Доказательство. Очевидно, ввиду (1.3). $\square$

Теорема 1.5. *Пусть B — блок группы G с дефектной группой D. Предположим, что $\lambda_B(\overline{\hat C})\neq 0$ для сопряженного класса C группы G. Тогда существует такой $z\in C$, что $z\in C_G(D)$ и p-часть y элемента z лежит в $Z(D)$.*

Доказательство. В силу (III.9.7), существует такой блок B_0 группы $N_G(D)$ с дефектной группой D, что $B_0^G=B$. Пусть $\lambda_0=\lambda_{B_0}$. Поскольку $\lambda_0^G(\overline{\hat C})\neq 0$, существует такой сопряженный класс C_0 группы $N_G(D)$, что $C_0\subseteq C$ и $\lambda_0(\overline{\hat C_0})\neq 0$. Выберем $z\in C_0$. В силу (III.6.10), $z\in C_G(D)$. Если ζ — неприводимый характер из блока B_0, то $\zeta(z)\neq 0$. Значит, по (IV.2.4), y сопряжен в $N_G(D)$ с элементом из D, и потому $y\in D$. Так как $D\subseteq C_G(z)\subseteq C_G(y)$, то $y\in Z(D)$. $\square$

Теорема 1.6. *Пусть B_0 — блок подгруппы H группы G, для которого B_0^G определен. Пусть D_0 — дефектная группа блока B_0, а D — дефектная группа блока B_0^G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Каждый элемент из* $Z(D)$ *сопряжен с элементом из* $Z(D_0)$.

(ii) *Экспонента* $Z(D)$ *не больше экспоненты* $Z(D_0)$.

(iii) *Если дефект блока* B_0 *равен нулю, то дефект блока* B_0^G *также равен нулю.*

(iv) *Если* $p \mid |G|$, *то* $H \neq \langle 1 \rangle$.

Доказательство. (i) Пусть χ_r — характер высоты 0 из B_0^G. В силу (III.6.10) и (IV.4.8), существует такой p'-элемент x, что D является S_p-подгруппой группы $C_G(x)$ и $\chi_r(x)\omega_r(x^{-1}) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Если $y \in Z(D)$, то D является S_p-подгруппой группы $C_G(xy)$ и $\chi_r(xy) \equiv \chi_r(x) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Значит, $v(\omega_r(xy)) = v(\omega_r(x)) = 0$. Следовательно, $\omega_r(xy) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ для всех $y \in Z(D)$. Пусть ζ — неприводимый характер из B_0, а ω — центральный характер алгебры $K[H]$, соответствующий ζ. Тогда $\bar{\omega}_r = \bar{\omega}^G$. Значит, если $y \in Z(D)$, то существует такой элемент z из H, сопряженный с xy, что $\bar{\omega}(z) \neq 0$. В силу (1.5), p-часть элемента z сопряжена с элементом из $Z(D_0)$.

(ii) и (iii) непосредственно следуют из (i).

(iv) Если $H = \langle 1 \rangle$, то, по (iii), B_0^G имеет дефект 0 и потому содержит ровно один неприводимый характер χ_t. Значит, если ζ — единственный неприводимый характер из B_0, то $\zeta^G = \sum \chi_s(1)\chi_s$, и поэтому, учитывая (1.3), получаем

$$v(|G|) = v(\zeta^G(1)) = v(\chi_t(1)^2) = 2v(|G|).$$

Значит, $v(|G|) = 0$, вопреки условию. □

Лемма 1.7. *Пусть* B — *блок группы* G, σ — *такой автоморфизм группы* G, *что* $\chi_s^\sigma = \chi_s$ *для всех* $\chi_s \in B$. *Если* y — *элемент из дефектной группы блока* B, *то* y^σ *сопряжен в* G *с* y.

Доказательство. В силу (IV.4.8), существуют такие p'-элемент x и характер χ_r высоты 0 из B, что $\chi_r(x)\omega_r(x^{-1}) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ и S_p-подгруппа D группы $C_G(x)$ является дефектной группой блока B. Заменяя y на сопряженный, можно считать, что $y \in D$. Значит, $\chi_r(yx) \equiv \chi_r(x) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

Если y и y^σ не сопряжены в G, то, по (IV.6.3),

$$\sum_{\chi_s \in B} |\chi_s(yx)|^2 = \sum_{\chi_s \in B} \chi_s((yx)^G)\chi_s(yx)^* = 0.$$

Поскольку $|\chi_s(yx)| \geqslant 0$ для всех s, $\chi_s(yx) = 0$ для всех $\chi_s \in B$. Следовательно, в частности, $\chi_r(yx) = 0$, вопреки предыдущему абзацу. □

§ 2. Группы инерции

На протяжении этого параграфа $\tilde{G}$ будет обозначать фиксированную нормальную подгруппу группы G. Как правило, знак тильда будет закрепляться за величинами, связанными с $\tilde{G}$. Например, $\tilde{\chi}_1$, $\tilde{\chi}_2$, ... — то все неприводимые характеры группы $\tilde{G}$, $\tilde{\omega}_s$ — центральный характер алгебры $K[\tilde{G}]$, соответствующий $\tilde{\chi}_s$.

Пусть $\tilde{A}$ — подмножество из $\tilde{G}$, которое является объединением сопряженных классов группы G, $\tilde{\theta}$ — комплекснозначная функция, определенная на $\tilde{A}$ и постоянная на сопряженных классах группы $\tilde{G}$, лежащих в $\tilde{A}$. Если $z \in G$, определим $\tilde{\theta}^z$, полагая $\tilde{\theta}^z(x) = \tilde{\theta}(x^{z^{-1}})$ для всех $x \in \tilde{A}$. Тогда $\tilde{\theta}^z$ определена на $\tilde{A}$ и постоянна на сопряженных классах группы $\tilde{G}$, лежащих в $\tilde{A}$. *Группа инерции* $T(\tilde{\theta})$ функции $\tilde{\theta}$ в G определяется как $T(\tilde{\theta}) = \{z \mid z \in G,\ \tilde{\theta}^z = \tilde{\theta}\}$. Очевидно, $\tilde{G} \subseteq T(\tilde{\theta})$.

Если $\tilde{W}$ — неприводимый $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль с характером Брауэра $\tilde{\varphi}_i$, то нетрудно видеть, что $T(\tilde{W}) = T(\tilde{\varphi}_i)$. Аналогично, если $\tilde{V}$ является R-свободным $R[\tilde{G}]$-модулем с характером $\tilde{\chi}_s$, то легко видеть, что $T(\tilde{V}_K) = T(\tilde{\chi}_s)$. Однако $T(\tilde{V})$ может не совпадать с $T(\tilde{V}_K)$.

Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$. *Группа инерции* $T(\tilde{B})$ блока $\tilde{B}$ в G определяется как $T(\tilde{B}) = \{z \mid z \in G,\ \tilde{B}^z = \tilde{B}\}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$. Если $\tilde{\chi}_s$, $\tilde{\varphi}_i \in \tilde{B}$, то $T(\tilde{\varphi}_i) \subseteq T(\tilde{B})$ и $T(\tilde{\chi}_s) \subseteq T(\tilde{B})$.*

Доказательство. Очевидно ввиду (IV.4.9). □

Теорема 2.2. *Для любой такой подгруппы H, что $\tilde{G} \subseteq H \subseteq G$, обозначим через $\mathfrak{A}_s(H)$ множество всех неприводимых характеров группы, ограничение которых на $\tilde{G}$ содержит $\tilde{\chi}_s$ в качестве конституэнты. Пусть, далее, $\mathfrak{A}_i^0(H)$ — множество всех неприводимых характеров Брауэра группы H, ограничения которых на G содержат $\tilde{\varphi}_i$ в качестве конституэнты.*

(i) *Если $T(\tilde{\varphi}_i) \subseteq H$, то отображение, переводящее θ в θ^G, определяет биекцию между $\mathfrak{A}_i^0(H)$ и $\mathfrak{A}_i^0(G)$.*

(ii) *Если V — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль с характером Брауэра, лежащим в $\mathfrak{A}_i^0(G)$, то вертекс модуля V лежит в $T(\tilde{\varphi}_i)$.*

(iii) *Если $T(\tilde{\chi}_s) \subseteq H$, то отображение, переводящее θ в θ^G, задает биекцию между $\mathfrak{A}_s(H)$ и $\mathfrak{A}_s(G)$.*

(iv) *Если $\chi_t \in \mathfrak{A}_s(G)$, то существует R-свободный $R[G]$-модуль с характером χ_s, вертекс которого лежит в $T(\tilde{\chi}_s)$.*

Доказательство. (i) Результат достаточно доказать лишь в случае $T(\tilde{\varphi}_i) = H$. Пусть $\psi \in \mathfrak{A}_i^0(H)$. В силу (II.2.9), $(\psi^G)_H = \psi + \theta$, где $\tilde{\varphi}_i$ не является коституэнтой $\theta_{\tilde{G}}$. Пусть η — неприводимая конституэнта для ψ^G, причем $\eta_H = \psi + \theta_1$. В силу (III.2.12), $\psi_{\tilde{G}} = e\tilde{\varphi}_i$ для подходящего целого $e > 0$ и $\eta(1) = |G:H|\psi(1) = \psi^G(1)$. Значит, $\psi^G = \eta \in \mathfrak{A}_i^0(G)$. Кроме того, если ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{A}_i^0(H)$ и $\psi_1^G = \psi_2^G$, то $(\psi_1^G)_H = (\psi_2^G)_H$, и потому $\psi_1 = \psi_2$. Следовательно, отображение, переводящее θ в θ^G, инъективно. Осталось показать, что оно сюръективно.

Пусть $\varphi_j \in \mathfrak{A}_i^0(G)$, и пусть V является $\bar{R}[G]$-модулем с характером Брауэра φ_j, а $\tilde{W}_i$ является $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулем с характером Брауэра $\tilde{\varphi}_i$. В силу (III.2.12), $V_{\tilde{G}}$ вполне приводим, и потому $I(V_{\tilde{G}}, \tilde{W}_i) \neq 0$. Значит, по (III.2.5), $I(V_H, \tilde{W}_i^H) \neq 0$, и тогда $I(V_H, W) \neq 0$ для некоторой неприводимой конституэнты W модуля $\tilde{W}_i^H$. Поскольку $(\tilde{W}_i^H)_{\tilde{G}} \cong |H:\tilde{G}|\tilde{W}_i$, $\tilde{W}_i$ является конституэнтой модуля W_G. Значит, если ψ — характер Брауэра модуля W, то $\psi \in \mathfrak{A}_i^0(H)$. Поскольку $I(V, W^G) = I(V_H, W) \neq 0$, неприводимость V и W^G влечет, что $V = W^G$, и потому $\varphi_j = \psi^G$, что и утверждалось.

(ii) Очевидно ввиду (i).

(iii) Если p заменить на простое число, не делящее $|G|$, то утверждение следует из (i).

(iv) Очевидно ввиду (iii). □

Говорят, что блок B группы G *накрывает* блок $\tilde{B}$ нормальной подгруппы $\tilde{G}$, если существуют такие $\chi_s \in B$ и $\tilde{\chi}_t \in \tilde{B}$, что $\tilde{\chi}_t$ является конституэнтой характера $(\chi_s)_{\tilde{G}}$.

Лемма 2.3. *Блоки группы $\tilde{G}$, накрываемые блоком B группы G, образуют семейство блоков, сопряженных в G. Если $\tilde{B}$ накрывается блоком B и $\chi_s \in B$, то некоторая неприводимая конституэнта характера $(\chi_s)_{\tilde{G}}$ принадлежит $\tilde{B}$. Если $\tilde{\chi}_t \in \tilde{B}$, то существует такой $\chi_s \in B$, что $\tilde{\chi}_t$ является конституэнтой $(\chi_s)_{\tilde{G}}$.*

Доказательство. Утверждение является переформулировкой (IV.4.10). □

Лемма 2.4. *Характеры χ_s и χ_t принадлежат блокам, накрывающим один и тот же блок группы $\tilde{G}$, тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\chi_{j_1} = \chi_s, \chi_{j_2}, \ldots, \chi_{j_n} = \chi_t$, что для любого m либо χ_{j_m} и $\chi_{j_{m+1}}$ лежат в общем блоке группы G, либо $(\chi_{j_m})_{\tilde{G}}$ и $(\chi_{j_{m+1}})_{\tilde{G}}$ имеют общую неприводимую конституэнту.*

Доказательство. Если такая последовательность существует, то, по (2.3), последовательные характеры принадлежат блокам, которые накрывают фиксированный блок группы $\tilde{G}$.

Обратно, предположим, что χ_s и χ_t лежат в блоках, которые накрывают фиксированный блок группы $\tilde{G}$. Пусть $\tilde{\chi}_m$ — неприводимая конституэнта характера $(\chi_s)_{\tilde{G}}$. В силу (2.3), существует χ_r, лежащий в том же блоке, что и χ_t, такой, что $\tilde{\chi}_m$ является конституэнтой для $(\chi_t)_{\tilde{G}}$. Последовательность χ_s, χ_r, χ_t обладает нужными свойствами. □

Теорема 2.5 (Фонг [1961], Рейнольдс [1963]). *Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$. Отображение, переводящее $\hat{B}$ в $\hat{B}^G$, задает биективное соответствие между множеством всех блоков группы $T(\tilde{B})$, накрывающих $\tilde{B}$, и множеством всех блоков группы G, накрывающих $\tilde{B}$. Кроме того, если $\hat{B}$ — блок $T(\tilde{B})$, накрывающий $\tilde{B}$, то:*

(i) *отображение, переводящее θ в θ^G, задает биективное соответствие между множествами всех неприводимых характеров (неприводимых характеров Брауэра) блоков $\hat{B}$ и $\hat{B}^G$;*

(ii) *относительно соответствия, определенного в* (i), *$\hat{B}$ и $\hat{B}^G$ имеют равные матрицы разложения и равные матрицы Картана;*

(iii) *$\hat{B}$ и $\hat{B}^G$ имеют общую дефектную группу;*

(iv) *$\tilde{B}$ — единственный блок группы $\tilde{G}$, накрываемый $\hat{B}$.*

Доказательство. Пусть $\hat{B}$ — блок группы $T(\tilde{B})$, накрывающий $\tilde{B}$, ζ — неприводимый характер из $\hat{B}$. В силу (1.2), (2.1) и (2.2) (iii), $\hat{B}^G$ определен, $\zeta^G \in \hat{B}^G$ и $\hat{B}^G$ накрывает $\tilde{B}$. Пусть B — блок группы G, накрывающий $\tilde{B}$, $\chi_t \in B$. В силу (2.3), $(\chi_t)_{\tilde{G}}$ обладает неприводимой конституэнтой $\tilde{\chi}_s \in \tilde{B}$. Согласно (2.1) и (2.2) (iii), $\chi_t = \zeta^G$ для некоторого неприводимого характера ζ группы $T(\tilde{B})$ такого, что $\tilde{\chi}_s$ является неприводимой конституэнтой характера $\zeta_{\tilde{G}}$. Пусть $\hat{B}$ — блок группы $T(\tilde{B})$, в котором лежит ζ. Тогда $\hat{B}$ накрывает $\tilde{B}$ и $\hat{B}^G = B$, ввиду (1.2).

Пусть ψ_1, ψ_2 — неприводимые характеры Брауэра группы $T(\tilde{B})$ из блоков, накрывающих $\tilde{B}$. Если $\tilde{\varphi} \in \tilde{B}$ и $\tilde{\varphi}$ — неприводимая конституэнта характера $(\psi_i^G)_{\tilde{G}}$, то $\tilde{\varphi}$ является конституэнтой характера $(\psi_i)_{\tilde{G}}$ при $i=1, 2$. Таким образом, если $\psi_1^G = \psi_2^G$, то $(\psi_1)_{\tilde{G}}$ и $(\psi_2)_{\tilde{G}}$ обладают общей неприводимой конституэнтой, которая лежит в $\tilde{B}$, и поэтому, согласно (2.2), $\psi_1 = \psi_2$. Следовательно, отображение, переводящее θ в θ^G, определяет биективное соответствие между множествами всех неприводимых характеров (всех неприводимых характеров Брауэра) групп $T(\tilde{B})$ и G, лежащих в блоках, накрывающих $\tilde{B}$. Очевидно, это отображение сохраняет числа разложения, а значит, и инварианты Картана. Поскольку матрица разложения блока неразложима, то характер или характер Брауэра θ группы $T(\tilde{B})$ лежит в $\hat{B}$ тогда и только тогда, когда $\theta^G \in \hat{B}^G$. Таким образом, отображение, переводящее $\hat{B}$ в $\hat{B}^G$, является биективным, что и утверждалось. Тем самым (i) и (ii) доказаны.

(iii) Пусть $\hat{D}$ — дефектная группа блока $\hat{B}$. В силу (III.9.6), $\hat{D} \subseteq D$ для некоторой дефектной группы D блока $\hat{B}^G$. По (i), $\hat{B}$ и $\hat{B}^G$ имеют один и тот же дефект. Значит, $\hat{D} = D$.

(iv) Поскольку $\tilde{B}^z = \tilde{B}$ для всех $z \in T(\tilde{B})$, утверждение очевидно ввиду (2.3). □

Следствие 2.6. *Пусть B — блок группы G, $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$, накрываемый B. Тогда $T(\tilde{B})$ содержит дефектную группу блока B.*

Доказательство. В силу (2.5), $B = \hat{B}^G$ для подходящего блока $\hat{B}$ группы $T(\tilde{B})$, накрывающего $\tilde{B}$. Результат теперь следует из (2.5) (iii). □

§ 3. Блоки и нормальные подгруппы

В этом параграфе будем применять обозначения из предыдущего параграфа. Относительно результатов настоящего параграфа см. Брауэр [1967a], [1968]; Фонг [1961]; Пассман [1969].

Лемма 3.1. *Пусть $a \in \overline{Z(R; G:G)} \cap \bar{R}[\tilde{G}]$. Если $\tilde{\lambda}$ — центральный характер алгебры $\bar{R}[\tilde{G}]$, то $\tilde{\lambda}(a) = \tilde{\lambda}^G(a)$.*

Доказательство. Вытекает из определения. □

Лемма 3.2. *Пусть $\{\tilde{B}_{im}\}$ — множество всех таких блоков группы $\tilde{G}$, что $\tilde{B}_{im} = \tilde{B}_{jn}^z$ для некоторого $z \in G$ тогда и только тогда, когда $i=j$. Пусть $\tilde{e}_{im}$ — такой примитивный центральный идемпотент алгебры $R[\tilde{G}]$, для которого $\tilde{B}_{im} = B(\tilde{e}_{im})$. Положим $e_i = \sum_m \tilde{e}_{im}$. Тогда $\{e_i\}$ совпадает с множеством всех примитивных идемпотентов алгебры $Z(R; G:G) \cap R[\tilde{G}]$.*

Доказательство. Любой идемпотент из $Z(R; G:G) \cap R[\tilde{G}]$ является суммой примитивных центральных идемпотентов алгебры $R[\tilde{G}]$ и инвариантен относительно сопряжения элементами группы G. Отсюда следует результат. □

Лемма 3.3 (Фонг [1961]). *Пусть $\tilde{B}_{im}$ и $\tilde{e}_{im}$ определены как в (3.2). Для каждого i пусть B_{i1}, B_{i2}, ... — все блоки группы G, накрывающие некоторый блок $\tilde{B}_{im}$, а e_{im} — такой примитивный*

центральный идемпотент алгебры $R[G]$, *что* $B_{im}=B(e_{im})$. *Тогда* $\sum_m \tilde{e}_{im}=\sum_m e_{im}$.

Доказательство. В силу (3.2), $\{e_i\}$ — множество попарно ортогональных центральных идемпотентов алгебры $R[G]$. Поэтому достаточно показать, что $e_{im}e_i\neq 0$ для всех i, m. Пусть V — ненулевой $R[G]$-модуль из B_{im}. В силу (2.3), $(V_{\tilde{G}})e_i\neq 0$. Значит, $Ve_i=Ve_{im}e_i\neq 0$, и потому $e_{im}e_i\neq 0$. □

Лемма 3.4 (Пассман [1969]). *Пусть* B — *блок группы* G, $\tilde{B}$ — *блок группы* $\tilde{G}$. *Блок* B *накрывает* $\tilde{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda_{\tilde{B}}(a)=\lambda_B(a)$ *для всех* $a\in\overline{Z(R;G:G)}\cap\bar{R}[\tilde{G}]$.

Доказательство. В силу (3.2) и (3.3), B накрывает $\tilde{B}$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{\tilde{B}}(\bar{e})=\lambda_B(\bar{e})$ для каждого идемпотента $\bar{e}$ из $\overline{Z(R;G:G)}\cap\bar{R}[\tilde{G}]$. Согласно (I.16.1), $\bar{R}$ является полем разложения алгебры $\overline{Z(R;G:G)}\cap\bar{R}[\tilde{G}]$. Отсюда следует результат, поскольку два центральных характера коммутативной алгебры равны, если равны их значения на всех идемпотентах. □

Лемма 3.5. *Пусть* $G/\tilde{G}$ *является* p-*группой. Если* $\tilde{B}$ — *блок группы* $\tilde{G}$, *то существует единственный блок* B *группы* G, *накрывающий* $\tilde{B}$.

Доказательство. Пусть B_1 и B_2 — блоки группы G, которые накрывают $\tilde{B}$. Положим $\lambda_i=\lambda_{B_i}$, $i=1, 2$. Если C — сопряженный класс группы G, состоящий из p'-элементов, то $\hat{C}\in Z(R;G:G)\cap R[\tilde{G}]$. Значит, в силу (3.4), $\lambda_1(\bar{\hat{C}})=\lambda_{\tilde{B}}(\bar{\hat{C}})=\lambda_2(\bar{\hat{C}})$. Таким образом, по (IV.4.2), (IV.4.3) и (IV.4.8) (iii), $B_1=B_2$. □

Блок B группы G называется *регулярным относительно* $\tilde{G}$, если $\lambda_B(\hat{C})=0$ для всех сопряженных классов C группы G, которые не лежат в $\tilde{G}$. Блок B называется *слабо регулярным относительно* $\tilde{G}$, если существует такой сопряженный класс C группы G, $C\subseteq\tilde{G}$, что $\lambda_B(\bar{\hat{C}})\neq 0$ и дефект блока B равен дефекту класса C.

В тех случаях, когда $\tilde{G}$ определяется из контекста, слова «относительно $\tilde{G}$» будем опускать. В силу (III.6.10), регулярный блок является слабо регулярным. Кроме того, если $\lambda_B(\bar{\hat{C}})\neq 0$ и дефект B равен дефекту C, то B и C имеют общую дефектную группу.

Лемма 3.6. *Пусть* B — *блок группы* G. *Эквивалентны условия:*

(i) B *регулярен*;

(ii) $B=\tilde{B}^G$ *для каждого блока* $\tilde{B}$ *группы* $\tilde{G}$, *накрываемого блоком* B;

(iii) $B=\tilde{B}^G$ *для некоторого блока* $\tilde{B}$ *группы* $\tilde{G}$.

Доказательство. (i)⇒(ii). Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$, накрываемый блоком B, C — сопряженный класс группы G. Если $C\not\subseteq\tilde{G}$, то $(\lambda_{\tilde{B}})^G(\bar{\hat{C}})=0=\lambda_B(\bar{\hat{C}})$. Если $C\subseteq\tilde{G}$, то, в силу (3.4), $\lambda_{\tilde{B}}(\bar{\hat{C}})=L_B(\bar{\hat{C}})$. Следовательно, по (3.1), $(\lambda_{\tilde{B}})^G=\lambda_B$.

(ii)⇒(iii). Очевидно.

(iii)⇒(i). Если C — сопряженный класс группы G и $C\not\subseteq\tilde{G}$, то $\lambda_B(\bar{\hat{C}})=(\lambda_{\tilde{B}})^G(\bar{\hat{C}})=0$, и потому B регулярен. □

Лемма 3.7. *Пусть* B — *регулярный блок группы* G, $\tilde{B}$ — *блок группы* $\tilde{G}$. *Блок* B *накрывает* $\tilde{B}$ *тогда и только тогда, когда* $B=\tilde{B}^G$.

Доказательство. Если B накрывает $\tilde{B}$, то $B=\tilde{B}^G$ по (3.6). Если $B=\tilde{B}^G$, то, в силу (3.1), $\lambda_{\tilde{B}}(a)=(\lambda_{\tilde{B}})^G(a)$ для всех $a\in\overline{Z(R;G:G)}\cap\bar{R}[\tilde{G}]$. Поэтому, по (3.4), B накрывает $\tilde{B}$. □

Лемма 3.8. *Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$. Регулярный блок группы G существует тогда и только тогда, когда $\tilde{B}^G$ определен. В этом случае $\tilde{B}^G$ является единственным блоком группы G, который регулярен и накрывает $\tilde{B}$.*

Доказательство. Если $\tilde{B}^G$ определен, то, по (3.6), $\tilde{B}^G$ регулярен, а по (3.7), $\tilde{B}^G$ накрывает $\tilde{B}$. Обратное утверждение следует из (3.7), а последнее — очевидно. □

Лемма 3.9. *Пусть B — блок группы G с дефектной группой D. Если $C_G(D)\subseteq\tilde{G}$, то B регулярен.*

Доказательство. Если $\lambda_B(\hat{C})\neq 0$ для некоторого сопряженного класса группы G, то, по (III.6.10), $D\subseteq C_G(z)$ для некоторого $z\in C$. Значит, $z\in C_G(D)\subseteq\tilde{G}$, и потому $C\subseteq\tilde{G}$. □

Лемма 3.10. *Пусть P — такая p-группа, что $P\lhd G$ и $C_G(P)\subseteq\tilde{G}$. Тогда каждый блок B группы G регулярен относительно G. Для каждого блока $\tilde{B}$ группы $\tilde{G}$ блок $\tilde{B}^G$ определен и является единственным блоком, накрывающим $\tilde{B}$.*

Доказательство. Пусть B — блок группы G, D — дефектная группа блока B. Согласно (III.6.9), $P\subseteq D$. Значит, $C_G(D)\subseteq C_G(P)\subseteq\tilde{G}$ и B регулярен, ввиду (3.9). Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$. Согласно (3.8), $\tilde{B}^G$ определен и является единственным блоком, накрывающим $\tilde{B}$. □

Следствие 3.11. *Пусть P — такая p-группа, что $C_G(P)\subseteq P\lhd G$. Тогда главный блок является единственным блоком группы G.*

Доказательство. В силу (3.10), при $\tilde{G}=P$ $\tilde{B}^G$ является единственным блоком группы G, где $\tilde{B}$ — единственный блок группы $\tilde{G}$. Таким образом, группа G имеет ровно один блок, который обязан быть главным. □

Теорема 3.12 (Фонг [1961]). *Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$, B_1, B_2, ... — все блоки группы G, накрывающие $\tilde{B}$, и пусть $B=B_j$ для некоторого j. Пусть, далее, e — такой примитивный центральный идемпотент алгебры $R[G]$, что $B_i=B(e_i)$ и $e=\sum e_i$ для каждого i. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *B слабо регулярен;*

(ii) *дефектная группа любого блока B_i сопряжена подгруппе дефектной группы блока B;*

(iii) *дефект любого блока B_i не больше дефекта блока B;*

(iv) *пусть $e=\sum a_C\hat{C}$, где C пробегает все сопряженные классы группы G, $a_C\in R$; существует такой сопряженный класс C, состоящий из p'-элементов, $C\subseteq\tilde{G}$, $\bar{a}_C\neq 0$, $\lambda_B(\bar{\hat{C}})\neq 0$, что дефект блока B совпадает с дефектом класса C.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Существует сопряженный класс C группы G с $C\subseteq\tilde{G}$ и $\lambda_B(\bar{\hat{C}})\neq 0$, такой, что B и C обладают общей дефектной группой. В силу (3.4), $\lambda_{B_i}(\bar{\hat{C}})=\lambda_{\tilde{B}}(\bar{\hat{C}})=\lambda_B(\bar{\hat{C}})\neq 0$, и потому, по

(III.6.10), дефектная группа блока B_i является подгруппой подходящей дефектной группы блока B.

(i)⇒(iii). Тривиально.

(iii)⇒(i). Так как $\lambda_B(\bar{e})=1$, то $\bar{a}_C\lambda_B(\bar{\hat{C}})\neq 0$ для подходящего C. В силу (IV.7.2), C состоит из p'-элементов. В силу (3.3), $C\subseteq\tilde{G}$. Если $e_i=\sum a_{i,C}\hat{C}$ для любого i, то для некоторого i имеем $\bar{a}_{i,C}\neq 0$. Значит, по (IV.7.3), дефект C равен дефекту B_i и потому не больше дефекта B. Поскольку $\lambda_B(\bar{\hat{C}})\neq 0$, из (III.6.10) следует, что B и C обладают общей дефектной группой.

(iv)⇒(iii). Тривиально. □

Следствие 3.13. *Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Существует слабо регулярный блок B группы G, накрывающий $\tilde{B}$.*

(ii) *Пусть $\hat{B}$ — блок группы $T(\tilde{B})$, накрывающий $\tilde{B}$. Блок $\hat{B}$ слабо регулярен тогда и только тогда, когда $\hat{B}^G$ слабо регулярен.*

Доказательство. (i) Выберем блок B наибольшего дефекта среди тех, которые накрывают $\tilde{B}$. В силу (3.12), B слабо регулярный.

(ii) В силу (2.5), $\hat{B}$ и $\hat{B}^G$ имеют равный дефект. Значит, $\hat{B}$ обладает максимальным дефектом среди блоков $\hat{B}_i$ группы $T(\tilde{B})$, накрывающих $\tilde{B}$, тогда и только тогда, когда $\hat{B}^G$ имеет наибольший дефект среди всех блоков $\hat{B}_i^G$. Результат теперь вытекает из (3.12). □

Теорема 3.14 (Фонг [1961]). *Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$, B — слабо регулярный блок группы G, накрывающий $\tilde{B}$. Тогда существует такая дефектная группа D блока B, что $D\subseteq T(\tilde{B})$. Для любой дефектной группы D блока B, лежащей в $T(\tilde{B})$, $|T(\tilde{B}):D\tilde{G}|\not\equiv 0 \pmod p$ и $D\cap\tilde{G}$ является дефектной группой $\tilde{B}$.*

Доказательство. В силу (2.6), $T(\tilde{B})$ содержит дефектную группу D блока B. Значит, по (2.5) и (3.13) (ii), можно считать, что $G=T(\tilde{B})$.

Пусть $\tilde{e}$ — примитивный центральный идемпотент алгебры $R[\tilde{G}]$, для которого $\tilde{B}=B(\tilde{e})$. Так как $G=T(\tilde{B})$, то $\tilde{e}=\sum a_C\hat{C}$, где $a_C\in R$, C пробегает сопряженные классы группы G. В силу (3.3) и (3.12) (iv), существует сопряженный класс C группы G, $C\subseteq\tilde{G}$, $\bar{a}_C\neq 0$, $\lambda_B(\hat{C})\neq 0$, такой, что D является дефектной группой класса C. Пусть $z\in C$, причем $D\subseteq C_G(z)$. Обозначим через L такой сопряженный класс группы $\tilde{G}$, что $z\in L$. Тогда $C=\bigcup_x L^x$, где x пробегает трансверсаль подгруппы $N_G(L)$ в G. В силу (3.4),

$$\lambda_B(\bar{\hat{C}})=\lambda_{\tilde{B}}(\bar{\hat{C}})=\sum_x\lambda_{\tilde{B}}(\bar{\hat{L}}^x)=\sum_x\lambda_B^{x^{-1}}(\bar{\hat{L}}).$$

Поскольку $T(\tilde{B})=G$,

$$|T(\tilde{B}):N_G(L)|\lambda_{\tilde{B}}(\bar{\hat{L}})=\lambda_B(\bar{\hat{C}})\neq 0.$$

Значит, $|T(\tilde{B}):N_G(L)|\not\equiv 0 \pmod p$ и $\lambda_{\tilde{B}}(\bar{\hat{L}})\neq 0$. Поскольку $N_G(L)=C_G(z)\tilde{G}$ и D является S_p-подгруппой группы $C_G(z)$, $|T(\tilde{B}):D\tilde{G}|\not\equiv 0 \pmod p$.

Поскольку $\bar{a}_C\lambda_{\tilde{B}}(\bar{\hat{L}})=0$, из (IV.7.3) следует, что $\tilde{B}$ и L имеют общую дефектную группу. Очевидно, $D\cap\tilde{G}$ является S_p-подгруппой группы $C_{\tilde{G}}(z)$ и потому является дефектной группой класса L. □

Лемма 3.15. *Пусть B — слабо регулярный блок группы G, $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$, накрываемый B. Пусть χ_s лежит в B и имеет высоту 0, $\tilde{\chi}_t$ — такая конституэнта характера $(\chi_s)_{\tilde{G}}$, что $\tilde{\chi}_t \in \tilde{B}$. Тогда индекс ветвления характера χ_s не делится на p, $\tilde{\chi}_t$ имеет высоту 0 в $\tilde{B}$ и $|T(\tilde{B}):T(\tilde{\chi}_t)| \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

Доказательство. В силу (2.5) и (3.13) можно предполагать, что $G=T(\tilde{B})$. Пусть D — дефектная группа блока B. Положим $d=\mathrm{v}(|D|)$ и $\tilde{d}=\mathrm{v}(|D\cap\tilde{G}|)$. Согласно (3.14), $\tilde{d}$ является дефектом $\tilde{B}$. В силу (III.2.12), $(\chi_s)_{\tilde{G}}=e\sum_z \tilde{\chi}_t^z$, где $\{z\}$ — трансверсаль $T(\tilde{\chi}_t)$ в G, e — индекс ветвления характера χ_s.

Поскольку $\tilde{G}D/\tilde{G}\cong D/\tilde{G}\cap D$, из (3.14) следует, что

$$\mathrm{v}(|G|)-d=\mathrm{v}(|\tilde{G}D:D|)=\mathrm{v}(|\tilde{G}:\tilde{G}\cap D|)=\mathrm{v}(|\tilde{G}|)-\tilde{d}.$$

Значит, $\mathrm{v}(\chi_s(1))=\mathrm{v}(|\tilde{G}|)-\tilde{d}$. Так как $\mathrm{v}(\tilde{\chi}_t(1))\geqslant\mathrm{v}(|\tilde{G}|)-\tilde{d}$ и $\chi_s(1)=e|G:T(\tilde{\chi}_t)|\tilde{\chi}_t(1)$, то $e|G:T(\tilde{\chi}_t)|\not\equiv 0 \pmod{p}$ и $\tilde{\chi}_t$ является характером высоты 0 из $\tilde{B}$. □

Следствие 3.16. *Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $\tilde{G}$. Существует такой характер $\tilde{\chi}_t \in \tilde{B}$ высоты 0, что $T(\tilde{\chi}_t)$ содержит S_p-подгруппу $T(\tilde{B})$.*

Доказательство. В силу (3.8), существует слабо регулярный блок B группы G, накрывающий $\tilde{B}$. Пусть высота χ_s в B равна 0. Согласно (2.3), некоторая конституэнта $\tilde{\chi}_t$ характера $(\chi_s)_{\tilde{G}}$ лежит в $\tilde{B}$. Результат теперь следует из (3.15). □

§ 4. Блоки и факторгруппы

В этом параграфе будем применять обозначения предыдущих двух. Далее, $G^0=G/\tilde{G}$ и, как правило, верхний индекс ^{0} будет закрепляться за величинами, связанными с G^0. Каждый $R[G^0]$-модуль обычным образом можно рассматривать как $R[G]$-модуль. Аналогично, каждый характер или характер Брауэра группы G^0 можно рассматривать как характер или характер Брауэра группы G.

Лемма 4.1. *Пусть B^0 — блок группы G^0. Тогда существует блок группы G, содержащий B^0 [1] и накрывающий главный блок группы $\tilde{G}$. Обратно, если B — блок группы G, накрывающий главный блок группы $\tilde{G}$, то B содержит блок группы G^0.*

Доказательство. Два $R[G^0]$-модуля из B^0 связаны последовательностью $R[G^0]$-модулей. Значит, они также связаны как $R[G]$-модули и потому лежат в общем блоке B группы G. Следовательно, $B^0\subseteq B$. Если $\chi_s\in B^0\subseteq B$, то главный характер группы $\tilde{G}$ является конституэнтой характера $(\chi_s)_{\tilde{G}}$. Таким образом, в силу (2.3), B накрывает главный блок группы $\tilde{G}$.

Обратно, предположим, что B накрывает главный блок группы $\tilde{G}$. Согласно (2.3), существует такой $\chi_s\in B$, что $(\chi_s)_{\tilde{G}}$ содержит главный характер группы $\tilde{G}$ в качестве конституэнты. Следовательно, по

[1] Имеется в виду, что $R[G^0]$-модуль V принадлежит блоку группы G, если V рассматривать как $R[G]$-модуль.— *Примеч. пер.*

(III.2.12), $\tilde{G}$ лежит в ядре χ_s. Пусть B^0 — блок группы G, причем $\chi_s \in B^0$. Тогда $B^0 \subseteq B$ ввиду предыдущего абзаца. □

Лемма 4.2. *Пусть B^0 — блок группы G^0, B — блок группы G, причем $B^0 \subseteq B$. Обозначим через D дефектную группу блока B. Тогда D содержит S_p-подгруппу группы $\tilde{G}$ и $D^0 = D\tilde{G}/\tilde{G}$ содержит дефектную группу блока B^0. В частности, если d^0 — дефект блока B^0, а d — дефект блока B, то $d^0 \leqslant d - \mathrm{v}(|G|)$. Кроме того, если B^0 содержит неприводимый характер или неприводимый характер Брауэра высоты 0 из B, то $D^0 = D\tilde{G}/\tilde{G}$ является дефектной группой блока B^0.*

Доказательство. Пусть $\tilde{P}$ — некоторая S_p-подгруппа группы $\tilde{G}$. P — такая p-группа, что $\tilde{P} \subseteq P$ и $P^0 = P\tilde{G}/\tilde{G}$ является дефектной группой блока B^0. Пусть V является R-свободным $R[G^0]$-модулем с неприводимым характером высоты 0 из B^0. Тогда P^0 — вертекс модуля V. Значит, V, рассматриваемый как $R[G]$-модуль, является $R[P]$-проективным. Тогда, по (IV.2.2), P является вертексом модуля V. Следовательно, $P \subseteq_G D$. Если $\mathrm{v}(\varphi_i(1))$ или $\mathrm{v}(\chi_s(1))$ равно $\mathrm{v}(|G|) - d$, то $\mathrm{v}(|G|) - d \geqslant \mathrm{v}(|G:\tilde{G}|) - d$, и потому $d^0 \geqslant d - \mathrm{v}(|\tilde{G}|)$. Тогда $d^0 = d - \mathrm{v}(|\tilde{G}|)$ по первой части утверждения. □

Лемма 4.3. *Пусть $\tilde{G}$ есть p'-группа, $B_1, \ldots, B_m$ — все блоки группы G, содержащие $\tilde{G}$ в своем ядре, D_j — дефектная группа блока B_j, $j = 1, \ldots, m$. Пусть $B_1^0, \ldots, B_n^0$ — все блоки группы G^0. Тогда $m = n$ и, после подходящей перенумерации, $B_j = B_j^0$ для всех j. Кроме того, $D_j^0 = D_j\tilde{G}/\tilde{G}$ является дефектной группой блока B_j^0.*

Доказательство. Поскольку $\tilde{G}$ является p'-группой, главный характер является единственным неприводимым характером в главном блоке группы $\tilde{G}$. Значит, блок группы G накрывает главный блок группы $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{G}$ лежит в его ядре. В силу (IV.4.11), любые два модуля из B_j связаны последовательностью $R[G^0]$-модулей, и потому B_j является блоком группы G^0. Поэтому, ввиду (4.1), $m = n$ и $B_j = B_j^0$ после подходящей перенумерации. Поскольку $\tilde{G}$ является p'-группой, то B_j и B_j^0 имеют общую дефектную группу[1] и поэтому, по (4.2), D_j^0 является дефектной группой B_j^0. □

Лемма 4.4. *Пусть $\tilde{G}$ есть p-группа, B — блок группы G, D — дефектная группа блока B. Тогда $\tilde{G} \subseteq D$ и существует такой блок B^0 группы G^0, что $B^0 \subseteq B$ и $D^0 = D/\tilde{G}$ является дефектной группой блока B^0.*

Доказательство. Пусть $d = \mathrm{v}(|D|)$. Выберем $\varphi_i \in B$ так, чтобы $\mathrm{v}(\varphi_i(1)) = \mathrm{v}(|G|) - d$. В силу (III.2.13), $\tilde{G}$ лежит в ядре φ_i. Пусть B^0 — такой блок группы G^0, что $\varphi_i \in B^0$. В силу (4.1), $B^0 \subseteq B$. Пусть d^0 — дефект B^0. Результат теперь следует из (4.2). □

Лемма 4.5. *Пусть $\tilde{G}$ является p-группой, централизующей все p'-элементы группы G. Включение $B^0 \subseteq B$ задает биекцию между множеством всех блоков группы G^0 и множеством всех блоков группы G. Если D — дефектная группа блока B группы G, то*

[1] Точнее, B_j и B_j^0 имеют изоморфные дефектные группы.— *Примеч. пер.*

$D^0 = D\tilde{G}/\tilde{G}$ является дефектной группой блока B^0 группы G^0, где $B^0 \subseteq B$.

Доказательство. Ввиду (4.1) и (4.4), достаточно показать, что если B — блок группы G, а B_1^0, B_2^0 — блоки группы G^0, причем $B_1^0 \subseteq B$ и $B_2^0 \subseteq B$, то $B_1^0 = B_2^0$.

Пусть $\chi_s \in B_1^0$ и $\chi_t \in B_2^0$. Если x — некоторый p'-элемент из G, то $\tilde{G} \subseteq G_G(x)$. Значит, $C_G(x)/\tilde{G} = C_{G^0}(x^0)$, где x^0 — образ x в G^0. Поскольку χ_s, $\chi_s \in B$,

$$\frac{|G^0|}{|C_{G^0}(x^0)|}\frac{\chi_s(x)}{\chi_s(1)} \equiv \omega_s(x) \equiv \omega_t(x) \equiv \frac{|G^0|}{|C_{G^0}(x)|}\frac{\chi_t(x)}{\chi_t(1)} \pmod{\pi}$$

для всех p'-элементов x из G. Следовательно, по (IV.4.3) и (IV.4.8) $B_1^0 = B_2^0$. □

Следствие 4.6. *Пусть D — некоторая p-группа, $G = DC_G(D)$, B — блок группы G с дефектной группой D. Тогда B имеет ровно один неприводимый характер χ_s, ядро которого содержит D, и B содержит ровно один неприводимый характер Брауэра φ_i. Кроме того, $\chi_s(x) = \varphi_i(x)$ для всех p'-элементов x из G, χ_s имеет высоту 0 и $\Phi_i(x) = |D|\varphi_i(x)$ для всех p'-элементов x из G.*

Доказательство. В силу (4.5), существует ровно один блок B^0 группы G/D такой, что $B^0 \subseteq B$. Кроме того, B^0 является блоком дефекта 0. Пусть χ_s (соответственно φ_i) — единственный неприводимый характер (соответственно единственный неприводимый характер Брауэра) из B^0. Тогда $\chi_s(x) = \varphi_i(x)$ для всех p'-элементов из G. Поскольку каждый неприводимый характер Брауэра из B содержит D в своем ядре, φ_i является единственным неприводимым характером Брауэра из B. Тогда, по (4.5), χ_s имеет высоту 0 в B. Поскольку (c_{ij}) является матрицей Картана блока B, из (IV.4.16) (i) следует равенство $c_{ii} = |D|$, что доказывает последнее утверждение. □

Если $G = DC_G(D)$ для некоторой p-группы D и B — блок группы G с дефектной группой D, то неприводимый характер χ_s, существование которого утверждает (4.6), называется *каноническим характером блока B*.

Теорема 4.7. *Предположим, что $G = DC_G(D)$ для некоторой p-группы D. Пусть B — блок группы G с дефектной группой D, $\chi = \chi_s$ — канонический характер блока B. Обозначим через $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ все неприводимые характеры группы D. Определим θ_j следующим образом:*

$$\theta_j(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin D, \\ \zeta_i(y)\chi(x), & \text{если } y \in D, \end{cases}$$

где y есть p-часть элемента z, а x — его p'-часть. Тогда $\{\theta_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ — множество всех неприводимых характеров из B.

Доказательство. Если $z \in G$, то $\zeta_j^z = \zeta_j$ для всех j. Значит, если $\chi_t \in B$, то, по (III.2.12), $(\chi_t)_D = e\zeta_j$ для подходящего j и подходящего натурального e.

Пусть $z \in G$, y и x — соответственно p-часть и p'-часть элемента z. Если $y \notin D$, то, по (III.6.8) и (IV.2.4), $\chi_t(z)=0$. Предположим, что $y \in D$ и $H=D\times\langle x\rangle$. Тогда $(\chi_t)_H=\zeta_j\alpha$ для некоторого характера α группы $\langle x\rangle$. Значит, $\chi_t(xy)=\zeta_j(y)\alpha(x)$ и

$$\chi_t(xy)=\frac{\zeta_j(y)}{\zeta_j(1)}\chi_t(x)=\frac{\zeta_j(y)}{\zeta_j(1)}d_{ti}\chi(x)=\frac{d_{ti}}{\zeta_j(1)}\quad\theta_j(xy),$$

где $\varphi_i \in B$. Следовательно, $\chi_t=[d_{ti}/\zeta_j(1)]\theta_j$.

Пусть A — множество всех p'-элементов группы G, A^0 — образ A в $G^0=G/D$. Поскольку χ является характером группы G^0, обращающимся в нуль на всех p-сингулярных элементах, то

$$\|\theta_j\|^2=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in D}|\zeta_j(y)|^2\sum_{x\in A}|\chi(x)|^2=\frac{|D|}{|G|}\sum_{x\in A^0}|\chi(x)|^2=\frac{1}{|G^0|}\sum_{z\in G^0}|\chi(z)|^2=1.$$

Значит,

$$1=\|\chi_t\|^2=\frac{d_{ti}^2}{\zeta_j(1)^2}\|\theta_j\|^2=\frac{d_{ti}^2}{\zeta_j(1)^2}.$$

Следовательно, $d_{ti}=\zeta_j(1)$, и потому $\chi_t=\theta_j$.

Поэтому существует такое подмножество S множества $\{1, ..., n\}$, что $\{\theta_j \mid j\in S\}$ — множество всех неприводимых характеров из B. Если $\chi_t=\theta_j$, то $d_{ti}=\zeta_j(1)$. Таким образом,

$$|D|=c_{ii}=\sum_t d_{ti}^2=\sum_{j\in S}\zeta_j(1)^2.$$

Отсюда следует, что $S=\{1, ..., n\}$. □

§ 5. Свойства соответствия Брауэра

Результаты настоящего параграфа принадлежат Брауэру [1967]. Альтернативный подход предложен Пассманом [1969]. См. также Брауэр [1971а], [1974а]. Изложение, которого мы здесь придерживаемся, является модификацией этих двух методов. Недавно Алперин и Бруё [1979], Бруё [1980] изучили соответствие Брауэра в более общей ситуации. Их подход обобщает и дает альтернативную трактовку первой основной теоремы о блоках и большей части материала настоящего и последующих параграфов.

Лемма 5.1. *Пусть подгруппа $P\subseteq G$ является p-группой, $N=N_G(P)$ и $H\lhd N$, причем $C_G(P)\subseteq H$. Если B_0 — блок группы H, то B_0^G определен.*

Доказательство. В силу (3.10), B_0^N определен. Значит, по (III.9.2) и (III.9.4), $B_0^G=(B_0^N)^G$ определен. □

Лемма 5.2. *Пусть подгруппа $D\subseteq G$ является p-группой, $N=N_G(D)$, $H\lhd N$, причем $C_G(D)\subseteq H$. Отображение, переводящее B_0 в B_0^G, задает биекцию между блоками группы G с дефектной группой D и представителями N-сопряженных классов блоков группы H, которые удовлетворяют следующим условиям:*

(i) $D \cap H$ — *дефектная группа блока* B_0;

(ii) $\nu(|DH|) \geqslant \nu(|T(B_0)|)$, *где* $T(B_0)$ — *группа инерции блока* B_0 *в* N.

Доказательство. В силу (III.9.7), можно предполагать, что $N = G$. Ввиду (2.3) и (3.10), отображение, переводящее B_0 в B_0^N, задает биекцию между блоками B группы N и представителями B_0 N-сопряженных классов блоков группы H.

Если $B = B_0^G$ имеет дефектную группу D, то, по (3.14), $D \cap H$ является дефектной группой блока B_0 и $\nu(|DH|) = \nu(|T(B_0)|)$.

Предположим, что B_0 удовлетворяет (i) и (ii). Пусть D_1 — дефектная группа блока B_0^G. В силу (3.14) и (i), $D \cap H$ и $D_1 \cap H$ обе являются дефектными группами блока B_0. Значит, $|D \cap H| = |D_1 \cap H|$. Согласно (3.14) и (ii), $\nu(|DH|) \geqslant \nu(|T(B_0)|) = \nu(|DH|)$. Поэтому $|D| \geqslant |D_1|$. Поскольку $D \lhd N$, то $D \subseteq D_1$. Следовательно, $D = D_1$. □

Пусть D является p-группой, $D \subseteq G$. Пара (D, B) называется *блочной парой* в G, если B — блок группы $DC_G(D)$ с дефектной группой D.

Если (D, B) — блочная пара в G, то, в силу (III.9.4), блок B^A определен для любой такой группы A, что $DC_G(D) \subseteq A \subseteq G$.

Пусть (D, B) и (D^*, B^*) — блочные пары в G.

Говорят, что (D^*, B^*) *слабо расширяет* (D, B), если $D \lhd D^*$, $D^* \cap C_G(D) \subseteq D$ и $B^y = B$ для всех $y \in D^*$.

Говорят, что (D^*, B^*) *расширяет* (D, B), если $D \lhd D^*$ и $B^H = B^{*H}$, где $H = D^* C_G(D)$.

Говорят, что (D^*, B^*) *собственно расширяет* (D, B), если (D^*, B^*) расширяет (D, B) и $D \neq D^*$.

Лемма 5.3. *Пусть* (D^*, B^*) — *блочная пара, расширяющая* (D, B), $H = D^* C_G(D)$. *Тогда* (D^*, B^*) *слабо расширяет* (D, B) *и* D^* *является дефектной группой блока* $B^H = B^{*H}$.

Доказательство. Пусть D_0 — дефектная группа блока B^{*H}, причем $D^* \subseteq D_0$. В силу (3.14), $D_0 C_G(D) = H$ и $D_0 \cap DC_G(D) = D$. Значит, $D_0 \cap DC_G(D) = D^* \cap DC_G(D)$ и $D_0/D \cong H/DC_G(D) \cong D^*/D$. Следовательно, $|D^*| = |D_0|$, и поэтому $D^* = D_0$. В силу (3.10), (3.14), $T(B) = H$. Значит, (D^*, B^*) слабо расширяет (D, B). □

Теорема 5.4 (Брауэр). (Третья основная теорема о блоках.)

(i) *Пусть* G_0 — *подгруппа группы* G, B_0 — *блок группы* G_0 *с дефектной группой* D. *Если* $C_G(D) \subseteq G_0$, *то существует такая блочная пара* (D, B) *в* G, *что* $B^{G_0} = B_0$.

(ii) *Пусть* (D, B) — *блочная пара в* G, D_0 — *дефектная группа блока* B^G. *Тогда* $|D| \leqslant |D_0|$. *Кроме того,* $|D| < |D_0|$ *тогда и только тогда, когда существует блочная пара в* G, *которая собственно расширяет* (D, B).

(iii) *Пусть* (D^*, B^*) — *блочная пара в* G, *которая слабо расширяет блочную пару* (D, B) *в* G. *Пусть* ζ, ζ^* — *соответственно канонические характеры блоков* B *и* B^*. *Тогда* $\zeta^*_{C_G(D^*)}$ *неприводим. Кроме того,* (D^*, B^*) *расширяет* (D, B) *тогда и только тогда, когда кратность* $\zeta^*_{C_G(D^*)}$ *как конституэнты* $\zeta_{C_G(D^*)}$ *не делится на* p.

Доказательство. (i) Поскольку $D=D\cap DC_G(D)$, утверждение следует из (5.2).

(ii) В силу (III.9.6), $|D|\leqslant|D_0|$.

Предположим, что (D^*, B^*) — блочная пара, собственно расширяющая (D, B). Положим $H=D^*C_G(D)$. Тогда $B^G=(B^H)^G=(B^{*H})^G$, и потому $|D|<|D^*|\leqslant|D_0|$, согласно (III.9.6).

Обратно, предположим, что $|D|<|D_0|$. Пусть T — группа инерции блока B в $N_G(D)$, P — ее S_p-подгруппа, $H=PC_G(D)$. Пусть D^* — дефектная группа блока B^H. В силу (3.14), $H=D^*C_G(D)$ и $D^*\cap\cap DC_G(D)=D$. Согласно (i), существует такая блочная пара (D^*, B^*) в G, что $B^{*H}=B^H$. Значит, (D^*, B^*) расширяет (D, B). В силу (5.2), $\nu(|H|)=\nu(|T|)>\nu(|DC_G(D)|)$. Следовательно, $D\neq D^*$, и поэтому (D^*, B^*) собственно расширяет (D, B).

(iii) Пусть A — группа, причем $C_G(D^*)\subseteq A\lhd D^*C_G(D^*)$. Тогда $D^*C_G(D^*)/D^*\cong A/A\cap D^*$. Поскольку D^* лежит в ядре характера ζ^*, характер ζ_A^* неприводим. В частности, $\zeta^*_{C_G(D^*)}$ неприводим. Пусть θ — неприводимый характер группы A, который содержит $D^*\cap A$ в своем ядре и такой, что $\zeta^*_{C_G(D^*)}$ является конституэнтой в $\theta_{C_G(D^*)}$. Тогда $A=C_G(D^*)(D^*\cap A)$. Следовательно, ζ_A^* является конституэнтой характера θ, так как $D^*\cap A$ лежит в ядре каждого из характеров θ и ζ_A^*. Поэтому ζ_A^* — единственный неприводимый характер группы A, содержащий $D^*\cap A$ в своем ядре и для которого $\zeta^*_{C_G(D^*)}$ — конституэнта его ограничения на $C_G(D^*)$. Поскольку D лежит в ядре ζ, группа D лежит в ядре каждой неприводимой конституэнты характера $\zeta_{DC_G(D^*)}$. Поэтому, если a — кратность характера $\zeta^*_{C_G(D^*)}$ как конституэнты характера $\zeta_{C_G(D^*)}$, то из (III.2.5) следует, что

$$a=(\zeta_{C_G(D^*)}, \zeta^*_{C_G(D^*)})=(\zeta_{DC_G(D^*)}, \zeta^*_{DC_G(D^*)})=(\zeta, \{\zeta^*_{DC_G(D^*)}\}^{DC_G(D)}).$$

Поскольку $D^*C_G(D^*)\cap DC_G(D)=DC_G(D^*)$, то из (II.2.9) вытекает, что

$$a=(\zeta, \{\zeta^*_{DC_G(D^*)}\}^{DC_G(D)})=(\zeta, \{\zeta^{*H}\}_{DC_G(D)}),$$

где $H=D^*C_G(D)$.

Пусть $\zeta^{*H}=\theta+\theta_0$, где $\theta\in B^H$, θ_0 — сумма неприводимых характеров, ни один из которых не лежит в B^H. Тогда $((\theta_0)_{DC_G(D)}, \zeta)=0$. Так как D лежит в ядре θ, то ζ является единственным неприводимым характером группы $DC_G(D)$, который есть конституэнта $\theta_{DC_G(D)}$. Значит,

$$a=(\zeta, \{\zeta^{*H}\}_{DC_G(D)})=(\zeta, \theta_{DC_G(D)}).$$

Поэтому $\theta_{DC_G(D)}=a\zeta$. Следовательно, $\theta(1)=a\zeta(1)$. Однако

$$\nu(\zeta(1))=\nu(|DC_G(D):D|)=\nu(|H:D^*|)=\nu(|H:D^*C_G(D^*)|\zeta^*(1))=\nu(\zeta^*(1)).$$

Следовательно, $\nu(\theta(1))=\nu(a)+\nu(\zeta^{*H}(1))$, и, значит, из (1.3) следует, что $B^H=B^{*H}$ тогда и только тогда, когда $\nu(a)=0$. □

§ 6. Блоки и их ростки

Пусть B — блок группы G. Предположим, что $B=B_0^G$ для некоторого блока B_0 подгруппы G_0 группы G. В настоящем параграфе изучаются связи между B и B_0. Часть этих результатов важна в приложениях к вопросам о строении групп. Доказательства опираются на три основные теоремы о блоках. Три первых результата принадлежат Брауэру [1967]. Результаты остальной части параграфа связаны с работой Рейнольдса [1970].

Пусть B — блок с дефектной группой D. В силу (III.9.7), существует такой единственный блок B_1 группы $N_G(D)$, что $B_1^G=B$. Блок B_1 называется *ростком блока B относительно D*. Если D определяется из контекста, то B_1 называется просто *ростком блока B*.

Лемма 6.1. *Пусть B_0 — блок подгруппы G_0 группы G, D_0 — дефектная группа блока B_0. Предположим, что $C_G(D_0)\subseteq G_0$. Тогда $B=B_0^G$ определен и*

$$Z(D)\subseteq Z(D_0)\subseteq D_0\subseteq D$$

для подходящей дефектной группы D блока B. В частности, если дефектная группа блока B абелева, то D_0 — дефектная группа блока B.

Доказательство. В силу (5.4) (i), $B=B_0^G$ определен. Пусть d — дефект блока B и $d_0=\nu(|D_0|)$ — дефект B_0. Доказательство проведем индукцией по $d-d_0$. Если $d-d_0=0$, то, в силу (III.9.6), D_0 является дефектной группой блока B. Отсюда следует результат, если положить $D=D_0$. В силу третьей основной теоремы о блоках (5.4) (i), достаточно взять $G_0=D_0C_G(D_0)$.

Предположим, что $d-d_0>0$. Согласно (5.4) (ii), существует блочная пара (D^*, B^*) в G, которая собственно расширяет (D_0, B_0). Поскольку $B^{*G}=B_0^G=B$, индукция приводит к существованию такой дефектной группы D блока B, что

$$Z(D)\subseteq Z(D^*)\subseteq C_{D^*}(D_0)=Z(D_0)\subseteq D_0\subseteq D^*\subseteq D.$$

Это доказывает первое утверждение. Второе является непосредственным следствием первого. □

Более прямое доказательство следующего результата можно найти у Брауэра [1964a, Theorem 3]. См. также Брауэр [1971a], [1971b]; Осима [1964]; Гамерник и Михлер [1973]; Гамерник [1973].

Теорема 6.2. *Пусть B_0 — блок подгруппы G_0 группы G, D_0 — дефектная группа блока B_0. Предположим, что $C_G(D_0)\subseteq G_0$. Блок B_0 является главным блоком группы G_0 тогда и только тогда, когда B_0^G — главный блок группы G.*

Доказательство. В силу третьей основной теоремы о блоках (5.4) (i), $B_0=B_1^G$ для подходящего блока B_1 группы $D_0C_G(D_0)$. Следовательно, результат достаточно доказать лишь в случае $G_0=D_0C_G(D_0)$.

Пусть для любой подгруппы A группы G $B_1(A)$ — главный блок группы A, $\zeta_1(A)$ — главный характер группы A.

Пусть D — дефектная группа блока B_0^G, P — такая S_p-подгруппа группы G, что $D \subseteq P$. Положим $d_0 = \nu(|D_0|)$ и $d = \nu(|D|)$. Доказательство проведем индукцией по $d - d_0$.

Предположим, что $d - d_0 = 0$. В силу (III.9.6), можно предполагать, что $D = D_0$. Согласно (3.10), $B_0 = B_1(D_0 C_G(D_0))$ тогда и только тогда, когда $B_0^N = B_1(N)$, где $N = N_G(D_0)$.

Рассмотрим R-свободный $R[G]$-модуль V с характером $\zeta_1(G)$. Обозначим через f соответствие Грина относительно $(G, P, N_G(P))$. Тогда характером $f(V)$ является $\zeta_1(N_G(P))$, и, по (III.7.7) и (III.9.7), если B — блок группы $N_G(P)$, то $B_1(G) = B^G$ тогда и только тогда, когда $B = B_1(N_G(P))$.

Предположим сначала, что $B_0^G = B_1(G)$. Тогда $D_0 = D = P$, и потому $B_0^N = B_1(N)$. Обратно, пусть $B_0^N = B_1(N)$. Тогда D_0 является S_p-подгруппой группы N, и потому D_0 является S_p-подгруппой группы G. Значит, $D_0 = D = P$ и $B_0^G = (B_0^N)^G = B_1(G)$.

Предположим теперь, что $d - d_0 > 0$. В силу (5.4) (ii), существует блочная пара (D^*, B^*) в G, собственно расширяющая (D_0, B_0).

Пусть $B_0^G = B_1(G)$. Тогда $B^{*G} = B_1(G)$, и поэтому, по индукции, $B^* = B_1(D^* C_G(D^*))$. Следовательно, по индукции, $B_0^H = B^{*H} = B_1(H)$, где $H = D^* C_G(D)$. В силу (3.7), B_0^H накрывает B_0, и потому $B_0 = B_1(D_0 C_G(D_0))$.

Обратно, предположим, что $B_0 = B_1(D_0 C_G(D_0))$. Тогда $\zeta_1(D_0 C_G(D_0))$ является каноническим характером блока B_0. Значит, в силу (5.4) (iii), $\zeta_1(D^* C_G(D^*))$ — канонический характер блока B^*. Поэтому $B^* = B_1(D^* C_G(D^*))$ и, по индукции, $B_0^G = B^{*G} = B_1(G)$. □

Следствие 6.3. *Пусть y — такой p-элемент из G, что $C_G(y)$ обладает нормальным p-дополнением. Если $\chi = \chi_i$ лежит в главном блоке группы G, то $\chi(yx) = \chi(y)$ для каждого p'-элемента x из $C_G(y)$.*

Доказательство. В силу (IV.6.1) и (6.2). $\chi(yx) = \sum_j d_{ij}^y \varphi_j^y(x)$, где φ_j^y пробегает множество неприводимых характеров Брауэра главного блока группы $C_G(y)$. Согласно (IV.4.12) (ii), $\varphi_j^y(x) = \varphi_j^y(1)$ для всех j и всех p'-элементов x из $C_G(y)$. □

Лемма 6.4. *Пусть H — нормальная p'-подгруппа группы G. Для любого подмножества A из G через $\bar{A}$ будем обозначать образ A в $\bar{G} = G/H$. Пусть B_0 — такой блок подгруппы G_0 группы G, для которого B_0^G определен.*

(i) *Группа H лежит в ядре блока B_0^G тогда и только тогда, когда $H \cap G_0$ лежит в ядре B_0.*

(ii) *Предположим, что $G_0 \cap H$ лежит в ядре B_0. Тогда существует такой блок $\tilde{B}_0$ группы $G_0 H$, для которого H лежит в его ядре и B_0 соответствует $\tilde{B}_0$ относительно естественного изоморфизма $G_0 H/H \cong G_0/G_0 \cap H$. Кроме того, $\tilde{B}_0^G$ определен и $B_0^G = \tilde{B}_0^G$. Наконец, $|H : G_0 \cap H| \equiv 1 \pmod p$.*

Доказательство. Изоморфизм $G_0/G_0 \cap H \cong G_0 H/H$ определяет биекцию $\zeta \to \tilde{\zeta}$ между множеством всех неприводимых характеров группы G_0, содержащих $G_0 \cap H$ в своем ядре, и множеством всех неприводимых характеров группы $G_0 H$, содержащих H в своем ядре. Таким образом, $\tilde{\zeta}_{G_0} = \zeta$.

Пусть T — объединение всех тех блоков группы G, которые содержат H в своем ядре.

(i) Предположим, что H лежит в ядре блока B_0^G. Пусть ζ — неприводимый характер из B_0. В силу (2.3), существует неприводимый характер χ из B_0^G, для которого $\chi \subseteq \zeta^G$. Значит, $\zeta \subseteq \chi_{G_0}$, по теореме взаимности Фробениуса (III.2.5). Поскольку $G_0 \cap H$ лежит в ядре характера χ_{G_0}, она лежит в ядре характера ζ. Так как ζ выбран произвольно из B_0, то $G_0 \cap H$ лежит в ядре B_0.

Обратно, предположим, что $G_0 \cap H$ лежит в ядре блока B_0. В силу теоремы взаимности Фробениуса (III.2.5), $\tilde{\zeta} \subseteq \zeta^{G_0 H}$. Поскольку $H \lhd G$, трансверсаль $G_0 H$ в G является полным множеством представителей двойных (G_0, H)-смежных классов в G. Тогда разложение Макки (II.2.9) влечет

$$(\zeta^G)_H = \sum \{\zeta^x_{G_0 \cap H}\}^H = \sum \{\zeta^x_{(G_0 \cap H)^x}\}^H = \sum \{\zeta(1) 1_{(G_0 \cap H)^x}\}^H,$$

где x пробегает трансверсаль $G_0 H$ в G. Поэтому

$$(1_H, (\zeta^G)_H)_H = |G : G_0 H| \zeta(1) = |G : G_0 H| \tilde{\zeta}(1) = \tilde{\zeta}^G(1).$$

Значит, $\tilde{\zeta}^G$ является суммой всех неприводимых конституэнт в ζ^G, которые содержат H в своем ядре, и, стало быть, $(\zeta^G)^T = (\tilde{\zeta}^G)$.

Если B — блок, причем $B \subseteq T$, то $\nu((\zeta^G)^B(1)) \geqslant \nu(\zeta^G(1))$, ввиду (1.3). Поскольку $\zeta^G(1) = |G_0 H : G_0| \tilde{\zeta}^G(1)$, имеем $\nu(\zeta^G(1)) = \nu(\tilde{\zeta}^G(1))$. Так как $(\zeta^G)^T = \tilde{\zeta}^G$, то отсюда следует существование блока $B_1 \subseteq T$, для которого $\nu((\zeta^G)^{B_1}(1)) = \nu(\zeta^G(1))$. Поэтому, по (3.1), $B_1 = B_0^G$ и, следовательно, H лежит в ядре B_0^G.

(ii) Существование $\tilde{B}_0$ следует из (4.3). Пусть ζ — неприводимый характер из B_0, ω, $\tilde{\omega}$ — центральные характеры, отвечающие ζ и $\tilde{\zeta}$ соответственно. Тогда $\bar{\tilde{\omega}}$ соответствует $\tilde{B}_0$. Пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots$ — все неприводимые характеры группы G, и пусть $b_s = (\chi_s, \zeta^G)$. В силу (i), $(\zeta^G)^T = \tilde{\zeta}^G$. Значит, по (1.1),

$$\zeta^G(1)\omega^G = \sum b_s \chi_s(1)\omega_s, \quad \tilde{\zeta}^G(1)\tilde{\omega}^G = \sum_{\chi_s \in T} b_s \chi_s(1)\omega_s.$$

Поскольку $B_0^G \subseteq T$, из (IV.4.22) следует, что $\overline{(\zeta^G(1)/\tilde{\zeta}^G(1))\omega^G} = \overline{\tilde{\omega}^G}$. Тогда, вычисляя на 1, получаем $\overline{\tilde{\zeta}^G(1)/\zeta^G(1)} = 1$. Поэтому $\omega^G = \tilde{\omega}^G$. Следовательно, $\tilde{B}_0^G$ определен и $\tilde{B}_0^G = B_0^G$. Кроме того,

$$|H : G_0 \cap H| \equiv |G_0 H : G_0| \equiv \zeta^G(1)/\tilde{\zeta}^G(1) \equiv 1 \pmod{\pi}.$$

Тем самым, $|H_0 : G_0 \cap H| \equiv 1 \pmod{p}$. □

Теорема 6.5. *Пусть π — множество простых чисел, причем $p \in \pi$, B — блок группы G с дефектной группой D. Положим $N = N_G(D)$ и обозначим через B_1 росток блока B. Предположим, что $O_{\pi'}(N)$ лежит в ядре блока B_1. Пусть G_0 — подгруппа группы G, B_0 — блок группы G_0 с дефектной группой D_0, $C_G(D_0) \subseteq G_0$ и $B_0^G = B$. Тогда $O_{\pi'}(G_0)$ лежит в ядре блока B_0.*

Доказательство. В силу (III.9.6), можно предполагать, что $D_0 \subseteq D$. Согласно (5.4), $B_0 = B_2^{G_0}$ для некоторого блока B_2 группы

$D_0C_G(D_0)$. Положим $d=\nu(|D|)$, $d_0=\nu(|D_0|)$. Доказательство проведем индукцией по $d-d_0$.

Предположим, что $d-d_0=0$. В силу (III.9.2), $B_2^G=B_0^G=B$ и $B_2^G=(B_2^N)^G$. Значит, $B_2^N=B_1$, ввиду (III.9.7). В силу (3.10). B_1 накрывает B_2. Поэтому $O_{\pi'}(N)=O_{\pi'}(DC_G(D))$ лежит в ядре блока B_2. Значит, $O_{\pi'}(G_0)\cap DC_G(D)$ лежит в ядре B_2, и потому, по (6.4), $O_{\pi'}(G_0)$ лежит в ядре блока B_0.

Предположим теперь, что $d-d_0>0$. В силу (5.4) (ii), существует блочная пара (D^*, B^*) в G, которая собственно расширяет (D_0, B_2). Положим $H=D^*C_G(D_0)$. По индукции, $O_{\pi'}(H)$ лежит в ядре блока $B_2^H=B^{*H}$. Поскольку B_2^H накрывает B_2, группа $O_{\pi'}(H)=O_{\pi'}(D_0C_G(D_0))$ лежит в ядре блока B_2. Так как $O_{\pi'}(G_0)\cap D_0C_G(D_0)\subseteq O_{\pi'}(D_0C_G(D_0))$, то из (6.4) следует, что $O_{\pi'}(G_0)$ лежит в ядре блока $B_0=B_2^{G_0}$. □

Следствие 6.6. *Пусть π — множество простых чисел, причем $p\in\pi$, B — блок группы G с дефектной группой D. Предположим, что $O_{\pi'}(N_G(D))$ лежит в ядре ростка блока B. Пусть y — такой p-элемент из G, что $C_G(y)$ обладает нормальной S_π-подгруппой. Если $\chi=\chi_i\in B$, то $\chi(yx)=\chi(y)$ для каждого π'-элемента x из $C_G(y)$.*

Доказательство. В силу (IV.6.1) и (6.5), $\chi(yx)=\sum_j d_{ij}^y\varphi_j^y(x)$, где φ_j^y пробегает множества неприводимых характеров Брауэра тех блоков группы $C_G(y)$, которые содержат $O_{\pi'}(C_G(y))$ в своем ядре. Тогда $\varphi_j^y(x)=\varphi_j^y(1)$ для каждого π'-элемента x из $C_G(y)$. □

Теорема 6.7. *Пусть π — множество простых чисел, причем $p\in\pi$, B — блок группы G с дефектной группой D, D_0 — некоторая p-группа из G, B_0 — такой блок группы $D_0C_G(D_0)$, что $B_0^G=B$.*

(i) *Предположим, что если $D_0\subseteq D^z$ для некоторого $z\in G$, то $O_{\pi'}(C_G(D^z))$ лежит в ядре блока B_0. Тогда $O_{\pi'}(N_G(D))$ лежит в ядре ростка блока B.*

(ii) *Предположим, что $O_{\pi'}(C_G(D_0))$ является S_π-подгруппой группы $C_G(D_0)$ и $O_{\pi'}(C_G(D_0))$ лежит в ядре блока B_0. Тогда $O_{\pi'}(N_G(D))$ лежит в ядре ростка блока B.*

Доказательство. В силу (6.4), можно предполагать, что D_0 является дефектной группой блока B_0.

(i) Положим $d=\nu(|D|)$ и $d_0=\nu(|D_0|)$. Доказательство проведем индукцией по $d-d_0$. Если $d-d_0=0$, то $D_0=D^z$, и, в силу (3.10), росток блока B относительно D^z накрывает B_0. Отсюда следует результат, поскольку $O_{\pi'}(C_G(D^z))=O_{\pi'}(N_G(D^z))$.

Предположим, что $d-d_0>0$. В силу (5.4) (ii), существует блочная пара (D^*, B^*) в G, которая собственно расширяет (D_0, B_0). Положим $H=D^*C_G(D_0)$. Предположим, что $D^*\subseteq D^z$. Пусть H — ядро блока B_0. В силу (IV.4.11), H_0 является p'-группой. Кроме того, H_0 лежит в ядре блока $B_0^H=B^{*H}$ и $O_{\pi'}(C_G(D^z))\subseteq H_0$. Из (6.4) следует, что $O_{\pi'}(C_G(D^z))\subseteq H_0\cap D^*C_G(D^*)$, и потому она лежит в ядре блока B^*. Результат теперь следует из соображений индукции.

(ii) Поскольку ядро блока B_0 содержит все π'-элементы из $C_G(D_0)$, то выполнены условия утверждения (i). Результат теперь следует из (i). □

Следующий пример показывает, что условия из (6.7) (ii) о том, что $O_{\pi'}(C_G(D_0))$ является S_π-подгруппой группы $C_G(D_0)$, нельзя опустить даже в случае $\pi=\{p\}$.

Пусть $\langle y\rangle$ — циклическая группа порядка 4, $S=S_5$ — симметрическая группа степени 5, $A=A_5$ — знакопеременная группа. Положим $G=\langle y\rangle S$, где $\langle y\rangle \lhd G$, $y^z=y$ для $z\in A$, $y^z=y^{-1}$ для $z\in S-A$. Пусть $p=2$.

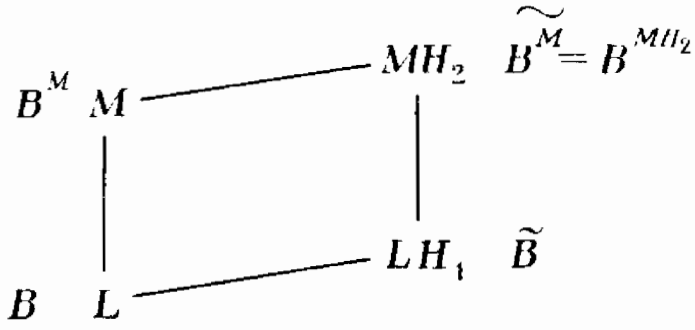
Обозначим через ζ неприводимый характер степени 4 группы S, который является конституэнтой перестановочного представления S на пяти символах. Тогда ζ_A неприводим. Значит, ζ_A лежит в блоке дефекта 0. В силу (3.5), блок группы S, содержащий ζ, является единственным блоком группы S, накрывающим блок, в котором лежит ζ_A. Значит, он является слабо регулярным. Поэтому, по (3.14), существует такая инволюция $x\in S-A$, что $\langle x\rangle$ — дефектная группа блока группы S, содержащего ζ. Тогда x обязан быть транспозицией и $C_S(x)=\langle x\rangle W$, где W — симметрическая группа на трех символах, фиксируемых элементом x. Рассмотрим ζ как характер группы G, который содержит $\langle y\rangle$ в своем ядре, и обозначим через B блок группы G, который содержит ζ. В силу (4.5), $D=\langle x, y\rangle$ является дефектной группой блока B. В частности, B не является главным блоком группы G. Положим $D_0=\langle y\rangle$. Тогда $D_0C_G(D_0)=\langle y\rangle A$ и, по (3.10), $B=B_0^G$ для некоторого блока B_0 группы $D_0C_G(D_0)$. Группа $O_{2'}(D_0C_G(D_0))$ лежит в ядре блока B_0.

Легко проверить, что $N_G(D)=\langle x, y\rangle W$. Тогда $W'=O_{2'}(N_G(D))$. Тем самым, по (4.3), главный блок группы $N_G(D)$ является единственным блоком, который содержит W' в своем ядре. Значит, по (6.2), $O_{2'}(N_G(D))$ не лежит в ядре ростка блока B.

Теорема 6.8. *Пусть L, M, H_1, H_2 — подгруппы группы G, причем $LH_1\subseteq MH_2$, а H_1, H_2 являются p'-группами. Предположим, что $[M, H_2]\subseteq H_2$, $[L, H_1]\subseteq H_1$, $L\subseteq M$ и $H_2\cap H_1L\subseteq H_1$. Пусть B — блок группы L с дефектной группой D, такой, что $C_M(D)\subseteq L$. Предположим, что $H_1\cap L$ лежит в ядре блока B. Пусть $\tilde{B}$ — блок группы LH_1, который содержит H_1 в своем ядре и соответствует блоку B относительно естественного изоморфизма $L/L\cap H$ на LH_1/H_1. Предположим, кроме того, что $\tilde{B}^{MH_2}$ определен.*

Тогда B^M определен и $H_2\cap M$ лежит в ядре блока B^M. Если $\widetilde{B^M}$ — блок группы MH_2, соответствующий блоку B^M относительно естественного изоморфизма $M/M\cap H_2$ на MH_2/H_2, то $\tilde{B}^{MH_2}=\widetilde{B^M}$.

Следующая диаграмма иллюстрирует формулировку теоремы:



Доказательство. В силу (III.9.5), B^M определен. Поскольку $M\bigcap H_2 \lhd M$ и $M\bigcap H_2\bigcap L\subseteq L\bigcap H_1$, из (6.4) (i) следует, что $M\bigcap H_2$ лежит в ядре блока B^M.

Так как $[L,\ H_2]\subseteq H_2$ и $L\bigcap H_2\subseteq L\bigcap H_1$ лежит в ядре блока B, то существует блок $\tilde{B}_2$ группы LH_2, для которого H_2 лежит в его ядре и блок $\tilde{B}_2$ соответствует блоку B относительно изоморфизма $L/L\bigcap H_2\cong LH_2/H_2$. В силу (4.3), $\tilde{D}$ является дефектной группой блока $\tilde{B}_2$. По рассуждению Фраттини, $C_{MH_2/H_2}(DH_2/H_2)=C_M(D)H_2/H_2$, и потому $C_{MH_2}(D)\subseteq C_M(D)H_2\subseteq LH_2$. Тем самым, по (III.9.5), $\tilde{B}_2^H$ определен для $LH_2\subseteq H\subseteq MH_2$. Покажем, что

$$\tilde{B}_2^{MH_2}=\widetilde{B^M}. \tag{6.9}$$

Пусть $\zeta\in B$ и $\tilde{\zeta}\in\tilde{B}_2$, где $\tilde{\zeta}_L=\zeta_L$. Обозначим через $\{\chi_s\}$ множество всех неприводимых характеров из $\tilde{B}_2^{MH_2}$ и положим $a_s=(\chi_s,\ \tilde{\zeta}^{MH_2})_{MH_2}$. В силу (1.3), $\nu(\tilde{\zeta}^{MH_2}(1))=\nu(\sum a_s\chi_s(1))$.

Так как ζ — единственный неприводимый характер группы LH_1, для которого $\zeta\subseteq\tilde{\zeta}_L$ и H_1 лежит в его ядре, то, учитывая, что H_1 лежит в ядре каждого из χ_s, по теореме взаимности Фробениуса (III.2.5), имеем

$$a_s=((\chi_s)_{LH_1},\ \tilde{\zeta})_{LH_1}=((\chi_s)_L,\ \zeta)_L=((\chi_s)_M,\ \zeta^M)_M.$$

Поскольку, по (6.4) (i), H_2 лежит в ядре каждого из χ_s и каждый характер $(\chi_s)_M$ неприводим. Значит, существует такой блок B' группы M, что $\{(\chi_s)_M\}$ совпадает с множеством всех неприводимых характеров из B'. Значит, $\tilde{B}'=\tilde{B}^{MH_2}$. Однако

$$\nu(\sum a_s(\chi_s)_M(1))=\nu(\tilde{\zeta}^{MH_2}(1))=\nu(|MH_2:LH_1|\chi(1))=\nu(|M:L|\zeta(1))=\nu(\zeta^M(1)).$$

Следовательно, согласно (1.3), $B'=B^M$, и равенство (6.9) доказано.

Так как $H_2\bigcap H_1L\subseteq H_1$, то $H_1H_2\bigcap LH_1=H_1$. Рассмотрим естественные изоморфизмы

$$L/L\bigcap H_1\cong LH_1/H_1\cong LH_1/LH_1\bigcap H_1H_2\cong$$

$$\cong LH_1H_2/H_1H_2\cong LH_2/LH_2\bigcap H_1H_1.$$

Пусть $\tilde{B}_3$ — блок группы LH_1H_2, содержащий H_1H_2 в своем ядре и соответствующий B. Обозначим через $\tilde{B}'_2$ блок группы LH_2, содержащий $LH_2\bigcap H_1H_2$ в своем ядре и соответствующий $\tilde{B}_3$. Пусть ζ — неприводимый характер из B, а $\tilde{\zeta}$ — такой единственный неприводимый характер из $\tilde{B}_2$, что $\tilde{\zeta}_L=\zeta$ и H_2 лежит в его ядре. Обозначим через θ единственный неприводимый характер группы LH_1H_2, содержащий H_1H_2 в своем ядре и такой, что $\theta_L=\zeta$. Тогда, по определению, $\theta\in\tilde{B}_3$. Кроме того, $\theta_{LH_2}\in\tilde{B}'_2$. Поскольку $(\theta_{LH_2})_L=\zeta=\tilde{\zeta}_L$, $\tilde{B}'_2=\tilde{B}_2$. Значит, $\tilde{B}_2$ соответствует $\tilde{B}_3$.

Так как $B_2^{LH_1H_2}$ определен, то из (6.4) следует, что $\tilde{B}_2^{LH_1H_2}=\tilde{B}_3$, и потому, по (6.9), $\tilde{B}_3^{MH_2}=\tilde{B}_2^{MH_2}=\widetilde{B^M}$. В силу (6.4), $\tilde{B}_3^{MH_2}=\tilde{B}^{MH_2}$. Поэтому $\tilde{B}^{MH_2}=\widetilde{B^M}$. □

В (6.8) существенно требовать, чтобы $\tilde{B}^{MH_2}$ был определен. Это условие не вытекает из других. Например, пусть $M=L=H_1=\langle 1\rangle$, ψ — центральный характер для $\langle 1\rangle$, $C\neq\{1\}$ — сопряженный класс группы H_2, $C'=\{x^{-1}\mid x\in C\}$. Тогда $\psi^{H_2}(\bar{C})\psi^{H_2}(\bar{C}')=0$, однако $\psi^{H_2}(\hat{C}\hat{C}')=|C|\neq 0$.

§ 7. Изометрии

Пусть X — множество характеров группы N, A — объединение сопряженных классов группы N. В этом параграфе будем применять следующие обозначения.

$M(N)$ — кольцо обобщенных характеров группы N.

$V(N, A:X)$ — векторное пространство всех линейных комплексных комбинаций характеров из множества X, которые обращаются в нуль на $N-A$.

Если X — множество всех неприводимых характеров из объединения S блоков группы N, то $V(N, A:S)=V(N, A:X)$.

Если X — множество всех неприводимых характеров группы N, то $V(N, A)=V(N, A:X)$.

Положим $V(N, N:X)=V(N:X)$ и $V(N, N)=V(N)$.

Положим также $M(N, A:X)=V(N, A:X)\cap M(N)$; $M(N, A:S)=V(N, A:S)\cap M(N)$, где S — объединение блоков группы N; $M(N, A)=V(N, A)\cap M(N)$ и $M(N:X)=V(N:X)\cap M(N)$.

Скалярное произведение характеров определяет естественную метрику на $M(N, A:X)$ и на $V(N, A:X)$.

Если Y — множество неприводимых характеров группы G и $\alpha=\sum a_s\chi_s$ для комплексных a_s, положим $\alpha^Y=\sum_{\chi_s\in Y}a_s\chi_s$. Если Y — множество всех неприводимых характеров в объединении S блоков группы G, положим $\alpha^S=\alpha^Y$. Очевидно, если α является обобщенным характером, то таковым является и α^Y.

π — множество простых чисел, π' — дополнительное множество простых чисел.

Если $p\in\pi$, то $S_p(\pi, N)$ — объединение всех тех p-блоков B группы N, что если D — дефектная группа блока B, то $O_{\pi'}(N_G(D))$ лежит в ядре ростка блока B.

Если $z\in G$, то z_π будет обозначать π-часть элемента z.

π-секция группы G, содержащая z, — это множество всех тех элементов из G, π-части которых сопряжены с z_π.

$V_\pi(N, A:X)=\{\alpha\mid\alpha\in V(N, A:X),\ \alpha(yx)=\alpha(y)$ для любого элемента $y\in A$ и любого элемента $x\in O_{\pi'}(C_N(y))\}$.

$$M_\pi(N, A:X)=V_\pi(N, A:X)\cap M(N).$$

Аналогично, нижним индексом π будем снабжать пересечение каждого определенного выше множества с $V_\pi(N, A:X)$.

В этом параграфе мы будем использовать два следующих соглашения.

Предположение 7.1. (i) *N — подгруппа группы G, A — подмножество из N, являющееся объединением π-секций группы N, в котором любые два элемента, сопряженные в A, сопряжены также и в N.*

(ii) *Если y — некоторый π-элемент из A, то $C_G(y)=C_N(y)O_{\pi'}(C_G(y))$.*

Предположение 7.2. (i) *Выполнено* (7.1).

(ii) *$O_{\pi'}(C_G(y))$ является $S_{\pi'}$-подгруппой группы $C_G(y)$ для всех π-элементов y из A.*

Докажем сначала несколько элементарных результатов.

Лемма 7.3. *Пусть $H\lhd G$, H является π'-группой, $x\in H$, $y\in G$. Тогда существуют такие $u\in C_G(y_\pi)\cap H$ и $z\in H$, что $yx=(yu)^z$.*

Доказательство. Положим

$$T=\{(y_\pi)^x t \mid z \text{ пробегает трансверсаль } C_H(y_\pi) \text{ в } H,\ t\in C_H(y_\pi)^z\}.$$

Тогда $T\subseteq y_\pi H$ и $|T|=|H|$. Значит, $T=y_\pi H$. Поскольку $H\lhd G$, то $(yx)_\pi\in y_\pi H$, и потому $(yx)_\pi=(y_\pi)^z t$ для некоторого $z\in H$ и некоторого π'-элемента $t\in C_G(y_\pi^z)$. Поэтому $t=1$ и $(yx)_\pi=y_\pi^z$.

Так как $H\lhd G$, то $(yx)_{\pi'}=y_{\pi'}x_0$ для некоторого $x_0\in H$. Значит, $(yx)_\pi^{z^{-1}}=(y_{\pi'}x_0)^{z^{-1}}=y_{\pi'}u$ для подходящего $u\in H$. Так как $y_{\pi'}u$ централизует $(yx)_\pi^{z^{-1}}=y_\pi$, то $u\in C_G(y_\pi)\cap H$. Поэтому

$$(yx)^{z^{-1}}=y_\pi((yx)_{\pi'}^{z^{-1}})=y_\pi y_{\pi'}u=yu. \ \square$$

Лемма 7.4. *Пусть $\beta\in V_\pi(G)$, y — некоторый π-элемент из G. Выберем $x\in C_G(y)$ так, чтобы x_π и y имели взаимно простые порядки. Пусть $x_0\in O_{\pi'}(C_G(y))$. Тогда $\beta(yx)=\beta(yxx_0)$.*

Доказательство. Положим $C=C_G(y)$. Поскольку порядки y и x_π взаимно просты,

$$C_G(x_\pi)=C_G(yx_\pi)=C_G((yx)_\pi)\subseteq C.$$

В силу (7.3), $(xx_0)^z=xu$ для некоторого $z\in C$,

$$u\in O_{\pi'}(C)\cap C_C(x_\pi)=O_{\pi'}(C)\cap C_G((yx)_\pi)\subseteq O_{\pi'}(C_G((yx)_\pi)).$$

Поэтому

$$\beta(yxx_0)=\beta((yxx_0)^z)=\beta(yxu)=\beta(yx),$$

ввиду определения $V_\pi(G)$. $\square$

Лемма 7.5. (i) *$\alpha\in V_\pi(N, A:X)$, если $\alpha\in V(N, A:X)$ и для $y\in A$, $\alpha_{C_X(y_\pi)}$ является линейной комбинацией неприводимых характеров группы $C_N(y_\pi)$, каждый из которых содержит $O_\pi(C_N(y_\pi))$ в своем ядре.*

(ii) *Предположим, что выполнено* (7.2). *$\alpha\in V_\pi(N, A:X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha\in V(N, A:X)$ и α постоянна на π-секциях из N.*

(iii) *Предположим, что выполнено* (7.1). *Если $z\in G$ и $z_\pi\in A$, то $z_{\pi'}=z_1z_2$, где $z_1\in C_N(z_\pi)$ и $z_2\in O_{\pi'}(C_G(z_\pi))$. Если, кроме того, $z_\pi^x\in A$ для некоторого $x\in G$ и $z_{\pi'}^x=z_1'z_2'$, где $z_1'\in C_N(z_\pi^x)$ и $z_2'\in O_{\pi'}(C_G(z_\pi^x))$, то $\alpha(z_\pi z_1)=\alpha(z_\pi^x z_1')$ для всех $\alpha\in V_\pi(N, A)$.*

Доказательство. (i) и (ii) следуют непосредственно из определения.

(iii) Первое утверждение прямо вытекает из (7.1). Если $z_\pi^x \in A$, то в силу (7.1) (i), существует такой $y \in N$, что $z_\pi^{xy} = z_\pi$. Тогда $z_1^{xy} z_2^{xy} = z_\pi^{xy} = (z_1')^y (z_2')^y$. Так как $xy \in C_G(z_\pi)$, то z_2^{xy} и $(z_2')^y$ лежат в $O_{\pi'}(C_G(z_\pi))$. Пусть $xy = uv$, где $u \in N$ и $v \in O_{\pi'}(C_G(z_\pi))$. Тогда

$$(z_\pi^x z_1')^y \equiv z_\pi (z_1')^y \equiv z_\pi z_\pi^{xy} \equiv z_\pi z_1^{xy} \equiv (z_\pi z_1)^{uv} \equiv (z_\pi z_1)^u \pmod{O_{\pi'}(C_G(z_\pi))}.$$

Поскольку u, y, $z_\pi' z_1'$ и $z_\pi z_1$ все лежат в N, справедливо равенство $(z_\pi^x z_1')^y = (z_\pi z_1)^u z_0$ для некоторого $z_0 \in O_{\pi'}(C_G(z_\pi)) \cap \bigcap N \subseteq O_{\pi'}(C_N(z_\pi))$. Поэтому

$$\alpha(z_\pi z_1) = \alpha((z_\pi z_1)^u z_0) = \alpha((z_\pi^x z_1')^y) = \alpha(z_\pi^x z_1'). \quad \square$$

Предположим, что выполнено (7.1). Если $\alpha \in V_\pi(N, A)$, определим $\alpha^\tau \in V_\pi(G)$ следующим образом.

Если z_π не сопряжен с элементом из A, положим $\alpha^\tau(z) = 0$.

Если $z_\pi^x \in A$ для некоторого $x \in G$, то $z^x \in C_G(z_\pi^x)$, и потому $z_\pi^x = z_1 z_2$, где $z_1 \in C_N(z_\pi^x)$ и $z_2 \in O_\pi(C_G(z_\pi^x))$. В этом случае положим $\alpha^\tau(z) = \alpha(z_\pi^x z_1)$.

В силу (7.5) (iii), α^τ определена корректно. Следовательно, τ является линейным отображением $V_\pi(N, A)$ в $V_\pi(G)$.

Лемма 7.6. *Предположим, что выполнено* (7.1) *и* A *— объединение* p*-секций для некоторого* $p \in \pi$. *Если* y *есть* p*-элемент из* A, x_1 *есть* p'*-элемент из* $C_N(y)$, $x_2 \in O_{\pi'}(C_G(y))$ *и* $x = x_1 x_2$, *то* $\alpha^\tau(yx) = \alpha(yx_1)$.

Доказательство. В силу (7.4), $\alpha^\tau(xy) = \alpha^\tau(yx_1)$. Поскольку $yx_1 \in A$, определение τ влечет $\alpha^\tau(yx_1) = \alpha(yx_1)$. $\square$

Лемма 7.7. *Предположим, что выполнено* (7.1).

(i) *Если* $\alpha \in V_\pi(N, A)$ *и* $\beta \in V_\pi(G)$, *то* $(\alpha^\tau, \beta)_G = (\alpha, \beta_N)_N$.

(ii) *Если* $\alpha_1, \alpha_2 \in V_\pi(N, A)$, *то* $(\alpha_1, \alpha_2)_N = (\alpha_1^\tau, \alpha_2^\tau)_G$.

Доказательство. (i) Для π-элемента $y \in G$ обозначим через $\{y\}_\pi^G$ и $\{y\}_\pi^N$ соответственно π-секции групп G и N, содержащие y. Положим $\gamma = \alpha^\tau \beta^*$. Тогда $\gamma(z) = 0$, если $z \in \{y\}_\pi^G$ и y является π-элементом из G, не сопряженным с некоторым элементом из A. Если y есть π-элемент из A, то $C_G(y) = C_N(y) O_{\pi'}(C_G(y))$. Значит, существует трансверсаль $\{x_i\}$ подгруппы $C_N(y)$ в $C_G(y)$, $x_i \in O_{\pi'}(C_G(y))$, такая, что всякий π'-элемент из $C_G(y)$ имеет вид zx_i для некоторого i и некоторого π'-элемента $z \in C_G(y)$. Поскольку $\gamma \in V_\pi(G)$, то

$$\frac{1}{|G|} \sum_{z \in \{y\}_\pi^G} \gamma(z) = \frac{1}{|C_G(y)|} \sum_{x \in C_G(y)}{}' \gamma(yx) = \frac{1}{|C_N(y)|} \sum_{x \in C_N(y)}{}' \gamma(yx) = \frac{1}{|N|} \sum_{z \in \{y\}_\pi^N} \gamma(z),$$

где $\sum'$ означает, что x пробегает лишь множество π'-элементов. Поэтому, если y пробегает множество π-элементов из A, которые образуют полное множество представителей всех π-секций группы G, лежащих в A, то

$$(\alpha^\tau, \beta)_G = \frac{1}{|G|} \sum_y \sum_{z \in \{y\}_\pi^G} \gamma(z) = \frac{1}{|N|} \sum_y \sum_{z \in \{y\}_\pi^N} \gamma(z) = (\alpha, \beta_N)_N.$$

(ii) Пусть $\beta=\alpha_2^\tau$ как в (i). Тогда

$$(\alpha_1^\tau,\ \alpha_2^\tau)_G=(\alpha_1,\ (\alpha_2^\tau)_N)_N=\frac{1}{|N|}\sum_{z\in N}\alpha_1(z)\alpha_2^\tau(z)^*=$$

$$=\frac{1}{|N|}\sum_{z\in A}\alpha_1(z)\alpha_2(z)^*=\frac{1}{|N|}\sum_{z\in N}\alpha_1(z)\alpha_2(z)^*=(\alpha_1,\ \alpha_2)_N.\ \square$$

Отображение τ является весьма полезным инструментом изучения некоторых вопросов относительно строения конечных групп при условии $M_\pi(N, A)^\tau\subseteq M(G)$ или, эквивалентно, при условии, что τ отображает обобщенные характеры из $V_\pi(N, A)$ в обобщенные характеры группы G. Обсуждение части этих приложений можно найти, например, у Фейта [1967c] или у Смита [1974], [1976a].

В случае, когда π является множеством всех простых чисел, нетрудно видеть, что $\alpha^\tau=\alpha^G$ для всех $\alpha\in V_\pi(N, A)$, и поэтому $M_\pi(N, A)^\tau\subseteq M(G)$. Этот случай, приведший к созданию целого метода, впервые был разобран Брауэром и Судзуки, которые первыми осознали важность результатов такого типа.

Неизвестно, всегда ли $M_\pi(N, A)^\tau\subseteq M(G)$ при выполнении предположения (7.1)[1]. Однако Рейнольдс [1963] и Ленард и Маккилви [1967] показали, что $M_\pi(N, A)^\tau\subseteq M(G)$, если выполнено предположение (7.2). Этот результат и его доказательство обобщают более раннюю теорему Дейда [1964], который получил аналогичное заключение при условии, если выполнено (7.2) и $C_N(y)$ является π-группой для каждого π-элемента y из A. В свою очередь, результат Дейда обобщает результат, где заключение было получено при еще более сильных предположениях; см. Фейт и Томпсон [1963, § 9]. Все эти результаты, разумеется, обобщают случай, когда π является множеством всех простых чисел.

В этом параграфе мы, в основном, будем заниматься доказательством того, что при дополнительных условиях τ связано с соответствием Брауэра. Основа подхода настоящего параграфа принадлежит Брауэру. Часть материала можно найти у Брауэра [1964a], Горенстейна и Уолтера [1962, § 11], Никколаи [1974], Рейнольдса [1967], [1968], [1970], Уолтера [1966] и Уонга [1966]. Глауберман [1968, Remark 3.2] первым указал на то, что подход Брауэра приводит к результату Дейда в случае $\pi=\{p\}$ для некоторого простого p. Для этого случая доказательство включения $M_\pi(N, A)^\tau\subseteq M(G)$ будет дано ниже.

Теорема 7.8. *Пусть $p\in\pi$. Предположим, что выполнено* (7.1) *и что A является объединением p-секций группы N. Пусть B_0 — такой p-блок из $S_p(\pi, N)$, что $V(N, A: B_0)\neq(0)$. Обозначим через D дефектную группу блока B_0, а через $\hat{B}_0$ — росток блока B_0 относительно D. Справедливы следующие утверждения.*

(i) $N_N(D)C_G(D)=N_N(D)O_{\pi'}(C_G(D))$.

---

[1] Недавно это было доказано Робинсоном [1985*].— *Примеч. пер.*

(ii) *$O_{\pi'}(N_N(D))$ лежит в ядре блока $\hat{B}_0$ и существует такой единственный блок $\tilde{B}_0$ группы $N_N(D)C_G(D)$, содержащий $O_{\pi'}(C_G(D))$ в своем ядре, что $\tilde{B}_0$ и $\hat{B}_0$ совпадают как блоки групп*

$$\frac{N_N(D)C_G(D)}{O_{\pi'}(C_G(D))} \cong \frac{N_N(D)}{O_{\pi'}(N_N(D))}.$$

(iii) *Пусть $y \in A \cap D$ и $B(y)$ — блок группы $C_N(y)$, для которого $B(y)^N = B_0$. Тогда $O_{\pi'}(C_N(y))$ лежит в ядре блока $B(y)$. Если $\tilde{B}(y)$ — блок группы $C_G(y)$, содержащий $O_{\pi'}(C_G(y))$ в своем ядре и такой, что $B(y)$ и $\tilde{B}(y)$ совпадают как блоки групп*

$$\frac{C_N(y)}{O_{\pi'}(C_N(y))} \cong \frac{C_G(y)}{O_{\pi'}(C_G(y))},$$

то $\tilde{B}(y)^G = \tilde{B}_0^G$.

Доказательство. Пусть $y \in A \cap D$, $B(y)$ — такой блок группы $C_N(y)$, что $B(y)^N = B_0$. Пусть D_1 — дефектная группа блока $B(y)$. В силу (5.4), существует блочная пара (D_i, B_i) в N при $i = 1, \ldots, n$, такая, что (D_{i+1}, B_{i+1}) собственно расширяет (D_i, B_i) при $i = 1, \ldots, n-1$, $B_1^{C_N(y)} = B(y)$ и D_n является дефектной группой блока B_0. Докажем по индукции следующее утверждение.

При $i = 1, \ldots, n$ $C_G(D_i) = C_N(D_i)O_{\pi'}(C_G(D_i))$ и B_i принадлежит $S_p(\pi, D_i C_N(D_i))$.

Предположим, что утверждение доказано при $i < m$. Если $m = 1$, положим $P = \langle y \rangle$. Если $m > 1$, положим $P = D_{m-1}$. Тогда, в силу (7.1) или индуктивного предположения, $C_G(P) = C_N(P)O_{\pi'}(C_G(P))$. Пусть $z \in C_G(D_m) \subseteq C_G(P)$. Тогда $z = z_1 z_2$, где $z_1 \in C_N(P)$, $z_2 \in O_{\pi'}(C_G(P))$. Так как $D_m \subseteq N_N(P)$, то $D_m\{O_{\pi'}(C_G(P)) \cap N\}$ является группой и $[D_m, z_1] = [D_m, z_2^{-1}]$ лежит в $O_{\pi'}(C_G(P)) \cap N$. Так как D_m является S_p-подгруппой группы $D_m\{O_{\pi'}(C_G(P)) \cap N\}$, то существует такой $z_3 \in O_{\pi'}(C_G(P)) \cap N$, что $z_1 z_3^{-1} \in N_N(D_m)$. Значит,

$$z_3 z_2 \in N_G(D_m) \cap O_{\pi'}(C_G(P)) \subseteq C_G(D_m) \cap O_{\pi'}(C_G(P)) \subseteq O_{\pi'}(C_G(D_m)).$$

Так как $z = (z_1 z_3^{-1})(z_3 z_2)$, то $C_G(D_m) = C_N(D_m)O_{\pi'}(C_G(D_m))$, поскольку обратное включение очевидно. В силу (6.5), B_i лежит в $S_p(\pi, D_i C_N(D_i))$. Утверждение теперь следует из соображений индукции.

(i) Поскольку $V(N, A : B_0) \neq (0)$, из (IV.6.2) вытекает существование такого $y \in A \cap D$ и такого блока $B(y)$ группы $C_N(y)$, что $B(y)^N = B_0$. Поскольку D_n сопряжена в N с D, результат следует из предыдущего абзаца.

(ii) Непосредственно следует из (i).

(iii) Пусть $\tilde{B}_i$ — такой блок группы $D_i C_G(D_i)$, что $O_{\pi'}(D_i C_G(D_i))$ лежит в ядре блока $\tilde{B}_i$, а B_i и $\tilde{B}_i$ совпадают как блоки групп

$$\frac{D_i C_N(D_i)}{O_{\pi'}(C_N(D_i))} \cong \frac{D_i C_G(D_i)}{O_{\pi'}(C_G(D_i))}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда D_i является дефектной группой блока $\tilde{B}_i$ и, значит, $(D_i, \tilde{B}_i)$ является блочной парой в G. Предположим, что $B_i^N = B_0$, $i = 1, \ldots, n$. Индукцией по $n - i$ докажем сначала, что $\tilde{B}_i^G = \tilde{B}_0^G$.

Предположим, что $n-m=0$. Заменяя D_m на ее сопряженную в N, можно считать, что $D=D_m$. В силу первой основной теоремы о блоках (III.9.7), $B_m^{N_N(D)}=\hat{B}_0$. Тогда $\tilde{B}^{N_N(D)C_G(D)}=\tilde{B}_0$ по (6.8) при $M=N_N(D)$, $L=DC_N(D)$, $H_1=H_2=O_{\pi'}(C_G(D))$ и поэтому $\tilde{B}_m^G=\tilde{B}_0^G$. Предположим, что $n-m>0$ и что результат уже доказан при $m<i\leqslant n$. Тогда $\tilde{B}_{m+1}^G=\tilde{B}_0^G$. Поскольку (D_{m+1}, B_{m+1}) расширяет $(D_m, \tilde{B}_m)$, то из (6.8) следует, что $(D_{m+1}, \tilde{B}_{m+1})$ расширяет $(D_m, \tilde{B}_m)$. Поэтому $\tilde{B}_m^G=\tilde{B}_{m+1}^G=\tilde{B}_0^G$. Это доказывает утверждение из предыдущего абзаца.

Поскольку $B_1^{C_N(y)}=B(y)$, из (6.8), примененного к $C_N(y)$ и $C_G(y)$, следует, что $\tilde{B}^{C_G(y)}=\tilde{B}(y)$. Следовательно, $\tilde{B}(y)^G=\tilde{B}_1^G=\tilde{B}_0^G$. □

Теорема 7.9. *Пусть $p\in\pi$. Предположим, что выполнено* (7.1) *и что A является объединением p-секций группы N. Пусть $\{A\}_\pi^G$ — множество всех тех элементов из G, π-части которых сопряжены с элементами из A. Для любого p-блока B_0 группы N, такого, что $V(N, A: B_0)\neq(0)$ и $B_0\subseteq S_p(\pi, N)$, пусть $\tilde{B}_0$ определен как в* (7.8) (ii). *Пусть B — такой p-блок группы G, что $B\subseteq S_p(\pi, G)$, и пусть B_{01}, B_{02}, ... — все такие p-блоки группы N, что $V(N, A: B_{0i})\neq(0)$, $B_{0i}\subseteq S_p(\pi, N)$ и $\tilde{B}_{0i}^G=B$. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если* $\alpha\in V_\pi(N, A: \bigcup_i B_{0i})$, *то* $\alpha^\tau\in V_\pi(G, \{A\}_\pi^G: B)$.

(ii) $V_\pi(N, A: \bigcup_i B_{0i})^\tau\subseteq V_\pi(G, \{A\}_\pi^G: B)$.

(iii) *Если* $\alpha\in V_\pi(N, A: \bigcup_i B_{0i})$, *то* $\alpha^\tau=(\alpha^G)^B$.

(iv) *Если* $B\subseteq S_p(\pi, G)$, *то* $M_\pi(N, A: \bigcup_i B_{0i})^\tau\subseteq M_\pi(G, \{A\}_\pi^G: B)$.

Доказательство. Пусть y — некоторый p-элемент группы G, а β — функция, определенная на $C_G(y)$. Рассмотрим функцию β_y, определенную на всех p'-элементах x из $C_G(y)$ следующим образом: $\beta_y(x)=\beta(yx)$.

(i) Пусть $\alpha^\tau=(\alpha^\tau)^B+\theta$. Достаточно показать, что $\theta_y=0$ для всех p-элементов y из G.

Для p-элемента $y\in G$ обозначим через S_1 объединение всех тех p-блоков $\hat{B}$ группы $C_G(y)$, для которых $\hat{B}^G=B$, а через S_2 — объединение всех остальных p-блоков группы $C_G(y)$. Пусть $V'(C_G(y): S_t)$ — пространство всех комплексных линейных характеров Брауэра из S_t, $t=1, 2$. В силу (IV.6.2), $(\alpha^\tau)_y^B\in V'(C_G(y), S_1)$ и $\theta_y\in V'(C_G(y): S_2)$. Достаточно показать, что $\alpha_y^\tau\in V'(C_G(y): S_1)$, поскольку тогда

$$\theta_y=\alpha_y^\tau-(\alpha^\tau)_y^B\in V'(C_G(y): S_1)\cap V'(C_G(y): S_2)=(0).$$

Если y не сопряжен с элементом из A, то $\alpha_y^\tau=0$ по определению. Поэтому можно считать, что $y\in A$. Пусть $\alpha=\sum\alpha_i$, где α_i — линейная комбинация неприводимых характеров из B_{0i}. Если y не сопряжен с элементом дефектной группы блока B_{0i}, то $(\alpha_i)_y=0$, ввиду (IV.2.4). Всякий p'-элемент $x\in C_G(y)$ имеет вид $x=x_1x_2$, где $x_1\in C_N(y)$ и $x_2\in O_{\pi'}(C_G(y))$. В силу (7.6), $\alpha_y^\tau(x)=\alpha_y(x)$. Значит, $\alpha_y^\tau=\alpha_y$ является линейной комбинацией неприводимых характеров Брауэра группы $C_G(y)/O_{\pi'}(C_G(y))\cong C_N(y)/O_{\pi'}(C_N(y))$. Из (4.3) и (7.8) (iii) следует, что $\alpha_y^\tau\in V'(C_G(y): S)$, что и требовалось доказать.

(ii) Очевидно ввиду (i).

(iii) Пусть y есть p-элемент из G. Если y не сопряжен с элементом из A, то обе функции α^τ и α^G обращаются в нуль на p-секции, которая содержит y. Значит, в силу (IV.6.3), $(\alpha^G)^B$ также обращается в нуль на p-секции, которая содержит y. Таким образом, достаточно показать, что если y является p-элементом из A, то α^τ и $(\alpha^G)^B$ совпадают на p-секции группы G, которая содержит y.

Пусть $C=C_G(y)$. В силу разложения Макки (II.2.9), $\alpha^G(yx)=\sum_z\{\alpha_{N^z\cap C}\}^C(yx)$ для любого p'-элемента x из C, где NzC пробегает все двойные (N, C)-смежные классы группы G. Если $yx\in_C A^z$, то $y\in_C A^z$, и поэтому, по (7.1) (i), существует такой $z_1\in N$, что $z_1z\in C$. Значит, $NzC=NC$. Поэтому $\{\alpha^G\}_y=\{(\alpha_{N\cap C})^C\}_y$. Следовательно, по (IV.6.1), $\{(\alpha^G)^B\}_y=(\{(\alpha_{N\cap C})^C\}^S)_y$, где S — объединение всех тех блоков B_i группы C, для которых $B_i^G=B$.

В силу (7.4), $(\alpha_{N\cap C})_y$ является линейной комбинацией характеров Брауэра группы $N\cap C$, каждый из которых содержит $O_{\pi'}(N\cap C)$ в своем ядре. Поскольку $C/O_{\pi'}(C)\cong N\cap C/O_{\pi'}(N\cap C)$, существует линейная комбинация β характеров Брауэра группы C, каждый из которых содержит $O_{\pi'}(C)$ в своем ядре, а $(\alpha_{N\cap C})$ и β совпадают как функции на множестве p'-элементов группы $C/O_{\pi'}(C)$. Поскольку $y\in Z(C)$, то $\{(\alpha_{N\cap C})^C\}_y=\{(\alpha_{N\cap C})_y\}^C$. Значит, если Φ — характер неразложимого проективного модуля группы C, который содержит $O_{\pi'}(C)$ в своем ядре, то

$$(\{(\alpha_{N\cap C})^C\}_y,\ \Phi)'_C=((\alpha_{N\cap C}),\ \Phi_{N\cap C})'_{N\cap C}=(\beta_{N\cap C},\ \Phi_{N\cap C})'_{N\cap C}=(\beta, \Phi)'_C,$$

где штрих указывает на то, что суммирование в скалярном произведении распространено лишь на множество p'-элементов. Таким образом, в силу (IV.3.3), $\{(\alpha_{N\cap C})^C\}_y-\beta$ является линейной комбинацией неприводимых характеров Брауэра группы C, ни один из которых не содержит $O_{\pi'}(C)$ в своем ядре. Значит, по (6.5), $(\{(\alpha_{N\cap C})^C\}^S)_y=\beta^S$.

В силу второй основной теоремы о блоках (IV.6.1), $(\alpha_{N\cap C})_y$ является линейной комбинацией характеров Брауэра из тех блоков $B(y)$ группы $N\cap C$, для которых $B(y)^N\subseteq\bigcup_i B_{0i}$. Значит, β является соответствующей линейной комбинацией характеров Брауэра блоков $\tilde{B}(y)$ группы C. Поскольку $\tilde{B}_{0i}^G=B$, из (7.8) (iii) следует, что $\beta^S=\beta$.

Осталось показать, что $\beta=(\alpha^\tau)_y$.

Любой p'-элемент $x\in C$ имеет вид $x=x_1x_2$, где x_1 есть p'-элемент из $N\cap C$, а $x_2\in O_{\pi'}(C)$. Поэтому, учитывая, что β лежит в $S_p(\pi, G)$ и используя (7.6), заключаем, что

$$\beta(x)=\alpha_y(x_1)=\alpha(yx_1)=\alpha^\tau(yx)=(\alpha^\tau)_y(x).$$

Таким образом, $\beta=(\alpha^\tau)_y$, что и утверждалось.

(iv) Очевидно, согласно (iii). □

Лемма 7.10. *Пусть $p\in\pi$. Предположим, что выполнено* (7.2) *и что A является объединением p-секций группы N. Пусть B_0 — такой p-блок группы N, что $V(N, A: B_0)\neq(0)$ и $B_0\subseteq S_p(\pi, N)$. Пусть $\tilde{B}_0$ определен как в* (7.8) (ii). *Тогда $\tilde{B}_0^G\subseteq S_p(\pi, G)$.*

Доказательство. Существует такой неприводимый характер χ из B_0, что χ не обращается в нуль на p-секции, которая содержит некоторый p-элемент $y \in A$. Пусть D — дефектная группа блока B_0. Тогда D — дефектная группа блока $\tilde{B}_0$. В силу (IV.2.4), можно предполагать, что $y \in D$. Так как $O_{\pi'}(C_G(y))$ является $S_{\pi'}$-подгруппой группы $C_G(y)$, то $O_{\pi'}(DC_G(D))$ есть $S_{\pi'}$-подгруппа группы $DC_G(D)$. Существует такая блочная пара (D, B_2) в G, для которой $B^{N_G(D)C_G(D)} = \tilde{B}_0$. Поскольку $\tilde{B}_0$ накрывает B_2, $O_{\pi'}(DC_G(D))$ лежит в ядре блока B_2. В силу (6.7) (ii), $\tilde{B}_0^G = B_2^G \subseteq S_p(\pi, G)$. □

Теорема 7.11. *Пусть $p \in \pi$. Предположим, что выполнено* (7.2) *и что A является объединением p-секций группы N. Пусть $\{A\}_\pi^G$ — множество всех тех элементов из G, π-части которых сопряжены с элементом из A. Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — все p-блоки группы G из множества $S_p(\pi, G)$. Для каждого i обозначим через $B_{i1}, B_{i2}, \ldots$ все те p-блоки группы N, лежащие в $S_p(\pi, N)$, для которых $V(N, A : B_{ij}) \neq (0)$ и $\tilde{B}_{ij}^G = B_i$, где $\tilde{B}_{ij}$ определены как в* (7.8) (ii). *Для каждого i положим $S_i = \bigcup_j B_{ij}$. Тогда:*

(i) $V(N, A : B_{ij}) = V_\pi(N, A : B_{ij})$ *для всех* i, j.

(ii) $V(G, \{A\}_\pi^G : B_i) = V_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i)$ *для всех* i.

(iii) $V_\pi(N, A) = V_\pi(N, A : \bigcup_{i=1}^n S_i) = \oplus_{i=1}^n V_\pi(N, A : S_i)$.

(iv) $V_\pi(G, \{A\}_\pi^G) = V_\pi(G, \{A\}_\pi^G : \bigcup_{i=1}^n B_i) = \oplus_{i=1}^n V_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i)$.

(v) $V_\pi(N, A : S_i)^\tau = V_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

(vi) *Если* $\{A\}_\pi^G \cap N = A$, *то*

$$M_\pi(N, A : S_i)^\tau = M_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

(vii) *Предположим, что $y^h \in \Lambda$ для каждого p-элемента y из A и для каждого целого h, взаимно простого с $|G|$. Тогда для $i = 1, \ldots, n$*

$$\operatorname{rank} M_\pi(N, A : S_i)^\tau = \operatorname{rank} M_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i) = \dim V_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i).$$

Доказательство. (i) и (ii). Поскольку $O_{\pi'}(C_G(z)) \subseteq O_{\pi'}(C_G(z_p))$ для всех $z \in \{A\}_\pi^G$, результаты вытекают из (6.5).

(iii) Второе равенство следует из (IV.6.3) и (i). Очевидно,

$$V_\pi(N, A : \bigcup_{i=1}^n S_i) \subseteq V_\pi(N, A).$$

Предположим, что $\alpha \in V_\pi(N, A)$. Для p-элемента y из A пусть B — блок группы N, для которого $(\alpha^B)_y \neq 0$. Если $B_1 \neq B_2$, то, по второй основной теореме о блоках (IV.6.1), группа $C_N(y)$ не содержит неприводимого характера Брауэра, который был бы компонентой как $(\alpha^{B_1})_y$ так и $(\alpha^{B_2})_y$. В силу (7.4), $(\alpha^B)_y$ является линейной комбинацией неприводимых характеров Брауэра группы $C_N(y)$, содержащих $O_{\pi'}(C_N(y))$ в своих ядрах. Ввиду (6.7) и (7.2), $B \subseteq S_p(\pi, N)$. Значит, по (7.10), $\tilde{B}^G \subseteq S_p(\pi, G)$, откуда следует (iii).

(iv) и (v). Второе равенство в (iv) следует из (IV.6.3) и (ii). Пусть $m = \dim V_\pi(N, A)$. Тогда $m = \dim V_\pi(G, \{A\}_\pi^G)$. Поскольку, по (7.9) (i), $V_\pi(N, A : S_i)^\tau \subseteq V_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i)$, оба утверждения (iv) и (v) вытекают из (iii).

(vi) В силу (7.9) (iv),

$$M_\pi(N, A:S_i)^\tau \subseteq M_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i).$$

Пусть $\alpha \in M_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i)$. Положим $\beta = \alpha_N$. Так как $\{A\}_\pi^G \cap N = A$, то $\beta \in V_\pi(N, A)$ и $\alpha = \beta^\tau$. Согласно (iii), $\beta = \sum \beta_j$, где $\beta_j \in V_\pi(N, A:S_j)$. Значит, в силу (iv) и (v), $\beta_j = 0$ при $i \neq j$. Поэтому $\beta \in V_\pi(N, A:S_i)$. Так как $\beta \in M(N)$, то отсюда следует результат.

(vii) Поскольку A является объединением p-секций, отсюда следует, что если $z \in \{A\}_\pi^G$ и $(h, |G|) = 1$, то $z^h \in \{A\}_\pi^G$. Значит, по (IV.6.9), $\operatorname{rank} M_\pi(N, A:S_i) = \dim V_\pi(N, A:S_i)$ и $\operatorname{rank} M_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i) = \dim V_\pi(G, \{A\}_\pi^G : B_i)$. Результат теперь следует из (v). □

Следствие 7.12. *Предположим, что выполнено* (7.2) *и что* $\pi = \{p\}$. *Если* $\alpha \in M_\pi(N, A)$, *то* α^τ — *обобщенный характер группы* G.

Доказательство. Очевидно, ввиду (7.9) (iii) и (7.11) (iii). □

Предположим, что выполнено (7.2). Пусть X — такое множество характеров группы $N/O_{\pi'}(N)$, что $M(N, A:X) \subseteq M_\pi(N, A)$. Множество X *когерентно*, если τ можно продолжить до линейной изометрии из $M(N:X)$ в $M(G)$. Если ζ — неприводимый характер из X и X когерентно, то $\|\zeta^\tau\|^2 = 1$. Тогда $\pm\zeta^\tau$ является неприводимым характером группы G. Следующий результат дает некоторую информацию относительно значений, принимаемых ζ^τ на подходящих элементах группы G. Этот результат был сформулирован без доказательства у Фейта [1967c, p. 175]. К сожалению, там в формулировке было пропущено условие, что A удовлетворяет предположению (i) из (7.13).

Теорема 7.13. *Предположим, что выполнено* (7.2) *и что* $O_{\pi'}(N)$ *является* $S_{\pi'}$*-подгруппой группы* N. *Пусть* X — *множество неприводимых характеров группы* $N/O_{\pi'}(N)$. *Предположим, что выполнены следующие условия.*

(i) *Если* $p \in \pi$, *то множество* p*-сингулярных элементов из* A *является объединением* p*-секций группы* N.

(ii) X *когерентно.*

(iii) $V_\pi(N, A:X) = V_\pi(N, N - O_{\pi'}(N) : X)$.

Тогда верны следующие заключения.

(i) *Если* $\zeta \in X$, *то* $(\zeta^\tau, \alpha^\tau)_G = (\zeta_N^\tau, \alpha)_N$ *для всех* $\alpha \in V_\pi(N, A:X)$.

(ii) *Пусть* $X = \{\zeta_s\}$ *и* $\xi = \sum \zeta_s(1)\zeta_s$. *Для каждого* t *существует* $\gamma_t \in M(N)$ *такой, что* $(\gamma_t, \zeta_s) = 0$ *для всех* s *и существует такое целое* a_t, *что*

$$(\zeta_t^\tau)_N = \zeta_t + \frac{a_t}{\zeta_t(1)}\xi + \gamma_t.$$

Кроме того, существуют $\gamma \in V(N)$ *и такое рациональное число* a, *что*

$$\zeta_t^\tau(z) = \zeta_t(z) + \zeta_t(1)\{a\xi(z) + \gamma(z)\} \quad \text{для всех } z \in A.$$

Доказательство. (i) Пусть π_1 — множество всех простых $p \in \pi$, таких, что если $\alpha \in V_\pi(N, A:X)$, то α обращается в нуль на всех

p-сингулярных элементах из N. Положим $\pi_2=\pi-\pi_1$. Пусть $S(p)$, $p\in\pi_2$,— объединение $S_p(\pi, G)$ со всеми p-блоками группы G дефекта 0.

Покажем сначала, что если $\zeta\in X$ и $p\in\pi_2$, то $\varepsilon\zeta^\tau\in S(p)$, где $\varepsilon=1$ или -1.

Выберем $p\in\pi_2$. Пусть $\zeta\in X$ и пусть $\varepsilon=1$ или -1 выбрано так, чтобы функция $\varepsilon\zeta^\tau$ была характером группы G. Пусть A_p — множество всех p-сингулярных элементов из A. В силу условия (i), A_p является объединением p-секций, т. е. (7.2) выполнено, если A заменить на A_p. Кроме того, $V_\pi(N, A_p)\subseteq V_\pi(N, A)$ и τ, определенное для $V_\pi(N, A_p)$, является ограничением на $V_\pi(N, A_p)$ отображения τ, определенного для $V_\pi(N, A)$.

Пусть $X=\{\zeta_s\}$, причем $\zeta=\zeta_1$. Для каждого s положим $\alpha_s=\zeta_s(1)\zeta-\zeta(1)\zeta_s$. Ввиду условия (iii), $\{\alpha_s\}$ является базисом для $V_\pi(N, A:X)$. Поскольку $p\in\pi$, существует такое t, что α_t не обращается в нуль на A_p. Пусть $\alpha_t=\beta_1+\beta_2$, где β_1 обращается в нуль на $N-A_p$, а β_2 обращается в нуль на A_p. Тогда $\beta_1\neq 0$ и, в силу (7.9) (iii) и (7.11) (iii), примененных к $\beta_1\in V_\pi(N, A_p)$, имеем $\beta_1^\tau=(\beta_1^G)^{S(p)}$. Поэтому, по (IV.3.4), $\alpha_t^\tau=\theta+\eta$, где $\theta\in V(G:S(p))$, а η — комплексная линейная комбинация характеров проективных $R[G]$-модулей, не лежащих в $S(p)$. Кроме того, $\theta\neq 0$ и $\alpha_t^\pi=\zeta_t(1)\zeta^\tau-\zeta(1)\zeta_t^\tau$. Таким образом, либо $\varepsilon\zeta^\tau\in S(p)$, либо $\zeta_t(1)\zeta^\tau$ обращается в нуль на всех p-сингулярных элементах группы G. В последнем случае ζ^τ обращается в нуль на всех p-сингулярных элементах группы, и, значит, $\varepsilon\zeta^\tau$ лежит в p-блоке дефекта 0. Следовательно, в любом случае, $\varepsilon\zeta^\tau\in S(p)$.

Пусть $\zeta\in X$. Определим ψ следующим образом:

$$\psi(z)=\begin{cases}\zeta^\tau(z), & \text{если } z \text{ } p\text{-сингулярен для } p\in\pi_2 \text{ и } \pi\text{-секция элемента } z\\ & \text{в } G \text{ лежит в } A,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Поскольку $\varepsilon\zeta^\tau\in\bigcup_{p\in\pi_2}S(p)$, то из (6.5) следует, что ζ^τ постоянна на p-сингулярных π-секциях, которые лежат в A для всех $p\in\pi_2$. Значит, $\psi\in V_\pi(G)$. Поэтому, если $\alpha\in V_\pi(N, A:X)$, то из (7.7) следует, что

$$(\zeta^\tau,\ \alpha^\tau)_G=(\psi,\ \alpha^\tau)_G=(\psi_N,\ \alpha)_N=(\zeta_N^\tau,\ \alpha)_N.$$

(ii) Пусть $(\zeta_t^\tau)_N=\zeta_t+\sum a_{tj}\zeta_j+\gamma_t$, где $(\zeta_j, \gamma_t)=0$ для всех j и t. Тогда из (i) следует, что для всех i, j, t

$$\zeta_j(1)a_{ti}-\zeta_i(1)a_{tj}=((\zeta_t^\tau)_N,\ \zeta_j(1)\zeta_i-\zeta_i(1)\zeta_j)_N-(\zeta_t,\ \zeta_j(1)\zeta_i-\zeta_i(1)\zeta_j)_N=$$
$$=(\zeta_t^\tau,\ \zeta_j(1)\zeta_i^\tau-\zeta_i(1)\zeta_j^\tau)_G-\{\zeta_j(1)\delta_{it}-\zeta_i(1)\delta_{jt}\}=0.$$

Поэтому $\zeta_j(1)a_{ti}=\zeta_i(1)a_{tj}$ для всех i, j и t. Значит, в частности,

$$a_{tj}=\frac{\zeta_j(1)}{\zeta_t(1)}a_{tt} \text{ для всех } j \text{ и } t.$$

Отсюда следует первое равенство из утверждения (ii), если положить $a_t=a_{tt}$.

Если $z\in A$, то $\zeta_s(1)\zeta_t^\tau(z)-\zeta_t(1)\zeta_s^\tau(z)=\zeta_s(1)\zeta_t(z)-\zeta_t(1)\zeta_s(z)$ для всех s и t. Значит, из первого равенства утверждения (ii) следует, что

$$\zeta_s(1)\left\{\frac{a_t}{\zeta_t(1)}\xi(z)+\gamma_t(z)\right\}=\zeta_t(1)\left\{\frac{a_s}{\zeta_s(1)}\xi(z)+\gamma_s(z)\right\}$$

для всех $z\in A$. Отсюда следует второе равенство из утверждения (ii), если положить

$$\gamma=\frac{1}{\zeta_1(1)}\gamma_1 \quad \text{и} \quad a=\frac{a_1}{\zeta_1(1)^2}. \ \square$$

§ 8. π-высоты

В этом параграфе будем применять обозначения § 8 гл. IV. Положим $v(|G|)=a$.

Пусть e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$, $B=B(e)$ — блок, соответствующий e. Пусть $D=D(B)$ — дефектная группа блока B и $d=d(B)$ — дефект блока B. Тогда $v(|G:D(B)|)=a-d(B)$.

В этом параграфе мы, в основном, будем рассматривать $\mathrm{Ch}_R(G, B)$ и $Z_R(G)e$. Заметим, что $\mathrm{Ch}_R(G, B)$ является двойственным пространством к $Z_K(G)e$.

Относительно результатов этого параграфа и близких результатов см. Бруё [1976b], [1978b], [1979], [1980].

Лемма 8.1. *Если* $a\in Z_R(G)e$ *и* $\theta\in\mathrm{Ch}_R(G, B)$, *то*

$$v(\theta(a))\geqslant v(|G:D(B)|).$$

Доказательство. В силу (III.6.6), $e=\mathrm{Tr}_D^G(c)$ для некоторого $c\in R[G]$. Поскольку $a\in Z_R(G)$, имеем $ae=\mathrm{Tr}_D^G(ac)$. Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль D в G. Так как θ — функция классов группы G, то

$$\theta(a)=\theta(ae)=\theta\left(\sum x_i^{-1}acx_i\right)=|G:D|\theta(ac).$$

Отсюда следует результат. $\square$

Для $a\in Z_R(G)e$ обозначим через $s(a)$ такое наибольшее целое, что $\pi^{s(a)}|\theta(a)$ в R для всех $\theta\in\mathrm{Ch}_R(G, B)$. Определим *π-высоту* $h_\pi(a)$ *элемента* a как

$$(\pi^{h_\pi(a)})=(\pi^{s(a)}|G:D|^{-1}),$$

где скобки обозначают дробный идеал в K.

Для $\theta\in\mathrm{Ch}_R(G, B)$ обозначим через $t(\theta)$ наибольшее целое, такое, что $\pi^{t(\theta)}|\theta(a)$ в R для всех $a\in Z_R(G)e$. Определим *π-высоту* $h_\pi(\theta)$ *функции* θ как

$$(\pi^{h_\pi(\theta)})=(\pi^{t(\theta)}|G:D|^{-1}).$$

В силу (8.1), $h_\pi(a)$ и $h_\pi(\theta)$ являются целыми неотрицательными для $a\in Z_R(G)e$ и $\theta\in\mathrm{Ch}_R(G, B)$.

Предположим, что $\chi_u \in B$. В силу (IV.7.1), $v(\chi_u(1)) = v(\chi_u(e))$. Для $a \in Z_R(G)$ имеем $\chi_u(a)/\chi_u(1) = \omega_u(a) \in R$. Поэтому

$$(\chi_u(1)) = (\chi_u(e)) \subseteq (\pi^{h_\pi(\chi_u)} | G:D |) \subseteq (\chi_u(1)).$$

Значит, если $(\pi^m) = (p)$, то $h_\pi(\chi_u)/m$ является высотой характера χ_u. В частности, χ_u имеет высоту 0 тогда и только тогда, когда он имеет π-высоту 0. Эти же рассуждения показывают, что $h_\pi(e) = 0$.

Так как e — примитивный идемпотент из $Z_R(G)$, то $Z_R(G)e$ является локальным кольцом. Значит, $Z_R(G)e/J(Z_R(G)e) \cong \bar{R}$, поскольку K выбрано достаточно большим. Пусть λ — центральный характер $\overline{Z_R(G)e}$. В силу (IV.4.2), $\lambda = \bar{\omega}_u$ для любого $\chi_u \in B$.

Лемма 8.2. *Пусть $a \in Z_R(G)e$. Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Для любой такой $\theta \in \mathrm{Ch}_R(G, B)$, что $h_\pi(\theta) = 0$, $v(\theta(a)) = v(|G:D|)$.*

(ii) *Существует такая $\theta \in \mathrm{Ch}_R(G, B)$, что $v(\theta(a)) = v(|G:D|)$.*

(iii) $h_\pi(a) = 0$.

(iv) $a \notin J(Z_R(G)e)$.

Доказательство. Импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (ii) $\Rightarrow$ (iii) доказываются непосредственно.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Предположим, что $a \in J(Z_R(G)e)$. Тогда $\chi_u(a)/\chi_u(1) = \bar{\omega}_u(a) = 0$ для всех $\chi_u \in B$. Значит, $\theta(a) \equiv 0 \pmod{\pi p^{v(|G:D|)}}$ для всех $\theta \in \mathrm{Ch}_R(G, B)$, и потому $h_\pi(a) \neq 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\theta \in \mathrm{Ch}_R(G, B)$, причем $v(\theta(a)) > p^v$, где $v = v(|G:D|)$. Пусть $\theta = \sum c_u \chi_u$. Тогда

$$\frac{\theta(a)}{p^v} = \sum c_u \frac{\chi_u(a)}{p^v} = \sum c_u \left(\frac{\chi_u(1)}{p^v}\right) \omega_u(a).$$

По условию, $\overline{(\theta(a)/p^v)} = 0$. Поскольку $a \notin J(Z_R(G)e)$, то $\overline{\omega_u(a)} = \lambda(a) \neq 0$ для всех u. Поэтому

$$\sum c_u \left(\frac{\chi_u(1)}{p^v}\right) \equiv 0 \pmod{\pi},$$

и тогда

$$\theta(1) \equiv \sum c_u \chi_u(1) \equiv 0 \pmod{\pi p^v}.$$

Значит, $h_\pi(\theta) \neq 0$. □

Лемма 8.3. *Пусть $\theta \in \mathrm{Ch}_R(G, B)$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(i) *Для каждого $a \in Z_R(G)$, такого, что $h_\pi(a) = 0$, имеет место $v(\theta(a)) = v(|G:D|)$.*

(ii) *Существует такой $a \in Z_R(G)e$, что $v(\theta(a)) = v(|G:D|)$.*

(iii) $h_\pi(\theta) = 0$.

Доказательство. Импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (ii) $\Rightarrow$ (iii) доказываются непосредственно.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Вытекает из того, что (8.2) (iii) влечет (8.2) (i). □

Лемма 8.4. *Пусть $\theta \in \mathrm{Ch}_R(G, B)$. Тогда $h_\pi(\theta) = 0$ в точности при $v(\theta(1)) = v(|G:D|)$.*

Доказательство. Если $\nu(\theta(1))=\nu(|G:D|)$, то, очевидно, $h_\pi(\theta)=0$. Предположим, что $h_\pi(\theta)=0$. Поскольку $h_\pi(e)=0$ и $\nu(\theta(e))=\nu(\theta(1))$, результат следует из (8.3). □

Лемма 8.5. *Пусть p-секция S содержит p-элемент $y\in G$.*

(i) *Если y не сопряжен с элементом из D, то $Z_R(G:S)e=(0)$.*

(ii) *Если y не сопряжен с элементом из $Z(D)$, то $Z_R(G:S)e\subseteq J(Z_R(G)e)$.*

(iii) *Если y сопряжен с элементом из $Z(D)$, то $Z_R(G:S)e\not\subseteq J(Z_R(G)e)$.*

Доказательство. (i) В силу (IV.2.4), $\theta(x)=0$ для всех $x\in S$ и всех $\theta\in \mathrm{Ch}_R(G, B)$. Так как $\mathrm{Ch}_K(G, B)$ — дуальное пространство к $Z_K(G)e$, то отсюда вытекает результат.

(ii) Следует из (1.5).

(iii) Можно предполагать, что $y\in Z(D)$. В силу (III.6.10), существует такой p'-элемент x, что D является S_p-подгруппой группы $C_G(x)$ и $\lambda(\hat{\bar{C}})\neq 0$ для сопряженного класса C, содержащего x, и центрального характера λ алгебры $\bar{R}[G]$, соответствующего блоку B. Пусть $\chi=\chi_u$ — характер высоты 0 из B, C_0 — сопряженный класс группы G, содержащий xy. Так как D является S_p-подгруппой группы $C_G(xy)$ и $\chi(xy)\equiv\chi(x)\not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то $\nu(\chi(xy))=\nu(\chi(x))=0$, и потому

$$\nu(\omega_u(C_0))=\nu(|G:D|)-\nu(\chi(1))=\nu(\omega_u(C))=0.$$

Следовательно, $\lambda(\hat{\bar{C}}_0 e)=\lambda(\hat{\bar{C}}_0)=\overline{\omega_u(C_0)}\neq 0$. Значит, $\hat{C}_0 e\notin J(Z_R(G)e)$, однако $\hat{C}_0 e\in Z_R(G:S)e$. □

Лемма 8.6. *Определим функцию α на G, полагая $\alpha(x)=1$, если x является p-элементом, и $\alpha(x)=0$ в противном случае. Тогда $\alpha^B\in \mathrm{Ch}_R(G, B)$ и $h_\pi(\alpha^B)=0$.*

Доказательство. Пусть $\{q_i\}$ — множество всех простых чисел, отличных от p и делящих $|G|$. Тогда $q_i^{-1}\in R$ для всех i. Значит, по (IV.1.3), $\alpha\in \mathrm{Ch}_R(G)$, и потому $\alpha^B\in \mathrm{Ch}_R(G, B)$.

Пусть $\theta\in \mathrm{Ch}_R(G, B)$, причем $h_\pi(\theta)=0$. Положим $a=\sum\theta(x^{-1})x$. Пусть $S=G_{\mathrm{reg}}$ и δ_S определена как в § 8 гл. IV. Тогда $\delta_S(a)e\in Z_R(G)e$, и, ввиду (IV.8.5),

$$\alpha^B(\delta_S(a)e)=\alpha(\delta_S(a)e)=\alpha(\delta_S(ae))=\alpha(\delta_S(a))=\theta(1).$$

Значит, по (8.3), $h_\pi(\alpha^B)=0$. □

Теорема 8.7 (Бруё [1978b]). *Пусть B — блок группы G с дефектной группой D, e — примитивный центральный идемпотент, соответствующий B, $y\in Z(D)$, S есть p-секция, содержащая y. Пусть $a=ae=\sum_{x\in S}a_x x$. Тогда $\nu(a_y)\geqslant\nu(|C_G(y):D|)$. Кроме того, $\nu(a_y)=\nu(|C_G(y):D|)$ тогда и только тогда, когда $a\notin J(Z_R(G)e)$.*

Доказательство. Пусть α определена как в (8.6). В силу (8.1), $\nu(\alpha^B(a))\geqslant\nu(|G:D|)$. Ввиду (8.2), равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=ae\notin J(Z_R(G)e)$. Поскольку

$$\alpha^B(a)=\alpha(ae)=\alpha(a)=a_y|G:C_G(y)|,$$

равенство достигается тогда и только тогда, когда $\nu(a_y)=\nu(|C_G(y):D|)$. □

Следствие 8.8 (Брауэр [1976a]). *Пусть B — блок с дефектной группой D. Тогда*

$$\nu\left(\sum\chi_u(1)^2\right)=\nu\left(\sum\varphi_i(1)\Phi_i(1)\right)=\nu\left(|G:D||G|\right),$$

где χ_u и φ_i пробегают соответственно неприводимые характеры и неприводимые характеры Брауэра из B.

Доказательство. Пусть e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$, соответствующий B. В силу (IV.7.1) и (IV.7.2), $e\in Z_R(G:G_{\mathrm{reg}})$ и $e=\sum a_x x$, причем $|G|a_1=\sum\chi_u(1)^2=\sum\varphi_i(1)\Phi_i(1)$. Поскольку $e\notin J(Z_R(G)e)$, результат вытекает из (8.7). □

§ 9. Подсекции

Результаты этого параграфа принадлежат, в основном, Брауэру [1968], [1971a], хотя изложение в определенной мере основано на работе Бруё [1978b]. Применяемые обозначения те же, что и в предыдущем параграфе и в § 8 гл. IV.

Пусть y — некоторый p-элемент из G, B — блок группы G. Если $\chi_u\in B$ и $d^y_{ui}\neq 0$, то, по второй основной теореме о блоках (IV.6.1), φ^y_j принадлежит такому блоку $\tilde{B}$ группы $C_G(y)$, что $\tilde{B}^G=B$. Для фиксированных y и j про столбец высших чисел разложения d^y_{uj} будем говорить, что он принадлежит p-секции S, содержащей y, и будем говорить также, что он связан с блоком B.

Пусть $\tilde{B}$ — блок группы $C_G(y)$, причем $\tilde{B}^G=B$. Множество столбцов d^y_{uj}, где φ^y_j пробегает все неприводимые характеры Брауэра из $\tilde{B}$, называется *подсекцией, ассоциированной с B*, или просто *подсекцией*. Определение подсекции зависит, очевидно, от y и B. Подсекции будем обозначать через $S(y,\tilde{B})$.

Подсекция $S(y,\tilde{B})$ называется *старшей подсекцией*, если $\tilde{B}$ и $B=\tilde{B}^G$ имеют равные дефекты.

Лемма 9.1. *Если $S(y,\tilde{B})$ — старшая подсекция, то $y\in Z(\tilde{D})$, где $\tilde{D}$ — дефектная группа блока $\tilde{B}$. Кроме того, $\tilde{D}$ является дефектной группой блока $B=\tilde{B}^G$.*

Доказательство. Очевидно ввиду (6.1). □

Пусть y — некоторый p-элемент из G, $\tilde{B}$ — блок группы $C_G(y)$. Определим линейное отображение $m^{(y,\tilde{B})}\colon \mathrm{Ch}_K(G)\to\mathrm{Ch}_K(G:S)$, полагая

$$m^{(y,\tilde{B})}(\theta)=b^y\left(\{d^y(\theta)^{\tilde{B}}\}\right),$$

где $\theta\in\mathrm{Ch}_K(G)$, а b^y и d^y определены в § 8 гл. IV. Определим

$$\mu^{(y,\tilde{B})}\colon\ Z_K(G)\to Z_K(G:S),$$

полагая

$$\mu^{(y,\tilde{B})}(a)=\beta^y\left(\tilde{e}\delta^y(a)\right),\quad a\in Z_K(G),$$

где β^y и δ^y определены в § 8 гл. IV, а $\tilde{e}$ — примитивный центральный идемпотент из $R[C_G(y)]$, соответствующий $\tilde{B}$.

В силу (IV.8.6) и (IV.8.7),

$$m^{(y,\tilde{B})} \circ \theta = \theta \circ \mu^{(y,\tilde{B})}, \quad \theta \in \mathrm{Ch}_K(G).$$

Из определений β^y и δ^y следует, что если $a \in Z_K(C_G(y) : C_G(y)_{\mathrm{reg}})$, то $\delta^y \circ \beta^y(a) = a$. Значит, $m^{(y,\tilde{B})}$ и $\mu^{(y,\tilde{B})}$ являются идемпотентами.

Положим

$$\chi_u^{(y,\tilde{B})} = m^{(y,\tilde{B})}(\chi_u), \quad \omega_u^{(y,\tilde{B})} = \frac{1}{\chi_u(1)} \chi_u^{(y,\tilde{B})}.$$

Тогда $\chi_u^{(y,\tilde{B})} = \chi_u \circ \mu^{(y,\tilde{B})}$ и $\omega_u^{(y,\tilde{B})} = \omega_u \circ \mu^{(y,\tilde{B})}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\chi_u^{(y,\tilde{B})}(yx) = \sum_{\varphi_j \in \tilde{B}} d_{uj}^y \varphi_j(x), \quad x \in C_G(y)_{\mathrm{reg}},$$

и если $a \in Z_R(G)$, то $\omega_u^{(y,\tilde{B})} \in R$. Кроме того, если χ_u и χ_v лежат в одном блоке, то

$$\omega_u^{(y,\tilde{B})}(a) \equiv \omega_v^{(y,\tilde{B})}(a) \pmod{\pi}, \quad a \in Z_R(G).$$

Теорема 9.2 (Брауэр [1968, (4A), (4C)]). *Пусть D — дефектная группа блока B группы G, $y \in Z(D)$.*

(i) *Существует старшая подсекция $S(y, \tilde{B})$, ассоциированная с B.*

(ii) *Пусть $S(y, \tilde{B})$ — старшая подсекция, ассоциированная с $\tilde{B}^G = B$. Если $\chi_u \in B$, то*

$$\nu(\chi_u^{(y,\tilde{B})}(y)) = \nu(|C_G(y) : D|) + h(\chi_u),$$

где $h(\chi_u)$ — высота χ_u.

Доказательство. (i) Пусть e — примитивный центральный идемпотент из $R[G]$, соответствующий B, $\{\tilde{B}_i\}$ — множество всех тех блоков группы $C_G(y)$, для которых $\tilde{B}_i^G = B$, $\tilde{e}_i$ — примитивный центральный идемпотент из $R[C_G(y)]$, соответствующий $\tilde{B}_i$. Обозначим p-секцию, содержащую y, через S.

В силу (8.5), существует такой $a \in Z_R(G : S)e$, что $a \notin J(Z_R(G : S)e)$. Согласно (8.7), $\nu(a_y) = \nu(|C_G(y) : D|)$, где $a = \sum a_x x$. По (IV.8.7), $\delta^y(a) = \delta^y(ea) = \sum_i \tilde{e}_i \delta^y(a)$. Коэффициент при 1 в $\delta^y(a)$ равен a_y. Пусть $\tilde{a}_i$ обозначает коэффициент при 1 в $\tilde{e}_i \delta^y(a)$. Тогда $a_y = \sum \tilde{a}_i$. Значит, существует такой j, что

$$\nu(a_j) \leqslant \nu(a_y) = \nu(|C_G(y) : D|).$$

Пусть $\tilde{D}_j$ — дефектная группа $\tilde{B}_j$. В силу (6.1) можно предполагать, что $\tilde{D}_j \subseteq D$. Тогда (8.7), примененная к группе $C_G(y)$ с заменой y на 1, влечет, что

$$\nu(|C_G(y) : D|) \leqslant \nu(|C_G(y) : \tilde{D}_j|) \leqslant \nu(a_j) \leqslant \nu(|C_G(y) : D|).$$

Поэтому должно быть выполнено равенство и, следовательно, $D=\tilde{D}_j$, что и утверждалось.

(ii) Пусть a — сумма всех элементов из G, сопряженных с y. Тогда $a\in Z_R(G)$ и $\delta^y(a)=1$. Значит, коэффициент при y в $\mu^{(y,\ \tilde{B})}(a)=\beta^y(\tilde{e})$ совпадает с коэффициентом c при 1 в $\tilde{e}$. Поскольку $\tilde{e}\notin J(Z_R(C_G(y))\tilde{e})$, из теоремы (8.7), примененной к $C_G(y)$ с заменой y на 1, следует, что $v(c)=v(|C_G(y):D|)$. Значит, $\mu^{(y,\ \tilde{B})}(a)\notin J(Z_R(G)e)$, ввиду (8.7). Тем самым, если $\chi_u\in B$, то

$$\omega_u^{(y,\ \tilde{B})}(a)\equiv\omega_u(\mu^{(y,\ \tilde{B})}(a))\not\equiv 0 \pmod{\pi},$$

что эквивалентно доказываемому утверждению. □

Пусть y есть p-элемент из G, $\tilde{B}$ — блок группы $C_G(y)$, χ_u, χ_v — неприводимые характеры $\tilde{B}^G$. Положим

$$m_{uv}^{(y,\ \tilde{B})}=\frac{1}{|C_G(y)|}\sum_{x\in C_G(y)_{\mathrm{reg}}}\chi_u^{(y,\ \tilde{B})}(yx)\chi_v^{(y,\ \tilde{B})}(yx)^*,$$

где * обозначает комплексное сопряжение. В случае, когда $y=1$ и P является S_p-подгруппой группы G, имеем $|P|m_{uv}^{(1,B)}=a_{uv}$, где a_{uv} определены в § 4 гл. IV. Таким образом, введенные числа являются обобщениями на случай произвольной секции чисел a_{uv}. Заметим, что если σ — автоморфизм поля, то $(m_{uv}^{(y,\ \tilde{B})})^\sigma=m_{uv}^{(y',\ \tilde{B}')}$ для подходящих y' и B', которые не зависят от u и v.

Лемма 9.3. *Зафиксируем u и v. Тогда* $\sum_{(y,\ \tilde{B})}m_{uv}^{(y,\ \tilde{B})}=\delta_{uv}$.

Доказательство. Ясно из определения. □

Теорема 9.4. *Пусть y есть p-элемент из G, $\tilde{B}$ — блок группы $C_G(y)$, χ_u, χ_v, $\chi_w\in\tilde{B}^G$, $\tilde{d}$, d — дефекты блоков $\tilde{B}$ и $B=\tilde{B}^G$ соответственно. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *$p^d m_{uv}^{(y,\ \tilde{B})}$ — целое алгебраическое число и*

$$(m^{(y,\ \tilde{B})}(\chi_u),\ \chi_v)_G=m_{uv}^{(y,\ \tilde{B})}=\sum_{\varphi_i^y,\ \varphi_j^y\in\tilde{B}}d_{ui}^y\gamma_{ij}^y(d_{vj}^y)^*,$$

где $(\gamma_{ij}^y)^{-1}$ — матрица Картана блока $\tilde{B}$, а $*$ обозначает комплексное сопряжение.

(ii) $\sum_u m_{vu}^{(y,\ \tilde{B})}(m_{wu}^{(y,\ \tilde{B})})^*=m_{vw}^{(y,\ \tilde{B})}$;

(iii) *Если $l(\tilde{B})$ — число неприводимых характеров Брауэра в $\tilde{B}$, то*

$$\sum_u m_{uu}^{(y,\ \tilde{B})}=l(\tilde{B}).$$

(iv) *Предположим, что высота χ_w равна 0, а h_u, h_v — высоты характеров χ_u и χ_v соответственно. Если $h_u\geqslant h_v$, то*

$$p^d m_{uu}^{(y,\ \tilde{B})}\equiv p^d\frac{\chi_u(1)\chi_v(1)}{\chi_w(1)^2}m_{ww}^{(y,\ \tilde{B})} \pmod{\pi p^{h_u}}.$$

Кроме того, $v(m_{uv}^{(y,\ \tilde{B})})\geqslant h_u-d$, и равенство достигается лишь тогда, когда $(y,\ \tilde{B})$ — старшая подсекция и $h_v=0$.

Доказательство. Первое равенство следует из определения. Далее,

$$(m^{(y,\tilde{B})}(\chi_u),\ \chi_v)_G=\frac{1}{|C_G(y)|}\sum_{\varphi_i^y,\ \varphi_j^y\in B}\ \sum_{x\in C_G(y)_{rcg}} d_{ui}^y\varphi_i^y(x)(d_{vj}^y)^*\varphi_j(x^{-1}).$$

В силу (IV.6.2), это приводит ко второму равенству. Так как дефект блока $\tilde{B}$ равен $\tilde{d}$, то из (IV.4.16) следует, что $p^d(\gamma_{ij}^y)$ — матрица с целыми элементами. Значит, $p^d m_{uv}^{(y,\tilde{B})}$ — целое алгебраическое.

(ii) В силу (i),

$$m_{vw}^{(y,\tilde{B})}=(m^{(y,\tilde{B})}(\chi_v),\ m^{(y,\tilde{B})}(\chi_w))_G=$$

$$=\sum_u(m^{(y,\tilde{B})}(\chi_v),\ \chi_u)_G(m^{(y,\tilde{B})}(\chi_w),\ \chi_u)_G^*=\sum_u m_{vu}^{(y,\tilde{B})}(m_{wu}^{(y,\tilde{B})})^*.$$

(iii) По определению, $m_{uv}^{(y,\tilde{B})}=(m_{vu}^{(y,\tilde{B})})^*$. Значит, если $M=M^{(y,\tilde{B})}=(m_{uv}^{(y,\tilde{B})})$, то из (ii) следует, что $M^2=M$. Поэтому след матрицы M совпадает с ее рангом. По определению, $\sum_u m_{uu}^{(y,\tilde{B})}$ является следом матрицы M. В силу (i), ранг M равен рангу матрицы Картана блока $\tilde{B}$, который в свою очередь равен $l(\tilde{B})$.

(iv) По определению,

$$m_{uv}^{(y,\tilde{B})}=\frac{\chi_u(1)}{|G|}\sum\omega_u(\hat{C})\chi_v(yx)^*,$$

где C пробегает сопряженные классы из p-секции, содержащей y, и $yx\in C$. Поскольку χ_u и χ_w лежат в одном блоке,

$$\frac{|G|}{\chi_u(1)}m_{uv}^{(y,\tilde{B})}\equiv\frac{|G|}{\chi_w(1)}m_{wv}^{(y,\tilde{B})}\pmod{\pi},$$

так как, по (i), $p^d m_{uv}^{(y,\tilde{B})}$ — целое алгебраическое. Поскольку высота χ_w равна 0,

$$p^d m_{uv}^{(y,\tilde{B})}\equiv p^d\frac{\chi_u(1)}{\chi_w(1)}m_{wv}^{(y,\tilde{B})}\pmod{\pi p^{h_u}}.$$

Аналогично,

$$p^d m_{wv}^{(y,\tilde{B})}\equiv p^d\frac{\chi_v(1)}{\chi_w(1)}m_{ww}^{(y,\tilde{B})}\pmod{\pi p^{h_v}}.$$

Отсюда вытекает требуемое сравнение.

Так как $\nu(p^{\tilde{d}}m_{ww}^{(y,\tilde{B})})\geqslant 0$, то

$$\nu\left(p^d\frac{\chi_u(1)\chi_v(1)}{\chi_w(1)^2}m_{ww}^{(y,\tilde{B})}\right)\geqslant h_u+h_v+d-\tilde{d}.$$

Тогда из доказанного сравнения следует, что $\nu(m_{uv}^{(y,\tilde{B})})\geqslant h_u-d$, и если достигается равенство, то $h_u+h_v+d-\tilde{d}=h_u-d$. Отсюда следует результат, поскольку $\tilde{d}\leqslant d$. □

Теорема 9.5 (Брауэр [1968, (5H)]). *Пусть B — блок группы G с дефектной группой D, $y\in Z(D)$, $S(y, \tilde{B})$ — старшая подсекция, ассоциированная с B. Предположим, что χ_u, $\chi_w\in B$, а высота χ_w равна 0. Пусть h_u — высота χ_u. Тогда*

$$\nu\left(m_{uw}^{(y,\ \tilde{B})}\right)=h_u-\nu(|D|).$$

Доказательство. Для $\theta\in \mathrm{Ch}_K(G)$ положим

$$\hat{\theta}=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\theta\left(x^{-1}\right)x.$$

Тогда $\hat{\theta}\in Z_K(G)$ и $\theta_1(\hat{\theta}_2)=(\theta_1,\ \theta_2)$. В силу (9.4),

$$m_{uw}^{(y,\ \tilde{B})}=\left(m^{(y,\ \tilde{B})}(\chi_u),\ \chi_w\right)_G=m^{(y,\ \tilde{B})}(\chi_u)(\hat{\chi}_w)=\chi_u\left(\mu^{(y,\ \tilde{B})}(\hat{\chi}_w)\right)=$$

$$=\chi_u^{(y,\ \tilde{B})}(\hat{\chi}_w)=\chi_u(1)\,\omega_u^{(y,\ \tilde{B})}(\hat{\chi}_w)=\frac{\chi_u(1)}{|G|}\omega_u\left(\mu^{(y,\ \tilde{B})}\left(\sum\chi_w\left(x^{-1}\right)x\right)\right)=$$

$$=\frac{\chi_u(1)}{|G|}\omega_u\left(\sum\chi_w^{(y,\ \tilde{B})}\left(x^{-1}\right)x\right).$$

Поскольку высота χ_w равна 0, из (9.2) следует, что

$$\nu\left(\chi_w^{(y,\ \tilde{B})}\left(y^{-1}\right)\right)=\nu\left(\chi_w^{(y,\ \tilde{B})}(y)\right)=\nu(|C_G(y):D|).$$

Тогда, в силу (8.7), $\sum\chi_w^{(y,\ \tilde{B})}(x^{-1})\,x\notin J(Z_R(G))$. Следовательно,

$$\nu\left(\omega_u\left(\sum\chi_w^{(y,\ \tilde{B})}\left(x^{-1}\right)x\right)\right)=0.$$

Поэтому

$$\nu\left(m_{uw}^{(y,\ \tilde{B})}\right)=\nu\left(\chi_u(1)\right)-\nu(|G|)=h_u-\nu(|D|).\ \square$$

Теорема 9.6. *Пусть B — блок с дефектной группой D, $\tilde{B}$ — такой блок группы $DC_G(D)$, что $\tilde{B}^G=B$, $T(\tilde{B})$ — группа инерции $\tilde{B}$ в $N_G(D)$. Пусть, далее, $Y\subseteq Z(D)$ — полное множество представителей сопряженных классов группы G, которые имеют непустое пересечение с $Z(D)$. Пусть, наконец, M_y, $y\in Y$, обозначает полное множество представителей двойных $(T(\tilde{B}),\ N_G(D)\cap C_G(y))$-классов в $N_G(D)$. Тогда каждая подсекция $S_{y,x}=S(y,\ (\tilde{B}^x)^{C_G(y)})$, где $y\in Y$, $x\in M_y$, старшая. Обратно, каждая старшая подсекция, ассоциированная с B, сопряжена ровно с одной подсекцией $S_{y,x}$.*

Доказательство. Если $y\in Z(D)$, то $DC_G(D)\subseteq C_G(y)$. Значит, если $y\in Y$ и $x\in M_y$, то из (III.9.2) следует, что

$$\left((\tilde{B}^x)^{C_G(y)}\right)^G=(\tilde{B}^x)^G=\tilde{B}^G=B.$$

Поскольку $D\lhd DC_G(D)$, D лежит в дефектной группе блока $\tilde{B}$. Поэтому, ввиду (III.9.6), $S_{y,x}$ — старшая подсекция.

Обратно, предположим, что $S(y,\ B)$ — старшая подсекция, ассоциированная с B. После замены y на его сопряженный, можно считать, учитывая (9.1), что $y\in Y$. Значит, $DC_G(D)\subseteq C_G(y)$. В силу (5.2), $\hat{B}=\tilde{B}_0^{C_G(y)}$ для некоторого блока $\tilde{B}_0$ группы $DC_G(D)$ и $\tilde{B}_0=\tilde{B}^x$ для некоторого $x\in N_G(D)$. Очевидно, x можно взять из M_y.

Предположим, что $S_{y,x}$ сопряжена в G с $S_{y',x'}$, где $y, y' \in Y$, $x \in M_y$, $x' \in M_{y'}$. Тогда существует такой $z \in G$, что

$$y^z = y', \quad \{(\tilde{B}^x)^{C_G(y)}\}^z = (\tilde{B}^{x'})^{C_G(y')}. \tag{9.7}$$

Отсюда, в частности, следует, что $C_G(y)^z = C_G(y')$ или, эквивалентно, что $C_G(y)z = zC_G(y')$. Тогда

$$(\tilde{B}^{xz})^{C_G(y')} = (\tilde{B}^{x'})^{C_G(y')}.$$

Блок группы $C_G(y')$, стоящий в левой части последнего равенства, имеет дефектную группу $D^{xz} = D^z$, тогда как блок из правой части — группу $D^{x'} = D$. Значит, D сопряжена с D^z в $C_G(y')$. Следовательно, в (9.7) z можно выбрать из $N_G(D)$. Тогда из первого равенства в (9.7) следует, что $y = y'$, поскольку $y, y' \in Y$. Значит, $z \in N_G(D) \cap C_G(y)$. Тогда (9.7) приводит к равенству $(\tilde{B}^{xz})^{C_G(y)} = (\tilde{B}^{x'})^{C_G(y)}$. Следовательно, из (5.2), примененного к $C_G(y)$, следует, что $\tilde{B}^{xz}$ сопряжен с $\tilde{B}^{x'}$ в $N_G(D) \cap C_G(y)$. Следовательно, $x' \in T(\tilde{B})x(N_G(D) \cap C_G(y))$, что и влечет доказываемый результат. □

Пусть B — блок группы G с дефектной группой D, $\tilde{B}$ — такой блок группы $DC_G(D)$, что $\tilde{B}^G = B$, и $T(\tilde{B})$ — группа инерции блока B в $N_G(D)$. Тогда $e = |T(\tilde{B}) : DC_G(D)|$ называется *инерционным индексом* блока B или *индексом инерции* блока B.

Очевидно, инерционный индекс e блока B является целым числом, зависящим лишь от B. В силу (5.2), $e \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Следствие 9.8. *Пусть B — блок с дефектной группой D, $\tilde{B}$ — такой блок группы $DC_G(D)$, что $\tilde{B}^G = B$, и $T(\tilde{B})$ — группа инерции блока $\tilde{B}$ в $N_G(D)$. Пусть, далее, e — инерционный индекс блока B, $y \in Z(D)$, C — сопряженный класс группы G, содержащий y. Обозначим через n_B^y число подсекций, ассоциированных с B, вида $S(y', \tilde{B}')$, где $y' \in Z(D) \cap C$, а через n_B — число сопряженных классов старших подсекций, ассоциированных с B. Тогда n_B^y равно числу $T(\tilde{B})$-сопряженных классов группы $Z(D) \cap C$. Кроме того,*

$$\frac{1}{e}|Z(D)| \leqslant n_B \leqslant |Z(D)|.$$

Доказательство. Пусть Y и M_y, где $y \in Y$, определены, как в (9.6). В силу (9.6), $n_B^y = \sum_{y \in Y \cap C} |M_y|$. Отсюда следует первое утверждение. Каждый двойной $(T(\tilde{B}), N_G(D) \cap C_G(y))$-смежный класс содержит не больше чем e смежных классов по подгруппе $N_G(D) \cap C_G(y)$. Значит,

$$|M_y| \leqslant |N_G(D) : N_G(D) \cap C_G(y)| \leqslant e|M_y|.$$

В силу (9.6), $n_B = \sum_{y \in Y} |M_y|$ и $|Z(D)| = \sum_{y \in Y} |N_G(D) : N_G(D) \cap C_G(y))$. Следовательно, $n_B \leqslant |Z(D)| \leqslant e n_B$. □

Лемма 9.9. *Пусть B — блок дефекта d, h — максимум высот неприводимых характеров из B, n_B — число сопряженных классов старших подсекций, ассоциированных с B. Тогда $n_B \leqslant p^{d-h}$, причем $n_B < p^{d-h}$, если $h > 0$.*

Доказательство. Пусть χ_u — неприводимый характер из B высоты h.

Обозначим через $S(y, \tilde{B})$ старшую подсекцию, ассоциированную с B. В силу (9.2), $m_{uu}^{(y,\tilde{B})} \neq 0$. По (9.4) (i) и (iv), $p^{d-h} m_{uu}^{(y,\tilde{B})}$ — вполне положительное алгебраическое целое число. Согласно (9.3), $\sum p^{d-h} m_{uu}^{(y,\tilde{B})} \leqslant p^{d-h}$, где сумма распространяется на все старшие подсекции, ассоциированные с B. Тогда из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует

$$1 \leqslant \{\prod p^{d-h} m_{uu}^{(y,\tilde{B})}\}^{1/n_B} \leqslant \frac{1}{n_B} \sum p^{d-h} m_{uu}^{(y,\tilde{B})} \leqslant \frac{1}{n_B} p^{d-h}.$$

Значит, $n_B \leqslant p^{d-h}$. Если достигается равенство, то $m_{uu}^{(y,\tilde{B})} = p^{-(d-h)}$ для всех старших подсекций и, в частности, $m_{uu}^{(1,B)} = p^{-(d-h)}$. Поэтому $\nu(m_{uu}^{(1,B)}) = h - d$. В силу (9.4) (iv), $h = 0$. □

Следствие 9.10. *Пусть B — блок с дефектной группой D, $|D| = p^d$, e — инерционный индекс блока B, n — такое наибольшее целое число, что $p^n \leqslant e$. Пусть, далее, h — высота неприводимого характера из B. Тогда*

$$h \leqslant n + d - \nu(|Z(D)|).$$

Доказательство. В силу (9.8) и (9.9), $|Z(D)|/e \leqslant n_B \leqslant p^{d-h}$. Значит, $p^h |Z(D)| \leqslant p^d e < p^{d+n+1}$. Поэтому $p^h |Z(D)| \leqslant p^{d+n}$. □

Следствие 9.11. *Сохраним обозначения следствия* 9.10. *Пусть p^r — индекс в группе D ее подгруппы Фраттини. Если $d > 0$, то*

$$h < d + \frac{1}{2} r(r+1) - \nu(|Z(D)|).$$

Доказательство. В силу (5.2), $T(D)/DC_G(D)$ изоморфна p'-подгруппе группы $\mathrm{GL}_r(p)$. Значит,

$$e \leqslant \prod_{i=1}^{r} (p^i - 1) < p^{r(r+1)/2},$$

так как $r > 0$. Результат теперь вытекает из (9.10). □

Следствие 9.12. *Предположим, что B имеет абелеву дефектную группу ранга $r > 0$. Тогда высота неприводимого характера из B не больше* $\frac{1}{2} r(r+1)$.

Доказательство. Очевидно, ввиду (9.11). □

Оценка в (9.11) крайне грубая. В (9.11) и (9.12) можно произвести очевидные улучшения. Несмотря на это, методы доказательств (9.11) и (9.12) недостаточно сильны для получения ответа на вопрос IX из главы IV.

Теорема 9.13. *Пусть B — блок дефекта d с абелевой дефектной группой D, $k = k(B)$ — число неприводимых характеров в B. Предположим, что инерционный индекс блока B равен* 1. *Тогда B содержит единственный неприводимый характер Брауэра, $k(B) = p^d$, каждый*

неприводимый характер из B имеет высоту 0, *каждое из чисел разложения равно* 1 *и единственный инвариант Картана равен* p^d.

Доказательство. В силу (9.8), существует не менее чем p^d подсекций, ассоциированных с B. Тогда, по (IV.6.6) (ii), $k(B) \geqslant p^d$. Следовательно, учитывая (IV.4.21), достаточно показать, что B содержит ровно один неприводимый характер Брауэра. Докажем это индукцией по $|G|$.

Если $D \subseteq Z(G)$, то результат следует из (4.6). Предположим, что $D \not\subseteq Z(G)$. Выберем $y \in D$, $y \notin Z(G)$. Пусть $S(y, \tilde{B})$ — подсекция, ассоциированная с B. Поскольку D абелева, то эта подсекция старшая. Обозначим через $\{\chi_u\}$ множество всех неприводимых характеров из B. Так как D является дефектной группой блока $\tilde{B}$, то инерционный индекс блока $\tilde{B}$ равен 1. Так как $y \notin Z(G)$, то предположение индукции можно применить к $C_G(y) \neq G$. Тогда $\tilde{B}$ обладает единственным неприводимым характером Брауэра φ_i^y. Значит, матрица Картана блока $\tilde{B}$ равна (p^d). В силу (9.5) и (9.4) (i), $d_{ui}^y \neq 0$ для всех u. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим показывает, что

$$1 \leqslant \{\prod_u |d_{ui}^y|^2\}^{1/k} \leqslant \frac{1}{k} \sum_u |d_{ui}^y|^2.$$

Поэтому

$$k \leqslant \sum_u |d_{ui}^y|^2 \leqslant p^d.$$

Поскольку существует p^d подсекций, ассоциированных с B, то из (IV.6.5) следует, что $\tilde{B}$ содержит единственный неприводимый характер Брауэра для каждой такой подсекции $S(y, \tilde{B})$. Это верно, в частности, и для $S(1, B)$. □

Если в (9.13) не предполагать, что D абелева, результат, как легко видеть, становится неверным. Достаточно рассмотреть, например, случай $G = D$. Некоторые обобщения (9.13) были получены Бруё и Пьюджем [1980]. Они значительно более сложные, чем (9.13).

Докажем теперь предварительный технический результат.

Лемма 9.14. *Пусть* (g_{ij}) — *положительно определенная симметрическая матрица с целыми коэффициентами,* Q — *соответствующая эрмитова форма,* q — *минимум* $Q(e, e)$ *по всем ненулевым векторам* e *с целыми координатами. Пусть* ε — *примитивный корень* p^n*-й степени из* 1 *для некоторого* n, tr — *след* $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ *над* $\mathbf{Q}$. *Если* α — *ненулевой вектор с целыми алгебраическими координатами, принадлежащими* $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, *то* $\operatorname{tr}(Q(\alpha, \alpha)) \geqslant [\mathbf{Q}(\varepsilon) : \mathbf{Q}]_q = p^{n-1}(p-1)q$.

Доказательство. Положим $t = p^{n-1}(p-1)$. Пусть $\alpha = \sum_{i=0}^{t-1} e_i \varepsilon^i$, где каждый из e_i является вектором с целыми координатами. Тогда $Q(\alpha, \alpha) = \sum_{i,j=0}^{t-1} \varepsilon^{i-j} Q(e_i, e_j)$. Так как $\operatorname{tr}(1) = t$, $\operatorname{tr}(\varepsilon^i) = -p^{n-1}$, если $i \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$, но $i \not\equiv 0 \pmod{p^n}$, и $\operatorname{tr}(\varepsilon^i) = 0$ в противном случае, то

$$\operatorname{tr}(Q(\alpha, \alpha)) = p^{n-1} \sum_{s=0}^{t-1} A_s, \tag{9.15}$$

где

$$A_s = -\sum_{i,j} Q(e_i, e_j) + p\sum_i Q(e_i, e_i),$$

когда i и j пробегают все вычеты s по $\bmod p^{n-1}$ и $0 \leqslant i, j \leqslant t$. Это равенство можно записать иначе:

$$A_s = \sum_{i<j} Q(e_i - e_j, e_i - e_j) + \sum_i Q(e_i, e_i), \tag{9.16}$$

где i, j те же, что и выше.

Для фиксированного s положим $N_0 = N_0^s$ равным числу тех i, для которых $0 \leqslant i \leqslant t$, $i \equiv s \pmod{p^{n-1}}$ и $e_i = 0$. Положим также $N_1 = N_1^s$ равным числу тех i, для которых $0 \leqslant i < t$, $i \equiv s \pmod{p^{n-1}}$ и e_i — ненулевой вектор. Тогда $N_0 + N_1 = p - 1$.

Если $N_0 = p-1$, то $A_s = 0$. Если $N_0 = 0$, то второе слагаемое в правой части (9.16) не меньше $(p-1)q$ и, значит, $A_s \geqslant (p-1)q$. Если $0 < N_0 < p-1$, то первое слагаемое в правой части (9.16) не меньше $N_0 N_1 q \geqslant N_0 q$, а второе — не меньше $N_1 q$. Поэтому $A_s \geqslant (p-1)q$. Поскольку $\alpha \neq 0$, некоторый из векторов e_i ненулевой. Значит, $A_s \geqslant 0$ для всех s и $A_s \geqslant (p-1)q$ по крайней мере для одного s. Результат теперь следует из (9.15). □

Теорема 9.17. *Пусть B — блок дефекта d, $S(y, \tilde{B})$ — старшая подсекция, ассоциированная с B. Обозначим через $k(B)$ число неприводимых характеров в B, а через $l(\tilde{B})$ — число неприводимых характеров Брауэра в $\tilde{B}$.*

(i) *Пусть $\tilde{C}$ — матрица Картана блока $\tilde{B}$, $\tilde{Q}$ — квадратичная форма, соответствующая матрице $p^d \tilde{C}^{-1}$, $q(\tilde{B})$ — минимум значений $\tilde{Q}$ на множестве всех ненулевых векторов с целыми координатами. Тогда $q(\tilde{B})k(B) \leqslant p^d l(\tilde{B})$.*

(ii) *Если B не содержит неприводимых характеров положительной высоты, то $k(B)^2 \leqslant p^{2d} l(\tilde{B})$.*

Доказательство. Пусть $\{\chi_u\}$ — множество всех неприводимых характеров в B. Выберем n таким, чтобы для примитивного корня ε степени p^n из 1 выполнялось условие $m_{uv}^{(y,\tilde{B})} \in \mathbf{Q}(\varepsilon)$ для всех u, v.

(i) В силу (9.5), $m_{uw}^{(y,\tilde{B})} \neq 0$, если высота χ_w равна 0. Значит, по (9.4) (ii),

$$m_{uu}^{(y,\tilde{B})} = \sum_v |m_{uv}^{(y,\tilde{B})}|^2 > 0 \quad \text{для всех } u.$$

Согласно (9.4) (i), $p^d m_{uu}^{(y,\tilde{B})} = \tilde{Q}(\alpha, \alpha)$, где $\alpha = (d_{ui}^y)$. Поэтому, по (9.14), $p^{n-1}(p-1)q(\tilde{B}) \leqslant \operatorname{tr}(p^d m_{uu}^{(y,\tilde{B})})$. Если эти неравенства просуммировать по всем u, то из (9.4) (iii) следует, что

$$p^{n-1}(p-1)q(\tilde{B})k(B) \leqslant \operatorname{tr}(p^d l(\tilde{B})) = p^{n-1}(p-1)p^d l(\tilde{B}).$$

Отсюда вытекает результат.

(ii) В силу (9.5), $p^d m_{uv}^{(y,\tilde{B})}$ является ненулевым целым алгебраическим числом для всех u, v. Согласно (9.4) (ii), $\sum_u |m_{vu}^{(y,\tilde{B})}|^2 = m_{vv}^{(y,\tilde{B})}$. Если

$k=k(B)$ и $t=p^{n-1}(p-1)$, то неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим влечет

$$1\leqslant\{\prod_{\sigma,u}p^{2d}|m_{uv}^{(y,\ \tilde{B})\sigma}|^2\}^{1/kt}\leqslant\frac{1}{kt}\sum_{\sigma}\sum_{u}p^{2d}|m_{uv}^{(y,\ \tilde{B})\sigma}|^2=\frac{1}{kt}\sum_{\sigma}p^{2d}m_{vv}^{(y,\ \tilde{B})\sigma},$$

где σ пробегает группу Галуа поля $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ над $\mathbf{Q}$. Если эти неравенства просуммировать по v, то из (9.4) (iii) получим

$$k\leqslant\frac{1}{kt}\sum_{\sigma}\sum_{v}p^{2d}m_{vv}^{(y,\ \tilde{B})\sigma}=\frac{1}{kt}tp^{2d}l(\tilde{B})=\frac{1}{k}p^{2d}l(\tilde{B}).\ \square$$

§ 10. Низшие дефектные группы

Настоящий параграф содержит результаты Брауэра [1969а] и переформулировки части из них, выполненные Иидзукой [1972]. Близкие результаты можно найти у Иидзуки и Ито [1972]. Брауэр [1970] применил эти идеи для получения альтернативного доказательства первой основной теоремы о блоках (III.9.7). Другой подход к этим результатам можно найти у Бруё [1979]. См. также Олссон [1980], Барри [1982*], Грин [1983*].

В этом параграфе будем применять обозначения, введенные в § 8 гл. IV. Помимо них, через e_1, e_2, ... будем обозначать все примитивные центральные идемпотенты алгебры $R[G]$. Для каждого t будем обозначать через B_t блок, соответствующий e_t, а через $k(B_t)$ — число неприводимых характеров в B_t. Для подмножества S из G положим $\hat{S}=\sum_{x\in S}x\in R[G]$, и пусть $\bar{\hat{S}}$ — образ $\hat{S}$ в $\bar{R}[G]$.

Заметим, что $Z_R(G)=\oplus_t Z_R(G)e_t$ и $Z_{\bar{R}}(G)=\oplus_t Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}_t$. Кроме того, $Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}_t=\overline{Z_R(G)e_t}$ — идеал в $Z_{\bar{R}}(G)$, являющийся локальным кольцом, а $Z_R(G)e_t$ — идеал в $Z_R(G)$, являющийся локальным кольцом.

Лемма 10.1. *С каждым блоком B можно связать $k(B_t)$ сопряженных классов $\{C_j^t\mid 1\leqslant j\leqslant k(B_t)\}$ таким образом, чтобы были выполнены следующие условия:*

(i) *каждый сопряженный класс группы G связан ровно с одним блоком;*

(ii) $\{\overline{\hat{C}_j^t e_t}\}$ *является $\bar{R}$-базисом идеала $Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}_t$.*

Доказательство. Пусть $\{C_i\}$ — все сопряженные классы группы G, $\{\alpha_j^t\}$ — некоторый $\bar{R}$-базис идеала $Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}_t$. Тогда

$$|\{\alpha_j^t\}|=\dim_{\bar{R}}Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}_t=\operatorname{rank}_R Z_R(G)e_t=k(B_t).$$

Пусть $\overline{\hat{C}_i}=\sum_t\sum_j a_i^{(t,j)}\alpha_j^t$. Обозначим через A матрицу $(a_i^{(t,j)})$, где (t, j) — номер строки, i — номер столбца. Поскольку A невырождена, классы $\{C_i\}$ можно расположить так, чтобы

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & *\\ & A_2 & \\ * & & \ddots\end{pmatrix},$$

где A_t — невырожденная $k(B_t)\times k(B_t)$-матрица и столбцы матрицы A_t занумерованы с помощью (t, j) для любого t. Отсюда следует результат, поскольку $\alpha_j^t e_t=\delta_{st}\alpha_j^t$. □

Пусть $\mathfrak{P}(G)$ — полная система представителей сопряженных классов p-подгрупп группы G. Для $P\in\mathfrak{P}(G)$ обозначим через $V_P(G)$ подпространство линейного пространства $Z_{\bar{R}}(G)$, порожденное всеми теми $\overline{\hat{C}_j}$, для которых P является дефектной группой. Для $P\in\mathfrak{P}(G)$ положим

$$\mathfrak{P}(P:G)=\{Q\mid Q\subsetneq_G P,\ Q\in\mathfrak{P}(G)\}.$$

Определим также $U(P:G)=\sum_{Q\in\mathfrak{P}(P:G)}V_Q(G)$ и $V(P:G)=V_P(G)\oplus\oplus U(P:G)$.

Положим $V_t(P:G)=V(P:G)\cap Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}_t$. В силу (III.6.3), $V(P:G)$ является идеалом в $Z_{\bar{R}}(G)$. Поэтому

$$V_t(P:G)=V_t(P:G)e_t,$$

и если

$$U_t(P:G)=U(P:G)\cap V_t(P:G),$$

то

$$\begin{aligned} V(P:G)&=\oplus\, V_t(P:G),\\ V(P:G)/U(P:G)&\cong\oplus\, V_t(P:G)/U_t(P:G).\end{aligned}\tag{10.2}$$

Лемма 10.3. *Пусть $P\in\mathfrak{P}(G)$, $B=B_t$ и $\{C_j^t\}$ определено как в* (10.1). *Пусть $C^t_{P,1}$, ..., $C^t_{P,m_B(P)}$ — подмножество в $\{C_j^t\}$, состоящее из тех классов, дефектная группа которых равна P. Тогда образ $\{\overline{\hat{C}^t_{P,j}}\bar{e}_t\mid 1\leqslant j\leqslant m_B(P)\}$ в $V_t(P:G)/U_t(P:G)$ является $\bar{R}$-базисом этого пространства. Число $m_B(P)=m_B(P:G)$ зависит лишь от G, B и сопряженного класса, в котором лежит P.*

Доказательство. Очевидно, $\{\overline{\hat{C}^t_{Q,j}}\bar{e}_t\mid 1\leqslant j\leqslant m_B(Q),\ Q\subseteq_G P\}$ является базисом $V_t(P:G)$ для всех t и P, согласно (10.2). Значит, $\{\overline{\hat{C}^t_{P,j}}\bar{e}_t\mid 1\leqslant j\leqslant m_B(P)\}$ является базисом $V_t(P:G)/U_t(P:G)$. Последнее утверждение является непосредственным следствием этого факта. □

Если $m_B(P)\neq 0$, то P называется *низшей дефектной группой* блока B. Про нее будем говорить, что она встречается с кратностью $m_B(P)$.

Лемма 10.4. *Пусть $P\in\mathfrak{P}(G)$, $B=B_t$. Справедливо равенство $m_B(P:G)=\sum_{\tilde{B}}m_{\tilde{B}}(P:N_G(P))$, где $\tilde{B}$ пробегает все те блоки группы $N_G(P)$, для которых $\tilde{B}^G=B$.*

Доказательство. Пусть $N=N_G(P)$, $\bar{s}$ — гомоморфизм Брауэра относительно (G, P, N), $\bar{e}$ — примитивный идемпотент из $Z_{\bar{R}}(G)$, соответствующий B. Пусть $\bar{s}(\bar{e})=\sum\bar{\tilde{e}}$, где $\bar{\tilde{e}}$ пробегает все такие примитивные идемпотенты из $Z_{\bar{R}}(N)$, что $\tilde{B}^G=B$ с блоком $\tilde{B}$, соответствующим $\tilde{e}$. Согласно (III.9.8), $\bar{s}$ является $\bar{R}$-изоморфизмом $V_P(G)$ на $V_P(N)$. Значит, в силу (10.3), $\bar{s}$ индуцирует $\bar{R}$-изоморфизм $V_t(P:G)/U_t(P:G)$ на $V(P:N)\bar{s}(\bar{e})/U(P:N)\bar{s}(\bar{e})$. В силу (10.2),

$$V(P:N)\bar{s}(\bar{e})/U(P:N)\bar{s}(\bar{e})\cong\oplus\, V(P:N)\bar{\tilde{e}}/U(P:N)\bar{\tilde{e}},$$

где $\bar{\tilde{e}}$ пробегает все примитивные идемпотенты из $Z_{\bar{R}}(N)$, которые встречаются в сумме $\bar{s}(\bar{e})=\sum\bar{\tilde{e}}$. Поэтому

$$m_B(P:G)=\dim_{\bar{R}}(V_t(P:G)/U_t(P:G))=$$

$$=\sum\dim_{\bar{R}}(V(P:N)\bar{\tilde{e}}/U(P:N)\bar{\tilde{e}})=\sum m_{\tilde{B}}(P:N). \quad \square$$

Следствие 10.5. *Пусть D — дефектная группа блока B. Тогда D является низшей дефектной группой. Если P — низшая дефектная группа блока B, то $P\subseteq_G D$.*

Доказательство. В силу (III.6.10), D является низшей дефектной группой блока B, так как $\bar{e}\in Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}$. Второе утверждение следует из (III.9.6) и (10.4). $\square$

Пусть $\mathfrak{P}_0(G)$ — полная система представителей сопряженных классов p-элементов группы G. Если $y\in\mathfrak{P}_0(G)$, то $S(y)$ является p-секцией, содержащей y. Обозначим через $W(y:G)=W(y)$ подпространство пространства $Z_{\bar{R}}(G)$, порожденное всеми теми $\bar{\hat{C}}_j$, для которых $C_j\subseteq S(y)$. Тогда $Z_{\bar{R}}(G)=\oplus_y W(y)$, где y пробегает $\mathfrak{P}_0(G)$. В силу (IV.8.5) (iii), $W(y)\bar{e}_t\subseteq W(y)$ для всех y и t. Значит, если $W_t(y)=W(y)\cap Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}_t$, то $W_t(y)=W(y)\bar{e}_t$ и $W(y)=\oplus_t W_t(y)$. Кроме того, $Z_{\bar{R}}(G)\bar{e}_t=\oplus_{y\in\mathfrak{P}_0(G)}W_t(y)$. Легко видеть, что если $\{C_j^t\}$ определено как в (10.1), то R-базис пространства $W_t(y)$ составляют все $\bar{\hat{C}}_j^t\bar{e}_t$, для которых $C_j^t\subseteq S(y)$. Значит, число таких классов зависит лишь от G, B и сопряженного класса, в котором лежит y.

Положим

$$W_{t,y}(P:G)=V_t(P:G)\cap W(y) \quad \text{и} \quad T_{t,y}(P:G)=U_t(P:G)\cap W(y).$$

Тогда

$$V_t(P:G)=\bigoplus_{y\in\mathfrak{P}_0(G)}W_{t,y}(P:G),$$
$$V_t(P:G)/U_t(P:G)\cong\bigoplus_{y\in\mathfrak{P}_0(G)}W_{t,y}(P:G)/T_{t,y}(P:G). \tag{10.6}$$

Лемма 10.7. *Пусть $B=B_t$, $P\in\mathfrak{P}(G)$, $y\in\mathfrak{P}_0(G)$, $\{C_j^t\}$ определено как в* (10.1), *а $C^t_{y,P,1}$, ..., $C^t_{y,P,m_B^y(P)}$ — подмножество множества $\{C_j^t\}$, состоящее из тех классов, которые имеют P своей дефектной группой и лежащие в $S(y)$. Тогда образ множества $\{\bar{\hat{C}}^t_{y,P,j}\bar{e}_t \mid 1\leqslant j\leqslant m_B^y(P)\}$ в $W_{t,y}(P:G)/T_{t,y}(P:G)$ является $\bar{R}$-базисом этого пространства. Число $m_B^y(P)=m_B^y(P:G)$ зависит лишь от G, B, сопряженного класса элемента y и сопряженного класса группы P.*

Доказательство. Первое утверждение следует из (10.3) и (10.6). Второе является непосредственным следствием первого. $\square$

Если $m_B^y(P)\neq 0$, то P называется *низшей дефектной группой блока B, ассоциированной с секцией $S(y)$ и имеющей кратность $m_B^y(P)$.*

Лемма 10.8. (i) $\sum_{y\in\mathfrak{P}_0(G)}m_B^y(P)=m_B(P)$ *для всех* $P\in\mathfrak{P}(G)$.

(ii) $\sum_{P\in\mathfrak{P}(G)}m_B(P)=k(B)$.

Доказательство. Непосредственно следует из определений. □

Лемма 10.9. *Пусть* $y \in Z(G)$ *является* p*-элементом из* $Z(G)$. *Тогда* $m_B^y(P) = m_B^1(P)$ *для всех блоков* B *и всех* $P \in \mathfrak{P}(G)$.

Доказательство. Отображение, переводящее a в ay, является $\bar{R}$-изоморфизмом $Z_{\bar{R}}(G)$. Оно, очевидно, сохраняет идеал $V_t(P:G)$ для всех t и P и отображает $W(1)$ на $W(y)$. Значит, оно отображает $W_{t,1}(P:G)/T_{t,1}(P:G)$ на $W_{t,y}(P:G)/T_{t,y}(P:G)$. Результат теперь следует из (10.7). □

Теорема 10.10. *Пусть* $y \in \mathfrak{P}_0(G)$, $P \in \mathfrak{P}(G)$. *Тогда*

$$m_B^y(P:G) = \sum_Q \sum_{\tilde{B}} m_{\tilde{B}}^1(Q : C_G(y)),$$

где Q *пробегает все те элементы из* $\mathfrak{P}(C_G(y))$, *которые сопряжены с* P *в* G, *а* $\tilde{B}$ *— все те блоки группы* $C_G(y)$, *для которых* $\tilde{B}^G = B$.

Доказательство. Пусть C — сопряженный класс группы G с дефектной группой P, лежащий в $S(y)$. Пусть p-секция S_0 группы $C_G(y)$ содержит y. Тогда, как легко видеть, $C_0 = C \cap S_0$ является сопряженным классом группы $C_G(y)$, дефектная группа Q которого сопряжена с P в G. Обратно, каждый такой сопряженный класс C_0 группы $C_G(y)$ совпадает с $C \cap S_0$ для подходящего C. Пусть $\bar{s}$ — гомоморфизм Брауэра относительно $(G, \langle y \rangle, C_G(y))$. Если C — сопряженный класс группы G из $S(y)$ с дефектной группой P, то определение $\bar{s}$ влечет, что $\bar{s}(\hat{C}) = \hat{C}_0 + \hat{C}'$, где C' — объединение сопряженных классов группы $C_G(y)$, ни один из которых не лежит в S_0.

Пусть $B = B_t$ и e — примитивный идемпотент из $Z_R(G)$, соответствующий B. Далее, пусть $\bar{s}(\bar{e}) = \sum_m \bar{\tilde{e}}_m$, где каждый из $\tilde{e}_m$ является примитивным идемпотентом в $Z_R(C_G(y))$. В силу предыдущего абзаца, $\bar{s}$ индуцирует $\bar{R}$-изоморфизм $W(y:G) \cap V_P(G)$ на $\sum_Q W(y : C_G(y)) \cap V_Q(C_G(y))$, где Q пробегает все те элементы из $\mathfrak{P}(C_G(y))$, которые сопряжены с P в G. Значит, по (10.6) и (10.7), $\bar{s}$ индуцирует $\bar{R}$-изоморфизм $W_{t,y}(P:G)/T_{t,y}(P:G)$ на $\oplus_Q \sum_t W_{t,y}(Q : C_G(y)/T_{t,y}(Q : C_G(y))$. Результат теперь следует из (10.9). □

Если $y \neq 1$, то из (10.10) следует, что $m_B^y(P)$ можно вычислить, исходя из информации о локальных подгруппах группы G. Докажем теперь некоторые результаты, которые дают информацию о $m_B^1(P)$.

Теорема 10.11. *Пусть* $S = S(1)$ — *секция группы* G, *состоящая из* p'*-элементов. Для* $a \in R[G]$ *пусть* $\mathrm{Tr}(a) = \sum_{x \in G} x^{-1} a x$. *Пусть* $C_{y,P,j}^t$ *определен, как в* (10.7), *и для каждых* t, P, j *выберем* $x_{1,P,j}^t \in C_{1,P,j}^t$. *Тогда для* $B = B_t$

$$\{\hat{C}_{1,P,j}^t e_t \mid P \in \mathfrak{P}(G),\ 1 \leqslant j \leqslant m_B^1(P)\}$$

является R*-базисом* $Z_R(G:S)e_t$, *а*

$$\{|C_G(x_{1,P,j}^t)|\, \hat{C}_{1,P,j}^t e_t \mid P \in \mathfrak{P}(G),\ 1 \leqslant j \leqslant m_B^1(P)\}$$

— R*-базисом* $\mathrm{Tr}(R[S])e_t$. *Кроме того,*

$$\mathrm{Ch}_R(G : G_{\mathrm{reg}},\ B_t)/\mathrm{Ch}_{R,\mathrm{proj}}(G : G_{\mathrm{reg}},\ B_t) \cong Z_R(G:S)e_t/\mathrm{Tr}(R[S])e_t$$

(*изоморфизм* R*-модулей*).

Доказательство. Для $\alpha\in \mathrm{Ch}_R(G:G_{\mathrm{reg}},\ B_t)$ положим $\alpha^*=\sum_{x\in S}\alpha(x^{-1})x\in Z_R(G:S)$. Тогда отображение, переводящее α в α^*, R-линейно. В силу (IV.3.11), оно является отображением «на». В силу (IV.2.3), $\mathrm{Ch}_{R,\mathrm{proj}}(G:G_{\mathrm{reg}})^*\subseteq \mathrm{Tr}(R[S])$. Пусть $D(C)$ обозначает дефектную группу сопряженного класса C. Если $x\in C$, то $\mathrm{Tr}(x)=|C_G(x)|\hat{C}$. Значит, $\{|D(C)|\hat{C}\,|\,C\subseteq S\}$ является базисом R-модуля $\mathrm{Tr}(R[S])$. Поэтому $Z_R(G:S)/\mathrm{Tr}(R[S])$ является периодическим R-модулем с инвариантами $\{|D(C)|\ \big|\ C\subseteq S\}$. В силу (III.3.11), это множество является множеством элементарных делителей матрицы Картана группы G. и потому

$$\mathrm{Ch}_{R,\mathrm{proj}}(G:G_{\mathrm{reg}})^*=\mathrm{Tr}(R[S]).$$

В силу (IV.7.2), $(\alpha^{B_t})^*=\alpha^* e_t$. Значит, $\mathrm{Ch}_R(G:G_{\mathrm{reg}},\ B_t)^*=Z_R(G:S)e_t$ и $\mathrm{Ch}_{R,\mathrm{proj}}(G:G_{\mathrm{reg}},\ B_t)^*=\mathrm{Tr}(R[S])e_t$. Это устанавливает требуемый изоморфизм.

Из (10.7) и локальности кольца R следует, что $Z_R(G:S)e_t$ обладает требуемым базисом. Пусть T_t есть R-модуль с базисом

$$\{|C_G(x^t_{1,P,j})|\,\hat{C}^t_{1,P,j}e_t\,|\,P\in\mathfrak{P}(G),\ 1\leqslant j\leqslant m_B^1(P)\},$$

где $B=B_t$. Тогда $T_t\subseteq \mathrm{Tr}(R[S])e_t$. Очевидно,

$$\{|D(C^t_{1,P,j})|\ \big|\ P\in\mathfrak{P}(G),\ 1\leqslant j\leqslant m_B^1(P)\}$$

является множеством инвариантов R-модуля $Z_R(G:S)e_t/T_t$. Значит,

$$\oplus_t Z_R(G:S)e_t/T_t\cong Z_R(G:S)/\mathrm{Tr}(R[S])\cong\oplus_t Z_R(G:S)e_t/\mathrm{Tr}(R[S])e_t,$$

и потому $T_t=\mathrm{Tr}(R[S])e_t$ для каждого t. □

Следствие 10.12. *Пусть $B=B_t$ и $m\geqslant 0$ — целое число. Тогда кратность p^m как элементарного делителя матрицы Картана блока B равна $\sum m_B^1(P)$, где P пробегает все группы из $\mathfrak{P}(G)$ порядка p^m.*

Доказательство. В силу (10.11), $\sum m_B^1(P)$ равна кратности p^m как инварианта модуля $Z_R(G:S)e_t/\mathrm{Tr}(R[S])e_t$. Результат теперь следует из изоморфизма в (10.11). □

Следствие 10.13. *Пусть $y\in\mathfrak{P}_0(G)$, и пусть $l(y,\ B)$ — число неприводимых характеров Брауэра в тех блоках $\tilde{B}$ группы $C_G(y)$, для которых $\tilde{B}^G=B$. Тогда*

$$\sum_{P\in\mathfrak{P}(G)} m_B^y(P)=l(y,\ B).$$

Доказательство. Ввиду (10.10), результат достаточно доказать в случае $y=1$. Однако в этом случае результат вытекает из (10.12), так как $l(1,\ B)$ совпадает с рангом матрицы Картана блока B. □

Следствие 10.14. *Пусть D — дефектная группа блока B, $\tilde{B}$ — такой блок группы $DC_G(D)$, что $\tilde{B}^G=B$ и $T(\tilde{B})$ — группа инерции блока $\tilde{B}$ в $N_G(D)$. Тогда $m_B^y(D)$ равно числу $T(\tilde{B})$-сопряженных классов в $Z(D)\cap S(y)$.*

Доказательство. В силу (IV.4.16) и (10.12), $m_B^1(D)=1$. Результат теперь следует из (9.8) и (10.10). □

§ 11. Группы заданного дефицитного класса

Результаты настоящего параграфа принадлежат Брауэру [1964а].

Пусть r — целое число. Скажем, что группа G имеет *дефицитный класс r относительно* (или *для*) *простого числа p*, если у нее нет неглавных p-блоков дефекта $d \geqslant r$. Ссылку на p будем опускать в тех случаях, когда из контекста ясно, о каком p идет речь. Если дефицитный класс G равен r, то, очевидно, дефицитный класс G равен также r' для любого целого $r' \geqslant r$.

Два следующих утверждения являются непосредственными следствиями определений.

Лемма 11.1. *Если $p^r \nmid |G|$, то G имеет дефицитный класс r относительно простого числа p.*

Лемма 11.2. *Дефицитный класс группы G равен 0 тогда и только тогда, когда главный блок является единственным блоком группы G. В частности, дефицитный класс p-группы равен 0 для простого p.*

Лемма 11.3. *Предположим, что $P \lhd G$ и $|P| = p^n$. Если дефицитный класс группы G равен $r \leqslant n$, то ее дефицитный класс равен 0.*

Доказательство. В силу (4.4), каждый блок группы G имеет дефект не меньше n. Значит, главный блок является единственным блоком группы G. □

Лемма 11.4. *Пусть P есть p-группа, причем $|P| = p^n$. Предположим, что $G = PC_G(P)$. Дефицитный класс группы G равен r тогда и только тогда, когда дефицитный класс группы G/P равен $r-n$.*

Доказательство. Очевидно ввиду (4.5). □

Теорема 11.5. *Если G имеет дефицитный класс r, то для каждого p-элемента y группы G централизатор $C_G(y)$ является группой дефицитного класса r. Обратно, если $r>0$ и $C_G(y)$ имеет дефицитный класс r для всякого элемента y порядка p из G, то дефицитный класс G равен r.*

Доказательство. Пусть y есть p-элемент, B_0 — неглавный блок группы $C_G(y)$, d — дефект B_0. В силу третьей основной теоремы о блоках (5.4), $B_0^G = B$ определен и дефект B не меньше d. В силу (6.2), B — неглавный блок группы G. Значит, если дефицитный класс группы G равен r, то $d<r$. Следовательно, дефицитный класс $C_G(y)$ равен r.

Обратно, предположим, что G не является группой дефицитного класса r при $r>0$. Пусть B — неглавный блок дефекта $d \geqslant r$ и D — дефектная группа блока B. Поскольку $r>0$, существует элемент y порядка p из $Z(D)$. В силу (6.2) и (9.2) (i), группа $C_G(y)$ обладает неглавным блоком дефекта d, и потому $C_G(y)$ не является группой дефицитного класса r. □

Из старого результата Ландау [1903] следует, что для заданного целого k существует лишь конечное число конечных групп, число сопряженных классов которых не больше k. Поэтому из (IV.4.8) вытекает следующий результат.

Теорема 11.6. *Существует лишь конечное число групп дефицитного класса 0, S_p-подгруппа которых имеет заданный порядок.*

В случае $p=2$ Брауэр [1974c] доказал следующее обобщение (11.6).

Теорема 11.7. *Пусть G — группа дефицитного класса $r\geqslant 0$ для простого числа 2. Предположим, что S_2-подгруппа P группы G содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 2^{r+1}. Пусть $|P|=2^a$. Тогда существует верхняя граница $f(a)$, зависящая лишь от a, такая, что $|G|\leqslant f(a)$.*

Доказательство (11.7) не очень сложно, однако зависит от специфических свойств инволюций. Неизвестно, верен ли аналогичный результат для нечетных простых чисел.

Если y есть p-элемент группы G, то (11.4) можно применить к $C_G(y)$. Поэтому (11.5) можно применять для получения индуктивной характеризации групп положительного дефицитного класса. Такая характеризация не представляется возможной для групп дефицитного класса 0, поскольку в этом случае второе утверждение из (11.5) неверно. Например, пусть q — простое число, $q\equiv 1 \pmod p$, G — группа Фробениуса порядка pq. Тогда дефицитный класс группы G не равен 0 для простого p, однако $|C_G(y)|=p$ для любого элемента y порядка p из G. Этот пример показывает существование бесконечного числа групп дефицитного класса 1 с S_p-подгруппой порядка p. Из (11.6) следует, что аналогичная ситуация невозможна для дефицитного класса 0.

Можно показать, что простая группа лиева типа в характеристике p является группой дефицитного класса 1 (см. Деггер [1971], Дж. Е. Хамфри [1971]). Это также показывает существование бесконечного класса групп дефицитного класса 1. Среди них, однако, лишь конечное число с заданной S_p-подгруппой.

Близкие результаты несколько другого вида можно найти у Цушимы [1977]. См. также Харрис [1985*], Михлер [1986*].

ГЛАВА VI

§ 1. Блоки и расширения кольца R

Обозначения, введенные в начале главы III, будут использоваться на протяжении этой главы. Будут применяться также следующие предположения и обозначения.

K — конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$.

R — кольцо целых в K.

Согласно (III.9.10) и (I.19.4), существует такое конечное неразветвленное расширение $\hat{K}$ поля K, что если $\hat{R}$ — кольцо целых в $\hat{K}$, то выполняются следующие условия.

(I) $\bar{\hat{R}}$ является полем разложения алгебры $\bar{\hat{R}}[H]$ для любой подгруппы H группы G. $\hat{K}$ является полем разложения для любой p'-подгруппы H из G.

(II) Пусть B — блок алгебры $R[G]$ с дефектной группой D. Пусть $\langle\sigma\rangle$ — группа Галуа поля $\hat{K}$ над K. Тогда существует такой блок $\hat{B}$ алгебры $\hat{R}[G]$, что если V — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль из B, то

$$V \otimes_R \bar{\hat{R}} = \sum_{j=0}^{r-1} \hat{V}^{\sigma^j}, \quad \text{где} \quad \hat{V} \in \hat{B}.$$

Если, кроме того, $\hat{B}^{(j)} = \hat{B}^{\sigma^j}$ — блок алгебры $\hat{R}[G]$, содержащий $\hat{V}^{\sigma^j}$ то, согласно (III.9.10), D является дефектной группой блока $\hat{B}^{(j)}$.

Лемма 1.1. *Пусть B — блок алгебры $R[G]$ с дефектной группой D. Тогда любой $R[G]$-модуль из B является $R[D]$-проективным, и в B найдется неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль с вертексом D.*

Доказательство. Очевидно из (III.4.14). □

Лемма 1.2. *Пусть B — блок алгебры $R[G]$. Предположим, что $\hat{B}$ содержит единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый $\bar{\hat{R}}[G]$-модуль. Тогда B содержит единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль.*

Доказательство. Очевидно из (I.19.4). □

Лемма 1.3. *Пусть $H \lhd G$ и U — проективный неразложимый $R[G]$-модуль. Тогда $U_H = \oplus U_i$, где каждый U_i является проективным неразложимым $R[H]$-модулем, и для каждого i существует такой элемент $x \in G$, что $U_i = U_1^x$.*

Доказательство. Непосредственно по (I.13.6) и теореме Клиффорда (III.2.12). □

Предположим, что $H \lhd G$. Блок B алгебры $R[G]$ *накрывает* блок b алгебры $R[H]$, если $\hat{B}$ накрывает $\hat{b}^{(j)}$ для некоторого j.

Лемма 1.4. *Предположим, что $H \lhd G$ и блок B алгебры $R[G]$ накрывает блок b алгебры $R[H]$. Пусть D — дефектная группа блока B. Допустим, что $DC_G(D) \subseteq H$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *$B = b^G$ является единственным блоком алгебры $R[G]$, накрывающим b.*

(ii) *D является дефектной группой блока b.*

Доказательство. (i) Выберем обозначения так, что блок $\hat{B}$ накрывает $\hat{b}$, где блок $\hat{b}$ определен, как в (II). Согласно (V.3.9), $\hat{B}$ регулярен и, таким образом, по (V.3.7), $\hat{B} = \hat{b}^G$ — единственный блок, который накрывает $\hat{b}$. Тогда $\hat{B}^{(j)}$ — единственный блок, который накрывает $\hat{b}^{(j)}$. Отсюда вытекает, что B — единственный блок, который накрывает b. Определение гомоморфизма Брауэра показывает, что $B = b^G$.

(ii) Согласно (V.3.14), D является дефектной группой блока $\hat{b}$ и потому, в силу (II), дефектной группой блока b. □

§ 2. Радикалы и нормальные подгруппы

На протяжении этого параграфа H — нормальная подгруппа в G. Результаты этого параграфа вплоть до (2.7) в основном принадлежат Кнёрру [1976]. Некоторые близкие результаты были доказаны Уордом [1968], Хуппертом и Виллемсом [1975], Виллемсом [1975].

Лемма 2.1. *Пусть V — некоторый $\bar{R}[H]$-проективный $\bar{R}[G]$-модуль и $M = V/VJ(\bar{R}[G])$. Модуль M тогда и только тогда является $\bar{R}[H]$-проективным, когда $VJ(\bar{R}[G]) = VJ(\bar{R}[H])$.*

Доказательство. Пусть $J = J(\bar{R}[G])$ и $J_0 = J(\bar{R}[H])$. Поскольку $J_0\bar{R}[G] = \bar{R}[G]J_0$, VJ_0 является $\bar{R}[G]$-модулем.

Предположим, что $VJ = VJ_0$. Пусть $A = \bar{R}[G]$, $B = \bar{R}[H]$ и $S = J_0$. Тогда из (I.4.11) следует, что M является $\bar{R}[H]$-проективным.

Обратно, предположим, что M является $\bar{R}[H]$-проективным. Тогда

$$0 \to (VJ/VJ_0)_H \to (V/VJ_0)_H \to M_H \to 0$$

— расщепляемая точная последовательность, так как модуль $(V/VJ_0)_H$ вполне приводим. Таким образом,

$$0 \to VJ/VJ_0 \to V/VJ_0 \to M \to 0$$

— расщепляемая точная последовательность, ибо модуль M является $\bar{R}[H]$-проективным. Следовательно, $V/VJ_0 \cong M \oplus VJ/VJ_0$, и потому

$$VJ/VJ_0 = (V/VJ_0)J \cong MJ + (VJ/VJ_0)J_0 = (VJ/VJ_0)J.$$

Итак, $VJ/VJ_0 = (0)$ по лемме Накаямы (I.9.8), т. е. $VJ = VJ_0$. □

Следствие 2.2. *Пусть U — проективный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль и $M = U/UJ(\bar{R}[G])$. Группа H тогда и только тогда содержит вертекс модуля M, когда $UJ(\bar{R}[G]) = UJ(\bar{R}[H])$.*

Доказательство. Очевидно из (2.1). □

Теорема 2.3. *Пусть e — примитивный центральный идемпотент в $\bar{R}[G]$ и B — блок, соответствующий e. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *H содержит дефектную группу блока B;*

(ii) *$VJ(\bar{R}[G])^n = VJ(\bar{R}[H])^n$ для всех $\bar{R}[G]$-модулей V из B и всех целых $n \geqslant 0$;*

(iii) *$J(\bar{R}[G])e = J(\bar{R}[H])\bar{R}[G]e$;*

(iv) *$UJ(\bar{R}[G]) = UJ(\bar{R}[H])$ для всех проективных неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей U из B.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Согласно (1.1), каждый модуль в B является $R[H]$-проективным, так что (ii) следует из (2.1) индукцией по n.

(ii)⇒(iii). Очевидно, так как $e\bar{R}[G] = \bar{R}[G]e$ является модулем из B.

(iii)⇒(iv). Пусть $\bar{R}[G]e = \oplus U_i$, где каждый модуль U_i неразложим. Любой проективный неразложимый модуль из B изоморфен некоторому U_i. По условию,

$$\oplus U_i J(\bar{R}[G]) = \bar{R}[G]eJ(\bar{R}[G]) = \bar{R}[G]eJ(\bar{R}[H]) = \oplus U_i J(\bar{R}[H]).$$

Поскольку $U_i J(\bar{R}[H]) \subseteq U_i J(\bar{R}[G])$ для всех i, отсюда следует результат.

(iv)⇒(i). В силу (1.1), в B существует неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль M, вертексом которого является дефектная группа D блока B. Поскольку $M \cong U/UJ(\bar{R}[G])$, где U — некоторый проективный неразложимый модуль, результат следует из (2.2). □

Следствие 2.4. *Пусть V — неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль. Предположим, что каждая компонента модуля V^G лежит в блоке, дефектная группа которого содержится в H. Тогда V^G вполне приводим.*

Доказательство. По условию, существуют такие примитивные центральные идемпотенты $\{e_i\}$, что дефектная группа каждого e_i содержится в H и $V^G e = V^G$, где $e = \sum e_i$. Согласно (2.3),

$$V^G J(\bar{R}[G]) = V^G J(\bar{R}[G])e = (V \underset{\bar{R}[H]}{\otimes} \bar{R}[G])J(\bar{R}[G])e =$$

$$= V \underset{\bar{R}[H]}{\otimes} J(\bar{R}[G])e = V \underset{\bar{R}[H]}{\otimes} J(\bar{R}[H])\bar{R}[G]e = VJ(\bar{R}[H]) \underset{\bar{R}[H]}{\otimes} \bar{R}[G]e = (0).$$

Значит, V^G вполне приводим. □

Следствие 2.5. *Предположим, что $p \nmid |G:H|$. Пусть V — неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль. Тогда модуль V^G вполне приводим.*

Доказательство. Так как H содержит дефектную группу каждого блока, результат следует из (2.4). □

Следующий результат довольно стар: см., например, Грин и Стоунхевер [1969], Виллямайор [1959].

Следствие 2.6. *Тогда и только тогда* $J(\bar{R}[G])=J(\bar{R}[H])\bar{R}[G]$, *когда* $p\nmid|G:H|$.

Доказательство. Если $J(\bar{R}[G])=J(\bar{R}[H])\bar{R}[G]$, то модуль $\bar{R}[G]/J(\bar{R}[G])$ является $\bar{R}[H]$-проективным, в силу (2.1). Таким образом, любой неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль является $\bar{R}[H]$-проективным, и потому $p\nmid|G:H|$, ввиду (1.1).

Если $p\nmid|G:H|$, то любой $\bar{R}[G]$-модуль является $\bar{R}[H]$-проективным. Таким образом, результат следует из (2.1). □

Пусть W — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль, и пусть $w(W)=w_H(W)$ обозначает такое натуральное число, что W_H является прямой суммой $w(W)$ ненулевых неразложимых $\bar{R}[H]$-модулей. Число $w(W)$ называется *H-шириной* модуля W, или просто *шириной* W.

Заметим, что если U — проективный $\bar{R}[G]$-модуль, то

$$w(U)=w(U/UJ(\bar{R}[G]))=w(U/UJ(\bar{R}[H])),$$

по теореме Клиффорда (III.2.12) и (1.13.7).

Теорема 2.7. *Пусть* B — *блок алгебры* $R[G]$, *который накрывает блок* b *алгебры* $R[H]$. *Предположим, что подгруппа* H *содержит дефектную группу блока* B. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *любой неразложимый проективный* $\bar{R}[G]$-*модуль из* B *является однорядным*;

(ii) *любой неразложимый проективный* $\bar{R}[H]$-*модуль из* b *является однорядным*.

Кроме того, если выполнено (i) *или* (ii), *то все неприводимые модули в* B *имеют одинаковую ширину*.

Доказательство. Предположим, что выполнено (i). Пусть U — проективный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль максимальной ширины в B. Пусть $U_H=\oplus_{i=1}^{w}P_i$, где каждый P_i является проективным неразложимым $\bar{R}[H]$-модулем. Тогда $w=w(U)=w(U/UJ(\bar{R}[H]))$.

Пусть n — такое натуральное число, что $P_1J(\bar{R}[H])^n\neq(0)$. Согласно (1.3), $P_iJ(\bar{R}[H])^n\neq(0)$, $i=1, \ldots, w$. Пусть $V=UJ(\bar{R}[H])^n/UJ(\bar{R}[H])^{n+1}$. Тогда

$$V_H=\bigoplus_{i=1}^{w}P_iJ(\bar{R}[H])^n/P_iJ(\bar{R}[H])^{n+1},$$

и поэтому $w(V)\geqslant w$. В силу (2.3), V неприводим, так как U одноряден. Пусть U_0 — проективный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль, соответствующий V. Тогда $w(U_0)=w(V)\geqslant w(U)$, поэтому выбор U влечет $w(U_0)=w$. Из неразложимости матрицы Картана (I.16.7) теперь следует, что любой проективный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B имеет ширину w и, следовательно, любой неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль из B имеет ширину w. Таким образом, из (i) вытекает дополнительное утверждение теоремы. Кроме того, модуль $P_iJ(\bar{R}[H])^n/P_iJ(\bar{R}[H])^{n+1}$ неприводим, так как $w(V)=w$. Значит, каждый модуль P_i является однорядным.

Поскольку w равно ширине любого проективного неразложимого $\bar{R}[G]$-модуля из B, предыдущий абзац показывает, что если U — произвольный проективный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B, то U_H является прямой суммой однорядных модулей. Следовательно, (ii) верно. Остается показать, что (i) следует из (ii).

Пусть U имеет минимальную ширину среди проективных неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей из B и n — такое натуральное число, что $V = UJ(\bar{R}[G])^n / UJ(\bar{R}[G])^{n+1} \neq (0)$. Пусть $U_H = \sum_{i=1}^{w} P_i$, где каждый P_i является проективным неразложимым $\bar{R}[H]$-модулем. В силу (V.2.3) и (1.3), каждый P_i одноряден. Согласно (2.3),

$$V_H = (UJ(\bar{R}[H])^n / UJ(\bar{R}[H])^{n+1})_H = \bigoplus_{i=1}^{w} P_i J(\bar{R}[H])^n / P_i J(\bar{R}[H])^{n+1}$$

и, следовательно, $w(V) \leqslant w = w(U)$. Минимальность w означает теперь, что V неприводим и $w(V) = w$. Результат следует из неразложимости матрицы Картана. □

Следует отметить, что в общем случае не все неприводимые $\bar{R}[G]$-модули в B будут иметь одинаковую ширину. Например, предположим, что $p = 2$, $H = \mathrm{SL}_2(8)$, G — полупрямое произведение H с циклической группой порядка 3 и $\bar{R}$ содержит поле из 8 элементов. Тогда главный блок группы G содержит неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль степени 6 и ширины 3, но, разумеется, содержит и одномерный модуль ширины 1.

Следствие 2.8. *Пусть B — блок алгебры $R[G]$, накрывающий блок b алгебры $R[H]$. Предположим, что H содержит дефектную группу блока B. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *любой неразложимый проективный $\bar{R}[G]$-модуль из B является однорядным;*

(ii) *любой неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B является однорядным;*

(iii) *любой неразложимый проективный $\bar{R}[H]$-модуль из B является однорядным;*

(iv) *любой неразложимый $\bar{R}[H]$-модуль из B является однорядным.*

Доказательство. Очевидно из (I.16.14) и (2.7). □

§ 3. Однорядные модули и нормальные подгруппы

Всюду в этом параграфе принимаются следующие условия и обозначения.

Предположения 3.1. (i) *$H \lhd G$ и факторгруппа G/H абелева. B — блок в $R[G]$, который накрывает $R[H]$-блок b, и $\bar{R}$ — поле разложения группы G/H.*

(ii) *D — дефектная группа блока B и $DC_G(D) \subseteq H$.*

(iii) *Блок b содержит единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль $\hat{V}$.*

(iv) *Любой неразложимый $\bar{R}[H]$-модуль из b является однорядным. Любой неразложимый $\bar{R}[H]$-модуль из b является однорядным.*

(v) *Пусть* $T(\hat{b})$ *обозначает группу инерции блока* $\hat{b}$ *в* G. *Тогда группа* $T(\hat{b})/H$ *является циклической.*

Лемма 3.2. (i) $B=b^G$ — *единственный блок в* $R[G]$, *накрывающий* b.

(ii) *Блок* b *содержит единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый* $\bar{R}[H]$-*модуль* V.

Доказательство. (i) Очевидно ввиду (3.1) (ii) и (1.4).

(ii) Следует из (3.1) (iii) и (I.19.4). □

Согласно (V.3.14), $T(\hat{b})/H$ является p'-группой. Пусть α — такой неприводимый $\bar{R}[G/H]$-модуль, что $\alpha_{T(\hat{b})\ H}$ точен. В силу (3.1) (i), $\dim_{\bar{R}}\alpha=1$.

Пусть модуль V определен, как в (3.2) (ii).

Если M — некоторый $\bar{R}[G]$-модуль, обозначим $M\alpha=M\otimes\alpha$. В частности, α^j определяется по индукции как $\alpha^j=\alpha^{j-1}\otimes\alpha$.

Теорема 3.3. (i) *Существуют такие натуральные числа* s, e, *где* $e\mid |T(\hat{b}):H|$, *и неприводимый* $\bar{R}[G]$-*модуль* W, *что* W, $W\alpha$, ..., $W\alpha^{e-1}$ *суть попарно неизоморфные модули из* B, $W\cong W\alpha^e$ *и любой неприводимый* $\bar{R}[G]$-*модуль из* B *изоморфен одному из* $W\alpha^j$. *При этом* $V\cong s(\oplus_{i=1}^{e} W\alpha^i)$.

(ii) *Если* $\bar{R}=\bar{\bar{R}}$, *то* $s=1$ *и* $e=|T(\hat{b}):H|$.

Доказательство. Сначала предположим, что $\bar{R}=\bar{\bar{R}}$. Очевидно, $T(b)=T(V)$. Выберем $x\in T(b)$ так, чтобы $T(b)=\langle x, H\rangle$. Тогда образ элемента x порождает циклическую группу $T(b)/H$. Пусть $s=1$ и $e=|T(b):H|$.

Пусть A — представление алгебры $\bar{R}[H]$ в модуле V. Так как $T(b)=T(V)$, существует такое линейное преобразование M пространства V, что $A(x^{-1}zx)=M^{-1}A(z)M$ для всех $z\in H$. Отсюда

$$M^{-e}A(z)M^e=A(x^{-e}zx^e)=A(x^{-e})A(z)A(x^e)$$

для всех $z\in H$. Таким образом, по лемме Шура, $M^e=cA(x^e)$, для некоторого $c\in\bar{R}$. Пусть F — конечное расширение поля $\bar{R}$ с таким элементом $c_0\in F$, что $c_0^e=c$. Определим $A(x)=c_0^{-1}M$. Тем самым A продолжается до представления группы $T(b)$ над F. Это представление неприводимо, так как неприводимо его ограничение на H. Поскольку $\bar{R}=\bar{\bar{R}}$ является полем разложения для $T(b)$, существует такой $\bar{R}[T(b)]$-модуль X, что $X_H\cong V$. Следовательно, модуль $X\alpha^j$ неприводим для всех j, и $(X\alpha^j)_H\cong V$. Согласно (3.2) (i), $X\alpha^j$ лежит в $b^{T(b)}$ для всех j.

Пусть β обозначает тривиальный $\bar{R}[H]$-модуль. Согласно (II.2.3),

$$V^{T(b)}\cong(X_H\otimes\beta)^{T(b)}\cong X\otimes\beta^{T(b)}\cong\sum_{j=0}^{e-1}X\alpha^j.$$

Если Y — неприводимый $\bar{R}[T(b)]$-модуль из $b^{T(b)}$, то $V|Y_H$, в силу (1.4), и значит, $I_{\bar{R}}(V^{T(b)}, Y)\neq 0$, по (III.2.5). Итак, $Y\cong X\alpha^j$ для некоторого j.

Если $X\alpha^i\cong X\alpha^j$ для некоторых i, j $(0\leqslant i<j<e)$, то, в силу (III.2.5), $1<I_R(V^{T(b)}, X\alpha^i)=I(V, V)=1$. Положим $W=X^G$, тогда $W\alpha^j=(X\alpha^j)^G$, согласно (V.2.5). Для случая $\bar{R}=\bar{\bar{R}}$ результат доказан.

Теперь рассмотрим общий случай. Из предыдущей части доказательства вытекает существование в $\hat{B}$ такого неприводимого $\bar{\hat{R}}[G]$-модуля $\hat{W}$, что $\hat{V}^G = \oplus_{j=1}^{\hat{e}} \hat{W}\alpha^j$, где $\hat{e} = |T(b):H|$. Кроме того, $\hat{W}\alpha^i = \hat{W}\alpha^j$ тогда и только тогда, когда $i \equiv j \pmod{\hat{e}}$, и любой неприводимый модуль из $\hat{B}$ изоморфен $\hat{W}\alpha^j$ для некоторого j.

Пусть $\langle\sigma\rangle$ — группа Галуа поля $\bar{\hat{R}}$ над $\bar{R}$. Согласно (I.19.4), $V \otimes_R \bar{\hat{R}} \cong \oplus_{i=0}^{m-1} \hat{V}^{\sigma^i}$, где m — наименьшее натуральное число, при котором $\hat{V}^{\sigma^m} \cong \hat{V}$. Пусть W — такой неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, что $\hat{W} \mid W \otimes_R \bar{\hat{R}}$. Пусть e, t — наименьшие натуральные числа, для которых $W\alpha^e \cong W$, $(\hat{V}^G)^{\sigma^t} \cong \hat{V}^G$ соответственно. Тогда $e \mid |T(\hat{b}):H|$ и $t \mid m$, так как $(\hat{V}^N)^\sigma \cong (\hat{V}^\sigma)^N$. Пусть U — прямая сумма всех различных $\bar{\hat{R}}[G]$-модулей вида $\hat{W}^{\sigma^i}\alpha^j$. Тогда

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{e} W\alpha^j\right) \otimes_{\bar{R}} \bar{\hat{R}} \cong U \cong \bigoplus_{i=1}^{t} (\hat{V}^G)^{\sigma^i}.$$

Следовательно,

$$V^G \otimes_{\bar{R}} \bar{\hat{R}} \cong (V \otimes_{\bar{R}} \bar{\hat{R}})^G \cong \frac{m}{t}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} (\hat{V}^G)^{\sigma^i}\right) \cong \frac{m}{t}\left(\bigoplus_{j=1}^{e} W\alpha^j\right) \otimes_{\bar{R}} \bar{\hat{R}}.$$

Согласно (2.4) и (3.2), модуль V^G вполне приводим. Таким образом, (I.19.4) влечет результат. □

Если M — некоторый $\bar{R}[G]$-модуль, то $l(M)$ будет обозначать число композиционных факторов модуля M. Пусть $\mathrm{Soc}(M)$ обозначает цоколь модуля M, а $\mathrm{Soc}^n(M)$ — прообраз $\mathrm{Soc}(M/\mathrm{Soc}^{n-1}(M))$ в M для $n \geqslant 2$.

Следствие 3.4. *Предположим, что $V \otimes_R \bar{\hat{R}}$ является прямой суммой m неприводимых $\bar{\hat{R}}[G]$-модулей. Справедливы следующие утверждения*

(i) *Если M — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль из B, то $M \otimes_{\bar{R}} \bar{\hat{R}}$ является прямой суммой m алгебраически сопряженных неприводимых $\bar{\hat{R}}[G]$-модулей.*

(ii) *Если U — проективный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B, то $U \otimes_R \bar{\hat{R}}$ является прямой суммой m алгебраически сопряженных проективных неразложимых $\bar{\hat{R}}[G]$-модулей.*

(iii) *Если M — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B, то $l(M \otimes_{\bar{R}} \bar{\hat{R}}) = ml(M)$.*

Доказательство. Так как α принимает значения в $\bar{R}$, то (i) следует из (3.3) и (I.19.4). Теперь (ii) — следствие из (i) и (I.13.6), а (iii) — прямое следствие из (i). □

Теорема 3.5. (i) *Если U — ненулевой неразложимый проективный $\bar{R}[G]$-модуль из B, то U является однорядным и $l(U)=|D|$.*

(ii) *Пусть M — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B. Тогда M является однорядным и $\mathrm{Soc}^n(M_H)=(\mathrm{Soc}^n(M))_H$ для всех n.*

Доказательство. Пусть P — проективный неразложимый $\bar{R}[H]$-модуль, соответствующий модулю V. Пусть $\hat{P}$ — проективный неразложимый $\hat{\bar{R}}[H]$-модуль, соответствующий $\hat{V}$. В силу (IV.4.16), единственный инвариант Картана блока $\hat{b}$ равен $|D|$. Таким образом, $l(P)=l(\hat{P})=|D|$, по (3.4).

Согласно (2.8), модуль U однорядный, так что $l(U)$ — наименьшее натуральное n, для которого $UJ(\bar{R}[G])^n=(0)$. Значит, по (2.3), $l(U)$ равно наименьшему натуральному n, для которого $UJ(\bar{R}[H])^n=(0)$. Поскольку $P|U_H$, из (2.3) следует, что $l(U)$ равно наименьшему натуральному n, при котором $PJ(\bar{R}[H])^n=(0)$. Таким образом, $l(U)=l(P)=|D|$, так как P однорядный. Это доказывает (i). Кроме того, $\{UJ(\bar{R}[G])^n\}_H=\{UJ(\bar{R}[G])_H\}^n$ и, следовательно, $\mathrm{Soc}^n(U_H)=\{\mathrm{Soc}^n(U)\}_H$ для всех n.

Согласно (2.8), модуль M однорядный. Значит, $M=\mathrm{Soc}^k(U)$ для некоторого проективного неразложимого $\bar{R}[G]$-модуля U из B и некоторого натурального k. Следовательно,

$$\mathrm{Soc}^n(M_H)=\mathrm{Soc}^{n+k}(U_H)=\{\mathrm{Soc}^{n+k}(U)\}_H=\{\mathrm{Soc}^n(M)\}_H$$

для всех n. □

Следствие 3.6. *Пусть M — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B. Тогда $M\otimes_{\bar{R}}\hat{\bar{R}}=\oplus\hat{M}^\tau$, где τ пробегает некоторую факторгруппу группы Галуа поля $\hat{\bar{R}}$ над $\bar{R}$, а каждый модуль $\hat{M}^\tau$ неразложим, и $l(M)=l(M^\tau)$ для всех τ. Кроме того,* $\mathrm{Soc}(M)\otimes_{\bar{R}}\hat{\bar{R}}\cong\oplus\mathrm{Soc}(\hat{M})^\tau$.

Доказательство. Согласно (3.5), $M\cong\mathrm{Soc}^n(U)$ для некоторого главного неразложимого $\bar{R}[G]$-модуля U из B. Так как $U\otimes_{\bar{R}}\hat{\bar{R}}\cong\oplus\hat{U}^\tau$, где $\hat{U}$ — главный неразложимый $\hat{\bar{R}}[G]$-модуль, то результат следует из (3.4) (ii). □

§ 4. Радикал алгебры $\bar{R}[G]$

Этот параграф содержит различные результаты, относящиеся к $J(\bar{R}[G])$. Материал вплоть до (4.8) принадлежит Цушиме [1971a]. См. также Цушима [1978a].

В этом параграфе будут использоваться следующие обозначения. $V_1, V_2, \ldots$ — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых $\hat{\bar{R}}[G]$-модулей. Для каждого i обозначим через U_i проективный неразложимый $\hat{\bar{R}}[G]$-модуль, соответствующий V_i. Пусть φ_i, Φ_i — характер Брауэра, отвечающий V_i, U_i соответственно.

Выберем нумерацию так, что $\varphi_1 = 1_G$ — главный неприводимый характер Брауэра. Пусть t_i — функция следа модуля V_i. Имеет место следующее:

$$t_i(x) = \overline{\varphi_i(x)} \text{ для } p'\text{-элемента } x \text{ из } G. \tag{4.1}$$

$$t_i(x) = t_i(x_{p'}), \text{ где } x_{p'} \text{ — это } p'\text{-часть элемента } x \in G. \tag{4.2}$$

Пусть $F_i = \bar{R}(t_i(x), x \in G)$ и T_i — след из F_i в $\bar{R}$. Установим нумерацию так, что $T_1(t_1)$, $T_2(t_2)$, ... — все различные элементы множества $\{T_i(t_i)\}$. В силу (I.19.3) и (I.19.4), $\{T_i(t_i)\}$ является множеством всех функций следа неприводимых $\bar{R}[G]$-модулей. Кроме того, $J(\hat{\bar{R}}[G]) = J(\bar{R}[G] \otimes_R \hat{R})$.

Лемма 4.3. *Пусть $\{V_j \mid j \in S\}$ — множество попарно неизоморфных неприводимых $\hat{\bar{R}}[G]$-модулей. Пусть $I = I_S$ — пересечение аннуляторов всех V_j, $j \in S$. Пусть $\{a_j \mid j \in S\}$ — множество ненулевых элементов из $\hat{R}$. Тогда* $\operatorname{Ann}(I) = \hat{\bar{R}}[G]c$, *где* $c = \sum_{x \in G} \{\sum_{j \in S} a_j t_j(x^{-1})\} x$.

Доказательство. Пусть $s = \sum_{j \in S} a_j t_j$. Определим $t \in \operatorname{Hom}_{\hat{R}}(R[G], \hat{\bar{R}})$ равенством $(\sum_{x \in G} b_x x)t = b_1$. Согласно (I.14.9), t — симметрический и невырожденный элемент. Очевидно, s — симметрический и невырожденный элемент из $\operatorname{Hom}_{\hat{R}}(\hat{\bar{R}}[G]/I, \hat{\bar{R}})$. Таким образом,

$$\left(\sum_{y \in G} b_y y\right) ct = \left\{ \sum_{x, y \in G} b_y \sum_{j \in S} a_j t_j(x^{-1}) xy \right\} t = \sum_{y \in G} b_y \sum_{j \in S} a_j t_j(y) =$$

$$= \sum_{j \in S} a_j t_j \left(\sum_{y \in G} b_y y \right) = \left(\sum_{y \in G} b_y y \right) s.$$

Результат следует из (I.16.17). □

Следствие 4.4. (i) *Для всех i*

$$\sum_{x \in G} T_i(t_i(x^{-1}))\, x \in \operatorname{Ann}(J(\bar{R}[G])).$$

(ii) *Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — ненулевые элементы из $\bar{R}$. Справедливо равенство* $\operatorname{Ann}(J(\bar{R}[G])) = \bar{R}[G]c$, *где* $c = \sum_{x \in G} \{\sum_i a_i T_i(t_i(x^{-1}))\} x$.

Доказательство. Достаточно доказать этот результат при $\bar{R} = \hat{\bar{R}}$. В этом случае $T_i(t_i) = t_i$ для всех i. Тогда (i) следует из (4.3), где $I = \operatorname{Ann}(V_i)$, а (ii) следует из (4.3) для $I = J(\hat{\bar{R}}[G])$. □

Лемма 4.5. *Предположим, что $R = \hat{R}$. Пусть p^n — порядок S_p-подгруппы из G. Пусть I — аннулятор модуля $\oplus_{j \in S} V_j$, где S — множество всех j, для которых $p^{n+1} \nmid \Phi_j(1)$. Тогда $J(\bar{R}[G]) \subseteq I$ и $\operatorname{Ann}(I) = \bar{R}[G]c$, где c — сумма всех p-элементов из G.*

Доказательство. Очевидно, $J(\bar{R}[G]) \subseteq I$. Для каждого i пусть $\Phi_i(1) = p^n h_i$, так что h_i — натуральные числа для всех i. В силу

(IV.3.8), $\sum_i h_i\varphi_i(x)=0$, если $x\neq 1$, и $\sum_i h_i\varphi_i(1)=p^{-n}|G|$. Поэтому если $a=p^{-n}|G|$, то $a\neq 0$. Очевидно, тогда и только тогда $\bar{h}_i\neq 0$, когда $i\in S$. Таким образом, из (4.1) и (4.2) следует, что для $x\in G$

$$\sum_{i\in S}\bar{h}_i t_i(x)=\sum_i \bar{h}_i t_i(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ не является } p\text{-элементом},\\ a\neq 0, & \text{если } x \text{ является } p\text{-элементом}.\end{cases}$$

Следовательно, $\sum_{x\in G}\{a^{-1}\sum_{i\in S}\bar{h}_i(t_i(x^{-1}))\}x=c$. Результат следует из (4.3). □

Пусть $x\in G$ является p'-элемеитом, и пусть $c_x\in\bar{R}[G]$ — сумма всех элементов из G, чьи p'-части сопряжены с x. Идеал в $\bar{R}[G]$, порожденный всеми c_x, называется *идеалом Рейнольдса* алгебры $\bar{R}[G]$. По поводу близких понятий см. О'Рейли [1974].

Теорема 4.6. $\mathrm{Ann}(J(\bar{R}[G]))$ *совпадает с идеалом Рейнольдса алгебры* $\bar{R}[G]$.

Доказательство. Поскольку $c_x\in\bar{R}[G]$ и $J(\bar{\bar{R}}[G])=J(\bar{R}[G])\otimes_R \otimes_R\bar{\bar{R}}$, результат достаточно доказать в случае $\bar{R}=\bar{\bar{R}}$.

Согласно (IV.3.10), для всякого p'-элемента x из G существует такая $\bar{R}$-линейная комбинация $\sum a_i t_i$ элементов $t_1, t_2, \ldots$, что $\sum a_i t_i(x)=1$ и $\sum a_i t_i(z)=0$ для всех p'-элементов z, не сопряженных с x. Если y есть p-элемент из $C_G(x)$, то $t_i(xy)=t_i(x)$. Поэтому из (4.4) (i) следует, что $c_x\in\mathrm{Ann}(J(\bar{R}[G]))$.

Для любого i имеем $\sum_{y\in G}t_i(y^{-1})y=\sum t_i(x^{-1})c_x$. Таким образом, по (4.4) (ii), $\mathrm{Ann}(J(\bar{R}[G]))$ порождается всеми c_x. □

Лемма 4.7. *Пусть H — подгруппа из G и I — нильпотентный левый идеал алгебры $\bar{R}[H]$. Пусть $I^x=x^{-1}Ix$ и $\tilde{I}=\bigcap_{x\in G}\bar{R}[G]I^x$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *$\tilde{I}$ — нильпотентный идеал в $\bar{R}[G]$.*

(ii) *$r_G(\tilde{I})=\sum_{x\in G}r_H(I)^x\bar{R}[G]$ и $\tilde{I}=l_G\{\sum_{x\in G}r_H(I)^x\bar{R}[G]\}$, где r, l обозначают соответственно правый и левый аннуляторы.*

(iii) *Если I — идеал в $\bar{R}[H]$, то $\tilde{I}=\bigcap_{x\in G}I^x\bar{R}[G]$.*

Доказательство. (i) Если $y\in G$, то $\tilde{I}y\subseteq\bigcap_{x\in G}\bar{R}[G]\tilde{I}^{xy}=\tilde{I}$. Таким образом, $\tilde{I}$ — идеал в $\bar{R}[G]$. Следовательно, $\tilde{I}^{m+1}\subseteq\tilde{I}^m(\bar{R}[G]I)=\tilde{I}^mI$ для любого натурального m. Значит, по индукции, $I^{m+2}\subseteq\tilde{I}^2I^m$ для любого целого $m\geqslant 0$. Таким образом, $\tilde{I}$ нильпотентный.

(ii) Согласно (I.16.15), $I=l_H(r_H(I))$. Отсюда следует, что $\bar{R}[G]I=l_G(r_H(I)\bar{R}[G])$. Следовательно, если $x\in G$, то

$$\bar{R}[G]I^x=l_G(r_H(I^x)\bar{R}[G])=l_G(\{r_H(I)\}^x\bar{R}[G]).$$

Значит,

$$\tilde{I}=\bigcap_{x\in G}l_G(\{r_H(I)\}^x\bar{R}[G])=l_G(\sum_{x\in G}(r_H(I))^x\bar{R}[G]).$$

Таким образом, по (I.16.15),

$$r_G(\tilde{I})=r_G\{l_G(\sum_{x\in G}r_H(I)^x\bar{R}[G])\}=\sum_{x\in G}r_H(I)^x\bar{R}[G].$$

(iii) В силу (I.16.16), левый и правый аннуляторы идеала в $F[G]$ или $F[H]$ совпадают. Таким образом, по (ii),

$$\tilde{I}=l_G\Big(\sum_{x\in G} r_H(I)^x\,\bar{R}[G]\Big)=r_G\Big(\sum_{x\in G} l_H(I)^x\,\bar{R}[G]\Big)=$$
$$=r_G\Big(\sum_{x\in G}\bar{R}[G]\,l_H(I)^x\Big)=\bigcap_{x\in G} r_G\big(\bar{R}[G]\,l_H(I)^x\big)=\bigcap_{x\in G} I^x\,\bar{R}[G].\ \square$$

Теорема 4.8. *Для любой S_p-подгруппы P из G положим $\varepsilon_P=\sum_{x\in P}x$. Тогда* $\operatorname{Ann}\big(J(\bar{R}[P])\big)\subseteq\sum_P\varepsilon_P\bar{R}[G]$, *где P пробегает все S_p-подгруппы из G.*

Доказательство. Пусть P — некоторая S_p-подгруппа из G. Тогда $J(\bar{R}[P])=\{\sum a_x x\mid\sum a_x=0\}$ и, следовательно, $\operatorname{Ann}\big(J(\bar{R}[P])\big)=\varepsilon_P\bar{R}[P]$. Применим (4.7) к $I=J(F[P])$. Согласно (4.7) (i), $\widetilde{J(\bar{R}[P])}\subseteq J(\bar{R}[G])$. Теперь результат следует из (4.7) (iii). $\square$

Следствие 4.9 (Ломбардо — Радичи [1939], [1947]). (i) *Пусть S — множество всех p-элементов из G. Если $\sum_{x\in G}a_x x\in J(\bar{R}[G])$, то для всех $x\in G$*

$$\sum_{y\in S}a_{xy}=\sum_{y\in S}a_{yx}=0.$$

(ii) *Предположим, что $\sum_{i\in P}a_{xy}=\sum_{y\in P}a_{yx}=0$ для всякой S_p-подгруппы P из G и для всех $x\in G$. Тогда $\sum_{x\in G}a_x x\in J(\bar{R}[G])$.*

Доказательство. Пусть c — сумма всех p-элементов из G. Тогда $\sum_{y\in S}a_{zy}=\sum_{y\in S}a_{yz}$ есть коэффициент элемента z в $\big(\sum_{x\in G}a_x x\big)c=c\big(\sum_{x\in G}a_x x\big)$. Таким образом, (i) следует из (4.6).

Пусть ε_P определено, как в (4.8). Применим предыдущий абзац к группе P. Тогда (ii) следует из (4.8) и (I.16.15). $\square$

В общем случае ни одно из условий в (4.9) не является необходимым и достаточным для того, чтобы элемент из $\bar{R}[G]$ лежал в $J(\bar{R}[G])$. Это видно из нижеследующего примера.

Пусть G — группа с S_p-подгруппой такого порядка p^n, что $p^{n+1}\mid\Phi_i(1)$ для некоторого i. Например, $G=\mathrm{SL}_2(4)\cong A_5$ и $p=2$, тогда $\Phi_i(1)=8$ для некоторого i. Пусть I определяется, как в (4.5). Тогда $J(\bar{R}[G])\subsetneq I$, но любой элемент из I удовлетворяет (4.9) (i).

Пусть $G=\mathrm{SL}_2(4)\cong A_5$ и $p=2$. Пусть P является S_2-подгруппой, $\varepsilon_P=\sum_{x\in P}x$ и $\varepsilon=\sum_{i=1}^{5}(\varepsilon_P)^{x_i}$, где P^{x_1}, ..., P^{x_5} — все S_2-подгруппы из G. Таким образом, ε есть сумма в $\bar{R}[G]$ всех элементов y из G, для которых $y^2=1$. Легко видеть, что ε_P содержится в аннуляторе каждого модуля V_i и, значит, $\varepsilon\in J(\bar{R}[G])$. Если z — инволюция и $z\notin P$, то $(zy)^2=1$ для $y\in P$ тогда и только тогда, когда $y=1$. Таким образом, если $\varepsilon=\sum a_x x$, то $\sum_{y\in P}a_{zy}=a_z\neq 0$. Значит, условие (4.9) (ii) не является необходимым.

Однако из (X.3.1) будет следовать, что (4.9) (i) необходимо и достаточно в случае, когда группа G является p-разрешимой. Часть нижеследующего § 6 содержит некоторые условия на G, при которых (4.9) (ii) необходимо и достаточно.

Следующий результат содержит некоторую информацию о $\dim_{\bar{R}}J(\bar{R}[G])$.

Теорема 4.10 (Уоллес [1958], [1961]). *Пусть p^n — порядок S_p-подгруппы из G. Имеют место следующие утверждения.*

(i) $p^n-1\leqslant\dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G]))\leqslant|G|(1-1/\Phi_1(1))$.

(ii) *Тогда и только тогда*

$$p^n-1=\dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G])),$$

когда G есть p-группа или группа Фробениуса, в которой дополнение является S_p-подгруппой.

(iii) *Предположим, что характер Φ_1 рациональнозначный. Тогда и только тогда* $\dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G]))=|G|(1-1/\Phi_1(1))$, *когда G имеет нормальную S_p-подгруппу.*

Доказательство. Можно предполагать, что $\bar{R}=\hat{\bar{R}}$. Так как $U_1J(\bar{R}[G])\subseteq J(\bar{R}[G])$ и $\dim_{\bar{R}}U_1=1+\dim_{\bar{R}}U_1J(\bar{R}[G])$, то

$$p^n-1\leqslant\Phi_1(1)-1\leqslant\dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G])). \tag{4.11}$$

Если G является p-группой, в (4.11), очевидно, имеет место равенство. Предположим, что G — группа Фробениуса с дополнением P и ядром H, где P является S_p-подгруппой из G. Тогда любой неприводимый характер группы G, который не содержит в своем ядре H, имеет дефект 0, и φ_1 — единственный неприводимый характер Брауэра группы G, содержащий H в своем ядре. Следовательно,

$$\dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G]))=|G|-\sum\varphi_i(1)^2=p^n-1.$$

Обратно, предположим, что $\dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G])=p^n-1$. Тогда, в силу (4.11), $\dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G]))=\Phi_1(1)-1$. Следовательно, $U_iJ(\bar{R}[G])=(0)$ при $i\neq1$, и, таким образом, φ_i лежит в блоке дефекта 0, если $i\neq1$. В частности, φ_1 — единственный характер Брауэра в главном блоке, значит, $G=O_{p',p}(G)$ по (IV.4.12). Это доказывает (ii).

Согласно (IV.4.15), $\Phi_i(1)\leqslant\Phi_1(1)\varphi_i(1)$ для всех i. Таким образом,

$$|G|=\sum\Phi_i(1)\varphi_i(1)\leqslant\Phi_1(1)\sum\varphi_i(1)^2=\Phi_1(1)\{|G|-\dim_{\bar{R}}J(\bar{R}[G])\}. \tag{4.12}$$

Это показывает справедливость второго неравенства в (i) и завершает доказательство (i).

Предположим, что в (4.12) имеет место равенство. Тогда $\Phi_i(1)=\Phi_1(1)\varphi_i(1)$ для всех i. Следовательно, $\Phi_i=\Phi_1\varphi_i$ для всех i. Так как характер Φ_1 рациональнозначный, то из (IV.10.1) следует, что $\Phi_1(y_j)=\pm p^{a_j}$ для любого p'-элемента y_j, где p^{a_j} — порядок S_p-подгруппы из $C_G(y_j)$. Для любого p'-элемента y из G пусть $c(y)$ равно числу элементов с p'-частью y. Тогда $c(y)\geqslant|\Phi_1(y)|$ для любого p'-элемента y из G. Следовательно, если y пробегает все p'-элементы из G, то

$$|G|=\sum_y c(y)\geqslant\sum_y|\Phi_1(y)|\geqslant\sum_y\Phi_1(y)=|G|(\Phi_1,\varphi_1)=|G|.$$

Поэтому, в частности, $c(1)=\Phi_1(1)=p^n$ — порядок S_p-подгруппы P из G. Значит, P содержит все p-элементы из G, и поэтому $P\lhd G$.

Обратно, предположим, что $P \lhd G$. Тогда множества неприводимых характеров Брауэра групп G и G/P совпадают. Таким образом,

$$|G| - \dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G])) = \sum \varphi_i^2(1) = |G:P| = |G|_{p'}.$$

Значит, $\dim_{\bar{R}}(J(\bar{R}[G])) = |G|\left(1 - \frac{1}{p^n}\right)$. Из того, что G имеет p-дополнение H, следует, что $\Phi_1 = (1_H)^G$. Итак, $\Phi_1(1) = p^n$. □

Предположение о рациональнозначности характера Φ_1 в (4.10) (iii), возможно, несущественно, но это остается открытым вопросом. В случае, когда G имеет p-дополнение H, характер $\Phi_1 = (1_H)^G$ рационален. В частности, Φ_1 рациональнозначный, когда G p-разрешима.

Другие свойства радикала групповой алгебры установили Кларк [1969]; Гамерник [1975b]; Кошитани [1977], [1978], [1979]; Морита [1951]; Мотосе [1974c], [1977], [1980], [1984*]; Мотосе и Ниномия [1975a], [1980]; Шпигель [1974]; Цушима [1967], [1968], [1978b], [1979]; Уоллес [1962a], [1962b], [1965], [1968]. Свойства радикала группового кольца p-группы изучали Хилл [1970]; Холвет [1968]; Дженнингс [1941]. Случай p-разрешимой группы p-длины 1 рассматривал Шварц [1979].

§ 5. Радикал алгебры $R[G]$

В этом параграфе будут использоваться обозначения из § 8 гл. IV. Итак, предполагается, что $R = \hat{R}$. Для $\theta \in \mathrm{Ch}_K(G)$ определим

$$\hat{\theta} = \frac{\theta(1)}{|G|} \sum_{x \in G} \theta(x^{-1})x.$$

Тогда $\hat{\theta} \in Z_K(G)$. В силу (IV.7.1), $\{\hat{\chi}_u\}$ есть множество примитивных центральных идемпотентов в $K[G]$. Кроме того,

$$\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_u \in Z_R(G).$$

Из включения $\pi R[G] \subseteq J(R[G])$ следует, что $\overline{J(R[G])} = J(\bar{R}[G])$. На самом деле $J(R[G])$ является полным прообразом $J(\bar{R}[G])$ в $R[G]$. Пусть A обозначает полный прообраз $\mathrm{Ann}(J(\bar{R}[G]))$ в $R[G]$.

Если e — центральный идемпотент в $R[G]$, то $J(R[G]e) = J(R[G])e$ и Ae является полным прообразом $\mathrm{Ann}(J(\bar{R}[G]))$ в $R[G]$.

Большинство результатов этого параграфа принадлежит Бруё [1976b], [1978b].

Лемма 5.1. *Пусть B — блок и e — соответствующий примитивный центральный идемпотент в $R[G]$. Тогда*

$$Ae = \pi R[G]e + \sum_{\chi_u \in B} R[G]\left(\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_u\right).$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$A=\pi\bar{R}[G]+\sum_u R[G]\left(\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_u\right),$$

или, эквивалентно, что

$$\bar{A}=\sum_u \bar{R}[G]\left(\overline{\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_u}\right).$$

Если $x_{p'}$ есть p'-часть элемента x из G, то $\chi_u(x)\equiv\chi_u(x_{p'})\pmod{\pi}$. Тогда из (IV.3.12), (4.1) и (4.2) следует, что

$$\sum_u \bar{R}[G]\left(\overline{\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_u}\right)=\sum_i \bar{R}[G]\left(\sum_{x\in G} t_i(x^{-1})x\right),$$

где $\{t_i\}$ — множество всех функций следа неприводимых $\bar{R}[G]$-модулей. Теперь результат следует из (4.4). □

Лемма 5.2. *Пусть e — примитивный центральный идемпотент в $R[G]$ и B — соответствующий блок. Тогда*

(i) $Z_R(G)e\subseteq\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u$,

(ii) $J(Z_R(G)e)=\pi(\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u)\cap Z_R(G)e$.

Доказательство. Для $\chi_v\in B$ $\omega_v(\hat{\chi}_u)=\delta_{uv}$. Поэтому для $a\in Z_K(G)e$ $a=\sum_{\chi_u\in B}\omega_u(a)\hat{\chi}_u$.

(i) Если $a\in Z_R(G)e$, то $\omega_u(a)\in R$ для всех u. Отсюда вытекает результат.

(ii) Легко видеть, что $J(\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u)=\pi(\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u)$. При этом $J(\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u)$ состоит из всех $a\in\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u$, для которых $\omega_u(a)\equiv 0\pmod{\pi}$ для всех $\chi_u\in B$. Теперь результат следует из того факта, что $J(Z_R(G)e)$ состоит из всех тех $a\in Z_R(G)e$, для которых $\omega_u(a)\equiv 0\pmod{\pi}$ для всех $\chi_u\in B$. □

Лемма 5.3. *Пусть $I=\sum_u R((|G|/\chi_u(1))\hat{\chi}_u)$. Пусть e — примитивный центральный идемпотент в $R[G]$ и B — соответствующий блок.*

(i) $Ie=\sum_{\chi_u\in B}R((|G|/\chi_u(1))\hat{\chi}_u)$.

(ii) *Ie является идеалом в $\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u$ и в $Z_R(G)e$.*

(iii) *Для любого натурального n имеем $Ie\{J(Z_R(G))e\}^n\subseteq\pi^n Ie$.*

Доказательство. (i) Ясно из определения.

(ii) Согласно (5.1), $Ie\subseteq Z_R(G)e$. Таким образом, достаточно доказать первое утверждение. Оно следует из того факта, что $\hat{\chi}_u\hat{\chi}_v=\delta_{uv}\hat{\chi}_u$, т. е.

$$\hat{\chi}_v\left(\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_v\right)=\frac{|G|}{\chi_u(1)}\delta_{uv}\hat{\chi}_u.$$

(iii) Поскольку Ie — идеал в $\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u$, достаточно показать, что если $n\geqslant 0$, то

$$J(Z_R(G)e)^n\subseteq\pi^n\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u.$$

Это следует из (5.2) (ii). □

Теорема 5.4. *Пусть e, B, I определяются как в* (5.3) *и d — дефект блока B.*

(i) $J(Z_R(G)e)=(\pi p^{-d}Ie)\cap Z_R(G)e$.

(ii) *Для любого целого $n\geqslant 1$ имеем* $J(Z_R(G)e)^n\subseteq(\pi^n p^{-d}Ie)\cap Z_R(G)e$.

Доказательство. (i) Очевидно, $(\pi p^{-d}Ie)\cap Z_R(G)e$ — идеал в $Z_R(G)e$. По определению I, $\hat{\chi}_u\in p^{-d}Ie$ для $\chi_u\in B$. Таким образом, $\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u\subseteq p^{-d}Ie$. Значит, согласно (5.2) (ii),

$$J(Z_R(G)e)=\pi\left(\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u\right)\cap Z_R(G)e\subseteq\pi p^{-d}Ie\cap Z_R(G)e.$$

Пусть χ_v — характер высоты 0 из B, тогда

$$\omega_v\left(\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_u\right)=\frac{|G|}{\chi_u(1)}\delta_{uv}.$$

Следовательно, $\omega_v(\pi p^{-d}Ie)\subseteq\pi R$, так что $\pi p^{-d}Ie\cap Z_R(G)e$ аннулируется центральным характером $\bar{\omega}_v$ алгебры $\bar{R}[G]\bar{e}$. Итак, $\pi p^{-d}Ie\cap Z_R(G)e\subseteq$ $\subseteq J(Z_R(G)e)$.

(ii) Индукция по n. Если $n=1$, утверждение следует из (i). Предположим, что результат верен для $n-1$. Согласно (5.2) (ii),

$$J(Z_R(G)e)^n=J(Z_R(G)e)J(Z_R(G)e)^{n-1}\subseteq\left(\pi\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u\right)\pi^{n-1}p^{-d}Ie\cap Z_R(G)e.$$

Результат следует из того, что, согласно (5.3) (ii), Ie является идеалом в $\sum_{\chi_u\in B}R\hat{\chi}_u$. □

Следствие 5.5. *Предположим, что $R\pi^m=Rp$. Пусть I, B, e, d определены как в* (5.4).

(i) $J(Z_R(G)e)^{md+n}\subseteq\pi^n Ie$ *для всех натуральных n.*

(ii) $J(Z_R(G)e)^{md+1}\subseteq\pi Z_R(G)e$.

Доказательство. (i) Следует из (5.4) (ii).

(ii) Следует из (i), так как $Ie\subseteq Z_R(G)$. □

Бруё указал, что следующий результат, принадлежащий Цушиме [1971b], может быть доказан теми же методами. См. также Рейнольдс [1972].

Теорема 5.6 (Цушима [1971b]). *Пусть $c\in\bar{R}[G]$ — сумма всех p-элементов из G. Тогда c^2 есть сумма всех примитивных центральных идемпотентов из $\bar{R}[G]$, которые соответствуют блокам дефекта* 0.

Доказательство. Пусть S — множество всех p-элементов из G. Пусть $c_0=\sum_{y\in S}y\in R[G]$, тогда $\bar{c}_0=c$. Поскольку c лежит в идеале Рейнольдса, из (4.6) следует, что $c\in\mathrm{Ann}(J(\bar{R}[G]))$. Таким образом, $c_0\in A$. Так как $\omega_u(\hat{\chi}_v)=\delta_{uv}$, то

$$c_0=\sum_u\omega_u(c_0)\hat{\chi}_u=\sum_u\frac{\omega_u(c_0)\chi_u(1)}{|G|}\left(\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_u\right). \tag{5.7}$$

Поскольку $\hat{\chi}_u\hat{\chi}_v=\delta_{uv}\hat{\chi}_u$, отсюда следует, что

$$c_0^2=\sum_u\left\{\frac{\omega_u(c_0)\chi_u(1)}{|G|}\right\}^2\frac{|G|}{\chi_u(1)}\left(\frac{|G|}{\chi_u(1)}\hat{\chi}_u\right).$$

Согласно (5.1) и (5.7), $\omega_u(c_0)\chi_u(1)/|G|\in R$ для всех u. Пусть B_0 — объединение всех блоков дефекта 0. Поскольку тогда и только тогда $\{|G|/\chi_u(1)\}\neq 0$, когда χ_u лежит в B_0, отсюда следует, что

$$c^2=\bar{c}_0^2=\sum_{\chi_u\in B_0}\overline{\omega_u(c_0)}\,\bar{\hat{\chi}}_u.$$

Если χ_u принадлежит блоку дефекта 0, то $\chi_u(y)=0$ для любого $y\in S$, $y\neq 1$. Таким образом, $\omega_u(c_0)=1$. Значит, $c^2=\sum_{\chi_u\in B_0}\bar{\hat{\chi}}_u$. □

§ 6. p-радикальные группы

Материал этого параграфа основан на работе Мотосе и Киномия [1975b], которая включает более ранние результаты Дескинса [1958]; Кхатри [1973]; Кхатри и Синха [1969] и Мотосе [1974a], [1974b]. Многие из них усилил Кнёрр [1977]. Близкие результаты можно найти у Бруё [1978a], Айзекса и Скотта [1974], Кхатри [1974].

Определим следующие множества подгрупп H группы G.

$\mathfrak{C}(G)=\{H\mid$ модуль V^G вполне приводим для любого неприводимого $\bar{R}[H]$-модуля $V\}$.

$\mathfrak{D}(G)=\{H\mid p\nmid |G:H|\}$.

$\mathfrak{R}(G)=\{H\mid J(\bar{R}[G])\subseteq J(\bar{R}[H])\,\bar{R}[G]\}$.

Поскольку $J(F[G])=J(\bar{R}[G])\otimes_{\bar{R}}F$ для любого расширения F поля $\bar{R}$, то $\mathfrak{R}(G)$ зависит только от G и p.

Лемма 6.1. $\mathfrak{R}(G)=\mathfrak{C}(G)$.

Доказательство. Пусть $H\in\mathfrak{R}(G)$ и V — неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль. Тогда

$$V^GJ(\bar{R}[G])=\Big(V\underset{\bar{R}[H]}{\otimes}\bar{R}[G]\Big)J(\bar{R}[G])=V\underset{\bar{R}[H]}{\otimes}J(\bar{R}[G])\subseteq$$

$$\subseteq V\underset{\bar{R}\in[H]}{\otimes}J(\bar{R}[H])\,\bar{R}[G]=VJ(\bar{R}[H])\underset{\bar{R}[H]}{\otimes}\bar{R}[G]=(0).$$

Таким образом, модуль V^G вполне приводим, и, значит, $H\in\mathfrak{C}(G)$. Следовательно, $\mathfrak{R}(G)\subseteq\mathfrak{C}(G)$.

Предположим, что $H\in\mathfrak{C}(G)$. Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль подгруппы H в G. Тогда произвольный элемент $a\in J(\bar{R}[G])$ имеет вид $a=\sum_i a_ix_i$, где $a_i\in\bar{R}[H]$. Если V — неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль, то $V^Ga=0$, так как модуль V^G вполне приводим. Следовательно, $0=(V\otimes 1)a=\sum_i Va_i\otimes x_i$, откуда $Va_i=0$ для всех i. Следовательно, каждый элемент a_i аннулирует любой неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль, так что $a_i\in J(\bar{R}[H])$ для всех i. Итак, $a\in J(\bar{R}[H])\,\bar{R}[G]$. Следовательно, $H\in\mathfrak{R}(G)$, и, значит, $\mathfrak{C}(G)\subseteq\mathfrak{R}(G)$. □

Лемма 6.2. $\mathfrak{R}(G)\subseteq\mathfrak{D}(G)$.

Доказательство. Пусть $H\in\mathfrak{R}(G)$, $V=\mathrm{Inv}_H(V)$ — одномерный $\bar{R}[H]$-модуль. Согласно (6.1), $H\in\mathfrak{C}(G)$, так что V^G вполне приводим. Следовательно, $W\mid V^G$, где $W=\mathrm{Inv}_G(W)$ и $\dim_{\bar{R}}W=1$. Если Q — некоторая S_p-подгруппа из H, то Q является вертексом модуля V. Пусть P — такая S_p-подгруппа из G, что $Q\subseteq P$. Аналогично, W имеет P своим вертексом. Поскольку $W\mid V^G$, мы должны иметь $P=Q$, в силу (III.4.6). □

Группа G называется *p-радикальной*, если $\mathfrak{R}(G)=\mathfrak{D}(G)$, или, эквивалентно, $\mathfrak{C}(G)=\mathfrak{D}(G)$.

Следующий результат показывает, в частности, что группа G тогда и только тогда является p-радикальной, когда условие в (4.9) (ii) необходимо и достаточно для принадлежности элемента из $\bar{R}[G]$ радикалу.

Теорема 6.3. *Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Группа G является p-радикальной.*

(ii) *$\mathfrak{R}(G)$ содержит S_p-подгруппу из G.*

(iii) $J(\bar{R}[G])=\bigcap_{x\in G}J(\bar{R}[P^x])\bar{R}[G]$, *где P — некоторая S_p-подгруппа из G.*

(iv) $\mathrm{Ann}\,J(\bar{R}[G])=\sum_P\varepsilon_P\bar{R}[G]$, *где P пробегает все S_p-подгруппы из G, и $\varepsilon_P=\sum_{x\in P}x$.*

(v) $\sum_{x\in G}a_x x\in J(F[G])$ *тогда и только тогда, когда* $\sum_{y\in P}a_{xy}=\sum_{y\in P}a_{yx}=0$ *для всех $x\in G$ и любой S_p-подгруппы P из G.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Ясно из определения.

(ii)⇒(iii). Поскольку $P\in\mathfrak{R}(G)$, то $J(\bar{R}[G])\subseteq J(\bar{R}[P^x])\bar{R}[G]$ для всех $x\in G$. Таким образом, $J(\bar{R}[G])\subseteq\bigcap_{x\in G}J(\bar{R}[P^x])\bar{R}[G]$. Обратное включение следует из (4.7) (i).

(iii)⇒(i). Согласно (6.2), достаточно показать, что $\mathfrak{D}(G)\subseteq\mathfrak{R}(G)$. Пусть $H\in\mathfrak{D}(G)$ и P — такая S_p-подгруппа из G, что $P\subseteq H$. В силу (4.7) (i), $\bigcap_{x\in H}J(\bar{R}[P^x])\bar{R}[H]\subseteq J(\bar{R}[H])$. Поэтому

$$\bigcap_{x\in G}J(\bar{R}[P^x])\bar{R}[G]\subseteq\bigcap_{x\in G}J(\bar{R}[P^x])\bar{R}[H^x]\bar{R}[G]\subseteq\bigcap_{x\in G}J(\bar{R}[H^x])\bar{R}[G].$$

В силу (4.7) (i), $\bigcap_{x\in G}J(\bar{R}[H^x])\bar{R}[G]\subseteq J(\bar{R}[G])$. По условию, $J(\bar{R}[G])=\bigcap_{x\in G}J(\bar{R}[P^x])\bar{R}[G]$. Значит, все эти множества совпадают, т. е.

$$J(\bar{R}[G])=\bigcap_{x\in G}J(\bar{R}[H^x])\bar{R}[G]\subseteq J(\bar{R}[H])\bar{R}[G].$$

Следовательно, $H\in\mathfrak{R}(G)$, и, значит, $\mathfrak{D}(G)\subseteq\mathfrak{R}(G)$.

(iii)⇔(iv). Так как $J(\bar{R}[P])=\varepsilon_P\bar{R}[P]$, утверждения получаются одно из другого взятием аннуляторов.

(iv)⇔(v). Утверждение (v) эквивалентно утверждению о том, что элемент a из $\bar{R}[G]$ тогда и только тогда лежит в $J(\bar{R}[G])$, когда $a\varepsilon_P=\varepsilon_P a=0$ для всех S_p-подгрупп P из G. Иными словами, $J(\bar{R}[G])=\mathrm{Ann}(\sum_P\varepsilon_P\bar{R}[G])$. Таким образом, (iv) и (v) можно вывести одно из другого взятием аннуляторов. □

Следствие 6.4. *Пусть P — некоторая S_p-подгруппа из G, и рассмотрим $\bar{R}[P]$-модуль $V=\mathrm{Inv}_P(V)$, имеющий $\dim_{\bar{R}} V=1$. Группа G тогда и только тогда является p-радикальной, когда модуль V^G вполне приводим.*

Доказательство. Согласно (6.1) и (6.3), G является p-радикальной группой тогда и только тогда, когда $P\in\mathfrak{C}(G)$. Результат вытекает из того, что V является единственным, с точностью до изоморфизма, неприводимым $\bar{R}[P]$-модулем. □

Теорема 6.5 (Кхатри [1973]). *Предположим, что $H\lhd G$. Имеют место следующие утверждения.*

(i) *$H\in\mathfrak{D}(G)$ тогда и только тогда, когда $H\in\mathfrak{R}(G)$.*

(ii) *Если группа G является p-радикальной, то группа G/H является p-радикальной.*

(iii) *Если H является p-группой, то G тогда и только тогда p-радикальна, когда p-радикальна G/H.*

(iv) *Если $H\in\mathfrak{D}$, то G тогда и только тогда p-радикальна, когда p-радикальна H.*

Доказательство. Пусть P есть S_p-подгруппа из G.

(i) Если $H\in\mathfrak{D}(G)$, то $H\in\mathfrak{C}(G)$, согласно (2.5), так что $H\in\mathfrak{R}(G)$ по (6.1). Обратное следует из (6.2).

(ii) Пусть V — неприводимый $\bar{R}[PH/H]$-модуль. Модуль V^G вполне приводим как $\bar{R}[G]$-модуль тогда и только тогда, когда V^G вполне приводим как $\bar{R}[G/H]$-модуль. Результат следует из (6.4).

(iii) Если G является p-радикальной, такова же группа G/H, согласно (ii). Предположим, что G/H p-радикальна. Пусть V — неприводимый $\bar{R}[P]$-модуль. Поскольку $H\subseteq P$, то V — неприводимый $R[P/H]$-модуль, так что V^G — вполне приводимый $\bar{R}[G/H]$-модуль. Итак, G является p-радикальной, в силу (6.4).

(iv) Пусть V — неприводимый $\bar{R}[P]$-модуль. Если модуль V^G вполне приводим, то, по теореме Клиффорда (III.2.12), модуль $(V^G)_H$ вполне приводим. Таким образом, в силу разложения Макки (II.2.9), модуль V^H вполне приводим. Если V^H вполне приводим, то, по теореме Клиффорда, V^G вполне приводим. Результат следует из (6.4). □

Следствие 6.6. *Группа $G=G_1\times G_2$ тогда и только тогда является p-радикальной, когда p-радикальны G_1 и G_2.*

Доказательство. Если p-радикальна G, то таковы G_1 и G_2, согласно (6.5) (ii). Предположим, что p-радикальны G_1 и G_2. Пусть P_i является S_p-подгруппой в G_i $(i=1, 2)$. В силу (6.5). $J(\bar{R}[G_i])\subseteq$ $\subseteq J(\bar{R}[P_i])\,\bar{R}[G_i]$. Так как

$$J(\bar{R}[G])=J(\bar{R}[G_1])\,\bar{R}[G_2]+J(\bar{R}[G_2])\,\bar{R}[G_1]$$

(сумма $\bar{R}[G]=\bar{R}[G_1]\otimes_R\bar{R}[G_2]$-модулей), то

$$J(\bar{R}[G])\subseteq J(\bar{R}[P_1])\,\bar{R}[G]+J(\bar{R}[P_2])\,\bar{R}[G].$$

Группа $P=P_1\times P_2$ является S_p-подгруппой в G, причем $J(\bar{R}[P_i])\subseteq J(\bar{R}[P])$ $(i=1, 2)$. Таким образом, $J(\bar{R}[G])\subseteq J(\bar{R}[P])\,\bar{R}[G]$. Итак, $P\in\mathfrak{R}(G)$ и, значит, G p-радикальна, в силу (6.3). □

ГЛАВА VII

§ 1. Блоки с циклической дефектной группой

Цель этой главы — изучить модули из блока с циклической дефектной группой. В частности, будут описаны все неразложимые модули такого блока над полем характеристики p. Кроме того, будет получена детальная информация относительно чисел разложения, высших чисел разложения и других свойств модулей и характеров в таком блоке. Так как ситуация для блока дефекта 0 очень проста и уже описана, будет предполагаться, что блок имеет положительный дефект.

Циклическая p-группа имеет лишь конечное число неразложимых модулей над любым полем характеристики p. (Это следует из жордановой формы линейных преобразований.) Таким образом, любой модуль из блока с циклической дефектной группой имеет только конечное число возможных источников. Значит, существует такое конечное поле, что любой модуль над полем характеристики p в блоке с циклической дефектной группой эквивалентен модулю над этим конечным полем. Это показывает, что приведенные ниже предположения не являются слишком обременительными.

На протяжении настоящей главы будут использоваться обозначения, введенные в начале главы III. Помимо них будут также использоваться следующие предположения и обозначения.

K — конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$.

R — кольцо целых в K.

D — циклическая подгруппа из G,

$$|D| = p^a > 1, \quad D = \langle y \rangle.$$

Для любого i, $0 \leqslant i \leqslant a$, D_i — единственная подгруппа из D индекса $|D : D_i| = p^i$, $C_i = C_G(D_i)$, $N_i = N_G(D_i)$.

Следовательно, $C_i \lhd N_i$ и

$$C_0 \subseteq C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_{a-1} \subseteq C_a = G, \quad N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_{a-1} \subseteq N_a = G.$$

B — блок алгебры $R[G]$ с дефектной группой D.

Как и в § 1 гл. VI, существует конечное неразветвленное расширение $\hat{K}$ поля K, удовлетворяющее вместе со своим кольцом целых $\hat{R}$ следующим условиям.

(i) $\bar{\hat{R}}$ — поле разложения алгебры $\bar{\hat{R}}[H]$ для любой подгруппы H из G, а $\hat{K}$ — поле разложения алгебры $\hat{K}[H]$ для любой p'-подгруппы H из G.

(ii) В $\hat{R}[G]$ существуют такие блоки $\hat{B}=\hat{B}^{(0)}, \ldots, \hat{B}^{(r-1)}$, что D является дефектной группой каждого из $\hat{B}^{(j)}$. При этом неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль V тогда и только тогда принадлежит B, когда $V\otimes_{\bar{R}}\bar{\hat{R}}=\sum_{j=0}^{r-1}\hat{V}^{(j)}$, где $\hat{V}^{(j)}$ принадлежит $\hat{B}^{(j)}$.

(iii) Существует такой элемент σ группы Галуа поля $\hat{K}$ над K, что после подходящей перенумерации $\hat{B}^{\sigma^j}=\hat{B}^{(j)}$ для $j=0, \ldots, r-1$ и $\hat{B}^{\sigma^r}=\hat{B}$.

Установим нумерацию так, что $\hat{B}^{\sigma^j}=\hat{B}^{(j)}$, и для любого целого числа j' определим $\hat{B}^{(j')}=\hat{B}^{(j)}$, если $0\leqslant j\leqslant r-1$ и $j'\equiv j \pmod r$.

Поскольку $N=N_0\subseteq N_i$ для $0\leqslant i\leqslant a$, по первой основной теореме о блоках (III.9.7), примененной к G и N_i, для каждого i $(0\leqslant i\leqslant a)$ существует единственный блок $\hat{B}_i$ алгебры $\hat{R}[N_i]$, для которого $\hat{B}_i^G=\hat{B}=\hat{B}_a$. Тогда также $\hat{B}_i^{N_k}=\hat{B}_k$ для $0\leqslant i\leqslant k\leqslant a$.

Согласно (III.9.3) и условию (iii), это дает $\hat{B}_i^{(j)N_k}=\hat{B}_k^{(j)}$ для всех j и $0\leqslant i\leqslant k\leqslant a$. По первой основной теореме о блоках (III.9.7), D является дефектной группой каждого блока $\hat{B}_k^{(j)}$. Пусть b_k — блок алгебры $\hat{R}[C_k]$, накрываемый блоком $\hat{B}_k$ $(0\leqslant k\leqslant a)$. Для $j=0, \ldots, r-1$ определим $\hat{b}_k^{(j)}=\hat{b}_k^{\sigma^j}$, тогда $\hat{B}_k^{(j)}$ накрывает $\hat{b}_k^{(j)}$. Однако заметим, что $\hat{b}_k^{\sigma^r}$ может не совпадать с $\hat{b}_k$. Согласно (V.2.3), блоки, накрываемые блоком $\hat{B}_k$, сопряжены под действием N_k, поэтому $\hat{b}_k^{\sigma^r}=\hat{b}_k^z$ для некоторого $z\in N_k$.

Согласно (V.3.9), блок $\hat{B}_k$ регулярен относительно C_k. Значит, в силу (V.3.6), $\hat{b}_k^{N_k}=\hat{B}_k$. Согласно (V.3.14), D является дефектной группой блока $\hat{b}_k$.

Группа N_k/C_k является группой автоморфизмов циклической p-группы D_k. Поэтому либо N_k/C_k циклическая, либо $p=2$ и N_k/C_k является прямым произведением группы порядка 2 и циклической группы. В обоих случаях $|N_k:C_k|\,|(p-1)p^{a-1}$. Следовательно, согласно (V.3.14), $|T(\hat{b}_k):C_k|\,|(p-1)$, где $T(\hat{b}_k)$ — группа инерции блока $\hat{b}_k$ в N_k. Кроме того, группа $T(\hat{b}_k)/C_k$ является циклической.

Для $0\leqslant k\leqslant a$ пусть b_k — блок алгебры $R[C_k]$, соответствующий множеству всех блоков $\{\hat{b}_k^{\sigma^j}\}$ алгебры $\hat{R}[C_k]$, как в (III.9.10). Пусть, как в (III.9.10), B_k — блок алгебры $\bar{R}[N_k]$, который соответствует множеству всех блоков $\{\hat{B}_k^{\sigma^j}\}$ алгебры $\bar{\hat{R}}[N_k]$. Таким образом, B_k накрывает b_k^x для всех $x\in N_k$.

Пусть H — группа и V — $\bar{R}[H]$-модуль. Введем обозначения:

$l(V)$ — число факторов композиционного ряда в V.

$S(V)=S^1(V)=\mathrm{Soc}(V)$ — цоколь V.

$S^n(V)$ — прообраз $S(V/S^{n-1}(V))$ в V для $n\geqslant 2$.

$T(V)=V/\mathrm{Rad}(V)$.

$\mathrm{Rad}^1(V)=\mathrm{Rad}(V)$ и $\mathrm{Rad}^n(V)=\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}^{n-1}(V))$ для $n\geqslant 2$.

Пусть μ — одномерное представление алгебры $\bar{R}[H]$. Обозначим через $V\mu$ тензорное произведение V и модуля с характером μ. Тем самым мы отождествляем μ с модулем, характером которого он является.

Для $\bar{R}[H]$-модулей V_1 и V_2 символом $I_{\bar{R}}(V_1, V_2)$ обозначим число зацеплений V_1 и V_2.

Для $R[H]$-модуля V положим $V_K = V \otimes_R K$.

Лемма 1.1. *Если* $0 \leqslant k \leqslant a-1$, то:

(i) $C_0 = C_k \cap T(\hat{b}_0)$,

(ii) $T(\hat{b}_k) = T(\hat{b}_0) C_k$,

(iii) $T(\hat{b}_k)/C_k \cong T(\hat{b}_0)/C_0$.

Доказательство. (iii) — непосредственное следствие из (i) и (ii).

(i) Очевидно, $C_0 \subseteq C_k \cap T(\hat{b}_0)$. Допустим, что $x \in C_k \cap T(\hat{b}_0)$, тогда $x \in N_0$ и $x^d \in C_0$ для некоторого натурального d, $d \mid (p-1)$. Поскольку $x \in C_k \subseteq C_{a-1}$, то $x \in C_0$.

(ii) Пусть $C_k \subseteq H \subseteq N_k$ и H/C_k — холловская p'-подгруппа в N_k/C_k. Тогда группа H/C_k циклическая и группы $T(\hat{b}_k)$, $T(\hat{b}_0) C_k$ содержатся в H. Значит, достаточно показать, что $|T(\hat{b}_k) : C_k| = |T(\hat{b}_0) C_k : C_k|$.

Пусть t — число блоков алгебры $\bar{R}[C_k]$, которые накрываются блоком $\hat{b}_k^H$, т. е. $t = |H : T(\hat{b}_k)|$. Согласно (V.3.9) и (V.3.10), блок $\hat{b}_0^{H \cap N_0}$ тогда и только тогда накрывает блок $\hat{b}$ алгебры $\hat{R}[C_0]$, когда $\hat{b}^{H \cap N_0} = \hat{b}_0^{H \cap N_0}$. По первой основной теореме о блоках (III.9.7) для этого необходимо и достаточно, чтобы $\hat{b}^H = (\hat{b}^{C_k})^H = \hat{b}_0^H$, или, эквивалентно, чтобы блок $\hat{b}^{C_k}$ накрывался блоком $\hat{b}_0^H$. Поэтому t равно числу блоков алгебры $\hat{R}[C_0]$, которые накрываются блоком $\hat{b}_0^{H \cap N_0}$. Таким образом, $t = |H \cap N_0 : T(\hat{b}_0)|$.

Поскольку $|H : C_k|$ равно числу элементов из D_{a-1}, сопряженных в G с $y^{p^{a-1}}$, то $|H : C_k| = |H \cap N_0 : C_0|$. Поэтому

$$t\,|T(\hat{b}_k) : C_k| = |H : C_k| = |H \cap N_0 : C_0| = t\,|T(\hat{b}_0) : C_0|.$$

Значит,

$$|T(\hat{b}_0) C_k : C_k| = |T(\hat{b}_0) : T(\hat{b}_0) \cap C_k| = |T(\hat{b}_0) : C_0| = |T(\hat{b}_k) : C_k|. \quad \square$$

Для $x \in N_{a-1}$ определим $\alpha(x)$ равенством $x^{-1} y^{p^{a-1}} x = y^{p^{a-1}\alpha(x)}$. Тогда α — одномерное представление алгебры $\bar{R}[N_{a-1}]$, ядром которого является C_{a-1}. Для простоты мы будем обозначать через α также его ограничение на любую подгруппу из N_{a-1} и соответствующий ему одномерный $\bar{R}[N_{a-1}]$-модуль.

Ввиду (1.1), $\{\alpha^j \mid 0 \leqslant j \leqslant |T(\hat{b}_0) : C_0|\}$ является множеством различных представлений алгебры $\bar{R}[T(\hat{b}_k)]$, $0 \leqslant k \leqslant a-1$. При этом $\alpha^{|T(\hat{b}_0) : C_0|} = \alpha^0$ — тривиальное одномерное представление любой подгруппы из $T(\hat{b}_k)$.

Лемма 1.2. *Предположим, что при некотором* k, $0 \leqslant k \leqslant a-1$, *блок* $\hat{b}_k$ *содержит единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый* $\bar{\hat{R}}[C_k]$*-модуль. Тогда блок* b_k *содержит единственный,*

с точностью до изоморфизма, неприводимый $\bar{R}[C_k]$*-модуль. Кроме того, с точностью до изоморфизма, блок* b_0 *содержит единственный неприводимый* $\bar{R}[C_0]$*-модуль.*

Доказательство. Согласно (V.4.6), $\hat{b}_0$ содержит единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый $\bar{\hat{R}}[C_0]$-модуль. Теперь результат следует из (VI.1.2). □

Теорема 1.3. *Зафиксируем* k, $0 \leqslant k \leqslant a-1$, *и предположим, что, с точностью до изоморфизма,* b_k *содержит единственный неприводимый* $\bar{R}[C_k]$*-модуль* V, *а* $\hat{b}_k$ *содержит единственный неприводимый* $\bar{\hat{R}}[C_k]$*-модуль* $\hat{V}$.

(i) *Существуют такие натуральные числа* $s=s_k$, $e=e_k$, *что* $e \mid |T(\hat{b}_k):C_k|$ *и, значит,* $e \mid (p-1)$, *и такой неприводимый* $\bar{R}[N_k]$*-модуль* W, *что* W, $W\alpha$, ..., $W\alpha^{e-1}$ *— попарно неизоморфные модули из* B_k. *При этом* $W\alpha^e \cong W$, *любой неприводимый* $\bar{R}[N_k]$*-модуль из* B_k *изоморфен одному из модулей* $W\alpha^i$, *и* $V^{N_k} \cong s(\oplus_{i=1}^{e} W\alpha^i)$.

(ii) *Если* $R=\hat{R}$, *то* $s=1$ *и* $e=|T(b_0):C_0|$.

Доказательство. Непосредственно следует из (1.2), (I.16.13) и (VI.3.3). □

Индекс инерции блока B, или *инерционный индекс блока* B — это максимальное число попарно неизоморфных неприводимых $\bar{R}[N_0]$-модулей в B_0.

Ввиду (1.2), условия (1.3) выполняются при $k=0$. Таким образом, индекс инерции блока B равен целому числу e_0, которое определено в (1.3). В случае, когда $\bar{R}=\bar{\hat{R}}$, оно равно $|T(b_0):C_0|$ и потому совпадает с индексом инерции, определенным в § 9 гл. V.

Поскольку $N_i \subseteq N_{a-1}$ для $0 \leqslant i \leqslant a-1$, соответствие Грина определяет биективное отображение множества классов изоморфизма непроективных R-свободных $R[D]$-проективных $R[G]$-модулей на множество классов изоморфизма непроективных R-свободных $R[D]$-проективных $R[N_{a-1}]$-модулей. Такое же соответствие определено для $\bar{R}[G]$-модулей и $\bar{R}[N_{a-1}]$-модулей. Будем использовать следующие обозначения:

$$\tilde{G}=N_{a-1}, \quad \tilde{B}=B_{a-1}.$$

Если V — непроективный R-свободный $R[D]$-проективный $R[G]$-модуль, то $\tilde{V}$ будет $R[\tilde{G}]$-модулем, который отвечает V при соответствии Грина.

Если V — непроективный $\bar{R}[D]$-проективный $\bar{R}[G]$-модуль, то $\tilde{V}$ определяется аналогично. Если V проективен, положим $\tilde{V}=(0)$.

В силу (III.7.7), модуль V тогда и только тогда является непроективным R-свободным $R[G]$-модулем или $\bar{R}[G]$-модулем, принадлежащим B, когда $\tilde{V}$ принадлежит $\tilde{B}$.

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathfrak{X}(D_i, \tilde{G})$, $\mathfrak{Y}(D_i, \tilde{G})$ *определены как в* § 5 *гл.* III. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) $\mathfrak{X}(D_i, \tilde{G})=\{\langle 1\rangle\}$, $0 \leqslant i \leqslant a-1$.

(ii) *Если* $A \in \mathfrak{V}(D_i, \tilde{G})$, *то* $A \cap D = \langle 1 \rangle$, $0 \leqslant i \leqslant a-1$.

(iii) *Если* V, W *являются* $R[D]$-*проективными* R-*свободными* $\bar{R}[G]$-*модулями или* $\bar{R}[D]$-*проективными* $\bar{R}[G]$-*модулями, то*:

(a) $H^0(G, \langle 1 \rangle, V) \cong H^0(\tilde{G}, \langle 1 \rangle, \tilde{V})$.

(b) $H^0(G, \langle 1 \rangle, \mathrm{Hom}_R(V, W)) \cong H^0(\tilde{G}, \langle 1 \rangle, \mathrm{Hom}_R(\tilde{V}, \tilde{W}))$.

Доказательство. (i), (ii) Пусть $A \in \mathfrak{V}(D_i, \tilde{G})$, тогда $A \subseteq \tilde{G} \cap D_i^x$ для некоторого $x \in G - \tilde{G}$. Так как $D_{a-1} \cap D_{a-1}^x = \langle 1 \rangle$, то $A \cap D_{a-1} \subseteq D_{a-1} \cap D_i^x = \langle 1 \rangle$. Тем самым $A \cap D = \langle 1 \rangle$, поскольку группа D циклическая. Это доказывает (ii). Поскольку $\mathfrak{X}(D_i, \tilde{G}) \subseteq \mathfrak{V}(D_i, \tilde{G})$ и любой элемент из $\mathfrak{X}(D_i, \tilde{G})$ является подмножеством в D, (i) является непосредственным следствием (ii).

(iii) Непосредственно следует из (III.5.10). □

Лемма 1.5. (i) *Пусть* V *— непроективный* R-*свободный* $R[G]$-*модуль или непроективный* $\bar{R}[G]$-*модуль из* B. *Тогда* $V_{\tilde{G}} \cong \tilde{V} \oplus A_1 \oplus A_2$, *где* A_1 *— проективный модуль, а* A_2 *является суммой неразложимых модулей из блоков, отличных от* $\tilde{B}$, *причем модуль* $(A_2)_D$ *проективен.*

(ii) *Пусть* $\tilde{V}$ *— непроективный* R-*свободный* $R[\tilde{G}]$-*модуль или непроективный* $\bar{R}[\tilde{G}]$-*модуль из* $\tilde{B}$. *Тогда* $\tilde{V}^G \cong V \oplus A$, *где* A *— проективный модуль.*

(iii) *Пусть* V, W *— непроективные* R-*свободные* $R[G]$-*модули или непроективные* $\bar{R}[G]$-*модули из* B. *Тогда* $H^0(G, \langle 1 \rangle, V) \cong H^0(\tilde{G}, \langle 1 \rangle, \tilde{V})$ *и* $H^0(G, \langle 1 \rangle, \mathrm{Hom}_R(V, W)) \cong H^0(\tilde{G}, \langle 1 \rangle, \mathrm{Hom}_R(\tilde{V}, \tilde{W}))$.

Доказательство. (i) Следует из (II.5.3) и (1.4) (i), (ii).

(ii) Следует из (III.5.4) и (1.4) (i).

(iii) Частный случай (1.4) (iii). □

§ 2. Формулировки результатов

Этот параграф содержит только формулировки результатов. Их доказательства даются на протяжении всей остальной части главы.

Материал этой главы вырос из работы Брауэра [1942a], в которой он доказал утверждения (2.11)—(2.19), (2.22) и (2.23) в случае $K = \hat{K}$ и $|D| = p$. Он также ввел дерево Брауэра, которое определяется в § 6, и показал, что неприводимые характеры Брауэра в B имеют высоту 0. Его методы не обобщаются на случай $|D| > p$. В частности, один из его результатов (см. (11.2) ниже), вообще говоря, неверен при $|D| > p$, как показано на примерах в конце § 11.

Четверть века спустя Томпсон [1967b] доказал результаты, аналогичные брауэровым, для случая, когда D является S_p-подгруппой в G и $C_G(x) = D$ для всех $x \in D$, $x \neq 1$. Для этого он использовал соответствие Грина и доказал (I.17.12), а также вариант нижеследующей леммы 5.6, которая имеет решающее значение для развития всей этой тематики. Почти сразу же Дейд [1966] сумел соединить методы Томпсона с теорией блоков для доказательства (2.11)—(2.19) в общем случае, при $K = \hat{K}$. Затем Януш [1969a], [1969b], используя в качестве отправной точки работу Дейда, дал полное описание

всех неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей в B в случае $K=\hat{K}$. Параграф 12 содержит его результаты, обобщенные на случай произвольного поля $\bar{R}$. В частности, при $K=\hat{K}$ он доказал утверждения (2.2), (2.3), (2.20)—(2.22), (2.26). Примерно в то же самое время Купиш [1969] независимо описал неразложимые $\bar{R}[G]$-модули в B при $K=\hat{K}$. Ранее результаты в этом направлении получили Сринивасан [1960], Януш [1966]. Михлер [1975] нашел те $\bar{R}[G]$-модули, которые поднимаются до $R[G]$-модулей.

В случае $|D|=p$ теоремы (2.4) и (2.8) были доказаны Фейтом [1969] при дополнительных ограничениях и обобщены Блау [1971a]. Линдси [1974] доказал (2.4) и (2.8) при $k=0$ и $\bar{R}=\bar{\hat{R}}$ в случае, когда D является S_p-подгруппой в G.

Фейт [1969] предложил упрощение некоторых рассуждений Дейда и Януша за счет более систематического применения соответствия Грина, в частности, используя (II.5.10). В той же работе были анонсированы теоремы (2.5), (2.7) для $|D|=p$ и (2.10) в случае $K=\hat{K}$, а вскоре теми же методами при $K=\hat{K}$ было получено (2.21). Из (2.10) вытекает, что каждый неприводимый характер Брауэра из $\hat{B}$ имеет высоту 0. Этот результат был впервые доказан Ротшильдом [1967], применившим к дереву Брауэра методы теории графов для доказательства (2.7) при $K=\hat{K}$.

Грин [1974a] еще более упростил некоторые из вышеупомянутых рассуждений, применив (II.3.13). В частности, он значительно упростил доказательство анонсированного Фейтом [1969] результата Пассмана. Он также получил ряд результатов о проективных резольвентах для случая $K=\hat{K}$, чем обобщил более раннюю работу Алперина и Януша [1973]. Его результаты, распространенные на случай произвольного поля K, содержатся в § 10. Пикок [1975a], [1975b], [1977] развил эти методы, чтобы получить альтернативное доказательство (2.20) и некоторые уточнения для $\bar{R}=\bar{\hat{R}}$. Его рассуждение не зависит от результатов о $\hat{K}[G]$-модулях, в противовес $\bar{\hat{R}}[G]$-модулям. В случае $|D|=p$ теорема 2.20 была анонсирована Фейтом [1969].

Недавно Михлер [1974], [1976b] дал доказательство теорем 2.1 и 2.2 для произвольного поля K, совершенно свободное от утверждений для «нулевой характеристики». С этой целью он выдвинул идею использовать (I.16.13), что и позволило значительно упростить весьма сложную часть статьи Дейда.

Методы, развиваемые в этой главе,—сплав всего того, что использовалось в вышеупомянутых статьях. Например, в § 5 мы очень близко следуем рассуждениям Дейда, в то время как в большей части главы они заменены более простыми соображениями, упомянутыми выше. Нередко результаты сначала доказываются при $K=\hat{K}$, а затем в общем случае получаются при помощи спуска Галуа.

Во всей этой главе e обозначает индекс инерции блока B, а $\hat{e}$—индекс инерции блока $\hat{B}$.

Теорема 2.1. *Блок B содержит, с точностью до изоморфизма, ровно $|D|e$ неприводимых $\bar{R}[G]$-модулей.*

Теорема 2.2. *Блок B содержит, с точностью до изоморфизма, ровно e ненулевых неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей.*

Теорема 2.3. *Пусть V — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B. Тогда $S(V)$ и $T(V)$ являются прямыми суммами попарно неизоморфных неприводимых модулей.*

Теорема 2.4. *Любой неразложимый $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль в $\tilde{B}$ является однорядным. Существует такой неприводимый $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль W, что W, $W\alpha$, ..., $W\alpha^{e-1}$ — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулей в $\tilde{B}$.*

Теорема 2.5. *Пусть L, M — неприводимые $\bar{R}[G]$-модули из B. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $L \cong M$;

(ii) $S(\tilde{L}) \cong S(\tilde{M})$;

(iii) $T(\tilde{L}) \cong T(\tilde{M})$.

Теорема 2.6. *Пусть V — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль из B. Тогда $l(\tilde{V}) \leqslant p^a$ и модуль V является $R[D_k]$-проективным в том и только том случае, если $l(\tilde{V}) \equiv 0 \pmod{p^k}$.*

Теорема 2.7. *Пусть L — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль из B, тогда либо $0 < l(\tilde{L}) \leqslant e$, либо $p^a - e \leqslant l(\tilde{L}) < p^a$.*

Следующий результат принадлежит Блау. Он усиливает один более ранний результат.

Теорема 2.8. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant a-1$ и V — неразложимый $\bar{R}[N_k]$-модуль из B_k, тогда $S(V)$, $S(V)\alpha^{-1}$, $S(V)\alpha^{-2}$, ... — композиционные факторы модуля V, записанные в порядке их возрастания.*

Теорема 2.9. *Предположим, что для какого-либо k, $0 \leqslant k \leqslant a$, некоторый ненулевой неразложимый $\bar{R}[N_k]$-модуль из B_k абсолютно неразложим. Тогда при $0 \leqslant i \leqslant a$ любой неприводимый $\bar{R}[N_i]$-модуль из B_i абсолютно неприводим, а любой неразложимый $\bar{R}[N_i]$-модуль из B_i абсолютно неразложим.*

Пусть L_1, ..., L_e — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых $\bar{R}[G]$-модулей из B. Пусть φ_i — характер Брауэра модуля L_i, $1 \leqslant i \leqslant e$.

Пусть W — модуль, определенный в (2.4), а ψ — его характер Брауэра.

Теорема 2.10. *Предположим, что $R = \hat{R}$. Тогда высота каждого характера φ_i равна 0, $\frac{1}{|G:D|}\psi(1) \in R$ и $\frac{1}{|G:D|}\psi(1) \neq 0$. Кроме того, для всех i, $1 \leqslant i \leqslant e$, существуют такие целые числа c_i, что $0 < |c_i| \leqslant e$ и*

$$\frac{1}{|G:D|}\varphi_i(1) \equiv c_i \frac{1}{|G:D|}\psi(1) \pmod{p^a}.$$

Для $i = 1, \ldots, e$ обозначим через U_i главный неразложимый $R[G]$-модуль, соответствующий L_i. Пусть Φ_i — характер модуля U_i.

Обозначим через Λ множество всех характеров неприводимых $K[N_0]$-модулей из B_0, которые не содержат D в своих ядрах.

Теорема 2.11. *Если* $K=\hat{K}$, *то* $|\Lambda|=(p^a-1)/\hat{e}$. *В частности,* $|\Lambda|=1$ *в том и только том случае, когда* $|D|=p$ *и* $|T(\hat{b}_0):C_0|=p-1$.

На протяжении оставшейся части этой главы будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$|\Lambda|=(p^a-1)/\hat{e}. \qquad (*)$$

Условие (*) — это требование к полю K. Согласно (2.11), оно выполняется в случае $K=\hat{K}$. Ввиду (2.11), никакие два различных элемента из Λ не сопряжены посредством автоморфизма поля $\hat{K}$, оставляющего неподвижными элементы из K. Заметим, что (*) может выполняться при произвольном конечном поле $\bar{R}$ (характеристики p), поскольку существует вполне разветвленное расширение K поля $\mathbf{Q}_p$, для которого (*) выполнено.

Следует отметить, что (*) не обязано выполняться для расширения поля $\mathbf{Q}_p$, порожденного всеми корнями степени $|D|$ из единицы. Рассмотрим следующий пример.

Пусть $G=N_0$ — группа диэдра порядка 30. $p=3$, α_m — примитивный корень степени m из единицы над $\mathbf{Q}_3$ и $K_0=\mathbf{Q}_3(\alpha_3)$. Пусть, далее, x — элемент порядка 15 из G. Тогда существует единственный неприводимый характер ζ группы G, для которого $\zeta(x)=\alpha_{15}+\alpha_{15}^{-1}$. Следовательно, $\zeta(x)\notin K_0$ и $\Lambda=\{\zeta+\zeta^\sigma\}$, где $\alpha_{15}^\sigma=\alpha_{15}^2$. Значит, (*) не выполняется для блока B алгебры $K_0[G]$, содержащего ζ. Тем не менее, (*) справедливо для любого неглавного блока алгебры $K[G]$, где $K=\mathbf{Q}_p\left(\sum_{i=0}^{3}\alpha_{15}^{\sigma^i}\right)$.

Теорема 2.12. *Блок* B *содержит ровно* $e+|\Lambda|$ *характеров неприводимых* $K[G]$*-модулей. Если* $|\Lambda|=1$, *они будут обозначаться* $\chi_0, \ldots, \chi_e$. *Если* $|\Lambda|\neq 1$, *эти характеры разбиваются на два семейства* $\chi_1, \ldots, \chi_e$ *и* $\{\chi_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$. *Во втором случае положим* $\chi_0=\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda$. *Если* x — *любой* p'*-элемент из* G, *то* $\chi_\lambda(x)=\chi_\mu(x)$ *для всех* λ, $\mu\in\Lambda$.

Характеры $\chi_\lambda(\lambda\in\Lambda)$, определенные в (2.12), называются *исключительными характерами* в B. В силу (2.12), χ_λ и χ_μ совпадают как характеры Брауэра для всех λ, $\mu\in\Lambda$. В частности, они имеют одинаковые числа разложения. Пусть $d_{\lambda i}$ обозначает число разложения, соответствующее паре χ_λ, φ_i, где $\lambda\in\Lambda$.

Теорема 2.13. $d_{ui}=0$ *или* 1 *для* $1\leqslant i\leqslant e$ *и* $1\leqslant u\leqslant e$. *Если* $K=\hat{K}$, *то* $d_{0i}=0$ *или* 1 *для* $1\leqslant i\leqslant e$.

Если $K\neq\hat{K}$, то (2.13) не всегда верно. Это связано с вопросами об индексах Шура (см. (2.18)).

Пусть $u=0, \ldots, e$ и $\lambda\in\Lambda$. Согласно (I.17.12), существует такой R-свободный $R[G]$-модуль X, что характером X_K является χ_u или χ_λ и $\bar{X}$ неразложим.

Теорема 2.14. *Предположим, что* $K=\hat{K}$. *Пусть* $0\leqslant u\leqslant e$ *и* $\lambda\in\Lambda$. *Пусть* X_u, X_λ *обозначают такие* R*-свободные* $R[G]$*-модули, что* $\bar{X}_u$, $\bar{X}_\lambda$ *неразложимы,* $(X_u)_K$ *имеет характер* χ_u, *а* $(X_\lambda)_K$ — *характер* χ_λ. *Тогда* $l(\tilde{\bar{X}}_u)=1$ *или* p^a-1, *а* $l(\tilde{\bar{X}}_\lambda)=e$ *или* p^a-e. *Величина* $l(\tilde{\bar{X}}_u)$ *или*

$l(\tilde{\tilde{X}}_\lambda)$ не зависит от выбора модуля X_u или X_λ, а зависит только от χ_u или χ_λ. Кроме того, $l(\tilde{\tilde{X}}_\mu)=l(\tilde{\tilde{X}}_\lambda)$ для любых λ, $\mu\in\Lambda$.

Если $K=\hat{K}$, определим знаки $\delta_u=\pm 1$ $(u=0, ..., e)$, полагая $\delta_u\equiv l(\tilde{\tilde{X}}_u)$ $(\mathrm{mod}\, p^a)$, где X_u определен как в (2.14). Если $p^a=2$, выберем произвольно $\delta_0\neq\delta_1$.

Теорема 2.15. *Предположим, что $K=\hat{K}$.*

(i) *Пусть $1\leqslant i\leqslant e$; если $d_{ui}\neq 0$, $d_{vi}\neq 0$ и $u\neq v$, то $\delta_u+\delta_v=0$.*

(ii) *Пусть $1\leqslant i\leqslant e$; найдутся такие u, v, что $\delta_u+\delta_v=0$ и $\Phi_i=\chi_u+\chi_v$.*

(iii) *Положим $\chi=\chi_0$, если $|\Lambda|=1$, и $\chi=\chi_\lambda$ для некоторого $\lambda\in\Lambda$, если $|\Lambda|\neq 1$. Тогда*

$$\delta_0\chi(x)+\sum_{i=1}^{e}\delta_u\chi_u(x)=0$$

для любого p'-элемента x из G.

(iv) *Допустим, что $G=N_{a-1}$; если $|\Lambda|\neq 1$, то $\delta_1=\ldots=\delta_e=1$, и $\delta_0=-1$; если $|\Lambda|=1$, то нумерацию можно выбрать так, чтобы $\delta_1=\ldots=\delta_e=1$, $\delta_0=-1$.*

Теорема 2.16. *Предположим, что $K=\hat{K}$. Тогда любой неприводимый характер из B имеет высоту 0. При этом*

$$\chi_u(1)\equiv\delta_u\psi(1)\ (\mathrm{mod}\, p^a) \qquad \text{для } u=0, ..., e,$$
$$\chi_\lambda(1)\equiv-\delta_0 e\psi(1)\ (\mathrm{mod}\, p^a) \qquad \text{для } \lambda\in\Lambda.$$

Сравнения из (2.16) оказываются очень сильными условиями, если D является S_p-группой в G, но становятся слабее с повышением степени p в $|G:D|$. Например, если $|D|^2\,|\,|G|$, они не несут никакой информации.

Предположим, что $K=\hat{K}$. Пусть ψ_k — единственный неприводимый характер Брауэра в b_k, $0\leqslant k\leqslant a-1$. Пусть $\{z\}$ — трансверсаль N_k в $T(b_k)$. Тогда $\{b_k^z\}$ — совокупность всех блоков группы C_k, накрываемых блоком B_k. Таким образом, $\{\psi_k^z\}$ — совокупность неприводимых характеров Брауэра в блоках, накрываемых B_k.

Если $x\in D_k-D_{k+1}$, то $C_G(x)=C_k$. Пусть $d(u,\ x,\ \psi_k^z)$ или $d(\lambda,\ x,\ \psi_k^z)$ обозначают высшее число разложения для χ_u или χ_λ соответственно, $u=1, ..., e$, $\lambda\in\Lambda$ (или, возможно, $u=0$ при $|\Lambda|=1$).

Теорема 2.17. *Предположим, что $K=\hat{K}$. Для каждого k, $0\leqslant k\leqslant a-1$, существует такое $\varepsilon_k=\pm 1$, что для $x\in D_k-D_{k+1}$ выполняются следующие утверждения:*

$d(u,\ x,\ \psi_k^z)=\varepsilon_k\delta_u$ *при $1\leqslant u\leqslant e$ или $u=0$, если $|\lambda|=1$;*

$d(\lambda,\ x,\ \psi_k^z)=-\dfrac{\varepsilon_k\delta_0}{|C_k|}\sum_{w\in T(b_k)}\zeta^{wz}(x)$ *для $\lambda\in\Lambda$, где ζ — неприводимая конституэнта ограничения на D некоторой неприводимой конституэнты характера λ_{C_k} из b_k.*

Кроме того, если $0\leqslant j\leqslant a-1$ и $\varepsilon_0', ..., \varepsilon_j'$ — знаки для группы C_j, то найдется такое $\gamma=\pm 1$, что $\varepsilon_i'=\gamma\varepsilon_i$ для $0\leqslant i\leqslant j$.

Если $G=C_j$ *для некоторого* j, $0\leqslant j\leqslant a-1$, *то* $\varepsilon_j=\ldots=\varepsilon_{a-1}=0$, *кроме случая* $p=2$ *и* $j=0$, *когда нумерацию можно выбрать так, чтобы* $\varepsilon_i=1$ *для* $0\leqslant i\leqslant a-1$.

Из (2.17) следует, что если $|\Lambda|\neq 1$ и $\lambda\in\Lambda$, то высшее число разложения для χ_λ отлично от ± 1, кроме случая $p=2$, $e=1$ и $\lambda^2=1$. Если в последнем случае χ_1 — неисключительный характер из B и α — неприводимый характер группы D, ядром которого служит D_1, мы можем определить $\chi'_\lambda=\chi_{\lambda\alpha}$ для $\lambda\in\Lambda\cup\{1\}$ и заметить, что $\{\chi'_\lambda\}$ удовлетворяет (2.11)—(2.17), где δ_0, δ_1, ε_1, ..., ε_{a-1} те же самые, а ε_0 заменилось на $-\varepsilon_0$. Тогда $\chi_\alpha=\chi'_1$ — неисключительный характер.

Если в (2.17) λ пробегает Λ, то легко видеть, что ζ пробегает полное множество представителей классов $T(b_0)$-сопряженности неглавных неприводимых характеров D.

Теорема 2.18. *Пусть* r — *число блоков* $\hat{R}[G]$, *алгебраически сопряженных с* $\hat{B}$. *Тогда индекс Шура* m_0 *характера* χ_λ *над* K равен d_{0i} *для подходящего* i *и не зависит от* $\lambda\in\Lambda$, *а* $\|\chi_\lambda\|^2=m_0^2 r$ *также не зависит от* $\lambda\in\Lambda$.

Согласно (2.9), $m=I_{\hat{R}}(L_i, L_i)$ не зависит от i.

Пусть m_0, r определены как в (2.18).

Теорема 2.19. (i) *Если* $1\leqslant u$, $i\leqslant e$, *то* $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_u)=\mathbf{Q}_p(\hat{\Phi}_i)$, $m_{\mathbf{Q}_p}(\hat{\chi}_u)=1$ *и* $\|\chi_u\|^2=m$.

(ii) *Для данного* i, $1\leqslant i\leqslant e$, *либо существуют такие* u, v, $1\leqslant u$, $v\leqslant e$, *что* $\Phi_i=\chi_u+\chi_v$, *либо существует* u, $1\leqslant u\leqslant e$, *что* $\Phi_i=\chi_u+(\hat{e}/em_0)\chi_0$.

Когда $|\Lambda|=1$ и $\hat{e}\neq e$, то, заменяя K его вполне разветвленным расширением, можно считать, что $m_0=1$, так что χ_0 можно вычислить, зная разложение Φ_i. В этом случае он называется *исключительным характером* в B. Таким образом, B содержит один исключительный характер, если только $|D|-1\neq e$.

Пусть $a_{ui}=d_{ui}$ для $u\neq 0$ и $a_{0i}=\hat{e}/(em_0)$, если $d_{0i}\neq 0$. Тогда $\Phi_i=a_{ui}\chi_u+a_{vi}\chi_v$ при $1\leqslant i\leqslant e$, для подходящих u, v.

Из (2.19) следует, что $m_0|(\hat{e}/e)$. Поскольку $\hat{e}/e=[\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_0, \hat{\Phi}_i):\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_0)]$, это вытекает также из (IV.9.3). В § 13 будет показано, что, при подходящем выборе K, $m_0=\hat{e}/e$. В частности, $m_0=\hat{e}/e$, если K — поле наименьшей степени над $\mathbf{Q}_p$, удовлетворяющее условию (*), или если $K=\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_\lambda, \lambda\in\Lambda)$.

Допустим, что для некоторых u, i $d_{ui}\neq 0$. Пусть X_{ui} — собственный подмодуль в U_i, такой, что $(X_{ui})_K$ имеет характер $a_{ui}\chi_u$ и $S(\tilde{X}_{ui})\cong L_i$, так что $\tilde{X}_{ui}$ неразложим (см. (I.17.12)).

Заметим, что при $d_{0i}\neq 0$ из (2.19) следует, что каждая неприводимая конституэнта входит в $\bar{X}_{0i}$ с кратностью $(|D|-1)/e$.

Теорема 2.20. *Если* $d_{ui}\neq 0$, *то* $\bar{X}_{ui}$ *однорядный. Если также* $d_{vi}\neq 0$ *для некоторого* $v\neq u$, *то* $\operatorname{Rad}\bar{U}_i=\bar{X}_{ui}+\bar{X}_{vi}$ *и* $S(\bar{U}_i)=\bar{X}_{ui}\cap\bar{X}_{vi}$.

Следствие 2.21. *Для того чтобы любой неразложимый* $\bar{R}[G]$-*модуль в* B *был однорядным, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий.*

(i) $|D|-1=e$, *и после подходящей перенумерации* $\bar{X}_{ui}$ *неприводим для всех* u, $1\leqslant u\leqslant e$, *и всех таких* i, *что* $d_{ui}\neq 0$.

(ii) $|D|-1\neq e$, $\bar{X}_{ui}$ *неприводим при* $1\leqslant u\leqslant e$ *и таких* i, *что* $d_{ui}\neq 0$.

Следствие (2.21) можно переформулировать в терминах дерева Брауэра, определяемого в § 6, а именно:

Следствие 2.22. *Любой неразложимый* $\bar{R}[G]$*-модуль в* B *одноряден тогда и только тогда, когда дерево Брауэра является звездой, в центре которой находится исключительная вершина, если таковая существует.*

Теорема 2.23. *Пусть* $0\leqslant u\leqslant e$. *Все неприводимые характеры Брауэра, которые являются конституэнтами* χ_u, *допускают такую нумерацию* $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(s)}$, *что если* $d_{ui}\neq 0$ *и* $\varphi^{(t)}=\varphi_i$, *то композиционные факторы* $\bar{X}_{ui}$ *в порядке возрастания соответствуют* $\varphi^{(t)}$, $\varphi^{(t+1)}, \ldots$, *где верхние индексы следует читать по модулю* s. *Все конституэнты входят в* $\bar{X}_{ui}$ *с одинаковыми кратностями.*

Теорема 2.24. *Если* χ_u *вещественнозначный, то существуют не более двух вещественных неприводимых характеров Брауэра, которые являются конституэнтами* χ_u.

Теорема 2.25. *Пусть* $0\leqslant u\leqslant e$ *и* X *— такой* $R[G]$*-модуль, свободный над* R, *что* X_K *имеет характер* $d_{ui}\chi_u$, *где* $d_{ui}\neq 0$, *и* $\bar{X}$ *неразложим. Тогда найдется такое* j, *что* $d_{uj}\neq 0$ *и* $X\cong X_{uj}$. *Кроме того,* $l(\bar{X})=1$ *или* p^a-1, *и* $l(\tilde{\bar{X}}_{uj})=l(\tilde{\bar{X}}_{ui})$, *если* d_{ui}, $d_{uj}\neq 0$.

Ввиду (2.19) и (2.25), знаки $\delta_u=\pm 1$ можно определить теперь для K в общем случае следующим образом. Если $d_{ui}\neq 0$, то $\delta_u\equiv l(\tilde{\bar{X}}_{ui}) \pmod{p^a}$. Если $p^a=2$, $\delta_0\neq\delta_1$ выбирается произвольно.

Следующий результат, как и (2.21), (2.22), принадлежит Янушу [1969b]. Он вывел их как следствия классификации неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей в B. Доказательство (2.26) дается в конце § 12.

Теорема 2.26. *Пусть* V *— неразложимый* $\bar{R}[G]$*-модуль из* B. *Тогда*

$$|l(S(V))-l(T(V))|\leqslant 1.$$

§ 3. Некоторые предварительные результаты

В этом параграфе будем предполагать, что для всех k, $0\leqslant k\leqslant a-1$, блок b_k содержит единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый $\hat{\bar{R}}[C_k]$-модуль.

Позже будет показано, что это допущение всегда справедливо, поэтому результаты, доказанные в этом параграфе, верны в общем случае.

Отметим, что любое утверждение, доказанное для $\tilde{G}$, верно для N_k, $0\leqslant k\leqslant a-1$, поскольку если $D_k\lhd G$, то $\tilde{G}=N_k$.

Лемма 3.1. *Блок* b_k, $0\leqslant k\leqslant a-1$, *содержит единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый* $\hat{\bar{R}}[C_k]$-модуль.

Доказательство. Ясно, в силу (1.2). □

Пусть $\tilde{e}=e_{a-1}$ определено как в (1.3) и W — определенный в (1.3) $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль.

Лемма 3.2. *W, $W\alpha$, ..., $W\alpha^{\tilde{e}-1}$ составляют полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулей в $\tilde{B}$.*

Доказательство. Ясно, ввиду (1.3). □

Лемма 3.3. *Пусть $C_{a-1}\subseteq H\subseteq\tilde{G}$ для некоторой подгруппы H. Пусть M — некоторый $\bar{R}[H]$-модуль в блоке, накрывающем b_{a-1}. Тогда*:

(i) $(S^n(M))_{C_{a-1}}\subseteq S^n(M_{C_{a-1}})$ *для всех натуральных n;*

(ii) $(\mathrm{Rad}^n(M))_{C_{a-1}}\supseteq\mathrm{Rad}^n(M_{C_{a-1}})$.

Доказательство. Пусть $C_{a-1}=C$. Доказательство обоих утверждений проведем по индукции. Если $n=1$, они следуют из теоремы Клиффорда (II.2.12).

(i) Можно считать, что $M=S^n(M)$. Поскольку $(M/S^{n-1}(M))_C$ вполне приводим, то по индукции $\mathrm{Rad}(M_C)\subseteq(S^{n-1}(M))_C\subseteq S^{n-1}(M_C)$. Таким образом, $M_C\subseteq S^n(M_C)$, что и требовалось.

(ii) По предположению индукции, $\mathrm{Rad}^{n-1}(M_C)\subseteq(\mathrm{Rad}^{n-1}(M))_C$. Тогда $\mathrm{Rad}(M_C)\subseteq\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}^{n-1}(M)_C)\subseteq(\mathrm{Rad}^n(M))_C$ по индукции. □

Лемма 3.4. *Пусть $C_{a-1}\subseteq H\subseteq\tilde{G}$ для некоторой подгруппы H. Пусть V — неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль в блоке, накрывающем b_{a-1}. Допустим, что $V\otimes_{\bar{R}}\bar{\bar{R}}$ является прямой суммой m неразложимых модулей. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *Если M — какой-нибудь неприводимый $\bar{R}[H]$-модуль из блока, накрывающего b_{a-1}, то $M\otimes_{\bar{R}}\bar{\bar{R}}$ является прямой суммой m алгебраически сопряженных неприводимых $\bar{\bar{R}}[H]$-модулей.*

(ii) *Если P — ненулевой неразложимый проективный $\bar{R}[H]$-модуль из блока, накрывающего b_{a-1}, то $P\otimes_{\bar{R}}\bar{\bar{R}}$ является прямой суммой m алгебраически сопряженных неразложимых проективных $\bar{\bar{R}}[H]$-модулей.*

(iii) *Если M — неразложимый $\bar{R}[H]$-модуль в блоке, который накрывает b_{a-1}, то*

$$l(M\underset{\bar{R}}{\otimes}\bar{\bar{R}})=ml(M).$$

Доказательство. Следует из (VI.3.4). □

Теорема 3.5. (i) *Если P — ненулевой неразложимый проективный $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль в $\tilde{B}$, то P одноряден и $l(P)=p^a$.*

(ii) *Пусть M — неразложимый $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль из $\tilde{B}$. Тогда M одноряден и $S^n(M_{C_{a-1}})=(S^n(M))_{C_{a-1}}$ для всех n.*

Доказательство. Следует из (VI.3.5). □

Следствие 3.6. *Пусть M — неразложимый $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль из $\tilde{B}$. Тогда $M\otimes_R\bar{\bar{R}}\cong\oplus\hat{M}^\tau$, где τ пробегает некоторую факторгруппу группы*

Галуа поля $\bar{\bar{R}}$ *над* $\bar{R}$, *а каждый модуль* $\hat{M}^\tau$ *неразложим, и* $l(M)=l(\hat{M}^\tau)$ *для всех* τ. *Кроме того,* $S(M)\otimes_R \bar{\bar{R}} \cong \oplus S(\hat{M})^\tau$.

Доказательство. Следует из (VI.3.6). □

Теорема 3.7. *Пусть* M *— неразложимый* $\bar{R}[\tilde{G}]$*-модуль из* $\tilde{B}$. *Тогда* M *является* $\bar{R}[D_k]$*-проективным* $(0\leqslant k\leqslant a)$ *в точности при* $l(M)\equiv 0 \pmod{p^k}$.

Доказательство. Если $k=a$, то это следствие из (3.5). Допустим, что $0\leqslant k\leqslant a-1$.

Предположим сначала, что $\bar{R}=\bar{\bar{R}}$. Согласно (1.3), $e=|T(\hat{b}_j):C_j|$ при $0\leqslant j\leqslant a$ и в $\tilde{B}$ имеются ровно e неприводимых характеров Брауэра ψ_i. Все они одинаковой степени и поэтому имеют высоту 0. Значит, $\psi_i(1)/|\tilde{G}:D|$ — единица в R. Следовательно, если M — неразложимый $\bar{R}[D_k]$-проективный модуль в $\tilde{B}$, то $l(M)\equiv 0 \pmod{p^k}$, ввиду (IV.2.2).

Согласно (3.5), $\tilde{B}$ содержит ровно ep^{a-k} попарно неизоморфных неразложимых модулей M длины $l(M)\equiv 0 \pmod{p^k}$. Поэтому $\tilde{B}$ содержит не более ep^{a-k} попарно неизоморфных неразложимых $\bar{R}[D_k]$-проективных модулей, и достаточно показать, что $\tilde{B}$ содержит не меньше ep^{a-k} попарно неизоморфных неразложимых $\bar{R}[D_k]$-проективных модулей. Мы покажем, что для каждого j, $k\leqslant j\leqslant a$, $\tilde{B}$ содержит по меньшей мере $e(p^{a-1}-p^{a-j-1})$ попарно неизоморфных неразложимых модулей с вертексом D_j. Очевидно, желаемый результат вытекает отсюда.

Зафиксируем j, $k\leqslant j\leqslant a$. Пусть V — единственный (с точностью до изоморфизма) неприводимый модуль из $\hat{b}_j$ и $W\alpha^i$, $1\leqslant i\leqslant e$, — модули из B_j, определенные в (3.2). Пусть X_s для $1\leqslant s\leqslant p^{a-j}$ — неразложимый $\bar{R}[D_j]$-модуль размерности s над $\bar{R}$. Тогда $(X_s^{N_j})_{D_j}\cong |N_j:D_j|X_s$, так что $X_s^{N_j}$ и $X_t^{N_j}$ при $s\neq t$ не имеют общих неразложимых компонент. Кроме того, если $s\not\equiv 0 \pmod{p}$, то любая неразложимая компонента модуля $X_s^{N_j}$ имеет вертекс D_j. Поскольку $V\subseteq X_1^{C_j}$, из (1.3) следует, что $\oplus_{i=1}^{e} W\alpha^i \subseteq X_1^{N_j}\subseteq X_s^{N_j}$. Согласно (3.5), все неразложимые компоненты модуля $X_s^{N_j}$, принадлежащие B_j, однорядны и должны содержать в качестве подмодуля один из $W\alpha^i$. Итак, B_j содержит по крайней мере $e(p^{a-j}-p^{a-j-1})$ попарно неизоморфных неразложимых модулей с вертексом D_j. Теперь соответствие Грина между N_j и $N_{a-1}\cong\tilde{G}$ показывает, что $\tilde{B}$ содержит не менее $e(p^{a-j}-p^{a-j-1})$ попарно неизоморфных неразложимых модулей с вертексом D_j. Это завершает доказательство в случае $\bar{R}=\bar{\bar{R}}$.

Теперь обратимся к случаю произвольного $\bar{R}$. Пусть M — неразложимый ненулевой $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль в $\tilde{B}$, а $\hat{M}$ — такой неразложимый ненулевой $\bar{\bar{R}}[\tilde{G}]$-модуль из $\tilde{\tilde{B}}$, что $\hat{M}|M\otimes_{\bar{R}}\bar{\bar{R}}$. Согласно (3.6), $M\otimes_{\bar{R}}\bar{\bar{R}}\cong\oplus\hat{M}^\tau$, где τ пробегает подходящую факторгруппу группы Галуа поля $\bar{\bar{R}}$ над $\bar{R}$. Кроме того, $l(M)=l(\hat{M})$, в силу (3.4) (iii).

Значит, достаточно показать, что M тогда и только тогда является $\bar{R}[D_k]$-проективным, когда $\hat{M}$ является $\hat{\bar{R}}[D_k]$-проективным. Это верно по (III.4.14). □

Лемма 3.8. *$e=\tilde{e}$. Блок $\tilde{B}$ содержит, с точностью до изоморфизма, ровно e неприводимых и $e|D|$ ненулевых неразложимых $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулей.*

Доказательство. Согласно (3.2), $\tilde{B}$ содержит ровно $\tilde{e}$ неприводимых $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулей, с точностью до изоморфизма. По (3.5), каждый неразложимый $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль V однозначно определяется заданием $S(V)$ и $l(V)$. Поскольку $l(V)$ может принимать любое значение между 1 и $p^a=|D|$, отсюда следует, что $\tilde{B}$ содержит ровно $\tilde{e}|D|$ ненулевых неразложимых модулей, с точностью до изоморфизма. Остается показать, что $\tilde{e}=e$.

Согласно (3.7), $\tilde{B}$ содержит ровно $(p^a-p^{a-1})\tilde{e}$ попарно неизоморфных неразложимых $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулей с вертексом D. Кроме того, B_0 содержит в точности $(p^a-p^{a-1})e$ попарно неизоморфных неразложимых $\bar{R}[N_0]$-модулей с вертексом D. Согласно (III.7.8), $\tilde{B}$ и B_0 содержат, с точностью до изоморфизма, одинаковое количество неразложимых модулей с вертексом D. Итак, $e=\tilde{e}$. □

Теорема 3.9. *Пусть $0\leqslant k\leqslant a-1$ и M — неразложимый $\bar{R}[N_k]$-модуль в B_k. Тогда его композиционными факторами, рассматриваемыми в порядке возрастания, будут $S(M)$, $S(M)\alpha^{-1}$, $S(M)\alpha^{-2}$, ...*

Доказательство. Пусть V — неразложимый $\bar{R}[N_k]$-модуль из B_k, $W\cong S(V)$ и $l(V)=2$. Согласно (3.2), $T(V)\cong W\alpha^d$ для подходящего целого d. Пусть P — главный неразложимый $\bar{R}[N_k]$-модуль, соответствующий W. Тогда $V\cong S^2(P)$. По (3.2) и (3.8), $\{P\alpha^i \mid 0\leqslant i\leqslant e-1\}$ — полное множество представителей классов изоморфизма главных неразложимых модулей из B_k. Поэтому если V_0 — неразложимый $\bar{R}[N_k]$-модуль из B_k и $l(V_0)=2$, то $V_0\cong V\alpha^i$ для некоторого i и тем самым $T(V_0)=S(V_0)\alpha^d$. Так как любой неразложимый $\bar{R}[N_k]$-модуль в B_k одноряден, то композиционными факторами такого модуля M в порядке возрастания будут $S(M)$, $S(M)\alpha^d$, ...

Достаточно показать, что $\alpha^d=\alpha^{-1}$, или, эквивалентно, что $d\equiv -1 \pmod e$. Ввиду (3.6), можно предполагать, что $\bar{R}=\hat{\bar{R}}$.

Положим $z=y^{p^{a-1}}$. Тогда $\langle z\rangle=D_{a-1}\lhd N_k$. Поскольку

$$P_{\langle z\rangle}=p^{a-1}(\dim_{\bar{R}} W)\,\bar{R}[\langle z\rangle]_{R[\langle z\rangle]},$$

получаем

$$\dim_{\bar{R}}\{\mathrm{Inv}_{\langle z\rangle}(P)\}=p^{a-1}\dim_{\bar{R}} W=\dim_{\bar{R}}\{S^{p^{a-1}}(P)\}.$$

Так как $\langle z\rangle\lhd N_k$, то $\mathrm{Inv}_{\langle z\rangle}(P)$ — подмодуль в P. Поскольку модуль P одноряден, $\mathrm{Inv}_{\langle z\rangle}(P)=S^{p^{a-1}}(P)$. Обозначим $U=S^{p^{a-1}+1}(P)$. Тогда $U(z-1)=S(P)$ и $T(U)\cong S^{p^{a-1}+1}(P)/S^{p^{a-1}}(P)$. Итак, $T(U)\cong S(P)\alpha^{p^{a-1}d}$.

Пусть x — некоторый p'-элемент в N_k, а $\{u_i\}$ — множество таких собственных для x векторов из U, что их образы составляют $\bar{R}$-базис

в $T(U)$. Тогда $u_i z = u_i + w_i$, где $\{w_i\}$ есть $\bar{R}$-базис в $S(P)$, так как $U(z-1) = S(P)$. Пусть $u_i x = c_i u_i$, тогда для любого i будет

$$u_i + \alpha(x) w_i = u_i z^{\alpha(x)} = u_i x^{-1} z x = c_i^{-1} u_i z x = c_i^{-1} u_i x + c_i^{-1} w_i x = u_i + c_i^{-1} w_i x.$$

Таким образом, $w_i x = c_i \alpha(x) w_i$ для всех i. Следовательно, $\{w_i\}$ — множество собственных векторов для x и $\psi_0(x) = \psi(x)\alpha(x)$, где ψ_0 — характер Брауэра модуля $S(P)$.

Поэтому

$$S(P)\alpha^{p^{a-1}d} \cong T(V) \cong S(P)\alpha^{-1}$$

и, значит, $-1 \equiv p^{a-1} d \equiv d \pmod{e}$. □

Лемма 3.10. *Пусть M_1 и M_2 — такие неразложимые $\bar{R}[\tilde{G}]$-модули из $\tilde{B}$, что $l(M_1) + l(M_2) \leqslant p^a$. Тогда*

$$H^0(\tilde{G}, \langle 1 \rangle, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(M_1, M_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\bar{R}[\tilde{G}]}(M_1, M_2).$$

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{Tr}^{\tilde{G}}_{\langle 1 \rangle}(\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(M_1, M_2))$. Согласно (II.3.13), существуют неразложимый проективный $\bar{R}[G]$-модуль P и точная последовательность

$$M_1 \xrightarrow{h} P \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow 0,$$

такие, что $g = fh$. Очевидно, P принадлежит $\tilde{B}$. Таким образом, по (3.5), $h(M_1) \subseteq S^{l(M_1)}(P)$ и $S^{p^a - l(M_2)}(P)$ лежит в ядре f. Поскольку $l(M_1) + l(M_2) \leqslant p^a$, из (3.5) следует, что $S^{l(M_1)}(P) \subseteq S^{p^a - l(M_2)}(P)$. Следовательно, $g = fh = 0$. Отсюда вытекает результат. □

Лемма 3.11. *Пусть V_1, V_2 — неприводимые $\bar{R}[G]$-модули из B. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $V_1 \cong V_2$;

(ii) $S(\tilde{V}_1) \cong S(\tilde{V}_2)$;

(iii) $T(\tilde{V}_1) \cong T(\tilde{V}_2)$.

Доказательство. Очевидно, (i) влечет (ii) и (iii). Модули V_1^*, V_2^* принадлежат блоку с дефектной группой D. Поэтому если показать, что (ii) влечет (i), то и (iii) влечет (i), в силу двойственности. Остается доказать, что из (ii) следует (i).

Допустим, что $S(\tilde{V}_1) \cong S(\tilde{V}_2)$, но $V_1 \ncong V_2$. Тогда $\mathrm{Hom}_{\bar{R}[G]}(V_i, V_j) = (0)$ и, значит, $H^0(G, \langle 1 \rangle, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(V_1, V_j)) = (0)$, если $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Таким образом, по (1.5) (iii), $H^0(G, \langle 1 \rangle, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)) = (0)$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Выберем нумерацию так, чтобы $l(\tilde{V}_1) \leqslant l(\tilde{V}_2)$.

Сначала предположим, что $l(\tilde{V}_1) + l(\tilde{V}_2) \leqslant p^a$. Тогда, по (3.10), $\mathrm{Hom}_{\bar{R}[G]}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2) = (0)$. Согласно (3.9), $\tilde{V}_1 \cong S^n(\tilde{V}_2)$ для некоторого n, вопреки допущению.

Теперь пусть $l(\tilde{V}_1) + l(\tilde{V}_2) > p^a$. Согласно (3.5), $l(\tilde{V}_i) \leqslant p^a$, $i = 1, 2$. Значит, существуют главный неразложимый модуль P и точные последовательности

$$0 \to \tilde{V}_i \to P \to X_i \to 0$$

$i=1, 2$. Следовательно, $l(X_2)\leqslant l(X_1)$, $l(X_1)+l(X_2)<p^a$, и $T(X_1)\cong T(X_2)$. Согласно (III.5.12) и (3.10), $\mathrm{Hom}_{\bar{R}[\tilde{G}]}(X_1, X_2)=(0)$. Однако из (3.9) следует, что $X_2\cong X_1/S^n(X_1)$ для некоторого n. Противоречие. □

Лемма 3.12. *B содержит, с точностью до изоморфизма, ровно e неприводимых $\bar{R}[G]$-модулей и $e|D|$ ненулевых неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей.*

Доказательство. Отображение V в $\tilde{V}$ является биекцией множества классов изоморфизма непроективных неразложимых модулей из B в множество классов изоморфизма непроективных неразложимых модулей из $\tilde{B}$. Поэтому, учитывая (3.8), достаточно доказать, что B содержит ровно e попарно неизоморфных неприводимых модулей. Согласно (3.8) и (3.11), B содержит не более e попарно неизоморфных неприводимых модулей.

Пусть V_i — некоторый $\bar{R}[G]$-модуль, такой, что $V_i\cong W\alpha^i$, $i=0, \ldots, e-1$. Существует неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль L_i, для которого $\mathrm{Hom}_{\bar{R}[G]}(V_i, L_i)\neq(0)$. Согласно лемме (III.5.13), примененной к G и $\tilde{G}$, и (1.5) (iii), $\mathrm{Hom}_{\bar{R}[\tilde{G}]}(W\alpha^i, \tilde{L}_i)\neq(0)$. Таким образом, $W\alpha^i\cong S(\tilde{L}_i)$, и, значит, по (3.11), $\{L_i\,|\,0\leqslant i\leqslant e-1\}$ — множество всех попарно неизоморфных неприводимых модулей из B. □

Теорема 3.13. (i) *Пусть F — конечное расширение поля $\bar{\bar{R}}$, $0\leqslant k\leqslant a$ и V — ненулевой неразложимый $\bar{R}[N_k]$-модуль из B_k. Предположим, что V_F является прямой суммой m алгебраически сопряженных $F[N_k]$-модулей. Тогда для любого j, $0\leqslant j\leqslant a$, и всякого неразложимого $\bar{R}[N_j]$-модуля U из B_j модуль U_F будет прямой суммой m алгебраически сопряженных абсолютно неразложимых $F[N_j]$-модулей.*

(ii) *Предположим, что для некоторого k, $0\leqslant k\leqslant a$, блок B_k содержит абсолютно неразложимый ненулевой $\bar{R}[N_k]$-модуль. Тогда для всех i любой неразложимый $\bar{R}[N_i]$-модуль в B_i абсолютно неразложим.*

Доказательство. Очевидно, (ii) следует из (i), так что достаточно доказать (i). Согласно (3.6), W_F (в обозначениях теоремы 1.3) является прямой суммой m алгебраически сопряженных абсолютно неприводимых модулей. Таким образом, достаточно установить результат для $V=W$ и $k=a-1$.

Сначала допустим, что для некоторого j, $0\leqslant j\leqslant a-1$, блок B_j содержит такой ненулевой неразложимый $\bar{R}[N_j]$-модуль U, что U_F является прямой суммой m алгебраически сопряженных неразложимых $F[N_j]$-модулей. Согласно (3.6), $S(U)$ обладает тем же свойством. В силу (3.2), любой неприводимый $\bar{R}[N_j]$-модуль из B_j обладает требуемым свойством и значит по (3.6) любой неразложимый $\bar{R}[N_j]$-модуль из B_j имеет требуемое свойство. Итак, результат верен при $j=k=a-1$.

Пусть $0\leqslant j\leqslant a-1$, V_j — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B_j с вертексом D_j и U — отвечающий ему при соответствии Грина $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль. Согласно (III.5.7) (iii), U_F является прямой суммой m алгебраически сопряженных $F[N_k]$-модулей. Таким образом, результат верен для $0\leqslant j\leqslant a-1$, по предыдущему абзацу.

Согласно (III.5.7) (iii), результат справедлив для любого непроективного неразложимого $\bar{R}[G]$-модуля из B, так как он справедлив для любого неразложимого $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуля из $\tilde{B}$. Он также верен для неразложимых проективных $\bar{R}[G]$-модулей из B, так как верен для неприводимых $\bar{R}[G]$-модулей из B. □

Лемма 3.14. *Предположим, что* $I_{\bar{R}}(W, W)=m$. *Пусть* $0\leqslant k\leqslant a$ *и* V_1, V_2 *— неразложимые* $\bar{R}[N_k]$*-модули из* B_k. *Тогда* $I_{\bar{R}}(V_1, V_2)\equiv 0 \pmod m$.

Доказательство. Согласно (1.19.4), $W\otimes_{\bar{R}}\bar{\bar{R}}=\oplus_{i=1}^{m} W_0^{\tau^i}$, где τ — элемент группы Галуа поля $\bar{\bar{R}}$ над $\bar{R}$, W_0 абсолютно неприводим и $W_0^{\tau^i}=W_0^{\tau^j}$ тогда и только тогда, когда $i\equiv j \pmod m$. По (3.6) и (3.13), $V_s\otimes_R\bar{\bar{R}}=\oplus_{i=1}^{m}(V_s)_0^{\tau_i}$, где $s=1, 2$ и $(V_s)_0$ — некоторые абсолютно неразложимые модули. Поэтому

$$I_{\bar{R}}(V_1, V_2)=I_{\bar{\bar{R}}}(V_1\underset{\bar{R}}{\otimes}\bar{\bar{R}}, V_2\underset{\bar{R}}{\otimes}\bar{\bar{R}})=mI_R(V_1\underset{\bar{R}}{\otimes}\bar{\bar{R}}, (V_2)_0). \quad \square$$

Лемма 3.15. *Пусть* $M_1\ncong M_2$ *— неразложимые* $\bar{R}[\tilde{G}]$*-модули из* $\tilde{B}$, $m=I_{\bar{R}}(W, W)$.

(i) *Если* $l(M_1)\leqslant e$, *то* $I_{\bar{R}}(M_i, M_j)\leqslant m$ *для* $\{i, j\}=\{1, 2\}$.

(ii) *Если* $I_R(M_1, M_2)=m$, *то* $l(M_1)\leqslant e$.

Доказательство. Оба утверждения — непосредственные следствия из (3.9) и (3.14). □

Теорема 3.16. *Пусть* V *— неприводимый* $\bar{R}[G]$*-модуль из* B. *Тогда либо* $l(\tilde{V})\leqslant e$, *либо* $l(\tilde{V})\geqslant p^a-e$.

Доказательство. Пусть $m=I_R(W, W)$. В силу (III.5.13), (1.5) (iii) и (3.13),

$$\dim_{\bar{R}}H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{V}, \tilde{V}))=\dim_{\bar{R}}H^0(G, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(V, V)=$$

$$=I_R(V, V)=m.$$

Допустим, что $l(\tilde{V})\leqslant p^a/2$. Тогда, по (3.10), $I_{\bar{R}}(\tilde{V}, \tilde{V})=m$, и, значит, $l(\tilde{V})\leqslant e$, согласно (3.15).

Теперь допустим, что $l(\tilde{V})>p^a/2$. Существуют главный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль P и точная последовательность

$$0\to\tilde{V}\to P\to X\to 0.$$

Таким образом, $l(X)=l(P)-l(\tilde{V})<p^a/2$. В силу (III.5.12) и (3.10),

$$I_{\bar{R}}(X, X)=\dim_{\bar{R}}H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(X, X))=$$

$$=\dim_{\bar{R}}H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{V}, \tilde{V}))=m.$$

По (3.15), $l(X)\leqslant e$, и следовательно, $l(\tilde{V})\geqslant p^a-e$. □

Лемма 3.17. *Пусть* V *— неразложимый* $\bar{R}[G]$*-модуль из* B. *Тогда*:

(i) $S(V)$ *— прямая сумма попарно неизоморфных неприводимых модулей*;

(ii) $T(V)$ — *прямая сумма попарно неизоморфных неприводимых модулей.*

Доказательство. Модуль V^* лежит в блоке с дефектной группой D и $T(V^*)\cong S(V)^*$. Таким образом, (ii) следует из (i), в силу двойственности. Остается доказать (i).

Если V проективен, результат следует из (I.14.8) и (I.16.8). Допустим, что V непроективен. Пусть L — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль из B. Будет показано, что L входит в $S(V)$ с кратностью не выше 1.

Допустим, что $l(\tilde{L})+l(\tilde{V})\leqslant p^a$. По (III.5.13), (1.5) (iii) и (3.10), $\mathrm{Hom}_{\bar{R}[G]}(L, V)\cong\mathrm{Hom}_{\bar{R}[\tilde{G}]}(\tilde{L}, \tilde{V})$. Согласно (3.16), $l(\tilde{L})\leqslant e$ или $l(\tilde{V})\leqslant e$. В обоих случаях результат следует из (3.13) и (3.15).

Предположим, что $l(\tilde{L})+l(\tilde{V})>p^a$. Тогда существуют главные неразложимые $\bar{R}[\tilde{G}]$-модули P_1 и P_2 и точные последовательности

$$0\to X\to P_1\to\tilde{L}\to 0,\quad 0\to Y\to P_2\to\tilde{V}\to 0.$$

Поэтому $l(X)+l(Y)<p^a$. В силу (3.16), $l(X)\leqslant e$ или $l(X)\geqslant p^a-e$, т. е. $l(Y)\leqslant e$. Согласно (III.5.12), (3.14), (3.15),

$$\dim_{\bar{R}}H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{L}, \tilde{V}))=$$
$$=\dim_R H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \mathrm{Hom}_R(X, Y))=I_{\bar{R}}(W, W).$$

Таким образом, по (III.5.13) и (1.5) (iii), $I_R(L, V)=I_R(W, W)$. Теперь результат следует из (3.13) и (3.14). □

Полученных в этом параграфе результатов уже достаточно, чтобы доказать теоремы 2.1—2.10. Следующие два результата нужны для доказательства утверждений 2.20—2.23.

Лемма 3.18. *Пусть M_1 и M_2 — такие непроективные неразложимые $R[G]$-модули из B, что* $\mathrm{Rad}(M_i)=S(M_i)\cong V$, $T(M_i)\cong V_i$, *где* $i=1, 2$, *а V, V_1, V_2 неприводимы. Предположим, что* $\tilde{V}_1\cong\tilde{V}_2$ и $l(\tilde{V}_1)\geqslant l(\tilde{V}_2)$. *Тогда* $l(\tilde{V}_2)+l(\tilde{V})<p^a<l(\tilde{V}_1)+l(\tilde{V})$.

Доказательство. Согласно (1.5) (i), для $i=1, 2$ существуют точные последовательности

$$0\to\tilde{V}\oplus A_1\oplus A_2\to\tilde{M}_i\oplus A'_1\oplus A'_2\to\tilde{V}_i\oplus A''_1\oplus A''_2\to 0,$$

где A_1, A'_1, A''_1 проективны, а A_2, A'_2, A''_2 являются суммами неразложимых модулей из блоков, отличных от $\tilde{B}$. Если эту последовательность умножить на центральный идемпотент, соответствующий блоку $\tilde{B}$, то (I.15.6) влечет существование таких проективных $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулей P_i, $i=1, 2$, что точны последовательности

$$0\to\tilde{V}\to\tilde{M}_1\oplus P_i\to\tilde{V}_i\to 0.$$

Допустим, что $l(\tilde{V}_1)+l(\tilde{V})\leqslant p^a$. Тогда последовательность

$$0\to\tilde{V}\to\tilde{M}_i\to\tilde{V}_i\to 0$$

точна при $i=1, 2$. Таким образом, $S(\tilde{M}_1)\cong S(\tilde{M}_2)$ и $S(\tilde{M}_1/\tilde{V})\cong S(\tilde{M}_2/\tilde{V})$, согласно (3.9). Отсюда $S(\tilde{V}_1)\cong S(\tilde{V}_2)$, и поэтому $V_1\cong V_2$, в силу (3.11), вопреки условию.

Допустим теперь, что $l(\tilde{V}_2)+l(\tilde{V})\geqslant p^a$. Поскольку M_i не проективен, $l(\tilde{M}_i)\neq p^a$. Тогда в $\tilde{B}$ существуют такие главные неразложимые модули P_1, P_2, что последовательности

$$0\to\tilde{V}\xrightarrow{f_i}\tilde{M}_i\oplus\tilde{P}_i\xrightarrow{g_i}\tilde{V}_i\to 0,$$

$i=1, 2$, точны. Поскольку P_i не лежит в ядре g_i, $T(\tilde{V}_i)\cong T(P_i)\cong S(P_i)$, $i=1, 2$. Так как $f_i(\tilde{V})\cap P_i\neq(0)$, то $S(\tilde{V})\cong S(P_i)$ для $i=1, 2$. Итак, $S(\tilde{V})\cong T(\tilde{V}_i)$, $i=1, 2$, и поэтому $T(\tilde{V}_1)\cong T(\tilde{V}_2)$. Значит, согласно (3.11), $V_1\cong V_2$, вопреки условию. □

Лемма 3.19. *Пусть M — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль, такой, что $S(M)=\mathrm{Rad}(M)$ неприводим, но $T(M)$ приводим. Тогда $T(M)$ является прямой суммой двух неизоморфных неприводимых модулей. Кроме того,* $1\neq l(\widetilde{S(M)})\neq p^a-1$.

Доказательство. Согласно (3.17), $T(M)$ является прямой суммой попарно неизоморфных неприводимых модулей. В силу (3.18), $l(T(M))=2$. Для любой неприводимой компоненты V модуля $T(M)$ имеем $1\leqslant l(\tilde{V})\leqslant p^a-1$. Значит, если $l(\widetilde{S(M)})=1$ или p^a-1, то из (3.18) следует $l(T(M))=1$, вопреки условию. □

§ 4. Доказательства теорем 2.1—2.10

Теоремы 2.1 и 2.2 доказываются одновременно индукцией по $|G|$.

Допустим, что $G=C_0$, тогда $e=1$. По (V.4.6), блок $\hat{b}_0$ содержит единственный неприводимый характер Брауэра. Значит, выполнено предположение из § 3, и результат вытекает из (3.12).

Допустим, что $G=C_k$ для некоторого k, $0\leqslant k\leqslant a-1$. Ввиду (1.3), $e=1$. Если $D=D_k$, то $G=C_0$, и результат следует из предыдущего абзаца. Предположим, что $D_k\neq D$. Пусть $G^0=G/D_k$. Согласно (V.4.5), существует единственный блок $\hat{B}^0$ группы G^0, который содержится в $\hat{B}$, а $D/D_k=D^0$ — дефектная группа блока $\hat{B}^0$. По (1.3), индекс инерции блока $\hat{B}^0$ равен 1. Таким образом, по предположению индукции, $\hat{B}^0$ содержит единственный неприводимый характер Брауэра. Так как каждый неприводимый характер Брауэра группы G содержит D_k в своем ядре, то и $\hat{B}$ содержит единственный неприводимый характер Брауэра. Поскольку для всех i индекс инерции блока $\hat{B}_i$ равен 1, по индукции получаем, что $\hat{B}_i$ также имеет единственный неприводимый характер Брауэра для $0\leqslant i\leqslant k$. Так как $C_i=C_{a-1}$ при $k\leqslant i\leqslant a-1$, мы видим, что выполняется предположение из § 3, и результат следует из (3.12).

Наконец, допустим, что $G\neq C_{a-1}$. Тогда, по индукции, $\hat{b}_k$ содержит единственный неприводимый характер Брауэра, $0\leqslant k\leqslant a-1$. Значит, предположение § 3 выполнено, и результат следует из (3.12). □

В качестве следствия из (2.1), мы видим, что предположение из § 3 выполнено всегда. Итак, верны все утверждения параграфа 3.

(2.3) следует из (3.17).
(2.4) следует из (3.2) и (3.5).
(2.5) следует из (3.11).
(2.6) следует из (3.5) и (3.7).
(2.7) следует из (3.16).
(2.8) следует из (3.9)
(2.9) следует из (3.13).

По (1.5) (ii), $(\dim_{\bar{R}} V)/|G:D| \equiv (\dim_{\bar{R}} \tilde{V})/|G:D| \pmod{p^a}$ для любого $\bar{R}[G]$-модуля из B. Таким образом, (2.10) — прямое следствие из (2.7). □

§ 5. Доказательства теорем 2.11—2.17 в случае $K=\hat{K}$

На протяжении этого параграфа предполагается, что $K=\hat{K}$.

Лемма 5.1. *В случае* $G=C_0$ *теоремы* 2.11—2.17 *верны с* $e=1$, $\delta_1=1$, $\delta_0=-1$.

Доказательство. Прямое следствие из (V.4.7). □

Лемма 5.2. *Теорема* 2.11 *верна.*

Доказательство. В силу (5.1), $T(b_0)/C_0$ действует без неподвижных точек как группа перестановок на множестве всех неприводимых $K[C_0]$-модулей из B_0, не содержащих D в своих ядрах. Так как $e=|T(b_0):C_0|$, то, в силу (5.1), $b_0^{T(b_0)}$ имеет $(p^a-1)/e$ неприводимых характеров, которые не содержат в ядре D. Таким образом, $|\Lambda|=(p^a-1)/e$ по (V.2.5) (i). Так как $e|(p-1)$, то $|\Lambda|=1$ тогда и только тогда, когда $e=p-1$ и $|D|=p$. □

Лемма 5.3. *В содержит ровно* $e+|\Lambda|$ *неприводимых характеров.*

Доказательство. Пусть $y^s\neq 1$. Если $y^s\in D_i-D_{i+1}$, то число элементов, сопряженных с y^s в D, равно $|N_i:C_i|$. Количество блоков группы C_i, накрываемых блоком B_i, равно $|N_i:C_i|/e$. Следовательно, количество неприводимых характеров Брауэра группы $C_G(y^s)=C_i$ в блоках, которые отображаются в B при соответствии Брауэра, в e раз меньше числа сопряженных y^s в D. По (2.1), в B имеются точно e неприводимых характеров Брауэра. Значит, в силу (IV.6.6) (ii), B содержит в точности $e+|\Lambda|$ неприводимых характеров. □

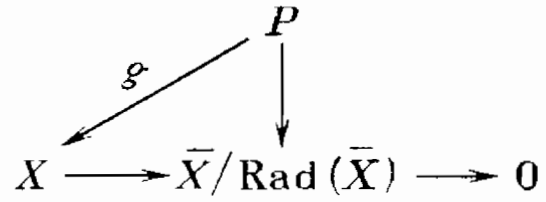
Лемма 5.4. *В случае* $G=C_{a-1}$ *все числа разложения для* B *равны* 1.

Доказательство. Согласно (5.3), в $B=B_{a-1}$ содержится p^a неприводимых характеров. По (2.1), в B имеется единственный неприводимый характер Брауэра. Теперь результат следует из (V.4.6). □

Лемма 5.5. *Пусть* X *— такой* R*-свободный* $R[C_{a-1}]$*-модуль из* b_{a-1}, *что* $\bar{X}$ *неразложим. Тогда кратность каждого композиционного фактора в* X_K *не превосходит* 1.

Доказательство. Согласно (2.4), $\bar{X}$ одноряден, откуда $\bar{X}/\mathrm{Rad}(\bar{X})$ неприводим. Таким образом, существуют неразложимый проективный

$R[C_{a-1}]$-модуль P и коммутативная диаграмма



Так как $\pi X \subseteq \mathrm{Rad}(X)$, то $\bar{X}/\mathrm{Rad}(\bar{X}) \cong X/\mathrm{Rad}(X)$ и $\mathrm{Rad}(X)$ — единственный максимальный подмодуль в X. Следовательно, g является эпиморфизмом, и результат следует из (5.4). □

Следующий результат первоначально был доказан Томпсоном [1967b] в ключевом частном случае.

Лемма 5.6. *Пусть* η — *такой характер группы* G, *что* $\Phi_i = \eta + \eta'$ *для некоторого* i, *где* $\eta' = 0$ *или является характером. Пусть* $\theta_1, \ldots, \theta_{p^a}$ — *все неприводимые характеры группы* C_{a-1}, *принадлежащие* b_{a-1}. *Тогда* $|(\eta_{C_{a-1}}, \theta_s) - (\eta_{C_{a-1}}, \theta_t)| \leqslant 1$ *для всех* s, t. *Если* $\eta \neq 0$ *и* $\eta \neq \Phi_i$, *то* $(\eta_{C_{a-1}}, \theta_s) \neq (\eta_{C_{a-1}}, \theta_t)$ *для некоторых* s, t.

Доказательство. По (I.17.12), существует такой R-свободный $R[G]$-модуль Y, что Y_K имеет характер η и $\bar{Y}$ неразложим. Если Y проективен, то $\eta = \Phi_i$, и результат тривиален, так как $Y_{C_{a-1}}$ проективен. Предположим, что Y не проективен. Согласно (1.5) (i), $Y_{\tilde{G}} = \tilde{Y} \oplus A_1 \oplus A_2$, где A_1 проективен, а A_2 является суммой модулей из блоков, отличных от $\tilde{B}$. По (III.5.8) и (1.4) (i), $\bar{\tilde{Y}} \cong \bar{\tilde{Y}}$ неразложим. Если η_1 и η_2 — характеры модулей $(A_1)_K$ и $(A_2)_K$ соответственно, то

$$((\eta_2)_{C_{a-1}}, \theta_s) = 0 \text{ для всех } s, \text{ а } ((\eta_1)_{C_{a-1}}, \theta_s)$$

не зависит от s. Поэтому можно считать, что $G = \tilde{G}$ и $Y = \tilde{Y}$.

Из (3.5) следует, что $\bar{Y}$ однорядный и $\bar{Y}_{C_{a-1}} = \oplus U^x$, где U — неразложимый $\bar{R}[C_{a-1}]$-модуль в b_{a-1}, а x пробегает трансверсаль $T(b_{a-1})$ в N_{a-1}. Таким образом, $Y_{C_{a-1}} = Y_0 \oplus A$, где $\bar{Y}_0 \cong U$, а A — сумма модулей из блоков, отличных от b_{a-1}. Поэтому можно считать, что $G = C_{a-1}$. Теперь (5.5) влечет, что $(\eta_{C_{a-1}}, \theta_s) \leqslant 1$ для всех s. Лемма доказана. □

Лемма 5.7. *Все числа разложения блока* B *равны* 0 *или* 1.

Доказательство. Допустим, что это не так. Тогда существует такой неприводимый характер χ, что $\Phi_i = 2\chi + \eta'$ для некоторого i, где $\eta' = 0$ или является характером. Если θ — любой неприводимый характер группы C_{a-1}, то $(2\chi_{C_{a-1}}, \theta)$ четно, вопреки (5.6). □

Лемма 5.8. *Пусть* X — *такой* R-*свободный* $R[G]$-*модуль из* B, *что* X_K *неприводим, а* $\bar{X}$ *неразложим. Тогда справедливо одно из следующих утверждений.*

(i) $\bar{X}_K$ *неприводим.*

(ii) *Существуют главный неразложимый* $R[\tilde{G}]$-*модуль* U *и точная последовательность*

$$0 \to Y \to U \to \tilde{X} \to 0,$$

где Y_K *неприводим.*

Доказательство. Имеем $I_K(X_K, X_K)=1$. Поскольку X непроективен, это означает что

$$\dim_{\bar{R}}\overline{H^0(G, \langle 1\rangle, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(X, X))}=1.$$

Итак, по (1.5) (iii), $\dim_{\bar{R}}\overline{H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{X}, \tilde{X}))}=1$. Ввиду (III.5.8) и (1.4) (i), $\bar{\tilde{X}}=\tilde{\bar{X}}$, так что он одноряден. Таким образом, существуют главный неразложимый $R[\tilde{G}]$-модуль U и точные последовательности

$$0\to V\to\bar{U}\to\tilde{\bar{X}}\to 0,\quad 0\to Y\to U\to\tilde{X}\to 0.$$

Так как $\tilde{X}$ свободен над R, то Y — чистый подмодуль в U, и следовательно, $\bar{Y}\cong V$. По (2.6), $l(\bar{U})=p^a$, значит, $l(\tilde{\bar{X}})\leqslant p^a/2$ или $l(\bar{Y})\leqslant p^a/2$. Положим $Y_0=\tilde{X}$, если $l(\tilde{\bar{X}})\leqslant p^a/2$, и $Y_0=Y$, если $l(\bar{Y})\leqslant p^a/2$. Таким образом, в любом случае $l(\tilde{\bar{Y}}_0)\leqslant p^a/2$. Согласно (III.5.12), $H^0(G, \langle 1\rangle, \mathrm{Hom}_R(Y_0, Y_0))$ — ненулевой циклический R-модуль. По (3.10),

$$0=\mathrm{Tr}^{\tilde{G}}_{\langle 1\rangle}(\mathrm{Hom}_R(\bar{Y}_0, \bar{Y}_0))=\mathrm{Tr}^{\tilde{G}}_{\langle 1\rangle}(\overline{\mathrm{Hom}_R(Y_0, Y_0)}).$$

Таким образом, по (III.5.15),

$$\overline{\mathrm{Hom}_{R[G]}(Y_0, Y_0)}\cong\overline{H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \mathrm{Hom}_R(Y_0, Y_0))}\cong\bar{R}.$$

Значит, $\mathrm{rank}_R\ \mathrm{Hom}_{R[G]}(Y_0, Y_0)=1$, и потому $I_K((Y_0)_K, (Y_0)_K)=1$. Следовательно, Y_0 неприводим. □

Лемма 5.9. *Пусть* $0\leqslant k\leqslant a-1$. *Предположим, что* $G=C_k$. *Положим* $G^0=C_k/D_{a-1}$. *Определим* H_j *для* $0\leqslant j\leqslant a-1$ *условиями* $D_{a-1}\subseteq H_j$ *и* $H_j/D_{a-1}=C_{G^0}(D_j/D_{a-1})$. *Тогда* $C_j\lhd H_j$, H_j/C_j *является* p*-группой и* $T_{H_j}(b_j^z)=C_j$ *для* $z\in N_j$. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) $b\leftrightarrow b^{H_j}$ *определяет биективное соответствие множества всех* H_j*-орбит блоков группы* C_j, *соответствующих* b_k, *и множества всех блоков группы* H_j, *соответствующих* b_k.

(ii) *Пусть* $z\in N_j$. *Тогда* $0\leftrightarrow 0^{H_j}$ — *взаимно однозначное соответствие между неприводимыми обыкновенными или брауэровыми характерами соответственно в* b_j^z *и в* $(b_j^z)^{H_j}$.

(iii) *Если* χ — *неприводимый характер из* b_j, $x\in D_i-D_{i+1}$ *для* $i\leqslant j$ *и* $b_i^{Cj}=b_j^z$ *для некоторого* $z\in N_j$, *то*

$$d(\chi^{H_j}, x, \psi_i)=d(\chi^z, x, \psi_i).$$

(iv) *Пусть* $\chi=\chi^0$ — *неприводимый характер группы* G, *который содержит в ядре* D_{a-1} *и принадлежит блоку* b_k^0 *группы* G^0. *Если* $x\in D_j-D_{j+1}$ *для* $0\leqslant j\leqslant a-1$ *и* $z\in N_j$, *то*

$$d(\chi^0, xD_{a-1}/D_{a-1}, (\psi_j^z)^{H_j})^0=d(\chi, x, \psi_j^z).$$

Доказательство. Первое утверждение, (i) и (ii) вытекают из (V.2.5) и (V.3.14). Остальные утверждения являются следствиями второй основной теоремы о блоках (IV.6.1). □

Итак, (2.11) и (2.13) доказаны, за исключением того факта, что $d_{\lambda i}$ не зависит от λ. Это будет установлено, как только будет доказано (2.12). Заметим, что (2.15) (i) является непосредственным следствием из (2.15) (ii). Точно так же (2.15) (iii) — непосредственное следствие из (2.12) и (2.15) (ii), поскольку φ_i, $1 \leqslant i \leqslant e$, входит в обобщенный характер $\delta_0\chi + \sum_{u=1}^{e} \delta_u \chi_u$ с кратностью $\delta_u + \delta_v = 0$ для подходящих u, v.

Доказательства теорем 2.12, 2.14, 2.15 (ii), 2.15 (iv), 2.16 и 2.17 будут даны одновременно индукцией по $|G|$.

Если $G = C_0$, эти результаты верны по (5.1). Допустим, что $G \neq C_0$.

Сначала предположим, что $G = C_k$ для некоторого k, $0 \leqslant k \leqslant a-1$. Без ограничения общности k можно выбрать так, чтобы $G \neq C_{k-1}$. Поскольку $G \neq C_0$, то $|D| > p$. Таким образом, по индукции, все результаты верны для C_{k-1} и $G^0 = G/D_{a-1}$. Пусть Λ^0 — подмножество Λ, состоящее из всех характеров, которые содержат в своих ядрах D_{a-1}. Согласно (V.4.5), существует единственный блок B^0 группы G^0, такой, что $B^0 \subseteq B$. По индукции, в B существуют неприводимые характеры χ_1, χ_λ, $\lambda \in \Lambda^0$, и это в точности все характеры, в ядрах которых лежит D_{a-1}.

Пусть θ_1, θ_λ, $\lambda \in \Lambda$,— неприводимые характеры группы C_{k-1} из b_{k-1}.

Для любого элемента x из G обозначим через x_p, $x_{p'}$ соответственно p-часть, p'-часть элемента x.

Пусть $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k$ — знаки, определенные в (2.17) для группы G^0, а $\varepsilon'_0, \ldots, \varepsilon'_k$ — для группы C_{k-1}. По предположению индукции и в силу (2.15), значения δ_u, $u = 0, \ldots, e$, определены во всех меньших случаях.

Пусть H_j определена как в (5.9). По индукции, существует такое $\gamma' = \pm 1$, что знаки для b_k^0, умноженные на γ', дают соответствующие знаки для $(b_{k-1}^{H_{k-1}})^0$. Таким образом, если α — неисключительный характер группы H_{k-1}/D_{a-1} в блоке $(b_{k-1}^{H_{k-1}})^0 = (b_{k-1}^0)^{H_{k-1}/D_{k-1}}$, то обобщенное число разложения характера χ_1 относительно xD_{a-1}/D_{a-1}, где $x \in D - D_k$, множителем $\gamma'\delta$ отличается от обобщенного числа разложения характера α, где $\delta = \delta_1$ для b_k^0.

Если $x \in D$, то из (5.9) (iv) вытекает, что знак ε, который равен обобщенному числу разложения характера α в $(b_{k-1}^{H_{k-1}})^0$ относительно xD_{a-1}/D_{a-1}, должен равняться обобщенному числу разложения α в $b_{k-1}^{H_{k-1}}$ относительно x. Согласно (5.9) (ii), $\alpha = \beta^{H_{k-1}}$ для некоторого $\beta \in b_{k-1}$, и следовательно, по теореме (2.17), примененной к C_{k-1}, число разложения характера β относительно x равно ε.

Как замечено после (2.17), мы можем предполагать, что $\beta = \theta_1$, поэтому существует такое $\gamma = \pm 1$, что $\varepsilon'_j = \gamma\varepsilon_j$ для $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Если $\lambda\in\Lambda\cup\{1\}$, то предположение индукции, примененное к C_{k-1}, дает, что если ζ — неприводимая конституэнта ограничения на D некоторой неприводимой конституэнты характера $\lambda_{C_{k-1}}$ из b_{k-1}, то

$$\theta_\lambda(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x_p\notin {}_{C_{k-1}}D,\\ \zeta(x_p)\psi_{k-1}(x_{p'}), & \text{если } x_p\in D_{k-1},\\ \dfrac{\varepsilon_i'}{|C_i|}\displaystyle\sum_{z\in N_i\cap C_{k-1}}\zeta^z(x_p)\psi_i^z(x_{p'}), & \text{если } x_p\in D_i-D_{i+1},\ 0\leqslant i\leqslant k-2.\end{cases}$$

Поскольку $C_G(x)\subseteq C_{k-1}$, если $x\in D-D_k$, отсюда следует, что

$$\theta_\lambda^G(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x_p\notin {}_GD,\\ \zeta(x_p)\psi_{k-1}^G(x_{p'}), & \text{если } x_p\in D_k,\\ \dfrac{\varepsilon_i'}{|C_i|}\displaystyle\sum_{z\in N_i}\zeta^z(x_p)\psi_i^z(x_{p'}), & \text{если } x_p\in D_i-D_{i+1},\ 0\leqslant i\leqslant k-1.\end{cases}$$

Если $x_p\in D_j-D_{j+1}$ для некоторого $j\geqslant k$, то по индукции и (5.9) (iv),

$$\chi_\lambda(x)=-\varepsilon_j\delta_0\zeta(x_p)\psi_k(x_{p'}),$$

где δ_0 определено индукцией для G^0. Если $k<a-1$, то индукция дает $\delta_0=1$ и $\varepsilon_i=1$ для $k\leqslant i<a-1$, поскольку $G^0=C_{G^0}(D_k/D_{a-1})$. Если $x_p\in D_{a-1}$, то x_p лежит в ядре характера χ_λ, так что $\chi_\lambda(x)=\chi_\lambda(x_{p'})=\zeta(x_p)\psi_k(x_{p'})$. Итак, для любого $\lambda\in\Lambda^0\cup\{1\}$

$$\chi_\lambda(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x_p\in {}_GD,\\ \zeta(x_p)\psi_k(x_{p'}), & \text{если } x_p\in D_k,\\ -\dfrac{\varepsilon_i\delta_0}{|C_i|}\displaystyle\sum_{z\in N_i}\zeta^z(x_p)\psi_i^z(x_{p'}), & \text{если } x_p\in D_i-D_{i+1},\ 0\leqslant i\leqslant k-1.\end{cases}\tag{5.10}$$

Если $p^a=4$, положим $\delta_0=-1$, $\delta_1=1$. В общем случае δ_1 можно определить по индукции так, чтобы $\delta_1+\delta_0=0$. Поскольку $\varepsilon_i'=\varepsilon_i\gamma$ для $0\leqslant i\leqslant k-1$, сравнение последних двух выражений показывает, что для $\lambda\in\Lambda^0\cup\{1\}$

$$\chi_\lambda(x)-\gamma\delta_1\theta_\lambda^G(x)=\begin{cases}\zeta(x_p)\left[\psi_k(x_{p'})-\gamma\delta_1\psi_{k-1}^G(x_{p'})\right], & \text{если } x_p\in {}_GD_k,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Для $\mu\in\Lambda$ определим

$$\eta_\mu(x)=\begin{cases}\xi(x_p)\left[\chi_1(x_{p'})-\gamma\delta_1\theta_1^G(x_{p'})\right], & \text{если } x_p\in {}_GD_k,\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases}$$

где ξ — неприводимая конституэнта ограничения на D неприводимой конституэнты характера $\mu_{C_{k-1}}$ из b_{k-1}. Последнее равенство показывает, что если $\lambda\in\Lambda^0\cup\{1\}$, то $\chi_\lambda=\eta_\lambda+\gamma\delta_1\theta_\lambda^G$. Для $\mu\in\Lambda$ определим $\chi_\mu=\eta_\mu+\gamma\delta_1\theta_\mu^G$. Из характеризации характеров (IV.1.1) вытекает, что η_μ является обобщенным характером, поэтому χ_μ — также обобщенный характер. Прямое вычисление показывает, что χ_μ удовлетворяет (5.10), где λ заменено на μ, а ζ — на ξ. В частности, $\chi_\mu(1)>0$.

Теперь вычислим $\|\chi_\mu\|^2$. Пусть $y^s\in D_i-D_{i+1}$, и A — множество всех элементов из G, чьи p-части равны y^s. Если $i\geqslant k$, то $\sum_{x\in A}|\chi_\mu(x)|^2=\sum_{x\in A}|\chi_1(x)|^2$, согласно (5.10). Пусть $i<k$, тогда

$$\sum_{x\in A}|\chi_\mu(x)|^2=\sum\left|\frac{1}{|C_i|}\sum_{s\in N_i}\xi^x(y^s)\psi_i^z(x)\right|^2=\frac{1}{|C_i|}\sum_{z,\,z_1\in N_i}\xi^z(y^s)\xi^{z_1}(y^{-s})(\psi_i^z,\psi_i^{z_1})';$$

во второй сумме x пробегает p'-элементы из C_i. Если z и z_1 лежат в разных смежных классах по C_i, то ψ_i^z и $\psi_i^{z_1}$ — в разных блоках. Значит,

$$\sum_{x\in A}|\chi_\mu(x)|^2=\frac{1}{|C_i|}\sum_{z\in N_i}|\xi^z(y^s)|^2\cdot\|\psi_i^z\|'^2=\sum_{x\in A}|\chi_1(x)|^2.$$

Отсюда следует, что $\|\chi_\mu\|^2=\|\chi_1\|^2=1$. Значит, χ_μ — неприводимый характер для всех $\mu\in\Lambda\cup\{1\}$.

Соотношение (5.10) показывает, что каждый χ_μ лежит в B, все характеры χ_μ различны и $\chi_\mu(x)=\chi_\lambda(x)$ для всех p'-элементов x и λ, $\mu\in\Lambda$. Итак, (2.12) верно. Кроме того, из (5.10) следует, что (2.17) выполняется для G со знаками, скажем, ε_i'' при $i\geqslant k$ и $\varepsilon_i''=\varepsilon_i$ при $0\leqslant i\leqslant k-1$. (Напомним, что если $G=C_k$, то $\delta_1=1$, а $\delta_0=-1$.) Поскольку $\chi_\mu(1)=\chi_1(1)$ равно степени характера ψ_k, отсюда следует, что χ_μ неприводим как характер Брауэра. Это значит, что верны (2.14) и (2.16). Поскольку $\sum_{\lambda\in\Lambda\cup\{1\}}\chi_\lambda$ — единственный главный неразложимый характер в B, (2.15) также верно. Итак, все доказываемые утверждения получены при $G=C_k$ для некоторого k, $0\leqslant k\leqslant a-1$.

Теперь предположим, что $G=N_{a-1}$. Пусть Λ_0 — множество всех неприводимых характеров группы C_0, принадлежащих b_0 и не содержащих D в своих ядрах, а θ_1, θ_λ, $\lambda\in\Lambda_0$, — неприводимые характеры из b_{a-1}. Прямо из теоремы (2.17), примененной к C_{a-1}, следует, что $T(b_{a-1})/C_{a-1}$ разбивает множество $\{\theta_k\}$ на $(p^a-1)/e$ орбит одинаковой длины e. Таким образом, если $\mu=\lambda^{N_0}\in\Lambda$, пусть $\chi_\mu=\theta_k^G$. Тогда, по (V.2.5), в B имеется ровно $|\Lambda|=(p^a-1)/e$ характеров, ограничения которых на C_{a-1} содержат в качестве компоненты некоторый исключительный характер. Поскольку B имеет $e+|\Lambda|$ неприводимых характеров, по (5.3), у θ_1^G должно быть e различных неприводимых конституэнт. Обозначим их через $\chi_1,\ldots,\chi_e$. Так как θ_1 неприводим как характер Брауэра, $\theta_1^G=\sum_{u=1}^e\chi_u$, в силу (1.3), где каждый χ_u неприводим как характер Брауэра. Кроме того, $\chi_u(x)=\varphi_u(x)$ для всех p'-элементов x при $u=1,\ldots,e$ после подходящей перену-

мерации характеров. Если $|\Lambda|\neq 1$, то характеры χ_λ, $\lambda\in\Lambda$, исключительные. Ясно, что $l(\tilde{\bar{X}}_u)=1$ для $1\leqslant u\leqslant e$, так что $\delta_u=1$ для $1\leqslant u\leqslant e$. Если $\lambda\in\Lambda$, то $\chi_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{e}\varphi_i(x)$ для всех p'-элементов x, так как на множестве p'-элементов $\theta_1=\theta_\lambda$, и значит, $\theta_1^G(x)=\theta_\lambda^G(x)$ для всех p'-элементов x. Итак, $\Phi_i=\chi_i+\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda$ для $1\leqslant i\leqslant e$. Кроме того, $l(\tilde{\bar{X}}_0)=p^a-1$, и значит, $\delta_0=-1$. Этим доказательство (2.12), (2.14), (2.15) и (2.16) в рассматриваемом случае завершено. Теперь теорема (2.17) следует из определения индуцированного характера и ее справедливости для C_{a-1}.

Теперь мы можем предполагать, что $G\neq N_{a-1}$.

Пусть χ — такой характер из B, что $\chi\subset_{\neq}\Phi$ для некоторого главного неразложимого характера Φ. Пусть X, Z — такие R-свободные $R[G]$-модули, что X_K и Z_K имеют характер χ, а $\bar{X}$ и $\bar{Z}$ неразложимы. Тогда $X_K\cong Z_K$ и тем самым $\bar{X}$ и $\bar{Z}$ имеют одни и те же неприводимые конституэнты. Поэтому $\bar{X}_{\tilde{G}}$ и $\bar{Z}_{\tilde{G}}$ имеют одни и те же неприводимые $\bar{R}[\tilde{G}]$-конституэнты. По (1.5) (i), в $\tilde{B}$ существуют такие проективные $\bar{R}[\tilde{G}]$-модули M_1, M_2, что $\tilde{\bar{X}}\oplus M_1$ и $\tilde{\bar{Z}}\oplus M_2$ имеют одинаковые неприводимые конституэнты. Следовательно, $l(\tilde{\bar{X}})\equiv l(\tilde{\bar{Z}})\pmod{p^a}$, в силу (3.5). Поскольку $1\leqslant l(\tilde{\bar{X}})$, $l(\tilde{\bar{Z}})\leqslant p^a-1$, число $l(\tilde{\bar{X}})=l(\tilde{\bar{Z}})$ не зависит от выбора X. Согласно (1.3) (i),

$$\chi(1)\equiv l(\tilde{\bar{X}})\psi(1)\pmod{p^a}.$$

Предположим, что χ неприводим. Пусть модуль Y определен как в (5.8), откуда вытекает одна из следующих возможностей.

(i) $l(\tilde{\bar{X}})=1$, модулю $\tilde{X}_K$ отвечает неисключительный неприводимый характер из $\tilde{B}$.

(ii) $l(\tilde{\bar{X}})=p^a-1$, модулю Y_K отвечает неисключительный неприводимый характер из $\tilde{B}$.

(iii) $l(\tilde{\bar{X}})=e$, модулю $\tilde{X}_K$ отвечает исключительный неприводимый характер из $\tilde{B}$.

(iv) $l(\tilde{\bar{X}})=p^a-e$, модулю Y_K отвечает исключительный неприводимый характер из $\tilde{B}$.

Назовем неприводимый характер из B исключительным, если имеют место случаи (iii) или (iv) и $e\neq|D|-1$, и неисключительным, если случаи (i) или (ii).

Предположим, что $|\Lambda|\neq 1$. Пусть θ_λ, $\lambda\in\Lambda$ — исключительные характеры в $\tilde{B}$. Для λ, $\mu\in\Lambda$ функция $\theta_\lambda-\theta_\mu$ обращается в нуль на всех элементах, p-части которых не сопряжены в $\tilde{G}$ с элементами из $D-\langle 1\rangle$. Поскольку $\tilde{G}$ содержит централизатор любого элемента, чья

p-часть сопряжена в $\tilde{G}$ элементу из D, а любые два таких элемента тогда и только тогда сопряжены в G, когда они сопряжены в $\tilde{G}$, простой подсчет показывает, что

$$((\theta_\lambda-\theta_\mu)^G,\ (\theta_\sigma-\theta_\tau)^G)_G=(\theta_\lambda-\theta_\mu,\ \theta_\sigma-\theta_\tau)_{\tilde{G}},$$

$$\|(\theta_\lambda-\theta_\mu)^G\|^2=\|\theta_\lambda-\theta_\mu\|^2=2,\ \text{если}\ \lambda\neq\mu,$$

и

$$\{(\theta_\lambda-\theta_\mu)^G\}(x)=(\theta_\lambda-\theta_\mu)(x)\ \text{для}\ x\in\tilde{G},$$

если x_p сопряжен в $\tilde{G}$ элементу из D.

Стандартное рассуждение (см., например, Фейт [1967b, § 23]) показывает, что найдутся знак $\delta=\pm 1$ и такие неприводимые характеры χ_λ, $\lambda\in\Lambda$, что $(\theta_\lambda-\theta_\mu)^G=\delta(\chi_\lambda-\chi_\mu)$. Поскольку $(\chi_\lambda-\chi_\mu)(x)=\delta(\theta_\lambda-\theta_\mu)(x)$ для тех $x\in G$, у которых x_p сопряжен в $\tilde{G}$ с элементом из D, высшие числа разложения для χ_λ и ψ_k отличны от нуля при некотором k, $0\leqslant k\leqslant a-1$. Отсюда, по второй основной теореме о блоках (IV.6.1), χ_λ лежит в B для любого $\lambda\in\Lambda$. Кроме того, $(\chi_\lambda)_{\tilde{G}}=\delta\theta_\lambda+c\sum_{\mu\in\Lambda}\theta_\mu+\Gamma$, где c — некоторое целое число, и $(\Gamma,\theta_\mu)=0$ для всех $\mu\in\Gamma$. Возможно, что c и Γ зависят от λ.

Пусть X_λ — такой R-свободный $R[G]$-модуль, что модулю $(X_\lambda)_K$ отвечает характер χ_λ, а $\bar{X}_\lambda$ неразложим. Пусть Y_λ определен как в (5.8). Тогда модулю $(\tilde{X}_\lambda)_K$ отвечает характер θ_λ, если $\delta=1$, а модулю $(Y_\lambda)_K$ — характер θ_λ, если $\delta=-1$. (Если $|\Lambda|=2$, то δ определяется неоднозначно. Теперь можно взять $\delta=1$ тогда и только тогда, когда $l(\tilde{X}_\lambda)\leqslant p^a/2$.) Следовательно, во всех случаях

$$\chi(1)\equiv\delta e\psi(1)\ (\mathrm{mod}\,p^a). \tag{5.11}$$

Поскольку χ_λ и χ_μ имеют одинаковые брауэровы конституэнты, из (1.5) (i) следует, что $l(\bar{\tilde{X}}_\lambda)\equiv l(\bar{\tilde{X}}_\mu)\ (\mathrm{mod}\,p^a)$, и значит,

$$l(\bar{\tilde{X}}_\lambda)=l(\bar{\tilde{X}}_\mu) \tag{5.12}$$

для любых λ, $\mu\in\Lambda$, ибо $1\leqslant l(\bar{\tilde{X}}_\lambda)$, $l(\bar{\tilde{X}}_\mu)\leqslant p^a-1$.

Предположим, что χ — исключительный характер из B, но $\chi\neq\chi_\lambda$ ни для какого $\lambda\in\Lambda$. Пусть X — такой R-свободный $R[G]$-модуль, что модулю X_K отвечает характер χ, а $\bar{X}$ неразложим. Определим Y как в (5.8) и аналогично определим Y_λ для X_λ. Тогда $\mathrm{Hom}_{R[G]}(X, X_\lambda)=(0)$ для всех $\lambda\in\Lambda$. Отсюда, по (1.5) (iii) и (III.5.12), имеем

$$H^0(\tilde{G},\ \langle 1\rangle,\ \mathrm{Hom}_R(\tilde{X},\ \tilde{X}_\lambda))=H^0(\tilde{G},\ \langle 1\rangle,\ \mathrm{Hom}_R(Y,\ Y_\lambda))=(0).$$

Положим $Y_{0\lambda}=\tilde{X}_\lambda$, если $l(\bar{\tilde{X}}_\lambda)=e$, и $Y_{0\lambda}=Y_\lambda$, если $l(\bar{\tilde{X}}_\lambda)=p^a-e$. Тогда в любом случае $l(\bar{Y}_{0\lambda})=e$. Пусть $Y_0=\tilde{X}$, если $Y_{0\lambda}=\tilde{X}_\lambda$, и $Y_0=Y$, если $Y_{0\lambda}=Y_\lambda$, тогда $l(\bar{Y}_0)=e$ или p^a-e, так что $l(\bar{Y}_0)+l(\bar{Y}_{0\lambda})\leqslant p^a$. Отсюда, по (3.10) и (III.5.15), $\mathrm{Hom}_{R[\tilde{G}]}(Y_0, Y_{0\lambda})=(0)$ и, значит, $I_K((Y_0)_K, (Y_{0\lambda})_K)=(0)$ для всех $\lambda\in\Lambda$. Это невозможно, поскольку $(Y_0)_K$ должен обладать конституэнтой, которой отвечает исключительный характер.

Мы показали, что при $|\Lambda|\neq 1$ блок B содержит в точности $|\Lambda|$ исключительных характеров, и все они одинаковой степени. Обозначим $\delta_0=-\delta$. Ввиду (5.3), B содержит в точности e неисключительных неприводимых характеров, если $|\Lambda|\neq 1$, и $e+1$ неисключительных неприводимых характеров, если $|\Lambda|=1$. Если X_0 — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль с характером $\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_\lambda$, где $|\Lambda|\neq 1$, причем $\bar{X}_0$ неразложим, то из (1.5) (i) следует, что

$$l(\bar{\bar{X}}_0)\equiv\sum_\lambda l(\bar{\bar{X}}_\lambda)\equiv\delta_0 \pmod{p^a}.$$

Теперь (2.12), (2.14), (2.16) и (2.17) моментально вытекают из (5.8), (5.11) и (5.12). Остается доказать (2.15).

Если $e=1$, то (2.15), очевидно, верно. Допустим, что $e>1$. Если (2.15) неверно, найдутся такие i и u, v, $0\leqslant u<v\leqslant e$, что $\delta_u=\delta_v$ и $\Phi_i=\chi_u+\chi_v+\eta'$ для некоторого характера η'. Пусть θ_1, ..., θ_{p^a} — все неприводимые характеры группы C_{a-1} из b_{a-1}, причем характер θ_1 — неисключительный. Если $\delta_u=1$, то $l(\bar{\bar{X}}_u)=1$, и потому θ_1 — единственная неприводимая конституэнта характера модуля $((\tilde{X}_u)_K)_{C_{a-1}}$, лежащая в b_{a-1}, и ее кратность равна 1. Если $\delta_u=-1$, то $l(\bar{\bar{X}}_u)=p^a-1$, и θ_j $(2\leqslant j\leqslant p^a)$ являются конституэнтами единичной кратности характера модуля $((\tilde{X}_u)_K)_{C_{a-1}}$, лежащими в b_{a-1}. Итак, в силу (1.5) (i), $((\chi_u)_{C_{a-1}}, \theta_1-\theta_j)=\delta_u$ для $j\geqslant 2$. Следовательно, $((\chi_u+\chi_v)_{C_{a-1}}, \theta_1-\theta_2)=2\delta_u$, вопреки (5.6). Это и завершает доказательство (2.15). □

§ 6. Дерево Брауэра

Лемма 6.1. *Для* $1\leqslant i\leqslant\hat{e}$, $1\leqslant u\leqslant\hat{e}$ *имеют место включения* $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_u)\subseteq\mathbf{Q}_p(\hat{\varphi}_i)$. *Если* $|\Lambda|\neq 1$, *то также* $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_0)\subseteq\mathbf{Q}_p(\hat{\varphi}_i)$.

Доказательство. Если характер $\hat{\chi}$ p-рационален, то $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi})$ содержится в поле, порожденном всеми $\hat{\varphi}_i$, и, значит, в $\mathbf{Q}_p(\hat{\varphi}_i)$, по (2.9). Результат следует из (2.17). □

Лемма 6.2. *Пусть* $1\leqslant u$, $v\leqslant\hat{e}$, $u\neq v$. *Предположим, что* $\hat{\chi}_u=\hat{\chi}_v^\sigma$ *для некоторого автоморфизма* σ *поля* $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_u)$. *Тогда* $\delta_u=\delta_v$, *и* $\hat{\chi}_u$, $\hat{\chi}_v$ *не могут иметь общей брауэровой конституэнты.*

Доказательство. Пусть X_v определяется, как в (2.14), а $X_u=X_v^\sigma$. Тогда $l(\bar{\bar{X}}_u)=l(\bar{\bar{X}}_v)$, и потому $\delta_u\equiv\delta_v \pmod{p^a}$. Поскольку $\hat{e}\geqslant 2$, то $p^a>2$ и $\delta_u=\delta_v$. Теперь результат следует из (2.15). □

Лемма 6.3. *Предположим, что* $|\Lambda|\neq 1$. *Тогда* $\hat{\chi}_\lambda\neq\hat{\chi}_u^\sigma$, *каков бы ни был автоморфизм* σ *поля* $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_u)$, *где* $1\leqslant u\leqslant\hat{e}$, $\lambda\in\Lambda$.

Доказательство. Допустим, что $\hat{\chi}_\lambda=\hat{\chi}_u^\sigma$. Поскольку σ переставляет неприводимые характеры Брауэра каждой группы C_k, из (2.17) вытекает, что все высшие числа разложения характера $\hat{\chi}_\lambda$ равны

± 1. Поэтому из (2.17) следует, что $p=2$, $\hat{e}=1$ и $\hat{\chi}_u=\hat{\chi}_1$, $\hat{\chi}_u^{\sigma}=\hat{\chi}_{-1}$. Таким образом, если $x\in D-D_1$, то

$$\hat{\chi}_1(x)=\varepsilon_0\delta_1\,|\,N_0:C_0\,|\,\psi_0(1)=-\hat{\chi}_{-1}(x)\neq 0,$$

поскольку $\delta_0+\delta_1=0$, и, значит, $\hat{\chi}_1(x)^{\sigma}\neq\hat{\chi}_{-1}(x)$. □

Определим *граф Брауэра* блока B следующим образом.

В нем будет по одной вершине для каждого $u=0, \ldots, e$ и по одному ребру для каждого $i=1, \ldots, e$. Вершина, соответствующая номеру u, тогда и только тогда лежит на ребре, соответствующем i, когда $d_{ui}\neq 0$.

Позже мы найдем графы Брауэра блока с циклической дефектной группой из $F[G]$, где F—конечное расширение поля $\mathbf{Q}_p$, которое не обязательно удовлетворяет условию (*) из § 2 (см. § 9).

Лемма 6.4. *Если $K=\hat{K}$, то граф Брауэра является деревом, т. е. не содержит замкнутых путей.*

Доказательство. В силу (2.15), для данного i есть в точности два значения u, при которых $d_{ui}\neq 0$. Таким образом, каждое ребро имеет ровно две вершины. По (I.17.9) граф связен, а так как он имеет e ребер и $e+1$ вершину, то замкнутых путей нет. □

Лемма 6.5. *Пусть T—связное дерево и σ, ρ—автоморфизмы T, не фиксирующие ни одного ребра. Тогда:*

(i) *σ фиксирует не более одной вершины графа T.*

(ii) *Если $\sigma\rho=\rho\sigma$ и P, Q —такие вершины, что $\sigma(P)=P$, $\sigma(Q)=Q$, то $P=Q$.*

Доказательство. (i) Предположим, что σ фиксирует вершины P и Q из T, и $P\neq Q$. Тогда σ фиксирует единственный путь от P до Q и, значит, некоторое ребро, вопреки условию.

(ii) Поскольку $\sigma\rho(P)=\rho\sigma(P)=\rho(P)$, из (i) следует, что $P=\rho(P)$, поэтому $P=Q$, по пункту (i), примененному к ρ. □

Теорема 6.6. *Если $|\hat{\Lambda}|\neq 1$, то $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_u)=\mathbf{Q}_p(\hat{\varphi}_i)$ для $1\leqslant u\leqslant\hat{e}$, $1\leqslant i\leqslant\hat{e}$. Если $|\hat{\Lambda}|=1$, нумерацию можно выбрать так, чтобы $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_u)=\mathbf{Q}_p(\hat{\varphi}_i)$ для $1\leqslant u\leqslant e$, $1\leqslant i\leqslant e$.*

Доказательство. Согласно (2.9), $M=\mathbf{Q}_p(\hat{\varphi}_i)$ не зависит от i. Выберем расширение Галуа $\hat{K}$ поля $\mathbf{Q}_p$ так, что $M\subseteq\hat{K}$ и M—максимальное неразветвленное подполе в $\hat{K}$. Пусть $\tilde{\sigma}$—автоморфизм Фробениуса поля $\hat{K}$, а σ обозначает ограничение $\tilde{\sigma}$ на M. Тогда $\langle\sigma\rangle$—группа Галуа поля M над $\mathbf{Q}_p$. Пусть τ—граф Брауэра блока $\hat{B}$. Согласно (6.4), τ является деревом. Автоморфизм графа τ, определяемый автоморфизмом σ, также пусть обозначается σ. Тогда σ^j не имеет неподвижных ребер, если $\sigma^j\neq 1$.

По (6.5), в τ существует такая вершина P, что для всех $\sigma^j\neq 1$ множество неподвижных вершин пусто или состоит из одного элемента P. Если $|\hat{\Lambda}|\neq 1$, то, в силу (6.3), P соответствует $u=0$. Если же $|\hat{\Lambda}|=1$, выберем обозначение так, что P соответствует $u=0$. Таким образом, $\hat{\chi}_u^{\sigma^j}\neq\hat{\chi}_u$ для $1\leqslant u\leqslant e$. Значит, $\mathbf{Q}_p(\hat{\chi}_u)=M$ для $1\leqslant u\leqslant e$, в силу (6.1). □

Следствие 6.7. *Если в случае* $|\hat{\Lambda}|=1$ *нумерация выбрана надлежащим образом, то для любого* u, $1\leqslant u\leqslant \hat{e}$, *индекс Шура* $m_{\mathbf{Q}_p}(\hat{\chi}_u)$ *равен* 1 (*в случае* $|\hat{\Lambda}|=1$ — *при надлежащей нумерации*), *и для любого* u, $1\leqslant u\leqslant e$, $\chi_u=\sum \hat{\chi}_{uj}$, *где* $\{\hat{\chi}_{uj}\}$ — *множество попарно различных алгебраически сопряженных характеров.*

Доказательство. По (IV.9.3), (2.13) и (6.6), $m_{\mathbf{Q}_p}(\hat{\chi}_u)=1$. Второе утверждение — непосредственное следствие отсюда. □

Следствие 6.8. *Граф Брауэра, соответствующий блоку* B, *является деревом.*

Доказательство. Граф Брауэра связен и имеет $e+1$ вершину. В силу (6.6) и (6.7), он имеет e ребер. □

Граф Брауэра будет также называться *деревом Брауэра.*

§ 7. Доказательства теорем 2.11—2.19

Теорема 2.11 верна согласно (5.2).

Поскольку теорема 2.12 доказана для $K=\hat{K}$, в общем случае она следует из (6.6).

Так как теорема 2.13 доказана для $K=\hat{K}$, из (6.2) и (6.7) следует, что $d_{ui}=0$ или 1 при $u\neq 0$, $1\leqslant i\leqslant e$.

Утверждения 2.14—2.17 относятся только к случаю $K=\hat{K}$ и доказаны в § 5.

Доказательство теоремы 2.18. В силу (6.3) и условия (*) из § 2, $\hat{\chi}_\lambda$ при $\lambda\in\hat{\Lambda}$ не сопряжен ни с каким другим характером из $\hat{B}$. Пусть m_λ обозначает индекс Шура характера $\hat{\chi}_\lambda$ над K, а $\hat{B}=\hat{B}^{(1)}, \ldots, \hat{B}^{(r)}$ — все $\bar{R}[G]$-блоки, сопряженные с $\hat{B}$. Тогда $\chi_\lambda=m_\lambda\sum_{j=1}^{r}\hat{\chi}_\lambda^{(j)}$, $\lambda\in\Lambda$, где $\hat{\chi}_\lambda^{(j)}$ — неприводимый характер из $\hat{B}^{(j)}$. Найдется такой номер i, $1\leqslant i\leqslant e$, что $d_{0i}\neq 0$, тогда $d_{0i}=m_\lambda$, согласно (2.13). Итак, $\|\chi_\lambda\|^2=m_\lambda^2 r=d_{0i}^2 r$. Поскольку d_{0i} не зависит от $\lambda\in\Lambda$, отсюда следует результат. □

Доказательство теоремы 2.19. (i) сразу следует из (6.6) и (6.7).

(ii) Пусть $\Phi_i=\sum_{i=0}^{e}\tilde{d}_{ui}\chi_u$. В силу (I.17.8),

$$\tilde{d}_{ui}=\frac{m}{\|\chi_u\|^2}d_{ui},\quad \text{если } 1\leqslant u\leqslant e,$$

$$\tilde{d}_{0i}=\frac{m}{\|\chi_\lambda\|^2}d_{0i}.$$

По (2.13) и (6.7), $\tilde{d}_{ui}=0$ или 1, $1\leqslant u\leqslant e$, а по (2.18), $\tilde{d}_{0i}=(m/m_0^2 r)d_{0i}$, так что $\tilde{d}_{0i}=0$ или $m/m_0 r$. Поскольку Φ_i равен сумме m алгебраически сопряженных главных неразложимых характеров, то $m=r\hat{e}/e$. Значит, $\tilde{d}_{0i}=0$ или $\hat{e}/em_0$. Результат теперь следует из (2.15). □

§ 8. Доказательства утверждений 2.20—2.25

Лемма 8.1. *Предположим, что для некоторых* i *и* $u\neq v$, $d_{ui}\neq 0$, $d_{vi}\neq 0$, *тогда* $\operatorname{Rad}\bar{U}_i=\bar{X}_{ui}+\bar{X}_{vi}$, *а* $S(\bar{U}_i)=\bar{X}_{ui}\cap\bar{X}_{vi}$.

Доказательство. Поскольку $\Phi_i=a_{ui}\chi_u+a_{ui}\chi_v$, то $l(\bar{U}_i)=l(\bar{X}_{ui})+l(\bar{X}_{vi})$. Из того, что граф Брауэра является деревом, следует, что L_i — единственная общая неприводимая конституэнта $\bar{X}_{ui}$ и $\bar{X}_{vi}$. Но если бы $S(\bar{U}_i)\subsetneq\bar{X}_{ui}\cap\bar{X}_{vi}$, то L_i входил бы в $\bar{X}_{ui}$ и в $\bar{X}_{vi}$ с кратностью, не меньшей 2, откуда $u=v=0$, в силу (2.13), вопреки условию $u\neq v$. Таким образом, $\bar{X}_{ui}\cap\bar{X}_{vi}=S(\bar{U}_i)$, следовательно, $l(\bar{X}_{ui}+\bar{X}_{vi})=l(\bar{U}_i)-1$, и значит, $\operatorname{Rad}\bar{U}_i=\bar{X}_{ui}+\bar{X}_{vi}$. □

Лемма 8.2. *Пусть* $s\neq t$ *таковы, что* $d_{us}\neq 0$, $d_{ut}\neq 0$ *для некоторого* u. *Если* $d_{uj}\neq 0$, *то* $S^2(\bar{U}_j)/S(\bar{U}_j)\not\cong L_s\oplus L_t$, *кроме случая, когда* $j=s$ *или* t, $d_{oj}\neq 0$ *и* $d_{oi}=0$ *для всех* $i\neq j$. (*Последнее условие эквивалентно требованию, что* $\chi_\lambda(x)=\varphi_j(x)$ *для любого* p'-*элемента* x *из* G).

Доказательство. Допустим, что $S^2(\bar{U}_j)/S(\bar{U}_j)\cong L_s\oplus L_t$. Согласно (2.15) и (6.2), найдется такое $v\neq u$, что $d_{vj}\neq 0$. В силу (3.19) и (8.1),

$$L_s\oplus L_t\cong S^2(\bar{X}_{uj})/S(\bar{X}_{uj})\oplus S^2(\bar{X}_{vj})/S(\bar{X}_{vj}).$$

Предположим, что $\bar{X}_{vj}\neq S(\bar{X}_{vj})$, тогда один из модулей, скажем, L_t, является конституэнтой как в $\bar{X}_{vj}$, так и в $\bar{X}_{uj}$, откуда $j=t$, по (2.19). Значит, L_j является конституэнтой в $\bar{X}_{vj}$ кратности по меньшей мере 2, так что $v=0$, по (2.13). Согласно (I.17.12), для любого $\lambda\in\Lambda$ существует чистый подмодуль $X_{\lambda j}$ модуля X_{oj}, такой, что $(X_{\lambda j})_K$ имеет характер χ_λ. Таким образом, $L_j\subseteq\bar{X}_{\lambda j}\subseteq\bar{X}_{oj}$, поэтому $S^2(\bar{X}_{\lambda j})\subseteq S^2(\bar{X}_{oj})$. Поскольку $S^2(\bar{X}_{uj})/S(\bar{X}_{uj})\neq(0)$, то $S^2(\bar{X}_{oj})$ имеет композиционный ряд с факторами L_j, L_j. Тем самым, по (2.13), $S^2(\bar{X}_{\lambda j})\subseteq S(\bar{X}_{oj})$, откуда $\bar{X}_{\lambda j}\cong S(\bar{X}_{\lambda j})\cong L_j$, и второй случай леммы доказан.

Предположим, что $\bar{X}_{vj}=S(\bar{X}_{vj})\cong L_j$, тогда, по (2.19), либо $v\neq 0$, либо $v=0$ и $e=\hat{e}=|D|-1$. В обоих случаях χ_v равен сумме m алгебраически сопряженных характеров $\hat{\chi}_v^\sigma$, которые все неприводимы как характеры Брауэра. Пусть $\hat{L}_j$ обозначает неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль с характером Брауэра $\hat{\chi}_v$, тогда модулю $\hat{L}_j^\sigma$ отвечает $\hat{\chi}_v^\sigma$. Согласно (2.14), $l(\hat{L}_j^\sigma)=l((\hat{L}_j)^\sigma)=1$ или p^a-1. Но так как по (2.9), $\tilde{L}_j\otimes_{\bar{R}}\bar{\bar{R}}\cong\oplus\hat{L}_j^\sigma$, то и $l(\tilde{L}_j)=1$ или p^a-1, вопреки (3.19). □

Доказательство теоремы 2.20. Ввиду (8.1), остается лишь доказать однорядность модуля $\bar{X}_{ui}$. Допустим, что это не так. Пусть n — наименьшее натуральное число, для которого модуль $S^{n+1}(\bar{X}_{ui})/S^n(\bar{X}_{ui})$ приводим. Тогда $\bar{X}_{ui}/S^{n-1}(\bar{X}_{ui})$ обладает таким подмодулем M, что $S(M)$ неприводим, а $M/S(M)$ вполне приводим и не является неприводимым. Пусть $S(M)\cong L_j$. Согласно (2.19), $M/S(M)\cong L_s\oplus L_t$ для некоторых s, t $(s\neq t)$. Поскольку $d_{uj}\neq 0$, $d_{us}\neq 0$, $d_{ut}\neq 0$, то (8.2) противоречит тому, что M изоморфен подмодулю в $\bar{U}_j$. □

Доказательство следствий 2.21 и 2.22. Достаточно доказать (2.22), ибо это переформулировка (2.21). Согласно (2.20), модуль $\bar{U}_i$, $1\leqslant i\leqslant e$, тогда и только тогда одноряден, когда найдется u, для

которого $d_{ui}\neq 0$, и модуль $\bar{X}_{ui}$ неприводим. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дерево Брауэра блока B было звездой с исключительной вершиной в центре, если она существует. Поэтому результат следует из (I.16.14). □

Доказательство теоремы 2.23. Если теорема неверна, то, в силу (2.20), найдутся такие i, i', что $\bar{X}_{ui}$ имеет фактормодуль M с цоколем $S(M)\cong L_j$, причем $S^2(M)/S(M)\cong L_s$, а $\bar{X}_{ui'}$ имеет такой фактормодуль M', что $S(M')\cong L_j$ и $S^2(M')/S(M)\cong L_t$, где $s\neq t$. Тогда $d_{us}\neq 0$ и $d_{uj}\neq 0$, причем, в силу (3.18), $S^2(\bar{U}_j)/S(\bar{U}_j)\cong L_s\oplus L_t$, вопреки (8.2). □

Доказательство теоремы 2.24. Пусть $d_{ui}\neq 0$. Поскольку характер χ_u вещественнозначный, модуль $(X^*_{ui})_K$ имеет характер χ_u, а $\bar{X}^*_{ui}$ неразложим. Тогда, согласно (2.20), $\bar{X}^*_{ui}\cong\bar{X}_{uj}$ для некоторого j, при котором $d_{uj}\neq 0$. Пусть $\varphi^{(1)}$, ..., $\varphi^{(s)}$ — неприводимые конституэнты Брауэра, отвечающие модулю $\bar{X}_{uj}$ и упорядоченные согласно (2.23). Тогда по (2.23) характеры $\varphi^{(s)^*}$, ..., $\varphi^{(1)^*}$ образуют циклическую перестановку характеров $\varphi^{(1)}$, ..., $\varphi^{(s)}$. Если, в частности, $\varphi^{(n)^*}=\varphi^{(1)}$, то $\varphi^{(k+1)}=\varphi^{(n-k)^*}$, так что $\varphi^{(n-t)}=\varphi^{(n-t)^*}$ в том и только в том случае, когда $n-t\equiv t+1 \pmod s$, или $2t\equiv n-1 \pmod s$. Результат следует из того, что это сравнение может иметь не более двух решений. □

Лемма 8.3. *Пусть V, W — два $\bar{R}[G]$-модуля, причем $S(V)\cong L_j$. Если L_j является композиционным фактором модуля W кратности n, то $I_{\bar{R}}(W, V)\leqslant n\, I_{\bar{R}}(L_j, L_j)$.*

Доказательство. Можно считать, что $V\subseteq\bar{U}_j$. Тогда по (I.16.4)

$$I_{\bar{R}}(W, V)\leqslant I_{\bar{R}}(W, \bar{U}_j)=I_{\bar{R}}(\bar{U}_j^*, W^*)=n\, I_{\bar{R}}(L_j^*, L_j^*)=n\, I_{\bar{R}}(L_j, L_j).\ \square$$

Доказательство теоремы 2.25. Если $\hat{R}$-свободный $\hat{R}[G]$-модуль $\hat{X}_{ui}$ обладает характером $\hat{\chi}_u$, то, согласно (2.9) и (2.19), $l(\tilde{\bar{X}})=l(\tilde{\bar{X}}_{ui})$, откуда, в силу (2.14), $l(\tilde{\bar{X}})=l(\tilde{\bar{X}}_{ui})=1$ или p^a-1.

Найдется такой номер j, что L_j изоморфен подмодулю в $\bar{X}$. Мы сначала покажем, что $\bar{X}$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется заданием $l(\tilde{\bar{X}})$ и j.

Если $G=N_{a-1}$, это следует из (2.4), поэтому можно считать, что $G\neq\tilde{G}=N_{a-1}$. Поскольку, в силу (III.5.13), $H^0(G, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(L_j, \bar{X}))\neq(0)$, по (1.5) (iii) $H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{L}_j, \tilde{\bar{X}}))\neq(0)$.

Предположим, что $l(\tilde{\bar{X}})=1$, тогда $\operatorname{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{L}_j, \tilde{\bar{X}})\neq 0$. Следовательно, $\tilde{\bar{X}}\cong T(\tilde{L}_j)$, и, по (2.5), модуль $\tilde{\bar{X}}$, а, значит, и $\bar{X}$, определен однозначно, с точностью до изоморфизма.

Теперь предположим, что $l(\tilde{\bar{X}})=p^a-1$. Если P, P_0 — такие главные неразложимые $\bar{R}[\tilde{G}]$-модули, что точны последовательности

$$0\to Y\to P\to\tilde{\bar{X}}\to 0,$$

$$0\to Y_0\to P_0\to\tilde{L}_j\to 0,$$

то $l(Y)=1$. Согласно (III.5.12), $H^0(\tilde{G}, \langle 1\rangle, \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(Y_0, Y))\neq(0)$, так что $\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(Y_0, Y)\neq(0)$, и поэтому $Y\cong T(Y_0)$. В силу (2.8), $T(Y_0)$ однозначно определяется модулем $S(\tilde{L}_j)$, а тогда, по (2.5), $T(Y_0)\cong Y$ определяется по L_j. Согласно (2.8), $S(\bar{X})$ определяется по Y и, следовательно, по L_j. Итак, $\bar{\bar{X}}$, а, следовательно, и $\bar{X}$, определен однозначно, с точностью до изоморфизма. В частности, $\bar{X}$ одноряден.

Остается показать, что из $\bar{X}\cong\bar{X}_{uj}$ следует $X\cong X_{uj}$.

По определению, кратность $S(\bar{X})$ как конституэнты модуля $\bar{X}$ равна 1, если $u\neq 0$, и $(|D|-1)/e$, если $u=0$, поэтому из (8.3) следует, что

$$I_{\bar{R}}(\bar{X}, \bar{X})\leqslant\left\{\begin{matrix} m, & \text{если } u\neq 0,\\ \dfrac{m(|D|-1)}{e}, & \text{если } u=0\end{matrix}\right\}=\|d_{ui}\chi_u\|^2=\mathrm{rank}_R\,\mathrm{Hom}_{R[G]}(X, X_{uj}).$$

Отсюда следует, что $I_{\bar{R}}(\bar{X}, \bar{X})=\mathrm{rank}_R\,\mathrm{Hom}_{R[G]}(X, X_{uj})$, поэтому найдется гомоморфизм $g\in\mathrm{Hom}_{R[G]}(X, X_{uj})$, индуцирующий изоморфизм $\bar{g}$: $\bar{X}\to\bar{X}_{uj}$. Поскольку модуль $\bar{X}_{uj}$ однорядный, $\mathrm{Rad}\,X_{uj}$ — единственный максимальный подмодуль в X_{uj}. Значит, g — эпиморфизм, и потому $X_{uj}\cong X/Z$ для подходящего подмодуля Z. Поскольку модули X_{uj}, X свободны над R, $\mathrm{rank}_R Z=\mathrm{rank}_R X-\mathrm{rank}_R X_{uj}=0$. Следовательно, $Z=(0)$ и $X_{uj}\cong X$. □

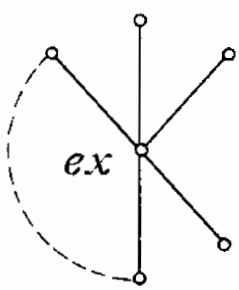
§ 9. Некоторые свойства дерева Брауэра

Пусть K_0 — произвольное конечное расширение поля $\mathbf{Q}_p$ и $K_0\subseteq K$, где поле K удовлетворяет условию (*) из § 2 и является вполне разветвленным расширением поля K_0, так что у K_0 и K одно и то же поле классов вычетов. Пусть B_0 — блок в $K_0[G]$, соответствующий блоку B. Тогда *дерево Брауэра* блока B_0 по определению считается таким же, как дерево Брауэра блока B. Таким образом, любой блок в $K_0[G]$ с циклической дефектной группой обладает деревом Брауэра для всякого поля K_0 конечной степени $[K_0:\mathbf{Q}_p]$. Иногда удобнее связывать с вершиной дерева Брауэра неприводимый $K_0[G]$-модуль, а не характер этого модуля.

Если существует исключительная вершина, ее бывает удобно помечать.

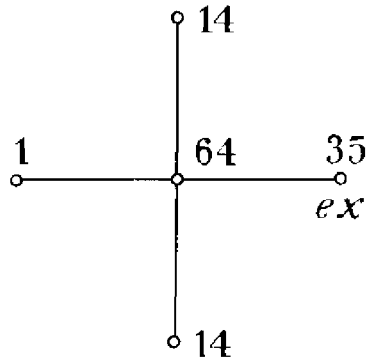
Если χ_u, χ_v соответствуют различным вершинам одного и того же ребра, то, согласно (2.19) и (2.25), $\delta_u+\delta_v=0$.

Из результатов § 2 вытекает, что если $G=N_{a-1}$, то дерево Брауэра является звездой, в центре которой расположена исключительная вершина, если таковая имеется.

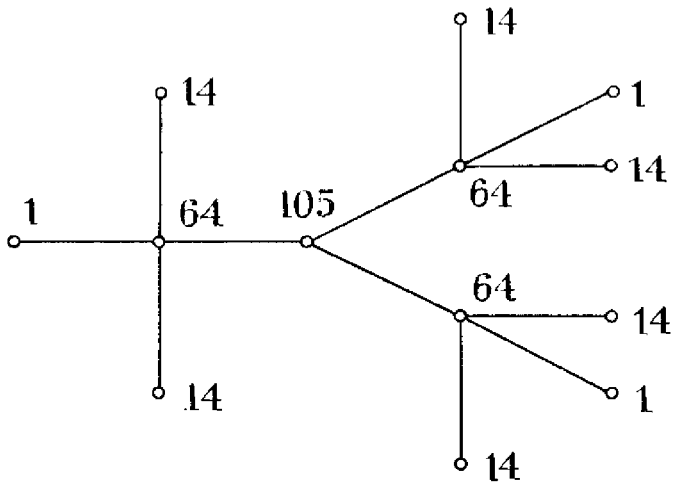


$G=N_{a-1}$

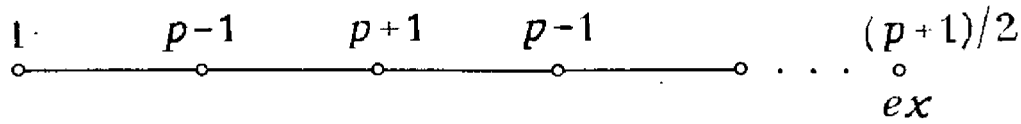
В главе X будет показано, что если группа G является p-разрешимой, то дерево Брауэра для ее блока B с циклической дефектной группой будет звездой. Обратное утверждение неверно. Например, главный 13-блок группы Suz(8) имеет следующее дерево (у вершин указаны степени соответствующих модулей):



Более впечатляющий пример доставляет главный 13-блок группы автоморфизмов группы Suz(8).



Если p — нечетное простое число, то дерево главного p-блока группы $\mathrm{PSL}_2(p)$ имеет $(p-1)/2$ ребер и выглядит следующим образом:



Знак выбран так, что исключительный характер имеет нечетную степень.

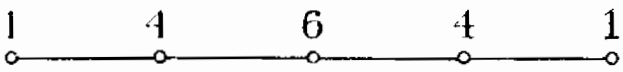
Неизвестно, всякое ли дерево может быть деревом Брауэра подходящего блока какой-либо группы. Ни для какого дерева не установлено, что оно не может встретиться среди деревьев Брауэра, хотя кажется вероятным, что большинство из них не являются деревьями Брауэра. (*Добавление при корректуре.* Используя классификацию конечных простых групп, можно показать, что в самом деле большинство деревьев не встречается в качестве деревьев Брауэра[1].)

[1] См. Фейт [1984*].— *Примеч. пер.*

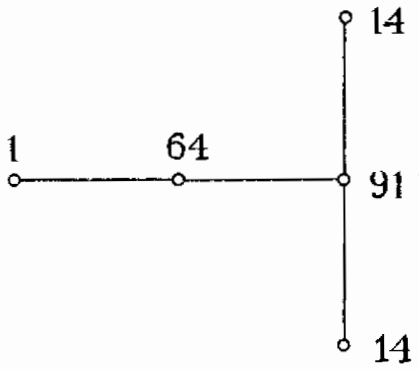
Пусть e — натуральное число, а p — такое простое число, что $p \equiv 1 \pmod{e}$. Если G — группа Фробениуса порядка pe, то дерево Брауэра главного p-блока группы G является звездой с e ребрами. Таким образом, любая звезда может быть деревом Брауэра.

Единственные деревья с одним и двумя ребрами — звездные, так что они могут быть деревьями Брауэра. Главный 7-блок группы $PSL_2(7)$ имеет дерево Брауэра в виде отрезка с тремя ребрами, так что всякое дерево с тремя ребрами является деревом Брауэра. Следующие два примера показывают, что всякое дерево с четырьмя ребрами является деревом Брауэра.

Главный 5-блок группы S_5 имеет следующее дерево Брауэра:



Главный 5-блок группы Suz(8) имеет такое дерево:



Следующие два результата были доказаны Туаном [1944] в случае $a = 1$; см. также Янг [1977].

Теорема 9.1. *Предположим, что G имеет циклическую S_p-подгруппу. Тогда любой $\bar{R}[G]$-модуль из главного p-блока эквивалентен некоторому $F_p[G]$-модулю, где F_p — поле из p элементов.*

Доказательство. Поскольку главный p-блок содержит главный характер, утверждение непосредственно следует из (2.9). □

Теорема 9.2. *Подграф дерева Брауэра блока B, состоящий из всех тех вершин и ребер, которые соответствуют вещественнозначным характерам и характерам Брауэра, либо пуст, либо является отрезком прямой.*

Доказательство. Будем называть объектом вершину или ребро дерева. Допустим, что у дерева есть вещественный объект. Согласно (IV.4.9), множества характеров и характеров Брауэра в B замкнуты относительно комплексного сопряжения. Таким образом, комплексное сопряжение определяет преобразование дерева Брауэра, сохраняющее инцидентность и переводящее ребра в ребра, а вершины в вершины. Два вещественных объекта дерева соединены некоторым путем, поэтому они соединены также комплексно сопряженным путем. Но так как дерево не имеет замкнутых путей, то путь, соединяющий два вещественных объекта, состоит из вещественных объектов. Следовательно, множество всех вещественных объектов дерева Брауэра образует связный граф. В силу (2.24), этот граф является линейным. □

Подграф дерева Брауэра, состоящий из всех вещественных ребер и вершин, называется вещественным стволом этого дерева.

Два следующих результата для случая $K=\hat{K}$ принадлежат Ротшильду [1967]. Эти методы он использовал для доказательства (2.10). Для формулировки этих результатов понадобятся следующие обозначения:

τ — дерево Брауэра, соответствующее блоку B. Ребро, соответствующее модулю L_i, обозначается E_i, а вершина, соответствующая характеру χ_u, обозначается P_u.

Для любого i, $1\leqslant i\leqslant e$, граф $\tau-\{E_i\}$ является дизъюнктным объединением двух деревьев, которые обозначаются $\tau_0(E_i)$ и $\tau_1(E_i)$, причем $\tau_0(E_i)$ содержит вершину P_0.

$n(E_i)$ равно числу вершин в $\tau_1(E_i)$, т. е. числу вершин в τ, которые отделяются от P_0 в результате удаления ребра E_i.

$d(P_u)$ равно числу ребер единственного пути, соединяющего P_u с P_0.

Лемма 9.3. (i) *Для каждого* u, $0\leqslant u\leqslant e$, $\delta_u=(-1)^{d(P_u)}\delta_0$.

(ii) *Пусть* $P=P_u$ *— вершина ребра* E_j, $1\leqslant j\leqslant e$, *принадлежащая* $\tau_1(E_j)$. *Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(I) $\delta_0(-1)^{d(P)}=\delta_u=1$; $n(E_j)=l(\tilde{L}_j)$;

(II) $\delta_0(-1)^{d(P)}=\delta_u=-1$; $n(E_j)=p^a-l(\tilde{L}_j)$.

Доказательство. (i) Сразу следует из (2.19) и (2.25).

(ii) Индукция по $n(E_j)$. Если $n(E_j)=1$, то $\bar{X}_{uj}\cong L_j$, поскольку $P=P_u$. Таким образом, $l(\tilde{L}_j)\equiv\delta_u \pmod{p^a}$, и результат следует из (i). Теперь предположим, что $n(E_j)\geqslant 1$.

Пусть $E_1, \ldots, E_s$ — все ребра из $\tau_1(E_j)$, содержащие вершину P, тогда $E_1, \ldots, E_s, E_j$ — все ребра из τ, содержащие вершину P. При этом $n(E_j)=1+\sum_{i=1}^{s} n(E_i)$. В силу (1.5) (i),

$$\delta_u\equiv l(\tilde{L}_j)+\sum_{i=1}^{s} l(\tilde{L}_i) \pmod{p^a}.$$

По предположению индукции и утверждению (i),

$$\delta_u=l(\tilde{L}_j)-\delta_u\sum_{i=1}^{s} n(E_i)\equiv l(\tilde{L}_j)-\delta_u\{n(E_j)-1\} \pmod{p^a},$$

следовательно,

$$l(\tilde{L}_j)-\delta_u n(E_j)\equiv 0 \pmod{p^a}.$$

Поскольку $n(E_j)\leqslant e$, а в силу (2.7) либо $l(\tilde{L}_j)\leqslant e$, либо $p^a-e\leqslant l(\tilde{L}_j)\leqslant p^a$, из последнего сравнения вытекает требуемое утверждение. □

Лемма 9.4. *Предположим, что* $|D|-1\neq e$. *Выберем номер* j, *для которого* $d_{0j}\neq 0$; *пусть* $L_1, \ldots, L_s$ *— все (с точностью до изоморфизма) неприводимые* $\bar{R}[G]$*-модули, являющиеся конституэнтами модуля* $\bar{X}_{0j}$. *Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) $\delta_0=-1$; $l(\tilde{L}_i)=n(E_i)\leqslant e$, $1\leqslant i\leqslant s$, $\sum_{i=1}^{s} l(\tilde{L}_i)=e$;

(ii) $\delta_0=1$; $p^a-l(\tilde{L}_i)=n(E_i)\leqslant e$, $1\leqslant i\leqslant s$, $\sum_{i=1}^{s}\{p^a-l(\tilde{L}_i)\}=e$.

Доказательство. Все ребра дерева τ, на которых лежит вершина P_0, суть $E_1, \ldots, E_s$. Пусть $P_i\neq P_0$ — вторая вершина ребра E_i, $1\leqslant i\leqslant s$, тогда $d(P_i)=1$ и $(-1)^{d(P_i)}=-1$, $1\leqslant i\leqslant s$. Поскольку $\sum_{i=1}^{s} n(E_i)=e$, результат следует из (9.3) (ii). □

§ 10. Некоторые следствия

Лемма 10.1. *Предположим, что G имеет циклическую S_p-подгруппу $\langle x\rangle$, $|\langle x\rangle|=p^n$. Пусть V — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B и d — степень минимального полинома элемента x, действующего на V. Тогда $p^{n-a}l(\tilde{V})\leqslant d$. Если, кроме того, $D\lhd G$, то $p^{n-a}l(\tilde{V})=d$.*

Доказательство. Ввиду (1.5) (i), можно считать, что $G=\tilde{G}$ и $V=\tilde{V}$; ввиду (3.4), можно считать, что $K=\hat{K}$, а ввиду (3.5) — что $G=C_{a-1}$. Тогда $N_G(\langle x\rangle)=C_G(\langle x\rangle)$, и по теореме Бернсайда о перемещении имеем $G=\langle x\rangle H$, где $H=O_{p'}(G)$. Заменяя, если необходимо, x сопряженным элементом, можно также предполагать, что $G=C_{a-1}$.

В силу (III.3.8), любой неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль U из B имеет вид $U=U_0^G$ для некоторого $\bar{R}[DH]$-модуля U_0 из блока с дефектной группой D. Значит, $V=V_0^G$, где V_0 — некоторый $\bar{R}[DH]$-модуль из блока с дефектной группой D. В силу разложения Макки (II.2.10), $(V_0^G)_{\langle x\rangle}\cong\{(V_0)_D\}^{\langle x\rangle}$. Таким образом, минимальный многочлен элемента y в V_0 равен $(Y-1)^{d_0}$, где $d=p^{n-a}d_0$. Поэтому можно считать, что $V=V_0$ и $x=y$.

Поскольку H является p'-группой, то $V_H=\oplus M_i$, где каждый модуль M_i неприводим. Выберем из них такой $M=M_i$, что $M\not\subseteq(\operatorname{Rad}V)_H$, тогда $\bar{R}[G]$-модуль $\sum_{i=0}^{d-1}M(y-1)^i$ не содержится в $\operatorname{Rad}V$. Согласно (2.4), модуль V одноряден, так что $V=\sum_{i=0}^{d-1}M(y-1)^i$. По теореме (2.1), блок B содержит единственный (с точностью до изоморфизма) неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль W. Поскольку M/W_H, то $\dim_{\bar{R}}M\leqslant\dim_{\bar{R}}W$, откуда

$$l(V)\dim_{\bar{R}}W=\dim_{\bar{R}}V\leqslant d\dim_{\bar{R}}M\leqslant d\dim_{\bar{R}}W,$$

значит, $l(V)\leqslant d$.

Предположим, что $D\lhd G$, тогда, в силу (III.3.7), $W_H\cong M$ и

$$l(V)\dim_{\bar{R}}W=\dim_{\bar{R}}V=d\dim_{\bar{R}}W.$$

Следовательно, в этом случае $l(V)=d$. □

Следующий результат — это знаменитая теорема В Холла и Хигмана [1956]. Здесь дается доказательство в духе Томпсона [1967b]. Альтернативное доказательство ключевого частного случая см. Фейт [1967a].

Как видно из доказательства, натуральное число a, возникающее в теореме 10.2, связано с дефектом некоторого p-блока факторгруппы подходящей подгруппы из G. Более точная формулировка содержится у Кнаппа и Шмидта [1982].

Теорема 10.2. *Предположим, что G является p-разрешимой и $O_p(G)=\langle 1\rangle$. Пусть V — точный $\bar{R}[G]$-модуль, x — элемент порядка p^n из G и d — степень минимального многочлена в действии x на V. Обозначим $G_0=\langle x\rangle O_{p'}(G)$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:*

(i) $d=p^n$.

(ii) *Найдутся простое число q и натуральное число a, такие, что G_0 имеет неабелеву S_q-подгруппу, p^a-1 равно степени q и $p^a-1\,|\,|G_0|$. При этом $p^{n-a}(p^a-1)\leqslant d<p^n$.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Пусть G — контрпример минимального порядка, и $H=O_p(G)$. Так как $C_G(H)\lhd G$ и $O_{p'}(C_G(H))\subseteq H$, то $C_G(H)\subseteq H$. Тогда минимальность G влечет, что $G=G_0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $K=\hat{K}$.

Существует такое простое число q, что $x^{p^{n-1}}$ не централизует никакую S_q-подгруппу из H. По лемме Фраттини, $\langle x\rangle$ нормализует некоторую S_q-подгруппу Q из H. Тогда из минимальности G следует, что $H=Q$ является q-группой.

Пусть $V=\oplus V_i$, где каждый подмодуль V_i неразложим. Обозначим через A_i ядро ограничения $(V_i)_H$: поскольку V точен, то $\bigcap A_i=\langle 1\rangle$. Значит, $O_p(G/A_j)=\langle 1\rangle$ для некоторого j, и можно считать, что $V=V_j$ неразложим.

Пусть B — блок, содержащий V, его дефект равен a.

Если W — неприводимая конституэнта модуля V и A — ядро W_H, то B накрывает главный блок группы A. Поскольку A является p'-группой, то, в силу (V.2.3), A лежит в ядре V. Таким образом, $A=\langle 1\rangle$, и W точен, ибо $O_p(G)=\langle 1\rangle$. Поэтому можно считать, что $V=W$ неприводим.

Предположим, что существует такой неразложимый $\bar{R}[\langle x^p\rangle H]$-модуль V_1, что $V \mid V_1^G$, тогда, по (III.3.8), $V\cong V_1^G$. Пусть d_1 — степень минимального многочлена элемента x^p в V_1. Тогда $d=pd_1$, и результат следует из предположения индукции. Поэтому можно считать, что $V\not\mid V_1^G$ для любого $\bar{R}[\langle x^p\rangle H]$-модуля V_1. Таким образом, в частности, $\langle x\rangle$ является вертексом для V и $D=\langle x\rangle$ — дефектная группа B, так что $n=a$.

Индекс инерции блока B равен 1, следовательно, дерево Брауэра для B имеет две вершины и одно ребро. Это значит, что существует R-свободный $R[G]$-модуль X, такой, что $\bar{X}\cong V$ и X_K абсолютно неприводим. Следовательно, $\dim_{\bar{R}} V \mid |G|$. Кроме того, $l(\tilde{V})=1$ или p^a-1, согласно (2.14).

Очевидно, $d\leqslant p^n$ и даже $d<p^n$, так как G — контрпример. Тогда $V_{\tilde{G}}$ не имеет $\bar{R}[D]$-проективных компонент, и, по (1.5) (i), $V_{\tilde{G}}\cong\tilde{V}$. Если $l(\tilde{V})=1$, то $\tilde{V}$ неприводим, и значит, $x^{p^{n-1}}$ содержится в ядре V, что противоречит точности V. Следовательно, $l(\tilde{V})=p^n-1$. Ввиду (2.1), $\dim_{\bar{R}} V=(p^n-1)\dim_{\bar{R}} W$, где W — единственный неприводимый $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль из $\tilde{B}$. Следовательно, $p^n-1 \mid |G|$, так что p^n-1 равно степени q. Согласно (10.1), $d\geqslant l(\tilde{V})=p^n-1$. Это завершает доказательство. □

Следующий результат включает теорему Пикока [1979].

Теорема 10.3. *Предположим, что G имеет циклическую S_p-подгруппу $\langle x\rangle$, $|\langle x\rangle|=p^n$. Пусть V — точный неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль из B и степень минимального многочлена элемента x в V равна d. Допустим, что $|D|\geqslant p^2$. Тогда*

$$\dim_{\bar{R}} V\geqslant d\geqslant p^{n-a}(p^a-e)\geqslant p^{n-a}(p^a-p+1).$$

Доказательство. Первое неравенство очевидно, последнее вытекает из (1.3) (i). Предположим, что промежуточное неравенство

неверно. Тогда степень минимального многочлена элемента y в V строго меньше p^a, и, значит, $V_{\tilde{G}}=\tilde{V}$, в силу (1.5) (i). Согласно (10.1), $l(\tilde{V})<p^a-e$, и следовательно, $l(\tilde{V})\leqslant e$ ввиду (2.7).

По (2.4), любой неразложимый модуль в $\tilde{B}$ является однорядным. Таким образом, существуют неразложимый проективный $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль P и точная последовательность $P\to\tilde{V}\to 0$. Положим $z=y^{p^{a-1}}$, тогда $\langle z\rangle=D_{a-1}$, и $P_{\langle z\rangle}$ кратно $\langle z\rangle_{\langle z\rangle}$. Таким образом, $\dim_{\bar{R}}(P(1-z)^i/P(1-z)^{i+1})$ не зависит от i, $0\leqslant i\leqslant p-1$. Каждый модуль $P(1-z)^i$ является $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулем, а поскольку все неприводимые модули в $\tilde{B}$ имеют одинаковые размерности, из (2.6) следует, что $l(P/P(1-z))=p^{a-1}$. Поскольку $\tilde{V}=V_G$ является точным $\bar{R}[\tilde{G}]$-модулем, то $\tilde{V}(1-z)\neq 0$. Значит, $P/P(1-z)\cong\tilde{V}/\tilde{V}(1-z)$, поскольку P одноряден, следовательно,

$$l(\tilde{V})\geqslant p^{a-1}\geqslant p>e,$$

ибо по предположению $a\geqslant 2$. Это противоречит неравенству, полученному в предыдущем абзаце. □

Следующий результат усиливает теорему Линдси [1974].

Следствие 10.4. *Предположим, что G имеет циклическую S_p-подгруппу $\langle x\rangle$ и $|\langle x\rangle|=p^n\geqslant p^2$. Допустим, что $\langle x\rangle\cap\langle x\rangle^z=\langle 1\rangle$ для любого $z\in G-N_G(\langle x\rangle)$. Если V — точный неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, то $\dim_{\bar{R}}V\geqslant p^n-(p-1)$.*

Доказательство. Если V проективен, результат очевиден. Если V не является проективным, то в силу (III.8.14) V принадлежит блоку с дефектной группой $\langle x\rangle$, и результат следует из (10.3). □

Следующий результат — обобщение леммы (5.6), которая обобщала результат Томпсона [1967b]. В случае, когда $|D|=p$, она впервые появилась у Фейта [1967b].

Теорема 10.5. *Предположим, что $K=\hat{K}$. Пусть Y — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль из B, а η — характер модуля Y_K. Допустим, что $\bar{Y}=M_1\oplus\ldots\oplus M_n$, где каждый M_i — ненулевой неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль. Пусть $\theta_1,\ldots,\theta_{p^a}$ — все неприводимые характеры группы C_{a-1}, принадлежащие b_{a-1}, тогда для всех s, t*

$$|(\eta_{C_{a-1}},\theta_s)-(\eta_{C_{a-1}},\theta_t)|\leqslant n.$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, что Y неразложим. Если $\bar{Y}$ проективен, то $(\eta_{C_{a-1}},\theta_s)$ не зависит от s, и теорема доказана. Поэтому, ввиду (I.17.11), можно считать, что ни один из M_i не является проективным $\bar{R}[G]$-модулем. Согласно (1.5) (i), $Y_{\tilde{G}}=\tilde{Y}\oplus A_1\oplus A_2$, где модуль A_1 проективен, а A_2 является суммой модулей из блоков, отличных от $\tilde{B}$. Если η_i — характер модуля $(A_i)_K$, $i=1, 2$, то $((\eta_2)_{C_{a-1}},\theta_s)=0$ для всех s, а $((\eta_1)_{C_{a-1}},\theta_1)$ не зависит от s. В силу (III.5.8) и (1.4), $\bar{\tilde{Y}}\cong\tilde{\bar{Y}}\cong\tilde{M}_1\oplus\ldots\oplus\tilde{M}_n$, где каждый $\tilde{M}_i$ — ненулевой неразложимый модуль. Следовательно, можно предполагать, что $G=\tilde{G}$ и $Y=\tilde{Y}$.

В силу (III.4.6), существует такой $R[T(b_{a-1})]$-модуль Y_0, что $Y_0^G\cong Y$, $(Y_0^G)_{T(b_{a-1})}\cong Y_0\oplus A$, где A есть сумма модулей из блоков,

которые не накрывают b_{a-1}, а $\bar{Y}_0$ — сумма n неразложимых модулей. Таким образом, можно считать, что $G=T(b_{a-1})$. Согласно (1.3), любой неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль остается неприводимым при ограничении на C_{a-1}. Итак, по (3.5) (ii), каждый из $(M_i)_{C_{a-1}}$ неразложим, так что можно считать, что $G=C_{a-1}$.

Достаточно показать, что $(\eta, \theta_s)\leqslant n$ для всех s. Допустим, что это не так, тогда найдется t, при котором $(\eta, \theta)=n_1>n$, $\theta=\theta_t$. Пусть M — некоторый $K[G]$-модуль с характером θ и $Y_1=Y\cap n_1M$. Тогда Y_1 является чистым подмодулем в Y, и $S(\bar{Y}_1)\subseteq S(\bar{Y})$. Следовательно, $l(S(\bar{Y}_1))\leqslant n$, так как любой неразложимый $\bar{R}[C_{a-1}]$-модуль в b_{a-1} является однорядным. Значит, $\bar{Y}_1$ равен сумме не более чем n ненулевых неразложимых модулей. Таким образом, можно предполагать, что $Y=Y_1$, поэтому Y_K имеет характер $n_1\theta$, следовательно,

$$\operatorname{rank}_R \operatorname{Hom}_{R[G]}(Y,\ Y)=I_K(Y_K,\ Y_K)=n_1^2.$$

Поскольку модуль $\operatorname{Hom}_{R[G]}(Y,\ Y)=\operatorname{Inv}_G\operatorname{Hom}_R(Y,\ Y)$, он является чистым подмодулем в $\operatorname{Hom}_R(Y,\ Y)$, откуда

$$I_R(\bar{Y},\ \bar{Y})=\dim_R \operatorname{Hom}_{R[G]}(\bar{Y},\ \bar{Y})\geqslant I_K(Y_K,\ Y_K)=n_1^2.$$

Пусть W — единственный неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль в B, тогда $I_R(M_i,\ M_j)=\min\{l(M_i),\ l(M_j)\}$, поскольку любой $\bar{R}[G]$-модуль в B является однорядным. Характеры θ_s, $1\leqslant s\leqslant p^a$, неприводимы как характеры Брауэра, следовательно, $l(\bar{Y})=n_1$. Итак, для всех i, $1\leqslant i\leqslant n$, имеем

$$I_{\bar{R}}(M_i,\ \bar{Y})=\sum_{j=1}^{n} I_R(M_i,\ M_j)\leqslant \sum_{j=1}^{n} l(M_j)=l(\bar{Y})=n_1,$$

и потому

$$n_1^2\leqslant I_{\bar{R}}(\bar{Y},\ \bar{Y})=\sum_{j=1}^{n} I_R(M_i,\ \bar{Y})\leqslant nn_1,$$

откуда $n_1\leqslant n$. Это противоречие доказывает теорему. □

Следующий результат в случае $K=\hat{K}$ принадлежит Грину [1974а]. Он обобщает более ранний результат Алперина и Януша [1973].

Теорема 10.6. *Пусть $d_{ui}\neq 0$ для некоторых u, i, $0\leqslant u\leqslant e$, $1\leqslant i\leqslant e$. Тогда имеется бесконечная точная последовательность*

$$\to P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \to \ldots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} X_{ui} \to 0, \tag{10.7}$$

где каждый P_s — главный неразложимый $R[G]$-модуль из B, и выполнены следующие условия ($[V]$ обозначает класс $R[G]$-модулей, изоморфных V):

(i) $P_s\cong P_{s+2e}$ *и* $f_s(P_s)\cong f_{s+2e}(P_{s+2e})$ *для любого* s;

(ii) $\{[f_s(P_s)] \mid 1\leqslant s\leqslant 2e\}=\{X_{vj} \mid 1\leqslant j\leqslant e,\ 0\leqslant v\leqslant e,\ d_{vj}\neq 0\}$;

(iii) $\{[P_{2s-1}] \mid 1\leqslant s\leqslant e\}=\{[P_{2s}] \mid 1\leqslant s\leqslant e\}=\{[U_j] \mid 1\leqslant j\leqslant e\}$.

Доказательство. С точностью до изоморфизма, существуют $2e$ модулей X_{vj} с $d_{vj}\neq 0$, так как по (2.19) для каждого j имеются ровно 2 значения v, при которых $d_{vj}\neq 0$.

Пусть $\Phi_j=a_{vj}\chi_v+a_{wj}\chi_w$, $X=U_j/X_{vj}$, тогда модуль $T(\bar{X})\cong L_j$ неприводим, а $\bar{X}$ неразложим. Так как модуль X_K имеет характер $a_{wj}\chi_w$, то из (2.25) следует, что $X\cong X_{wj'}$ для некоторого j', при котором $d_{wj'}\neq 0$. Отсюда вытекает, что если $T(\bar{X}_{ui})\cong L_j$, то $\Phi_j=a_{uj}\chi_u+a_{vj}\chi_v$ для некоторого v. Значит, следующая последовательность точна:

$$0\to X_{vj}\to U_j\to X_{uj}\to 0. \tag{10.8}$$

Следовательно, точная последовательность (10.7) существует. Кроме того, для любого s найдутся такие v, j, что $d_{vj}\neq 0$ и $f_s(P_s)\cong X_{vj}$. Поскольку существуют ровно $2e$ попарно неизоморфных модулей X_{vj} с $d_{vj}\neq 0$, достаточно доказать теорему для любого из них. Для удобства можно полагать, что $l(\tilde{\bar{X}}_{ui})=1$, ввиду (2.25). Путем надлежащей перенумерации можно добиться, чтобы $\tilde{\bar{X}}_{ui}\cong W$, где модуль W определен в теореме 2.4.

Ввиду (I.15.6) и (1.5) (ii), точность последовательности (10.8) влечет существование в $\tilde{B}$ такого проективного модуля $\tilde{U}$, что точной является последовательность

$$0\to\tilde{\bar{X}}_{vj}\to\tilde{U}\to\tilde{\bar{X}}_{uj}\to 0.$$

Согласно (2.14), $l(\tilde{\bar{X}}_{ui})+l(\tilde{\bar{X}}_{vj})<2p^a$, и, следовательно, $\tilde{U}$ является главным неразложимым модулем. Таким образом, в $\tilde{B}$ существуют главные неразложимые модули $\tilde{P}_s$, образующие точную последовательность

$$\to\tilde{P}_n\xrightarrow{\tilde{f}_n}\ldots\to\tilde{P}_1\xrightarrow{\tilde{f}_1}\tilde{\bar{X}}_{ui}\to 0,$$

причем $\tilde{f}_s(\tilde{P}_s)\cong\widetilde{f_s(P_s)}$ для всех s.

В силу (1.4) и (III.5.8), $\tilde{\bar{X}}_{vj}\cong\tilde{\bar{X}}_{vj}$ для всех тех v, j, при которых $d_{vj}\neq 0$, поэтому последовательность

$$\to\tilde{\bar{P}}_n\xrightarrow{\tilde{\bar{f}}_n}\ldots\to\tilde{\bar{P}}_1\xrightarrow{\tilde{\bar{f}}_1}\tilde{\bar{X}}_{ui}\cong W\to 0,$$

где $\tilde{\bar{f}}_s(\tilde{\bar{P}}_s)\cong\widetilde{\bar{f}_s(\tilde{P}_s)}$, точна.

Установим нумерацию таким образом, чтобы $W_i=W\alpha^{1-i}$ $(0\leqslant i\leqslant e-1)$. Пусть $V(i,\ l)$ обозначает такой $\bar{R}[\tilde{G}]$-модуль из $\tilde{B}$, что $S(V(i,\ l))\cong W_i$ и $l(V(i,\ l))=l$. Из (2.8) для всех s можно извлечь следующие изоморфизмы:

$$\tilde{\bar{f}}_{2s}(\tilde{\bar{P}}_{2s})\cong V(s,\ p^a-1),\ \tilde{\bar{f}}_{2s-1}(\tilde{\bar{P}}_{2s-1})\cong V(s,\ 1). \tag{10.9}$$

Таким образом, $\{\tilde{\bar{f}}_s(\tilde{P}_s)\mid 1\leqslant s\leqslant 2e\}$ — множество из $2e$ попарно неизоморфных модулей, так же как $\{\tilde{f}_s(\tilde{P}_s)\mid 1\leqslant s\leqslant 2e\}$ и $\{f_s(P_s)\mid 1\leqslant s\leqslant 2e\}$. Итак, любой модуль X_{vj} с $d_{vj}\neq 0$ имеет вид $f_s(P_s)$ для некоторого s, $1\leqslant s\leqslant 2e$. Отсюда следуют (i) и (ii). Кроме того, для любого j существуют ровно два значения s, $1\leqslant s\leqslant 2e$, при которых $S(f_s(P_s))\cong L_j$.

Теперь доказательство (iii) будет закончено, если показать, что для любого $1 \leqslant j \leqslant e$ существует единственное значение s, $1 \leqslant s \leqslant e$, при котором $L_j \cong S(f_{2s-1}(P_{2s-1}))$.

Согласно (2.5) и (10.9), существует единственное значение s, $1 \leqslant s \leqslant e$, такое, что $\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{L}_j, \tilde{f}_{2s-1}(\tilde{P}_{2s-1})) \neq (0)$. Тогда лемма 3.10, примененная к $\tilde{G}$, лемма (III.5.13), примененная к G, и (1.5) (iii) показывают, что существует единственное значение s, для которого $\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(L_j, \overline{f_{2s-1}(P_{2s-1})}) \neq (0)$. □

Допустим, что $d_{ui} \neq 0$ для некоторых u, i. Грин [1974a] следующим образом определил функцию на $\{1, \ldots, e\}$. Пусть P_s — модули из (10.6). Если $P_{2s} \cong U_j$, то $P_{2s+1} \cong U_{\sigma(j)}$. Согласно (10.6), σ является перестановкой на множестве $\{1, \ldots, e\}$, причем при подходящим образом выбранной нумерации имеется точная последовательность

$$\to U_e \to U_{\sigma(e-1)} \to U_{e-1} \to \ldots \to U_{\sigma(1)} \to U_1 \to U_{\sigma(e)} \to X_{ui} \to 0.$$

Очевидно, что для всех s

$$l(\overbrace{f_s(P_s)}) + l(\overbrace{f_{s+1}(P_{s+1})}) = p^a.$$

Перестановка $\sigma = \sigma_{ui}$ зависит от выбора u и i, однако из определения σ_{ui} следует, что если $d_{vj} \neq 0$ и $\delta_u = \delta_v$, то $\sigma_{vj} = \sigma_{ui}$. Если же $\delta_u \neq \delta_v$, то $\sigma_{ui}\sigma_{vj} = (1, 2, \ldots, e)$.

Следствие 10.10. *Предположим, что $d_{ui} \neq 0$ для некоторых u, i и $\sigma = \sigma_{ui}$. Допустим, что $d_{vj} \neq 0$ для таких v, j, что $\delta_u = \delta_v$. Тогда $T(\bar{X}_{vj}) \cong L_{\sigma(j)}$.*

Доказательство. Очевидно, $\delta_u = \delta_v$ тогда и только тогда, когда $X_{vJ} = f_{2s+1}(P_{2s+1})$ для некоторого s. По определению,

$$S(\overline{f_{2s+1}(P_{2s+1})}) \cong S(\bar{P}_{2s}) \text{ и } T(\overline{f_{2s+1}(P_{2s+1})}) \cong T(\overline{P_{2s+1}}) \cong S(\overline{P_{2s+1}}).$$

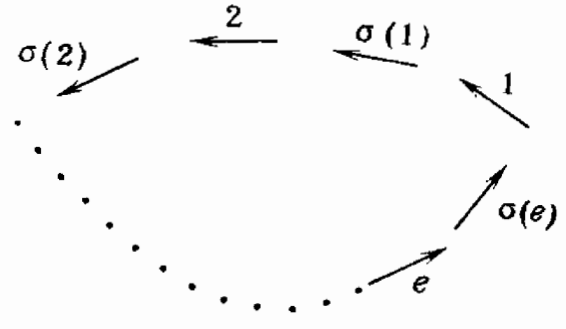
Таким образом, если $P_{2s} \cong U_j$, то $S(\overline{f_{2s+1}(P_{2s+1})}) \cong L_j$ и $T(f_{2s+1}(P_{2s+1})) \cong L_{\sigma(j)}$. □

В терминологии Грина, упорядоченная последовательность

$$U_{\sigma(1)}, U_2, U_{\sigma(2)}, \ldots, U_e, U_{\sigma(e)}, U_1$$

описывает циклический «обход» дерева Брауэра за $2e$ «шагов». При этом в каждую вершину дерева Брауэра попадают по меньшей мере однажды, а каждое ребро проходят в точности дважды.

Грин указывает также, что σ следующим образом определяет дерево Брауэра как абстрактное дерево. Рассмотрим ориентированный циклический граф, показанный на схеме.



Дерево Брауэра можно получить из него, отождествив каждую пару ребер, несущих одинаковые метки, чтобы скомпенсировать ориентацию.

Этот процесс можно провести для всякой перестановки, но при этом не обязательно получится дерево. Например, тождественная перестановка всегда порождает звезду. Если $e=3$ и σ — транспозиция, то получается прямолинейный сегмент, но если $e=3$, а $\sigma=(1, 3, 2)$, то получается треугольник, который не является деревом.

Лемма 10.11. *Пусть $B=\hat{B}$ — некоторый $\hat{R}[G]$-блок с циклической дефектной группой D, $|D|=p^d$. Пусть C — матрица Картана блока B, Q — квадратичная форма с матрицей p^dC^{-1}, и q — минимальное значение формы Q на множестве всех ненулевых векторов с целочисленными координатами. Тогда $q=e$.*

Доказательство. Согласно (IV.3.11) и (2.12), $\{\chi_u \mid 1\leqslant u\leqslant e\}$ является базисным множеством для B. Пусть D^0, C^0 обозначают соответственно матрицу разложения и матрицу Картана относительно данного базисного множества. Если Q^0 — квадратичная форма с матрицей $p^d(C^0)^{-1}$, то Q^0 целочисленно эквивалентна Q, и q равно минимальному значению формы Q^0 на множестве всех ненулевых векторов с целочисленными координатами. В силу (2.12),

$$D^0=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \delta & \dots & \delta \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta & \dots & \delta \end{pmatrix}\begin{matrix}\}e\\ \\ \\ \}t\end{matrix}$$

(здесь $t=(p^d-1)/e$). Пусть J обозначает матрицу, все элементы которой равны 1, тогда

$$C^0=(D^0)'D^0=I+tJ,$$

откуда $p^d(C^0)^{-1}=p^dI-tJ$, и если $\alpha=(\alpha_i)$, то

$$Q(\alpha, \alpha)=\sum_{i=1}^{e}\alpha_i^2+t\sum_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2. \tag{10.12}$$

Обозначим через N_0 количество $\alpha_i=0$, а $N_1=e-N_0$. Второй член в формуле (10.12) не меньше N_0N_1, а первый не меньше N_1, следовательно, для $\alpha\neq 0$ имеем $N_1\neq 0$, и потому

$$Q(\alpha, \alpha)\geqslant N_1+N_0N_1\geqslant N_1+N_0=e.$$

Итак, $e\leqslant q$. С другой стороны, если $\alpha_i=1$ для всех i, то $Q(\alpha, \alpha)=e$, и значит, $q=e$. □

Теорема 10.13. *Пусть B — блок алгебры $\hat{R}[G]$, имеющий абелеву дефектную группу D порядка p^d. Пусть r обозначает ранг D, а $k(B)$ — число неприводимых характеров в B. Если $r=2$, то $k(B)<p^d$, а если $r=3$, то $k(B)\leqslant p^{5d/3}$.*

Доказательство. Пусть y — элемент максимального порядка p^c из D. Согласно (V.9.2), существует главная подсекция $S(y, \tilde{B})$, ассоциированная с B. В силу (IV.4.5), существует единственный блок $\tilde{B}^0$ группы $C_G(y)/\langle y\rangle$, содержащийся в B, причем $D/\langle y\rangle$ является дефектной группой блока $\tilde{B}^0$. Ввиду (III.2.13), y содержится в ядре любого неприводимого характера Брауэра из $\tilde{B}$. Значит, $\tilde{B}$ и $\tilde{B}^0$ имеют по $l(\tilde{B})$ неприводимых характеров Брауэра. Если $q(\tilde{B})$ и $q(\tilde{B}^0)$ определены как в (10.11), то $q(\tilde{B})=q(\tilde{B}^0)$ по (IV.4.27).

Если $r=2$, то $\tilde{B}^0$ имеет циклическую дефектную группу и потому $q(\tilde{B})=l(\tilde{B})$ в силу (10.11). Таким образом, $k(B)\leqslant p^d$ по (V.9.17) (i).

Если $r=3$, то $l(\tilde{B}^0)\leqslant k(\tilde{B}^0)<p^{d-c}$, ввиду доказанного в предыдущем абзаце, ибо $\tilde{B}^0$ имеет абелеву дефектную группу ранга 2. Значит, по (V.9.17) (i), $k(B)\leqslant p^{2d-c}$. Отсюда следует утверждение, так как $c\geqslant d/3$. □

Следующий результат впервые был анонсирован Брауэром и Фейтом [1959].

Теорема 10.14. *Пусть B — блок дефекта d алгебры $\hat{R}[G]$, $k=k(B)$ обозначает число неприводимых характеров в B. Тогда $k\leqslant p^d$ для $d=0$, 1, 2 и $k\leqslant p^{2d-2}$ для $d\geqslant 3$.*

Доказательство. Индукция по d. Если $d=0$, результат следует из (IV.4.19). Если $d=1$, то он следует из (2.1), а если $d=2$, то — из (10.13). Теперь предположим, что $d\geqslant 3$. Если B содержит неприводимый характер положительной высоты, то результат следует из (IV.4.18). Таким образом, можно считать, что любой неприводимый характер в B имеет высоту 0.

Пусть $S(y, \tilde{B})$ — главная подсекция, отвечающая B. Согласно (IV.4.5), существует единственный блок $\tilde{B}^0$ группы $C_G(y)/\langle y\rangle$, содержащийся в B, причем $D/\langle y\rangle$ является дефектной группой для $\tilde{B}^0$. В силу (III.2.13), y содержится в ядре любого неприводимого характера Брауэра из $\tilde{B}$. Следовательно, $\tilde{B}$ и $\tilde{B}^0$ имеют по $l(\tilde{B}^0)$ неприводимых характеров Брауэра, откуда по (V.9.17) (ii)

$$k^2\leqslant p^{2d}l(\tilde{B}^0)\leqslant p^{2d}k(\tilde{B}^0),$$

где $k(\tilde{B}^0)$ — число неприводимых характеров в $\tilde{B}^0$. Так как дефект блока $\tilde{B}^0$ не превосходит $d-1$, то индукция дает $k(\tilde{B}^0)\leqslant p^{2(d-1)-2}$, поскольку $d=2d-2$ при $d=2$. Итак,

$$k^2\leqslant p^{2d+2(d-1)-2}=p^{4d-4},$$

так что $k\leqslant p^{2d-2}$. □

§ 11. Некоторые примеры

Следующий результат, принадлежащий Дейду [1966], показывает, что в (2.17) возможна любая последовательность знаков ε_k.

Лемма 11.1. *Для каждого k, $0\leqslant k\leqslant a-1$, зададим $\gamma_k=\pm 1$. Существует группа G, обладающая таким блоком B с дефектной группой D, что если ε_k определить как в (2.17), то $\varepsilon_k=\gamma_k$, $0\leqslant k\leqslant a-1$.*

Доказательство. Пусть q_k — такое простое число, что $q_k \equiv -1 \pmod{p^a}$, и $2 < q_1 < \ldots < q_{a-1}$. Пусть $\beta_k = \pm 1$, $0 \leqslant k \leqslant a-1$. Если $\beta_k = 1$, положим $Q_k = \langle 1 \rangle$, а если $\beta_k = -1$, то в качестве Q_k рассмотрим неабелеву группу порядка q_k^3 и показателя q_k. Пусть D действует на Q_k так, что $D_k = C_D(Q_k)$ при $\beta_k = -1$. Определим $G = (Q_0 \times \ldots \times Q_{a-1})D$. Определим неприводимый характер θ_k группы Q_k следующим образом: если $\beta_k = 1$, то $Q_k = \langle 1 \rangle$ и θ_k — главный характер, а если $\beta_k = -1$, то θ_k — один из неприводимых характеров степени q_k. Рассмотрим характер $\theta = \prod_{k=0}^{a-1} \theta_k$ группы $Q_0 \times \ldots \times Q_{a-1}$: очевидно, $T(\theta) = G$. Кроме того, $\theta^G = \chi_1 + \sum \chi_\lambda$, где λ пробегает неглавные неприводимые характеры группы D, и $\chi_\lambda(z) = \lambda(z)\chi_1(z)$ для $z \in G$. Здесь $\{\chi_\lambda\}$ — множество исключительных характеров блока B с дефектной группой D, а χ_1 — неисключительный характер. Известно, что если $z \in D_k - D_{k+1}$ и x есть p'-элемент из $C_G(z)$, то

$$\chi_1(xz) = \left(\prod_{i=k}^{a-1} \beta_i \right) \chi_1(x).$$

Поэтому, согласно (2.17), $\varepsilon_k = \prod_{i=k}^{a-1} \beta_i$. Но знаки β_i можно выбрать так, чтобы

$$\gamma_k = \prod_{i=k}^{a-1} \beta_i, \quad 0 \leqslant k \leqslant a-1. \ \square$$

Лемма 11.2. *Предположим, что $|D| = p$. Пусть χ — неприводимый характер из B, K_0 — неразветвленное расширение поля $\mathbf{Q}_p(\chi)$, а R_0 — кольцо целых в K_0. Пусть X — такой R_0-свободный $R_0[G]$-модуль, что X_{K_0} имеет характер χ. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Модуль $\bar{X}$ неразложим.*

(ii) *Любая неприводимая конституэнта модуля $\bar{X}$ абсолютно неприводима.*

(iii) *Для любых $i \neq j$ существует элемент x, такой, что $s_{ij}(x) \not\equiv 0 \pmod{\pi_0}$ или $s_{ji}(x) \not\equiv 0 \pmod{\pi_0}$, где $(s_{ij}(x))$ — матрица элемента x в представлении на модуле X, а π_0 — простой элемент из R_0.*

Доказательство. Если $\bar{X}$ разложим, матрицы представления можно выбрать так, что $s_{1n}(x) = s_{n1}(x) \equiv 0 \pmod{\pi_0}$ для любого $x \in G$, где $n = \chi(1)$. Таким образом, (i) следует из (iii).

Если некоторая неприводимая конституэнта V модуля $\bar{X}$ не является абсолютно неприводимой, то существует такое неразветвленное расширение $K_1 \supset K_0$, что если R_1 — кольцо целых в K_1, то $\bar{R}_1$ является полем разложения для V. Поскольку модуль $V \otimes_{\bar{R}} \bar{R}_1$ вполне приводим, то после замены K_0 на K_1 оказывается возможным найти матричное представление в соответствующем модуле X_{R_1}, которое противоречит (iii). Значит, (iii) влечет (ii). Итак, достаточно доказать (iii).

Допустим, что $s_{ij}(x) \equiv s_{ji}(x) \equiv 0 \pmod{\pi_0}$ для некоторых $i \neq j$ и всех $x \in G$. Из соотношений Шура вытекает, что если σ, τ принадлежат группе Галуа поля K_0 над $\mathbf{Q}_p$, то

$$\sum_{x \in G} s_{ij}^{\sigma}(x) s_{ji}^{\tau}(x^{-1}) = \delta_{\sigma\tau} |G| / \chi(1),$$

где $\delta_{\sigma\tau}=1$, если σ и τ совпадают на $\mathbf{Q}_p(\chi)$, и $\delta_{\sigma\tau}=0$ в противном случае. Пусть Tr обозначает след из K_0 в максимальное неразветвленное подполе K_1 поля K_0. Тогда $\mathrm{Tr}(s_{ij}(x))=\mathrm{Tr}(s_{ji}(x))\equiv 0 \pmod p$ для всех $x\in G$, и

$$\sum_{x\in G}\mathrm{Tr}(s_{ij}(x))\mathrm{Tr}(s_{ji}(x))=\frac{|G||K_0:K_1|}{\chi(1)}.$$

Тем самым, в частности,

$$\frac{|G||K_0:K_1|}{\chi(1)}\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Так как $|D|=p$, то, согласно (2.17), $|K_0:K_1| \mid (p-1)$ и поэтому $|G|/\chi(1)\equiv 0 \pmod{p^2}$. Однако это невозможно, поскольку χ принадлежит блоку дефекта 1. □

В исходной трактовке блоков дефекта 1, данной Брауэром, важную роль играли лемма 11.2 и близкие результаты (см. Брауэр [1941c]). В случае, когда $p=2$ и $a>0$, индекс инерции блока B равен 1. Таким образом, любой неприводимый характер из B неприводим как характер Брауэра, значит в этом случае (11.2) (i) и 11.2 (ii) имеют место.

Следующие два результата требуются для доказательства теоремы (11.5). Фактически строятся примеры, показывающие, что утверждение 11.2 (i) справедливо только в оговоренных там случаях.

Помещенная ниже теорема 11.5 также представляет интерес, показывая, что, по-видимому, утверждение, обратное к (I.18.2), не может быть верным.

В оставшейся части этого параграфа K будет конечным неразветвленным расширением поля $\mathbf{Q}_p$, а R — кольцом целых в K.

Пусть X — некоторый $R[D]$-модуль с R-базисом $\{(1-y)^i \mid 1\leqslant i\leqslant p^a-1\}$ и Y — единственный подмодуль индекса p в X. Тогда $\{z_i \mid 1\leqslant i\leqslant p^a-1\}$ является R-базисом в Y, где $z_1=p(1-y)$, $z_i=(1-y)^i$ $(2\leqslant i\leqslant p^a-1)$.

Имеем $\bar{Y}=V_1\oplus V_2$, где V_1 — векторное пространство над $\bar{R}$, натянутое на $\bar{z}_1$, а V_2 — векторное пространство над $\bar{R}$, натянутое на $\{\bar{z}_i \mid 2\leqslant i\leqslant p^a-1\}$.

Лемма 11.3. *Если $a>1$ и $p\neq 2$, то V_1 и V_2 являются $\bar{R}[D]$-модулями.*

Доказательство. По определению,

$$\bar{z}_1(1-y)=\overline{z_1(1-y)}=\overline{p(1-y)^2}=\overline{pz_2}=p\bar{z}_2=0,$$

$$\bar{z}_i(1-y)=\overline{z_i(1-y)}=\bar{z}_{i+1}\in V_2 \quad (2\leqslant i\leqslant p^a-2).$$

Таким образом, достаточно доказать, что $\bar{z}_{p^{a-1}}(1-y)\in V_2$.

Пусть Y_1 и Y_2 — соответственно R-модули, которые натянуты на z_1 и на $\{z_i \mid 2\leqslant i\leqslant p^a-1\}$, так что $\bar{Y}_j=V_j$, $j=1, 2$. Тогда

$$z_{p^{a-1}}(1-y)=\sum_{s=0}^{p^a}\binom{p^a}{s}(-1)^s y^s=\sum_{s=1}^{p^a-1}\binom{p^a}{s}(-1)^s y^s=$$

$$=\sum_{s=1}^{p^a-1}\binom{p^a}{s}(-1)^s[(y-1)+1]^s.$$

Итак,

$$z_{p^a-1}(1-y)\equiv\sum_{s=1}^{p^a-1}\binom{p^a}{s}(-1)^s[s(y-1)+1]\equiv$$

$$\equiv(y-1)\sum_{s=1}^{p^a-1}\binom{p^a}{s}(-1)^s s+\sum_{s=1}^{p^a-1}\binom{p^a}{s}(-1)^s\equiv$$

$$\equiv(y-1)\sum_{s=1}^{p^a-1}\binom{p^a}{s}(-1)^s s+(1-1)^{p^a}-(1-1)\equiv$$

$$\equiv(y-1)\sum_{s=1}^{p^a-1}\binom{p^a}{s}(-1)^s s \pmod{Y_2}.$$

Обозначим

$$f(x)=(1-x)^{p^a}=\sum_{s=0}^{p^a}\binom{p^a}{s}(-1)^s x^s,$$

тогда

$$-p^a(1-x)^{p^a-1}=f'(x)=\sum_{s=1}^{p^a}\binom{p^a}{s}(-1)^s s x^{s-1}.$$

Следовательно, $f'(1)=0$ и

$$z_{p^a-1}(1-y)\equiv(y-1)[f'(1)\pm p^a]\equiv\pm p^a-(y-1) \pmod{Y_2}.$$

Так как $a>1$, то отсюда следует, что $z_{p^a-1}(1-y)\in pY_1+Y_2$, т. е. $z_{p^a-1}(1-y)\in V_2$. □

Лемма 11.4. (i) *V_2 является неразложимым $\bar{R}[D]$-модулем.*

(ii) *Предположим, что $p\neq 2$ и $a>1$. Пусть $N=DE$ — диэдральная группа, где $E=\langle x\rangle$ порядка 2. Тогда $Y^N=Z_1\oplus Z_2$, где $\bar{Z}_1=W_1\oplus W_2$, W_1 — тривиальный $\bar{R}[N]$-модуль, $\dim_{\bar{R}} W_2=p^a-2$ и W_2 имеет одномерный цоколь, который представляет собой $\bar{R}[N]$-модуль с ядром D.*

Доказательство. (i) По определению, X/pX является однорядным неразложимым $\bar{R}[D]$-модулем. Естественное отображение X/pY на X/pX переводит Y/pY в некоторый неразложимый подмодуль A коразмерности 1 в X/pX. Значит, $\dim_{\bar{R}} A=p^a-2$, и минимальный многочлен элемента y в A имеет степень p^a-2, а степень минимального многочлена y в Y/pY не ниже p^a-2. Отсюда следует, что V_2 неразложим.

(ii) Положим $f_1=\frac{1}{2}(1+x)$, $f_2=\frac{1}{2}(1-x)$ в $R[N]$. Тогда $f_i Y^N\subseteq Y^N$, $i=1, 2$, поскольку Y — единственный подмодуль в X с $\dim_{\bar{R}}(X/Y)=1$, и $X=J(R[D])$. Очевидно, $Z_i=f_i Y^N\neq 0$, $i=1, 2$. Так как $(Y^N)_D\cong Y\oplus Y$, то $(Z_i)_D=Y$, $i=1, 2$. Следовательно, $(\bar{Y}^N)_D\cong V_1\oplus V_1\oplus V_2\oplus V_2$, где каждое слагаемое неразложимо, ввиду (i). Кроме того,

$$\bar{Z}_1\oplus\bar{Z}_2\cong\bar{Y}^N\cong V_1^N\oplus V_2^N.$$

Поскольку $\dim_{\bar{R}} \bar{Z}_i = p^a - 1$, $\dim_{\bar{R}} V_1^N = 2$ и $\dim_{\bar{R}} V_2^N = 2(p^a - 2)$, то $\bar{Z}_i = W_{i1} \oplus W_{i2}$, где $\dim_{\bar{R}} W_{i1} = 1$, $\dim_{\bar{R}} W_{i2} = p^a - 1$ и W_{i2} неразложим.

Так как $V_1^N \cong \langle x \rangle_{\langle x \rangle}$, в точности один из модулей W_{i1}, скажем, W_{11}, является тривиальным $\bar{R}[N]$-модулем. Положим $W_j = W_{1j}$, $j = 1, 2$. Остается показать, что $S(W_2)$ — нетривиальный $\bar{R}[N]$-модуль.

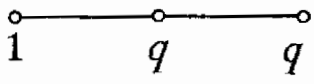
Пусть φ — характер Брауэра модуля W_2. Поскольку ни одна неприводимая конституэнта модуля $(Y^N)_K$ не содержит D в своем ядре, то ни одна неприводимая конституэнта модуля $(Z_1)_K$ также не содержит D в своем ядре, поэтому $1 + \varphi(x) = 0$. Поскольку $\varphi(x) = -1$, то из (2.8) следует, что $S(W_2)$ — нетривиальный $\bar{R}[N]$-модуль. □

Теорема 11.5. *Допустим, что $p \neq 2$ и $a > 1$. Пусть q — такое простое число, что $q + 1 \equiv p^a \pmod{p^{a+1}}$. Рассмотрим $G = \mathrm{PSL}_2(q)$. Тогда S_p-подгруппы в G циклические порядка p^a. Группа G имеет неприводимый характер θ степени q (характер Стейнберга), который реализуется некоторым $\mathbf{Q}[G]$-модулем. Далее, существует такой R-свободный $R[G]$-модуль X, что X_K имеет характер θ и $\bar{X} = M_1 \oplus M_2$, где M_1 — тривиальный $\bar{R}[G]$-модуль, а M_2 — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, $\dim_{\bar{R}} M_2 = q - 1$.*

Доказательство. Существование θ и структура S_p-подгруппы в G — хорошо известные факты. Пусть D — некоторая S_p-подгруппа из G, тогда $C_G(D) = D \times H$, где H — некоторая p'-подгруппа, и $|N_G(D) : C_G(D)| = 2$ В частности, $N_G(D)/H \cong N$, где группа N такая, как в (11.4). Кроме того, $D \cap D^z = \langle 1 \rangle$ для $z \notin N_G(D)$. Таким образом, для модулей групп G и $N_G(D)$ с нетривиальным вертексом из D определено соответствие Грина.

Пусть $\tilde{X}$ — такой $R[N_G(D)]$-модуль с ядром H, что $\tilde{X}$ и Z_1 изоморфны как $R[N]$-подмодули, и пусть $R[G]$-модуль X соответствует модулю $\tilde{X}$. Таким образом, $\bar{\tilde{X}} \cong W_1 \oplus W_2$. Отсюда, по (III.5.8), $\bar{X} = M_1 \oplus M_2$, где $\tilde{M}_i \cong W_i$ $(i = 1, 2)$.

Индекс инерции главного p-блока B группы G равен 2. Так как $\theta(z) = -1$ для $z \in C_G(D) - \{1\}$, то θ принадлежит B, откуда вытекает, что блок B имеет следующее дерево Брауэра:



Пусть φ_1, φ_2 — неприводимые характеры Брауэра из B, причем φ_1 — главный характер Брауэра, так что M_1 имеет характер φ_1. Главный блок алгебры $\bar{R}[N_G(D)]$ имеет единственный неразложимый модуль, а именно, W_2, который не обладает инвариантами и размерность которого над $\bar{R}$ сравнима с $-2 \pmod{p^a}$. Из (III.5.10) и (III.5.14) следует, что модуль, который имеет характер φ_2, соответствует W_2. Итак, модуль M_2 имеет характер φ_2, откуда, в частности, $\mathrm{rank}_R X = q$. Поскольку в $\tilde{X}$ нет инвариантов, нет их и в X. Таким образом, характер модуля X_K равен сумме исключительных характеров и, возможно, θ. Но так как $\mathrm{rank}_R X = \theta(1)$,

а степень любого исключительного характера из B равна $q-1$, то X_K имеет характер θ. □

Следующий результат, принадлежащий Бенарду и Л. Скотту (см. Бенард [1976]), будет использован в § 13. В некотором смысле он объясняет, почему в (11.3) необходимо предполагать $a>1$.

Лемма 11.6. *Пусть R — кольцо целых некоторого неразветвленного расширения поля $\mathbf{Q}_p$ и X — такой R-свободный $R[D]$-модуль, что X_K неприводим. Тогда $\bar{X}$ неразложим. Кроме того, если Y — такой R-свободный $R[D]$-модуль, что $Y_K \cong X_K$, то $Y \cong X$.*

Доказательство. Если $\operatorname{rank}_R X=1$, результат очевиден. Предположим, что $\operatorname{rank}_R X>1$. Рассмотрим отображение $f: X \to X$, определенное равенством $f(v)=v(1-y)$. Тогда f является $R[D]$-мономорфизмом, и $|X:f(X)|=\pm\det(1-y)$. Поскольку модуль X_K неприводим, все собственные значения элемента y являются примитивными корнями степени p^n из 1 для некоторого n. Поскольку $\operatorname{rank}_R X>1$, то $n\neq 0$, поэтому $\det(1-y)=\prod(1-\zeta)=p$, где ζ пробегает все примитивные корни степени p^n из 1. Следовательно, $|X:f(X)|=|\bar{R}|$. Отсюда, в частности, следует, что $\bar{X}$ неразложим. Кроме того, $\overline{f(X)}$ — единственный максимальный подмодуль в $\bar{X}$, и поэтому $f(X)$ — единственный максимальный подмодуль в X. Итак, X изоморфен своему единственному максимальному подмодулю.

Предположим, что $Y_K \cong X_K$; можно считать, что $Y_K = X_K$. Если Y заменить его кратным, то можно считать, что $Y \subseteq X$. Поскольку $|X:Y|$ конечно, существует конечная цепочка подмодулей $Y=X_m \subseteq X_{m-1} \subseteq \ldots \subseteq X_0=X$ таких, что X_i максимален в X_{i-1}, $1 \leqslant i \leqslant m$. В силу предыдущего абзаца, $X_i \cong X_{i-1}$ для $1 \leqslant i \leqslant m$, и, следовательно, $Y \cong X$. □

§ 12. Неразложимые $\bar{R}[G]$-модули в B

Этот параграф содержит описание всех ненулевых неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей блока B в терминах дерева Брауэра этого блока и его исключительной вершины. Все результаты этого параграфа в случае $\bar{R}=\hat{R}$ были доказаны Янушем [1969b] и Купишем [1968], [1969]. При справедливости результатов § 2 для произвольного поля K рассуждения Януша проходят без изменений. Структура главных неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей из B описывается теоремой (2.20). В данном параграфе описываются $|D|e-2e$ попарно неизоморфных ненулевых неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей из B. Эти модули не являются ни неприводимыми, ни проективными. Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что тем самым перечислены все (с точностью до изоморфизма) неразложимые $\bar{R}[G]$-модули блока B. Доказательство того факта, что число найденных модулей равно $|D|e-2e$, привлекает метод подсчета, разработанный Дейдом.

В своей статье Януш также показывает, что, каково бы ни было данное дерево, существует такая расщепимая симметрическая алгебра,

обладающая лишь конечным числом неразложимых модулей (с точностью до изоморфизма), что эти неразложимые модули можно описать в терминах данного дерева. В частности, этот результат показывает, что вопрос о том, какие деревья могут быть деревьями Брауэра, по-видимому, весьма труден. Если какое-либо дерево невозможно, то отсюда должно вытекать, что некоторая симметрическая алгебра с конечным (с точностью до изоморфизма) числом неразложимых модулей не является групповой алгеброй (см. примечание на с. 279).

В этом параграфе $\tau=\tau_B$ обозначает дерево Брауэра. Вершины τ будут обозначаться через P, P_i или Q. Исключительная вершина, если она существует, обозначается P_{ex}. Буква E или E_i будет обозначать ребро τ или 0. Если L_i соответствует ребру E, пишем $L_i \leftrightarrow E$: при $E=0$ считаем, что $(0)\leftrightarrow E$. Положим $t=(|D|-1)/e$. Согласно (2.13) и (2.19), t равно кратности любого модуля L_j в $\bar{X}_{0i}$ при $d_{0i}\neq 0$, $d_{0j}\neq 0$.

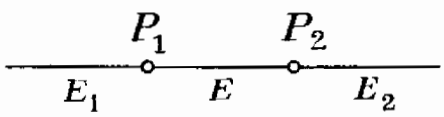
Если $d_{uj}\neq 0$, пусть X_{uj} определяется, как и раньше (2.20). При $d_{ui}\neq 0$ утверждение, двойственное к (2.20), дает $T(\bar{X}_{uj})\cong L_i$ для некоторого j, такого, что $d_{uj}\neq 0$.

Пусть P — вершина дерева τ, инцидентная ребру E, $L\leftrightarrow E$ и χ_u соответствует P. Обозначим $V(E, P)=\bar{X}_{uj}$, где $T(\bar{X}_{uj})\cong L$. В силу (2.25), $V(E, P)$ с точностью до изоморфизма определяется по E и P. Согласно (2.20), модуль $V(E, P)$ является однорядным.

Пусть E — ребро дерева τ и P_1, P_2 — вершины, инцидентные E. Если ребро E_i инцидентно P_i, для подходящих натуральных чисел n мы определим модули $V(E_1, E, E_2 : n)$. Если $P_i=P_{ex}$, мы допускаем случай, когда $E_i=0$ или $E_i=E$ в точности для одного $i=1$ или 2. Будет рассмотрено несколько случаев. Начнем с ряда предварительных определений.

Пусть $V_i(E)=\mathrm{Rad}(V(E, P_i))$, $i=1, 2$. Пусть U — неразложимый проективный $R[G]$-модуль, соответствующий модулю L, если $L\leftrightarrow E$, и положим $M_0(E)=\bar{U}/S(\bar{U})$. Тогда теорема, двойственная (2.20), влечет $\mathrm{Rad}(M_0(E))=V_1(E)\oplus V_2(E)$.

Предположим, что E, E_1, E_2 различны, $E\neq 0$ и фрагмент



входит в τ. Определим модули $M_i(n)$, $i=1, 2$, для подходящих натуральных n следующим образом:

Если $E_i=0$, то $M_i(1)=V_i(E)$.

Если $E_i\neq 0$ и $P_i=P_{ex}$, то $M_i(1)$ будет таким подмодулем в $V_i(E)$, что $S(V_i(E)/M_i(1))\leftrightarrow E_i$. Поскольку модуль $V_i(E)$ однорядный, $M_i(1)$ однозначно определен в силу (2.13).

Предположим, что $E_i\neq 0$ и $P_i=P_{ex}$. Пусть $1\leqslant n\leqslant t$ и $M_i(n)$ — такой подмодуль в $V_i(E)$, что $S(V_i(E)/M_i(n))\cong L_i$, где $L_i\leftrightarrow E_i$, и L_i является конституэнтой кратности n в $V_i(E)/M_i(n)$. Поскольку модуль $V_i(E)$ однорядный, $M_i(n)$ однозначно определен, в силу (2.13) и (2.19).

Определим

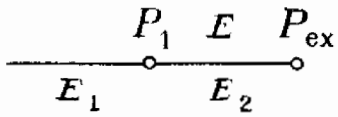
$$V(E_1,\ E,\ E_2:1)=M_0(E)/(M_1(1)\oplus M_2(1)).$$

Если $P_i=P_{ex}$ и $1\leqslant n\leqslant t$, определим

$$V(E_1,\ E,\ E_2:n)=M_0(E)/(M_i(n)\oplus M_j(1)),$$

где $\{i,\ j\}=\{1,\ 2\}$.

Допустим, что $E_1\neq E=E_2$, причем $E\neq 0$, $P_2=P_{ex}$ и



входит в τ. Если $E_1=0$, соответствующее ребро пропускается. Определим $M_1(1)$ как выше.

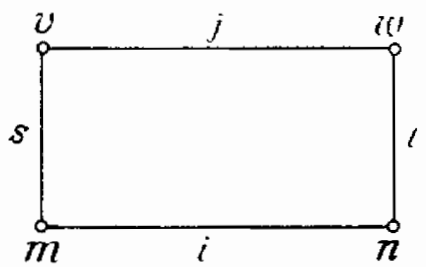
Если $L\leftrightarrow E$, то L является конституэнтой кратности $t-1$ в $V_2(E)$. Пусть $M_2(n)$, $1\leqslant n\leqslant t-1$,— такой подмодуль в $V_2(E)$, что $S(V_2(E)/M_2(n))\cong L$ и L является конституэнтой кратности n в $V_2(E)/M_2(n)$. Определим

$$V(E_1,\ E,\ E_2:n)=V_2(E_2,\ E,\ E_1:n)=M_0(E)/(M_1(1)\oplus M_2(n)).$$

Во всех случаях $V=V(E_1,\ E,\ E_2:n)\cong V(E_2,\ E,\ E_1:n)$ неразложим, так как $T(V)$ неприводим. Если, кроме того, $E_i=0$, то V одноряден, поскольку $M_0(E)/M_i(1)\cong V(E,\ P_j)$ для $i\neq j$ и потому одноряден.

Лемма 12.1. *Пусть* $V=V(E_1,\ E,\ E_2:n)$ *и* $V'=V(E_1',\ E',\ E_2':n')$ *определены как выше для* $E\neq 0$, $E'\neq 0$, $E_1\neq E_2$ *и* $E_1'\neq E_2'$. *Пусть* $L_i\leftrightarrow E$ *и* $L_j\leftrightarrow E'$, *причем* $L_i\ncong L_j$. *Тогда* V *и* V' *не могут иметь двух общих неизоморфных композиционных факторов, за исключением случая, когда они суть* L_i *и* L_j, *а* E *и* E' *имеют общую вершину.*

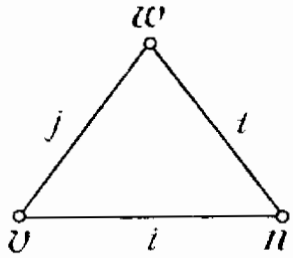
Доказательство. Предположим, что L_s и $L_t\neq L_s$ являются композиционными факторами модулей V и V', тогда все c_{is}, c_{it}, c_{js}, c_{jt} отличны от нуля. Если i, j, s, t попарно различны, то существуют такие m, n, v, w, что $d_{mi}d_{ms}\neq 0$, $d_{ni}d_{nt}\neq 0$, $d_{vj}d_{vs}\neq 0$ и $d_{wj}d_{wt}\neq 0$. Отсюда следует, что τ содержит следующий подграф



где обозначения очевидны. Это противоречит тому, что τ — дерево.

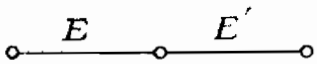
Предположим, что $\{i,\ j,\ s,\ t\}$ — множество трех различных элементов, скажем, i, j, t, а $s=i$. Тогда рассуждение, аналогичное проведен-

ному в предыдущем абзаце, показывает, что τ имеет подграф



вопреки тому, что τ — дерево.

Если $\{i, j\}=\{s, t\}$, то, очевидно,

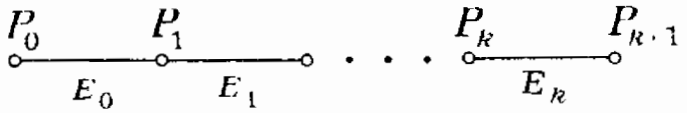


является подграфом в τ. □

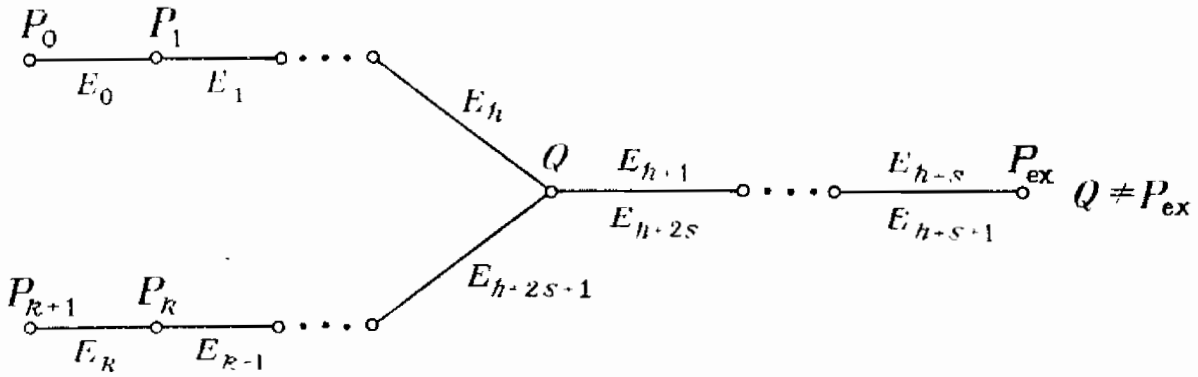
Далее будет необходимо рассмотреть следующие два типа подграфов графа τ.

Пусть k — произвольное натуральное число.

(I)



(II)



В графе типа (I) E_0, ..., E_k — различные ребра, в графе типа (II) E_{h+i} и $E_{h+2s+1-i}$, $i=1, \ldots, s$, соответствуют одному и тому же ребру. Не исключается, что одна или обе вершины P_0, P_{k+1} совпадают с Q.

Для графа типа (I) или (II) обозначим через Δ множество всех четных чисел i, $0\leqslant i\leqslant k$, или множество всех нечетных чисел i, $0\leqslant i\leqslant k$, соответственно.

Для данного графа типа (I) или (II) положим $V_i(n_i)=V(E_{i-1}, E_i, E_{i+1}: n_i)$ при $n_i\geqslant 1$ и $E_{-1}=E_{k+1}=0$. Пусть $L_i\leftrightarrow E_i$, тогда в случае типа (II) $L_{h+j}\cong L_{h+2s+1-j}$ для $0\leqslant j\leqslant s$. Заметим, что если $i\neq j$, но $i\equiv j \pmod 2$, то $L_i\ncong L_j$. Из определения $V_i(n_i)$ следует.

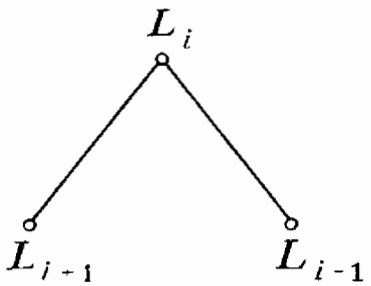
что $S(V_0(n_0))\cong L_1$, $S(V_k(n_k))\cong L_{k-1}$ и $S(V_i(n_i))\cong L_{i-1}\oplus L_{i+1}$ для $0<i<k$.

Выбрав Δ, определим $X=\oplus_{i\in\Delta}V_i(n_i)$, тогда

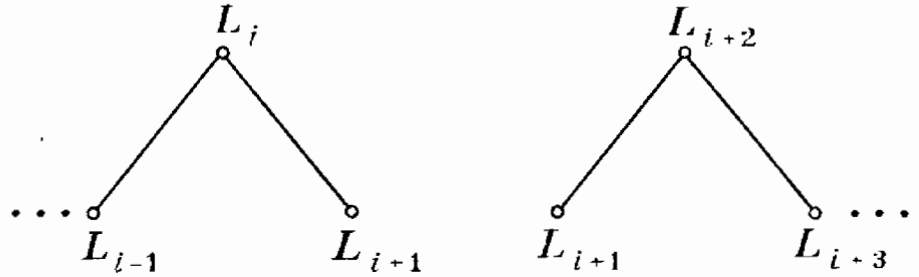
$$S(X)=\begin{cases}\bigoplus\limits_{j=1}^{m}2L_{2j-1}, & \text{если } 0\in\Delta,\ k=2m,\\ \left(\bigoplus\limits_{j=1}^{m}2L_{2j-1}\right)\oplus L_{2m+1}, & \text{если } 0\in\Delta,\ k=2m+1,\\ L_0\oplus\left(\sum\limits_{j=1}^{m-1}2L_{2j}\right)\oplus L_{2m}, & \text{если } 0\notin\Delta,\ k=2m,\\ L_0\oplus\left(\sum\limits_{j=1}^{m}2L_{2j}\right), & \text{если } 0\notin\Delta,\ k=2m+1.\end{cases}$$

Если $2L_i \mid S(X)$, существуют такие подмодули $L_{i1}\subseteq S(V_{i-1}(n_{i-1}))$ и $L_{i2}\subseteq S(V_{i+1}(n_{i+1}))$, что $L_{i1}\cong L_{i2}\cong L_i$. Пусть g_i: $L_{i1}\to L_{i2}$ — изоморфизм. Пусть Y — подмодуль в X, состоящий из всех элементов вида $\sum_i(v_i-g_i(v_i))$, где i пробегает те номера, при которых $2L_i \mid S(X)$ и $v_i\in L_{i1}$. Обозначим $M=X/Y$; на самом деле M получается из X отождествлением подмодулей L_{i1}, L_{i2}, когда $2L_i \mid S(X)$. Модуль M — основной объект исследования в этом параграфе.

Модуль $V(E_{i-1}, E_i, E_{i+1}:n_i)$, где $E_{i-1}\neq 0$ и $E_{i+1}\neq 0$, может быть представлен конусом

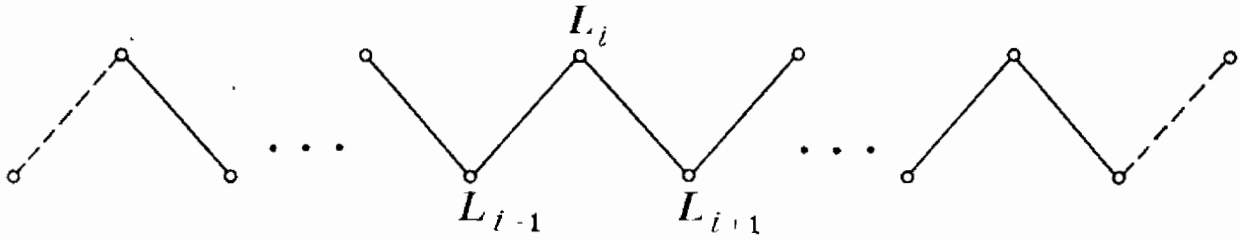


Тогда X представляется прямой суммой конусов:



На интуитивном уровне, M строится из X посредством отождествления изоморфных модулей в основаниях соседних конусов, что можно показать в виде следующего связного графа, где пунктирные линии

могут отсутствовать:



Следующие три результата призваны показать, что эта картинка на самом деле отражает реальность.

Пусть $X^0=M$, и пусть ^{0} обозначает образ любого элемента или подмодуля из X в $X^0=M$. Мы будем также писать $V_i(n_i)^0=V_i^0(n_i)$. Поскольку $V_i(n_i)\cap Y=(0)$ для всех i, то $V_i^0(n_i)\cong V_i(n_i)$. Кроме того, если Γ — такое подмножество в Δ, что из $i\in\Gamma$ следует $i+2\notin\Gamma$, то $\{\oplus_{i\in\Gamma}V_i(n_i)\}^0=\oplus_{i\in\Gamma}V_i^0(n_i)$.

Лемма 12.2. (i) $T(M)\cong\oplus_{i\in\Delta}L_i$.

(ii) $S(M)\cong\oplus_{i\in\{0,\ldots,k\}-\Delta}L_i$.

Доказательство. (i) По определению,

$$Y\subseteq S(X)\subseteq\bigoplus_{i\in\Delta}S(V_i(n_i))\subseteq\bigoplus_{i\in\Delta}\operatorname{Rad}(V_i(n_i))\subseteq\operatorname{Rad}X,$$

следовательно,

$$T(M)\cong T(X)\cong\bigoplus_{i\in\Delta}T(V_i(n_i))\cong\bigoplus_{i\in\Delta}L_i.$$

(ii) Очевидно, $S(X)^0\cong\oplus_{i\in\{0,\ldots,k\}-\Delta}L_i$ и $S(X)^0\subseteq S(X^0)=S(M)$. Таким образом, достаточно доказать, что любой неприводимый подмодуль из M содержится в $S(X)^0$.

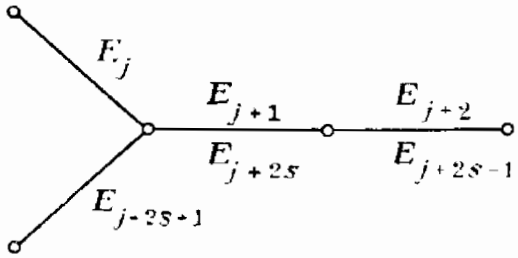
Допустим, что результат неверен. Существует неразложимый подмодуль Z в $S^2(X)$, не являющийся неприводимым, такой, что $S(Z)\subseteq Y$ и Z^0 неприводим. Пусть Γ — множество всех таких i, что Z^0 изоморфен некоторому композиционному фактору модуля $V_i(n_i)$. При этом Z можно заменить на $Z\cap\{\oplus_{i\in\Gamma}V_i(n_i)\}$, так что можно считать, что $Z\subseteq\oplus_{i\in\Gamma}V_i(n_i)$.

Поскольку Z неразложим, то $S(Z)\subseteq\operatorname{Rad}(Z)$, а так как $S^2(Z)=Z$, то $S(Z)=\operatorname{Rad}Z$. Из теоремы, двойственной к (2.20), следует, что $l(Z)=2$ или 3. Пусть E — ребро, соответствующее Z^0. Если Z^0 изоморфен конституэнте модуля $S(Z)$, из (2.23) следует, что E инцидентно P_{ex} и даже E — единственное ребро τ, инцидентное P_{ex}.

Предположим, что j, $j+2\in\Gamma$ для некоторого j, тогда L_{j+1} является композиционным фактором модулей $S(V_j(n_j))$ и $S(V_{j+2}(n_{j+2}))$. Итак, Z^0 и L_{j+1} изоморфны композиционным факторам $V_j(n_j)$ и $V_{j+2}(n_{j+2})$.

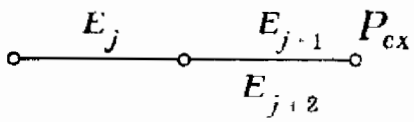
Сначала допустим, что E_i и E_{i+2} не имеют общей вершины ни при каких i, $i+2\in\Gamma$. В силу (12.1), $L_{j+1}\cong Z^0$. Таким образом, либо

$\Gamma=\{j, j+2\}$, либо в τ имеется следующая конфигурация:



($s>2$), где, возможно, $E_j=E_{j+2s+1}$, в этом случае $\Gamma\subseteq\{j, j+2, j+2s\}$. Следовательно, в любом случае $Y\cap\oplus_{i\in\Gamma}V_i(n_i)\subseteq L_{j+1}\cong Z^0$. Поскольку $Y\cap Z\neq(0)$, то $Y\cap Z\cong Z^0$ и, значит, $S(Z)\cong Z^0$, что неверно, ибо обе вершины, инцидентные с E_{j+1}, инцидентны и другим ребрам графа τ.

Теперь предположим, что E_j и E_{j+2} имеют общую вершину. В силу (12.1), $Z^0\cong L_j$ или L_{j+1}, и (с точностью до симметрии) в τ должна иметься следующая конфигурация:



Если $Z^0\cong L_{j+1}$, то $\Gamma=\{j, j+2\}$. Положим $Y_0=Y\cap(V_j(1)\oplus V_{j+2}(n_{j+2}))$, тогда $Y_0\cong L_{j+1}\cong Z^0$. Таким образом, $l(Z)\leqslant l(Z^0)+l(Y^0)=2$ и, значит, $S(Z)\cong Z^0$. Следовательно, Y_0, $Z\subseteq Z_1\oplus Z_2$, где $Z_1\subseteq V_j(1)$, $Z_2\subseteq V_{j+2}(n_{j+2})$. Модули Z_1 и Z_2 неразложимы, все композиционные факторы суммы $Z_1\oplus Z_2$ изоморфны Z^0 и $l(Z_1)=1$, $l(Z_2)=2$. Значит, $\mathrm{Rad}(Z)\subseteq\mathrm{Rad}(Z_1\oplus Z_2)=\mathrm{Rad}(Z_2)\subseteq V_{j+2}(n_{j+2})$. Итак, $Y_0\cap\mathrm{Rad}(Z)=(0)$ и потому $Y\cap Z=(0)$. Отсюда $Z\cong Z^0$, вопреки приводимости Z.

Если $Z^0\cong L_j$, то $\Gamma\subseteq\{j, j+2, j+4\}$, причем если $j+4\in\Gamma$, то $L_{j+3}\cong L_j$, в противном случае $Z^0\cong L_j$ не является конституэнтой модуля $V_{j+4}(n_{j+4})$. Значит,

$$Y\cap\bigoplus_{i\in\Gamma}V_i(n_i)\subseteq L_{j+1}\oplus L_{j+3}\cong L_{j+1}\oplus Z^0.$$

Поскольку вершина P_{ex} не инцидентна E_j, то $Z^0\not\mid S(Z)$, а так как $S(Z)\cap Y\neq(0)$, то $S(Z)\cong L_{j+1}$. Итак, $Z\cap V_{j+4}(n_{j+4})=(0)$ и поэтому Z изоморфен подмодулю Z' в $V_j(1)\oplus V_{j+2}(n_{j+2})$, причем $S(Z')\cap Y\cong L_{j+1}$. Так как L_j входит в $V_{j+2}(n_{j+2})$ с кратностью 1 и $L_j\subseteq S(V_{j+2}(n_{j+2}))$, то $Z'\subseteq V_j(1)\oplus Z_1$, где $Z_1\subseteq V_{j+2}(n_{j+2})$ и $Z_1\cong L_{j+1}$. Таким образом, $\mathrm{Rad}(Z')\subseteq V_j(1)$. Поскольку $\mathrm{Rad}(Z')\cap Y=S(Z')\cap Y\neq(0)$, это противоречит тому факту, что $V_j(1)\cap Y=(0)$.

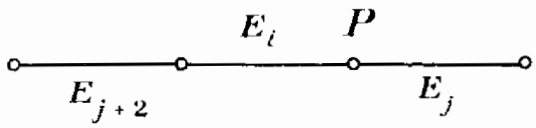
Следовательно, если $i\in\Gamma$, то $i+2\notin\Gamma$, поэтому $\{\oplus_{i\in\Gamma}V_i(n_i)\}^0=\oplus_{i\in\Gamma}V_i^0(n_i)$. Значит, $Z=Z^0$, вопреки приводимости Z. □

Лемма 12.3. (i) *Если E_i, $i\in\Delta$, не инцидентно P_{ex}, то L_i является композиционным фактором в M кратности не выше 2. Если кратность равна 2, то $L_i\mid S(M)$.*

(ii) *Если* E_i, $i\in\Delta$, *инцидентно* P_{ex}, *то кратность* L_i *как композиционного фактора в* M *равна кратности* L_i *как композиционного фактора в* $V_i(n_i)$. *Эта кратность равна* n_i *в случае* (I) *и* n_i+1 *в случае* (II).

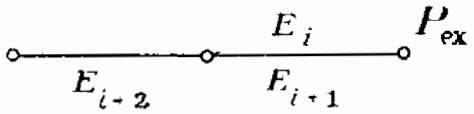
Доказательство. Если $k\leqslant 2$, то $\Delta=\{i\}$, $M=V_i(n_i)$, и результат очевиден. Предположим, что $k>2$.

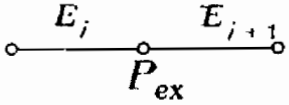
(i) Так как E_i не инцидентно P_{ex}, то L_i входит в $V_i(n_i)$ с единичной кратностью. Если $j\neq i$ и L_i является конституэнтой в $V_j(n_j)$, то в τ должен иметься следующий подграф (с точностью до симметрии), где $P\neq P_{ex}$ и ребра E_{j+2} может не быть:



Во всяком случае это показывает, что $L_i \mid S(X)$, а также $L_i \mid S(M)$, так что кратность L_i в $S(M)$ равна 1.

(ii) Так как E_i инцидентно P_{ex}, в τ должен содержаться один из следующих подграфов (с точностью до симметрии):





В первом случае L_i входит с кратностью n_i+1 в $V_i(n_i)$ и с кратностью 1 в $V_{i+2}(n_{i+2})$ и в цоколи того и другого. Таким образом, L_i входит в M с кратностью n_i+1. Во втором случае L_i с кратностью n_i входит $V_i(n_i)$ и не входит ни в один из $V_j(n_j)$ при $j\in\Delta$, $j\neq i$. □

Лемма 12.4. *Модуль* M *неразложим.*

Доказательство. Предположим, что $M=M_1\oplus M_2$. Пусть f_s — проектирование M на M_s, $s=1$, 2. Для любого $i\in\Delta$ имеем $V_i^0(n_i)\subseteq V_i^0(n_i)f_1\oplus V_i^0(n_i)f_2$. Сначала покажем, что $V_i^0(n_i)\cong V_i^0(n_i)f_s$ для $s=1$ или 2. Допустим, что это не так, тогда $V_i^0(n_i)f_s\neq(0)$ для $s=1$, 2. Обозначим $W_s=V_i^0(n_i)f_s$, $s=1$, 2. Тогда $2L_i|T(W_1\oplus W_2)$ и, значит, L_i является конституэнтой модуля M кратности не менее 2.

Предположим, что E_i не инцидентно P_{ex}. Тогда, в силу (12.3), $L_i|S(M)$, и потому $W_s\cong L_i$ для $s=1$ или 2. Поскольку $L_i\notin S(V_i^0(n_i))$, то $V_i^0(n_i)f_t\cong V_i^0(n_i)$ при $s\neq t$.

Предположим, что E_i инцидентно P_{ex}. Пусть кратность L_i как композиционного фактора модуля M равна n. Согласно (12.3) (ii), кратность L_i как композиционного фактора модуля $V_i(n_i)$ равна $n-1$. Пусть k — наименьшее натуральное число, такое, что L_i является конституэнтой кратности $n-1$ в $S^k(\mathrm{Rad}(V_i(n_i))$. Из того, что $\mathrm{Rad}(W_1\oplus W_2)=\{\mathrm{Rad}(V_i(n_i))\}f_1\oplus\{\mathrm{Rad}(V_i(n_i))\}f_2$ является суммой не более, чем четырех однорядных модулей, следует, что для $s=1$ или 2 $S^k(\mathrm{Rad}(W_s))\neq(0)$, и L_i является конституэнтой в $\mathrm{Rad}(W_s)$ кратности

$n-1$. Следовательно, L_i является конституэнтой в W_s кратности n и потому не является конституэнтой в W_t при $s \neq t$, в силу (12.3) (ii), так что $W_t = (0)$. Итак, во всех случаях $W_s \cong V_i(n_i)$ для $s = 1$ или 2.

Предположим, что $i+1 \in \Delta$ и $L_i | S(M_1)$, тогда $L_i \not| S(M_2)$, ввиду (12.2) (ii), и, значит, $V^0_{i+1}(n_{i+1}) f_2 \not\cong V^0_{i+1}(n_{i+1})$. Итак, $V^0_{i+1}(n_{i+1}) f_1 \cong V^0_{i+1}(n_{i+1})$ и $L_{i+2} | S(M_1)$.

Изменив, если понадобится, нумерацию, можно считать, что либо $1 \in \Delta$ и $L_0 | S(M_1)$, либо $0 \in \Delta$ и $L_1 | S(M_1)$. Повторяя рассуждение предыдущего абзаца, видим, что $L_i | S(M_1)$ для всех $i \in \{1, ..., k\} - \Delta$. Следовательно, (12.2) (ii) влечет $S(M) \subseteq M_1$. Итак, $M_2 = (0)$. □

Из определения модуля M следует, что в случае графа как типа (I), так и типа (II) M зависит от чисел n_i, множества Δ и функций g_i. Позже окажется, что M не зависит от выбора функций g_i.

Лемма 12.5. *Модуль M определяет тип графа и упорядоченное множество $E_0, ..., E_k$ с точностью до обращения порядка. Если порядок зафиксирован, то множество Δ также определяется по M, за исключением графа типа* (II), *когда $P_0 = P_{k+1} = Q$. Кроме того, натуральные числа n_i, $i = 1, ..., k$, однозначно определены.*

Доказательство. В силу (12.2), граф тогда и только тогда имеет тип (I), когда $S(M)$ и $T(M)$ не имеют общих композиционных факторов. Кроме того, множество $\{E_0, ..., E_k\}$ определено по $S(M)$ и $T(M)$.

Если граф имеет тип (I), то порядок $E_0, ..., E_k$ определен с точностью до его обращения по $S(M)$ и $T(M)$, так как τ является деревом. Согласно (12.2), Δ определено по $T(M)$.

Если граф имеет тип (II), из (12.2) и (12.3) следует, что $\{E_{h+1}, ..., E_{h+s}\}$ определяется общими композиционными факторами в $S(M)$ и $T(M)$. Таким образом, Q определено, ибо $Q \neq P_{ex}$, и $E_0, ..., E_k$ определены с точностью до обращения порядка по $S(M)$, $T(M)$, с учетом того, что τ — дерево, в силу (12.2). Поэтому $\{P_0, P_{k+1}\}$ также определено.

Если $P_0 \neq Q$, то Δ определяется условием, что либо $L_0 | S(M)$, либо $L_0 | T(M)$ (но не одновременно). Аналогично, Δ определено, если $P_{k+1} \neq Q$. Если $P_0 = P_{k+1} = Q$, то определение M показывает, что Δ можно заменить на $\{1, ..., k\} - \Delta$.

Так как существует не более одного $i \in \Delta$, при котором P_{ex} инцидентно E_i, то $n_j = 1$ для всех j, кроме, возможно, одного, равного такому i. В этом случае при заданном τ число n_i определяется по $l(M)$. □

Пусть γ — граф типа (I) или (II) и $n(\gamma)$ — число модулей M, которые можно сопоставить графу γ в зависимости от Δ и натуральных n_i. Ввиду (12.4) и (12.5), в B содержится по меньшей мере $\sum n(\gamma)$ попарно неизоморфных непроективных приводимых неразложимых ненулевых $\bar{R}[G]$-модулей, если γ пробегает все подграфы типов (I) или (II) в τ. Теперь мы вычислим $n(\gamma)$ и подсчитаем число возможных γ. Оно окажется равным $|D|e - 2e$. Как только это будет сделано, из (2.1) и (2.2) будет следовать, что всякий ненулевой неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль блока B либо проективен и неприводим, либо изоморфен одному из модулей M.

Случай (i): γ — граф типа (I), $P_i \neq P_{ex}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, тогда $n(\gamma)=2$ за счет выбора Δ.

Случай (ii): γ — граф типа (I), $P_i = P_{ex}$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, тогда $n(\gamma)=2t$ за счет выбора Δ и n_i.

Случай (iii): γ — граф типа (II), $P_0 \neq P_{k+1}$, тогда $1 \leqslant n_i \leqslant t-1$, так что $n(\gamma)=2(t-1)$ за счет выбора Δ.

Случай (iv): γ — граф типа (II), $P_0 = P_{k+1} = Q$, тогда $1 \leqslant n_i < n-1$, так что $n(\gamma)=t-1$, ибо M не зависит от выбора Δ.

Лемма 12.6. *Если* τ *не содержит исключительной вершины, то* $\sum n(\gamma)=|D|e-2e$.

Доказательство. Здесь возможен только случай (i). Поскольку τ является деревом, для любой пары различных ребер из τ существует единственный подграф типа (I), у которого эти ребра крайние. Имеются $\binom{e}{2}$ способов выбрать такую пару ребер, значит,

$$\sum n(\gamma)=2\binom{e}{2}=e^2-e=|D|e-2e,$$

так как $|D|-1=e$. □

Теорема 12.7. $\sum n(\gamma)=|D|e-2e$.

Доказательство. Ввиду (12.6), можно предполагать, что τ имеет исключительную вершину.

Пусть P_1, P_2, ... — все вершины из τ, такие, что $P_i \neq P_{ex}$ и P_i, P_{ex} являются концами общего ребра. Рассмотрим такие подграфы τ_1, τ_2, ... графа τ, что τ_i состоит из P_{ex}, а также из всех тех ребер и вершин, для которых путь от любой вершины из $\tau_i - \{P_{ex}\}$ до P_{ex} проходит через P_i. Поскольку τ является деревом, τ_1, τ_2, ... задают разбиение множества ребер из τ. Пусть e_i — число ребер τ_i, так что $\sum e_i = e$.

В случае (i) $\{P_0, P_{k+1}\}$ может быть любой парой вершин из τ_i (для каждого i), такой, что P_0 и P_{k+1} не являются концами одного ребра. Число возможных пар вершин в τ_i равно $\frac{1}{2}e_i(e_i+1)$. Число инцидентных пар равно числу ребер e_i. Следовательно, в τ_i имеются $\frac{1}{2}e_i(e_i-1)$ возможных множеств $\{P_0, P_{k+1}\}$, поэтому число возможностей для γ равно $\frac{1}{2}\sum_i(e_i^2-e_i)$. Итак, если γ пробегает всевозможные графы для случая (i), то $\sum_\gamma n(\gamma)=\sum_i(e_i^2-e_i)$.

В случае (ii) P_0 можно выбрать в любом $\tau_i - \{P_{ex}\}$, а P_{k+1} — в любом $\tau_j - \{P_{ex}\}$, где $i \neq j$. Таким образом, число возможностей для γ равно $\sum_{i<j} e_i e_j$. Следовательно, если γ пробегает всевозможные графы случая (ii), то $\sum_\gamma n(\gamma)=2t\sum_{i<j} e_i e_j$.

В случае (iii) γ содержится в τ_i при некотором i. Имеются $\frac{1}{2}e_i(e_i-1)$ способов выбрать $\{P_0, P_{k+1}\}$ в τ_i, а всего $\frac{1}{2}\sum_i e_i(e_i-1)$

способов выбрать γ в τ. Итак, если γ пробегает всевозможные графы случая (iii), то $\sum_\gamma n(\gamma)=(t-1)\sum_i(e_i^2-e_i)$.

В случае (iv) Q можно произвольно выбирать в $\tau-\{P_{\text{сх}}\}$, так что для Q есть e возможностей. Следовательно, если γ пробегает всевозможные графы случая (iv), то $\sum_\gamma n(\gamma)=(t-1)e$.

Окончательно, если γ пробегает всевозможные подграфы типов (I) или (II) в τ, то

$$\sum_\gamma n(\gamma)=\sum_i(e_i^2-e_i)+2t\sum_{i<j}e_ie_j+(t-1)\sum_i(e_i^2-e_i)+(t-1)e=$$

$$=t\left(\sum_i e_i\right)^2-t\sum_i e_i+(t-1)e=$$

$$=te^2-e=e(et+1)-2e=|D|e-2e. \quad \square$$

В силу сделанных выше замечаний, (12.7) завершает описание всех неразложимых $\bar{R}[G]$-модулей в B, с точностью до изоморфизма.

Доказательство теоремы 2.26. Если V—неприводимый или главный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из B, то $S(V)\cong T(V)$. Теперь результат следует из (12.2) и (12.3). $\square$

§ 13. Индексы Шура неприводимых характеров из $\hat{B}$

Во всем этом параграфе $K=\hat{K}$, так что $B=\hat{B}$, $\hat{\chi}_u=\chi_u$, $\hat{\varphi}_i=\varphi_i$, $\hat{\chi}_\lambda=\chi_\lambda$, где $0\leqslant u\leqslant e$, $1\leqslant i\leqslant e$, $\lambda\in\Lambda$.

Пусть β—неприводимый характер Брауэра из B_k для некоторого k, $0\leqslant k\leqslant a$. Пусть $M=\mathbf{Q}_p(\beta)$ и S—кольцо целых в M. Согласно (I.19.3) и (2.9), $\bar{S}$ является полем разложения для любого неприводимого $\bar{S}[N_i]$-модуля из B_i, $0\leqslant i\leqslant a$.

Лемма 13.1. $M=\mathbf{Q}_p(\varphi_i)=\mathbf{Q}_p(\chi_u)$, $1\leqslant i\leqslant e$, $1\leqslant u\leqslant e$.

Доказательство. Очевидно из (2.9) и (2.19). $\square$

Если $|\Lambda|\neq 1$, то $\chi_\lambda-\chi_\mu$ обращается в нуль на всех p'-элементах из G для λ, $\mu\in\Lambda$. Таким образом, максимальное неразветвленное подполе в $\mathbf{Q}_p(\chi_\lambda)$ одно и то же для всех $\lambda\in\Lambda$. Обозначим его через F. Согласно (2.15), $F\subseteq M$. Отсюда вытекает

Лемма 13.2. *Предположим, что* $|\Lambda|\neq 1$. *Пусть* F—*максимальное неразветвленное подполе в* $\mathbf{Q}_p(\chi_\lambda)$ *для некоторого* $\lambda\in\Lambda$. *Тогда* F *является максимальным неразветвленным подполем в* $\mathbf{Q}_p(\chi_\mu)$ *для всех* $\mu\in\Lambda$. *Кроме того,* $F\subseteq M$ *и*

$$[M(\chi_\lambda):\mathbf{Q}_p(\chi_\lambda)]=[M:F] \quad \textit{для всех} \quad \lambda\in\Lambda.$$

Пусть $m(\chi)=m_{\mathbf{Q}_p}(\chi)$ обозначает индекс Шура неприводимого характера χ над $\mathbf{Q}_p$.

Цель этого параграфа—доказать следующую теорему.

Теорема 13.3. $m(\chi_u)=1$ *для любого* u, $1\leqslant u\leqslant e$, *и справедливо одно из двух утверждений*:

(i) $|\Lambda|=1$ *и* $m(\chi_0)=[M(\chi_0):\mathbf{Q}_p(\chi_0)]$;

(ii) $|\Lambda|\neq 1$ *и* $m(\chi_\lambda)=[M:F]$ *для любого* $\lambda\in\Lambda$.

Легко видеть, что из (13.1)—(13.3) следует

Теорема 13.4. *Если* χ *— неприводимый характер из* B, *а* φ *— неприводимый характер Брауэра, который является конституэнтой в* χ, *то*

$$m(\chi)=[\mathbf{Q}_p(\chi,\varphi):\mathbf{Q}_p(\chi)].$$

Теорема 13.4 принадлежит Бенарду [1976]. Доказательство теоремы 13.3, приведенное здесь, частично основано на рассуждениях Бенарда, а частично на предыдущих результатах этой главы. Доказательство проводится в виде ряда коротких шагов.

Лемма 13.5. (i) $m(\chi_u)=1$, $1\leqslant u\leqslant e$.

(ii) *Если* $|\Lambda|=1$, *то* $m(\chi_0)\leqslant[M(\chi_0):\mathbf{Q}_p(\chi_0)]$.

(iii) *Если* $|\Lambda|\neq 1$ *и* $\lambda\in\Lambda$, *то* $m(\chi_\lambda)\mid[M(\chi_0):\mathbf{Q}_p(\chi_\lambda)]$.

Доказательство. Согласно (2.13), d_{ui} и $d_{\lambda i}$ равны 0 или 1 для всех u, λ, i. Таким образом, результат следует из (IV.9.3) и (13.1). □

Лемма 13.6. *Если* $|D|=p$, *то заключение теоремы* 13.3 *верно. В частности, оно верно при* $|\Lambda|=1$.

Доказательство. Если $|\Lambda|=1$, то $|D|=p$, так что второе утверждение следует из первого.

Предположим, что $|D|=p$. Пусть $\chi=\chi_0$, если $|\Lambda|=1$, и $\chi=\chi_\lambda$ для фиксированного $\lambda\in\Lambda$, если $|\Lambda|\neq 1$. В силу (13.5), достаточно показать, что $m(\chi)\geqslant[M(\chi):\mathbf{Q}_p(\chi)]$.

Согласно (IV.9.2), существует неразветвленное расширение K_0 поля $\mathbf{Q}_p(\chi)$ такое, что $[K_0:\mathbf{Q}_p(\chi)]=m(\chi)$ и существует $K_0[G]$-модуль, характером которого является χ. Ввиду (11.2) (ii), $M(\chi)\subseteq K_0$, так что $[M(\chi):\mathbf{Q}_p(\chi)]\leqslant m(\chi)$. □

Во всей оставшейся части параграфа будет предполагаться, что $|\Lambda|\neq 1$ и $\chi=\chi_\lambda$ для некоторого $\lambda\in\Lambda$. Ввиду (13.5) и (13.6), доказательство (13.3), будет закончено, если установить неравенство

$$m(\chi)\geqslant[M(\chi):\mathbf{Q}_p(\chi)]=[M:F]. \tag{13.7}$$

Лемма 13.8. *Если* $D\lhd G$, *то неравенство* (13.7) *верно.*

Доказательство. Пусть V — такой $\mathbf{Z}_p$-свободный $\mathbf{Z}_p[G]$-модуль, что $V_{\mathbf{Q}_p}$ неприводим и χ является конституэнтой характера модуля V. Пусть n — число неприводимых конституэнт модуля $\bar{V}_K$. Так как $D\lhd G$, то (2.15) (iv) влечет $n=m(\chi)[\mathbf{Q}_p(\chi):\mathbf{Q}_p]e$. Поскольку $[\mathbf{Q}_p(\chi):F]=(p^s-p^{s-1})/e$ для некоторого $s>0$, то

$$n=m(\chi)(p^s-p^{s-1})[F:\mathbf{Q}_p].$$

Пусть β — характер неприводимого $\mathbf{Q}_p[D]$-модуля размерности p^s-p^{s-1} над $\mathbf{Q}_p$. Тогда V_D содержит чистый подмодуль X, характером которого является β. Согласно (11.6), минимальный многочлен элемента y в $\bar{X}$ и, следовательно, в $\bar{V}$, имеет степень, не меньшую p^s-p^{s-1}. Поскольку $D\lhd G$, то D лежит в ядре любого неприводимого $\bar{\mathbf{Z}}_p[G]$-модуля. Таким образом, если W — подмодуль в $\bar{V}$, а W_0 — такой подмодуль в W, что W/W_0 неприводим, то

$W(1-y)\subseteq W_0$. Отсюда $l(V)\geqslant p^s-p^{s-1}$, следовательно, $\bar{V}_K$ имеет по крайней мере $(p^s-p^{s-1})[M:\mathbf{Q}_p]$ неприводимых конституэнт. Поэтому

$$m(\chi)(p^s-p^{s-1})[F:\mathbf{Q}_p]=n\geqslant(p^s-p^{s-1})[M:\mathbf{Q}_p].$$

Это показывает, что $m(\chi)\geqslant[M:F]$. □

Лемма 13.9. *Для любого* $\mu\in\Lambda$, $\mathbf{Q}_p(\mu)=\mathbf{Q}_p(\chi_\mu)$.

Доказательство. Группа Галуа поля F над $\mathbf{Q}_p$ транзитивно действует на множестве всех блоков, алгебраически сопряженных с B. Поскольку соответствие Брауэра коммутирует с автоморфизмами поля, то F является максимальным неразветвленным подполем в $\mathbf{Q}_p(\mu)$. Таким образом, если E — расширение F, порожденное всеми корнями степени p^a из 1, то из (2.17) следует, что

$$\mathbf{Q}_p(\mu)=E\cap\mathbf{Q}_p(\mu)=E\cap\mathbf{Q}_p(\chi_\mu)=\mathbf{Q}_p(\chi_\mu).\ \square$$

Определим отношение эквивалентности на Λ следующим образом. Пусть μ_1, $\mu_2\in\Lambda$ и ζ_i — неприводимая конституэнта характера $(\mu_i)_D$, $i=1$, 2. Определим $\mu_1\sim\mu_2$ тогда и только тогда, когда $\zeta_1^p=\zeta_2^p$. Очевидно, это отношение эквивалентности.

Если ζ_1 имеет порядок p^s, то класс эквивалентности, содержащий μ_1, состоит из $(p^s-p^{s-1})/e$ различных элементов, которые все алгебраически сопряжены. В частности, класс эквивалентности, содержащий μ_1, состоит из одного элемента тогда и только тогда, когда $\zeta_1^p=1$ и $e=p-1$.

В доказательстве (13.7) отдельно будут разбираться два случая.

Случай (i): если $\mu\in\Lambda$ и $\mu\sim\lambda$, то $\mu=\lambda$.

Случай (ii): существует такое $\mu\in\Lambda$, что $\mu\neq\lambda$ и $\mu\sim\lambda$.

Пусть θ_1, ..., θ_e — неисключительные характеры из B_0. Группа Галуа поля M над F действует на множестве $\{\theta_i\}$. Положим $T(\theta_i)=\sum_\sigma\theta_i^\sigma$, где σ пробегает группу Галуа.

Доказательство неравенства (13.7). *Случай* (i). Согласно (2.17), $\mathbf{Q}_p(\chi)=F$. Таким образом, существует неприводимый $F[G]$-модуль с характером $m(\chi)\chi$. Следовательно, существует $F[N_0]$-модуль, имеющий характер $m(\chi)\chi_{N_0}$. В силу (13.8) и (13.9), $m(\mu)=[M:F]$ для всех $\mu\in\Lambda$. Итак,

$$m(\chi)\chi_{N_0}=[M:F]\{\sum a_\mu\mu\}+\sum c_iT(\theta_i)+\eta, \tag{13.10}$$

где η есть сумма характеров из блоков, отличных от B_0. Пусть ψ — неприводимый характер Брауэра из того блока b_0 алгебры $K[C_0]$, который накрывается блоком B_0, и $d=d(\lambda, y, \psi)$ — соответствующее высшее число разложения. Поскольку кратность ψ как брауэровой конституэнты ограничения $T(\theta_i)_{C_0}$ делится на $[M:F]$, из (13.10) следует, что $[M:F]\mid m(\chi)d$.

Так как мы находимся в условии случая (i), то, согласно (2.17), $d=\pm1$, так что $[M:F]\mid m(\chi)$. □

Случай (ii). Возьмем $\mu\sim\lambda$, $\mu\neq\lambda$. Ввиду (2.17), $(\chi-\chi_\mu)_{N_0}=\pm(\lambda-\mu)$, значит, $((\chi-\chi_\mu)_{N_0}, \lambda)_{N_0}=\pm1$. Следовательно, либо $(\chi_{N_0}, \lambda)_{N_0}$, либо $((\chi_\mu)_{N_0}, \lambda)_{N_0}$ взаимно просто с $m(\lambda)$. Поскольку χ и χ_μ алгебраически

сопряжены, то $m(\chi)=m(\chi_\lambda)$. Таким образом (изменив, если необходимо, нумерацию), можно считать, что $(\chi_{N_0}, \lambda)_{N_0}$ взаимно просто с $m(\lambda)$. В силу (13.9), $m(\chi)\chi_{N_0}$ отвечает некоторому $\mathbf{Q}_p(\lambda)[N_0]$-модулю. Тогда $m(\lambda)|m(\chi)(\chi_{N_0}, \lambda)_{N_0}$, в силу (IV.9.1), следовательно, $m(\lambda)|m(\chi)$. Значит, $[M:F]|m(\chi)$, ввиду (13.8) и (13.9). □

§ 14. Дерево Брауэра и расширения поля

Пусть $K=\hat{K}$, $\chi=\hat{\chi}_\lambda$ — исключительный характер из $\hat{B}$, если $|\Lambda|\neq 1$, и $\chi=\chi_0$, если $|\Lambda|=1$. Положим $M=\mathbf{Q}_p(\chi_u)$, $1\leqslant u\leqslant e$, как определено в предыдущем параграфе. Предположим, что L' и L'' — такие поля, что

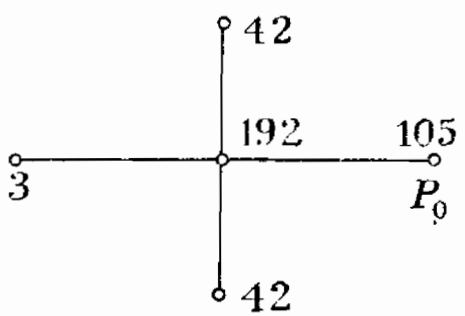
$$\mathbf{Q}_p(\chi)\subseteq L'\subseteq L''\subseteq M(\chi)\subseteq K.$$

Пусть блок B'' алгебры $L''[G]$ разбивается на алгебраически сопряженные блоки, одним из которых является $\hat{B}$, если L'' расширить до $K=\hat{K}$. Пусть блок B' в $L'[G]$ разбивается на алгебраически сопряженные блоки, одним из которых является B'', если L' расширить до L''. Пусть τ', τ'' — деревья Брауэра блоков B', B'', сответственно.

Согласно (2.9) и (2.19), существуют натуральное число m и единственная вершина P_0 в τ', являющаяся исключительной, если таковая имеется, причем τ'' будет «разверткой» τ' в следующем смысле. Каждое ребро графа τ' заменяется m ребрами в τ'', и каждая вершина, отличная от P_0, заменяется m вершинами. Вершина P_0 остается неизменной.

Согласно (13.3), вершина P_0 в τ' соответствует характеру с индексом Шура $m(\chi)$, в то время как вершина P_0 в τ'' соответствует характеру с индексом Шура $m(\chi)/m$. Таким образом, если вершины графов r', r'' сопоставлены, как в § 9, неприводимым $L'[G]$-, $L''[G]$-модулям соответственно, а не их характерам, то каждая вершина из τ' заменяется m вершинами в τ''. При этом оказывается, что все вершины, происходящие от P_0 из τ', совпадают. Таким способом индекс Шура получает естественную интерпретацию в терминах дерева Брауэра.

В качестве примера рассмотрим полупрямое произведение G группы Suz(8) с циклической группой $\langle x\rangle$ порядка 9, где x действует на Suz(8) как внешний автоморфизм порядка 3, а x^3 лежит в центре группы G. Пусть $L'=\mathbf{Q}_{13}$, а L'' — неразветвленное кубическое расширение поля $\mathbf{Q}_{13}$. Неглавный 13-блок алгебры $L''[G]$ не имеет исключительных характеров. Дерево τ' точного 13-блока B' алгебры $L'[G]$ выглядит так:



Здесь числа у вершин — это степени соответствующих характеров. Дерево τ'' — тройная развертка дерева τ', сочлененная в вершине P_0: оно совпадает с деревом главного 13-блока, изображенным в § 9.

§ 15. Неприводимые модули с циклическим вертексом

Этот параграф содержит доказательство следующего результата.

Теорема 15.1. *Пусть V — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль с циклическим вертексом $P=\langle x\rangle$. Тогда P является дефектной группой блока, содержащего V.*

Этот результат не зависит от остального материала данной главы. Он принадлежит Эрдман [1977a], ее доказательство мы здесь и дадим. В случае, когда G является p-разрешимой, он был доказан ранее Клиффом [1977]. Сначала мы установим один предварительный результат.

Лемма 15.2. *Пусть $\langle 1\rangle\neq P=\langle x\rangle\lhd G$ и V — неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль с вертексом P.*

(i) *Существует такое целое k, $0\leqslant k\leqslant|P|$, и $p\nmid k$, что V_P является проективным $\bar{R}[P]/\bar{R}[P](1-x)^k$-модулем.*

(ii) $V(1-x)=\{v\mid v\in V,\ v(1-x)^{k-1}=0\}$.

(iii) *Если $h\in\mathrm{Tr}^G_{\langle x^p\rangle}(\mathrm{Hom}_{\bar{R}[\langle x^p\rangle]}(V,V))$, то $h(V)\subseteq V(1-x)$.*

(iv) *$V/V(1-x)$ является $\bar{R}[G]$-модулем, который $\bar{R}[P]$-проективен и содержит в ядре P. Кроме того, $V/V(1-x)$ является проективным $\bar{R}[G/P]$-модулем.*

(v) *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое семейство собственных подгрупп из P. Если $H^0(G,\mathfrak{X},V)\cong\bar{R}$, то $V/V(1-x)$ неприводим.*

Доказательство. (i), (ii). Пусть V_k, $0\leqslant k\leqslant|P|$, обозначает неразложимый $\bar{R}[P]$-модуль размерности k над $\bar{R}$. Согласно (II.2.11), $(V_k^G)_P\cong|G:P|\,V_k$. Поскольку V является $\bar{R}[P]$-проективным, то $V_P\cong mV_k$ для некоторого натурального m. Так как P является вертексом модуля V, то $p\nmid k$. Отсюда прямо следуют (i) и (ii).

(iii) Ввиду (ii), достаточно показать, что $h(V(1-x)^{k-1})=(0)$. Пусть $w=v(1-x)^{k-1}\in V(1-x)^{k-1}$. В силу (ii), $wx=w$. В силу (i), $k=np+s$, где $0<s<p$ и $n\geqslant 0$. По условию, $h=\mathrm{Tr}^G_{\langle x^p\rangle}(g)$ для некоторого $g\in\mathrm{Hom}_{\bar{R}[\langle x^p\rangle]}(V,V)$. Поскольку $(1-x)^p=1-x^p$, то

$$g(w)=g(v(1-x)^s(1-x)^{np})=g(v(1-x)^s)(1-x^p)^n.$$

Из того, что $1+x+\ldots+x^{p-1}=(1-x)^{p-1}$ и $np+p-1\geqslant k$, следует, что

$$\{\mathrm{Tr}^{\langle x\rangle}_{\langle x^p\rangle}(g)\}(w)=g(w)(1+x+\ldots+x^{p-1})=g(v(1-x)^s)(1-x^p)^n(1-x)^{p-1}=0.$$

Итак,

$$h(w)=(\mathrm{Tr}^G_{\langle x\rangle}\{\mathrm{Tr}^{\langle x\rangle}_{\langle x^p\rangle}(g)\})(w)=0,$$

что и требовалось.

(iv) Так как $P \lhd G$, то $V(1-x)=\langle v(1-z) \mid v \in V, z \in P\rangle$ является $\bar{R}[G]$-модулем. Очевидно, P лежит в ядре $V/V(1-x)$.

Пусть $(V_P)^G=\oplus W_i$, где $W_1 \cong V$. Согласно (i), для всякого i и некоторого натурального m, зависящего от i, имеем $(W_i)_P \cong \cong m(\bar{R}[P]/\bar{R}[P](1-x)^k)$. Таким образом, $(V_P)^G(1-x)=\oplus W_i(1-x)$. Заметим, что $(V_P)^G(1-x)=(V(1-x)_P)^G$, так как они имеют одинаковую $\bar{R}$-размерность и $(V_P)^G(1-x) \subseteq (V(1-x)_P)^G$. Следовательно,

$$V/V(1-x) \cong W_1/W_1(1-x) \mid (V_P)^G/(V_P)^G(1-x)=$$

$$=(V_P)^G/(V(1-x)_P)^G \cong ((V/V(1-x))_P)^G.$$

Поскольку $(V/V(1-x))_P=\mathrm{Inv}_P(V/V(1-x))$, из предыдущего абзаца следует, что $((V/V(1-x))_P)^G$ является прямой суммой нескольких экземпляров $\bar{R}[G/P]_{R[G\ P]}$. Таким образом, $V/V(1-x)$ — проективный $\bar{R}[G/P]$-модуль.

(v) Поскольку любая собственная подгруппа из P содержится в $\langle x^p\rangle$, условие влечет, что $H^0(G, \langle x^p\rangle, V) \cong \bar{R}$. Из того, что $\mathrm{End}_{R[G]}(V)$ является локальным кольцом, а $\mathrm{Tr}^G_{\langle x^p\rangle}(\mathrm{Hom}_{\bar{R}[\langle x^p\rangle]}(V, V))$ — идеалом в $\mathrm{End}_{\bar{R}[G]}(V)$ в силу (II.3.7), следует, что если $h \in \in \mathrm{Hom}_{\bar{R}[G]}(V, V)$, но не является изоморфизмом, то $h \in \in \mathrm{Tr}^G_{\langle x^p\rangle}(\mathrm{Hom}_{\bar{R}[\langle x^p\rangle]}(V, V))$. Тогда, согласно (iii), $h(V) \subseteq V(1-x)$.

Допустим, что результат неверен. В силу (iv), $V/V(1-x)$ есть проективный $\bar{R}[G/P]$-модуль. Таким образом, по (I.16.8), существуют неприводимый подмодуль $M \subseteq V/V(1-x)$ и эпиморфизм f: $V/V(1-x) \to M$. Пусть t — естественная проекция V на $V/V(1-x)$, тогда строчка следующей диаграммы является точной.

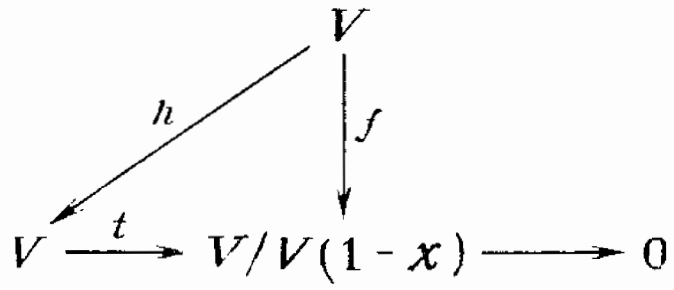
$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & & \downarrow f & & \\ V & \xrightarrow{t} & V/V(1-x) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Поскольку V_P и $(V/V(1-x))_P$ являются $\bar{R}[P]/\bar{R}[P](1-x)^k$-модулями и V_P проективен, согласно (i), то существует такой $\bar{R}[P]$-гомоморфизм h, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} & & V_P & & \\ & \swarrow^{\tilde{h}} & \downarrow f & & \\ V_P & \xrightarrow{t} & (V/V(1-x))_P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Поскольку V является $\bar{R}[P]$-проективным, существует такой $\bar{R}[G]$-

гомоморфизм h, что коммутативна следующая диаграмма:



Так как результат предполагался неверным, $f=t\circ h$ не является эпиморфизмом. Таким образом, h не является эпиморфизмом, так что $h(V)\subseteq V(1-x)$. Значит, $f=t\circ h=0$, вопреки предположению. □

Доказательство (15.1). В силу (III.4.14), можно считать, что $\bar{R}$ — поле разложения для G и всех ее подгрупп.

Пусть $N=N_G(P)$. Поскольку P циклическая, существует такая подгруппа $\tilde{G}$, что $C_G(P)\subseteq\tilde{G}\lhd N$, $p\nmid|N:\tilde{G}|$, и P централизует все p'-элементы из $\tilde{G}$. Если $\tilde{P}$ является дефектной группой некоторого блока группы $\tilde{G}$, то $P\subseteq\tilde{P}$, и значит, $C_N(\tilde{P})\subseteq\tilde{G}$. Таким образом, согласно (V.3.10), любой блок группы N регулярен относительно $\tilde{G}$.

Пусть f — соответствие Грина относительно (G, P, N). Применим (15.2) к N с $f(V)$ вместо V. В силу (III.5.10), условие утверждения (v) выполнено. Ввиду (III.7.8), достаточно показать, что если B — блок группы N, содержащий $f(V)$, то P — дефектная группа блока B.

Пусть $W=f(V)/f(V)(1-x)$, тогда W лежит в B. Согласно (15.2), W содержится в блоке дефекта 0 алгебры $\bar{R}[\tilde{G}/P]$. Поскольку $p\nmid|N:\tilde{G}|$, из теоремы Клиффорда (III.2.12) следует, что $W_{\tilde{G}}$ есть прямая сумма неприводимых модулей из блоков дефекта 0 алгебры $\bar{R}[\tilde{G}/P]$. В силу (V.4.5), каждый из них содержится в блоке алгебры $\bar{R}[\tilde{G}]$ с дефектной группой P. Следовательно, в силу (V.3.14), блок B имеет дефектную группу P. □

ГЛАВА VIII

§ 1. Группы с силовской подгруппой простого порядка

Пусть p — простое число. Цель данной главы — применить результаты главы VII для изучения групп с S_p-подгруппой порядка p. Некоторые из результатов, доказанных в этой главе, можно обобщить на случай, когда G имеет циклическую S_p-подгруппу и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Однако этот более общий случай здесь не будет рассматриваться.

Обозначения, введенные в начале главы VII, будут использоваться на протяжении параграфов 1, 2 и 3 этой главы. Дополнительно в этих параграфах будут использоваться следующие предположения и обозначения.

$K=\hat{K}$,

P — некоторая S_p-подгруппа из G, $P=\langle y\rangle$, $|P|=p$.

$C=C_G(P)$, $N=N_G(P)$.

По теореме Бернсайда о перемещении, $C=P\times H$ для некоторой p'-подгруппы H.

Для p-блока B группы G, имеющего положительный дефект, группа P играет роль D из главы VII. Однако ситуация значительно проще, чем описанная в главе VII, ибо $C=C_0=C_{a-1}$ и $N=N_0=N_{a-1}=\tilde{G}$. Если M — непроективный $\bar{R}[G]$-модуль, $\tilde{M}$ будет $\bar{R}[N]$-модулем, который отвечает M при соответствии Грина.

Буква e обозначает индекс инерции главного p-блока группы G. Согласно (VII.2.3), $|N:C|=e$.

Группа N не имеет p-блока дефекта 0. Пусть V — ненулевой неразложимый $\bar{R}[N]$-модуль. Из (VII.2.4) и (VII.2.6) следует, что V однорядный, $l(V)\leqslant p$ и V определяется с точностью до изоморфизма заданием $S(V)$ и $l(V)$. Пусть φ — неприводимый характер Брауэра группы N и $1\leqslant l\leqslant p$, и пусть $V(\varphi, l)$ — такой $\bar{R}[G]$-модуль, что $S(V(\varphi, l))$ имеет характер φ и $l(V(\varphi, l))=l$. В частности, $V(\varphi, 1)$ — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль с характером φ. Определим $V(\varphi, 0)=(0)$. Согласно (VII.2.8), композиционные факторы модуля $V(\varphi, l)$ в порядке возрастания имеют характеры Брауэра φ, $\varphi\alpha^{-1}$, ..., $\varphi\alpha^{-(l-1)}$. Следующий результат является непосредственным следствием этого факта.

Лемма 1.1. *Пусть φ — неприводимый характер Брауэра группы N и $1\leqslant l\leqslant p$. Справедливы следующие утверждения.*

(i) $V(\varphi, l)^* \cong V(\varphi^* \alpha^{l-1}, l)$.

(ii) *Пусть* $\det_{V(\varphi, l)} x$ *обозначает определитель элемента* x *в его действии на* $V(\varphi, l)$. *Тогда*

$$\det_{V(\varphi, l)}(x) = \{\det_{V(\varphi, 1)}(x)\}^l \alpha(x)^{-l(l-1)/2}.$$

§ 2. Тензорные произведения $\bar{R}[N]$-модулей

Цель этого параграфа — дать явные структурные формулы для тензорного произведения двух неразложимых $\bar{R}[N]$-модулей. Эти результаты можно найти у Фейта [1966], кроме теоремы (2.9), которая принадлежит Блау [1971a]. В случае $N = C$ результаты этого параграфа неявно содержатся у Грина [1962b].

Результаты данного параграфа были обобщены на случай циклической группы P, не обязательно простого порядка. Эта работа была начата Грином [1962b] и продолжена Сринивасан [1964b] и Релли [1969]. В конце концов Линдси [1974] нашел алгоритм, который дает полное описание тензорных произведений модулей в этом более общем случае. Как можно видеть из работы Линдси, ситуация в общем случае намного сложнее и здесь не будет разбираться.

Главный характер Брауэра будет обозначаться 1_χ или просто 1.

Лемма 2.1. Пусть φ — неприводимый характер Брауэра группы N и $1 \leqslant l \leqslant p$. Тогда

$$V(\varphi, l) = V(\varphi, 1) \otimes V(1, l).$$

Доказательство. Пусть $U(l) = V(\varphi, 1) \otimes V(1, l)$. $1 \leqslant l \leqslant p$. Согласно (VII.2.6), $V(\varphi, p)$ и $V(1, p)$ являются главными неразложимыми $\bar{R}[N]$-модулями. Ввиду (VII.2.4),

$$\dim_R V(\varphi, p) = p\varphi(1) = \dim_R U(p)$$

и $l(U(p)) = p$. Согласно (II.2.7), модуль $U(p)$ проективен, следовательно, является главным неразложимым $\bar{R}[G]$-модулем. Поскольку $S(U(p))$ имеет характер φ, то $U(p) \cong V(\varphi, p)$.

Пусть $1 \leqslant l \leqslant p$, тогда $U(l) \subseteq U(p)$ и, значит, $S(U(l))$ имеет характер φ. Поскольку $l(U(l)) = l$, то $U(l) \cong V(\varphi, l)$. □

Если φ_1, φ_2 — неприводимые характеры Брауэра группы N, то P содержится в ядрах φ_1 и φ_2. Таким образом, $V(\varphi_1, 1) \otimes V(\varphi_2, 1)$ является $\bar{R}[N/P]$-модулем и потому вполне приводим. Следовательно, модуль $V(\varphi_1, 1) \otimes V(\varphi_2, 1)$ вполне определен характером Брауэра $\varphi_1\varphi_2$. Если таблица характеров группы N/P известна, то в силу (2.1) структура тензорных произведений $\bar{R}[N]$-модулей будет ясна, как только будут описаны модули вида $V(1, s) \otimes V(1, t)$. Оставшаяся часть параграфа сосредоточена на этом вопросе. Заметим, что $V(1, l)$, $1 \leqslant l \leqslant p$, принадлежит главному p-блоку, так что H лежит в ядре модуля $V(1, l)$. Таким образом, требуется рассмотреть только модули группы Фробениуса N/H.

Лемма 2.2. *Пусть* $1\leqslant s\leqslant p$, *тогда*

$$V(1, s)\otimes V(1, p)\cong \bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{-i}, p).$$

Доказательство. Поскольку модуль $V(1, p)$ проективен, результат следует из (III.2.7). □

Метод доказательства следующего результата по существу принадлежит Грину [1962b].

Лемма 2.3. *Предположим, что* $1\leqslant m, n\leqslant p-1$ *и* $V(1, m)\otimes V(1, n)\cong \oplus_{i=0}^{k} V(\lambda_i, l_i)$. *Тогда*

$$\bigoplus_{i=0}^{k} V(\lambda_i\alpha^{m-l_i}, p)\oplus\big(V(1, p-m)\otimes V(1, n)\big)\cong$$

$$\cong\Big(\bigoplus_{j=0}^{n-1} V(\alpha^{-j}, p)\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{i=0}^{k} V(\lambda_i\alpha^{m-l_i}, p-l_i)\Big).$$

Доказательство. Имеется точная последовательность

$$0\to V(\alpha^{p-m}, p-m)\to V(\alpha^{p-m}, p)\to V(1, m)\to 0.$$

Тензорное умножение на $V(1, n)$ дает точную последовательность

$$0\to V(\alpha^{p-m}, p-m)\otimes V(1, n)\to V(\alpha^{p-m}, p)\otimes V(1, n)\to V(1, m)\otimes V(1, n)\to 0.$$

Здесь $V(\alpha^{p-m}, p)\otimes V(1, n)\cong\oplus_{j=0}^{n-1} V(\alpha^{p-m-j}, p)$, согласно (2.2), и последовательность

$$0\to\bigoplus_{i=0}^{k} V(\lambda_i\alpha^{p-l_i}, p-l_i)\to\bigoplus_{i=0}^{k} V(\lambda_i\alpha^{p-l_i}, p)\to\bigoplus_{i=0}^{k} V(\lambda_i, l_i)\to 0$$

точна. Отсюда, по лемме Шануэля (1.4.3),

$$\left(\bigoplus_{i=0}^{k} V(\lambda_i\alpha^{p-l_i}, p)\right)\oplus\big(V(\alpha^{p-m}, p-m)\otimes V(1, n)\big)\cong$$

$$\cong\left(\bigoplus_{j=0}^{n-1} V(\alpha^{p-m-j}, p)\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=0}^{k} V(\lambda_i\alpha^{p-l_i}, p-l_i)\right).$$

Результат получается теперь путем умножения этого «равенства» на $V(\alpha^{m-p}, 1)$. □

Лемма 2.4. *Предположим, что* $2\leqslant t\leqslant p-2$, *тогда*

$$V(1, 2)\otimes V(1, t)\cong V(1, t+1)\oplus V(\alpha^{-1}, t-1).$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $H=\langle 1\rangle$ и N — группа Фробениуса, так что достаточно доказать результат в случае, когда N — группа Фробениуса порядка $p(p-1)$, поскольку ограничение любого неразложимого $\bar{R}[N]$-модуля на любую подгруппу N группы P неразложимо. Так, в частности,

$\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{p-1}=1$ — все $p-1$ попарно различных неприводимых характеров Брауэра группы N.

Пусть $V=V(1,2)\otimes V(1,t)$. Так как последовательность

$$0\to V(1,t)\cong V(1,1)\otimes V(1,t)\to V\to V(\alpha^{-1},1)\otimes V(1,t)\cong V(\alpha^{-1},t)\to 0$$

точна, то $\dim_{\bar{R}} S(V)\leqslant 2$. Таким образом, $V\cong V(\lambda,m)\oplus V(\mu,n)$ для некоторых λ, μ, m, n, где $0\leqslant m\leqslant n\leqslant p$. Характер Брауэра модуля V равен $1+2\sum_{i=1}^{t-1}\alpha^{-i}+\alpha^{-t}$, значит, $t-1\leqslant m$ и $n\leqslant t+1$, так как $m+n=2t$. Как легко видеть, это влечет либо справедливость результата, либо изоморфизм $V\cong V(1,t)\oplus V(\alpha^{-1},t)$. Поэтому достаточно доказать, что $V(y-1)^t\neq(0)$.

Пусть x — элемент порядка $p-1$ в N. Выберем $\bar{R}$-базисы $\{v_0, v_1\}$, $\{w_0, \ldots, w_{t-1}\}$ соответственно в $V(1,2)$, $V(1,t)$ так, чтобы $v_i x=\alpha^{-i}(x)v_i$, $w_i x=\alpha^{-i}(x)w_i$ и $v_i y=v_i+v_{i-1}$, $w_i y=w_i+w_{i-1}$, где $v_{-1}=w_{-1}=0$. Следовательно, $(v_0\otimes w_i)(y-1)=v_0\otimes w_{i-1}$. Далее,

$$(v_1\otimes w_{t-1})(y-1)=v_0\otimes w_{t-1}+v_0\otimes w_{t-2}+v_1\otimes w_{t-2}. \tag{2.5}$$

Мы докажем индукцией по t, что $(v_1\otimes w_{t-1})(y-1)^t=t(v_0\otimes w_0)$. Это завершит доказательство леммы.

Предположим, что $t=2$, тогда (2.5) влечет

$$(v_1\otimes w_1)(y-1)^2=(v_0\otimes w_1)(y-1)+(v_0\otimes w_0)(y-1)+(v_1\times w_0)(y-1)=$$
$$=(v_0\otimes w_0)+0+(v_0\otimes w_0)=2(v_0\otimes w_0).$$

Предположим, что $t>2$, тогда, согласно (2.5),

$$(v_1\otimes w_{t-1})(y-1)^t=(v_0\otimes w_{t-1})(y-1)^{t-1}+(v_0\otimes w_{t-2})(y-1)^{t-1}+$$
$$+(v_1\otimes w_{t-2})(y-1)^{t-1}=(v_0\otimes w_0)+0+(v_1\otimes w_{t-2})(y-1)^{t-1}. \tag{2.6}$$

Поскольку $v_1\otimes w_{t-2}\in V(1,2)\otimes V(1,t-1)\subseteq V$, по индукции получаем, что

$$(v_1\otimes w_{t-2})(y-1)^{t-1}=(t-1)(v_0\otimes w_0).$$

Итак, результат следует из (2.6).

Теорема 2.7. *Предположим, что* $1\leqslant s\leqslant t\leqslant p$ *и* $s+t\leqslant p$. *Тогда*:

(i) $V(1,s)\otimes V(1,t)\cong\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{-i}, s+t-1-2i)$;

(ii) $V(1,s)\otimes V(1,p-t)\cong\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{-e}, p-t+s-1-2i)$;

(iii) $V(1,p-s)\otimes V(1,t)\cong$
$$\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{-t+1+i}, p-s-t+1+2i)\right)\otimes\left(\bigoplus_{j=0}^{t-s-1} V(\alpha^{-j}, p)\right);$$

(iv) $V(1,p-s)\otimes V(1,p-t)\cong$
$$\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{t+i}, t-s+1+2i)\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=s+t}^{p-1} V(\alpha^{j}, p)\right).$$

Доказательство. (i) доказывается индукцией по s. Если $s=1$, результат тривиален, если $s=2$ — вытекает из (2.4). Предположим, что $s\geqslant 3$. Согласно (2.4),

$$V(1, s-1)\otimes V(1, 2)\otimes V(1, t)\cong\big(V(\alpha^{-1}, s-2)\otimes V(1, t)\big)\oplus\big(V(1, s)\otimes V(1, t)\big).$$

Отсюда по индукции

$$\bigoplus_{i=0}^{s-2}\big(V(\alpha^{-i}, s+t-2-2i)\otimes V(1, 2)\big)\cong$$

$$\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{s-3} V(\alpha^{-i-1}, s+t-3-2i)\right)\oplus\big(V(1, s)\otimes V(1, t)\big).$$

Применяя (2.4), видим, что правая часть изоморфна

$$V(1, s+t-1)\oplus 2\left(\bigoplus_{i=1}^{s-2} V(\alpha^{-i}, s+t-1-2i)\right)\oplus V(\alpha^{-(s-1)}, t-s+1).$$

Теперь результат следует из единственности разложения.

(ii) Поскольку $s\leqslant p-t$, имеем $s+(p-t)\leqslant t+(p-t)\leqslant p$, так что (ii) получается из (i), если t заменить на $p-t$.

(iii) Из (2.3), где $m=s$, $n=t$, $k=s-1$, $\lambda_i=\alpha^{-i}$, $l_i=s+t-1-2i$, и из (i) следует, что

$$\left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{i-t+1}, p)\right)\oplus\big(V(1, p-s)\otimes V(1, t)\big)\cong$$

$$\cong\left(\bigoplus_{j=0}^{t-1} V(\alpha^{-j}, p)\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{i-t+1}, p-s+t+1+2i)\right).$$

Поскольку $\oplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{i-t+1}, p)=\oplus_{j=-t-s}^{t-1} V(\alpha^{-j}, p)$, результат следует из единственности разложения.

(iv) Заметим, что $\alpha^{p-1}=1$, поэтому

$$\left(\bigoplus_{j=0}^{p-s-t-1} V(\alpha^{-j}, p)\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=0}^{p-s-t-1} V(\alpha^{p-1-j}, p)\right)\cong\bigoplus_{i=s+t}^{p-1} V(\alpha^{i}, p).$$

Таким образом, результат получается из (iii) заменой t на $p-t$. □

Следствие 2.8. *Предположим, что* $1\leqslant s\leqslant(p-1)/2$. *Тогда*:

(i) $V(1, s)\otimes V(1, s)^{*}\cong\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{i}, 2i+1)$;

(ii) $V(1, p-s)\otimes V(1, p-s)^{*}\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{i}, 2i+1)\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=s}^{p-1-s} V(\alpha^{i}, p)\right)$.

Доказательство. (i) По лемме (1.1),

$$V(1, s)^{*}\cong V(\alpha^{s-1}, s)\cong V(\alpha^{s-1}, 1)\otimes V(1, s).$$

Следовательно, в силу (2.7) (i),

$$V(1, s)\otimes V(1, s)^* \cong V(\alpha^{s-1}, 1)\otimes\left\{\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{-i}, 2s-1-2i)\right\}\cong$$

$$\cong \bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{s-1-i}, 2s-1-2i).$$

Это влечет результат.

(ii) Согласно (1.1) и (2.7) (iv),

$$V(1, p-s)\otimes V(1, p-s)^* \cong$$

$$\cong V(\alpha^{p-s-1}, 1)\otimes\left\{\left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{s+i}, 2i+1)\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=2s}^{p-1} V(\alpha^j, p)\right)\right\}\cong$$

$$\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{s-1} V(\alpha^{p-1+i}, 2i+1)\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=2s}^{p-1} V(\alpha^{p-1-s+j}, p)\right).$$

Отсюда следует результат, так как $\alpha^{p-1}=1$. □

Следующий результат принадлежит Блау [1971a], данное доказательство — Линдси [1974].

Теорема 2.9. *Предположим, что* $p\neq 2$. *Пусть* λ — *линейный характер* (*т. е.* $\lambda(1)=1$) *группы* N. *Пусть* $V(\lambda, d)\otimes V(\lambda, d)=A^+\oplus A^-$, *где* A^+ — *пространство симметрических, а* A^- — *кососимметрических тензоров.*

(i) *Если* $d=s\leqslant(p-1)/2$, *то*

$$A^+\cong \bigoplus_{\substack{0\leqslant i\leqslant s-1\\ i\not\equiv s \pmod 2}} V(\lambda^2\alpha^{1-s+i}, 2i+1),$$

$$A^-\cong \bigoplus_{\substack{0\leqslant i\leqslant s-1\\ i\equiv s \pmod 2}} V(\lambda^2\alpha^{1-s+i}, 2i+1).$$

(ii) *Если* $d=p-s$, *где* $s\leqslant(p-1)/2$, *то*

$$A^+\cong\left(\bigoplus_{\substack{0\leqslant i\leqslant s-1\\ i\equiv s \pmod 2}} V(\lambda^2\alpha^{s+i}, 2i+1)\right)\oplus\left(\bigoplus_{\substack{s\leqslant i\leqslant p-1-s\\ i\equiv s \pmod 2}} V(\lambda^2\alpha^{s+i}, p)\right),$$

$$A^-\cong\left(\bigoplus_{\substack{0\leqslant i\leqslant s-1\\ i\not\equiv s \pmod 2}} V(\lambda^2\alpha^{s+i}, 2i+1)\right)\oplus\left(\bigoplus_{\substack{s\leqslant i\leqslant p-1-s\\ i\not\equiv s \pmod 2}} V(\lambda^2\alpha^{s+i}, p)\right).$$

Доказательство. Ввиду (2.1), можно считать, что $\lambda=1$, поэтому можно предполагать, что $H=\langle 1\rangle$ и N — группа Фробениуса. Следовательно, результат достаточно доказать для случая, когда N — группа Фробениуса порядка $p(p-1)$, ибо ограничение всякого неразложимого $\bar{R}[N]$-модуля на любую подгруппу из N, содержащую P, неразложимо. Так, в частности, α, α^2, ..., $\alpha^{p-1}=1$ — все $p-1$ попарно различных неприводимых характеров Брауэра N.

Пусть x — элемент порядка $p-1$ в N и $\{v_0, \ldots, v_{d-1}\}$ — такой $\bar{R}$-базис в $V(1, d)$, что $v_i x = \alpha^{-i}(x) v_i$, $0 \leqslant i \leqslant d-1$. Тогда $\{v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i \mid 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1\}$ и $\{v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \mid 0 \leqslant i < j \leqslant d-1\}$ — соответственно $\bar{R}$-базис в A^+ и в A^-. Пусть θ^+, θ^- — характеры Брауэра, отвечающие модулям A^+, A^- соответственно. Тогда

$$\theta^+ = \theta^- + \sum_{i=0}^{d-1} \alpha^{-2i}. \tag{2.10}$$

Определим $n(\alpha^j) = (-1)^j$ и продолжим n по линейности на все пространство характеров Брауэра группы N/P. Если V — некоторый $\bar{R}[N]$-модуль, положим $n(V) = n(\theta)$, где θ — характер Брауэра модуля V. Из определения и (VII.2.8) следует, что

$$n(V(\alpha^j, s)) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \text{ четно,} \\ (-1)^j, & \text{если } s \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Согласно (2.7), $A^+ \oplus A^-$ является прямой суммой d ненулевых неразложимых модулей, причем размерность каждого из них над $\bar{R}$ нечетна. В силу (2.10), $n(A^+) - n(A^-) = d$. Это показывает, что A^+ и A^- являются прямыми суммами всех неразложимых компонент V модуля $V(\lambda, d) \otimes V(\lambda, d)$, для которых соответственно $n(V) = 1$ и -1. Теперь (2.7) дает результат. □

§ 3. Группы типа $L_2(p)$

Группа G называется группой *типа* $L_2(p)$, если любой композиционный фактор G является либо p-группой, либо p'-группой, либо изоморфен $\mathrm{PSL}_2(p)$. Если $p = 2$ или 3, то $\mathrm{PSL}_2(p)$ разрешима, так что в этих случаях группа типа $L_2(p)$ оказывается p-разрешимой.

Следует подчеркнуть, что условия, введенные в § 1, действуют на протяжении данного параграфа. В частности, неявно предполагается, что *S_p-подгруппа в G имеет порядок p.*

Цель этого параграфа — доказать следующие результаты.

Теорема 3.1. *Предположим, что G не является группой типа $L_2(p)$. Пусть L — точный $\bar{R}[G]$-модуль и d — степень минимального многочлена элемента y в L. Тогда $d \geqslant \frac{2}{3}(p-1)$.*

Теорема 3.2. *Предположим, что G не является группой типа $L_2(p)$. Пусть L — такой точный $\bar{R}[G]$-модуль, что $\dim_{\bar{R}} L \leqslant p$. Тогда $C_G(P) = P \times Z$, где Z — центр группы G.*

Теорема 3.3. *Предположим, что G не является группой типа $L_2(p)$. Пусть L — точный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль и $d = \dim_{\bar{R}} L$. Допустим, что $p \geqslant 13$. Тогда $d \geqslant \frac{3}{4}(p-1)$.*

Доказательство теоремы 3.2 и более слабого утверждения (3.1) можно найти у Фейта [1966]. Доказательство (3.3) принадлежит Блау [1971а]. Этот последний результат усиливает результат Фейта [1966].

Если $3 \leqslant p \leqslant 11$, оценка в (3.1) неулучшаема. Накрывающие групп A_5, A_6, A_7 имеют точные представления степеней 2, 3, 4 соответственно над любым алгебраически замкнутым полем. Это показывает, что для $p=3, 5, 7$ неравенство в (3.1) нельзя улучшить. Группа Янко J_1 имеет точное 7-мерное представление над полем из 11 элементов. Таким образом, неравенство из (3.1) нельзя усилить и для $p=11$.

Предположим, что $p \geqslant 13$. Любая транзитивная группа перестановок p символов имеет точный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль степени $p-2$, а именно, $\mathrm{Rad}(\bar{U}_1/S(\bar{U}_1))$, где U_1 — главный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль, соответствующий главному неприводимому модулю. При $p \geqslant 13$, по-видимому, неизвестно примеров для (3.1) и (3.3) с $d<p-2$. Так что при $p \geqslant 13$ неравенства в (3.1) и (3.3) далеко не наилучшие. Различные усиления неравенства из (3.3) при специальных частных ограничениях можно найти у Блау [1974b], [1974c], [1975a], [1975d], [1976], [1980]. Близкие результаты см. Блау [1975c].

Лемма 3.4. *Теорема* 3.2 *следует из теоремы* 3.1.

Доказательство. Предположим, что (3.1) доказано. Если L проективен, то L_C проективен и потому неразложим, так как $\dim_{\bar{R}} L \leqslant p$. Если L не является проективным, то $L_N \cong \tilde{L}$, и минимальный многочлен элемента y на L имеет степень $d<p$. Таким образом, в обоих случаях (2.1) влечет $L_C \cong V \otimes (\sum_{i=1}^{m} Y_i)$, где V — неразложимый $\bar{R}[P]$-модуль, а $Y_1, \ldots, Y_m$ — неприводимые $\bar{R}[H]$-модули, сопряженные под действием N. Если $m \geqslant 2$, то $\dim_{\bar{R}} V \leqslant p/2$, и в силу (3.1), G — группа типа $L_2(p)$, вопреки предположению. Итак, $m=1$. Из неравенства $\dim_{\bar{R}} V > p/2$ следует, что $\dim_{\bar{R}} Y_1 = 1$. Следовательно, H действует скалярно на L, т. е. лежит в центре G. □

Следующий результат — это предварительная лемма, которая потребуется для доказательства (3.1).

Лемма 3.5 (Брауэр [1942b]). Предположим, что $p \geqslant 3$. Пусть M — точный неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль из главного p-блока, причем $M \cong M^*$ и $\dim_{\bar{R}} M = 3$. Тогда G типа $L_2(p)$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $G=G'$. Так как $M \cong M^*$, то $\dim_{\bar{R}} S(M) = \dim_{\bar{R}} T(M)$. Если M приводим, это означает, что все неприводимые конституэнты модуля M одномерны, хотя $G=G'$. Значит, M неприводим. Ввиду (VII.10.5), можно считать, что M является $F[G]$-модулем, где F — поле из p элементов.

Пусть A обозначает представление группы G в модуле M, т. е. для любого $x \in G$, $A(x)$ есть линейное преобразование в M. Поскольку $M \cong M^*$, существует невырожденное линейное преобразование Q пространства M, такое, что $Q^{-1}A(x)Q = A'(x^{-1})$, где $'$ — транспонирование. Транспонируя и заменяя x на x^{-1}, получаем $Q'A'(x^{-1})(Q^{-1})' = A(x)$, откуда $A(x) = Q'Q^{-1}A(x)Q(Q^{-1})'$. Тогда по лемме Шура $Q' = cQ$ для некоторого $c \in F$. Поскольку $Q'' = Q$, то $c^2 = 1$, а так как $\det Q = \det Q'$, то $c^3 = 1$. Таким образом, $c = 1$ и $Q = Q'$. Поскольку $A(x)QA'(x) = Q$ для всех $x \in G$, это означает, что G изоморфна подгруппе в $O_3(p)$. Результат следует из того, что $O'_3(p) \cong \mathrm{PSL}_2(p)$. □

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству (3.1) и (3.3). Допустим, что одно из этих утверждений неверно. Выберем контрпример G наименьшего порядка, а при заданной группе G выберем d минимальным. Без потери общности можно считать, что L неразложим. Поскольку $d<p$, то L_N не имеет ненулевых проективных прямых слагаемых, так что $L_N\cong\tilde{L}$.

Согласно (2.1) и (VII.10.1), существует такой неприводимый характер φ группы N, что

$$L_N\cong\tilde{L}\cong V(\varphi, 1)\otimes V(1, d_0),$$

где d_0 — степень минимального полинома элемента y на L. В случае (3.1) $d=d_0$. Из того, что P лежит в ядре $V(\varphi, 1)$, следует, что модуль $V(\varphi, 1)\otimes V(\varphi, 1)^*$ вполне приводим. Следовательно,

$$V(\varphi, 1)\otimes V(\varphi, 1)^*\cong\bigoplus_{i=1}^{m} Y_i,$$

где $Y_1\cong V(1, 1)$ и Y_i при $i>1$ принадлежит неглавному блоку группы N.

Доказательство теоремы 3.1. Для $p\leqslant 3$ результат тривиален, так что можно считать $p\geqslant 5$.

Сначала предположим, что $d\leqslant(p-1)/2$. Ввиду (2.8), $L_N\otimes L_N^*$ не имеет проективных прямых слагаемых. Таким образом, если $\tilde{M}\mid L_N\otimes L_N^*$, то существует такой $\bar{R}[G]$-модуль M, что $M_N\cong\tilde{M}$. По (2.8), $V(\alpha, 3)\cong V(\alpha, 3)\otimes Y_1\mid L_N\otimes L_N^*$. Пусть M — такой $\bar{R}[G]$-модуль, что $M_N\cong V(\alpha, 3)$, тогда $\dim_{\bar{R}} M=3$ и $M^*\cong M$, так как $V(\alpha, 3)^*\cong V(\alpha, 3)$. Поскольку P не содержится в ядре модуля M, это противоречит (3.5).

Следовательно, $d=p-s$, где $s\leqslant\frac{1}{2}(p-1)$. Поскольку $d<\frac{2}{3}(p-1)$, то $3s-2>p$. Согласно (2.8), $L_N\otimes L_N^*$ содержит $(p-2s)m$ проективных прямых слагаемых и для $0\leqslant i\leqslant s-1$ $L_N\otimes L_N^*$ содержит m прямых слагаемых $\tilde{M}$ с $l(\tilde{M})=2i+1$. Пусть n — число прямых слагаемых $\tilde{M}$ в $L_N\otimes L_N^*$ с $1<l(\tilde{M})<d$. Из $3s-2>p$ следует $p-s<2(s-1)+1$, так что $n=\frac{1}{2}(p-s-3)m$, если s четно, и $n=\frac{1}{2}(p-s-2)m$, если s нечетно. Следовательно, в любом случае $n\geqslant\frac{1}{2}(p-s-3)m$.

Пусть $\tilde{M}$ — такое прямое слагаемое в $L_N\otimes L_N^*$, что $1<l(\tilde{M})<d$. Поскольку $1<l(\tilde{M})$, то P не содержится в ядре $\tilde{M}$. Пусть $M-\bar{R}[G]$-модуль, соответствующий $\tilde{M}$. Минимальность d влечет, что $M_N\not\cong\tilde{M}$, следовательно, M_N содержит ненулевую проективную компоненту. Отсюда следует, что $L_N\otimes L_N^*$ имеет по меньшей мере n ненулевых проективных компонент. Следовательно, $(p-2s)m\geqslant\frac{1}{2}(p-s-3)m$, так что $p\geqslant 3s-3$. Так как $3\nmid p$, то $p\geqslant 3s-2$. □

Доказательство теоремы 3.3. Ввиду (3.1), $\varphi(1)=1$, так что $m=1$ и $d=d_0$. Предположим, что $e\leqslant\frac{1}{4}(p-1)$. Согласно (3.1), $d>e$, и потому, по (VII.2.7), $d\geqslant p-e\geqslant\frac{3}{4}(p-1)$, вопреки условию. Следовательно, $e\geqslant\frac{1}{3}(p-1)$ и $d=p-s$, где $s\leqslant e$. В силу (2.8),

$$L_N\otimes L_N^*\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{s-1}V(\alpha^i,\,2i+1)\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=s}^{p-1-s}V(\alpha^i,\,p)\right).$$

Так как $d<\frac{3}{4}(p-1)$, то $s>\frac{1}{4}(p+3)$. □

Пусть $M_i(1\leqslant i\leqslant s-1)$ — такой неразложимый $\bar{R}[G]$-модуль, что $\tilde{M}_i\cong V(\alpha^i,\,2i+1)$, и $\dim_R M_i=2i+1+m_ip$.

Нам потребуются два вспомогательных результата.

Лемма 3.7. *Предположим, что $m_i=0$ для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant s-1$. Тогда $i=s-1$ и $3s-1\geqslant p$.*

Доказательство. Поскольку P не лежит в ядре модуля $\tilde{M}_i$, минимальность d влечет $d\leqslant 2i+1$, если $m_i=0$. Если $i\neq s-1$, то $d\leqslant 2(s-2)+1=2p-2d-3$. Таким образом, $3d\leqslant 2p-3<2p-2$, вопреки (3.1). Если $i=s-1$, то $p-s=d\leqslant 2(s-1)+1$ и, значит, $p\leqslant 3s-1$. □

Лемма 3.8. *Существует не более одного значения i, при котором $m_i=1$.*

Доказательство. Предположим, что $m_i=1$. Поскольку $\tilde{M}_i^*\cong\tilde{M}_i$, то $M_i^*\cong M_i$. Таким образом, $(M_i)_N\cong\tilde{M}_i\oplus V(\alpha^j,\,p)$ для некоторого j, при котором $V(\alpha^j,\,p)\cong V(\alpha^j,\,p)^*$. Следовательно, $\alpha^{2j}=1$, в силу (1.1). Поскольку, по (3.6), $s\leqslant j\leqslant p-s-1$ и $s>(p+3)/4$, отсюда при $e=p-1$ или $(p-1)/2$ следует, что $j=(p-1)/2$. Таким образом, лемма доказана, если только $e\neq\frac{1}{3}(p-1)$. Если $e=\frac{1}{3}(p-1)$, то $j=\frac{1}{3}(p-1)$, $\frac{1}{2}(p-1)$ или $\frac{2}{3}(p-1)$.

Поскольку $G=G'$, (1.1) (ii) влечет $\alpha^{jp}\alpha^{-p(p-1)/2}=1$, т. е. $\alpha^{j-(p-1)/2}=1$, и значит, $j\equiv\frac{1}{2}(p-1)\pmod e$. Так как $e=\frac{1}{3}(p-1)$, то $j\neq\frac{1}{3}(p-1)$, $\frac{2}{3}(p-1)$. Итак, $j=\frac{1}{2}(p-1)$, и результат доказан также в этом случае. □

Предположим, что $3s-1\geqslant p$. Согласно (3.7) и (3.8), $m_i\geqslant 1$ для $1\leqslant i\leqslant s-2$ и $m_i\geqslant 2$ по крайней мере при $s-3$ значениях i, $1\leqslant i\leqslant s-2$. Тогда (3.6) влечет, что $1+2(s-3)\leqslant p-2s$, т. е. $4s-5\leqslant p\leqslant 3s-1$. Таким образом, $s\leqslant 4$ и $p\leqslant 3s-1<13$, вопреки условию. Следовательно, $3s-1<p$.

По (3.7) и (3.8), $m_i\geqslant 1$ для всех i, $1\leqslant i\leqslant s-1$, и $m_i\geqslant 2$ по крайней мере для $s-2$ значений i, $1\leqslant i\leqslant s-1$. Значит, (3.6) влечет $1+2(s-2)\leqslant p-2s$, так что $4s-3\leqslant p$ и $4d\geqslant 3p-3$, что и требовалось. □

§ 4. Характеризация некоторых групп

Цель этого параграфа — представить доказательство следующего результата, принадлежащего Брауэру и Рейнольдсу [1958].

Теорема 4.1. *Предположим, что $G=G'$ и S_p-подгруппа P группы G имеет порядок p. Пусть число S_p-подгрупп в G равно $1+np$. Если $H=O_{p'}(G)$, то имеет место одно из следующих утверждений.*

(i) $p>3$, $G/H\cong \mathrm{PSL}_2(p)$.

(ii) $p=2^a+1>3$, $G/H\cong \mathrm{SL}_2(p-1)$.

(iii) *Существуют такие натуральные числа h, u, что*

$$n=\frac{hup+u^2+u+h}{u+1}.$$

Этот результат впервые был доказан Брауэром [1943] при дополнительном условии, что $C_G(P)=P$. Доказательство (4.1), данное здесь, вполне аналогично доказательствам из вышеупомянутых статей, но для упрощения части рассуждений используются результаты § 3.

Для доказательства (4.1) нужна следующая теорема Цассенхауза [1936], которую сформулируем без доказательства.

Теорема 4.2. *Пусть G — трижды транзитивная группа перестановок нечетной степени m. Предположим, что лишь единица фиксирует не менее трех символов. Тогда $m=2^a+1$ для некоторого $a\geqslant 1$ и $G\cong \mathrm{SL}_2(2^a)$.*

Определим функцию

$$F(p,\ u,\ h)=\frac{hup+u^2+u+h}{u+1}.$$

Сначала докажем некоторые арифметические леммы.

Лемма 4.3. *Пусть n — натуральное число, а u — такое целое неотрицательное число, что $(1+up)\mid (p-1)(1+np)$. Тогда существует такое целое $h\geqslant 0$, что $n=F(p,u,h)$ и $(u+1)\mid h(p-1)$.*

Доказательство. Пусть $1+up=m_1m_2$, где $m_1\mid (p-1)$, $m_2\mid (1+np)$. Тогда

$$p\equiv 1,\ up+1\equiv 0 \pmod{m_1}.$$

Значит, $u+1\equiv 0 \pmod{m_1}$, а также

$$up+1\equiv 0,\ 1+np\equiv 0 \pmod{m_2}.$$

Это влечет, что $(n-u)p\equiv 0 \pmod{m_2}$, откуда $n-u\equiv 0 \pmod{m_2}$. Таким образом, $up+1=m_1m_2$ делит $(u+1)(n-u)$. Определим целое число h из уравнения

$$(u+1)(n-u)=h(up+1).$$

Тем самым $h(up+1)\equiv 0 \pmod{(u+1)}$. Поскольку $u\equiv -1 \pmod{(u+1)}$, отсюда следует, что $(u+1)\mid h(p-1)$. Кроме того, $n=F(p,u,h)$.

Допустим, что $h=-h'<0$, тогда $(u+1)(u-n)=h'(up+1)>0$ и

$$u^2=u(h'p+n-1)+h'+n>uh'p.$$

Таким образом, $u>h'p$. Это противоречит тому факту, что $(u+1) \mid h'(p-1)$. Следовательно, $h\geqslant 0$. □

Лемма 4.4. *Пусть n — натуральное число и v — такое натуральное число, что $(vp-1) \mid (p-1)(1+np)$. Тогда существует такое целое $h\geqslant 0$, что $u=(n-h)/v\geqslant 0$, $n=F(p, u, h)$ и $(u+1) \mid h(p-1)$. Если $u=0$, то $v=pn-n+1$.*

Доказательство. Пусть $vp-1=m_1m_2$, где $m_1 \mid (p-1)$, $m_2 \mid (1+np)$. Тогда

$$p\equiv 1,\ vp-1\equiv 0 \pmod{m_1}.$$

Следовательно, $v-1\equiv 0 \pmod{m_1}$. Аналогично,

$$vp-1\equiv 0,\ np+1\equiv 0 \pmod{m_2}.$$

Отсюда следует, что $(n+v)p\equiv 0 \pmod{m_2}$ и, значит, $n+v\equiv 0 \pmod{m_2}$. Итак, $vp-1=m_1m_2$ делит $(v-1)(n+v)$. Определим целое h равенством

$$(v-1)(n+v)=h(vp-1). \tag{4.5}$$

В частности, $h\geqslant 0$. Для фиксированных n, p, h рассмотрим $f(X)=(X-1)(X+n)-h(Xp-1)$. По (4.5), $f(v)=0$, значит, $f(v')=0$, где $v'=(h-n)/v$, так что $u=-v'$ — целое число. Поскольку $f(1)<0$, а $v\geqslant 1$, то $v'<1$, и потому $v'\leqslant 0$, так как v' целое. Следовательно, $u\geqslant 0$, а из $f(-u)=0$ следует, что $(u+1)(n-u)=h(up+1)$, и потому $n=F(p, u, h)$. Кроме того,

$$h(p-1)\equiv -h(up+1)\equiv 0 \pmod{(u+1)}.$$

Если $u=0$, то $n=h$, и (4.5) влечет $v=pn-n+1$. □

Теперь приступим к доказательству (4.1). Допустим, что результат неверен. Пусть G — контрпример минимального порядка. В серии лемм мы покажем, что предположение о существовании G ведет к противоречию.

Обозначения, введенные в начале § 1, будут использоваться в оставшейся части этого параграфа со следующими модификациями.

$t=(p-1)/e$.

B — главный p-блок группы G.

Если $t\neq 1$, то $\zeta_1, \ldots, \zeta_t$ — исключительные характеры в B.

$\chi_0, \ldots, \chi_e$ и $\delta_0, \ldots, \delta_e$ определяются как в (VII.2.12) для главного p-блока G, где χ_1 — главный характер G. Если $t=1$, пусть $\zeta_1=\chi_0$.

Лемма 4.6. (i) *Если χ_j — неприводимый характер с $\delta_j=1$, то $\chi_j(1)=1$ или $1+np$.*

(ii) *Если χ_j — неприводимый характер с $\delta_j=-1$, то $\chi_j(1)=p-1$ или $p(pn-n+1)-1$.*

(iii) *Если $t\neq 1$ и $\delta_0=1$, то $t\zeta_i(1)=1+np$, $1\leqslant i\leqslant t$.*

(iv) *Если $t\neq 1$ и $\delta_0=-1$, то $t\zeta_i(1)=p-1$ или $p(pn-n+1)-1$, $1\leqslant i\leqslant t$.*

Доказательство. Пусть χ — неприводимый характер группы G, тогда

$$\frac{1}{\chi(1)}|G:C_G(y)|\chi(y)$$

является целым алгебраическим числом. Поскольку $|G:C_G(y)|=e(1+np)=(p-1)(1+np)/t$, отсюда следует, что число

$$\frac{(1+np)(p-1)\chi(y)}{t\chi(1)}$$

целое алгебраическое.

Предположим, что $\chi=\chi_j$ — неисключительный характер из главного p-блока. Согласно (VII.2.17), $\chi_j(y)=\delta_j$ и $\chi_j(1)=\delta_j+mp$ для некоторого целого числа m. Таким образом, $\chi(1) \mid (p-1)(1+np)$.

Предположим, что $t\neq 1$ и $\chi=\zeta_i$, тогда, по (VII.2.17), $\sum_{i=1}^{t}\zeta_i(y)=\delta_0$ и $\sum_{i=1}^{t}\zeta_i(1)=\delta_0+mp$ для некоторого целого числа m. Таким образом, $t\chi(1) \mid (p-1)(1+np)$.

(i), (iii). Пусть $\chi=\chi_j$, если $\delta_j=1$, или $\chi=\sum_{i=1}^{t}\zeta_i$, если $t\neq 1$ и $\delta_0=1$. Согласно (4.3), $n=F(p, u, h)$, если $\chi(1)=1+up$. Поскольку G — контрпример, то либо $h=0$, либо $u=0$. Если $u=0$, то $\chi(1)=1$, и значит, в частности, $t=1$. Если $h=0$, то $n=F(p, u, 0)=u$ и $\chi(1)=1+np$.

(ii), (iv). Пусть $\chi=\chi_j$, если $\delta_j=-1$, или $\chi=\sum_{i=1}^{t}\zeta_i$, если $t\neq 1$ и $\delta_0=-1$. Согласно (4.4), $n=F(p, u, h)$, если $\chi(1)=vp-1$ и $u=(n-h)/v$. Так как G — контрпример, то $h=0$ или $u=0$. Если $h=0$, то $n=F(p, u, 0)=u$ и $u=n/v$, так что $v=1$ и $\chi(1)=p-1$. Если $u=0$, то $\chi(1)=p(pn-n+1)-1$, в силу (4.4). □

Следующий результат уточняет (4.6).

Лемма 4.7. (i) *Если* $\delta_j=1$, χ_j *неприводим и* $j\neq 1$, *то* $\chi_j(1)=1+np$.

(ii) *Если* $\delta_j=-1$, χ_j *неприводим, то* $\chi_j(1)=p-1$.

(iii) *Если* $t\neq 1$ *и* $\delta_0=1$, *то* $t\zeta_i(1)=1+np$, $1\leqslant i\leqslant t$.

(iv) *Если* $t\neq 1$ *и* $\delta_0=-1$, *то* $t\zeta_i(1)=p-1$.

Доказательство. (i) Поскольку $G=G'$, то $\chi_j(1)>1$, если $j\neq 1$. Результат следует из (4.6) (i).

(ii), (iii), (iv). Существует не более e значений j, для которых $\delta_j=1$, так как дерево Брауэра связно. В силу (4.6), $\chi_j(1)\leqslant 1+np$, если $\delta_j=1$, и $\chi_1(1)=1$. Пусть $\varepsilon_0=1$, если $\delta_0=1$, и $\varepsilon_0=0$, если $\delta_0=-1$. Положим $\varepsilon_1=1-\varepsilon_0$. Тогда (VII.2.15) (iii) влечет, что

$$\varepsilon_1\zeta_1(1)+\sum_{\substack{\delta_j=-1\\ j>0}}\chi_j(1)=\varepsilon_0\zeta_1(1)+\sum_{\substack{\delta_j=1\\ j>0}}\chi_j(1)<$$

$$<e(1+np)=\frac{p-1}{t}(1+np)=\frac{1}{t}\{p(pn-n+1)-1\}.$$

Таким образом, $\chi_j(1)\neq p(pn-n+1)-1$ и $t\zeta_i(1)\neq p(pn-n+1)-1$. Теперь результат следует из (4.6). □

Лемма 4.8. (i) $t\neq 1$, $t\zeta_1(1)=1+np$, $\chi_1(1)=1$ *и* $\chi_j(1)=p-1$, $2\leqslant j\leqslant e$.
(ii) $1+(1+np)/t=(p-1)(e-1)$.
(iii) *Группа* G *простая, и* $C_G(y)=\langle y\rangle$.

Доказательство. Пусть G_1 — подгруппа в G, порожденная всеми элементами порядка p из G, тогда $G_1\lhd G$ и G_1 имеет $1+np$ S_p-подгрупп.

Допустим, что $G_1\neq G$. По индукции, $p>3$ и группа $G_1/O_{p'}(G_1)$ либо изоморфна $\mathrm{PSL}_2(p)$, либо $p=2^a-1$ и $G_1/O_{p'}(G_1)\cong SL_2(p-1)$. Таким образом, $G/O_{p'}(G)$ имеет нормальную подгруппу A, и либо $A\cong\mathrm{PSL}_2(p)$, либо $p=2^a-1$ и $A\cong\mathrm{SL}_2(p-1)$. Следовательно, $G/O_{p'}(G)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов A. Ввиду $G=G'$, это значит, что $G/O_{p'}(G)\cong A$, вопреки предположению. Итак, $G=G_1$, откуда, в частности, следует, что $G/O_{p'}(G)$ — простая группа.

Пусть $G^0=G/O_{p'}(G)$. Всякий неприводимый характер из B содержит $O_{p'}(G)$ в своем ядре и потому может быть отождествлен с характером группы G^0.

Предположим, что в B найдется неглавный неприводимый характер Брауэра φ степени $\varphi(1)\leqslant(p-1)/2$. Поскольку G^0 проста, из (3.1) следует, что $G^0\cong\mathrm{PSL}_2(p)$, вопреки предположению.

(i) Предположим, что $t=1$. Пусть x — элемент из N, который переходит в элемент порядка $p-1$ в G^0. Согласно (4.7), найдется j, для которого $\chi_j(1)=p-1$. Таким образом, $(\chi_j)_N$ неприводим, и потому $(\chi_j)_{\langle x\rangle}$ является характером регулярного представления группы $\langle x\rangle$. Следовательно, линейное преобразование, соответствующее x в представлении с характером χ_j, имеет определитель -1, вопреки тому, что $G=G'$. Таким образом, $t\neq 1$.

Если $\delta_0=-1$, то, по (4.7), $\zeta_i(1)\leqslant(p-1)/2$, что невозможно. Значит, $\delta_0=1$ и $t\zeta_1(1)=1+np$, согласно (4.7).

Предположим, что $\delta_u=1$ для некоторого u, $2\leqslant u\leqslant e$. Для любого j обозначим через P_j вершину дерева Брауэра, соответствующую χ_j. Путь от P_0 до P_u включает такую вершину P_s, что $\delta_s=-1$. Поскольку P_1 является концевой точкой дерева, P_1 не встречается на этом пути. Таким образом, χ_s имеет по крайней мере две неглавные брауэровы конституэнты. Согласно (4.7), $\chi_s(1)=p-1$. Значит, существует неглавный неприводимый характер Брауэра φ с $\varphi(1)\leqslant(p-1)/2$, что неверно. Следовательно, $\delta_j=-1$ для $2\leqslant j\leqslant e$. Теперь результат следует из (4.7).

(ii) Прямое следствие из (i) и (VII.2.15) (iii).

(iii) Поскольку G^0 проста, из (3.2) следует, что S_p-подгруппа в G^0 является самоцентрализуемой, следовательно,

$$|G^0|=p\frac{p-1}{t}(1+n_0p),$$

где $1+n_0p$ — число S_p-подгрупп в G^0. Таким образом, $1+n_0p\leqslant 1+np$ и $(1+np)/t=\zeta_1(1)$ — целое число. В силу (ii), $p-1$ и $(1+np)/t$ взаимно просты. Следовательно, $(1+np)/t \mid (1+n_0p)/t$. Таким образом,

$1+np\leqslant 1+n_0p$ и $n=n_0$. Теперь из минимальности G следует, что $G=G^0$. □

Пусть θ_1, θ_2, ...—все неприводимые характеры группы G, не лежащие в B, так что каждый θ_i принадлежит блоку дефекта 0. Пусть $\theta_i(1)=pa_i$.

Пусть q—простое число, $q \mid e$, а x—элемент порядка q в N.

Лемма 4.9. (i) $t=p-2-n$. (ii) $\sum a_i^2=n$.

Доказательство. (i) Поскольку $te=p-1$, это следует из (4.8) (ii).

(ii) В силу 4.8 (i),

$$p\frac{p-1}{t}(1+np)=|G|=\sum_{i=1}^{t}\zeta_i(1)^2+\sum_{j=1}^{e}\chi_j(1)^2+\sum\theta_i(1)^2=$$

$$=1+\frac{(np+1)^2}{t}+(p-1)^2(e-1)+p^2\sum a_i^2.$$

Прямой подсчет, с учетом (i), дает нужный результат.

Лемма 4.10. *Пусть элемент $z\in G$ q-сингулярен. Тогда:*

(i) $\chi_j(z)=0$, $2\leqslant j\leqslant e$;

(ii) $\zeta_i(z)=-1$, $1\leqslant i\leqslant t$.

Доказательство. (i) В силу (4.8) (ii), $p-1$ взаимно просто с $(1+np)/t$. Поскольку $|G|=p(p-1)(1+np)/t$, отсюда следует, что χ_j принадлежит q-блоку дефекта 0 для $2\leqslant j\leqslant e$. Это влечет результат.

(ii) Следует из (i) и (VII.2.15) (iii). □

Лемма 4.11. $\theta_i(x)=a_i$ *для всех* i.

Доказательство. Пусть $\Gamma=\zeta_1+\chi_1-\sum_{j=2}^{e}\chi_j$. В силу (VII.2.15) (iii), $\Gamma(z)=0$, если $z\in N$ и $z\neq y^i$, $1\leqslant i\leqslant p-1$. Согласно (VII.2.17), для всех i имеем $\Gamma(y^i)=e-\lambda(y^i)$, где λ—точный неприводимый характер группы N. Таким образом,

$$\sum_{z\in N}\Gamma(z)=ep-\sum_{i=1}^{p}\lambda(y^i)=ep,$$

откуда $(\Gamma_N,\ 1_N)=1$.

Поскольку (4.10) (i) справедливо для любого простого делителя q числа e, то для $2\leqslant j\leqslant e$

$$\sum_{z\in N}\chi_j(z)=\sum_{i=0}^{p-1}\chi_j(y^i)=0.$$

Таким образом, $((\chi_j)_N,\ 1_N)=0$, а также $((\zeta_i)_N,\ 1_N)=0$ при $1\leqslant i\leqslant t$, по предыдущему абзацу.

Пусть ρ—характер регулярного представления группы G, тогда $(\rho_N,\ 1_N)=1+np$. Следовательно, $\left(\sum_i\theta_i(1)(\theta_i)_N,\ 1_N\right)=0$, и значит,

$$\sum a_i((\theta_i)_N,\ 1_N)=(\sum a_i(\theta_i)_N,\ 1_N)=n. \tag{4.12}$$

Если Φ—главный неразложимый характер группы N, то $\Phi=\varphi+\Sigma\lambda$, где φ—неприводимый характер группы N/P, а λ пробегает все

точные неприводимые характеры N. Для каждого i ограничение $(\theta_i)_N$ равно сумме a_i главных неразложимых характеров N. Таким образом, $\Phi(z)=\varphi(z)$ для $z\in N-P$. Отсюда следует, в частности, что $(\Phi, 1_N)\leqslant 1$, и $(\Phi, 1_N)=1$ тогда и только тогда, когда $\Phi(z)=1$ для всех $z\in N-P$. Это последнее условие выполняется в том и только том случае, если $\Phi=\Phi_0$ — главный неразложимый характер, который соответствует главному характеру Брауэра. Значит, $((\theta_i)_N, 1_N)\leqslant a_i$ для всех i, а тогда (4.9) (ii) и (4.12) показывают, что $((\theta_i)_N, 1_N)=a_i$ для всех i. Следовательно, $(\theta_i)_N=a_i\Phi_0$, так что $\theta_i(x)=a_i$. □

Лемма 4.13. *Справедливы следующие утверждения*: $e=2$, $p=2^a+1$ *для некоторого* $a>1$. *Любой элемент четного порядка из* G *сопряжен с* x. S_2*-подгруппа в* G *имеет порядок* $p-1$.

Доказательство. Пусть $\{\eta_i\}$ — множество всех неприводимых характеров группы G. Если элемент z q-сингулярен, то (4.10) дает

$$0=\sum \eta_i(1)\eta_i(z)=1-(1+np)+p\sum a_i\theta_i(z).$$

Таким образом, $\sum a_i\theta_i(z)=n$. Предположим, что z^{-1} и x не сопряжены. Тогда из (4.10) и (4.11) следует, что

$$0=\sum \eta_i(x)\eta_i(z)=1+t+\sum \theta_i(x)\theta_i(z)=1+t+\sum a_i\theta_i(z)=1+t+n>0.$$

Это противоречие показывает, что любой q-сингулярный элемент в G сопряжен с x. Таким образом, любой q-сингулярный элемент в G имеет порядок q. Кроме того, $C_G(x)$ является S_q-подгруппой в G. В силу (4.10) и (4.12),

$$|C_G(x)|=\sum|\eta_i(x)|^2=1+t+\sum a_i^2=1+t+n.$$

Ввиду (4.9) (i), $|C_G(x)|=p-1$ — четное число, т. е. $q=2$ и $p=2^a+1$. Если $a=1$, то S_2-подгруппа в G имеет порядок 2, вопреки простоте G. Поскольку N/P циклическая порядка e, то $e=2$. □

Лемма 4.14. *Пусть* S — *некоторая* S_2*-подгруппа из* G. *Тогда* $N_G(S)$ *является группой Фробениуса порядка* $(p-1)(p-2)$.

Доказательство. Согласно (4.13), любой элемент из $S-\langle 1\rangle$ имеет порядок 2, так что S абелева. Поскольку ни один элемент нечетного порядка не коммутирует с инволюцией, $N_G(S)$ является группой Фробениуса с ядром S. Согласно (4.13), $|S|=p-1$, и любые две инволюции сопряжены в G. Следовательно, по теореме Бернсайда, любые две инволюции из $N_G(S)$ сопряжены. □

Доказательство теоремы 4.1. В силу (4.13), $t=(p-1)/2$, откуда по (4.9) (i) $n=(p-3)/2$. Следовательно, $|G|=p(p-1)(p-2)$. Ввиду (4.14), G имеет представление перестановками степени p, в котором $N_G(S)$ является стабилизатором точки. Поскольку $N_G(S)$ — группа Фробениуса, всякое точное перестановочное представление $N_G(S)$ на G имеет трижды транзитивное подпредставление перестановками степени p. Поскольку $|G|=p(p-1)(p-2)$, выполнены условия (4.2), и потому $G\cong \mathrm{SL}_2(p-1)$. □

§ 5. Некоторые следствия теоремы 4.1

Два следующих результата принадлежат Брауэру и Рейнольдсу [1958]. Первый из них первоначально был доказан Брауэром при дополнительном условии, что $C_G(P)=P$. Нагаи [1952], [1953], [1956], [1959] доказал несколько результатов, связанных с исходным результатом Брауэра, в которых аналогичные заключения устанавливаются при различных предположениях относительно n. Смежный результат несколько иного рода можно найти у Ханга [1973]. Герцог [1969], [1970], [1971] и позднее Брауэр [1976b], [1979] доказали близкие результаты в случае, когда S_p-подгруппа в G циклическая, но не обязательно простого порядка.

Теорема 5.1. *Предположим, что $G=G'$ и S_p-подгруппа P из G имеет порядок p, а число S_p-подгрупп в G равно $1+np$. Пусть $H=O_{p'}(G)$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений.*

(i) $p>3$, $G/H\cong \mathrm{PSL}_2(p)$.

(ii) $p=2^a+1>3$, $G/H\cong \mathrm{SL}_2(p-1)$.

(iii) $n\geqslant (p+3)/2$.

Доказательство. Допустим, что ни (i), ни (ii) неверны. Согласно (4.1), $n=F(p, u, h)$ для некоторых натуральных чисел h и u, где

$$F(p, u, h)=\frac{hup+u^2+u+h}{u+1}.$$

Легко видеть, что функция $F(p, u, h)$ при фиксированном положительном h возрастает по u, а при фиксированном положительном u возрастает по h. Таким образом, $n\geqslant F(p, 1, 1)=(p+3)/2$. □

Следствие 5.2. *Предположим, что p — простой делитель $|G|$ и $p^3>|G|$. Допустим, что выполнены следующие дополнительные условия:*

(i) $G=G'$;

(ii) *S_p-подгруппа из G не является нормальной в G;*

(iii) *группа G не имеет нормальных подгрупп порядка 2.*

Тогда $p>3$ и либо $G\cong \mathrm{PSL}_2(p)$, либо $p-1=2^a$ и $G\cong \mathrm{SL}_2(p-1)$.

Доказательство. Пусть P — некоторая S_p-подгруппа из G. Если $|P|\geqslant p^2$, то $|G:P|<p$, и из теоремы Силова следует, что $P\trianglelefteq G$, вопреки условию. Значит, $|P|=p$. Если выполнено (5.1) (i) или (5.1) (ii), то $|G:H|>p^3/3$, откуда $H=\langle 1\rangle$, и результат доказан. Если выполнено (5.1) (iii), то

$$|G|\geqslant 2p(1+np)\geqslant 2p\left(1+\frac{1}{2}(p+3)p\right)=p(p+1)(p+2)>p^3,$$

вопреки условию. □

Следующий результат показывает, что в весьма частном случае группы, имеющие характер, который удовлетворяет условию (IV.10.1), могут быть классифицированы.

Следствие 5.3. *Предположим, что S_p-подгруппа в G имеет порядок p, а G имеет неприводимый характер η, который обращается*

в 0 на p-сингулярных элементах, причем $\eta(x)=\pm|C_G(x)|_p$ *для любого* p'*-элемента* x *из* G. *Тогда* G *— группа типа* $L_2(p)$.

Доказательство. Пусть H — последний член убывающего ряда коммутантов в G. Если $p \mid |G:H|$, то G является p-разрешимой, и результат доказан. Если $p \nmid |G:H|$, то по теореме Клиффорда характер η_H неприводим, ибо $\eta(1)=p$. Таким образом, заменяя при необходимости обозначение, можно считать, что $G=G'$.

Пусть x — некоторый p'-элемент в G и $Z=Z(G)$. Если x не коммутирует с p-элементами, отличными от 1, то $\eta(x)=\pm 1$. Если x коммутирует с p-элементом, отличным от 1, то $\eta(x)=\pm p=\pm\eta(1)$, так что $x\in Z$. Таким образом, если G имеет ровно $1+np$ S_p-подгрупп, то имеет в точности $(1+np)(p-1)|Z|$ p-сингулярных элементов. Следовательно,

$$|G|=|G|\,\|\eta\|^2=|G|-(1+np)(p-1)|Z|-|Z|+|Z|p^2.$$

Отсюда $|Z|(p^2-1)=|Z|(1+np)(p-1)$, т. е. $1+np=1+p$, так что $n=1$. Если $p=2^a+1>5$, то число S_p-подгрупп равно $1+\frac{1}{3}(p-3)p>1+p$. Поскольку $\mathrm{SL}_2(4)\cong\mathrm{PSL}_2(5)$, результат следует из (5.1). □

Доказательство следующего результата в случаях $p=5$ и 7 опирается на классификацию всех конечных групп, которые имеют точное комплексное представление степени не выше 4. Эту классификацию можно найти у Блихфельда [1917].

Теорема 5.4 (Брауэр и Туан [1945]). *Пусть* G *— простая группа,* $|G|=pq^bm$, *где* p, q *— простые,* b, m *— натуральные числа и* $m<p-1$. *Тогда* $p>3$, $q=2$ *и имеет место одно из следующих утверждений:*

(i) $p=2^a\pm 1$ *и* $G\cong\mathrm{PSL}_2(p)$;

(ii) $p=2^a+1$ *и* $G\cong\mathrm{SL}_2(p-1)$.

Обратно, группы, перечисленные в заключении теоремы, удовлетворяют ее условиям.

Доказательство. Обратное легко следует из того факта, что в случае (i) $|G|=p(p-1)(p+1)/2=2^{a-1}p(p\pm 1)$, а в случае (ii) $|G|=2^ap(p-2)$.

Очевидно, при доказательстве можно считать, что $q\nmid m$. Если $p=q$, то, по теореме Силова, S_p-подгруппа нормальна в G, вопреки условию, так что $p\neq q$. Следовательно, если P есть S_p-подгруппа в G, то $|P|=p$. Если $p=2$ или 3, то G разрешима, по теореме Бернсайда. Итак, $p\geqslant 5$.

Согласно (VII.2.15) (iii), в главном p-блоке B группы G существует характер $\zeta\neq 1_G$ такой степени $d=\zeta(1)$, что $(d, q)=1$. Таким образом, $d \mid m$ и, значит, $d<p-1$. Следовательно, ζ является исключительным характером в B, в силу (VII.2.16).

Предположим, что $d\leqslant(p+1)/2$. Если $p=5$ или 7, результат получается непосредственным перебором конечных комплексных линейных групп степени не выше 4. Если $p\geqslant 11$, то $G\cong\mathrm{PSL}_2(p)$, согласно (3.1). Тогда

$$(p+1)(p-1)=\frac{2}{p}|G|=2q^bm.$$

Так как $(p+1, p-1)=2$, то q^b делит либо $p+1$, либо $p-1$. Следовательно, либо $p-1=q^b$ и $p+1=2m$, либо $p+1=q^b$ и $p-1=2m$. В обоих случаях $q=2$, и имеет место (i).

Предположим, что $d>(p+1)/2$. Поскольку $d<p$, из (3.2) следует, что $C_G(P)=P$. Положим $e=|N_G(P):P|$ и $t=(p-1)/e$. Согласно (VII.2.16), $d=p-e$. Пусть $e=q^ch$, где $h \mid m$, тогда $d=p-q^ch$, так что $(d, h)=1$. Таким образом, $dh \mid m$. Поскольку $m/2<d$, отсюда следует, что $h=1$, значит, $e=q^c$ и $d=p-q^c$. Так как $d<p-1$, то $c>0$.

Эти рассуждения показывают, что

$$1+d=1+p-q^c=2+te-q^c=2+(t-1)q^c. \tag{5.5}$$

Если $q\neq 2$, то (VII.2.15) (iii) влечет существование в B такого неглавного неисключительного характера χ, что $(\chi(1), q)=1$. Следовательно, $\chi(1) \mid m$, откуда $\chi(1)<p-1$, что невозможно, ибо $\chi(1)\equiv\pm 1 \pmod p$, в силу (VII.2.16), и $\chi(1)>1$. Следовательно, $q=2$.

Допустим, что $c>1$. Тогда (5.5) и (VII.2.15) (iii) показывают, что в B существует такой неприводимый характер $\chi\neq 1_G, \zeta_i$, что $\chi(1)\not\equiv 0 \pmod 4$, т. е. $\chi(1)=n$ или $2n$, где $n \mid m$. Так как $\chi(1)\leqslant 2n<2(p-1)$ и $\chi(1)\equiv\pm 1 \pmod p$, то $\chi(1)=p\pm 1$, откуда $n=(p\pm 1)/2$. Из того, что $n \mid m$ и $m<2n$, следует, что $m=(p\pm 1)/2$. Значит, $d\leqslant(p+1)/2$, вопреки предположению. Итак, $c=1$, следовательно, $d=p-2$ и $m=p-2$. Таким образом, $e=2$ и $|G|=p2^b(p-2)$.

Поскольку $e=2$, в B имеется единственный неприводимый характер $\chi\neq 1_G, \zeta_i$. Согласно (VII.2.15) (iii), $\chi(1)=p-1$, значит, $(\chi(1), m)=1$, и потому $p-1=2^a$. В силу (IV.4.23), χ не принадлежит 2-блоку полного дефекта b группы G. Поскольку $p-2$ нечетно, χ — единственный неприводимый характер из B, не принадлежащий 2-блоку группы G дефекта b. Поскольку $C_G(P)=P$, в G нет элементов порядка $2p$. Значит, в силу (IV.4.24), $\chi(1)\equiv 0 \pmod{2^b}$, следовательно, $\chi(1)=2^b$ и $|G|=p(p-1)(p-2)$. Так как $e=2$, это влечет, что G содержит в точности $\left(1+\frac{1}{2}(p-3)p\right)$ S_p-подгрупп. Теперь утверждение (ii) следует из (5.1). □

§ 6. Группы перестановок простой степени

Пусть G — транзитивная группа перестановок простой степени p. Тогда S_p-подгруппа группы G имеет порядок p. Таким образом, для изучения G применим материал главы VII. См., например, Ито [1960a], [1960b], [1962b], [1963a], [1963b], [1963c], [1964], [1965a], [1965b], Михлер [1976a], Нейман [1972a], [1972b], [1973], [1975], [1976]. Аналогично, методы главы VII могут быть применены к транзитивным группам перестановок степеней $2p$ и $3p$, если предполагать, что p^2 не делит порядка такой группы. См., например, Ито [1962c], [1962d], Л. Скотт [1969], [1972]. В этом параграфе мы докажем лишь классический результат Бернсайда и теорему

Неймана. Близкие результаты см. также у Клемма [1975], [1977], Мортимера [1980].

Теорема 6.1. *Пусть* φ_0 *— главный характер Брауэра группы* G, *а* Φ_0 *— соответствующий главный неразложимый характер для некоторого простого* p. *Предположим, что* $\Phi_0(1)=p$ *и* S_p*-подгруппа* P *группы* G *не является нормальной в* $G/O_{p'}(G)$. *Тогда*:

(i) $\Phi_0=1_G+\chi$, *где* χ *неприводим*;

(ii) $\chi=\varphi_0+\varphi$ *как характер Брауэра, где* φ *— неприводимый характер Брауэра.*

Доказательство. Так как $\Phi_0(1)=p$, то $|P|=p$. Пусть B — главный p-блок группы G. Поскольку $O_{p'}(G)$ лежит в ядре любого модуля из B, можно считать, что $O_{p'}(G)=\langle 1\rangle$. Характер φ_0 является брауэровой конституэнтой кратности 1 в любой неприводимой конституэнте характера Φ_0 в силу (VII.2.13), так что (i) следует из (ii) при $\chi=\Phi_0-1_G$. Итак, достаточно доказать (ii).

Пусть G_0 — подгруппа в G, порожденная всеми элементами порядка p. Так как $O_{p'}(G)=1$ и P не является нормальной подгруппой в G, то G_0 проста. Достаточно доказать результат в случае $G=G_0$. Итак, можно считать, что $G=G_0$ — простая группа.

Допустим, что результат неверен. Тогда $\chi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2$ как характер Брауэра, где φ_1 — неприводимый характер Брауэра, $\varphi_1\neq\varphi_0$ и $\varphi_1(1)\leqslant(p-1)/2$. Значит, ввиду (3.1), G — группа типа $L_2(p)$. Поэтому $p>3$ и $G\cong\mathrm{PSL}_2(p)$, так как группа G проста. Легко видеть, и это хорошо известно, что любой p'-элемент в G сопряжен со своим обратным. Таким образом, любой неприводимый характер Брауэра группы G является веществennозначным. Значит, согласно (VII.10.6), дерево Брауэра для G является прямолинейным отрезком, так что χ имеет не более двух неприводимых брауэровых конституэнт. Поскольку одной из них является φ_0, (ii) доказано. □

Теорема 6.2. *Пусть* G *— транзитивная группа перестановок степени* p, *где* p *— простое число. Пусть характер* Φ_0 *определен, как в* (6.1). *Тогда* Φ_0 *является характером любого представления группы* G *перестановками* p *символов.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа индекса p в G. Тогда $p\nmid|H|$. Характер, отвечающий перестановочному представлению на смежных классах по H, есть $(1_H)^G$. Результат следует из соотношений Накаямы (III.2.6). □

Группа G может иметь два неэквивалентных транзитивных перестановочных представления степени p. Это происходит в точности тогда, когда G имеет две несопряженных подгруппы индекса p. Однако (6.1) показывает, что любые два таких перестановочных представления определяют один и тот же характер и, следовательно, эквивалентны как комплексные линейные представления. Изучение этого явления приводит к рассмотрению некоторых симметричных блок-схем; см. Ито [1967b].

Теорема 6.3 (Бернсайд). *Пусть* G *— транзитивная группа перестановок степени* p *для некоторого простого* p. *Предположим, что*

S_p—подгруппа из G не является нормальной в G. Тогда G дважды транзитивна.

Доказательство. Согласно (6.1) и (6.2), перестановочное представление группы G на p символах имеет характер $1_G+\chi$, где χ неприводимый характер. Значит, G дважды транзитивна. □

Теорема 6.4 (Нейман [1972a]). *Пусть G—транзитивная группа перестановок некоторой простой степени p. Предположим, что S_p-подгруппа P из G не является нормальной в G и $|N_G(P)|$ четен. Тогда G трижды транзитивна.*

Прежде чем доказывать (6.4), мы докажем общий результат о дважды транзитивных группах перестановок, идущий от Фробениуса.

Пусть G—дважды транзитивная группа перестановок на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Пусть F—поле характеристики 0, и пусть V есть $F[G]$-модуль с таким F-базисом $\{v_1, \ldots, v_n\}$, что для любого $z\in G$ имеем $v_iz=v_{iz}$. Пусть $1_G+\chi$ является характером модуля V. Положим $V\otimes V=A_F^+\oplus A_F^-$, где A_F^+—пространство симметрических тензоров, а A_F^-—пространство кососимметрических тензоров.

Пусть H_0—подгруппа в G, состоящая из всех $z\in G$, которые фиксируют v_1 и v_2, а H—подгруппа в G, состоящая из всех $z\in G$, которые оставляют инвариантным множество $\{v_1, v_2\}$. Поскольку G дважды транзитивна, $|H:H_0|=2$. Пусть $\beta_0=1_H$, β_1—неприводимые характеры группы H, которые не содержат H_0 в своих ядрах.

Лемма 6.5. (i) *Модуль A_F^+ определяет характер $\beta_0^G+1_G+\chi$.*

(ii) *Модуль A_F^- определяет характер β_1^G.*

(iii) $(\chi, \beta_1^G)\neq 0$.

Доказательство. (i) Множество $\{v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i \mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant p\}$ является F-базисом в A_F^+, на котором G действует как группа перестановок. Поскольку G дважды транзитивна на $\{v_i\}$, имеются две орбиты: $\{2v_i\otimes v_i \mid 1\leqslant i\leqslant p\}$ и $\{v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i \mid 1\leqslant i<j\leqslant p\}$. Первая орбита порождает $F[G]$-модуль, изоморфный V, а вторая имеет стационарную подгруппу H. Значит, A_F^+ определяет требуемый характер.

(ii), (iii). Множество $\{v_i\otimes v_j-v_j\otimes v_i \mid 1\leqslant i<j\leqslant p\}$ является F-базисом в A_F^-, на котором G действует как мономиальная группа. Пусть V_{ij}—одномерное F-подпространство, натянутое на $v_i\otimes v_j-v_j\otimes v_i$. Поскольку G дважды транзитивна на $\{v_i\}$, она транзитивна на множестве подпространств V_{ij}, и H совпадает с подгруппой в G, состоящей из всех элементов, которые сохраняют V_{12}. Поскольку подгруппа H_0 состоит из всех элементов в G, которые оставляют неподвижным $v_1\otimes v_2-v_2\otimes v_1$, то модуль A_F^- определяет характер β_1^G. Это доказывает (ii).

Для $1\leqslant i\leqslant p$ положим $w_i=\sum_{j\neq i}(v_i\otimes v_j-v_j\otimes v_i)$. Пусть F-подпространство W порождено $\{w_i\}$. Если $z\in G$ и $v_iz=v_k$, то $w_iz=w_k$. Таким образом, W является $F[G]$-модулем, а линейное отображение f: $V\to W$, определенное равенством $f(v_i)=w_i$, является $F[G]$-гомоморфизмом. Так как $\sum_{i=1}^p w_i=0$, то $\sum_{i=1}^p v_i$ порождает ядро отображения f. Следовательно, W имеет характер χ, а тогда, в силу (ii), $(\chi, \beta_1^G)\neq 0$. □

Начиная отсюда и до конца параграфа будем предполагать, что группа G удовлетворяет условиям теоремы 6.4.

Группа $N=N_G(P)$ является группой Фробениуса. Из $N\neq G$ следует, что $p\neq 2$. По условию, в N существует элемент x порядка 2. Согласно (6.3), группа G дважды транзитивна. Пусть H, H_0, β_0, β_1 определены, как раньше.

Мы будем использовать обозначения, введенные в § 1.

Пусть R-свободный $R[G]$-модуль X получен путем тензорного умножения на R перестановочного модуля степени p. Согласно (6.1) и (6.2), X обладает характером $1_G+\chi$, где χ неприводим. Согласно (6.1), как характер Брауэра $\chi=\varphi_0+\varphi$, где φ — неприводимый характер Брауэра. Пусть Φ_0, Φ — характеры главных неразложимых $R[G]$-модулей, которые отвечают соответственно характерам φ_0, φ.

Пусть $X\otimes X=A^+\oplus A^-$, где A^+ — подпространство симметрических тензоров, а A^- — подпространство кососимметрических тензоров.

Группа $P\langle x\rangle$ имеет ровно 2 неприводимых характера Брауэра. Пусть η_0, η_1 — характеры соответствующих главных неразложимых $R[P\langle x\rangle]$-модулей, причем η_0 отвечает главному характеру Брауэра.

Лемма 6.6. (i) *Модуль A^+ проективен, и $(A^+)_{P\langle x\rangle}$ определяет характер* $\frac{1}{2}(p+1)\eta_0$.

(ii) *Модуль A^- проективен, и $(A^-)_{P\langle x\rangle}$ определяет характер* $\frac{1}{2}(p-1)\eta_1$.

Доказательство. Поскольку модуль X является проективным и $\mathrm{Inv}_G X\neq(0)$, из § 1 следует, что $\bar{X}_N\cong V(1, p)$. Следовательно, согласно (2.9),

$$\bar{A}_N^+\cong\bigoplus_{i=0}^{(p-1)/2} V(\alpha^{2i},\ p),\quad \bar{A}_N^-\cong\bigoplus_{i=0}^{(p-3)/2} V(\alpha^{2i+1},\ p).$$

Поскольку $\alpha(x)=-1$, отсюда следует, что $\frac{1}{2}(p+1)\eta_0$, $\frac{1}{2}(p-1)\eta_1$ являются характерами Брауэра модулей $(\bar{A}^+)_{P\langle x\rangle}$, $(\bar{A}^-)_{P\langle x\rangle}$ соответственно. Поскольку A^+, A^- — прямые слагаемые модуля $X\otimes X$, они оба проективны. Лемма доказана. □

Лемма 6.7. $(\chi,\ \beta_0^G)=1$.

Доказательство. Согласно (6.5), $\bar{A}^-$ имеет характер β_1^G. В силу (6.6), A^- проективен. Таким образом, $\beta_1^G=a_0\Phi_0+a_1\Phi+\theta_1$, где $(\chi,\ \theta_1)=0$. Из теоремы взаимности Фробениуса следует, что $(\beta_1^G,\ 1_G)=0$, т. е. $a_0=0$. В силу (6.5) (iii), $a_1=(\beta_1^G,\ \chi)\neq 0$. Согласно (6.6), $(\beta_1^G)_{P\langle x\rangle}=c_1\eta_1$ для некоторого натурального числа c_1, значит, $\Phi_{P\langle x\rangle}=c\eta_1$ для некоторого натурального числа c.

Согласно (6.5), A^+ имеет характер $\beta_0^G+\Phi_0$, а, в силу (6.6), A^+ проективен. Значит, $\beta_0^G+\Phi_0=b_0\Phi_0+b_1\Phi+\theta_0$, где $(\chi,\ \theta_0)=(1_G,\ \theta_0)=0$. Ввиду (6.6), $(\beta_0^G+\Phi_0)_{P\langle x\rangle}=c_0\eta_0$ для некоторого натурального c_0. Если $b_1\neq 0$, это влечет, что $\Phi_{P\langle x\rangle}=c'\eta_0$ для некоторого натурального c',

вопреки результату предыдущего абзаца. Следовательно, $\beta_0^G+\Phi_0=b_0\Phi_0+\theta_0$, откуда по теореме взаимности Фробениуса $(\beta_0^G, \chi)=(\beta_0^G, 1_G)=1$. □

Доказательство теоремы 6.4. Выберем обозначения так, что G действует на $\{1, \ldots, p\}$ как транзитивная группа перестановок и элемент x оставляет 1 неподвижной, т. е. $x\in G_1$. Перестановочное представление группы G на множестве неупорядоченных пар $\{i, j\}$ транзитивно, и H — подгруппа, состоящая из всех элементов, сохраняющих $\{1, 2\}$. Таким образом, это перестановочное представление имеет характер β_0^G. Ввиду (6.7) и взаимности Фробениуса,

$$((\beta_0^G)_{G_1}, 1_{G_1})=(\beta_0^G, (1_{G_1})^G)=(\beta_0^G, 1+\chi)=2.$$

Значит, G_1 имеет ровно две орбиты на множестве неупорядоченных пар $\{i, j\}$. Ими необходимо должны быть $\Delta_1=\{\{1, i\} \mid 2\leqslant i\leqslant p\}$ и $\Delta=\{\{i, j\} \mid i\neq 1, j\neq 1\}$. В частности, G_1 транзитивна на Δ.

Допустим, что результат неверен. Тогда G_1 не является транзитивной на множестве упорядоченных пар (i, j), где $2\leqslant i\neq j\leqslant p$. Поскольку G_1 транзитивна на Δ, имеются 2 орбиты Γ_1, Γ_2, причем $(i, j)\in\Gamma_1$ тогда и только тогда, когда $(j, i)\in\Gamma_2$. Поскольку $x\in G_1$ и x переставляет некоторые пары, это невозможно. □

§ 7. Характеры степени, меньшей $p-1$

Предположим, что S_p-подгруппа в G имеет порядок p и G не является группой типа $L_2(p)$. Пусть χ — точный неприводимый характер группы G. Если $p\geqslant 13$, то, согласно (3.3), $\chi(1)\geqslant\frac{3}{4}(p-1)$. Это уже усиливает в случае $p\geqslant 13$ более ранние результаты Брауэра [1942b] и Туана [1944]. Параграфы 7—10 посвящены доказательству следующих трех результатов, которые усиливают вышеупомянутое неравенство. Первый из них включает результаты Брауэра [1942b] и Туана [1944]. Второй обобщает более ранние результаты Брауэра [1966c] и Хайдена [1963]. В изложении третьего результата мы будем следовать доказательству, данному Блау [1975b]. В действительности, (7.1) является следствием более общего результата (8.1).

Теорема 7.1 (Фейт [1967b]). *Пусть G — конечная группа, центр Z которой имеет нечетный порядок. Пусть p — простое число, $p>7$ и P — некоторая S_p-подгруппа из G. Предположим, что $|P|=p$ и P не является нормальной подгруппой в G.*

Пусть ζ — точный неприводимый характер группы G. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

(i) $G/Z\cong \mathrm{PSL}_2(p)$, $\zeta(1)=(p\pm 1)/2$;

(ii) $\zeta(1)\geqslant p-2$ [i].

---

[i] Обобщение этой теоремы на случай произвольной циклической группы P см. у Блау [1985.*]. — *Примеч. пер.*

Теорема 7.2. (Блау [1971b]). *Пусть G — конечная группа с центром Z. Пусть простое число $p>7$ и P — некоторая S_p-подгруппа в G. Предположим, что $|P|=p$ и P не является нормальной подгруппой в G. Пусть ζ — точный неприводимый характер группы G и t обозначает число классов сопряженных элементов порядка p. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(i) $G/Z\cong \mathrm{PSL}_2(p)$, $\zeta(1)=\frac{1}{2}(p\pm 1)$, $t=2$;

(ii) $\zeta(1)\geqslant p-1$;

(iii) $\zeta(1)\geqslant p+\frac{3}{2}-\sqrt{p+\frac{5}{4}}$, $p\leqslant t^2-3t+1$.

Теорема 7.3 (Фейт [1967b], [1974]). *Пусть G — конечная группа с центром Z. Пусть простое $p>5$ и P — некоторая S_p-подгруппа в G. Предположим, что $|P|=p$, P не является нормальной подгруппой в G и G имеет точный неприводимый характер ζ степени $\zeta(1)=p-2$. Тогда $p=2^a+1$ и $G\cong \mathrm{SL}_2(p-1)\times Z$.*

Используя результат Фейта [1964] и считая, что (7.1), (7.2) и (7.3) уже доказаны, можно показать, что эти утверждения верны и без предположения $|P|=p$.

Когда $p=2$ или 3, (7.1), (7.2) и (7.3) верны и тривиальны. Если $p=5$, то (7.2) и (7.3) неверны, ибо накрывающая $\tilde{A}_6$ группы A_6 имеет точный неприводимый характер степени 3. Эта группа имеет 2 класса элементов порядка 5, но $5>2^2-3\cdot 2+1$. В случае $p=7$ (7.1) и (7.2) неверны, так как накрывающая $\tilde{A}_7$ группы A_7 имеет точный неприводимый характер степени 4. Эта группа имеет 2 класса элементов порядка 7, но $7>2^2-3\cdot 2+1$.

В качестве следствия из (7.3) мы можем получить следующий результат, который в частном случае усиливает (6.4).

Теорема 7.4 (Ито [1960a]). *Пусть простое $p>2$, G — группа перестановок степени p и P — некоторая S_p-подгруппа в G. Предположим, что $|N_G(P)|=2p$. Тогда либо $P\lhd G$, либо $p-1=2^a$ и $G\cong \mathrm{SL}_2(p-1)$.*

Доказательство. Если $p=3$ или 5, это легко проверить. Предположим, что $p>5$. Главный p-блок B группы G содержит характеры степеней 1 и $p-1$. Поскольку $|N_G(P):P|=2$, все они являются неисключительными характерами блока B. Таким образом, в силу (VII.2.15), исключительный характер из B имеет степень $p-2$. Результат следует из (7.3). □

Во всей оставшейся части главы будут использоваться обозначения, введенные в § 1. Дополнительно будут использоваться следующие обозначения.

$\tilde{G}=N=N_G(P)$, $C=C_G(P)$.

$e=|N:C|$, t — число сопряженных классов элементов порядка p в G, так что $te=p-1$.

Мы будем интересоваться группами G, удовлетворяющими следующим условиям.

(i) $G=G'$ и G/Z — простая группа (Z — центр группы G).

(ii) $p>5$, $1<e<p-1$. В N существует такая циклическая подгруппа E порядка e, что $N=EC$ и $E\cap C=\langle 1\rangle$.

(iii) $C=P\times Z$, группа Z циклическая и $(|Z|, e)=1$.

(iv) G не является группой типа $L_2(p)$. Существует точный неприводимый характер ζ группы G степени $\zeta(1)=p-e$. } (*)

Лемма 7.5. *Теоремы* 7.1, 7.2 *и* 7.3 *достаточно доказать для групп* G, *удовлетворяющих* (*).

Доказательство. Допустим, что G — контрпример к (7.1), (7.2) или (7.3) наименьшего порядка. Мы покажем, что G удовлетворяет (*).

Поскольку G — контрпример, $\zeta(1)<p-1$. Пусть G_0 — подгруппа в G, порожденная всеми элементами порядка p из G. Теорема В Холла — Хигмана (VII.10.2) влечет, что $O_{p'}(G_0)$ лежит в центре группы G_0. Ввиду того, что P не является нормальной подгруппой в G_0, группа $G_0/G_0\cap Z$ проста, и $G_0=G_0'$.

Если $G\neq G_0$, то минимальность $|G|$ влечет, что группа $G_0/G_0\cap Z$ изоморфна $\mathrm{PSL}_2(p)$ для $p>7$ или $\mathrm{SL}_2(2^a)$ для $2^a=p-1>4$. Мультипликаторы Шура этих групп хорошо известны. Поскольку G_0 порождена элементами порядка p, из этого вытекает, что G_0 изоморфна одной из групп $\mathrm{PSL}_2(p)$, $\mathrm{SL}_2(p)$ для $p\geqslant 7$ или группе $\mathrm{SL}_2(2^a)$ для $2^a=p-1>4$. Ни одна из этих групп не допускает внешнего автоморфизма, который стабилизировал бы характер степени, меньшей $p-1$. Значит, $G=G_0Z$ и G не является контрпримером. Следовательно, $G=G_0$, группа G/Z проста, $G=G'$ и выполнено (i).

Так как G — контрпример, G не является группой типа $L_2(p)$. Тогда, согласно (3.1), $\zeta(1)>\frac{1}{2}(p-1)$, а, по (3.2), $C=P\times Z$. Отсюда, ввиду (VII.2.16), $\zeta(1)=p-e$, и выполнено (iv). Поскольку G обладает точным неприводимым характером, Z циклический. Кроме того, $|Z|\mid\zeta(1)=p-e$, откуда $(|Z|, e)=1$, и (iii) выполнено.

Поскольку $G=G'$, то $1<\zeta(1)<p-1$, так что $1<e<p-1$, в силу (iv). Группа N/C циклическая как группа автоморфизмов группы P. Абелевость N/P влечет существование в N/Z циклической подгруппы E порядка e. Но так как $(e, |Z|)=1$, (ii) также выполнено. □

На всю оставшуюся часть этого параграфа предполагаем, что выполнены условия (*).

Поскольку характер ζ точный, существует такой точный неприводимый характер η центра Z, что $\zeta(z)=\eta(z)\zeta(1)$ для $z\in Z$.

Существует биективное соответствие между p-блоками дефекта 1 группы G и характерами η^u, $0\leqslant u\leqslant|Z|-1$. Следовательно, по первой основной теореме о блоках (III.9.7), G имеет в точности $|Z|$ p-блоков дефекта 1. Пусть B_0, B_1, ... обозначают все p-блоки дефекта 1, причем нумерация выбрана так, что если θ — характер из B_u, то $\theta_Z=\theta(1)\eta^u$. В частности, B_0 — главный p-блок.

Поскольку группа N/P абелева, индекс инерции блока B_u $(0 \leqslant u \leqslant |Z|-1)$ равен e.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ обозначают все неприводимые характеры N/Z, которые не содержат P в своих ядрах.

Пусть $\zeta_1^{(u)}, \ldots, \zeta_t^{(u)}$, $0 \leqslant u \leqslant |Z|-1$, обозначают исключительные характеры блока B_u. Определим $\delta(u) = \pm 1$ условием $\sum_{i=1}^{t} \zeta_i^{(u)}(1) \equiv \delta(u) \pmod{p}$. Таким образом, $\delta(u) = \delta_0$ для блока B_u, как установлено в § 2 гл. VII. Согласно (VII.2.17), нумерацию можно выбрать так, чтобы для любого u, $0 \leqslant u \leqslant |Z|-1$,

$$\zeta_i^{(u)}(y^s z) = -\delta(u)\lambda_i(y^s)\eta^u(z) \tag{7.6}$$
$$(1 \leqslant s \leqslant p-1,\ z \in Z,\ 1 \leqslant i \leqslant t).$$

Лемма 7.7. *Пусть X — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль с характером ξ. Предположим, что $\xi_Z = \xi(1)\eta^u$. Пусть $\xi = \beta + \gamma + \rho$, где $\beta = \sum_{j=1}^{t} h_j \zeta_j^{(u)}$, γ — характер из B_u, ортогональный всем $\zeta_j^{(u)}$, а ρ ортогонален всем характерам из B_u. Положим $h = \sum_{j=1}^{t} h_j$. Предположим, что $p > 7$, $e \geqslant 3$ и $t \geqslant 3$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) *Предположим, что $\bar{X}$ неразложим и $\xi(1) \equiv e \pmod{p}$ или $\xi(1) \equiv e+1 \pmod{p}$. Тогда имеется одна из следующих возможностей:*

(i) $\delta(u) = 1$; $h \geqslant t-1$;

(ii) $\delta(u) = -1$; $h \geqslant 1$.

(II) *Предположим, что $\bar{X} = W_1 \oplus W_2$, где каждый модуль W_i неразложим, и $\xi(1) \equiv 2e \pmod{p}$. Тогда имеется одна из возможностей:*

(i) $\delta(u) = 1$; $h \geqslant t-2$;

(ii) $\delta(u) = -1$; $h \geqslant 2$.

Доказательство. Пусть ε — точный неприводимый характер группы P. Для любого i, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, и любого R-свободного $R[G]$-модуля Y обозначим через $a_s(Y)$ кратность ε^s как конституэнты характера модуля Y_P. Если θ — характер модуля Y, примем $a_s(\theta) = a_s(Y)$.

Если θ — неприводимая конституэнта характера ρ, то $\theta_Z = \theta(1)\eta^u$ и θ не лежит в B_u. Следовательно, θ лежит в блоке дефекта 0, так что $a_s(\theta) = a_0(\theta)$ для $0 \leqslant s \leqslant p-1$. Поэтому

$$a_s(\xi) - a_k(\xi) = a_s(\beta) - a_k(\beta) + a_s(\gamma) - a_k(\gamma) \tag{7.8}$$
$$(0 \leqslant s, k \leqslant p-1).$$

Если θ — неприводимая конституэнта характера γ, то, в силу (VII.2.17), $a_s(\theta) = a_k(\theta)$ для $1 \leqslant s, k \leqslant p-1$ и $a_0(\theta) - a_s(\theta) \equiv \theta(1) \pmod{p}$ для $1 \leqslant s \leqslant p-1$. Следовательно, $a_0(\gamma) - a_1(\gamma) \equiv \gamma(1) \pmod{p}$, и (7.6) дает

$$\xi(1) \equiv -\delta(u)eh + a_0(\gamma) - a_s(\gamma) \pmod{p} \quad (1 \leqslant s \leqslant p-1). \tag{7.9}$$

Согласно (7.6),

$$a_s(\beta) - a_k(\beta) = -\delta(u)\left\{ a_s\left(\sum_{j=1}^{t} h_j\lambda_j\right) - a_k\left(\sum_{j=1}^{t} h_j\lambda_j\right)\right\} \tag{7.10}$$
$$(0 \leqslant s, k \leqslant p-1).$$

При доказательстве можно считать, что $h\leqslant t-1$, так как иначе нечего доказывать. Тогда, ввиду (7.10), найдется m, $1\leqslant m\leqslant p-1$, при котором $a_0(\beta)-a_m(\beta)=0$. Тогда, по (7.8), $a_0(\xi)-a_m(\xi)=a_0(\gamma)-a_m(\gamma)$, так что (7.9) дает

$$\xi(1)\equiv -\delta(u)eh+a_0(\xi)-a_m(\xi) \pmod p. \tag{7.11}$$

(I) Поскольку модуль X неразложим, из (VII.10.9) следует, что $|a_0(\xi)-a_m(\xi)|\leqslant 1$. Пусть $\xi(1)\equiv e+c \pmod p$, где $c=0$ или 1.

Согласно (7.11), $e+c\equiv -\delta(u)eh+c' \pmod p$, где $c'=0, \pm 1$. Таким образом, $\{1+\delta(u)h\}e+c-c'\equiv 0 \pmod p$. Если $|\{1+\delta(u)h\}e+c-c'|\geqslant p$, то $h\geqslant t-1$ ибо $|c-c'|\leqslant 2<e$, и результат доказан. Поэтому можно предполагать, что $\{1+\delta(u)h\}e=c'-c$. Значит, $c'-c\equiv 0 \pmod e$, так что $c'-c=0$. Итак, $\delta(u)h=-1$ и $\delta(u)=-1$, $h=1$, что и требовалось.

(II) В силу (VII.10.9), $|a_0(\xi)-a_m(\xi)|\leqslant 2$. Согласно (7.11), $2e\equiv -\delta(u)eh+c \pmod p$, где $c=0, \pm 1, \pm 2$. Тем самым $\{2+\delta(u)h\}e-c\equiv 0 \pmod p$. Если $|\{2+\delta(u)h\}e-c|\geqslant p$, то $h\geqslant t-2$, так как $|c|\leqslant 2$, и результат доказан. Поэтому можно считать, что $\{2+\delta(u)h\}e=c$. Значит, $c\equiv 0 \pmod e$, т. е. $c=0$, следовательно, $2+\delta(u)h=0$, откуда $\delta(u)=-1$, $h=2$. □

Лемма 7.12. *Предположим, что выполнены условия леммы 7.7, и, кроме того,* $\delta(u)=1$ *и* $\zeta_1^{(u)}(1)>p-1$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) *Если* $\xi(1)\equiv e \pmod p$, *то* $\xi(1)\geqslant (t-1)\zeta_1^{(u)}(1)+p-1$. *Если* $\xi(1)\equiv e+1 \pmod p$, *то* $\xi(1)\geqslant (t-1)\zeta_1^{(u)}(1)$.

(II) *Если* $\xi(1)\equiv 2e \pmod p$, *то* $\xi(1)\geqslant (t-2)\zeta_1^{(u)}(1)+p-1$.

Доказательство. Если $h\geqslant t$, все утверждения тривиальны. Предположим, что $h\leqslant t-1$. Если $\xi(1)\equiv e+1 \pmod p$, то $h=t-1$, согласно (7.7), и результат очевиден.

Предположим, что $\xi(1)\equiv e \pmod p$. Согласно (7.7), $h=t-1$, поэтому

$$e\equiv \xi(1)\equiv -e(t-1)+\gamma(1)\equiv e+1+\gamma(1) \pmod p.$$

Значит, $\gamma(1)\equiv -1 \pmod p$, так что $\gamma(1)\geqslant p-1$. В этом случае результат доказан.

Предположим, что $\xi(1)\equiv 2e \pmod p$. Если $h\geqslant t-1$, результат очевиден. Допустим, что $h<t-1$, так что, ввиду (7.7), $h=t-2$. Поэтому

$$2e\equiv \xi(1)\equiv -(t-2)e+\gamma(1)\equiv 1+2e+\gamma(1) \pmod p.$$

Следовательно, $\gamma(1)\equiv -1 \pmod p$, так что $\gamma(1)\geqslant p-1$. Это влечет результат. □

Лемма 7.13. *Пусть* μ *— неприводимый характер группы* N/C. *Пусть* $W(i, u)$, $1\leqslant i\leqslant p-1$, $0\leqslant u\leqslant |Z|-1$, *обозначает такой неразложимый* $\bar{R}[G]$*-модуль, что* $\widetilde{W(i, u)}=V(\eta^u\mu\alpha^i, 2i+1)$. *Если* K *заменить подходящим конечным расширением, справедливы следующие утверждения.*

(i) *Для любого* i, $0\leqslant i<(e-1)/2$, *существует такой* R*-свободный* $R[G]$*-модуль* $M(i, u)$, *что* $\overline{M(i, u)}\cong W(i, u)\oplus W(e-1-i, u)$.

(ii) *Существует такой R-свободный $R[G]$-модуль $M(u)$, что $\overline{M(u)} \cong W((e-1)/2, u)$, если e нечетно, и $\overline{M(u)} \cong W(e/2, u)$, если e четно.*

Доказательство. Согласно (I.17.12), для $0 \leqslant u \leqslant |Z|-1$ существует такой R-свободный $R[N]$-модуль $Y(u)$, что $\overline{Y(u)} \cong V(\eta^u \mu \alpha^{(e-1)/2}, e)$, если e нечетно, и $\overline{Y(u)} \cong V(\eta^u \mu \alpha^{e/2}, e+1)$, если e четно. Пусть $M(u)$ определен условием $\widetilde{M(u)} \cong Y(u)$. В силу (III.5.8), модуль $M(u)$ обладает нужными свойствами.

В силу (I.17.12), для $0 \leqslant u \leqslant |Z|-1$, $0 \leqslant i \leqslant (e-1)/2$ существует такой R-свободный $R[N]$-модуль $X(i, u)$, что $\overline{X(i, u)} = V(\eta^u \mu \alpha^i, 2e)$. Ввиду (VII.2.8), существует точная последовательность

$$0 \to V(\eta^u \mu \alpha^i, 2i+1) \to V(\eta^u \mu \alpha^i, 2e) \to V(\eta^u \mu \alpha^{-i-1}, 2(e-1-i)+1) \to 0.$$

Так как $\alpha^e = 1$, из (I.18.2) следует, что если K заменить подходящим конечным расширением, то существует R-свободный $R[N]$-модуль $Y(i, u)$, для которого

$$\overline{Y(i, u)} \cong V(\eta^u \mu \alpha^i, 2i+1) \oplus V(\eta^u \mu \alpha^{e-i-1}, 2(e-1-i)+1).$$

Определим $M(i, u)$ условием $\widetilde{M(i, u)} \cong Y(i, u)$. Теперь результат следует из (III.5.8). □

Следующий результат имеется в неявном виде у Брауэра [1966c].

Лемма 7.14. *Предположим, что $0 \leqslant u, v, w \leqslant |Z|-1$, $w \equiv u+v \pmod{|Z|}$ и что выполнены следующие условия:*

(i) $\delta(u) = \delta(v) = \delta(w) = 1$;

(ii) $\zeta_1^{(m)}(1) < p-1$ *для* $m = u, v, w$.

Пусть $\zeta_i^{(u)} \zeta_j^{(v)} = \sum_{k=1}^{t} h_{ijk} \zeta_k^{(w)} + \Gamma$, где характер Γ ортогонален всем $\zeta_k^{(w)}$. Тогда $\sum_{k=1}^{t} h_{ijk} \leqslant t$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_e$ — все неприводимые характеры группы E, причем $\varphi_j = \varphi_1^j$. Тогда $\Phi_j = \varphi_j^{PE}$, $j = 1, \ldots, e$, — все главные неразложимые характеры группы PE. Для упрощения записи положим $(\lambda_i)_{PE} = \lambda_i$.

При фиксированном m любые два характера из множества $\{\zeta_i^{(m)}\}$ неприводимых характеров совпадают на p'-элементах. Таким образом, для $m = u$, v или w имеем $(\zeta_i^{(m)})_{PE} = \Phi_{f(m)} - \lambda_i$, где $f(m)$ не зависит от i. Следовательно,

$$(\zeta_i^{(u)} \zeta_j^{(v)})_{PE} = \Phi_{f(u)} \Phi_{f(v)} - \lambda_i \Phi_{f(v)} - \lambda_j \Phi_{f(u)} + \lambda_i \lambda_j. \tag{7.15}$$

Пусть ρ_E, ρ_{EP} — характеры регулярных представлений групп E, EP соответственно. Тогда

$$\lambda_i \Phi_s = \{(\lambda_i)_E \varphi_s\}^{PE} = (\rho_E)^{PE} = \rho_{PE}.$$

Аналогично,

$$\Phi_{f(u)} \Phi_{f(v)} = \{(\Phi_{f(u)})_E \varphi_{f(v)}\}^{PE} = \{(t\rho_E + \varphi_{f(u)}) \varphi_{f(v)}\}^{PE} =$$
$$= (t\rho_E)^{PE} + (\varphi_{f(u)+f(v)})^{PE} = t\rho_{PE} + \Phi_{f(u)+f(v)}.$$

Для любого i характер $(\lambda_i)_P$ равен сумме e различных неглавных неприводимых характеров группы P, так что

$$((\lambda_i\lambda_j)_P,\ 1_P)=((\lambda_i)_P,\ (\lambda_j^*)_P)\leqslant e.$$

Значит, $\lambda_i\lambda_j=\theta_1+\theta_2$, где θ_1 равен сумме не более чем e главных неразложимых характеров PE, а θ_2 — линейная комбинация характеров $(\lambda_i)_{PE}$. Поскольку $\lambda_i\lambda_j$ обращается в нуль на $E-\{1\}$, то $\theta_1=0$ или $\theta_1=\rho_{PE}$. С учетом этого (7.15) примет вид

$$(\zeta_i^{(u)}\zeta_j^{(v)})_{PE}=(t-2+\delta)\rho_{PE}+\Phi_{f(u)+f(v)}+\theta_2, \tag{7.16}$$

где $\delta=0$ или 1.

Множество $\{\Phi_s\}\cup\{\lambda_i\}$ является базисом аддитивной группы целочисленных линейных комбинаций неприводимых характеров группы PE. Кроме того, если характер группы PE разложен по этому базису, то коэффициенты при Φ_s неотрицательны для всех s.

Согласно (7.16), коэффициент любого характера Φ_s в $(\zeta_i^{(u)}\zeta_j^{(v)})_{PE}$ не превосходит t. Поскольку $(\zeta_k^{(w)})_{PE}=\Phi_{f(w)}-\lambda_k$, результат доказан. □

§ 8. Доказательство теоремы 7.1

Этот параграф содержит доказательство следующего результата, из которого вытекает теорема 7.1.

Теорема 8.1. *Предположим, что выполнено условие* (*) *из* § 7 *для* $p>7$, *и* ζ — *точный неприводимый характер. Допустим, что для некоторых* u, v, w, *таких, что* $0\leqslant u,\ v,\ w\leqslant|Z|-1$ *и* $w\equiv u+v\ (\mathrm{mod}\,|Z|)$ *выполняются следующие условия*:

(i) $\delta(u)=\delta(v)=\delta(w)=1$;

(ii) $\zeta=\zeta_1^{(u)}$, $\zeta_1^{(u)}(1)<p-1$ *и* $\zeta_1^{(v)}(1)<p-1$.

Тогда $e=2$.

Лемма 8.2. *Теорема* 7.1 *следует из* (8.1).

Доказательство. Допустим, что (8.1) доказано. Ввиду (7.5), при доказательстве (7.1) можно считать, что (*) выполнено. Пусть $u=v$, тогда η^{2u} имеет такой же порядок, как η^u, ибо $|Z|$ нечетен. Следовательно, существует автоморфизм поля, который переводит η^u в η^{2u}. Таким образом, исключительный характер из B_{2u} алгебраически сопряжен с ζ, так что $\delta(2u)=\delta(u)=1$. Теперь (7.1) следует из (8.1). □

На протяжении оставшейся части параграфа предполагаем, что выполнены условия (8.1) и, кроме того, $e>2$. Из этой ситуации будет выведено противоречие.

Пусть $X_i^{(m)}$ — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль, имеющий характер $\zeta_i^{(m)}$ $(m=u,\ v,\ 1\leqslant i\leqslant t)$, и такой, что модуль $\overline{X_i^{(m)}}$ неразложим. Пусть $\lambda_j=\lambda_i^*$, тогда $\zeta_i^u(y)=\zeta_j^{(v)}(y^{-1})$. Кроме того, существуют такие неприводимые характеры ν, ν' группы N/C, что

$$(\overline{X_i^{(u)}})_N\cong V(\eta^u\nu,\ p-e),\ (\overline{X_j^{(v)}})_N\cong V(\eta^v\nu',\ p-e).$$

Лемма 8.3. $\zeta_1^{(w)}(1)=p-e$.

Доказательство. В силу (2.7),

$$(\overline{X_i^{(u)}}\otimes\overline{X_j^{(v)}})_N\cong\bigoplus_{k=0}^{e-1}V(\eta^w\nu\nu'\alpha^k,\ 2k+1)\oplus A,$$

где A является проективным $\bar{R}[N]$-модулем. Пусть $\mu=\nu\nu'$ и модуль $W(k,\ w)$ определен как в (7.13). Таким образом,

$$\overline{X_i^{(u)}}\otimes\overline{X_j^{(v)}}\cong\bigoplus_{k=0}^{e-1}W(k,\ w)\oplus A'$$

для некоторого проективного $\bar{R}[G]$-модуля A'.

Допустим, что $\zeta_1^{(w)}(1)\neq p-e$, тогда $\zeta_1^{(w)}(1)\geqslant 2p-e$. Ввиду (7.12) и (7.13),

$$\dim_{\bar{R}}W(k,\ w)+\dim_{\bar{R}}W(e-1-k,\ w)\geqslant(t-2)\zeta_1^{(w)}(1)+p-1\geqslant$$
$$\geqslant(t-2)(2p-e)+p-1$$

для $0\leqslant k\leqslant(e-1)/2$. Если e четно, то

$$\dim_{\bar{R}}W(e/2,\ w)\geqslant(t-1)\zeta_1^{(w)}(1)\geqslant(t-1)(2p-e).$$

Если e нечетно, то

$$\dim_{\bar{R}}W((e-1)/2,\ w)\geqslant(t-1)\zeta_1^{(w)}(1)+p-1\geqslant(t-1)(2p-e)+p-1.$$

Кроме того,

$$p^2-e(2p-e)=(p-e)^2=\dim_{\bar{R}}\overline{X_i^{(u)}}\otimes\overline{X_j^{(v)}}\geqslant\sum_{k=0}^{e-1}\dim_{\bar{R}}W(k,\ w).$$

Предположим, что e нечетно, тогда

$$p^2-e(2p-e)\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{k=0}^{(e-3)/2}\dim_{\bar{R}}\{W(k,\ w)\oplus W(e-k-1,\ w)\}+\dim_{\bar{R}}W\left(\frac{1}{2}(e-1),\ w\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(e-1)(t-2)(2p-e)+\frac{1}{2}(e-1)(p-1)+(t-1)(2p-e)+p-1.$$

Отсюда

$$p^2\geqslant(2p-e)\left\{e+\frac{1}{2}et-\frac{1}{2}t-e+1+t-1\right\}+\frac{1}{2}(e+1)(p-1)=$$
$$=(2p-e)\,t\frac{1}{2}(e+1)+\frac{1}{2}(e+1)(p-1)=$$
$$=\frac{1}{2}(e+1)\{2pt-te+p-1\}=pt(e+1).$$

Итак, $p\geqslant t(e+1)=te+t=p-1+t$, так что $t\leqslant 1$, вопреки неравенству $e<p-1$.

Предположим, что e четно. Пусть $f=\dim_{\bar{R}} W\left(\frac{1}{2}e-1, w\right)$, тогда

$$p^2-e(2p-e)\geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=0}^{(e/2)-2} \dim_{\bar{R}}\{W(k, w)\oplus W(e-1-k, w)\}+\dim_{\bar{R}} W\left(\frac{1}{2}e, w\right)+f\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{1}{2}e-1\right)(t-2)(2p-e)+\left(\frac{1}{2}e-1\right)(p-1)+(t-1)(2p-e)+f=$$
$$=(2p-e)\left\{\frac{1}{2}et-e-t+2+t-1\right\}+\left(\frac{1}{2}e-1\right)(p-1)+f.$$

Отсюда

$$pet+p=p^2\geqslant(2p-e)\left(\frac{1}{2}et+1\right)+\left(\frac{1}{2}e-1\right)et+f=$$
$$=pet-\frac{1}{2}e^2t+\frac{1}{2}e^2t-et+f+2p-e.$$

Следовательно, $0\geqslant -et+p-e+f=1-e+f$, значит, $f\leqslant e-1<(p-1)/2$. Кроме того, $f\equiv e-1 \pmod p$, а так как $e>2$, то $f>1$. Таким образом, P не содержится в ядре модуля $W\left(\frac{1}{2}e-1, w\right)$, и, ввиду (3.1), G является группой типа $L_2(p)$, вопреки предположению. □

Лемма 8.4. *Существует неприводимый характер Брауэра* φ, *равный* $\zeta_1^{(w)}$ *как характеру Брауэра.*

Доказательство. Поскольку $\delta(w)=1$, главный характер Брауэра не является конституэнтой характера $\zeta_1^{(w)}$. Если утверждение неверно, то некоторый неглавный неприводимый характер Брауэра имеет степень не выше $(p-e)/2<(p-1)/2$. Тогда, в силу (3.1), G является группой типа $L_2(p)$, вопреки условию. □

Лемма 8.5. *Пусть характер* φ *определен как в* (8.4), *и пусть* θ — *единственный неисключительный неприводимый характер из* B_w, *имеющий конституэнту* φ. *Тогда* $\theta(1)\geqslant 2p-1$.

Доказательство. Если результат неверен, то $\theta(1)=p-1$, поскольку $\theta(1)\equiv -1 \pmod p$. Значит, как характер Брауэра, $\theta=\varphi+\varphi_1$, где $\varphi_1(1)=e-1$. Главный характер Брауэра может быть конституэнтой характера θ кратности не выше 1. Так как $e>2$, то $\varphi_1(1)>1$, и значит, в B_w найдется неглавный неприводимый характер Брауэра степени не выше $e-1<(p-1)/2$. Следовательно, согласно (3.1), G — группа типа $L_2(p)$, вопреки условию. □

Пусть

$$\zeta_i^{(u)}\zeta_j^{(v)}=a\theta+\sum_{k=1}^{t} h_{ijk}\zeta_k^{(w)}+\Gamma;\quad h=\sum_{k=1}^{t} h_{ijk},$$

где характер Γ ортогонален к θ и ко всем $\zeta_k^{(w)}$.

Лемма 8.6. (i) $h \leqslant t$.

(ii) *Если* e *нечетно, то* $a+h \geqslant \frac{1}{2}(e-1)(t-2)+t-1$.

(iii) *Если* e *четно, то* $a+h \geqslant \frac{1}{2}e(t-2)+1$.

Доказательство. (i) Следует из (7.14) и (8.3).

Пусть φ определяется, как в (8.4). Для любого R-свободного $R[G]$-модуля Y число $n(Y)$ будет кратностью характера φ как конституэнты характера Брауэра, отвечающего модулю $\bar{Y}$. Таким образом, $a+h=n(X_i^{(u)} \otimes X_j^{(v)})$. Пусть $W(k, w)$ определяется как в (7.13). Тогда, в силу (2.7),

$$\overline{X_i^{(u)}} \otimes \overline{X_j^{(v)}} \cong \bigoplus_{k=0}^{e-1} W(k, w) \oplus A,$$

где A — некоторый проективный $\bar{R}[G]$-модуль.

(ii) Ввиду (7.7) и (7.13),

$$a+h \geqslant \sum_{k=0}^{(e-3)/2} \{n(W(k, w))+n(W(e-k-1,\ w))\}+$$

$$+n\left(W\left(\frac{1}{2}(e-1), w\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}(e-1)(t-2)+(t-1).$$

(iii) Ввиду (7.7) и (7.13),

$$a+h \geqslant \sum_{k=0}^{(e/2)-2} \{n(W(k, w))+n(W(e-k-1,\ w))\}+n\left(W\left(\frac{1}{2}e, w\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{2}e-1\right)(t-2)+(t-1)=\frac{1}{2}e(t-2)+1. \quad \square$$

Лемма 8.7. *Если* $1 \leqslant k \leqslant p-1$, *то*

$$(p-1)\Gamma(y^k)=a(p-1)-he+ep-e^2.$$

Доказательство. В силу (7.6), $\zeta_i^{(u)}(y)\zeta_j^{(v)}(y)=\lambda_s(y)\lambda_s(y^{-1})$ для подходящего s, откуда

$$\zeta_i^{(u)}(y)\zeta_j^{(v)}(y)=e+g(y),$$

где $g(y)$ равно сумме e^2-e примитивных корней степени p из 1.

Пусть Tr обозначает функцию следа из поля, порожденного корнями p-й степени из 1, в поле рациональных чисел. Поскольку $\Gamma_Z=\Gamma(1)\eta^w$ и Γ ортогонален ко всем $\zeta_k^{\{w\}}$, то $\Gamma(y)$ рационально. Из (7.6), ввиду $\theta(y^s)=-1$, следует, что

$$e(p-1)-e^2+e=\mathrm{Tr}\{\zeta_i^{(u)}(y)\zeta_j^{(v)}(y)\}=-a(p-1)+he+(p-1)\Gamma(y).$$

Отсюда следует результат. $\square$

Лемма 8.8. $h+e\equiv 1 \pmod t$.

Доказательство. Разделить равенство (8.7) на e и прочитать по модулю t. □

Лемма 8.9. $\Gamma(1)>(p+1)\{a+e-1-(e+h-1)/t\}\geqslant(p+1)a$.

Доказательство. Поскольку $\Gamma_Z=\Gamma(1)\eta^w$ и Γ ортогонален к θ и ко всем $\zeta_k^{(w)}$, то

$$\Gamma=\sum{}'c_k\chi_k+\sum{}''c_k\chi_k+\Gamma_0,$$

где в первой сумме участвуют характеры χ_k из B_w, для которых $\chi_k(1)\equiv 1 \pmod p$, во второй сумме — характеры χ_k из B_w с $\chi_k(1)\equiv -1 \pmod p$, а Γ_0 — сумма характеров из блоков дефекта 0. Таким образом, если $1\leqslant s\leqslant p-1$, то

$$\Gamma(y^s)=\sum{}'c_k-\sum{}''c_k\leqslant\sum{}'c_k.$$

Отсюда, в силу (8.7),

$$\sum{}'c_k\geqslant\Gamma(y)=a+e+\frac{1}{t}(1-e-h).$$

Поскольку главный характер группы G входит в $\zeta_i^{(u)}\zeta_j^{(v)}$ с кратностью не выше 1, то

$$\Gamma(1)\geqslant\sum{}'c_k\chi_k(1)\geqslant\{(\sum{}'c_k)-1\}(p+1)+1>(p+1)\left\{a+e-1+\frac{1}{t}(1-e-h)\right\}.$$

Это доказывает первое неравенство.

Если второе неравенство неверно, то $a>a+e-1+(1/t)(1-e-h)$, значит, согласно (8.6) (i),

$$e-1<\frac{1}{t}(e+h-1)=\frac{1}{t}(e-1)+\frac{h}{t}<\frac{1}{t}(e-1)+1.$$

Таким образом, $(t-1)(e-1)<t$. Поскольку $e\geqslant 3$, то $t<2$, т. е. $t=1$, вопреки тому факту, что $e<p-1$. □

Лемма 8.10. *Либо* $p>13$ *и* $t\geqslant 4$, *либо* $p=13$ *и* $t=3$.

Доказательство. Если $p=11$, то $e=5$, так что $\zeta_1^{(u)}(1)=6<\frac{2}{3}(p-1)$, вопреки (3.1). Таким образом, $p\geqslant 13$, откуда, по (3.3), $p-e\geqslant\frac{3}{4}(p-1)$, т. е. $p+3>4e$. Следовательно, $et=p-1\geqslant 4e-4$, т. е. $t\geqslant 4-\frac{4}{e}$. Итак, если $e>4$, то $t\geqslant 4$, а если $e\leqslant 4$ и $t\leqslant 3$, то $p=13$ и $t=3$. □

Лемма 8.11. *e четно.*

Доказательство. Допустим, что e нечетно, тогда t четно. Положим $c=\frac{1}{2}et-\frac{1}{2}t-e$. Согласно (8.6) (ii),

$$a\geqslant c+t-h.$$

Ввиду (8.9),

$$(p-e)^2=\zeta_i^{(u)}(1)\zeta_j^{(v)}(1)=a\theta(1)+h(p-e)+\Gamma(1)>$$
$$>a(2p-1)+h(p-e)+a(p+1)=3pa+h(p-e).$$

Следовательно,

$$(p-e)^2>3p(c+t-h)+h(p-e)=3pc+t(p-e)+(t-h)(2p+e),$$

так что по (8.6) (i)

$$(p-e)(p-e-t)>3pc+(t-h)(2p+e)>3(p-e)c. \tag{8.12}$$

Отсюда

$$et-e-t+1=p-e-t>3c=\frac{3}{2}et-\frac{3}{2}t-3e.$$

Итак,

$$0>\frac{1}{2}et-\frac{1}{2}t-2e-1=\frac{1}{2}t(e-1)-(2e+1).$$

Отсюда

$$t<\frac{2(2e+1)}{e-1}=4+\frac{6}{e-1},$$

следовательно, либо $t=4$, либо $e=3$ и $t=6$.

Если $e=3$, $t=6$, то $p=19$, $c=3$, и из (8.12) получается $160>171$. Значит, $t=4$, тогда $c=e-2$ и (8.12) сводится к

$$(3e+1)(3e-3)>3(4e+1)(e-2),$$

откуда $0>e^2-5e-1$, так что $e\leqslant 5$. Поскольку $21=4\cdot 5+1$ — число составное, то $e=3$. Таким образом, ввиду (8.8), $h\equiv 2 \pmod 4$, так что $h=2$, в силу (8.6) (i). Теперь (8.12) дает, что $60>39+58$. Это противоречие завершает доказательство. □

Определим целое число

$$h=\frac{1}{2}e(t-2)+1-t=\frac{1}{2}et-e-t+1. \tag{8.13}$$

Согласно (8.6) (iii) и (8.11),

$$a\geqslant b+t-h. \tag{8.14}$$

Лемма 8.15. $e>t$.

Доказательство. Допустим, что $e\leqslant t$. Согласно (8.6) (i) и (8.8), $h=t+1-e$, откуда, в силу (8.9), $\Gamma(1)>(p+1)(a+e-2)$, так что

$$(p-e)^2>a(2p-1)+h(p-e)+(a+e-2)(p+1)=$$
$$=3pa+(t+1-e)(p-e)+(e-2)(p+1).$$

Следовательно, по (8.14),

$$(p-e)(p-t-1)>3pb+3p(e-1)+(e-2)(p+1)>$$
$$>(p-e)\{3b+3(e-1)+(e-2)\}.$$

Значит,

$$et-t=p-t-1>\frac{3}{2}et-3e-3t+3+4e-5=\frac{3}{2}et+e-3t-2,$$

откуда

$$0>\frac{1}{2}et+e-2t-2=t\left(\frac{1}{2}e-2\right)+e-2.$$

Таким образом, $\frac{1}{2}e-2<0$, вопреки тому, что $e\geqslant 4$, так как e четно.

Лемма 8.16. $t=3$, $e=4$ *и* $p=13$.

Доказательство. Допустим, что $t\geqslant 4$. Согласно (8.9) и (8.14),

$$(p-e)^2\geqslant a(2p-1)+h(p-e)+\Gamma(1)>$$
$$>a(2p-1)+h(p-e)+a(p+1)=3pa+h(p-e)\geqslant$$
$$\geqslant 3pb+t(p-e)+(t-h)(2p+e). \qquad (8.17)$$

Таким образом,

$$(p-e)(p-e-t)>3pb+(t-h)(2p+e)>3(p-e)b, \qquad (8.18)$$

значит,

$$et-e-t+1=p-e-t>3b=\frac{3}{2}et-3e-3t+3.$$

Отсюда

$$0>\frac{1}{2}et-2e-2t+2=t\left(\frac{1}{2}e-2\right)-2(e-1).$$

Ввиду (8.10) и (8.15), $e\neq 4$, поэтому

$$t<\frac{4e-4}{e-4}=4+\frac{12}{e-4}. \qquad (8.19)$$

Так как $e>t$, отсюда следует, что $t\leqslant 6$. С учетом (8.10) имеем $t=4$, 5 или 6. Согласно (8.11), e четно.

Если $t=6$, то (8.19) влечет $e<10$, т. е. $e=8$, вопреки тому, что $te+1$ — простое число.

Если $t=4$, то $b=e-3$, так что по (8.18)

$$(3e+1)(3e-3)>3(4e+1)(e-3).$$

Таким образом, $0>e^2-9e-2$, откуда $e<10$. Значит, $e=6$ или 8, вопреки простоте числа $te+1$.

Если $t=5$, то $b=\frac{3}{2}e-4$, и (8.18) дает

$$(4e+1)(4e-4)>3(5e+1)\left(\frac{3}{2}e-4\right).$$

Поэтому $0>13e^2-87e-16$, откуда $e<8$, так что $e=6$. Значит, $p=31$, $b=5$. Теперь из (8.18) получаем, что $35>(5-h)\cdot 68$. Следовательно, $h\geqslant 5$ и даже $h=5$, ибо $h\leqslant t$. Согласно (8.14), $a\geqslant 5$, значит, из (8.9) и (8.17) следует, что

$$25^2\geqslant 61a+125+32(a+3)>(61+32)5+125+96.$$

Отсюда $125\geqslant 93+25+19$, что неверно. Ввиду (8.10), результат установлен. □

Доказательство (8.1) будет завершено, если показать, что случай (8.16) невозможен. На протяжении оставшейся части параграфа будет предполагаться, что, напротив, $e=4$, $t=3$ и $p=13$.

В силу (3.1), степени $\zeta_i^{(u)}(1)$, $\zeta_i^{(v)}(1)$ и $\zeta_i^{(u+v)}(1)$ не меньше 8. Следовательно,

$$\zeta_i^{(u)}(1)=\zeta_i^{(v)}(1)=\zeta_i^{(u+v)}(1)=p-e=9.$$

Таким образом, $|Z|\,|\,9$.

Если S — подмножество в G, обозначим через S^0 его образ в $G^0=G/Z$. Поскольку $(|Z|,\ 4)=1$, найдется такой элемент $x\in N$ порядка $e=4$, что x^0 также имеет порядок 4.

Допустим, что B_{u+v} — главный блок. Тогда $\eta^{u+v}=1_G$, и G^0 имеет неприводимый характер $\zeta_i^{(u+v)}$ степени 9. Пусть $(\overline{X_i^{(u+v)}})_{N^0}\cong V(\alpha^j,\ 9)$. Согласно (1.1),

$$\alpha(x)^j=\alpha(x)^{9j}=\det_{V(\alpha^j,\ 9)}(x)=1.$$

Таким образом, $\alpha^j=1_{N^0}$, так что $\mathrm{Inv}_{N^0}(\overline{X_i^{(u+v)}})\neq(0)$. Следовательно,

$$H^0(G^0,\ \overline{X_i^{(u+v)}},\ \langle 1\rangle)=H^0(N^0,\ (\overline{X_i^{(u+v)}})_{N^0},\ \langle 1\rangle)\neq(0).$$

Таким образом, $\mathrm{Inv}_{G^0}(\overline{X_i^{(u+v)}})\neq(0)$, вопреки (8.4), поэтому B_{u+v} не является главным блоком. Согласно (1.1),

$$\nu(x)=\det_{\overline{X_i^{(u)}}}(x)=1,\quad \nu'(x)=\det_{\overline{X_i^{(v)}}}(x)=1.$$

Таким образом,

$$(\overline{X_i^{(u)}})_N\cong V(\eta^u,\ p-e),\ (\overline{X_i^{(v)}})_N\cong V(\eta^v,\ p-e).$$

Отсюда, в силу (2.7),

$$(\overline{X_i^{(u)}}\otimes\overline{X_j^{(v)}})_N\cong\left(\bigoplus_{k=0}^{3}V(\eta^{u+v}\alpha^k,\ 2k+1)\right)\oplus\left(\bigoplus_{k=8}^{12}V(\eta^{u+v}\alpha^k,\ p)\right).\quad(8.20)$$

Поэтому

$$\overline{X_i^{(u)}}\otimes\overline{X_j^{(v)}}\cong\bigoplus_{k=0}^{3}L_{2k+1}\oplus M,$$

где модуль M проективен, каждый из L_{2k+1} неразложим и

$$(L_{2k+1})_N\cong V(\eta^{u+v}\alpha^k,\ 2k+1)\oplus T_k,$$

модуль T_k проективен. Поскольку блок B_{u+v} не является главным, из (3.1) следует, что $T_k \neq (0)$ для всех k. Таким образом, в силу (8.20), модули T_k неразложимы по крайней мере при трех значениях k. Согласно (1.1), $\det_{V(\eta^{u+v}\alpha^k,\ 2k+1)}(x)=1$ для всех k. Значит, $\det_{V(\eta^{u+v}\alpha^k,\ p)}(x)=1$ по крайней мере для трех значений k, из $8\leqslant k\leqslant 12$. Однако из (1.1) следует также, что $\det_{V(\eta^{u+v}\alpha^k,\ p)}(x)=-\alpha(x)^k$. Поскольку $-\alpha(x)^k=1$ тогда и только тогда, когда $k\equiv 2 \pmod 4$, невозможно найти трех значений k, удовлетворяющих неравенствам $8\leqslant k\leqslant 12$ и обладающих нужными свойствами. □

§ 9. Доказательство теоремы 7.2

Ввиду (7.5), можно принять условия (*) из § 7. Если $|Z|$ нечетно, результат следует из (7.1). Таким образом, можно считать, что $|Z|$ четно, а так как $(|Z|, e)=1$, то e нечетно. Значит, t четно, ибо $te=p-1$.

Характер ζ лежит в B_1. Если $\delta(2)=1$, то результат следует из (8.1). Таким образом, можно считать, что $\delta(2)=-1$. Пусть φ — неглавный неприводимый характер Брауэра, являющийся конституэнтой характера $\zeta_1^{(2)}$. В силу (VII.10.8), $\varphi(1)\equiv n \pmod p$, где $1\leqslant n\leqslant e$, так что $n\leqslant (p-1)/2$. Поскольку G не является группой типа $L_2(p)$, из (3.1) следует, что $\varphi(1)>p$.

Пусть L — некоторый $\bar{R}[G]$-модуль с характером φ. Поскольку $\varphi(1)>p$, существует целое число k, при котором $V(\eta^2\alpha^k, p)\,|\,L_N$.

Пусть X — такой R-свободный $R[G]$-модуль с характером ζ, что модуль $\bar{X}$ неразложим. Тогда $\bar{X}_N\cong V(\eta\nu, p-e)$ для некоторого неприводимого характера ν группы N/C. Согласно (2.7),

$$(\bar{X}\otimes\bar{X})_N\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{e-1} V(\eta^2\nu^2\alpha^i, 2i+1)\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=2e}^{p-1} V(\eta^2\nu^2\alpha^j, p)\right). \qquad (9.1)$$

Пусть $\mu=\nu^2$ и модуль $W(i, 2)$ определен как в (7.13). Тогда (9.1) влечет

$$\bar{X}\otimes\bar{X}\cong\bigoplus_{i=0}^{e-1} W(i, 2)\oplus A,$$

где A — некоторый проективный $\bar{R}[G]$-модуль. Пусть $M(i, 2)$, $M(2)$ определены как в (7.13). В силу (7.7), конституэнтой характера модуля $M(2)$ является исключительный характер блока B_2, а характер модуля $M(i, 2)$ имеет прямое слагаемое, равное сумме двух исключительных характеров из B_2, $0\leqslant i\leqslant (e-1)/2$. Таким образом, L входит в $W((e-1)/2, 2)$ с кратностью, не меньшей 1, и в $W(i, 2)\oplus\oplus W(e-1-i, 2)$, $0\leqslant i\leqslant (e-1)/2$, с кратностью, не меньшей 2. Следовательно, L входит в $\bar{X}\otimes\bar{X}$ с кратностью, не меньшей $2((e-1)/2)+1=e$.

Поскольку модуль $V(\eta^2\alpha^k, p)$ является как проективным, так и инъективным, то $eV(\eta^2\alpha^k, p)\,|\,(\bar{X}\otimes\bar{X})_N$. Следовательно, ввиду (9.1), $e\leqslant t-1$. Более того, $e\leqslant t-2$, кроме случая $\alpha^k=\nu^2$.

Допустим, что $e>t-2$, так что $e=t-1$ и $\alpha^k=\nu^2$. Пусть $\bar{X}\otimes\bar{X}=A^+\oplus A^-$, где A^+ — пространство симметрических тензоров,

а A^- — пространство кососимметрических тензоров. Согласно (2.9), $W(i, 2)$ и $W(e-1-i, 2)$ являются прямыми слагаемыми в A^+, если i нечетно, и в A^-, если i четно. Поскольку $e=t-1$, модуль $V(\eta^2\alpha^k, p)$ в точности дважды встречается в качестве компоненты каждой суммы $W(i, 2)\oplus W(e-1-i, 2)$ и в точности один раз в качестве компоненты модуля $W((e-1)/2, 2)$. Следовательно, $V(\eta^2\alpha^k, p)$ является компонентой модуля A_N^- строго большей кратности, чем модуля A_N^+. Это противоречит (2.9).

Таким образом, $e\leqslant t-2$. Поскольку e нечетно, а t четно, $e\leqslant t-3$. Поэтому

$$p=et+1\leqslant(t-3)t+1=t^2-3t+1. \tag{9.2}$$

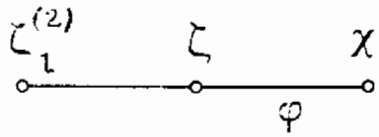
При этом $e\leqslant\frac{p-1}{e}-3$, т. е. $e^2+3e-(p-1)\leqslant 0$. Значит, $e\leqslant-\frac{3}{2}+\sqrt{p+\frac{5}{4}}$. Поскольку $\zeta(1)=p-e$, результат следует из полученного неравенства и (9.2). □

§ 10. Доказательство теоремы 7.3

Предположим, что выполнены условия теоремы (7.3). Допустим, что выполняются также условия (*) из § 7.

Поскольку $\zeta(1)=p-2$, то $e=2$, поэтому $|Z|$ нечетно, ибо $(e, |Z|)=1$. Значит, характер η алгебраически сопряжен с η^2. Поскольку ζ принадлежит B_1, то $\zeta_i^{(2)}(1)=\zeta(1)=p-2$ для $i=1, \ldots, t$. В частности, $\delta(2)=\delta(1)=1$. Таким образом, главный характер Брауэра не является неприводимой конституэнтой характеров $\zeta_i^{(2)}$. Поскольку G не является группой типа $L_2(p)$, из (3.1) следует, что $\zeta_i^{(2)}$ неприводим как характер Брауэра.

Дерево Брауэра для B_2 выглядит следующим образом:



Поэтому $\chi=\varphi$ неприводим как характер Брауэра. Значит, $\varphi(1)\equiv 1 \pmod p$.

Заметим, что $\alpha^2=1$, так как $e=2$.

Пусть X — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль, характером которого является ζ.

Пусть $X^{(2)}$ — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль с характером $\zeta_1^{(2)}$.

Пусть L — тот R-свободный $R[G]$-модуль, характером которого является χ, так что модуль $\bar{L}$ имеет характер φ.

Согласно (I.17.12), существует такой R-свободный $R[G]$-модуль Y с характером $\sum_{i=1}^{t-1}\zeta_i^{(2)}$, что модуль $\bar{Y}$ неразложим.

Пусть $X\otimes X=A^+\oplus A^-$, где A^+ — пространство симметрических тензоров, а A^- — пространство кососимметрических тензоров.

Лемма 10.1. (i) $\tilde{\bar{X}}^{(2)} \cong V(\eta^2\alpha, p-2)$.

(ii) $\tilde{\bar{L}} \cong V(\eta^2, 1)$.

Доказательство. (i) Допустим, что результат неверен, тогда $\tilde{\bar{X}}^{(2)} \cong V(\eta^2, p-2)$. Согласно (2.9),

$$(\overline{A^-})_N \cong V(\eta^2\alpha, 3) \oplus \tfrac{1}{2}(p-5)\, V(\eta^2\alpha, p).$$

В силу (2.7),

$$H^0(N, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{\bar{X}}^{(2)}, \overline{A^-})) \cong H^0(N, \langle 1\rangle, \tilde{\bar{X}}^{(2)*} \otimes \widetilde{\overline{A^-}}) \neq (0)\ ^{1)}.$$

Отсюда, ввиду (III.5.10), $H^0(G, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(\bar{X}^{(2)}, \overline{A^-})) \neq (0)$ и, значит, $\operatorname{Hom}_{\bar{R}[G]}(\bar{X}^{(2)}, \overline{A^-}) \neq (0)$. Из неприводимости модуля $\bar{X}^{(2)}$ следует, что он изоморфен подмодулю в $\overline{A^-}$. Следовательно, $V(\eta^2, p-2) \cong \bar{X}^{(2)}_N$ изоморфен подмодулю в $\overline{A^-_N}$. Однако это невозможно, ибо $\operatorname{Inv}_{EP}(\overline{A^-_{EP}}) = (0)$. Это доказывает (i).

Допустим, что (ii) неверно. Тогда, очевидно, $\tilde{\bar{L}} \cong V(\eta^2\alpha, 1)$, так что $\operatorname{Hom}_{\bar{R}[N]}(\tilde{\bar{L}}, \tilde{\bar{X}}^{(2)}) \neq (0)$. Таким образом, ввиду (III.5.10) и (III.5.13), $\operatorname{Hom}_{\bar{R}[G]}(\bar{L}, \bar{X}^{(2)}) \neq (0)$, что не так. □

Лемма 10.2. $\overline{A^-} \cong \bar{Y}$.

Доказательство. Из $t = \frac{1}{2}(p-1)$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{t-1} \zeta_i^{(2)}(1) = -2(t-1) \equiv 3 \pmod{p}.$$

Значит, $\tilde{\bar{Y}} \cong V(\eta^2\alpha^k, 3)$, где $k = 0$ или 1. По определению, $\operatorname{Hom}_{\bar{R}[G]}(\bar{L}, \bar{Y}) = (0)$, поэтому, в силу (III.5.10), $H^0(N, \langle 1\rangle, \tilde{\bar{L}}^*_N \otimes \tilde{\bar{Y}}_N) \cong$ $\cong H^0(N, \langle 1\rangle, \operatorname{Hom}_{\bar{R}}(\tilde{\bar{L}}, \tilde{\bar{Y}})) = (0)$. Таким образом, согласно (10.1) (ii), $k \neq 0$ и потому $\tilde{\bar{Y}} \cong V(\eta^2\alpha, 3)$. Значит, ввиду (2.9), $\bar{Y} \mid \overline{A^-}$. Так как

$$\dim_{\bar{R}} \bar{Y} = \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3) = \dim_{\bar{R}} \overline{A^-},$$

то $\overline{A^-} \cong \bar{Y}$. □

[1)] По поводу самого символа $H^0(G, H, V)$ см. § 3 гл. II.— *Примеч. пер.*

Лемма 10.3. $\chi(1)=1+np$, *где* $n\leqslant(p-3)/2$. $\zeta(1)=-1+(n+1)p$.

Доказательство. Очевидно, $\chi(1)=1+np$ для некоторого n. Таким образом, $\zeta(1)=p-2+1+np=-1+(n+1)p$. Согласно (2.9) и (10.1), $\bar{L}|\overline{A^+}$.

Следовательно, $1+np\leqslant(p-1)(p-2)/2$. Отсюда следует неравенство $n\leqslant(p-3)/2$. □

Лемма 10.4. *Пусть* x *— некоторый* $\{2, p\}'$*-элемент из* G, $x\notin Z$. *Тогда* $\zeta(x)=0$.

Доказательство. Пусть θ^+, θ^- — характеры соответственно модулей A^+, A^-. Тогда, как хорошо известно, $\theta^+(x)=\theta^-(x)+\zeta(x^2)$. Следовательно, ввиду (10.2), $\theta^+(x)=\frac{1}{2}(p-3)\zeta_1^{(2)}(x)+\zeta(x^2)$, откуда

$$\zeta^2(x)=(p-3)\zeta_1^{(2)}(x)+\zeta(x^2).$$

Пусть σ — автоморфизм поля корней степени $|G|$ из 1 над полем рациональных чисел, который оставляет неподвижными все корни степени 2^n из 1 и квадраты всех корней степени m из 1, если m нечетно. Тогда $\zeta(x^2)=\zeta^\sigma(x)$ и $\zeta_1^{(2)}(x)=\zeta^\sigma(x)$, так что $\zeta^2(x)=(p-2)\zeta^\sigma(x)$. Выберем такое k, что $\sigma^k=1$.

Таким образом,

$$\zeta^{2^k}(x)=(p-2)^{2^k-1}\zeta^{\sigma^k}(x)=(p-2)^{2^k-1}\zeta(x).$$

Если теперь $\zeta(x)\neq0$, то $\zeta^{2^k-1}(x)=(p-2)^{2^k-1}$, откуда $|\zeta(x)|=p-2=\zeta(1)$. Следовательно, $x\in Z$, вопреки условию. □

Лемма 10.5. (i) $|G:Z|\,\big|\,2^bp(p-2)^2$ *для некоторого натурального числа* b.

(ii) *Если* $|Z|=1$, *то* $|G|=2^bp(p-2)$ *для некоторого натурального* b.

Доказательство. Пусть q — простое число, $q\neq2, p$. Пусть Q — некоторая S_q-подгруппа из G. В силу (10.4),

$$\|\zeta_Q\|^2=\frac{1}{|Q|}|Q\cap Z|\zeta(1)^2=\frac{(p-2)^2}{|Q:Q\cap Z|}.$$

Таким образом, $|Q:Q\cap Z|\,\big|\,(p-2)^2$. Это доказывает (i).

Если $|Z|=1$, то $(\zeta_Q, 1_Q)=\zeta(1)/|Q|$, согласно (10.4). Таким образом, $|Q|\,\big|\,(p-2)$, что доказывает (ii). □

Завершим доказательство теоремы 7.3. Ввиду (7.5), можно считать, что условия (*) из § 7 выполняются.

Сначала предположим, что $|Z|=1$. Согласно (10.5). $|G|=p2^b(p-2)$ для некоторого натурального b. Поскольку G не является группой типа $L_2(p)$, результат следует из (5.3).

Таким образом, можно считать, что $|Z|>1$. Так как $G=G'$, в этом случае $\chi^{(1)}\neq1$ и, значит, $n>0$.

Допустим, что n четно, тогда, ввиду (10.5), $1+np|(p-2)^2$. Положим $d=(1+np,\ p-2)$, тогда $2n+1\equiv0\pmod d$, и, значит, $1+np|(2n+1)^2$.

Если $1+np=(2n+1)^2$, то $p=4(n+1)$ что невозможно. Таким образом, $1+np\leqslant(2n+1)^2/2$. Отсюда следует, что $p\leqslant 2n+2$, вопреки (10.3).

Теперь допустим, что n нечетно. Тогда, согласно (10.3) и (10.5), $\{(n+1)p-1\}=\zeta(1)|(p-2)^2$. Если $d=(p-2,\ (n+1)p-1)$, то $2n+1\equiv 0 \pmod d$, и, значит, $\{(n+1)p-1\}|(2n+1)^2$. Если $(n+1)p-1=(2n+1)^2$, то

$$p=\frac{4n^2+4n+2}{n+1}=4n+\frac{2}{n+1}.$$

Значит, $(n+1)|2$, так что $n=1$ и $p=5$, вопреки условию. Поэтому $\{(n+1)p-1\}\leqslant\frac{1}{2}(2n+1)^2$, откуда $p\leqslant 2n+1$, вопреки (10.3). □

§ 11. Некоторые свойства групп перестановок

Материал этого параграфа, исключая теорему (11.8), не зависит от предшествующих результатов этой главы и помещен здесь потому, что он потребуется в следующем параграфе. Ряд результатов мы формулируем без доказательства.

Пусть G — группа перестановок на множестве Ω. Обозначим через ax образ точки $a\in\Omega$ под действием $x\in G$. Далее, для подмножества Δ из Ω обозначим через G_Δ подгруппу всех элементов из G, оставляющих на месте каждый элемент из Δ. Иными словами, $G_\Delta=\{x\,|\,x\in G,\ ax=a$ для всех $a\in\Delta\}$. Если $\Delta=\{a\}$, положим $G_a=G_{\{a\}}$. Для $a\in\Omega$ обозначим $a^G=\{ax\,|\,x\in G\}$.

Доказательство следующего результата см. у Виланда [1964, (13.1)].

Теорема 11.1 (Жордан). *Пусть G — примитивная группа перестановок на Ω, Δ — подмножество в Ω, $1\leqslant|\Delta|<|\Omega|-1$. Если группа G_Δ транзитивна на $\Omega-\Delta$, то G дважды транзитивна на Ω.*

Если G — группа перестановок на Ω, Виланд определил группу $G^{(2)}$ всех перестановок на Ω, которые сохраняют все орбиты G на $\Omega\times\Omega$. Очевидно, $G\subseteq G^{(2)}$.

Допустим, что G — группа перестановок на Ω, Δ — подмножество в Ω и H — такая подгруппа в G, что $ax\in\Delta$, если $a\in\Delta$, $x\in H$. Для любого $x\in H$ следующим образом определим перестановку x^Δ.

Если $a\in\Delta$, то $ax^\Delta=ax$;

если $a\in\Omega-\Delta$, то $ax^\Delta=a$.

Пусть $H^\Delta=\{x^\Delta\,|\,x\in H\}$.

Следующий результат принадлежит Виланду [1969, (6.5)].

Теорема 11.2 (теорема о разбиении). *Пусть G — группа перестановок на Ω, Δ — подмножество в Ω и H — такая подгруппа в G, что $ax\in\Delta$ для $a\in\Delta$, $x\in H$. Предположим, что для любых $a\in\Delta$, $b\in\Omega-\Delta$ имеем $H=H_aH_b$. Тогда $H^\Delta\times H^{\Omega-\Delta}\subseteq H^{(2)}$.*

Доказательство. Вначале мы покажем, что если $x\in H$, то $x^\Delta\in H^{(2)}$. Достаточно доказать, что для $(a, b)\in\Omega\times\Omega$ существует элемент $z\in H$, такой, что $(a, b)z=(a, b)x^\Delta$. Есть следующие три возможности.

Если $a,\ b\in\Delta$, положим $z=x$.

Если $a,\ b\in\Omega-\Delta$, положим $z=1$.

Если $a\in\Delta,\ b\in\Omega-\Delta$, то, по условию, $x=x_ax_b$, где $x_a\in H_a,\ x_b\in H_b$. Положим $z=x_b$. Тогда $(a,\ b)x^{\Delta}=(ax,\ b)=(ax_ax_b,\ b)=(ax_b,\ b)=(a,\ b)x_b$. Это показывает, что $x^{\Delta}\in H^{(2)}$.

Если $x\in H$, то $x=x^{\Delta}x^{\Omega-\Delta}$. Поскольку $x^{\Delta}\in H^{(2)}$, то и $x^{\Omega-\Delta}\in H^{(2)}$; значит, $H^{\Delta}H^{\Omega-\Delta}=H^{\Delta}\times H^{\Omega-\Delta}\subseteq H^{(2)}$. □

Теперь сформулируем без доказательства некоторые результаты о группах перестановок ранга 3. Они принадлежат Д. Г. Хигману [1964], хотя частные случаи ранее рассматривал Виланд [1956]. Мы ограничим внимание только результатами, необходимыми для следующего параграфа.

Пусть G — группа перестановок ранга 3 на Ω. Предположим, что $|\Omega|$ четно. Пусть $1_G+\chi+\theta$ — характер перестановочного представления G на Ω, где $\chi,\ \theta$ — неприводимые характеры группы G. Поскольку $|\Omega|$ четен, $\chi(1)\neq\theta(1)$, так что $\chi,\ \theta$ рациональнозначные.

Если $a\in\Omega$, пусть $\{a\},\ \Delta(a),\ \Gamma(a)$ — орбиты группы G_a, при этом $\Delta(ax)=\Delta(a)x,\ \Gamma(ax)=\Gamma(a)x$, где $x\in G$. Пусть $k=|\Delta(a)|,\ l=|\Gamma(a)|$. Ввиду четности $|\Omega|$, $k\neq l$, поэтому $\Delta(a)$ и $\Gamma(a)$ являются самодуальными в том смысле, что

$$\Delta(a)=\{ax\,|\,ax^{-1}\in\Delta(a)\},\quad \Gamma(a)=\{ax\,|\,ax^{-1}\in\Gamma(a)\}.$$

Определим целые числа $\mu,\ \lambda$ равенствами

$$|\Delta(a)\cap\Delta(b)|=\begin{cases}\lambda, & \text{если } b\in\Delta(a),\\ \mu, & \text{если } b\in\Gamma(a).\end{cases}\tag{11.3}$$

Тогда $\lambda,\ \mu$ не зависят от выбора $a,\ b$. При этом

$$|\Gamma(a)\cap\Gamma(b)|=\begin{cases}l-k+\mu-1, & \text{если } b\in\Gamma(a),\\ l-k+\lambda+1, & \text{если } b\in\Delta(a).\end{cases}\tag{11.4}$$

Имеют место следующие свойства.

Число $d=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$ является полным квадратом, и

$$\left.\begin{matrix}\theta(1)\\ \chi(1)\end{matrix}\right\}=\pm\frac{2k+(\lambda-\mu)(k+l)}{2\sqrt{d}}+\frac{k+l}{2}.\tag{11.5}$$

Кроме того, характеристические числа $s,\ t$ матрицы инцидентности, связанной с орбитой Δ, суть

$$\left.\begin{matrix}s\\ t\end{matrix}\right\}=\frac{\lambda-\mu\pm\sqrt{d}}{2}.\tag{11.6}$$

Пусть p — простое число, G — примитивная группа перестановок $2p$ символов. При $p=5$ примеры такого рода доставляют A_5 и S_5,

действующие на множестве двухэлементных подмножеств из $\{1, \ldots, 5\}$. Все прочие известные примеры таких групп являются дважды транзитивными группами. Основная цель данного и следующего параграфов — исследовать такие группы G, не являющиеся дважды транзитивными.

Для начала мы сформулируем без доказательства результат, который служит отправной точкой всей деятельности по изучению структуры таких групп.

Теорема 11.7 (Виланд [1956], [1964]). *Пусть p — простое число, G — примитивная группа перестановок на Ω, где $|\Omega| = 2p$. Предположим, что G не является дважды транзитивной. Тогда $2p = m^2 + 1$ для некоторого натурального m. Кроме того, G имеет ранг 3 и выполняются следующие условия (обозначения введены выше).*

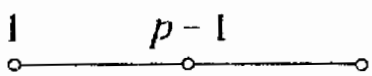
(i) $\chi(1) = p$, $\theta(1) = p - 1$.

(ii) $k = \frac{1}{2}m(m-1)$, $l = \frac{1}{2}m(m+1)$.

(iii) $s + t = -1$.

Теорема 11.8 (Ито [1962c]). *Пусть p, G, Ω такие, как в (11.7). Пусть P — некоторая S_p-подгруппа в G. Предположим, что $p > 3$ и $|N_G(P)| = 2p$. Тогда $p = 5$ и $G \cong A_5$.*

Доказательство. Дерево Брауэра для главного p-блока группы G есть



Поэтому существует неприводимый характер ζ группы G степени $\zeta(1) = p - 2$.

Поскольку $O_{p'}(G) = \langle 1 \rangle$, то ζ — точный характер. Согласно (7.3), $p = 2^a + 1$ для некоторого a и $G \cong \mathrm{SL}_2(p-1)$. Поскольку G имеет подгруппу индекса $2p$, известные свойства группы $\mathrm{PSL}_2(p-1)$ показывают, что $p = 5$ и $G \cong \mathrm{SL}_2(4) \cong A_5$. □

Лемма 11.9 (Ито [1967a]). *Пусть p, G, Ω таковы, как в (11.7). Тогда*

$$\lambda = \frac{1}{4}(m+1)(m-3), \quad \mu = \lambda + 1 = \frac{1}{4}(m-1)^2.$$

Доказательство. Согласно (11.6) и (11.7) (iii), $\lambda - \mu = -1$. По (11.5) и (11.7),

$$\pm\sqrt{d} = \pm\sqrt{d}(\chi(1) - \theta(1)) = 2k - (k+l) = -m,$$

значит, $4(k-\mu) = d - (\lambda - \mu)^2 = m^2 - 1$, откуда, ввиду (11.7) (ii),

$$4\mu = 4k + 1 - m^2 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2.$$

Итак,

$$4\lambda = 4\mu - 4 = m^2 - 2m - 3 = (m+1)(m-3). \quad \square$$

Следующий результат — слабый вариант теоремы Ито, но достаточный для нужд § 12. Ито доказал, что в действительности $H=\langle 1\rangle$ при $p>5$.

Лемма 11.10 (Ито [1967a]). *Пусть* $p>3$, *а* G, Ω *таковы, как в* (11.7). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) G_a *точна в своем действии на* $\Gamma(a)$.

(ii) *Пусть* H *— ядро действия* G_a *на* $\Delta(a)$. *Тогда* H *— элементарная абелева 2-группа, и любая орбита* H *на* $\Gamma(a)$ *имеет длину* 1 *или* 2.

Доказательство. (i) Пусть H — ядро действия G_a на $\Gamma(a)$. Пусть $\{c_1, \ldots, c_n\}$ — орбита H в $\Delta(a)$. Так как $H\subseteq G_{\Gamma(a)}$, то

$$\Gamma^*=\Gamma(a)\cap\Gamma(c_1)=\ldots=\Gamma(a)\cap\Gamma(c_n).$$

Согласно (11.4), (11.7) и (11.9), $|\Gamma^*|=m+\lambda+1=m+\mu$.

Пусть $i\neq j$, тогда $\Gamma^*\subseteq\Gamma(c_i)\cap\Gamma(c_j)$. Ввиду (11.4), (11.7) и (11.9), $|\Gamma(c_i)\cap\Gamma(c_j)|\leqslant m+\mu$, значит, $\Gamma(c_i)\cap\Gamma(c_j)=\Gamma^*$, если $i\neq j$. Таким образом, $\{\Gamma(c_i)-\Gamma^*\}$ — семейство попарно не пересекающихся подмножеств из $\Delta(a)$, поэтому

$$n\left\{\frac{1}{2}m(m+1)-m-\frac{1}{4}(m-1)^2\right\}=n\left\{\frac{1}{2}m(m+1)-m-\mu\right\}\leqslant\frac{1}{2}m(m-1).$$

Это влечет $n\leqslant 2m/(m+1)<2$, так что $n=1$. Значит, H тривиально действует на Δ, и следовательно, $H=\langle 1\rangle$.

(ii) Пусть $\{c_1, \ldots, c_n\}$ — орбита H в $\Gamma(a)$. Поскольку $H\subseteq G_{\Delta(a)}$, имеем

$$\Delta^*=\Delta(a)\cap\Delta(c_1)=\ldots=\Delta(a)\cap\Delta(c_n).$$

Согласно (11.3) и (11.9), $|\Delta^*|=\mu=\lambda+1$.

Пусть $i\neq j$, тогда $\Delta^*\subseteq\Delta(c_i)\cap\Delta(c_j)$. Вследствие (11.3) и (11.9), $|\Delta(c_i)\cap\Delta(c_j)|\leqslant\mu$. Значит, $\Delta(c_i)\cap\Delta(c_j)=\Delta^*$, если $i\neq j$. Таким образом, $\{\Delta(c_i)-\Delta^*\}$ — семейство попарно непересекающихся подмножеств из $\Gamma(a)$, и поэтому

$$n\left\{\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{4}(m-1)^2\right\}=n\left\{\frac{1}{2}m(m-1)-\mu\right\}\leqslant\frac{1}{2}m(m+1).$$

Так как $p>5$, то $m>3$. Значит, $n\leqslant 2m/(m-1)<3$, так что $n=1$ или 2. Таким образом, любая орбита H в Ω имеет длину 1 или 2, поэтому H — элементарная абелева 2-группа. □

§ 12. Группы перестановок степени $2p$

Пусть p — простое число, G — примитивная группа перестановок на Ω, где $|\Omega|=2p$. Допустим, что G не является дважды транзитивной на Ω. Согласно (11.7), $2p=m^2+1$ для некоторого натурального числа m. Цель настоящего параграфа — доказать следующий результат.

Теорема 12.1 (Л. Скотт [1969], [1970], [1972]). *Если* $m>3$, *то* m *является составным числом.*

Мы приведем доказательство Скотта, как оно представлено в [1970], [1972], что упрощает первоначальное доказательство, данное в [1969]. Это доказательство зависит от результатов § 11 и главы VI.

В частности, (12.1) влечет, что если $p<313$, то $p=5$, 41 или 113. Скотт [1976] при помощи специальных рассуждений показал, что случаи $p=41$ и 113 невозможны. Итак, известно, что если существует G с $p>5$, то $p\geqslant 313$.

На протяжении оставшейся части параграфа предполагается, что (12.1) неверно и существует группа G, для которой $q=m>3$ — простое число. Из этого предположения будет выведено противоречие.

Пусть $G^{(2)}$ определяется как в § 11. Поскольку G не дважды транзитивна на Ω, то $G^{(2)}$ также не является дважды транзитивной на Ω. Поэтому G можно заменить на $G^{(2)}$. Итак, можно считать $G=G^{(2)}$.

Пусть Q — некоторая S_q-подгруппа из G.

Лемма 12.2. $|Q|=q$.

Доказательство. Допустим, что результат неверен и $|Q|>q$. Выберем $a\in\Omega$ так, чтобы $Q\subseteq G_a$. Так как, согласно (11.7), орбиты подгруппы G_a в $\Omega-\{a\}$ имеют длины $q(q-1)/2$ и $q(q+1)/2$, то a — единственная неподвижная точка группы Q в Ω. Кроме того, каждая орбита группы Q в $\Omega-\{a\}$ имеет длину q, ибо $q(q+1)/2<q^2$. Пусть $b\in\Omega-\{a\}$, $H=Q_b$, тогда $|Q:H|=q$. Обозначим через Ξ множество неподвижных точек группы H в Ω. Выберем $x\in Q-H$.

Если $c\in\Omega-\Xi$, то $c^H=c^Q$, поскольку $|c^H|=|c^Q|=q$. Значит, Ξ является объединением орбит группы Q. Если $d\in\Xi$, то $c^{Q_d}=c^H=c^Q$, следовательно, $Q_cQ_d=Q$, для $c\in\Omega-\Xi$ и $d\in\Xi$. Тогда теорема Виланда о разбиении (11.2) утверждает, что $Q^{\Xi}\times Q^{\Omega-\Xi}\subseteq G$. Таким образом, можно считать, что x фиксирует все точки из $\Omega-\Xi$.

Пусть $b\in\Xi-\{a\}$ и $\{b\}$, $\Delta_1=\Delta(b)$, $\Delta_2=\Gamma(b)$ — орбиты группы G_b в Ω. Очевидно, $x\notin G_b$.

Допустим, что $\Delta_i\subseteq\Omega-\Xi$ для некоторого i. Тогда

$$G_b\subsetneqq\langle G_b, x\rangle\subseteq\{z\mid z\in G,\ \Delta_i z=\Delta_i\}\subsetneqq G.$$

Это противоречит примитивности G, значит, $\Delta_i\not\subseteq\Omega-\Xi$, $i=1$, 2.

Пусть M — группа, состоящая из всех $z\in G$, для которых $\Xi_z=\Xi$. Тогда $x\in M$ и $N_G(H)\subseteq M$. Для любого $c\in\Xi-\{b\}$, H является S_q-подгруппой в $G_{\{b,\,c\}}$, и по теореме Силова M_b транзитивна на $\Delta_i\cap\Xi$, $i=1$, 2, поскольку $\Delta_i\cap\Xi$ непусто.

Пусть A — нормальное замыкание элемента x в M, тогда A фиксирует все символы в $\Omega-\Xi$. Поскольку группа M_b транзитивна на $\Delta_i\cap\Xi$ и $A\trianglelefteq M$, то $\Delta_i\cap\Xi\subseteq b^A$, $i=1$, 2. Очевидно, $b\in b^A$, значит, $\Xi\subseteq b^A$. Следовательно, по теореме Жордана (11.1), G дважды транзитивна на Ω, вопреки условию. □

Пусть $1_G+\theta+\chi$ — характер перестановочного представления группы G на Ω. Согласно (11.7), $\chi(1)=p=(q^2+1)/2$, а $\theta(1)=p-1=(q^2-1)/2$.

Обозначим $C=C_G(Q)$, $N=N_G(Q)$. Очевидно, $C=Q\times A$ для некоторой подгруппы A.

Поскольку a — единственная неподвижная точка группы Q, имеем $N\subseteq G_a$.

Лемма 12.3. *Характеры χ и θ являются неисключительными характерами некоторого неглавного q-блока B группы G.*

Доказательство. Поскольку $N\subseteq G_a$, из (III.5.6) следует, что $1_G+\theta+\chi=(1_{G_a})^G=1_G+\Phi$, где Φ является характером проективного $\mathbf{Q}_q[G]$-модуля. Так как $\chi(1)$, $\theta(1)$ не делятся на q, то $\Phi=\chi+\theta$ и χ, θ лежат в одном q-блоке B. Ввиду того, что χ, θ рациональнозначны, они не являются исключительными характерами из B. Поскольку $\chi(1)\not\equiv\pm 1 \pmod q$, ввиду $q>3$, B отличен от главного q-блока. □

Лемма 12.4. *Существует такой характер ψ группы A, что $\psi(1)=(q-1)/2$ и*

$$\theta_C=\psi+\rho_Q\beta,\quad \chi_C=(\rho_Q-1_Q)\psi+\rho_Q,$$

где β — некоторый характер группы A, а ρ_Q — характер регулярного представления группы Q.

Доказательство. В силу (VII.2.17),

$$\theta_C=(a\rho_Q\pm 1_Q)\psi+\rho_Q\beta$$

для некоторого целого a. Поскольку, по теореме взаимности Фробениуса, 1_C является конституэнтой в θ_C, но не является конституэнтой в ψ, то $\beta\neq 0$. Кроме того, $\psi(1)\equiv\pm\theta(1)=\mp\frac{1}{2}(q-1) \pmod q$, поэтому $\psi(1)\geqslant(q-1)/2$. Если $a\neq 0$, то

$$\frac{1}{2}(q^2-1)=\theta(1)\geqslant(q-1)\frac{1}{2}(q-1)+q=\frac{1}{2}(q^2+1).$$

Таким образом, $a=0$, и в выражении для θ_C должен стоять знак $+$. Следовательно, $\psi(1)\equiv-\frac{1}{2}(q-1) \pmod q$.

Поскольку χ лежит в одном блоке с θ, из (VII.2.17) следует, что

$$\chi_C=(a'\rho_Q-1_Q)\psi+\rho_Q\beta',$$

ибо $\chi(1)+\theta(1)\equiv 0 \pmod q$. Поскольку 1_C является конституэнтой в χ_C, то $\beta'\neq 0$. Очевидно, $a'\neq 0$, поэтому

$$\frac{1}{2}(q^2+1)=\chi(1)=(a'q-1)\psi(1)+q\beta'(1).$$

Как легко видеть, из неравенств $\beta'(1)\geqslant 1$ и $\psi(1)\geqslant(q-1)/2$ следует, что $a'=\beta'(1)=1$ и $\psi(1)=(q-1)/2$. Значит, $\beta=1_A$.

Лемма 12.5. *Пусть Φ_0 — главный неразложимый характер группы G_a, соответствующий тривиальному характеру Брауэра. Тогда A содержится в ядре Φ_0.*

Доказательство. По теореме взаимности Фробениуса, χ_{G_a} обладает конституэнтой 1_{G_a}. Пусть R — кольцо целых подходящего расширения поля $\mathbf{Q}_q$ и X — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль с характером χ. Тогда, согласно (III.7.7), $X_{G_a}=Y\oplus Y_0$, где модуль Y_0 проективен, а Y принадлежит p-блоку группы G_a, который отвечает B при соответствии Брауэра. Поскольку $\mathrm{Inv}_{G_a} Y=(0)$, ввиду (V.6.2), то $\mathrm{Inv}_{G_a}(Y_0)=(0)$. Теперь, согласно (12.4), $\mathrm{rank}_R Y_0=q$. Значит, Φ_0 является характером модуля Y_0, и $\Phi_0(1)=q$. Таким образом, A лежит в ядре Φ_0. □

Лемма 12.6. *Группа A является элементарной абелевой 2-группой и тривиально действует на $\Delta(a)$. Кроме того, все орбиты A на $\Gamma(a)$ имеют длины* 1 *или* 2.

Доказательство. Пусть H обозначает ядро характера Φ_0, определенного в (12.5). Очевидно, H является q'-группой. Согласно (12.5), $A\subseteq H$. Так как $|\Delta(a)|=q(q-1)/2$, $|\Gamma(a)|=q(q+1)/2$ и $H\lhd G_a$, длины орбит группы H в $\Delta(a)$ взаимно просты с длинами орбит H в $\Gamma(a)$. Поэтому H_b для $b\in\Delta(a)$ транзитивна на всех орбитах группы H в $\Gamma(a)$. Следовательно, если $b\in\{a\}\cup\Delta(a)$, а $c\in\Gamma(a)$, то $H=H_bH_c$. Таким образом, по теореме Виланда о разбиении (11.2), $G\supseteq H^{(2)}=H_1\times H_2=H$, где H_1 тривиально действует на $\Delta(a)$, а H_2 тривиально действует на $\Gamma(a)$. Согласно (11.10), $H_2=\langle 1\rangle$ и $H=H_1$ — элементарная абелева 2-группа, длина любой орбиты которой в $\Gamma(a)$ равна 1 или 2. Так как $A\subseteq H$, лемма доказана. □

Лемма 12.7. *Кратность характера 1_A в $(1_G+\theta+\chi)_A$ не выше* $\frac{1}{2}(q^2+q+2)$.

Доказательство. Пусть кратность 1_A в $(1_G+\theta+\chi)_A$ равна n. Ввиду (12.4),

$$n=(1_A,\ 1_A+0_A+\chi_A)\leqslant 1+\theta(1)-\psi(1)+q=$$

$$=q+1+\frac{1}{2}(q^2-1-q+1)=\frac{1}{2}(q^2+q+2).\ \square$$

Теперь легко убедиться, что (12.6) и (12.7) несовместимы.

В силу (12.6) кратность n характера 1_A в $(1_G+\theta+\chi)_A$ удовлетворяет неравенству

$$n\geqslant 1+\frac{1}{2}(q^2-q)+\frac{1}{4}(q^2+q)=\frac{1}{4}(3q^2-q+4).$$

Тогда (12.7) влечет

$$3q^2-q+4\leqslant 4n\leqslant 2q^2+2q+4.$$

Следовательно, $q^2-3q\leqslant 0$, т. е. $q\leqslant 3$, вопреки условию. Это завершает доказательство теоремы 12.1. □

§ 13. Характеры степени p

В этом параграфе будут рассматриваться группы, удовлетворяющие нижеследующим условиям.

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } \textit{S_p-подгруппа } P \textit{ в } G \textit{ имеет порядок } p, \textit{ и } C_G(P)=P.\\ \text{(ii) } \textit{Пусть } N=EP, \textit{ где } N=N_G(P),\ |E|=e,\ E\cap P=\langle 1\rangle \textit{ и } |N_G(E)|=2e. \textit{ Кроме того, } E \textit{ является TI-множеством в } G \textit{ (т. е. } E\cap E^x=\langle 1\rangle \textit{ для } x\notin N_G(E)).\\ \text{(iii) } \textit{Любой неприводимый характер группы } G, \textit{ не принадлежащий главному } p\textit{-блоку, имеет степень } p.\end{array}\right\} \quad (*)$$

Цель настоящего параграфа — доказать следующий результат.

Теорема 13.1. *Если выполнены условия* (*), *то либо* G *— группа типа* $L_2(p)$, *либо* $p=3$ *и* $G/O_{3'}(G)\cong \mathrm{PSL}_2(5)$.

Прежде чем доказать теорему 13.1, выведем из нее два следствия.

Следствие 13.2 (Рихен [1972]). *Предположим, что* (*) *выполнены и* G *имеет единственный неприводимый характер степени* p. *Тогда* $p\geqslant 2$ *и* $G\cong \mathrm{PSL}_2(p)$. *Обратно, если* $p\geqslant 5$, *то* $\mathrm{PSL}_2(p)$ *удовлетворяет условиям* (*) *и имеет единственный неприводимый характер степени* p.

Доказательство. Неприводимый характер χ группы G тогда и только тогда лежит в главном блоке B_0 группы G, когда $O_{p'}(G)$ содержится в ядре χ и χ лежит в главном блоке группы $G/O_{p'}(G)$.

Допустим, что $O_{p'}(G)\neq\langle 1\rangle$. Пусть $a=|O_{p'}(G)|$ и $bp=|G:O_{p'}(G)|$. У группы G имеется единственный неприводимый характер θ степени $\theta(1)=p$, не содержащий $O_{p'}(G)$ в ядре. Таким образом,

$$abp=|G|=|G:O_{p'}(G)|+p^2=bp+p^2.$$

Отсюда $(a-1)b=p$. Но так как $p\nmid b$, то $b=1$ и $a=p+1$. Значит, $N=P$ и $E=\langle 1\rangle$. Тогда $2=|N_G(E)|=|G|$, что неверно. Следовательно, $O_{p'}(G)=\langle 1\rangle$.

Таким образом, согласно (13.1), $N=G$ или же существует такая подгруппа $H\lhd G$, что либо $H\cong \mathrm{PSL}_2(p)$, либо $p=3$ и $H\cong \mathrm{PSL}_2(5)$. Так как G имеет неприводимый характер степени p, то $N\neq G$. Из $C_G(P)=P$ следует, что $|G:H|\leqslant 2$. Пусть θ — неприводимый характер степени p группы G. Если $G\neq H$, то θ^G будет либо неприводимым степени $2p$, либо суммой двух различных неприводимых характеров степени p. Ни одна из этих возможностей не может возникнуть, по условию. Итак, $G=H$. Поскольку $\mathrm{PSL}_2(5)$ имеет два неприводимых характера степени 3, остается $G\cong \mathrm{PSL}_2(p)$. Группы $\mathrm{PSL}_2(2)$ и $\mathrm{PSL}_2(3)$ не удовлетворяют условию (ii) из (*). Итак, $p\geqslant 5$. Обратное утверждение хорошо известно. □

Следствие 13.3 (Ито [1963b]). *Пусть* G *— транзитивная группа перестановок простой степени* p, *имеющая единственный неприводимый характер степени* p. *Пусть* P *— некоторая* S_p*-подгруппа из* G. *Предположим, что* $N_G(P)=PE$, *где* $P\cap E=\langle 1\rangle$, $|N_G(E)|=2|E|$ *и* E *является TI-множеством в* G. *Тогда* $p=5$, 7 *или* 11, *и* $G\cong \mathrm{PSL}_2(p)$.

Доказательство. Хорошо известно, что в $\mathrm{PSL}_2(p)$ нет подгрупп индекса p, если $p>11$. Таким образом, результат следует из (13.2). □

Остаток параграфа посвящен доказательству теоремы 13.1. Допустим, что результат неверен. Пусть G — контрпример наименьшего порядка.

Будут использованы следующие обозначения.

$P=\langle y\rangle$, $E=\langle z\rangle$, $H=N_G(E)$, $u\in H-E$.

$\{1=\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ — множество всех неприводимых характеров группы E, для которых $\lambda_i^u=\lambda_i$.

$\{\mu_1, \mu_1^u, \ldots, \mu_t, \mu_t^u\}$ — остальные неприводимые характеры E.

Таким образом, $s+2t=e$. При этом для всех k характеры μ_k^H неприводимы, а каждый из λ_i^H, $1\leqslant i\leqslant s$, равен сумме двух различных характеров группы H.

Лемма 13.4. *Группа G простая.*

Доказательство. Очевидно, группа $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет (*), так что из минимальности G следует, что $O_{p'}(G)=\langle 1\rangle$. Пусть G_0 — подгруппа в G, порожденная всеми p-элементами из G. Если G_0 не удовлетворяет (*), то $N_G(E)\cap G_0=E\cap G_0$. Значит, $E\cap G_0$ является холловской подгруппой в G. По теореме Бернсайда о перемещении группа $E\cap G_0$ изоморфна факторгруппе группы G_0. Таким образом, $E\cap G_0=\langle 1\rangle$. Повторное применение теоремы Бернсайда о перемещении показывает, что G_0 имеет нормальное p-дополнение, так что G является p-разрешимой, вопреки предположению. Итак, G удовлетворяет (*), и значит $G=G_0$ — простая группа. □

Лемма 13.5. *Если e нечетно, то $s=1$ и $\mu_k^H=\overline{\mu_k^H}$ для любого k, $1\leqslant k\leqslant t$.*

Доказательство. Поскольку E является TI-множеством, и $|H|=2e$, то E является холловской подгруппой в G. Тогда из (13.4) и теоремы Бернсайда о перемещении следует, что H — диэдральная группа. Отсюда получаем результат. □

Лемма 13.6. *Пусть θ — неприводимый характер группы G и $\theta(1)=p$. Тогда $(\theta_E, \mu_k)=0$ для всех k и $(\theta_H, \lambda_i)=1$ для единственного значения i, $1\leqslant i\leqslant s$.*

Доказательство. Ограничение θ_N является главным неразложимым характером группы N, поэтому $\theta_N=\lambda_i^N$ или μ_k^N для некоторого i или k. Поскольку θ_E — функция классов, то $\theta_N\neq\mu_k^N$. Значит, $\theta_N=\lambda_i^N$. □

Лемма 13.7. *Если $1\leqslant i\leqslant s$, $1\leqslant k\leqslant t$, то $\|(\lambda_i-\mu_k)^G\|^2=3$.*

Доказательство. Поскольку E является TI-множеством и $(\lambda_i-\mu_k)(1)=0$, то

$$\|(\lambda_i-\mu_k)^G\|^2=\|(\lambda_i-\mu_k)^H\|^2=3. \quad \square$$

Лемма 13.8. *Если $t\neq 0$ и $1\leqslant k\leqslant t$, то*

$$(\lambda_i-\mu_k)^G=1+\theta-\chi_k,$$

где θ, χ_k — неприводимые характеры, $\theta_N=\lambda_1^N$, $(\chi_k)_N=\mu_k^N+\mu_k^u$, если μ_k^u рассматривать как характер группы $N/P\cong E$.

Доказательство. В силу (13.7). $(\lambda_1-\mu_k)^G=1+\alpha-\beta$, где α, β — неприводимые характеры группы G. Из p-рациональности характера $(\lambda_1-\mu_k)^G$ следует, что $\alpha(1)$, $\beta(1)\equiv 0, \pm 1 \pmod p$ и $1+\alpha(1)=\beta(1)$. Поскольку $t\neq 0$, то $e\geqslant 3$ и потому $p>3$. Таким образом, $\alpha_1(1)\equiv 0 \pmod p$ или $\beta(1)\equiv 0 \pmod p$. По (13.6) и взаимности Фробениуса (III.2.5). $\beta(1)\neq p$, значит, $\alpha(1)=p$, а $\beta(1)=p+1$. Пусть $\theta=\alpha$, $\chi_k=\beta$. В силу (13.6) и взаимности Фробениуса, $\theta_N=\lambda_1^N$. Непосредственное вычисление дает

$$((\lambda_1-\mu_k)^G)_N=\lambda_1+\lambda_1^N-(\mu_k^u+\mu_k^N).$$

Значит, $(\chi_k)_N=1+\theta_N-((\lambda_1-\mu_k)^G)_N$, что и требовалось. □

Лемма 13.9. $t=0$.

Доказательство. Допустим, что это не так. Пусть θ, χ_k определены, как в (13.8).

Сначала предположим, что e нечетно. Согласно (13.5). $\chi_k=\bar{\chi}_k$, так что χ_k находится на вещественном стволе дерева Брауэра τ главного блока. Ввиду нечетности e, как τ, так и его вещественный ствол имеют четное число вершин. Поэтому обе концевые точки не могут соответствовать характерам степени $d\equiv 1 \pmod p$. Поскольку 1_G является концевой точкой, характер χ_k не может быть таковой, и потому приводим как характер Брауэра. Пусть φ — неприводимый характер Брауэра, являющийся конституэнтой характера χ_k, причем $\varphi(1)\leqslant\frac{1}{2}\chi_k(1)=\frac{1}{2}(p+1)$. Поскольку $\chi_k(1)\equiv 1 \pmod p$. φ — неглавный характер Брауэра. Следовательно, φ точен, ввиду (13.4). Если $p>7$, то $\frac{1}{2}(p+1)<\frac{2}{3}(p-1)$, и, согласно (3.1), G — группа типа $L_2(p)$, вопреки предположению. Поскольку $e>1$ и нечетно, то $p>5$. Предположим, что $p=7$, тогда $e=3$ и τ выглядит так:

где числа показывают степени соответствующих характеров. Отсюда $a=3$ или $b=3$. Из классификации всех конечных групп с точным представлением степени 3 вытекает, что $G\cong \mathrm{PSL}_2(7)$, вопреки предположению. Значит, e четно.

Таким образом, s четно, так что $s\geqslant 2$. Согласно взаимности Фробениуса, $(\mu_k^G, \chi_k)=1$ и $(\lambda_i^G, \chi_k)=0$ для всех i. Следовательно, $(\lambda_2-\mu_k)^G=-\chi_k+\alpha\pm\beta$, где α, β — неприводимые характеры G.

Допустим, что $(\lambda_2-\mu_k)^G=-\chi_k+\alpha+\beta$, тогда $\alpha(1)+\beta(1)=p+1$, и можно считать, что $\alpha(1)\leqslant\frac{1}{2}(p+1)$. Ввиду $(1_G, (\lambda_2-\mu_k)^G)=0$, из (13.4) следует, что α точен. Значит, согласно (3.1), G — группа типа $L_2(p)$ при $p>7$, вопреки предположению. Из неравенств

$$4\leqslant s+2t=e\leqslant\alpha(1)\leqslant\frac{1}{2}(p+1)$$

видно, что $p \geqslant 7$. Если $p=7$, то, ввиду $e \mid (p-1)$, получаем $6=e \leqslant \alpha(1) \leqslant 4$ — противоречие.

Наконец, допустим, что $(\lambda_2-\mu_k)^G=-\chi_k+\alpha-\beta$. Если $\alpha(1)$, $\beta(1) \not\equiv 0 \pmod p$, то $\alpha(1)$, $\beta(1) \equiv \pm 1 \pmod p$, ввиду p-рациональности $(\lambda_2-\mu_k)^G$. Значит, $-1 \pm 1 \pm 1 \equiv 0 \pmod p$, т. е. $p \leqslant 3$, вопреки тому факту, что $e \geqslant s+2t \geqslant 4$. В силу (13.6), $\beta(1) \neq p$, но тогда $\alpha(1)=p$ и $\beta(1)=1$, вопреки (13.4). □

Лемма 13.10. $e=2$.

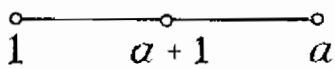
Доказательство. Согласно (13.9), $t=0$, поэтому группа H абелева. Ввиду (13.4) и теоремы Бернсайда о перемещении, H является 2-группой. Пусть x — единственная инволюция циклической группы E. Если $e \neq 2$, то $\langle x \rangle$ — характеристическая подгруппа в H, значит, $N_G(H) \subseteq N_G(\langle x \rangle)=H$. Таким образом, H является S_2-подгруппой в G, и теорема Бернсайда о перемещении влечет существование в G нормального 2-дополнения, вопреки (13.4). □

Лемма 13.11. *Существуют такие попарно различные неглавные неприводимые характеры* α, β, γ *группы* G, *что*

$$(\lambda_1-\lambda_2)^G=1_G+\alpha-\beta \pm \gamma.$$

Доказательство. Из того, что E является TI-множеством, следует, что $\|(\lambda_1-\lambda_2)^G\|^2=\|(\lambda_1-\lambda_2)^H\|^2=4$. Результат вытекает из равенства $(\lambda_1-\lambda_2)^G(1)=0$. □

Доказательство теоремы 13.1. Сначала предположим, что один из характеров α, β или γ из (13.11) является исключительным характером главного блока. Из p-рациональности характера $(\lambda_1-\lambda_2)^G$ следует, что $\frac{1}{2}(p-1)=(p-1)/e \leqslant 2$, так что $p=5$. Дерево Брауэра главного блока есть



Если α, β, γ все принадлежат главному блоку, то $1 \pm (a+1) \pm 2a=0$, откуда $a=2$, вопреки тому, что $a+1 \equiv \pm 1 \pmod 5$. Значит, степень одного из характеров α, β, γ равна 5. Тогда исключительная степень равна 3, так как $1+5=2 \cdot 3$, и из классификации конечных групп с точным 3-мерным комплексным представлением следует, что $G \cong \mathrm{PSL}_2(5)$, вопреки предположению. Таким образом, ни один из α, β, γ не является исключительным характером главного блока.

Поскольку $e=2$, согласно (13.10), в главном блоке имеются только 2 неисключительных характера, за исключением случая $p=3$, когда есть 3 неисключительных характера. Если $p=3$, один из α, β, γ имеет степень 3, и в результате проверки групп с точным комплексным представлением степени 3 получается $G \cong \mathrm{PSL}_2(5)$, вопреки предположению.

Допустим, что $p>3$, тогда по крайней мере две из степеней $\alpha(1)$, $\beta(1)$, $\gamma(1)$ равны p. Значит, в точности две из них равны p,

а оставшаяся степень есть 1, $2p-1$ или $2p+1$. Случай 1 невозможен, ввиду (13.4). Значит, для дерева Брауэра есть две возможности:

Если θ — неприводимый характер, $\theta(1)=p$, то $(\theta, (\lambda_1-\lambda_2)^G)\neq 0$, согласно (13.6). Следовательно, G имеет точно 2 неприводимых характера степени p. Поскольку $(2p+2\varepsilon)\big||G|$, где $\varepsilon=1$ или -1,

$$0\equiv|G|=2p^2+1+(2p+\varepsilon)^2+\frac{1}{2}(p-1)(2p+2\varepsilon)^2\equiv 4 \pmod{(p+\varepsilon)}.$$

Значит, $p=5$ и $\varepsilon=-1$, так как $p>3$. Отсюда

$$|G|=50+1+81+128=260.$$

Однако $2p+2\varepsilon=8$, т. е. $(2p+2\varepsilon)\nmid|G|$. Это противоречие завершает доказательство. □

ГЛАВА IX

На протяжении этой главы R будет полем характеристики p или кольцом целых элементов конечного расширения K поля $\mathbf{Q}_p$. Пусть $\bar{R}$ обозначает поле классов вычетов, так что $\bar{R}=R$, когда R — поле. Для любого $R[G]$-модуля V обозначим через (V) класс изоморфизма $R[G]$-модулей, содержащий V. Пусть C — поле характеристики 0. Алгебра представлений $A_C(R[G])$ была определена в § 4 гл. II. Мы часто будем писать просто $A_C(R[G])=A(G)$, если не требуется явное указание на C или R. Эта глава содержит результаты, относящиеся к структуре $A(G)$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — непустое семейство подгрупп из G, $A_{\langle 1\rangle}(G)=A_{C\mathfrak{H}}(R[G])$ определено как в (II.4.3). Если H — подгруппа из G, положим $A_H(G)=A_{\{H\}}(G)$. Согласно (II.4.3), $A_{\mathfrak{H}}(G)$ является идеалом алгебры $A(G)$, и если (V) пробегает классы изоморфизма неразложимых R-свободных $R[H]$-проективных $R[G]$-модулей, где $H\in\mathfrak{H}$, то $\{(V)\}$ образует C-базис в $A_{\mathfrak{H}}(G)$.

Естественно спросить, при каких условиях $A_C(R[G])$ будет полупростой. В § 2 показано, что это так, если S_p-подгруппа в G циклическая и $R=\bar{R}$ — поле. (Приведенное доказательство нельзя считать полным, так как оно использует один результат Линдси.) Если $p=2$ и $8\nmid|G|$, то $A_C(\bar{R}[G])$ также полупроста. Мы отсылаем читателя к Конлону [1965], [1966], [1969]; Доновану и Фрейслиху [1976] и более ранним статьям Башева [1961] и Хеллера, Райнера [1961], которые содержат классификацию $\bar{R}[P]$-модулей в случае, когда $p=2$ и P — нециклическая группа порядка 4. Близкие результаты получили Валлис [1969], Эрно [1969], Мюллер [1974a], [1974b], Эрдман [1979a], Донован и Фрейслих [1978].

В связи с этим упомянем некоторые другие результаты, которые не рассматриваются в книге.

Если $R=\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, а G имеет S_p-подгруппу P, то $A_C(\mathbf{Z}_p[G])$ тогда и только тогда полупроста, когда $|P|=p^s$, $s\leqslant 1$ (см. Райнер [1966a], [1966b][1]). Если G имеет нециклическую S_p-подгруппу, то $A_C(\mathbf{Z}_p[G])$ содержит ненулевые нильпотентные элементы (см. Земанек [1971], П. М. Гудивок, С. Ф. Гончарова и В. П. Рудько [1971]). Гудивок и Рудько [1973] обобщили

---

[1] На неточность, имевшуюся здесь в оригинале, наше внимание обратил П. М. Гудивок.— *Примеч. пер.*

этот результат на случай, когда R — конечное расширение кольца целых p-адических чисел.

Когда $R=\bar{R}$ — поле и $p\neq 2$, Земанек [1971] показала, что если S_p-подгруппа в G нециклическая, то $A_C(R[G])$ содержит нильпотентные элементы. Земанек [1973] исследовала также случай группы G порядка 8. См. также Ямоши [1972], Бондаренко [1975], Рингель [1975]. Кроме того, изучались разные типы представлений и модулей, см., например, Карлсон [1974], [1976a], [1976b], Януш [1970], [1971], [1972] или Джонсон [1969a], [1969b]. В § 3 и § 4 обсуждаются модули другого типа.

§ 1. Структура алгебры $A(G)$

Алгебра $A(G)$ коммутативна. Кроме того, $\dim_C A(G)$ тогда и только тогда конечна, когда G имеет циклическую S_p-подгруппу. Этот параграф содержит ряд результатов о строении $A(G)$.

Пусть P — некоторая p-подгруппа из G, а $\mathfrak{S}(P)$ — множество всех собственных подгрупп в P. Определим $W_P(G)=A_P(G)/A_{\mathfrak{S}(P)}(G)$. Согласно (III.5.9), $W_P(G)\cong W_P(N_G(P))$.

Теорема 1.1 (Конлон [1967], [1968]). $A(G)\cong\oplus W_P(N_G(P))$ (*прямая сумма колец*), *где P пробегает полное множество представителей классов сопряженных p-подгрупп из G.*

Приведенное здесь доказательство — упрощение доказательства Конлона. В качестве непосредственного следствия (1.1) получаем

Следствие 1.2 (Грин [1964]). *Алгебра $A(G)$ тогда и только тогда полупроста, когда для любой p-подгруппы P из G полупроста алгебра $W_P(N_G(P))$.*

Следующий результат был доказан Лэмом [1968] в случае, когда R — поле. Близкие результаты можно найти у Конлона [1967], [1968]; Уоллеса [1968].

Теорема 1.3. (i) *Пусть P — некоторая p-подгруппа из G. Тогда алгебра $A_P(N_G(P))$ изоморфна подалгебре в $\oplus A_P(H)$, где H пробегает все такие подгруппы из $N_G(P)$, что $P\subseteq H$ и группа H/P — циклическая.*

(ii) *Алгебра $A(G)$ тогда и только тогда содержит ненулевой нильпотентный элемент, когда существуют такие p-подгруппа P из G и подгруппа H из $N_G(P)$, что H/P — циклическая p'-группа, и $A(H)$ содержит ненулевой нильпотентный элемент.*

Для удобства ссылок включен следующий элементарный результат.

Лемма 1.4. *Предположим, что $R=\bar{R}$ — алгебраически замкнутое поле, P и H — соответственно p-группа и p'-группа. Тогда $A(P\times H)=A(P)\otimes A(H)$.*

Доказательство. Очевидно, ввиду (III.3.7). □

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству (1.1) и (1.3). Сначала установим некоторые предварительные результаты.

Пусть $A^0(\bar{R}[G])=A_C^0(\bar{R}[G])$ — алгебра Гротендика. Тогда $A^0(\bar{R}[G])$ можно отождествить с алгеброй C-линейных комбинаций

характеров Брауэра $\bar{R}[G]$-модулей. Если V — какой-либо $\bar{R}[G]$-модуль, его характер Брауэра обозначим через β_V. Определим гомоморфизм алгебр $\beta: A(\bar{R}[G]) \to A^0(\bar{R}[G])$, полагая $\beta((V)) = \beta_V$ для любого $\bar{R}[G]$-модуля V.

Лемма 1.5. $A^0(\bar{R}[G]) \cong A_{\langle 1\rangle}(\bar{R}[G]) \cong A_{\langle 1\rangle}(R[G])$.

Доказательство. Второй изоморфизм следует из (I.13.7). Пусть $\{\varphi_i\}$ — множество характеров Брауэра неприводимых $\bar{R}[G]$-модулей, а Φ_i — характер Брауэра, отвечающий главному неразложимому $\bar{R}[G]$-модулю, который соответствует характеру φ_i. Согласно (I.19.3), для каждого i существуют такие неприводимые характеры Брауэра φ_{ij}, что $\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij}$. Тогда $\Phi_i = \sum_j \Phi_{ij}$, где Φ_{ij} соответствует φ_{ij}. Из (IV.3.3) следует, что $(\varphi_i, \Phi_k)' = \delta_{ik} m$, где $m \neq 0$ зависит от i. Это означает, что $\{\Phi_i\}$ — базис в $A^0(R[G])$. Следовательно, ограничение гомоморфизма β на $A_{\langle 1\rangle}(\bar{R}[G])$ — изоморфизм $A_{\langle 1\rangle}(\bar{R}[G])$ на $A^0(\bar{R}[G])$. □

Следующий результат, обобщающий (III.2.7), вначале появился у Конлона [1967] в случае, когда R — поле.

Лемма 1.6. *Пусть $T \lhd G$. Пусть U — некоторый R-свободный $R[T]$-проективный $R[G]$-модуль, V есть R-свободный $R[G/T]$-модуль, а V_1 — чистый подмодуль в V. Тогда $U \otimes V \cong (U \otimes V_1) \oplus (U \otimes V/V_1)$.*

Доказательство. Поскольку T содержится в ядре V, а V_1 — чистый подмодуль, последовательность

$$0 \to (V_1)_T \to V_T \to (V/V_1)_T \to 0$$

является точной и расщепляемой. Тензорно умножив ее на U_T, получим, что последовательность

$$0 \to (U \otimes V_1)_T \to (U \otimes V)_T \to (U \otimes V/V_1)_T \to 0$$

расщепляема. Из того, что модуль $U \otimes V_1$ является $R[T]$-проективным, вытекает, что $U \otimes V_1 \mid U \otimes V$. □

Лемма 1.7. *Пусть $T \lhd G$.*

(i) *Если $x, y \in A(\bar{R}[G/T])$ таковы, что $\beta(x) = \beta(y)$ и $u \in A_T(\bar{R}[G])$, то $ux = uy$.*

(ii) *Алгебра $A_T(\bar{R}[G])$ обладает единицей.*

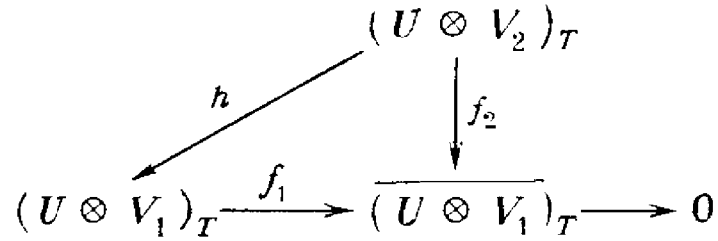
Доказательство. (i) Повторное применение (1.6) в случае, когда $R = \bar{R}$, приводит к результату.

(ii) Пусть V_0 — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, которому отвечает главный характер Брауэра φ_0, тогда $(V_0) \in A(\bar{R}[G/T])$. Ввиду (1.5), существует такой элемент $x \in A_{\langle 1\rangle}(\bar{R}[G/T]) \subseteq A_T(\bar{R}[G])$, что $\beta(x) = \varphi_0$. Отсюда, по (i), имеем $(V)x = (V)(V_0) = (V)$ для всех $(V) \in A_T(\bar{R}[G])$. □

Лемма 1.8. *Пусть $T \lhd G$. Предположим, что R не является полем. Пусть U — R-свободный $R[T]$-проективный $R[G]$-модуль, а V_1, V_2 — такие R-свободные $R[G/T]$-модули, что $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ имеют один и тот же характер Брауэра. Тогда $U \otimes V_1 \cong U \otimes V_2$.*

Доказательство. Согласно (III.2.7), $\underline{U \otimes \bar{V}_1} \cong \underline{U \otimes \bar{V}_2}$. Пусть f_i — естественная проекция $U \otimes V_i$ на $\underline{U \otimes V_1} \cong \underline{U \otimes V_i}$. Поскольку $(U \otimes V_i)_T \cong (\dim \bar{V}_i) U$, существует такой $R[T]$-гомоморфизм h, что

следующая диаграмма коммутативна:



Поскольку модуль $U\otimes V_2$ является $R[T]$-проективным, существует такой $R[G]$-гомоморфизм $g: U\otimes V_2\to U\otimes V_1$, что $f_1\cdot g=f_2$.

Пусть M_1 — ядро f_1, тогда $M_1\oplus g(U\otimes V_2)=U\otimes V_1$, и $M_1=\pi(U\otimes V_1)\subseteq \mathrm{Rad}(U\otimes V_1)$. Значит, g — эпиморфизм. Пусть M — ядро g. Поскольку модуль $g(U\otimes V_2)$ свободен над R, то M является чистым подмодулем в $U\otimes V$. Следовательно,

$$\mathrm{rank}_R M+\mathrm{rank}_R(U\otimes V_1)=\mathrm{rank}_R M+\mathrm{rank}_R g(U\otimes V_2)=\mathrm{rank}_R(U\otimes V_2)=\mathrm{rank}_R(U\otimes V_1).$$

Итак, $\mathrm{rank}_R M=0$, т. е. $M=(0)$, поэтому g — изоморфизм $U\otimes V_2$ на $U\otimes V_1$. □

Лемма 1.9. *Пусть* $T\lhd G$.

(i) *Пусть* $x, y\in A(R[G/T])$ *таковы, что* $\beta(x)=\beta(y)$. *Если* $u\in A_T(R[G])$, *то* $ux=uy$.

(ii) *Алгебра* $A_T(R[G])$ *обладает единицей.*

Доказательство. Если R — поле, результат следует из (1.7). Предположим, что R не является полем.

(i) Непосредственно следует из (1.8).

(ii) Пусть V_0 — некоторый R-свободный $R[G]$-модуль, которому отвечает главный характер. Тогда $(V_0)\in A_T(R[G])$. В силу (1.5), существует элемент $x\in A_{\langle 1\rangle}(R[G/T])\subseteq A_T(R[G])$, для которого $\beta(x)=\beta((V_0))$. Если $u\in A_T(R[G])$, то, согласно (i), $ux=u(V_0)=u$. Итак, x является искомой единицей по умножению. □

Лемма 1.10. *Пусть* $\mathfrak{P}$ — *полное множество представителей классов сопряженных p-подгрупп из G. Для любой группы* $D\in\mathfrak{P}$ *положим* $\mathfrak{P}(D)=\{P\mid P\in\mathfrak{P},\ P^x\subseteq D$ *для некоторого* $x\in G\}$. *Для* $P\in\mathfrak{P}$ *обозначим через* $S_P(G)$ *подпространство в* $A(G)$, *порожденное классами всех тех* V, *для которых* P *является вертексом. Тогда для любой группы* $D\in\mathfrak{P}$ *в* $A(G)$ *найдется такой идеал* $A'_D(G)\cong W_D(N_G(D))$ (*изоморфизм алгебр*), *что*

$$A_D(G)=\sum_{P\in\mathfrak{P}(D)} S_P(G)=\sum_{P\in\mathfrak{P}(D)} A'_P(G).$$

Доказательство. Индукция по $|D|$. Если $|D|=1$, то $S_{\langle 1\rangle}(G)=A_{\langle 1\rangle}(G)$ — идеал в $A(G)$, и $A'_{\langle 1\rangle}(G)=A_{\langle 1\rangle}(G)$.

Допустим, что $|D|>1$. По определению,

$$A_D(G)=\sum_{P\in\mathfrak{P}(D)} S_P(G)=S_D(G)+\sum_{\substack{P\in\mathfrak{P}(D)\\ P\neq D}} S_P(G).$$

Если $D_0\in\mathfrak{P}(D)$, $D_0\neq D$, то по индукции $\sum_{P\in\mathfrak{P}(D_0)} S_P(G)=\sum_{P\in\mathfrak{P}(D_0)} A'_P(G)$ для подходящих идеалов $A'_P(G)$ алгебры $A(G)$, таких, что $A'_P(G)\cong W_P(N_G(P))$. Если D_1, $D_2\in\mathfrak{P}(D)$ и D_1, $D_2\neq D$, то, по определению,

$$\{\bigoplus_{P\in\mathfrak{P}(D_1)} S_P(G)\}\{\bigoplus_{P\in\mathfrak{P}(D_2)} S_P(G)\}=\bigoplus_{P\in\mathfrak{P}(D_1)\cap\mathfrak{P}(D_2)} S_P(G)$$

и, таким образом, $A'_P\subseteq\oplus_{P'\in\mathfrak{P}(D_1)\cap\mathfrak{P}(D_2)} S_P(G)$, если $P\in\mathfrak{P}(D_1)\cap\mathfrak{P}(D_2)$. Далее, $A_D(G)=S_D(G)\in A_{\Xi(D)}(G)$, при этом

$$A_{\Xi(D)}(G)=\bigoplus_{\substack{P\in\mathfrak{P}(D)\\P\neq D}} A'_P(G) \text{ и } A_D(G)/A_{\Xi(D)}(G)\cong W_D(N_G(D)).$$

Согласно (1.9), $W_P(N_G(P))$ — кольцо с единицей, для любой группы $P\in\mathfrak{P}$. Тем самым, $A_{\Xi(D)}(G)$ имеет единицу. Поэтому существует такой идемпотент $e\in A(G)$, что $A_{\Xi(D)}(G)=A_D(G)e$. Пересечение $A'_D(G)=A_D(G)\cap A(G)(1-e)$ является идеалом в $A(G)$, причем $A'_D(G)\cap A_{\Xi(D)}(G)=(0)$. Так как в $A(G)/A_{\Xi(D)}(G)$ элемент $1-e$ превращается в 1, то

$$A'_D(G)\cong A_D(G)/A_{\Xi(D)}(G)\cong W_D(N_G(D))$$

и

$$A_D(G)=A'_D(G)\oplus A_{\Xi(D)}(G). \square$$

Доказательство теоремы (1.1). Пусть D — некоторая S_p-подгруппа в G. Тогда $A_D(G)=A(G)$, и результат теперь следует из (1.10). $\square$

Лемма 1.11. (i) *Предположим, что R не является полем. Пусть θ — характер R-свободного $R[G]$-модуля. Тогда $\theta=\sum a_i\eta_i^G$, где все a_i рациональны, а каждый η_i является характером R-свободного $R[H]$-модуля для некоторой циклической подгруппы H из G.*

(ii) *Предположим, что $R=\bar{R}$ — поле. Пусть φ — характер Брауэра некоторого $\bar{R}[G]$-модуля. Тогда $\varphi=\sum a_i\psi_i^G$, где все a_i рациональны, а каждый ψ_i является характером $\bar{R}[H]$-модуля для некоторой циклической p'-подгруппы H из G.*

Доказательство. Если $\bar{R}$ или K является полем разложения для G, оба результата очевидны, так как размерность пространства всех линейных комбинаций $\sum a_i\eta_i^G(\sum a_i\psi_i^G)$ равна числу классов (соответственно, p-сингулярных классов). Если $\theta^\tau=\theta$ или $\varphi^\tau=\varphi$, где τ пробегает некоторую группу M автоморфизмов поля $\bar{R}$, то

$$\theta=\frac{1}{|M|}\sum_i a_i(\sum_\tau\eta_i^\tau)^G \text{ или } \varphi=\frac{1}{|M|}\sum_i a_i(\sum_\tau\psi_i^\tau)^G. \square$$

Доказательство теоремы 1.3. (i) Можно считать, что $G=N_G(P)$, т. е. $P\lhd G$. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество всех таких подгрупп

H из G, что $P \subseteq H$ и H/P — циклическая группа. Определим линейное отображение $t: A_p(G) \to \oplus_{H \in \mathfrak{H}} A_P(H)$, полагая $t((V)) = \sum_{H \in \mathfrak{H}} (V_H)$. Достаточно показать, что t — мономорфизм.

Предположим, что $t((V)) = 0$. Это означает, что $V_H = (0)$ для всех $H \in \mathfrak{H}$. Тогда если $H \in \mathfrak{H}$, а Y — некоторый R-свободный $R[H]$-модуль, то $(V)(Y^G) = ((V_H \otimes Y)^G) = 0$.

Если R не является полем, пусть V_0 — тот R-свободный $R[G]$-модуль, которому отвечает главный характер. Если $R = \bar{R}$ — поле, пусть V_0 — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль, которому отвечает главный характер Брауэра φ_0. В обоих случаях P содержится в ядре V_0. Согласно (1.11) применительно к G/P, для $H \in \mathfrak{H}$ существуют такие R-свободные $R[H]$-модули Y_i, что $\varphi_0 = \sum_i a_i \beta((Y_i^G))$ для некоторых $a_i \in C$. По (1.7) и (1.9),

$$(V) = (V)(V_0) = \sum_i a_i (V)(Y_i^G) = (0).$$

Значит, t — мономорфизм, что и утверждалось.

(ii) Все компоненты нильпотентного элемента из $\oplus A_P(H)$ должны быть нильпотентными, и результат сразу следует из (1.1) и (1.10). □

§ 2. Алгебра $A(G)$ в случае циклической S_p-подгруппы группы G и поля R

На протяжении этого параграфа $A(G) = A(F[G])$, где F — поле характеристики p. Следующий результат принадлежит О'Рейли [1964], [1965].

Теорема 2.1. *Пусть G — группа с циклической S_p-подгруппой. Тогда алгебра $A(G)$ полупроста.*

В этом параграфе мы докажем теорему 2.1 по модулю следующего результата, который сформулируем без доказательства (см. Линдси [1974, Lemma 2.6]).

Лемма 2.2. *Пусть P — циклическая p-группа, $|P| > 1$ и $|P : P_1| = p$. Если M_1 и M_2 — неразложимые $F[P]$-модули, то $M_1 \otimes M_2 = M_0 \oplus (\oplus_{i=1}^{n} V_i)$, где модуль M_0 является $F[P_1]$-проективным, а каждый модуль V_i неразложим и $\dim_F V_i \neq \dim_F V_j$, если $i \neq j$.*

Если $|P| = p$, то (2.2) следует из (VIII.2.7). Общий случай гораздо сложнее. По поводу дальнейших результатов см. Рено [1979]. Сначала необходимо доказать следующую теорему.

Теорема 2.3 (Грин [1962b]). *Пусть P — циклическая p-группа. Тогда алгебра $A(P)$ полупроста.*

Доказательство теоремы 2.3, данное Грином, основано на отыскании образующих и определяющих соотношений для $A(P)$ и довольно сложное. Здесь мы дадим короткое изящное доказательство Ханнулы, Рэлли и Райнера [1967]. На самом деле теорема 1.3 была предназначена именно для этого упрощения. Однако доказательство все еще зависит от метода Грина и использует результаты об

образующих и соотношениях для $A(P)$. Разумеется, требуются результаты и о тензорных произведениях $F[G]$-модулей, но предлагаемое здесь доказательство использует лишь (2.2).

Тем не менее, следует отметить, что метод Грина дает больше информации. Используя его методы, Рудько [1968] доказал следующий результат (см. также Рено [1978]).

Теорема 2.4. *Пусть P — циклическая p-группа, $p\neq 2$. Пусть $C=\mathbf{Q}$, а L — вещественное подполе поля корней степени p из 1 над $\mathbf{Q}$. Тогда $A(P)\cong\mathbf{Q}\oplus A$, где A — прямая сумма $2(|P|-1)/(p-1)$ экземпляров поля L.*

Здесь мы не будем доказывать теорему 2.4; впрочем, при $|P|=p$ она следует из (VII.2.7). Это видно из следующих соображений. Пусть ε — примитивный корень степени $2p$ из 1. В силу (VII.2.7), линейное отображение, переводящее $V(1, t)$ в $(\varepsilon^t-\varepsilon^{-t})/(\varepsilon-\varepsilon^{-1})$ является кольцевым гомоморфизмом. Результат теперь является простым следствием этого факта.

Близкие результаты получили Гудивок и Рудько [1973], Батлер [1974], Карлсон [1975] и Яковлев [1972], а также Лэм и Райнер [1969], Санта [1971].

Пусть P — циклическая p-группа и V_i — неразложимый $F[P]$-модуль размерности $\dim_F V_i=i$, $1\leqslant i\leqslant|P|$. Тогда (V_1), ..., $(V_{|P|})$ — базис алгебры $A(G)$. Каждый модуль V_i является однорядным, причем $V_i\cong\mathrm{Rad}(V_{i+1})$ для $1\leqslant i\leqslant|P|-1$. Доказательство леммы 2.2 основано на двух элементарных леммах.

Лемма 2.5. *$V_s\otimes V_t$, $1\leqslant s, t\leqslant|P|$, является прямой суммой $\min(s, t)$ ненулевых неразложимых $F[P]$-модулей.*

Доказательство. Пусть $V_s\otimes V_t$ — прямая сумма n ненулевых неразложимых модулей. Из того, что $V_t^*\cong V_t$, следует

$$n=\dim_F \mathrm{Inv}_P(V_s\otimes V_t^*)=\dim_F \mathrm{Hom}_{F[P]}(V_s, V_t).$$

Из структуры V_s и V_t видно, что $\dim_F \mathrm{Hom}_{F[P]}(V_s, V_t)=\min(s, t)$. □

Лемма 2.6. *Пусть m — натуральное число. Вещественная квадратичная форма $f(X)=\sum_{i,j=1}^{m}\min(i, j)X_iX_j$ положительно определена.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$f(X)=(X_1+\ldots+X_m)^2+(X_2+\ldots+X_m)^2+\ldots+X_m^2.$$ □

Доказательство теоремы 2.3. Можно считать, что C — поле вещественных чисел. Достаточно показать, что для $u\in A(P)$ из $u^2=0$ следует $u=0$. Пусть $u=\sum b_s(V_s)$.

Если $(V_s)(V_t)=\sum_j a_{stj}(V_j)$, то, по (2.5), $\sum_j a_{stj}=\min(s, t)$. Таким образом,

$$0=u^2=\sum_{s,t} b_s b_t a_{stj}(V_j),$$

откуда $\sum_{s,t} b_s b_t a_{stj}=0$ для всех j. Суммирование по j дает тогда $\sum_{s,t}\min(s, t)b_s b_t=0$. В силу (2.6), $b_s=0$ для всех s, т. е. $u=0$. □

Следующий результат нужен для доказательства (2.1).

Лемма 2.7. *Предположим, что поле F алгебраически замкнуто. Пусть $N=PH$, где $P\lhd N$, P — циклическая p-группа, $|P|>1$, а H — циклическая p'-группа. Пусть $|P:P_1|=p$.*

(i) *Для любого неприводимого характера φ группы H и любого l, $1\leqslant l\leqslant|P|$, существует единственный, с точностью до изоморфизма неразложимый $F[N]$-модуль $V=V(\varphi, l)$ такой, что φ является характером цоколя модуля V и $\dim_F V(\varphi, l)=l$. Любой ненулевой неразложимый $F[N]$-модуль изоморфен одному из $V(\varphi, l)$. Модуль $V(\varphi, l)$ тогда и только тогда является $F[P_1]$-проективным, когда $l\equiv 0 \pmod p$, а $V(\varphi, l)\cong V(\varphi, l)^*$ тогда и только тогда, когда $\varphi^*\alpha^{l-1}=\varphi$, где α определено в § 1 гл. VII. Модуль $V(\varphi, l)_P$ неразложим.*

(ii) *Если M_1, M_2 — неразложимые $F[N]$-модули, причем $M_i^*\cong M_i$, $i=1, 2$, то $M_1\otimes M_2=\oplus_{i=1}^n V_i\oplus M_0$, где модуль M_0 является $F[P_1]$-проективным, каждый V_i неразложим, и $V_i^*\cong V_i$.*

(iii) *Предположим, что $2\mid|C_H(P)|$. Для любого l, $1\leqslant l\leqslant|P|$, существуют в точности два неприводимых характера φ группы H, для которых $\varphi^*\alpha^{l-1}=\varphi$. Каждый из них содержит в ядре подгруппу H_0 индекса $|C_H(P):H_0|=2$.*

Доказательство. (i) Частный случай результатов § 2 гл. VII.

(ii) Согласно (i), $(M_i)_P$ неразложим ($i=1, 2$). По (2.2), $M_1\otimes M_2=\oplus_{i=1}^n(V_i\oplus M_0)$, где M_0 является $F[P_1]$-проективным, и $\dim_F V_i\neq\dim_F V_j$ при $i\neq j$. Из $(M_1\otimes M_2)^*\cong M_1\otimes M_2$ следует, что $\oplus_{i=1}^n V_i\cong\sum_{i=1}^n V_i^*$. Отсюда $V_i\cong V_i^*$, в силу единственности разложения и того факта, что $\dim_F V_i\neq\dim_F V_j^*$ при $i\neq j$.

(iii) Поскольку H циклическая, то $\varphi^*=\varphi^1$, так что $\varphi^*\alpha^{l-1}=\varphi$ равносильно равенству $\varphi^2=\alpha^{l-1}$. Так как $\alpha^{|H:C_H(P)|}=1$, то для φ есть ровно две возможности. Ясно, что H_0 лежит в ядре φ. □

Доказательство теоремы 2.1. Можно считать, что C — поле комплексных чисел. Пусть F_1 — алгебраическое замыкание поля F. Тогда $A(F[G])$ является подалгеброй в $A(F_1[G])$. Поэтому можно предполагать, что $F=F_1$ алгебраически замкнуто, поскольку $A(F_1[G])$ конечномерна над C. Далее, достаточно доказать, что $A(F[G])$ не имеет ненулевых нильпотентных элементов. Ввиду (1.3), можно считать, что $G=PH$, где $P\lhd G$, P — циклическая p-группа, а H — циклическая p'-группа.

Предположим, что $p=2$. Тогда $G=P\times H$ и, по (1.4), $A(G)=A(P)\otimes A(H)$. Очевидно, алгебра $A(H)$ полупроста, а в силу (2.3) полупроста и $A(P)$. Значит, $A(G)$ полупроста, что и требовалось. Таким образом, можно предполагать, что $p\neq 2$.

Пусть $H=\langle x\rangle$, $h=|H|$, $P=\langle y\rangle$ и $x^{-1}yx=y^t$. Рассмотрим

$$G_1=\langle x, y\mid y^{|P|}=x^{2h}=1,\ x^{-1}yx=y^t\rangle.$$

Тогда G является гомоморфным образом группы G_1, так что $A(G)\subseteq A(G_1)$, поэтому достаточно доказать полупростоту $A(G_1)$. Следовательно (если надо, меняя обозначения), можно предполагать, что $2\mid|C_H(P)|$.

Доказательство проводится индукцией по $|P|$. Если $|P|=1$, то $A(H)\cong C[H]$ полупроста. Теперь предположим, что $|P|>1$. Пусть $|P:P_1|=p$.

Обозначим $I=A_{P_1}(G)$. Достаточно показать, что полупросты I и $A(G)/I$. Легко видеть, что отображение, переводящее (V) в $(1/p)(V^G)$ для любого $F[P_1H]$-модуля V, устанавливает изоморфизм между $A(P_1G)$ и I. Тем самым, по индукции, I полупроста. Остается доказать полупростоту $A(G)/I$. Пусть S — подпространство в $A(G)$, натянутое на все такие (V), что V неразложим и $V^*\cong V$. В силу (2.7) (ii), $S+I/I$ является подалгеброй в $A(G)/I$. Из 2.7 (ii) и (2.7) (iii) следует существование неразложимого $F[G]$-модуля V размерности $\dim_F(V)=l$ для любого l, $1\leqslant l\leqslant|P|$, причем $(V)\in S$. Если V — неразложимый $F[G]$-модуль, $(V)\in S$, а X — неразложимый $F[H]$-модуль, то отображение, переводящее $(V)\otimes(X)$ в $(V\otimes X)$, определяет гомоморфизм алгебры $((S+I)/I)\otimes A(H)$ на $A(G)/I$. Поскольку $A(H)$ полупроста, достаточно доказать полупростоту $(S+I)/I$.

Рассмотрим $Z=C_H(P)$. Согласно (2.7) (ii) и (iii), отображение, переводящее V в $V_{C_G}(P)$, определяет биективное линейное отображение S на $A(P\times Z)$. Так как V тогда и только тогда будет $F[P_1]$-проективным, когда $V_{C_G}(P)$ является $F[P_1]$-проективным, то $(S+I)/I\cong A(P\times Z)/A_{P_1}(P\times Z)$. Итак, остается доказать полупростоту $A(P\times Z)$, но это сразу вытекает из (1.4) и (2.3). □

§ 3. Перестановочные модули

Множество всех классов изоморфизма неразложимых $R[G]$-модулей в общем случае очень обширно и сложно устроено. В этом и следующем параграфах дается определение более узких классов $R[G]$-модулей.

Для подгруппы H из G обозначим через $V_0(H)$ такой R-свободный $R(G)$-модуль ранга 1 над R, что $V_0(H)=\mathrm{Inv}_H(V_0(H))$. Таким образом, если R — поле, то $V_0(H)$ определяет главный характер Брауэра, а если R — кольцо целых поля p-адических чисел K, то $V_0(H)\otimes_R K$ отвечает тривиальный характер.

Некоторый $R[G]$-модуль называется *транзитивным перестановочным модулем*, если он изоморфен $V_0(H)^G$ для некоторой подгруппы H из G. Прямая сумма транзитивных перестановочных модулей называется *перестановочным модулем*.

Лемма 3.1. *Существует только конечное множество классов изоморфизма транзитивных перестановочных модулей.*

Доказательство. Очевидно, так как G имеет конечное число подгрупп. □

Лемма 3.2. *Пусть V — перестановочный модуль. Справедливы следующие утверждения.*

(i) $V\cong V^*$.

(ii) *V — алгебраический модуль.*

(iii) *Если M — подгруппа в G, то V_M — перестановочный модуль.*
(iv) *Если G — подгруппа в M, то V^M — перестановочный модуль.*

Доказательство. (i) Вытекает из (II.2.6).
(ii) Следует из (II.5.3).
(iii) Ясно из разложения Макки (II.2.9).
(iv) По определению, см. (II.2.1) (iv). □

Лемма 3.3. *Пусть V и W — перестановочные модули. Справедливы следующие утверждения.*
(i) *$V \oplus W$ — перестановочный модуль.*
(ii) *$V \otimes W$ — перестановочный модуль.*

Доказательство. (i) По определению.
(ii) Следует из теоремы Макки о тензорном произведении (II.2.10). □

Лемма 3.4. *Пусть G является p-группой. Справедливы следующие утверждения.*
(i) *Транзитивный перестановочный модуль неразложим.*
(ii) Если *V — перестановочный модуль и $W \mid V$, то W — перестановочный модуль.*

Доказательство. (i) Следует из (III.3.8).
(ii) Следствие из (i). □

Следствие 3.5. *Пусть Q — подгруппа p-группы P и V — некоторый $R[Q]$-модуль. Модуль V тогда и только тогда является перестановочным, когда V^P — перестановочный модуль.*

Доказательство. Если V — перестановочный модуль, то и V^P является перестановочным по определению.

Предположим, что V^P — перестановочный модуль, тогда таков же и $(V^P)_G$. Ввиду разложения Макки (II.2.10), $V \mid (V^P)_Q$, значит, V является перестановочным модулем по (3.4). □

Лемма 3.6. *Пусть V — транзитивный перестановочный модуль. Справедливы следующие утверждения.*
(i) $\operatorname{rank}_R(\operatorname{Inv}_G(V)) = 1$.
(ii) *$V = W_1 \oplus W_2$, причем модуль W_1 неразложим, $\operatorname{Inv}_G(W_2) = (0)$, а $\operatorname{Inv}_G(W_1) \neq (0)$.*

Доказательство. (i) Следует из (II.3.4).
(ii) Непосредственно вытекает из (i). □

Неразложимые модули, рассмотренные в (3.4), представляют интерес и изучались Скоттом [1971], [1973]. Некоторые близкие результаты получил Дресс [1975].

§ 4. Эндо-перестановочные модули для p-групп

Во всем параграфе P будет p-группой, а $V_0(H)$ определяется как в предыдущем параграфе.

Эндо-перестановочный $R[P]$-модуль — это такой R-свободный $R[P]$-модуль V, что $V^* \otimes V \cong \operatorname{Hom}_R(V, V)$ является перестановочным модулем.

Эндо-тривиальный $R[P]$-модуль — это такой R-свободный $R[P]$-модуль V, что $V^* \otimes V \cong \operatorname{Hom}_R(V, V) \cong V_0(P) \oplus U$, где U — проективный $R[P]$-модуль.

Поскольку любой проективный $R[P]$-модуль является перестановочным модулем, то эндо-тривиальный $R[P]$-модуль будет также эндо-перестановочным модулем.

Очевидно, перестановочный модуль для $R[P]$ будет эндо-перестановочным $R[P]$-модулем.

Эти понятия ввел Дейд [1978a], [1978b], который классифицировал эндо-перестановочные $R[P]$-модули в случае, когда P абелева. См. также Карлсон [1980a]. Мы представим лишь основные элементарные свойства эндо-перестановочных $R[P]$-модулей и сравним некоторые из них с соответствующими свойствами перестановочных модулей.

Следующий результат показывает, что эндо-перестановочные $R[P]$-модули возникают естественно, по крайней мере, когда $R=\bar{R}$ — поле.

Теорема 4.1. *Пусть $G=HP$, где $H=O_{p'}(G)$, а P — некоторая S_p-подгруппа в G. Пусть $F=\bar{R}$ — поле разложения для G, а V — такой неприводимый $F[H]$-модуль, что $G=T(V)$. Тогда V единственным образом продолжается до неприводимого $F[G]$-модуля W, и W_P является эндо-перестановочным $F[P]$-модулем.*

Доказательство. Существование и единственность W следуют из (III.3.16).

Алгебра $F[H]$ с действием $x\to y^{-1}xy$ становится перестановочным модулем M для $F[G]$. Пусть e — примитивный центральный идемпотент в $F[H]$, соответствующий V. Тогда $V^*\otimes V\cong eF[H]\,|\,M_H$. Поскольку $T(V)=G$, то $eF[H]\cong W\otimes W^*$ как $F[G]$-модули, и $W^*\otimes W\,|\,M$. Следовательно, $W_P^*\otimes W_P\,|\,M_P$, и потому $W_P^*\otimes W_P$ является перестановочным модулем для $F[P]$, по (3.4). □

Лемма 4.2. *Пусть $0\to V\to U\to W\to 0$ — точная последовательность R-свободных $R[P]$-модулей, причем U проективен. Модуль V тогда и только тогда является эндо-перестановочным (эндо-тривиальным), когда W является эндо-перестановочным (эндо-тривиальным) модулем.*

Доказательство. Сразу следует из (III.5.12). □

Из (4.2) вытекает, например, что любой фактор проективной резольвенты модуля $V_0(P)$ является эндо-перестановочным модулем. Таким способом можно показать, что если P не является циклической или обобщенной кватернионной группой, то существует бесконечно много эндо-перестановочных $R[P]$-модулей. При этом существуют эндо-перестановочные $R[P]$-модули V, не являющиеся алгебраическими, а также такие, что $V\not\cong V^*$. Это контрастирует с (3.1) и (3.2) (i), (ii).

Конечно ли число классов изоморфизма эндо-перестановочных $R[P]$-модулей V с условием $V\cong V^*$?

Это открытый вопрос. Из результатов Дейда следует утвердительный ответ, если P абелева.

Лемма 4.3. *Пусть V — такой эндо-перестановочный $R[P]$-модуль, что $V^n\cong(V^n)^*$ для некоторого натурального n. Тогда V алгебраический.*

Доказательство. Так как $V^{2n}\cong V^n\otimes(V^n)^*$ — перестановочный модуль, результат вытекает из (3.2) (ii). □

Лемма 4.4. *Если V, W — эндо-перестановочные $R[P]$-модули, таковы же V^*, $V\otimes W$ и $\mathrm{Hom}_R(V, W)\cong V^*\otimes W$.*

Доказательство. Очевидно по определению. □

Лемма 4.5. *Пусть V — эндо-перестановочный $R[P]$-модуль. Если $W|V$, то W также является эндо-перестановочным модулем.*

Доказательство. Поскольку $W^*\otimes W|V^*\otimes V$, результат следует из (3.4). □

Лемма 4.6. *Пусть V — эндо-перестановочный $R[P]$-модуль и Q — подгруппа в P. Тогда V_Q — эндо-перестановочный $R[Q]$-модуль.*

Доказательство. Очевидно из определения. □

В общем случае прямая сумма эндо-перестановочных модулей не обязана быть эндо-перестановочным модулем, в противоположность ситуации (3.3) (i).

Два эндо-перестановочных $R[P]$-модуля V, W назовем *совместимыми*, если $V\oplus W$ является эндо-перестановочным $R[P]$-модулем.

Лемма 4.7. *Пусть V, W — эндо-перестановочные $R[P]$-модули. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *V и W совместимы;*

(ii) *$V^*\otimes W\cong \mathrm{Hom}_R(V, W)$ — перестановочный модуль;*

(iii) *$W^*\otimes V\cong \mathrm{Hom}_R(W, V)$ — перестановочный модуль.*

Доказательство. Поскольку $(V^*\otimes W)^*\cong W^*\otimes V$, (ii) и (iii) эквивалентны. Так как

$$(V\oplus W)\otimes(V^*\oplus W^*)\cong(V\otimes V^*)\oplus(V\otimes W^*)\oplus(W\otimes V^*)\oplus(W\otimes W^*),$$

то равносильность (i) с (ii) и (iii) вытекает из (3.3) (ii). □

Лемма 4.8. *Пусть V — неразложимый эндо-перестановочный $R[P]$-модуль с вертексом P. Тогда $V_0(P)|V^*\otimes V$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество всех подгрупп $Q\neq P$ в P. Согласно (III.4.9), $H^0(P, \mathfrak{H}, V^*\otimes V)\neq(0)$, поэтому существует неразложимая компонента W произведения $V^*\otimes V$, для которой $H^0(P, \mathfrak{H}, W)\neq(0)$. Поскольку V — эндо-перестановочный модуль, $W\cong V_0(Q)$ для некоторой подгруппы Q из P. По (II.3.4), $H^0(P, Q, W)=(0)$, значит, $H^0(P, \mathfrak{H}, W)=(0)$, если $Q\in\mathfrak{H}$. Итак, $Q\notin\mathfrak{H}$, т. е. $Q=P$. □

Следующий результат указывает на то, что совместимость двух эндо-перестановочных модулей — довольно редкое событие.

Лемма 4.9. *Пусть V, W — неразложимые эндо-перестановочные $R[P]$-модули с вертексом P. Модули V и W тогда и только тогда совместимы, когда $V\cong W$.*

Доказательство. Если $V\cong W$, то V и W совместимы по (4.7). Предположим, что V и W совместимы. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество всех подгрупп $Q\neq P$ в P. Для любой подгруппы $Q\subseteq P$ найдутся такие целые неотрицательные числа a_Q, b_Q, что

$$V^*\otimes W\cong a_P V_0(P)\oplus\left(\bigoplus_{Q\in\mathfrak{H}} a_Q(V_0(Q))^P\right),$$

$$V\otimes V^*\cong b_P V_0(P)\oplus\left(\bigoplus_{Q\in\mathfrak{H}} b_Q(V_0(Q))^P\right),$$

откуда

$$a_P V \oplus \left(\bigoplus_{Q \in \mathfrak{H}} a_Q (V_Q)^P \right) \cong V \otimes V^* \otimes W \cong b_P W \oplus \left(\bigoplus_{Q \in \mathfrak{H}} b_Q (W_Q)^G \right).$$

Следовательно, любая неразложимая компонента модуля $V \otimes V^* \otimes W$ с вертексом P изоморфна V. В силу (4.8), $a_P \neq 0$, т. е. $V \cong W$. □

В общем случае эндо-перестановочные модули плохо ведут себя в отношении индуцирования. Следующий результат касается этой ситуации.

Лемма 4.10. *Пусть Q — подгруппа из P и V-эндо-перестановочный $R[Q]$-модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *V^P является эндо-перестановочным $R[P]$-модулем;*

(ii) *эндо-перестановочные $R[Q^x \cap Q]$-модули $V_{Q^x \cap Q}$ и $V^x_{Q^x \cap Q}$ совместимы для всех $x \in P$.*

Доказательство. Теорема Макки о тензорном произведении (II.2.10) показывает, что $V^P \otimes (V^P)^*$ тогда и только тогда будет перестановочным модулем, когда $(V^x_{Q^x \cap Q} \otimes V^*_{Q^x \cap Q})^P$ — перестановочный модуль для любого $x \in P$. Таким образом, (i) равносильно (ii), благодаря (3.5) и (4.7). □

ГЛАВА X

Как и следовало ожидать, развитая теория упрощается, когда ее применяют к p-разрешимым группам. С одной стороны, часть результатов, верных для p-разрешимых групп, становятся неверными в общем случае, с другой — некоторые вопросы, остающиеся открытыми в общем случае, решаются для p-разрешимых групп. В этой главе мы рассматриваем в основном p-разрешимые группы, хотя часть результатов доказаны в более общем контексте.

На протяжении настоящей главы будем применять обозначения, введенные в начале главы IV.

§ 1. Группы с нормальной p'-подгруппой

Три первых результата являются незначительными переформулировками результатов Фонга [1960], [1961], [1962]. Метод, примененный к доказательству леммы 1.1, представляет собой адаптацию метода из книги Серра [1977]; он уходит своими корнями в работу Шура.

Я признателен Ватанабе [1979], который предложил ту часть доказательства леммы 1.1, где показывается непустота множества N_x для всех x. Это устраняет брешь в первоначальной версии результата (см. также Нобусато [1978]). По поводу близких результатов см. Цушима [1978c].

Лемма 1.1. *Пусть $H \lhd G$, ζ — неприводимый характер группы H, $G = T(\zeta)$ — группа шерши характера ζ, F — такое алгебраически замкнутое поле, что $\operatorname{char} F \nmid |H|$, V — неприводимый $F[H]$-модуль с характером ζ. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Существуют такая конечная группа $\tilde{G}$ и такая точная последовательность*

$$\langle 1 \rangle \to Z \to \tilde{G} \xrightarrow{f} G \to \langle 1 \rangle,$$

что Z — циклическая группа из центра $\tilde{G}$ и $|Z| \mid |H|^2$. Кроме того, $\tilde{G}$ содержит такую нормальную подгруппу $\tilde{H} \cong H$, что $Z\tilde{H} = Z \times \tilde{H} = f^{-1}(H)$. Группа $\tilde{G}$ зависит лишь от G и ζ; в частности, она не зависит от выбора F.

(ii) *Пусть F_1 — подполе поля F, порожденное примитивным корнем $|H|^2$-й степени из единицы. Тогда существует $F_1[\tilde{G}]$-модуль*

$\tilde{V}_1$, такой, что если $\tilde{V}=\tilde{V}_1\otimes_{F_1}F$, то $f(\tilde{V}_{\tilde{H}})\cong V$. Более того, если W — неприводимый $F[G]$-модуль с конституэнтой V для W_H, то $W\cong\tilde{V}\otimes\tilde{W}$ для некоторого абсолютно неприводимого $F[\tilde{G}/\tilde{H}]$-модуля $\tilde{W}$.

(iii) *Пусть $\Delta(F)$ — множество всех характеров Брауэра всех тех неприводимых $F[G]$-модулей W, для которых V является конституэнтой модуля W_H, $\tilde{\Delta}(F)$ — множество всех тех характеров Брауэра всех тех $F[\tilde{G}/\tilde{H}]$-модулей U, для которых Z лежит в ядре модуля $\tilde{V}\otimes U$. Тогда отображение, переводящее W в $\tilde{W}$ и определенное в* (ii), *индуцирует биекцию $\Delta(F)$ на $\tilde{\Delta}(F)$.*

Доказательство. Пусть F' — поле, причем $F_1\subseteq F'\subseteq F$, V' — некоторый $F'[H]$-модуль с характером ζ. Поскольку $\operatorname{char}F'\nmid|H|$, модуль V' неприводим. Пусть A — представление в модуле V'. Положим $S_{F'}=\{\det A(y)\mid y\in H\}$. Очевидно, $S=S_{F'}$ не зависит от выбора F'.

Пусть N_x, $x\in G$, обозначает множество всех таких линейных преобразований[1] z пространства V', для которых $z^{-1}A(y)z=A(x^{-1}yx)$ для всех $y\in H$ и таких, что $\det z\in S$.

Положим $\zeta(1)=d$. Пусть $x\in G$. Покажем сначала, что существует такое линейное преобразование $z\in\mathrm{Gl}_d(F_1)$, что $\det z=1$ и $z^{-1}A(y)z=A(x^{-1}yx)$ для всех $y\in H$. Очевидно, это достаточно доказать в случае, когда порядок x равен q^a для некоторого простого q и подходящего натурального a.

Пусть $|H|=h$, F_0 — подполе поля F_1, порожденное примитивным корнем h-й степени из 1. Можно предполагать, что $A(y)\in\mathrm{GL}_d(F_0)$ для всех $y\in H$ ввиду классического результата Брауэра, который непосредственно вытекает из (IV.1.1) (iii) (см., например, Фейт [1967c, (16.3)]).

Так как $T(\zeta)=G$, то существует такая $z_0\in\mathrm{GL}_d(F_0)$, что $z_0^{-1}A(y)z_0=A(x^{-1}yx)$ для всех $y\in H$. Положим $\alpha=(\det z_0)^{1/d}$ и $z=\alpha z_0$. Тогда $\det z=1$, $z^{-1}A(y)z=A(x^{-1}yx)$ для всех $y\in H$ и $z^d=\alpha^d z_0^d\in\mathrm{Gl}_d(F_0)$. Кроме того, $z^{q^a}=\beta I$ — скалярная матрица при подходящем $\beta\in F_1$. Значит, $\beta^d=1$, и потому $z^{q^a}\in\mathrm{GL}_d(F_0)$.

Если $q\nmid d$, то $z\in\mathrm{GL}_d(F_0)\subseteq\mathrm{GL}_d(F)$, поскольку z^{q^a} и z^d оба лежат в $\mathrm{GL}_d(F_0)$.

Предположим, что $q\mid d$. Тогда $\langle z, A(y)\mid y\in H\rangle$ является конечной группой, экспонента которой делит $q^a h$. Значит, по теореме Брауэра, можно предполагать, что $z\in\mathrm{GL}_d(F(\varepsilon))$, где ε — примитивный корень степени q^n из 1 для некоторого n. Так как $q\mid h$, то $[F_0(\varepsilon):F_0]$ является степенью q. Поскольку $\alpha\in F_0(\varepsilon)$, то $[F_0(\alpha):F_0]$ является степенью q.

Предположим сначала, что либо $q\neq 2$, либо $q=2$ и $4\mid h$. Тогда $F_0(\varepsilon)$ является циклическим расширением поля F_0. Так как $\alpha^d\in F_0$, то $\alpha=c\varepsilon_0$ для некоторого $c\in F_0$ и некоторого такого корня ε_0 степени

[1] Здесь и в последующих рассуждениях автор отождествляет линейные преобразования с их матрицами.— *Примеч. пер.*

q^n из 1, что $F_0(\varepsilon_0)=F_0(\alpha)$. Положим $q^b=(d, q^n)$. Тогда $[F_0(\alpha):F_0]=[F_0(\varepsilon_0):F_0]\mid q^b$. Значит $\alpha\in F_0(\varepsilon_0)\subseteq F_1$, и потому $z\in \mathrm{GL}_d(F_1)$.

Предположим теперь, что $q=2$, $2\mid h$ и $4\nmid h$. Тогда существует такая $H_0\lhd H$, что $|H:H_0|=2$. Так как $2\mid d$, то $\zeta=\zeta_0^H$ для некоторого неприводимого характера ζ_0 группы H_0. Предыдущие рассуждения, примененные к H_0, ζ_0 и представлению A_0 с характером ζ_0, дают существование преобразования $z_1\in \mathrm{GL}_{d/2}(F_1)$, для которого $\det z_1=1$ и $z^{-1}A_0(y)z=A_0(x^{-1}yx)$ для всех $y\in H_0$. Пусть u — элемент 2-го порядка группы H. Так как $|G:T(\zeta_0)|=2$, то $T(\zeta_0)\lhd G$ и $[x, u]\in H_0$. Пусть z_1^u — элемент из $\mathrm{GL}_{(d/2)}(F_1)$, соответствующий x^u для ζ_0^u и A_0^u. Тогда

$$z=\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_1^u \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_d(F_1)$$

обладает нужными свойствами.

Следовательно, N_x непусто для всех $x\in G$. Если z_1, $z_2\in N_x$, то $z_1^{-1}z_2$ скалярна по лемме Шура. Значит N_x — конечное множество и N_1 состоит из скалярных матриц. Кроме того, N_x не зависит от выбора F'.

Определим $\tilde{G}(F')$ как группу всех упорядоченных пар (x, z), где $x\in G$, $z\in N_x$. Тогда $\tilde{G}(F')$ — конечная группа. Кроме того, $\tilde{G}(F')\cong \tilde{G}(F_1)$. Зададим отображение f: $\tilde{G}(F_1)\to G$, полагая $f((x, z))=x$. Тогда существует точная последовательность

$$\langle 1\rangle\to N_1\to \tilde{G}(F_1)\xrightarrow{f} G\to\langle 1\rangle.$$

Поскольку N_1 состоит из скалярных матриц, N_1 — циклическая группа из центра $\tilde{G}(F_1)$ и $|N_1|\mid \zeta(1)|H|$. Положим $Z=N_1$ и $\tilde{H}=\{(y, A(y))\mid y\in H\}$. Тогда $\tilde{H}\lhd \tilde{G}(F_1)$ и $f(\tilde{H})=H$. Кроме того, $Z\cap\tilde{H}=\langle(1, 1)\rangle$. Значит, $Z\tilde{H}=Z\times\tilde{H}$.

Для $v\in V'$, $(x, z)\in\tilde{G}(F_1)$ определим $v(x, z)=vz$. Пусть $\tilde{V}'$ обозначает $F'[\tilde{G}(F_1)]$-модуль, заданный таким способом. Для $F_1=F'$ положим $\tilde{V}_1=\tilde{V}'$, а для $F=F'$ положим $\tilde{V}=\tilde{V}'$. Тогда $\tilde{V}\cong\tilde{V}_1\otimes_{F_1}F$. Если $y\in H$, то $v(y, A(y))=vy$. Значит, $f(\tilde{V}_{\tilde{H}})\cong V$.

Пусть $F^{(0)}$, $F^{(p)}$ — алгебраически замкнутые поля характеристики 0 и p соответственно, причем $p\nmid|H|$. Для завершения доказательства (i) достаточно показать, что $\tilde{G}(F_1^{(0)})\cong\tilde{G}(F_1^{(p)})$. Пусть K — расширение поля $\mathbf{Q}_p$, порожденное примитивным корнем степени $|H|^2$ из 1. Тогда $\tilde{G}(K)\cong\tilde{G}(F_1^{(0)})$. Пусть R — кольцо целых поля K, $\bar{R}$ — поле вычетов. Тогда $\tilde{G}(\bar{R})\cong\tilde{G}(F_1^{(p)})$. Пусть X — такой R-свободный $R[\tilde{G}(K)]$-модуль, что $X_K\cong\tilde{V}'$. Поскольку $p\nmid|H|$, $\bar{X}_H$ неприводим. Отсюда легко следует, что $\tilde{G}(K)\cong\tilde{G}(\bar{R})$. Это завершает доказательство (i).

(ii) Пусть W — такой неприводимый $F[G]$-модуль, что V является конституэнтой W_H. Тогда W является $F[\tilde{G}]$-модулем, если действие определить как $w(x, z)=wx$, где $w\in W$. Рассмотрим векторное пространство $\tilde{W}=\mathrm{Hom}_{F[H]}(V, W)$. Поскольку V можно отождествить с $\tilde{V}$, для любого $v\in V$ имеем $v(x, z)=vz$.

По теореме Клиффорда (III.2.12), $W_H \cong nV$ для подходящего натурального n. Значит, линейное отображение g: $\tilde{V} \otimes \tilde{W} \to W$, определенное как $g(v \otimes h) = vh$, является изоморфизмом.

Для $h \in \tilde{W}$, $(x, z) \in \tilde{G}$ зададим $h(x, z)$, полагая $v\{h(x, z)\} = \{(vz^{-1})h\}x$, где $v \in V$. Тогда для $v \in V$, $h \in \tilde{W}$ имеем $\{g(v \otimes h)\}(x, z) = (vh)(x, z) = (vh)x$, и потому

$$g\{(v \otimes h)(x, z)\} = g\{v(x, z) \otimes h(x, z)\} = g\{vz \otimes h(x, z)\} =$$

$$= (vz)\{h(x, z)\} = (vh)x = \{g(v \otimes h)\}(x, z).$$

Так как $\tilde{V}$ и W являются $F[G]$-модулями, то $\tilde{W}$ является $F[\tilde{G}]$-модулем, а g — $F[\tilde{G}]$-изоморфизмом.

Если $(y, A(y)) \in \tilde{H}$, то при $v \in \tilde{V}$, $h \in \tilde{W}$ имеем $v\{h(y, A(y))\} = \{(vy^{-1})h\}y = vh$. Значит, $\tilde{W}$ содержит $\tilde{H}$ в своем ядре, и потому $\tilde{W}$ является $F[\tilde{G}/\tilde{H}]$-модулем. Модуль $\tilde{W}$ неприводим, так как неприводим модуль $W \cong \tilde{V} \otimes \tilde{W}$.

(iii) Для произвольного модуля X обозначим через β_X характер Брауэра модуля X. Согласно (ii), $\beta_W = \beta_{\tilde{V}}\beta_{\tilde{W}}$.

Предположим, что $\tilde{W}$ и $\tilde{W}'$ оба содержат $\tilde{H}$ в своих ядрах и $\beta_{\tilde{V}}\beta_{\tilde{W}} = \beta_{\tilde{V}}\beta_{\tilde{W}'}$. Если $\beta_{\tilde{W}} \neq \beta_{\tilde{W}'}$, то существует такой $x \in G$, что $\beta_{\tilde{V}}(xy) = 0$ для всех $y \in H$. Поэтому след матрицы $A(x)A(y)$ равен 0 для всех $y \in H$. Поскольку $\{A(y) \mid y \in H\}$ порождает полное матричное кольцо, $A(x) = 0$, что невозможно, и $\beta_{\tilde{W}}$ однозначно определен характером β_W.

Тем самым, $\beta_W \to \beta_{\tilde{W}}$ задает биективное отображение множества $\Delta(F)$ на $\tilde{\Delta}(F)$. Отсталось лишь показать, что если U — неприводимый $F[\tilde{G}/\tilde{H}]$-модуль, для которого Z лежит в ядре модуля $\tilde{V} \otimes U$, то $\tilde{V} \otimes U$ неприводим.

Пусть $W_1, \ldots, W_m$ — композиционные факторы модуля $\tilde{V} \otimes U$. Тогда V является компонентой модуля $(W_i)_H$ для всех i. В силу (ii), $W_i \cong \tilde{V} \otimes \tilde{W}_i$, где каждый из модулей $\tilde{W}_i$ неприводим. Отсюда следует, что $\beta_{\tilde{V} \otimes U} = \beta_{\tilde{V}} \sum_{i=1}^{m} \beta_{\tilde{W}_i}$ и, значит, $\beta_U = \sum_{i=1}^{m} \beta_{\tilde{W}_i}$. Ввиду (IV.3.4), $m = 1$, и потому $\tilde{V} \otimes U$ неприводим. □

Группа $\tilde{G}/\tilde{H}$, определенная в (1.1), называется *группой представлений характера* ζ.

Теорема 1.2 (Фонг [1961]). *Пусть p — простое число, $H \lhd G$, $p \nmid |H|$, $B(G)$ — блок группы G, $B(H)$ — блок группы H, накрываемый $B(G)$. Пусть, далее, ζ — неприводимый характер группы H, лежащий в $B(H)$, а $\tilde{G}$, $\tilde{H}$, Z определены как в (1.1) относительно группы $T(\zeta)$. Наконец, пусть $G(\zeta)$ — группа представлений характера ζ. Тогда существует такой блок B группы $G(\zeta)$, что справедливы следующие утверждения.*

(i) *Существует блок $B(T(\zeta))$ группы $T(\zeta)$, такой, что если θ — неприводимый характер или неприводимый характер Брауэра из $B(\zeta)$, то $\theta = \theta_0^G$ для некоторого неприводимого характера или соответственно неприводимого характера Брауэра θ_0 из блока $B(T(\zeta))$.*

(ii) *Пусть $\eta \to \tilde{\eta}$ — биективное соответствие, определенное в (1.1) в случае* $\operatorname{char} F = 0$. *Тогда $\theta \to \tilde{\theta}$ задает биективное соответствие*

множества всех неприводимых характеров из $B(G)$ на множество всех неприводимых характеров из B. Это соответствие сохраняет высоты и отображает множество всех p-рациональных неприводимых характеров из $B(G)$ на множество всех p-рациональных неприводимых характеров из B.

(iii) *Пусть $\eta \to \tilde{\eta}$ — биективное соответствие, определенное в* (1.1) *в случае* $\operatorname{char} F = p$. *Тогда $\theta \to \theta_0$ задает биективное соответствие множества всех неприводимых характеров Брауэра из $B(G)$ на множество всех неприводимых характеров Брауэра из B. Это соответствие сохраняет высоты.*

(iv) *Относительно биективных соответствий, определенных в* (ii) *и* (iii). *$B(G)$ и B имеют одинаковые матрицы разложения и матрицы Картана.*

(v) *B и $B(G)$ имеют изоморфные дефектные группы.*

Доказательство. Так как $p \nmid |H|$, то ζ является единственным неприводимым характером в $B(H)$ и $\zeta = \psi$ — неприводим как характер Брауэра. Кроме того, $T(\zeta) = T(B(H))$.

Автоморфизм поля, оставляющий на месте все корни p'-й степени из единицы, оставляет неподвижными все блоки. Поэтому, ввиду (V.2.5), результат достаточно доказать в случае $G = T(\zeta)$, поскольку p-сопряженный характер группы $T(\zeta)$, индуцированный на группу G, является p-сопряженным характером группы G.

Пусть $\Delta_0 = \Delta(F)$, $\tilde{\Delta}_0 = \tilde{\Delta}(F)$ определены как в (1.1) для $\operatorname{char} F = 0$, а $\Delta_p = \Delta(F)$, $\tilde{\Delta}_p = \tilde{\Delta}(F)$ определены как в (1.1) для $\operatorname{char} F = P$.

Обозначим через $\tilde{\zeta}_0$ и $\tilde{\zeta}_p$ характеры $\tilde{V}$ в случае $\operatorname{char} F = 0$ и $\operatorname{char} F = p$ соответственно. Тогда $\tilde{\zeta}_0(x) = \tilde{\zeta}_p(x)$ для p'-элементов $x \in G$. Кроме того, $\tilde{\zeta}_0$ p-рационален ввиду (1.1). Значит,

$$\begin{aligned} \theta &= \tilde{\zeta}_0 \tilde{\theta}, \text{ если } \theta \in \Delta_0, \\ \theta &= \tilde{\zeta}_p \tilde{\theta}, \text{ если } \theta \in \Delta_p. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Если $\theta \in \Delta_0$, то θ p-рационален тогда и только тогда, когда $\tilde{\theta}$ p-рационален, поскольку $\tilde{\zeta}_0$ p-рационален и отображение $\theta \to \tilde{\theta}$ биективно.

Если θ — неприводимый характер или неприводимый характер Брауэра из $B(G)$, то, в силу (V.2.5) (iv), $\theta \in \Delta_0$, Δ_p соответственно. Положим

$$S = \{\tilde{\theta} \mid \theta \text{ лежит в } B(G),\ \theta \in \Delta_0 \cup \Delta_p\}.$$

Если $\chi \in \Delta_0$, $\varphi \in \Delta_p$, то, в силу (1.3), $d(\chi, \varphi) = d(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi})$, где d обозначает подходящее число разложения. Отсюда и из (IV.4.2) следует, что S состоит их всех неприводимых характеров и неприводимых характеров Брауэра во множестве блоков $B_1, \ldots, B_m$ группы $G(\zeta)$. Так как, по (I.17.9), матрица разложения блока $B(G)$ неразложима, то $m = 1$. Положим $B = B_1$.

Пусть p^a — порядок S_p-подгруппы группы G. Тогда p^a — порядок S_p-подгруппы группы $G(\zeta)$. Обозначим через d дефект блока $B(G)$.

Поскольку $\zeta(1)\not\equiv 0 \pmod p$, из (1.3) и (IV.4.5) следует, что d — дефект блока B. Таким образом, из (1.3) вытекает, что если $\theta\in\Delta_0\cup\Delta_p$ и θ лежит в $B(G)$, то θ и $\tilde{\theta}$ имеют равные высоты.

Пусть Y — неприводимый $\bar{R}[G]$-модуль из $B(G)$ с неприводимым характером Брауэра высоты 0. Тогда дефектная группа D блока $B(G)$ является вертексом модуля Y. Так как характер Брауэра модуля Y имеет высоту 0, то дефектная группа $\tilde{D}$ блока B является вертексом модуля $\tilde{Y}$. Поскольку $Y=\tilde{V}\otimes\tilde{Y}$, Y $R[\tilde{D}]$-проективен. Значит, D сопряжена подгруппе группы $\tilde{D}$ в $\tilde{G}$. Так как $|D|=|\tilde{D}|=p^d$, то $D\cong\tilde{D}$. □

Пусть G, $H=O_{p'}(G)$, ζ — как в (1.2). Тогда порядок S_p-подгруппы группы $G(\zeta)$ не больше порядка S_p-подгруппы группы G. Кроме того, если G p-разрешима и $H=O_{p'}(T(\zeta))$, то либо $p\nmid|G(\zeta)|$, либо $O_{p',p}(G(\zeta))=Z\times P$ для некоторой p-группы $P\neq\langle 1\rangle$, поскольку $Z=O_{p'}(G(\zeta))$ лежит в центре $G(\zeta)$. Эти два факта позволяют получать некоторые результаты для p-разрешимых групп индукцией по порядку S_p-подгруппы.

Лемма 1.4 (Фонг [1962]). *Пусть p — простое число, G — некоторая p-разрешимая группа, $H=O_{p'}(G)$, ζ — такой неприводимый характер группы H, что $H=O_{p'}(T(\zeta))$, p^a — порядок S_p-подгруппы группы представлений $G(\zeta)$ характера ζ. Тогда дефект каждого блока группы $G(\zeta)$ равен a.*

Доказательство. При $a=0$ результат тривиален. Предположим, что $a\neq 0$. Пусть $P=O_p(G(\zeta))$. Тогда $P\neq\langle 1\rangle$. Так как $Z=O_{p'}(G(\zeta))$ лежит в центре $G(\zeta)$, то $C_{G(\zeta)}(P)=Z(P)\times Z$. В силу (IV.4.17), $G(\zeta)$ имеет ровно $|Z|$ блоков дефекта a. Согласно (V.3.6) и (V.3.10), у группы $G(\zeta)$ ровно $|Z|$ блоков. □

Следующий более простой результат в течении некоторого времени был известен, хотя впервые явно был приведен Фонгом и Гашюцем [1961] (также как и (1.6)) для разрешимых групп.

Теорема 1.5. *Пусть p — простое число, G — некоторая p-разрешимая группа. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Главный блок является единственным блоком группы G тогда и только тогда, когда $O_{p'}(G)=\langle 1\rangle$.*

(ii) *$R[G]$-модуль V лежит в главном блоке группы G тогда и только тогда, когда $O_{p'}(G)$ лежит в ядре модуля V.*

Доказательство. Пусть B — главный блок группы G. В силу (IV.4.12), $O_{p'}(G)$ лежит в ядре блока B. Поэтому (ii) следует из (i). Осталось показать, что если $O_{p'}(G)=\langle 1\rangle$, то B является единственным блоком группы G. Поскольку $O_{p'}(G)=\langle 1\rangle$, $C_G(O_p(G))\subseteq O_p(G)$. Результат теперь следует из (V.3.11). □

В качестве непосредственного следствия теоремы 1.5 получаем формулируемый ниже результат, который, подобно теореме 1.5, неверен в общем случае.

Следствие 1.6. *Пусть p — простое число, G — некоторая p-разрешимая группа, V_1 и V_2 — два $R[G]$-модуля из главного блока группы G. Тогда каждое прямое слагаемое модуля $V_1\otimes V_2$ лежит в главном блоке группы G.*

Теорема 1.7 (Рихен [1972]). *Пусть p — простое число. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *каждый неприводимый характер группы G неприводим как характер Брауэра в характеристике p;*

(ii) $G = O_{p'}(G)P$, *где P — абелева p-группа.*

Доказательство. Пусть $H = O_{p'}(G)$.

(i)⇒(ii). В силу (I.17.9), каждый блок содержит единственный неприводимый характер Брауэра. Согласно (IV.4.12), G обладает нормальным p-дополнением, и потому $G = HP$, для S_p-подгруппы P группы G. Так как условия утверждения выполнены для $P \cong G/H$, то каждый неприводимый характер группы P имеет степень 1 и, следовательно, P абелева.

(ii)⇒(i). Пусть θ — неприводимый характер группы G, ζ — неприводимая конституэнта характера θ_H. Пусть $\tilde{\theta}$ определен как в (1.1). Ввиду (1.2), достаточно доказать, что $\tilde{\theta}$ неприводим как характер Брауэра. Так как $G(\zeta)/Z \cong P$ для центральной p'-группы Z из $G(\zeta)$, то $G(\zeta) \cong Z \times P$ абелева, и, значит, каждый неприводимый характер группы $G(\zeta)$ неприводим как характер Брауэра. □

По поводу близких к (1.7) результатов см. Осима [1942].

Теорема 1.8 (Гамерник и Михлер [1972]). *Пусть p — простое число, G — некоторая p-разрешимая группа, F — алгебраически замкнутое поле характеристики p, W — неприводимый $F[G]$-модуль, φ — характер Брауэра модуля W, P — вертекс W. Если $|G|_p = p^a$, $|P| = p^b$ и $\varphi(1)_p = p^c$, то $a - b = c$.*

Доказательство. Индукция по $|G : O_{p'}(G)|$. Если $G = O_{p'}(G)$, то $a = b = c = 0$. Значит, можно предполагать, что $G \neq O_{p'}(G)$. По определению, $a - b \leqslant c$. Поэтому достаточно показать, что $c \leqslant a - b$.

Предположим, что $O_p(G) = D \neq \langle 1 \rangle$. В силу (III.4.13), W является $F[G/D]$-модулем с вертексом P/D. Результат теперь следует по индукции.

Пусть $O_p(G) = \langle 1 \rangle$. Тогда $H = O_{p'}(G) \neq \langle 1 \rangle$. Пусть V — неприводимый $F[H]$-модуль, причем $V \mid W_H$. По индукции и (V.2.5) можно считать, что $T(V) = G$. В силу (1.1) (ii), $W \cong \tilde{V} \otimes \tilde{W}$ для неприводимого $F[\tilde{G}/\tilde{H}]$-модуля $\tilde{W}$ и $\dim_F \tilde{V} = \dim_F V \not\equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку $O_p(\tilde{G}/\tilde{H}) \neq \langle 1 \rangle$, то применяя индуктивное предположение и предыдущий абзац к $\tilde{G}/\tilde{H}$, получаем, что

$$p^c = (\dim_F W)_p = (\dim_F \tilde{W})_p = p^{a-b_0},$$

где $|P_0| = p^{b_0}$, P_0 — вертекс $\tilde{W}$. Пусть X — источник модуля $\tilde{W}$. По теореме взаимности Фробениуса (III.2.5), $W \mid \tilde{V} \otimes X^G \cong (\tilde{V}_{P_0} \otimes X)^G$. Поэтому W $F[P_0]$-проективен и, значит, $b \leqslant b_0$. Таким образом, $c = a - b_0 \leqslant a - b$. □

Близкий к теореме 1.8 результат получил Клифф [1979]. Из (1.8) следует, что вопрос (II) из § 5 гл. IV допускает утвердительный ответ для p-разрешимых групп. Тем не менее следующий параграф содержит еще более сильные результаты в этом направлении.

Для произвольных групп теорема 1.8 неверна. Например, если $G = J_1$ — наименьшая группа Янко и $p = 2$, то $|G|_2 = 8$, однако G имеет непроективный неприводимый характер Брауэра степени 56 (см. Фонг

[1974]). В качестве другого примера рассмотрим $G=\mathrm{SL}_2(4)$ и $p=2$. Пусть W — естественное двумерное представление группы G в характеристике 2, P — некоторая S_2-подгруппа группы G. Поскольку W_P точен и P абелева, W_P не может быть индуцировано от представления собственной подгруппы. Значит, по (III.3.8), P является вертексом W.

В (1.8) утверждается, что если G p-разрешима, то вертекс абсолютно неприводимого $F[G]$-модуля наименьший из возможных. Если R — кольцо целых поля p-адических чисел K, то аналогичное утверждение для тех $R[G]$-модулей W, у которых W_K абсолютно неприводим, неверно. Клайн [1971], [1973], отвечая на вопрос, возникший в более ранней версии этого материала, привел соответствующие примеры.

Пусть p — простое число, P — экстраспециальная p-группа порядка p^3, допускающая такую циклическую группу E автоморфизмов, что $|E|=p+1$, $[E, Z(P)]=1$ и E действует транзитивно на множестве всех подгрупп группы P индекса p. Тогда P является группой экспоненты p при $p\neq 2$ и P — группа кватернионов при $p=2$. Положим $G=PE$. Тогда G обладает точным неприводимым характером χ, для некоторого $\chi(1)=p$. Пусть χ является характером R-свободного $R[G]$-модуля V. Покажем, что P является вертексом модуля V.

Без ограничения общности можно считать, что R содержит примитивный корень $|G|$-й степени из 1. Модуль V абсолютно неразложим, поскольку χ неприводим. Если утверждение неверно, то вертекс D модуля V имеет индекс p в P. Поскольку $V|(V_D)^G$, из (III.3.8) следует, что $V_P\cong W^P$ для $R[D]$-модуля W ранга 1. Тогда D лежит в ядре модуля $\bar{V}_P\cong\bar{W}_P$. Это, однако, невозможно, поскольку P — наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая D.

§ 2. Характеры Брауэра p-разрешимых групп

Пусть φ — неприводимый характер Брауэра p-разрешимой группы G. Суон [1960] заметил, что из работы Фонга очень просто следует существование такого неприводимого характера χ группы G, что $\chi=\varphi$ (равенство характеров Брауэра). Этот результат известен как теорема Фонга — Суона [1]. Следующая ее переформулировка принадлежит Айзексу [1974], хотя доказательство отличается от доказательства Айзекса и, по существу, совпадает с доказательством Суона теоремы Фонга — Суона.

Теорема 2.1. *Пусть группа G p-разрешима, φ-неприводимый характер Брауэра группы G. Тогда существует такой p-рациональный неприводимый характер χ группы G, что $\chi=\varphi$ (равенство характеров Брауэра)* [2].

Доказательство. Индукция по $|G:O_{p'}(G)|$. Если $G=O_{p'}(G)$, результат очевиден.

---

[1] Независимо этот же результат получил А. В. Руколайне [1964*]. — *Примеч. пер.*

[2] Теорему, обратную к теореме Фонга — Суона, с использованием классификации простых конечных групп доказал Хисс [1987*]. — *Примеч. пер.*

Пусть $H=O_{p'}(G)$. Поскольку $p\nmid|H|$, то φ_H — обыкновенный характер группы H. Пусть ζ — неприводимая конституэнта характера φ_H. В силу (V.2.5) и (1.2), результат достаточно доказать для группы $G(\zeta)$. Тогда по индукции можно предполагать, что $|G:H|=|G(\zeta):O_{p'}(G(\zeta))|$. Значит, $O_{p'}(G(\zeta))=O_{p'}(Z)$, где Z — центр группы $G(\zeta)$. Поэтому $O_p(G(\zeta))\neq\langle 1\rangle$. Тем самым можно считать, что $O_p(G)\neq\langle 1\rangle$.

В силу (III.2.13), $O_p(G)$ лежит в ядре φ, и потому φ можно рассматривать как неприводимый характер Брауэра группы $G/O_p(G)$. Результат теперь следует по индукции. □

Непосредственным следствием (2.1) является усиление (IV.6.11) для p-разрешимых групп.

Следствие 2.2. *Пусть группа G p-разрешима, B — блок группы G. Тогда число неприводимых p-рациональных характеров в B не меньше числа неприводимых характеров Брауэра в B.*

Характер χ из (2.1) не обязан быть единственным. В качестве примера можно взять $p=2$ и элементарную абелеву 2-группу. Тем не менее следующий результат показывает, что это является особенностью простого числа 2.

Теорема 2.3 (Айзекс [1974]). *Пусть $p\neq 2$, группа G p-разрешима, φ — неприводимый характер Брауэра группы G. Тогда существует единственный неприводимый p-рациональный характер χ группы G, такой, что $\chi=\varphi$ (равенство характеров Брауэра).*

Для доказательства (2.3) нам нужна следующая лемма.

Лемма 2.4. *Пусть $p\neq 2$ и P — такая p-группа, что $P\lhd G$. Пусть характер χ p-рационален, причем как характер Брауэра $\chi=\varphi$, где φ — неприводимый характер Брауэра. Тогда P лежит в ядре характера χ.*

Доказательство. Пусть R — кольцо целых конечного неразветвленного расширения K поля p-адических чисел, причем $\bar{R}$ — поле разложения для $\bar{R}[G]$. Пусть, далее, V — $\bar{R}[G]$-модуль с характером φ, а U — соответствующий неразложимый проективный $R[G]$-модуль, Φ — характер модуля U. Тогда $(\Phi,\chi)=1$. Так как χ p-рационален, то $K(\chi)=K$. Следовательно, в силу основного свойства индекса Шура (см., например, Фейт [1967, (11.4)]), $U_K=W\oplus W'$, где характер модуля W равен χ, а у модуля W' нет композиционных факторов с характером χ. Положим $X=U\cap W$, где, как обычно, U отождествлен с $U\otimes_R R\subseteq U_K=U\otimes_R K$. Тогда χ является характером как X, так и $\bar{X}\cong V$.

Пусть $x\in P$. В силу III.2.13, $V(x-1)=(0)$. Значит, $X(x-1)\subseteq pX$. Следовательно, либо $x=1$, либо x имеет вид $1+p^k a$ для некоторой матрицы a с коэффициентами из R, $a\not\equiv 0\pmod p$, и некоторого целого $k>0$. Так как $p\neq 2$, то

$$x^{p^n}\equiv 1+p^{k+n}a\pmod{p^{n+k+1}}.$$

Поскольку $x^{p^n}=1$ для некоторого $n\geqslant 0$, получаем $a\equiv 0\pmod p$, вопреки условию на a. Значит, $x=1$. □

Доказательство теоремы 2.3. Индукция по $|G:O_{p'}(G)|$. Если $G=O_{p'}(G)$, результат очевиден.

Существование хотя бы одного характера χ следует из (2.1).

Пусть $H=O_{p'}(G)$, ζ — неприводимая конституэнта характера φ_H. В силу (V.2.5) и (1.2), результат достаточно доказать для группы $G(\zeta)$. По индукции можно считать, что $|G:H|=|G(\zeta):O_{p'}(G(\zeta))|$. Тогда $O_{p'}(G(\zeta))=O_{p'}(Z)$, где Z — центр группы $G(\zeta)$. Значит $O_p(G(\zeta))\neq\langle 1\rangle$. Следовательно, можно предполагать, что $O_p(G)\neq\langle 1\rangle$.

Пусть χ_1, χ_2 — такие p-рациональные характеры, что $\chi_1=\chi_2=\varphi$ (равенство характеров Брауэра). Согласно (2.4), $O_p(G)$ лежит в ядрах характеров χ_1 и χ_2. Поэтому χ_1 и χ_2 являются характерами группы $G/O_p(G)$. По индукции, $\chi_1=\chi_2$. □

Теорема 2.5 (Айзекс [1974]). *Предположим, что $p\neq 2$. Пусть группа G p-разрешима. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *каждый неприводимый p-рациональный характер группы G неприводим как характер Брауэра;*

(ii) *для каждого p-сингулярного элемента x из G, $x=x_px_{p'}$, где x_p — это p-часть x, существует такая степень y элемента x, что $|\langle x_p\rangle|=|\langle y\rangle|$, но y не сопряжен с x_p в $C_G(x_{p'})$.*

Доказательство. Из (IV.6.10), или, более точно, из комбинаторной леммы Брауэра, цитировавшейся в (IV.6.10), следует, что число неприводимых p-рациональных характеров группы G равно числу тех сопряженных классов с элементом z, p-часть x которого сопряжена с любой образующей циклической подгруппы $\langle x\rangle$ в $C_G(z_{p'})$, где $z_{p'}$ — это p'-часть элемента z. Значит, условие (ii) выполнено тогда и только тогда, когда число p-рациональных характеров группы G равно числу неприводимых характеров Брауэра группы G. Согласно (2.1) это выполнено тогда и только тогда, когда выполнено условие (i).

Следствие 2.6. *Пусть группа G p-разрешима, φ — неприводимый характер Брауэра группы G, τ — автоморфизм поля $\mathbf{Q}(\varphi)$. Тогда φ^τ — неприводимый характер Брауэра.*

Доказательство. Очевидно, ввиду (2.1). □

Следствие 2.6 неверно для произвольной группы G. Например, $\mathrm{SL}_2(11)$ имеет единственный неприводимый характер Брауэра степени 2 при $p=11$. Однако $\sqrt{5}\in\mathbf{Q}(\varphi)$.

Дальнейшие результаты, связанные с (2.3) и (2.5), можно найти у Айзекса [1978]. Клифф [1977] нашел альтернативную трактовку оригинальной теоремы Фонга—Суона и получил информацию о неразложимых модулях p-разрешимых групп. Гагола [1975] обобщил теорему Фонга—Суона, показав, что если вертекс абсолютно неприводимого $F[G]$-модуля содержится в нормальной p-разрешимой группе, то этот модуль может быть поднят в характеристику 0.

§ 3. Главные неразложимые характеры p-разрешимых групп

Три первых результата этого параграфа принадлежат Фонгу [1962].

Лемма 3.1. *Предположим, что $P\lhd G$ и $|P|=p^n$. Пусть φ — неприводимый характер Брауэра группы G/P, Φ, Φ^0 — главные неразложимые характеры групп G и G/P соответственно, которые отвечают φ. Тогда $\Phi(1)=p^n\Phi^0(1)$.*

Доказательство. См. (IV.4.26). □

Теорема 3.2. *Пусть группа G p-разрешима, φ — неприводимый характер Брауэра группы G, Φ — соответствующий главный неразложимый характер группы G, p^a — порядок S_p-подгруппы группы G. Тогда $\Phi(1)=p^a u$, где $(p, u)=1$ и $\varphi(1)=p^m u$ для некоторого $m\geqslant 0$.*

Доказательство. Индукция по $|G:O_{p'}(G)|$. Если $G=O_{p'}(G)$, то результат очевиден. Пусть $H=O_{p'}(G)$ и ζ — неприводимая конституэнта характера φ_H. В силу (V.2.5), результат достаточно доказать для группы $T(\zeta)$. Тогда, по индукции, можно предполагать, что $G=T(\zeta)$ и $H=O_{p'}(T(\zeta))$. Биективное соответствие, определенное в (1.1), отображает характер Брауэра θ в характер Брауэра $\tilde{\theta}$, причем $\theta(1)=\zeta(1)\tilde{\theta}(1)$. Поэтому, ввиду (1.2), результат достаточно доказать для группы $G(\zeta)$. Поэтому можно предполагать, что $P=O_p(G)\neq\langle 1\rangle$.

Так как P лежит в ядре φ, то φ является неприводимым характером группы G/P. Пусть Φ^0 — соответствующий главный неразложимый характер группы G/P. По индукции, $\Phi^0(1)=p^{a-n}u$, где $|P|=p^n$. Поэтому, согласно (3.1), $\Phi(1)=p^a u$. □

Результат, подобный (3.2), для произвольных групп неверен. Например, если $G\cong A_5$ и $p=3$, то существует главный неразложимый характер группы G степени 9.

Следствие 3.3. *Пусть группа G p-разрешима, F — поле характеристики p. Тогда $\operatorname{Ann}(J(F[G])=F[G]c$, где c — сумма всех p-элементов группы G.*

Доказательство. Пусть $\hat{F}$ — конечное расширение поля F, которое является полем разложения для $F[G]$. Пусть, далее, V_1, V_2, ... — полное множество представителей классов изоморфизма неприводимых $\hat{F}[G]$-модулей, I — аннулятор модуля $\oplus V_j$. Тогда $I=J(\hat{F}[G])$. Согласно (IV.4.5) и (3.2), $\operatorname{Ann}(I)=\hat{F}[G]c$. Поскольку $c\in F[G]$ и $J(\hat{F}[G])=J(F[G])\otimes_F\hat{F}$, отсюда вытекает результат. □

Хорошо известно, что p-разрешимая группа G обладает p-дополнением M. Это означает, что существует такая p'-подгруппа M, для которой $G=PM$ и $P\cap M=\langle 1\rangle$, где P является S_p-подгруппой группы G. Кроме того, любая p'-подгруппа группы G сопряжена в G подгруппе группы M.

Теорема 3.4. *Пусть группа G p-разрешима, и пусть группа M является p-дополнением в G, Φ — главный неразложимый характер группы G. Тогда $\Phi=\chi^G$ для некоторого неприводимого характера χ группы M.*

Доказательство. Индукция по $|G:O_{p'}(G)|$ и $|G|$. Если $G=O_{p'}(G)$, результат тривиален. Пусть φ — неприводимый характер Брауэра, соответствующий Φ.

Положим $H=O_{p'}(G)$ и обозначим через ζ неприводимую конституэнту характера Брауэра φ_H. Предположим, что $T(\zeta)\neq G$. Пусть группа M_1 является p-дополнением в $T(\zeta)$. В силу (V.2.5), $\Phi=\Phi_1^G$ для некоторого главного неразложимого характера группы $T(\zeta)$.

По индукции, $\Phi_1=\chi_1^{T(\zeta)}$ для некоторого неприводимого характера χ_1 группы M. Заменяя, если необходимо, M на сопряженную, можно считать, что $M_1\subseteq M$. Положим $\chi=\chi_1^M$. Тогда $\Phi=\chi^G$. Следовательно, можно предполагать, что $G=T(\zeta)$.

Если $|G:H|>|G(\zeta):O_p(G(\zeta))|$, то результат получается по индукции. Предположим, что $|G:H|=|G(\zeta):O_p(G(\zeta))|$. Положим $P=O_p(G(\zeta))$. Тогда $P\neq\langle 1\rangle$. Пусть η — главный неразложимый характер группы $G(\zeta)$, ψ — неприводимый характер Брауэра группы $G(\zeta)$, соответствующий η. Тогда P лежит в ядре ψ. Обозначим через η^0 главный неразложимый характер группы $G(\zeta)/P$, соответствующий ψ. Пусть $M(\zeta)$ является p-дополнением в $G(\zeta)$. По индукции, $\eta^0=\xi^{G(\zeta)/P}$ для некоторого неприводимого характера ξ группы $M(\zeta)$. В силу соотношений Накаямы (III.2.6), ξ является компонентой $\psi_{M(\zeta)}$ и поэтому $\xi^{G(\zeta)}=\eta+\eta'$, где $\eta'=0$ или сумме главных неразложимых характеров. Так как $\xi^{G(\zeta)}(1)=|P|\eta^0(1)=\eta(1)$ (см. (3.1), то $\xi^{G(\zeta)}=\eta$.

В силу (1.1), $\varphi=\tilde{\zeta}\tilde{\varphi}$ для подходящего неприводимого характера Брауэра группы $G(\zeta)=\tilde{G}/\tilde{H}$. Согласно (1.2) (iv), $\Phi=\tilde{\zeta}\eta$ для некоторого главного неразложимого характера η группы $G(\zeta)$. Пусть группа $\tilde{M}$ является p-дополнением в $\tilde{G}$. Тогда $M(\zeta)=\tilde{M}/\tilde{H}$ является p-дополнением в $G(\zeta)=\tilde{G}/\tilde{H}$. В силу предыдущего абзаца, $\eta=\xi^{\tilde{G}}$ для некоторого неприводимого характера ξ группы $\tilde{M}$. Положим $\chi=\zeta_{\tilde{M}}\tilde{\xi}$. Тогда $\Phi=\chi^{\tilde{G}}$ и Z лежит в ядре характера χ. Поскольку $\tilde{G}/Z\cong G$ и $\tilde{M}/Z\cong M$ является p-дополнением в G, то $\Phi=\chi^G$ для некоторого характера группы M. Так как Φ является главным неразложимым характером, то χ — неприводимый характер группы M. □

Следствие 3.5. *Пусть группа G p-разрешима, группа M является p-дополнением в G. Пусть φ — неприводимый характер Брауэра группы G, причем $p\nmid\varphi(1)$. Тогда φ_M неприводим.*

Доказательство. Пусть Φ — главный неразложимый характер, соответствующий φ. В силу (3.4), $\Phi=\chi^G$ для некоторого неприводимого характера χ группы M. В силу (3.2), $\chi(1)=\varphi(1)$. Используя соотношения Накаямы (III.2.6), заключаем, что χ — конституэнта в φ_M. Значит, $\varphi_M=\chi$. □

Следующий результат усиливает предложение Рихена [1970].

Следствие 3.6. *Пусть p-разрешимая группа G обладает абелевой S_p-подгруппой P и абелевым p-дополнением. Тогда все числа разложения равны* 0 *или* 1.

Доказательство. Достаточно показать, что если Φ — главный неразложимый характер группы G, то $(\Phi,\theta)\leqslant 1$ для любого неприводимого характера θ группы G. Поскольку p-дополнение абелево, то $\Phi(1)=|P|$, ввиду (3.4). Значит, Φ_P является характером регулярного представления группы P. Так как P абелева, Φ_P свободен от кратностей. Значит, Φ также свободен от кратностей. □

По поводу близких результатов о произвольных метабелевых группах см. Басмаи [1972].

§ 4. Блоки p-разрешимых групп

Лемма 4.1. *Пусть группа G p-разрешима, B — блок группы G с циклической дефектной группой, K — поле разложения для группы G и всех ее подгрупп. Тогда дерево Брауэра группы G является звездой с исключительной вершиной (если она существует) в центре.*

Доказательство. В силу (2.1), каждое ребро обладает вершиной, которая является крайней точкой и соответствует p-рациональному характеру. Ввиду (2.3), эта вершина не является исключительной. Это доказывает первое утверждение. Второе следует из (VII.2.21). □

В § 9 гл. VII приведены примеры, которые показывают, что для произвольной группы G лемма 4.1 неверна, даже если S_p-подгруппа циклическая.

Все оставшиеся результаты этого параграфа принадлежат Фонгу [1960], [1961], [1962]. Частные случаи некоторых из них были доказаны Берманом [1960]. См. также Михлер [1973b].

Теорема 4.2. *Пусть группа G p-разрешима, B — блок группы G, D — дефектная группа блока B, $Z(D)$ — центр D и $|D:Z(D)|=p^k$. Тогда высота любого неприводимого характера или неприводимого характера Брауэра из B не больше k.*

Доказательство. В силу (2.1), результат достаточно доказать лишь для обыкновенных неприводимых характеров. Его мы сначала докажем для тех блоков B, у которых дефектная группа является S_p-подгруппой группы G. Доказательство проведем индукцией по $|G|$. Если $|G|=1$, результат очевиден. Предположим, что $|G|>1$.

Пусть θ — неприводимый характер из B, N — максимальная нормальная подгруппа группы G. Из теоремы Клиффорда (III.2.12) следует, что $\theta_N = e\sum_{i=1}^{m}\chi_i$, где $\{\chi_i\}$ — множество неприводимых характеров группы N, сопряженных относительно действия группы G. В частности, если θ_0 — неприводимый характер высоты 0 из B, то $\theta_0(1)\not\equiv 0 \pmod p$, и, значит, по (IV.4.10), блоки группы N, накрываемые B, имеют S_p-подгруппу группы N в качестве дефектной группы, блока B.

Предположим, что $p\nmid|G:N|$. Тогда $p\nmid em$, и, значит, как $\theta(1)$, так и $\chi_i(1)$ делятся на одинаковую наибольшую степень числа p. Поскольку $D\subseteq N$, результат получается по индукции.

Предположим, что $p\,||\,G:H|$. Тогда, ввиду p-разрешимости G, $p=|G:N|$. В силу (III.2.14), $e=1$. Значит, $m=1$ или p. Если $m=p$, то $\theta=\chi_1^G$. Тогда, по (V.1.2) и (V.1.6), $Z(D)\subseteq D\cap N$. Поэтому, если D_1 — центр $D\cap N$, то $|D\cap N:D_1|\,p\leqslant|D:Z(D)|$. Остается применить индукцию. Предположим, что $m=1$. Тогда, по индукции, высота θ_N не больше $|D\cap N:Z(D)\cap N|\leqslant|D:Z(D)|$. Отсюда следует результат в случае, когда D является S_p-подгруппой группы G.

Доказательство для произвольной группы G проведем индукцией по $|G:H|$, где $H=O_{p'}(G)$. Пусть ζ — неприводимый характер группы H, который лежит в блоке группы H, накрываемом B. Согласно (V.2.5) и (1.2), результат достаточно доказать для группы $G(\zeta)$. По индукции можно предполагать, что $|G:H|=|G(\zeta):O_{p'}(G(\zeta))|$.

В силу (1.4) дефектной группой каждого блока группы $G(\zeta)$ является ее S_p-подгруппа. Результат теперь следует из первой части доказательства. □

Пусть F — поле характеристики p, G — некоторая p-разрешимая группа, B — блок группы G, V — неприводимый $F[G]$-модуль из B с вертексом P. Если V абсолютно неприводим, то из (4.2) следует, что $|Z(D)| \leqslant |P|$. Гамерник и Михлер [1976, Theorem 3.2], усилили этот результат, доказав, что $Z(D) \subseteq_G P$ (даже когда V неприводим, но не обязательно абсолютно неприводим).

Следствие 4.3. *Пусть группа G p-разрешима, B — блок группы G с абелевой дефектной группой. Тогда каждый неприводимый характер из B имеет высоту* 0.

Доказательство. Непосредственно следует из (4.2). □

Теорема 4.4. *Для p-разрешимой группы G следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *G обладает нормальной абелевой S_p-подгруппой;*

(ii) *степень каждого неприводимого характера группы G взаимно проста с p.*

Доказательство. Рассмотрим S_p-подгруппу P группы G.

(i)⇒(ii). Непосредственно следует из (III.6.9) и (4.3).

(ii)⇒(i). Индукция по $|G|$. Если $|G|=1$, результат тривиален. Предположим, что $|G|>1$. Пусть N — максимальная нормальная подгруппа группы G. По теореме Клиффорда (III.2.12) степень каждого неприводимого характера группы N взаимно проста с p.

Предположим, что $p \nmid |G:N|$. Тогда, по индукции, $P \lhd N$ и P абелева. Значит, $P \lhd G$. Поэтому можно считать, что $|G:N|=p$. Положим $P_0 = P \cap N$.

Предположим, что $P_0 \neq \langle 1 \rangle$. Тогда, по индукции, $P_0 \lhd N$ и, значит, $P_0 \lhd G$. По индукции, G/P_0 имеет нормальную p-подгруппу. Значит, $P \lhd G$. Если P не является абелевой, то существует такой неприводимый характер χ группы P, что $p|\chi(1)$. Пусть θ — такой неприводимый характер группы G, для которого χ является конституэнтой характера θ_P. По теореме Клиффорда (III.2.12), $\chi(1)|\theta(1)$ и, значит, $p|\theta(1)$, вопреки условию. Тем самым, можно предполагать, что $P_0 = \langle 1 \rangle$. Тогда $|P|=p$.

Пусть θ — неприводимый характер группы G. Поскольку $p \nmid \theta(1)$, $\theta_N = \zeta$ неприводим. Значит, если $P=\langle x \rangle$, то $\zeta^x = \zeta$ для любого неприводимого характера группы N. Из комбинаторной леммы Брауэра (см., например, Фейт [1967c, (12.1)]) следует, что отображение, переводящее y в $x^{-1}yx$, оставляет неподвижными все сопряженные классы группы N. Поэтому, если $y \in N$, то число элементов группы N, сопряженных с y, не делится на p. Значит, $H = C_N(P)$ пересекает любой сопряженный класс группы N и, следовательно, $N = \bigcup y^{-1} Hy$. Таким образом, $N=H$ и $G = PH = P \times H$. □

Следствие 4.5. *Пусть группа G p-разрешима, B — ее главный блок. S_p-подгруппа группы G абелева тогда и только тогда, когда любой характер из B имеет высоту* 0.

Доказательство. В силу (IV.4.12), $O_{p'}(G)$ лежит в ядре блока B. Поэтому можно предполагать, что $O_{p'}(G)=\langle 1\rangle$. В силу (1.5), B является единственным блоком группы G. Результат теперь следует из (4.3) и (4.4). □

Теорема 4.6. *Пусть группа G p-разрешима, B — ее блок дефекта d. Если c_{ij} — инвариант Картана блока B, то $c_{ij}\leqslant p^d$.*

Доказательство. Пусть φ — неприводимый характер Брауэра группы G, лежащий в B. Положим $H=O_{p'}(G)$ и обозначим через ζ неприводимую конституэнту характера Брауэра φ_H. В силу (V.2.5) и (1.2), можно предполагать, что $G=G(\zeta)$. Таким образом, по (1.4), порядок S_p-подгруппы группы G равен p^d. Пусть Φ_1 — главный неразложимый характер группы G, соответствующий 1_G. В силу (3.2), $\Phi_1(1)=p^d$. Результат теперь следует из (IV.4.15) (ii).

§ 5. Модули главного ряда p-разрешимой группы

Пусть группа G p-разрешима и $G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_n=\langle 1\rangle$ — ее главный ряд. Тогда для каждого i фактор G_i/G_{i+1} является либо p'-группой, либо элементарной абелевой p-группой. Если G_i/G_{i+1} — элементарная абелева p-группа, то G_i/G_{i+1} является неприводимым $F[G]$-модулем, где F — поле порядка p. Этот модуль будем называть *модулем главного ряда группы G относительно p* или просто *модулем главного ряда* группы G. Модули главного ряда группы G неприводимы, но не обязательно абсолютно неприводимы. Следующие два результата первоначально были доказаны для разрешимых групп. Первый из них был обобщен Косси и Гашюцем [1974].

Теорема 5.1 (Фонг и Гашюц [1961]). *Модули главного ряда p-разрешимой группы G лежат в главном блоке.*

Доказательство. По определению, $O_{p'}(G)$ лежит в ядре модуля главного ряда. Результат теперь следует из (1.5). □

Пусть группа G p-разрешима, M является p-дополнением в G. Если N — такая подгруппа, что $M\subseteq N\subseteq G$, то $V_0(N)$ является $F[N]$-модулем с главным неприводимым характером Брауэра, где F — поле порядка p. Тогда $V_0(N)^G$ изоморфен подмодулю модуля $V_0(M)^G$. Так как $V_0(M)^G$ — главный неразложимый модуль, соответствующий $V_0(G)$, то $V_0(G)$ — цоколь модуля $V_0(M)^G$. Значит, цоколем модуля $V_0(N)^G$ является $V_0(G)$, и потому $V_0(N)^G$ — неразложимый модуль из главного p-блока группы G. Таким образом, следующий результат обобщает (5.1).

Теорема 5.2 (Грин и Хилл [1969]). *Пусть G p-разрешима, M является p-дополнением в G. Положим $N=N_G(M)$. Пусть $V_0(N)$ определен как выше. Тогда каждый модуль главного ряда группы G является конституэнтой модуля $V_0(N)^G$.*

Доказательство. Пусть H/S — главный фактор группы G, являющийся p-группой. Положим $G^0=G/S$. Через A^0 будем обозначать образ в группе G^0 подмножества A группы G. Тогда $V_0(N^0)^{G^0}\cong V_0(NS)^G$. Так как $N^0\subseteq N_{G^0}(M^0)$, то

$$V_0(N_{G^0}(M^0))^{G^0}\subseteq V_0(N^0)^{G^0}\cong V_0(NS)^G\subseteq V_0(N)^G.$$

Таким образом, результат достаточно доказать для группы G^0. Изменяя обозначения, можно предполагать, что $G=G^0$ и $S=\langle 1\rangle$.

Определим $W=\{[y]\mid y\in H\}$, считая $[y]x=[x^{-1}yx]$, $x\in G$, $y\in H$. Тогда W является $F[G]$-модулем, изоморфным модулю главного ряда группы H.

Предположим, что $N\cap H\neq\langle 1\rangle$. Если $x\in N\cap H$, то $[x, M]\subseteq M\cap H=\langle 1\rangle$. Так как $N\cap H\neq\langle 1\rangle$, то $\mathrm{Inv}_M(W_M)\neq(0)$. Поскольку N/M является p-группой, действующей на W_M, $\mathrm{Inv}_N(W_N)\neq(0)$ и, значит, $\mathrm{Hom}_{F[H]}(V_0(N), W_N)\neq(0)$. Из теоремы взаимности Фробениуса (III.2.5) следует, что $\mathrm{Hom}_{F[G]}(V_0(N)^G, W)\neq(0)$. Поскольку W неприводим, получаем, что в рассматриваемом случае W является компонентой модуля $V_0(N)^G$. Следовательно, можно предполагать, что $N\cap H=\langle 1\rangle$.

Пусть $x_1, \ldots, x_s$ — трансверсаль группы NH в G. Тогда $\{x_iy\mid 1\leqslant i\leqslant s, y\in H\}$ является трансверсалью N в G, поскольку $N\cap H=\langle 1\rangle$. Значит, множество $\{Nyx_i\mid 1\leqslant i\leqslant s, y\in H\}$ является F-базисом $V_0(N)^G$. Подпространство пространства $V_0(N)^G$ с F-базисом $\{N(y-1)x_i\mid 1\leqslant i\leqslant s, y\in H, y\neq 1\}$ является $F[G]$-модулем. Обозначим его через V. Тогда V является ядром естественного отображения $V_0(N)^G$ на $V_0(NH)^G$. Определим F-линейное отображение f: $V\to W$, полагая

$$f(N(y-1)x_i)=[y]x_i=[x_i^{-1}yx_i].$$

Легко проверить, что если $x\in G$, $y\in H$, то $f(N(y-1)x)=[x^{-1}yx]$. Кроме того, если $z\in G$, то

$$f(N(y-1)xz)=[z^{-1}x^{-1}yxz]=[x^{-1}yx]z=f(N(y-1)x)z.$$

Значит, $f(vz)=f(v)z$ для всех $v\in V$, $z\in G$, и потому f является $F[G]$-гомоморфизмом. Так как $f\neq 0$ и W неприводим, то W является компонентой модуля V, а значит, и модуля $V_0(N)^G$. □

Следствие 5.3. *Пусть группа G p-разрешима, и пусть Φ_1 — главный неразложимый характер группы G, соответствующий ее главному неприводимому характеру. Пусть φ — неприводимый характер Брауэра, являющийся константой характера Брауэра модуля главного ряда. Тогда φ — константа Φ_1.*

Доказательство. Очевидно, ввиду (5.2). □

§ 6. Проблемы из § 5 главы IV для p-разрешимых групп

Этот параграф содержит обзор результатов для p-разрешимых групп, связанных с проблемами, сформулированными в § 5 гл. IV.

Согласно (2.1), если группа G p-разрешима, то проблемы (I) и (II) имеют для нее утвердительный ответ.

Следующий результат показывает, что для p-разрешимых групп проблемы (III) и (IV) допускают почти утвердительный ответ.

Лемма 6.1. *Пусть группа G p-разрешима. Предположим, что задана таблица характеров группы G и известно, какие из сопряженных*

классов группы G состоят из p'-элементов. Тогда таблица неприводимых характеров Брауэра однозначно определена.

Доказательство. Для любой функции классов θ группы G пусть θ' обозначает ограничение θ на множество p'-элементов группы G. Пусть l — число p'-классов группы G. Ввиду (2.1), достаточно доказать следующий результат. Пусть $\{\chi_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, $\{\zeta_j \mid 1 \leqslant j \leqslant l\}$ — такие множества неприводимых характеров группы G, что для каждого неприводимого характера θ группы G, θ' является линейной комбинацией χ_i' с неотрицательными целыми коэффициентами и θ' является линейной комбинацией ζ_i с неотрицательными целыми коэффициентами. Тогда $\{\chi_i\} = \{\zeta_i\}$.

Доказательство этого результата довольно простое. Пусть $\chi_i' = \sum_j a_{ij}\zeta_j'$ и $\zeta_j' = \sum_i b_{ij}\chi_i'$. Тогда $\chi_i' = \sum_{j,k} a_{ij}b_{kj}\chi_k'$. Множество $\{\chi_i' \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$ представляет собой множество линейно независимых функций, определенных на множестве p'-элементов группы G. Значит,

$$\sum_j a_{ij}b_{kj} = \delta_{ik}. \tag{6.2}$$

Предположим, что $a_{ij} = 0$. Тогда существует такой k, что $b_{kj} \neq 0$. Из (6.2) следует, что $k = i$ и $a_{ij} = b_{ij} = 1$. Значит, $\zeta_j' = \chi_i'$. Так как i произвольно, то отсюда следует результат. □

Следующий результат докажем для демонстрации того, с чем связаны проблемы (V) и (VI).

Лемма 6.3. *Пусть P есть S_p-подгруппа группы G. Предположим, что $PO_{p'}(G) \lhd G$. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

(i) *в $O_{p'}(G)$ существует сопряженный класс дефекта* 0;

(ii) *группа G имеет блок дефекта* 0;

(iii) *группа $PO_{p'}(G)$ имеет блок дефекта* 0.

Доказательство. (i)⇒(ii). Следует из (IV.5.1).

(ii)⇒(iii). Пусть θ — неприводимый характер из блока дефекта 0 группы G. Положим $H = O_{p'}(G)$. В силу результата Рейнольдса (см., например, Кэртис и Райнер [1962], с. 337 русского перевода), $\theta_{PH} = e\sum_{i=1}^{m} \eta_i$, где $em \mid |G:PH|$, а $\{\eta_i\}$ — множество сопряженных между собой неприводимых характеров группы PH. Тогда $\theta(1) = em\,\eta_1(1)$ и $p \nmid em$. Следовательно, $|P| \mid \eta_1(1)$.

(iii)⇒(i). Предположим, что утверждение ложно. Пусть θ — неприводимый характер из блока дефекта 0 группы $G = PO_{p'}(G)$, x — некоторый p'-элемент из группы G. Тогда $x \in O_{p'}(G)$. Так как $|G:C_G(x)|\theta(x)/\theta(1)$ — целое алгебраическое число и $|P| \nmid |G:C_G(x)|$, то $\theta(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда θ неприводим как характер Брауэра и $\theta(x) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех p'-элементов x из G. Это противоречит (IV.3.11). □

Для произвольной p-разрешимой группы G условия (ii) и (iii) из (6.3) не эквивалентны. Следующие примеры принадлежат В. Виллемсу.

Пусть P есть S_2-подгруппа группы $\mathrm{GL}_2(3)$, V — элементарная абелева группа порядка 9, на которой естественно действует $\mathrm{GL}_2(3)$. Обозначим через G расщепляемое расширение группы V с помощью

$GL_2(3)$. Непосредственно проверяется, что G обладает неприводимым характером степени 16, однако у группы PV нет 2-блока дефекта 0. Значит, G удовлетворяет (6.3) (ii), но не удовлетворяет (6.3) (iii).

Группа $SL_2(3)$ изоморфна подгруппе группы $SL_2(5)$. Пусть V — элементарная абелева группа порядка 5^2, на которой естественно действует $SL_2(5)$. Легко видеть, что $SL_2(3)$ действует на V без неподвижных точек. Поэтому полупрямое произведение $H=VSL_2(3)$ является группой Фробениуса. Пусть P есть S_2-подгруппа группы $SL_2(3)$. Тогда VP имеет три 2-блока дефекта 0, а H — лишь один 2-блок дефекта 0. Пусть $G=H \wr \mathbf{Z}_2$ — сплетение H и $\mathbf{Z}_2$, где $|\mathbf{Z}_2|=2$. Можно убедиться, что у G нет 2-блоков дефекта 0, однако, если Q является S_2-подгруппой группы G, то $VQ=O_{2'}(G)Q$ имеет шесть 2-блоков дефекта 0 (существование по крайней мере одного такого 2-блока следует из (6.3)).

Докажем следующий предварительный технический результат.

Лемма 6.4. *Пусть p, q — различные нечетные простые числа, F — поле порядка q. Пусть, далее, P есть p-группа, V — точный неприводимый $F[P]$-модуль. Тогда существует такой $v\in V$, что $vx\neq v$ для всех $x\in P-\{1\}$.*

Доказательство. Индукция по $|P|$. Пусть $Q\lhd P$, причем $|P:Q|=p$ и $V=W^P$ для подходящего $F[Q]$-модуля W. Тогда W неприводим и $V=\oplus_{i=0}^{p-1} Wx^i$, где $\{x^i \mid 0\leqslant i\leqslant p-1\}$ — трансверсаль группы Q в P. Пусть H_i — ядро действия Q на Wx^i. По индукции, существует такой $v_0\in W$, что $v_0y\neq v_0$ для $y\in Q-H_0$. Тогда $v_0x^iy\neq v_0x^i$ для $y\in Q-H_0$, $0\leqslant i\leqslant p-1$. Поскольку p и q нечетны, $v_0x^{-1}y\neq -v_0x^{-1}$ для любого $y\in Q$. Так как $\bigcap_{i=1}^{p-1} H_i=\langle 1\rangle$, то для $v=\left(\sum_{i=0}^{p-2} v_0x^i\right)-v_0x^{-1}$ имеем $vz\neq v$ при всех $z\in P-\{1\}$.

Пусть θ — характер модуля V. В силу (I.19.4), $\theta=\sum_\tau \chi^\tau$, где χ — неприводимый характер группы P, а τ пробегает группу полевых автоморфизмов. Известно, что $\chi=\xi^P$ для некоторого неприводимого характера ξ подходящей собственной подгруппы Q, для которой $|P:Q|=p$. Кроме того, $\mathbf{Q}(\chi)=\mathbf{Q}(\xi)$, иначе P абелева (см., например, Фейт [1967c, (14.3)]). Таким образом, ввиду предыдущего абзаца, можно считать, что P абелева. Поскольку V неприводим, группа P циклическая и если $v\in V$, $v\neq 0$, то $vx\neq v$ для всех $x\in P-\{1\}$. □

Теорема 6.5 (Ито [1951a], [1951b]). *Предположим, что $|G|$ нечетен, а $O_{p'}(G)$ и $G/O_{p'}(G)$ нильпотентны для некоторого простого числа p. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *G имеет блок дефекта 0;*

(ii) *если P — S_p-подгруппа группы G, то $P\cap P^x=\langle 1\rangle$ для некоторого $x\in G$;*

(iii) $O_p(G)=\langle 1\rangle$.

Доказательство. (i)⇒(ii). Следует из (III.8.4).

(ii)⇒(iii). Очевидно.

(iii)⇒(i). Пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда у G нет блока дефекта 0. Положим $H=O_{p'}(G)$. Пусть P — S_p-подгруппа группы G.

Предположим, что G/H не является p-группой. По индукции, PH имеет блок дефекта 0 и, значит, по (6.3), G имеет блок дефекта 0, вопреки предположению. Значит, $G=PH$.

Пусть H_0 — минимальная нормальная подгруппа группы G. Поскольку у G/H_0 нет блоков дефекта 0, по индукции существует такой элемент $x\in P$, $x\neq 1$, что $[x, H]\subseteq H_0$. Так как H нильпотентна, то H_0 не лежит в подгруппе Фраттини L группы H. Поскольку $H_0\cap L\lhd G$, минимальность H_0 влечет $H_0\cap L=\langle 1\rangle$, и потому $H=H_0\times A$ для некоторой нормальной подгруппы A группы G. Следовательно, $H=H_1\times\ldots\times H_m$, где каждая из H_i является минимальной нормальной подгруппой группы G. Пусть T_i — группа характеров H_i. Положим $P_i=C_P(T_i)$. Тогда для каждого i существует такое простое $q\neq p$, что T_i является точным $F[P/P_i]$-модулем, где F — поле порядка q. В силу (6.4), существует такой $\zeta_i\in T_i$, что $\zeta_i^x\neq\zeta_i$ для любого $x\in P-P_i$. Положим $\zeta=\zeta_1\ldots\zeta_m$. Если $\zeta^x=\zeta$, то $\zeta_i^x=\zeta_i$ для каждого i, и потому $x\in\bigcap_{i=1}^m P_i\subseteq C_G(T)$, где $T=T_1\times\ldots\times T_m$. Тогда $x\in C_G(H)\subseteq O_p(G)$. Значит, $x=1$. Следовательно, существует такой неприводимый характер ζ группы H, что $T(\zeta)=H$. В силу (V.2.5), G имеет блок дефекта 0. □

Легко видеть, что теорема 6.5 неверна при $p=2$. Например, пусть P есть S_2-подгруппа группы $\mathrm{GL}_2(3)$, H — элементарная абелева порядка 9, G — расщепляемое расширение H с помощью P, где P действует на H как подгруппа группы $\mathrm{GL}_2(3)$. Тогда P транзитивна на множестве $H-\{1\}$. Отсюда легко заключить, что $2\mid |T(\zeta)|$ для любого неприводимого характера ζ группы H. Согласно (6.3), группа G не имеет блоков дефекта 0. В случае $p=2$ найдены некоторые условия, обеспечивающие справедливость (6.5). См., например, Ито [1951a], [1951b].

Другой результат, подобный (6.5), будет доказан после следующей леммы.

Если G — группа перестановок множества S, то $G_{a_1,\ldots,a_m}$ будет обозначать стабилизатор элементов $a_1, \ldots, a_m$ из S.

Лемма 6.6. *Пусть G — группа перестановок множества S, F — поле характеристики p. Для $A\subseteq G$ положим $\hat{A}=\sum_{x\in A}x\in F[G]$. Тогда свойство $(\sum_{a\in S}F[G]\hat{G}_a)^2=(0)$ необходимо и достаточно для того, чтобы $p\mid |G_{a,b}|$ при всех $a, b\in S$.*

Доказательство. Если $a, b\in S$ и $\{x_i\}$ — трансверсаль группы $G_{a,b}$ в G_b, то

$$\hat{G}_a\hat{G}_b=\hat{G}_a\hat{G}_{a,b}\left(\sum x_i\right)=|G_{a,b}|\,\hat{G}_a\left(\sum x_i\right). \tag{6.7}$$

Предположим, что $p\mid |G_{a,b}|$ для всех $a, b\in S$. Тогда $\hat{G}_a\hat{G}_b=0$, ввиду (6.7). Для любого $x\in G$, имеем $x^{-1}G_ax=G_{a^x}$. Поэтому, по (6.7), $\hat{G}_a x\hat{G}_b=0$. Таким образом,

$$\Big(\sum_{a\in S}F[G]\hat{G}_a\Big)^2=(0).$$

Обратно, предположим, что $(\sum_{a\in S} F[G]\hat{G}_a)^2=(0)$. Тогда, по (6.7), $|G_{a,b}|\hat{G}_a(\sum x_i)=0$ для всех a, $b\in S$. Поскольку пересечение $G_a x_i\cap G_a x_j$ пусто при $i\neq j$, то $p\mid |G_{a,b}|$. □

Теорема 6.8. *Предположим, что G p-разрешима и p-радикальна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *G обладает блоком дефекта 0;*

(ii) *для любой S_p-подгруппы P группы G найдется $x\in G$, такой, что $P\cap P^x=\langle 1\rangle$.*

Доказательство. Пусть F — поле характеристики p, являющееся полем разложения для $F[G]$. Обозначим через c сумму всех p-элементов из G. В силу (VI.4.5) и (3.3), $\mathrm{Ann}(J(F[G]))=F[G]c$. Согласно (VI.5.6), c^2 является суммой всех примитивных центральных идемпотентов дефекта 0 алгебры $F[G]$. Так как G p-радикальна, то из (VI.6.3) следует, что $\mathrm{Ann}(J(F[G]))=\sum_{x\in G} F[G](\sum_{y\in P} y)$. Таким образом, у G нет блоков дефекта 0 тогда и только тогда, когда $\sum_{x\in G} F[G](\sum_{y\in P} y)=(0)$.

Пусть $\{x_i\}$ — трансверсаль P в G. Положим $S=\{Px_i\}$ и применим (6.6) к G, действующей на S умножением справа. Стабилизатором Px_i является $x_i^{-1}Px_i$. Значит, по (6.6), $\{\sum_{x\in G} F[G](\sum_{y\in P} y)^2=(0)$ тогда и только тогда, когда $x_i^{-1}Px_i\cap x_j^{-1}Px_j\neq\langle 1\rangle$ для всех i, j. □

Условия теорем 6.5 и 6.8 кажутся излишне сильными. Однако следующий пример, принадлежащий Ито [1951b], показывает, что их трудно ослабить по существу.

Пусть p, q — простые числа, причем $q\equiv 1 \pmod p$ и $(q^p-1)/(q-1)=pr$. Тогда $q^p\equiv 1 \pmod r$ и $q\not\equiv 1 \pmod r$. Значит, $r\equiv 1 \pmod p$, и существует группа Фробениуса M с циклическим ядром Фробениуса C порядка r, причем $y^x=y^q$ для $y\in C$ и некоторого фиксированного $x\in M-C$. Пусть χ — точный неприводимый характер группы M. Тогда $\chi(1)=p$. Пусть F — поле порядка q. Тогда существует конечное расширение F_1 поля F и неприводимый $F_1[M]$-модуль V с характером χ. Легко видеть, что функция следа модуля V_1 на элементах группы принимает значения, принадлежащие F. В силу (I.19.3), существует точный неприводимый $F[M]$-модуль V с условием $\dim_F V=p$. Пусть P — циклическая группа порядка p, точно действующая на V умножением на скаляры. Тогда V превращается в $F[M\times P]$-модуль. Пусть G — расщепляемое расширение V с помощью $M\times P$. Непосредственно проверяется, что если θ — точный неприводимый характер группы G и ζ — неприводимая конституэнта характера θ_V, то $p\mid\mid T(\zeta)|$. Отсюда следует, что $p^2\not\mid\theta(1)$. Если θ — неприводимый характер группы G, не являющийся точным, то, очевидно, $p^2\not\mid\theta(1)$. Значит, у G нет блоков дефекта 0, хотя $O_p(G)=\langle 1\rangle$.

Между прочим, группы, описанные в предыдущем абзаце, дают примеры групп с нормальным p-дополнением, не являющиеся p-радикальными. В частности, существуют такие группы G и $H\lhd G$, что H и G/H p-радикальны, тогда как G таковой не является. Саксонов [1971] заметил, что $\mathrm{SL}_2(3)$ не является 3-радикальной. Это дает еще один пример описанной ситуации. По поводу других результатов, связанных с проблемами (V) и (VI), см. Цушима [1974].

Согласно (4.6), проблемы (VII) и (VIII) для p-разрешимых групп допускают утвердительный ответ.

Для p-разрешимых групп довольно много известно по проблеме (IX). В силу (4.3), она доказана в одном направлении. Согласно (4.5), она решена и в другом направлении для главного блока. Фонг [1963] показал также, что если G p-разрешима и p — наибольший простой делитель $|G|$, то у блока группы G, в котором каждый неприводимый характер имеет высоту 0, дефектная группа абелева [1].

Свойство p-разрешимости группы G, по-видимому, не помогает решению проблемы (X). Очень мало известно относительно нее для p-разрешимых групп, что было бы неизвестно в общем случае. Некоторые наброски см. у Гоу [1980] [2].

Относительно проблем (XI) и (XII) см. замечания в § 5 гл. IV.

§ 7. Неприводимые модули p-разрешимых групп

Следующий результат принадлежит Бергеру [1976], [1979].

Теорема 7.1. *Пусть поле F алгебраически замкнуто и группа G p-разрешима. Тогда любой неприводимый $F[G]$-модуль является алгебраическим.*

Если $\operatorname{char} F=p$ и G p-разрешима, то заключение теоремы 7.1 по-видимому также верно. Его мы «почти» докажем в следующем смысле.

Конечную простую группу G назовем группой *хорошего поведения*, *если для каждого простого $p\nmid|G|$ S_p-подгруппа группы автоморфизмов G циклическая.*

Основная цель настоящего параграфа — доказать следующую теорему.

Теорема 7.2. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле*, $\operatorname{char} F=p$, *G — такая p-разрешимая группа, что каждая простая группа, изоморфная факторгруппе некоторой подгруппы группы G, является группой хорошего поведения. Тогда любой неприводимый $F[G]$-модуль является алгебраическим.*

Каждая известная простая группа — группа хорошего поведения. Поэтому сразу после завершения классификации простых конечных групп по-видимому станет возможным доказать теорему 7.2 для всех p-разрешимых групп.

Приводимое здесь доказательство теоремы 7.2 такое же, как у Фейта [1980]. Оно в какой-то степени более просто, чем оригинальное доказательство Бергера. Мы сначала докажем некоторые пред-

---

[1] Доказательство Фонга содержит пробелы. Их устранил Вольф [1981*]. Глюк и Вольф [1985*] получили утвердительный ответ на вопрос (IX) для p-разрешимых групп, привлекая классификацию конечных простых групп. — *Примеч. пер.*

[2] По поводу продвижений в решении проблемы (X) для p-разрешимых групп см. Кнёрр [1984*], Глюк [1984*], Гресь [1987*]. — *Примеч. пер.*

варительные результаты. Среди них лемма 7.8 представляет независимый интерес, будучи связанной, хотя и не совпадающей, с частью результатов Дейда [1972]. Возможно, любопытным является то, что хотя (7.2) касается лишь p-разрешимых групп, его доказательство использует свойства групп, не являющихся p-разрешимыми.

Лемма 7.3. *Пусть q — степень простого числа, $q\equiv 3 \pmod 4$, $K=\mathbf{F}_q$, V — векторное пространство размерности $2n$ над K и f — невырожденная знакопеременная билинейная форма на V. Предположим, что $J\in \mathrm{Sp}(f)\cong \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, причем $J^2=-I$. Тогда существуют такие a, $b\in K$ и такое целое $m>1$, что если $y=aI+bJ$, то $y^{2m}=-I$ и $f^y=-f$, где $f^y(v, w)=f(vy, wy)$ для v, $w\in V$.*

Доказательство. Поскольку $q\equiv 3 \pmod 4$, то K-алгебра, порожденная J, изоморфна $\mathbf{F}_{q^2}$. Поэтому существуют такие c, $d\in K$, что если $x=cI+dJ$, то $x^{q+1}=I$. Так как $J^q=J^{-1}=-J$, то

$$-I=(cI+dJ)(cI+dJ^q)=(cI+dJ)(cI-dJ)=c^2I-d^2J^2=(c^2+d^2)I.$$

Значит, $c^2+d^2=-1$. Так как $J\in \mathrm{Sp}(f)$, то

$$f(v, wJ)=f(vJ, wJ^2)=-f(vJ, w),$$

и потому

$$f^x(v, w)=f(cv, cw)+f(cv, dwJ)+f(dvJ, cw)+f(dvJ, dwJ)=$$
$$=(c^2+d^2)f(v, w)+cd\{f(v, wJ)+f(vJ, w)\}=(c^2+d^2)f(v, w)=-f(v, w).$$

Поэтому $f^x=-f$. Обозначим через y 2-часть элемента x. Тогда $y^{2m}=-I$ для некоторого $m>1$, так как $q+1\equiv 0 \pmod 4$ и $f^y=-f$. □

Лемма 7.4. *Пусть p — простое число, q — степень нечетного простого числа, отличного от p, и $K=\mathbf{F}_q$. Пусть, далее, V — векторное пространство размерности $2n$ над K, f — невырожденная знакопеременная билинейная форма на V, P — некоторая S_p-подгруппа группы $\mathrm{Sp}(f)$. Предположим, что P действует неприводимо на V. Пусть $c\in K$, $c\neq 0$. Тогда верно одно из следующих утверждений.*

(i) *Существует такой $x\in \mathrm{GL}(V)$, что $f^x=cf$ и x коммутирует с каждым элементом из P. Далее, либо некоторая степень x равна cd^2I для некоторого такого $d\in K^*$, что $cd^2=1$, либо $c=1$ и $x=-I$.*

(ii) *$p=2$, $c\neq a^2$ для $a\in K$ и P действует абсолютно неприводимо на V.*

Доказательство. Если $c=a^2$ при $a\in K$, то $x=aI$ удовлетворяет (i). Поэтому можно предполагать, что $c\neq a^2$ для любого $a\in K$.

Если x удовлетворяет (i), то для $a\in K^*$, ax также удовлетворяет (i), если c заменить на ca^2. Поэтому результат достаточно доказать для любого фиксированного элемента c, не являющегося квадратом в K^*. Тем самым, можно предполагать, что $c^{2^t}=-1$ для некоторого $t\geqslant 0$. В частности, $c=-1$ при $q\equiv 3 \pmod 4$.

Положим $G=\mathrm{GL}(V)$. Предположим, что (ii) неверно. По лемме Шура, $C_G(P)\cong \mathbf{F}_{q^k}^*$, так как конечное тело является полем. Если $p\neq 2$, то k четно, поскольку $\dim V=2n$ четна. Если $p=2$, то, по предположению, P не может действовать абсолютно неприводимо,

и значит, k четно, так как $\varphi(2^m)$ является степенью числа 2. Поэтому, в любом случае, $C_G(P)$ содержит единственную циклическую подгруппу A порядка q^2-1, которая содержит все ненулевые скалярные матрицы.

Выберем $J\in A$ так, чтобы $J^2=cI$. Если $f^J=cf$, то $x=J$ удовлетворяет (i). Предположим, что $f^J\neq cf$. Тогда $g=cf-f^J\neq 0$. Очевидно, g является P-инвариантной знакопеременной билинейной формой. Поскольку P действует неприводимо, g невырождена. По определению, $g^J=-cg$. Тогда существует такой $z\in \mathrm{GL}(V)$, что $f^z=g$. Так как силовские подгруппы сопряжены, z можно выбрать так, чтобы $P^z=P$. Положим $J_0=J^z$. Тогда $J_0\in C_G(P)$ и, значит, $J_0\in A$. Поэтому, изменяя обозначения, можно предполагать, что $J\in A$, $J^2=cI$ и $f^J=-cf$.

Если $-1=a^2$ для некоторого $a\in K$, то $x=aJ$ удовлетворяет (i). Предположим, что $-1\neq a^2$ для всех $a\in K$. Тогда $q\equiv 3 \pmod 4$ и $c=-1$. Таким образом, $J^2=-I$ и $f^J=f$. Значит, $J\in \mathrm{Sp}(f)$. Пусть $x=y$ определен как в (7.3). Тогда x удовлетворяет (i). □

Лемма 7.5. *Пусть q — степень нечетного простого числа, $K=\mathbf{F}_q$, V — векторное пространство над K, f — невырожденная знакопеременная билинейная форма на V. Пусть, далее, $V=V_1\oplus V_2$, где $V_2=V_1^{\perp}$ и $\dim V_1=\dim V_2=2n$. Обозначим через f_i ограничение f на V_i, а через P_i S_2-подгруппу группы $\mathrm{Sp}(f_i)\cong \mathrm{Sp}_{2n}(q)$. Предположим, что P_i действует абсолютно неприводимо на V_i. Тогда P_1 можно отождествить с P_2. Положим $P=\{(y, y)\mid y\in P_1=P_2\}$. Тогда существует такой $x\in \mathrm{GL}(V)$, что $f^x=-f$, x коммутирует с каждым элементом из P и некоторая степень x равна $-d^2I$ для подходящего $d\in K$, такого, что $-d^2\neq 1$.*

Доказательство. Если $-1=a^2$ для некоторого $a\in K$, то результат следует из (7.4). Предположим, что $-1\neq a^2$ для любого $a\in K$. Значит, $q\equiv 3 \pmod 4$ и $-d^2\neq 1$ для всех $d\in K$. Отождествим V_1 с V_2 и f_1 с f_2. Определим линейное преобразование J пространства $V=V_1\oplus V_2$, полагая J: $(v_1, v_2)\to(-v_2, v_1)$. Легко видеть, что $J^2=-I$ и $f^J=f$. Кроме того, J коммутирует с каждым элементом из P. Если $x=y$ определить как в (7.3), то x обладает нужными свойствами. □

Лемма 7.6. *Пусть p — нечетное простое число. Положим $K=\mathbf{F}_2$ и обозначим через V векторное пространство над K, а через f — невырожденную квадратичную форму на V. Пусть P — такая p-группа, что $P\subseteq O(f)$. Предположим, что P действует неприводимо на V. Если $x\in Z(P)-\{1\}$, то $vx\neq v$ для всех $v\in V$, $v\neq 0$.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 7.7. *Пусть q — простое число, Q — экстраспециальная q-группа, $|Q|=q^{2n+1}$. Положим $Z=Z(Q)$ и $V=Q/Z$. Пусть $p\neq q$ — простое число, F — алгебраически замкнутое поле характеристики p.*

(i) *Положим $f(x, y)=[x, y]$. Тогда f определяет невырожденную знакопеременную билинейную форму на V со значениями в $Z\cong \mathbf{F}_q^*$. Если $q=2$, то $f(x)=x^2$ определяет невырожденную квадратическую форму на V. Обозначим* через $A(Q)$ *группу всех внешних*

автоморфизмов группы Q, а через $A_0(Q)$ — ее подгруппу, состоящую из всех тех автоморфизмов, которые оставляют неподвижным каждый элемент из Z. Тогда $A_0(Q) \lhd A(Q)$ и $A(Q)/A_0(Q) \cong \mathrm{Aut}(Z)$ — циклическая группа порядка $q-1$. Если $q \neq 2$, то $A_0(Q) \cong \mathrm{Sp}(f) \cong \cong \mathrm{Sp}_{2n}(q)$. Если $q=2$, то $A_0(Q) \cong O(f) \cong O_{2n}(2)$ является ортогональной группой. В любом случае подгруппа H группы Q абелева тогда и только тогда, когда образ H в V изотропен.

(ii) *Пусть p-группа P такова, что $P \subseteq A_0(Q)$, $G=QP$ — полупрямое произведение. Если λ — линейный характер группы Z, то (с точностью до изоморфизма) существует такой единственный неприводимый $F[G]$-модуль X_λ, что λ является конституэнтой характера модуля $(X_\lambda)_Z$. Кроме того, $(X_\lambda)_Q$ неприводим и каждый неприводимый $F[Q]$-модуль, не содержащий Z в своем ядре, изоморфен подходящему $(X_\lambda)_Q$. Если H — максимальная абелева подгруппа группы Q, то $H=H_0 \times Z$, $|H_0|=q^n$ и $\tilde{\lambda}^Q=(X_\lambda)_Q$, где $\tilde{\lambda}(hz)=\lambda(z)$ для $h \in H_0$.*

(iii) *Пусть Q_i, $i=1$, 2, — экстраспециальные группы, $Z_i=Z(Q_i)$. Тогда $Z_1 \cong Z_2 \cong Z$. Пусть $c \in K^*$ и λ_1, λ_2 — линейные характеры группы Z, причем $\lambda_1=\lambda_2^{-c}$. Положим $Q=Q_1 \times Q_2$ и $Z(c)=\{(z, z^c) \mid z \in Z\} \subseteq Z(Q)$. Тогда $X_{\lambda_1} \otimes X_{\lambda_2}$ — неприводимый $F[Q]$-модуль с ядром $Z(c)$. Кроме того, $Q/Z(c)$ экстраспециальна.*

Доказательство. (i) Хорошо известно.

(ii) Существование единственного характера Брауэра φ_λ такого $F[G]$-модуля, что λ является конституэнтой для $(\varphi_\lambda)_Z$, хорошо известно, так же как хорошо известны и другие свойства Q из формулировки. Поэтому $G=T(\varphi_\lambda)$. Существование и единственность X_λ теперь следует из (III.3.16).

(iii) Непосредственная проверка. □

Лемма 7.8. *Пусть P, Q, $G=PQ$, V, Z, $Z(c)$ определены как в (7.7). Обозначим через λ и μ линейные характеры группы Z, причем $\lambda \neq 1$ и $\mu \neq 1$. Справедливо одно из следующих утверждений.*

(i) *Пусть $\hat{\lambda}_\mu$ — характер группы PZ, определенный равенством $\widehat{\lambda\mu}(xz)=\lambda\mu(z)$, где $x \in P$, $z \in Z$. Тогда $X_\lambda \otimes X_\mu=(\widehat{\lambda\mu})^G$.*

(ii) *$p=2$. Пусть $Q_i=Q$, $i=1$, 2, $Q_0=(Q_1 \times Q_2)/Z(-1)$, $P_0=\{(x, x) \mid x \in P\}$, $G_0=P_0Q_0$. Пусть $X_{\lambda^2 0}$ — такой неприводимый $F[G_0]$-модуль, что $(X_{\lambda^2 0})_{Q_0}=(X_\lambda)_{Q_1} \otimes (X_\lambda)_{Q_2}$, а $\hat{\lambda}^4$ — такой характер группы $P_0Z(Q_0)/Z(-1)$, что $\hat{\lambda}^4((xz_1), xz_2))=\lambda^2(z_1z_2)$ для $x \in P$, $z_i \in Z$. Тогда $X_{\lambda^2 0} \otimes X_{\lambda^2 0}=(\hat{\lambda}^4)^{G_0}$.*

Доказательство. Индукция по $|Q|$. Без ограничения общности можно считать, что P является S_p-подгруппой группы $A_0(Q)$.

Предположим, что V содержит собственное неизотропное P-инвариантное подпространство. Пусть W — минимальное среди всех таких подпространств. Тогда $W=W \cap W^\perp \oplus W_0$ для некоторого такого P-инвариантного пространства $W_0 \neq (0)$, что $W_0 \cap W^\perp=(0)$. Минимальность W влечет $W=W_0$. Поэтому, если $W=W_1$, то $V=W_1 \oplus W_2$, где каждое из W_i P-инвариантно, $W_1 \neq (0)$ и $W_1^\perp=W_2$. Так как P является S_p-подгруппой группы $A_0(Q)$, то $P=P_1 \times P_2$,

где P_i действует тривиально на W_j при $i\neq j$. Существуют такие экстраспециальные группы H_i, что $H_i/Z_i\cong W_i$, $i=1, 2$, где $Z_i=Z(H_i)$, причем $(P_1H_1\times P_2H_2)/Z_0=PQ$ для подходящей подгруппы Z_0 группы $Z_1\times Z_2$. Значит, $X_\lambda=X_{\lambda_1}\otimes X_{\lambda_2}$ и $X_\mu=X_{\mu_1}\otimes X_{\mu_2}$, где X_{λ_i}, X_{μ_i} — неприводимые $F[P_iH_i]$-модули, не содержащие Z_i в своих ядрах. Заметим, что если $p=2$ и (i) выполнен для группы P_iH_i, то для нее выполнен и (ii). Следовательно, по индукции, можно предполагать, что либо (i), либо (ii) выполнен для групп P_iH_i, $i=1, 2$. Поэтому, либо $X_{\lambda_i}\otimes X_{\mu_i}=(\widehat{\lambda\mu})^{P_iH_i}$ при $i=1$ или 2, либо $X_{\lambda_i^0}\otimes X_{\lambda_i^0}=(\hat{\lambda}^4)^{G_{i0}}$ при $i=1$ или 2. Так как $PH_1Z_2\cap PH_2Z_1=PZ_1Z_2$ и $P_0H_{10}Z(H_{20})\cap P_0H_{20}Z(H_{10})=P_0Z(H_{10}\times H_{20})$, то из теоремы о тензорном произведении следует, что $(\widehat{\lambda\mu})^{P_1H_1}\otimes(\widehat{\lambda\mu})^{P_2H_2}=(\widehat{\lambda\mu})^G$ и $(\hat{\lambda}^4)^{G_{10}}\otimes(\hat{\lambda}^4)^{G_{20}}=(\hat{\lambda}^4)^G$. Значит, результат доказан в каждом из случаев. Следовательно, можно предполагать, что у V нет собственных неизотропных P-инвариантных подпространств.

Предположим, что $(0)\subset_{\neq} V_1\subset_{\neq} V$, где подпространство V_1 P-инвариантно. Тогда $V_1\subseteq V_1^\perp$. Значит, $V_1^\perp=V_1\oplus V_0$, где подпространство V_0 P-инвариантно. Так как $V_0\cap V^\perp=(0)$ и V_0 изотропно, то $V_0=(0)$. Значит, V_1 — максимальное изотропное подпространство пространства V. Кроме того, $V=V_1\oplus V_2$, где V_2 — максимальное изотропное подпространство, являющееся P-инвариантным. Пусть M_i — полный прообраз V_i в Q. Тогда группа M_i абелева. Кроме того, $M_i=M_{i0}\times Z$, где P нормализует M_{i0}. Пусть $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ — характеры групп PM_1 и PM_2 соответственно, содержащие соответственно PM_{10} и PM_{20} в своих ядрах, причем $\tilde{\lambda}(xz)=\lambda(z)$, $x\in PM_{10}$, $z\in Z$ и $\tilde{\mu}(xz)=\mu(z)$, $x\in PM_{20}$, $z\in Z$. Тогда $\tilde{\lambda}^G\cong X_\lambda$ и $\tilde{\mu}^G\cong X_\mu$. Так как $PM_1\cap PM_2=PZ$, то из теоремы Макки о тензорном произведении (II.2.10) следует, что

$$X_\lambda\otimes X_\mu\cong\tilde{\lambda}^G\otimes\tilde{\mu}^G\cong(\widehat{\lambda\mu})^G.$$

Значит, выполнено (i). Поэтому результат достаточно доказать в случае, когда P действует неприводимо на V.

Положим $\lambda=\mu^{-c}$. Рассмотрим два случая.

Случай (I). Существует такой автоморфизм σ группы G, что $x^\sigma=x$ для всех $x\in P$, $Q^\sigma=Q$, $v^\sigma=v$, $v\in V$, $v\neq 0$, и $z^\sigma=z^c$, $z\in Z$.

Случай (II). Условия случая (I) не выполнены.

Предположим, что справедлив случай (II). В силу (7.4) и (7.6), $p=2$, $c\neq a^2$ при $a\in K$ и P действует абсолютно неприводимо на V. Пусть $c=-1$, P_0, Q_0, G_0 определены как в формулировке (ii). В силу (7.5), существует такой автоморфизм σ группы G_0, что $x^\sigma=x$ для всех $x\in P_0$, $Q_0^\sigma=Q$, $v^\sigma\neq v$ при $v\in V_0$, $v\neq 0$, где $V_0=Q_0/Z(Q_0)$ и $z^\sigma=z^{-1}$, $z\in Z$.

В случае (I) изменим обозначения, полагая $P=P_0$, $Q=Q_0$, $G=G_0$, $V=V_0$, $X_\lambda=X_{\lambda 0}$, $X_\mu=X_{\mu 0}$. Тогда оба случая можно рассматривать одновременно.

Положим $H=P^{(0)}(Q_0\times Q_0)$, где $P^{(0)}=\{(x, x)\mid x\in P_0\}$. Рассмотрим $Q^{(0)}=\{(y, y)\mid y\in Q_0\}$ и $Q^{(\sigma)}=\{(y, y^\sigma)\mid y\in Q_0\}$. Тогда $P^{(0)}$ нормализует как $Q^{(0)}$, так и $Q^{(\sigma)}$. Кроме того, $H/Z(c)$ экстраспециальна, $Z(c)\subseteq Q^{(\sigma)}$ и $Q^{(\sigma)}/Z(c)$ абелева. Поскольку $H\subseteq P_0Q_0\times P_0Q_0$, существует неприводимый $F[H]$-модуль $Y=(X_{\lambda 0}\otimes X_{\mu 0})_H$ с ядром $Z(c)$.

Пусть $\widehat{\lambda\mu}$ — линейный характер группы $P^{(0)}Q^{(\sigma)}Z(H)$ с $P^{(0)}Q^{(\sigma)}$ в своем ядре и $\widehat{\lambda\mu}(z_1, z_2)=\lambda(z_1)\mu(z_2)=\mu(z_1^{-c}z_2)$. Тогда $(\widehat{\lambda\mu}^H)_{Q_0\times Q_0}\cong$ $\cong Y_{Q_0\times Q_0}$, и, по (7.7), $\widehat{\lambda\mu}^H\cong Y$. По определению, $Q^{(0)}\cap Q^{(\sigma)}\subseteq Z(H)$. Разложение Макки (II.2.9) дает

$$(X_{\lambda_0}\otimes X_{\mu_0})_{Q^{(0)}P^{(0)}Z(H)}=Y_{Q^{(0)}P^{(0)}Z(H)}=(\widehat{\lambda\mu}^H)_{Q^{(0)}P^{(0)}Z(H)}=(\widehat{\lambda\mu}_{P^{(0)}Z(H)})^{Q^{(0)}P^{(0)}Z(H)}.$$

Поскольку $Q^{(0)}P^{(0)}Z(H)/Z(c)\cong G_0$, результат доказан. □

Лемма 7.9. *Пусть $p\neq q$ — простые числа, Q — экстраспециальная q-группа, P — такая p-группа, что $P\subseteq A_0(Q)$. Обозначим через F алгебраически замкнутое поле характеристики p, а через V — неприводимый $F[PQ]$-модуль, не содержащий $Z(Q)$ в своем ядре. Тогда V является алгебраическим.*

Доказательство. В силу (II.5.3) и (7.8), либо $V\otimes V$, либо $V\otimes V\otimes V\otimes V$ является алгебраическим. По определению, модуль V алгебраический. □

Суть (7.8) состоит в том, что если V — неприводимый $F[PQ]$-модуль, то эндо-перестановочный модуль V_P обладает тем свойством, что $V_P\cong V_P^*$ при нечетном p и $V^2\cong(V_P^2)^*$ при $p=2$. Этого достаточно для доказательства леммы 7.9, которая существенно используется в доказательстве теоремы 7.2.

Доказательство теоремы 7.2. Пусть W — неприводимый $F[G]$-модуль, φ — характер Брауэра, определенный модулем W. Можно предполагать, что φ точный, и потому $O_p(G)=\langle 1\rangle$. Доказательство проведем индукцией по $\varphi(1)=\dim_F W$.

Если φ индуцирован характером φ_0 собственной подгруппы, то φ_0 алгебраичен по индукции, и тогда, по (II.5.3), φ также алгебраичен, и можно предполагать, что φ не индуцирован характером собственной подгруппы. Пусть H — минимальная нормальная нецентральная подгруппа группы G, ζ — неприводимая конституэнта характера φ_H. Так как G p-разрешима, H является p'-группой. Поэтому $G=T(\zeta)$ является группой инерции характера ζ. Поскольку H нецентральна, то $\zeta(1)>1$. Значит, по (1.1), $W\cong\tilde{V}\otimes\tilde{W}$, где $\zeta(1)=\dim_F\tilde{V}$. Если $\dim_F\tilde{V}<\varphi(1)$, то $\dim_F\tilde{W}<\varphi(1)$, и тогда $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$ алгебраичны по индукции. Согласно (II.5.2), W также алгебраичен. Таким образом, $\varphi(1)=\zeta(1)$, и потому V_H неприводим. Следовательно, если P является S_p-подгруппой группы G, то V_{HP} неприводим. Кроме того, $V\mid(V_{HP})^G$, и тогда, в силу (II.5.3), достаточно доказать алгебраичность V_{HP}. Поэтому, изменяя обозначения, можно предполагать, что $G=HP$. Пусть $P\subseteq G_0\lhd G$. Согласно (II.5.3), результат достаточно доказать для G_0, поскольку $V\mid(V_{G_0})^G$.

Рассмотрим два случая в зависимости от того, разрешима H или нет.

Предположим сначала, что H разрешима. Из минимальности H следует, что H является экстраспециальной q-группой для некоторого $q \neq p$. Тогда, по (7.9), модуль W алгебраический.

Предположим теперь, что H неразрешима. Положим $Z = Z(G)$. Так как H минимальна, то $Z \subseteq H'$ и $H/Z \cong M_1 \times \ldots \times M_k$, где $M_i \cong M$ для всех i, M — подходящая простая группа. Тогда $\{M_i\}$ — множество всех сопряженных с M подгрупп, а P действует на $\{M_i\}$ как транзитивная группа перестановок. Существует такая группа H_0, удовлетворяющая условиям $Z(H_0) \subseteq H_0'$ и $H_0/Z(H_0) \cong M$, что H является гомоморфным образом группы $H_1 \times \ldots \times H_k$, где $H_i \cong H_0$ для всех i. Тогда G является гомоморфным образом группы $\tilde{G} = P(H_1 \times \ldots \times H_k)$ и P переставляет множество $\{H_i\}$ транзитивно. Поэтому $\varphi_H = \zeta = \prod_{i=1}^{k} \zeta_i$, где ζ_i — неприводимый характер группы H, ядро которого содержит все H_j при $j \neq i$. Значит, $|G : T(\zeta_1)| = k$. В силу (III.3.16), существует такой неприводимый характер Брауэра φ_1 группы $T(\zeta_1)$, для которого $(\varphi_1)_H = \zeta_1$. Поэтому $\tilde{\varphi}_1^{\tilde{G}} = \varphi$. Так как φ примитивен, то $T(\zeta_1) = \tilde{G}$. Следовательно, $k = 1$ и H/Z — простая группа. Так как H/Z — группа хорошего поведения, то S_p-подгруппа группы G циклическая, и потому существует лишь конечное с точностью до изоморфизма множество неразложимых $F[H]$-модулей. По (II.5.1), модуль W является алгебраическим. □

§ 8. Изоморфные блоки

В этом параграфе будем применять следующие обозначения.

G — конечная группа. Если $x \in G$, то $k(x) = |G : C_G(x)|$.

K — конечное расширение поля $\mathbf{Q}_p$, являющееся полем разложения для G и всех ее подгрупп.

R — кольцо целых поля K, π — простой элемент из R.

Будем также использовать следующие обозначения и соглашения.

Предположения 8.1. (i) *P — такая S_p-подгруппа группы G, что $P \subseteq \hat{G} \lhd G$ и $G = \hat{G} C_G(P)$.*

(ii) *B и $\hat{B}$ — главные блоки алгебр $R[G]$ и $R[\hat{G}]$ соответственно.*

(iii) *A, $\hat{A}$ — идеалы алгебр $R[G]$ и $R[\hat{G}]$, отвечающие B и $\hat{B}$ соответственно.*

Цель параграфа — доказать следующий результат.

Теорема 8.2. *Предположим, что выполнено* (8.2). *Тогда алгебры A и $\hat{A}$ изоморфны.*

Алперин [1976d] показал, что $\bar{A} \cong \bar{\hat{A}}$, если $G/\hat{G}$ разрешима.

Доказательство теоремы 8.2 в полной общности принадлежит Дейду [1977]. Оно основано на его же глубокой работе по теории Клиффорда. См., например, Дейд [1971a]. Альтернативное доказательство получено Шмидом [1980]. В приводимом здесь доказательстве мы распространим подход Алперина на более общую ситуацию. Докажем сначала серию лемм.

До конца параграфа будем предполагать, что выполнено (8.1).

Лемма 8.3. *Пусть H — подгруппа группы G, причем $\hat{G}\subseteq H$, χ — такой неприводимый характер из B, что χ_H неприводим. Тогда χ_H лежит в главном блоке алгебры $R[H]$.*

Доказательство. Для $x\in H$ положим $k_0(x)=|H:C_H(x)$. Так как S_p-подгруппа группы $C_G(x)$ лежит в $\hat{G}$, то она лежит в $C_H(x)$. Значит, $k(x)$ и $k_0(x)$ делятся на одну и ту же степень числа p. Поэтому $k_0(x)/k(x)\not\equiv 0 \pmod p$. Поскольку χ лежит в B, из (IV.4.2) следует, что

$$\frac{\chi(x)k_0(x)}{\chi(1)}\equiv\frac{\chi(x)k(x)}{\chi(1)}\frac{k_0(x)}{k(x)}\equiv k(x)\frac{k_0(x)}{k(x)}\equiv k_0(x) \pmod\pi.$$

Следовательно, χ_H лежит в главном блоке алгебры $R[H]$. □

Лемма 8.4. *Пусть $\hat{\chi}$ — такой неприводимый характер из $\hat{B}$, что $T(\hat{\chi})=G$, а χ — такой неприводимый характер из B, что $\hat{\chi}\subseteq\chi_{\hat{G}}$. Тогда $\chi_{\hat{G}}=\hat{\chi}$.*

Доказательство. Применим (1.1) в случае $\operatorname{char}F=0$, $H=\hat{G}$. Тогда $\chi=\theta\eta$, где θ — характер группы $\tilde{G}$, причем $\theta_{\hat{G}}=\hat{\chi}$, если $\hat{G}$ отождествить с $\tilde{\tilde{G}}\lhd\tilde{G}$. Далее, η является неприводимым характером группы $\tilde{G}/\hat{G}$ и $(\tilde{G}/\hat{G})/Z\cong G/\hat{G}$, где Z — центр группы $\tilde{G}/\hat{G}$.

Пусть $y\in\tilde{G}/\hat{G}$ и $\tilde{y}$ — образ y в $G/\hat{G}$. В силу (8.1), существует такой $x\in C_G(P)$, что $\tilde{y}=\tilde{x}$, где $\tilde{x}$ — образ x в $G/\hat{G}$. Тогда $\chi(x)=\theta(y_0)\eta(y)$ для некоторого $y_0\in\tilde{G}$. Поскольку $\chi\in B$, то

$$\frac{\chi(x)k(x)}{\chi(1)}\equiv k(x)\not\equiv 0 \pmod\pi.$$

Значит, $\eta(y)\not\equiv 0$. Так как η неприводим, а y — произвольный элемент из $\tilde{G}/\hat{G}$, то $\eta(1)=1$. Следовательно, $\chi(1)=\theta(1)=\hat{\chi}(1)$. □

Лемма 8.5. *Пусть S, $\hat{S}$ — множества всех неприводимых характеров в B и $\hat{B}$ соответственно. Для $\chi\in S$ положим $r(\chi)=\chi_{\hat{G}}$. Тогда r — биективное отображение S на $\hat{S}$.*

Доказательство. Индукция по $|G:\hat{G}|$. Если $|G:\hat{G}|=1$, результат очевиден. По индукции можно предполагать, что $G/\hat{G}$ — простая группа.

Покажем сначала, что r отображает S на $\hat{S}$.

Предположим, что $|G:\hat{G}|=q$ — простое число. Пусть $\chi\in S$ и $\hat{\chi}$ — неприводимая конституэнта в $\chi_{\hat{G}}$. Так как q простое, то либо $\chi_{\hat{G}}=\hat{\chi}$, либо $\chi=\hat{\chi}^G$. Поскольку $\chi\in B$, из (IV.4.2) следует, что если $x\in C_G(P)$, то

$$\frac{\chi(x)k(x)}{\chi(1)}\equiv k(x)\not\equiv 0 \pmod\pi.$$

Значит, $\chi(x)\not\equiv 0$, и потому $\chi\neq\hat{\chi}^G$, так как $G=\hat{G}C_G(P)$. Следовательно, $\chi_{\hat{G}}=\hat{\chi}$. В силу (8.3), $\chi_{\hat{G}}=\hat{\chi}\in\hat{S}$. Обратно, если $\hat{\chi}\in\hat{S}$, то, по (V.2.3), $\hat{\chi}$ является конституэнтой в $\chi_{\hat{G}}$ для некоторого $\chi\in S$. Значит, $\hat{\chi}=\chi_{\hat{G}}$, и в этом случае r отображает S на $\hat{S}$.

Предположим, что $G/\hat{G}$ — нециклическая простая группа. Пусть $\hat{\chi}\in\hat{S}$, q — простое число, Q — некоторая S_q-подгруппа группы G. По индукции, $Q\hat{G}$ является группой инерции характера $\hat{\chi}$ в $Q\hat{G}$ и, значит, $Q\subseteq T(\hat{\chi})$. Так как q выбрано произвольно, то $G=T(\hat{\chi})$. В силу (V.2.3), $\hat{\chi}\subseteq\chi_{\hat{G}}$ для некоторого $\chi\in S$. Значит, по (8.4), $\hat{\chi}=\chi_{\hat{G}}$. Обратно, если $\chi\in S$, то, согласно (V.2.3), существует такой $\hat{\chi}\in\hat{S}$, что $\hat{\chi}\subseteq\chi_{\hat{G}}$. В силу (8.4), $\chi_{\hat{G}}=\hat{\chi}$. Итак, r отображает S на $\hat{S}$ в каждом из случаев.

Осталось показать инъективность r. Пусть $\chi\in S$, причем $\hat{\chi}=\chi_{\hat{G}}$. Обозначим через ρ характер регулярного представления группы $G/\hat{G}$. Тогда $\hat{\chi}^G=\chi\rho$. Поэтому, если $\theta\in S$, причем $\theta_{\hat{G}}=\hat{\chi}=\chi_{\hat{G}}$, то $\theta\subseteq\hat{\chi}^G$ и, значит, $\theta=\chi\lambda$ для некоторого неприводимого характера λ группы $G/\hat{G}$. Так как $\theta(1)=\chi(1)$, то $\lambda(1)=1$. Поэтому, если $x\in C_G(P)$, то

$$\frac{k(x)\chi(x)\lambda(x)}{\chi(1)}\equiv\frac{k(x)\theta(x)}{\chi(1)}\equiv k(x)\equiv\frac{k(x)\chi(x)}{\chi(1)}\pmod{\pi}.$$

Значит, $\lambda(x)\equiv 1\pmod{\pi}$. Так как $G=\hat{G}C_G(P)$, то $\lambda=1_G$, $\chi=\theta$. □

Лемма 8.6. *Пусть S_0, $\hat{S}_0$ — множества неприводимых характеров Брауэра, D, $\hat{D}$ — матрицы разложения, а C, $\hat{C}$ — матрицы Картана блоков B, $\hat{B}$ соответственно. Если $\varphi\in S_0$, положим $r_0(\varphi)=\varphi_{\hat{G}}$. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *r_0 — биективное отображение S_0 на $\hat{S}_0$.*

(ii) *Пусть r определено как в (8.5), $r(\chi_u)=\hat{\chi}_u$, $\chi_u\in S$, и пусть $r_0(\varphi_i)=\hat{\varphi}_i$, где $\varphi_i\in S_0$. Тогда $D=\hat{D}$ и $C=\hat{C}$.*

Доказательство. Согласно (8.5), (ii) будет доказано, если будет доказано (i). Докажем (i) индукцией по $|G:\hat{G}|$. Если $|G:\hat{G}|=1$, результат очевиден. По индукции можно предполагать, что $G/\hat{G}$ — простая группа.

Если $\varphi\in S_0$, то $\varphi_{\hat{G}}$ является неприводимым характером Брауэра, согласно (8.5) и (IV.4.33). В силу (IV.4.10), $\varphi_{\hat{G}}\in\hat{S}_0$. Обратно, если $\hat{\varphi}\in\hat{S}_0$, то существует такой $\varphi\in S_0$, что $\hat{\varphi}\subseteq\varphi_{\hat{G}}$ (см. (IV.4.10)). Значит, рассуждая как в доказательстве предыдущего утверждения, имеем $\hat{\varphi}=\varphi_{\hat{G}}$. Поэтому r_0 отображает S_0 на $\hat{S}_0$. Осталось доказать инъективность r_0.

Предположим, что $|G:\hat{G}|=q$ — простое число. Пусть φ_1, $\varphi\in S_0$, причем $\varphi_{\hat{G}}=(\varphi_1)_{\hat{G}}$. В силу (III.2.14), существует такой линейный характер λ группы $G/\hat{G}$, что $\varphi_1=\varphi\lambda$. В силу (IV.3.12), $\varphi(x)=\sum_{\chi_u\in S}a_u\chi_u(x)$ для всех p'-элементов x из G. Значит, $\varphi\lambda(x)=\sum_{\chi_u\in S}a_u\chi_u\lambda(x)$ для всех p'-элементов x из G. Поскольку $\chi_{\hat{G}}=\chi\lambda_{\hat{G}}$ для всех $\chi\in S$, из (8.5) следует, что $\chi_u\lambda\notin B$, иначе $\lambda=1_G$. Так как $\varphi\lambda\in S_0$, то $\lambda=1_G$ и $\varphi\lambda=\varphi$. Следовательно, в рассматриваемом случае r_0 инъективно.

Предположим, что $G/\hat{G}$ — нециклическая простая группа. Пусть $x\in G$. Если $\chi\in S$, то $\chi_{\langle x,\hat{G}\rangle}$ неприводим и, по (8.3), $\chi_{\langle x,\hat{G}\rangle}$ лежит в главном блоке группы $\langle x,\hat{G}\rangle$. Таким образом, если $\varphi\in S_0$, то из (IV.3.12) следует, что $\varphi_{\langle x,\hat{G}\rangle}$ лежит в главном блоке группы $\langle x,\hat{G}\rangle$. Предположим, что φ_1, $\varphi\in S_0$, причем $(\varphi_1)_{\hat{G}}=\varphi_{\hat{G}}$. Поскольку

$(\varphi_1)_{\langle x, \hat{G}\rangle}$ и $\varphi_{\langle x, \hat{G}\rangle}$ оба лежат в главном блоке группы $\langle x, \hat{G}\rangle$, по индукции следует, что $(\varphi_1)_{\langle x, \hat{G}\rangle} = \varphi_{\langle x, \hat{G}\rangle}$. В частности, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ для любого p'-элемента $x \in G$. Значит, $\varphi_1 = \varphi$ и r_0 инъективно в каждом из случаев. □

Лемма 8.7. *Пусть U — проективный $R[G]$-модуль из B, $E = \mathrm{End}_{R[G]}(U)$, $\hat{E} = \mathrm{End}_{R[\hat{G}]}(U_{\hat{G}})$. Пусть $f: E \to \hat{E}$ определено как ограничение. Тогда f — изоморфизм алгебры E на $\hat{E}$.*

Доказательство. Очевидно, f — мономорфизм алгебр. Осталось показать, что f эпиморфизм. Предположим, что $h \in E$, $a \in R$, причем $a^{-1}h$ является $R[\hat{G}]$-эндоморфизмом модуля U. Тогда $a^{-1}h \mathrm{End}_R(U) \cap \mathrm{End}_{K[G]}(U_K) = E$. Значит, $f(E)$ — чистый подмодуль R-модуля $\hat{E}$. Поэтому достаточно показать, что $\mathrm{rank}_R E = \mathrm{rank}_R \hat{E}$.

Пусть U_i, U_j — неразложимые проективные $R[G]$-модули из B. В силу (8.5),

$$\mathrm{rank}_R \mathrm{Hom}_{R[G]}(U_i, U_j) = \mathrm{rank}_R \mathrm{Hom}_{R[\hat{G}]}((U_i)_{\hat{G}}, (U_j)_{\hat{G}}).$$

Поскольку U является прямой суммой неразложимых проективных $R[G]$-модулей из B, $\mathrm{rank}_R E = \mathrm{rank}_R \hat{E}$. □

Доказательство теоремы 8.2. Поскольку A — алгебра с единицей, она антиизоморфна кольцу эндоморфизмов $R[G]$-модуля A. Аналогично, $\hat{A}$ антиизоморфна кольцу эндоморфизмов $F[\hat{G}]$-модуля $\hat{A}$. В силу 8.7, достаточно показать, что $A_{\hat{G}} \cong \hat{A}$ (изоморфизм $F[\hat{G}]$-модулей).

Пусть $\{\varphi_i\}$ — множество всех неприводимых характеров Брауэра из B. В силу (8.6), $\{\hat{\varphi}_i\}$ — множество всех неприводимых характеров Брауэра из $\hat{B}$, где $\hat{\varphi}_i = (\varphi_i)_{\hat{G}}$. Пусть U_i — проективный неразложимый $R[G]$-модуль, соответствующий φ_i. Так как, по (8.6), $C = \hat{C}$, то $(U_i)_{\hat{G}}$ является неразложимым проективным $R[\hat{G}]$-модулем, соответствующим $\hat{\varphi}_i$. Значит,

$$A_{\hat{G}} \cong \oplus \varphi_i(1)(U_i)_{\hat{G}} = \oplus \hat{\varphi}_i(1)(U_i)_{\hat{G}} \cong \hat{A}. \quad \square$$

ГЛАВА XI

§ 1. Аналог теоремы Жордана

Одним из самых старых результатов теории групп является следующая теорема.

Теорема 1.1 (Жордан). *Существует целочисленная функция $J(n)$, определенная на множестве натуральных чисел, со следующим свойством. Если конечная группа G имеет точное комплексное представление степени n, то G обладает нормальной абелевой подгруппой A индекса $|G:A|<J(n)$.*

Известно несколько доказательств этой теоремы, см., например, доказательство и ссылки на другие доказательства у Кэртиса и Райнера [1962], теорема 36.13.

Из теоремы Жордана сразу следует аналогичное утверждение, если поле комплексных чисел заменить любым полем, характеристика которого не делит $|G|$. Однако результат неверен для полей, чья характеристика делит $|G|$. Например, пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики $p>0$ и $G_m=\mathrm{SL}_2(p^m)$. Каждая группа G_m имеет точное F-представление степени 2, но нормальная абелева подгруппа в G_m имеет порядок не выше 2, хотя $|G_m|$ может быть сколь угодно большим.

Этот параграф содержит следующий аналог теоремы 1.1, о котором первым высказал предположение Кегель.

Теорема 1.2 (Брауэр и Фейт [1966]). *Пусть p — простое число. Существует такая целочисленная функция $f(m, n)=f_p(m, n)$, что выполняется следующее. Пусть F — поле характеристики p и G — конечная группа, имеющая точное F-представление степени n. Пусть порядок S_p-подгруппы из G равен p^m. Тогда G имеет нормальную абелеву подгруппу A индекса $|G:A|<f(m, n)$.*

Айзекс и Пассман [1964] использовали теорему Жордана для доказательства теоремы о том, что если степень любого неприводимого комплексного представления группы G ограничена некоторым натуральным числом n, то заключение теоремы 1.1 имеет место (причем функция отличается от $J(n)$). Подобным образом Дж. Ф. Хамфри [1972] использовал (1.2), чтобы доказать аналогичный результат в характеристике p. Близкий результат см. Хамфри [1976].

Разные доказательства теоремы Жордана (1.1) дают различные значения для $J(n)$. По-видимому, ни одно из них не приближается к наилучшему значению. Так как для доказательства (1.2) требуются (1.1) и некоторые довольно грубые оценки, то значение $f(m, n)$, которое можно извлечь из приведенного доказательства (1.2), по всей вероятности, также далеко от наилучшего. Таким образом, (1.1) и (1.2) — качественные результаты, не доставляющие полезных границ.

Доказательство (1.2) будет проведено в виде последовательности лемм. Без ограничения общности можно предполагать поле F в (1.2) алгебраически замкнутым.

Для произвольной группы G символ $L_1(G)$ обозначает $F[G]$-модуль, которому отвечает главный характер Брауэра, а $B_1(G)$ — главный p-блок.

Если G — конечная группа и P — некоторая S_p-подгруппа из G, то центр $Z(P)$ является S_p-подгруппой централизатора $C_G(P)$, который, по теореме Бернсайда о перемещении, является прямым произведением своих p- и p'-подгрупп. Таким образом, $PC_G(P)=P\times H$, где H — некоторая p'-группа.

Предположим, что V — неразложимый $F[G]$-модуль, причем $\dim_F V\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Тогда P является вертексом модуля V. Пусть $\tilde{V}$ обозначает $F[N_G(P)]$-модуль, отвечающий V при соответствии Грина.

Ядро доказательства (1.2) содержится в следующем результате.

Лемма 1.3. *Пусть V — неприводимый $F[G]$-модуль, $n=\dim_F V>1$. Тогда справедливо по крайней мере одно из утверждений.*

(i) *G имеет нормальную подгруппу индекса p.*

(ii) *Существует неприводимая конституэнта L модуля $V^*\otimes V\otimes V^*\otimes V$, принадлежащая $B_1(G)$ и не изоморфная $L_1(G)$.*

(iii) *Пусть P — некоторая S_p-подгруппа из G и $N=N_G(P)$. Найдется такая неприводимая конституэнта L модуля $V^*\otimes V$, что $\dim_F L\not\equiv 0 \pmod p$, $L\not\cong L_1(G)$ и если H_0 лежит в ядре $\tilde{L}_H$, то $|H:H_0|<J(n)$, где $J(n)$ определено в* (1.1).

Доказательство. Допустим, что G не удовлетворяет ни (i), ни (ii). Пусть $L_1=L_1(G)$, L_2, ..., L_s — различные неприводимые конституэнты в $V^*\otimes V$.

Рассмотрим $F[G]$-модуль W, все неприводимые конституэнты которого являются конституэнтами в $V^*\otimes V\otimes V^*\otimes V$. Мы покажем, что кратность $L_1(G)$ в W равна $\dim_F \mathrm{Inv}_G W$. Очевидно, можно считать W неразложимым. Если W не принадлежит $B_1(G)$, результат тривиален. Предположим, что W принадлежит $B_1(G)$. Так как возможность (ii) исключена, любой композиционный фактор в W изоморфен $L_1(G)$. Если x является p'-элементом из G, то $W_{\langle x\rangle}$ вполне приводим. Поэтому x лежит в ядре W. Поскольку G не имеет нормальных подгрупп индекса p, G содержится в ядре W. Следовательно, $\dim_F W=1$, ибо W неразложим, и результат доказан. Это факт будет применен к нескольким модулям.

Пусть $W=L_i\otimes L_j$, $1\leqslant i,j\leqslant s$, тогда $\mathrm{Inv}_G W\cong \mathrm{Hom}_{F[G]}(L_i, L_j)$. Если $i=j$, то по лемме Шура $\dim_F \mathrm{Inv}_G W=1$. Таким образом, по (III.2.2) и предыдущему абзацу, $\dim_F L_i\not\equiv 0 \pmod p$. $1\leqslant i\leqslant s$. При $i\neq j$, по лемме Шура, $\mathrm{Inv}_G W=(0)$. Поскольку (ii) исключено, то ни одна неприводимая конституэнта модуля W не принадлежит $B_1(G)$. Следовательно, в силу (IV.4.14), $L_1, \ldots, L_s$ лежат в s различных p-блоках.

Пусть Y — неразложимое прямое слагаемое модуля $V^*\otimes V$. Так как все неприводимые конституэнты в Y лежат в одном p-блоке, то из предыдущего абзаца следует, что все неприводимые конституэнты изоморфны L_i для некоторого i. Пусть b — длина композиционного ряда в Y, тогда $L_1(G)$ входит в $L_i^*\otimes Y$ с кратностью b. Поскольку любая неприводимая конституэнта модуля $L_i^*\otimes Y$ является конституэнтой в $L_i^*\otimes L_i$, то и в $V^*\otimes V\otimes V^*\otimes V$, следовательно, $b=\dim_F \mathrm{Hom}_{F[G]}(L_i, Y)$. Пусть Y_0 — цоколь модуля Y и b_0 — длина композиционного ряда в Y_0. Предыдущее рассуждение применительно к Y_0 показывает, что $b_0=\dim_F \mathrm{Hom}_{F[G]}(L_i, Y_0)$. Однако $\mathrm{Hom}_{F[G]}(L_i, Y)\cong \mathrm{Hom}_{F[G]}(L_i, Y_0)$. Итак, $b=b_0$, и, значит, $Y=Y_0$. Поскольку Y неразложим, это влечет $Y\cong L_i$. Следовательно, модуль $V^*\otimes V$ вполне приводим. Пусть

$$V^*\otimes V\cong \bigoplus_{i=1}^{s} a_i L_i. \tag{1.4}$$

По лемме Шура, $a_1=1$, значит, ввиду (III.2.2), $\dim_F V\not\equiv 0 \pmod p$. Таким образом, P является вертексом модуля V. Поэтому из (III.5.7), (V.6.2) и (1.4) следует, что

$$\tilde V^*\otimes \tilde V\cong \bigoplus_{i=1}^{s} a_i \tilde L_i\oplus S, \tag{1.5}$$

где каждое неразложимое прямое слагаемое модуля S имеет вертекс, строго содержащийся в P. Согласно (III.7.7), $\tilde L_1\cong L_1(N)$ и $\tilde L_i$ не лежит в $B_1(N)$ для $i\geqslant 2$.

В силу (III.3.7), $\tilde V_{P\times H}\cong \oplus_{i=1}^{e}(U_i\otimes X_i)$, где $X_1, \ldots, X_e$ — различные неприводимые $F[H]$-модули, $U_1, \ldots, U_e$ — это $F[P]$-модули, сопряженные под действием N. Итак,

$$(\tilde V^*\otimes \tilde V)_{P\times H}\cong \bigoplus_{i,j=1}^{e}(U_i^*\otimes U_j)\otimes(X_i^*\otimes X_j)\cong\left\{\bigoplus_{j=1}^{e}(U_j^*\otimes U_j)\otimes L_1(H)\right\}\oplus S',$$

где S' — это $F[P\times H]$-модуль, который не содержит $L_1(P\times H)$ в качестве конституэнты.

Ввиду (1.5), $L_1(N)\,|\,\tilde V^*\otimes \tilde V$; таким образом, $L_1(P\times H)\,|\,(\tilde V^*\otimes \tilde V)_{P\times H}$ и, значит, $L_1(P)\,|\,U_j^*\otimes U_j$ для некоторого j. Поскольку модули U_j сопряжены под действием N, то $L_1(P)\,|\,U_j^*\otimes U_j$ для $j=1, \ldots, s$. Итак, из $eL_1(P\times H)\,|\,(\tilde V^*\otimes \tilde V)_{P\times H}$.

Предположим, что $e>1$. Поскольку $a_1=1$, (1.5) влечет, что $L_1(P\times H)|T_{P\times H}$ для некоторого неразложимого прямого слагаемого T модуля S. Значит, $L_1(P)|T_P$. Поскольку вертекс модуля T строго содержится в P, это противоречит (III.4.6). Итак, $e=1$. Следовательно,

$$\tilde{V}_{P\times H}\cong U\otimes X. \tag{1.6}$$

где X — неприводимый $F[H]$-модуль, а U — такой $F[P]$-модуль, что $L_1(P)|U^*\otimes U$.

Пусть $d=\dim_F X$. Если $d=1$, то $X^*\otimes X\cong L_1(H)$, и H содержится в ядре $V^*\otimes V$. Следовательно, ввиду (1.5), H лежит в ядре L_i для всех i. Таким образом, согласно (IV.4.14), L_i принадлежит $B_1(N)$ для всех i, и следовательно, L_i принадлежит $B_1(G)$, в силу (III.7.7) и (V.6.2). Таким образом, $s=1$, откуда по (1.4) $n=1$, вопреки предположению. Итак, $d>1$.

Пусть M — неприводимая конституэнта модуля $\tilde{V}$ и D — ядро M. Согласно (III.2.13), $P\subseteq D$, так что N/D является p'-группой. Следовательно, ввиду замечания после (1.1), существует такая подгруппа A_0, что $D\subseteq A_0\lhd N$, группа A_0/D абелева и $|N:A_0|<J(n)$. Пусть $A_1=A_0\cap H$ и $D_1=D\cap H$, тогда $A_1\lhd N$, $|H:A_1|<J(n)$ и A_1/D_1 абелева. В силу (1.6), $M_H\cong nX$ для некоторого натурального числа n. Отсюда следует, что D_1 лежит в ядре X.

Если A — абелева группа, а X — некоторый $F[A]$-модуль, то $X^*\otimes X$ содержит $L_1(A)$ с кратностью по крайней мере $\dim_F X$. Применим это замечание к $A=A_1/D_1$. Таким образом, $(X^*\otimes X)_{A_1}$ содержит $L_1(A_1)$ с кратностью, не меньшей $d\geqslant 2$. Так как X неприводим, $X^*\otimes X$ содержит $L_1(N)$ с кратностью 1. Следовательно, в $X^*\otimes X$ найдется такая неприводимая конституэнта $Z\not\cong L_1(H)$, что $L_1(A_1)|Z_{A_1}$. По теореме Клиффорда III.2.12, A_1 содержится в ядре Z.

Поскольку, в силу (1.6), $L_1(P)\otimes Z|(\tilde{V}^*\otimes\tilde{V})_{P\times H}$, из (1.5) следует, что $L_1(P)\otimes Z|T_{P\times H}$ для некоторого прямого слагаемого T из $\oplus a_i\tilde{L}_i\oplus S$. В силу (III.4.6), P является вертексом для T. Таким образом, ввиду (1.5), $T\cong\tilde{L}_j$ неприводим. Так как $Z\not\cong L_1(H)$, то $j\neq 1$. Пусть H_0 — ядро ограничения $(\tilde{L}_j)_H$. Поскольку A_1 принадлежит ядру модуля Z и $A_1\lhd N$, то из теоремы Клиффорда (III.2.12) следует, что $A_1\subseteq H_0$. Таким образом, $|H:H_0|\leqslant|H:A_1|<J(n)$. Следовательно, (iii) верно для $L=L_j$. □

Лемма 1.7. *Пусть V — неприводимый $F[G]$-модуль, $\dim_F V=n>1$. Предположим, что G не содержит нормальных подгрупп индекса p. Тогда существует такая неприводимая конституэнта L модуля $V^*\otimes V\otimes V^*\otimes V$, что*

$$1<|G:G_0|<|\mathrm{GL}_{|P|^2n^4J(n)}(p)|,$$

где G_0 — ядро модуля L.

Доказательство. Пусть L — неприводимый $F[G]$-модуль, $\dim_F L=d$. Пусть G_0 — ядро L, и $\bar{\varphi}$ — функция следа, соответствующая L. Предположим, что $\bar{\varphi}$ имеет ровно e алгебраически сопряженных в F, так что подполе в F, порожденное всеми значениями $\bar{\varphi}(x)$,

когда x пробегает G, имеет p^e элементов. Согласно (I.19.2), группа G/G_0 изоморфна подгруппе из $\mathrm{GL}_d(p^e)$. Таким образом, $|G:G_0| \leqslant |\mathrm{GL}_d(p^e)| \leqslant |\mathrm{GL}_{de}(p)|$.

По предположению, (1.3) (i) не имеет места, поэтому должно выполняться (1.3) (ii) или (1.3) (iii).

Предположим, что (1.3) (ii) верно. Выберем L соответствующим образом: $G \neq G_0$, так как $L \not\trianglelefteq L_1(G)$. В силу (IV.4.9) и (IV.4.18), $\bar{\varphi}$ имеет не более $|P|^2$ алгебраически сопряженных в F. Поэтому результат следует из предыдущего абзаца и того факта, что $d < n^4$.

Предположим, что имеет место (1.3) (iii). Выберем L соответственно: как и выше, $G \neq G_0$. Пусть $B_1, \ldots, B_a$ — все p-блоки группы G, которые содержат алгебраически сопряженные характера $\bar{\varphi}$. Так как $\dim_F L = d < n^4$, то, согласно предыдущим замечаниям, достаточно доказать, что $\bar{\varphi}$ имеет не более $|P|^2 J(n)$ алгебраически сопряженных. Таким образом, ввиду (IV.4.18), достаточно показать, что $a \leqslant J(n)$.

Пусть $\bar{\tilde{\varphi}}$ — функция следа, соответствующая модулю $\tilde{L}$. Согласно (III.7.7), существуют ровно a p-блоков группы $N_G(P)$, содержащих некоторый алгебраически сопряженный с $\tilde{\varphi}$ характер. В силу (1.3) (iii), число p-блоков группы $N_G(P)/H_0$ меньше $J(n)$. Таким образом, по (V.4.3), $a < J(n)$, что и требовалось. □

Пусть G — конечная группа и V — некоторый $F[G]$-модуль. Положим $\tau(G, V) = (m, n, a)$, если S_p-подгруппа из G имеет порядок p^m, $\dim_F V = n$ и a равно кратности, с которой $L_1(G)$ входит как конституэнта в $V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V$.

Определим частичное упорядочение троек следующим образом: $(m_1, n_1, a_1) \prec (m, n, a)$, если выполнено одно из следующих условий.

(i) $m_1 < m$, $n_1 \leqslant n$;

(ii) $m_1 \leqslant m$, $n_1 < n$;

(iii) $m_1 = m$, $n_1 = n$, $a_1 > a$.

Если H — подгруппа в G, то, очевидно, либо $\tau(H, V_H) = \tau(G, V)$, либо $\tau(H, V_H) \prec \tau(G, V)$. Заметим, что если $\tau(G, V) = (m, n, a)$, то $a \leqslant n^4$. Поэтому существует лишь конечное множество троек $\tau(G_1, V_1)$ таких, что $\tau(G_1, V_1) \prec \tau(G, V)$.

Лемма 1.8. *Пусть P — некоторая S_p-подгруппа из G, $|P| = p^m$. Пусть X — точный $F[G]$-модуль и $\dim_F X = n$. Положим $g(m, n) = |GL_{|P|^2 J(n) n^4}(p)|$, где функция $J(n)$ определена в* (1.1). *Предположим, что G неабелева. Тогда существует такая подгруппа $G_0 \trianglelefteq G$, что $|G:G_0| < g(m, n)$ и $\tau(G_0, X_{G_0}) \prec \tau(G, X)$.*

Доказательство. Можно считать, что G не имеет нормальных подгрупп индекса p, иначе результат тривиален.

Предположим, что каждый композиционный фактор модуля X имеет F-размерность 1. Пусть X_1 — вполне приводимый $F[G]$-модуль с такими же, как у X, композиционными факторами. Тогда P является ядром X_1 и группа G/P абелева. Таким образом, G разрешима и содержит абелеву подгруппу A с $|G:A| = |P|$. Пусть $G_0 = \bigcap_{x \in G} x^{-1} A x$, тогда $G_0 \trianglelefteq G$ и $|G:G_0| \leqslant |P|! \leqslant g(m, n)$. Поскольку G неабелева, $|P| \neq 1$, так что $\tau(G_0, X_{G_0}) \prec \tau(G, X)$.

Теперь предположим, что некоторая неприводимая конституэнта V из X имеет F-размерность по меньшей мере 2. Пусть L и G_0 определены как в (1.7). Если $\tau(G, X)=(m, n, a)$, а $\tau(G_0, X_{G_0})=(m, n, a_1)$ то, очевидно, $m_1 \leqslant m$ и $n_1=n$. Поскольку G_0 лежит в ядре L и $L \not\leqslant L_1(G)$, то $a_1>a$. Итак, $\tau(G_0, X_{G_0})<\tau(G, X)$. □

Лемма 1.9. *Существует такая функция $h(m, n, a)$, что если X — точный $F[G]$-модуль, то $|G:A| \leqslant h(\tau(G, X))$ для некоторой нормальной абелевой подгруппы A из G.*

Доказательство. Пусть $h(m, n, a)=1$, если $(m, n, a) \neq \tau(G, X)$ какова бы ни была пара (G, X). Если результат неверен, можно выбрать контрпример (G, X) таким образом, что $h(m_1, n_1, a_1)$ определено для всех троек $(m_1, n_1, a_1)<\tau(G, X)$. Пусть $g(m, n)=|\mathrm{GL}_{|P|^2 n^4 J(n)}(p)|$. Положим

$$h_0(\tau(G, X))=\max_{(m_1, n_1, a_1)<\tau(G, X)} h(m_1, n_1, a_1)$$

и

$$h(\tau(G, X))=g(m, n)\, h_0(\tau(G, X))^{g(m, n)}.$$

Если G абелева, пусть $G=A$. В этом случае результат ясен. Предположим, что G неабелева. Если подгруппа G_0 определена по (1.8), то G_0 содержит нормальную абелеву подгруппу A_0 с $|G_0:A_0| \leqslant h(\tau(G_0, X_0))$. Пусть $A=\bigcap_{x \in G} x^{-1} A_0 x$, тогда $|G:A|<$ $<g(m, n)\, h(\tau(G_0, X_{G_0}))^{g(m, n)}$. Отсюда следует, что $|G:A|<h(\tau(G, X))$. □

Теперь (1.2) является непосредственным следствием из (1.9), если положить

$$f(m, n)=\max_{0 \leqslant a \leqslant n^4} h(m, n, a).$$

ГЛАВА XII

Если блок B имеет нециклическую дефектную группу D, то ситуация значительно сложнее, чем описанная в главе VII, когда D циклическая. В частности, такой блок содержит бесконечное число неразложимых модулей, см. например, Гамерник [1974a], [1975a]. За исключением очень частных случаев, когда $p=2$ и D содержит циклическую подгруппу индекса 2, безнадежно пытаться описать все неразложимые модули из B. См. Бондаренко [1975], Рингель [1974], [1975]. Возможно, менее очевидно, что, по-видимому, нет метода построения неприводимых характеров Брауэра из B.

Цель этой главы — изучить вопросы, касающиеся обыкновенных неприводимых характеров блока B и представить некоторые применения этого исследования. В этой связи важную роль играет понятие базисного множества, введенное в § 3 гл. IV. После общего вводного параграфа большая часть главы посвящена случаю $p=2$ и специальным типам 2-групп D. Материал этой главы берет начало от работы Брауэра [1952].

Во всей настоящей главе используются обозначения, введенные в начале главы IV.

§ 1. Типы блоков

Результаты этого параграфа принадлежат Брауэру [1961a], [1964a], [1969b], [1971a], [1971c], [1971d]. См. также Рейнольдс [1965]. Смежные результаты см. Брауэр [1964c].

Пусть B — блок и $\{\chi_u\}$ — множество неприводимых характеров из B. Пусть $\varphi_B=\{\varphi_i\}$ — базисное множество для B. Таким образом, существуют целые рациональные числа d_{ui}, такие, что для всех p'-элементов x из G имеем $\chi_u(x)=\sum_i d_{ui}\varphi_i(x)$. Как в § 3 гл. IV, $\{d_{ui}\}$ называется множеством чисел разложения относительно φ_B, а $\{c_{ij}\}$ — множеством инвариантов Картана относительно φ_B, где $c_{ij}=\sum_u d_{ui}d_{uj}$.

Пусть y — некоторый p-элемент из G и $\{\varphi_i^y\}$ — объединение базисных множеств для всех блоков централизатора $C_G(y)$. Тогда для любого $\chi_u\in B$ существуют такие целые алгебраические числа d_{ui}^y, принадлежащие полю корней степени p^n из единицы над $\mathbf{Q}$ для

подходящего n, что $\chi_u(yx)=\sum_i d_{ui}^y \varphi_i^y(x)$ для всех p'-элементов x из $C_G(y)$. Эти целые алгебраические числа d_{ui}^y — *высшие числа разложения относительно* $\{\varphi_i^y\}$. Множество столбцов d_{ui}^y, где φ_i^y пробегает данное базисное множество, — *подсекция относительно* $\{\varphi_i^y\}$.

Лемма 1.1. *Пусть B — блок группы G, y, z — два p-элемента из G и $\{\varphi_i^y\}$, $\{\varphi_i^z\}$ — объединения базисных множеств для всех блоков групп $C_G(y)$, $C_G(z)$ соответственно.*

(i) *Если χ_u принадлежит B, то $d_{ui}^y=0$, кроме случая, когда φ_i^y принадлежит базисному множеству такого блока $\tilde{B}$ группы $C_G(y)$, что $\tilde{B}^G=B$.*

(ii) *Если y и z не сопряжены в G, то для всех i, j*

$$\sum_u (d_{ui}^y)^* d_{uj}^z = \sum_{\chi_u \in B} (d_{ui}^y)^* d_{uj}^z = 0.$$

(iii) *Если (c_{ij}^y) — матрица Картана $C_G(y)$ относительно $\{\varphi_i^y\}$, то для всех i, j*

$$\sum_u (d_{ui}^y)^* d_{uj}^y = c_{ij}^y.$$

Доказательство. Сразу следует из (IV.6.1) и (IV.6.2). □

Если дано базисное множество для блока B, то матрица Картана (c_{ij}) этого блока относительно данного базисного множества является матрицей положительно определенной целочисленной квадратичной формы Q. Если базисное множество заменить другим базисным множеством, то Q заменится на квадратичную форму, эквивалентную Q над $\mathbf{Z}$. Таким образом, с каждым блоком связан класс эквивалентности целочисленных квадратичных форм.

Лемма 1.2. *Предположим, что даны p и d. Существует лишь конечное множество классов целочисленных квадратичных форм, связанных с p-блоками дефекта d групп G.*

Доказательство. Пусть Q — квадратичная форма, связанная с p-блоком дефекта d. В силу (IV.4.18), размерность Q не выше p^{2d}. Согласно (IV.4.16), любой элементарный делитель матрицы Картана равен степени p, не превосходящей p^d, так что определитель формы Q ограничен функцией от p и d. Отсюда следует результат, ввиду теории редукции квадратичных форм. □

Следствие 1.3. *Существует граница $f(p, d)$, зависящая только от p и d, такая, что для любого p-блока дефекта d любой группы базисное множество можно выбрать таким образом, чтобы все инварианты Картана не превосходили $f(p, d)$.*

Доказательство. Сразу следует из (1.2). □

Лемма 1.4. *Пусть $B=B_0$ — главный p-блок группы G и ψ_0 — главный характер Брауэра группы G. Тогда существует такое базисное множество для B, включающее ψ_0, что инварианты Картана для этого базисного множества ограничены сверху функцией $f_0(p, n)$, зависящей только от p и n, где p^n — порядок S_p-подгруппы в G.*

Доказательство. Выберем базисное множество $\{\varphi_i\}$ для B как в (1.3). Пусть $\psi_0=\sum d_{0i}\varphi_i$, тогда $d_{0i}^2\leqslant c_{ii}\leqslant f(p, n)$. При этом идеал в $\mathbf{Z}$, порожденный всеми d_{0i}, совпадает с самим кольцом $\mathbf{Z}$. Поэтому существует матрица с элементами из $\mathbf{Z}$ и определителем ± 1, первая строка которой есть (d_{0i}). Элементы этой матрицы ограничены сверху функцией от d_{0i} и, следовательно, функцией от p и n. □

Лемма 1.5. *Пусть B — блок дефекта d, y — некоторый p-элемент из G и $\tilde{B}$ — такой блок группы $C_G(y)$, что $\tilde{B}^G=B$.*

(i) *Пусть $\{\varphi_i^y\}$ — базисное множество для $\tilde{B}$ и m — максимум инвариантов Картана, связанных с $\{\varphi_i^y\}$. Тогда все соответствующие высшие числа разложения d_{ui}^y для характера χ_u из B принадлежат конечному множеству $M(p, d, m)$, зависящему только от p, d и m.*

(ii) *Существует такое базисное множество для $\tilde{B}$, что все соответствующие высшие числа разложения d_{ui}^y для χ_u из B принадлежат конечному множеству $M(p, d)$, зависящему только от p и d.*

Доказательство. (i) Если σ — автоморфизм поля, порожденного всеми d_{ui}^y, то $((d_{ui}^y)^\sigma)^*=((d_{ui}^y)^*)^\sigma$. Таким образом, в силу (1.1), $|(d_{ui}^y)^\sigma|^2\leqslant m$ для всех σ. Теперь результат следует из того, что каждое число d_{ui}^y является целым алгебраическим.

(ii) Очевидно из (i) и (1.3). □

Пусть y — некоторый p-элемент из G и $\mathrm{Bl}(C_G(y), B)$ — множество всех таких блоков $\tilde{B}$ группы $C_G(y)$, что $\tilde{B}^G=B$. Пусть D — дефектная группа блока B. Если y не сопряжен ни с одним элементом из D, то $\mathrm{Bl}(C_G(y), B)$ пусто, ввиду (IV.6.6) (iv).

Пусть Y — полное множество представителей в D сопряженных классов группы G, пересекающихся с D. Для любых $y\in Y$ и $\tilde{B}\in \mathrm{Bl}(C_G(y), B)$ обозначим через $\varphi(y, \tilde{B})$ базисное множество для $\tilde{B}$. Определим матрицу $T^y(B, \tilde{B})=(d_{ui}^y)$, где индекс u нумерует строки, когда χ_u пробегает все неприводимые характеры из B, а индекс i нумерует столбцы так, что $\varphi(y, \tilde{B})=\{\varphi_i^y\}$.

Пусть $T_0^y(\tilde{B})$ — матрица обычных чисел разложения блока $\tilde{B}$ относительно базисного множества $\varphi(y, \tilde{B})$.

Блок B дефекта d называется блоком *заданного типа для подсекции* $(y, \tilde{B})$, если дана пара матриц $T_0^y(\tilde{B})$, $T^y(B, \tilde{B})$, образованных относительно некоторого базисного множества $\varphi(y, \tilde{B})$ блока $\tilde{B}$.

Блок B называется блоком *заданного типа для элемента* $y\in Y$, если он является блоком заданного типа для всех подсекций $(y, \tilde{B})$, соответствующих B.

Блок B называется блоком *заданного типа*, если он является блоком заданного типа для всех элементов $y\in Y$.

Пусть B^0 — блок группы G^0. Предположим, что B и B^0 имеют дефект d. Определим D^0, Y^0, $y^0\in Y^0$, $T_0^{y^0}(\tilde{B}^0)$, $T^{y^0}(B^0, \tilde{B}^0)$ для группы G^0. Тогда B и B^0 называются блоками *одного типа*, если выполняются следующие условия.

(i) $|Y|=|Y^0|$, и при подходящей нумерации $Y=\{y_i\}$, $Y^0=\{y_i^0\}$ имеем $|\mathrm{Bl}(C_G(y_i), B)|=|\mathrm{Bl}(C_{G^0}(y_i^0), B^0)|$.

(ii) $\mathrm{Bl}(C_G(y_i), B)=\{\tilde{B}_{ij}\}$ и $\mathrm{Bl}(C_{G^0}(y_i^0), B^0)=\{\tilde{B}_{ij}^0\}$ можно занумеровать таким образом, что для всех i, j найдутся базисные множества для $\tilde{B}_{ij}$ и $\tilde{B}_{ij}^0$ с тем свойством, что $T^{y_i}(B, \tilde{B}_{ij})=T^{y_i^0}(B^0, \tilde{B}_{ij}^0)$ и $T_0^{y_i}(\tilde{B}_{ij})=T_0^{y_i^0}(\tilde{B}_{ij}^0)$.

Теорема 1.6. *Для данных p и d существует лишь конечное множество типов p-блоков дефекта d (в категории всех конечных групп).*

Доказательство. Если Y определить, как выше, то $|Y|\leqslant p^d$. Таким образом, результат следует из (1.3) и (1.5). □

Предположим, что тип блока задан. Естественно спросить: какая дополнительная информация требуется, чтобы вычислить значения неприводимых характеров из блока? Прежде чем рассмотреть этот вопрос, мы докажем один предварительный результат. Будет изучаться следующая ситуация.

Пусть D — фиксированная подгруппа из G, причем $|D|=p^d$. Для $y\in D$ пусть $K_1, \ldots, K_n$ обозначают классы p'-элементов в $C_G(y)$. Допустим, что известна следующая информация.

(i) $|K_i|$ известны для $i=1, \ldots, n$.

(ii) Известно, какой сопряженный класс группы G содержит K_i. Этот класс обозначим K_i^G.

(iii) Известно, для каких $i=1, \ldots, n$ класс K_i^G имеет дефект меньше d и для каких i класс K_i^G имеет дефектную группу D.

Лемма 1.7. *Пусть D — подгруппа в G, $|D|=p^d$ и $y\in D$. Предположим, что вышеупомянутая информация* (i), (ii), (iii) *задана и что для любого блока $\tilde{B}$ группы $C_G(y)$, имеющего дефект не выше d, существует такой характер $\tilde{\chi}$ из $\tilde{B}$, что $\tilde{\chi}(x_i)$ известно для $x_i\in K_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Для произвольного блока b с дефектной группой D и любого $x\in G$ положим*

$$\omega_B(x)=\frac{|G:C_G(x)|\chi(x)}{\chi(1)},$$

где χ — некоторый неприводимый характер из B. Тогда для любого p'-элемента $x\in G$ можно вычислить значение $\omega_B(x)$. В частности, можно определить число блоков группы G с дефектной группой D.

Доказательство. Последнее утверждение следует из первого, в силу (IV.4.3) и (IV.4.8). Остается доказать первое утверждение.

Пусть x — некоторый p'-элемент из G и C — сопряженный класс в G, содержащий x. Поскольку $y\in D$, из (IV.6.6) (iv) следует, что для любого блока B группы G с дефектной группой D найдется такой блок $\tilde{B}$ группы $C_G(y)$, что $\tilde{B}^G=B$. Согласно (III.9.6), дефект блока $\tilde{B}$ не превосходит d. Если $\omega_{\tilde{B}}$ определить аналогично ω_B, то $\omega_B(x)=\sum_i \omega_{\tilde{B}}(x_i)$, где x_i пробегает полное множество представителей сопряженных классов группы $C_G(y)$, которые содержатся в $C\cap C_G(y)$. В частности, поскольку x является p'-элементом, каждый такой сопряженный класс совпадает с некоторым K_i, $1\leqslant i\leqslant n$. Если $C\neq K_i^G$

ни для какого i, то сумма пустая и $\overline{\omega_B(x)}=0$. Если $C=K_i^G$ для некоторого i, то по предположению известно, какие из классов K_i лежат в C, и $\overline{\omega_{\tilde{B}}(x_i)}$ можно вычислить, ибо $\tilde{\chi}(x_i)$ известно по предположению. □

Теорема 1.8. *Пусть D — подгруппа порядка p^d в G, Y — полное множество представителей в D сопряженных классов группы G, которые пересекаются с D, а Y_0 — непустое подмножество в Y. Предположим, что для любого $y\in Y$ заданы* (i), (ii), (iii) *и для любого $y\in Y_0$ известны значения на p'-элементах из $C_G(y)$ неприводимых характеров из блоков централизатора $C_G(y)$, дефект которых не больше d. Пусть y_0 — фиксированный элемент из Y_0, а $\tilde{B}$ — такой блок группы $C_G(y_0)$, что $\tilde{B}^G=B$ имеет дефектную группу D, и предположим, что тип B относительно любого элемента из Y_0 известен. Тогда можно найти значения неприводимых характеров из блока B на p-секциях, которые содержат элементы из Y_0.*

Доказательство. Применим (1.7) с $y=y_0$. Таким образом, можно найти $\overline{\omega_B(x)}$ для всех p'-элементов x из G. Для любого $y_i\in Y_0$ можно определить множество $\{\tilde{B}_{ij}\}=\mathrm{Bl}(C_G(y_i), B)$. Для любого $\tilde{B}_{ij}$ значения неприводимых характеров из $\tilde{B}_{ij}$ известны на p'-элементах из $C_G(y_i)$. По условию, матрица $T_0^{y_i}(\tilde{B}_{ij})$ чисел разложения относительно подходящего базисного множества для $\tilde{B}_{ij}$ известна. Поскольку, в силу (IV.3.11), все элементарные делители этой матрицы равны 1, она обладает левой обратной, которую можно явно найти. Иными словами, данное базисное множество для $\tilde{B}_{ij}$ можно выразить через неприводимые характеры из блока $\tilde{B}_{ij}$. Поскольку матрица $T^{y_i}(B, \tilde{B}_{ij})$ известна, есть возможность вычислить значения неприводимых характеров χ_u из B на p-секциях, которые содержат элементы из Y_0. □

§ 2. Некоторые свойства главного блока

Результаты этого параграфа будут полезны для последующих применений. См. Брауэр [1964b].

Пусть $\{\chi_u\}$ — множество всех неприводимых характеров главного блока B_0 группы G. Для любого элемента $x\in G$ определим

$$\lambda(G, x)=\sum_{\chi_u\in B_0}|\chi_u(x)|^2. \tag{2.1}$$

Положим $\lambda(G)=\lambda(G, 1)$, т. е.

$$\lambda(G)=\sum_{\chi_u\in B_0}\chi_u(1)^2. \tag{2.2}$$

Очевидно, $\lambda(G, x)\leqslant|C_G(x)|$.

Лемма 2.3. *Для любого $x\in G$ число $\lambda(G, x)$ является натуральным. Пусть $\bar{x}$ обозначает образ x в $\bar{G}=G/O_{p'}(G)$, тогда $\lambda(G, x)=\lambda(\bar{G}, \bar{x})\leqslant$ $\leqslant|C_{\bar{G}}(\bar{x})|$. В частности, $\lambda(G)=\lambda(\bar{G})\leqslant|G:O_{p'}(G)|$, где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда G принадлежит дефицитному классу 0 для числа p.*

Доказательство. Согласно (IV.4.9), $\lambda(G, x)$ является целым рациональным числом. Так как B_0 содержит главный характер, то $\lambda(G, x)>0$. В силу (IV.4.12), $\lambda(G, x)=\lambda(\bar{G}, \bar{x})$. Неравенства очевидны, а равенство имеет место тогда и только тогда, когда B_0 — единственный блок группы G. □

Лемма 2.4. *Пусть y есть p-элемент группы G, а x — некоторый p'-элемент из $C_G(y)$. Тогда $\lambda(G, yx)=\lambda(C_G(y), x)$; в частности, $\lambda(G, y)=\lambda(C_G(y))$.*

Доказательство. По второй основной теореме о блоках (IV.6.1) и теореме (V.6.2),

$$\lambda(G, yx)=\sum_{\chi_u\in B_0}\sum_{i, j} d_{ui}^{y}(d_{uj}^{y})^{*}\varphi_i^{y}(x)\varphi_j^{y}(x^{-1}),$$

где φ_i^y и φ_j^y пробегают неприводимые характеры Брауэра главного блока группы $C_G(y)$. Ввиду (IV.6.2), отсюда следует, что

$$\lambda(G, yx)=\sum_{i, j} c_{ij}^{y}\varphi_i^{y}(x)\varphi_j^{y}(x^{-1})=\lambda(C_G(y), x),$$

где φ_i^y, φ_j^y пробегают неприводимые характеры Брауэра главного блока группы $C_G(y)$. □

Лемма 2.5. *Если $H\lhd G$, то $\lambda(H)\leqslant\lambda(G)\leqslant|G:H|\lambda(H)$.*

Доказательство. Согласно (IV.4.10), любой неприводимый характер из главного блока группы H является конституэнтой ограничения на H некоторого неприводимого характера из B_0. Отсюда следует первое неравенство.

Если B_0, B_1, ... суть все блоки, накрывающие главный блок группы H, то $|G:H|\lambda(H)=\sum\chi(1)^2$ с χ, пробегающим неприводимые характеры из всех B_i. □

§ 3. Инволюции и блоки

Инволюции (т. е. элементы порядка 2) играют особую роль в теории групп. Брауэр [1957] первым осознал их значение для классификации простых групп. В той же статье он показал, как изучение инволюций можно связать с теорией блоков. Большая часть оставшегося материала этой главы основана на этих идеях. Результаты данного параграфа взяты из Брауэра [1964b], [1966a]. Близкие результаты можно найти у Брауэра [1961b], [1962a], [1966b], [1974c].

Теорема 3.1. *Пусть G — группа четного порядка и p — простое число, делящее $|G|$. Пусть y — некоторый p-элемент, а t_1 и t_2 — инволюции группы G. Предположим, что y не является p-частью ни одного элемента z_1z_2, где z_i сопряжен с t_i, $i=1, 2$. Пусть B — некоторый p-блок группы G и $\{\chi_u\}$ — все неприводимые характеры из B. Тогда для любого i*

$$\sum_{\chi_u\in B}\frac{d_{ui}^{y}\chi_u(t_1)\chi_u(t_2)}{\chi_u(1)}=0, \tag{3.2}$$

где d_{ui}^x — высшие числа разложения, принадлежащие базисным множествам блоков группы $C_G(y)$. Кроме того,

$$\sum_{\chi_u \in B} \frac{\chi_u(x)\chi_u(t_1)\chi_u(t_2)}{\chi_u(1)} = 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть C_i обозначает сопряженный класс группы G, который содержит t_i, $i=1, 2$. Пусть x — некоторый p'-элемент из $C_G(y)$ и C — сопряженный класс группы G, содержащий yx. По условию, коэффициент при $\hat{C}$ в $\hat{C}_1\hat{C}_2$ равен 0, так что по хорошо известной формуле имеем

$$\sum_v \frac{\chi_v(yx)\chi_v(t_1)\chi_v(t_2)}{\chi_v(1)} = 0,$$

где χ_v пробегает все неприводимые характеры группы G, а x — произвольный p'-элемент из $C_G(y)$. Пусть $\{\varphi_i^y\}$ — объединение базисных множеств для всех p-блоков группы $C_G(y)$, так что $\chi_v(yx) = \sum_i d_{vi}^y \varphi_i(x)$ для любого p'-элемента $C_G(y)$. Из линейной независимости множества $\{\varphi_i^y\}$ следует, что

$$\sum_v \frac{d_{vi}^y \chi_v(t_1)\chi_v(t_2)}{\chi_v(1)} = 0.$$

По второй основной теореме о блоках (IV.6.1), если φ_i^y принадлежит блоку $\tilde{B}$, то $d_{vi}^y = 0$, кроме случая $\chi_v \in \tilde{B}^G$. Это доказывает (3.2). Теперь (3.3) получается в результате умножения (3.2) на $\varphi_i^y(x)$ и суммирования по всем φ_i^y из базисных множеств для таких блоков $\tilde{B}$, что $\tilde{B}^G = B$. □

Скажем, что x *обращает* $y \in G$, если $x^{-1}yx = y^{-1}$.

Следствие 3.4. *Пусть y — некоторый p-элемент из G. Если t_1, t_2 — инволюции из G, причем никакая сопряженная с t_1 инволюция не обращает y, то утверждение теоремы* 3.1 *справедливо.*

Доказательство. Предположим, что y является p-частью произведения $z_1 \cdot z_2$, где z_i сопряжен с t_i, $i=1, 2$. Тогда $z_1z_2 = yx$ для некоторого p'-элемента $x \in C_G(y)$. Таким образом,

$$z_1^{-1}(yx)z_1 = z_1^{-1}z_1z_2z_1 = z_2z_1 = (z_1z_2)^{-1} = (yx)^{-1}.$$

Так как y является степенью элемента yx, то z_1 обращает y, вопреки предположению. Результат следует из (3.1). □

Может случиться, что для фиксированных инволюций t_1 и t_2 существуют несколько несопряженных элементов y, для которых верны заключения (3.1). Эти новые уравнения могут быть получены как линейные комбинации данных уравнений. Если удается выбрать такие линейные комбинации, что $\chi_u(y)$ заменяются целыми рациональными числами a_u, где $\sum a_u^2$ мала, то отсюда можно вывести свойства группы G. Эта идея будет часто использоваться. Остальные результаты данного параграфа важны для таких приложений.

Пусть P — некоторая p-подгруппа из G, $\{\chi_u\}$ — множество всех неприводимых характеров, принадлежащих главному блоку B_0. Если θ — комплекснозначная функция классов на P, определим

$$a_u(\theta)=((\chi_u)_P, \theta)_P=\frac{1}{|P|}\sum_{y\in P}\chi_u(y)\theta(y^{-1}). \tag{3.5}$$

Пусть $\mathfrak{a}(\theta)$ обозначает столбец $(a_y(\theta))$. Если $\mathfrak{a}=(a_u)$ и $\mathfrak{b}=(b_u)$ — два столбца, определим $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})=\sum_u a_u b_u^*$, где $*$ — знак комплексного сопряжения. Если θ — обобщенный характер P, то, согласно определению, $a_u(\theta)$ является целым рациональным числом.

Пусть λ определено как в (2.2).

Теорема 3.6. *Пусть P — некоторая p-подгруппа из G и N — такая подгруппа, что $P\subseteq N\subseteq N_G(P)$. Пусть U — непустое подмножество в P, причем $N\subseteq N_G(U)$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(i) *если y_1, $y_2\in U$ сопряжены в G, то они сопряжены в N;*

(ii) *число $w=\lambda(C_G(y))/|C_N(y)|$ не зависит от выбора $y\in U$.*

Пусть θ и η — обобщенные характеры группы P, причем θ равен нулю вне U. Тогда

$$(\mathfrak{a}(\theta), \mathfrak{a}(\eta))=\frac{w}{|P|}\left(\theta, \sum_{x\in N}\eta^x\right)_P.$$

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{a}(\theta), \mathfrak{a}(\eta))=s$. По определению,

$$|P|^2 s=\sum_{y,z\in P}(\chi(y), \chi(z))\theta(y^{-1})\eta(z),$$

где $(\chi(y), \chi(z))$ — скалярное произведение столбцов $\chi(y)=(\chi_u(y))$ и $\chi(z)=(\chi_u(z))$, а $\{\chi_u\}$ — множество всех неприводимых характеров из B_0. По второй основной теореме о блоках (IV.6.1),

$$(\chi(y), \chi(z))=\sum_u \chi_u(y)\chi_u(z^{-1})=\sum_{u,i,j} d_{ui}^y(d_{uj}^z)^*\varphi_i^y(1)\varphi_j^z(1)=0,$$

если y не сопряжен с z в G. Если y сопряжен с z, то, по (2.4),

$$(\chi(y), \chi(z))=(\chi(y), \chi(y))=\lambda(G, y)=\lambda(C_G(y)).$$

Так как θ равен нулю вне U, то

$$|P|^2 s=\sum_{y\in U}\lambda(C_G(y))\theta(y^{-1})\sum_z \eta(z),$$

где z пробегает G-сопряженные с y элементы из P. Поскольку $N\subseteq N_G(U)$, из (i) следует, что z пробегает элементы, N-сопряженные с $y\in P$. Иными словами, z пробегает все различные элементы вида y^x, где $x\in N$. Значит, $\sum_{x\in N}\eta(y^x)=|C_N(y)|\sum_z\eta(z)$. Теперь из (ii) следует, что

$$|P|^2 s=w\sum_{y\in U}\theta(y^{-1})\sum_{x\in N}\eta^x(y).$$

Так как y может пробегать всю группу P, отсюда следует результат. □

Теорема 3.7. *Пусть P — некоторая p-подгруппа из G, а U — подмножество P. Предположим, что в G существует такая инволюция t, что ни один элемент из U не обращается никаким G-сопряженным элемента t. Пусть θ — обобщенный характер группы P, который равен нулю вне U, и $\{\chi_u\}$ — множество всех неприводимых характеров блока B_0. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\sum_u \frac{a_u(\theta)\chi_u(t)^2}{\chi_u(1)} = 0; \tag{3.8}$$

$$\sum_u a_u(\theta)\chi_u(1) = 0; \tag{3.9}$$

$$\sum_u a_u(\theta)\chi_u(t) = 0. \tag{3.10}$$

Если вдобавок $(1_P, \theta) \neq 0$, то либо среди $a_u(\theta)$ есть по крайней мере два положительных и два отрицательных числа, либо G обладает собственной нормальной подгруппой, которая содержит $\langle O_2(G), t\rangle$.

Доказательство. Из (3.4) следует, что (3.3) выполняется для $t = t_1 = t_2$ и любого $y \in U$. Если (3.3) умножить на $|P|^{-1}\theta(y^{-1})$ и просуммировать по всем $y \in U$, то определение $a_u(\theta)$ показывает, что (3.8) верно. По условию, $1 \notin U$, и никакой сопряженный с t элемент не лежит в U. Следовательно, по второй основной теореме о блоках (IV.6.1), если характер χ принадлежит B_0, то столбцы $\chi(1)$ и $\chi(t)$ ортогональны столбцу $\chi(y)$ для $y \in U$. Это доказывает (3.9) и (3.10).

Пусть Q — диагональная квадратичная форма с коэффициентами $(a_u(\theta)/\chi_u(1))$. Если в ней не более одного положительного или отрицательного коэффициента $a_u(\theta)$, размерность максимального изотропного подпространства не выше 1. В силу (3.8), (3.9) и (3.10), векторы $(\chi_u(1))$ и $(\chi_u(t))$ лежат в изотропном подпространстве и потому пропорциональны. Если $\chi_0 = 1_G$, то $\chi_0(1) = \chi_0(t) = 1$. Следовательно, $\chi_u(1) = \chi_u(t)$ для всех χ_u из B_0 таких, что $a_u(\theta) \neq 0$. Выберем $\chi_u \neq \chi_0$, для которого $a_u(\theta) \neq 0$, тогда $\langle O_2(G), t\rangle$ лежит в ядре χ_u, а G — нет. Таким образом, ядро характера χ_u — искомая нормальная подгруппа. □

§ 4. Некоторые вычисления со столбцами

Этот параграф содержит результаты, которые показывают, как вычисления со столбцами $a(\theta)$, рассмотренные в § 3, использовать для получения информации о неприводимых характерах группы G. Эти методы тесно связаны с методами, развитыми в § 7 гл. V. В данном параграфе будут обсуждаться лишь элементарные результаты. Они в первую очередь идут от Брауэра [1966а]. По поводу (4.9) (ii) см. Фейт [1974].

В последующем более детально будет изучаться случай $p = 2$ и будет представлено несколько приложений. В случае $p \neq 2$ некоторые авторы использовали «метод столбцов» и свойства изометрий,

доказанные в § 7 гл. V, чтобы вывести результаты о структуре групп. См., например, Г. Хигман [1973], [1974]; Смит и Тирер [1973a], [1973b]; Смит [1974], [1976b], [1976c], [1977]. В качестве примера сформулируем один из таких результатов без доказательства.

Теорема 4.1 (Смит и Тирер [1973b]). *Пусть $p\neq 2$, группа G имеет абелеву S_p-подгруппу P и $|N_G(P):C_G(P)|=2$. Если $G=G'$, то P циклическая.*

Предположения 4.2. (i) *P — абелева p-подгруппа в G, а N — такая подгруппа, что $P\subseteq N\subseteq N_G(P)$, U — непустое подмножество в P.*

(ii) *Если $y\in U$, то $C_G(y)$ имеет нормальное p-дополнение.*

(iii) *Если $y\in U$ сопряжен в G с $x\in P$, то $x\in U$ и y сопряжен с x в N.*

(iv) *Если $y\in U$, то существует такая S_p-подгруппа P_y из $C_G(y)$, что $C_N(y)=P_yC_N(P)$ и $P=P_y\cap C_N(P)$.*

Очевидна аналогия (4.2) и (V.7.1).

Лемма 4.3. *Пусть выполнены предположения* (4.2). *Пусть θ и η — обобщенные характеры группы P, причем θ равен 0 вне U. Тогда*

$$(\mathfrak{a}(\theta),\ \mathfrak{a}(\eta))=(\theta,\ \sum_x \eta^x),$$

где x пробегает трансверсаль подгруппы $C_N(P)$ в N.

Доказательство. Выполняются условия (3.6). Если $y\in U$, то $\lambda(C_G(y))=|P_y|$, ввиду (IV.4.12), (2.4) и (4.2) (ii). Если w определено как в (3.6), то $w^{-1}=|C_N(P):P|$ по (4.2) (iv). Теперь результат следует из (3.6). □

Нам понадобятся также следующие предположения.

Предположения 4.4. (i) *P — абелева S_p-подгруппа в G, $|P|\neq 1$.*

(ii) *Факторгруппа $N_G(P)/C_G(P)$ — циклическая порядка m, $1<m<|P|-1$.*

(iii) *Если $y\in P-\{1\}$, то $C_G(y)\cap N_G(P)=C_G(P)$.*

Лемма 4.5. *Если предположения* (4.4) *выполнены, то выполняются и* (4.2) *с $U=P-\{1\}$ и $N=N_G(P)$.*

Доказательство. Предположим, что (4.4) выполнены. Тогда (4.2) (i) и (4.2) (iv) следуют непосредственно отсюда, а (4.2) (iii) — стандартное свойство абелевых силовских подгрупп. Теорема Бернсайда о перемещении показывает, что (4.4) (iii) влечет (4.2) (ii). □

Если верны предположения (4.4), будут использоваться следующие обозначения.

$r=(|P|-1)/m$.

$\psi_0=1_P$, ψ_1, ... — множество всех неприводимых характеров группы P. Таким образом, каждый характер ψ_j $(j>0)$ имеет в точности m сопряженных под действием $N=N_G(P)$. Нумерацию можно выбрать так, чтобы $\{\psi_j\mid 1\leqslant j\leqslant r\}$ было полным множеством представителей орбит группы N.

По определению, $\mathfrak{a}(\psi_j^x)=\mathfrak{a}(\psi_j)$ для всех j и $x\in N$.

Теорема 4.6. *Пусть выполнены предположения* (4.4). *Тогда существует такое натуральное $s\leqslant m$, что главный p-блок B_0 группы*

G содержит в точности $r+s$ неприводимых характеров $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$, $\chi_1 = 1_G, \ldots, \chi_s$. Если $y \in P - \{1\}$ является p-частью элемента $z \in G$, то

$$\zeta_j(z) = d + \delta \sum_x \psi_j^x(y), \quad 1 \leqslant j \leqslant r,$$

$$\chi_u(z) = a_u, \qquad 1 \leqslant u \leqslant s,$$

где x пробегает трансверсаль подгруппы $C_G(P)$ в N, $\delta = \pm 1$; d, $a_1, \ldots, a_s \in \mathbf{Z}$ и $a_u \neq 0$. При этом

$$(d-\delta)^2 + (r-1)d^2 + \sum_{u=1}^{s} a_u^2 = m+1. \tag{4.7}$$

Далее, если t — некоторый p'-элемент, то $\zeta_j(t) = \zeta_1(t)$ для всех j и

$$(rd-\delta)\zeta_j(t) + \sum_1^s a_u \chi_u(t) = 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{b}_j = \mathfrak{a}(\psi_0 - \psi_j) = \mathfrak{a}(\psi_0) - \mathfrak{a}(\psi_j)$. В силу (4.3) и (4.5), $(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j) = m + \delta_{ij}$. Положим $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{b}_i - \mathfrak{b}_1$, тогда $(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_j) = 1 + \delta_{ij}$. Теперь результат следует из стандартного для теории характеров рассуждения, см., например, Фейт [1967c]. □

Заметим, что в случае циклической группы P теорема 4.6 является весьма частным случаем результатов главы VII.

Следствие 4.9. *Примем предположения* (4.4).

(i) *Если $m=2$, обозначения можно выбрать так, что в* (4.6) *будет $d=0$, $s=2$, $a_2 = \delta$ и $\zeta_j(1) = \chi_2(1) + \delta$.*

(ii) *Если $m=3$, обозначения можно выбрать так, что в* (4.6) *будет $d=0$, $s=3$ и $a_u = \pm 1$ для любого u. Кроме того, если G имеет инволюцию, которая не содержится ни в какой собственной нормальной подгруппе из G, то ровно два из чисел δ, a_2, a_3 равны -1 и $\zeta_j(1)\chi_2(1)\chi_3(1)$ является квадратом целого рационального числа.*

Доказательство. Поскольку $m \leqslant 3$, то $|d| \leqslant 1$, в силу (4.7), и потому либо $d = \delta$, либо $d = 0$. Допустим, что $d = \delta$. Если $s = 1$, то (4.8) влечет $(r-1)\delta\zeta_j(1) = -1$, и значит, $\zeta_j(1) = 1$, что неверно. Таким образом, $s \geqslant 2$. Поскольку $m < |P| - 1$, то $r \geqslant 2$, поэтому (4.7) влечет $2 \leqslant r \leqslant m+2-s \leqslant m$. В частности, если $r = 2$, то $m = 2$, а если $m = 3$, то $2 \leqslant r \leqslant 3$, откуда $|P| = 5$ или 7. Значит, $|P| = 7$, так как $m \mid |P| - 1$. Следовательно, в любом случае $r = 2$, поэтому при $j' \neq j$ из (4.6) следует, что

$$\zeta_{j'}(z) = \delta\left(1 + \sum_x \psi_{j'}^x(y)\right) = -\delta \sum_x \psi_j^x(y) = -\zeta_j(z).$$

Таким образом, во всех случаях нумерацию можно установить так, что $d = 0$.

(i) В силу (4.7), $s = 2$ и $a_2 = \pm 1$. Тогда (4.8) показывает, что $-\delta\zeta_j(1) + 1 + a_2\chi_2(1) = 0$. Значит, $\zeta_j(1) = \delta a_2 \chi_2(1) + \delta$ и $\delta a_2 > 0$.

(ii) В силу (4.7), $s = 3$ и $a_u = \pm 1$ для всех u.

Допустим, что G содержит инволюцию, не лежащую ни в какой собственной нормальной подгруппе. Пусть $\theta = \{(\psi_0 - \psi_1)^N\}_P$. Согласно

(3.7), ровно два числа из δ, a_2, a_3 равны -1. Пусть V — это четырехмерное векторное пространство над $\mathbf{Q}$ с диагональной квадратичной формой

$$X_1^2+\frac{a_2}{\chi_2(1)}X_2^2+\frac{a_3}{\chi_3(1)}X_3^2+\frac{\delta}{\zeta_1(1)}X_4^2.$$

Согласно (3.7), V имеет двумерное изотропное подпространство и потому является прямой суммой двух гиперболических плоскостей. Таким образом, дискриминант формы, равный $\zeta_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)$, является квадратом в $\mathbf{Q}$. □

Ситуация, описанная в (4.9), встречается очень часто. Например, пусть $G_1(q)=\mathrm{PSL}_3(q)$ и $G_{-1}(q)=\mathrm{PSU}_3(q)$. Тогда для $\varepsilon=\pm 1$ группа $G_\varepsilon(q)$ содержит подгруппу $P\times H$ порядка $(q^2+\varepsilon q+1)/k$, где $k=(q^2+\varepsilon q+1, 3)$, которая удовлетворяет (4.4). Степени данных характеров равны q^3, $q^2+\varepsilon q$ и $(q^2-1)(q-\varepsilon)$.

Другой пример доставляет A_7 для $p=7$. Соответствующие степени равны 6, 10 и 15.

§ 5. Группы с абелевой S_2-подгруппой типа $(2^m, 2^m)$

Этот параграф содержит доказательство следующего результата. (См. Брауэр [1964b, § VI].)

Теорема 5.1. *Пусть G — группа, S_2-подгруппа P которой абелева типа $(2^m, 2^m)$, $m\geqslant 2$. Если $O_{2'}(G)=\langle 1\rangle$, то $P\lhd G$, $C_G(P)=P$ и $|G:P|$ равен 1 или 3.*

Доказательство. Индукция по $|G|$. Пусть G — контрпример наименьшего порядка. По условию, $O_{2'}(G)=\langle 1\rangle$. Пусть $C=C_G(P)$, $N=N_G(P)$ и t_1, t_2, t_3 — инволюции из P. Если $N=C$, то теорема Бернсайда о перемещении дает результат. Поскольку N/C точно действует на P сопряжениями, $|N:C|=3$ и N/C циклически переставляет $\{t_1, t_2, t_3\}$.

Если $y\in P-\{1\}$, то по предположению индукции $C_G(y)$ имеет нормальное 2-дополнение. Таким образом, (IV.4.12) влечет

$$\lambda(C_G(y))=\lambda(P)=|P|=2^{2m} \text{ для любого } y\in P-\{1\}. \tag{5.2}$$

Пусть $\psi_0=1$, ψ_1, ... — все неприводимые характеры группы P. Если $r=(2^{2m}-1)/3\geqslant 5$, то нумерацию можно выбрать так, что ψ_0, ..., ψ_r составляют полное множество представителей орбит группы N в $\{\psi_i\}$.

Пусть в (3.6) $U=P-\{1\}$, тогда $w=3/|N:P|$. Поэтому из (3.6) следует, что

$$(\mathfrak{a}(\psi_i-\psi_0),\ \mathfrak{a}(\psi_j))=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant r,$$
$$(\mathfrak{a}(\psi_i-\psi_0),\ \mathfrak{a}(\psi_0))=-3,\ 1\leqslant i\leqslant r.$$

Определим $\mathfrak{b}_i=\mathfrak{a}(\psi_i-\psi_0)=\mathfrak{a}(\psi_i)-\mathfrak{a}(\psi_0)$, $1\leqslant i\leqslant r$, тогда

$$(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j)=3+\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant r. \tag{5.3}$$

Пусть $\mathfrak{c}_i=\mathfrak{b}_i-\mathfrak{b}_r$, $1\leqslant i\leqslant r-1$, тогда

$$(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_j)=1+\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant r-1.$$

Стандартное рассуждение (см., например, Фейт [1967c, § 23]) показывает, что ненулевые элементы $r-1$ столбцов $\mathfrak{c}_i$ расположены в r строках, и строки можно упорядочить так, что матрица из первых $r-1$ строк будет εI, где $\varepsilon=\pm 1$, а все коэффициенты r-й строки равны $-\varepsilon$.

Ввиду (5.3), $(\mathfrak{b}_r, \mathfrak{c}_i)=-1$. Таким образом, $\mathfrak{b}_r$ имеет один и тот же коэффициент в первых $r-1$ строках и коэффициент $b+\varepsilon$ в r-й строке. Все коэффициенты столбцов $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{r-1}$, стоящие в последующих строках, равны 0. Если коэффициенты столбца $\mathfrak{b}_r$ в этих строках равны $\delta_0, \delta_1, \ldots$, то (5.3) влечет

$$4=\sum \delta_j^2+(r-1)b^2+(b+\varepsilon)^2. \tag{5.4}$$

Для строки, соответствующей $\chi_0=1$, получим $a_0(\psi_0)=1$. $a_0(\psi_1)=0$ для $i>1$. Значит, коэффициент столбца $\mathfrak{b}_r$ в этой строке равен -1, а коэффициенты всех $\mathfrak{c}_j$ — нулевые. Это показывает, что одно из значений δ_j равно -1. Таким образом, в (5.4) $b=0$, так как $r-1\geqslant 4$. Итак, если строки упорядочены надлежащим образом, то ненулевые коэффициенты столбцов $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_r$ оказываются такими:

$$\begin{array}{l}
\delta_0, \delta_0, \ldots, \delta_0,\\
\delta_1, \delta_1, \ldots, \delta_1,\\
\delta_2, \delta_2, \ldots, \delta_2,\\
\varepsilon, 0, \ldots, 0,\\
0, \varepsilon, \ldots, 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0, 0, \ldots, \varepsilon,
\end{array} \tag{5.5}$$

где $\delta_0=-1$, $\chi_0=1$ и χ_i обозначает неприводимый характер, соответствующий $(i+1)$-й строке.

В частности, $a_i(\psi_j)-a_i(\psi_0)=\delta_i$ для $i=0, 1, 2$ и $j=1, \ldots, r$. Следовательно, $a_i(\psi)-a_i(\psi_0)=\delta_i$ для любого неглавного неприводимого характера ψ группы P и $i=0, 1, 2$. Из определения $a_i(\psi)$ (3.5) следует, что для любого $y\in P$ и $0\leqslant i\leqslant 2$

$$\chi_i(y)=\sum_{\psi} a_i(\psi)\psi(y).$$

Таким образом, если $y\in P-\{1\}$, $0\leqslant i\leqslant 2$, то

$$\chi_i(y)=\sum_{\psi}\{a_i(\psi)-a_i(\psi_0)\}\psi(y)=\delta_i\sum_{\varphi\neq\varphi_0}\psi(y)=-\delta_i. \tag{5.6}$$

Поскольку $((\chi_i)_P, 1)$ — целое число, то

$$\chi_i(1)\equiv-\delta_i \pmod{2^{2m}},\quad i=1, 2. \tag{5.7}$$

Выберем в качестве ψ_1 неглавный характер группы P, для которого $\psi_1^2=\psi_0$. Тогда все элементы порядка, меньшего 2^m, принадлежат ядру ψ_1, и потому

$$a_i(\psi_1-\psi_0)=\frac{1}{|P|}\sum_{y\in P}\chi_i(y)(\psi_1(y)-\psi_0(y))=\frac{1}{|P|}\sum_{y\in S}\chi_i(y)(\psi_1(y)-\psi_0(y)),$$

где S — множество всех элементов порядка 2^m из P. Поскольку группа P абелева, ни один элемент из S не сопряжен в G со своим обратным, в частности, ни один элемент из S не обращается сопряженным элемента t_1. Следовательно, применимо (3.7) с $U=S$ и $\theta=\psi_1-\psi_0$. Согласно (5.5) и (5.6), где $y=t=t_1$.

$$-1+\frac{\delta_1}{\chi_1(1)}+\frac{\delta_2}{\chi_2(1)}+\frac{\varepsilon\chi_3(t)^2}{\chi_3(1)}=0, \tag{5.8}$$

$$-1+\delta_1\chi_1(1)+\delta_2\chi_2(1)+\varepsilon\chi_3(1)=0, \tag{5.9}$$

$$-3+\varepsilon\chi_3(t)=0. \tag{5.10}$$

Допустим, что $\chi_1(1)\neq 1$ и $\chi_2(1)\neq 1$. В силу (5.7), $\chi_1(1)\geqslant 15$ и $\chi_2(1)\geqslant 15$, поэтому из (5.8) и (5.10) следует, что $9\varepsilon/\chi_3(1)\geqslant 13/15$. Таким образом, $\varepsilon=1$ и $\chi_3(1)\leqslant 10$. В силу (5.9), $\chi_3(1)\equiv 3 \pmod{16}$, откуда $\chi_3(1)=3$, вопреки (5.8).

Следовательно, $\chi_i(1)=1$ для $i=1$ или 2. Ввиду (5.7), $\delta_i=-1$, так что P лежит в ядре H характера χ_i, по (5.6). Итак, H — собственная нормальная подгруппа группы G и $O_{2'}(H)\subseteq O_{2'}(G)=\langle 1\rangle$, так что по индукции $P\lhd H$. Таким образом, $P\lhd G$. Остальные утверждения следуют непосредственно отсюда, так как $O_{2'}(G)=\langle 1\rangle$. □

§ 6. Блоки со специальными дефектными группами

Если дан блок B с дефектной группой D, интересно получить информацию о неприводимых характерах и неприводимых характерах Брауэра блока B, матрице разложения, матрице Картана и, возможно, о структуре некоторых модулей и их источников. Ситуация, когда D циклическая группа, обсуждалась в главе VII. Если D нециклическая, по существу ничего не известно для нечетных p, но большая работа проделана в случаях специальных типов 2-групп D. В деятельности такого рода обычно намного легче разобраться с главным блоком, чем с блоком общего вида. Результаты § 1 показывают, что для заданной группы D существует лишь конечное число возможных значений для различных чисел, связанных с блоком B. К сожалению, число возможностей может быть очень большим даже если группа D не слишком сложна. Брауэр [1964b] первым предпринял такие исследования. Он также применил их, чтобы получить информацию о структуре группы G, как в предыдущем параграфе. Оставшаяся часть этой главы содержит некоторые дальнейшие результаты такого сорта. Здесь мы лишь упомянем кое-какую литературу по этому предмету.

Если B — главный блок, а D диэдральная (включая частный случай четверной группы), см. Брауэр [1964b], [1966a], Лэндрок [1976], Эрдман [1977b]. Насчет общего случая с диэдральной группой D см. Брауэр [1971a], [1974b], Эрдман и Михлер [1977], Донован [1979]. Случай квазидиэдральных, кватернионных и аналогичных

групп см. Брауэр [1966a], Олссон [1975], [1977], Эрдман [1979b], Кюльсхаммер [1980]. Олссон [1977] получил также некоторые результаты для $p \neq 2$. При помощи классификации простых групп с абелевой S_2-подгруппой вопросы о главном блоке в случае абелевой D сводятся к изучению групп типа Ри. Эти группы изучали Фонг [1974], Лэндрок и Михлер [1980a], [1980b]. Случай $|D|=8$ для произвольного блока B см. Лэндрок [1981].

В данном параграфе мы докажем лишь некоторые весьма элементарные результаты, которые понадобятся в следующем параграфе. См. Брауэр [1964b].

Лемма 6.1. *Пусть S_2-подгруппа P группы G абелева типа* (2, 2). *Тогда G имеет либо три, либо один класс сопряженных инволюций. В первом случае G имеет нормальное 2-дополнение и неприводимые характеры из главного 2-блока B_0 группы G — это четыре одномерных характера группы $G/O_{2'}(G) \simeq P$. Во втором случае главный 2-блок B_0 содержит ровно 4 неприводимых характера $\chi_0=1$, χ_1, χ_2, χ_3. Для каждого $u=1, 2, 3$ существует такое $\varepsilon_u = \pm 1$, что $\chi_u(y)=\varepsilon_u$ для любого 2-сингулярного элемента $y \in G$. Кроме того,*

$$\chi_u(1) \equiv \varepsilon_u \pmod 4, \quad u=1, 2, 3. \tag{6.2}$$

$$1+\varepsilon_1\chi_1(x)+\varepsilon_2\chi_2(x)+\varepsilon_3\chi_3(x)=0 \tag{6.3}$$

для любого 2′-элемента $x \in G$.

Доказательство. Если $N_G(P)=C_G(P)$, то, по теореме Бернсайда о перемещении, G имеет нормальное 2-дополнение, и результат получен. Предположим, что $N_G(P) \neq C_G(P)$. Тогда $|N_G(P):C_G(P)|=3$, и G имеет единственный класс сопряженных инволюций. Если t — инволюция в G, то $C_G(t)$ имеет нормальное 2-дополнение, и значит, главный характер Брауэра — это единственный неприводимый характер Брауэра в главном блоке группы $C_G(t)$. В силу (IV.6.2), $\chi_u(y)=d^t_{u0}$ для всех u. Согласно (IV.6.2), $\sum_{i=0}^{4} |d^t_{u0}|^2 = c^t_{00}=4$. Поскольку χ_u не обращается в 0 на всех 2-сингулярных элементах, $d^t_{u0} \neq 0$ для любого u. Поскольку для всех u числа d^t_{u0} рациональны и $d^t_{00}=1$, блок B_0 содержит ровно 4 неприводимых характера. При этом $\varepsilon_u = d^t_{u0} = \pm 1$ для всех u. Так как $\sum_{y \in P} \chi_u(y) \equiv 0 \pmod 4$, то (6.2) доказано. Уравнение (6.3) следует из (IV.6.3) (ii). □

Следствие 6.4. *Предположим, что группа G из* (6.1) *имеет единственный класс инволюций. Тогда нумерацию можно установить так, что $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_3=-1$. В этом случае* 1, χ_1, $\varepsilon_2\chi_2$ *составляют базисное множество для B_0, относительно которого матрица разложения и матрица Картана следующие*:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1+\delta_{ij}).$$

Доказательство. Пусть в (6.3) $x=1$, тогда нумерацию можно выбрать так, что $\varepsilon_1=1$ и $\varepsilon_3=-1$. В силу (6.3), 1, χ_1, $\varepsilon_2\chi_2$ образуют базисное множество, и матрица D имеет указанный вид. Тогда $C=D'D$, что и требовалось. □

Значительно труднее вычислить матрицу разложения и матрицу Картана относительно базисного множества, состоящего из неприводимых характеров Брауэра. Лэндрок [1976] сделал это и показал, что если группа G из (6.1) имеет единственный класс инволюций, есть две следующие возможности:

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix};\tag{6.5}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}.\tag{6.6}$$

Оба этих случая встречаются в бесконечных семействах групп. Прямое вычисление показывает, что если q — степень простого числа и $G=\mathrm{PSL}_2(q)$, то при $q\equiv 3 \pmod 8$ имеет место (6.5), а при $q\equiv 5 \pmod 8$ имеет место (6.6). Если $q\equiv 3\varepsilon \pmod 8$, где $\varepsilon=\pm 1$, то

$$\chi_0(1)=1,\ \chi_1(1)=q,\ \chi_2(1)=\chi_3(1)=\tfrac{1}{2}(q-\varepsilon).$$

Если φ_0, φ_1, φ_2 — неприводимые характеры Брауэра в B_0, то

$$\varphi_0(1)=1 \text{ и } \varphi_1(1)=\varphi_2(1)=(q-1)/2.$$

В каждом случае B_0 является единственным 2-блоком дефекта 2 группы G и потому содержит все неприводимые характеры нечетной степени.

§ 7. Группы с кватернионной S_2-подгруппой

Теорема 7.1. *Предположим, что $O_{2'}(G)=\langle 1\rangle$ и S_2-подгруппа T в G является (обобщенной) кватернионной группой. Тогда центр группы G имеет порядок 2.*

Первыми эту теорему доказали Брауэр и Судзуки [1959]. Ее доказательства можно также найти у Судзуки [1959] и Брауэра [1964b]. Все эти доказательства основаны на теории модулярных представлений. С некоторых пор известно элементарное доказательство, использующее только теорию обыкновенных характеров, если $|T|>8$; см., например, Фейт [1967c, § 30]. Не так давно Глауберман [1974] дал доказательство, использующее только обыкновенные характеры, для случая $|T|=8$. Доказательство, приведенное здесь, следует Брауэру [1964b]. Оно использует результаты, доказанные ранее в этой главе. По поводу результатов этого и следующего параграфов см. также Дейд [1971b].

Доказательство теоремы 7.1. Индукция по $|G|$. Пусть $|T|=2^{n+1}$ и

$$T=\langle y, z \mid y^{2^n}=1,\ y^{2^{n-1}}=z^2,\ z^{-1}yz=y^{-1}\rangle.$$

Пусть $t=y^{2^{n-1}}=z^2$ — единственная инволюция в T.

Допустим, что t содержится в собственной нормальной подгруппе H группы G. Силовская 2-подгруппа T_0 группы H содержит единственную инволюцию и потому является циклической или [обобщенной] кватернионной группой. Кроме того, $O_2(H)\subseteq O_2(G)=\langle 1\rangle$. Если T_0 циклическая, то H имеет нормальное 2-дополнение, и потому $T_0\lhd H$. Значит, $T_0\lhd G$ и также $\langle t\rangle\lhd G$. Итак, $t\in Z$, где Z — центр группы G. Если T_0 — кватернионная группа, то $\langle t\rangle\lhd H$ по индукции, следовательно, t — единственная инволюция в H. Значит, $\langle t\rangle\lhd G$, и потому $t\in Z$. Итак, в обоих случаях $t\in Z$. Из того, что $O_2(G)=\langle 1\rangle$, а $\langle t\rangle$ является центром группы T, следует, что $\langle t\rangle=Z$. Таким образом, достаточно доказать, что t содержится в собственной нормальной подгруппе группы G.

Сначала предположим, что $|T|>8$, т. е. $n>2$. Пусть $N=T$, $P=\langle y\rangle$ и U — множество всех элементов из P порядков 2^n или $2^{n-1}>2$. Мы покажем, что выполнены условия теоремы (3.6) с $w=1$.

Если $s\in U$, то $C_G(s)$ не может содержать S_2-подгруппу из G, так как центр группы T имеет порядок 2. Таким образом, P является S_2-подгруппой в $C_G(s)$, а поскольку группа P циклическая, $C_G(s)$ имеет нормальное дополнение. Следовательно, $\lambda(C_G(s))=2^n=|C_N(s)|$, и $w=1$. Если s, $s_1\in U$ и сопряжены в G, то $s_1=s^k$ для некоторого нечетного k. Поэтому, если $x^{-1}sx=s_1$, то $2'$-часть элемента x коммутирует с s, и x можно считать 2-элементом. Таким образом, $\langle x, s\rangle$ является 2-группой — подгруппой кватернионной группы порядка 2^{n+1}. Следовательно, $s_1=s^{\pm 1}$, и (3.6) (i) выполнено.

Пусть ψ — линейный характер P, для которого $\psi(y)=\sqrt{-1}$. Функция $\theta=\psi-1$ исчезает на $P-U$. Тогда (3.6) влечет

$$(\mathfrak{a}(\theta), \mathfrak{a}(\theta))=(\psi-1, \psi-1+\psi^z-1)=3.$$

Поскольку $\mathfrak{a}(\theta)$ — столбец с целочисленными коэффициентами, это показывает, что имеются ровно 3 ненулевых коэффициента. Ни один 2-элемент не обращается инволюцией, так как инволюция лежит в центре любой 2-группы, которая содержит эту инволюцию. Тогда из (3.7) вытекает, что $\langle t\rangle$ содержится в собственной нормальной подгруппе в G.

Итак, остается предположить, что $n=2$ и T — обычная группа кватернионов. Представителями сопряженных классов в T служат 1, t, y, z, yz. Если никакие два элемента из вышеприведенного списка не сопряжены в G, то G имеет нормальное 2-дополнение по теореме Фробениуса, и результат тривиален. Допустим, два таких элемента сопряжены, скажем, $x^{-1}yx=z$. Тогда $x^{-1}N_G(\langle y\rangle)x=N_G(\langle z\rangle)$. Поскольку T является S_2-подгруппой в $N_G(\langle y\rangle)$ и в $N_G(\langle z\rangle)$, можно считать,

что $x \in N_G(T)$. Значит, x индуцирует автоморфизм нечетного порядка на T, так что $x^{-1}zx=(yz)^{\pm 1}$. Таким образом, G имеет единственный сопряженный класс элементов порядка 4, и каждый из элементов y, z, yz сопряжен в T со своим обратным. Кроме того, любые два элемента порядка 4 сопряжены в $C_G(t)$.

Группа $C_G(y)$ имеет циклическую S_2-подгруппу порядка 4, следовательно, обладает нормальным 2-дополнением. Таким образом, главный характер Брауэра φ_0^y является единственным неприводимым характером Брауэра главного блока группы $C_G(y)$, в силу (IV.4.12). Пусть $\chi(y)$, $\mathfrak{d}_0^y$ обозначают соответственно столбцы $(\chi_u(y))$, (d_{u0}^y). Ввиду (IV.6.1) и (V.6.2),

$$\chi(y)=\mathfrak{d}_0^y \tag{7.2}$$

По второй основной теореме о блоках (IV.6.1),

$$(\mathfrak{d}_0^y,\ \mathfrak{d}_0^y)=4,\ (\mathfrak{d}_0^y,\ \chi(1))=0, \tag{7.3}$$

где $\chi(1)$ — это столбец $(\chi_u(1))$.

Пусть $\bar{H}=C_G(t)/\langle t\rangle$, тогда $\bar{T}=\langle \bar{y}, \bar{z}\rangle$, где $\bar{y}^2=\bar{z}^2=1$, является S_2-подгруппой в $\bar{H}$. При этом $\bar{H}$ содержит единственный класс инволюций. Выберем базисное множество $\psi_0=1$, ψ_1, ψ_2 для главного блока группы $\bar{H}$ как в (6.4), так что инварианты Картана равны $1+\delta_{ij}$. Тогда ψ_0, ψ_1, ψ_2 образуют также базисное множество главного блока для $C_G(t)$, но инварианты Картана удваиваются по сравнению с найденными для $\bar{H}$. Пусть $\{d_{ui}^t\}$ — множество высших чисел разложения, соответствующих этому базисному множеству, и $\mathfrak{d}_i^t$ обозначает столбец (d_{ui}^t). Таким образом, в частности,

$$\chi_u(t)=\sum_{i=0}^{2} d_{ui}^t\psi_i(1). \tag{7.4}$$

Кроме того,

$$(\mathfrak{d}_i^t,\ \mathfrak{d}_j^t)=c_{ij}^t=2(1+\delta_{ij}), \tag{7.5}$$

$$(\chi(1),\ \mathfrak{d}_j^t)=(\mathfrak{d}_0^y,\ \mathfrak{d}_i^t)=0. \tag{7.6}$$

Степени $\psi_i(1)$ для $i=0$, 1, 2 нечетны. Если ζ — неприводимый характер группы T, то $\zeta(y)\equiv\zeta(t) \pmod 2$. Таким образом, $\chi_u(y)\equiv\chi_u(t) \pmod 2$ для всех u. Ввиду (7.2) и (7.4),

$$\mathfrak{d}_0^y+\mathfrak{d}_0^t+\mathfrak{d}_1^t+\mathfrak{d}_2^t\equiv 0 \pmod 2.$$

Определим

$$\begin{aligned}
2\mathfrak{v}_1&=\mathfrak{d}_0^y+\mathfrak{d}_0^t-\mathfrak{d}_1^t-\mathfrak{d}_2^t,\\
2\mathfrak{v}_2&=\mathfrak{d}_0^y+\mathfrak{d}_0^t-\mathfrak{d}_1^t+\mathfrak{d}_2^t,\\
2\mathfrak{v}_3&=\mathfrak{d}_0^y+\mathfrak{d}_0^t+\mathfrak{d}_1^t-\mathfrak{d}_2^t.
\end{aligned}$$

Тогда $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ — столбцы с целочисленными элементами. Согласно (7.3), (7.5) и (7.6),

$$(\chi(1),\ \mathfrak{v}_j)=0,\ (\mathfrak{d}_0^y,\ \mathfrak{v}_j)=2,\ (\mathfrak{v}_i,\ \mathfrak{v}_j)=1+2\delta_{ij}.$$

Отсюда видно, что каждый $\mathfrak{v}_j$ имеет по 3 ненулевых коэффициента, равных ± 1. Коэффициент 1 стоит в первой строке, соответствующей $\chi_0 = 1$. Выберем нумерацию так, чтобы два других ненулевых элемента δ_1, δ_2 столбца $\mathfrak{v}_1$ были во второй и третьей строках. Можно считать также, что коэффициенты столбца $\mathfrak{d}_0^y$ в первых трех строках равны 1, δ, 0, ибо $(\mathfrak{d}_0^y, \mathfrak{v}_1) = 2$.

Если коэффициент второй или третьей строки столбца $\mathfrak{v}_j$ $(j = 2, 3)$ отличен от нуля, то из $(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_j) = 1$ следует, что $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_j$ имеет единственный ненулевой коэффициент, вопреки равенству $(\chi(1), \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_j) = 0$. Значит, коэффициенты во второй и третьей строках столбцов $\mathfrak{v}_2$ и $\mathfrak{v}_3$ равны нулю. Тогда из (7.2) и (7.4) вытекает, что

$$[\mathfrak{d}_0^t - \mathfrak{d}_1^t - \mathfrak{d}_2^t]_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_1 \\ 2\delta_2 \end{pmatrix},$$

$$[\mathfrak{d}_0^t - \mathfrak{d}_1^t + \mathfrak{d}_2^t]_3 = [\mathfrak{d}_0^t + \mathfrak{d}_1^t - \mathfrak{d}_2^t]_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $[\ \ ]_3$ означает, что мы смотрим только на первые три строки. Следовательно,

$$\chi_1(t) = -\delta_1(1 + \psi_1(1) + \psi_2(1)), \quad \chi_2(t) = -\delta_2(\psi_1(1) + \psi_2(1)).$$

Отсюда

$$1 + \delta_1\chi_1(t) - \delta_2\chi_2(t) = 0. \tag{7.7}$$

Поскольку $(\chi(1), \mathfrak{v}_1) = 0$, получаем

$$1 + \delta_1\chi_1(1) + \delta_2\chi_2(1) = 0. \tag{7.8}$$

Никакой 2-сингулярный элемент в G не является произведением двух инволюций, так как t — единственная инволюция в T. Таким образом, если элемент s является 2-сингулярным, то

$$\sum \frac{\chi_u(s)\chi_u(t)^2}{\chi_u(1)} = 0,$$

где χ_u пробегает все неприводимые характеры группы G. Тогда, согласно (IV.6.3),

$$\sum_{\chi_u \in B_0} \frac{\chi_u(s)\chi_u(t)^2}{\chi_u(1)} = 0$$

для любого 2-сингулярного элемента s. Пусть $\mathfrak{v}_1 = (v_u)$, тогда $\mathfrak{v}_1$ является линейной комбинацией столбцов $(\chi_u(s))$ для $s \in T - \{1\}$. Итак,

$$\sum_{\chi_u \in B} \frac{v_u\chi_u(t)^2}{\chi_u(1)} = 0.$$

Следовательно,

$$1 + \frac{\delta_1\chi_1(t)^2}{\chi_1(1)} + \frac{\delta_2\chi_2(t)^2}{\chi_2(1)} = 0. \tag{7.9}$$

Если (7.7) и (7.8) подставить в (7.9), получается

$$\frac{\delta_1\{\chi_1(1)-\chi_1(t)\}^2}{\chi_1(1)\{1+\delta_1\chi_1(1)\}}=0,$$

так что $\chi_1(1)=\chi_1(t)$. Итак, t лежит в ядре H характера χ_1. Из $\chi_1\neq 1$ следует, что $H\neq G$. □

§ 8. Z^*-теорема

Пусть G — группа, $Z(G)$ — центр G, а $Z^*(G)$ — прообраз в G группы $Z(G/O_2\cdot(G))$. Если $O_2\cdot(G)=\langle 1\rangle$, то, разумеется, $Z^*(G)=Z(G)$.

Теорема 8.1. *Пусть t — инволюция в G и T — некоторая S_2-подгруппа в G, содержащая t. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *для всех $x\in G$ элемент $x^{-1}txt$ имеет нечетный порядок;*

(ii) *ни один элемент из $T-\{t\}$ не сопряжен с t в G;*

(iii) $t\in Z^*(G)$.

Этот результат, известный как Z^*-теорема, принадлежит Глауберману [1966a]. Он является жизненно важным для многих результатов, связанных с классификацией конечных простых групп. Глауберман [1966b] использовал ее также для вывода некоторых результатов о группах автоморфизмов простых групп. Голдшмидт [1972] обобщил эту теорему.

Если T — кватернионная группа, то (8.1) (ii), очевидно, выполнено. Таким образом, (7.1) является непосредственным следствием из (8.1). Однако (7.1) требуется для доказательства (8.1). Мы будем довольно точно следовать доказательству Глаубермана. Начнем с одного хорошо известного результата об инволюциях.

По определению, диэдральная группа H порядка $2n$, $n>1$, есть

$$H=\langle u,\ x\,|\,u^2=x^n=1,\ uxu=x^{-1}\rangle.$$

В частности, нециклическая группа порядка 4 является диэдральной группой порядка 4.

Лемма 8.2. *Пусть u, v, $u\neq v$, — инволюции в G и $H=\langle u, v\rangle$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) $|H:\langle uv\rangle|=2$ *и H является диэдральной группой.*

(ii) *S_2-подгруппа в H либо имеет порядок 2, либо является диэдральной группой.*

(iii) *Если $4\nmid|H|$, то u, v сопряжены в H.*

(iv) *Если $4\,||\,H|$, то $|H:H'|=4$, причем u, v не сопряжены в H.*

(v) *Если $4\,||\,H|$, то либо $|H|=4$, либо $|Z(H)|=2$, причем ни u, ни v не лежат в $Z(H)$.*

Доказательство. (i) Следует из равенства $u^{-1}(uv)u=vu=(uv)^{-1}$.

(ii) Пусть $x=uv$ имеет порядок mn, где m нечетно, а n является степенью 2. Тогда $\langle u, x^m\rangle$ является S_2-подгруппой в H. Поскольку $ux^mu=x^{-m}$, то либо $x^m=1$, либо $\langle u, x^m\rangle$ — диэдральная группа.

(iii) Поскольку $4 \nmid |H|$, то $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$ являются S_2-подгруппами в H и потому сопряжены в H. Так как u, v — единственные элементы 2-го порядка соответственно в $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$, они сопряжены.

(iv) Имеем $(uv)^2 = uvu^{-1}v^{-1} \in H'$. Из условия $4 \mid |H|$ следует, что $|H : \langle (uv)^2 \rangle| = 4$, а так как $\langle (uv)^2 \rangle \lhd H$, то $\langle (uv)^2 \rangle = H$. Значит, $|H : H'| = 4$. Кроме того, $uH' \neq vH'$, так что $v \neq y^{-1}uy$ ни для какого $y \in H$.

(v) Элемент $x = uv$ имеет порядок $2m$ для некоторого натурального $m > 0$. Поскольку $u^{-1}x^k u = x^{-k}$, единственная степень x, лежащая в центре H, — инволюция x^m. Отсюда легко вытекает утверждение. □

Следующие две леммы доказывают простые импликации в (8.1).

Лемма 8.3. *Утверждения* (i) *и* (ii) *из* (8.1) *эквивалентны.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Предположим, что $x^{-1}tx \in T$. Тогда $x^{-1}txt \in T$ и этот элемент имеет нечетный порядок. Следовательно, $x^{-1}txt = 1$, и значит, $x^{-1}tx = t^{-1} = t$.

(ii)⇒(i). Пусть $x \in G$ и $s = x^{-1}tx$. Предположим, что $st = x^{-1}txt$ имеет четный порядок, так что $4 \mid |\langle s, t \rangle|$. Согласно (8.2) (v), в центре $\langle s, t \rangle$ найдется инволюция $z \neq s, t$. Пусть D есть S_2-подгруппа в $\langle s, t \rangle$, содержащая t, тогда $z \in D$ и D является диэдральной группой, согласно (8.2) (ii). Найдется такой $y \in \langle s, t \rangle$, что $y^{-1}sy \in D$, причем $y^{-1}sy \neq t$, в силу (8.1) (iv). Выберем $x \in G$ так, чтобы $x^{-1}Dx \subseteq T$. Тогда $x^{-1}tx \in T$ и $x^{-1}(y^{-1}sy)x \in T$. Отсюда, по условию, $x^{-1}tx = t = x^{-1}(y^{-1}sy)x$, так что $t = y^{-1}sy$, вопреки тому, что было установлено выше. □

Лемма 8.4. *Утверждения* (8.1) (i) *и* (ii) *следуют из* (8.1) (iii).

Доказательство. Очевидно, (8.1) (iii) влечет (8.1) (i). Теперь результат следует из (8.3). □

Ввиду (8.3) и (8.4), доказательство (8.1) будет закончено, как только будет показано, что (8.1) (iii) следует из (8.1) (i). Это будет сделано в ряде лемм.

До конца параграфа G — минимальный контрпример к утверждению, что из (8.1) (i) *следует* (8.1) (iii).

Итак, в G существует инволюция $t \notin Z^*(G)$, такая, что $x^{-1}txt$ имеет нечетный порядок для любого $x \in G$. Заметим, что любая подгруппа группы G, содержащая t, удовлетворяет (8.1) (i), так же как и любая факторгруппа G/H, если $t \notin H$.

Лемма 8.5. *Если* $H \lhd G$, *то* $O_{2'}(H) = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Минимальность G влечет $O_{2'}(G) = \langle 1 \rangle$. Значит, $O_{2'}(H) \subseteq O_{2'}(G) = \langle 1 \rangle$. □

Лемма 8.6. *Элемент t лежит в центре любой 2-подгруппы, содержащей t.*

Доказательство. Пусть D является 2-группой и $t \in D$. Если $x \in D$, то $x^{-1}txt \in D$ и имеет нечетный порядок. Следовательно, $x^{-1}txt = 1$. □

Лемма 8.7. *Группа T содержит инволюцию, отличную от t.*

Доказательство. Если утверждение неверно. T является циклической или кватернионной группой. Если T циклическая, то G имеет

нормальное 2-дополнение. В таком случае, ввиду (8.5), $G=T$, и результат тривиален. Если T — кватернионная группа, то $t\in Z^*(G)$, согласно (7.1). □

Лемма 8.8. *Пусть χ — неприводимый характер из главного 2-блока группы G. Если s — инволюция в G, не сопряженная с t, то существует элемент $s_0\in C_G(t)$, сопряженный с s, такой, что $\chi(ts)=\chi(ts_0)$.*

Доказательство. В силу (8.2) (iii), st имеет четный порядок. Пусть z — инволюция, которая равна степени st. Пусть T_0 — некоторая S_2-подгруппа в $\langle s, t\rangle$, причем $t\in T_0$. Согласно (8.2) (ii), T_0 является диэдральной группой. Согласно (8.6), z и t лежат в центре T_0, так что $|T_0|=4$, ввиду (8.2) (v). Пусть инволюция s_0 сопряжена с s в $\langle s, t\rangle$ и лежит в T_0. Тогда $s_0\neq z$, t, $s_0\in C_G(t)$ и $z=ts_0$.

Поскольку $st=yz=zy$, где y имеет нечетный порядок, из (V.6.3) применительно к $C_G(z)$ следует, что

$$\chi(ts)=\chi(zy)=\chi(z)=\chi(ts_0). \quad \square$$

Лемма 8.9. *Пусть s — инволюция в G, не сопряженная с t, а s', t' — элементы, сопряженные в G соответственно с s, t. Если χ — неприводимый характер из главного 2-блока группы G, то $\chi(ts)=\chi(t's')$.*

Доказательство. Если $t'=x^{-1}tx$, то $t's'=x^{-1}(txs'x^{-1})x$, поэтому можно считать, что $t'=t$, так как χ является функцией классов на G. Согласно (8.8), существуют такие элементы s_0, s_0', сопряженные с элементом s в $C_G(t)$, для которых

$$\chi(ts)=\chi(ts_0),\quad \chi(ts')=\chi(ts_0'). \tag{8.10}$$

Пусть $x^{-1}s_0'x=s_0$, тогда t и $x^{-1}tx$ лежат в $C_G(s_0)$. По условию, $x^{-1}txt$ имеет нечетный порядок, и в силу (8.2) (iii), найдется такой $y\in\langle t, x^{-1}tx\rangle\subseteq C_G(s_0)$, что $y^{-1}ty=x^{-1}tx$. Таким образом, $yx^{-1}\in C_G(t)$ и $(yx^{-1})^{-1}(ts_0)(yx^{-1})=t(yx^{-1})^{-1}s_0(yx^{-1})=txs_0x^{-1}=ts_0'$. Отсюда $\chi(ts_0)=\chi(ts')$, и результат следует из (8.10). □

Лемма 8.11. *Пусть s — инволюция в T, $s\neq t$ и χ — неприводимый характер из главного 2-блока группы G, $\chi\neq 1$. Если $\chi(s)\neq 0$, то $\chi(t)=-\chi(1)$.*

Доказательство. Ввиду (8.3), s не сопряжена с t в G. Пусть C_0, C_1, ... — все сопряженные классы группы G, причем $C_0=\{1\}$, $t\in C_1$, $s\in C_2$. Пусть $\hat{C}_i=\sum_{x\in C_i}x$ в комплексной групповой алгебре группы G и $\hat{C}_1\hat{C}_2=\sum a_j\hat{C}_j$. Таким образом,

$$|C_1||C_2|=\sum_j a_j|C_j|. \tag{8.12}$$

Зафиксируем $x_j\in C_j$ для каждого j. Если ω — центральный характер, соответствующий χ, то $\omega(C_j)=|C_j|\chi(x_j)/\chi(1)$, так что

$$\frac{|C_1|\chi(t)}{\chi(1)}\,\frac{|C_2|\chi(s)}{\chi(1)}=\sum_j a_j\frac{|C_j|\chi(x_j)}{\chi(1)}.$$

Пусть $\alpha(x)=\chi(x)/\chi(1)$, $x\in G$. Согласно (8.9), $\chi(x_j)=\chi(ts)$, если $a_j\neq 0$. Следовательно,

$$|C_1|\alpha(t)|C_2|\alpha(s)=\sum_j a_j|C_j|\alpha(ts)=\alpha(ts)\sum_j a_j|C_j|.$$

Таким образом, (8.12) влечет

$$\alpha(t)\alpha(s)=\alpha(ts).$$

Так как, согласно (8.6), $t\in Z(T)$, то ts является инволюцией в T, причем $ts\neq t$. Предыдущее рассуждение применительно к ts дает $\alpha(t)\alpha(ts)=\alpha(s)$, значит,

$$\alpha(t)^2\alpha(s)=\alpha(t)\alpha(ts)=\alpha(s).$$

Теперь предположим, что $\chi(s)\neq 0$ и $\chi\neq 1$. Тогда $\alpha(s)\neq 0$, откуда $\alpha(t)^2=1$, т. е. $\alpha(t)=\pm 1$ и $\chi(t)=\pm\chi(1)$. Допустим, что $\chi(t)=\chi(1)$. Тогда t содержится в ядре H характера χ. Так как $\chi\neq 1$, то $H\neq G$. Тогда из минимальности G следует, что $t\in Z^*(H)$. В силу (8.5), $Z^*(H)=Z(H)$, и значит, $t\in Z(H)$. Пусть $x\in G$, тогда $x^{-1}tx$ — инволюция в H, следовательно, $(x^{-1}txt)^2=1$. Но $x^{-1}txt$ имеет нечетный порядок, поэтому $x^{-1}txt=1$. Следовательно, $t\in Z(G)$. □

Доказательство теоремы 8.1. Согласно (8.7), T содержит инволюцию $s\neq t$, причем, в силу (8.3), s не сопряжена с t в G. По (IV.6.3),

$$0=\sum_u \chi_u(s)\chi_u(t)=\sum_u \chi_u(s)\chi_u(1),$$

где χ_u пробегает все неприводимые характеры главного 2-блока группы G. Теперь из (8.11) следует, что если $\chi_0=1$, то

$$2=\chi_0(s)(\chi_0(t)+1)=\sum_u \chi_u(s)(\chi_u(t)+\chi_u(1))=\sum_u \chi_u(s)\chi_u(t)+\sum_u \chi_u(s)\chi_u(1)=0.$$

Это противоречие завершает доказательство. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ [1])

Айзекс (Isaacs I. M.)

[1973] Characters of solvable and symplectic groups // Amer. J. Math.— 1973.— V. 95.— P. 594—635.

[1974] Lifting Brauer characters of p-solvable groups // Pacific J. Math.— 1974.— V. 53, N 1.— P. 171—188.

[1976] Character theory of finite groups.— New York: Acad. Press, 1976.

[1978] Lifting Brauer characters of p-solvable groups II // J. Algebra.— 1978.— V. 51, N 2.— P. 476—490.

Айзекс, Пасман (Isaacs I. M., Passman D. S.)

[1964] Groups with representations of bounded degree // Canad. J. Math.— 1964.— V. 16, N 2.— P. 299—309.

Айзекс, Скотт (Isaacs I. M., Scott L.)

[1972] Blocks and subgroups // J. Algebra.— 1972.— V. 20.— P. 630—636.

Айзекс, Смит (Isaacs I. M., Smith S. D.)

[1976] A note on groups of p-length 1 // J. Algebra.— 1976.— V. 38.— P. 531—535.

Алперин (Alperin J. L.)

[1967] Sylow intersections and fusion // J. Algebra.— 1967.— V. 6, N 2.— P. 222—241.

[1973] Minimal resolutions // Finite Groups '72. Proc. Gainsville Conf., 1972.— Amsterdam: North Holland, 1973.— P. 1—2.

[1976a] The main problem of block theory // Proceedings of the Conference on Finite Groups.— New York: Academic Press, 1976.— P. 341—356.

[1976b] Resolutions for finite groups // International Symposium on the Theory of Finite Groups.— Tokyo: Japan Soc. for Promotion of Science, 1976.— P. 1—7.

[1976c] On modules for the linear fractional groups // International Symposium on the Theory of Finite Groups.— Tokyo: Japan Soc. for Promotion of Science, 1976.— P. 157—163.

[1976d] Isomorphic blocks // J. Algebra.— 1976.— V. 43.— P. 694—698.

[1976e] Projective modules and tensor products // J. Pure and Applied Algebra.— 1976.— V. 8.— P. 235—241.

[1977a] On the Brauer correspondence // J. Algebra.— 1977.— V. 47.— P. 197—200.

[1977b] Periodicity in groups // Illinois J. Math.— 1977.— V. 21.— P. 776—783.

[1979] Projective modules for $SL(2,2^n)$ // J. Pure and Applied Algebra.— 1979.— V. 15, N 3.— P. 219—234.

[1986*] Local representation theory.— Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

Алперин, Барри (Alperin J. L., Burry D. W.)

[1980] Block theory with modules // J. Algebra.— 1980.— V. 65, N 1.— P. 225—233.

---

[1]) Звездочкой помечены работы, добавленные при переводе.— *Примеч. пер.*

Алперин, Бруё (Alperin J. L., Broué M.)
[1979] Local methods in block theory // Ann. Math.— 1979.— V. 110, N 1.— P. 143—157.
Алперин, Януш (Alperin J. L., Janusz G. J.)
[1973] Resolutions and periodicity // Proc. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 37.— P. 403—406.
Барри (Burry D. W.)
[1979] A strengthened theory of vertices and sources // J. Algebra.— 1979.— V. 59, N 2.— P. 330—344.
[1980] The distribution of modular representations into blocks // Proc. Amer Math. Soc.— 1980.— V. 78.— P. 14—16.
[1982*] Scott modules and lower defect groups // Commun. Algebra.— 1982.— V. 10, N 17.— P. 1855—1872.
Басмаи (Basmaji B. G.)
[1972] Modular representations of metabelian groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— V. 169.— P. 389—399. Addendum.— 1973.— V. 180.— P. 507—508.
Батлер (Butler M. C. R.)
[1974] On the classification of local integral representatins of finite abelian p-groups // Carleton Math. Lecture Notes.— Ottawa: Carlenton Univ., 1974.
Башев В. А.
[1961] Представление группы $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ в поле характеристики 2 // ДАН СССР.— 1961.— Т. 141.— С. 1015—1018.
Белоногов В. А.
[1984*] D-блоки характеров конечной группы // Исслед. по теории групп.— Свердловск, 1984.— С. 3—31.
[1986*] Взаимодействия в конечных группах и векторных пространствах. Структурные вопросы теории групп.— Свердловск, 1986.
Бенард (Benard M.)
[1976] Schur indices and cyclic defect groups // Ann. Math.— 1976.— V. 103.— P. 283—304.
Бергер (Berger T. R.)
[1976] Irreducible modules of solvable groups are algebraic // Proceedings of the Conference on Finite Groups.— New York: Academic Press, 1976.— P. 541—553.
[1979] Solvable groups and algebraic modules // J. Algebra.— 1979.— V. 57, N 2.— P. 387—406.
Берман С. Д.
[1960] Модулярные представления конечных сверхразрешимых групп // Доповіді АН УРСР.— 1960.— Т. 5.— С. 586—589.
Блау (Blau H. I.)
[1971a] Under the degree of some finite linear groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— V. 155.— P. 95—113.
[1971b] An inequality for complex linear groups of small degree // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— V. 28.— P. 405—408.
[1974a] Indecomposable modules for direct products of finite groups // Pacific J. Math.— 1974.— V. 54, N 1.— P. 39—44.
[1974b] Finite groups where two small degrees are not too small // J. Algebra.— 1974.— V. 28.— P. 541—555.
[1974c] Some criteria for the nonexistence of certain finite linear groups // Proc. Amer. Math. Soc.— 1974.— V. 43.— P. 283—286.
[1975a] Under the degree of some finite linear groups II // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 203.— P. 87—96.
[1975b] On linear groups of degree $p-2$ // J. Algebra.— 1975.— V. 36.— P. 495—498.
[1975c] On finite linear groups of degree 16 // Illinois J. Math.— 1975.— V. 19.— P. 344—353.
[1975d] On the center of some finite linear groups // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 53.— P. 41—44.

[1976] Inequalities for some finite linear groups // J. Algebra.— 1976. V. 38, N 2.— P. 407—413.
[1980] Brauer trees and character degrees // Proc. Sympos. Pure Math. 37 (Santa Cruz, 1979).— Providence, RI, 1980.— P. 397—400.
[1985*] Characters degrees of groups with a cyclic Sylow subgroup // Commun. Algebra.— 1985.— V. 13, N 2.— P. 419—463.
Блихфельдт (Blichfeldt H. F.)
[1917] Finite Collineation Groups.— Chicago: Univ. of Chicago Press, 1917.
Боллард (Ballard J. W.)
[1976] Some generalized characters of finite Chevalley groups // Math. Z.— 1976.— V. 147.— P. 163—174.
Бондаренко В. М.
[1975] Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб.— 1975.— Т. 96.— С. 63—74.
Боревич З. И., Фаддеев Д. К.
[1959] Теория гомологий в группах II. Проективные резольвенты конечных групп // Вестник Ленингр. ун-та.— 1959.— Т. 14, № 7.— С. 72—87.
Брайант, Ковач (Bryant R. M., Kovacs L. G.)
[1972] Tensor products of representations of finite groups // Bull. London Math. Soc.— 1972.— V. 4.— P. 133—135.
Брауэр (Brauer R.)
[1935] Über die Darstellungen von Gruppen in Galoischen Feldern // Act. Sci. Ind. 195, Paris, 1935.
[1939a] On modular and p-adic representations of algebras // Proc. Nat. Acad. Sci.— 1939.— V. 25.— P. 252—258.
[1939b] On the representation of groups of finite order // Proc. Nat. Acad. Sci.— 1939.— V. 25.— P. 290—295.
[1941a] On the Cartan invariants of groups of finite order // Ann. Math.— 1941.— V. 42.— P. 53—61.
[1941b] On the connection between the ordinary and the modular characters of groups of finite order // Ann. Math.— 1941.— V. 42.— P. 926—935.
[1941c] Investigation on group characters // Ann. Math.— 1941.— V. 42.— P. 936—958.
[1942a] On groups whose order contains a prime number to the first power I // Amer. J. Math.— 1942.— V. 64.— P. 401—420.
[1942b] On groups whose order contains a prime to the first power II // Amer. J. Math.— 1942.— V. 64.— P. 421—440.
[1943] On permutation groups of prime degree and related classes of groups // Ann. Math.— 1943.— V. 44.— P. 57—79.
[1944] On the arithmetic in a group ring // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1944.— V. 30.— P. 109—114.
[1945] On the representation of a group of order g in the field of the gth roots of unity // Amer. J. Math.— 1945.— V. 67.— P. 461—471.
[1946a] On blocks of characters of groups of finite order. I // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1946.— V. 32.— P. 182—186.
[1946b] On blocks of characters of groups of finite order. II // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1946.— V. 32.— P. 215—219.
[1947] Applications of induced characters // Amer. J. Math.— 1947.— V. 69.— P. 709—716.
[1952] On the representations of groups of finite order // Proc. Internat. Congress Math., Cambridge, MA, 1950, vol. 2.— Ptovidence, RI, 1952.— P. 33—36.
[1953] A characterization of the characters of groups of finite order // Ann. Math.— 1953.— V. 57.— P. 357—377.
[1956] Zur Darstellungstheorie der gruppen endlicher Ordnung // Math. Z.— 1956.— Bd 63.— S. 406—444.
[1957] On the structure of groups of finite order // Proc. Internat. Congress Math. (Amsterdam, 1954), vol. 1, Noordhoff, Groningen.— Amsterdam: North Holland, 1957.— P. 209—217.

[1959] Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung // Math. Z.— 1959.— Bd 72.— S. 25—46.
[1961a] On blocks of representations of finite groups // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1961.— V. 47.— P. 1888—1890.
[1961b] Investigation on groups of even order, I // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1961.— V. 47.— P. 1891—1893.
[1962a] On groups of even order with an abelian 2-Sylow subgroup // Arch. Math.— 1962.— V. 13, N 1—3.— P. 55—60.
[1962b] On some conjectures concerning finite simple groups // Studies in Mathematical Analysis and Related Topics.— Stanford: Stanford Univ. Press, 1962.— P. 56—61.
[1963] Representations of finite groups // Lectures on Modern Mathematics, vol. 1.— New York: Wiley, 1963.— P. 133—175.
[1964a] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups, I // J. Algebra.— 1964.— N 1.— P. 152—167.
[1964b] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups, II // J. Algebra.— 1964.— V. 1, N 4.— P. 307—334.
[1964c] On certain classes of positive definite quadratic forms // Acta. Arith.— 1964.— V. 9.— P. 357—364.
[1966a] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups, III // J. Algebra.— 1966.— V. 3, N 2.— P. 225—255.
[1966b] Investigation on groups of even order, II // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1966.— V. 55.— P. 254—259.
[1966c] Some results on finite groups whose order contain a prime to the first power // Nagoya Math. J.— 1966.— V. 27.— P. 381—399.
[1967] On blocks and sections in finite groups, I // Amer. J. Math.— 1967.— V. 89.— P. 1115—1136.
[1968] On blocks and sections in finite groups, II // Amer. J. Math.— 1968.— V. 90.— P. 895—925.
[1969a] Defect groups in the theory of representations of finite groups // Illinois J. Math.— 1969.— V. 13, N 1.— P. 53—73.
[1969b] On the representations of finite groups // Some resent Advances in the Basic Sciences, vol. 2 (Proc. Annual Sci. Conf. Belfer Grad. School Sci., Yeshiva Univ., New York, 1965—1966).— New York: Yeshiva Univ., 1969.— P. 121—128.
[1970] On the first main theorem on blocks of characters of finite groups // Illinois J. Math.— 1970.— V. 14.— P. 183—187.
[1971a] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups, IV // J. Algebra,— 1971.— V. 17.— P. 489—521.
[1971b] Character theory of finite groups with wreathed Sylow 2-subgroups // J. Algebra.— 1971.— V. 19.— P. 547—592.
[1971c] Types of blocks of representations of finite groups // Representation Theory of Finite Groups and Related Topics (Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, WI, 1970).— Providence, RI, 1971.— P. 7—11.
[1971d] Blocks of characters // Actes Congres Internat. Math., vol. 1.— Paris, 1971.— P. 341—345.
[1974a] On the structure of blocks of characters of finite groups // Lect. Notes Math.— 1974.— V. 372.— P. 103—130.
[1974b] On 2-blocks with dihedral defect groups // Symposia Mathematica XIII.— London: Academic Press, 1974.— P. 367—393.
[1974c] Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups, V // J. Algebra.— 1974.— V. 28.— P. 433—460.
[1976a] Notes on representations of finite groups I // J. London Math. Soc.— 1976.— V. 13.— P. 162—166.
[1976b] On finite groups with cyclic Sylow subgroups, I // J. Algebra.— 1976.— V. 40, N 2.— P. 556—584.
[1979] On finite groups with cyclic Sylow subgroups, II // J. Algebra.— 1979.— V. 58, N 2.— P. 291—318.

Брауэр, Несбитт (Brauer R., Nesbitt C. J.)
[1937a] On the modular representation of groups of finite order I // Univ. of Toronto Studies Math.— 1937.— N 4.
[1937b] On the regular representations of algebras // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1937.— V. 23.— P. 236—240.
[1941] On the modular characters of groups // Ann. Math.— 1941.— V. 42.— P. 556—590.
Брауэр, Рейнольдс (Brauer R., Reynolds W. F.)
[1958] On a problem of E. Artin // Ann. Math.— 1958.— V. 68.— P. 713—720.
Брауэр, Судзуки (Brauer R., Suzuki M.)
[1959] On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1959.— V. 45.— P. 1757—1759.
Брауэр, Тейт (Brauer R., Tate J.)
[1955] On the characters of finite groups // Ann. Math.— 1955.— V. 62.— P. 1—7.
Брауэр, Туан (Brauer R., Tuan H. F.)
[1945] On simple groups of finite order // Bull. Amer. Math. Soc.— 1945.— V. 51.— P. 756—766.
Брауэр, Фаулер (Brauer R., Fowler K. A.)
[1955] On groups of even order // Ann. Math.— 1955.— V. 62.— P. 565—583.
Брауэр, Фейт (Brauer R., Feit W.)
[1959] On the number of irreducible characters of finite groups in a given block // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1959.— V. 45.— P. 361—365.
[1966] An analogue of Jordan's theorem in characteristic p // Ann. Math.— 1966.— V. 84.— P. 119—131.
Бруё (Broué M.)
[1972] Groupes de défaut d'un bloc pour un corps quelconque // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1972.— V. 275, ser. A—B.— P. A267—A269.
[1973] Groupes de défaut d'un bloc pour un corps quelconque // C. R. Acad. Sci Paris.— 1973.— V. 276, ser. A—B.— P. A603—A605.
[1975] Projectivité relative et groups de Grothendieck // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1975.— V. 280, ser. A—B.— P. A1357—A1360.
[1976a] Sur l'induction des modules indécomposables et la projectivité relative // Math. Z.— 1976.— Bd 149.— S. 227—245.
[1976b] Radical, hauteur, p-sections et blocs // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1976.— V. 283, ser. A—B.— P. A563—A565.
[1977] Certains invariants entiers d'un p-bloc // Math. Z.— 1977.— Bd 154.— S. 283—286.
[1978a] Remarks on blocks and subgroups // J. Algebra.— 1978.— V. 51.— P. 228—232.
[1978b] Radical, hauteurs, p-sections et blocs // Ann. Math.— 1978.— V. 107.— P. 89—107.
[1979] Brauer coefficients of p-subgroups associated with a p-block of a finite group // J. Algebra.— 1979.— V. 56, N 2.— P. 365—383.
[1980] On characters of height zero // Proc. Sympos. Pure Math. 37 (Santa Cruz, 1979).— Providence, RI, 1980.— P. 393—396.
Бруё, Пьюдж (Broué M., Puig L.)
[1981] A Frobenius theorem for blocks // Invent. Math.— 1980.— V. 56, N 2.— P. 117—128.
Буркхардт (Burkhardt R.)
[1976a] Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen PSL $(2, p^f)$ // J. Algebra.— 1976.— V. 40, N 1.— P. 75—96.
[1976b] Über ein kombinatorisches Problem aus der modularen Darstellungstheorie // J. Comb. Theory.— 1976.— V. 21, ser. A.— P. 68—79.
[1979a] Über die Zerlegungszahlen der Suzukigruppen $Sz(q)$ // J. Algebra.— 1979.— V. 59, N 2.— P. 421—433.
[1979b] Über die Zerlegungszahlen der unitären Gruppen PSU $(3, 2^{2f})$ // J. Algebra.— 1979.— V. 61, N 2.— P. 548—581.

Вада (Wada T.)
[1977] On the existence of p-blocks with given defect groups // Hokkaido Math. J.— 1977.— V. 6.— P. 243—248.
Валлес (Wallace D. A. R.)
[1958] Note on the radical of a group algebra // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1958.— V. 54.— P. 128—130.
[1961] On the radical of a group algebra // Proc. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 12, N 1.— P. 133—137.
[1962a] Group algebras with radicals of square zero // Proc. Glasgow Math. Assoc.— 1962.— V. 5, N 4.— P. 158—159.
[1962b] Group algebras with central radicals // Proc. Glasgow Math. Assoc.— 1962.— V. 5, N 3.— P. 103—108.
[1965] On the commutativity of the radical of a group algebra // Proc. Glasgow Math. Assoc.— 1965.— V. 7.— P. 1—8.
[1968] Lower bounds for the radical of group algebra of a finite p-solvable group // Proc. Edinburgh Math. Soc.— 1968.— V. 16.— P. 127—134.
Валлис (Wallis W. D.)
[1968] A reduction of the problem of semisimplicity // J. Algebra.— 1968.— V. 10.— P. 501—502.
[1969] Factor ideals of some representation algebras // J. Austral. Math. Soc.— 1969.— V. 9.— P. 109—123.
Ватанабе (Watanabe A.)
[1979] On Fong's reductions // Kumamoto J. Sci. (Math.).— 1979.— V. 13.— P. 48—54.
Виланд (Wielandt H.)
[1956] Primitive Permutationsgruppen von Grad $2p$ // Math. Z.— 1956.— Bd 63.— S. 478—485.
[1964] Finite Permutatin Groups.— New York—London: Acad. Press, 1964.
[1969] Permutation groups through invariant relations and invariant functions // Lecture Notes Dept. of Math. Ohio State Univ.— Ohio, 1969.
Виллемс (Willems W.)
[1975] Bemerkungen zur modularen Darstellungstheorie III. Induzierte und eingeschränkte Moduln // Arch. Math.— 1975.— Bd 26.— S. 497—503.
[1977] Metrische G-Moduln über Körpern der Characteristic 2 // Math. Z.— 1977.— Bd 157.— S. 131—139.
[1978] Ueber die Existenz von Blöcken // J. Algebra.— 1978.— V. 53. P. 402.
[1980] On the projectives of a group algebra // Math. Z. 1980.— Bd 171.— S. 163—174.
[1981] A remark on the degree-problem in modular representation theory // Commun. Algebra.— 1981.— V. 9, N 14.— P. 1543—1546.
Виллямайор (Villamayor O. E.)
[1959] On the semi-simplicity of group algebras II // Proc. Amer. Math. Soc.— 1959. — V. 9. P. 621—627.
Вольф (Wolf T.)
[1978] Characters of p'-degrees in solvable groups // Pacific. J. Math.— 1978.— V. 74.— P. 267—271.
[1981*] Defect groups and character heights in blocks of solvable group // J. Algebra.— 1981.— V. 72, N 1.— P. 183—209.
Гагола (Gagola S. M., Jr.)
[1975] A note on lifting Brauer characters // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 53.— P. 295—300.
Гамерник (Hamernik W.)
[1973] The linear character of an indecomposable module of a group algebra // J. London Math. Soc.— 1973.— V. 7.— P. 220—224.
[1974a] Indecomposable modules with cyclic vertex // Carleton Math. Lecture Notes 9.— Ottawa: Carleton Univ., 1974.
[1974b] Group algebras of finite groups—defect groups and vertices // Vorlesungen aus dem Mathematischen Institut Giessen, Heft 3.— Giessen, 1974.

[1975a] Indecomposable modules with cyclic vertex // Math. Z.— 1975. — Bd 142. S. 87—90.
[1975b] Group structure and properties of block ideals of the group algebra // Glasgow Math. J.— 1975. — V. 16. — P. 22—28.
Гамерник, Михлер (Hamernik W., Michler G.)
[1972] On Brauer's main theorem on blocks with normal defect groups // J. Algebra.— 1972.— V. 22.— P. 1—11.
[1973] Hauptblöcke von Gruppenalgebren // Arch. Math.— 1973.— Bd 24.— S. 21—24.
[1976] On vertices of simple modules in p-solvable groups // Math. Sem. Giessen.— 1976.— V. 121.— P. 147—162.
Герцог (Herzog M.)
[1969] On finite groups with independent cyclic Sylow subgroups // Pacific. J. Math. 1969.— V. 29.— P. 285—293.
[1970] On a problem of E. Artin // J. Algebra.— 1970. — V. 15.— P. 408—416.
[1971] Finite groups with a large cyclic Sylow subgroup // Finite Simple Groups. — London: Academic Press, 1971.— P. 199—203.
Глауберман (Glauberman G.)
[1966a] Central elements in core-free groups // J. Algebra.— 1966.— V. 4. P. 403—420.
[1966b] On the automorphism group of a finite group having no non-identity normal sub-group of odd order // Math. Z. 1966. — Bd 93.— S. 154 160.
[1968] A characterization of the Suzuki groups // Illinois J. Math.— 1968. V. 12.— P. 76—98.
[1974] On groups with a quaternion Sylow 2-subgroup // Illinois J. Math.— 1974. V. 18.— P. 60—65.
Глюк (Gluck D.)
[1984*] On the k(GV) problem // J. Algebra.— 1984.— V. 89, N 1.— P. 46—55.
[1984*] Brauer's height conjecture for p-solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984. V. 282, N 1.— P. 137—152.
Голдшмидт (Goldschmidt D. M.)
[1972] An application of Brauer's second main theorem // J. Algebra.— 1972.— V. 20.— P. 72 77.
[1980] Lectures on Character Theory.— Berkely: Publish or Perish, 1980.
Горенстейн (Gorenstein D.)
[1968] Finite Groups. — New York: Harper and Row, 1968.
Горенстейн, Уолтер (Gorenstein D., Walter J. H.)
[1962] On finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups // Illinois J. Math. — 1962. V. 6, N 4.— P. 553 — 593.
Гоу (Gow R.)
[1975] Schur indices and modular representations // Math. Z.— 1975.— Bd 144.— S. 97—99.
[1978] A note on p-blocks of a finite group // J. London Math. Soc.— 1978. V. 18.— P. 61—64.
[1980] On the number of characters in a p-block of a p-solvable group // J. Algebra.— 1980.— V. 65, N 2.— P. 421—426.
Гресь П. Г.
[1980*] Доказательство для p-разрешимых групп гипотезы Альперина о числе характеров высоты 0 // VI Всесоюзн. симпоз. по теории групп. — Киев: Наукова думка, 1980.— С. 179—188.
[1986*] Несколько следствий для p-разрешимых групп гипотезы Алперина // Укр. мат. ж. — 1986.— Т. 38, № 1. — С. 17—22.
[1987*] К гипотезе о числе характеров в p-блоке // Мат. заметки.— 1987.— Т. 42, № 5.— С. 642 649.
Грин (Green J. A.)
[1959a] On the indecomposable representations of a finite group // Math. Z.— 1959. Bd 70.— S. 430 445.

[1959b] A lifting theorem for modular representations // Proc. Royal Soc.— 1959.— V. 252, ser. A.— P. 135—142.
[1962a] Blocks of modular representations // Math. Z.— 1962.— Bd 79.— S. 100—115.
[1962b] The modular representation algebra of a finite group // Illinois J. Math.— 1962.— V. 6, N 4.— P. 607—619.
[1964] A transfer theorem for modular representations // J. Algebra.— 1964.— V. 1, N 1.— P. 73—84.
[1968] Some remarks on defect groups // Math. Z.— 1968.— Bd 107.— S. 133—150.
[1971] Axiomatic representation theory for finite groups // J. Pure Applied Algebra. —1971.— V. 1.— P. 41—77.
[1972] Relative module categories for finite groups // J. Pure Applied Algebra.— 1972.— V. 2.— P. 371—393.
[1974a] Walking around the Brauer tree // J. Austral Math. Soc.— 1974.— V. 17.— P. 197—213.
[1974b] Vorlesungen über Modulare Darstellungstheorie endlicher Gruppen // Vorlesungen aus dem Math. Inst. Giessen, Heft 2.— Giessen, 1974.
[1978] On the Brauer homomorphism // J. London Math. Soc.— 1978.— V. 17.— P. 58—66.
[1983*] Multiplicities, Scott modules and lower defect groups // J. London Math. Soc. - 1983.— V. 28.— P. 282—292.

Грин, Лерер, Люстиг (Green J. A., Lehrer G. I., Lusztig G.)
[1976] On the degrees of certain group characters // Quart. J. Math.— 1976.— V. 27.— P. 1—4.

Грин, Стоунхевер (Green J. A., Stonehewer S. E.)
[1969] The radicals of some group algebras // J. Algebra.— 1969.— V. 13.— P. 137—142.

Грин, Хилл (Green J. A., Hill R.)
[1969] On a theorem of Fong and Gaschütz // J. London Math. Soc.— 1969.— V. 1.— P. 573—576.

Гудивок П. М.
[1974] О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. - 1974.- Т. 214, № 5.- С. 993—996.
[1977] О модулярных и целочисленных p-адических представлениях прямого произведения групп // Укр. мат. ж.— 1977.— Т. 29, № 5.— С. 580—588.

Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.
[1971] Об алгебре целочисленных представлений конечной группы // ДАН СССР.— 1971.— Т. 198, № 3.— С. 509—512.

Гудивок П. М., Рудько В. П.
[1973] Об алгебрах модулярных и целочисленных представлений конечных групп // Изв. АН СССР. Математика. —1973. Т. 37, № 5.— С. 963—987.
[1985*] Тензорные произведения представлений конечных групп.— Ужгород, 1985.

Деггер (Dagger S. W.)
[1971] On the blocks of the Chevalley groups // J. London Math. Soc.— 1971.— V. 3.— P. 21—29.

Дейд (Dade E. C.)
[1964] Lifting group characters // Ann. Math.— 1964.— V. 79.— P. 590—596.
[1965] On Brauer's second main theorem // J. Algebra.— 1965.— V. 2.— P. 299—311.
[1966] Blocks with cyclic defect groups // Ann. Math.— 1966.— V. 84.— P. 20—48.
[1971a] A Clifford theory for blocks // Representation Theory of Finite Groups and Related Topics (Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, WI, 1970).— Providence, RI, 1971.— P. 33—36.
[1971b] Character theory pertaining to finite simple groups // Finite Simple Groups.— London: Academic Press, 1971.— P. 249—327.
[1972] Une extension de la théorie de Hall et Higman // J. Algebra.— 1972.— V. 20.— P. 570—609.

[1973] Block extensions // Illinois J. Math.— 1973.— V. 17.— P. 198—272.
[1977] Remarks on isomorphic blocks // J. Algebra.— 1977.— V. 45.— P. 254—258.
[1978a] Endo-permutation modules over p-groups, I // Ann. Math.— 1978.— V. 107.— P. 459—494.
[1978b] Endo-permutation modules over p-groups, II // Ann. Math.— 1978.— V. 108.— P. 317—346.
[1980] A correspondence of characters // Proc. Sympos. Pure Math. 37 (Santa Cruz, 1979).— Providence, RI, 1980.— P. 401—404.

Дескинс (Deskins W. E.)
[1958] On the radical of a group algebra // Pacific J. Math.— 1958.— V. 8.— P. 693—697.

Джеймс (James G. D.)
[1973] The modular characters of the Mathieu groups // J. Algebra.— 1973.— V. 27.— P. 57—111.
[1976] Representations of the symmetric groups over the field of order 2 // J. Algebra.— 1976.— V. 38.— P. 280—308.
[1978] The representation theory of the symmetric groups // Lecture Notes in Math. 682.— Berlin: Springer, 1978. [Русский перевод: Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп // Математика. Новое в зарубеж. науке. № 32.— Москва: Мир, 1982.]

Дженнингс (Jennings S. A.)
[1941] The structure of the group ring of a p-group over modular field // Trans. Amer. Math. Soc.— 1941.— V. 50.— P. 175—185.

Джеякумар (Jeyakumar A. V.)
[1974] Principal indecomposable representations for the groups SL(2, q) // J. Algebra.— 1974.— V. 30.— P. 444—458.

Джонсон (Johnson D. L.)
[1969a] Indecomposable representations of the four-group over fields of characteristic 2 // J. London Math. Soc.— 1969.— V. 44.— P. 295—298.
[1969b] Indecomposable representations of the group (p, p) over fields of characteristic p // J. London Math. Soc.— 1969.— V. 1.— P. 43—50.

Диксон (Dickson L. E.)
[1902] On the group defined for any given field by the multiplication table of any given finite group // Trans. Amer. Math. Soc.— 1902.— V. 3.— P. 285—301.
[1907a] Modular theory of group matrices // Trans. Amer. Math. Soc.— 1907.— V. 8.— P. 389—398.
[1907b] Modular theory of group characters // Bull. Amer. Math. Soc.— 1907.— V. 13.— P. 477—488.

Донован (Donowan P. W.)
[1979] Dihedral defect groups // J. Algebra.— 1979.— V. 56, N 1.— P. 184—206.

Донован, Фрейслих (Donovan P. W., Freislich M. R.)
[1976] Indecomposable representations in characteristic two of the simple groups of order not divisible by eight // Bull. Austral. Math. Soc.— 1976.— V. 15.— P. 407—419.
[1978] The indecomposable modular representations of certain groups with dihedral Sylow subgroup // Math. Ann.— 1978.— Bd 238.— S. 207—216.

Дорнхофф (Dornhoff L.)
[1972] Group representation theory. Part A. Ordinary representation theory.— New York: Marcell Dekker, 1971. Part B. Modular representation theory.— New York: Marcell Dekker, 1972.

Дресс (Dress A.)
[1975] Modules with trivial source, modular monomial representations and modular version of Brauer's induction theorem // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.— 1975.— Bd 44.— S. 101—109.
[1976] Zur Berechnung von Defektgruppen // J. Algebra.— 1976.— V. 43.— P. 221—230.

Земанек (Zemanek J. R.)
[1971] Nilpotent elements in representation rings // J. Algebra.— 1971.— V. 19.— P. 453—469.
[1973] Nilpotent elements in representation ring over fields of characteristic 2 // J. Algebra.— 1973.— V. 25.— P. 534—553.
Иидзука (Iizuka K.)
[1956] Note on blocks of group characters // Kumamoto J. Sci.— 1956.— N A2.— P. 309—321.
[1960a] On Osima's blocks of group characters // Proc. Japan Acad. — 1960.— V. 36. P. 392—396.
[1960b] On Osima's blocks of characters of group of finite order // Kumamoto J. Sci. 1960.— N A4. — P. 275—283.
[1960c] On the blocks and the sections of finite groups // Kumamoto J. Sci.— 1960. N A5.— P. 53—62.
[1961] On Brauer's theorem on sections in the theory of blocks of group characters // Math. Z.— 1961.— Bd 75.— S. 299—304.
[1972] A note on blocks of characters of a finite group // J. Algebra.— 1972.— V. 20.— P. 196—201.
Иидзука, Ватанабе (Iizuka K., Watanabe A.)
[1972] On the number of blocks of irreducible characters of a finite group with a given defect group // Kumamoto J. Sci. (Math.). — 1972.— V. 9. — P. 55—61.
Иидзука, Ито (Iizuka K., Ito Y.)
[1972] A note on blocks of defect groups of a finite group // Kumamoto J. Sci. (Math.).— 1972.— V. 9.— P. 25—32.
Ито (Ito N.)
[1951a] Some studies on group characters // Nagoya Math. J.— 1951.— V. 2.— P. 17—28.
[1951b] On the characters of soluble groups // Nagoya Math. J.— 1951.— V. 3.— P. 31—48.
[1960a] Zur Theorie der Permutationsgruppen vom grad p // Math. Z.— 1960.— V. 74.— P. 299—301.
[1960b] Zur Theorie der transitiven Gruppen vom grad p, II // Math. Z.— 1960. Bd 75.— S. 127—135.
[1962a] On a class of double transitive permutation groups // Illinois J. Math. — 1962.— V. 6, N 2.— P. 341—352.
[1962b] A note on transitive permutation groups of degree p // Osaka Math. J.— 1962.— V. 14.— P. 213—218.
[1962c] On transitive simple permutation groups of degree $2p$ // Math. Z. 1962.— Bd 78.— S. 453—468.
[1962d] On transitive simple groups of degree $3p$ // Nagoya Math. J.— 1962.— V. 21.— P. 123—158.
[1963a] Transitive permutation groups of degree $p=2q+1$, p and q being prime numbers // Bull. Amer Math. Soc.— 1963.— V. 69.— P. 165—192.
[1963b] A note on transitive permutation groups of degree $p=2q+1$, p and q being prime numbers // J. Math. Kyoto Univ.— 1963.— V. 3.— P. 111.
[1963c] On transitive permutation group of prime degree // Sûgaku.— 1963.— V. 15.— P. 129—141.
[1964] Transitive permutation groups of degree $p=2q+1$, p and q being prime numbers, II // Trans. Amer. Math. Soc.— 1964.— V. 113.— P. 454—487.
[1965a] Un teorema sui gruppi transitivi di grado primo // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.— 1965.— V. 35.— P. 132—133.
[1965b] Transitive permutation groups of degree $p=2q+1$, p and q being prime numbers, III // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— V. 116.— P. 151—166.
[1965c] Über die Darstellungen der Permutationsgruppen von Primzahlgrad // Math. Z.— 1965.— Bd 89.— S. 196—198.
[1967a] On uniprimitive permutation groups of degre $2p$ // Math. Z.— 1967. Bd 102.— S. 238—244.

[1967b] On permutation groups of prime degree p which contain (at least) two classes of conjugate subgroups of index p // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.— 1967.— V. 38.— P. 287—292.

Ито, Вада (Ito N., Wada T.)

[1972] A note on transitive permutation groups of degree $2p$ // Tensor N. S.— 1972.— V. 26.— P. 105—106.

Карлсон (Carlson J. F.)

[1974] Free modules over group algebras of p-groups // Carleton Math. Lecture Notes 9.— Ottawa: Carleton Univ., 1974.

[1975] The modular representation ring of a cyclic 2-group // J. London Math. Soc.— 1975.— V. 11.— P. 91—92.

[1976a] Free modules over some modular group rings // J. Austral Math. Soc. (Series A).— 1976.— V. 21.— P. 49—55.

[1976b] Almost free modules over modular group algebras // J. Algebra.— 1976.— V. 41.— P. 243—254.

[1977] Periodic modules over modular group algebras // J. London Math. Soc.— 1977.— V. 15.— P. 431—436.

[1978] Restrictions of modules over modular group algebras // J. Algebra.— 1978.— V. 53.— P. 334—343.

[1979] The dimensions of periodic modules over modular group algebras // Illinois J. Math.— 1979.— V. 23.— P. 295—306.

[1980] Endo-trivial modules over (p, p) groups // Illinois J. Math.— 1980.— V. 24, N 2.— P. 287—295.

Клайн (Cline E.)

[1971] Some connections between Clifford theory and the theory of vertices and sources // Representation Theory of Finite Groups and Related Topics (Proc. Sympos. Pure Math. vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, WI, 1970).— Providence, RI, 1971.— P. 19—23.

[1973] On minimal vertices and the degrees of irreducible characters // J. Algebra.— 1973.— V. 24.— P. 379—385.

Кларк (Clarke R. J.)

[1969] On the radical of the centre of a group algebra // J. London Math. Soc. —1969.— V. 1.— P. 565—572.

Клемм (Klemm M.)

[1975] Über die Reduktion von Permutationsmoduln // Math. Z.— 1975.— Bd 143.— S. 113—117.

[1977] Primitive Permutationsgruppen von Primzahlpotenzgrad // Commun. Algebra.— 1977.— V. 5.— P. 193—205.

Клифф (Cliff G. H.)

[1977] On modular representations of p-solvable groups // J. Algebra.— 1977.— V. 47.— P. 129—137.

[1979] On the degree of an indecomposable representation of a finite group // J. Austral Math. Soc. (Series A).— 1979.— V. 28.— P. 321—324.

Кнапп и Шмид (Knapp W. and Schmid P.)

[1981] Theorem B of Hall — Higman revisited // J. Algebra.— 1981.— V. 73.— P. 376—385.

Кнёрр (Knörr R.)

[1976] Blocks, vertices and normal subgroups // Math. Z.— 1976.— Bd 148.— S. 53—60.

[1977] Semisimplicity, induction, and restriction for modular representations of finite groups // J. Algebra.— 1977.— V. 48.— P. 347—367.

[1979] On the vertices of irreducible modules // Ann. Math.— 1979.— V. 110, N 3.— P. 487—499.

[1984*] On the number of characters in a p-block of p-solvable group // Illinois J. Math.— 1984.— V. 28, N 2.— P. 181—210.

Конлон (Conlon S. B.)

[1964] Twisted group algebras and their representations // J. Austral Math. Soc. 1964.— V. 4.— P. 152—173.

[1965] Certain representation algebras // J. Austral Math. Soc.— 1965.— V. 5.— P. 83—99.
[1966] The modular representations algebra of groups with Sylow 2-subgroup $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ // J. Austral Math. Soc.— 1966.— V. 6.— P. 76—88.
[1967] Structure in representation algebras // J. Algebra.— 1967.— V. 5.— P. 274—279.
[1968] Relative components of representations // J. Algebra.— 1968.— V. 8.— P. 478—501.
[1969] Modular representations of $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$ // J. Austral Math. Soc.— 1969.— V. 10.— P. 363—366.

Косси, Гашюц (Cossey J., Gaschütz W.)
[1974] A note on blocks // Lecture Notes in Math. 372.— Berlin: Springer, 1974.— P. 238—240.

Кострикин А. И., Чубаров И. А.
[1985*] Представления конечных групп // Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР.— 1985.— Т. 23.— С. 119—170.

Кошитани (Koshitani S.)
[1977] On the nilpotency indices of the radicals of group algebras of p-solvable groups // Proc. Japan Acad. Ser A Math. Sci.— 1977.— V. 53.— P. 13—16.
[1978] A note on the radical of the centre of a group algebra // J. London Math. Soc.— 1978.— V. 18.— P. 243—246.
[1979] Remarks on the commutativity of the radicals of group algebras // Glasgow Math. J.— 1979.— V. 20.— P. 63—68.

Купиш (Kupisch H.)
[1968] Projective Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppe // J. Algebra.— 1968.— V. 10.— P. 1—7.
[1969] Unzerlegbare Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppe // Math. Z.— 1969.— Bd 108.— S. 77—104.

Кхатри (Khatri D. C.)
[1973] Relative projectivity, the radical and complete reducibility in modular group algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 186.— P. 51—63.
[1974] Projective-sensitivity in modular group algebras // Math. Japan.— 1974. V. 19.— P. 71—78.

Кхатри, Синха (Khatri D. C., Sinha I.)
[1969] Projective pairing in groups II // Math. Japan.— 1969.— V. 14.— P. 127—135.

Кэртис, Райнер (Curtis C. W., Reiner I.)
[1962] Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.— New York: Interscience, 1962. [Русский перевод: Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М.: Наука, 1969.]
[1981*] Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Vol. 1.— New York e.a.: John Wiley and Sons, 1981.
[1987*] Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Vol. 2.— New York e. a.: John Wiley and Sons, 1987.

Кюльсхаммер (Külshammer B.)
[1980] On 2-blocks with wreathed defect groups // J. Algebra.— 1980.— V. 64, N 2.— P. 529—555.

Ландау (Landau E.)
[1903] Über die Klassenzahl der binaren quadratischen Formen von negativer Diskriminante // Math. Ann.— 1903.— Bd 56.— S. 671—676.

Ленард, Маккилви (Leonard H. S. Jr., McKelvey K. K.)
[1967] On lifting characters in finite groups // J. Algebra.— 1967.— V. 7.— P. 168—191.

Линдси (Lindsey J. H.)
[1974] Groups with a T. I. cyclic Sylow subgroup // J. Algebra.— 1974.— V. 30.— P. 181—235.

Ломбардо-Радичи (Lombardo-Radice L.)
[1939] Intorno alle algebre legate ai gruppi di ordine finito II // Rend. Sem. Mat. Roma.— 1939.— V. 3.— P. 239—256.
[1947] Sugli elementi eccezionali dell'algebra legata a un gruppo di ordine finito in un corpo a caracteristica p // Atti, Accad. Nat. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.— 1947.— V. 2, N 8.— P. 170—174.
Лэм (Lam T. Y.)
[1968] A theorem on Green's modular representation ring // J. Algebra.— 1968.— V. 9.— P. 388—392.
[1976] A refinement of Green's theorem on the defect group of a P-block // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— V. 54.— P. 45—48.
Лэм, Райнер (Lam T. Y., Reiner I.)
[1969] Relative Grothendieck groups // J. Algebra.— 1969.— V. 11.— P. 213—242.
Лэндрок (Landrock P.)
[1973] A counterexample to a conjecture on the Cartan invariants of a group algebra // Bull. London Math. Soc.— 1973.— V. 5.— P. 223—224.
[1976] The principal block of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups // J. Algebra.— 1976.— V. 39, N 2.— P. 410—428.
[1981] On the number of irreducible characters in a 2-block // J. Algebra.— 1981.— V. 68, N 2.— P. 426—442.
Лэндрок, Михлер (Landrock P., Michler G. O.)
[1978] Block structure of the smallest Janko group // Math. Ann.— 1978.— Bd 232.— S. 205—238.
[1980a] A criterion for cyclicity // Proç. Sympos Pure Math. 37 (Santa Cruz, 1979). Providence, RI, 1980.— P. 419—422.
[1980b] Principal 2-blocks of the simple groups of Ree type // Trans. Amer. Math. Soc. — 1980.— V. 260. — P. 83—111.
Люстиг (Lusztig G.)
[1974] The discrete series of GL_n over a finite field // Ann. of Math. Studies 81.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1974.
[1976] Divisibility of projective modules of finite Chevalley groups by the Steinberg module // Bull. London Math. Soc.— 1976.— V. 8.— P. 130—134.
Макдональд (Macdonald I. G.)
[1971] On the degrees of the irreducible representations of symmetric groups // Bull. London Math. Soc.— 1971.— V. 3.— P. 189—192.
[1973] On the degrees of the irreducible representations of finite Coxeter groups // J. London Math. Soc.— 1973.— V. 6.— P. 298—300.
Макки (Mackey G. W.)
[1951] On induced representations of groups // Amer. J. Math.— 1951.— V. 73.— P. 576—592.
Маккей (McKay J.)
[1972] Irreducible representations of odd degree // J. Algebra.— 1972.— V. 20.— P. 416—418.
Михлер (Michler G.)
[1972a] Blocks and centres of group algebras // Lecture Notes in Math. 246.— Berlin: Springer, 1972.— P. 429.
[1972b] Conjugacy classes and blocks of group algebras // Symposia Math., Vol. VIII.— London: Academic Press, 1972.— P. 245—259.
[1973a] The kernel of a block of a group algebra // Proc. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 37.— P. 47—49.
[1973b] The blocks of p-nilpotent groups over arbitrary fields // J. Algebra,— 1973.— V. 24.— P. 303—315.
[1974] Green correspondence between blocks with cyclic defect groups // Carleton Math. Lecture Notes 9.— Ottawa: Carleton Univ., 1974.
[1975] Green correspondence between blocks with cyclic defect groups II // Lecture Notes in Math. 488.— Berlin: Springer, 1975.— P. 210—235.
[1976a] Petits modules projectifs des groupes finis // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1976.— V. 282, ser. A — B.— P. A397—A398.

[1976b] Green correspondence between blocks with cyclic defect groups. I // J. Algebra.— 1976.— V. 39.— P. 26—51.
[1986a*] A finite simple group of Lie type has p-blocks with different defects, $p \neq 2$ // J. Algebra.— 1986.— V. 83, N 1.— P. 179—188.
[1986b*] Brauer's conjecture and the classification of finite simple groups // Lecture Notes in Math. 1178.— Berlin: Springer, 1986.— P. 129—142.
Михлер, Олссон (Michler G., Olsson J.)
[1983*] Character correspondences in finite general linear, unitary and symmetric groups // Math. Z.— 1983.— Bd 184.— S. 203—233.
Молин Ф. Э.
[1985*] Числовые системы.— Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1985.
Морита (Morita K.)
[1951] On group ring over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals // Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daikagu (A).— 1951.— V. 4.— P. 177—194.
Мортимер (Mortimer B.)
[1980] The modular permutation representations of the known doubly transitive groups // Proc. London Math. Soc.— 1980.— V. 41.— P. 1—20.
Мотосе (Motose K.)
[1974a] On radicals of group rings of Frobenius groups // Hokkaido Math. J.— 1974.— V. 3.— P. 23—34.
[1974b] On C. Loncour results // Proc. Jap. Acad.— 1974.— V. 50.— P. 570—571.
[1974c] On a theorem of Wallace and Tsushima // Proc. Japan Acad.— 1974.— V. 50.— P. 572—575.
[1977] On radicals of principal blocks // Hokkaido Math. J.— 1977.— V. 6.— P. 255—259.
[1980] On the nilpotency index of the radical of a group algebra II // Okayama Math. J.— 1980.— V. 22.— P. 141—143.
[1984*] On the nilpotency index of the radical of a group algebra // Carleton-Ottawa Math. Lect. Note Ser.— 1984.— N 2.— 28/1—28/5.
Мотосе, Ниномия (Motose K., Ninomiya Y.)
[1975a] On the nilpotency index of the radical of a group algebra // Hokkaido Math. J.— 1975.— V. 4.— P. 261—264.
[1975b] On the subgroups H of a group G such that $J(KH)KG \supset J(KG)$ // Math. J. Okayama Univ.— 1975.— V. 17.— P. 171—176.
[1980] On the commutativity of the radicals of the group algebra of a finite group // Osaka J. Math.— 1980.— V. 17.— P. 23—26.
Мюллер (Müller W.)
[1974a] Gruppenalgebren über nichtzyklischen p-Gruppen I. die Dieder- und die Quasidiedergruppen // J. Reine Angew. Math.— 1974.— Bd 266.— S. 10—48.
[1974b] Gruppenalgebren über nichtzyklischen p-Gruppen II // J. Reine Angew. Math.— 1974.— Bd 267.— S. 1—19.
Нагаи (Nagai O.)
[1952] Note on Brauer's theorem of simple groups // Osaka Math. J.— 1952.— V. 4.— P. 113—120.
[1953] Supplement to «Note on Brauer's Theorem of simple groups» // Osaka Math. J.— 1953.— V. 5.— P. 227—232.
[1956] On simple groups related to permutation groups of prime degree, I // Osaka Math. J.— 1956.— V. 8.— P. 107—117.
[1959] Supplement to note on Brauer's theorem of simple groups, II // Osaka Math. J.— 1959.— V. 11.— P. 147—152.
Нагао (Nagao H.)
[1951] On the theory of representation of finite groups // Osaka Math. J.— 1951.— V. 3.— P. 11—20.
[1962] On a conjecture of Brauer for p-solvable groups // J. Math. Osaka City Univ.— 1962.— V. 13.— P. 35—38.
[1963] A proof of Brauer's theorem on generalized decomposition numbers // Nagoya Math. J.— 1963.— V. 22.— P. 73—77.

Накаяма (Nakayama T.)
[1938] Some studies on regular representations, induced representations, and modular representations // Ann. Math.— 1938.— V. 39.— P. 361 - 369.
[1939] On Frobenusean algebras I // Ann. Math.— 1939.— V. 40.— P. 611—633.
[1940] Note on uniserial and generalized uniserial rings // Proc. Imp. Acad. Japan.— 1940.— V. 16. P. 285 289.
[1941] On Frobenusean algebras II // Ann. Math.— 1941.— V. 42.— P. 1—21.
Нейман (Neumann P. M.)
[1972a] Transitive permutation groups of prime degree // J. London Math. Soc.— 1972.— V. 5.— P. 202 208.
[1972b] Transitive permutation groups of prime degree II; a problem of Noboru Ito // Bull. London Math. Soc.— 1972.— V. 4. —P. 337 - 339.
[1973] Transitive permutation groups of prime degree // Lecture Notes in Math. 372.— Berlin: Springer, 1973.— P. 520 – 535.
[1975] Transitive permutation groups of prime degree III: character theoretic observations // Proc. London. Math. Soc.— 1975.— V. 31.— P. 482 – 494.
[1976] Transitive permutation groups of prime degree IV: a problem of Mathieu and a theorem of Ito // Proc. London Math. Soc.— 1976.— V. 32.— P. 52 - 62.
Нейман, Сакел (Neumann P. M., Saxl J.)
[1976] The primitive permutation groups of some spesial degrees // Math. Z. 1976. Bd 146. S. 101 - 104.
Никколаи (Niccolai N. A.)
[1974] Isometries and generalized group characters // J. Algebra.— 1974.— V. 31.— P. 120 130.
Нобусато (Nobusato Y.)
[1978] On the p-rationality of lifted characters // Math. J. Okayama Univ.— 1978.— V. 20.— P. 87 89.
Окаяма (Okuyama T.)
[1978] A note on the Brauer correspondence // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.— 1978. V. 54. P. 27 -28.
Окаяма, Вайима (Okuyama T., Wajima M.)
[1979] Irreducible characters of p-solvable groups // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. - 1979.— V. 55.— P. 309—312.
[1980] Character correspondence and p-blocks of p-solvable groups // Osaka J. Math. 1980. —V. 17.— P. 801 – 806.
Олссон (Olsson J. B.)
[1975] On 2-blocks with quaternion and quasidihedral defect groups // J. Algebra.— 1975.— V. 36.— P. 212—241.
[1976] McKay numbers and heights of characters // Math. Scand.— 1976.— V. 38.— P. 25—42.
[1977] On the subsections for certain 2-blocks // J. Algebra.— 1977.— V. 46.— P. 497—510.
[1980] Lower defect groups // Commun. Algebra.— 1980.— V. 8.— P. 261—288.
[1984*] On the number of characters in blocks of finite general linear, unitary and symmetric groups // Math. Z.— 1984.— Bd 186.— S. 41 – 47.
О'Рейли (O'Reilly M. F.)
[1964] On the modular representation algebra of metacyclic groups // J. London Math. Soc.— 1964.— V. 39. P. 267 -276.
[1965] On the semisimplicity of the modular representation algebra of a finite group // Illinois J. Math.— 1965.— V. 9.— P. 261 — 276.
[1974] Ideals in the centre of a group ring // Lecture Notes in Math. 372. — Berlin: Springer, 1974.— P. 536—540.
[1975] On a theorem of J. A. Green // J. Austral Math. Soc. (Series A).— 1975.— V. 20.— P. 449 450.
Осима (Osima M.)
[1941] Note on the Kronecker product of representations of a group // Proc. Imp. Acad. Tokyo.— 1941. V. 17.— P. 411—413.

[1942] On primary decomposable group rings // Proc. Phy. Math. Soc. Japan.— 1942. — V. 24.— P. 1—9.
[1952a] On the induced characters of a group // Proc. Japan Acad.— 1952.— V. 28.— P. 243—248.
[1952b] On the representations of groups of finite order // Math. J. Okayama Univ.— 1952.— V. 1.— P. 33—61.
[1953] On the induced characters of groups of finite order // Math. J. Okayama Univ. — 1953.— V. 3.— P. 47—64.
[1955] Notes on blocks of group characters // Math. J. Okayama Univ.— 1955.— V. 4.— P. 175—188.
[1960a] On some properties of group characters // Proc. Japan Acad.— 1960.— V. 36.— P. 18—21.
[1960b] On some properties of group characters, II // Math. J. Okayama Univ. — 1960.— V. 10.— P. 61—66.
[1964] On a theorem of Brauer // Proc. Japan Acad.— 1964.— V. 40.— P. 795—798.
[1966] On block idempotents of modular group rings // Nagoya Math. J.— 1966.— V. 27.— P. 429—433.

Палингс (Pahlings H.)
[1974] Über die Kerne von Blöcken einer Grupenalgebra // Arch. Math. — 1974.— V. 25.— P. 121—124.
[1975a] Groups with faithful blocks // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — V. 51. — P. 37—40.
[1975b] Irreducible odd representations of wreath products // J. London Math. Soc.— 1975.— V. 12.— P. 45—48.
[1977] Normal p-complements and irreducible characters // Math. Z.— 1977.— Bd 154. — S. 243—246.

Пассман (Passman D. S.)
[1969] Blocks and normal subgroups // J. Algebra.— 1969.— V. 12.— P. 569—575.

Пикок (Peacock R. M.)
[1975a] Blocks with a cyclic defect group // J. Algebra.— 1975.— V. 34.— P. 232.
[1975b] Indecomposables in a block with a cyclic defect group // J. Algebra.— 1975.— V. 37. — P. 74—103.
[1977] Ordinary character theory in a block with a cyclic defect group // J. Algebra. — 1977. V. 44, N 1.— P. 203—220.
[1979] Groups with a cyclic Sylow subgroup // J. Algebra.— 1979.— V. 56.— P. 506—509.

Путтасвамая, Диксон (Puttaswamaiah B. H., Dixon J. D.)
[1977] Modular Representations of Finite Groups.— New York: Academic Press, 1977.

Райнер (Reiner I.)
[1961] The Krull—Schmidt theorem for integral group representations // Bull. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 67.— P. 365—367.
[1966a] Nilpotent elements in rings of integral representations // Proc. Amer. Math. Soc.— 1966.— V. 17.— P. 270—274.
[1966b] Integral representation algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1966.— V. 124.— P. 111—121.

Рейнольдс (Reynolds W. F.)
[1962] Modular representations of finite groups // Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VI.— Providence, RI, 1962.— P. 71—87.
[1963] Blocks and normal subgroups of finite groups // Nagoya Math. J.— 1963.— V. 22.— P. 15—32.
[1965] A generalization of Brauer characters // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— V. 119.— P. 333—351.
[1966a] Block idempotents of twisted group algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1966. — V. 17.— P. 280—282.
[1966b] Blocks idempotents and normal p-subgroups // Nagoya Math. J.— 1966.— V. 28.— P. 1—13.
[1967] Sections, isometries and generalized group characters // J. Algebra.— 1967.— V. 7.— P. 394—405.

[1968] Isometries and principal blocks of group characters // Math. Z.— 1968.— Bd 107.— S. 264—270.
[1970] A block correspondence and isometries of group characters // Math. Z.— 1970.— Bd 113.— S. 1—16.
[1971] Blocks and F-class algebras of finite groups // Pacific J. Math.— 1971.— V. 38.— P. 193—205.
[1972] Sections and ideals of centres of group algebras // J. Algebra.— 1972.— V. 20.— P. 176—181.
[1974] Fields related to Brauer characters // Math. Z.— 1974.— Bd 135.— S. 363—367.

Рено (Renaud J. C.)
[1978] The characters and structure of a class of modular representation algebras of cyclic p-groups // J. Austral. Math. Soc. (Series A).— 1978.— V. 26.— P. 410—418.
[1979] The decomposition of products in the modular representation ring of a cyclic group of prime power order // J. Algebra.— 1979.— V. 58.— P. 1—11.

Рингель (Ringel C. M.)
[1974] The representation type of local algebras // Lecture Notes in Math. 488.— Berlin: Springer, 1974.— P. 283—305.
[1975] The indecomposable representations of the dihedral 2-groups // Math. Ann.— 1975.— Bd 214.— S. 19—34.

Рихен (Richen F.)
[1970] Decomposition numbers of p-solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— V. 25.— P. 100—104.
[1972] Groups with a Steinberg character // Math. Z.— 1972.— Bd 128.— S. 297—304.

Робинсон (Robinson G. R.)
[1983*] The number of blocks with given defect group // J. Algebra.— 1983.— V. 84, N 2.— P. 493—502.
[1985*] Blocks, isometries, and sets of primes // Proc. London Math. Soc.— 1985.— V. 51, N 3.— P. 432—448.

Розенберг (Rosenberg A.)
[1961] Blocks and centres of group algebras // Math. Z.— 1961.— Bd 76.— S. 209—216.

Романовский А. В.
[1985*] Исключительные характеры конечных групп.— Минск: Наука и техника.— 1985.— 148 с.

Ротшильд (Rothschild B.)
[1967] Degrees of irreducible modular characters of blocks with cyclic defect groups // Bull. Amer. Math. Soc.— 1967.— V. 73.— P. 102—104.

Рудько В. П.
[1968] О рациональной тензорной алгебре модулярных представлений циклической p-группы // Укр. мат. ж.— 1968.— Т. 20, № 6.— С. 841—845.

Руколайне А. В.
[1964*] Некоторые арифметические свойства модулярных характеров p-разрешимых групп // Изв. АН СССР. Математика.— 1964.— Т. 28.— С. 571—582.

Рейли (Ralley T.)
[1969] Decomposition of products of modular representations // J. London Math. Soc.— 1969.— V. 44.— P. 480—484.

Саксонов А. И.
[1971] О разложении групп подстановок над характеристическим полем // ДАН СССР.— 1971.— Т. 198, № 2.— С. 293—296.

Санта (Santa P. J.)
[1971] Some computations in the modular representation ring of a finite group // Proc. Cambridge Philos. Soc.— 1971.— V. 69.— P. 163—166.

Серр (Serre J. P.)
[1977] Linear Representations of Finite Groups.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer, 1977 [Русский перевод: Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп.— М.: Мир, 1970]
Скотт (Scott L. L.)
[1969] Uniprimitive permutation groups // Theory of Finite Groups.— New York: Benjamin, 1969.— P. 55—62.
[1970] A double transitivity criterion // Math. Z.— 1970.— V. 115.— P. 7—8.
[1971] The modular theory of permutation representations // Representation theory of finite groups and related topics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, WI, 1970).— Providence, RI, 1971.— P. 137—144.
[1972] On permutation groups of degree $2p$ // Math. Z.— 1972.— Bd 126.— S. 227—229.
[1973] Modular permutation representations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 175.— P. 101—121.
[1976] Estimates in permutation groups // Geometrica Dedicata.— 1976.— V. 5.— P. 219—227.
Смит (Smith S. D.)
[1974] On finite groups with a certain Sylow normalizer III // J. Algebra.— 1974.— V. 29.— P. 489—503.
[1976a] Some methods in the theory of blocks of characters // J. Algebra.— 1976.— V. 39.— P. 360—374.
[1976b] On p-singular control of p-regular character values // J. Algebra.— 1976.— V. 39.— P. 255—276.
[1976c] Sylow automizers of odd order or an application of coherence // Proceedings of the Conference on Finite Groups.— New York: Academic Press, 1976.— P. 445—449.
[1977] Sylow automizers of odd order // J. Algebra.— 1977.— V. 46.— P. 523—543.
Смит, Тирер (Smith S. D., Tyrer A. P.)
[1973a] On finite groups with a certain Sylow normalizer, I // J. Algebra.— 1973.— V. 26.— P. 343—365.
[1973b] On finite groups with a certain Sylow normalizer, II // J. Algebra.— 1973.— V. 26.— P. 366—367.
Сринивасан (Srinivasan B.)
[1960] On the indecomposable representations of certain class groups // Proc. London Math. Soc.— 1960.— V. 10.— P. 497—513.
[1964a] A note on blocks of modular representations // Proc. Cambridge Philos. Soc.— 1964.— V. 60.— P. 179—182.
[1964b] The modular representation ring of a cyclic p-group // Proc. London Math. Soc.— 1964.— V. 14.— P. 677—688.
[1964c] On the modular characters of the special linear group $SL(2, p^n)$ // Proc. London Math. Soc.— 1964.— V. 14.— P. 101—114.
Стейнберг (Steinberg R.)
[1968] Endomorphisms of linear algebraic groups // Memoirs Amer. Math. Soc.— 1968.— V. 80.
Судзуки (Suzuki M.)
[1959] Applications of group characters // Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 1.— Providence, RI, 1959.— P. 88—89.
Струнков С. П.
[1989*] О блоках дефекта 0 в конечных группах // Изв. АН СССР. Математика.— 1989.— Т. 53, № 3.— С. 657—663.
[1990a*] Об одной проблеме Р. Брауэра // ДАН СССР.— 1990.— Т. 310, № 1.
[1990b*] О точных обобщенных характерах и обобщенных классах конечной группы // Мат. заметки.— 1990.— Т. 47, № 2.— С. 102—107.
Суон (Swan R. G.)
[1960] Induced representations and projective modules // Ann. Math.— 1960.— V. 71.— P. 552—578.

Томпсон (Thompson J. G.)
[1967a] Defect groups are Sylow intersections // Math. Z.— 1967.— Bd 100.— S. 146.
[1967b] Vertices and sources // J. Algebra.— 1967.— V. 6.— P. 1— 6.
[1981] Invariants of finite groups // J. Algebra.— 1981.— V. 69.— P. 143— 145.
Торрес (Torres M.)
[1971] On the degrees of the irreducible modular representation of finite groups // Proc. of Ninth Annual Conf. of Spanish Mathematicants, Inst. «Jorge Juan».— Madrid, 1971.— P. 265— 269.
Туан (Tuan H. F.)
[1944] On groups whose orders contain a prime number to the first power // Ann. Math.— 1944.— V. 45.— P. 110— 140.
Уолтер (Walter J. H.)
[1966] Character theory of finite groups with trivial intersection subsets // Nagoya Math. J. 1966.— V. 27.— P. 515—524.
Уонг (Wong W.)
[1966] Exceptional character theory and the theory of blocks // Math. Z.— 1966.— Bd 91.— S. 363— 379.
Уорд (Ward H. N.)
[1968] The analysis of representations induced from a normal subgroup // Mich. Math. J.— 1968. V. 15.— P. 417—428.
Упадхия (Upadhyaya B. S.)
[1978] Composition factors of the principal indecomposable modules for the special linear groups $SL(2, q)$ // J.London Math. Soc. 1978. V. 17.— P. 437—445.
Фейт (Feit W.)
[1964] Groups which have a faithful representation of degree less than $p-1$ // Trans. Amer. Math. Soc.— 1964.— V. 112.— P. 287—303.
[1966] Groups with a cyclic Sylow subgroup // Nagoya Math. J.— 1966.— V. 27.— P. 571—584.
[1967a] On groups with a cyclic Sylow subgroup // Proc. International Conference Theory of Groups (Canberra, 1965).— New York: Gordon and Breach, 1967.
[1967b] On finite linear groups // J. Algebra.— 1967.— V. 5.— P. 378— 400.
[1967c] Characters of finite groups.— New York; Amsterdame: Benjamin, 1967.
[1969] Some properties of the Green correspondence // Theory of Finite Groups.— New York: Benjamin, 1969. P. 139— 148.
[1974] On finite linear groups. II // J. Algebra.— 1974.— V. 30.— P. 496— 506.
[1976] Divisibility of projective modules of finite groups // J. Pure and Applied Algebra. 1976. V. 8.— P. 183— 185.
[1980] Irreducible modules of p-solvable groups // Proc. Sympos. Pure Math. 37 (Santa Cruz, 1979). Providence, RI, P. 405— 412.
[1984*] Possible Brauer trees // Illinois J. Math.— 1984.— V. 28, N 1.— P. 43— 56.
Фейт, Линдси (Feit W., Lindsey J. H. II)
[1978] Complex linear groups of degree less than $2^{1/2}p-3$ // J. Algebra.— 1978.— V. 52, N 1.— P. 145—167.
Фейт, Томпсон (Feit W., Thompson J. G.)
[1961] Groups which have a faithful representation of degree less than $(p-1)/2$ // Pacific. J. Math.— 1961. V. 11.— P. 1257—1262.
[1963] Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math.— 1963.— V. 13.— P. 775—1029.
Фонг (Fong P.)
[1960] Some properties of characters of finite solvable groups // Bull. Amer. Math. Soc.— 1960.— V. 66.— P. 116— 117.
[1961] On the characters of p-solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 98.— P. 263—284.
[1962] Solvable groups and modular representation theory // Trans. Amer. Math. Soc.— 1962.— V. 103.— P. 484—494.
[1963] A note on a conjecture of Brauer // Nagoya Math. J. 1963. V. 22. P. 1— 13.

[1974] On decomposition numbers of J_1 and $R(q)$ // Symposia Mathematica, Vol. XIII.— London: Academic Press, 1974.— P. 415—422.

Фонг, Гашюц (Fong P., Gaschutz W.)

[1961] A note on the modular representations of solvable groups // J. Reine Angew. Math.— 1961.— Bd 208.— S. 73—78.

Фьюи (Fujii M.)

[1980] A remark on the Cartan matrix of a certain p-block // Osaka J. Math.— 1980.— V. 17.— P. 411—414.

Хаггати (Haggarty R. J.)

[1977] On the heights of group characters // Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 63.— P. 213—216.

Хайден (Hayden S.)

[1963] On finite linear groups whose order contains a prime larger than the degree. Cambridge: Harvard Univ. Thesis, 1963.

Хамфри (Humphreys J. E.)

[1971] Defect groups for finite groups of Lie type // Math. Z. 1971.— Bd 119. S. 149 - 152.

[1973a] Projective modules for SL(2, q) // J. Algebra.— 1973.— V. 25.— P. 513—518.

[1973b] Some computations of Cartan invariants for finite groups of Lie type // Comm. Pure Appl. Math.— 1973.— V. 26. —P. 745—755.

[1976] Ordinary and modular representations of Chevalley groups // Lecture Notes in Math. 528.— New York: Springer, 1976.

Хамфри (Humphreys J. F.)

[1972] Groups with modular irreducible representations of bounded degree // J. London Math. Soc.— 1972. —V. 5. —P. 233 234.

[1976] Finite p-soluble groups with irreducible modular representations of given degrees // Proc. Edinburgh Math. Soc.— 1976. —V. 20. —P. 219—223.

Ханг (Hung C. W.)

[1973] On simple groups of order $p(kp+1)(kp+2)$ // Scientia Sinica.— 1973.— V. 16. —P. 177—188.

Ханнула, Рэлли, Райнер (Hannula T. A., Ralley T. G. Reiner I.)

[1967] Modular representation algebras // Bull. Amer. Math. Soc.— 1967.— V. 73.— P. 100 101.

Харрис (Harris M. E.)

[1985*] On the p-deficiency class of a finite group // J. Algebra.— 1985.— V. 94. N 2. - P. 411 —424.

Хеллер, Райнер (Heller A., Reiner I.)

[1961] Indecomposable representations // Illinois J. Math.— 1961.— V. 5.— P. 314—323.

Хигман (Higman D. G.)

[1954] Indecomposable representations at characteristic p // Duke Math. J.— 1954.— V. 21. —P. 377—381.

[1964] Finite permutation groups of rank 3 // Math. Z.— 1964.— Bd 86.— S. 145—156.

Хигман (Higman G.)

[1973] Some nonsimplicity criteria for finite groups // Lecture Notes in Math. 372.— Berlin: Springer, 1973.— P. 367—376.

[1974] Some p-local conditions for odd p // Symposia Mathematica, Vol. XIII.— London: Academic Press, 1974. — P. 531—540.

Хилл (Hill E. T.)

[1970] The annihilator of radical powers in the modular group ring of a p-group // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— V. 25.— P. 811 —815.

Хисс (Hiss G.)

[1987*] A converse to the Fong—Swan—Isaacs theorem // J. Algebra.— 1987.— V. 111, N 1.— P. 279—290.

Холвет (Holvoet R.)

[1968] The group algebra of a finite p-group over a field of characterictic p // Simon Stevin.— 1968.— V. 42. — P. 157 —170.

Холл, Хигман (Hall P., Higman G.)
[1956] On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. — 1956. — V. 6. — P. 1—42.
Хуббарт (Hubbart W. M.)
[1972] Some results on blocks over local fields // Pacific J. Math. — 1972. — V. 40. — P. 101—109.
Хупперт (Huppert B.)
[1967] Endliche Gruppen I. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer. 1967.
[1975] Bemerkungen zur modularen Darstellungstheorie I. Absolut unzerlegbare Moduln // Arch. Math. — 1975. — V. 26. — P. 242—249.
Хупперт, Блекберн (Huppert B., Blackburn N.)
[1982a*] Finite groups. II. — Berlin e.a.: Springer. 1982.
[1982b*] Finite groups. III. — Berlin e.a.: Springer. 1982.
Хупперт, Виллемс (Huppert B., Willems W.)
[1975] Bemerkungen zur modularen Darstellungstheorie II. Darstellungen von Normalteileren // Arch. Math. — 1975. — V. 26. — P. 486—496.
Частковский, Фейт (Chastkofsky L., Feit W.)
[1978] Projective characters of groups of Lie type // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. — 1978. — V. 1. — P. 33—36.
[1980a] On the projective characters in characteristic 2 of the groups $Suz(2^m)$ and $Sp_4(2^n)$ // Inst. Hautes Etude Scientifiques Publ. Math. — 1980. — V. 51. — P. 9—35.
[1980b] On the projective characters in characteristic 2 of the groups $SL_3(2^m)$ and $SU_3(2^m)$ // J. Algebra. 1980. — V. 63. — P. 124—142.
Шварц (Schwartz W.)
[1979] Die structur modularen Gruppenringe Endlicher Gruppen der p-Länge 1 // J. Algebra. — 1979. — V. 60. — P. 51—75.
Шмид (Schmid P.)
[1980] Twisted group algebras and Clifford extensions // Arch. Math. — 1980. — V. 35. — P. 127—137.
Шпайзер (Speiser A.)
[1923] Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. — Berlin, 1923.
Шпигель (Spiegel H.)
[1974] Blockkorrespondenzen und p'-Normalteiler // Arch. Math. 1974. V. 25. — P. 483—487.
Цассенхауз (Zassenhaus H.)
[1936] Kennzeichnung endlicher linearen Gruppen als Permutationsgruppen // Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. — 1936. — V. 11. — P. 17—40.
Цушима (Tsushima Y.)
[1967] Radicals of group algebras // Osaka Math. J. — 1967. — V. 4. P. 179—182.
[1968] A group algebra of a p-solvable group // Osaka Math. J. — 1968. — V. 5. — P. 89—98.
[1971a] On the annihilator ideals of the radical of a group algebra // Osaka Math. J. — 1971. — V. 8. — P. 91—97.
[1971b] On the block of defect zero // Nagoya Math. J. — 1971. — V. 44. — P. 57—59.
[1974] On the existence of characters of defect zero // Osaka Math. J. — 1974. — V. 11. — P. 417—423.
[1977] On the weakly regular p-blocks with respect to $O_{p'}(G)$ // Osaka Math. J. — 1977. — V. 14. — P. 465—470.
[1978a] On the p'-section sum in a finite group ring // Math. J. Okayama Univ. — 1978. — V. 20. — P. 83—86.
[1978b] Some notes on the radical of a finite group ring // Osaka Math. J. — 1978. — V. 15. — P. 647—653.
[1978c] On the second reduction theorem of P. Fong // Kumamoto J. Sci. (Math.). — 1978. — V. 13. — P. 6—14.
[1979] Some notes on the radical of a finite group ring II // Osaka J. Math. — 1979. — V. 16. — P. 35—38.

Эйсенбад, Гриффитс (Eisenbud D., Griffith P.)
[1971] Serial rings // J. Algebra.— 1971.— V. 17.— P. 389—400.
Эрдманн (Erdmann K.)
[1977a] Blocks and simple modules with cyclic vertices // Bull. London Math. Soc.— 1977.— V. 9.— P. 216—218.
[1977b] Prinsipal blocks of groups with dihedral Sylow 2-subgroups // Commun. Algebra.— 1977.— V. 5.— P. 665—694.
[1979a] Blocks whose defect groups are Klein four groups // J. Algebra.— 1979.— V. 59, N 2.— P. 452—465; Correction: J. Algebra.— 1982.— V. 76, N 2.— P. 505—518.
[1979b] On 2-blocks with semidihedral defect groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1979.— V. 256.— P. 267—287.
Эрдманн, Михлер (Erdmann K., Michler G. O.)
[1977] Blocks with dihedral defect groups in solvable groups // Math. Z.— 1977.— Bd 154.— S. 143—151.
Эрно (Hernaut R.)
[1969] Représentations modulaires d'extensions cycliques de C_n par C_2 // Bull. Soc. Math. Belg.— 1969.— V. 21.— P. 348—358.
Яковлев А. В.
[1972*] Классификация 2-адических представлений циклической группы порядка восемь // Исслед. по теории представлений. Зап. научн. сем. Ленинград. отдел. мат. инст. Стеклова (ЛОМИ).— 1972. — Т. 28.— С. 93—129.
Ямада (Yamada T.)
[1970] The Schur subgroup of the Brauer group // Lecture Notes in Math. 397.— Berlin: Springer, 1970.
Ямоши (Yamauchi K.)
[1972] Nilpotent elements in representation rings in characteristic 2 // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A.— 1972.— V. 11.— P. 73—95.
Янг (Yang C. T.)
[1977] On the graph of the block with a cyclic defect group // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica.— 1977.— V. 5.— P. 203—209.
Януш (Janusz G. J.)
[1966] Indecomposable representations of groups with a cyclic Sylow subgroup // Trans. Amer. Math. Soc.— 1966.— V. 125.— P. 288—295.
[1969a] Indecomposable modules for finite groups // Theory of Finite Groups.— New York: Benjamin, 1969.— P. 149—157.
[1969b] Indecomposable modules for finite groups // Ann. Math.— 1969.— V. 2.— P. 209—241.
[1970] Faithful representations of p-groups at characterictic pI // J. Algebra.— 1970.— V. 15.— P. 335— 351.
[1971] Faithful representations of p-groups at characteristic p // Representation Theory of Finite groups and Related Topics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Univ. Wisconsin. Madison, WI, 1970).— Providence, RI, 1971.— P. 89— 90.
[1972] Faithful representations of p-groups at characteristic p, II // J. Algebra.— 1972.— V. 22.— P. 137—160.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

A_A 12
${}_AA$ 12
A_n 31
$A_C(R[G]) = A(G)$ 90, 363
$A_C^0(R[G])$, $A^0(R[G])$ 90
$A^0(G)$ 172
$A_{C,\mathfrak{H}}(R[G])$, $A_H(R[G])$ 90, 363
a^G $(a \in \Omega)$ 351
$B = B(e)$ 30
B^G 128
B^z 143
$C = (c_{ij})$ 58
$\mathrm{Ch}_T(S)$ 162
$\mathrm{Ch}_T(S, B)$ 162
$\mathrm{Ch}(S)$ 162
$\mathrm{Ch}(S, B)$ 162
$\mathrm{Ch}_{T,\,\mathrm{proj}}(G)$ 168
$\mathrm{Ch}_{T,\,\mathrm{proj}}(G:B)$ 168
D 68
d_I^c 35
$d_I^c \sim d_{I'}^{c'}$ 35
$E_A(V)$ 14
$\hat{f}$ 50
$f_p(m, n)$, $f(m, n)$ 406
G_{reg} 168
G_Δ 351
G_a 351
$G^{(2)}$ 351
h^G 127
$h_\pi(a)$, $h_\pi(\theta)$ 209
$\mathrm{Hom}_A(V, W)$ 14
$H^0(G, \mathfrak{H}, V)$ 86
$H^0(G, H, V)$ 86
H^Δ 351
$I_F(V, W)$, $I(V, W)$ 56
$\mathrm{Inv}_G(V)$ 81
$J(A)$ 26
$J(n)$ 406
$k(B)$ 158, 162, 220
$l(S)$ 64
$l(M)$ 234
l_G 237
$l(y)$ 162
$l(y, B)$ 162
$m_F(\chi)$ 171
$m(\chi) = m_{\mathbf{Q}_p}(\chi)$ 172, 304
$M(N)$ 199
$m_p(G)$ 159
$m_{u,v}^{(y,B)}$ 214
mV 12
$R[G]$ 13
r_G 237
$r(S)$ 64
$\mathrm{Rad}(V) = \mathrm{Rad}^1(V)$ 47, 247
$\mathrm{Rad}^n(V)$ 247
s 122
$\bar{s}$ 122
s_0 122
S^Δ 124
$S(y, B)$ 212
$s(Q:A) = s_G(Q:A)$ 134
$\mathrm{Soc}(M)$ 234
$\mathrm{Soc}^n(M)$ 234
$S(V) = S^1(V)$ 247
$S^n(V)$ 247
$T(V) = T_H(V)$ 85
$T(\theta)$ 181
$T(B)$ 181

Tr_H^G 85
$U \mid V$ 12
(V) 90
$\bar{V}$ 64
$\hat{V}$ 50
V_B 18
$V_0(G)$ 95
V_A 14
${}_AV$ 14
${}_AV_B$ 14
$V(N)$ 199
$V(N, A:X)$ 199
$V(N:X)$ 199
$V_t(P:G)$ 222
$V_1 \leftrightarrow V_2$ 58
$V \in B(e)$ 30
$w(W)$ 231
$W^\perp$ 50
$W_P(G)$ 364
x^Δ 351
$Z(G:H)$ 118
$Z_P(G:H)$ 118
$Z^*(G)$ 431
$(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)_G$ 132
$(\alpha, \beta)' = (\alpha, \beta)'_G$ 135
β_V 133
$\lambda(G, x)$, $\lambda(G)$ 416
$\chi_u^{(y, B)}$ 213
$\omega_u^{(y, B)}$ 213
$\mathfrak{X}(P, H)$ 111
$\mathfrak{Y}(P, H)$ 111
$\mathfrak{A}(P, H)$ 111
$\|v\|_I^c$ 35

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра Грина 90
— Гротендика 90
— конечно порожденная 13
— однорядная (рядная) 60
— свободная 13
— симметрическая 52
— фробениусова 52
Аннулятор модуля 26

Базис модуля 11
— — дуальный 51
Базисное множество блока 127
Блок 30
— главный 144
— заданного типа 414
— — — для подсекции 414
— — — — элемента 414
— накрывает 182
— определен 128
— регулярный 184
— слабо регулярный 184
Блоки одного типа 414
Блочная пара 191
— — расширяет 191
— — слабо расширяет 191
— — собственно расширяет 191

Вертекс модуля 108
Вещественный ствол дерева 281
Высота характера 142

Гомоморфизм Брауэра 122
Граф Брауэра блока 271
Группа дефектная блока 120
— — идемпотента 119
— инерции блока 181
— — функции 181
— низшая дефектная 222
— p-дефектная 117
— — идемпотента 119
— — класса 117
— p-радикальная 244
Группа представлений характера 379
— типа $L_2(p)$ 317
— хорошего поведения 396
— элементарная 132

Дефект идемпотента 119
— класса 118
Дерево Брауэра блока 275, 278

Идеал примитивный 26
— нильпотентный 27
— Рейнольдса 237
Идемпотент примитивный центральный 11
Идемпотенты ортогональные 11
— связанные 49
Инварианты Картана алгебры 58
— — — относительно базисного множества 138
Индекс ветвления модуля 99
— — области 71
— инерции (инерционный индекс) блока 217, 249
— Шура 171

Класс P-дефектный 117
Кольцо артиново 16
— вполне примарное 39
— локальное 39
— нётерово 16
— полное 37
— полупростое 27
— со свойством однозначности разложения 42
Конституэнта модуля 12
— — неприводимая 12

Лемма Брауэра 118
— Грина 113
— Накаямы 37
— Осимы 118, 166
— Судзуки 164

Лемма Фиттинга 34
— Шануэля 18
— Шура 30

Матрица Картана алгебры 58
— — блока 58
— разложения алгебры 68
— — блока 69
Метрика 35
— определена 35
Метрики эквивалентные 35
Модули совместимые 374
Модуль абсолютно неразложимый 73
— алгебраический 91
— без кручения 66
— вполне приводимый 23
— B-проективный 20
— главного ряда 390
— главный неразложимый 46
— двусторонний 14
— дуальный 50
— индуцированный 79
— инъективный 54
— — относительно 54
— квадратичного типа 174
— левый регулярный 12
— неприводимо порожденный 93
— неприводимый 12
— однорядный (рядный) 60
— перестановочный 371
— периодический 93
— полный 37
— — относительно 35
— представления 75
— принадлежит блоку 30
— проективный 17
— — относительно 20
— регулярный 12
— свободный 11
— точный 85
— транзитивный перестановочный 371
— чистый 66
— эндо-перестановочный 372
— эндо-тривиальный 372
— (G, H)-проективный 91
— H-проективный 91

Ниль-идеал 27
Нормальный ряд модуля 12
— — — без повторений 13

Относительный след 85
Отображение Брауэра 122
— — относительно (G, P, H) 122

Период модуля 93
Подсекция 212
Подсекция относительно базисного множества 413
— старшая 212
Поле разложения алгебры 56
— — модуля 56
Представления алгебры 74
Проективная резольвента 93
p-дефект класса 118
p-секция 160
π-секция 199
π-высота функции 209
π-высота элемента 209

Радикал Джекобсона 25
— модуля 25
Расширение области 70
— — конечное 71
— — неразветвленное 71
Росток блока 193
— — относительно 193

Соответствие Брауэра 128
— Грина 112
Соотношения Накаямы 96

Теорема Алперина 127
— Артина — Веддербарна 33
— Бернсайда 330
— Блау 334
— Брайанта — Ковача 100
— Брауэра 69, 77, 118, 132, 213, 216, 318
— — (первая основная) 129
— — (вторая основная) 160
— — (третья основная) 191
— Брауэра — Накаямы 43
— Брауэра — Несбитт 158
— Брауэра — Розенберга 126
— Брауэра — Туана 328
— Брауэра — Фейта 148, 406
— Бруё 211
— взаимности Фробениуса 96
— Виланда 353
— Грина 126, 127, 134, 364, 368
— Жордана 351, 406
— Жордана — Гёльдера 13
— Ито 334, 353, 354, 358
— Клиффорда 99
— Конлона 123, 364
— Кхатри 245
— Макки 96
— — о тензорном произведении 84
— Машке 89
— Неймана 331
— о разбиении 351
— Рейнольдса 182
— Рихена 358
— Скотта 354

Теорема Смита — Тирера 421
— Томпсона 70, 452
— Уоллеса 239
— Фейта 333, 334
— Фонга 182, 183, 185, 186
— Цушимы 242
— Шрайера 13
Трансверсаль 79
— левая 79

Уплотнение нормального ряда 12
— — — собственное 13
Условие обрыва возрастающих цепочек (DCC) 15
— — убывающих цепочек (ACC) 15

Факторы нормального ряда 12
Функция следа модуля 75
— — представления 75

Характер Брауэра 133
— главный 144
— канонический блока 189
— лежит в блоке 137
— модуля 132
— обобщенный 132
— p-рациональный 165
Характер центральный 57
Характеры p-сопряженные 165

Цоколь модуля 25

Числа разложения 68
— — высшие 160
— — относительно базисного множества 138, 413
Число зацеплений 56

Ширина 231

Эквивалентные метрики 35
— представления 75
Элемент алгебраический 91
— инвариантный 81
— квазирегулярный 26
— невырожденный 52
— правый (левый) квазирегулярный 26
— симметрический 52
Элементы H-сопряженные 117

Ядро блока 117
— модуля 144

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 7
Предисловие 9

Глава I 11

§ 1. Предварительные результаты 11
§ 2. Модульные конструкции 14
§ 3. Условия конечности 15
§ 4. Проективные и относительно проективные модули 17
§ 5. Полная приводимость 23
§ 6. Радикал 26
§ 7. Идемпотенты и блоки 28
§ 8. Кольца эндоморфизмов 30
§ 9. Полнота 35
§ 10. Локальные кольца 39
§ 11. Однозначность разложения 41
§ 12. Критерии подъема идемпотентов 43
§ 13. Главные неразложимые модули 46
§ 14. Двойственность в алгебрах 50
§ 15. Относительно инъективные модули над алгебрами 53
§ 16. Алгебры над полем 56
§ 17. Алгебры над полными локальными областями 66
§ 18. Расширение областей 70
§ 19. Представления и следы 74

Глава II 79

§ 1. Групповые алгебры 79
§ 2. Модули над групповыми алгебрами 79
§ 3. Относительные следы 85
§ 4. Алгебра представлений алгебры $R[G]$ 90
§ 5. Алгебраические модули 91
§ 6. Проективные резольвенты 93

Глава III 95

§ 1. Основные соглашения и обозначения 95
§ 2. $F[G]$-модули 95

§ 3. Групповые кольца над полными локальными областями 101
§ 4. Вертексы и источники 107
§ 5. Соответствие Грина 110
§ 6. Дефектные группы 117
§ 7. Гомоморфизмы Брауэра 121
§ 8. $R[G\times G]$-модули 124
§ 9. Соответствие Брауэра 127

Глава IV 132

§ 1. Характеры 132
§ 2. Характеры Брауэра 134
§ 3. Соотношения ортогональности 136
§ 4. Характеры в блоках 140
§ 5. Некоторые открытые проблемы 154
§ 6. Высшие числа разложения 159
§ 7. Центральные идемпотенты и характеры 165
§ 8. Некоторые естественные отображения 168
§ 9. Индекс Шура относительно $\mathbf{Q}_p$ 171
§ 10. Кольцо $A_Z^0(\bar{R}[G])$ 172
§ 11. Самодуальные модули в характеристике 2 174

Глава V 178

§ 1. Некоторые элементарные результаты 178
§ 2. Группы инерции 180
§ 3. Блоки и нормальные подгруппы 183
§ 4. Блоки и факторгруппы 187
§ 5. Свойства соответствия Брауэра 190
§ 6. Блоки и их ростки 193
§ 7. Изометрии 199
§ 8. π-высоты 209
§ 9. Подсекции 212
§ 10. Низшие дефектные группы 221
§ 11. Группы заданного дефицитного класса 226

Глава VI 228

§ 1. Блоки и расширения кольца R 228
§ 2. Радикалы и нормальные подгруппы 229
§ 3. Однорядные модули и нормальные подгруппы 232
§ 4. Радикал алгебры $\bar{R}[G]$ 235
§ 5. Радикал алгебры $R[G]$ 240
§ 6. p-радикальные группы 243

Глава VII 246

§ 1. Блоки с циклической дефектной группой 246
§ 2. Формулировки результатов 250

§ 3. Некоторые предварительные результаты 256
§ 4. Доказательства теорем 2.1 2.10 264
§ 5. Доказательства теорем 2.11 2.17 в случае $K=\hat{K}$ 265
§ 6. Дерево Брауэра 273
§ 7. Доказательства теорем 2.11 2.19 275
§ 8. Доказательства утверждений 2.20--2.25 276
§ 9. Некоторые свойства дерева Брауэра 278
§ 10. Некоторые следствия 282
§ 11. Некоторые примеры 289
§ 12. Неразложимые $\bar{R}[G]$-модули в B 294
§ 13. Индексы Шура неприводимых характеров из $\hat{B}$ 304
§ 14. Дерево Брауэра и расширения поля 307
§ 15. Неприводимые модули с циклическим вертексом 308

Глава VIII 311

§ 1. Группы с силовской подгруппой простого порядка 311
§ 2. Тензорные произведения $\bar{R}[N]$-модулей 312
§ 3. Группы типа $L_2(p)$ 317
§ 4. Характеризация некоторых групп 321
§ 5. Некоторые следствия теоремы 4.1 327
§ 6. Группы перестановок простой степени 329
§ 7. Характеры степени, меньшей $p-1$ 333
§ 8. Доказательство теоремы 7.1 339
§ 9. Доказательство теоремы 7.2 347
§ 10. Доказательство теоремы 7.3 348
§ 11. Некоторые свойства групп перестановок 351
§ 12. Группы перестановок степени $2p$ 354
§ 13. Характеры степени p 358

Глава IX 363

§ 1. Структура алгебры $A(G)$ 364
§ 2. Алгебра $A(G)$ в случае циклической S_p-подгруппы группы G и поля R 368
§ 3. Перестановочные модули 371
§ 4. Эндо-перестановочные модули для p-групп 372

Глава X 376

§ 1. Группы с нормальной p'-подгруппой 376
§ 2. Характеры Брауэра p-разрешимых групп 383
§ 3. Главные неразложимые характеры p-разрешимых групп 385
§ 4. Блоки p-разрешимых групп 388
§ 5. Модули главного ряда p-разрешимой группы 390
§ 6. Проблемы из § 5 главы IV для p-разрешимых групп 391
§ 7. Неприводимые модули p-разрешимых групп 396
§ 8. Изоморфные блоки 402

Глава XI 406

§ 1. Аналог теоремы Жордана 406

Глава XII 412

§ 1. Типы блоков 412
§ 2. Некоторые свойства главного блока 416
§ 3. Инволюции и блоки 417
§ 4. Некоторые вычисления со столбцами 420
§ 5. Группы с абелевой S_2-подгруппой типа $(2^m, 2^m)$ 423
§ 6. Блоки со специальными дефектными группами 425
§ 7. Группы с кватернионной S_2-подгруппой 427
§ 8. Z^*-теорема 431

Список литературы 435
Указатель обозначений 457
Предметный указатель 459