

ОТ 2D КОНФОРМНЫХ К 4D САМОДУАЛЬНЫМ ТЕОРИЯМ: КВАТЕРНИОННАЯ АНАЛИТИЧНОСТЬ¹

М. Эванс,² Ф. Гюрши³ и В. Огивецкий⁴

Теоретическое Отделение, ЦЕРН, Женева, Швейцария

Показано, что самодуальные теории обобщают на четыре измерения как конформные, так и аналитические аспекты двумерных конформных теорий поля. На языке гармонического пространства, появляются несколько путей расширения комплексной аналитичности (естественной в двух измерениях) до кватернионной аналитичности (естественной для четырех измерений). Чтобы быть аналитичными, конформные преобразования должны быть реализованы на CP^3 , которое возникает как класс смежности комплексифицированной конформной группы по модулю ее максимальной параболической подгруппы. В рамках этого подхода наглядно представляется твисторное соответствие Пенроуза и Уорда и непротиворечиво формулируется аналитичность Фютера.

Феза Гюрши

Феза Гюрши, прекрасный человек и выдающийся физик, ушел из жизни 13 апреля 1992 года. Он является соавтором данной статьи, одной из серии его работ, посвященных кватернионным аспектам четырехмерных теорий поля, области в которой он был пионером. Феза с энтузиазмом принимал участие в написании этой статьи, даже когда он боролся с болезнью, унесшей его жизнь. К сожалению, он не успел утвердить окончательный вариант статьи и не несет поэтому ответственность за какие-либо ее недостатки. Было большим наслаждением и честью работать с Фезой, использовать преимущество его плодотворного мышления и острого ума. Опыт работы с ним и изумительная личность Фезы Гюрши останутся навсегда в памяти двух его соавторов.

Введение

От 2D комплексной к 4D кватернионной аналитичности

Две *действительные* координаты двумерного евклидова пространства достаточно естественно объединяются в *единое комплексное число*

$$x^\mu = \{x^1, x^2\} \longrightarrow z = x^1 + ix^2. \quad (1)$$

Как хорошо известно, наиболее общее конформное преобразование координат в двух (*и только в двух*) измерениях является аналитическим в этих комплексных координатах.

$$z' = f(z), \quad \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}). \quad (2)$$

¹ CERN-TH.6533/92, ArXiv:hep-th/9207089, перевод А. Виноградовой под ред. А. Элиовича

² Рокфеллеровский Университет, Нью-Йорк, USA, evans@physics.rockefeller.edu.

³ Департамент Физики, Йельский Университет, Нью Хэвен, скончался.

⁴ Прибыл из Лаборатории теоретической физики, ОИЯИ, Дубна, Россия; Департамент Теоретической Физики, Женевский университет, Женева, Швейцария.

Благодаря условию Коши-Римана, его даламбертиан обращается в нуль

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0 \longrightarrow \square f(z) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0. \quad (3)$$

В любой размерности более высокого порядка конформные преобразования зависят от конечного числа параметров и даламбертиан бесконечно малых конформных бустов *не обращается в нуль*.

В четырехмерном случае координаты, как хорошо известно, можно объединить в кватернион так же естественно, как в двумерном случае – в комплексное число. В частности, в спинорном формализме имеем

$$x^m = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \longrightarrow z = x^{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} x^0 - ix^3 & -ix^1 - x^2 \\ -ix^1 + x^2 & x^0 + ix^3 \end{pmatrix} = x^0 I - i\sigma_a x^a = x^0 + e_a x^a \quad (4)$$

и матрицы Паули представляют алгебру кватернионных единиц, $e_a = -i\sigma_a$

$$e_a e_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} e_c. \quad (5)$$

Аналитические преобразования (2) являются фундаментальными для 2D-конформных теорий поля. Естественно интересоваться, существуют ли 4D-теории, в которых некоторая форма кватернионной аналитичности могла бы играть сходную роль [1], [2]. Однако, понятие кватернионной аналитичности оказывается более тонким и мы увидим, что существует множество ее потенциальных форм, но только некоторые из них оказываются интересными (см. например [3]).

Трудности кватернионной аналитичности

Прямым выражением условия Коши-Римана было бы

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{3} e_a \frac{\partial}{\partial x^a} \right) f = 0 \quad (6)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ определено таким образом, что $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1$. Однако, хорошо известно (см. например [3]), что из-за некоммутативности кватернионов единственное решение уравнения (6) в форме степенных рядов z равно $f = a + zb$ с постоянными кватернионами a и b . Даже $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 = \frac{1}{3}(z - \bar{z})$.

Раньше *Фютеровская кватернионная аналитичность* ([4], [5], [6]) была единственной успешной попыткой найти что-нибудь менее ограничивающее, чем (6). Аналитическая функция кватерниона z определяется рядами типа рядов Вейерштрасса

$$f(z) = \sum a_n z^n, \quad (7)$$

где коэффициенты a_n являются вещественными или комплексными числами (или кватернионами, но стоящими только с одной стороны от z^n , скажем, слева как в (7)). Можно показать, что такая функция удовлетворяет некоторым условиям типа Коши-Римана, но в производных *третьего порядка* вместо первого. Уравнение $\square f(z) = 0$ не выполняется в общем случае; однако уравнение $\square^2 f(z) = 0$ сохраняется. В работе

(6) было подчеркнуто, что выше приведенное определение может оставаться в силе в некоторых $SO(4)$ системах координат, но нарушаться в других⁵.

Несмотря на эти трудности, в самодуальных теориях [7] и в $N = 2$ суперсимметричных теориях ([8], [9]) возникают многообразия кватернионного типа, а именно кватернионно-кэлеровские и гиперкэлеровские многообразия. В самом деле, проблемы связанные с кватернионной аналитичностью очень напоминают трудности, возникающие при поиске нетривиального понятия кватернионной геометрии. Заманчиво думать, что малое количество решений уравнения (6) является аналитическим проявлением того факта, что только плоские метрики являются гиперкэлеровскими по отношению к интегрируемым почти кватернионным структурам.

Поэтому тот факт, что интересные кватернионные геометрии на самом деле существуют, наводит на мысль, что возможно найти полезное понятие кватернионной аналитичности. Это реализовано в рамках подхода гармонического пространства [10] (разновидность твисторного подхода [11], [12], [13], [14], [15], и т. д.), который оказался эффективным для теорий, обладающих кватернионными структурами ([10], [16], [17], [18], [19], [20], и т. д.), а также для надлежащего улучшения ([5], [6]) выше приведенного определения Фютера (см. также раздел 5).

План и результаты

Смысл настоящей работы заключается в демонстрации того, что приближение гармонического пространства открывает новые горизонты в поисках полезных определений кватернионной аналитичности, включая условия Коши-Римана, накладываемые на производные первого порядка, и с аналитическими функциями со стремящимся к нулю даламбертианом. Данное приближение позволяет достичь этих целей.

Существует несколько путей, на которых можно реализовать гармоническую версию кватернионной аналитичности. Один путь ведет как раз к самодуальным теориям Янга-Миллса и Эйнштейна, которые таким образом, возникают как $4D$ -двойники $2D$ -конформных теорий поля, в том смысле, что обе являются аналитическими в подходящих значениях размерностей. Мы будем иметь дело в этой статье с представлением самодуальных теорий Янга-Миллса в гармоническом пространстве и с их аналитической структурой в этом пространстве.

Другой путь ведет к "ковариантизации" определения Фютера [5] и соответствующее фактор-пространство также будет обсуждаться.

Заманчивая проблема нахождения четырехмерного двойника двумерных конформных теорий поля была атакована несколькими авторами, см. частично ссылки к этой работе, например [21], [22]. $4D$ -самодуальные калибровочные и гравитационные теории рассматривались как очень перспективные кандидаты. Следует заметить, что тесные связи этих теорий с разнообразными одно- и двумерными интегрируемыми системами обсуждались уже более десяти лет назад, например [23], [24], [25]. В [26], [27] было сделано даже предположение, что все интегрируемые системы могут быть выведены посредством сокращения размерности из $4D$ -самодуальных теорий, наследуя их замечательные свойства. Ряд последних работ ([28], [29], [30], [31], [32], [33] и т. д.) подкрепляют это предположение, обнаруживая также важность обеих сигнатур: $(4,0)$ и $(2,2)$.

⁵ Действительно, четырехмерные вращения $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$, как известно, имеют кватернионную форму [1], [6] $z' = mz\bar{n}$, $m\bar{m} = n\bar{n} = 1$, где $m \in SU(2)_L$ и $n \in SU(2)_R$ - единичные кватернионы, представляющие эти группы. Возникают проблемы уже с z^2 -членом. Он трансформируется в $mz\bar{n}mz\bar{n}$, что не может быть выражено в начальной аналитической форме вследствие некоммутативности кватернионов.

Подход гармонического пространства позволяет систематически изучить самодуальные теории и их симметрии, основанные на их кватернионной аналитичности (в гармоническом смысле), которая заменяет стандартную комплексную в 2D-конформных теориях. Конформная инвариантность самодуальности также играет существенную роль: а) Она ставит пространственные и гармонические координаты на равный уровень. б) Требование, что конформные преобразования должны быть аналитическими влечет за собой замечательный феномен *комплексификации*: они могут быть реализованы как действительная $Spin(5, 1)$ группа, действующая на 5-мерном компактном смежном классе ее *комплексификации*, $Spin(6, C) \sim SL(4, C)$. Этот смежный класс есть как раз CP^3 . Это многообразие является комплексным по отношению к обычному комплексному сопряжению. Однако, оно оказывается *действительным* по отношению к некоторому комбинированному сопряжению, произведению комплексного и антиподального сопряжений.

В этой статье мы ограничимся дискуссией о самодуальных теориях Янга-Миллса в евклидовом пространстве. План статьи состоит в следующем. В разделе 2 мы напоминаем основные свойства гармоник и их отношение к кватернионам. Необходимость комплексификации обсуждается на простом уровне в разделе 2.2. В разделе 3 введено простейшее определение гармонической аналитичности. Ее роль в самодуальных калибровочных теориях продемонстрирована в разделе 4, где также собраны некоторые другие факты [16], [18], [19], касающиеся трактовки самодуальности с позиций гармонического пространства, и даны простые примеры кватернионных аналитических преобразований. Некоторые другие смежные классы 4D-группы вращения (другой, чем S^2) кратко обсуждены в разделе 5, включая тот, который используется в подходе Фютера. Раздел 6 посвящен полному исследованию классов смежности конформной группы $SO(5, 1)$, или, более точно, ее универсальной накрывающей $Spin(5, 1)$, поскольку мы имеем дело со спинорными гармониками. Нам снова придется рассмотреть ее действия на смежном классе, CP^3 , его комплексифицированной формы, $Spin(6, C) \sim SL(4, C)$. В этом разделе разработана необходимая техника и мы покажем, как эффективно вычислить форму преобразований на таких классах смежности. Некоторые математические определения и утверждения даны в Приложении "Компактные смежные классы некомпактных групп". Другое Приложение представляет 5-параметрическое семейство кватернионных комплексных структур в 4D.

Гармоники

$SU(2)/U(1)$

Перед обсуждением всех этих вопросов стоит повторить ряд основных положений, касающихся гармоник [16], [10]. Как в любой реализации твисторной программы [11], [12], подход гармонического пространства [10] осуществляется посредством рассмотрения расширенного пространства, что является платой за возможность определить подходящие аналитичности. В нашем случае это пространство включает двумерную сферу S^2 . Мы начнем с рассмотрения ее как смежного класса группы вращения $Spin(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ по модулю ее подгруппы $U(1)_L \times SU(2)_R$. Другими словами, мы представим эту сферу как класс смежности $SU(2)/U(1)$. Конечно, для описания этой сферы можно выбрать полярные (θ, ϕ) или стереографические $(z, \bar{z})$ координаты. Однако, оказывается намного более удобным использовать именно гармоники вместо любых специфических координат, потому что гармоники определены

на этой сфере *глобально*. Мы будем иметь дело с 2×2 матрицей [10]

$$U = (u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}) = \begin{pmatrix} u_1^{-} & u_1^{+} \\ u_2^{-} & u_2^{+} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Гармоники имеют $SU(2)$ индексы α и $U(1)$ "заряды" $+, -$. Они преобразуются под действием $SU(2)$ как спиноры, поэтому для $M \in SU(2)$, $(M^+ M = 1)$ имеем

$$u_{\alpha}^{\pm'} = M_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{\pm}, \quad U' = MU. \quad (9)$$

В соответствии с природой их смежных классов, гармоники определены по модулю $U(1)$ преобразований, производимых матрицей P ,

$$U \longrightarrow UP, \quad P = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{+i\lambda} \end{pmatrix} \in U(1) \quad \text{или} \quad (10)$$

$$u_{\alpha}^{+'} \simeq e^{i\lambda} u_{\alpha}^{+}, u_{\alpha}^{-'} \simeq e^{-i\lambda} u_{\alpha}^{-}. \quad (11)$$

Благодаря такой свободе, можно выразить преобразования матрицы U в форме

$$U' = MUP \quad (P^+ P = 1) \quad (12)$$

Иногда удобно тем или иным образом зафиксировать матрицу P , чтобы перейти к некоторым специфическим координатам, и т. д. Однако, тогда теряется глобальное описание фактор-многообразия (quotient manifold) и возникает хорошо известная проблема Римана-Гильберта.

Окончательно, в $\frac{SU(2)}{U(1)}$ описании S^2 все матрицы U , M и P являются унитарными и гармоники противоположных $U(1)$ зарядов *комплексно сопряжены*,

$$u_{\alpha}^{-} = \overline{u^{+\alpha}}, \quad (13)$$

где $SU(2)$ -индексы поднимаются обычным образом, $u^{+\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} u_{\beta}^{+}$. Гармоники должны подчиняться условию

$$\det U = u^{+\alpha} u_{\alpha}^{-} = 1 \quad (14)$$

и имеет место соотношение полноты

$$u^{+\alpha} u_{\beta}^{-} - u^{-\alpha} u_{\beta}^{+} = \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (15)$$

Это соотношение делает возможным удобную операцию проецирования,

$$f_{\beta} = u^{+\alpha} u_{\beta}^{-} - u^{-\alpha} u_{\beta}^{+} f_{\beta} = (u^{+\alpha} f_{\alpha}) u_{\beta}^{-} - (u^{-\alpha} f_{\alpha}) u_{\beta}^{+}, \quad (16)$$

Так что все свободные непунктирные индексы могут быть приписаны только гармоникам. Мы будем часто пользоваться этим приемом.

Заметим, что так как 2×2 матрицы унитарны, M и U могут одновременно рассматриваться как кватернионы единичной нормы. Поскольку гармоники определены только с точностью до $U(1)$, фаза $U(1)$ не должна входить в какие-либо формулы. Это означает, что заряд $U(1)$ сохраняется и что "функции" на сфере должны обладать определенным $U(1)$ зарядом, q . Другими словами, все члены в разложении должны содержать произведения гармоник u^{+}, u^{-} одного и того же заряда q . Например, для $q = +1$:

$$f^{+}(u) = f^{\alpha} u_{\alpha}^{+} + f^{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha}^{+} u_{\beta}^{+} u_{\gamma}^{-} + \dots \quad (17)$$

Такие величины будут приобретать общую $U(1)$ -фазу; однако, это неважно благодаря предполагаемому сохранению $U(1)$ заряда. Конечно, для каждого члена в гармоническом разложении типа (17) предполагается полная симметричность по индексам $\alpha, \beta, \gamma \dots$, иначе оно сводилось бы к членам низшего порядка посредством условия (14).

Фактически, u_α^+, u_α^- – это фундаментальные сферические гармоники спина $1/2$, хорошо знакомые всем из квантовой механике,⁶ в то время как (16) является примером гармонического разложения на S^2 . Вот почему мы будем ссылаться на u_i^+, u_i^- в дальнейшем просто как на гармоники.

Удобно выполнять как дифференцирование, так и интегрирование на двусфере непосредственно в терминах гармоник. Действие гармонической производной D^{++} на сами гармоники определяется в соответствии с простым правилом

$$D^{++}u_\alpha^+ = 0 \quad D^{++}u_\alpha^- = u_\alpha^+ \quad (18)$$

Комплексификация $SU(2)$

На очереди важное замечание. Рассмотрение конформных инвариантов самодуальных уравнений (так же, как и в некоторых других случаях) показывает, что необходимо *комплексифицировать* данное выше описание. Причина состоит в следующем. Параметры конформных бустов имеют размерность *длина*⁻¹. Поэтому конформные преобразования гармоник будут линейны в пространственных координатах. Если u^-, u^+ были комплексно сопряженные, как в (13) и если u^+ преобразования были аналитичны [см. разделы 3, 4 и (38), (40)], то преобразования u^- будут неизбежно неаналитичными. Рассматривая действие $SU(2)$ на смежном классе ее комплексификации, можно иметь как u^+ , так и u^- преобразующиеся аналитически (см. раздел 3, 4), потому что в этом случае они перестают быть комплексно сопряженными друг другу.

Предварительно мы представим двумерную сферу S^2 как класс смежности $SU(2)/U(1)$. После этого мы будем рассматривать действие $SU(2)$ -группы на S^2 смежном классе ее комплексификации $SL(2, C)$. Последняя группа может быть представлена через 2×2 унимодулярные матрицы. Она некомпактна и имеет унимодулярную треугольную подгруппу, которая является ее максимальной параболической подгруппой [35], [15], [35] (смотри Приложение В для математических определений и техники). Известно, что двусфера может также рассматриваться как класс смежности комплексифицированной группы. Используя разложение Ивасава, взяв параболическую подгруппу равной $P = U(1) \times AN$, A и N – подгруппы $SL(2, C)$, имеем

$$\frac{SL(2, C)}{P} = \frac{SU(2) \times AN}{U(1) \times AN} = \frac{SU(2)}{U(1)} = S^2,$$

или

$$S^2 = \frac{SL(2, C)}{P} = \frac{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ z^{--} & \rho^{-1} \end{pmatrix}}, \quad ad - bc = 1, \quad (19)$$

⁶ $U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\phi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}$ в углах Эйлера, третий не нужен, так как берется из уравнения (12) как фаза.

где a, b, c, d, ρ и z^{--} – комплексные числа. Согласно этому представлению, гармоники определены с точностью до преобразований параболической группы

$$u_{\alpha}^{+'} = \rho^{-1} u_{\alpha}^{+}, \quad u_{\alpha}^{-'} = \rho u_{\alpha}^{-} + z^{--} u_{\alpha}^{+}, \quad (20)$$

которые являются достаточно общими для u^{-} гармоник. Следовательно, мы приходим к ключевому выводу, что *любое преобразование гармоник может быть сведено к*

$$\delta u_{\alpha}^{+} = \lambda^{++} u_{\alpha}^{-}, \quad \delta u_{\alpha}^{-} = 0 \quad (21)$$

с некоторыми параметрами λ^{++} (выбирая подходящее компенсирующее преобразование параболической группы).

Мы будем ссылаться в дальнейшем на эту фиксированную калибровку как на u^{-} или "нормальную" форму, поскольку во всех калибровочных теориях, включая гравитационную, существует нормальная калибровка в которой все предпотенциалы зависят только от u^{-} и не зависят от u^{+} гармоник. Нормальная форма значительно упрощает рассуждения и вычисления.

Основная процедура по нахождению такой формы следует из данного выше правила (12). Для бесконечно малых преобразований δM это читается:

$$\delta U = \delta M U + U \Delta P \quad (22)$$

Можно всегда найти такую компенсацию ΔP , такую что $\delta u_{\alpha}^{-} = 0$. Например, для вращений имеем

$$\delta u_{\alpha}^{\pm} = \delta l_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{\pm}. \quad (23)$$

Переходя к u^{-} форме, запишем

$$(0, \delta u_{\alpha}^{+}) = (\delta l_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{-}, \delta l_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{+}) + (u_{\alpha}^{-} \Delta \rho + \Delta z^{--} u_{\alpha}^{+}, -\Delta \rho u_{\alpha}^{+}). \quad (24)$$

Тогда, проектируя на гармоники [см. (16)], получаем для параметров параболических преобразований

$$\Delta \rho = -u^{+\gamma} \delta l_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{-}, \quad \Delta z^{--} = u^{-\gamma} \delta l_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{-}, \quad (25)$$

в то время, как преобразования гармоник приобрели u^{-} форму

$$\delta u_{\alpha}^{-} = 0, \quad \delta u_{\alpha}^{+} = (u^{+\gamma} \delta l_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{+}) u_{\alpha}^{-}. \quad (26)$$

С этими новыми правилами игры *гармоники u^{+} и u^{-} теперь уже не являются комплексно сопряженными*. Тем не менее, может быть определено новое комбинированное сопряжение [10], которое является произведением комплексного сопряжения и антиподального отображения (просто отображение точки на одном конце диаметра в точку на другом конце):

$$\hat{u}_{\alpha}^{\pm} = u^{\pm\alpha}, \quad \hat{u}^{\pm\alpha} = -u_{\alpha}^{\pm}. \quad (27)$$

Действительные свойства обсуждены в терминах по новому определенного сопряжения.

Важное замечание: действительные свойства гармоник сохраняются при действии $SU(2)$ на S^2 , но не при действии полной $SL(2, C)$.

Гармоники как квадратные корни кватернионов

Мы упомянули, что гармоники тесно связаны с кватернионами. Фактически, в общей системе координат, кватернионы могут рассматриваться как билинейные комбинации гармоник. Чтобы это увидеть, мы объединяем $U(1)$ заряды в один индекс i :

$$u_{\alpha}^{\pm} = u_{\alpha}^i, \quad i = (+, -). \quad (28)$$

Тогда определяющее ограничение (14) и соотношение полноты (15) приобретают симметричную форму

$$u_i^{\alpha} u_{\alpha}^j = \delta_j^i; \quad u_i^{\alpha} u_{\beta}^i = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (29)$$

Теперь всё двухпараметрическое семейство кватернионных единиц, произвольно ориентированных в трехмерном пространстве, задается посредством

$$e_{a\alpha}^{\beta} = -i u_{\alpha}^i \sigma_{a_i}^j u_j^{\beta}. \quad (30)$$

Это легко проверить с помощью (29). Выше приведенное представление (4) приводит к специальной калибровке

$$u_1^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Эта гармоническая природа кватернионов объясняет, почему они требуются во всех задачах, где многообразия имеют кватернионные структуры: в $N = 2$ суперсимметричных теориях [10], [20] и в самодуальных теориях [16], [18], [19].

3. Гармоническая кватернионная аналитичность

Начнем наше обсуждение кватернионной аналитичности с напомнимания некоторых положений из [16]. Прежде всего, говоря о координате $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ как о кватернионе z , мы имеем в виду $4D$ -группу вращений в форме $Spin(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$. Естественно реализовать ее на некоторых из ее факторпространств. Простейшая возможность – выбрать двусферу

$$SU(2)_R/U(1) = \{u_{\alpha}^{\pm}\} \quad (32)$$

Удобно перейти к пространственным координатам

$$x^{\pm\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\alpha}} u_{\alpha}^{\pm}, \quad x^{\alpha\dot{\alpha}} = -x^{+\dot{\alpha}} u^{-\alpha} + x^{-\dot{\alpha}} u^{+\alpha} \quad (33)$$

Как можно видеть, это есть твисторное преобразование Пенроуза, записанное на языке гармонического пространства. Использование x^{+} и x^{-} координат дает возможность ввести новый тип аналитических функций, которые зависят от x^{+} и гармоник, но не зависят от x^{-} . Соответствующие условия Коши-Римана будут в производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x^{-\dot{\alpha}}} f^A(x, u) = 0, \quad (34)$$

где A символически отображают индексы спинора и $U(1)$ -заряды. Как следствие этого условия мы имеем

$$\square f^A = \frac{\partial}{\partial x^m} \times \frac{\partial}{\partial x^m} f^A = 0 \quad (35)$$

поскольку можно проверить, что $\square = \frac{\partial}{\partial x^{+\dot{\alpha}}} \times \frac{\partial}{\partial x^{-\dot{\alpha}}}$ есть обычный даламбертиан в четырех измерениях. Таким образом, даламбертиан кватернионной аналитической

функции обращается в нуль по совершенно аналогичным причинам, что и в случае обычной комплексной аналитичности.

Очевидно, что свойство аналитичности сохраняется при общих кватернионных аналитических преобразованиях, смешивающих координаты $x^{+\dot{\alpha}}, u_{\alpha}^{+}, u_{\alpha}^{-}$:

$$\begin{aligned}\delta x^{+\dot{\alpha}} &= f^{+\dot{\alpha}}(x^{+}, u^{\pm}), \\ \delta u_{\alpha}^{+} &= w^{++}(x^{+}, u^{\pm})u_{\alpha}^{-} \\ \delta u_{\alpha}^{-} &= 0\end{aligned}\tag{36}$$

с произвольными кватернионными аналитическими функциями $x^{+\dot{\alpha}}$ и w^{++} как параметрами. Записав эти преобразования, мы эффективным образом приняли во внимание, что гармоники определены по модулю преобразований (20). Заметим также, что не было сделано никаких предположений относительно формы преобразований координат $x^{-\dot{\alpha}}$,

$$\delta x^{-\dot{\alpha}} = \phi^{-\dot{\alpha}}(x^{+}, x^{-}, u^{\pm}),\tag{37}$$

где локальные параметры ϕ являются неаналитическими и могут зависеть от x^{-} любым образом. Чтобы быть более конкретными, приведем несколько примеров.

1. Группа Пуанкаре (левые и правые вращения, $\delta l_{\beta}^{\alpha}$ и $\delta r_{\beta}^{\dot{\alpha}}$ соответственно, $\delta l_{\beta}^{\beta} = \delta r_{\beta}^{\dot{\beta}} = 0$ и трансляции $\delta b^{\alpha\dot{\alpha}}$) представляется посредством аналитических кватернионных преобразований:

$$\begin{aligned}\delta x^{+\dot{\alpha}} &= -\delta r_{\beta}^{\dot{\alpha}} x^{+\beta} + \delta b^{\alpha\dot{\alpha}} u_{\alpha}^{+}, \quad \delta u_{\alpha}^{\pm} = +\delta l_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{\pm}, \\ (\delta x^{\alpha\dot{\alpha}} &= -\delta l_{\beta}^{\alpha} x^{\beta\dot{\alpha}} - \delta r_{\beta}^{\dot{\alpha}} x^{\alpha\beta} + \delta b^{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \delta x^{-\dot{\alpha}} = -\delta r_{\beta}^{\dot{\alpha}} x^{-\beta} + \delta b^{\alpha\dot{\alpha}} u_{\alpha}^{-}).\end{aligned}$$

Заметим, что повороты гармоник могут также быть представлены как в (23).

2. То же самое для дилатаций (растяжений)

$$\delta x^{+\dot{\alpha}} = \delta d x^{+\dot{\alpha}}, \quad \delta u_{\alpha}^{\pm} = 0$$

и $\delta x^{\alpha\dot{\alpha}} = \delta d x^{\alpha\dot{\alpha}}$, $\delta x^{-\dot{\alpha}} = \delta d x^{-\dot{\alpha}}$. [Нужно помнить, что гармоники определены по модулю преобразований (20).] Выше приведенные преобразования исчерпывают все кватернионные аналитические преобразования, которые являются линейными по $x^{+\dot{\alpha}}$ и не ведут к явному возникновению гармоник в $\delta x^{\alpha\dot{\alpha}}$.

3. Аффинные преобразования

$$\delta x^{\alpha\dot{\alpha}} = a_{\beta\dot{\beta}}^{\alpha\dot{\alpha}} x^{\beta\dot{\beta}}, \quad a_{\alpha\dot{\beta}}^{\alpha\dot{\alpha}} = a_{\beta\dot{\alpha}}^{\alpha\dot{\alpha}} = 0$$

определенно являются неаналитическими при любом выборе репараметризации гармоник. Например, если $\delta u_{\alpha}^{\pm} = 0$, то

$$\delta x^{+\dot{\alpha}} = u_{\alpha}^{+} a_{\beta\dot{\beta}}^{\alpha\dot{\alpha}} (u^{+\beta} x^{-\dot{\beta}} - u^{-\beta} x^{+\dot{\beta}})$$

содержит как $x^{+\dot{\alpha}}$, так и $x^{-\dot{\alpha}}$.

4. Переходя к преобразованиям, билинейным в $x^{+\dot{\alpha}}$, обнаруживаем прежде всего, что *конформные бусты принадлежат к кватернионным аналитическим преобразованиям*. С очевидностью, конформные бусты равны

$$\delta x^{\alpha\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\beta}} \delta k_{\dot{\beta}\beta}^{\beta\dot{\alpha}}\tag{38}$$

($\delta k_{\dot{\beta}\beta}^{\beta\dot{\alpha}}$ – параметры), так что

$$\delta x^{+\dot{\alpha}} = -x^{+\dot{\beta}} \delta k_{\dot{\beta}\beta}^{\beta\dot{\alpha}} u^{-\beta} x^{+\dot{\alpha}},\tag{39}$$

$$\begin{aligned} \delta u_{\alpha}^{+} &= -x^{+\dot{\beta}} \delta k_{\dot{\beta}\beta} u^{+\beta} u_{\alpha}^{-}, \quad \delta u_{\alpha}^{-} = 0, \\ (\delta x^{-\dot{\alpha}} &= -x^{+\dot{\beta}} \delta k_{\dot{\beta}\beta} u^{-\beta} x^{-\dot{\alpha}}). \end{aligned} \quad (40)$$

Параметр конформного буста имеет размерность обратной длины. Таким образом, конформные преобразования гармоник содержат пространственные координаты x линейно. Стоит подчеркнуть еще раз, что становится возможным избежать появления $x^{-\dot{\alpha}}$ (неаналитичности) в преобразованиях u_{α}^{-} гармоник только потому, что любое преобразование u^{-} может быть скомпенсировано подходящим преобразованием параболической группы (переходя к нормальной форме).

Заметим, что при комбинированном сопряжении (27)

$$\hat{x}^{+\dot{\alpha}} = -x_{\dot{\alpha}}^{+} \quad (41)$$

и это совместимо с *действительными* преобразованиями Пуанкаре и конформными преобразованиями.

Заметим также, что действительные свойства выше приведенных основных преобразований (36) должны точно так же согласоваться с комбинированным сопряжением (27), (41).

Ограничимся этими примерами.

Замечательно, что *только этот тип аналитичности присущ* важным теориям, обсуждаемым в следующем разделе.

4. Самодуальные калибровочные теории в четырех измерениях

Чтобы вскрыть природу кватернионной аналитичности теорий, названных в заголовке раздела, следует здесь вспомнить процедуру Уорда [12], [11] применяемую для самодуальных калибровочных уравнений в R^4 . Использование языка гармонического пространства [16], [18], [19] делает ситуацию полностью понятной, показывая прозрачное соответствие между кватернионной аналитической (в смысле предыдущего раздела) дважды $U(1)$ -заряженной функцией $V^{++}(x^{+}, u)$ и решениями самодуальных уравнений. Заметим, что рассмотрение самодуальной теории Эйнштейна проходит сходным путем.

Коммутатор ковариантных производных $D_{\alpha\dot{\alpha}} = \partial_{\alpha\dot{\alpha}} + iA(x)_{\alpha\dot{\alpha}}$ (связность A принимает значения в алгебре Ли калибровочной группы для теории Янга-Миллса и в касательной группе Лоренца для эйнштейновской теории),

$$[D_{\alpha\dot{\alpha}}, D_{\beta\dot{\beta}}] = \epsilon_{\alpha\beta} F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(x) + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} F_{\alpha\beta}(x), \quad (42)$$

определяет напряженность поля Янга-Миллса $F_{\alpha\beta}, F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. В спинорном формализме, самодуальное уравнение есть просто $F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(x) = 0$. Приняв во внимание определение (42), становится очевидным, что это уравнение *эквивалентно*

$$[D_{\alpha\dot{\alpha}}, D_{\beta\dot{\beta}}] = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} F_{\alpha\beta}(x). \quad (43)$$

Имея в своем распоряжении гармоники, мы можем развязать это уравнение следующим образом. Умножая уравнение (43) на $u^{+\dot{\alpha}} u^{+\dot{\beta}}$, и определяя

$$D_{\alpha}^{+} = u^{+\dot{\alpha}} D_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (44)$$

получаем

$$[D_{\alpha}^{+}, D_{\beta}^{+}] = 0. \quad (45)$$

Более удобно заменить (44) на эквивалентное (приняв во внимание $U(1)$ сохранение заряда) коммутационное соотношение (18)

$$[D^{++}, D_{\alpha}^{+}] = 0. \quad (46)$$

Пара уравнений (45) и (46) эквивалентна условию самодуальности (43). Однако эта пара значительно проще. Первое из них устанавливает, что ковариантные производные D^{+} коммутируют. Поэтому его решение есть "чистая калибровка",

$$D_{\alpha}^{+} = h \partial_{\alpha}^{+} h^{-1} = \partial_{\alpha}^{+} + h(\partial_{\alpha}^{+} h^{-1}), \quad (47)$$

где производная ∂_{α}^{+} не содержит никакой связности, и "мост" $h = h(x, u)$ принимает значения в калибровочной группе. Выбирая координаты (33) имеем

$$D_{\alpha}^{+} = u^{+\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{-\alpha}}. \quad (48)$$

В калибровке, в которой D_{α}^{+} становится короткой, гармоническая производная D^{++} становится длинной (потому что мост h в основном зависит от гармоник):

$$D^{++} \rightarrow D^{++} = h^{-1} D^{++} h = D^{++} + h^{-1}(D^{++} h) = D^{++} + iV^{++}, \quad (49)$$

приобретая гармоническую связность, которая глобально определена на S^2 (действительно в значениях калибровочной алгебры)

$$V^{++} = -ih^{-1}(D^{++} h). \quad (50)$$

Теперь второе уравнение этой пары становится *условием Коши-Римана для гармонической аналитичности*

$$\frac{\partial}{\partial x^{-\alpha}} V^{++} = 0, \quad (51)$$

утверждая, что в самодуальном случае гармоническая связность аналитична, то есть она не зависит от $x^{-\alpha}$, $V^{++} = V^{++}(x^{+\alpha}, u^{\pm})$. Обратно, если V^{++} аналитична, она кодирует решение самодуальных уравнений.

Более того, можно избавиться от положительно заряженных гармоник u^{+} , поскольку калибровочные потенциалы V^{++} определены только с точностью до калибровочных преобразований

$$V^{++}(x^{+}, u) = (D^{++} + iV^{++}(x^{+}, u))\lambda(x^{+}, u).$$

Существует нормальная калибровка [16], в которой V^{++} содержит в своем гармоническом разложении только отрицательно заряженные гармоники u^{-} :

$$V^{++} = V^{++}(x^{+}, u^{-}).$$

Поэтому аналитический V^{++} кодирует решение самодуального уравнения. Это есть прозрачное проявление "твисторного соответствия". Однако, мы больше знакомы с обычным пространством R^4 , чем с гармоническим. Чтобы перейти к первому, нужно определить мост h из уравнения (50) для данной аналитики V^{++} , и затем заменить мост h на выражение обычной векторной связности $A_a(x) = -ih \frac{\partial}{\partial x^a} h^{-1}$. Важно, что (50) имеет решение для почти любых V^{++} [18].

Таким образом, не существует проблем в решении самодуальных уравнений в гармоническом пространстве. Инстантоны и монополи являются специальными решениями самодуального уравнения, имеющего конечное действие и конечную энергию соответственно. Они полностью описаны на языке гармонического пространства, включая ADHM конструкцию [18, 19].

Конечно, любое изменение гармонической аналитической связности

$$V'(x^+, u) = V^{++}(x^+, u) + g^{++}(x^+, u) \quad (52)$$

имеет своим результатом переход от одного решения самодуального уравнения к другому. Таким образом, наиболее общее преобразование Бэклунда кодируется снова с помощью дважды $U(1)$ заряженного аналитического объекта $g^{++}(x^+, u)$. Важный геометрический класс этих преобразований состоит из общих аналитических диффеоморфизмов (29) сопровождаемых преобразованием "подобия", определенно-го посредством общего аналитического веса $c(x^+, u)$, который принимает значение в калибровочной алгебре,

$$V'(x^{+'}, u') = e^{c(x^+, u)} V^{++}(x^+, u) e^{-c(x^+, u)}. \quad (53)$$

Этот класс включает очень многие преобразования Бэклунда. Говоря о диффеоморфизмах, мы можем ограничиться теми из них, которые реализуются в нормальной форме.

Таким образом, кватернионная аналитичность гармонического типа свойственна самодуальным 4D калибровочным теориям. Конечно, они также конформно инвариантны. Однако, теперь конформные преобразования образуют конечномерную подгруппу $Spin(5, 1)$ аналитических преобразований, как раз тех, которые даны в (39), (40). Следовательно, эти теории могут естественно рассматриваться как 4D-расширение 2D-конформных теорий поля как в их конформном, так в и аналитическом аспектах.

5. Примеры других кватернионных аналитичностей

Только одно факторпространство было рассмотрено выше, это просто двусфера S^2 . Однако, существуют и другие возможности, часть которых мы здесь кратко обсудим.

Произведение двух S^2

Первый пример будет

$$\frac{SU(2)_L}{U(1)_L} \times \frac{SU(2)_R}{U(1)_R} \quad (54)$$

с гармонизацией как левой, так и правой $SU(2)$ групп и с двумя различными $U(1)$ зарядами. В этом случае существуют как левая $(v_{\alpha\oplus,\ominus})$, так и правая $(u_{\dot{\alpha}}^{+,-})$ гармоники имеющие левый $(\oplus, \ominus)$ или правый $(+, -)U(1)$ заряды соответственно. Определение соответствующей кватернионной аналитичности достаточно очевидно. Нужно разбить $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ на четыре части

$$x^{+\oplus} = x^{\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha}^{\oplus} u_{\dot{\alpha}}^{+}, \quad x^{+\ominus} = x^{\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha}^{\ominus} u_{\dot{\alpha}}^{+}, \quad x^{-\oplus} = x^{\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha}^{\oplus} u_{\dot{\alpha}}^{-}, \quad x^{-\ominus} = x^{\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha}^{\ominus} u_{\dot{\alpha}}^{-}. \quad (55)$$

Легко организовать кватернионные сопряжения, которые преобразуют эти переменные между собой. Объединить их в обычные 4-координаты также просто:

$$x^{\alpha\dot{\alpha}} = v^{\oplus\alpha} u^{+\dot{\alpha}} x^{-\ominus} - v^{\oplus\alpha} u^{-\dot{\alpha}} x^{+\ominus} - v^{\ominus\alpha} u^{+\dot{\alpha}} x^{-\oplus} + v^{\ominus\alpha} u^{-\dot{\alpha}} x^{+\oplus}. \quad (56)$$

Можно определить аналитические функции, зависящие только от одной из четырех координат (55), скажем от $x^{-\oplus}$ (и некоторым образом от гармоник). Тогда будет три условия Коши-Римана в производных первого порядка:

$$\partial^{+\oplus} f = \partial^{-\ominus} f = \partial^{-\oplus} f = 0. \quad (57)$$

Снова следствием будет, что даламбертиан аналитической функции обращается в нуль: $\square f \equiv \partial x^{+\oplus} \partial^{-\ominus} f - \partial^{-\oplus} \partial^{+\ominus} f = 0$. В настоящее время мы не знаем теоретико-полевой модели, связанной с такой кватернионной аналитичностью.

Диагональный $U(1)$ случай

Далее, можно отождествить две $U(1)$ группы и рассмотреть факторпространство

$$\frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)}, \quad (58)$$

которое связано с теми же самыми гармониками $v_{\alpha}^{\pm}$ и $u_{\dot{\alpha}}^{\pm}$ как в выше приведенном примере, обе из которых обладают, тем не менее, зарядами одной и той же диагональной $U(1)$ подгруппы. Это обстоятельство, как мы далее увидим, будет улучшающим. Как в предыдущем случае, четыре-координата разбивается на четыре отдельные переменные,

$$x^{++} = x^{\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha}^{+} u_{\dot{\alpha}}^{+}, \quad x^1 = x^{\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha}^{-} u_{\dot{\alpha}}^{+}, \quad x^2 = x^{\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha}^{+} u_{\dot{\alpha}}^{-}, \quad x^{--} = x^{\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha}^{-} u_{\dot{\alpha}}^{-}. \quad (59)$$

в то время как

$$x^{\alpha\dot{\alpha}} = v^{+\alpha} u^{+\dot{\alpha}} x^{--} - v^{+\alpha} u^{-\dot{\alpha}} x^1 - v^{-\alpha} u^{+\dot{\alpha}} x^2 + v^{-\alpha} u^{-\dot{\alpha}} x^{++}. \quad (60)$$

Условия Коши-Римана снова в производных первого порядка; для функции которая зависит только от, скажем, x^1 они есть

$$\partial^{++} f = \partial^2 f = \partial^{--} f = 0. \quad (61)$$

и любая аналитическая функция, удовлетворяющая (61) будет подчиняться условию

$$\square f \equiv \partial^{++} \partial^{--} f - \partial^1 \partial^2 f = 0, \quad (62)$$

где ∂^1 и ∂^2 дифференцируют по x^1 и x^2 соответственно.

Возврат к кватернионной аналитичности Фютера

Как утверждалось во введении, Фютеровская аналитическая функция не удовлетворяет условию Коши-Римана или уравнению $\square f = 0$. Вместо условия типа Коши-Римана для $\square f$, получается уравнение четвертого порядка $\square^2 f = 0$. Чтобы продемонстрировать эти утверждения, следует подчеркнуть, что *Фютеровская аналитичность связана только с гармоническим приближением из раздела 5.2*. В самом деле, в [6] было показано: чтобы сделать Фютеровское разложение (7) формально ковариантным, нужно ввести другой кватернион p^{-1} , с трансформационными свойствами, обратными к свойствам z :

$$z' = m z \bar{n}, \quad p^{-1'} = n p^{-1} \bar{m}, \quad m \bar{m} = n \bar{n} = 1, \quad (63)$$

где $m \in SU(2)_L$ и $n \in SU(2)_R$ есть единичные кватернионы, представляющие эти группы соответственно (ссылка 5).

Теперь новая переменная, обозначающая левый кватер в [6], [5]

$$y = z p^{-1}, \quad (64)$$

будет иметь "более подходящий" чисто левый закон преобразования

$$y' = my\bar{m}. \quad (65)$$

Соответственно, модифицированное определение Фютера [5]

$$f(y) = \sum a_n y^n \quad (66)$$

будет совместимо с четырехмерными вращениями, с y принадлежащим к $(1, 0) \oplus (0, 0)$ представлению $SO(4)$. Легко увидеть, что этот ново введенный вспомогательный кватернион p может быть выбран в виде векторной гармоник, составленной из спинорных гармоник, введенных в разделе 5.2 согласно

$$p_{\alpha\dot{\alpha}}^{-1} = (v_{\alpha}^{+}u_{\dot{\alpha}}^{-} + v_{\alpha}^{-}u_{\dot{\alpha}}^{+}). \quad (67)$$

[Существует некоторая свобода в определении коэффициентов в правой части (67)]. Заметим, что p^{-1} становится единичной матрицей в специальной системе координат для обоих типов гармоник. Тогда Фютеровская аналитическая функция является степенными рядами левого кватера (в терминологии [5])

$$y_{\beta}^{\alpha} = x^{\alpha\dot{\alpha}}(v_{\beta}^{+}u_{\dot{\alpha}}^{-} + v_{\beta}^{-}u_{\dot{\alpha}}^{+}) = x^{--}(L^{++})_{\beta}^{\alpha} + x^1(P^1)_{\beta}^{\alpha} + x^2(P^2)_{\beta}^{\alpha}, \quad (68)$$

где были использованы определения (59) и мы ввели операторы

$$\begin{aligned} (L^{++})_{\beta}^{\alpha} &= v^{+\alpha}v_{\beta}^{+}, & (L^{--})_{\beta}^{\alpha} &= -v^{-\alpha}v_{\beta}^{-}, \\ (P^1)_{\beta}^{\alpha} &= v^{+\alpha}v_{\beta}^{-}, & (P^2)_{\beta}^{\alpha} &= v^{+\alpha}v_{\beta}^{+}. \end{aligned} \quad (69)$$

Они удовлетворяют следующей алгебре (индексы опущены для краткости): операторы P являются проекторами

$$P^1 P^1 = P^1, \quad P^2 P^2 = P^2, \quad P^1 + P^2 = 1, \quad P^1 P^2 = P^2 P^1 = 0, \quad (70)$$

в то время как для операторов L мы имеем

$$L^{--}L^{++} = P^1, \quad L^{++}L^{--} = P^2, \quad L^{--}L^{--} = L^{++}L^{++} = 0 \quad (71)$$

и остальные произведения есть

$$\begin{aligned} L^{++}P^1 &= P^2L^{++} = L^{++}, & L^{--}P^2 &= P^1L^{--} = L^{--}, \\ L^{++}P^2 &= P^1L^{++} = L^{--}P^1 &= P^2L^{--} = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Теперь мы хотим показать, что общая аналитическая по Фютеру функция из уравнения (66) является бигармоникой и удовлетворяет некоторому уравнению в производных третьего порядка. С этой целью рассмотрим интегральное представление для f ,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{z - y} \quad (73)$$

которое следует из факта, что она имеет разложение типа Вейерштрасса (66). Тогда мы можем сосредоточить внимание на функции $(z - y)^{-1}$, или еще проще, y^{-1} . Используя выше приведенную алгебру, имеем

$$y^{-1} = (x^{++}x^{--} - x^1x^2)^{-1}z \quad (74)$$

где

$$z = x^{++}(L^{--}) + x^{--}(L^{++}) - x^1(P^2) - x^2(P^1) \quad (75)$$

Теперь удобно рассмотреть дифференциальные операторы,

$$V = L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} - P^1\partial^1 - P^2\partial^2, T = L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} + P^1\partial^2 + P^2\partial^1,$$

которые удовлетворяют

$$VT = TV = \partial^{++}\partial^{--} - \partial^1\partial^2 = \square, \quad (76)$$

$$Tz = 0. \quad (77)$$

Приняв во внимание факт, что

$$\square(x^{++}x^{--} - x^1x^2)^{-1} = \square(1/x^2) = 0 \quad (78)$$

видим из (77)–(79), что

$$V^2Ty^{-1} = 0. \quad (79)$$

Таким образом, мы можем доказать что любая аналитическая по Фютеру функция $f(y)$ удовлетворяет условиям "Коши-Римана" третьего порядка

$$(L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} + P^1\partial^1 + P^2\partial^2)\square f = 0 \quad (80)$$

и следовательно бигармоническому уравнению

$$\square^2 f = 0. \quad (81)$$

Стоит повторить, что конформная группа евклидового 4-мерного пространства может быть представлена с помощью преобразований Фютеровского типа [6]. Они реализованы на z нелинейно, как кватернионные преобразования Мёбиуса [1], построенные обычным путем из кватернионных элементов матрицы два на два, принадлежащей $SL(2, H)$.

$$z' = (az + b)(cz + d)^{-1}, \quad (82)$$

где a, b, c и d – постоянные кватернионы, удовлетворяющие

$$\det(a - bd^{-1}c) \times \det d = |ad - bd^{-1}cd|^2 = 1 \quad (83)$$

(условие унимодулярности для 2×2 матрицы с кватернионными составляющими)⁷
В самом деле, если $c \neq 0$, $d \neq 0$, то z' может быть записано как

$$z' = ac^{-1} + (bd^{-1} - ac^{-1})(1 + czd^{-1})^{-1} \quad (85)$$

что является суммой постоянного кватерниона и Фютеровской аналитической функции составного аргумента (включающего преобразование параметров, кроме самой координаты) $y = czd^{-1}$ умноженного слева на другой постоянный кватернион. Если $c = 0$, то $d \neq 0$ и z' есть линейная функция $y = azd^{-1}$. Окончательно, для

⁷ 2×2 матрицы с кватернионными (или опять 2×2 матрицами) элементами может быть разложена на произведение матриц, имеющих очевидные детерминанты [6]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & bd^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ d^{-1}c & I \end{pmatrix}. \quad (84)$$

$d = 0$, $c \neq 0$, z' – линейная функция $t = bz^{-1}c^{-1}$. Четырехмерные вращения соответствуют (83) с $b = c = 0$, $a = m$ и $d = n$, $m\bar{m} = n\bar{n} = 1$, см. (8); дилатация (растяжение) происходит, когда a является действительным параметром, $d = 1$, $b = c = 0$; трансляции имеют параметр b , тогда как $a = d = 1$, $c = 0$; для конформных бустов c есть параметр и $a = d = 1$, $b = 0$.

В [6] были рассмотрены бесконечномерные квазиконформные группы, которые обобщают (83), будучи подгруппами четырехмерной группы диффеоморфизмов.

6. Объединенное пространство и двусфера. Комплексификация конформной группы

Выше мы гармонизировали группу вращения $SO(4)$, и гармоники появились без видимой связи с пространственными координатами x^m , которые являются координатами смежного класса группы Пуанкаре по модулю ее подгруппы вращений $SO(4)$. Было бы желательно иметь пространственные и гармонические (твисторные) координаты, трактуемые на одной основе. Конформная симметрия помогает нам достичь этой цели.

Конформная группа для евклидова 4-мерного пространства, как хорошо известно, есть $SO(5, 1)$, однако, так как мы имеем дело с гармониками спинорных представлений группы Лоренца, мы реально имеем дело с ее универсальной накрывающей, $Spin(5, 1)$. Можно было бы начать с рассмотрения ее классов смежности, выяснить, существуют ли подходящие 6-мерные классы. В предыдущем разделе была упомянута кватернионная форма Мёбиуса $SO(5, 1)$. В спинорной форме она представляется как матрица

$$M = \begin{pmatrix} l_{\beta}^{\alpha} & b_{\alpha}^{\dot{\beta}} \\ c_{\dot{\alpha}}^{\beta} & r_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \quad (86)$$

с единичным детерминантом

$$\det(l_{\alpha}^{\beta} - b_{\alpha}^{\dot{\alpha}}(r^{-1})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}c_{\dot{\beta}}^{\alpha}) \times \det r_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = 1 \quad (87)$$

(см. сноску 7). Элементы матрицы те же, что и в разделе 5: l_{β}^{α} и $r_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$ представляют левое и правое вращения соответственно и растяжения, тогда как $b_{\alpha}^{\dot{\beta}}$ и $c_{\dot{\alpha}}^{\beta}$ – трансляции и конформные бусты соответственно. Теперь, используя разложение Ивасава,

$$Spin(5, 1) = Spin(5) \times AN \quad (88)$$

(см. Приложение В) мы действительно можем получить шестимерный класс смежности. С этой целью можно выбрать $Spin(3) \times SO(2) \times AN$ как параболическую подгруппу P (те же A, N , что в (87)). Тогда грассманиан

$$\frac{Spin(5, 1)}{P} = \frac{SO(5)}{SO(3) \times SO(2)} \quad (89)$$

будет единственным 6-мерным классом смежности. Однако, группа левых вращений $SU(2)_L$ проявляется в исходной *не комплексифицированной форме*. Согласно такому же рассуждению, как в разделе 2, это приведет к неаналитическим конформным преобразованиям.

Это снова наводит на мысль о *комплексификации*, теперь уже *конформной группы*. Мы, следовательно, пришли к рассмотрению действия $Spin(5, 1)$ на классе смежности группы $Spin(6, C) \sim SL(4, C)$. И в самом деле, это работает. Начав с разложения Ивасава (смотри Приложение В) последней,

$$SL(4, C) = SU(4) \times AN, \quad (90)$$

и выбрав параболическую подгруппу равной

$$P = SU(3) \times U(1) \times AN \quad (91)$$

(с теми же AN , как в (89)) мы приходим к классу смежности

$$\frac{SL(4, C)}{P} = \frac{SU(4)}{SU(3) \times U(1)} = CP^3 \quad (92)$$

AN в числителе и в знаменателе были "сокращены". Заметим, что появление 3-мерного комплексного проективного многообразия согласуется с литературой по твисторам [11], [14], [12], и т. д. Координаты этого многообразия – это две пространственные координаты $x^{+\dot{\alpha}}$ и гармоники, которые могут быть представлены одной комплексной координатой, как мы теперь увидим.

Читатель может обратиться к Приложению В по поводу некоторых определений и техники. Используя их, мы кратко дадим здесь прямое взятие производной от формы $Spin(5, 1)$ преобразований, реализованных на этом CP^3 классе смежности. Мы будем действовать тем же способом, как мы это делали в разделе 2, где мы имели дело с соответствующим классом смежности комплексифицированной группы $SU(2)_L$.

Вообще говоря, лучше работать с полным множеством гармоник, образующих $Spin(5, 1)$ матрицу

$$U = \begin{pmatrix} u_{\alpha}^s & u_{\alpha}^{\dot{s}} \\ u_{\alpha}^s & u_{\alpha}^{\dot{s}} \end{pmatrix}.$$

и идентифицировать их по действию на подгруппу P . Это было бы *глобальным* определением G/P и в рамках этого подхода можно было бы полностью избежать проблемы Римана-Гильберта, и т. д.

Однако, чтобы показать как работать просто с 6 обычными координатами 6-мерного многообразия, мы будем использовать здесь подгруппу P для локального исключения избыточных степеней свободы в U . Эти локальные координаты нашего класса смежности могут быть записаны как элементы треугольной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} u_{\alpha}^s & -u_{\alpha}^{-} x^{+\dot{s}} \\ 0 & \delta_{\alpha}^{\dot{s}} \end{pmatrix}; \quad (93)$$

Конформная группа действует на U посредством умножения слева на матрицу $M \in Spin(5, 1)$, уравнение (85). Для сохранения формы (92) фиксируем калибровку с помощью использования подходящих компенсационных параболических групповых преобразований P [см. (11) и (22)]. Для бесконечно малых преобразований мы имеем

$$\delta U = M \times U \times P - U \approx \delta M \times U + U \times \Delta P \quad (94)$$

Как в разделе 2, гармоники определены только с точностью до преобразований (20), принадлежащих к параболической группе. Поэтому мы можем взять в качестве отправного пункта, что калибровка (21) фиксирована, т. е. мы будем работать с преобразованиями в нормальной форме,

$$\delta u_{\alpha}^{-} = 0, \quad \delta u_{\alpha}^{+} = \lambda^{++} u_{\alpha}^{-}.$$

Теперь вычислим явно преобразования $x^{+\dot{\alpha}}$ и u_{α}^{+} , так же, как компенсационные преобразования, принадлежащие к параболической группе, используя уравнение (93)

вместе с условием (21). Ингредиенты есть

$$A. \quad \delta U = \begin{pmatrix} (0, \lambda^{++} u_{\alpha}^{-}) & -u_{\alpha}^{-} \delta x^{+\dot{p}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

$$B. \quad \delta M \times U = \begin{pmatrix} \delta \tilde{l}_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^s + \delta d \delta_{\alpha}^s & -\delta \tilde{l}_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{-} \delta x^{+\dot{s}} - \delta d u_{\alpha}^{-} x^{+\dot{s}} + \delta b_{\alpha}^{\dot{s}} \\ \delta c_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^s & -\delta c_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{-} x^{+\dot{s}} + \delta \tilde{r}_{\alpha}^{\dot{s}} - \delta d \delta_{\alpha}^{\dot{s}} \end{pmatrix}, \quad (96)$$

где мы выделим дилатации δd : теперь $\delta l_{\dot{s}}^s = \delta \tilde{r}_{\dot{s}}^s = 0$.

Индукированные преобразования параболической группы образуют матрицу

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a + \Delta d & 0 \\ \Delta z^{--} & -\Delta a + \Delta d \end{pmatrix}_p^s & \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta a^{-\dot{s}} \end{pmatrix} \\ \Delta c_p^s & -\Delta d \delta_p^{\dot{s}} + \Delta \tilde{r}_p^{\dot{s}} \end{pmatrix} \quad (97)$$

Для последнего ингредиента, матрицы $U \times \Delta P$, запишем ее элементы отдельно. Верхний левый угол:

$$(u_{\alpha}^{-} (\Delta a + \Delta d - x^{+\dot{p}} \Delta c_p^{-}) + u_{\alpha}^{+} \Delta z^{--}, \quad u_{\alpha}^{+} (-\Delta a + \Delta d) - u_{\alpha}^{-} x^{+\dot{p}} \Delta c_p^{+}). \quad (98)$$

Нижний левый угол:

$$\Delta c_{\alpha}^s \quad (99)$$

Верхний правый угол:

$$u_{\alpha}^{+} \Delta a^{-\dot{s}} + u_{\alpha}^{-} \Delta d x^{+\dot{s}} - u_{\alpha}^{-} x^{+\dot{p}} \Delta \tilde{r}_p^{\dot{s}}. \quad (100)$$

Нижний правый угол:

$$-\Delta d \delta_{\alpha}^{\dot{s}} + \Delta \tilde{r}_{\alpha}^{\dot{s}}. \quad (101)$$

Теперь мы можем подставить компоненты (92), (95), (97), (98), (99) и (100) в уравнение (93). Затем, проецируя все элементы на $u_{\alpha}^{\pm}$, получим из результирующих уравнений явные выражения для бесконечно малых преобразований координат класса смежности:

$$\begin{aligned} \delta x^{+\dot{\alpha}} &= (2\delta d + u^{+\gamma} \delta \tilde{l}_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{-} + x^{+\dot{p}} \delta c_p^{\beta} u_{\beta}^{-}) x^{+\dot{\alpha}} - u^{+\gamma} \delta b_{\gamma}^{\dot{\alpha}} - x^{+\dot{s}} \delta \tilde{r}_{\dot{s}}^{\dot{\alpha}} \\ \delta u_{\alpha}^{+} &= (u^{+\gamma} \delta \tilde{l}_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{+} + x^{+\dot{p}} \delta c_p^{\beta} u_{\beta}^{+}) u_{\alpha}^{-}, \end{aligned} \quad (102)$$

и в самом деле

$$\delta u_{\alpha}^{-} = 0. \quad (103)$$

В (101), (102) узнаются преобразования координат и гармоник, полученных уже в разделе 2.2. Для сопровождающих компенсирующих преобразований из параболической группы имеем:

$$\Delta z^{--} = u^{-\gamma} \delta \tilde{l}_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{-} \quad \Delta a = -\frac{1}{2} x^{+\dot{s}} \delta c_s^{\beta} u_{\beta}^{-} - u^{+\gamma} \delta \tilde{l}_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{-}, \quad (104)$$

$$\Delta \tilde{r}_{\alpha}^{\dot{\beta}} = -\delta \tilde{r}_{\alpha}^{\dot{\beta}} + \delta c_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{-} x^{+\dot{\beta}} - \frac{1}{2} x^{+\dot{s}} \delta c_s^{\beta} u_{\beta}^{-} \delta_{\alpha}^{\dot{\beta}}, \quad (105)$$

$$\Delta d = -\delta d - \frac{1}{2} x^{+\dot{s}} \delta c_s^{\beta} u_{\beta}^{-}, \quad (106)$$

$$\Delta c_{\alpha}^s = -\delta c_{\alpha}^s, \quad (107)$$

и окончательно

$$\Delta a^{-\dot{s}} = -\delta b^{\beta\dot{s}} u_{\beta}^{-} + u^{-\gamma} \delta \tilde{l}_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{-} x^{+\dot{s}} \quad (108)$$

Очень важно, что все эти преобразования и манипуляции совместимы с комбинированным сопряжением, обсуждавшимся в разделе 2.2, которое реализуется на гармониках и координатах посредством (27) и (41).

В этой форме можем легко распознать три комплексные координаты для нашего класса смежности. Первые две есть $x^{+\dot{\alpha}}$ и третья, z , может быть получена, полагая что

$$u_{\alpha}^{-} = (1, 0), \quad u_{\alpha}^{+} = (z, 1) \quad (109)$$

Закон преобразования для z следует из уравнения (101).

Важным уроком является то, что *комплексное* (в обычном смысле) многообразие является *действительным* по отношению к комбинированному сопряжению. Все преобразования должны согласовываться с этим фактом. В частности, это условие совместимости выделяет подгруппу $Spin(5, 1)$ из $Spin(6, C)$.

Замечание. Достаточно легко найти конечные преобразования в нормальной форме. Например, конформные преобразования записываются как

$$\tilde{x}^{+\dot{\alpha}} = \frac{x^{+\dot{\alpha}}}{1 - x^{+\dot{\beta}} c_{\beta}^{\sigma} u_{\sigma}^{-}}, \quad \tilde{u}_{\alpha}^{+} = u_{\alpha}^{+} + \frac{x^{+\dot{\beta}} c_{\beta}^{\sigma} u_{\sigma}^{+}}{1 - x^{+\dot{\beta}} c_{\beta}^{\sigma} u_{\sigma}^{-}} u_{\alpha}^{-}, \quad \tilde{u}_{\alpha}^{-} = u_{\alpha}^{-}. \quad (110)$$

Они сингулярны при некотором конечном значении конформного параметра, поскольку калибровка фиксирована только для одного множества координат (то есть одной карты) из целого многообразия⁸. Как было замечено выше, глобальное описание этого смежного класса может быть достигнуто при использовании 32 гармоник (вместо этих 6-ти координат), определенных по модулю параболической группы преобразований и удовлетворяющих ограничению унимодулярности.

Выводы

Расширение пространственных переменных посредством добавления некоторых гармонических (или твисторных) переменных, как известно, допускает новый вид аналитичности, гармоническую (или твисторную) аналитичность. Мы наблюдали в этой работе, что это есть аспект кватернионной аналитичности и что существует несколько путей ее определения. В $4D$ самодуальных теориях Янга-Миллса и Эйнштейна аналитичность этого типа замещает стандартную комплексную аналитичность $2D$ конформных теорий.

Самодуальные уравнения являются конформно инвариантными. Замечательным следствием гармонической аналитичности является, что $4D$ конформная группа должна быть реализована на смежном классе CP^3 *комплексификации*, $SL(4, C)$. Эти рассуждения являются достаточно общими: в любом смежном классе действительной группы невозможно иметь x -зависимые преобразования u^{-} и u^{+} одновременно аналитичными. Нужно подчеркнуть, однако, что мы имеем дело только с "евклидовой" конформной группой $Spin(5, 1)$. Как следствие, может быть определено комбинированное сопряжение (вместо комплексного), в рамках которого CP^3 является действительным многообразием. Стоит упомянуть, что такой же феномен комплексификации возникает также в $N = 2$ и $N = 3$ суперсимметричных теориях.

⁸ Авторы признательны А. Гальперину за это замечание

Эти темы будут обсуждаться где-нибудь еще, так же, как более полный анализ и классификация "аналитических" симметрий самодуальных уравнений. Это наиболее эффективно выполнимо в нормальной калибровке, выбирающей преобразования в нормальной форме. Параллельное рассмотрение симметрий самодуальных уравнений и их малоразмерных интегрируемых систем представляется привлекательным и может пролить свет на многие тонкости. Мы откладываем на будущие публикации также исследование гармонических аналитических свойств самодуальных калибровочных теорий в сигнатуре (2,2) которые, как ожидается, имеют интригующие особенности (peculiarities) из-за различных "некомпактностей" соответствующих групп вращения и конформных групп.

В заключении отметим, что $\frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)}$ гармоника лежат в основе Фютеровской аналитичности.

Благодарности

Нам приятно искренне поблагодарить С. Devchand, А. Гальперина, Р. S. Howe, Е. Иванова, L. Michel, Р. van Nieuwenhuizen, О. Огивецкого, М. Савельева и С. Vafa за ценные дискуссии. Один из нас (В. О.) весьма признателен за сердечное гостеприимство Рокфеллеровскому Университету, в котором эта работа была начата, и ЦЕРНу и Женевскому Университету, где она была завершена. М. Е. выражает также признательность ЦЕРНу и ОИЯИ, Дубна, за гостеприимство.

Приложение А. Кватернионные структуры

Почти кватернионная структура есть набор трех тензоров типа (1,1), $J_{a_m}^n$, действующих на касательном расслоении многообразия, который представляет собой базис алгебры кватернионов (5):

$$J_a J_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} J_c \quad (\text{A-1})$$

Из-за некоммутативности кватернионов нужно различать *левые* (L_a) и *правые* (R_a) кватернионные структуры. Выше мы видели, что право-кватернионные структуры образуют двухпараметрическое семейство (30):

$$R_{a\alpha\dot{\alpha}}^{\beta\dot{\beta}} = -i u_{\dot{\alpha}}^i \sigma_{a_i}^j u_j^{\dot{\beta}} \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (\text{A-2})$$

Аналогичное утверждение справедливо по отношению к левым кватернионным структурам (L_a).

Интересное наблюдение: даны две взаимно коммутирующие кватернионные структуры, например, L_a и R_a , можно построить однопараметрическое семейство кватернионных структур, которое интерполирует между ними. Для этого построим оператор

$$\eta = \frac{1}{2}(1 - L_a R_a). \quad (\text{A-3})$$

Он имеет свойства (которые следуют из кватернионных алгебр для L_a , R_a и из того, что они взаимно коммутируют)

$$\eta^2 = 1, \quad \eta L_a \eta = R_a, \quad \eta R_a \eta = L_a. \quad (\text{A-4})$$

Теперь становится очевидным, что кватернионная алгебра (5) будет выполняться на "смешанной" кватернионной структуре

$$J_a = e^{c\eta} L_a e^{-c\eta} = L_a \cosh^2 c - R_a \sinh^2 c + \epsilon_{abc} R_b L_c \cosh c \sinh c \quad (\text{A-5})$$

и коммутировать с этой кватернионной структурой

$$J'_a = e^{c\eta} R_a e^{-c\eta} = R_a \cosh^2 c - L_a \sinh^2 c - \epsilon_{abc} R_b L_c \cosh c \sinh c, \quad (\text{A-6})$$

где c – действительный параметр. Следовательно, в $4D$ пространстве существует 5-параметрическая система кватернионных структур (2 параметра в выборе L_a , 2 в выборе R_a , и параметр c).

Приложение В. Компактные классы смежности некомпактных групп

Здесь представлены некоторые математические определения и утверждения в форме, удобной для нас, вместе с поясняющими примерами, взятыми из статьи.

Разложение Ивасава некомпактной полупростой группы G есть (см. учебники [34], [15])

$$G = KAN. \quad (\text{B-1})$$

Здесь K , A и N – подгруппы G , имеющие следующие значения: K – максимальная компактная подгруппа G . Обозначим генераторы G через ϱ и генераторы K – κ . Пусть ν – это остальные генераторы G и $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – максимальная абелевская подалгебра ν . $A = e^\alpha$ есть коммутативная подгруппа G , генерируемая посредством α . Окончательно, все генераторы G раскладываются в прямую сумму собственных пространств при присоединенном действии (adjoint action) α ,

$$[\alpha_\kappa, \varrho_\gamma] = \gamma(\alpha_\kappa) \varrho_\gamma, \\ \varrho = \sum_{\gamma} \varrho_\gamma, \quad \gamma = \gamma(\alpha_1), \dots, \gamma(\alpha_n). \quad (\text{B-2})$$

Говорят, что γ положительно, $\gamma > 0$, если его первая отличная от нуля компонента положительна. Пространство $n = \{n_\gamma\}$ генераторов ϱ_γ с положительным γ есть максимальная нильпотентная подалгебра генераторов ϱ . $N = e^n$ есть соответствующая максимальная нильпотентная подгруппа G .

Теперь максимальная разрешимая подгруппа G есть произведение AN . Борелевская параболическая подгруппа G есть

$$B = MAN, \quad (\text{B-3})$$

где M – централизатор подгруппы A в K , то есть подгруппа K , коммутирующая с A .

Параболические подгруппы P из G определены как те, которые содержат Борелевскую подгруппу как свою подгруппу. Другими словами,

$$P = LAN, \quad (\text{B-4})$$

где L – подгруппа вышеупомянутой максимальной компактной подгруппы K сверху, содержащую в свою очередь M как подгруппу. Подгруппа Бореля есть минимальная параболическая подгруппа. Это есть "квинтэссенция" некомпактности, как можно увидеть из замечательной теоремы Бореля [35]:

Класс смежности некомпактной группы G по модулю любой из ее параболических подгрупп P является компактным пространством.

Более того, параболические подгруппы P могут быть определены именно как те, чьи смежные классы $\frac{G}{P}$ являются компактными. Подгруппа Бореля есть наименьшая параболическая группа.

Интуитивное представление этой теоремы достаточно прозрачно:

$$\frac{G}{P} = \frac{KAN}{LAN} = \frac{K}{L}, \quad (\text{B-5})$$

K и L компактные. Несмотря на сверхпростоту, это описание эффективно в том смысле, что оно показывает явно, какое компактное многообразие было получено.

Теперь дадим несколько примеров из статьи:

$$1. G = SL(2, C) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ (см. раздел 2.2)}$$

$$K = SU(2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}, \quad A = e^\alpha,$$

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad [\alpha, n] = +\phi n, \quad N = e^n.$$

Использованная параболическая группа есть

$$P = U(1) \times AN, \quad (\text{B-6})$$

где $U(1)$ – подгруппа K с $a = e^{-i\phi}$, $b = 0$. Мы видим, что

$$\frac{G}{P} = \frac{SU(2)}{U(1)} = S^2.$$

2. $G = Spin(5, 1)$, представленная матрицей (85)

$$\begin{pmatrix} l_\beta^\alpha & b_\alpha^\beta \\ c_\alpha^\beta & r_\alpha^\beta \end{pmatrix} \quad (\text{B-7})$$

Ее максимальная компактная подгруппа $K = Spin(5)$ дается с помощью такой же матрицы с идентификацией $b_\alpha^\beta = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{\alpha\beta} c_\beta^\beta$ и с унимодулярными l_β^α и r_β^α .

В этом случае $A = \exp \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ есть группа дилатаций.

Наконец, $n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_\alpha^\alpha & O \end{pmatrix}$ – конформные бусты; $N = e^n$.

Параболическая подгруппа $P = Spin(3) \times SO(2) \times AN$ приводит к шестимерному смежному классу

$$\frac{Spin(5, 1)}{P} = \frac{Spin(5)}{Spin(3) \times SO(2)} = \frac{SO(5)}{SO(3) \times SO(2)} \quad (\text{B-8})$$

С этим смежным классом, однако, конформные преобразования будут неаналитичными, как объяснено в разделе 6.

3. $Spin(6, C) \sim SL(4, C)$. Удобно представить это снова в виде матрицы (B-7), но теперь с комплексными элементами.

Теперь максимально компактная группа есть $K = Spin(6)(\sim SL(4))$, заданная с помощью унитаризованной матрицы (B-7).

Группа $A = e^{\alpha_i \alpha_i}$ имеет три генератора,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Индексы $\gamma = \{\gamma(\alpha_1), \gamma(\alpha_2), \gamma(\alpha_3)\}$ могут быть показаны в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 000 & 0-20 & --+ & --- \\ 020 & 000 & -++ & -+- \\ ++- & +- - & 000 & 00-2 \\ +++ & +-+ & 002 & 000 \end{pmatrix}$$

где тройки индексов в каждой позиции являются ее индексами γ .

Таким образом, существует шесть *комплексных* (эквивалентных двенадцати действительным) генераторов n с положительными индексами. Они расположены ниже главной диагонали. Согласно нашему основному правилу, максимальная нильпотентная группа есть $N = e^n$ и $B = AN$.

Для параболической подгруппы

$$P = SU(3) \times U(1) \times AN, \quad (B-9)$$

можно получить шестимерный класс смежности

$$\frac{SL(4, C)}{P} = \frac{SU(4) \times AN}{SU(3) \times U(1) \times AN} = \frac{SU(4)}{SU(3) \times U(1)}, \quad (B-10)$$

т.е. как раз CP^3 проективное пространство.

Литература

- [1] F. Gürsey, Nuovo Cim. 3 (1956) 988.
- [2] F. Gürsey and H. C. Tze, Ann. of Phys. (N.Y.) 128 (1980).
- [3] A. Sudbery, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979) 199.
- [4] R. Fueter, Comment. Math. Helv. 7 (1935) 307, ibid. 8 (1936) 371.
- [5] F. Gürsey, Conformal and quasi-conformal structures in space-time, Yale prep. YCTR - P 34-91.
- [6] F. Gürsey and W.X. Jiang, J. Math. Phys. 33 (1992) 682.
- [7] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, Phys. Lett. B 78 (1991) 430.
- [8] L. Alvarez-Gaumé and D.Z. Freedman, Commun. Math. Phys. 80 (1981) 443.
- [9] J. Bagger and E. Witten, Nucl. Phys. B 222 (1983) 1.
- [10] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky and E. Sokatchev, Class. Quantum Grav. 1 (1984) 469.
- [11] R. Penrose, Gen. Rel. Grav. 7 (1976) 31.
- [12] R.S. Ward, Phys. Lett. 61A (1977) 81.
- [13] R.S. Ward and R.O. Wells, Twistor Geometry and Field Theory (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990).
- [14] R. Penrose, in "Twistors in Mathematics and Physics", ed. by T. H. Bailey and R. J. Baston (Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1990, p.1-29).

- [15] R. J. Baston and M. G. Eastwood (The Penrose transform. Its Interaction with Presentation Theory, Clarendon Press, Oxford, 1989).
- [16] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky and E. Sokatchev, prepr. JINR E2-85-363, (1985), in Quantum Field Theory and Quantum Statistics, vol.2, 233-248 (A. Hilger, Bristol, 1987) and Ann. Phys (N. Y.) 185 (1988) 1 and 22.
- [17] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Rocek, Commun. Math. Phys. 108 (1987) 535.
- [18] O. Ogievetsky, in Proc. Conf. on Group Theor. Methods in Physics, Varna, 1987, (Berlin, Springer 1988), p. 548 and Thesis, Physical Lebedev Institute, Moscow, 1989, p. 1-115.
- [19] S. Kalitzin and E. Sokatchev, Class. Quantum Grav. 4 (1987) L173.
- [20] J. Bagger, A. Galperin, E. Ivanov and V. Ogievetsky, Nucl. Phys. B 303 (1988) 522.
- [21] A. P. Hodges, R. Penrose and M. A. Singer, Phys. Lett. B 216 (1989) 48.
- [22] H. Ooguri and C. Vafa, Mod. Phys. Lett. A 5, (1990) 1389.
- [23] A. Belavin and V. Zakharov, Phys. Lett. B 73 (1978) 53.
- [24] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. C. Yates and P. Goddard, Comm. Math. Phys. 58 (1978) 223.
- [25] A. Leznov and M. Saveliev, Comm. Math. Phys. 74 (1980) 111.
- [26] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Lond. Soc. A315 (1985) 451 and in the same book as ref. [14], p. 246-259.
- [27] N. J. Hitchin, Proc. Lond. Math. Soc. 55 (1987) 59.
- [28] L. Mason and G. A. J. Sparling, Phys. Lett. B 137 (1989) 29; J. Geom. and Phys. 8 (1992) 243.
- [29] S. Chakravarti, M. J. Ablovitz and P. A. Clarkson, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 1085; S. Chakravarti, S. Kent and E. T. Newman, J. Math. Phys. 33 (1992) 382.
- [30] Q-Han Park, Phys. Lett. B 236 (1990) 429; 257 (1991) 105.
- [31] L. Bakas, D. A. Depireux, Mod. Phys. Lett. A 6 (1991) 399; 2351.
- [32] L.- L. Chau, I. Yamasaka, Phys. Rev. Lett. 68 (1982) 1807. [33] K. Takasaki, W Algebra, Twistor, and Nonlinear Integrable Systems, Kyoto prepr. KUCP-0049/92, June 1992.
- [34] N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk, Lie group representatione and special functions, In Modern Problems of Math., Fundamental Trends, vol. 59 (VINITI, Moscow, 1990) p. 145-368.
- [35] A. Borel, Linear Algebraic Groups, (Springer, New York, 1991) New York.
- [36] Ch. Devchand, D. Khetselius and V. Ogievetsky, Heavenly equations in harmonic space, in preparation.

О ФОРМАХ СТЕПЕНИ N , ДОПУСКАЮЩИХ КОМПОЗИЦИЮ¹

Р. Д. Шафер

Передано Эндрю. М. Глисоном

Любая конечномерная сепарабельная альтернативная алгебра A над полем F является прямой суммой $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ простых идеалов A_i , где центр Z_i алгебры A_i является сепарабельным расширением F степени d_i . Общая (generic) норма $n_i(x_i)$ для A_i ([6], стр. 180) есть (однородная) форма степени $m_i d_i$ над F , где m_i – степень A_i как центральной простой алгебры над Z_i (в случае, если A_i неассоциативна, A_i является алгеброй Кэли над Z_i и $m_i = 2$). Пусть $f_1, \dots, f_r$ – произвольные положительные целые числа и $x = x_1 + \dots + x_r$, $x_i \in A_i$. Тогда

$$N(x) = [n_1(x_1)]^{f_1} \cdots [n_r(x_r)]^{f_r} \quad (1)$$

является формой степени

$$n = \sum_{i=1}^r f_i m_i d_i \quad (2)$$

на A , допускающей композицию:

$$N(xy) = N(x)N(y) \quad \text{для всех } x, y \in A \quad (3)$$

Если F имеет характеристику 0 или $p > n$, $N(x)$ невырождена.

В [9] было сделано предположение, что обратно, любая (возможно, бесконечномерная) алгебра A с 1 над F характеристики 0 или $p > n$, на которой определена невырожденная форма $N(x)$ степени n , допускающая композицию, является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй с $N(x)$, получаемой посредством (1) и (2). Это классический результат ([1], [5], [7]) для квадратичных форм, размерность A равна 1, 2, 4 или 8. Для конечномерной A теорема известна для кубических форм ([9]), размерность A равна 1, 2, 3, 5 или 9. В данной работе мы докажем для произвольного n , без предположения конечномерности, что A альтернативна (Теорема 2). Мы докажем также, что элементы из A удовлетворяют хорошо определенным уравнениям степени n .

Предположив, что A конечномерна, мы докажем, что A является сепарабельной (альтернативной) алгеброй $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ с $N(x) = N_1(x_1) \cdots N_r(x_r)$, где $N_i(x_i)$ на простом идеале A_i есть невырожденная форма степени n_i , допускающая композицию, $n = n_1 + \dots + n_r$. Это сводит предположение для конечномерной алгебры A к следующему: что невырожденная форма степени $\leq n$, допускающая композицию на простой альтернативной алгебре, является степенью общей (generic) нормы.

В последнем разделе мы докажем для конечномерной A , что, если $N(x)$ – кватерформ (quartic form), то $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2). Таким образом, размерность A равна 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 или 16.

После того, как данная работа была написана, Натан Джекобсон информировал автора, что он доказал, что форма степени n , допускающая композицию на конечномерной простой альтернативной алгебре над полем, содержащим более, чем n элементов, является степенью общей нормы. Это результат, который включает доказательство для конечномерной A предположения из [9], появится в Osaka Mathematical Journal.

¹Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 12, No. 5 (1963), перевод А. Элиовича.

1. Формы степени n . Пусть V – векторное пространство (возможно, бесконечномерное) над полем F характеристики 0 или $p > n$. Отображение $x \rightarrow N(x)$ на V называется *формой степени n* на V в случае $N(\alpha x) = \alpha^n N(x)$ для всех $\alpha \in F$ и $x \in V$, и

$$(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \left[N(x_1 + \dots + x_n) - \sum_{i=1}^n N(x_1 + \dots + \check{x}_i + \dots + x_n) + \sum_{i < j} N(x_1 + \dots + \check{x}_i + \dots + \check{x}_j + \dots + x_n) - \dots + (-1)^{n-1} \sum N(x_i) \right], \quad (4)$$

n -линейна, где запись $\check{x}_i$ означает, что x_i опущен. Так как

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_n^i (n-i)^n = n!,$$

где C_n^i – биномиальные коэффициенты ([4], стр. 63, уравнение (12.17)), мы имеем $N(x) = (x, \dots, x)$. Мы говорим, что $N(x)$ и ассоциированная симметричная n -линейная форма (4) являются невырожденными в случае, когда $(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ для любых $x_2, \dots, x_n \in V$ означает $x_1 = 0$.

Предположим, что форма $N(x)$ степени n определена на неассоциативной алгебре A над F , и что $N(x)$ допускает композицию:

$$(xy, \dots, xy) = (x, \dots, x)(y, \dots, y).$$

Мы линейзируем это по x , чтобы получить

$$(x_1 y, \dots, x_n y) = (x_1, \dots, x_n) N(y), \quad (5)$$

и линейзируем (5) по y , чтобы получить фундаментальное соотношение

$$\sum_{\sigma} (x_1 y_{\sigma(1)}, \dots, x_n y_{\sigma(n)}) = n! (x_1, \dots, x_n) (y_1, \dots, y_n), \quad (6)$$

где σ пробегает все перестановки $1, 2, \dots, n$. Тогда из (6) вытекает

$$(x y_1, \dots, x y_n) = N(x) (y_1, \dots, y_n). \quad (7)$$

Мы предполагаем повсюду, что классические результаты для $n \leq 2$ известны. Таким образом, во всех формулах и доказательствах мы можем положить $n \geq 3$. Фактически, большая часть формул, данных здесь, справедливы для $n \geq 2$. Если получится, что в некоторых формулах мы молчаливо предполагаем $n \geq 3$ или $n \geq 4$, присутствие $(n-2)$ и/или $(n-3)$ среди коэффициентов как правило делает формулы формально справедливыми для $n \geq 2$.

Предположим, что A содержит 1. Для $i = 1, \dots, n$ определим форму $T_i(x)$ степени i на A посредством

$$T_i(x) = C_n^i \underbrace{(x, \dots, x)}_i, 1, \dots, 1 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (8)$$

В частности, мы имеем *след*

$$T(x) = T_1(x) = n(x, 1, \dots, 1); \quad (9)$$

также

$$N(x) = T_n(x).$$

(Мы принимаем соглашение, что для любых $x \in A$, мы имеем $T_0(x) = 1$ и $T_{n+q}(x) = 0$ если $q > 0$). Тогда A является векторным пространством прямой суммы

$$A = F1 + A_0 \quad (10)$$

$F1$ и подпространства A_0 всех элементов следа 0.

Положим $y_1 = a, y_2 = \dots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$(x_1 a, x_2, \dots, x_n) + (x_1, x_2 a, \dots, x_n) + \dots + (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n a) = (x_1, x_2, \dots, x_n) T(a). \quad (11)$$

Согласно (10), так как $T(\alpha 1) = n\alpha$ для $\alpha \in F$, тождество (11) эквивалентно

$$(x_1 a_0, x_2, \dots, x_n) + (x_1, x_2 a_0, \dots, x_n) + \dots + (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n a_0) = 0$$

для всех элементов a_0 следа 0; так что (11) эквивалентно утверждению, что все правые умножения R_{a_0} , соответствующие элементам следа 0 оставляют симметричную n -линейную форму $(x_1, \dots, x_n)$ инвариантной. Симметрично, мы имеем

$$(a x_1, x_2, \dots, x_n) + (x_1, a x_2, \dots, x_n) + \dots + (x_1, \dots, x_{n-1}, a x_n) = T(a)(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (12)$$

Следовательно

$$([x_1, a], x_2, \dots, x_n) + (x_1, [x_2, a], \dots, x_n) + \dots + (x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a]) = 0. \quad (13)$$

так что все $R_a - L_a$, как и все левые умножения, связанные с элементами следа 0, оставляют форму $(x_1, \dots, x_n)$ инвариантной.

Прежде, чем применить тождество (6) в его полную силу, мы должны получить ряд следствий из (11) и (12). Например, (11) и (12) справедливы в [10], хотя (6) – нет. Положив $y_{i+1} = \dots = y_n = x$ в (12), мы имеем

$$\begin{aligned} (a x_1, x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) + \dots + (x_1, x_2, \dots, a x_i, 1, \dots, 1) \\ + (n-j)(x_1, \dots, x_i, a, 1, \dots, 1) = T(a)(x_1, \dots, x_i, 1, \dots, 1) \end{aligned} \quad \text{для } j = 1, \dots, n-1. \quad (14)$$

Подстановка $a = x_1 = \dots = x_i = x$ в (14) дает

$$j C_n^j(x^2, \underbrace{x, \dots, x}_{i-1}, 1, \dots, 1) + (j+1) T_{i+1}(x) = T(x) T_i(x), \quad \text{для } j = 1, \dots, n-1, \quad (15)$$

согласно (8). Особый случай $j = 2$ в (14) есть

$$\begin{aligned} (a x_1, x_2, 1, \dots, 1) + (x_1, a x_2, 1, \dots, 1) \\ + (n-2)(x_1, x_2, a, 1, \dots, 1) = T(a)(x_1, x_2, 1, \dots, 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Положив $a = x$, $x_1 = y$, $x_2 = 1$ в (16), мы имеем

$$T(xy) = T(x)T(y) - n(n-1)(x, y, 1, \dots, 1). \quad (17)$$

Следовательно,

$$T(x^2) = [T(x)]^2 - 2T_2(x) \quad (18)$$

и

$$T(xy) = T(yx) \quad \text{для } x, y \in A. \quad (19)$$

Тогда из (17), (16) и (13) вытекает, что

$$T((xy)z) = T(x(yz)) \quad \text{для всех } x, y, z \in A, \quad (20)$$

так как

$$\begin{aligned} T((xy)z) - T(x(yz)) &= T(xy)T(z) - n(n-1)(xy, z, 1, \dots, 1) - T(x)T(yz) \\ &\quad + n(n-1)(x, yz, 1, \dots, 1) = n(n-1)[T(x)(y, z, 1, \dots, 1) \\ &\quad - (xy, z, 1, \dots, 1) - T(z)(x, y, 1, \dots, 1) + (x, yz, 1, \dots, 1)] = \\ &\quad n(n-1)[([x, z], y, 1, \dots, 1) + (x, [y, z], 1, \dots, 1)] = \\ &\quad - n(n-1)(n-2)(x, y, [1, z], 1, \dots, 1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, симметричная билинейная форма

$$B(x, y) = T(xy)$$

является ассоциативной: $B(xy, z) = B(x, yz)$ для всех $x, y, z \in A$.

Мы покажем теперь, что если n -линейная форма $(x_1, \dots, x_n)$ невырождена на A , то также невырождена и билинейная форма $B(x, y)$. Положим, что $B(x, y) = 0$ для всех $y \in A$. Тогда $T(x) = B(x, 1) = 0$, так что

$$B(x, y) = -n(n-1)(x, y, \dots, 1)$$

по (17), или $(x, y, \dots, 1) = 0$ для всех $y \in A$. Это случай $i = 2$ уравнения

$$(x, x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) = 0 \quad \text{для всех } x_2, \dots, x_i \in A. \quad (21)$$

Мы докажем (21) посредством индукции по i . Для $2 \leq i \leq n-1$, мы имеем

$$\begin{aligned} (x_{i+1}x, x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) &+ (x, x_{i+1}x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) \\ &+ \dots + (x, x_2, \dots, x_{i+1}x_i, 1, \dots, 1) + (n-i)(x, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, 1, \dots, 1) \\ &= T(x_{i+1})(x, x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

по (14), так что

$$(x_2, \dots, x_i, x_{i+1}x, 1, \dots, 1) = -(n-i)(x, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, 1, \dots, 1) \quad (22)$$

для всех $x_2, \dots, x_{i+1}$ из A согласно предположению (21) индукции. Взаимная замена x_{i+1} и x_i ($j = 2, \dots, i$) в (22) дает

$$(x_2, \dots, x_i, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) = -(n-i)(x, x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) \quad \text{для } j = 2, \dots, i. \quad (23)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x_2x, x_3, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) &+ \dots + (x_2, \dots, x_{i+1}x, 1, \dots, 1) \\ &+ (n-i)(x_2, \dots, x_{i+1}, x, 1, \dots, 1) = (x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1)T(x) = 0 = \\ &= -(i-1)(n-i)(x, x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

согласно (23), из чего вытекает $(x, x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) = 0$ пока $2 \leq i \leq n-1$. Следовательно, (21) верно; в частности, $(x, x_2, \dots, x_n) = 0$ для всех $x, x_2, \dots, x_n \in A$

так что $x = 0$, поскольку $(x_1, \dots, x_n)$ невырождена. Поэтому $B(x, y)$ – невырожденная симметричная ассоциативная билинейная форма, определенная на A , и для конечномерной A мы можем применить теорему Дьюдонна ([11], стр. 37), которая утверждает, что конечномерная неассоциативная алгебра является полупростой в случае (i) на алгебре A определена невырожденная ассоциативная симметричная билинейная форма $B(x, y)$, и (ii) $I^2 \neq 0$ для каждого идеала $I \neq 0$ из A .

Теорема 1. Пусть A – неассоциативная алгебра с 1 над полем F характеристики 0 или $p > n$. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ – симметричная n -линейная форма на A , и след $T(x)$ определен согласно (9). Если $(x_1, \dots, x_n)$ – инвариантна относительно всех левых и правых умножений, соответствующих элементам следа 0, то

(a) $B(x, y) = T(xy)$ является симметричной ассоциативной билинейной формой на A ;

(b) если $(x_1, \dots, x_n)$ невырождена, то невырождена и $B(x, y)$;

(c) если $(x_1, \dots, x_n)$ невырождена и A конечномерна, то $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ является прямой суммой простых идеалов A_i (и A сепарабельна в случае $p > n$).

Доказательство. Нам нужно только проверить (ii) выше для невырожденной формы $B(x, y)$. Предположим, что I – идеал на A , удовлетворяющий $I^2 = 0$. Мы покажем сначала, что $T(x) = 0$ для всех $x \in I$. Для любого $x \in I$, мы имеем $x^2 = 0$. Тогда из (15) вытекает

$$(j+1)T_{i+1}(x) = T(x)T_i(x) \quad \text{для } j = 1, \dots, n-1, \quad (24)$$

и, положив $a = x_1 = \dots = x_n = x$ в (12) мы имеем

$$T(x)N(x) = 0. \quad (25)$$

Предположим, что $T(x) \neq 0$ для некоторого $x \in I$. Тогда из (25) вытекает $T_n(x) = N(x) = 0$. Это случай $i = 0$ уравнения $T_{n-i}(x) = 0$, которое мы доказали с помощью индукции по i . Согласно (24) мы имеем $T(x)T_{n-(i+1)}(x) = (n-i)T_{n-i}(x) = 0$ для $i = 0, 1, \dots, n-2$, так что $T_{n-(i+1)}(x) = 0$ для $i = 0, 1, \dots, n-2$, как и хотели. В частности, мы имеем $T(x) = T_1(x) = 0$, т. е. противоречие. Поэтому $T(x) = 0$ для всех $x \in I$. Так как I является идеалом на A , мы имеем $xy \in I$ для всех $x \in I, y \in A$. Поэтому $B(x, y) = T(xy) = 0$ для всех $y \in A$, из чего вытекает $x = 0$ для всех $x \in I$, или $I = 0$.

2. Альтернативные алгебры. Напомним, что *альтернативная алгебра* A – это такая алгебра, которая является одновременно *левой альтернативной*:

$$x^2a = x(xa) \quad \text{для всех } x, a \in A \quad (26)$$

и *правой альтернативной*:

$$ax^2 = (ax)x \quad \text{для всех } x, a \in A. \quad (27)$$

Теорема 2. Пусть поле F имеет характеристику 0 или $p > n$. Если невырожденная форма $N(x)$ степени n , допускающая композицию, определена на алгебре A (возможно, бесконечномерной) с 1 над F , то A альтернативна.

Доказательство. Сначала выведем ряд следствий из фундаментального тождества (6). Положим

$$x_1 = x_2 = x, \quad y_1 = a, \quad y_2 = y, \quad x_3 = \dots = x_n = y_3 = \dots = y_n = 1$$

в (6) чтобы получить

$$2(xa, xy, 1, \dots, 1) + 2(n-2)(xa, x, y, 1, \dots, 1) + 2(n-2)(xy, x, a, 1, \dots, 1) + (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \dots, 1) = 2T_2(x)(a, y, 1, \dots, 1). \quad (28)$$

Симметрично мы имеем

$$2(ax, yx, 1, \dots, 1) + 2(n-2)(ax, x, y, 1, \dots, 1) + 2(n-2)(yx, x, a, 1, \dots, 1) + (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \dots, 1) = 2T_2(x)(a, y, 1, \dots, 1). \quad (29)$$

Тогда из (28) и (29) вытекает

$$2T_2(x)(a, y, 1, \dots, 1) - (xa, xy, 1, \dots, 1) - 2(n-2)(xa, x, y, 1, \dots, 1) = (n-2)(xy, x, a, 1, \dots, 1) + (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \dots, 1) + (n-2)(yx, x, a, 1, \dots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \dots, 1) + (ax, yx, 1, \dots, 1). \quad (30)$$

Положим $x_1 = a$, $y_1 = y$, $x_2 = y_2 = x$, $x_3 = \dots = x_n = y_3 = \dots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$(ay, x^2, 1, \dots, 1) + (n-2)(ay, x, x, 1, \dots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \dots, 1) + (n-2)(n-3)(a, x, x, y, 1, \dots, 1) + (ax, xy, 1, \dots, 1) + (n-2)(a, x^2, y, 1, \dots, 1) + (n-2)(a, xy, x, 1, \dots, 1) = n(n-1)(a, x, 1, \dots, 1)(y, x, 1, \dots, 1). \quad (31)$$

Из (20) мы имеем $T(((ax)y)x) = T((ax)(yx))$, так что

$$T((ax)y)T(x) - n(n-1)((ax)y, x, 1, \dots, 1) = T(ax)T(yx) - n(n-1)(ax, yx, 1, \dots, 1)$$

согласно (17), или

$$\begin{aligned} n(n-1)[(ax, yx, 1, \dots, 1) - T(y)(ax, x, 1, \dots, 1) + (ax, xy, 1, \dots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \dots, 1)] = \\ T(x)[T(y)T(ax) - n(n-1)T(a)(y, x, 1, \dots, 1) - T((ax)y)] + n^2(n-1)^2(a, x, 1, \dots, 1)(y, x, 1, \dots, 1) = \\ n(n-1)T(x)[(ax, y, 1, \dots, 1) - T(a)(y, x, 1, \dots, 1)] + n^2(n-1)^2(a, x, 1, \dots, 1)(y, x, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

по (17) и (11). Следовательно

$$(ax, yx, 1, \dots, 1) + T(y)(a, x^2, 1, \dots, 1) + (n-2)T(y)(a, x, x, 1, \dots, 1) + (ax, ay, 1, \dots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \dots, 1) - n(n-1)(a, x, 1, \dots, 1)(y, x, 1, \dots, 1) = T(x)[T(y)(a, x, 1, \dots, 1) - (ay, x, 1, \dots, 1) - (n-2)(y, x, 1, \dots, 1)] \quad (32)$$

согласно (11) и (12). Тогда из (31) и (32) вытекает

$$(ax, yx, 1, \dots, 1) + T(y)(a, x^2, 1, \dots, 1) - (ay, x^2, 1, \dots, 1) = T(x)(a, xy, 1, \dots, 1) - (n-2)T(y)(a, x, x, 1, \dots, 1) + (n-2)(a, x^2, y, 1, \dots, 1) + (n-2)(a, xy, x, 1, \dots, 1) + (n-2)(ay, x, x, 1, \dots, 1) + (n-2)(n-3)(a, x, x, y, 1, \dots, 1) \quad (33)$$

согласно (11). Следовательно

$$\begin{aligned}
& B(x^2a, y) - B(x(xa), y) = \\
& = n(n-1)[(x(xa), y, 1, \dots, 1) - (x^2a, y, 1, \dots, 1)] \quad \text{по (17) и (20)} \\
& = n(n-1)[T(x)(xa, y, 1, \dots, 1) - (xa, xy, 1, \dots, 1) \\
& \quad - (n-2)(xa, y, x, 1, \dots, 1) - T(x^2)(a, y, 1, \dots, 1) \\
& \quad + (a, x^2y, 1, \dots, 1) + (n-2)(a, y, x^2, 1, \dots, 1)] \quad \text{по (12)} \\
& = n(n-1)T(x)[(xa, y, 1, \dots, 1) - T(x)(a, y, 1, \dots, 1)] \\
& \quad + n(n-1)[2T_2(x)(a, y, 1, \dots, 1) - (xa, xy, 1, \dots, 1) \\
& \quad - (n-2)(xa, y, x, 1, \dots, 1) + T(y)(a, x^2, 1, \dots, 1) - (ay, x^2, 1, \dots, 1)] \quad \text{по (8) и (11)} \\
& = n(n-1)T(x)[-(a, xy, 1, \dots, 1) - (n-2)(a, y, x, 1, \dots, 1)] \\
& \quad + n(n-1)[(n-2)(xy, x, a, 1, \dots, 1) \\
& \quad + (n-2)(n-3)(x, x, y, a, 1, \dots, 1) + (n-2)(yx, x, a, 1, \dots, 1) \\
& \quad + (n-2)(ax, x, y, 1, \dots, 1) + (ax, yx, 1, \dots, 1) \\
& \quad + T(y)(a, x^2, 1, \dots, 1) - (ay, x^2, 1, \dots, 1)] \quad \text{по (12) и (30)} \\
& = n(n-1)(n-2)[-T(x)(a, y, x, 1, \dots, 1) + 2(xy, x, a, 1, \dots, 1) \\
& \quad + 2(n-3)(x, x, y, a, 1, \dots, 1) + (yx, x, a, 1, \dots, 1) \\
& \quad + (ax, x, y, 1, \dots, 1) - T(y)(a, x, x, 1, \dots, 1) \\
& \quad + (a, x^2, y, 1, \dots, 1) + (ay, x, x, 1, \dots, 1)] \quad \text{по (33)} \\
& = 0 \quad \text{для всех } y \in A \quad \text{по (11).}
\end{aligned}$$

Так как $B(x, y)$ невырождена, мы имеем (26); так что A является левоальтернативной. Симметрично, удовлетворяется (27) и A альтернативна, что и требовалось доказать.

Следствие. Любая конечномерная алгебра A , удовлетворяющая предположениям Теоремы 2 является прямой суммой $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ простых идеалов A_i , каждый из которых или ассоциативен, или представляет собой алгебру Кэли над своим центром Z_i .

Теорема 3. Пусть F имеет характеристику 0 или $p > n$. Если невырожденная форма $N(x)$ степени n , допускающая композицию, определена на алгебре A (возможно, бесконечномерной) с 1 над F , то любой элемент $x \in A$ удовлетворяет соотношению

$$x^n - T_1(x)x^{n-1} + T_2(x)x^{n-2} - \dots + (-1)^n T_n(x)1 = 0. \quad (34)$$

Доказательство. Для $i = 1, \dots, n-1$, положим $x_1 = x^{n-i}$, $y_1 = \dots = y_i = x$, $y_{i+1} = \dots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$\begin{aligned}
& (x^{n-i+1}, x_2x, \dots, x_ix, x_{i+1}, \dots, x_n) + \dots + (x^{n-i+1}, x_2, \dots, x_{n-i+1}x, x_{n-i+2}x, \dots, x_nx) + \dots \\
& + (x^{n-i}, x_2x, \dots, x_{i+1}x, x_{i+2}, \dots, x_n) + \dots + (x^{n-i}, x_2, \dots, x_{n-i}, x_{n-i+1}x, \dots, x_nx) = \\
& = (x^{n-i}, x_2, \dots, x_n)T_i(x) \quad \text{для } i = 1, \dots, n-1. \quad (35)
\end{aligned}$$

Тогда из (35) и (5) вытекает

$$(x^n - T_1(x)x^{n-1} + T_2(x)x^{n-2} - \dots + (-1)^n T_n(x)1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (36)$$

для всех $x_2, \dots, x_n \in A$, из чего вытекает (34), так как $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ невырождена.

3. Сведение к простым алгебрам. Мы будем предполагать отныне, что алгебра A удовлетворяет предположениям Теоремы 2.

Пусть e – идемпотент $\neq 1$ на A . Тогда из (34) вытекает

$$1 - T(e) + T_2(e) - \dots + (-1)^{n-1} T_{n-1}(e) = 0, \quad N(e) = 0, \quad (37)$$

так как e и 1 линейно независимы. Положим $x = e$ в (15) чтобы получить

$$(j+1)T_{i+1}(e) = [T(e) - j]T_i(e) \quad \text{для } j = 1, \dots, n-1. \quad (38)$$

Так как $T_n(e) = N(e) = 0$ согласно (37), существует наименьшее целое число m такое, что $T_{m+1}(e) = \dots = T_n(e) = 0$. Тогда $T_m(e) \neq 0$ с $1 \leq m \leq n-1$, так как $T_1(e) = \dots = T_n(e) = 0$ противоречит (37). Полагая $j = m$ в (38), мы имеем

$$T(e) = m, \quad (39)$$

что является частным случаем $i = 1$ соотношения

$$T_i(e) = C_i^m \quad \text{для } i = 1, \dots, m. \quad (40)$$

Используя (38), мы докажем (40) с помощью индукции по i , как ниже:

$$T_{i+1}(e) = \frac{m-i}{i+1} T_i(e) = \frac{m-i}{i+1} C_m^i = C_m^{i+1}.$$

Предположим, что существуют идеалы $G \neq 0, G' \neq 0$ такие, что $A = G \oplus G'$. (Это случай, когда алгебра A не проста, но конечномерна, так что $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ с простыми A_i с $r > 1$ согласно Теореме 1(с).) Тогда $1 = e + e'$, где $e \neq 1$ (соответственно, $e' \neq 1$) является единичным элементом на G (соответственно, G'). Для $g \in G, g' \in G'$, определим

$$N_G(g) = N(g + e'), \quad N_{G'}(g') = N(g' + e). \quad (41)$$

Тогда, для любого $x = g + g' \in A$, из (3) вытекает

$$N(x) = N_G(g)N_{G'}(g') \quad (42)$$

и

$$N_G(g_1 g_2) = N_G(g_1)N_G(g_2) \quad \text{для всех } g_1, g_2 \in G. \quad (43)$$

Мы покажем дальше, что

$$N_G(g) = T_m(g) \quad \text{для всех } g \in G \quad \text{где } m = T(e), \quad (44)$$

из чего вытекает, что $N_G(g)$ является формой степени m на G . Симметрично, справедливы формулы для $N_{G'}(g')$, соответствующие (43) и (44), так что $N(x)$ является произведением (42) форм, которые допускают композицию и имеют степени m и m' , $n = m + m'$, $m > 0$, $m' > 0$.

Для любого $i = 0, 1, \dots, n$, положим

$$a = e, \quad x_1 = \dots = x_i = g \in G, \quad x_{i+1} = \dots = x_n = e'$$

в (12). Тогда из (39) вытекает

$$\underbrace{(g, \dots, g}_i, e', \dots, e') = 0 \quad \text{кроме } i = T(e) = m. \quad (45)$$

Также

$$(\underbrace{g, \dots, g}_m, \underbrace{e, \dots, e}_i, 1, \dots, 1) = 0 \quad \text{для всех } i > 0, \quad (46)$$

как мы доказали с помощью индукции по i . Положим

$$j = m, \quad a = e, \quad x_1 = \dots = x_m = g \in G$$

в (14), чтобы получить

$$(\underbrace{g, \dots, g}_m, e, 1, \dots, 1) = 0 \quad (47)$$

так как $m < n$. Однако, (47) – это случай $i = 1$ соотношения (46). Положим

$$j = m + i, \quad x_1 = \dots = x_m = g \in G, \quad a = x_{m+1} = \dots = x_{m+i} = e$$

в (14), чтобы получить

$$i(\underbrace{g, \dots, g}_m, \underbrace{e, \dots, e}_i, 1, \dots, 1) + (n - m - i)(\underbrace{g, \dots, g}_m, \underbrace{e, \dots, e}_{i+1}, 1, \dots, 1) = 0,$$

так что

$$(\underbrace{g, \dots, g}_m, \underbrace{e, \dots, e}_{i+1}, 1, \dots, 1) = 0$$

согласно предположению (46) индукции. Тогда из (45) и (46) вытекает (44). Согласно (41) мы имеем:

$$\begin{aligned} N_G(g) &= (g + e', \dots, g + e') \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i(\underbrace{g, \dots, g}_i, e', \dots, e') \\ &= C_n^m(\underbrace{g, \dots, g}_m, e', \dots, e') \\ &= C_n^m(\underbrace{g, \dots, g}_m, 1 - e, \dots, 1 - e) \\ &= C_n^m \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{n-m}^i(\underbrace{g, \dots, g}_m, \underbrace{e, \dots, e}_i, 1, \dots, 1) \\ &= C_n^m(\underbrace{g, \dots, g}_m, 1, \dots, 1) \\ &= T_m(g). \end{aligned}$$

Далее мы покажем, что $N_G(g)$ невырождена на G (и симметрично $N_{G'}(g')$ невырождена на G'). Согласно (8) и (44) форма $N_G(g)$ имеет ассоциированную симметричную m -линейную форму $C_n^m(g_1, \dots, g_m, 1, \dots, 1)$, $g_i \in G$. Предположим, что $(g_1, g_2, \dots, g_m, 1, \dots, 1) = 0$ для всех $g_2, \dots, g_m \in G$. Чтобы показать, что $g_1 = 0$, как требуется, мы сначала покажем, что $T(g_1) = 0$. Зададим

$$(\underbrace{g_1, e, \dots, e}_m, 1, \dots, 1) = 0,$$

что является частным случаем $i = 0$ соотношения

$$(\underbrace{g_1, e, \dots, e}_{m-i}, 1, \dots, 1) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (48)$$

При доказательстве (48) по индукции, положим

$$j = m - i - 1, \quad x_1 = g_1, \quad a = x_2 = \dots = x_{m-i-1} = e$$

в (14), чтобы получить

$$(i+1)(\underbrace{g_1, e, \dots, e}_{m-i-1}, 1, \dots, 1) = (n-m+i+1)(\underbrace{g_1, e, \dots, e}_{m-i}, 1, \dots, 1) = 0$$

согласно предположению индукции, из чего вытекает

$$(\underbrace{g_1, e, \dots, e}_{m-(i+1)}, 1, \dots, 1) = 0,$$

что и требовалось. Случай $i = m - 1$ в (48) дает $T(g_1) = 0$. Для любого $y = g + g'$ из A ($g \in G$, $g' \in G'$), мы имеем

$$B(g_1, y) = T(g_1 y) = T(g_1 g) = T(g_1)T(g) - n(n-1)(g_1, g, 1, \dots, 1) = -n(n-1)(g_1, g, 1, \dots, 1)$$

согласно (17). Но мы задались

$$(\underbrace{g_1, g, e, \dots, e}_m, 1, \dots, 1) = 0,$$

который является случаем $i = 0$ соотношения

$$(\underbrace{g_1, g, e, \dots, e}_{m-i}, 1, \dots, 1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-2, \quad (49)$$

которое мы докажем по индукции следующим образом: положим

$$j = m - i - 1, \quad x_1 = g_1, \quad x_2 = g, \quad a = x_3 = \dots = x_{m-i-1} = e$$

в (14), чтобы получить

$$(i+1)(\underbrace{g_1, g, e, \dots, e}_{m-i-1}, 1, \dots, 1) = (n-m+i+1)(\underbrace{g_1, g, e, \dots, e}_{m-i}, 1, \dots, 1) = 0$$

согласно предположению индукции (49). Поэтому

$$(\underbrace{g_1, g, e, \dots, e}_{m-(i+1)}, 1, \dots, 1) = 0,$$

что и требовалось. Случай $i = m - 2$ соотношения (49) дает

$$B(g_1, y) = -n(n-1)(g_1, g, 1, \dots, 1) = 0$$

для всех $y \in A$, из чего вытекает $g_1 = 0$ так как $B(x, y)$ невырождена. Поэтому $N_G(g)$ невырождена на G (и то же самое относится к $N_{G'}(g')$ на G').

Так как F имеет характеристику 0 или $p > n > m$ (соответственно, m'), это доказательство может быть повторено для G и G' . В случае конечномерной алгебры мы за конечное число шагов получаем

Теорема 4. Пусть поле F имеет характеристику 0 или $p > n$. Пусть A – конечномерная алгебра с 1 над F , на которой определена невырожденная форма $N(x)$

степени n , допускающая композицию, так что $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ с простыми (альтернативными) A_i . Тогда $N(x) = N_1(x_1) \cdots N_r(x_r)$, где $x = x_1 + \dots + x_r$, $x_i \in A_i$, и $N_i(x_i)$ – невырожденная форма степени n_i на A_i , которая допускает композицию, $n = n_1 + \dots + n_r$.

Теорема 4 сводит определение формы $N(x)$ на конечномерной A к рассмотрению простых алгебр. Таким образом, для конечномерной A исходное предположение для произвольного n сводится к следующему: что форма $N_i(x_i)$ любой степени $n_i \leq n$, допускающая композицию на простой альтернативной алгебре A_i , является степенью общей (generic) нормы для A_i .

Как было отмечено в последнем абзаце перед §1, Натан Джекобсон информировал автора после того, как данная статья была написана, что он доказал, что форма степени n , допускающая композицию на конечномерной простой альтернативной алгебре над полем, содержащим более чем n элементов, является степенью общей нормы. Этот результат появится в виде Следствия Теоремы 3 работы, озаглавленной "Общая (Generic) Норма Алгебры", направленной в Osaka Mathematical Journal. Это завершает доказательство для конечномерной A предположения, высказанного в [9] и делает следующую секцию (§4) данной работы необязательной.

4. Квадраформы (quartic forms). Мы докажем для квадраформ на конечномерных алгебрах с помощью метода, использованного для кубических форм в [9], что $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2).

Теорема 5. Пусть A – конечномерная неассоциативная алгебра с 1 над F характеристики $\neq 2, 3$. Необходимое и достаточное условие для существования невырожденной квадраформы $N(x)$, допускающей композицию, на A является, что A представляет собой сепарабельную альтернативную алгебру $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$, A_i простые, для которой $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2). Таким образом, A имеет размерность 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 или 16.

Доказательство. Достаточное условие очевидно и нам остается доказать лишь необходимое. Согласно Теореме 4 мы можем положить A простой, так как соответствующий результат уже известен для степени < 4 . (Нужно подчеркнуть, что метод доказательства в [9] требует дополнительного предположения, что F имеет характеристику $\neq 5$. Доказательство в [9] основывается на [3], где предположение, что характеристика $\neq 5$ не может быть обойдено ([3, 320]). Однако, доказательство Следствия из Теоремы 2 в настоящей работе (которое включает случай $n = 3$) не требует никаких дополнительных предположений о характеристике. Тогда из [9, §3] следует, что формулировка Теоремы в [9] корректна.)

Пусть K – алгебраическое замыкание F . Тогда A_K – конечномерная алгебра с 1 над K , на A_K существует невырожденная форма степени n , допускающая композицию. Все результаты по данному вопросу остаются справедливыми для A_K , мы имеем $A_K = D_1 \oplus \dots \oplus D_d$, где D_i – расщепляемая центральная простая альтернативная алгебра над K , $D_1 \cong D_2 \cong \dots \cong D_d$. Если $d > 1$, существует невырожденная форма степени n_i , допускающая композицию на D_i , $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_d$, $\sum n_i = 4$. Если $n_1 = 1$, то $D_1 (\cong D_i)$ является 1-мерной над K с $d = 2, 3$ или 4. Если $n_1 = 2$, то $n_2 = 2$, $d = 2$, и мы знаем, что $\dim D_i = 1, 4$ или 8. Соответственно, существуют следующие возможности для A :

- (A) A является квадраполем (quartic field) над F ($n_1 = 1$, $d = 4$);
- (B) A – кубическое поле над F ($n_1 = 1$, $d = 3$);
- (C) A – квадратичное поле над F ($n_1 = 1$, $d = 2$; также $n_1 = 2$, $\dim D_i = 1$);

(D) A – (обобщенная) кватернионная алгебра над своим центром Z , квадратичное расширение F ($n_1 = 2$, $\dim D_i = 4$);

(E) A – алгебра Кэли над своим центром Z , квадратичное расширение F ($n_1 = 2$, $\dim D_i = 8$);

(F) A – центральная простая алгебра ($d = 1$).

Согласно (34) с $n = 4$ возможности в случае (F) таковы:

(F, 1) $A = F1$ (так что $N(\alpha 1) = \alpha^4, \alpha \in F$);

(F, 2) A – (обобщенная) кватернионная алгебра или алгебра Кэли над F ;

(F, 3) A – центральная простая ассоциативная алгебра степени 3 над F ;

(F, 4) A – центральная простая ассоциативная алгебра степени 4 над F .

С очевидностью, возможности (A), (D), (E) и (F, 4) могут иметь место. В этих случаях про квадраформу $N(x)$ известно, что она должна быть общей (generic) нормой. Также (C) и (F, 2) могут иметь место с $N(x) = [n(x)]^2$, где $n(x)$ – общая норма для A ; в Лемме 1 мы покажем, что никаких других $N(x)$ не может быть для (C) или (F, 2). Наконец, мы докажем в Лемме 2, что (B) и (F, 3) не могут иметь места. Это, вместе с Леммами 1 и 2, завершает доказательство Теоремы 5.

Лемма 1. Пусть F имеет характеристику $\neq 2, 3$, и пусть алгебра A с общей (generic) $n(x)$ является одной из следующих:

(i) квадратичное поле над F ;

(ii) (обобщенная) кватернионная алгебра или алгебра Кэли над F .

Если $N(x)$ – невырожденная квадраформа на A , допускающая композицию, то $N(x) = [n(x)]^2$.

Доказательство. В обоих случаях (i) и (ii) общее (generic) минимальное уравнение для $x \in A$ ([6], стр. 180) таково:

$$x^2 - t(x)x + n(x)1 = 0. \quad (50)$$

Кроме того, $A = F1 + M$, где $M = \{x_0 | x_0 \in A, t(x_0) = 0\}$. В случае (i) мы имеем $M = Fu_0$, где $u_0^2 = \beta 1 = -n(u_0)1$, β неквадратична на F , в то время как в случае (ii) квадратичная форма f , определенная на M посредством

$$x_0^2 = f(x_0)1 = -n(x_0)1 \quad \text{для всех } x_0 \in M \quad (51)$$

невырождена. Теперь из (50) и (34) с $n = 4$ вытекает

$$T_3(x_0) = T(x_0)n(x_0) \quad \text{для всех } x_0 \in M \quad (52)$$

и

$$N(x_0) = T_2(x_0)n(x_0) - [n(x_0)]^2 \quad \text{для всех } x_0 \in M. \quad (53)$$

Полагая $j = 2$ в (15), мы имеем

$$3T_3(x_0) = T(x_0)T_2(x_0) + 3T(x_0)n(x_0).$$

Поэтому из (52) вытекает $T(x_0)T_2(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, где

$$2T_2(x_0) = [T(x_0)]^2 + 4n(x_0) \quad \text{для всех } x_0 \in M \quad (54)$$

по (18). Существует достаточно много несовпадающих элементов в F , чтобы мы сделали вывод, что мы имеем либо

$$T(x_0) = 0 \quad \text{для всех } x_0 \in M, \quad (55)$$

либо $T_2(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, так что

$$-n(x_0) = \left[\frac{1}{2}T(x_0)\right]^2 \quad \text{для всех } x_0 \in M \quad (56)$$

по (54). Предположим, что (56) верно. В случае (i) мы имеем $\beta = -n(u_0)$, квадрат на F , что является противоречием. В случае (ii) мы имеем невырожденную квадратичную форму $f(x_0) = -n(x_0)$, квадрат линейной формы на M , из чего вытекает, что M одномерна, противоречие. Мы доказали (55). Тогда

$$T_2(x_0) = 2n(x_0), \quad t_3(x_0) = 0, \quad N(x_0) = [n(x_0)]^2$$

согласно (54), (52) и (53). Для любого $x = \alpha 1 + x_0$ ($\alpha \in F, x_0 \in M$) мы имеем

$$N(x) = N(\alpha 1 + x_0) = \sum_{i=0}^4 \alpha^{4-i} T_i(x_0) = [\alpha^2 + n(x_0)]^2 = [n(x)]^2,$$

что и требовалось.

Лемма 2. Пусть F имеет характеристику $\neq 2, 3$. Невырожденная квадраформа, допускающая композицию, не может быть определена на (i) кубическом поле A над F , (ii) центральной простой ассоциативной алгебре A степени 3 над F .

Доказательство. В случае (ii) мы можем положить, что F алгебраически замкнуто, так как невырожденная квадраформа, допускающая композицию, существует на A только, если существует такая форма на A_K , где K – алгебраическое замыкание F . Поэтому в (ii) мы можем считать, что A – алгебра всех матриц 3×3 над алгебраически замкнутым полем F . В обоих случаях (i) и (ii) общее (generic) минимальное уравнение для $x \in A$ таково:

$$x^3 - t(x)x^2 + q(x)x - n(x)1 = 0, \quad (57)$$

где $t(x)$ (соответственно, $q(x)$, $n(x)$) – линейная (соответственно, квадратичная, кубическая) форма на A , $n(x)$ – общая норма. Также $A = F1 + M$, где M состоит из всех x_0 , удовлетворяющих $t(x_0) = 0$. В случае (i) M содержит u_0 (удовлетворяющее $u_0^3 = -q(u_0)u_0 + n(u_0)1$) такое, что

$$\lambda^3 + q(u_0)\lambda - n(u_0) \quad \text{неприводимо,} \quad (58)$$

в то время, как в случае (ii) $t(x)$ – обычный след и $n(x) = \det x$ – детерминант 3×3 матрицы x . Теперь из (34) с $n = 4$ и (57) вытекает

$$[T_2(x_0) - q(x_0)]x_0^2 + [T(x_0)q(x_0) + n(x_0) - T_3(x_0)]x_0 + [N(x_0) - T(x_0)n(x_0)]1 = 0$$

для всех $x_0 \in M$, так что в обоих случаях (i) и (ii) мы имеем

$$T_2(x_0) = q(x_0), \quad T_3(x_0) = T(x_0) + n(x_0), \quad N(x_0) = T(x_0)n(x_0) \quad (59)$$

для всех $x_0 \in M$. Теперь из (12) следует

$$3(x^2x, x, x, 1) + (x, x, x, x^2) = T(x^2)(x, x, x, 1)$$

для всех $x \in A$, так что из (57), (7), (18) и (59) вытекает

$$q(x_0)[[T(x_0)^3] + T(x_0)q(x_0) - n(x_0)] = 0 \quad \text{для всех } x_0 \in M. \quad (60)$$

В случае (i) мы имеем либо

$$q(u_0) = 0, \quad (61)$$

либо

$$n(u_0) = [T(u_0)]^3 + T(u_0)q(u_0). \quad (62)$$

Если (62) верно, то $\lambda^3 + q(u_0)\lambda - n(u_0)\lambda$ имеет своим делителем $\lambda - T(u_0)$ в противоречии с (58). Если (61) верно, то $u_0^3 = n(u_0)1$ так что $T(u_0^3) = 4n(u_0)$, тогда как $T(u_0^3) = [T(u_0)]^3 + 3n(u_0)$ согласно (17), (15) с $j = 2$, (18) и (59). Следовательно, $n(u_0) = [T(u_0)]^3$, куб на F , так что $\lambda^3 - n(u_0)$ приводимо, что противоречит (58) и исключает (i).

В случае (ii) алгебраически замкнутое поле F содержит бесконечно много элементов, так что из (60) следует, что либо $q(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, либо

$$n(x_0) = [T(x_0)]^3 + T(x_0)q(x_0) \quad \text{для всех } x_0 \in M. \quad (63)$$

Однако, легко найти 3×3 матрицы $x_0 \in M$ такие, что $q(x_0) \neq 0$ (например, если элементы обычного матричного базиса обозначить как e_{ij} , то матрица $x_0 = e_{12} + e_{21}$ будет удовлетворять этому). Поэтому (63) верно и для любого $x = \alpha 1 + x_0 \in A$ ($T(x) = 3\alpha$), мы имеем

$$\begin{aligned} \det x = \det(\alpha 1 + x_0) &= n(\alpha 1 + x_0) = \alpha^3 + \alpha^2 t(x_0) + \alpha q(x_0) + n(x_0) = \\ &= [\alpha + T(x_0)][\alpha^2 - \alpha T(x_0) + [T(x_0)]^2 + q(x_0)], \end{aligned}$$

так что детерминант $\det x$ имеет линейным делителем $t(x)/3 + T(x_0) = T(x) - t(x)$, противоречие. Это завершает доказательство Леммы 2 и Теоремы 5.

Замечание. Как в [7] и [9], легко видеть, что даже без допущения в Теореме 5, что алгебра A содержит 1, возможные размерности A есть 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 или 16.

Литература

1. A. A. Albert. Quadratic forms permitting composition. Ann. of Math. **43** (1942), 161-177.
2. A. A. Albert. Power-associative rings. Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 552-593.
3. A. A. Albert. A theory of trace-admissible algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **35** (1949), 317-322.
4. W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications (2nd edition). Wiley, New York, 1959.
5. N. Jacobson. Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 55-80.
6. N. Jacobson. Some groups of linear transformations defined by Jordan algebras, I. J. reine angew. Math. **201** (1959), 178-195.
7. I. Kaplansky. Infinite-dimensional quadratic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 956-960.
8. R. D. Schafer. Noncommutative Jordan algebras of characteristic 0. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 472-475.
9. R. D. Schafer. On cubic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 917-925.

10. R. D. Schafer. Cubic forms permitting a new type of composition. J. Math. Mech. **10** (1961), 159-174.

11. R. D. Schafer. "An Introduction to Nonassociative Algebras" (multilith), Oklahoma State University, 1961.

Массачусеттский Технологический институт,
Кембридж, Массачусеттс

ТРИЧИСЛА, КУБ НОРМЫ КОТОРЫХ ЕСТЬ НЕВЫРОЖДЕННАЯ ТРИФОРМА

Г. И. Гарасько

*ГУП Всероссийский электротехнический институт,
gri9z@mail.ru*

Произвольная триформа приводится к каноническому виду. Требование существования двухпараметрической абелевой группы Ли – группы симметрии триформы, позволило выделить те триформы, которые соответствуют тричислам, и найти все тричисла, куб нормы которых в специальной системе координат есть невырожденная триформа. Таких систем гиперкомплексных чисел всего (с точностью до изоморфизма) две: C_3, H_3 . Их можно рассматривать, как обобщение комплексных и двойных (гиперболических) бичисел на тричисла.

1. Введение

Одним из исходных понятий как математики, так и физики, является действительное (вещественное) число. Ассоциативно-коммутативные n -мерные гиперкомплексные числа над полем действительных чисел, которые для краткости будем называть n -числами, являются обобщением этого понятия, причем комплексные числа, очень хорошо зарекомендовавшие себя при решении задач математической и теоретической физики, есть частный случай таких гиперкомплексных чисел, бичисел. К сожалению, n -числа при $n > 2$ недостаточно изучены. Есть надежда, что, обладая такими упрощающими работу свойствами как ассоциативность и коммутативность, но достаточно сложной в некоторых случаях геометрией, ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа найдут свое нетривиальное применение в математике и физике. Для $n > 2$ сама классификация и выбор n -чисел для математических исследований в расчете на дальнейшее применение в физике представляет не простую задачу. Один из способов ее решения – это формулировка дополнительных условий, которые бы из всего множества n -чисел выделяли более узкий, но заведомо значимый класс. Одним из таких условий может быть требование существования такого специального базиса, в котором бы координаты n -чисел были, в некотором смысле, равноправны, например, норма в этих координатах не зависела от перестановки координат или более сильное требование – n -ая степень нормы n -чисел в таких специальных координатах должна быть невырожденной n -формой этих координат. В данной работе для краткости под n -формой координат n -мерного линейного пространства будем понимать сверхсимметрическую полилинейную форму n -го порядка, все аргументы которой равны одному и тому же вектору. *Сверхсимметричность формы* подразумевает существование такого базиса, в котором симметрическая форма n -векторных аргументов не меняется при перестановке координат. *Невырожденность формы* будем понимать как требование невозможности представить ее как некоторую целую степень формы более низкого порядка. Ниже мы будем часто опускать слово "невырожденная", говоря просто о n -форме. Настоящая работа посвящена изучению тричисел, то есть ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел вида

$$X = x_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3, \quad (1)$$

где e_2, e_3 – символные элементы, а x_1, x_2, x_3 – действительные числа, координаты в базисе $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$. Если число X допускает экспоненциальное представление

$$X = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \quad (2)$$

где $\rho > 0, \alpha, \beta$ – действительные числа, то величину ρ естественно назвать модулем тричисла X . Будем искать только те тричисла, для которых в некотором специальном базисе (это необязательно базис $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$) куб нормы $\rho(x_1, x_2, x_3)$ является невырожденной триформой координат, то есть

$$\rho^3 = \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (3)$$

где триформа общего вида

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 \Omega_1(x_1, x_2, x_3) + \omega_2 \Omega_2(x_1, x_2, x_3) + \omega_3 \Omega_3(x_1, x_2, x_3) \quad (4)$$

есть произвольная линейная комбинация с действительными коэффициентами ω_i ($i = 1, 2, 3$) при базисных триформах:

$$\Omega_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \quad (5)$$

$$\Omega_2(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 \quad (6)$$

$$\Omega_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_2 x_3. \quad (7)$$

Заметим, что симметрическая кубическая форма от трех векторных аргументов, линейная по каждому аргументу, в трехмерном пространстве содержит не три, а десять произвольных действительных параметров, то есть является более общим понятием, чем сверхсимметрическая триформа, и приводит к форме более общей, чем триформа (4). Требование невырожденности триформы означает

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \equiv \omega \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^3. \quad (8)$$

В дальнейшем будем подразумевать под триформами невырожденные триформы или оговаривать обратное особо.

Умножение числа X на унимодулярное число X_1 дает число

$$Y = X_1 \cdot X, \quad (9)$$

(9) модуль которого равен модулю числа X , а значит для таких рассматриваемых тричисел

$$\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3) = \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3). \quad (10)$$

Таким образом, для того чтобы куб нормы тричисла являлся триформой, множество унимодулярных чисел этой гиперкомплексной системы должно образовывать двухпараметрическую непрерывную абелеву группу Ли (группу симметрии, сохраняющую вид триформы), состоящую из линейных преобразований (9) координатного пространства рассматриваемых тричисел.

Предположим, что для определенных значений параметров триформы (4) найдена группа симметрии, двухпараметрическая абелева группа непрерывных линейных преобразований с генераторами E_2, E_3 – действительными квадратными матрицами 3×3 . Тогда, как известно, сами линейные преобразования определяются через генераторы матрицей $\hat{A}$ по формуле

$$\hat{A} = \exp(\alpha \cdot \hat{E}_2 + \beta \cdot \hat{E}_3), \quad (11)$$

где α, β – действительные параметры. Пусть при этом для генераторов выполняются правила умножения

$$\hat{E}_i \cdot \hat{E}_j = p_{ij}^k \cdot \hat{E}_k, \quad (12)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$; $\hat{E}_1$ – единичная матрица (генератор общего масштабного преобразования), p_{ij}^k – некоторые действительные числа, по дважды встречающемуся индексу происходит суммирование. Тогда $\hat{E}_1 \hat{E}_2, \hat{E}_3$ можно рассматривать как представление базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$ некоторой системы тричисел, а значит представление самой системы таких чисел в координатном линейном трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3 в виде действительных квадратных матриц 3×3 . Очевидно, что закон умножения базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$ будет иметь тот же вид (12) с теми же характеристическими числами p_{ij}^k

$$e_i \cdot e_j = p_{ij}^k \cdot e_k. \quad (13)$$

Теперь мы можем записать числа, представимые в экспоненциальном виде (2). Координатное линейное пространство x_1, x_2, x_3 не обязательно должно вводиться в том же самом базисе, то есть по формуле (1). Поэтому в общем случае возникает следующее соотношение для чисел представимых в экспоненциальном виде

$$x_1 \cdot e'_1 + x_2 \cdot e'_2 + x_3 \cdot e'_3 = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \quad (14)$$

где e'_1, e'_2, e'_3 – базис в общем случае отличный от $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$, причем e'_1 может не быть действительной единицей. Используя три координатных соотношения (14) и исключая два действительных параметра α, β , получим выражение для куба нормы через координаты x_1, x_2, x_3

$$\rho^3 = f(x_1, x_2, x_3). \quad (15)$$

Если справа в этой формуле стоит исходная триформа, то найдены тричисла, ей соответствующие.

2. Приведение триформы к каноническому виду

Кроме общего масштабного преобразования, существуют лишь одно непрерывно связанное с тождественным линейное преобразование координат, с помощью которого произвольная триформа переходит опять в триформу. Запишем это преобразование в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3q} \begin{pmatrix} p+2 & p-1 & p-1 \\ p-1 & p+2 & p-1 \\ p-1 & p-1 & p+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где q – произвольное положительное действительное число, а

$$p \equiv q^3. \quad (17)$$

В новых переменных после преобразования (16) триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ будет иметь вид

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3), \quad (18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega'_1 &\equiv u \cdot (w_1 p^3 + 3w_2 p + 2w_3), \\ \omega'_2 &\equiv 3u(w_1 p^3 - w_3), \\ \omega'_3 &\equiv 3u(2w_1 p^3 - 3w_2 p + 4w_3), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$u \equiv \frac{1}{27p} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1 &\equiv 3\omega_1 + 6\omega_2 + \omega_3, \\ w_2 &\equiv 6\omega_1 - \omega_3, \\ w_3 &\equiv 3\omega_1 - 3\omega_2 + \omega_3. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Конечно, классификацию триформ (приведение к каноническому виду) можно проводить по-разному. Будем исходить из того, что триформы, связанные линейным невырожденным преобразованием координат, не изменяющим значения самой триформы, эквивалентны – отличаются друг от друга лишь выбором базиса в трехмерном линейном пространстве x_1, x_2, x_3 , то есть выбором базисных (символьных) элементов в пространстве тричисел. При приведении триформ к каноническому виду будем рассматривать не все линейные невырожденные преобразования, а лишь три возможные: во-первых, преобразование (16); во-вторых, дискретное преобразование – изменение знака у всех трех координат одновременно; в-третьих, общее масштабное преобразование – умножение одновременно всех трех координат на одно и тоже действительное положительное число – именно в этой последовательности. Базисные формы (5) – (7) в силу их выделенности сразу причислим к каноническим.

Итак, рассмотрим триформу общего вида (4) и перейдем с помощью линейного преобразования (16) к новым координатам. Так как связь между величинами w_i и параметрами триформы ω_i взаимнооднозначная, будем стараться уменьшить число параметров триформы в новых координатах, перебирая различные варианты, используя величины w_i и формулы (19).

1). Если

$$\text{sign}(w_1) = \text{sign}(w_2) \neq 0, \quad (22)$$

то с помощью линейного преобразования координат (16) со значением параметра

$$p = \sqrt[3]{\frac{w_3}{w_1}} \quad (23)$$

исходную триформу можно привести к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, 0, \omega'_3)$.

2). Если

$$\text{sign}(w_1) = -\text{sign}(w_3) \neq 0, \quad (24)$$

то всегда найдутся два преобразования (16), с помощью одного из которых можно обнулить ω'_1 , а с помощью второго можно обнулить ω'_3 , при этом в том и другом случае параметр ω'_2 получается строго неравным нулю при любом значении w_2 . Таким образом, в качестве результата приходится выбирать либо форму $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega'_2, \omega'_3)$, либо эквивалентную ей триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, \omega'_2, 0)$. Для того чтобы исключить неоднозначность, будем всегда выбирать первый вариант, то есть триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega'_2, \omega'_3)$, при этом параметр p в преобразовании (16) есть действительный положительный корень кубического уравнения

$$w_1 p^3 + 3w_2 p + 2w_3 = 0. \quad (25)$$

Остается рассмотреть случаи, когда величины обращаются в нуль по отдельности или обе одновременно.

3). Если

$$w_1 = 0, \quad \text{sign}(w_2) = -\text{sign}(w_3) \neq 0, \quad (26)$$

то триформа может быть приведена с помощью преобразования (16) к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega'_2, \omega'_3)$, причем $\omega'_2 \neq 0$ и $\omega'_3 \neq 0$, а

$$p = -\frac{2w_3}{3w_2}. \quad (27)$$

4). Если

$$w_1 = 0, \quad \text{sign}(w_2) = \text{sign}(w_3) \neq 0, \quad (28)$$

то триформа с помощью преобразования (16) может быть приведена к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, \omega'_2, 0)$, причем ω'_1 и $\omega'_2 \neq 0$, а

$$p = \frac{4w_3}{3w_2}. \quad (29)$$

5). Если

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 \neq 0. \quad (30)$$

то

$$\omega'_1 = 2uw_3, \quad \omega'_2 = -3uw_3, \quad \omega'_3 = 12uw_3. \quad (31)$$

В этом случае триформа имеет вид $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, -\frac{3}{2}\omega_1, 6\omega_1)$, преобразование координат (16) переводит ее в $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, -\frac{3}{2}\omega'_1, 6\omega'_1)$ с $\omega'_1 \neq 0$, то есть преобразование (16) в данном случае сводится общемасштабному преобразованию.

6). Если

$$\text{sign}(w_1) = -\text{sign}(w_2) \neq 0, \quad w_3 = 0, \quad (32)$$

то преобразование (16) с параметром

$$p = \sqrt{-\frac{3w_2}{w_1}} \quad (33)$$

переводит исходную триформу в триформу вида $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega'_2, \omega'_3)$, причем $\omega'_2 \neq 0$, $\omega'_3 \neq 0$.

7). Если

$$\text{sign}(w_1) = \text{sign}(w_2) \neq 0, \quad w_3 = 0, \quad (34)$$

то триформа приводится линейным преобразованием (16) с

$$p = \sqrt{\frac{3w_2}{2w_1}} \quad (35)$$

к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, \omega'_2, 0)$, причем $\omega'_1 \neq 0$, $\omega'_2 \neq 0$.

8). Если

$$w_1 \neq 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \quad (36)$$

то

$$\omega'_1 = uw_1p^3, \quad \omega'_2 = 3uw_1p^3, \quad \omega'_3 = 6uw_1p^3, \quad (37)$$

и значит в этом случае триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 3\omega_1, 6\omega_1)$ преобразованием (16) переводится в триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, 3\omega'_1, 6\omega'_1)$, где $\text{sign}(\omega'_1) = \text{sign}(\omega_1)$. Таким образом, преобразование (16) в данном случае сводится к умножению исходной триформы на действительное положительное число, то есть к общему масштабному преобразованию. Эту форму мы исключим при построении тричисел, так как она является вырожденной (8).

9). Осталось рассмотреть вариант

$$w_1 = 0, \quad w_2 \neq 0, \quad w_3 = 0, \quad (38)$$

тогда

$$\omega'_1 = 3 \cdot u \cdot w_2 \cdot p = \frac{w_2}{9} = \omega_1, \quad \omega'_2 = \omega_2 = 0, \quad \omega'_3 = -9 \cdot u \cdot w_2 \cdot p = -\frac{w_2}{3} = -3\omega_1, \quad (39)$$

то есть триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 0, -3\omega_1)$ переводится преобразованием (16) с произвольным p в триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, 0, -3\omega'_1)$. Таким образом, в данном случае преобразование (16) не меняет параметры триформы, то есть это преобразование является преобразованием симметрии триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 0, -3\omega_1)$.

Дальнейшее упрощение триформы можно произвести, умножая ее на произвольное действительное число не равное нулю. Такая операция сводится к двум: изменению знака сразу у всех координат и общему масштабному преобразованию. В результате, один из коэффициентов $\omega'_i \neq 0$ триформы можно сделать равным единице, то есть произвести нормировку формы. Предложенная схема 1) – 9) вместе с нормировкой не противоречит выделению в качестве канонических трех базисных форм и введению понятия вырожденности, так как данный алгоритм переводит базисные формы (5) – (7) в те же самые базисные формы, а вырожденную триформу – в вырожденную.

Итак, в результате мы пришли к следующему утверждению. Изучение триформы общего вида $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ сводится к изучению 8-ми канонических триформ:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) \equiv \Omega_1(x_1, x_2, x_3); \quad (40)$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) \equiv \Omega_2(x_1, x_2, x_3); \quad (41)$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3); \quad (42)$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6); \quad (43)$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 3, 6) \equiv (x_1 + x_2 + x_3)^3, \quad (\text{вырожденная}); \quad (44)$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, \omega, 0), \quad \omega \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; 1]; \quad (45)$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, \omega), \quad \omega \neq 0; \quad (46)$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, \omega), \quad \omega \neq 0. \quad (47)$$

Условие на параметр ω (45) для 6-ой канонической триформы необходимо, чтобы исключить неопределенность, которая существует при рассмотрении варианта 2) значений параметров триформы общего вида. Условие $\omega \neq 0$ для 6-ой, 7-ой и 8-мой канонических триформ необходимо, чтобы исключить базисные триформы, которые уже причислены к каноническим.

3. Триформы, которые могут соответствовать тричислам

Вместо того, чтобы непосредственно искать линейные преобразования, оставляющие канонические триформы 1 (40) – 8 (47) неизменными, будем искать бесконечно близкие к тождественному линейные преобразования. Эта задача сводится к нахождению соответствующих генераторов.

1. Не существует непрерывной двухпараметрической абелевой группы Ли, которая бы оставляла вид 1-ой канонической триформы (40) неизменным.

2. Не существует непрерывной двухпараметрической абелевой группы Ли, которая бы оставляла вид 2-ой канонической триформы (41) неизменным.

3. Третья каноническая триформа (42) имеет двухпараметрическую абелеву группу симметрии (группу Ли) с генераторами

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

4. Четвертая каноническая триформа (43) имеет трехпараметрическую неабелеву группу Ли в качестве группы симметрии с генераторами

$$\hat{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Необходимо проверить, имеется ли в этой группе двухпараметрическая абелева подгруппа.

5. Пятая каноническая триформа (44) является вырожденной, поэтому она исключается при поиске соответствующих ей тричисел.

6. Ни при каких разрешенных значениях параметра (45) 6-я каноническая триформа не имеет двухпараметрической группы Ли, но при $\omega = 1$ эта триформа имеет однопараметрическую группу симметрии. Таким образом, 6-я каноническая триформа не может соответствовать тричислам.

7. Только при значении параметра $\omega = -3$ 7-я каноническая триформа (46) имеет двухпараметрическую абелеву группу Ли в качестве группы симметрии с генераторами

$$\hat{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

причем преобразование (16) с генератором, равным сумме генераторов (50), входит в эту группу симметрии, поэтому триформу $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$ следует отнести к специальным случаям.

8. Восьмая каноническая триформа (47) при $\omega = 3$ имеет однопараметрическую группу симметрии, которая не может соответствовать тричислам, а при $\omega = 2$ – двухпараметрическую абелеву группу симметрии с генераторами

$$\hat{a}_8 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Итак, среди канонических триформ найдены такие четыре невырожденные, которые могут соответствовать тричислам. Сохранив нумерацию канонических триформ, выпишем эти четыре формы, указав генераторы группы симметрии им соответствующей:

$$\begin{aligned} 1. & \quad - - - - - - - - ; \\ 2. & \quad - - - - - - - - ; \\ 3. & \quad \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3), \quad \{\hat{a}_1, \hat{a}_2\}; \end{aligned} \quad (52)$$

$$4. \quad \Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6) \quad \{\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5\}; \quad (53)$$

$$\begin{aligned} 5. & \quad - - - - - - - - ; \\ 6. & \quad - - - - - - - - ; \\ 7. & \quad \Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3), \quad \{\hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}\}; \end{aligned} \quad (54)$$

$$8. \quad \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2), \quad \{\hat{a}_{14}, \hat{a}_{15}\}; \quad (55)$$

4. Триформы $\Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ и тричисла

Рассмотрим триформу $\Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, которая, как мы выяснили, обладает двухпараметрической непрерывной группой Ли – группой симметрии с генераторами $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ (48). Сопоставив единичной матрице и генераторам $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ базисные элементы $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$ искомой системы тричисел, получим для них следующую таблицу умножения:

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	$\frac{1}{3}(2 - 2e_2 + e_3)$	$\frac{1}{3}(1 - e_2 - e_3)$
e_3	e_3	$\frac{1}{3}(1 - e_2 - e_3)$	$\frac{1}{3}(2 + e_2 - 2e_3)$

Таб. 1.

Тричисла, которые могут соответствовать триформе $\Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, найдены. Осталось проверить существуют ли такая система линейных координат, в которых куб нормы найденных тричисел есть эта триформа $\Omega_3(x_1, x_2, x_3)$.

Из вида генераторов (48), очевидно, что полученная система тричисел изоморфна алгебре диагональных матриц 3×3 , поэтому такие числа обозначим H_3 , а линейные координаты x_1, x_2, x_3 удобно ввести в базисе

$$\psi_1 = \frac{1}{3}(1 - e_2 - e_3), \quad \psi_2 = \frac{1}{3}(1 + 2e_2 - e_3), \quad \psi_3 = \frac{1}{3}(1 - e_2 + 2e_3) \quad (56)$$

с таблицей умножения

$\times$	ψ_1	ψ_2	ψ_3
ψ_1	ψ_1	0	0
ψ_2	0	ψ_2	0
ψ_3	0	0	ψ_3

Таб. 2.

Тогда

$$x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3) \quad (57)$$

или

$$x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = \rho \cdot \exp[(-\alpha - \beta) \cdot \psi_1 + \exp(\alpha) \cdot \psi_2 + \exp(\beta) \cdot \psi_3] \quad (58)$$

Таким образом, экспоненциальное представление чисел H_3 возможно, если координаты $x_i > 0$. Если из координатных трех соотношений (58) исключить углы α, β , то получим выражение для куба нормы

$$\rho^3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (59)$$

Это не единственная возможность симметричного введения линейных координат. Для чисел H_3 существует базис, содержащий две гиперболические единицы,

$$1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad j = -\psi_1 - \psi_2 + \psi_3, \quad k = -\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 \quad (60)$$

$\times$	1	j	k
1	1	j	k
j	j	1	$-1 + j + k$
k	k	$-1 + j + k$	1

Таб. 3.

Если ввести линейные координаты в этом базисе, то куб нормы чисел H_3 в таких координатах

$$\rho^3 = \Omega(x, x, x; 1, -1, 2) \quad (61)$$

Справа в формуле (61) стоит неканоническая форма. Преобразованием (16) с $p = 4$, изменением знака одновременно у всех координат и общим масштабным преобразованием триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -1, 2)$ переводится в 8-ю каноническую триформу $\Omega(x, x, x; 0, 1, 2)$. Линейные координаты x_i для чисел H_3 можно ввести и так

$$(x_2 + x_3)\psi_1 + (x_1 + x_3)\psi_2 + (x_1 + x_2)\psi_3 = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \quad (62)$$

тогда

$$\rho^3 = \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2) \quad (63)$$

– это опять 8-я каноническая форма (55).

Таким образом, триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -1, 2)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ соответствуют одним и тем же тричислам H_3 , которые изоморфны алгебре квадратных диагональных матриц 3×3 . Хотя триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ нельзя получить одну из другой непрерывным линейным преобразованием (16) вместе с общемасштабным преобразованием и возможно изменением знака у всех трех координат, эти формы все же связаны дискретным линейным преобразованием координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

5. Триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{2}{3}, 6)$

Рассмотрим генераторы $\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5$ линейных преобразований, которые оставляют триформу $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6)$ неизменной. Эти генераторы не коммутируют между

собой. Для того чтобы выделить два коммутирующих генератора, образуем следующие линейные комбинации этих операторов:

$$\hat{E}_0 = \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5, \quad \hat{E}_2 = -\hat{a}_3 + \hat{a}_4, \quad \hat{E}_3 = -\hat{a}_3 + \hat{a}_5. \quad (65)$$

Для них справедлива таблица умножения

$\times$	$\hat{E}_0$	$\hat{E}_2$	$\hat{E}_3$
$\hat{E}_0$	$3\hat{E}_0$	$3\hat{E}_2$	$3\hat{E}_3$
$\hat{E}_2$	0	0	0
$\hat{E}_3$	0	0	0

Таб. 4.

Таким образом, в качестве пары коммутирующих генераторов можно взять $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ или произвольные две линейно независимые их линейные комбинации. Используя Таб. 4, можно показать, что кроме $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ и их линейных комбинаций, не существует линейных комбинаций трех операторов $\hat{E}_0, \hat{E}_2, \hat{E}_3$, то есть операторов $\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5$, коммутирующих между собой. Сопоставим $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ символьные элементы e_2, e_3 гиперкомплексного числа, тогда для базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$, получим таблицу Кэли

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

Таб. 6.

Тричисла с такой таблицей умножения символьных единиц естественно назвать дуальными и обозначить D_3 . Для таких тричисел

$$\rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3) = \rho \cdot (1 + \alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3). \quad (66)$$

Единственная, если не считать порядок нумерации, возможность ввести симметричным образом линейные координаты x_i – это

$$X = x_1 + x_2 \cdot (1 + e_2) + x_3 \cdot (1 + e_3), \quad (67)$$

тогда

$$\rho^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 \equiv \Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 3, 6) \quad (68)$$

– вырожденная триформа.

Таким образом, с триформой $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6)$ нельзя связать тричисла, куб нормы которых был бы равен этой триформе.

6. Триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$

Генераторы $\hat{a}_6, \hat{a}_7$ группы симметрии, относительно которой остается неизменной форма $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$, обладают следующими правилами умножения:

$$\hat{a}_6 \cdot \hat{a}_6 = \hat{a}_7, \quad \hat{a}_7 \cdot \hat{a}_7 = \hat{a}_6, \quad \hat{a}_6 \cdot \hat{a}_7 = \hat{a}_7 \cdot \hat{a}_6 = 1. \quad (69)$$

Сопоставив им символьные элементы e_2, e_3 системы тричисел, получим для последних и единичного элемента таблицу Кэли

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	1
e_3	e_3	1	e_2

Таб. 7.

Гиперкомплексные ассоциативно-коммутативные трехмерные числа с законом умножения базисных элементов, приведенных в Таб. 7, будем обозначать C_3 . Используя эту таблицу Кэли, получим формулу

$$\begin{aligned} \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3) = & \frac{1}{3} e^{\alpha+\beta} \{1 + 2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)} \cdot \cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta)]\} + \\ & + \frac{1}{3} e^{\alpha+\beta} \{1 - 2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)} \cdot \cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta) + \frac{\pi}{3}]\} \cdot e_2 + \\ & + \frac{1}{3} e^{\alpha+\beta} \{1 - 2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)} \cdot \cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta) - \frac{\pi}{3}]\} \cdot e_3. \end{aligned} \quad (70)$$

Введем координатную систему x_1, x_2, x_3 в том же базисе следующим образом:

$$x_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 = \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3). \quad (71)$$

Используя формулу (70) и три координатных соотношения (71), получим два соотношения

$$x_1 + x_2 + x_3 = \rho \cdot e^{(\alpha+\beta)}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{3} \rho^2 \cdot e^{2(\alpha+\beta)} \{1 + 2 \cdot e^{-3(\alpha+\beta)}\}, \quad (72)$$

которые уже не содержат разности параметров $(\alpha - \beta)$. Исключая из соотношений (72) сумму параметров $(\alpha + \beta)$, имеем

$$\rho^3 = \frac{3}{2} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^3 \equiv \Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3). \quad (73)$$

Таким образом, для тричисел C_3 куб модуля есть триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$.

Хотя для чисел C_3 из символьных элементов и единицы можно составить линейную комбинацию

$$j = \frac{1}{3} [1 - 2(e_2 + e_3)], \quad j^2 = 1, \quad (74)$$

которая является гиперболической единицей ($j^2 = 1$), то есть числа C_3 – это обобщение гиперболических (двойных) чисел; и нельзя составить линейную комбинацию, которая бы являлась эллиптической единицей ($i^2 = -1$); в каком-то смысле тричисла C_3 есть обобщение и комплексных чисел, для которых символьная единица – решение алгебраического уравнения $x^2 = -1$. Для чисел C_3 базисные элементы 1, e_2, e_3 , являются корнями кубического уравнения $x^3 = 1$, или с измененным знаком $-1, -e_2, -e_3$ – корнями уравнения $x^3 = -1$. Так как, с одной стороны, в комплексных числах уравнение $x^3 = 1$ имеет три корня

$$1, \quad -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (75)$$

из которых можно выделить мнимую единицу как линейную их комбинацию; а, с другой стороны, формулы (70) содержат тригонометрические функции, поэтому (и именно в этом смысле) числа C_3 можно считать обобщением на трехмерный случай не только двойных (гиперболических), но и комплексных чисел.

6. Заключение

Из всего множества систем ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел требование существования такого базиса, в котором куб нормы тричисла, если она (норма) существует, есть невырожденная триформа, выделяет с точностью до изоморфизма лишь две системы гиперкомплексных трехмерных чисел: C_3 и H_3 . Числам C_3 соответствует каноническая триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$ (см. раздел 6 настоящей работы), а тричислам H_3 соответствуют канонические триформы $\Omega_3(x_1, x_2, x_3), \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ (см. раздел 4 настоящей работы).

Полученный результат позволяет надеяться, что и для n -чисел с $n > 3$, требование существования такого базиса, в котором n -я степень нормы (если норма существует) n -числа равнялась n -форме координат в этом базисе, выделит узкий класс гиперкомплексных чисел, которые будут являться обобщением комплексных и гиперболических чисел (бичисел). Есть основания полагать, что именно такие гиперкомплексные числа в первую очередь найдут применение в математике и физике, когда задачи в той или иной мере симметричны относительно перестановки координат или некоторого преобразования, "смешивающего" координаты, но оставляющего их, в каком-то смысле, равноправными.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНЫХ «КВАТЕРНИОНОВ»

А. В. Смирнов

DULY Research Inc., USA

Рассмотрена коммутативная алгебра бикомплексных чисел с метрикой $(+ - - +)$. Подобно обычным комплексным числам, эта алгебра 4-го ранга обладает свойствами деления, сопряжения, извлечения корня и факторизации наряду с прямым аналогом формулы Эйлера. Показано, что вращения представимы в этой алгебре без нарушения коммутативности. Наличие делителей нуля неразрывно связано с релятивистским интервалом.

I. Введение

Объекты типа кватернионов были предложены ещё в 18 веке Эйлером и Гауссом, а классическое оформление кватернионы получили в 1843 г. благодаря У.Р. Гамильтону как векторное расширение над полем комплексных чисел [1, 2, 3, 4]. Их векторная часть представляет из себя обобщённую мнимую часть и образует трёхмерное кватернион-векторное пространство. Д. К. Максвелл сформулировал электродинамику именно на языке кватернионов, но они так и не вошли в стандартный математический аппарат XX-го века. Лишь теперь они включены в основные математические пакеты MathCADTM и MathematicaTM, обнаружив интересные применения в вычислительной математике (например, обработка изображений) и многих областях физики, включая механику и специальную теорию относительности [4], теории элементарных частиц и астрофизику, теорию поля и оптику. В физике пучков заряженных частиц кватернионы эффективны, например, в решении проблемы транспортировки спина [5, 6]. Очевидно, что несмотря на изящность дифференциальной геометрии кватернионов, отсутствие коммутативности не допускает обобщения их в область теории функций гиперкомплексных переменных. Для рассматриваемых здесь чисел попытка такого расширения впервые была сделана в Теории функций пространственного комплексного переменного (ТФПКП, см. [7, 22]).

В аналитических исследованиях и моделях мы сталкиваемся нередко с выражениями, содержащими как комплексные числа, так и 2×2 матрицы. Матричное представление, однако, может иметь и более удобные альтернативы. Квантовая механика, к примеру, может быть элегантно сформулирована с помощью геометрической алгебры. В других ситуациях нередко более удобно иметь дело с преобразованиями полностью скалярных выражений, чем с традиционными кватернионами – носителями векторных свойств. Особенно это актуально в сочетании с функциями комплексного переменного. Соответствующие практические случаи включают, например, анализ собственных мод некоторых граничных задач [8, 9], транспортировку пучка заряженных частиц и его динамику в ускорителях [10] и электронных приборах [11, 12]. Можно предположить, что пространство скалярных или псевдоскалярных чисел может неявно включать (инкапсулировать) и элементарные матричные преобразования через расширенные свойства "скалярных кватернионов". Это пространство суть объединение двух независимых полей обычных комплексных чисел (ассоциированных, как правило, с временной и пространственными координатами).

Л. Левин одним из первых [9] практически применил скалярные бикомплексные объекты для анализа электромагнитных волн, распространяющихся в различных

волноводных структурах: с диэлектриком и намагниченным ферритом, поверхностной анизотропией и гофрами. Он ввёл феноменологически дополнительную мнимую единицу (см. (1.1)), чтобы различить комплексные числа, отвечающие за разные свойства временной переменной (и/либо продольной, фазовой координаты) – с одной стороны, и пространственных (либо поперечных/угловых) переменных – с другой стороны. Соответствующие мнимые единицы образуют коммутативную группу:

$$i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji \neq -1 \text{ или } \sqrt{-1}. \quad (1.1)$$

Используя этот подход, Левин получил компактное скалярное дисперсионное уравнение для нормальных мод с четырёх-компонентными комплексными числами. Дальнейшее развитие этого метода [13, 14, 15] позволило строго охарактеризовать самосогласованную систему, в которой пучок взаимодействует с замедляющей структурой и соленоидальным полем. Было показано [13], что обычный матричный подход даёт эквивалентное решение системы дисперсионных уравнений и приводит в конечном итоге к точно тем же значениям инкремента и порогового тока регенеративной поперечной неустойчивости "обрыва пучка". Однако использование скалярных кватернионов значительно упрощает выкладки и даёт гораздо более прозрачное физическое решение. Например, коллективная частота $\tilde{\nu}$, найденная алгебраически из единственного гиперкомплексного дисперсионного уравнения, имеет чёткий смысл своих компонентов: $Re_i Re_j \tilde{\nu}$ – расстройка коллективной частоты по отношению собственной частоте; $Im_i Im_j \tilde{\nu}$ – угловая скорость вращения вырожденной коллективной дипольной моды; а $Im_i Re_j \tilde{\nu} \pm Im_j Re_i \tilde{\nu}$ дают инкременты право- и левополяризованных коллективных мод гиромангнитной неустойчивости. Заметим, в работе [10] отсутствие дополнительной мнимой единицы привело к некорректному смешиванию между различными степенями свободы и ошибочному результату для порогового тока поперечной неустойчивости.

Коммутативная алгебра для соответствующих гиперкомплексных чисел была введена в [13] для частных приложений физики пучков в ускорителях и в [7, 22] для более широкого круга физических задач. Она была определена как замкнутое обобщение над различными i - и j - полями комплексных чисел, которые образуют коммутативную алгебру 4-го ранга с делением и основными атрибутами обычных комплексных чисел. В этой статье мы приводим основные свойства и простейшее аналитическое продолжение. В рамках данного изложения (и только) подразумеваем эквивалентными такие термины как: «четырёх-компонентное», «гиперкомплексное», «бикомплексное» число и «скалярный кватернион». В алгебре многообразий рассматриваемые числа можно отнести к бикомплексной разновидности поличисел.

II. Элементарные свойства коммутативной алгебры четырёх-компонентных чисел

Выпишем четырёх-компонентное комплексное число, которое выглядит как обычный кватернион (но не является им):

$$\tilde{a} = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3, \quad (2.1)$$

где компоненты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вещественны; i, j – независимые мнимые единицы, и ij – гиперкомплексная (составная) единица из (1.1).

Мы рассматриваем в данной работе гиперкомплексные числа (2.1) как обладающие коммутативностью и ассоциативностью, дистрибутивностью и замкнутостью по отношению к умножению и делению.

В частности, произведение двух простых комплексных чисел из различных i - и j -пространств образует "скалярный кватернион", представляющий трёхмерное пространство как частный случай четырёхмерного гиперпространства (при $\left\| \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \right\| = 0$):

$$(a + ib) \cdot (c + jd) = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3, \quad \text{где } \alpha_0 = ac, \alpha_1 = bc, \alpha_2 = ad, \alpha_3 = bd. \quad (2.2)$$

Можно рассматривать пространства обычных комплексных чисел как двумерные проекции пространства гиперкомплексных чисел. Поэтому естественно переопределить операторы реальной и мнимой частей следующим образом:

$$Re_i \tilde{a} = \alpha_0 + j\alpha_2, \quad Im_i \tilde{a} = \alpha_1 + j\alpha_3, \quad (2.3)$$

где индексы i и j обозначают соответствующее пространство-проекцию как область действия соответствующей операции.

Рассмотрим теперь матрицы Паули $\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ как операторы, действующие, например, только в j -пространстве. Тогда, полагая $\tilde{a}$ есть матрица-столбец $\begin{pmatrix} Re_j \tilde{a} \\ Im_j \tilde{a} \end{pmatrix}$, мы можем перейти к алгебраической форме, используя следующие правила подстановки:

$$\hat{\sigma}_1 \tilde{a} \rightarrow j \tilde{a}^{*j}, \quad \hat{\sigma}_2 \tilde{a} \rightarrow -\tilde{a} \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_3 \tilde{a} \rightarrow \tilde{a}^{*j}, \quad (2.4)$$

т. е. матричные операторы могут быть представлены формально как $\hat{\sigma}_1 \rightarrow j()$, $\hat{\sigma}_2 \rightarrow -1$, и $\hat{\sigma}_3 \rightarrow ()^{*j}$.

Подобно алгебре спинных матриц из (2.4) мы имеем аналогичное соотношение:

$$\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3 \tilde{a} = \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \tilde{a} = -j \hat{\sigma}_3 \tilde{a}; \quad \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3 \tilde{a} = -j \hat{\sigma}_1 \tilde{a}; \quad \hat{\sigma}_3 \hat{\sigma}_1 \tilde{a} = -j \hat{\sigma}_2 \tilde{a}.$$

Удобство заключается в том, что операторы в такой записи коммутативны. Таким образом, произвольный матричный 2×2 оператор $\hat{U}$ в комплексном (j -) пространстве может быть представлен, например, в таком виде:

$$\hat{U} \equiv \rho \hat{E} - j(\lambda \hat{\sigma}_1 + \mu \hat{\sigma}_2 + \nu \hat{\sigma}_3) \rightarrow \rho + j\mu + (\lambda - j\nu)()^{*j},$$

где $\hat{E}$ – единичная 2×2 матрица, $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \det \hat{U}$, и ρ, λ, μ, ν – вещественные числа, описывающие связанный с j -пространством оператор $\hat{U}$.

Остаётся обобщить действие матричного 2×2 оператора вместе с соответствующим представлением вращений на всё i j - гиперпространство. Мы можем заменить формально комплексную единицу j на i в $\hat{U}$ и $\hat{\sigma}_2$ (т. е. $\hat{\sigma}_2 \rightarrow ij$):

$$\hat{U} = \rho \hat{E} - i(\lambda \hat{\sigma}_1 + \mu \hat{\sigma}_2 + \nu \hat{\sigma}_3) \rightarrow \rho + j\mu - (ij\lambda + i\nu)()^{*j}. \quad (2.5)$$

Если $\hat{U}$ – унимодулярная матрица и $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, то (2.5) представляет вращения в четырёхмерном i, j -пространстве.

Перед тем, как перейти к определению полной длины в этом гиперпространстве, определим частичный детерминант в каждом из пространств-проекций:

$$\det_i \tilde{a} = (Re_i \tilde{a})^2 + (Im_i \tilde{a})^2 = \tilde{a} \cdot \tilde{a}^{i*} \equiv |\tilde{a}|_i^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2j(\alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3). \quad (2.6)$$

Из правила коммутативности (1.1) и определений (2.1, 2.3, 2.6) вытекают следующие очевидные тождества:

$$\begin{aligned}
\tilde{a} \cdot \tilde{b} &= \tilde{b} \cdot \tilde{a}, \\
\operatorname{Re}_i \operatorname{Re}_j \tilde{a} &= \operatorname{Re}_j \operatorname{Re}_i \tilde{a} = \alpha_0 \equiv \operatorname{Re}_{ij} \tilde{a} = \operatorname{Re}_{ji} \tilde{a} \equiv \operatorname{Re} \tilde{a}, \\
\operatorname{Im}_i \operatorname{Re}_j \tilde{a} &= \operatorname{Re}_j \operatorname{Im}_i \tilde{a} = \alpha_1, \\
\operatorname{Im}_i \operatorname{Im}_j \tilde{a} &= \operatorname{Im}_j \operatorname{Im}_i \tilde{a} = \alpha_3 \equiv \operatorname{Im}_{ij} \tilde{a} = \operatorname{Im}_{ji} \tilde{a} \equiv \operatorname{Im} \tilde{a}, \\
(\tilde{a}^{*i})^{*j} &\equiv \tilde{a}^{*i*j} = \tilde{a}^{*j*i} \equiv (\tilde{a}^{*j})^{*i} = \alpha_0 - i\alpha_1 - j\alpha_2 + ij\alpha_3, \\
\tilde{a} + \tilde{a}^{*i} &= 2\operatorname{Re}_i \tilde{a}, \tilde{a} - \tilde{a}^{*i} = 2i\operatorname{Im}_i \operatorname{Re}_j \tilde{a} + 2j\operatorname{Re}_i \operatorname{Im}_j \operatorname{Re}_i \tilde{a}, \\
(\tilde{a} + \tilde{a}^{*i*j}) + C.C._i &= (\tilde{a} + \tilde{a}^{*i*j}) + C.C._j = 4\operatorname{Re}_i \operatorname{Re}_j \tilde{a} \equiv 4\operatorname{Re} \tilde{a}, \\
\det_i \det_j \tilde{a} &\equiv \left| |\tilde{a}|_j^2 \right|_i^2 = \left| |\tilde{a}|_i^2 \right|_j^2 \equiv \det_j \det_i \tilde{a} \equiv \|\tilde{a}\|^4.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Приведённые до сих пор правила и соотношения описывают простое скалярное объединение-суперпозицию двух полей комплексных чисел. Эти соотношения могут оказаться полезными в некоторых приложениях, где нужна удобная алгебраическая форма волноводов [9], кильватерных полей [8], поляриметрии и аналитическом представлении магнитостатических полей [16]). Однако, чтобы работать с такими формами, надо построить полную алгебру гиперкомплексного пространства, замкнутую по отношению к операциям умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня.

Для этого мы постулируем дополнительные к (1.1) правила, которые в совокупности дают следующую таблицу умножения базовых единиц:

1	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	k	-1	$-i$
k	$-j$	$-i$	1

Здесь $k \equiv ij$ есть гиперкомплексная единица, и, как легко видеть, метрика есть $(+ - - +)$.

Остальные свойства «скалярных кватернионов» и соответствующие функциональные аналитические продолжения могут быть выведены подобно теории комплексных чисел. Например, нетрудно видеть, что:

$$1/ij = ij; \quad \sqrt{1} = \pm 1, \pm ij; \quad ij = \exp(\pm(i+j)\pi/2) \tag{2.9}$$

Т. о. в этой алгебре 4-го ранга квадратный корень имеет четыре значения. Другой пример – правило умножения гиперкомплексных чисел $\tilde{a} = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3$ и $\tilde{b} = \beta_0 + i\beta_1 + j\beta_2 + ij\beta_3$:

$$\begin{aligned}
\tilde{a} \cdot \tilde{b} &= \alpha_0\beta_0 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + i(\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3) \\
&+ j(\alpha_2\beta_0 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + ij(\alpha_3\beta_0 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_0\beta_3).
\end{aligned}$$

III. Сопряжение и абсолютное значение, делители нуля и интервал

Полное сопряжение можно определить через частичные сопряжения:

$$\tilde{a}^* = \tilde{a}^{*i} \tilde{a}^{*j} \tilde{a}^{*i*j} \quad (3.1)$$

Приведём несколько полезных свойств сопряжения, вытекающих из (2.8):

$$\begin{aligned} \tilde{a} + \tilde{a}^{*i} \tilde{a}^{*j} + \tilde{a}^{*i*j} &= 4\operatorname{Re}_i \operatorname{Re}_j \tilde{a} \\ \tilde{a}^{*i*j} \tilde{a} &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2ij(\alpha_3\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

и, в общем случае,

$$\tilde{a} + \tilde{a}^{*i*j} \neq 2\operatorname{Re} \tilde{a}, \quad \tilde{a} + \tilde{a}^* \neq 2\operatorname{Re} \tilde{a}.$$

Естественный способ определить полный детерминант (определитель) через частичные детерминанты (2.6):

$$\begin{aligned} \det \tilde{a} &= \det_i \det_j \tilde{a} \equiv \left| |\tilde{a}|_j^2 \right|_i^2 \equiv \tilde{a} \tilde{a}^{*i} \tilde{a}^{*j} \tilde{a}^{*i*j} = \\ &= \tilde{a} \cdot \tilde{a}^* = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)^2 + 4(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Можно заметить, что определитель (3.3) может обращаться в ноль для некоторых ненулевых компонент α_n . Соответствующие числа являются делителями нуля. Мы имеем дело с такими числами, например, когда $|\alpha_0| = |\alpha_3| \neq 0$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, либо когда $|\alpha_1| = |\alpha_2| \neq 0$ при $\alpha_0 = \alpha_3 = 0$.

В отличие от частичных детерминантов, полные детерминанты вещественны и неотрицательны. Поэтому мы определяем абсолютную величину (или через арифметический корень 4-го порядка):

$$\|\tilde{a}\| \equiv N(\tilde{a}) = \sqrt[4]{\det \tilde{a}} \equiv \sqrt[4]{\tilde{a} \tilde{a}^{*i} \tilde{a}^{*j} \tilde{a}^{*i*j}} = \sqrt[4]{\left| |\tilde{a}|_j^2 \right|_i^2}. \quad (3.4)$$

Заметим, числа $i \pm j$, $1 \pm ij$ имеют нулевую норму (или гипердлину). Как мы увидим ниже, числа $2\pi(i \pm j)$ и $\pi(i \pm j)$ являются гиперпериодами для гиперболических функций $\cosh(\tilde{x})$, $\sinh(\tilde{x})$ и $\tanh(\tilde{x})$, $\cotanh(\tilde{x})$, так же как $2\pi(1 \pm ij)$ и $\pi(1 \pm ij)$ являются гиперпериодами для тригонометрических функций $\cos(\tilde{x})$, $\sin(\tilde{x})$ и $\tan(\tilde{x})$, $\cotan(\tilde{x})$ соответственно.

Легко видеть, что (3.4, 3.3) совпадает с выражениями для нормы, полученными в [7, 22], как для полиномиального, так и для би-экспоненциального представления бикомплекса (в полярных системах координат для каждого из пространств-проекций). Интересно, что для «трёхмерного» бикомплекса (2.2) мы имеем длину: $\|\tilde{a}\| = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, которая сводится к евклидовой форме благодаря соотношению $\alpha_0\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2$. Действительно, чтобы для обычного вектора $\{x, y, z\}$ получить $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, соответствующие компоненты бикомплекса можно найти, например, так:

$$\alpha_0 = x, \quad \alpha_1 = y, \quad \alpha_2 = xz/\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha_3 = yz/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Полный детерминант, введённый выше, можно использовать непосредственно для отыскания обратной величины бикомплексного числа с ненулевой нормой:

$$\tilde{a}^{-1} \equiv \frac{1}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}^*}{\det \tilde{a}}. \quad (3.5)$$

Можно получить (3.5) и через последовательные преобразования в пространствах-проекциях, применяя соответствующие правила, приведённые выше:

$$\frac{1}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}^{*j}}{|\tilde{a}|_j^2} \equiv \frac{\tilde{a}^{*i}}{|\tilde{a}|_i^2} \equiv \frac{\tilde{a}^{*i}}{\tilde{a} \cdot \tilde{a}^{*i}} = \frac{\tilde{a}^{*i} \cdot (\tilde{a}\tilde{a}^{*i})^{*j}}{\tilde{a}\tilde{a}^{*i} \cdot (\tilde{a}\tilde{a}^{*i})^{*j}} = \frac{\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}}{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}} = \frac{\tilde{a}^*}{\|\tilde{a}\|^4}.$$

Обращённые делители нуля (гипернули) можно интерпретировать как гипербесконечности ij -алгебры.

Нетрудно проверить, что норма (определитель) произведения равна произведению норм (определителей):

$$\|\tilde{a} \cdot \tilde{b}\| = \|\tilde{a}\| \cdot \|\tilde{b}\|, \quad \det_{i,j} \tilde{a}\tilde{b} = \det_{i,j} \tilde{a} \det_{i,j} \tilde{b}.$$

В отличие от комплексных чисел и обычных модуль гиперкомплексного числа может быть, однако, и меньше одной из его компонент. Наряду с наличием делителей нуля это суть те особенности, которые делают неприменимой теорему Фробениуса [[17], [22]] для данной метрики.

Покажем, что интервал между двумя событиями подобен норме бикомплекса. Для биквадрата интервала имеем: $dS^4 = c^4 dt^4 + dl^4 - 2c^2 dt^2 dl^2$. С другой стороны, детерминант (3.3) имеет вид:

$$\det \tilde{a} = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2 + 4(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2 - 2(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)(\alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

Доопределим равенство $\det \tilde{a} = dS^4$ с помощью дополнительного условия:

$$c^2 dt^2 dl^2 = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)(\alpha_2^2 + \alpha_3^2). \quad (3.6)$$

Система этих двух уравнений сводится к обычному квадратному уравнению в области действительных чисел:

$$T^2 - \left((\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2 + 4(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2 \right) T + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2 = 0,$$

решения которого всегда существуют и равны $T_1 = c^4 dt^4$, $T_2 = dl^4$, так как детерминант уравнения

$$D = \left((\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 - (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2 \right)^2 + 4(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2 \left((\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2 + 4(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2 \right)$$

всегда положителен.

Таким образом, норму бикомплексного числа всегда можно представить в виде модуля релятивистского интервала. В важном частном случае, когда $\alpha_2 = 0 = \alpha_1$, имеем

$$|cdt| = |\alpha_0|, \quad |dl| = |\alpha_3| \quad (\text{см. ниже (4.3)}).$$

IV. Формула Эйлера, факторизация и извлечение корня

Перед тем, как определить извлечение корня для произвольного бикомплекса, рассмотрим два частных случая.

Первый случай относится к произведению двух комплексных чисел $a + ib$ и $c + jd$ (см. (2.2)). Этот простой случай соответствует матричному 2×2 оператору (либо вращению), применённому к «плоскому» вектору (т. е. обычному комплексному числу), принадлежащему к i -пространству ($Im_j = 0$). Действительно, из (3.3) и (2.2)

мы имеем $\|\tilde{a}\| = \sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2}$, а из (2.5): $\hat{U} \rightarrow \rho - i\nu + j\mu - ij\lambda$, полагая «скалярный кватернион» $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ пропорциональным $\{\rho, -\nu, \mu, -\lambda\}$.

Очевидно, в этом случае корень n -го порядка извлекается тривиально:

$$\sqrt[n]{\tilde{a}} = \sqrt[n]{(a+ib) \cdot (c+jd)} = \sqrt[n]{\|\tilde{a}\|} \exp[(i \arctan b/a + j \arctan d/c + 2\pi(ki + lj))/n], \quad (4.1)$$

где $k, l = \{0, 1, \dots, n-1\}$ – натуральные числа.

Таким образом, период экспоненциальной функции в нашем гиперпространстве есть $2\pi(ki + lj)$. В общем случае это даёт n^2 значений для $\sqrt[n]{\tilde{a}}$.

Другой интересный случай есть гиперкомплексное число, представленное лишь двумя компонентами: $\tilde{A} = a + ijd$. Из (2.8) и разложения Тейлора можно получить основную формулу такого числа:

$$\exp(ij\varphi) = \cosh \varphi + ij \sinh \varphi. \quad (4.2)$$

При $|d/a| \neq 1$ имеет место следующее представление:

$$\tilde{A} = a + ijd = \sqrt{|a^2 - d^2|} \exp\left(ij \operatorname{arctanh} \frac{d}{a}\right) \quad (4.3)$$

Заметим, $\operatorname{arctanh} d/a$ вещественно при $|d/a| < 1$, в противном случае оно комплексно либо в i -, либо в j -пространстве. Аналогично, при $|d/a| > 1$ существует и дополнительное, «симметричное» представление в i, j -пространстве

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= ij(d + ija) = ij\sqrt{|a^2 - d^2|} \exp(ij \operatorname{arctanh} a/d) = \\ &= \sqrt{|a^2 - d^2|} \exp((i + j)\pi/2 + ij \operatorname{arctanh} a/d) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из сравнения (4.4) и (4.3) получаем гиперрасширение известной формулы $\arctan x = (\pi/2) \operatorname{sgn} x - \arctan(1/x)$:

$$\operatorname{arctanh} x = -(i + j) \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(|x| - 1) + \operatorname{arctanh} \frac{1}{x}. \quad (4.5)$$

Таким образом, область значений обратного гиперболического тангенса расширяется естественным образом в гиперпространство при расширении области определения на всю действительную ось.

Используя (4.3), мы можем извлечь корень из простого двух-компонентного числа $\tilde{B} = \tilde{A}^2 = b + ijc$:

$$\sqrt[n]{\tilde{B}} = \sqrt[n]{\|\tilde{B}\|} \exp\left(\frac{2\pi(ki + lj)}{n} + \frac{1}{n} ij \operatorname{arctanh} \left(\frac{c}{b}\right)\right) \quad (4.6)$$

где $|c/b| \neq 1$, и $k, l = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Предположив, что $\tilde{B} = \tilde{A}^2$, можно провести проверочное сравнение для $\tilde{A} \equiv a + ijd$ и $\sqrt{\tilde{B}}$. Подставляя в (4.6) $b = a^2 + d^2$ и $c = 2ad$ мы имеем:

$$\sqrt{\tilde{B}} = \pm |a^2 - d^2| \cdot \left(\cosh \frac{\varphi}{2} + ij \sinh \frac{\varphi}{2} \right), \quad \text{где } \varphi = \operatorname{arctanh} \left(\frac{2ad}{a^2 + d^2} \right). \quad (4.7)$$

Простые преобразования гиперболических функций в (4.7) дают:

$$\sqrt{(a + ijd)^2} = \begin{pmatrix} \pm a \pm ijd \\ \pm d \pm ija \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где различные комбинации знаков дают восемь значений для радикала $\sqrt{\tilde{B}}$. Однако, только четыре из них линейно независимы в смысле (2.9), в то время как остальные получены путём умножения на ij .

В общем случае, когда $\|\tilde{A}\| \neq 0$, мы можем обобщить формулу Эйлера следующим образом:

$$\tilde{A} \equiv a + ib + jc + id = \exp(\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ija_3) \equiv \exp(\tilde{a}) \quad (4.9)$$

где соотношение между $\tilde{A}$ и $\tilde{a}$ может быть найдено из системы:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \ln \|\tilde{A}\|, & \text{и} \\ b_N = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cosh \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sinh \alpha_3, \\ c_N = \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cosh \alpha_3 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sinh \alpha_3 \\ d_N = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cosh \alpha_3 \end{cases} \quad (4.10)$$

где $b_N = b/\|\tilde{A}\|$, $c_N = c/\|\tilde{A}\|$, и $d_N = d/\|\tilde{A}\|$ являются нормализованными компонентами.

Подобно трёхмерному вращению, представленному обычным кватернионом [1], (4.9–4.10) представляют вращение α_1 , α_2 , α_3 в рассматриваемом гиперпространстве. Вырожденный случай (2.2, 4.1) можно интерпретировать по аналогии с подвесом Кардана (когда $\alpha_3 = 0$ в (4.9)).

Заметим, в отличие от обычных комплексных чисел и случаев (2.2, 2.5, 4.1), нормализованные компоненты b_N , c_N , d_N в общем случае могут изменяться по всей вещественной области от $-\infty$ до $+\infty$.

Можно привести (4.10) к алгебраической системе двух неизвестных $\tan \alpha_1$ и $\tan \alpha_2$:

$$\begin{cases} \tan^2 \alpha_1 - \tan^2 \alpha_2 = (b_N^2 - c_N^2) (1 + \tan^2 \alpha_1) (1 + \tan^2 \alpha_2) \\ (b_N \tan^2 \alpha_1 \tan \alpha_2 + c_N \tan \alpha_1 \tan^2 \alpha_2 = d_N) (\tan^2 \alpha_1 - \tan^2 \alpha_2) \end{cases} \quad (4.11)$$

и

$$\alpha_3 = \ln (\sin (\alpha_1 + \alpha_2) / (c_N + b_N)). \quad (4.12)$$

Система (4.11) может быть решена в явном виде, однако полученные нами выражения символьными методами оказались чрезвычайно громоздкими, чтобы привести их здесь.

Чтобы обеспечить в (4.12) $\sin (\alpha_1 + \alpha_2) / (c_N + b_N) > 0$, можно всегда выбрать подходящие решения (4.11) в виде $\alpha_{1,2} + \pi m$ благодаря периодичности тангенса. При $b = -c$ формально мы имеем особенность в (4.12). Однако эта особенность устранима путём комплексного сопряжения (4.9–4.12) (в i - или j -пространстве) и применяя сопряжение снова (в том же пространстве) к результату, полученному в правой части.

Для извлечения корня можно предложить и другой способ разложения «скалярного кватерниона» (2.2) на сомножители:

$$\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ija_3 = (a + ib) \cdot (c + jd) \cdot (e + if), \quad (4.13)$$

где a, b, c, d, e, f вещественны. Положим в (4.13) для простоты, что $\alpha_0 = 1 = a = c = e$. Тогда (4.13) приводит к следующей алгебраической системе:

$$\begin{cases} \alpha_3 = bd(1 - bdf) + f \\ \alpha_2 = d(1 - bdf) - bf \\ \alpha_1 = b(1 - bdf) - df \end{cases} \quad (4.14)$$

Решение b, d, f системы (4.14) выражаются в явном виде гораздо более компактно, чем решение системы (4.11). Можно показать, что решения (4.14) существуют всегда и они вещественны. Для одного из решений существует особенность (напр., при $\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 = 0$), которая является устранимой. Таким образом, ненулевой ($\|\tilde{A}\| \neq 0$) «скалярный кватернион» представим элементарными (двумя комплексными и одним гиперкомплексным) сомножителями и из него можно извлечь корень в соответствии с (4.13), (4.9), либо (4.1), или (4.6).

V. Дифференцируемость

Возьмём гиперкомплексную функцию аргумента $\tilde{z} = x + iy + js + jt$ в общем виде: $\tilde{f}(\tilde{z}) = u(x, y, s, t) + iv(x, y, s, t) + jw(x, y, s, t) + jq(x, y, s, t)$. Условия Коши-Римана выражаются, как известно, $n(n - 1)$ числом уравнений, где n – размерность пространства. Функция $\tilde{f}(\tilde{z})$ дифференцируема, если выполняются следующие двенадцать соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.1)$$

В работе [18] сделана попытка нетривиального обобщения понятия аналитической функции, для которой число условий, аналогичных Коши-Римана, не превышало бы числа функций-компонент. В работе [22] дана изящная и компактная запись условий Коши-Римана в более знакомом виде, где в качестве переменных взяты обобщённые, т.е. не одномерные, а двумерные (обычные комплексные) аргументы из пространств-проекций. В случае, когда эти аргументы представимы в трёхмерном виде (2.2), условия Коши-Римана приобретают наглядный и простой вид, а в четырёхмерном гиперпространстве аргументов условия (5.1) можно свести к шести комплексным уравнениям, используя комплексные экспоненты и комплексные проекции бикомплексных функций [22].

VI. Обсуждение

Среди многообразия ассоциативных алгебр (см., например, [19, 20, 21]) данная ассоциативно-коммутативная алгебра обладает полным наследованием свойств комплексных чисел. Ключевой является возможность построения соответствующей теории функции гиперкомплексного переменного [22]. Делители нуля, обычно понимаемые как мировые линии [20], совпали в этой алгебре с обобщёнными функций, что указывает на фундаментальное значение этих объектов. Делители нуля неразрывно

связаны и с релятивистским интервалом, который, в свою очередь, оказывается абсолютно подобен норме гиперкомплексного числа в полном согласии с классическим выводами СТО.

Таким образом, сделаны серьёзные шаги в разработке бикомплексных чисел, построены основы их дифференциального и интегрального исчисления, отображения по типу конформных, «гиперповерхности» и некоторые аналитические продолжения [22], обобщённо-аналитические функции гиперкомплексного переменного [18].

Применение этого гиперпространства показало эффективность в задачах с выделенным направлением пространственно-временного взаимодействия (особенно квазипериодического), распространения или энергообмена.

Можно ожидать дальнейшего развития и новых приложений этой ij -алгебры и соответствующей ТФПКП в фундаментальной, математической и прикладной физике, вычислительной математике, биофизике и молекулярной химии.

Благодарности

Автор выражает признательность проф. Г. В. Воскресенскому и Э. С. Масунову за критические обсуждения оригинальной работы [13]. Недавние дискуссии с В. И. Елисеевым и Д. Г. Павловым были чрезвычайно плодотворными и полезными.

Литература

- [1] W. R. Hamilton. Lectures in quaternions, Dublin, Hodges & Smith (1853); Elements of quaternions, Chesley Publ. Co. N.Y. (1969).
- [2] Г. Корн и Т. Корн, Справочник по математике. Пер. с англ. под общ. ред. И. Г. Арамановича, Изд-во "Наука", Москва (1974) 832 стр.; Е. А. Каратаев. Кватернионы и трёхмерные повороты, <http://karataev.nm.ru/quat3rot.pdf>
- [3] Hamaker J. P., Understanding radio polarimetry. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 143, (2000) 515-534 ; <http://aanda.u-strasbg.fr:2002/articles/aas/ps/2000/09/h1201.ps.gz>
- [4] А. П. Ефремов. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 1, с. 119, <http://hypercomplex.ru>
- [5] G. H. Hoffstaetter, Successive approximations for charged particle motion, in arXiv: physics/0006008 V 1, 5 Jun 2000
- [6] K. Heinemann and G. H. Hoffstaetter, in Phys. Rev. E, 54 (1996) 4240; Official DESY Report 96-078.
- [7] В. И. Елисеев, А. С. Фохт. Методы теории функций пространственного комплексного переменного. Киев, 1984, 57 с. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики: 84.61).
- [8] A. V. Smirnov, in Nucl. Instrum. & Meth. in Phys. Res., NIM A, 469 (1) (2001) 21
- [9] Л. Левин. Теория волноводов. Пер. с англ. под ред. Вольмана В. И., "Радио и связь", Москва (1981) 312 стр.
- [10] Э. Л. Бурштейн, Г. В. Воскресенский. Ускорители электронов с интенсивными пучками, "Атомиздат", Москва, (1970) 192 стр
- [11] Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев. Лекции по сверхвысокочастотной электронике, Изд-во "Советское радио", Москва, (1973) 400 стр.
- [12] Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман, Разделение частот в теории колебаний и волн, Изд-во "Наука", Москва, (1983) 288 стр.
- [13] А. В. Смирнов. "Исследование эффектов взаимодействия пучка с полями основной и несимметричных волн в неоднородных секциях ЛУЭ на бегущей волне", Диссертация, Московский инженерно-физический институт, МИФИ, Москва (1985) 171 стр.

- [14] A. V. Smirnov et al, in Proc. of Particle Accelerator Conf. (PAC2001), IL., Chicago, 18-22 June(2001) 2293; <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/p01/PAPERS/WPAN087.PDF>
- [15] А. В. Смирнов. Коммутативная алгебра скалярных кватернионов. Владикавказский математический журнал, т. 6, Вып. 2 (2004), http://www.vmj.ru/articles/2004_2_6.pdf (attn.: опечатки!)
- [16] A. V. Smirnov, in Proc. of Particle Accelerator Conference (PAC'97), Vancouver, B.C., Canada, 12–16 May (1997) 894; Nucl. Instrum. and Meth. NIM A349 (1994) 295
- [17] Л. С. Понтрягин. Обобщение чисел, М., Наука, 1986, 120 с
- [18] Г. И. Гарасько. Обобщённо-аналитические функции поличисловой переменной. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 1, с. 83, <http://hypercomplex.ru>
- [19] А. Н. Аверкин. Об аналитической электродинамике. <http://ephir.narod.ru/11..htm>
- [20] Д. Г. Павлов. Всё о коммутативно-ассоциативных числах, <http://hypercomplex.ru>
- [21] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. "Гиперкомплексные числа". М., 1973 г.
- [22] В. И. Елисеев. Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. Издано Центром научно-технического творчества молодежи Алгоритм. - М., НИИТ. 1990, <http://www.maths.ru/>

СКАЛЯРНЫЕ ПОЛИПРОИЗВЕДЕНИЯ. РАЗРЕШИМОСТЬ

С. А. Шишкин, И. С. Шишкин

Рассматривается скалярная форма, являющаяся функцией n векторов. Предлагается следуя Д. Г. Павлову использовать такие формы для построения полискалярных произведений. Строится ассоциированный к обычному вектору объект сложной структуры. Для ассоциированных объектов строится метрический тензор.

Приводятся нетривиальные решения матричного уравнения $X^{p/q} = I$. Решаются уравнения стационарного движения Лагранжевой системы.

§1.

Рассмотрим скалярную форму, определенную на n -индексированных объектах. Так, например, введено скалярное полипроизведение индексированного объекта по Д. Г. Павлову [1]. Другими словами, рассматривается скалярная форма от n векторов вида

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n). \quad (1)$$

Это выражение, записанное с использованием структурных констант $C_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1} i_n}$ формы f , может быть записано в виде

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = C_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1} i_n} \cdot (a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdot a_3^{i_3} \cdot \dots \cdot a_{n-1}^{i_{n-1}} \cdot a_n^{i_n}). \quad (2)$$

Структурные константы должны быть доопределены некоторыми дополнительными условиями, быть может, аксиоматического вида.

Аналогично [1] выполним замену для элементов $a_p^{i_p}$

$$a_p^{i_p} \Rightarrow a_p^{i_p} + b_p^{i_p},$$

тогда получаем выражение вида

$$f(a + b) = C_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1} i_n} \cdot ((a + b)^{i_1} \cdot (a + b)^{i_2} \cdot (a + b)^{i_3} \cdot \dots \cdot (a + b)^{i_{n-1}} \cdot (a + b)^{i_n}). \quad (3)$$

Далее

$$\begin{aligned} f(a + b) = & C_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1} i_n} \cdot (a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot a^{i_3} \cdot \dots \cdot a^{i_{n-1}} \cdot a^{i_n}) + \\ & + C_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1} i_n} \cdot (b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot b^{i_3} \cdot \dots \cdot b^{i_{n-1}} \cdot b^{i_n}) + S(a, b). \end{aligned} \quad (4)$$

Полученная в (4) форма $S(a, b)$, порожденная формой f , совершенно аналогична обычным образом введенным скалярным произведениям в тензорных пространствах, где косинус угла между векторами определяется выражениями типа

$$\cos(A \wedge B) = 1/2[(A + B)^2 - (A, A) - (B, B)]/(A, A)^{1/2}/(B, B)^{1/2}. \quad (5)$$

Образует ассоциированный с b_i объект

$$B^I = \begin{cases} b^i \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot b^{i_3} \\ \dots\dots\dots \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot \dots \cdot b^{i_{n-1}} \end{cases} \quad (6)$$

обозначим его B^I , здесь и далее $\{I\}$ – мультииндекс, а также ассоциированные с a^i и $a^i + b^i$ объекты

$$A^I = \begin{cases} a^i \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot a^{i_3} \\ \dots\dots\dots \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot \dots \cdot a^{i_{n-1}} \end{cases} \quad C^I = \begin{cases} (a^i + b^i) \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \cdot (a^{i_3} + b^{i_3}) \\ \dots\dots\dots \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \cdot \dots \cdot (a^{i_{n-1}} + b^{i_{n-1}}) \end{cases} \quad (7)$$

обозначим их A^I и C^I соответственно. Тогда форма $S(a, b)$ может быть записана в виде, аналогичном обычному скалярному произведению с расширенной метрикой S_{IJ} .

Имеем

$$S(a, b) = S_{IJ} A^I B^J. \quad (8)$$

Построенная в (8) матрица может быть обращена или псевдообращена, при этом будет построен ассоциированный расширенный метрический тензор S^{IJ} . Он может быть использован для поднятия или опускания индексов ассоциированных объектов A^I , A_J . Законы преобразования ассоциированных объектов следуют из их строения. Операция сложения ассоциированных объектов определена соотношениями (6), (7).

При необходимости может быть разрешена линейная система

$$S_{IJ} X^J = B_I. \quad (9)$$

Что можно сказать о системе (9) и о матрице системы (9). Матрица S_{IJ} квадратная. К сожалению нельзя сказать что либо определенное о ее невырожденности, знакоопределенности и обусловленности.

Однако из [2] для матрицы S_{IJ} следует существование ее представления в виде

$$S_{IJ} = G_{IP} U_J^P \quad (10)$$

где U_J^P – r -ортогональная матрица, а G_{IP} – симметричная неотрицательно определенная матрица ранга r .

Здесь и далее предполагается невырожденность матрицы S_{IJ} . Случай вырожденных матриц S_{IJ} должен рассматриваться особо.

В приложении 1 приведено решение задачи по определению стационарных решений уравнений Лагранжа, основанное на идеях раздела 1 настоящей работы.

В следующем разделе приведены теоремы, позволяющие решать линейные системы как вырожденные, так и невырожденные.

§2. Сингулярная фильтрация полярное разложение и обращение матриц линейных систем алгебраических уравнений

Краткая постановка задач, определения, теоремы по материалам [2], [3], [4].

Обозначим:

$Q_{symmetric}^+$ или Q_s^+ – коммутативное множество симметричных положительно определенных диагонализированных матриц,

$Q_{fixedrank}$ – коммутативное множество симметричных положительно определенных диагонализированных матриц фиксированного ранга,

$\alpha_A = norm_2(A) \cdot norm_2(A^{-1})$ – спектральное число обусловленности невырожденной матрицы A ,

$\alpha_A = norm_2(A) \cdot norm_2(A^+)$ – спектральное число обусловленности вырожденной матрицы A ,

$\|A\|_2$ – спектральную норму матрицы A .

Определение 1. Проектор P удовлетворяет уравнению $P^2 = P$.

Определение 2. Будем называть $(m \times n)$ -матрицу U_{pj} ортогональной матрицей фиксированного ранга r или для краткости r -ортогональной матрицей, если

$$P_{pq} = U_{pj} \cdot U_{qj}; \quad R_{ij} = U_{pi} \cdot U_{pj}; \quad (11)$$

являются $(m \times m)$ - и $(n \times n)$ -проекторами соответственно.

Для матричного оператора A_{pj} неопределенного ранга имеет место полярное разложение

$$A_{pj} = G_{pq} \cdot U_{qj}; \quad (12)$$

где:

G_{pq} – $(m \times m)$ -положительно определенная матрица, и U_{qj} – $(m \times n)$ r -ортогональная матрица или ортогональная матрица фиксированного ранга $rank = r$; если при этом

$$rank G = rank U = rank A, \quad (13)$$

то разложение (12) единственно.

Следующие теоремы могут использоваться для решения линейных систем уравнений, сингулярной фильтрации матричных и сеточных операторов, а также для вычисления проекторов. Эти теоремы использовались также при проведения гарантированных оценок максимально возможной гарантированной точности, согласованной с алгоритмом (процедурой) вычисления произведения матриц.

Теорема 1. Пусть $B \in Q_s^+$ и $F(t) = (1 - t)I + tB$, $t \in [0, 1]$. Тогда

1. $C = F(t)^{-1} \cdot B \in Q_s^+$, $t \in [0, 1]$

2. число обусловленности матрицы C есть монотонная функция параметра t , более того,

$$\alpha_C = \alpha_B \cdot \left[1 - \frac{t \cdot (\Lambda_{max} - \Lambda_{min})}{1 - t(1 - \Lambda_{max})} \right], \quad (14)$$

$$\frac{d\alpha_C}{dt} = -\alpha_B \cdot \frac{\Lambda_{max} - \Lambda_{min}}{[1 - t(1 - \Lambda_{max})]^2}, \quad (15)$$

где $\Lambda_{max}, \Lambda_{min}$ являются минимальным и максимальным собственным значением матрицы B ;

3. $\alpha_C \cdot \alpha_F = \alpha_B$.

Теорема 2. Пусть U – r -ортогональная матрица фиксированного ранга $\text{rank } U = r$ полярного разложения $(m \times n)$ -матрицы A , такой что $\text{rank } A = r$. Тогда при $t \in [0, 1]$ число обусловленности матрицы $C = F^+ \cdot A$, где

$$F(t) = (1 - t)U + tA, \quad t \in [0, 1]$$

– монотонно убывающая функция параметра t , более того:

1.

$$\alpha_C = \alpha_A \cdot \left[1 - \frac{t \cdot (d_{\max} - d_{\min})}{1 - t(1 - d_{\max})} \right], \quad (16)$$

2.

$$\frac{d\alpha_C}{dt} = -\alpha_A \cdot \frac{d_{\max} - d_{\min}}{[1 - t(1 - d_{\max})]^2}, \quad (17)$$

здесь $d_{\max}, d_{\min}$ – максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A ;

3. $\alpha_C \cdot \alpha_F = \alpha_A$.

Теорема 3. Для произвольной матрицы A , такой что $\|A\|_2 = 1$ и матрицы $F(t)$, $t \in [0, 1/2]$, вычисляемой по правилу $F = (1 - t)I + tA^T \cdot A$

имеет место:

1. Итерационный процесс $X_{k+1} = F_k^{-1} \cdot X_k$, где $X_1 = A$, а F_k вычисляется как $F_k = (1 - t)I + tX_k^T \cdot X_k$, сходится к r -ортогональной матрице U полярного разложения матрицы $A = G \cdot U$.

При этом $G \in Q_s^+$; $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = U$; $\text{rank } A = \text{rank } U = \text{rank } G$;

2. Число обусловленности матрицы X_k удовлетворяет выражению

$$\alpha_{X_{k+1}} = (1 - t)\alpha_{X_k} + t\alpha_{X_k}^{-1} \quad (18)$$

3. Число обусловленности матрицы F_k удовлетворяет выражению

$$\alpha_{F_{k+1}} = [(1 - t) + t\alpha_{X_k}^{-2}]^{-1} \quad (19)$$

4. Имеет место равенство $\alpha_{X_{k+1}} \cdot \alpha_{F_k} = \alpha_{X_k}$.

Теоремы 1, 2, 3 позволяют строить r -ортогональные матрицы проекционного типа, а также левые и правые проекторы операторов.

В приложении 2 приведены конечные сравнительные результаты оценок точности для различных алгебраических алгоритмов – Гаусса, Хаусхолдера и для алгебраических алгоритмов С. А. Шишкина. Последние при проведении вычислений с простой точностью по оценкам гарантированно в

в n раз точнее алгоритма Гаусса,

в $n^{1/2}$ раз точнее алгоритма Хаусхолдера,

и согласованы с точностью умножения матриц.

Как известно, проекционные операторы удовлетворяют уравнению

$$P \cdot P = P. \quad (20)$$

Однако нетривиальным и состоявшимся фактом является существование квадратных корней из единичного, а значит и из проекционного оператора, не совпадающих с P .

То есть наряду с оператором P , удовлетворяющим уравнению (20), существуют нетривиальные решения уравнения

$$X \cdot X = P. \quad (21)$$

§3.

Рассмотрим матричное квадратное уравнение

$$X \cdot X = I. \quad (22)$$

Теорема 4. Всякая матрица S , ортогонально подобная матрице X , удовлетворяющей уравнению (22) $X \cdot X = I$, удовлетворяет уравнению

$$S \cdot S = I.$$

Доказательство очевидно.

Другими словами, если матрица X удовлетворяет уравнению $X \cdot X = I$, то матрица $Y = \Phi \cdot X \cdot \Phi^T$, где Φ ортогональна, удовлетворяет уравнению

$$Y \cdot Y = I.$$

Уравнению (22) $X \cdot X = I$ удовлетворяет всякая симметричная матрица перестановок. Действительно, пусть p – матрица перестановок и пусть $p = p^T$. Тогда, так как $p \cdot p^T = I$, то

$$p \cdot p = I. \quad (23)$$

Пусть теперь ненулевые элементы матрицы q принимают значения ± 1 и стоят на тех же местах, что и ненулевые элементы матрицы p .

Тогда, если $q = q^T$, то матрица q удовлетворяет уравнению

$$q \cdot q = I \quad (24)$$

Будем называть такие матрицы *матрицами перестановочного типа*.

Множество корней из 3×3 единичной матрицы может быть классифицировано в соответствии с классификацией симметричных знаковых матриц.

Недавно, в мае 2004 года, на конференции начинающих молодых ученых в МФТИ был сделан доклад Алексея С. Шишкина, Ивана С. Шишкина (см. материалы конференции, а также [5]), в котором были найдены новые корни уравнения $X \cdot X = I$. Одним из результатов этого доклада явилось решение матричного квадратного уравнения $U \cdot U = I$ для размерности $n = 3$. Точнее было получено

$$U = \pm 1/3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

С учетом этих матриц и матриц перестановочного типа множество решений уравнения $X \cdot X = I$ для 3×3 матриц может быть разбито на линейно несвязные плотно заполненные множества.

Казалось бы, какое отношение этот результат имеет к $\text{Cos}(A \wedge B)$? Однако имеет место

Теорема 5. (А. С. Шишкин, И. С. Шишкин 2002, 2004).

Для всякого треугольника ABC с медианами m_a, m_b, m_c и сторонами a, b, c имеют место равенства

$$\begin{pmatrix} m_a^2 \\ m_b^2 \\ m_c^2 \end{pmatrix} = 3/4U \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = 4/3U \begin{pmatrix} m_a^2 \\ m_b^2 \\ m_c^2 \end{pmatrix}$$

$$(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4) = 9/16 \cdot (a^4 + b^4 + c^4),$$

где

$$U = \pm 1/3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

– симметричная, ортогональная, кроссимметричная матрица, удовлетворяющая уравнению $U \cdot U = I$.

Полученная в теореме 5 матрица U линейно связана с ортогональной матрицей перестановочного типа

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кое-что можно сказать о существовании квадратных корней такого типа из единичных матриц порядка n .

Обозначим через $\mathbf{1}$ $n \times n$ матрицу, составленную только из единиц 1.

Тогда (А. С. Шишкин, И. С. Шишкин, 2004) матрица

$$U = \pm [I - (2/n) \cdot \mathbf{1}] \quad (26)$$

ортогональна и удовлетворяет уравнению

$$U \cdot U = I.$$

В заключение, рассмотрим решение уравнения

$$X^{p/q} = I. \quad (27)$$

Очевидно, имеют место равенства

$$X^p = I^q, \quad X^p = I. \quad (28)$$

Решение уравнений типа $X^{p/q} = I$ дает следующий результат.

Теорема 6. На поле комплексных матриц Z нетривиальные (то есть те, которые не могут быть сформированы при помощи матриц перестановочного типа) решения уравнения

$$Z^{p/q} = I \quad (29)$$

задаются выражением

$$Z = \xi([I + \alpha \cdot 1], \quad (30)$$

где комплексные числа α, ξ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{k=p} (C_k^p \cdot (\alpha^k) \cdot (n^{k-1})), \quad [\xi]^{p/q} = 1, \quad C_k^p = p!/(p-k)!/(k!). \quad (31)$$

Следствие. Множество комплексных матриц Y , унитарно подобных матрице Z , являющейся решением уравнения $Z^{p/q} = I$, удовлетворяет уравнению $Y^{p/q} = I$.

Сегодня появляется возможность геометрических построений с метрикой нового типа, когда в качестве метрического тензора используется метрика, удовлетворяющая уравнению

$$U \cdot U = I.$$

Действительно, для любых ненулевых векторов x, y выполнены аксиомы метрики:

1. Коммутативность $(x^i U_{ij} y^j) = (y^i U_{ij} x^j)$;
2. Дистрибутивность $((x^i + y^i) U_{ij} z^j) = (x^i U_{ij} z^j) + (y^i U_{ij} z^j)$;
3. Выполнен распределительный закон умножения $((a \cdot x^i + b \cdot y^i) U_{ij} z^j) = a \cdot (x^i U_{ij} z^j) + b \cdot (y^i U_{ij} z^j)$.

Приложение 1.

Уравнения стационарного движения Лагранжевой системы.

Рассматриваются стационарные движения Лагранжевых систем. Система уравнений разрешена относительно скоростей $\dot{x}_k$.

Рассмотрим уравнение движения некоторого объекта

$$g_{ik} \ddot{x}^k + G_{i,jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = f_i \quad (\text{П.1})$$

Оно может быть разрешено относительно произведения $\dot{x}^j \dot{x}^k$.

Обозначим X^{jk} произведение $\dot{x}^j \dot{x}^k$. Матрица X для любых ненулевых векторов x^j имеет ранг 1.

Введем в рассмотрение математический объект $A^{i,jk}$, обратный объекту $G_{i,jk}$, так что выполнены соотношения

$$G_{i,jk} A^{p,jk} = \delta_i^p, \quad G_{i,jk} A^{i,pq} = \delta_{jk}^{pq} \quad (\text{П.2})$$

для невырожденных в этом смысле объектов $G_{i,jk}$, $A^{i,pq}$.

Для вырожденного случая аналогично имеем

$$G_{i,jk} A^{p,jk} = P_i^p \quad G_{i,jk} A^{i,pq} = P_{jk}^{pq}, \quad (\text{П.3})$$

где P_i^p и P_{jk}^{pq} – проекционные операторы.

Стационарный случай

Пусть теперь

$$\ddot{x}^k = 0. \quad (\text{П.4})$$

Тогда из уравнения (П.1) следует

$$G_{i,jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = f_i. \quad (\text{П.5})$$

Далее получаем

$$X^{pq} = \dot{x}^p \dot{x}^q = A^{i,pq} f_i \quad (\text{П.6})$$

Теперь для получения уравнений стационарного движения, разрешенных относительно скоростей, достаточно разложить матрицу X^{pq} ранга 1 по базису. Выберем максимальную по длине строку матрицы X^{pq} , пусть это X^{1q} . Нормируем ее. Тогда вектор $\dot{x}^p$ вычислится как

$$\begin{aligned} \phi^p &= X^{1q} / \text{norm}_2(X^{1q}) \\ (\text{norm}_2(\dot{x}^p))^2 &= X^{pq} \cdot \phi^p \cdot \phi^p \\ \dot{x}^p &= (\text{norm}_2(\dot{x}^p)) \cdot \phi^p. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Приложение 2.

Анализ гарантированных оценок точности алгоритмов авторского пакета программ Алгебра[©].

Сравнения проведены с наиболее распространенными алгоритмами решения линейных систем.

Обозначения:

K_A – спектральное число обусловленности матрицы A ,

$\|\cdot\|_2$ – спектральная норма матрицы.

$$C_2(n) = \begin{cases} 1.01n & \text{– для вычислений с двойной точностью} \\ n^2 & \text{– для вычислений с простой точностью.} \end{cases}$$

При проведении численных расчетов, связанных с матричными вычислениями, граничной оценкой, по существу ограничивающей возможности алгоритмов, является оценка точности умножения матриц

$$\|AB - A \cdot B\|_2 \leq 2^{-p} \|A\|_2 \|B\|_2 C_2(n) \quad (\text{ПП 1})$$

$(\cdot)$ – численное умножение матриц.

При $B^{-1} = A$ оценка (1) принимает вид

$$\|A \cdot A^{-1} - I\|_2 / K_A \leq 2^{-p} C_2(n). \quad (\text{ПП 2})$$

Именно с такой точностью и удалось (**впервые**) гарантировать точность обращения матриц и решения линейных систем алгоритмами авторского пакета программ (SOLV, SQRoot, SPEC). Конкретно было получено

$$\|A \cdot A^{-1} - I\|_2 / K_A \leq 2^{-p} C_2(n) \cdot k, \quad (\text{ПП 3})$$

где

$k = 1$ для симметричных положительно определенных матриц,

$k = 2$ для матриц общего вида.

Оценка (3) применительно к линейным системам $Ax = b$ эквивалентна следующей

$$\|Ax - b\|_2 / K_A \leq 2^{-p} C_2(n) k \|b\|_2. \quad (\text{ПП 4})$$

Для сравнения приведем оценки точности для алгоритма Гаусса и для алгоритмов, построенных на ортогональных отражениях Хаусхолдера.

Для алгоритма Гаусса с выбором главного элемента¹ было получено $K_A = (n^3 + 3n^2)$.

Для алгоритмов, построенных на ортогональных отражениях Хаусхолдера², было получено $K_A = (40 \cdot n^{5/2} + O(n^2))$.

Для извлечения квадратных корней из симметричных положительно определенных матриц решение уравнения

$$S = X^2 \quad (\text{ПП } 5)$$

точность гарантируется оценкой

$$\|S - X^2\| \leq 2^{-p+3} C_2(n) \|S\|_2 \quad (\text{ПП } 6)$$

В случае, когда при решении уравнения

$$S = Z^2 \quad (\text{ПП } 7)$$

матрица S симметрична, возможно вырождена и знако-неопределена, решение уже не может быть получено в действительных матрицах и записывается в виде $Z = X + iY$. В этом случае точность гарантируется оценками

$$\begin{aligned} \|S - (X + iY) \cdot (X + iY)\| &\leq 20 \cdot 2^{-p} C_2(n) \|S\|_2, \\ \|XY - X \cdot Y\| &\leq 2^{-p+3} C_2(n) \|S\|_2. \end{aligned} \quad (\text{ПП } 8)$$

Таким образом и в этом случае достигнута почти предельная точность решения уравнения (7). При тестировании алгоритма, использованного для решения уравнения (7), в качестве тест матриц использовались матрицы следующего вида

$$S_{ij} = 1/(i + j - 1) - 1/(2n - i - j + 1); \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Эти матрицы имеют равные по модулю и противоположные по знаку действительные собственные значения, причем все матрицы нечетного порядка вырождены. Полученные результаты тестирования представлены в таблице 1.

Таблица 1.

n	$\ XY\ _2/\ A\ _2$	$\ S - (X + iY) \cdot (X + iY)\ _2/\ A\ _2$	$2^{-p}n^2$
7	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$6.51 \cdot 10^{-11}$	$9.8 \cdot 10^{-11}$
9	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.13 \cdot 10^{-11}$	$1.62 \cdot 10^{-10}$
11	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.41 \cdot 10^{-11}$	$2.42 \cdot 10^{-10}$
13	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$5.18 \cdot 10^{-11}$	$3.38 \cdot 10^{-10}$
15	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$2.57 \cdot 10^{-11}$	$4.50 \cdot 10^{-10}$

Вычисления проведены в арифметике с простой точностью при представлении числа с точностью 10^{-12} .

Для обращения вырожденных матриц размера $m \times n$ и ранга $r < \min(m, n)$ программами пакета Алгебра(SPEC) – Special Programs for Exact Calculations оценка

¹ См. монографию Уилкинсона, а также работы Дж. Форсайта.

² См. Уилкинсон, С. К. Годунов, Малышев.

точности аналогична оценке (3). В этом случае под K_A надо понимать спектральную обусловленность вырожденного матричного оператора. Соответствующая оценка принимает вид

$$\|A \cdot A^+ - P\|_2 / K_A \leq 2^{-p+1} C_2(n) \quad (\text{ПП } 9)$$

где P – проектор на собственное подпространство матрицы A .

Литература

1. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. Москва, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, 2004.
2. С. А. Шишкин. Об одном алгоритме обращения матриц с гарантированной точностью. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1991, Т. 31, № 6, с. 783–789.
3. С. А. Шишкин. Сингулярная фильтрация матричных и сеточных операторов с гарантированной точностью. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1994, Т. 34, № 4, с. 636–639. Полный текст депонирован в ВИНТИ, 1993, N 2283 - В93, 27 с.
4. С. А. Шишкин. К вопросу об извлечении квадратных корней из симметричных знакоопределенных матриц. Вариант полярного разложения. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1994, Т. 34, № 2, с. 315–317. Полный текст депонирован в ВИНТИ, 1993, N 2282 - В93, 27 с.
5. А. С. Шишкин, И. С. Шишкин. Новое в треугольнике. // Педагогічна думка. Науково-практичний журнал № 1. 2003. Директор школи ліцею гімназії.
6. А. С. Шишкин, И. С. Шишкин. Новое в треугольнике. Материалы конференции "Старт в науку", МФТИ, май 2004.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА

С. В. Лебедев

НИИ прикладной математики и механики МГТУ им. Н. Э. Баумана
serleb@rambler.ru

Для финслеровых пространств предлагается расширить определение метрического тензора: метрический тензор может иметь большее количество индексов, определяемое размерностью и свойствами пространства. Анализируется связь обобщенного таким образом метрического тензора с финслеровыми пространствами, связанными с коммутативно-ассоциативными алгебрами. Обсуждаются перспективы обобщения метрического тензора; выводится уравнение для геодезических с обобщенным метрическим тензором.

Как для римановых пространств, так и для финслеровых (которые, как известно, являются обобщением римановых), понятие метрического тензора является центральным понятием, определяющим метрические свойства рассматриваемого пространства (многообразия). Метрический тензор – хорошо известное понятие, и без него невозможно представить тензорный анализ метрических пространств. Стало привычным рассматривать этот тензор как тензор второго ранга. Но нельзя ли расширить или обобщить это фундаментальное понятие на финслеровы пространства, не ограничиваясь а priori только тензорами второго ранга? Если бы такой подход на метрические многообразия оказался приемлемым с математической точки зрения, это позволило бы искать его применения и в современной релятивистской или квантовой физике. Если увеличить ранг метрического тензора, то увеличится и число его компонент, и, например, возможен поиск соответствия между этими компонентами и фундаментальными физическими взаимодействиями. В данной статье предпринимается первая попытка перевести рассмотрение обобщенных метрических тензоров из области спекуляций в научную плоскость.

Из истории развития финслеровой геометрии хорошо известно, что метрический тензор в финслеровых пространствах был введен Сингом, Тейлором и Бервальдом в 1925 году по аналогии с римановым пространством [1]. Хотя данная аналогия и позволила развить финслеров тензорный анализ, она не является полной. В римановой геометрии понятие метрического тензора фундаментально и неоспоримо; иная ситуация в финслеровой геометрии, поскольку двухранговый финслеров метрический тензор обладает некоторыми принципиальными отличиями от своего риманова предшественника. Нижеследующее рассмотрение этих отличий дает возможность усомниться в универсальной роли двухрангового финслерова метрического тензора и поэтому послужит некоторым обоснованием возможности его обобщений.

1. Отличия финслерова метрического тензора от риманова аналога

В римановых пространствах компоненты метрического тензора изначально появляются как коэффициенты квадратичного разложения квадрата расстояния между двумя близкими точками, т. е. квадрат расстояния есть:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j . \quad (1)$$

Поэтому в фиксированной системе координат эти компоненты определяются однозначно и являются только функциями рассматриваемой точки риманового многообразия:

$$g_{ij} = g_{ij}(x).$$

В отличие от риманового многообразия, для которого выражение (1) является определяющим, финслерово многообразие определяется заданием в качестве аксиом ряда свойств финслеровой метрической функции, основным из которых является свойство однородности метрической функции. В силу однородности финслерова метрическая функция представляется в виде, аналогичном (1):

$$F^2 = g_{ij}(x, y)y^i y^j. \quad (2)$$

Сходство между (1) и (2) неполно, поскольку в (2) значения компонент метрического тензора зависят не только от рассматриваемой точки многообразия, но и от направления смещения из этой точки, характеризуемого вектором. Это обстоятельство кардинальным образом меняет дело: разложение вида (2) является принципиально неединственным, и из этого свойства неединственности следует, что это разложение не имеет универсального характера.

Во всех монографиях по финслеровой геометрии приводится классическая формула для компонент метрического тензора финслерова пространства [2–4]:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial y^i}. \quad (3)$$

Однако разложение квадрата метрической функции с помощью тензора из (3) не является единственным.

Для иллюстрации неединственности разложения (2) рассмотрим финслерово пространство, связанное с коммутативно-ассоциативной алгеброй H_3 . Эта алгебра является прямым произведением трех алгебр действительных чисел: $H_3 = R \times R \times R$, а финслерова метрическая функция этого пространства есть [5]:

$$F^3 = y^1 y^2 y^3. \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что квадрат данной метрической функции может быть разложен в виде (2) не только с помощью матрицы классического метрического тензора (5), но и с помощью другой матрицы (6):

$$F^2 = g_{ij} y^i y^j = \tilde{g}_{ij} y^i y^j,$$

$$g_{ij} = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{9} \frac{(y^2 y^3)^{2/3}}{(y^1)^{4/3}} & \frac{2}{9} \frac{(y^3)^{2/3}}{(y^1 y^2)^{1/3}} & \frac{2}{9} \frac{(y^2)^{2/3}}{(y^1 y^3)^{1/3}} \\ \frac{2}{9} \frac{(y^3)^{2/3}}{(y^1 y^2)^{1/3}} & -\frac{1}{9} \frac{(y^1 y^3)^{2/3}}{(y^2)^{4/3}} & \frac{2}{9} \frac{(y^1)^{2/3}}{(y^2 y^3)^{1/3}} \\ \frac{2}{9} \frac{(y^2)^{2/3}}{(y^1 y^3)^{1/3}} & \frac{2}{9} \frac{(y^1)^{2/3}}{(y^2 y^3)^{1/3}} & -\frac{1}{9} \frac{(y^1 y^2)^{2/3}}{(y^3)^{4/3}} \end{array} \right\|, \quad (5)$$

$$\tilde{g}_{ij} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{3}{4} g_{12} & \frac{3}{4} g_{13} \\ \frac{3}{4} g_{12} & 0 & \frac{3}{4} g_{23} \\ \frac{3}{4} g_{13} & \frac{3}{4} g_{23} & 0 \end{array} \right\|. \quad (6)$$

Во-вторых, в отличие от риманова пространства компоненты финслерова метрического тензора обладают тем свойством, что при приближении к точке основного многообразия ($y^i \rightarrow 0$) эти компоненты могут иметь особенность в этой точке при

$y = 0$. Убедиться в этом можно на примере компонент матрицы (5): если знаменатель компоненты при уменьшении компонент вектора стремится к нулю быстрее, чем числитель, то значение компоненты неограниченно возрастает.

Наличие таких особенностей может рассматриваться как еще один недостаток двухрангового тензора. Однако этого недостатка можно избежать, если использовать понятие обобщенного метрического тензора. Например, для исследования пространства, ассоциированного с алгеброй H_3 , наиболее подходящим инструментом является обобщенный метрический тензор 3-го ранга, поскольку его компоненты оказываются константами и поэтому не имеют каких-либо особенностей.

2. Трехранговые обобщенные финслеровы метрические тензоры

При определении обобщенных тензоров будем основываться на ключевом для финслеровых пространств свойстве однородности метрической функции:

$$F(x, ky) = kF(x, y).$$

В соответствии с теоремой Эйлера для однородных функций имеем следующие тождества:

$$F^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial y^i}}_{y_i} y^i = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial y^i}}_{g_{ij}} y^i y^j. \quad (7)$$

Это – обычный способ определения ковариантных компонент касательного вектора y_i и метрического тензора g_{ij} . Их связь с контравариантными компонентами y^i выражается формулой:

$$y_{ij} = g_{ij} y^i$$

Благодаря теореме Эйлера для однородных функций возможно по аналогии с (7) разложить в сумму произведений контравариантных компонент вектора не только вторую, но и большие степени финслеровой функции. Далее последовательно рассматривается разложение третьей и четвертой степени этой функции, в результате которого определяются обобщенные метрические тензоры.

Разложение третьей степени финслеровой функции дает следующую цепочку тождеств:

$$F^3 = \underbrace{\frac{1}{3} \frac{\partial F^3}{\partial y^i}}_{y_i^* = y_i F} y^i = \underbrace{\frac{1}{6} \frac{\partial^2 F^3}{\partial y^j \partial y^i}}_{y_{ij}^{(3)}} y^i y^j = \underbrace{\frac{1}{6} \frac{\partial^3 F^3}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{G_{ijk}} y^i y^j y^k. \quad (8)$$

На первом этапе разложения (8) возникает ковариантный вектор с компонентами y_i^* , который, как нетрудно видеть, отличается лишь множителем F от ковариантного вектора y_i и поэтому не представляет интереса. На втором этапе этого разложения появляется дважды ковариантный метрический тензор $y_{ij}^{(3)}$; результат деления этого тензора на финслеру функцию F обозначим как $\tilde{y}_{ij}$:

$$\tilde{y}_{ij} = y_{ij}^{(3)} / F. \quad (9)$$

Тензор (9) – тот самый тензор, который участвует в альтернативном разложении квадрата расстояния финслеровой функции и поэтому может рассматриваться как частичный аналог классического метрического тензора g_{ij} (3). Связь этих двух тензоров выражается следующей формулой:

$$\tilde{y}_{ij} = (g_{ij} + y_i y_j / F^2) / 2. \quad (10)$$

Заметим, что тензор (10) формой записи похож на угловой финслеров метрический тензор h_{ij} [4]:

$$h_{ij} = g_{ij} - y_i y_j / F^2.$$

Рассмотрим свойства тензора $\tilde{y}_{ij}$.

1. Как и метрический тензор g_{ij} , тензор $\tilde{y}_{ij}$ есть однородная функция степени 0, т. е.

$$(x, ky) = \tilde{y}^{ij}(x, y).$$

2. Как и метрический тензор g_{ij} , тензор $\tilde{y}_{ij}$ может использоваться для подъема и опускания индексов у произвольных касательных векторов, т. е.

$$y^i = \tilde{y}^{ij} y_j, \quad y_i = \tilde{y}_{ij} y^j.$$

3. В отличие от метрического тензора g_{ij} , тензор $\tilde{y}_{ij}$ не позволяет поднимать и опускать индексы у тензоров второго и высшего рангов. Например, результат опускания индекса у произвольного тензора второго ранга T_{ij} , если этот индекс был поднят с помощью тензора g_{ij} , выглядит так:

$$(\tilde{y}_{ij} g^{jk}) T_{kl} = \frac{1}{2} \left[T_{il} + \frac{y_l}{F} \left(\frac{y^j}{F} \cdot T_{jl} \right) \right].$$

4. Результат полной свертки тензора $\tilde{y}_{ij}$ с тензором g_{ij} есть 1:

$$\tilde{y}_{ij} g^{ij} = \tilde{y}^{ij} g_{ij} = 1.$$

5. Существуют производные от тензора $\tilde{y}_{ij}$ символы Кристоффеля вида

$$\tilde{\gamma}_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \tilde{y}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{y}_{ik}}{\partial x^j} \right],$$

и эти символы Кристоффеля подчиняются уравнению для финслеровых геодезических обычного вида:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \tilde{\gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{jk}^i = g^{il} \tilde{\gamma}_{ljk} = \tilde{y}^{il} \tilde{\gamma}_{ljk}. \quad (11)$$

Доказательство этого свойства аналогично доказательству утверждения (20) (см. ниже).

На последнем, третьем этапе разложения (8) определяем 3-ранговый метрический тензор G_{ijk} :

$$G_{ijk} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F^3}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}. \quad (12)$$

Отметим, что обобщенные метрические тензоры (9) и (12) симметричны по всем своим индексам – это общее свойство всех метрических тензоров.

3. Четырехранговые обобщенные финслеровы метрические тензоры

Аналогичным (8) способом возможно разложение четвертой степени финслеровой функции, т. е. верны следующие тождества:

$$F^4 = \underbrace{\frac{1}{4} \frac{\partial F^4}{\partial y^i}}_{y_i^* = y_i F^2} y^i = \underbrace{\frac{1}{12} \frac{\partial^2 F^4}{\partial y^j \partial y^i}}_{y_{ij}^{(4)}} y^i y^j = \underbrace{\frac{1}{24} \frac{\partial^3 F^4}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{y_{ijk}} y^i y^j y^k = \underbrace{\frac{1}{24} \frac{\partial^4 F^4}{\partial y^l \partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{G_{ijkl}} y^i y^j y^k y^l. \quad (13)$$

На первом этапе разложения (13) получается ковариантный вектор y^* , компоненты которого отличаются от ковариантных компонент y_i множителем F^2 , на втором этапе – дважды ковариантный тензор $y_{ij}^{(4)}$, на третьем этапе – трижды ковариантный тензор y_{ijk} и на последнем, четвертом этапе – четырежды ковариантный тензор G_{ijkl} .

Рассмотрим свойства тензора G_{ijkl} .

Во-первых, при рассмотрении индикатрисы (обобщенной сферы единичного радиуса, центром которой является точка основного многообразия) с помощью тензора G_{ijkl} могут быть записаны следующие уравнения не только касательной к индикатрисе плоскости (14), но и касательных поверхностей второго и третьего порядков (15)–(16):

$$G_{ijkl}(x^m, y_{(0)}^m) \cdot y_{(0)}^i y_{(0)}^j y_{(0)}^k y_{(0)}^l = 1, \quad (14)$$

$$G_{ijkl}(x^m, y_{(0)}^m) \cdot y_{(0)}^i y_{(0)}^j y_{(0)}^k y_{(0)}^l = 1, \quad (15)$$

$$G_{ijkl}(x^m, y_{(0)}^m) \cdot y_{(0)}^i y_{(0)}^j y_{(0)}^k y_{(0)}^l = 1. \quad (16)$$

Тогда при помощи тензора G_{ijkl} известные классификации уравнений второго и третьего порядков делают возможным классификацию точек индикатрисы финслерова пространства.

Во-вторых, тензор G_{ijkl} допускает введение пятирангового геометрического объекта, компоненты которого могут быть названы обобщенными символами Кристоффеля 1 рода. Компоненты этого объекта определим так:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = \frac{1}{12} \left\{ \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\partial x^{i_5}} - \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_5}}{\partial x^{i_4}} + \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5}}{\partial x^{i_3}} - \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_5}}{\partial x^{i_2}} + \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\partial x^{i_1}} \right\}. \quad (17)$$

Пятиранговые обобщенные символы Кристоффеля 1 рода обладают свойствами, аналогичными свойствам симметрии классических 3-ранговых символов Кристоффеля:

а) свойство симметрии по 1, 3 и 5, а также по 2 и 4 индексам:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = \gamma_{i_5 i_2 i_3 i_4 i_1} = \gamma_{i_3 i_2 i_1 i_4 i_5} = \gamma_{i_1 i_4 i_3 i_2 i_5}; \quad (18)$$

б) свойство, связанное с перестановкой 1 и 2, 4 и 5 индексов:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} + \gamma_{i_2 i_1 i_3 i_5 i_4} = \frac{1}{6} \partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5} / \partial x^{i_3};$$

в) свойство свертки при смещении $dx^i (x'^i = dx^i / ds)$ вдоль кривой с естественным параметром s :

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} x'^{i_1} x'^{i_2} x'^{i_4} x'^{i_5} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5}}{\partial x^{i_3}} x'^{i_1} x'^{i_2} x'^{i_4} x'^{i_5}. \quad (19)$$

С помощью обобщенных символов Кристоффеля может быть сформулировано следующее утверждение.

Утверждение. *Справедлива следующая обобщенная форма уравнения для геодезических финслерова пространства:*

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \gamma_{jklm}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^m}{ds} = 0, \quad (20)$$

где

$$\gamma_{jklm}^i = \tilde{y}^{(4)in} \gamma_{jklm}, \quad \tilde{y}_{in}^{(4)} = y_i y_n - y_{in}^{(4)}.$$

При доказательстве этого утверждения будем основываться на уравнении Эйлера-Лагранжа, в котором в качестве естественного параметра используется длина дуги s :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x'^i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \quad (21)$$

Преобразуем первое слагаемое в (21):

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{4F^3} \frac{\partial F^4}{\partial x'^i} \right) = \frac{1}{F^6} \left(\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{4} \frac{\partial F^4}{\partial x'^i} \right] F^3 - \frac{3}{4} F^2 \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F^4}{\partial x'^i} \right). \quad (22)$$

Теперь преобразуем входящие в (22) производные:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial F^4}{\partial x'^i} \right) = \frac{dy_i^*}{ds} = \frac{d}{ds} \left(y_{ij}^{(4)} x'^j \right) = \frac{dy_{ij}^{(4)}}{ds} x'^j + y_{ij}^{(4)} x''^j,$$

где $\frac{dy_{ij}^{(4)}}{ds} = \frac{\partial y_{ij}^{(4)}}{\partial x'^k} \cdot \frac{dx'^k}{ds} = 2y_{ijk} ds \cdot x''^k$, в то время как $\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x'^k} x''^k$.

Подставляя в (22), получим следующее выражение:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x'^i} \right) = \frac{1}{F^6} \left\{ F^3 \left[2y_{ijk} ds \cdot x'^j x''^k + y_{ij}^{(4)} x''^j \right] - 3F^5 \frac{\partial F}{\partial x'^k} \frac{\partial F}{\partial x'^i} x''^k \right\}.$$

Заметим, что $F(x, x') = 1$ вследствие нашего выбора длины дуги в качестве параметра. Кроме того, из (13) следует, что $y_{ijk} x'^j ds = y_{ik}^{(4)}$. В итоге первое слагаемое в уравнении Эйлера-Лагранжа приобретает следующий простой вид:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x'^i} \right) = 3 \left(y_{ij}^{(4)} - y_i y_j \right) \cdot x''^j.$$

Возможно преобразование и второго слагаемого уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{1}{4F^{3/4}} \cdot \frac{\partial G_{jklm}}{\partial x^i} \cdot x'^j x'^k x'^l x'^m.$$

С учетом свойства в) обобщенных символов Кристоффеля (19) уравнение экстремалей приобретает вид:

$$\tilde{y}_{ij}^{(4)} x''^j + \gamma_{jklm} x'^j x'^k x'^l x'^m = 0, \quad \text{где} \quad \tilde{y}_{ij}^{(4)} = y_i y_j - y_{ij}^{(4)}.$$

Введя матрицу $\tilde{y}^{(4)ij}$, обратную к матрице $\tilde{y}_{ij}^{(4)}$, и обозначая $\gamma_{jklm}^i = \tilde{y}^{(4)in} \gamma_{jknlm}$, получим требуемое уравнение (20).

4. Классификация обобщенных финслеровых метрических тензоров

В заключение с целью упорядочить имеющиеся представления об обобщенных финслеровых метрических тензорах проведем их классификацию.

Определение. Будем говорить, что обобщенный метрический тензор принадлежит к классу (m, n) , если его ранг равен m , а его компоненты есть коэффициенты в разложении n -ой степени финслеровой функции, т. е. верно равенство

$$F^n = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n G_{i_1 \dots i_m}^{(n)} \cdot y^{i_1} \cdot \dots \cdot y^{i_m}. \quad (23)$$

В соответствие с этим определением компоненты метрического тензора класса (m, n) определяются формулой:

$$G_{i_1 \dots i_m}^{(n)} = \frac{m!}{n!} \frac{\partial^m F^n}{\partial y^{i_1} \dots \partial y^{i_m}}, \quad (n \geq m > 2). \quad (24)$$

Согласно предлагаемой классификации, фундаментальный метрический тензор принадлежит к классу $(2, 2)$.

Заключение

В данной работе определены обобщенные финслеровы метрические тензоры, проведена их классификация и исследованы некоторые их свойства. Кроме того, в результате обобщения символов Кристоффеля 1 рода предложена пятииндексная модификация этих символов, и с помощью этих обобщенных символов выведено обобщенное дифференциальное уравнение для финслеровых геодезических линий.

Благодарности

Необходимо отметить, что идея обобщения метрического тензора не раз высказывалась в ходе обсуждений к. т. н. Д. Г. Павловым, а данная статья есть некоторые шаги по реализации этой идеи. Автор также благодарен к. ф.-м. н., проф. Г. С. Асанову за ряд ценных замечаний при обсуждении работы.

Литература:

- [1] Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука. 1981.
- [2] D. Bao, S.- S. Chern, Z. Shen. An introduction to Riemann-Finsler geometry. N.-Y.: Springer. 2000.
- [3] M. Matsumoto. Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. Japan: Kaiseisha Press. 1986.
- [4] G. S. Asanov. Finsler geometry, relativity and gauge theories. Dordrecht: Reidel. 1985.
- [5] Д. Г. Павлов. Хронометрия трехмерного времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1. С. 17–30.

The generalized Finslerian metric tensors

Lebedev S. V.

Baumann University's Institute of Applied Math@Mech, serleb@rambler.ru

The generalized Finslerian metric tensors are proposed. These tensors can have different number of indeces dependent on space dimension as well as space properties. The relationship of these tensors with the Finsler spaces associated with commutative associative algebras is analyzed. Nearest perspectives to research of the tensors of this type are discussed. The generalized differential equations of Finsler geodesics are derived and discussed.

ОПИСАНИЕ ПРЕЦЕССИИ ТОМАСА ПСЕВДОКВАТЕРНИОНАМИ

Д. Е. Бурланков, Г. Б. Малыкин

*Нижегородский Государственный Университет, Нижний Новгород,
bur@phys.unn.runnet.ru*

*Институт Прикладной Физики РАН, Нижний Новгород,
malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru*

При криволинейном движении тела в плоскости со скоростью, сравнимой со скоростью света, преобразованию Лоренца подвергаются лишь три его координаты и матрица преобразования оказывается трехпараметрической. Это дает возможность описания таких преобразований слегка модифицированными на псевдоевклидовость метрики кватернионами Гамильтона – псевдокватернионами. Определены их алгебраические свойства и связь с преобразованиями Лоренца в $(2+1)$ -мерном пространстве Минковского. Проведено интегрирование псевдокватернионного дифференциального уравнения непрерывных преобразований при движении тела по круговой орбите, откуда получено выражение для величины прецессии Томаса.

Преобразования Лоренца при плоском движении

В специальной теории относительности для описания шестипараметрических преобразований Лоренца используются комплексные кватернионы Ньюмена - Пенроуза [1, 2]. Однако техника работы с ними исключительно сложна. В то же время ряд принципиальных задач специальной теории относительности имеет дело с плоским движением тела, при котором преобразованиям Лоренца подвергаются только две пространственные координаты и время, тогда как нормальная к плоскости движения координата остается неизменной. В этом случае мы имеем дело с трехпараметрическими преобразованиями Лоренца в $(2 + 1)$ -мерном пространстве Минковского. Для описания таких преобразований не нужно вводить комплексные кватернионы, достаточно лишь слегка модернизировать технику кватернионов Гамильтона.

Мы в дальнейшем обозначаем скорость света в вакууме c , а для тела, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ примем стандартные обозначения:

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1)$$

Псевдокватернионы

$(2+1)$ -мерное пространство Минковского имеет диагональную метрику $(\gamma_{ij}) = \text{diag}(1, -1, -1)$.

Введем три псевдокватернионных орта η_0, η_1, η_2 с алгебраическими свойствами:

$$\eta_i \eta_j = -\gamma_{ij} - \varepsilon_{ijk} \gamma^{kl} \eta_l; \quad (2)$$

$$\eta_0^2 = -1; \quad \eta_1^2 = \eta_2^2 = 1;$$

$$\eta_0 \eta_1 = -\eta_1 \eta_0 = \eta_2;$$

$$\eta_0 \eta_2 = -\eta_2 \eta_0 = -\eta_1;$$

$$\eta_2 \eta_1 = -\eta_1 \eta_2 = \eta_0.$$

Добавление единицы, коммутирующей со всеми ортами, приводит к алгебре псевдокватернионов

$$z = a \cdot 1 + t \cdot \eta_0 + x \cdot \eta_1 + y \cdot \eta_2 \quad (3)$$

с нормой (не положительно определенной)

$$|z|^2 = a^2 + t^2 - x^2 - y^2 \quad (4)$$

и обратным значением

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} (a \cdot 1 - t \cdot \eta_0 - x \cdot \eta_1 - y \cdot \eta_2).$$

Аналогично евклидову случаю, псевдокватернионы с единичной нормой описывают вращения и псевдовращения в пространстве Минковского $(2+1)$. Если (n_0, n_1, n_2) – положительно или отрицательно определенный единичный вектор ($\mathbf{n}^2 \equiv n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 = \pm 1$), то кватернион

$$\xi(\mathbf{n}, \psi) = C(\psi) + S(\psi)(n_0 \cdot \eta_0 + n_1 \cdot \eta_1 + n_2 \cdot \eta_2) = C(\psi) + S(\psi)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}) \quad (5)$$

описывает вращение или псевдовращение относительно оси $\mathbf{n}$, при этом два последовательных (псевдо)поворота вокруг этой оси определяют поворот вокруг этой же оси:

$$\begin{aligned} & (C(\psi_1) + S(\psi_1)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta})) (C(\psi_2) + S(\psi_2)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta})) = \\ & (C(\psi_1)C(\psi_2) + (\mathbf{n}^2)S(\psi_1)S(\psi_2)) + (C(\psi_1)S(\psi_2) + S(\psi_1)C(\psi_2))(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}) = \\ & C(\psi_1 + \psi_2) + S(\psi_1 + \psi_2)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

В зависимости от знака $\mathbf{n}^2$ величины C и S являются либо круговыми, либо гиперболическими косинусом и синусом.

При $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ – вращение в плоскости (x, y) – синус S обращается в нуль впервые при $\psi = \pi$ – и при этом псевдокватернион описывает тождественное преобразование, т.е. поворот на 360° . Отсюда следует, что аргументом функций C и S является половинный угол. Этот вывод можно рассматривать и как результат аналитического продолжения кватернионов в евклидовом пространстве.

Преобразование самого псевдокватерниона z другим псевдокватернионом u производится в соответствии с выражением

$$z_u = u \cdot z \cdot u^{-1}. \quad (6)$$

Буст (преобразование Лоренца, определяемое только вектором скорости) вдоль направления, перпендикулярного пространственному двумерному единичному вектору (n_x, n_y) – нормали к траектории – описывается псевдокватернионом

$$z_\chi = \text{ch} \frac{\chi}{2} + \text{sh} \frac{\chi}{2} (n_x \eta_1 + n_y \eta_2);$$

где функции χ можно выразить через γ :

$$\text{sh} \frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}; \quad \text{ch} \frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}; \quad \beta = \frac{v}{c} = \theta(\chi) = \frac{\text{sh}(\chi)}{\text{ch}(\chi)} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}; \quad (7)$$

С учетом этих соотношений буст, определяемый нормалью к траектории $n_x = \cos \varphi$, $n_y = \sin \varphi$ определяется псевдокватернионом:

$$z_\chi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}(\eta_1 \cos \varphi + \eta_2 \sin \varphi), \quad (8)$$

а поворот в плоскости (x, y) на угол ψ – псевдокватернионом

$$z_\psi = \cos \frac{\psi}{2} + \eta_0 \sin \frac{\psi}{2}.$$

Псевдокватернион с единичной нормой определяется тремя параметрами, в качестве которых можно выбрать γ , ψ , ϕ :

$$z(\gamma, \psi, \phi) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}(\cos \psi + \eta_0 \sin \psi) + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}(\eta_1 \cos \phi + \eta_2 \sin \phi) \quad (9)$$

Мера в пространстве параметров выражается как модуль псевдокватерниона

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial z}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi = \\ &= \frac{\cos \psi d\gamma - 2(\gamma+1) \sin \psi d\psi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma+1}} + \eta_0 \frac{\sin \psi d\gamma + 2(\gamma+1) \cos \psi d\psi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma+1}} + \\ &+ \eta_1 \frac{\cos \phi d\gamma - 2(\gamma-1) \sin \phi d\phi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}} + \eta_2 \frac{\sin \phi d\gamma + 2(\gamma-1) \cos \phi d\phi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (10)$$

Норма этого псевдокватерниона в соответствии с (4) и определяет метрику в пространстве параметров:

$$\begin{aligned} dl^2 &= -\frac{d\gamma^2}{\gamma^2-1} + \frac{\gamma+1}{2} d\psi^2 + \frac{\gamma-1}{2} d\phi^2 = \\ &= -\left(\frac{d\chi}{2}\right)^2 + \text{ch}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) d\psi^2 + \text{sh}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) d\phi^2, \end{aligned} \quad (11)$$

если представить $\gamma = \text{ch} \chi$. Это – метрика пространства постоянной отрицательной кривизны, однако это не пространство Лобачевского, которое локально имеет евклидову метрику, а псевдориманово пространство с постоянной отрицательной кривизной.

Релятивистское вращение по окружности

Тело, вращающееся по окружности с постоянной скоростью v , испытывает центростремительное ускорение и пространство - время в бесконечно малой окрестности этого тела претерпевает бесконечно малое преобразование Лоренца (буст), определяемое выражением (8). Если тело на окружности достигло угла φ , изменение скорости равно $\mathbf{a} dt = \mathbf{n} v \omega dt = \mathbf{n} v d\varphi$, где $\mathbf{n}$ – вектор нормали, то псевдокватернион, описывающий это преобразование

$$w(\varphi) = 1 + \beta \frac{d\varphi}{2} (-\eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi) = 1 + \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} \frac{d\varphi}{2} (-\eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi). \quad (12)$$

При последующих поворотах угол меняется на величину $d\varphi$ и при повороте на конечный угол псевдокватернион преобразования определяется бесконечным произведением таких кватернионов, близких к единице с переменным углом φ .

Интегрирование проще провести, рассматривая действие этих близких к единице псевдокватернионов на псевдокватернион (9):

$$\begin{aligned} w(\varphi) \cdot z(\gamma, \psi, \phi) &= \left(1 + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \frac{d\varphi}{2} (-\eta_1 \sin \varphi + \eta_2 \cos \varphi) \right) \cdot \\ &\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} (\cos \psi + \eta_0 \sin \psi) + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} (\eta_1 \cos \phi + \eta_2 \sin \phi) \right) = \\ &\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \left(\left(\cos \psi - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{d\varphi}{2} \sin(\varphi - \phi) \right) + \eta_0 \left(\sin \psi + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{d\varphi}{2} \cos(\varphi - \phi) \right) \right) + \\ &\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\eta_1 \left(\cos \phi - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{d\varphi}{2} \sin(\varphi - \psi) \right) + \eta_2 \left(\sin \phi + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{d\varphi}{2} \cos(\varphi - \psi) \right) \right) \quad (13) \end{aligned}$$

При сдвиге тела по круговой траектории параметр γ не меняется, а могут меняться только углы ψ и ϕ . Сравним полученное выражение с приращением псевдокватерниона (9) при приращении этих углов:

$$\begin{aligned} z(\gamma, \psi + d\psi, \phi + d\phi) &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} ((\cos \psi - d\psi \sin \psi) + \eta_0 (\sin \psi + d\psi \cos \psi)) + \\ &\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} (\eta_1 (\cos \phi - d\phi \sin \phi) + \eta_2 (\sin \phi + d\phi \cos \phi)). \end{aligned}$$

Эти соотношения совпадают при

$$\psi + \phi = \varphi; \quad \psi = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\varphi}{2}; \quad \phi = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\varphi}{2}. \quad (14)$$

Если эти значения подставить в (9) и обозначить

$$k = 1 - \frac{1}{\gamma}, \quad (15)$$

то получится псевдокватернион, определяемый двумя параметрами – константой γ , определяемой скоростью движения тела, и углом φ , равномерно изменяющимся вдоль траектории:

$$\begin{aligned} z(\gamma, \varphi) &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} (\cos(k\varphi) + \eta_0 \sin(k\varphi)) + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} (\eta_1 \cos((1-k)\varphi) + \eta_2 \sin((1-k)\varphi)) = \\ &\cos(k\varphi) z_n + \sin(k\varphi) z_\tau, \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$z_n = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} (\eta_1 \cos \varphi + \eta_2 \sin \varphi)$$

– псевдокватернион нормали к траектории, а

$$z_\tau = \eta_0 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} (\eta_1 \sin \varphi - \eta_2 \cos \varphi).$$

– псевдокватернион касательной. Оба этих вектора имеют единичный модуль.

Если $k = 0$, то $z(\gamma, \varphi) = z_n$ — указывает на нормаль, определяющую ускорение, — но при $k > 0$ ПК начинает поворачиваться между касательной и нормалью пропорционально углу сдвига тела по орбите с угловой частотой прецессии Томаса

$$\Omega_T = k \omega = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \omega, \quad (17)$$

если ω — угловая частота вращения по орбите.

Введенные выше псевдокватернионы являются подмножеством комплексных кватернионов Ньюмена и Пенроуза, введенных для описания четырехмерных преобразований Лоренца, но техника работы с последними несравненно сложнее.

Описание с помощью псевдокватернионов произведения конечных преобразований Лоренца, приводящих к т. наз. *вращению Вигнера*, приведено в нашей работе [3].

Прецессия Томаса

Выведенная величина коэффициента томасовой прецессии $k = 1 - \sqrt{1 - \beta^2}$ говорит о том, что с ростом линейной скорости вращения от нуля до скорости света (β от 0 до 1) коэффициент растет от нуля (при малых скоростях квадратично) до единицы, то есть в ультрарелятивистском пределе угловая скорость томасовой прецессии совпадает с угловой скоростью орбитального вращения.

Однако в литературе наиболее распространенным выражением (см., например, [4–6]) является

$$k_T = \gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1, \quad (18)$$

приводящая для ультрарелятивистского движения ($\beta \rightarrow 1$) к бесконечной скорости вращения локального репера.

В препринте [3] показано, что эта ошибка возникла вследствие пренебрежения в матрице преобразования Лоренца преобразованием времени, которое при бесконечно малом преобразовании вроде бы не играет ни какой роли, однако существенно сказывается при интегрировании матриц в процессе конечного поворота по орбите.

Очень убедительным кажется вывод формулы (18) в работе Rhodes и Semon [7]. Авторы пытаются вывести величину ПТ путем переноса теоремы Гамильтона-Родригеса (см., например, [8, 9]) в псевдоевклидово пространство: при проведении преобразований Лоренца, при которых некоторая ось, *вокруг которой в процессе преобразований вращение отсутствует*, возвращается к своему первоначальному положению, результирующее преобразование Лоренца оказывается поворотом вокруг этой оси на угол, равный телесному углу, описанному направляющим вектором этой оси на псевдосфере.

Доказав эту теорему, авторы применяют ее к вектору, *касательному* к мировой линии вращающегося тела, конец которого описывает кривую в пространстве Лобачевского. Однако для этой оси условия теоремы о телесном угле неприменимы: она не является осью без вращения, так как в каждый момент именно вокруг нее и совершается томасов поворот.

Ось в трехмерном пространстве-времени, вокруг которой при движении тела по окружности не происходит вращения — это нормаль к траектории. Но она пространственно-подобна и ее направляющий вектор описывает кривую не на верхней полости двуполосного гиперboloида (римановой псевдосферы — пространства Лобачевского), которую рассматривают авторы, а на однополостном гиперboloиде

(псевдоримановой псевдосфере), разрезая его на две половины бесконечной площади. Это можно прямо увидеть из метрики (11) параметров преобразования Лоренца: γ имеет отрицательную норму, а углы, изменяющиеся пропорционально углу сдвига по орбите φ , определяют одномерное пространство с положительной нормой, поэтому геометрия Лобачевского, которую авторы работы [7] применяют к описанию прецессии Томаса, прямого отношения к ней не имеет.

Выражение (17) для угловой скорости прецессии Томаса получено в ряде работ одного из авторов, в частности, в [10].

Авторы благодарны В. Ф. Чубу за обсуждение проблем описания прецессии Томаса гиперкомплексными числами и В. Л. Гинзбургу за внимание к проблеме.

Литература

- [1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. А. *Гравитация* (М.: Мир. Т. 1. 1977, С. 222 [Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. *Gravitation* (San Francisco: W. H. Freeman and C⁰, 1973)]
- [2] Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство – время* (М.: Мир, 1987) [Penrose R., Rindler W. *Two-Spinors Calculus and Relativistic Fields* (Cambridge University Press. 1986)]
- [3] Бурланков Д. Е. Малыкин, Г. Б. *Препринт ИПФ РАН N° 576*, Н. Новгород (2000)
- [4] Thomas L. H., *Nature*. 1926. V. 117, P. 514.
- [5] Thomas L. H., *Phil. Mag.* 1927. S.7 . V. 3, N 13. P. 1-22.
- [6] Мёллер К. *Теория относительности* (М.: Атомиздат, 1975) [Möller C., *The theory of relativity* (Oxford: Clarendon press, 1952, 1972)].
- [7] Rhodes J. A., Semon M. D., *Am. J. Phys.* 2004. **72**, P. 943
- [8] Уиттекер Э. *Аналитическая динамика* (Ижевск: РХД, 1999) [E. T. Whittaker, *Tretise on the Analitical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambridge, 1927)]
- [9] Малыкин Г. Б. Харламов, С. А., *УФН*, 2003. Т. 173, N° 9, С. 985
- [10] Малыкин Г. Б., Пермитин Г. В., *Томасовская прецессия* Физическая энциклопедия, М.: Рос. энциклопедия, 1998. Т. 5, С. 123.

Thomas precession by pseudoquaternions

D. E. Burlankov, G. B. Malykin

*Nizhny Novgorod State University, Russia,
Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia*

When a body moves curvilinearly in a plane with a velocity that is comparable to the velocity of light, only three coordinates of the body undergo Lorentz transformation, and the transformation matrix appears to be three-parametric. This enables description of these transformations by pseudoquaternions, Hamilton quaternions slightly modified for pseudo-Euclidean character of the metrics. Their algebraic properties and relation to the Lorentz transformations in a 2+1-dimensional Minkovsky space were determined. We integrated the pseudoquaternion differential equation of continuous transformations at a body's motion along a circular orbit and, as a result, obtained an expression for the value of the Thomas precession.

4-ПОЛИФОРМЫ ИМПУЛЬСОВ ПАВЛОВА $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Георге Атанасиу¹, Владимир Балан² и Мирсеа Неагу³

Цель данной работы состоит в том, чтобы ассоциировать обобщенное гамильтоново пространство с 4-псевдоскалярным произведением, определенным в пространстве Картана-Минковского. Компоненты 4-псевдоскалярного произведения $G^{ijkl}(x, p)$ даются в терминах картановского метрического фундаментального d -тензора $g^{*ij}(x, p)$. В частном случае функции Павлова $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$ выводятся компоненты v -ковариантных производных в этом обобщенном гамильтоновом пространстве.

Mathematics Subject Classification: 53B40, 53C60, 53C07.

1 4-псевдоскалярное произведение в пространстве Картана-Минковского

Пусть M^n является n -мерным дифференцируемым многообразием класса гладкости C^∞ , а (T^*M, π^*, M) – его кокасательное расслоение и (x^i, p_i) – локальные координаты в T^*M .

Пусть $K : T^*M \rightarrow \mathbf{R}_+$, где $K(x, p) = K(p) > 0$ – локально метрическая функция Картана-Минковского. Отметим, что функция $K(p)$ является 1-положительно однородной по аргументу p . Более того, функция Картана-Минковского $K(p)$ порождает фундаментальное метрическое d -тензорное поле

$$g^{*ij}(x, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Теперь введем "4-псевдоскалярное произведение", задаваемое уравнением:

$$(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4) = G^{ijkl}(x, p) \omega_i^1 \omega_j^2 \omega_k^3 \omega_l^4,$$

где $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4 \in \Gamma(T^*M)$ и

$$G^{ijkl}(x, p) = \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 K^4}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k \partial p_l}.$$

Замечание. В частном случае 4-мерного многообразия M^4 и метрической функции Павлова

$$K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4},$$

где $p_1 p_2 p_3 p_4 > 0$, данное 4-псевдоскалярное произведение было изучено Павловым [8]. В этом случае мы имеем

$$G^{ijkl}(x, p) = \frac{1}{4!},$$

¹ Department of Algebra and Geometry, "Transilvania" University, Braşov, Romania, gh_atanasiu@yahoo.com

² Department of Mathematics I, University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania, vbalan@mathem.pub.ro

³ Brasov, Romania, mirceaneagu73@yahoo.com

так что

$$(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4) = \frac{1}{4!} \sum_{\tau \in \sigma_4} \omega_{\tau(1)}^1 \omega_{\tau(2)}^2 \omega_{\tau(3)}^3 \omega_{\tau(4)}^4.$$

Приняв во внимание 1-однородность функции Картана-Минковского $K(p)$, мы получим, что выполняются следующие утверждения:

- $G^{ijkl}(x, p)$ полностью симметричен относительно индексов i, j, k, l ;
- $G^{ijk0}(x, p) = G^{ijkl}(x, p)p_l = \frac{1}{4!} \frac{\partial^3 K^4}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k}$ является 1-однородным по p ;
- $G^{ij00}(x, p) = G^{ijkl}(x, p)p_k p_l = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 K^4}{\partial p_i \partial p_j}$ является 2-однородным по p ;
- $G^{i000}(x, p) = G^{ijkl}(x, p)p_j p_k p_l = \frac{1}{4} \frac{\partial K^4}{\partial p_i}$ является 3-однородным по p ;
- $G^{0000}(x, p) = G^{ijkl}(x, p)p_i p_j p_k p_l = K^4$ является 4-однородным по p .

Определим "псевдоскалярное произведение"

$$\langle \omega^1, \omega^2 \rangle_\omega = \frac{1}{K^2} (\omega^1, \omega^2, \omega, \omega),$$

где $\omega = p_i dx^i$ – каноническая 1-форма Лиувилля в пространстве Картана-Минковского $(M^n, K(p))$ и $\omega^1, \omega^2 \in \Gamma(T^*M)$.

Замечание. Для метрики Павлова $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$, очевидно, что форма $\langle, \rangle_\omega$ билинейна по двум аргументам и она удовлетворяет аксиомам псевдоскалярного произведения [9].

Заметим, что локально мы имеем

$$\langle \omega^1, \omega^2 \rangle_\omega = \frac{1}{K^2} G^{ijkl}(x, p) \omega_i^1 \omega_j^2 p_k p_l = \frac{G^{ij00}(x, p)}{K^2} \omega_i^1 \omega_j^2$$

и, следовательно,

$$g^{ij}(x, p) = \frac{G^{ij00}(x, p)}{K^2} = \frac{1}{12K^2} \frac{\partial^2 K^4}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Предполагая, что метрический d-тензор $g^{ij}(x, p)$ невырожден, мы можем дать следующий важный результат:

Предложение. Пара $GH^n = (M^n, g^{ij}(x, p))$ – обобщенное гамильтоново пространство. Абсолютная энергия этого пространства в точности равна $\mathcal{E} = K^2$.

Доказательство. Абсолютная энергия обобщенного гамильтонова пространства GH^n равна:

$$\mathcal{E} = g^{ij}(x, p) p_i p_j = \frac{G^{ij00}(x, p)}{K^2} p_i p_j = \frac{G^{0000}(x, p)}{K^2} = \frac{K^4}{K^2} = K^2. \quad \square$$

Как следствие, метрическое d-тензорное поле, порожаемое абсолютной энергией $\mathcal{E} = K^2$ определяется уравнением

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2}{\partial p_i \partial p_j} = g^{*ij}(x, p),$$

что в точности является картановским фундаментальным метрическим d-тензорным полем пространства Картана-Минковского $(M^n, K(p))$.

Замечание.

i) Из 1-однородности функции Картана-Минковского K и определения $g^{ij}(x, p)$ следует, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i} = g^{ij}(x, p) p_j = g^{*ij}(x, p) p_j.$$

ii) Отметим, что мы также имеем $\mathcal{E} = K^2 = g^{ij} p_i p_j = g^{*ij} p_i p_j$.

2 Локальные компоненты 4-псевдоскалярного произведения

Вслед за этим, мы установим соотношение между обобщенной гамильтоновой метрикой $g^{ij}(x, p)$ и метрикой Картана-Минковского $g^{*ij}(x, p)$.

Теорема 1. *Выполняется соотношение:*

$$3g^{ij} = g^{*ij} + 2 \frac{g^{*i0} g^{*j0}}{g^{*00}},$$

где $g^{*i0} = g^{*ij} p_j$ и $g^{*00} = g^{*ij} p_i p_j$.

Доказательство. Для регулярной обобщенной гамильтоновой метрики мы имеем равенство [5], [6]

$$g^{*ij} = g^{ij} + \frac{\partial g^{ik}}{\partial p_j} p_k. \quad (2.1)$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{E} = K^2$, мы можем записать $g^{ij}(x, p)$ в более удобной форме

$$g^{ij}(x, p) = \frac{1}{12\mathcal{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{E}^2}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Теперь, заменяя $g^{ij}(x, p)$ на (2.1) и используя тот факт, что $\mathcal{E}$ является 2-однородной, прямой расчет приводит к

$$g^{*ij} = 3g^{ij} - \frac{1}{2\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_j}. \quad (2.2)$$

Поскольку мы имеем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i} = g^{ij}(x, p) p_j,$$

то мы получим

$$g^{*ij} = 3g^{ij} - 2 \frac{g^{i0} g^{j0}}{g^{00}},$$

где $g^{i0} = g^{ij} p_j$ и $g^{00} = g^{ij} p_i p_j = \mathcal{E}$.

Обратное соотношение немедленно следует из (2.2), если мы отметим, что

$$2g^{*i0} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p_i \partial p_j} p_j = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i}$$

и

$$\mathcal{E} = g^{*00} = g^{*ij} p_i p_j,$$

и наше утверждение доказано.

Теперь выразим коэффициенты $G^{ijkl}(x, p)$ в терминах картановского фундаментального метрического d-тензорного поля $g^{ij}(x, p)$. Посредством прямого вычисления мы получим уравнение

$$4!G^{ijkl} = 2S\mathcal{E}^{ijk}\mathcal{E}^l + 2(\mathcal{E}^{ij}\mathcal{E}^{kl} + \mathcal{E}^{ik}\mathcal{E}^{jl} + \mathcal{E}^{il}\mathcal{E}^{jk}) + 2\mathcal{E}\mathcal{E}^{ijkl},$$

где знак S означает циклическую сумму и верхние индексы у $\mathcal{E}$ означают дифференцирование по соответствующим компонентам $p = (p_i)$. Если в выше данном равенстве мы сделаем замену

$$\mathcal{E} = g^{*00}, \mathcal{E}^i = 2g^{*i0}, \mathcal{E}^{ij} = 2g^{*ij}, \mathcal{E}^{ijk} = 2g^{*ij,k}, \mathcal{E}^{ijkl} = 2g^{*ij,kl},$$

тогда требуемое соотношение таково:

$$4!G^{ijkl} = 2Sg^{*ij,k}g^{*l0} + 2(g^{*ij}g^{*kl} + g^{*ik}g^{*jl} + g^{*il}g^{*jk}) + 2g^{*00}g^{*ij,kl}.$$

Обозначим $g_{\omega^1\omega^2}^* = g^{*ij}\omega_i^1\omega_j^2$, где $\omega^1, \omega^2 \in \Gamma(T^*M)$. Посредством простого вычисления мы получим теорему:

Теорема 2. Компоненты 4-псевдоскаляра выражаются посредством:

$$(\theta, \theta, \eta, \eta) = 2 \sum g_{\theta\theta,\eta}^* g_{\eta 0}^* + 2(g_{\theta\theta}^* g_{\eta\eta}^* + 2g_{\theta\eta}^* g_{\theta\eta}^*) + 2g^{*00} g_{\theta\theta,\eta\eta}^*$$

и

$$\begin{aligned} (\theta, \theta, \theta, \eta) + (\theta, \eta, \eta, \eta) = & 2 \sum g_{\theta\theta,\theta}^* g_{\eta 0}^* + 6g_{\theta\theta}^* g_{\theta\eta}^* + 2g^{*00} g_{\theta\theta,\theta\eta}^* + \\ & + 2 \sum g_{\theta\eta,\eta}^* g_{\eta 0}^* + 6g_{\theta\eta}^* g_{\eta\eta}^* + 2g^{*00} g_{\theta\eta,\eta\eta}^*, \end{aligned}$$

где $\theta, \eta \in \Gamma(T^*M)$.

3 v-ковариантное дифференцирование в Павловском случае $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$

Рассмотрим M^4 как 4-мерное многообразие. Пусть

$$K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4},$$

где $p_1 p_2 p_3 p_4 > 0$, – метрика Бервальда-Мора, изученная Павловым в работе [8]. Тогда абсолютная гамильтонова энергия равна:

$$\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}.$$

В этом случае, используя обозначение $(a, b, c, d) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, матрица $(g^{ij}(x, p))$ и обратная к ней $(g_{ij}(x, p))$ выражаются так:

$$g^{ij}(x, p) = \frac{1}{12K^2} \begin{pmatrix} 0 & cd & bd & bc \\ cd & 0 & ad & ac \\ bd & ad & 0 & ab \\ bc & ac & ab & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$g_{ij}(x, p) = K^2 \begin{pmatrix} -\frac{2a}{3dcb} & \frac{1}{3cd} & \frac{1}{3db} & \frac{1}{3cb} \\ \frac{1}{3cd} & -\frac{2b}{3dca} & \frac{1}{3da} & \frac{1}{3ca} \\ \frac{1}{3db} & \frac{1}{3da} & -\frac{2c}{3dba} & \frac{1}{3ba} \\ \frac{1}{3cb} & \frac{1}{3ca} & \frac{1}{3ba} & -\frac{2d}{3cba} \end{pmatrix},$$

где $\det g = -3(abcd)^2 \neq 0$ для $abcd > 0$.

Другими словами, мы имеем

$$g^{ii}(x, p) = 0, \quad \forall i = \overline{1, 4},$$

$$g^{i_1 i_2}(x, p) = \frac{p_{i_3} p_{i_4}}{12\mathcal{E}}, \quad i_1 \neq i_2,$$

где $\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$. Обратная матрица имеет компоненты

$$g_{ii}(x, p) = -\frac{8p_i^2}{\mathcal{E}}, \quad \forall i = \overline{1, 4},$$

$$g_{i_1 i_2}(x, p) = \frac{4\mathcal{E}}{g^{i_1 i_2}} = \frac{48\mathcal{E}^2}{p_{i_3} p_{i_4}} H p_{i_1} p_{i_2}, \quad i_1 \neq i_2,$$

где $\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$. Более того, мы имеем

$$g^{*ii}(x, p) = -\frac{\mathcal{E}}{8p_i^2}, \quad g^{*i_1 i_2}(x, p) = \frac{p_{i_3} p_{i_4}}{8\mathcal{E}},$$

где $g^{*ij}(x, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2}{\partial p_i \partial p_j}$ и $\mathcal{E} = K^2$. Отметим, что мы имеем

$$g^{i_1 i_2}(x, p) = \frac{2}{3} g^{*i_1 i_2}(x, p), \quad i_1 \neq i_2.$$

Пусть

$$C^{hjk} = g^{hi} C_i^{jk} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^{hk}}{\partial p_j} + \frac{\partial g^{jh}}{\partial p_k} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial p_h} \right)$$

– компоненты, которые определяют коэффициенты C_i^{jk} вертикального ковариантного дифференцирования [6], порождаемого обобщенной гамильтоновой метрикой $g^{ij}(x, p)$.

Замечание. Отметим, что тензорное поле

$$C_i^{jk} = -\frac{1}{2} g_{is} \left(\frac{\partial g^{sk}}{\partial p_j} + \frac{\partial g^{js}}{\partial p_k} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial p_s} \right)$$

дает v -коэффициенты v -ковариантного дифференцирования с метрическим свойством [6]:

$$g^{ij|k} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial p_k} + C_s^{ik} g^{sj} + C_s^{jk} g^{is} = 0.$$

В дальнейшем мы будем придерживаться того же соглашения: мы будем обозначать посредством i_1, i_2, i_3, i_4 различные значения от 1 до 4 ($i_j \neq i_k$ for $j \neq k$). Тогда для различных индексов i_1, i_2, i_3 , мы имеем

$$\begin{aligned} C^{i_1 i_2 i_3} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial g^{*i_1 i_3}}{\partial p_{i_2}} + \frac{\partial g^{*i_2 i_1}}{\partial p_{i_3}} - \frac{\partial g^{*i_2 i_3}}{\partial p_{i_1}} \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}^{i_1 i_3 i_2} + \frac{1}{2} \mathcal{E}^{i_2 i_1 i_3} - \frac{1}{2} \mathcal{E}^{i_2 i_3 i_1} \right) = -\frac{1}{6} \mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3}. \end{aligned}$$

Тем же способом мы получим, что

$$C^{i_1 i_1 i_2} = C^{i_1 i_2 i_1} = 0,$$

$$C^{i_2 i_1 i_1} = -\frac{1}{3} \mathcal{E}^{i_1 i_1 i_2},$$

$$C^{i_1 i_1 i_1} = 0.$$

Теперь мы получим коэффициенты $C_i^{jk} = g_{is} C^{sjk}$ в терминах энергии $\mathcal{E}$.

Теорема 3. *v -Коэффициенты v -ковариантных дифференцирований в обобщенном гамильтоновом пространстве $GH^4 = (M^4, g^{ij}(x, p))$ даются формулами:*

$$\begin{aligned} C_{i_1}^{i_2 i_3} &= \frac{4}{3} \frac{p_{i_1}^2}{\mathcal{E}} \mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3} - 8p_{i_1} p_{i_4} \mathcal{E}^{i_2 i_3 i_4}, \\ C_{i_1}^{i_1 i_2} &= -8p_{i_1} p_{i_3} \mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3} - 8p_{i_1} p_{i_4} \mathcal{E}^{i_1 i_2 i_4}, \\ C_{i_1}^{i_2 i_2} &= \frac{8}{3} \frac{p_{i_1}^2}{\mathcal{E}} \mathcal{E}^{i_1 i_2 i_2} - 16p_{i_1} p_{i_3} \mathcal{E}^{i_2 i_2 i_3} - 16p_{i_1} p_{i_4} \mathcal{E}^{i_2 i_2 i_4}, \\ C_{i_1}^{i_1 i_1} &= -16p_{i_1} p_{i_2} \mathcal{E}^{i_2 i_1 i_1} - 16p_{i_1} p_{i_3} \mathcal{E}^{i_3 i_1 i_1} - 16p_{i_1} p_{i_4} \mathcal{E}^{i_4 i_1 i_1}. \end{aligned}$$

Благодарность. Настоящая работа была частично профинансирована грантом CNCSIS MEN A1478.

References

- [1] Gh. Atanasiu, *The invariant expression of Hamilton geometry*, Tensor N. S. 47, 3 (1988), 225-234.
- [2] Gh. Atanasiu, M. Hashiguchi, *Semi-symmetric Miron connections in dual Finsler spaces*, Reports of the Faculty of Science, Kagoshima Univ., Japan, 20 (1987), 43-49.
- [3] Gh. Atanasiu, F. C. Klepp, *Nonlinear connection in cotangent bundle*, Publ. Math., Debrecen, Hungary 39, f. 1-2 (1991), 107-111.
- [4] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, *New aspects in geometry of time dependent generalized metrics*, Tensor N. S. 50, 3 (1991), 248-255.
- [5] V. Balan, N. Brînzei, *Einstein equations for the Berwald-Moor type Euclidian-locally Minkowski relativistic model*, (2005), preprint.
- [6] R. Miron, *Hamilton geometry*, An. Şt. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, Romania, 35 (1989), 33-85.
- [7] R. Miron, *The geometry of Cartan spaces*, Prog. in Math., India, 22 (1988), 1-38.
- [8] D. G. Pavlov, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 31-39.
- [9] D. G. Pavlov, *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 5-18.

Введение

Предлагаемый математический аппарат является полным аналогом комплексного исчисления для n -мерных гиперкомплексных чисел с любым числом степеней свободы n и предназначен для математического моделирования нелинейных, многосвязных, неоднородных и анизотропных физических объектов. При создании этого математического инструмента использована принципиально новая расстановка приоритетов, которая отличает его от всего, что было до этого создано. Здесь не навязывают алгебраические свойства простейших чисел (действительных или комплексных) более сложным многомерным гиперкомплексным числам, а находят правила вычисления аналитических функций многомерных переменных как моделей нелинейного многосвязного физического мира непосредственно из свойств природы, т.е. здесь первична материя, а не сознание. Из этих правил, как частный случай взаимосвязей в природе, следуют и алгебраические операции, как элементарные аналитические функции. В результате для каждого n однозначно получают свои условия аналитичности, паритетные преобразования, подобные преобразованиям Лапласа или Фурье, находят свою геометрию, многомерный полный аналог тригонометрии, логарифмические преобразования, конформные отображения и многомерные аналоги любых других формул или свойств комплексного исчисления.

Основные идеи полинарного исчисления впервые были изложены автором устно 20.09.1976 г. в ПДНТ в Пензе, 25.04.78 г. в личной беседе с академиком А.Н. Колмогоровым в день его 75-летнего юбилея в МГУ, который подтвердил отсутствие этого в математике и в приоритетных публикациях ВИНТИ [1-3]. Первые эксперименты, объективно доказывающие естественность рассматриваемых здесь гиперкомплексных чисел полинарного типа и конформность их аналитических функций, были выполнены в 1976-78гг, что кратко опубликовано в работах [1, 4]. Наиболее полно предлагаемая теория аналитических функций полинарного переменного впервые опубликована в монографии [5] в 1983г. Эксперименты, подтвердившие наличие аналитической взаимосвязи между напряжениями и деформациями в гиперкомплексной форме в базисе $j^3 = 1$ при испытании стальных материалов на сложное деформирование по ломаным траекториям, были выполнены в 1985г [6]. Серия механических и электронных приборов для выполнения точных экспериментов по определению естественных математических инструментов, какими пользуется природа для взаимосвязей механических или электрических элементов, была изготовлена автором в 1992-94гг [7-8]. Программа вычисления аналитических функций инженерного калькулятора для естественных гиперкомплексных чисел-векторов и чисел-тензоров была создана и отлажена в 1998 году [9-11].

Математическая формула является точным выражением научной мысли человека. Словесные определения могут трактоваться различными

учеными по разному, неоднозначно. Например, понятие неоднородного уравнения в математике отличается от понятия неоднородной нагрузки в трехфазной электрической цепи. Для избежания подобных разночтений уточним основные понятия или определения свойств изучаемых объектов так, как их следует понимать в рамках данной работы. В данной работе ограничимся изучением нелинейных многосвязных объектов механики и электротехники.

- Переход от одномерного явления к подобному многомерному явлению или объекту назовем многомерным *расширением*.

- Многосвязный объект может содержать несколько многомерных расширений. Каждое расширение изучаем отдельно как взаимосвязь векторов, а затем их объединяем в более сложную взаимосвязь тензорного типа.

- Состояние одномерного объекта определяется скаляром (действительным, вещественным числом) на его входе и на выходе.

- При одном многомерном расширении состояние объекта определяется вектором. Вектор – физическая величина, имеющая n упорядоченно расположенных *взаимно независимых* действительных параметров одинаковой физической размерности, равноправно влияющих на многомерный объект и полностью определяющих его состояние. Независимость координат вектора означает полное отсутствие каких-либо взаимосвязей между ними, т.е. изменение одной координаты вектора на входе объекта не влияет на остальные входные координаты.

Вектор можно представить периодической решетчатой функцией, имеющей числовые значения в дискретных точках, и гиперкомплексным числом [4, 12].

- Ограничимся изучением лишь таких многомерных объектов, для которых:

а) справедлив закон сохранения числа степеней свободы на входе, выходе и внутри объекта в любой координатной системе;

б) при многомерном расширении физического явления вид уравнения (закона) его причинно-следственной взаимосвязи типа вход-выход в векторной форме не изменяется по сравнению с его одномерным прототипом.

- Если многосвязный объект содержит два разных многомерных расширения, то *все координаты* вектора *первого расширения* получают новое многомерное расширение и вектор превращается в тензор второго ранга.

В физике реально могут быть тензоры с тремя расширениями и больше, т.е. ранг тензора может быть 2, 3, 4, 5,...

Тензор второго ранга размерностью nm , в отличие от вектора, *может иметь k взаимосвязей между координатами*. При этом его число степеней свободы N становится меньше на количество этих связей: $N = nm - k$.

Например, тензор напряжений в механике сплошной среды имеет два трехмерных расширения (главный вектор напряжений с учетом трех его поворотов дают всего девять координат), но шесть степеней свободы из-за трех связей (попарно равных касательных напряжений): $N = 3*3 - 3 = 6$.

- Любую расчетную электрическую схему или механическую конструкцию можно изучать как систему, состоящую из отдельных соединенных между собой элементов.

- Как в электричестве, так и в механике, все расчетные элементы системы можно разбить на три разнородные группы, соответствующие трем возможным видам энергии – потенциальной, кинетической и энергии диссипации. В электричестве им соответствуют C – емкость, L – индуктивность и R – резистор, а в механике – G – жесткость, m – масса и η – вязкость.

- Если объект содержит элементы одной группы (например, R или C) или одинаковой комбинации групп (например, все элементы RC или LR – типа), то условимся называть его однородным объектом, иначе это неоднородный объект.

- У линейного объекта R, L, C, G, m, η – константы. В нелинейном объекте эти величины становятся функциями входных сигналов.

- Модель нелинейного многомерного объекта – аналитическая функция многомерного переменного векторного или тензорного типа.

- Для обеспечения взаимной однозначности нелинейных взаимосвязей в многомерном объекте необходимо, чтобы эта функция была аналитически замкнута в n -мерном пространстве, т.е. аналитическая функция вектора или тензора снова должна быть представлена таким же вектором или тензором.

- Вектор имеет одно уравнение аналитической замкнутости (сплошности и неразрывности) многомерного пространства. Тензор ранга m имеет m таких уравнений плюс уравнения дополнительных взаимосвязей между координатами, если таковые имеются. Эти уравнения однозначно определяют условия аналитичности, паритетные преобразования и теорию аналитических функций векторного или тензорного переменного, т.е. весь математический аппарат гиперкомплексного переменного, подобный комплексному исчислению, но только для данного комплекта многомерных расширений.

Таким образом, задача нахождения математического аппарата, подобного комплексному, резко упрощается до элементарно простого, но точного метода аналитического моделирования многомерного объекта, впервые сформулированного автором в 1990 г в работе [13]:

- многосвязный объект изучаем настолько тщательно, чтобы научиться различать в нем все виды источников многомерности и разработать способы экспериментального изучения каждого вида многомерного расширения отдельно;

- записать уравнение физической взаимосвязи сигналов типа воздействие-реакция, вход-выход или причина-следствие в одномерном варианте;

- выполнить один вид многомерного расширения и найти физические уравнения взаимосвязи выходных координат в функции входных (для линейного объекта – в полных сигналах, для нелинейного – в малых приращениях);

- свернуть данную систему линейных уравнений к одному уравнению в векторной форме, подобному уравнению до расширения;

- выполнить это можно не для любых объектов, а лишь для симметричных объектов (условия симметрии в данном случае будут являться условиями аналитичности в частных производных);

- если векторы входа, выхода и параметра объекта выразить в виде одинаковых гиперкомплексных чисел, то при сворачивании системы уравнений в одно уравнение в гиперкомплексной форме однозначно определяется уравнение аналитической замкнутости многомерной системы счисления на действительное направление, физически отражающее сплошность и неразрывность многомерного объекта;

- используя вывод интересующей Вас формулы из теории аналитических функций комплексного переменного, где вместо уравнения замкнутости комплексных чисел на вещественное направление $i^2 = -1$ вставим полученное базисное уравнение подобной замкнутости для многомерного случая в гиперкомплексной форме, например, $j^7 = 1$ или $j^n = \sum_{k=0}^{n-1} j^k a_k$, полу-

чим подобный аналог многомерной формулы и весь математический аппарат гиперкомплексных переменных без потерь по сравнению с комплексными числами. Здесь имеются ввиду не алгебраические потери типа делителей нуля, а потери аналитические в смысле возможности вычислять аналитические функции, т.е. применять для нелинейных объектов. Здесь принципиально другая расстановка приоритетов: не теория функций является обобщением какой-либо алгебры, а алгебраические операции являются простейшими аналитическими функциями, частным случаем общей теории аналитических функций с простым и четким алгоритмом, однозначно вытекающим из свойств физических взаимосвязей в природе.

В электрических схемах трем видам энергии и их элементам C , R , L соответствуют сигналы q , $dq/dt=i$ и $d^2q/dt^2=di/dt$. Наиболее просто и точно из этих трех сигналов измеряется ток $i=dq/dt$. Поэтому экспериментальные исследования естественной математики решено было начать с создания приборов для изучения образцов с гальваническими взаимосвязями, в которых требуется создать n независимых источников напряжений и измерять n их токов [7, 8].

В механических системах тем же видам энергии соответствуют упругие, вязкие и инерционные элементы для которых требуется точно измерять, соответственно, перемещение X , его скорость $V=dX/dt$ и ускорение $a=d^2X/dt^2 = dV/dt$. Наиболее просто и точно измеряется перемещение. Поэтому для большей наглядности при демонстрации рождения естественной математики механических взаимосвязей в момент появления самих связей, была разработана и изготовлена серия приборов с упругими взаимосвязями [8].

Т.к. эксперименты на этих приборах не опровергают известные законы физики, а точно им соответствуют, то и получаемые на них результаты

можно вывести чисто теоретически с помощью известных законов и методов теоретических основ электротехники или механики.

Как в механике, так и в электричестве, эксперименты могут быть осуществлены в сосредоточенной или в распределенной формах. Физические величины можно представить в форме параметра, распределенного по длине, площади или в объеме, что соответствует числу степеней свободы в механике точки - 1, 2 или 3, а в механике твердого тела - 1, 3 или 6. В сосредоточенной форме электрическая схема может иметь любое число источников напряжений и столько же их токов, а механическая упругая конструкция - любое число воздействующих на нее внешних сил и столько же перемещений точек воздействия.

В сосредоточенной форме для сворачивания системы уравнений в векторную форму требуется симметризовать электрическую схему или механическую конструкцию. В распределенной форме приходится довольствоваться той симметрией, какой пользуется сама природа изучаемых физических взаимосвязей. Поэтому сворачивание физических уравнений теории упругости в главных координатах для плоского и объемного деформирования к одноосной форме закона упругости $\sigma = E\varepsilon$ однозначно дает нам условия такого сворачивания в виде простых уравнений ($j^2 = 1$ - для плоского и $j^3 = 1$ - для объемного случаев) и, с их помощью, естественные математические инструменты, подобные комплексным числам, т.е. математику природы [14-16].

1. Эксперимент 1. Экспериментальное определение естественного базиса упругих взаимосвязей между напряжениями и деформациями

Рассмотрим кратко две ступени многомерного расширения явления линейной упругости в главных координатах в сравнении с одноосным растяжением.

1.1. Одноосное (одномерное) растяжение упругой нити

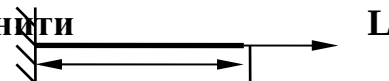


Рис. 1.

В этом случае удлинение ΔL нити пропорционально приложенной силе P (закон Гука): $\Delta L = PL/ES$.

Тот же закон в распределенной форме: $\sigma = E\varepsilon$ или $\varepsilon = \sigma/E$, где $\varepsilon = \Delta L/L$ - деформация, $\sigma = P/S$ - напряжение, E - модуль упругости, S - площадь сечения упругой нити или стержня.

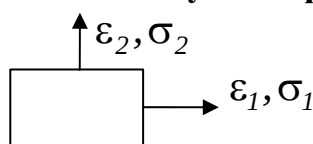
1.2. Двухосное растяжение пластины

Если растяжению подвергается упругая пластина, резиновый медицинский бинт или малый элемент плоской упругой деформируемой детали, то имеем упругую взаимосвязь двух напряжений с двумя деформациями:

$$\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \nu\sigma_2)/E,$$

$$\varepsilon_2 = (\sigma_2 - \nu\sigma_1)/E,$$

где ν - коэффициент Пуассона, рис.2.



Умножая второе уравнение на некоторое число $\imath$ и складывая оба уравнения,

получим для деформации выражение, подобное комплексному числу:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \varepsilon_1 + \imath \varepsilon_2 = [\sigma_1 + \imath \sigma_2 - \nu(\sigma_2 + \imath \sigma_1)]/E = \\ &= [\sigma_1 + \imath \sigma_2 - \imath \nu(\sigma_1 + \sigma_2/\imath)]/E = \\ &= (\sigma_1 + \imath \sigma_2)(1 - \imath \nu)/E.\end{aligned}$$

В последнем равенстве за скобку было вынесено выражение $\sigma_1 + \imath \sigma_2$, что возможно только при одном условии: $\imath = 1/\imath$ или, проще $\imath^2 = 1$. Оказалось, что при двухмерном расширении явления упругости система физических уравнений однозначно сворачивается снова к виду одномерного закона Гука, если все векторы выразить в гиперкомплексной форме в базисе $\imath^2 = 1$: $\bar{\varepsilon} = \bar{\sigma}/\bar{E}$, где

$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \imath \varepsilon_2$ - вектор деформаций, $\bar{\sigma} = \sigma_1 + \imath \sigma_2$ - вектор напряжений,

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{1 - \imath \nu}{E} \quad - \quad \text{вектор-константа} \quad \text{материала.} \quad (1)$$

Как и одномерный закон упругости, новый закон для плоского случая можно записать и в обратной форме: $\bar{\sigma} = \bar{E} \bar{\varepsilon}$, где

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \imath \nu} * \frac{1 + \imath \nu}{1 + \imath \nu} = E \frac{1 + \imath \nu}{1 - \nu^2}.$$

Т.к. уравнение $\imath^2 = 1$ имеет два корня (± 1), то и новый закон упругости пластины имеет два частных случая. Подставим по очереди корни в (1):

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (\sigma_1 + \sigma_2)(1 - \nu)/E$ - закон деформации площади пластины,

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)(1 + \nu)/E$ - закон изменения формы пластины, что соответствует экспериментам и существующей теории упругости.

1.3. Трехосное растяжение элементарного параллелепипеда в пространстве

При трехмерном расширении явления упругости в главных координатах эксперимент дает три физических уравнения с тремя неизвестными, а вместо деформируемого плоского прямоугольника рассматривают в трехмерном пространстве элементарный параллелепипед (рис.3):

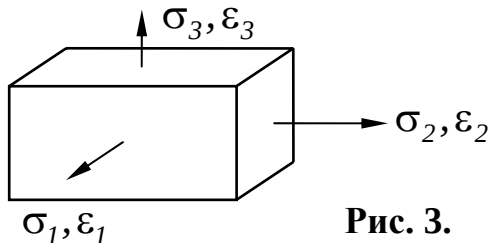


Рис. 3.

$$\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \nu \sigma_2 - \nu \sigma_3)/E,$$

$$\varepsilon_2 = (\sigma_2 - \nu \sigma_3 - \nu \sigma_1)/E,$$

$$\varepsilon_3 = (\sigma_3 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_2)/E. \quad (2)$$

Система уравнений (2) однозначно сворачивается к одномерной форме, но уже в трехмерных гиперкомплексных числах в базисе $j^3 = 1$: $\vec{\varepsilon} = \vec{\sigma}/\vec{E}$, где

$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + j^2\varepsilon_3$ - трехмерное гиперкомплексное число-вектор деформаций,

$\vec{\sigma} = \sigma_1 + j\sigma_2 + j^2\sigma_3$ - трехмерное гиперкомплексное число-вектор напряжений,

$1/\vec{E} = (1 - j\nu - j^2\nu)/E$ - гиперкомплексное число-константа материала. (3)

Алгебраическое уравнение $j^3 = 1$ имеет три корня - действительное число 1 и пару сопряженных комплексных чисел $e^{\pm 2\pi i/3} = -0.5 \pm i\sqrt{3}/2$.

Подстановка этих корней в общий закон упругости (3) дает частные случаи, точно подтверждающиеся в прецизионно исполненных экспериментах на сложное деформирование стальных материалов [4].

2. Краткая теория аналитических функций полинарного аргумента

2.1. Многомерное обобщение естественных гиперкомплексных чисел

Найденные для двух многомерных расширений в упругих взаимосвязях гиперкомплексные числа подтверждаются в подобных расширениях для гальванических, электростатических и магнитных взаимосвязей и могут быть обобщены для n -мерного случая в виде гиперкомплексного n -мерного числа

$$\vec{X} = \sum_{k=0}^{n-1} j^k X_k \text{ в базисе } j^n = 1. \quad (4)$$

С учетом комплексного числа (базисное уравнение $i^2 = -1$) обобщенный базис можно записать в такой форме $j^n = \pm 1$, но в общем случае в качестве базисного можно рассматривать любое алгебраическое уравнение степени n :

$$j^n = \sum_{k=0}^{n-1} j^k a_k.$$

Если координаты X_k гиперкомплексного числа (4) являются вещественными независимыми числами, то такие гиперкомплексные числа в работах [1-6] были названы полинарными числами-векторами. Но в качестве координат X_k могут применяться и комплексные числа и такие же гиперкомплексные числа с другими многомерными расширениями. Такие числа называются полинарными числами-тензорами, координаты которых могут иметь взаимосвязи между собой, что снижает общее число степеней свободы тензора.

2.2. Паритетные преобразования полинарных чисел

Алгебраическое уравнение n -й степени имеет ровно n комплексных и/или вещественных корней (основная теорема алгебры). В частности, базисное уравнение $j^n = 1$ имеет n комплексных корней, симметрично расположенных через равные углы на комплексной плоскости и определяющихся выражением:

$$j_p = e^{2\pi p i / n} = \cos 2\pi p / n + i \sin 2\pi p / n. \quad (5)$$

Подставляя корень с номером p в гиперкомплексное число (4), получаем его изображение с номером p на комплексной плоскости:

$$\tilde{X}_p = \sum_{k=0}^{n-1} j^{kp} X_k, \text{ где } p=0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (6)$$

Т.к. корней всего n , то изображений полинарного числа-вектора тоже n . Поэтому система линейных уравнений (6) однозначно разрешима относительно координат X_k , которые вычисляют по следующей формуле:

$$X_k = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} j^{-kp} \tilde{X}_p, \text{ где } k=0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (7)$$

Преобразования (6) - (7) названы автором в работе [5] паритетными преобразованиями (от слова *paritas* - равенство). По формуле (6) вычисляют равноправные изображения гиперкомплексного числа-вектора (4), а по формуле (7) находят оригинал, т.е. координаты исходного числа-вектора.

2.3. Алгоритм вычисления аналитической функции полинарного переменного

Все комплексные изображения полинарного числа обладают двумя полезными свойствами (многие доказательства здесь для краткости опускаем, т.к. при необходимости их можно найти в ранних работах, например, в [5]):

а) изображение суммы двух чисел-векторов равно сумме их изображений, т.е. если $\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$, то $\tilde{X}_p = \tilde{X}_{1p} + \tilde{X}_{2p}$;

б) изображение произведения двух полинарных чисел-векторов равно произведению их изображений, т.е. если $\vec{X} = \vec{X}_1 \vec{X}_2$, то $\tilde{X}_p = \tilde{X}_{1p} \tilde{X}_{2p}$.

Указанные свойства позволяют точно вычислять любые аналитические функции гиперкомплексных чисел-векторов и чисел-тензоров полинарного типа и, в том числе, дифференциально-интегральные операции. Аналитическая функция дифференцируема и разложима в степенной ряд. Для вычисления функции в форме ряда достаточно уметь выполнять сложение и умножение. Поэтому указанные два свойства паритетных изображений можно объединить в одну фундаментальную теорему полинарного исчисления:

Паритетное изображение номер p аналитической функции гиперкомплексного переменного полинарного типа равно такой же аналитической функции от паритетного изображения аргумента с номером p . Или, короче:

$$\text{изображение функции равно функции изображения: } \tilde{F}_p(\vec{X}) = F(\tilde{X}_p). \quad (8)$$

Паритетные преобразования позволяют свести вычисление любых аналитических функций гиперкомплексных переменных полинарного типа к вычислению таких же аналитических функций комплексных или действительных.

тельных переменных. Алгоритм вычисления аналитических функций любых полинарных чисел-векторов или чисел-тензоров содержит всего три этапа:

- вычислить вещественные координаты комплексных чисел-изображений гиперкомплексного переменного по формулам паритетных изображений;
- вычислить заданную аналитическую функцию для каждого комплексного или действительного изображения отдельно;
- по формулам вычисления координат оригинала перевести полученный ответ в исходную систему координат.

2.4. Конкретные формулы паритетных преобразований для чисел-векторов с $n=2, 3, 4$ и проверка алгоритма для квадратичной функции

2.4.1. Вычисление аналитических функций бинарного переменного

При $n=2$ гиперкомплексное число-вектор имеет вид $\bar{R} = X + \imath Y$. (9)

Базисное уравнение и его корни $\imath^2 = 1, \imath_{1,2} = \pm 1$. (10)

Паритетные изображения числа получаем подстановкой корней (10) в (9):

$$\begin{aligned} r &= X + Y, \\ \rho &= X - Y. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы вычисления оригинала получаем решением системы (11):

$$\begin{aligned} X &= (r + \rho) / 2, \\ Y &= (r - \rho) / 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Вычисление заданной функции $\bar{F}(\bar{R}) = \bar{R}^2 = U + \imath V$ с помощью общего алгоритма для числа $\bar{R} = 7 + 3\imath$:

- изображения числа $r = X + Y = 7 + 3 = 10, \rho = X - Y = 7 - 3 = 4$;
- функции изображений $R = r^2 = 10^2 = 100, P = \rho^2 = 4^2 = 16$;
- оригинал (искомая функция) $U = (R + P) / 2 = (100 + 16) / 2 = 58,$
 $V = (R - P) / 2 = (100 - 16) / 2 = 42.$

Ответ: $\bar{F}(\bar{R}) = \bar{R}^2 = U + \imath V = 58 + 42\imath$.

Для проверки вычислим эту же функцию алгебраически:

$$\bar{R}^2 = (7 + 3\imath)^2 = 7^2 + 2 * 7 * 3\imath + (3\imath)^2 = 49 + 42\imath + 9 = 58 + 42\imath.$$

Другие формы представления числа-вектора (9). Подстановкой формул (12) в число (9) выразим это число в координатах пространства изображений:

$\bar{R} = X + \imath Y = (r + \rho) / 2 + \imath (r - \rho) / 2 = \Im r + \aleph \rho$, где $\Im = (1 + \imath) / 2$,
 $\aleph = (1 - \imath) / 2$ - направляющие векторы в пространстве изображений, обладающие свойством действительной единицы, но по модулю меньше ее в $\sqrt{2}$:

$$1^2 = 1, \quad \Im^2 = \frac{(1 + \imath)^2}{2^2} = \frac{1 + 2\imath + 1}{4} = \frac{1 + \imath}{2} = \Im, \quad \aleph^2 = \aleph. \quad (13)$$

Обратные формулы для направляющих векторов: $1 = \Im + \aleph$, $\imath = \Im - \aleph$.
(14)

Вычислением функции $\bar{R} = X + \imath Y = e^{\alpha + \imath \beta}$ находим показательную форму в пространстве изображений: $\bar{R} = X + \imath Y = \Im r + \aleph \rho = r^{\Im} \rho^{\aleph}$.
(15)

Из формулы (15) видно еще одно удивительное свойство паритетных изображений – для перевода вектора из формы в виде суммы координат к форме в виде произведения координат не требуется пересчитывать ни координаты, ни направляющие векторы: $\bar{R} = \Im r + \aleph \rho = r^{\Im} \rho^{\aleph}$. Это свойство сохраняется для полинарных чисел-векторов с любым числом степеней свободы n .

Данное двумерное число является полным аналогом комплексного числа.

Те же приемы применимы и для чисел с другими n , что делает их так же полными аналогами комплексных чисел.

2.4.2. Трехмерные паритетные преобразования и их аналитические функции

При $n=3$ гиперкомплексное число-вектор принимает следующий вид:

$$\vec{R} = X + jY + kZ, \text{ где } k = j^2. \quad (16)$$

Базисное уравнение и его корни $j^3 = 1$, $j_0 = 1$, $j_{1,2} = -0.5 \pm i\sqrt{3}/2$. (17)

Паритетные изображения числа получаем подстановкой корней (17) в (16):

$$\begin{aligned} r &= X + Y + Z, \\ p &= X - (Y + Z)/2, \\ q &= \sqrt{3}(Y - Z)/2, \end{aligned}$$

где r - действительное изображение, $\tilde{\rho} = p + iq = \rho e^{i\varphi}$ - комплексное изображение, в котором $\rho^2 = p^2 + q^2$, $\varphi = \arctg q/p$.
(18)

Формулы вычисления оригинала получаем решением системы (18):

$$\begin{aligned} X &= (r + 2p)/3, \\ Y &= (r - p + q\sqrt{3})/3, \\ Z &= (r - p - q\sqrt{3})/3. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычисление заданной функции $\vec{F}(\vec{R}) = \vec{R}^2 = T + jU + kV$ с помощью общего алгоритма для числа $\vec{R} = 5 + 3j - k$:

- изображения числа $\vec{R}$ находим по формулам (18):

$$\begin{aligned} r &= X + Y + Z = 5 + 3 - 1 = 7, \\ p &= X - (Y + Z)/2 = 5 - (3 - 1)/2 = 4, \\ q &= \sqrt{3}(Y - Z)/2 = \sqrt{3}(3 + 1)/2 = 2\sqrt{3}; \end{aligned}$$

- вычисляем заданную квадратичную функцию отдельно для вещественного и для комплексного изображений: $R = r^2 = 7^2 = 49$,

$$P + iQ = (p + iq)^2 = p^2 - q^2 + 2pqi,$$

откуда находим $P = p^2 - q^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 = 16 - 12 = 4$,

$$Q = 2pq = 2 * 4 * 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3};$$

- оригинал (координаты искомой функции) вычисляем по формулам (19):

$$T = (R + 2P)/3 = (49 + 2 * 4)/3 = 19,$$

$$U = (R - P + Q\sqrt{3})/3 = (49 - 4 + 16\sqrt{3}\sqrt{3})/3 = 31,$$

$$V = (R - P - Q\sqrt{3})/3 = (49 - 4 - 16\sqrt{3}\sqrt{3})/3 = -1.$$

Ответ: $\vec{F}(\vec{R}) = \vec{R}^2 = T + jU + kV = 19 + 31j - k$.

Для проверки вычислим эту же функцию алгебраически по известной формуле $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$:

$$\vec{F}(\vec{R}) = \vec{R}^2 = (5+3j-k)^2 = 25 + 9k + j + 2(15j - 3 - 5k) = 19 + 31j - k.$$

Для экономии места мы выбрали простейшую квадратичную функцию, но проверок общей теории функций было выполнено большое количество как теоретических, так и экспериментальных. Подтверждение – 100%.

Эксперимент 2. Стальные образцы в виде трубки подвергались сложным деформациям по ломаным траекториям с одновременным растяжением (до 30 тонн), кручением (до 2000 Нм) и внутренним давлением (до 300 атм). Траектории напряжений и деформаций пересчитывались в главные координаты и изображались на плоскости как комплексные изображения реальных функций. Все углы изломов для деформаций оказались равными соответствующим углам изломов в траекториях напряжений. Это подтвердило наличие в природе физической взаимосвязи между напряжениями и деформациями в виде некоторой аналитической функции комплексного переменного на октаэдрической площадке. Другими словами – закон изменения формы при сложном деформировании может быть смоделирован аналитической функцией комплексного переменного. Другой инвариант, соответствующий действительному паритетному изображению, известен в механике как закон изменения объема тела при его деформировании. Эксперимент подробнее описан в работе [4].

Другие формы представления числа-вектора (16) получаем по аналогии с двумерным числом. Подстановкой формул (19) в число (16) выразим это число в координатах пространства изображений, а через экспоненциальную функцию найдем и показательную форму в виде произведения изображений. В итоге находим основные формы представления трехмерного вектора в различных координатных системах оригинала и изображения в базисе $j^3 = 1$, $k = j^2$:

$$\vec{R} = X + jY + kZ = Jr + K\rho e^{I\varphi} = Jr + Kp + Iq = r^J \rho^K e^{I\varphi} \quad (20)$$

Здесь приведены векторная форма, вектор в декартовых координатах (оригинал) и три формы его изображений в симметричных координатах. Взаимосвязи между разными координатами и направляющими векторами:

$$\begin{aligned} r &= X + Y + Z, \quad p = X - (Y + Z)/2, \quad q = \sqrt{3}(Y - Z)/2, \\ X &= (r + 2p)/3, \quad Y = (r - p + q\sqrt{3})/3, \quad Z = (r - p - q\sqrt{3})/3, \\ \rho^2 &= p^2 + q^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \sqrt{3}(Y - Z)/(2X - Y - Z), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} J &= (1 + j + k)/3, \quad K = (2 - j - k)/3, \quad I = (j - k)/\sqrt{3}, \\ 1 &= J + K, \quad j = J - K/2 + I\sqrt{3}/2, \quad k = J - K/2 - I\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

Трехмерные числа достаточно полно изложены в работах [8, 9, 15, 17].

Рассмотрим предложенные тематикой конкурса 2003г. числа типа H_4 .

2.4.3. Аналитические функции четырехкоординатных чисел в базисе $j^4 = 1$

При $n=4$ гиперкомплексное число-вектор $\vec{X} = \sum_{k=0}^{n-1} j^k X_k$ имеет вид:

$$\vec{R} = a + jb + j^2c + j^3d = a + jb + kc + sd,$$

где $k = j^2$, $s = j^3$. (22)

Найдем корни базисного уравнения из выражения $j^4 = 1 = e^{2\pi i}$:

$$j_{(p)} = j^p = e^{2\pi i p/4} = \operatorname{Cos} \pi p/2 + i \operatorname{Sin} \pi p/2, \quad p=0, 1, 2, 3,$$

откуда $j_{0,2} = \pm 1$, $j_{1,3} = \pm i$, где $i = \sqrt{-1}$. (23)

Оказалось, что базисному уравнению удовлетворяют два вещественных корня сопряженных в бинарной форме (в базисе $i^2 = 1$) и два сопряженных комплексных корня (базис $i^2 = -1$), т.е. данный вектор содержит два двухмерных расширения и может быть представлен тензором второго ранга, т.е. как бинарное число с комплексными координатами или как комплексное число с бинарными координатами. Для вычисления функции такого переменного необходимо найти формулы паритетных преобразований для двух вещественных и одного комплексного изображений, инвариантных относительно сложения и умножения, т.е. аналитических инвариантов.

Паритетные изображения гиперкомплексного числа в общем виде получаем подстановкой корней (23) в (22):

$$\begin{aligned} r1 &= a + b + c + d = m + n, \\ r2 &= a - b + c - d = m - n, \\ \tilde{r}1 &= a + ib - c - id = p + iq, \\ \tilde{r}2 &= a - ib - c + id = p - iq. \end{aligned} \quad (24)$$

Функция сопряженного комплексного переменного равна, как известно, сопряженной функции, т.е. если $f(p + iq) = U + iV$, то $f(p - iq) = U - iV$.

Это частный случай фундаментальной теоремы полинарного исчисления, гласящей, что изображение функции равно функции изображения. Из этой теоремы следует, что для нахождения координат U, V достаточно вычислить функцию комплексного переменного один раз, но для изображений в вещественной форме надо это делать для каждого изображения отдельно.

Из формул (24) выписываем систему уравнений для вычисления координат изображений и, решая ее, получаем формулы вычисления оригинала:

Координаты изображений	Координаты оригинала
$m = a + c,$	$a = (m + p) / 2,$
$n = b + d,$	$b = (n + q) / 2,$
$p = a - c,$	$c = (m - p) / 2,$
$q = b - d,$	$d = (n - q) / 2.$

(25)

Смысл паритетных преобразований состоит в том, что любые аналитические действия с полинарным аргументом точно копируются его изображениями (действительными, бинарными или комплексными) и геометрически являются его проекциями на координатные оси или плоскости. Взаимосвязь координат оригинала и изображений для всех полинарных чисел линейна и взаимнооднозначна, поэтому применима и в обратном порядке, т.е. все свойства, которыми обладают действительные и комплексные числа, как паритетные изображения полинарного переменного, распространяются и на него. Например, если комплексные числа коммутативны, то коммутативны и полинарные числа, т.е. полинарные числа векторного и тензорного типов являются точными аналогами аналитических вещественных и комплексных чисел и также аналитичны.

В данном базисе имеем пару бинарных изображений и одно комплексное:

Бинарные преобразования /см. (24)/:

Изображения	Оригинал
$r_1 = m + n,$	$m = (r_1 + r_2) / 2,$
$r_2 = m - n,$	$n = (r_1 - r_2) / 2.$

(26)

Комплексное изображение:

$$\tilde{\rho} = p + iq. \quad (27)$$

В результате получаем следующий алгоритм вычисления любой аналитической функции $f(a + jb + kc + sd) = A + jB + kC + sD$

четырехмерного переменного в базисе $j^4 = 1$:

а) вычисляем координаты паритетных изображений аргумента по формулам (25) и сами изображения по формулам (26-27);

б) вычисляем заданную функцию f три раза для всех трех изображений:

$$f(r_1) = R_1, \quad f(r_2) = R_2, \quad f(p + iq) = P + iQ;$$

в) по формулам (25-26) можем представить результат вычислений в координатах оригинала (этот пункт не всегда обязателен, т.к. во многих фи-

зических задачах проще продолжить исследование в пространстве изображений):

$$\begin{aligned} M &= (R_1 + R_2)/2, & N &= (R_1 - R_2)/2, \\ A &= (M + P)/2, & B &= (N + Q)/2, \\ C &= (M - P)/2, & D &= (N - Q)/2. \end{aligned} \quad (28)$$

Вычислим квадратичную функцию $f(\vec{R}) = \vec{R}^2 = A + jB + kC + sD$

для гиперкомплексного числа $\vec{R} = a + jb + kc + sd = 7 + 2j - 3k + 4s$.

а) Вычисляем координаты паритетных изображений аргумента

$$\begin{aligned} m &= a + c = 7 - 3 = 4, & n &= b + d = 2 + 4 = 6, \\ p &= a - c = 7 + 3 = 10, & q &= b - d = 2 - 4 = -2, \end{aligned}$$

и сами паритетные изображения $r_1 = m + n = 4 + 6 = 10$,

$$r_2 = m - n = 4 - 6 = -2,$$

$$\tilde{\rho} = p + iq = 10 - 2i;$$

б) вычисляем заданную функцию $f(\vec{R}) = \vec{R}^2 = A + jB + kC + sD$ для каждого из трех изображений: $f(r_1) = r_1^2 = 10^2 = 100 = R_1$,

$$f(r_2) = r_2^2 = (-2)^2 = 4 = R_2,$$

$$f(p + iq) = (p + iq)^2 = p^2 - q^2 + 2pqi = P + iQ,$$

откуда $P = p^2 - q^2 = 10^2 - (-2)^2 = 96$,

$$Q = 2pq = -2 \cdot 10 \cdot 2 = -40;$$

в) полученный ответ переводим в пространство оригиналов, вычисляя сначала бинарные координаты $M = (R_1 + R_2)/2 = (100 + 4)/2 = 52$,

$$N = (R_1 - R_2)/2 = (100 - 4)/2 = 48,$$

а затем и координаты искомой функции

$$A = (M + P)/2 = (52 + 96)/2 = 74,$$

$$B = (N + Q)/2 = (48 - 40)/2 = 4,$$

$$C = (M - P)/2 = (52 - 96)/2 = -22,$$

$$D = (N - Q)/2 = (48 + 40)/2 = 44,$$

но несложно оба этапа в пунктах а) и в) объединить в один.

$$\text{Ответ: } (7 + 2j - 3k + 4s)^2 = 74 + 4j - 22k + 44s.$$

Для проверки вычислим эту же функцию алгебраически по известной формуле

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd):$$

$$\begin{aligned} (7 + 2j - 3k + 4s)^2 &= 49 + 4k + 9 + 16k + 2(14j - 21k + 28s - 6s + 8 - 12j) = \\ &= 74 + 4j - 22k + 44s. \end{aligned}$$

Для данной функции алгебраический способ оказался значительно проще, но не стоит этим обольщаться и делать ставку при расчетах только на привычные формулы алгебры, тригонометрии или анализа. Очень лег-

ко можно не заметить ошибки. Общий алгоритм вычисления функций имеет ряд неоспоримых преимуществ: - очень сложно допустить ошибку, т.к. все вычисления сводятся только к вещественным и комплексным числам, а это мы хорошо умеем делать;

- общий алгоритм одинаков для любых гиперкомплексных чисел-векторов и чисел-тензоров и легко программируется на ЭВМ, что делает вычисления с ними незначительно сложнее вычислений на обычных калькуляторах; - паритетные преобразования в отличие от преобразований Лапласа не зависят от вида функции, что также облегчает работу с ними и их программирование. Поэтому, все алгебраические, тригонометрические или другие свойства и операции в неясных случаях следует уточнять с помощью общего алгоритма вычисления аналитических функций, который в пространстве изображений позволяет легко найти ошибку в расчетах и точнее понять физический смысл задачи.

3. Условия аналитичности для функций полинарных переменных

Смысл условий такой же, как и для функций комплексного переменного - приращение функции одинаково для приращения по любому направлению аргумента. Поэтому делить приращение функции в частных производных надо на вектор приращения аргумента, т.е. на приращение координаты, умноженное на соответствующий направляющий единичный вектор.

3.1. Условия аналитичности бинарных чисел (базис $\iota^2 = 1$)

Для функции $\bar{F}(\bar{R}) = U + \iota V$ бинарного переменного $\bar{R} = X + \iota Y$ согласно п. 3. можно вычислить производную по любому направлению:

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{R}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} = \frac{\partial \bar{F}}{\iota \partial Y}. \quad (29)$$

Из базисного уравнения $\iota^2 = 1$ следует $1/\iota = \iota$. Раскрывая (29) и приравнявая почленно, получим условия аналитичности, подобные уравнениям

Коши-Римана-Даламбера-Эйлера:
$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial X}.$$
 (30)

3.2. Условия аналитичности трехмерных чисел (базис $j^3 = 1$)

Аналогичный прием для аналитической функции $\vec{F}(\vec{R}) = T + jU + kV$ гиперкомплексного переменного $\vec{R} = X + jY + kZ$ с учетом свойств базисных чисел (единичных направляющих векторов) $1/j = k$, $1/k = j$ приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial Z}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial T}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial Z}.$$

3.3. Условия аналитичности четырехмерных чисел (базис $j^4 = 1$)

Аналогичный прием для аналитической функции $\vec{F}(\vec{R}) = A + jB + kC + sD$ гиперкомплексного переменного $\vec{R} = a + jb + kc + sd$ с учетом свойств базисных чисел (единичных направляющих векторов) $1/j = s$, $1/k = k$, $1/s = j$ приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{\partial B}{\partial b} = \frac{\partial C}{\partial c} = \frac{\partial D}{\partial d}, & \quad \frac{\partial B}{\partial a} = \frac{\partial C}{\partial b} = \frac{\partial D}{\partial c} = \frac{\partial A}{\partial d}, \\ \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{\partial D}{\partial b} = \frac{\partial A}{\partial c} = \frac{\partial B}{\partial d}, & \quad \frac{\partial D}{\partial a} = \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{\partial B}{\partial c} = \frac{\partial C}{\partial d}. \end{aligned} \quad (31)$$

Формулы (31) не совпадают с условиями аналитичности чисел H_4 , приведенными в условиях конкурса, т.е. наши четырехмерные числа отличаются от предложенных к рассмотрению чисел, но продолжим пока их рассмотрение.

Базисное уравнение нашего числа $j^4 = 1$ имеет две пары корней $(\pm 1, \pm i)$, соответствующих двум многомерным расширениям с бинарными и комплексными числами, соответственно. Поэтому применять такие числа в *физических* задачах, где базис определяет не человек, а природа изучаемого объекта, можно только там, где эти два базиса присутствуют одновременно. В *нефизических* (абстрактных) задачах применений можно придумать гораздо больше. Здесь рассмотрим возможные применения их в физике. Комплексные числа естественны для периодических объектов (длинный мост с равномерно расположенными опорами, электрические цепи переменного и периодического несинусоидального тока, колебательные процессы), для движения точечного объекта в плоскости и для описания поворотов тела в плоскости или в пространстве. Бинарные числа применимы в тех случаях, где есть два равноправных одномерных варианта типа электрического заряда $(\pm q)$, деформирования пластины (см. п.1), в теории относительности (волна может быть попутной или встречной относительно движения объекта, поэтому базис $\iota^2 = 1$ однозначно следует из преобразований Лоренца [12, 15, 17]).

Одновременно оба базиса встречаются, например, в длинных линиях электропередачи переменного тока. Здесь сама линия – это симметричный двухполюсник, для которого естественным является базис $\iota^2 = 1$ и его гиперболические функции, а переменные токи идеально описываются символическим методом, т.е. комплексными числами с круговой тригонометрией (базис $i^2 = -1$).

Но подробнее рассмотрим другое, более интересное применение таких четырехкоординатных чисел – в плоских задачах механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Подробно решение таких задач изложено в толстом фолианте [18], где академик Мухелишвили впервые применил комплексные числа для таких задач. Но о бинарных числах и, тем более, о

наших четырехмерных числах там нет ни слова. С их применением его книга бы похудела раз в десять.

В п. 1 доказана естественность базиса $\mathbf{i}^2 = 1$ для физических уравнений упругих взаимосвязей напряжений с деформациями в главных координатах. Но в реальных условиях главные координаты постоянно меняют направление в пластине (поворачиваются). Если задачу решать в неподвижных координатах, то локальные прямоугольнички деформируемого тела будут испытывать кроме нормальных еще касательные напряжения и сдвиговые деформации. Для поворота естественным является базис $\mathbf{i}^2 = -1$. Поэтому с учетом двух расширений напряжения (или деформации) можно записывать в различных формах:

а) в форме нашего вектора $\vec{\sigma} = \sigma_{11} + j\sigma_{12} + k\sigma_{22} + s\sigma_{21}$,

б) в виде комплексного числа с бинарным расширением:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_{11} + \mathbf{i}\sigma_{22}) + \mathbf{i}(\sigma_{12} + \mathbf{i}\sigma_{21}),$$

в) в виде бинарного числа с комплексным расширением:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_{11} + i\sigma_{12}) + \mathbf{i}(\sigma_{22} + i\sigma_{21}).$$

Обычно в металле выполняется закон парности касательных напряжений

$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau$ и, кроме того, их принято изображать встречно (рис. 4.):

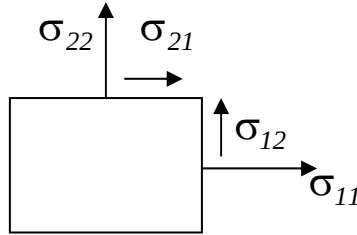


Рис. 4.

В результате наш четырехмерный вектор превратился в четырехкоординатный, но трехмерный тензор второго ранга с двумя многомерными расширениями (бинарным и комплексным): $\vec{\sigma} = (\sigma_{11} + i\tau) + \mathbf{i}(\sigma_{22} - i\tau)$. Аналогично запишем тензор деформаций: $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{11} + i\gamma) + \mathbf{i}(\varepsilon_{22} - i\gamma)$. Бинарное число имеет два паритетных (равноправных, инвариантных) изображения для $\mathbf{i} = \pm 1$:

$$\sigma_0 = \sigma_{11} + i\tau + \sigma_{22} - i\tau = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22},$$

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2\tau i = \sigma_i e^{i\varphi},$$

$$\text{где } \sigma_i = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{2\tau}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (32)$$

Т.к. приведенные базисы и их формулы найдены из природы упругих взаимосвязей, то и полученные два паритетных изображения имеют точный физический смысл, а соответствующие им частные взаимосвязи между напряжениями и деформациями точно соблюдаются в упругих материалах как законы физики.

Действительное изображение $\varepsilon_0 = f(\sigma_0)$ функции $\bar{\varepsilon} = f(\bar{\sigma})$ точно описывает закон изменения площади деформируемой пластины, а комплексное изображение $\tilde{\varepsilon}_i = f(\tilde{\sigma}_i)$ правильно описывает изменение формы. Например, по формуле $\sigma_i = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau^2}$ вычисляют предельно допустимое напряжение в плоских задачах [20]. До сих пор в МДТТ применяют неаналитичные тензоры с матричной алгеброй, которые применимы для линейно-упругих материалов. Аналитичность найденного тензора полинарного типа делает его применимым и для нелинейно-упругих задач. В работах [4, 15] приведен аналитичный тензор, пригодный для решения пространственных задач с нелинейными материалами, т.е. с применением полинарных чисел в МДТТ открываются новые перспективы их практического применения:

$$\tilde{\sigma} = \bar{\sigma} e^{i\bar{\varphi}} = (\sigma_1 + j\sigma_2 + k\sigma_3) e^{i(\alpha + j\beta + k\gamma)},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные напряжения, α, β, γ - углы поворота.

4. Геометрия полинарных чисел

При расчете устройств и цепей переменного тока широко пользуются векторными диаграммами токов, напряжений, сопротивлений, проводимостей и мощностей, представляющими собой наглядное геометрическое представление физических законов, соответственно, 1-го закона Кирхгофа для узлов, 2-го закона Кирхгофа для контуров, законов последовательного и параллельного соединения элементов цепи, а так же баланса мощностей. Диаграммы облегчают расчеты, помогают легко определить наличие ошибки в расчетах. Гиперкомплексные числа-векторы в пространстве паритетных изображений проектируются на комплексные плоскости в виде суммы векторов-координат. Важно представлять геометрическую связь пространств оригинала и изображения.

4.1. Модуль гиперкомплексного числа-вектора полинарного типа

Действительное число X графически изображают прямолинейным отрезком длины X в выбранном масштабе. Комплексное число $\tilde{R} = X + iY = \rho e^{i\varphi}$ можно изобразить на плоскости путем добавления к оси X еще одной перпендикулярной оси Y . Если выбрать одинаковые масштабы на обеих осях, то длина ρ (модуль) получившегося числа-вектора определяется по теореме Пифагора $\rho^2 = X^2 + Y^2$, откуда $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Добавляя к этому отрезку ρ еще одну перпендикулярную ось Z , мы снова можем применить теорему Пифагора для нахождения длины отрезка в трехмерном пространстве:

$$R^2 = \rho^2 + Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \text{ откуда } R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Добавлять новые оси и применять теорему Пифагора можно сколько угодно раз. Получаем формулу вычисления расстояния в многомерном

пространстве, которую будем называть суммой квадратов координат или модулем вектора:

$$R^2 = \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2. \quad (33)$$

Если добавлять новую ось не под прямым углом, то кроме квадратов появятся попарные произведения координат, т.е. квадратичность формулы (33) говорит об отсутствии неортогональных осей, об их взаимной независимости.

4.2. Геометрическая взаимосвязь пространств изображения и оригинала

4.2.1. Геометрическая интерпретация бинарных чисел (базис $\imath^2 = 1$) на комплексной плоскости, где справедлива теорема Пифагора

$$\text{Бинарное число } \bar{R} = X + \imath Y = \Im r + \aleph \rho. \quad (34)$$

$$\text{Его изображения } r = X + Y, \quad \rho = X - Y. \quad (35)$$

$$\text{Оригинал } X = (r + \rho)/2, \quad Y = (r - \rho)/2. \quad (36)$$

Подставим в сумму квадратов координат бинарного числа формулы (36):

$$R^2 = X^2 + Y^2 = [(r + \rho)^2 + (r - \rho)^2]/4 = (r^2 + \rho^2)/2. \quad (37)$$

Квадратичность координат изображений сохранилась, т.е. они взаимно перпендикулярны. Найдем направляющие косинусы новых осей относительно оригинала, для чего обозначим их и подставим в них формулы (35) изображений: $R^2 = X^2 + Y^2 = (r^2 + \rho^2)/2 = X_1^2 + Y_1^2$

Y_1

откуда $X_1 = \rho/\sqrt{2} = X/\sqrt{2} - Y/\sqrt{2},$

$$Y_1 = r/\sqrt{2} = X/\sqrt{2} + Y/\sqrt{2}.$$

Т.к. $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, то оси изображений равнонаклонны к осям оригинала (рис. 5).

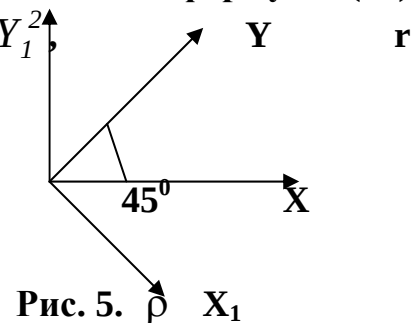


Рис. 5. ρ X_1

Направляющие векторы двух координатных систем $1, \imath, \Im, \aleph$ взаимосвязаны между собой векторными уравнениями (13-14):

$$\Im = (1 + \imath)/2, \quad \aleph = (1 - \imath)/2,$$

$$1 = \Im + \aleph, \quad \imath = \Im - \aleph.$$

Им соответствуют векторная диаграмма на комплексной плоскости (см. рис.6).

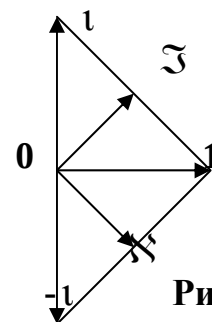


Рис. 6.

4.2.2. Взаимное расположение новых координат X_1, Y_1, Z_1 (изображений)

относительно старых координат X, Y, Z (оригинала) в базисе $j^3 = 1$

Трехмерный вектор в двух координатных системах:

$$\bar{R} = X + jY + kZ = Jr + Kp + Iq. \quad (38)$$

Координаты паритетных изображений:

$$r = X + Y + Z, \quad p = X - (Y + Z)/2, \quad q = \sqrt{3}(Y - Z)/2. \quad (39)$$

Подчеркнем, что координаты r, p, q паритетных изображений численно не являются проекциями трехмерного вектора, а несколько больше их, т.к. пространство изображений пока не нормировано, т.е. его направляющие векторы J, K, I по модулю не равны единице, а несколько меньше 1. Направляющие векторы $1, j, k=j^2$ пространства оригиналов по модулю все равны 1. Это одно из отличий полинарного исчисления. Для всех полинарных чисел координаты оригинала имеют единичные направляющие векторы, а координаты изображений имеют направляющие векторы с неединичными и разными модулями:

$$|J| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}/3 = 1/\sqrt{3}, \quad |K| = |I| = \sqrt{2/3}.$$

Но вместе (координата, умноженная на свой направляющий вектор), т.е. Jr, Kp, Iq , они точно равны проекциям вектора $\vec{R}$. Это несколько необычно для алгебраического подхода, но необходимо, т.к. *нормирование координат в пространстве изображений лишает аналитичности всю систему счисления.*

Формулы вычисления оригинала:

$$X = (r + 2p)/3, \quad Y = (r - p + q\sqrt{3})/3, \quad Z = (r - p - q\sqrt{3})/3. \quad (40)$$

Взаимосвязи между направляющими векторами:

$$J = (1 + j + k)/3, \quad K = (2 - j - k)/3, \quad I = (j - k)/\sqrt{3}, \quad (41)$$

$$1 = J + K, \quad j = J - K/2 + I\sqrt{3}/2, \quad k = J - K/2 - I\sqrt{3}/2.$$

Подставляя координаты (40) в формулу длины вектора, получим:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = [r^2 + 2(p^2 + q^2)]/3 = Z_1^2 + X_1^2 + Y_1^2. \quad (42)$$

Формулой (42) мы выполняем нормирование для того, чтобы вычислить направляющие косинусы новых осей координат относительно старых, откуда подстановкой формул (39) оригинала получаем уравнения взаимосвязи координат:

$$X_1 = \sqrt{2/3}p = \sqrt{2/3}[X - (Y + Z)/2] = X\sqrt{2/3} - Y/\sqrt{6} - Z/\sqrt{6},$$

$$Y_1 = \sqrt{2/3}q = \sqrt{2/3}[\sqrt{3}(Y - Z)/2] = Y/\sqrt{2} - Z/\sqrt{2},$$

$$Z_1 = r/\sqrt{3} = X/\sqrt{3} + Y/\sqrt{3} + Z/\sqrt{3}. \quad (43)$$

Из формул (43) видно, что ось Z_1 , вдоль которой расположено действительное изображение, имеет одинаковые косинусы относительно осей X, Y, Z .

Обычно принято обозначать направляющие косинусы буквами l, m, n , причем всегда $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, но здесь $l = m = n = 1/\sqrt{3}$. Ось r является равнонаклонной к осям X, Y, Z и является нормалью к комплексной плоскости, называемой в МДТТ октаэдрической или девиаторной. Координаты p, q лежат в этой плоскости и являются проекциями вектора согласно приве-

денным ниже векторным диаграммам на комплексной плоскости и в пространстве.

а) Векторная диаграмма на октаэдрической комплексной плоскости (рис. 7)

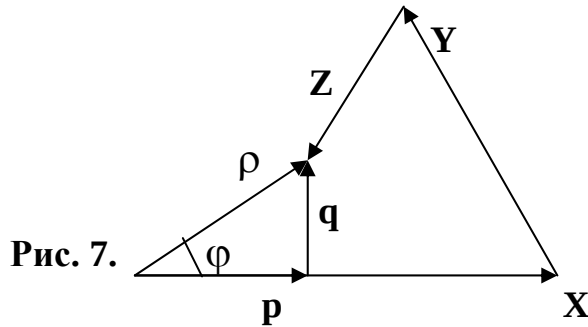


Рис. 7.

б) Векторная диаграмма взаимосвязей координат и направляющих векторов оригинала вектора и его изображений в трехмерном пространстве в естественном базисе $j^3=1$ (рис. 8).

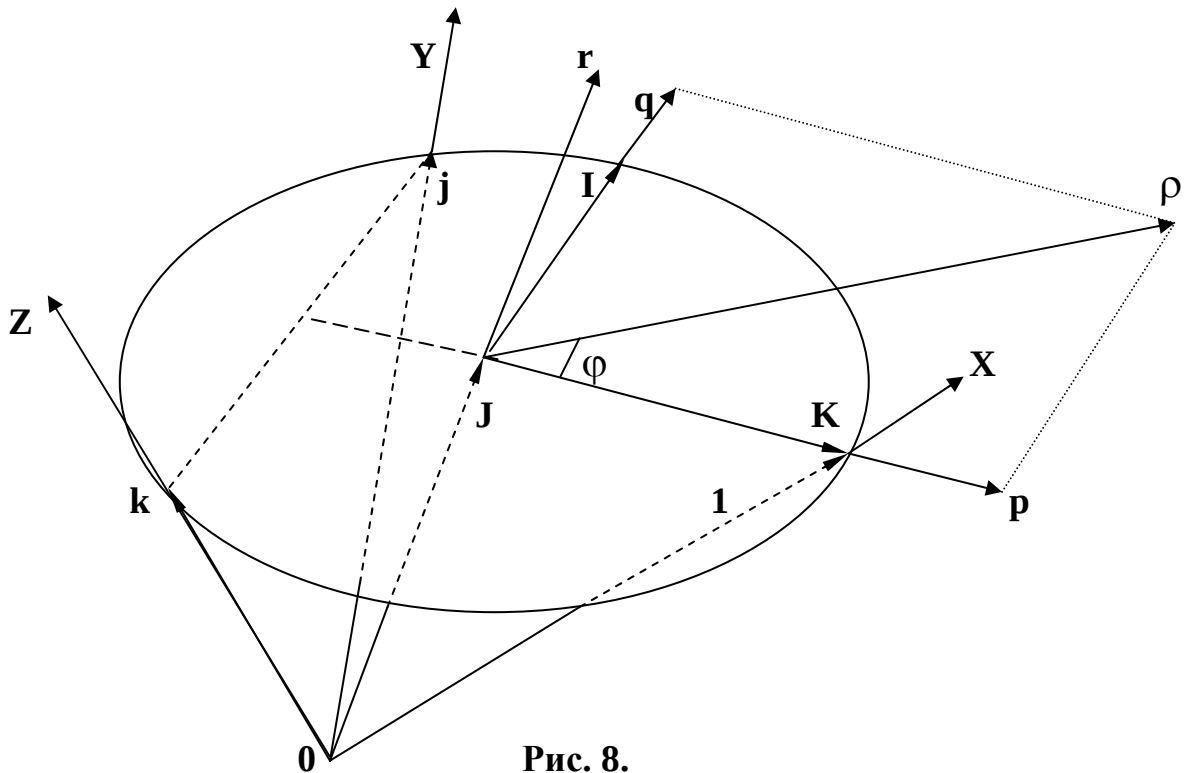


Рис. 8.

Из данной векторной диаграммы хорошо видно, что все шесть уравнений (41) взаимосвязей между шестью направляющими векторами 1, j, k, I, J, K являются векторными уравнениями, например: $J+K=1$, $J-0.5K+I\sqrt{3}/2=j$.

4.2.3. Взаимосвязь координат изображения и оригинала в базисе $j^4=1$

Подставляя формулы (25) – (26) в сумму квадратов, получим:

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = [r_1^2 + r_2^2 + 2(p^2 + q^2)]/4 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2,$$

откуда с учетом изображений (24) находим взаимосвязь координат:

$$a_1 = r_1/2 = (a + b + c + d)/2,$$

$$b_1 = r_2 / 2 = (a - b + c - d) / 2, \\ c_1 = p / \sqrt{2} = (a - c) / \sqrt{2}, \quad d_1 = q / \sqrt{2} = (b - d) / \sqrt{2}. \quad (44)$$

По аналогии несложно найти геометрические соотношения для любых полинарных чисел, но рассмотренных вариантов достаточно, чтобы их написать сразу. Т.к. уравнение $j^n = 1$ имеет корни, расположенные симметрично на единичной окружности в комплексной плоскости, то при нечетном n оно имеет один действительный корень 1 и $(n-1)/2$ пар сопряженных комплексных корней. При четном n – два действительных корня (± 1) и $n/2-1$ комплексных корней.

Соответственно, имеем столько же изображений. Формулы, определяющие направляющие косинусы поворота системы координат паритетных изображений относительно координат оригинала для нечетных и четных n , соответственно, имеют следующий вид:

$$R^2 = \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 = [r^2 + 2 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (p_i^2 + q_i^2)] / n, \\ R^2 = \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 = [r_1^2 + r_2^2 + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} (p_i^2 + q_i^2)] / n. \quad (45)$$

4.2.4. Заметки к поиску других чисел типа H_4 для пространства-времени

Обозначение H_4 неконкретно, т.к. четырехмерных аналитичных гиперкомплексных чисел можно придумать бесконечное множество и в форме числа-вектора с независимыми координатами и в форме числа-тензора с дополнительными взаимосвязями между его координатами. Разные наборы базисных уравнений и уравнений взаимосвязей будем иметь разные условия аналитичности, разные геометрические взаимосвязи, разные паритетные изображения и т.д.

Поэтому следует конкретизировать область физики, для которой нужны эти числа. Усиленный акцент на 4-х мерные числа в условиях конкурса 2003 связан, видимо, с желанием найти взамен кватернионам подобные, но аналитичные числа, пригодные для описания трех координат механического пространства и одной координаты времени одним гиперкомплексным числом. Приведенные в условиях конкурса условия аналитичности похожи на формулы (31), но все же не соответствуют гиперкомплексным числам в базисе $j^4 = 1$, которые не описывают трехмерное пространство + время и приемлемы лишь для одноосной задачи (x-t) и синусоидального сигнала. Однако, метод математического моделирования, разработанный в полинарном исчислении, позволяет найти естественные аналитичные инструменты, не отличающиеся от комплексных чисел, практически для любых задач физики. Сформулируем суть этого метода.

- Разделить многосвязный объект на элементарные виды многомерных расширений (понять источники многомерности или многозначности величин).
- Расположить их по пути усложнения задачи.

- Для каждого вида расширения отдельно выполнить эксперименты или воспользоваться известными уравнениями связи входных и выходных величин.
- Свернуть уравнения к одномерному виду, но в векторной форме. При этом найти условия сворачивания (условия аналитичности) и базисное уравнение.
- Подстановка корней базисного уравнения в вектор даст его изображения, которые по сути являются аналитическими инвариантами.
- Двигаясь по пути усложнения задачи, находим инструменты более сложных векторов или объединяем векторы в тензоры.
- Уменьшаем число степеней свободы в тензорах за счет учета новых связей.
- Вычисление аналитической функции тензора сводится к вычислению вектора одного из его расширений с тензорными координатами, но уже на ранг ниже.

Попробуем применить данный метод к движению точки с учетом скорости V волны, созданной ею в пространстве-времени.

Для одной оси волна может быть встречной или попутной. Два возможных варианта соответствуют базису $i^2 = 1$ или вектору $\bar{R} = X + iVt$. То же следует из преобразований Лоренца [12, 15, 17]. В трехмерном анизотропном пространстве параметры X, V получают трехмерное расширение: $\mathcal{E} = \bar{R} + i\bar{V}t$, где $\bar{R} = X + jY + kZ$, $\bar{V} = V_x + jV_y + kV_z$, $j^3 = 1$, $k = j^2$. Получаем тензор с шестью координатами. В частном случае, в изотропном пространстве все проекции скорости равны (во всех направлениях скорость движения волны одинакова), что дает две дополнительные взаимосвязи: $V_x = V_y = V_z = V$.

С учетом новых связей шестимерный тензор упрощается до четырехмерного

$\mathcal{E} = \bar{R} + itV(1 + j + k) = \bar{R} + 3iVt = J(r + 3iVt) + Kp + Iq$ с двумя паритетными изображениями (согласно корням уравнения $j^3=1$):

-бинарным

$$\bar{S} = X + Y + Z + it(V_x + V_y + V_z) = r + 3iVt = Se^{i\psi}, \text{th}\psi = 3Vt/r$$

-комплексным $\tilde{\rho} = p + iq$. Здесь $J = (1 + j + k)/3$. Времени в комплексном изображении нет, т.к.

$$V_p = V_x - (V_y + V_z)/2 = 0, \\ V_q = \sqrt{3}(V_y - V_z)/2 = 0.$$



В третьем квадранте изображается траектория в пространстве-времени. Обе координаты вещественные: $r = X + Y + Z$, $\tau = 3Vt$. Их также можно измерять линейкой, но геометрия этой плоскости неевклидова с гиперболической тригонометрией Лобачевского. Соотношения между координатами на этой плоскости: $\bar{S} = r + 3iVt = Se^{i\psi}$, $S^2 = r^2 - (3Vt)^2$, $th\psi = 3Vt / r$,

$$r = SCh\psi = X + Y + Z, \quad 3Vt = SSh\psi \quad \text{или} \quad t = \frac{S}{3V} Sh\psi. \quad (47)$$

Второй и четвертый квадранты связующие. Являются продолжением первого квадранта с обычной плоской геометрией Евклида. Таким образом, на одном листке бумаги мы можем взаимно однозначно решать как прямую, так и обратную задачи траекторий четырехмерного пространства-времени.

Прямая задача.

Даны координаты точки в пространстве-времени: X, Y, Z, t и константа V .

Изобразить траекторию движения этой точки на листе бумаги.

Вычисляем четыре действительные координаты пространства паритетных изображений этой точки по формулам (46) – (47):

$$\begin{aligned} p &= X - (Y + Z)/2, \quad q = \sqrt{3}(Y - Z)/2, \\ r &= X + Y + Z, \quad \tau = 3Vt. \end{aligned} \quad (48)$$

Согласно рисунку строим в 1-м и 3-м квадрантах основные (смысловые) графики $p = f_1(q)$ и $r = f_3(\tau)$, а во 2-м и 4-м квадрантах вспомогательные (связующие) графики $q = f_2(\tau)$ и $r = f_4(p)$.

Обратная задача.

Дан лист бумаги с четырьмя указанными графиками, константа V и одна точка M на любом из четырех графиков. Определить координаты X, Y, Z, t .

От заданной точки M проводим горизонтальные и вертикальные линии так, чтобы они образовали замкнутый прямоугольник как показано на рисунке. Прямоугольник на четырех осях отсечет четыре координаты p, q, r, τ .

Искомые координаты однозначно вычисляем по формулам (40) и (48):

$$\begin{aligned} X &= (r + 2p)/3, \quad Y = (r - p + q\sqrt{3})/3, \\ Z &= (r - p - q\sqrt{3})/3, \quad t = \tau/3V. \end{aligned} \quad (49)$$

Приведем общий алгоритм вычисления произвольных аналитических функций $\hat{F}(\mathcal{S}) = \vec{F} + iT = L + jM + kN + iT$ естественного тензорного переменного $\mathcal{S} = X + jY + kZ + 3jVt = J(r + i\tau) + Kp + Iq$ в реальном четырехмерном пространстве-времени.

- Для заданных параметров X, Y, Z, t и константы V по формулам (48) вычисляем координаты их паритетных изображений (инвариантных величин):

$$p = X - (Y + Z)/2, \quad q = \sqrt{3}(Y - Z)/2, \\ r = X + Y + Z, \quad \tau = 3Vt.$$

- Вычисляем в пространстве изображений заданную аналитическую функцию для бинарного $\bar{F} = F(r + i\tau) = R + iT'$ и для комплексного изображений.

Причем, функция бинарного переменного распадается еще на два действительных изображения, которые вычисляем отдельно как обычные функции действительного переменного: $F1 = F(r + \tau)$ и $F2 = F(r - \tau)$, откуда следует, что $R = (F1 + F2)/2$, $T' = (F1 - F2)/2$ - обратные преобразования (вычисление оригинала в неевклидовой плоскости).

Функцию комплексного переменного вычисляем один раз:

$$\tilde{F} = F(p + iq) = P + iQ.$$

- Переводим полученный результат по формулам (49) обратно в пространство оригиналов: $L = (R + 2P)/3$, $M = (R - P + Q\sqrt{3})/3$,

$$N = (R - P - Q\sqrt{3})/3, \quad T = T'.$$

Преобразования (48)-(49), предлагаемая система отображения пространства-времени и приведенный алгоритм вычисления аналитической функции в четырехмерном пространстве-времени справедливы только для взаимно однозначного отображения точки.

При движении тела следует использовать тензор третьего ранга для учета еще трех поворотов тела. При описании атома, предположительно, каждое из четырех квантовых чисел определяет свое многомерное расширение. Но прежде, чем развивать эти новые направления, надо подтвердить экспериментами уже полученный результат для точки. В первом приближении, косвенные подтверждения есть. Например, в механике упруго-инерционных сплошных сред деформации описываются в таком же базисе, а их сумма $\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ равна деформации объема, т.е. всестороннему расширению, как и волны. Поэтому и время для изотропной среды учитывается только в этом изображении.

4.2.5. Точка в пространстве-времени на ЭВМ

В конкурсе предлагается разработать программу системы графического отображения на мониторе ЭВМ движения точки в четырехмерном пространстве-времени. Предложенная в п. 4.2.4. система отображения приемлема для ручного построения или для автоматизированного вычерчивания указанных графиков одновременно на четырех графопостроителях в аналоговой форме.

Для отображения траектории точки в четырехмерном пространстве-времени на мониторе компьютера необходимо учитывать специфику такой технологии, а именно, дискретность работы ЭВМ. Непрерывно изме-

няющиеся величины t, X, Y, Z должны вводиться в память ЭВМ в квантованном по времени виде в форме таблицы: $t, X(t), Y(t), Z(t)$. В эту же таблицу удобнее всего сразу внести вычисленные по формулам (48) координаты паритетных изображений. Распечатка такой таблицы на бумаге представляет собой взаимно однозначное соответствие координат оригинала и изображения и уже не требует дополнительного вычисления оригинала по формулам (49). Отпадает необходимость вычерчивания вспомогательных графиков в квадрантах 2 и 4. Поэтому, для наглядности достаточно изобразить всего два графика и распечатать их на двух листках бумаги: $q=f_1(p)$ и $r=f_2(t)$. Для еще более полной наглядности на втором графике удобнее изобразить все три координаты изображений как функции времени: $(r, p, q)=f(t)$. Все это позволяет делать редактор EXCEL.

Для таблицы и двух графиков используем разные листы с разными форматами. Для примера задаемся произвольными функциями во времени:

$$\begin{aligned} X(t) &= 2t, & Y(t) &= 0.5 + 1.5t^2, \\ Z(t) &= 1.7(1 - e^{-2t}). \end{aligned} \quad (50)$$

В первый столбец вписываем квантованное время t . В три следующих столбца – параметры X, Y, Z , вычисленные по формулам (50). Но в реальном эксперименте эти параметры должны быть измерены одновременно в момент t и введены в эти ячейки с помощью АЦП и программы. В следующих четырех столбцах вычисляем параметры p, q, r, τ по формулам (48). Выделяя два параметра p и q , строим траекторию комплексного изображения, не зависящего от времени. А выделяя все четыре величины, строим три графика в функции от τ , где основной физический смысл несет график $r = f(\tau)$. (См. Приложение).

Приведенный пример был выполнен в редакторе EXCEL, где график $p=f(q)$ построен так, как работает редактор, т.е. это график в параметрической форме:

$$p(t)=f(q(t)), \text{ где } t=0, 0.02, 0.04, \dots$$

При этом координаты p и q изображаются в разных масштабах и углы между осями $X-Y$ и $Y-Z$ на комплексной плоскости не равны 120° или, как изображено на рисунке – 60° . Чтобы изобразить правильно, надо дополнить расчеты аппроксимирующей программой для построения графика $p=f(q)$.

4.2.6. Теория аналитических функций гиперкомплексных переменных H_4

Рассмотрим предложенную в условиях конкурса на сайте gurercomplex.ru аналитическую функцию гиперкомплексного переменного в более простых обозначениях функции: $F = A + iB + jC + kD$

и переменного $H = a + ib + jc + kd$. (51)

Заданные в теме 1 условия аналитичности принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{\partial B}{\partial b} = \frac{\partial C}{\partial c} = \frac{\partial D}{\partial d}, & \quad \frac{\partial A}{\partial c} = \frac{\partial B}{\partial d} = \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{\partial D}{\partial b}, \\ \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{\partial B}{\partial a} = \frac{\partial C}{\partial d} = \frac{\partial D}{\partial c}, & \quad \frac{\partial A}{\partial d} = \frac{\partial B}{\partial c} = \frac{\partial C}{\partial b} = \frac{\partial D}{\partial a}. \end{aligned} \quad (52)$$

Дифференцируя функцию F по разным осям аргумента H , получаем:

$$\frac{dF}{dH} = \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{i\partial b} = \frac{\partial F}{j\partial c} = \frac{\partial F}{k\partial d}. \quad (53)$$

Подставим в формулу (53) выражение функции в форме (51):

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dH} &= \frac{\partial A}{\partial a} + i \frac{\partial B}{\partial a} + j \frac{\partial C}{\partial a} + k \frac{\partial D}{\partial a} = \frac{\partial A}{i\partial b} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{j\partial C}{i\partial b} + \frac{k\partial D}{i\partial b} = \\ &= \frac{\partial A}{j\partial c} + \frac{i\partial B}{j\partial c} + \frac{\partial C}{\partial c} + \frac{k\partial D}{j\partial c} = \frac{\partial A}{k\partial d} + \frac{i\partial B}{k\partial d} + \frac{j\partial C}{k\partial d} + \frac{\partial D}{\partial d}. \end{aligned} \quad (54)$$

Используя равенства (52) в уравнениях (54), найдем базисные уравнения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j. \quad (55)$$

Т.к. в гиперкомплексном числе H_4 к единице добавлены три единичных числа i, j, k , то в качестве основного базиса из шести уравнений (55) достаточно выбрать любые три равенства. Остальные будут их следствием.

Выберем такой базис: $i^2 = j^2 = 1, \quad ij = k$. (56)

Проверим выполнение остальных равенств в (55):

$$k^2 = i^2 j^2 = 1 * 1 = 1, \quad jk = jij = ij^2 = i, \quad ki = iji = i^2 j = j.$$

Все базисные уравнения подтверждены. Следовательно, базис (56) полностью описывает аналитическую замкнутость чисел H_4 в четырехмерном пространстве на действительное направление. Выбранный базис позволяет представить четырехмерное гиперкомплексное число-вектор в виде гиперкомплексного четырехмерного числа-тензора второго ранга с двумя расширениями:

$$H = a + ib + jc + kd = a + ib + jc + ijd = (a + ib) + j(c + id). \quad (57)$$

Представление числа H_4 тензором второго ранга позволяет сократить базис до двух уравнений $i^2 = j^2 = 1$, найти его паритетные преобразования и алгоритм вычисления любых аналитических функций. Для этого, подставляя корни двух базисных уравнений $i = \pm 1, \quad j = \pm 1$ в тензор-число (57), находим четыре его действительных изображения:

$$\begin{aligned} p &= (a + b) + (c + d), \\ q &= (a + b) - (c + d), \\ r &= (a - b) + (c - d), \\ s &= (a - b) - (c - d). \end{aligned} \quad (58)$$

Решая систему (58), получим формулы вычисления координат оригинала:

$$a = (p + q + r + s) / 4,$$

$$\begin{aligned}
 b &= (p + q - r - s) / 4, \\
 c &= (p - q + r - s) / 4, \\
 d &= (p - q - r + s) / 4.
 \end{aligned}
 \tag{59}$$

Применим фундаментальную теорему полинарного исчисления: «изображение функции равно функции изображения». На базе этой теоремы формулируем алгоритм вычисления любой функции любого полинарного аргумента – вычисление изображений, затем заданной функции для всех изображений и возвращение в координаты оригинала. Конкретизируем его для чисел типа H_4 .

Алгоритм вычисления аналитической функции $F = A + iB + jC + kD$ гиперкомплексного переменного $H = a + ib + jc + kd = 3 + 5i + 4j - 2k$ формулируем для любых функций и сразу проверяем для простейшей функции $F = H^2$.

- По формулам (58) вычисляем паритетные изображения аргумента H :

$$\begin{aligned}
 p &= (a + b) + (c + d) = 3 + 5 + 4 - 2 = 10, \\
 q &= (a + b) - (c + d) = 3 + 5 - 4 + 2 = 6, \\
 r &= (a - b) + (c - d) = 3 - 5 + 4 + 2 = 4, \\
 s &= (a - b) - (c - d) = 3 - 5 - 4 - 2 = -8.
 \end{aligned}$$

- Вычисляем заданную функцию $F(H) = H^2$ для каждого изображения:

$$\begin{aligned}
 P &= F(p) = p^2 = 10^2 = 100, \\
 Q &= F(q) = q^2 = 6^2 = 36, \\
 R &= F(r) = r^2 = 4^2 = 16, \\
 S &= F(s) = s^2 = (-8)^2 = 64.
 \end{aligned}$$

- По формулам (59) вычисляем оригинал искомой функции:

$$\begin{aligned}
 A &= (P + Q + R + S) / 4 = (100 + 36 + 16 + 64) / 4 = 54, \\
 B &= (P + Q - R - S) / 4 = (100 + 36 - 16 - 64) / 4 = 14, \\
 C &= (P - Q + R - S) / 4 = (100 - 36 + 16 - 64) / 4 = 4, \\
 D &= (P - Q - R + S) / 4 = (100 - 36 - 16 + 64) / 4 = 28.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } F(H) = H^2 = (3 + 5i + 4j - 2k)^2 = 54 + 14i + 4j + 28k.$$

Рассмотренное гиперкомплексное число является аналитичным, т.е. обычным алгебраическим числом, для которого справедливы практически все формулы математики действительных и комплексных чисел за очень малым исключением типа деления, которое чуть подробнее рассмотрим ниже. А пока вычислим эту же функцию для проверки обычным алгебраическим способом по формуле:

$$\begin{aligned}
 (x + y + z + t)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(xy + xz + xt + yz + yt + zt), \\
 (3 + 5i + 4j - 2k)^2 &= 9 + 25 + 16 + 4 + 2(15i + 12j - 6k + 20k - 10j - 8i) = \\
 &= 54 + 14i + 4j + 28k.
 \end{aligned}$$

Проверка подтвердила алгоритм вычисления аналитических функций, с помощью которого теперь несложно вычислить синус, логарифм, извлекать корень, возвести в гиперкомплексную степень, интегрировать и т.д.

5. Ошибка в современной алгебре и деление в полинарном исчислении

5.1. Деление в современной алгебре

5.1.1. Деление действительных чисел

Деление – это решение уравнения $aX = b$ при $a \neq 0$.

5.1.2. Деление комплексных чисел

Рассмотрим подробнее три способа деления комплексных чисел, в многомерном обобщении которых при создании кватернионов была допущена логическая ошибка, не соответствующая природе. Из-за этой ошибки физика под давлением авторитетов математиков-теоретиков была вынуждена свернуть с естественного материалистического пути развития на ошибочный идеалистический кватернионный путь.

5.1.2.1. Деление комплексных чисел в декартовых координатах

– это решение уравнения $\tilde{a}\tilde{X} = \tilde{b}$ при $\tilde{a} \neq 0$,
где $\tilde{a} = a_0 + ia_1$, $\tilde{X} = X_0 + iX_1$, $\tilde{b} = b_0 + ib_1$, $i^2 = -1$.

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю число для получения в знаменателе квадратичной формы (действительного числа):

$$\tilde{X} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{b} \tilde{a}}{\tilde{a} \tilde{a}} = \frac{\tilde{b} \tilde{a}}{a^2}. \quad (60)$$

Для получения конкретных формул деления комплексных чисел раскроем выражение (60) путем подстановки в него комплексных чисел $\tilde{a}$, $\tilde{X}$, $\tilde{b}$, $\tilde{a}$:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \frac{b_0 + ib_1}{a_0 + ia_1} = \frac{b_0 + ib_1}{a_0 + ia_1} \frac{a_0 - ia_1}{a_0 - ia_1} = \\ &= \frac{a_0 b_0 + a_1 b_1 + i(a_0 b_1 - a_1 b_0)}{a_0^2 + a_1^2} = X_0 + iX_1, \end{aligned}$$

откуда приравниванием вещественных и мнимых слагаемых получаем:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{a_0 b_0 + a_1 b_1}{a_0^2 + a_1^2}, \\ X_1 &= \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2 + a_1^2}. \end{aligned} \quad (61)$$

Т.к. в квадратичной форме все числа ≥ 0 , то их сумма может быть равна нулю только при равенстве всех слагаемых нулю, т.е. $a = 0$ при $a_0 = a_1 = 0$.

5.1.2.2. Деление комплексных чисел в полярных координатах

С помощью формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = \tilde{r}$ комплексное число можно выразить в векторной форме в виде произведения модуля R вектора $\tilde{R} = X + iY$ на единичный направляющий вектор $\tilde{r}$ с переменным углом φ :

$$\tilde{R} = R\tilde{r} = Re^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = X + iY,$$

$$\text{откуда } X = R\cos\varphi, \quad Y = R\sin\varphi, \quad \varphi = \arctg Y/X, \quad R^2 = X^2 + Y^2. \quad (62)$$

Решение уравнения $\tilde{a}\tilde{X} = \tilde{b}$ в полярных координатах:

$$\tilde{X} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} = \frac{be^{i\beta}}{ae^{i\alpha}} = Xe^{i\varphi},$$

$$\text{где } X = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \beta - \alpha, \quad a \neq 0. \quad (63)$$

Подставляя формулу Эйлера и раскрывая тригонометрические функции разности двух углов в ней, получим формулы (61), подтверждающие правомерность такого деления. Но есть еще один способ деления таких чисел.

5.1.2.3. Деление комплексных чисел как действие обратное умножению

Для выполнения деления, т.е. для решения уравнения $\tilde{a}\tilde{X} = \tilde{b}$ раскроем его:

$$\tilde{a}\tilde{X} = (a_0 + ia_1)(X_0 + iX_1) = b_0 + ib_1,$$

откуда получаем систему уравнений в вещественной форме:

$$\begin{aligned} a_0X_0 - a_1X_1 &= b_0, \\ a_1X_0 + a_0X_1 &= b_1. \end{aligned} \quad (64)$$

Выполнить деление здесь - это вычислить координаты X_0, X_1 неизвестного комплексного числа $\tilde{X} = X_0 + iX_1$, т.е. решить систему уравнений (64). Решают систему линейных уравнений методом исключения неизвестных, обобщение которого приводит к методу Крамера с применением определителей:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 + a_1^2, & \text{делить нельзя при } \Delta = 0, \\ \Delta_0 &= \begin{vmatrix} b_0 & -a_1 \\ b_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0b_0 + a_1b_1, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_0b_1 - a_1b_0, \\ X_0 &= \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{a_0b_0 + a_1b_1}{a_0^2 + a_1^2}, \\ X_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_0^2 + a_1^2}. \end{aligned} \quad (65)$$

Итак, для комплексных чисел все три способа решения уравнения $\tilde{a}\tilde{X} = \tilde{b}$ дают одинаковые результаты: (61), (65). Условие невозможности деления $\tilde{a}=0$ в этих трех случаях дают разные формулы, но также одинаковые результаты:

1) условие $\tilde{a}=0$ сводится к другому условию $\tilde{a}\tilde{a}^* = a_0^2 + a_1^2 = a^2 = 0$,

откуда следует $a_0=0, a_1=0$;

2) условие $\tilde{a}=0$ сводится условию $a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2} = 0$,

откуда следует $a_0=0, a_1=0$;

3) условие $\tilde{a}=0$ сводится условию $\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 + a_1^2 = 0$,

откуда следует $a_0=0, a_1=0$.

5.1.3. Деление гиперкомплексных чисел в современной алгебре

В математической энциклопедии и в БСЭ в статьях о гиперкомплексных числах приводятся ссылки на работу [19]. Поэтому приведем из нее определение деления гиперкомплексных чисел, которое содержит ошибку, встречающуюся и в других работах по алгебре:

«гиперкомплексная система есть система с делением, если уравнение $vX = u$

имеет решение, и притом единственное, при любых v, u , где $v \neq 0$ ».

Ошибка скрывается в условии $v \neq 0$, которое еще не является ошибкой. Но его дальше используют так, что гиперкомплексной системе чисел искусственно и бездоказательно навязывают свойства, противоречащие установленным перед этим правилам умножения и не соответствующие природе гиперкомплексных чисел. Более сложным числам навязывают свойства простых действительных чисел. На базе свойства $v \neq 0$ вводится понятие единственного сопряженного числа $\check{v}$ для делителя v так, что их произведение равно сумме квадратов координат:

$$v\check{v} = v^2 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k^2.$$

Это уже явная ошибка.

Комплексные числа обладают следующими свойствами:

- сопряженное к сумме равно сумме сопряженных,
- сопряженное к произведению равно произведению сопряженных.

Оба свойства можно обобщить в одно: аналитическая функция сопряженного аргумента равна сопряженной функции комплексной переменной.

Кватернионы построены на базе дальнейшего ошибочного развития исходного положения $v \neq 0$. В них второе свойство соблюдается с учетом их некоммутативности: сопряженное к произведению равно произведению сопряженных, взятых в обратном порядке [19]. Это не дает право объединить два свойства в одно и делает кватернионы неаналитичными и мало-пригодными для физики.

Поэтому любые дальнейшие попытки развить кватернионы, их векторные свойства, их теорию поля, скалярные или векторные произведения означают пустую трату времени, а точнее, разработку новых ошибочных теорий как логическое продолжение исходной ошибки, как построение здания на песке.

Это чисто идеалистический умозрительный путь развития науки.

В полинарном исчислении указанные ошибки устранены. Здесь все n -мерные гиперкомплексные числа-векторы-тензоры имеют ровно n взаимно сопряженных чисел (комплексных изображений, проекций на взаимно ортогональные плоскости, аналитических инвариантов), обладающих обоими свойствами и их аналитическим обобщением – изображение функции равно функции изображения. Найти полинарные числа можно теоретически или экспериментально. Оба подхода требуют встать на материалистический путь развития науки, т.к. даже теоретическое устранение ошибок требует объективного обоснования.

5.2. Деление гиперкомплексных чисел в полинарном исчислении

В п. 5.1.2. приведены три способа деления комплексных чисел. В работе [19] использован первый способ. Делить на действительное число нельзя, если оно равно нулю. Это свойство распространили на гиперкомплексное число, но ошибка здесь хорошо замаскирована и полторы сотни лет оставалась не замеченной, т.к. действительно, нельзя делить на число, если все его координаты равны нулю. Но это лишь один частный случай, который не дает полной картины делимости многомерного числа. Делить нельзя в п. 5.1.2.3 при $\Delta = 0$. Делить нельзя в п. 5.1.2.1 при $\tilde{a} = 0$. Эти условия дают разные результаты.

В полинарном исчислении деление – это действие обратное умножению. Если задана таблица умножения или базисные уравнения, то при многомерном расширении векторное уравнение $\mathbf{v}\mathbf{x} = \mathbf{u}$ раскрывается однозначно и представляется в виде системы уравнений в действительной форме. Решить уравнение $\mathbf{v}\mathbf{x} = \mathbf{u}$ означает: решить эту систему уравнений относительно координат неизвестного вектора $\mathbf{x}$. Систему нельзя решить при $\Delta \mathbf{v} = 0$.

Определитель полинарного числа в базисе $j^n = 1$ равен произведению его изображений: $\Delta \vec{X} = \prod_{p=0}^{n-1} \tilde{X}_p$. В частности, для $n=3$ имеем:

$$\Delta = r p e^{i\varphi} p e^{-i\varphi} = r p^2,$$

$$\text{для четного и нечетного } n: \Delta \vec{V} = r_1 r_2 \prod_{m=1}^{(n-2)/2} \rho_m^2, \quad \Delta \vec{V} = r \prod_{m=1}^{(n-1)/2} \rho_m^2. \quad (66)$$

В частности, для бинарного числа $\bar{R} = X + \mathbf{i}Y = \Im r + \Re r$ с помощью базисного уравнения $\mathbf{i}^2 = 1$ находим систему уравнений для произведения двух векторов $\bar{R}\bar{R}_1 = \bar{R}_2$: $XX_1 + YY_1 = X_2$,

$$YX_1 + XY_1 = Y_2. \quad (67)$$

Для выполнения деления вида $\bar{R}_1 = \bar{R}_2 / \bar{R}$ вычисляем определитель

$$\Delta \bar{R} = \begin{vmatrix} X & Y \\ Y & X \end{vmatrix} = X^2 - Y^2 = (X + Y)(X - Y) = rp. \quad (68)$$

Для трехмерного числа $\vec{R} = X + jY + kZ = Jr + Kre^{i\varphi}$ аналогично находим определитель делимости в базисе $j^3 = 1, k = j^2$:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{R} &= \begin{vmatrix} X & Z & Y \\ Y & X & Z \\ Z & Y & X \end{vmatrix} = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = \\ &= (X + Y + Z)(X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX) = rp^2 \end{aligned}$$

где $r = X + Y + Z$,

$$p^2 = p^2 + q^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX. \quad (69)$$

Итак, определитель полинарного числа-вектора равен произведению всех его паритетных изображений и делить на это число нельзя, если хотя бы одно изображение равно нулю, т.е. если годограф в пространстве изображений пересекает вещественную ось или комплексную плоскость. В этот момент число степеней свободы числа уменьшается. Делить нельзя только на нулевое изображение, а на остальные изображения делить можно.

Пример. При сложном деформировании стального образца мы измеряем его векторы деформаций $\vec{\varepsilon}$ и напряжений $\vec{\sigma}$ в главных координатах (через перемещения и силы), а по ним вычисляем вектор модулей упругости:

$$\vec{E} = \vec{\sigma} / \vec{\varepsilon}. \quad (70)$$

Вычисление аналитической функции (70), т.е. деление сводится к вычислению таких же функций для действительного и комплексного изображений:

$$\begin{aligned} E_r &= \sigma_r / \varepsilon_r = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \tilde{E}_p &= \tilde{\sigma}_p / \tilde{\varepsilon}_p = (\sigma_p + i\sigma_q) / (\varepsilon_p + i\varepsilon_q). \end{aligned}$$

Процесс деформирования идет непрерывно во времени, а измерения, вычисления и построение графиков выполняем с шагом во времени, дискретно. В одной из сотен точек графика может оказаться $\varepsilon_r = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$, т.е. объем образца не будет изменяться, но будет продолжаться изменяться его форма. Пропустим эту точку при вычислении деления и на графике, не останавливая процесса. От этого ничего не пострадает. Все просто и естественно. Так же просты и естественны все полинарные числа-векторы элементарных многомерных расширений и скомпонованные из них более сложные числа-тензоры с несколькими многомерными

ми расширениями и дополнительными взаимосвязями. Вычисления функций таких переменных, в итоге, сводятся к действительным и комплексным числам без изменения векторных формул. Поэтому условия вычисления обратных тригонометрических функций, условия деления и прочие действия с действительными и комплексными числами надо вводить на их уровне, т.е. только при вычислении соответствующих изображений, а не распространять эти действия сразу на неизвестное многомерное пространство, как это сделано в работе [19]. Это увело в свое время развитие точных наук с правильного пути.

Решение уравнения $\mathbf{v}\mathbf{x} = \mathbf{u}$ при $\mathbf{v} \neq 0$ в полинарном исчислении в векторной форме без его раскрытия в виде системы уравнений в вещественной форме.

Здесь оба уравнения рассматривают как аналитические функции гиперкомплексного переменного и приоритет отдают не алгебре, а общей теории аналитических функций, ее общему алгоритму – вычислению этих функций в пространстве изображений:

$$\tilde{V}_p \tilde{X}_p = \tilde{U}_p \text{ при } \tilde{V}_p \neq 0 \text{ для } p=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Все изображения – это действительные или комплексные числа, для которых такие уравнения мы уже умеем решать. В полинарном исчислении все три способа деления комплексных чисел применимы и дают одинаковые результаты. У кватерниона нет показательной формы и аналога полярных координат. Поэтому у него нет аналога второго способа деления комплексных чисел. Полинарные числа аналитичны и представимы в любых координатах. Особенно красиво они выглядят в пространстве паритетных изображений, где без изменения численного значения координат и их направляющих векторов они могут быть представлены как в виде суммы, так и в виде произведения координат:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{k=0}^{n-1} j^k X_k = \sum_{p=0}^{(n-1)/2} K_p (p_p + Iq_p) = \\ &= \sum_{p=0}^{(n-1)/2} K_p \rho_p e^{I_p \varphi_p} = \prod_{p=0}^{(n-1)/2} \rho_p^{K_p} e^{I_p \varphi_p}. \end{aligned} \quad (71)$$

В работе [19] приоритет отдают алгебре, что приводит к такому правилу: делить нельзя, если все координаты гиперкомплексного числа равны нулю. На основании формул (45) это правило можно распространить и на пространство изображений: делить нельзя, если все изображения равны нулю. То же следует из формулы (71): $\vec{R}=0$ если хоть один из частных модулей равен нулю ($\rho_p=0$).

Алгебра дает лишь один частный случай, что сильно ограничивает область применимости такого математического инструмента (кватернионы применимы только для линейных объектов физики). Полинарное исчисление учитывает все возможные ситуации, в том числе и этот частный случай, что «развязывает нам руки» и делает применимым полинарное исчисление во всех точках многомерного сплошного и неразрывного про-

странства и для любых задач физики (для нелинейных анизотропных и неоднородных объектов любой природы). Поэтому в полинарном исчислении в сомнительных ситуациях приоритет отдают не алгебраическим операциям с многомерными числами, а общей теории аналитических функций гиперкомплексного переменного полинарного типа, которая сводит все вычисления с гиперкомплексными числами как векторного, так и тензорного типов, к таким же вычислениям с комплексными или действительными числами, для которых справедливы все свойства, теоремы или формулы комплексных или действительных чисел.

6. Конформные отображения в многомерном пространстве

Паритетные преобразования координат оригинала и изображения линейны и взаимно однозначны. Сами действительные и комплексные изображения точно копируют аналитическую функцию полинарного переменного, т.е. обладают теми же свойствами. И наоборот, оригинал обладает всеми свойствами изображений, в том числе и конформными отображениями. Углы легко измерять на плоскости транспортиром. Но как их измерять в многомерном пространстве, да и надо ли это делать? Оказывается, нас интересует не столько сохранение углов, сколько сохранение взаимно ортогональной координатной сетки в любой точке в пространствах аргумента и функции. И даже не это. Нам требуется знать другое – если мы получили разными путями два многомерных результата и между ними стоит знак равенства, то имеем ли мы право приравнивать их координаты при равных базисных числах? Можно придумать теоретическое доказательство, но человеку свойственно ошибаться и на 100% верить такой теории будет трудно. Поэтому автором в 1976-78 гг была разработана и тщательно выполнена серия экспериментов на ЦВМ с трех-, четырех- и пятимерными гиперкомплексными числами в базисах $j^n = \pm 1$.

Эксперимент 3

По аналогии с круговой тригонометрией (базис $i^2 = -1$) и с гиперболической тригонометрией (базис $1^2 = 1$) рассматривались подобные многомерные полигонометрические функции и проверялись подобные обычной тригонометрии многомерные аналоги разных формул взаимосвязей элементарных функций. Многомерные функции вычислялись двумя способами – в виде рядов и в виде формулы взаимосвязи с типовыми функциями. Число членов ряда ограничивалось требуемой точностью вычисления. Эксперименты подтвердили:

- равенство функций, вычисленных разными способами;
- взаимную независимость координат функций и возможность приравнивания вещественных и мнимых частей при равных базисах слева и справа;
- наличие полной аналогии круговой тригонометрии в многомерном случае;
- естественность гиперкомплексных чисел в данном базисе и их полную аналогию действительным и комплексным числам.

Эксперименты кратко изложены в работе [1].

Здесь приведем лишь несколько формул для базиса $j^3 = 1$, $k = j^2$. Возведем число $e=2.71828$ в разные степени:

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx + kx^2 / 2! + x^3 / 3! + \dots = T + jU + kV, \\ e^{kx} &= 1 + kx + jx^2 / 2! + x^3 / 3! + \dots = T + kU + jV, \\ e^x &= 1 + x + x^2 / 2! + x^3 / 3! + \dots = T + U + V. \end{aligned} \quad (72)$$

Функции T , U , V являются трехмерными аналогами плоских тригонометрических функций (Sinx , Cosx) и обладают всеми их свойствами. Из формул (72) эти функции выражаются в форме степенных рядов. Решением системы (72) с учетом свойств направляющих векторов в проекции на комплексную плоскость

$$\begin{aligned} j &= \exp 2\pi i / 3 = -0.5 + i\sqrt{3} / 2, \\ k &= \exp 4\pi i / 3 = -0.5 - i\sqrt{3} / 2, \\ 1 + j + k &= 0, \end{aligned}$$

выражаем те же функции в виде формул через типовые функции, например:

$$Tx = (e^x + 2e^{-x/2} \text{Cos} \sqrt{3}x / 2) / 3 = 1 + x^3 / 3! + x^6 / 6! + \dots$$

Вычисление таких функций двумя способами, проверка многомерных аналогов тригонометрических формул, построение различных графиков на комплексных плоскостях-проекциях экспериментально подтверждают знак равенства между ними, справедливость всех формул, наличие полной аналогии комплексным числам, их тригонометрии и конформным отображениям для любого числа степеней свободы гиперкомплексного переменного полинарного типа.

Некоторые особенности работы с полинарными числами.

Для базиса $j^n = 1$, где n – простое число, вычисления с полинарными числами-векторами можно выполнять тремя способами – в свернутой векторной форме по правилам действительных чисел; в пространстве оригиналов, где заданная векторная формула преобразуется до системы с n действительными уравнениями или в пространстве изображений по общему алгоритму вычисления аналитических функций. Если $n=ms$ – составное число, то выполняем вычисления как с полинарным m - мерным числом-тензором, у которого вместо действительных координат полинарные s – мерные числа-векторы.

Заключение

Целью написания данной работы является реклама нового научного направления в физико-математических науках – полинарного исчисления, как самого перспективного многомерного математического инструмента для привлечения инвестиций в его развитие и внедрение. Первое, что необходимо сделать – это издать одной книгой работы автора по полинарному исчислению достаточным тиражом. Продажа книг окупит инвестиционные вложения и полинарное исчисление станет доступно для более ши-

рокого круга ученых. В отличие от матриц и кватернионов на базе полинарных чисел-векторов-тензоров можно не только решать теоретические задачи, но и конструировать принципиально новые электронные, механические, пневматические и другие измерительные приборы, средства автоматизации, вычислительные устройства, новейшую сверхбыстродействующую и сверхнадежную технику управления летательными снарядами, быстродействующими технологическими процессами типа ядерных реакций и пр., что окупит любые инвестиции в это естественное направление.

Метод аналитического моделирования, применяемый в полинарном исчислении, позволяет на базе экспериментов с реальным многосвязным физическим объектом найти единственно правильный и одновременно оптимальный для него математический инструмент.

В работу не включены разделы полинарного исчисления, требующие большого объема работ и финансирования – дифференцирование и интегрирование аналитических функций векторных и тензорных переменных, частично изложенных в [5]; многомерные аналоги тригонометрии, геометрии; полинарные функции (многомерные аналоги двухмерных тригонометрических функций), их свойства, таблицы и применение; основы нелинейной теории поля; фундаментальные законы физики в тензорно-аналитической (в полинарной) форме и их применение для решения практических задач; применение полинарного исчисления в системах графического наглядного отображения многомерной информации, в системах управления многомерными или многосвязными объектами.

Частично указанные разделы затронуты в ряде депонированных в ВИНТИ приоритетных публикаций, частично проработаны и подтверждены в черновиках автора, но разработка и публикация их в более-менее полном объеме в России, видимо, уже невозможна из-за полного отсутствия моральной и финансовой поддержки со стороны ученых советов и руководства Тверского государственного технического университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филинов В.А. Многомерное обобщение комплексного исчисления/КПИ. –Калинин, 1981.-11с.-Деп. в ВИНТИ 17.12.81, №80-82.
2. Филинов В.А. Полинарная алгебра. Гиперкомплексные числа без потерь/КПИ. –Калинин, 1981.-31с.-Деп. в ВИНТИ 10.12.81, 83-82.
3. Филинов В.А. Метод изображения многомерного пространства на плоскости/ КПИ. –Калинин, 1981. –9с. –Деп. в ВИНТИ 10.12.81, №81-82.
4. Филинов В.А. Математические основы моделирования нелинейной взаимосвязи между напряжениями и деформациями в гиперкомплексной аналитической форме/ТГТУ.-Тверь, 1989.-17с.-Деп. в ВИНТИ №1748-В89.
5. Филинов В.А. Теория функций полинарного аргумента/КПИ. –Калинин, 1983.-74с.-Деп. в ВИНТИ 18.01.83, №572-83Б.
6. Филинов В.А. Полинарная теория вязко-упругих процессов/ТГТУ.-Тверь. -20с, ВИНТИ №8928-85.
7. Филинов В.А. Аналитическая многомерная электромеханика и физическая математика (математика природы) –Тверь: ТГТУ, 1998.

8. Филинов В.А. Математика природы. – Тверь: ТГТУ, 2001.
9. Программа для ЭВМ «Калькулятор Филинова», св-во № 990336.-М.: Роспатент, 1999.
10. Филинов В.А. Калькулятор аналитических функций векторных и тензорных переменных. –М: ПСФ «Промремонтстрой», 2000.
11. The Philinov's Calculator. -М.: ПСФ »Промремонтстрой», 2000.
12. Филинов В.А. Естественные гиперкомплексные числа-векторы, их поиск в природе и применение. Интернет. Hypercomplex.ru. -55с. 2002.
13. Филинов В.А. Метод аналитического моделирования многомерных физических объектов // Автоматизация электротехнических комплексов и систем. – Тверь: ТвеПИ, 1992.
14. Филинов В.А. Аналитическая механика сплошной среды. Основные законы. –Деп. в ВИНТИ 9.01.84, №299-84. –135с.
15. Филинов В.А. Неньютонова механика. Нелинейная теоретическая механика в векторно-аналитическом изложении. -Тверь: ТГТУ-ЦЕНТРОН, 116с, 2001.
16. Филинов В.А. Полинарная теория идентификации вязко-упругих объектов. –Деп. в ВИНТИ 20.06.85, №4666-85. –141с.
17. Филинов В.А. Физические основы аналитического моделирования многомерных объектов. Ч. 1-3. –Тверь: ТГТУ, 1995.
18. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. -М.: Наука, 1966. 707с.
19. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. –М.: Наука, 1973.
20. Кинасошвили Р.С. Сопротивление материалов. –М.: Наука, 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Экспериментальное определение естественного базиса упругих взаимосвязей между напряжениями и деформациями
7
 - 1.1. Одноосное (одномерное) растяжение упругой нити
7
 - 1.2. Двухосное растяжение пластины
7
 - 1.3. Трехосное растяжение элементарного параллелепипеда
8
2. Краткая теория аналитических функций полинарного аргумента
8
 - 2.1. Многомерное обобщение естественных гиперкомплексных чисел
8
 - 2.2. Паритетные преобразования полинарных чисел
9
 - 2.3. Алгоритм вычисления функции полинарного переменного
9
 - 2.4. Конкретные формулы паритетных преобразований для чисел-векторов

с $n=2, 3, 4$ и проверка алгоритма для квадратичной функции	10
2.4.1. Вычисление аналитических функций бинарного переменного	10
2.4.2. Трехмерные паритетные преобразования и их аналитические функции	11
2.4.3. Аналитические функции четырехкоординатных чисел в базисе $j^4 = 1$	13
3. Условия аналитичности для функций полинарных переменных	15
3.1. Условия аналитичности бинарных чисел (базис $i^2 = 1$)	16
3.2. Условия аналитичности трехмерных чисел (базис $j^3 = 1$)	16
3.3. Условия аналитичности четырехмерных чисел (базис $j^4 = 1$)	16
4. Геометрия полинарных чисел	18
4.1. Модуль гиперкомплексного числа-вектора полинарного типа	18
4.2. Геометрическая взаимосвязь пространств изображения и оригинала	19
4.2.1. Геометрическая интерпретация бинарных чисел (базис $i^2 = 1$) на комплексной плоскости, где справедлива теорема Пифагора	19
4.2.2. Взаимное расположение новых координат X_1, Y_1, Z_1 (изображений) относительно старых координат X, Y, Z (оригинала) в базисе $j^3 = 1$	20
4.2.3. Взаимосвязь координат изображения и оригинала в базисе $j^4 = 1$	21
4.2.4. Заметки к поиску других чисел типа H_4 для пространства-времени	22
4.2.5. Точка в пространстве-времени на ЭВМ	26
4.2.6. Теория аналитических функций гиперкомплексных переменных H_4	27
5. Ошибки в современной алгебре и деление в полинарном исчислении	29
5.1. Деление в современной алгебре	29
5.1.1. Деление действительных чисел	29

5.1.2.	Деление	комплексных	чисел
29			
5.1.2.1.	Деление	в	декартовых координатах
29			
5.1.2.2.	Деление комплексных чисел	в полярных координатах	
29			
5.1.2.3.	Деление комплексных чисел как действие обратное умножению		
30			
5.1.3.	Деление гиперкомплексных чисел	в современной алгебре	
30			
5.2.	Деление гиперкомплексных чисел	в полинальном исчислении	
31			
6.	Конформные отображения	в многомерном пространстве	
34			
	Заклучение		35
	Литература		36

Приложение

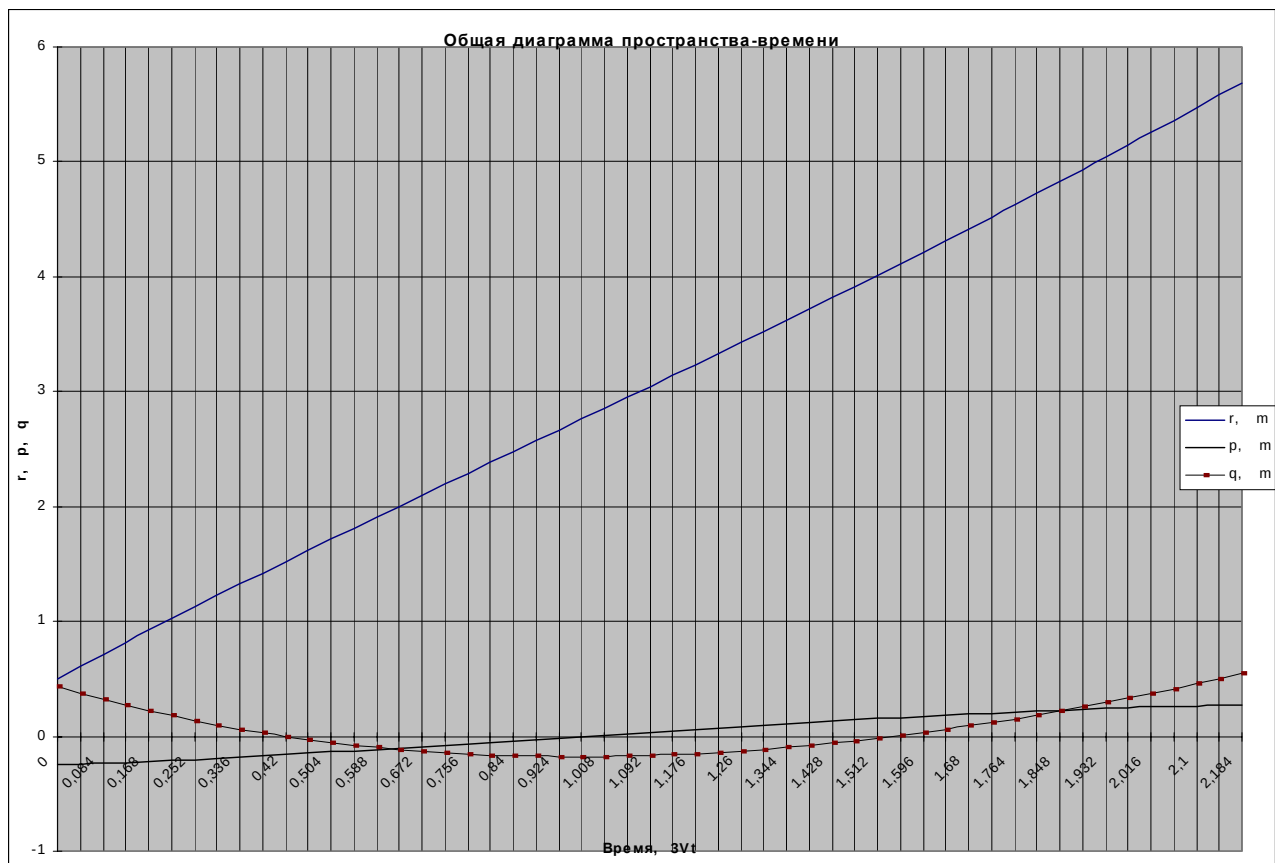
Таблица пространственно-временных траекторий в инвариантных плоскостях

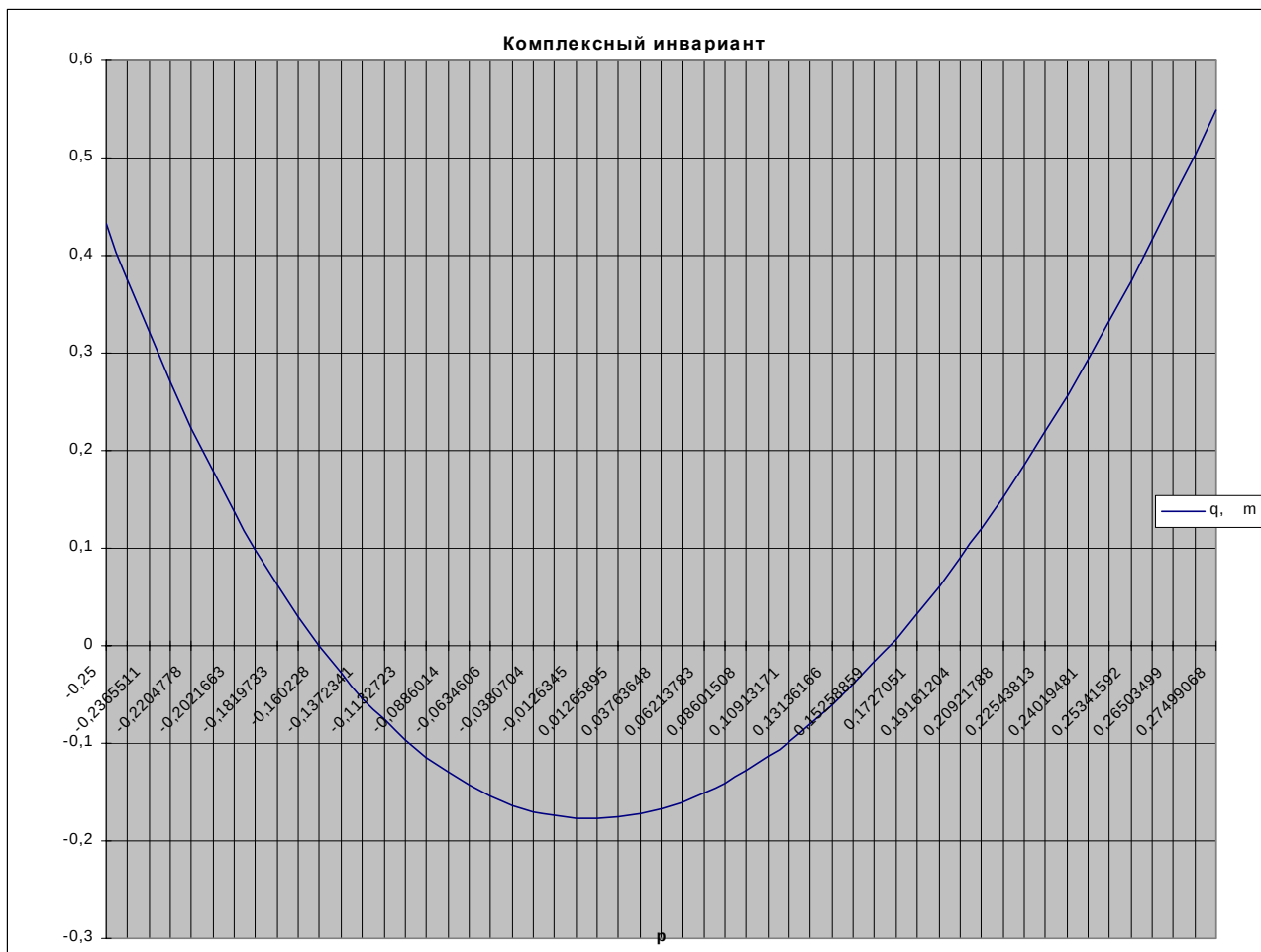
Оригинал

Изображение

t, c	X, m	Y, m	Z, m	V=0.7	τ , m	r, m	p, m	q, m
0	0	0,5	0		0	0,5	-0,25	0,433013
0,02	0,04	0,5006	0,066658		0,042	0,607258	-0,24363	0,375805
0,04	0,08	0,5024	0,130702		0,084	0,713102	-0,23655	0,3219
0,06	0,12	0,5054	0,192235		0,126	0,817635	-0,22882	0,271209
0,08	0,16	0,5096	0,251356		0,168	0,920956	-0,22048	0,223646
0,1	0,2	0,515	0,308158		0,21	1,023158	-0,21158	0,179131
0,12	0,24	0,5216	0,362733		0,252	1,124333	-0,20217	0,137583
0,14	0,28	0,5294	0,415168		0,294	1,224568	-0,19228	0,098928
0,16	0,32	0,5384	0,465547		0,336	1,323947	-0,18197	0,063093
0,18	0,36	0,5486	0,51395		0,378	1,42255	-0,17128	0,030008
0,2	0,4	0,56	0,560456		0,42	1,520456	-0,16023	-0,00039
0,22	0,44	0,5726	0,605138		0,462	1,617738	-0,14887	-0,02818
0,24	0,48	0,5864	0,648068		0,504	1,714468	-0,13723	-0,05341
0,26	0,52	0,6014	0,689315		0,546	1,810715	-0,12536	-0,07614
0,28	0,56	0,6176	0,728945		0,588	1,906545	-0,11327	-0,09643
0,3	0,6	0,635	0,76702		0,63	2,00202	-0,10101	-0,11433
0,32	0,64	0,6536	0,803603		0,672	2,097203	-0,0886	-0,12991
0,34	0,68	0,6734	0,838751		0,714	2,192151	-0,07608	-0,1432
0,36	0,72	0,6944	0,872521		0,756	2,286921	-0,06346	-0,15426
0,38	0,76	0,7166	0,904967		0,798	2,381567	-0,05078	-0,16313
0,4	0,8	0,74	0,936141		0,84	2,476141	-0,03807	-0,16986
0,42	0,84	0,7646	0,966092		0,882	2,570692	-0,02535	-0,1745
0,44	0,88	0,7904	0,994869		0,924	2,665269	-0,01263	-0,17708
0,46	0,92	0,8174	1,022518		0,966	2,759918	4,12E-05	-0,17764
0,48	0,96	0,8456	1,049082		1,008	2,854682	0,012659	-0,17622
0,5	1	0,875	1,074605		1,05	2,949605	0,025198	-0,17286
0,52	1,04	0,9056	1,099127		1,092	3,044727	0,037636	-0,1676
0,54	1,08	0,9374	1,122688		1,134	3,140088	0,049956	-0,16046
0,56	1,12	0,9704	1,145324		1,176	3,235724	0,062138	-0,15149
0,58	1,16	1,0046	1,167073		1,218	3,331673	0,074163	-0,14071
0,6	1,2	1,04	1,18797		1,26	3,42797	0,086015	-0,12815
0,62	1,24	1,0766	1,208047		1,302	3,524647	0,097677	-0,11384

0,64	1,28	1,1144	1,227337	1,344	3,621737	0,109132	-0,09781
0,66	1,32	1,1534	1,24587	1,386	3,71927	0,120365	-0,08008
0,68	1,36	1,1936	1,263677	1,428	3,817277	0,131362	-0,06069
0,7	1,4	1,235	1,280785	1,47	3,915785	0,142107	-0,03965
0,72	1,44	1,2776	1,297223	1,512	4,014823	0,152589	-0,01699
0,74	1,48	1,3214	1,313016	1,554	4,114416	0,162792	0,007261
0,76	1,52	1,3664	1,32819	1,596	4,21459	0,172705	0,033091
0,78	1,56	1,4126	1,342769	1,638	4,315369	0,182316	0,060476
0,8	1,6	1,46	1,356776	1,68	4,416776	0,191612	0,089395
0,82	1,64	1,5086	1,370234	1,722	4,518834	0,200583	0,119829
0,84	1,68	1,5584	1,383164	1,764	4,621564	0,209218	0,151759
0,86	1,72	1,6094	1,395588	1,806	4,724988	0,217506	0,185167
0,88	1,76	1,6616	1,407524	1,848	4,829124	0,225438	0,220037
0,9	1,8	1,715	1,418992	1,89	4,933992	0,233004	0,256351
0,92	1,84	1,7696	1,43001	1,932	5,03961	0,240195	0,294093
0,94	1,88	1,8254	1,440597	1,974	5,145997	0,247002	0,333249
0,96	1,92	1,8824	1,450768	2,016	5,253168	0,253416	0,373804
0,98	1,96	1,9406	1,460541	2,058	5,361141	0,25943	0,415744
1	2	2	1,46993	2,1	5,46993	0,265035	0,459054
1,02	2,04	2,0606	1,478951	2,142	5,579551	0,270224	0,503723
1,04	2,08	2,1224	1,487619	2,184	5,690019	0,274991	0,549737





Филинов Владимир Александрович

ПОЛИНАРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(аналитические начала многосвязной физики)

Адрес: 170026, г. Тверь, наб. А.Никитина, 22, ТГТУ, Ц-413,

тел.: (0-822) 31-43-17, 48-33-48.

E-mail: tgtu_kafedra_ese@mail.ru

Редакция автора

Формат А5

Бумага принтерная А4, 80г/м²

Тираж 100 экз.

Заказ № 8

Сдано в печать 12.03.2003

Отпечатано в типографии «ЦЕНТРОН», г. Тверь, т. (0822) 310-310

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА НАД АЛГЕБРАМИ КЭЛИ-ДИКСОНА

Людковский С. В.

Кафедра прикладной математики Моск. Гос. Технич. Универс. МИРЕА

sludkowski@mail.ru

Настоящая статья посвящена некоммутативной версии преобразования Лапласа. Исследованы новые типы прямого и обратного преобразований типа Лапласа над общими алгебрами Кэли-Диксона, в частности, также телом кватернионов и алгеброй октонионов. Приведены примеры. Доказаны теоремы о свойствах образов таких преобразований, а также теоремы об образах и оригиналах в сочетании с операциями умножения, дифференцирования, интегрирования, свертки, сдвига и гомотетии.

1 Введение

Классическое преобразование Лапласа играет очень важную роль в комплексном анализе и имеет многочисленные применения, включая дифференциальные уравнения [3, 10, 17]. В данной статье определены и исследованы некоммутативный классический аналог преобразования Лапласа, а также новые типы преобразования Лапласа над алгеброй Кэли-Диксона. Для этого использованы предыдущие результаты автора о голоморфных и мероморфных функциях чисел Кэли-Диксона [12, 14, 15].

Как хорошо известно, кватернионы и действия над ними впервые были определены и исследованы У. Р. Гамильтоном в третьей четверти 19 века [6]. Впоследствии Кэли и Диксон ввели обобщения кватернионов, известные теперь как алгебры Кэли-Диксона [1, 7, 9, 19, 22]. Они, в частности кватернионы и октонионы, нашли применения в физике, например, использовались Максвеллом, Янгом и Миллсом при выводе своих уравнений, которые они потом переписали в вещественной форме из-за недостаточно развитого в то время математического анализа над такими алгебрами [4, 5, 11]. Это актуально, так как неабелевы калибровочные поля широко используются в теоретической физике [20]. В своих трудах Гамильтон, Кэли и Диксон указывали на необходимость развития анализа над кватернионами, октонионами и т. д. для последующего использования в механике и теории поля. В последнее время также исследовался суперматематический анализ над градуированными алгебрами [2, 8, 16], однако он, как правило, может быть охарактеризован как суперкоммутативный, например, над алгебрами Грассмана, в то время как случай алгебр Кэли-Диксона (соответствующий супернекоммутативному анализу) не исследовался другими авторами.

Напомним, что алгебра Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ над полем $\mathbf{R}$ имеет 2^r генераторов $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ таких, что $i_0 = 1$, $i_j^2 = -1$ для любого $j = 1, 2, \dots, 2^r - 1$, $i_j i_k = -i_k i_j$ для любых $1 \leq k \neq j \leq 2^r - 1$, где $r \geq 1$. При этом алгебра $\mathcal{A}_{r+1}$ получается из алгебры $\mathcal{A}_r$ с помощью процедуры удвоения с помощью генератора i_{2^r} , в частности, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$ совпадает с полем комплексных чисел, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – тело кватернионов, $\mathcal{A}_3$ – алгебра октонионов, $\mathcal{A}_4$ – алгебра септенионов. Тело кватернионов ассоциативно, а алгебра октонионов альтернативна. Алгебра $\mathcal{A}_r$ ассоциативна со степенями, то есть, $z^{n+m} = z^n z^m$ для любых $n, m \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathcal{A}_r$, неассоциативна и неальтернативна для любого $r \geq 4$.

В начале данной статьи определено преобразование Лапласа. Далее исследованы новые виды прямого и обратного преобразований типа Лапласа над общими алгебрами Кэли-Диксона, в частности, телом кватернионов и алгеброй октонионов. Приведены примеры. Также доказаны необходимые теоремы об интегрировании функций $\mathcal{A}_r$ переменных. При этом выяснены особенности некоммутативного преобразования Лапласа, например, связанные с тем, что в алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ имеется $2^r - 1$ мнимых генераторов $\{i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ в отличие от одного для поля комплексных чисел, так что мнимое подпространство в $\mathcal{A}_r$ имеет размерность $2^r - 1$. Доказаны теоремы о свойствах образов таких преобразований, а также теоремы об образах и оригиналах в сочетании с операциями умножения, дифференцирования, интегрирования, свертки, сдвига и гомотетии. Приведено также расширение некоммутативного преобразования Лапласа для обобщенных функций; рассмотрено применение некоммутативного интегрального преобразования для решения дифференциальных уравнений. Все результаты данной статьи получены впервые.

2 Некоммутативные интегральные преобразования.

1. Определения. Функцию $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{A}_r$ назовем функцией-оригиналом, где $\mathcal{A}_r$ – алгебра Кэли-Диксона, которая может быть, в частности, $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ телом кватернионов или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ алгеброй октонионов, если она удовлетворяет следующим условиям (1 – 3):

(1) $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера: $|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha$, где $0 < \alpha \leq 1$, $A = \text{const} > 0$, всюду на $\mathbf{R}$ может быть кроме точек разрыва первого рода. На каждом конечном интервале в $\mathbf{R}$ функция f может иметь только конечное число точек разрыва и только первого рода. Напомним, что точка t_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы слева и справа $\lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} f(t) =: f(t_0 - 0) \in \mathcal{A}_r$ и $\lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} f(t) =: f(t_0 + 0) \in \mathcal{A}_r$.

(2) $f(t) = 0$ для любого $t < 0$.

(3) $f(t)$ возрастает не быстрее, чем экспоненциальная функция, то есть, существуют постоянные $C = \text{const} > 0$, $s_0 = s_0(f) \in \mathbf{R}$, так что $|f(t)| < C \exp(s_0 t)$ для любого $t \in \mathbf{R}$.

Отметим, что для ограниченного оригинала можно взять $s_0 = 0$.

Если существует оригинал

$$(4) F(p; \zeta) := \int_0^\infty f(t) e^{-pt - \zeta} dt,$$

тогда $F(p)$ называется преобразованием Лапласа в точке $p \in \mathbf{K}$ функции-оригинала $f(t)$, где $\zeta \in \mathcal{A}_r$ – параметр.

Пусть $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathcal{A}_r$ – путь такой, что ограничение $\gamma_l := \gamma|_{[-l, l]}$ спрямляемо для любого $0 < l \in \mathbf{R}$ и положим по определению

$$(5) \int_\gamma f(z) dz = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\gamma_l} f(z) dz,$$

где $\mathcal{A}_r$ обозначает алгебру Кэли-Диксона, $2 \leq r$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – тело кватернионов, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ – алгебра октонионов, а интегралы по спрямляемым путям были определены в §2.5 [14]. Они тогда определены вдоль кривых тоже, которые являются классами эквивалентности путей относительно возрастающих кусочно-гладких отображений $\tau : [a, b] \rightarrow [a_1, b_1]$, осуществляющих перепараметризацию путей. Тогда будем говорить, что несобственный интеграл (5) сходится.

Рассмотрим теперь функцию $f(z, \zeta)$ определенную для всех z из области U и для любых ζ в окрестности V кривой γ в $\mathcal{A}_r$. Интеграл $G(z) := \int_\gamma f(z, \zeta) d\zeta$ сходится равномерно в области U , если для любого $\epsilon > 0$ существует $l_0 > 0$ такое, что

$$(6) \left| \int_\gamma f(z, \zeta) d\zeta - \int_{\gamma_l} f(z, \zeta) d\zeta \right| < \epsilon \text{ для любых } z \in U \text{ и } l > l_0. \text{ Аналогично рас-}$$

смаатривается случай γ неограниченной в одну сторону с $[0, \infty)$ вместо $(-\infty, \infty)$.

2. Замечание. Ниже рассматриваются теоремы о существовании преобразования Лапласа $F(p)$ и обратного к нему. В определении 1 определен некоммутативный аналог обыкновенного преобразования Лапласа, но можно рассмотреть более общее некоммутативное интегральное преобразование, так как $\mathbf{H}$ имеет 3, а $\mathbf{O}$ имеет 7 чисто мнимых генераторов, а в общем $\mathcal{A}_r$ имеет $2^r - 1$ мнимых генераторов, тогда как в поле комплексных чисел имеется лишь одна мнимая единица. Для определения $F(p)$ была использована $\exp(-u)$, где

(1) $u := pt$ линейно зависит от t и p . Но можно рассмотреть также нелинейную функцию $u = u(p, t)$, принимая в расчет некоммутативность алгебры $\mathcal{A}_r$.

3. Определение. Пусть $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ – это стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 2$. Положим

(1) $u(p, t) := p_0 t + M(p, t) + \zeta_0$, где $p = p_0 i_0 + p_1 i_1 + \dots + p_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $p_0, p_1, \dots, p_{2^r-1} \in \mathbf{R}$,

(2) $M(p, t) = M(p, t; \zeta) = (p_1 t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2) \cos(p_3 t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_2 t + \zeta_2) \sin(p_3 t + \zeta_3)]$ для кватернионов;

(3) $M(p, t) = M(p, t; \zeta) = (p_1 t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2) \cos(p_3 t + \zeta_3) + \dots + i_6 \sin(p_2 t + \zeta_2) \dots \sin(p_6 t + \zeta_6) \cos(p_7 t + \zeta_7) + i_7 \sin(p_2 t + \zeta_2) \dots \sin(p_6 t + \zeta_6) \sin(p_7 t + \zeta_7)]$ для октонионов,

(3') $M(p, t) = M(p, t; \zeta) = (p_1 t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2) \cos(p_3 t + \zeta_3) + \dots + i_{2^r-2} \sin(p_2 t + \zeta_2) \dots \sin(p_{2^r-2} t + \zeta_{2^r-2}) \cos(p_{2^r-1} t + \zeta_{2^r-1}) + i_{2^r-1} \sin(p_2 t + \zeta_2) \dots \sin(p_{2^r-2} t + \zeta_{2^r-2}) \sin(p_{2^r-1} t + \zeta_{2^r-1})]$ для общей алгебры Кэли-Диксона с $2 \leq r < \infty$, где $\zeta - \zeta_0 = \zeta_1 i_1 + \dots + \zeta_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$ – параметр начальной фазы, $\zeta_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$. Более общим образом, пусть

(4) $u(p, t) = u(p, t; \zeta) = (p_0 t + v(p, t)) + \zeta_0$, где $v(p, t)$ является локально аналитической функцией, $Re(v(p, t)) = 0$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ и $t \in \mathbf{R}$, $Re(z) := (z + \tilde{z})/2$, $\tilde{z} = z^*$ – сопряженное число для $z \in \mathcal{A}_r$. Тогда общее некоммутативное преобразование Лапласа над $\mathcal{A}_r$ определяется формулой:

(5) $F_u(p; \zeta) := \int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t)) dt$ для всех чисел $p \in \mathcal{A}_r$, для которых интеграл существует. В то же время компоненты p_j числа p и ζ_j для ζ в $v(p, t)$ мы запишем в p - и ζ -представлениях соответственно, так что

(6) $h_j = (-hi_j + i_j(2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2$ для любого $j = 1, 2, \dots, 2^r - 1$, $h_0 = (h + (2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2$,

где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $h = h_0 i_0 + \dots + h_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $h_j \in \mathbf{R}$ для любого j , $h^* = \tilde{h}$ обозначает сопряженное число для h , $h \in \mathcal{A}_r$. Обозначим $F_u(p; \zeta)$ через $\mathcal{F}(f, u; p; \zeta)$.

Далее используются $u(p, t)$, задаваемые 2(1) или 3(1–3, 3'), если иная форма 3(4) не выделена.

4. Замечание. Использование функции $M(p, t)$, задаваемой формулами (2, 3) из определения 3 естественно возникает при рассмотрении сферических координат в базисе генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$, а также при рассмотрении итерированных экспоненциальных функций. Пусть $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ – стандартные генераторы алгебры кватернионов $\mathbf{H}$, где $i_0 = 1$, $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$, $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3$, $i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1$, $i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$, тогда $\exp(i_1(p_1 t + \zeta_1) \exp(-i_3(p_2 t + \zeta_2) \exp(-i_1(p_3 t + \zeta_3)))) = \exp(i_1(p_1 t + \zeta_1) \exp(-(p_2 t + \zeta_2)(i_3 \cos(p_3 t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3 t + \zeta_3))))$

$$= \exp(i_1(p_1t + \zeta_1)(\cos(p_2t + \zeta_2) - \sin(p_2t + \zeta_2)(i_3 \cos(p_3t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3t + \zeta_3)))) \\ = \exp((p_1t + \zeta_1)(i_1 \cos(p_2t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2t + \zeta_2) \cos(p_3t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_2t + \zeta_2) \sin(p_3t + \zeta_3))).$$

Далее по индукции выполняется равенство:

$$\exp({}_{r+1}M(p, t; \zeta)) = \exp\{ {}_rM((i_1p_1 + \dots + i_{2^r-1}p_{2^r-1}), t; (i_1\zeta_1 + \dots + i_{2^r-1}\zeta_{2^r-1}) \\ \exp(-i_{2^r+1}(p_{2^r}t + \zeta_{2^r}) \exp(-{}_rM((i_1p_{2^r+1} + \dots + i_{2^r-1}p_{2^{r+1}-1}), t; (i_1\zeta_{2^r+1} + \dots + \\ i_{2^r-1}\zeta_{2^{r+1}-1}))))\},$$

где i_{2^r} – генератор удвоения алгебры $\mathcal{A}_{r+1}$ из алгебры $\mathcal{A}_r$, так что $i_j i_{2^r} = i_{2^r+j}$ для любых $j = 0, \dots, 2^r - 1$, функция $M(p, t; \zeta)$ из определения 3 над $\mathcal{A}_r$ записана с нижним индексом ${}_rM$.

Запишем изображение в виде $F_u(p; \zeta) := \sum_{s=0}^{2^r-1} F_{u,s}(p; \zeta) i_s$, где функция f разложена в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t) i_s$, $f_s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ для любого $s = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, $F_{u,s}(p; \zeta)$ обозначает изображение функции-оригинала f_s .

Можно взять автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_r$ и вместо стандартных генераторов $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ использовать новые генераторы $\{N_0, \dots, N_{2^r-1}\}$, а также задать $M(p, t; \zeta) = M_N(p, t; \zeta)$ относительно новых базисных генераторов, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$. В этом более общем случае изображение обозначим ${}_NF_u(p; \zeta)$ для оригинала $f(t)$ или более подробно обозначим его через ${}_N\mathcal{F}(f, u; p; \zeta)$.

Если $p = (p_0, p_1, 0, \dots, 0)$, то преобразования Лапласа 1(4) и 2(3,5) сводятся к комплексному случаю, то есть, данные выше определения для кватернионов, октонионов и общих алгебр Кэли-Диксона оправданы.

5. Теорема. Если V – ограниченная окрестность спрямляемой кривой γ в $\mathcal{A}_r$, а последовательность функций $f_n : V \rightarrow \mathcal{A}_r$ равномерно сходится на V , где $2 \leq r < \infty$, то существует предел

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz.$$

Доказательство. Для данного $\epsilon > 0$ в силу равномерной сходимости последовательности f_n существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/l$ для любых $n > n_0$, где $0 < l < \infty$ – длина спрямляемой кривой γ , $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$. В силу неравенства 2.7(4) [14] существуют две положительные постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что $|\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f_n(z) dz| < (\epsilon/l) l C_1 \exp(C_2 R^s) = \epsilon C_1 \exp(C_2 R^s)$, где $s = 2^r + 2$, $0 < R < \infty$, так что V содержится в шаре $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ в $\mathcal{A}_r$ радиуса R с центром в некоторой точке $z_0 \in \mathbf{K}$. Это означает справедливость равенства (i).

6. Теорема. Если функция $f(z, \zeta)$ голоморфна по z и кусочно-непрерывна по ζ для любых z из односвязной (открытой) области U в $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$ и для всех ζ из окрестности V пути γ , где γ_l спрямляемы для любых $0 < l < \infty$, а интеграл $G(z) := \int_{\gamma} f(z, \zeta) d\zeta$ равномерно сходится в области U , то он является голоморфной в U функцией.

Доказательство. Для любого $0 < l < \infty$ функция $\int_{\gamma_l} f(z, \zeta) d\zeta =: G_l(z)$ непрерывна по z в силу теоремы 5, что вместе с 1(6) в силу неравенства треугольника дает непрерывность функции $G(z)$ на U . В силу теорем 2.16 и 3.10 [14] интегральная голоморфность функции $G(z)$ влечет ее голоморфность. Но интегральную голоморфность достаточно установить во внутренности $Int(B(\mathcal{A}_r, z_0, R))$ любого шара $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ содержащегося в U . Пусть ψ – спрямляемый путь такой, что $\psi \subset Int(B(\mathcal{A}_r, z_0, R))$. Поэтому $\int_{\psi} G(z) dz = \int_{\psi} (\int_{\gamma} f(z, \zeta) d\zeta) dz$. С помощью доказательства теоремы 2.7 [14] эти интегралы можно переписать в действительных координатах и с генераторами $i_0, \dots, i_{2^r-1}$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$. В силу равномерной сходимости $G(z)$ и теоремы Фубини можно изменить порядок интегрирования и тогда $\int_{\psi} G(z) dz = \int_{\gamma} (\int_{\psi} f(z, \zeta) dz) d\zeta = 0$, так как $\int_{\psi} f(z, \zeta) dz = 0$.

7. Теорема. Для любого оригинала $f(t)$ его изображение $F_u(p; \zeta)$ определено в полупространстве $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > s_0\}$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, а показатель роста функции $f(t)$ не превосходит s_0 , причем $F_u(p; \zeta)$ голоморфна по p в этом полупространстве, а также голоморфна по $\zeta \in \mathcal{A}_r$.

Доказательство. Интеграл 1(4) или 3(5) абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(p) > s_0$, так как он мажорируется сходящимся интегралом

$|\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t)) dt| \leq \int_0^\infty C \exp(-(s - s_0)t - \zeta_0) dt = C(s - s_0)^{-1} e^{-\zeta_0}$, поскольку $|e^z| = \exp(\operatorname{Re}(z))$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$ в силу следствия 3.3 [14]. При этом интеграл, получающийся из интеграла 1(4) или 3(5) дифференцированием по p , сходится также равномерно:

$$(i) \quad |\int_0^\infty f(t) [\partial \exp(-u(p, t)) / \partial p] h dt| \leq |h| \int_0^\infty C t \exp(-(s - s_0)t - \zeta_0) dt = |h| C (s - s_0)^{-2} e^{-\zeta_0}$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как каждое $z \in \mathcal{A}_r$ можно записать в виде $z = |z| \exp(M)$, где $|z|^2 = z\tilde{z} \in [0, \infty) \subset \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $\operatorname{Re}(M) := (M + \tilde{M})/2 = 0$ согласно предложению 3.2 [14]. В силу уравнений 3(6)

$$\begin{aligned} \partial(\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; \zeta)) dt) / \partial \tilde{p} &= 0 \text{ и} \\ \partial(\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; \zeta)) dt) / \partial \tilde{\zeta} &= 0, \text{ причем} \\ |\int_0^\infty f(t) [\partial \exp(-u(p, t; \zeta)) / \partial \zeta] \cdot h dt| &\leq |h| \int_0^\infty C \exp(-(s - s_0)t - \zeta_0) dt = |h| C (s - s_0)^{-1} e^{-\zeta_0} \end{aligned}$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$. В силу сходимости интегралов выше $F_u(p; \zeta)$ (супер)дифференцируема по p и ζ , причем $\partial F_u(p; \zeta) / \partial \tilde{p} = 0$ и $\partial F_u(p; \zeta) / \partial \tilde{\zeta} = 0$ в рассматриваемом (p, ζ) -представлении, следовательно, $F_u(p; \zeta)$ голоморфна по $p \in \mathbf{K}$ с $\operatorname{Re}(p) > s_0$ и $\zeta \in \mathcal{A}_r$ в силу теоремы 6.

8. Замечание. В силу формулы 7(i), если p стремится к бесконечности так, что $\operatorname{Re}(p) =: s$ стремится к $+\infty$, то $\lim_{s \rightarrow +\infty} F_u(p; \zeta) = 0$. Запишем p в полярном виде $p = \rho e^{M\theta}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $|\theta| < \pi/2 - \delta$, где $\rho \geq 0$, а постоянная δ такая, что $0 < \delta < \pi/2$, тогда $F_u(p; \zeta)$ стремится к нулю равномерно по таким θ и M при p стремящемся к бесконечности, то есть, при ρ стремящемся к бесконечности, так как $e^{M\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)M$.

9. Определения и обозначения.

1. Пусть $\mathbf{1}$ обозначает единичный оператор на $\mathcal{A}_r$, то есть, $\mathbf{1}(h) = h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где $\mathcal{A}_r$ обозначает алгебру Кэли-Диксона с 2^r стандартными генераторами $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$, $i_0 = 1$, $i_p^2 = -1$ для любого $p \geq 1$, $i_p i_s = -i_s i_p$ для любых $1 \leq s \neq p \leq 2^r - 1$. Рассмотрим также оператор сопряжения $\tilde{\mathbf{1}}(h) = \tilde{h}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$.

2. Будем различать символы: $e = \mathbf{1}(1)$ и $\tilde{e} = \tilde{\mathbf{1}}(1)$, где $1 \in \mathcal{A}_r$.

3. $\mathbf{1}$ и $\tilde{\mathbf{1}}$ не будем отождествлять и не будем сокращать взаимно между собой или с символом вида $\mathbf{1}\tilde{\mathbf{1}}$, или с другими основными символами; а символы e и $\tilde{e}$ не будем отождествлять друг с другом и не будем сокращать с выражениями вида $e\tilde{e}$ или с другими основными символами.

4. $(z^p z^q)$ отождествляется с z^{p+q} , а $(\tilde{z}^p \tilde{z}^q)$ отождествляется с $\tilde{z}^{p+q}$, где p и q - натуральные числа, $p, q = 1, 2, 3, \dots$. В каждом слове полагаем, что в каждом его фрагменте типа $\dots(z^p \tilde{z}^q)\dots$ символ z^p расположен левее символа $\tilde{z}^q$.

5. Если w - некоторое слово или фраза, а $c \in \mathbf{R}$, то фразы cw и wc отождествляются; если $b, c \in \mathbf{R}$, то фразы $b(cw)$ и $(bc)w$ отождествляются.

6. При сопряжении используются следующие отождествления слов: $(a(\mathbf{1}b))^* = (\tilde{b}\tilde{\mathbf{1}})\tilde{a}$, $(a(eb))^* = (\tilde{e}\tilde{b})\tilde{a}$; а при обращении: $(a(\mathbf{1}b))^{-1} = (b^{-1}\mathbf{1})a^{-1}$, $(a(\tilde{\mathbf{1}}b))^{-1} = (b^{-1}\tilde{\mathbf{1}})a^{-1}$, $(a(eb))^{-1} = (b^{-1}e)a^{-1}$, $(a(\tilde{e}b))^{-1} = (b^{-1}\tilde{e})a^{-1}$, где $ab \neq 0$, $a, b \in \mathcal{A}_r$.

7. Слово $\{w_1 \dots w_{k-1} (\{a_1 \dots a_l\})_{q(l)} w_{k+1} \dots w_j\}_{q(j)}$ отождествляется со словом $\{w_1 \dots w_{k-1} w_k w_{k+1} \dots w_j\}_{q(j)}$, а также со словами $\{w_1 \dots w_{k-1} b w_{k+1} \dots w_j\}_{q(j)}$, $\{(w_1) \dots w_{k-1} b w_{k+1} \dots w_j\}_{q(j)}$, где $w_k = (\{a_1 \dots a_l\})_{q(l)}$, $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{A}_r$, $l, k, j \in \mathbf{N}$, $cb = w_k$, $c \in \mathbf{R}$, $b \in \mathcal{A}_r$.

8. Фразы являются суммами слов. Суммы могут быть конечными или бесконечными счетными. Фраза $aw + bw$ отождествляется со словом $(a + b)w$, а фраза $wa + wb$ со словом $w(a + b)$ для любых слов w и констант $a, b \in \mathcal{A}_r$, так как $c = a + b \in \mathcal{A}_r$.

9. Символы функций, то есть, соответствующие им фразы конечные или бесконечные, определяются с помощью следующих исходных символов: констант из $\mathcal{A}_r$, $e, \tilde{e}, z^p, \tilde{z}^p$, где $p \in \mathbf{N}$. Тогда как символы операторнозначных функций состояются из символов множества $\{\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{1}}; e, \tilde{e}; z^p, \tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$, где символ $\mathbf{1}$ или $\tilde{\mathbf{1}}$ присутствует во фразе. При этом фраза, соответствующая функции или операторнозначной функции, не может содержать слов, состоящих только из констант, то есть, каждое слово $w_1 w_2 \dots w_k$ фразы должно содержать не менее одного из символов $w_1, w_2, \dots, w_k$ из множества $\{e, \tilde{e}; z^p, \tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$. Для фразы ν и пустого слова $\emptyset$ положим $\nu \emptyset = \emptyset \nu = \nu$.

10. Для символов из множества $\{\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{1}}; e, \tilde{e}; z^p, \tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$ определены их длины: $l(0) = 0$, $l(a) = 1$ для любого $a \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, $l(\mathbf{1}) = 1$, $l(\tilde{\mathbf{1}}) = 1$, $l(e) = 1$, $l(\tilde{e}) = 1$, $l(z^p) = p + 1$, $l(\tilde{z}^p) = p + 1$ для любого натурального числа p . Длина слова является суммой длин составляющих её символов. Аналогично рассматриваются слова и фразы для нескольких переменных ${}_1z, \dots, {}_nz$, а также функция длины слова, где символы соответствующие разным индексам $v = 1, \dots, n$ являются различными.

Далее мы рассмотрим фразы, подчиненные следующим условиям. Либо все слова w данной фразы ν содержат каждый из символов ${}_v e, {}_v \tilde{e}, {}_v \mathbf{1}$ или ${}_v \tilde{\mathbf{1}}$ с одной и той же конечной кратностью, которая может зависеть от индекса $v = 1, \dots, n$ или от самого символа; либо каждое слово w из ν не содержит ни ${}_v e$ ни ${}_v \tilde{e}$, кроме слов w с одним ${}_v e$ и без каких-либо ${}_v z^l$ с $l \neq 0$ или w с одним ${}_v \tilde{e}$ без каких-либо ${}_v \tilde{z}^l$ с $l \neq 0$. Если фраза ν в каждом своем слове w содержит ${}_v \mathbf{1}$ кратности p или ${}_v \tilde{\mathbf{1}}$ с кратностью k , тогда это предполагается результатом частного дифференцирования $\partial^{p+k} f(z, \tilde{z}) / \partial {}_v z^p \partial {}_v \tilde{z}^k$; в то время как в случае ${}_v e$ с кратностью p или ${}_v \tilde{e}$ с кратностью k предполагается возникающим из $(\partial^{p+k} f(z, \tilde{z}) / \partial {}_v z^p \partial {}_v \tilde{z}^k) \cdot (1^{\otimes(p+k)})$. Причем наличие хотя бы одного из символов ${}_v \mathbf{1}$ или ${}_v \tilde{\mathbf{1}}$ во фразе характеризует операторнозначную функцию в отличие от функции.

11. В пространстве $\mathcal{P}$ всех фраз подчиненных ограничениям перечисленным выше над $\mathcal{A}_r$ зададим метрику по формуле:

$$d(\nu, \mu) = \sum_{j=0,1,2,\dots} l(\nu_j, \mu_j) b^j,$$

где b – фиксированное число, $0 < b < 1$, $\nu, \mu \in \mathcal{P}$, $\nu = \sum_{j=0,1,2,\dots} \nu_j$, функция или операторнозначная функция $f_j(z, \tilde{z})$, соответствующая ν_j , является однородной степени j , то есть, $f(tz, t\tilde{z}) = t^j f(z, \tilde{z})$ для любых $t \in \mathbf{R}$ и $z \in \mathcal{A}_r$, $\nu_j = \sum_k \nu_{j,k}$, где $\nu_{j,k}$ – слова с соответствующими однородными функциями или операторнозначными функциями $f_{j,k}$ степени j , $l(\nu_j, \mu_j) := \max_{k,s} l(\nu_{j,k}; \mu_{j,s})$, где $l(\nu_{j,k}; \mu_{j,s}) = 0$ при $\nu_{j,k} = \mu_{j,s}$, $l(\nu_{j,k}; \mu_{j,s}) = \max[l(\nu_{j,k}); l(\mu_{j,s})]$ при $\nu_{j,k}$ не равном $\mu_{j,s}$.

12. Каждой фразе ν соответствует непрерывная функция f , если фразу понимать как последовательность конечных сумм входящих в нее слов, так что соответствующая последовательность функций сходится. В пространстве $C_{\mathcal{P}}^0(U, X)$, состоящем из пар (f, ν) , $f \in C^0(U, X)$, где $X = \mathcal{A}_r$ или X – пространство $\mathbf{R}$ -полиоднородных полиаддитивных операторов на $\mathcal{A}_r^m$, $m \in \mathbf{N}$, $\nu \in \mathcal{P}$ таких, что фразе ν соответствует непрерывная функция или операторнозначная функция f на области U в $\mathcal{A}_r^n$ со

значениями в X , введем метрику:

$$\mathcal{D}((f, \nu); (g, \mu)) := \sup_{z \in U} \|f(z, \tilde{z}) - g(z, \tilde{z})\| + d(\nu, \mu),$$

где фразе ν соответствует функция f , а фразе μ функция g , где норма m -кратно $\mathbf{R}$ -полиоднородного полиаддитивного оператора задается формулой

$$\|S\| := \sup_{(\|h_1\|=1, \dots, \|h_m\|=1)} \|S(h_1, \dots, h_m)\| / [\|h_1\| \dots \|h_m\|],$$

а для функции, то есть, при $m = 0$, берется модуль функции $|f| = \|f\|$ вместо нормы оператора.

10. Замечания. При $r = \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$ переменные z и $\tilde{z}$ алгебраически независимы над $\mathcal{A}_r$ в силу теоремы 3.6.2 [14]. Поскольку A_m с $m < r$ алгебраически вкладывается в $\mathcal{A}_r$, то можно рассматривать функции $f(z, \tilde{z})$ на областях U в $\mathcal{A}_m$, которые являются ограничениями $f = g|_U$ функций $g_f(z, \tilde{z})$ на областях W в $\mathcal{A}_r$, для которых $W \cap \mathcal{A}_m = U$.

В силу определения 9 символы функций, то есть, соответствующие им фразы конечные или бесконечные, определяются с помощью исходных символов. Из этих фраз определяются и более сложные аналитические функции, в частности, $\exp(z) = e^z$, $\text{Ln}(z)$, z^a , a^z и т. д. Для этого используются локальные разложения в степенные ряды локально аналитических функций, а также теорема Стоуна-Вейерштрасса, утверждающая, что полиномы плотны в пространстве непрерывных функций на компактной канонической замкнутой области в $\mathbf{R}^n$, следовательно, также в $\mathcal{A}_r$ при $0 < r < \infty$ (смотри [14, 15]).

Для неассоциативных алгебр с $m \geq 3$ существует порядок умножения, который предписывается расстановкой скобок или вектором $q(s)$, указывающим на порядок умножения в слове. Например, слова $(az^p)(z^qb)$ и $a(z^{p+q}b)$ или $(az^{p+q})b$ при $a, b \in \mathcal{A}_m \setminus \mathbf{R}$, $m \geq 3$, различны, где $p \neq 0$ и $q \neq 0$ - натуральные числа.

11. Лемма. Если две функции или операторнозначные функции f и g ограничены на U (смотри определение 9.12), то $\mathcal{D}((f, \nu); (g, \mu)) < \infty$. В частности, если U компактна, то $\mathcal{D}((f, \nu); (g, \mu)) < \infty$ для любых $(f, \nu), (g, \mu) \in C_p^0(U, X)$.

Доказательство. Для любой степени однородности j каждое слово $\nu_{j,k}$ состоит не более, чем из $b(j + \omega)$ символов, где $b = 2$ для $\mathbf{H}$, $b = 3$ для $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$, следовательно, число таких слов конечно и $l(\nu_{j,k}) \leq s(j + \omega) < \infty$, так как кратность s_v или t_v , или p_v , или y_v появления $v \in$ или $v\tilde{e}$, или $v\mathbf{1}$, или $v\bar{\mathbf{1}}$ конечна и постоянна во всех словах данной фразы, хотя она и может зависеть от индекса $v = 1, \dots, n$ или самого символа, а каждый из этих символов может быть окружен с двух сторон двумя константами из $\mathcal{A}_r$, причем $\mathbf{H}$ ассоциативна в отличие от $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$, где $\omega = \omega(\nu) := s_1 + \dots + s_n + t_1 + \dots + t_n + p_1 + \dots + p_n + y_1 + \dots + y_n$. Тогда $l(\nu_{j,k}; \mu_{j,s}) \leq b(j + y)$, где $y = \max(\omega(\nu), \omega(\mu))$. Поскольку ряд $\sum_{j=0}^{\infty} [b(j + y)]b^j$ сходится, то $d(\mu, \nu) < \infty$. С другой стороны, $\sup_{z \in U} |f(z, \tilde{z}) - g(z, \tilde{z})| < \infty$ для ограниченных функций f и g на U , следовательно, $\mathcal{D}((f, \nu); (g, \mu)) < \infty$. Причем, как известно, непрерывная функция на компактном множестве ограничена, что доказывает последнее утверждение леммы.

12. Теорема. Пусть U - открытая область в $\mathcal{A}_r$, $r \geq 2$. Тогда существует непрерывный оператор $S : C_p^0(U, X) \times \Gamma \rightarrow X$, где Γ - это пространство всех спрямляемых путей в U , так что $S((f, \nu); \gamma) := \int_{\gamma} (f, \nu)(z, \tilde{z}) dz$.

Доказательство. На пространстве спрямляемых путей существует естественная метрика $d_r(\gamma, \eta)$ индуцированная метрикой между произвольными подмножествами A и B в $\mathcal{A}_r$: $d_r(A, B) := \max(\psi(A, B), \psi(B, A))$, $\psi(A, B) := \sup_{z \in A} \inf_{\xi \in B} |z - \xi|$. Функции f и ее представлению в виде фразы ν соответствует и единственная функция g

и ее представление в виде фразы μ , которая строится следующим образом. Функция g характеризуется условиями.

Пусть f определяется непрерывной функцией $\xi : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$, так что

$$(i) \quad \xi(1z, 2z)|_{1z=z, 2z=\bar{z}} = f(z, \bar{z}),$$

где $1z$ и $2z \in U$. Пусть также $g : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$ – непрерывная функция, которая $1z$ -супердифференцируема, так что

$$(ii) \quad (\partial g(1z, 2z)/\partial 1z).1 = \xi(1z, 2z) \text{ на } U^2. \text{ Тогда положим}$$

$$(iii) \quad \hat{f}(z, \bar{z}).h := \hat{f}_z(z, \bar{z}).h := [(\partial g(1z, 2z)/\partial 1z).h]|_{1z=z, 2z=\bar{z}} \text{ для любого } h \in \mathcal{A}_r.$$

Коротко это можно записать в виде $(\partial g(z, \bar{z})/\partial z).1 = f(z, \bar{z})$ и $\hat{f}_z(z, \bar{z}).h := \hat{f}(z).h := (\partial g(z, \bar{z})/\partial z).h$.

Фраза μ строится по алгоритму: сначала в каждом слове $\nu_{j,k}$ фразы ν заменим каждое e буквой z , что дает сумму слов $\lambda_{j+1, \alpha(k,i)}$, $\alpha = \alpha(k,i) \in \mathbf{N}$, $j, k, i \in \mathbf{N}$, то есть, $\nu_{j,k} \mapsto \sum_i \lambda_{j+1, \alpha(k,i)}$, где i нумерует позиции e в слове $\nu_{j,k}$, $i = 1, \dots, s$, где $s = s_1$. Поэтому, ν соответствует фраза $\lambda = \sum_{j, \alpha} \lambda_{j, \alpha}$. Частное дифференцирование $\partial f/\partial z$ было определено для функций и их представлений фразами. Рассмотрим остаток $(\partial \lambda/\partial z).1 - \nu =: \zeta$. Если $\zeta = 0$, то положим $\mu = \lambda$. Если $\zeta \neq 0$, то к каждому слову $\zeta_{j,k}$ этой фразы ζ применим левый или правый алгоритм из §2.6 [14]. Первый упомянутый выше шаг одинаков для обоих алгоритмов. Для этого рассмотрим две z -локально аналитические функции f_1 и q на U , так что f_1 и q не коммутируют, как и соответствующие им фразы ψ и σ . Пусть $\psi^0 := \psi$, $\sigma^0 := \sigma$, $\sigma^{-n} := \sigma^{(n)}$, $(\partial(\sigma^n)/\partial z).1 =: \sigma^{n-1}$ и $\sigma^{-k-1} = 0$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$, используя то же обозначение $\sigma_{j,k}^n$ для любого слова фразы σ . Тогда

(iv) $(\psi\sigma)^1 = \psi^1\sigma - \psi^2\sigma^{-1} + \psi^3\sigma^{-2} + \dots + (-1)^k\psi^{k+1}\sigma^{-k}$. В частности, если $\psi = (a_1z^n a_2)$, $\sigma = (b_1z^k b_2)$, с $n > 0$, $k > 0$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{A}_r \setminus \mathbf{RI}$, то $\psi^p = [(n+1)\dots(n+p)]^{-1}(a_1z^{n+p}a_2)$ для любого $p \in \mathbf{N}$, $\sigma^{-s} = k(k-1)\dots(k-s+1)(b_1z^{k-s}b_2)$ для любого $s \in \mathbf{N}$. Применим этот левый алгоритм по индукции к появляющимся соседним подсловам данного слова, с направлением обхода слева направо. Тогда применим это к каждому слову данной фразы. Симметрично правый алгоритм таков:

(v) $(\psi\sigma)^1 = \psi\sigma^1 - \psi^{-1}\sigma^2 + \psi^{-2}\sigma^3 + \dots + (-1)^n\psi^{-n}\sigma^{n+1}$, когда $\psi^{-n-1} = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Тогда применим этот правый алгоритм проходя справа налево по соседним подсловам данного слова. Для любого слова оба эти алгоритма после конечного числа итераций заканчиваются, так как длина каждого слова конечна. Эти алгоритмы применяются для решения дифференциального уравнения $(\partial \xi(z, \bar{z})/\partial z).1 = \zeta(z, \bar{z})$ для любого $z \in U$ в терминах фраз. Воспользуемся одним из этих алгоритмов для всех слов фразы ζ , чтобы получить и единственную фразу ξ и далее положить $\mu = \lambda + \xi$.

Если f_1 и q имеют разложения в ряды сходящиеся в $Int(B(\mathcal{A}_r, 0, R))$, то эти формулы демонстрируют, что существует z -аналитическая функция $(f_1q)^1$ с рядом сходящимся в $Int(B(\mathcal{A}_r, z_0, R))$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (nR^n)^{1/n} = R$, где $0 < R < \infty$. Поскольку f локально аналитична, то g тоже локально аналитична. Поэтому, для любой локально z -аналитической функции f и ее фразы ν существует оператор $\hat{f}$ и его фраза $\partial \mu/\partial z$. Рассматривая функцию G действительных переменных соответствующих g , мы получаем в силу леммы 2.5.1 [14], что все решения (g, μ) отличаются на константы из $\mathcal{A}_m$, так как $\partial g/\partial w_s + (\partial g/\partial w_p).(s^*p) = 0$ для любого $s = i_{2j}$, $p = i_{2j+1}$, $j = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ и $\partial g/\partial w_1$ единственна, следовательно, $\hat{f}$ единственна для f .

Обозначим описанное выше отображение $\mathcal{P} \ni \nu \mapsto \mu \in \mathcal{P}$ по $\phi(\nu) = \mu$. Таким образом, каждый выбранный алгоритм среди этих двух алгоритмов дает $\phi(\nu_1 + \nu_2) = \phi(\nu_1) + \phi(\nu_2) = \mu = \mu_1 + \mu_2$, если $\nu = \nu_1 + \nu_2$, более того, $\omega(0) = 0$. Поэтому, эта процедура дает единственную ветвь для S . Напомним, что если суще-

ствуется следующий предел

$$(vi) \quad \int_{\gamma} (f, \nu)(z, \tilde{z}) dz := \lim_P I((f, \nu); \gamma; P), \text{ где}$$

$$(vii) \quad I((f, \nu); \gamma; P) := \sum_{k=0}^{t-1} (\hat{f}, \hat{\nu})(z_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}) \cdot (\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$, $z_k := \gamma(c_k)$ для любого $k = 0, \dots, t$, то мы говорим, что (f, ν) интегрируема вдоль пути γ по переменной z .

Из уравнения 2.7.(4) [14] следует, что

$$(viii) \quad |S((f, \nu) - (y, \psi); \gamma)| \leq \mathcal{D}((f, \nu); (y, \psi)) V(\gamma) C_1 \exp(C_2 R^{2m+2})$$

для любых $(f, \nu), (y, \psi) \in C_P^0(U, X)$ для $U \subset \mathcal{A}_m$ с конечным $m \in \mathbf{N}$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от R , (f, ν) и (y, ψ) , $0 < R < \infty$ таково, что $\gamma \subset B(\mathcal{A}_m, z_0, R)$. Пространство X_t полно относительно нормы полигомогенных операторов, а также алгебра Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ полна относительно своей нормы. Поэтому, $\{S((f^v, \nu^v); \gamma) : v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность Коши в X для любой последовательности Коши $\{(f^v, \nu^v) : v \in \mathbf{N}\} \subset C_P^0(U, X)$, следовательно, последовательность $\{S((f^v, \nu^v); \gamma) : v \in \mathbf{N}\}$ сходится.

Для любого спрямляемого пути γ в U имеется каноническое замкнутое подмножество V в $\mathcal{A}_r$, так что $\gamma \subset \text{Int}(V) \subset V \subset U$. Тогда $V_m := V \cap \mathcal{A}_m$ компактно для любого $m \in \mathbf{N}$ и непрерывная функция $f|_V$ равномерно непрерывна на V_m . При этом $\lim_{d(\eta, 0e) \rightarrow 0} \mathcal{D}((y|_{V_m}, \eta), (0, 0e)) = 0$ для любого $m \in \mathbf{N}$. Для конечного r возьмем $m = r$. Для конечного r существует последовательность спрямляемых путей γ_m в V_m для подходящего алгебраического вложения $\mathcal{A}_m$ в $\mathcal{A}_r$, так что $\lim_{m \rightarrow \infty} d_r(\gamma_m, \gamma) = 0$. В алгебре $\mathcal{A}_r$ плотно объединение всех алгебраически вложенных подалгебр $\mathcal{A}_m$, $m \in \mathbf{N}$. Итак, для любого $\epsilon_k = 1/k$ существуют непрерывные функции f_m на V_m и фраза ν_m над $\mathcal{A}_m$ для $m = m(k)$ с $m(k) < m(k+1)$ для любого $k \in \mathbf{N}$, так что $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{D}((f_m, \nu_m), (f|_{V_m}, \mu)) = 0$, где каждое ν_m имеет естественное продолжение над $\mathcal{A}_m$ и, следовательно, f_m как соответствующая фраза для данной функциональной фразы имеет естественное продолжение на окрестность V_m в U . Это дает $S((f, \nu), \gamma) = \lim_{m \rightarrow \infty} S((f_m, \nu_m), \gamma_m)$.

В соответствии с доказательством теоремы 2.7 [14] оператор S непрерывен для функций и аналогично для операторно значных функций и их фраз относительно метрики $\mathcal{D}$.

13. Замечание. Для подмножества U в $\mathcal{A}_r$ пусть $\pi_{s,p,t}(U) := \{u : z \in U, z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, u = w_s s + w_p p\}$ для любых $s \neq p \in \mathbf{b}$, где $t := \sum_{v \in \mathbf{b} \setminus \{s,p\}} w_v v \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, w_s = w_p = 0, w_v \in \mathbf{R} \forall v \in \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{b} := \{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ – семейство стандартных генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$. То есть, геометрически $\pi_{s,p,t}(U)$ – проекция на комплексную плоскость $\mathbf{C}_{s,p}$ пересечения U с плоскостью $\tilde{\pi}_{s,p,t} \ni t$, $\mathbf{C}_{s,p} := \{as + bp : a, b \in \mathbf{R}\}$, так как $sp^* \in \hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$. Напомним, что в §§2.5-7 [14] для каждой непрерывной функции $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ был определен оператор ${}_j \hat{f}$ по каждой переменной ${}_j z \in \mathcal{A}_r$.

Далее предполагается, что область U в $\mathcal{A}_r^n$ имеет свойство, что каждая проекция $p_j(U) := U_j$ является $2^r - 1$ -связной (смотри [21]); $\pi_{s,p,t}(U_j)$ односвязна в $\mathbf{C}$ для любого $k = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, $s = i_{2^k}$, $p = i_{2^k+1}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = u + t \in U_j$, где $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{A}_r^n$ – это вектор с 1 на j -м месте, $p_j(z) = {}_j z$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, $z = \sum_{j=1}^n {}_j z e_j$, ${}_j z \in \mathcal{A}_r$ для любых $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbf{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

14. Теорема. Пусть область U в $\mathcal{A}_r$ удовлетворяет условиям замечания 13, и (f, ν) интегрально голоморфна на U . Тогда $\partial S((f, \nu); \gamma)/\partial z = (\hat{f}, \hat{\nu})(z)$ для любых $z_0, z \in \text{Int}(U)$ и спрямляемых путей γ в $\text{Int}(U)$, так что $\gamma(0) = z_0$ и $\gamma(1) = z$. В частности, если $f = (\partial g/\partial z).1$ и $\nu = (\partial \mu/\partial z).1$, где $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ и $\partial \nu/\partial \bar{z} = 0$ на U , то $S((f, \nu); \gamma) = (g, \mu)(z) - (g, \mu)(z_0)$.

Доказательство. В силу условия, что (f, ν) интегрально голоморфна, то есть, $S((f, \nu); \eta) = 0$ для любой спрямляемой петли η в U , следует, что $S((f, \nu); \gamma)$ зависит только от $z_0 = \gamma(0)$ и $z = \gamma(1)$ и не зависит от спрямляемых путей с одними и теми же началом и концом. Поскольку $(\partial g(z, \bar{z})/\partial z).1 = f(z)$ и $(\partial \mu(z, \bar{z})/\partial z).1 = \nu$, так что $\hat{f}(z, \bar{z}) = \partial g(z, \bar{z})/\partial z$ и $\hat{\nu}(z, \bar{z}) = \partial \mu(z, \bar{z})/\partial z$ существует в смысле распределений (смотри также [13]), тогда из формул 12(vi, vii) следует первое утверждение этой теоремы.

Если $(f, \nu) = (\partial(g, \mu)/\partial z).1$, то существует $(y, \psi) \in C_p^0(U, X)$, так что $(\partial(y, \psi)/\partial z).1 = (g, \mu)$, следовательно, $(\partial^2(y, \psi)/\partial z^2)(h_1, h_2) = (\partial^2(y, \psi)/\partial z^2)(h_2, h_1)$ for each $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_r$, так как (f, ν) и, следовательно, (g, μ) и (y, ψ) голоморфны, в частности, бесконечно супердифференцируемы по z в U (смотри теоремы 2.11, 2.16, 3.10 и следствие 2.13 [14]). Отметим, что первый шаг алгоритма доказательства теоремы 12 дает $\mu = \lambda$. Для $h_1 = 1$ и $h_2 = \Delta z$ это дает $(\hat{f}, \hat{\nu}).\Delta z = (\partial(g, \mu)/\partial z).\Delta z$, и мы можем заменить $(\hat{f}, \hat{\nu}).\Delta z$ в интегральных суммах на последнее выражение. Второе утверждение поэтому следует из того факта, что интегральная голоморфность (f, ν) эквивалентна условию $\partial(f, \nu)/\partial \bar{z} = 0$ супердифференцируемой f на U , где U удовлетворяет условиям замечания 13.

15. Замечание. В частном случае $\mathbf{C} = \mathcal{A}_1$ мы просто имеем $\hat{f} = f$, но здесь рассматривается случай произвольного $r \in \mathbf{N}$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$. Например, пара, состоящая из функции и ее фразы $((ab)(c\bar{z}d), (aeb)(c\bar{z}d))$ принадлежит $C_p^0(U, \mathcal{A}_r)$ и существует $(g, \mu) = ((azb)(c\bar{z}d), (azb)(c\bar{z}d)) \in C_p^0(U, \mathcal{A}_r)$, так что $(\partial(g, \mu)/\partial \bar{z}).1 = (f, \nu)$, но (f, ν) не является интегрально голоморфной для любого $r \geq 1$, где $a, b, c, d \in \mathcal{A}_r$ – это постоянные. В коммутативном случае $\mathbf{C}$ условия пункта 9 просто сводятся к степенным рядам комплексно голоморфных функций и символы e и $\bar{e}$ можно опустить, но в коммутативном случае, когда $r \geq 2$, условия пункта 9 в общем случае существенны для теорем 12 и 14.

16. Лемма. Пусть $v : \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r$ – автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_r$, а $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ и $\{s_0, s_1, \dots, s_{2^r-1}\}$ – генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$, где $v(i_j) = s_j$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, $2 \leq r < \infty$. Тогда интегралы $\int_a^b f(t)dt$ и $\int_\gamma w(z)dz$ не зависят от выбора базисных генераторов, где $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ и $w : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ – кусочно непрерывные функции, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, γ – спрямляемая кривая в области $U \subset \mathcal{A}_r$.

Доказательство. Любой элемент алгебры Кэли-Диксона $z \in \mathcal{A}_r$ можно разложить единственным образом по базису генераторов: $z = z_0 i_0 + \dots + z_{2^r-1} i_{2^r-1}$, $z = x_0 s_0 + \dots + x_{2^r-1} s_{2^r-1}$, где $z_j, x_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0, \dots, 2^r - 1$. Но единица единственна в алгебре $\mathcal{A}_r$, так как $\zeta \zeta^{-1} = 1$ для любого элемента $\zeta \neq 0$ в $\mathcal{A}_r$, где $\zeta^{-1} = \tilde{\zeta}|\zeta|^{-2}$. Поэтому $i_0 = v(i_0) = s_0$, где как обычно $i_0 = 1$. Разобьем отрезок $[a, b]$ или кривую на сегменты $[a_k, b_k]$ или γ_k , так что $f|_{[a_k, b_k]}$ и $w|_{U_k}$ непрерывны, где $a \leq a_k < b_k = a_{k+1} \leq b$ и $\dim_{\mathbf{R}}(\partial(U_k \cap U_{k+1})) \leq 2^r - 1$, $\gamma_k = \gamma \cap U$, $U_k \cap U_{k+1} \cap \gamma$ – одноточечное множество. При этом $\int_a^b f(t)dt = \sum_k \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt$ и $\int_\gamma w(z)dz = \sum_k \int_{\gamma_k} w(z)dz$.

Первый интеграл $\int_a^b f(t)dt$ берется вдоль отрезка $[a, b]$ вещественной прямой, следовательно, он не зависит от базиса генераторов. Во втором интеграле кривая γ и область U , как и γ_k с U_k , естественно не зависят от выбора базиса генераторов.

Напомним определение интеграла вдоль спрямляемой кривой. Пусть $w : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, где U открыто в $\mathcal{A}_r$, w определена непрерывной функцией $\xi : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$, так что

$$(1) \xi(\textstyle\begin{smallmatrix} 1z, & 2z \end{smallmatrix})|_{\textstyle\begin{smallmatrix} 1z=z, & 2z=\tilde{z} \end{smallmatrix}} = w(z, \tilde{z})$$

или коротко $w(z)$ вместо $w(z, \tilde{z})$, где $\textstyle\begin{smallmatrix} 1z \end{smallmatrix}$ и $\textstyle\begin{smallmatrix} 2z \end{smallmatrix} \in U$. Пусть также $g : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, которая является $\textstyle\begin{smallmatrix} 1z \end{smallmatrix}$ -супердифференцируемой, так что

$$(2) (\partial g(\textstyle\begin{smallmatrix} 1z, & 2z \end{smallmatrix})/\partial \textstyle\begin{smallmatrix} 1z \end{smallmatrix}).1 = \xi(\textstyle\begin{smallmatrix} 1z, & 2z \end{smallmatrix}) \text{ на } U^2. \text{ Тогда положим}$$

(3) $\hat{w}(z, \tilde{z}).h := \hat{w}_z(z, \tilde{z}).h := [(\partial g(\textstyle\begin{smallmatrix} 1z, & 2z \end{smallmatrix})/\partial \textstyle\begin{smallmatrix} 1z \end{smallmatrix}).h]|_{\textstyle\begin{smallmatrix} 1z=z, & 2z=\tilde{z} \end{smallmatrix}}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Коротко мы можем это записать в виде $(\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1 = w(z, \tilde{z})$ и $\hat{w}_z(z, \tilde{z}).h := \hat{w}(z).h := (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).h$. Если существует следующий предел

$$(4) \int_{\gamma} w(z, \tilde{z})dz := \lim_P I(w, \gamma; P), \text{ где}$$

$$(5) I(w, \gamma; P) := \sum_{k=0}^{t-1} \hat{w}(z_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}).(\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$, $z_k := \gamma(c_k)$ для любого $k = 0, \dots, t$, тогда по определению w является интегрируемой вдоль пути γ по переменной z .

Поскольку $i_0 = s_0 = 1$, то и $\hat{w}(z)$ не зависит от выбора базиса, так как оператор $\hat{w}(z)$ определенный в смысле распределений задается условиями (2, 3) и алгоритмом построения $\hat{w}$ независимым от выбора базиса генераторов в каждой подобласти U_k (смотри доказательства предложения 2.6 и теоремы 2.7 в [14, 15]).

17. Лемма. Пусть задана прямая $a + S\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_r$ при $2 \leq r < \infty$, где $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $\text{Re}(S) = 0$. Тогда для функции $M(p, t)$ заданной уравнением 3(2) или 3(3, 3') существует автоморфизм v , $z \mapsto v(z)$, алгебры $\mathcal{A}_r$, так что в базисе генераторов $s_j := v(i_j)$ ограничение функции $v(M(p, t; \zeta))$ на прямую $p \in \{z : z = a + S\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$ равно

$$(1) v(M(p, t; \zeta)) = (p'_1 t + \zeta'_1)K, \text{ где}$$

$$(2) K = [s_1 \cos(\zeta'_2) + s_2 \sin(\zeta'_2) \cos(\zeta'_3) + i_3 \sin(\zeta'_2) \sin(\zeta'_3)] \text{ для кватернионов;}$$

$$(3) K = [s_1 \cos(\zeta'_2) + s_2 \sin(\zeta'_2) \cos(\zeta'_3) + \dots + s_6 \sin(\zeta'_2) \dots \sin(\zeta'_6) \cos(\zeta'_7) + s_7 \sin(\zeta'_2) \dots \sin(\zeta'_6) \sin(\zeta'_7)] \text{ для октонионов,}$$

$$(3') K = [s_1 \cos(\zeta'_2) + s_2 \sin(\zeta'_2) \cos(\zeta'_3) + \dots + s_{2^r-2} \sin(\zeta'_2) \dots \sin(\zeta'_{2^r-2}) \cos(\zeta'_{2^r-1}) + s_{2^r-1} \sin(\zeta'_2) \dots \sin(\zeta'_{2^r-2}) \sin(\zeta'_{2^r-1})] \text{ для общей алгебры Кэли-Диксона, где } p'_1 = v((p - \tilde{p})/2) \text{ и } \zeta'_n = v(\zeta_n) \in \mathbf{R} \text{ для любого } n = 1, \dots, 2^r - 1.$$

Доказательство. На заданной прямой аргумент p можно записать в виде: $p = p_0 + p_S S$, где $p_0 = \text{Re}(p) = a$, а $p_S = \theta$. Тогда генераторы $s_0 = 1$ и $s_1 = S$ дополним до базиса генераторов $\{s_0, \dots, s_{2^r-1}\}$ в $\mathcal{A}_r$, используя стандартную процедуру последовательного удвоения, чтобы $\text{Re}(s_{2^n-1} \tilde{s}_{2^n}) = 0$ для любого $n = 1, \dots, r-1$, так как $\mathbf{R} \oplus \mathbf{SR}$ изоморфно $\mathbf{C}$. Поскольку $v(z + \zeta) = v(z) + v(\zeta)$ и $v(z\zeta) = v(z)v(\zeta)$ для любых $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$, то $v(e^z) = e^{v(z)}$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$. Тогда $v(\exp(z \exp_n(\zeta))) = \exp(v(z) \exp_n(v(\zeta)))$ для любых $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$ и $1 \leq n \in \mathbf{Z}$, где $\exp_1(z) := \exp(z)$, $\exp_{n+1}(z) := \exp(\exp_n(z))$ для любых $1 \leq n \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathcal{A}_r$. Используя итерированные экспоненты из замечания 4 и формулы

$$h_j = (-hi_j + i_j(2^r - 2)^{-1} \{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2 \text{ для любого } j = 1, 2, \dots, 2^r - 1, \\ h_0 = (h + (2^r - 2)^{-1} \{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2,$$

где $h = h_0 i_0 + \dots + h_{2^r-1} i_{2^r-1}$, $h_j \in \mathbf{R}$ для любого j , $h^* = \tilde{h}$ обозначает сопряженный элемент алгебры Кэли-Диксона h , $h \in \mathcal{A}_r$, получим утверждение леммы, причем $p'_1 = p_S = v((p - \tilde{p})/2)$.

18. Предложение. Пусть U – область в алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r$, $f : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$ – это кусочно-непрерывная функция, а $\gamma : (a_1, b_1) \rightarrow U$ и $\psi : (a_2, b_2) \rightarrow U$ – пути, где $-\infty \leq a_1 < b_1 \leq \infty$, $-\infty \leq a_2 < b_2 \leq \infty$, причем $\gamma|_{(\alpha, \beta)}$ и $\psi|_{(\alpha, \beta)}$ спрямляемы для любых $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, и интеграл $\int_\gamma (\int_\psi f(z, \zeta) d\zeta) dz$ сходится. Тогда существует

$$(i) \quad \int_\psi (\int_\gamma f(z, \zeta) dz) d\zeta = \int_\gamma (\int_\psi f(z, \zeta) d\zeta) dz.$$

Доказательство. Поскольку f кусочно непрерывна, то существует счетное разбиение области U^2 в виде $U^2 = \bigcup_k W_k$ подобластей W_k , где коразмерность над $\mathbf{R}$ пересечения $\text{codim}_{\mathbf{R}}(W_k \cap W_l) \geq 1$ для любых $k \neq l$. При этом ограничения $f|_{W_k}$ непрерывны. Можно выбрать каждую W_k ограниченной так, чтобы $(\gamma \times \psi) \cap W_k =: \gamma_k \times \psi_k$ были со спрямляемыми $\gamma_k = \gamma|_{(\alpha_k, \beta_k)}$ и $\psi_k = \psi|_{(\alpha'_k, \beta'_k)}$. Тогда в силу непрерывности ограничения $f|_{W_k}$ существуют конечные интегралы

$$(ii) \quad \int_{\psi_k} (\int_{\gamma_k} f(z, \zeta) dz) d\zeta = \int_{\gamma_k} (\int_{\psi_k} f(z, \zeta) d\zeta) dz \text{ для любого } k. \text{ Поскольку}$$

$\sum_k \int_{\gamma_k} (\int_{\psi_k} f(z, \zeta) d\zeta) dz = \int_\gamma (\int_\psi f(z, \zeta) d\zeta) dz$, то суммирование обеих частей равенства (ii) дает уравнение (i).

19. Теорема. Если функция $f(t)$ является оригиналом (смотри определение 1), так что ${}_N F_u(p; \zeta) := \sum_{s=0}^{2^r-1} {}_N F_{u,s}(p; \zeta) N_s$ – ее изображение, где функция f записана в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t) N_s$, $f_s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ для любого $s = 0, 1, \dots, 2^r - 1$ (смотри замечание 4), $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $4 \leq r \in \mathbf{N}$. Тогда в любой точке t , где $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера справедливо равенство:

$$(i) \quad f(t) = (2\pi N_1)^{-1} \text{Re}(S \tilde{N}_1) \sum_{s=0}^{2^r-1} \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_{u,s}(p; \zeta) \exp(u(p, t; \zeta)) dp N_s,$$

где $u(p, t; \zeta) = pt + \zeta$ или $u(p, t; \zeta) = p_0 t + M_N(p, t; \zeta) + \zeta_0$, а интеграл берется вдоль прямой $p(\tau) = a + S\tau \in \mathbf{K}$, $\tau \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{A}_r$, $\text{Re}(S) = 0$, $|S| = 1$, $\text{Re}(p) = a > s_0$ и интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. В силу разложения функции f в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t) N_s$ достаточно рассмотреть обратное преобразование для вещественно значной функции f_s , которую обозначим для простоты через f . Поскольку $t \in \mathbf{R}$, то $\int_0^\infty f(\tau) d\tau$ – это интеграл Римана. Если w – это голоморфная функция переменной алгебры Кэли-Диксона, то локально в односвязной области U в каждом шаре $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ с центром в z_0 радиуса $R > 0$ содержащемся во внутренности $\text{Int}(U)$ области U выполняется равенство

$$(\partial \int_{z_0}^z w(\zeta) d\zeta / \partial z) \cdot 1 = w(z),$$

где интеграл зависит лишь о начальной z_0 и конечной z точек спрямляемого пути в $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$. С другой стороны, вдоль прямой $a + S\mathbf{R}$ ограничение первообразной имеет вид $\int_{\theta_0}^\theta w(a + S\tau) d\tau$, так как

$$\int_{z_0=a+S\theta_0}^{z=a+S\theta} w(\zeta) d\zeta = \int_{\theta_0}^\theta \hat{w}(a + S\tau) \cdot S d\tau,$$

а $\partial f(z) / \partial \theta = (\partial f(z) / \partial z) \cdot S$ для супердифференцируемой по $z \in U$ функции $f(z)$, причем первообразная единственна с точностью до постоянной из $\mathcal{A}_r$ с данным представлением функции и алгоритмом [14, 15].

Интеграл $g_b(t) := \int_{a-SB}^{a+SB} {}_N F_{u,s}(p; \zeta) \exp(p_0 t + M_N(p, t; \zeta) + \zeta_0) dp$ для любого $0 < b < \infty$ можно с использованием генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$ и теоремы Фубини для вещественно значных компонент функций преобразовать к виду:

$$g_b(t) = (2\pi N_1)^{-1} \text{Re}(S \tilde{N}_1) \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_{a-Sb}^{a+Sb} \exp(p_0 t + M_N(p, t; \zeta) + \zeta_0) \exp(-(p_0 \tau + M_N(p, \tau; \zeta) + \zeta_0)) dp,$$

так как интеграл $\int_0^\infty f(\tau) \exp(-(p_0 \tau + M_N(p, \tau; \zeta) + \zeta_0)) d\tau$ равномерно сходится относительно p в полупространстве $\text{Re}(p) > s_0$ в $\mathcal{A}_r$ (смотри также предложение 18). В силу альтернативности алгебры $\mathbf{K}$ и ассоциативности со степенями алгебры $\mathcal{A}_r$

можно рассмотреть автоморфизм v из леммы 17 $z \mapsto v(z)$ для любого $z \in \mathbf{K}$. Тогда с таким v получим функцию $M(p, t; \zeta)$, даваемую формулами 17(1–3), где $p_0, p'_1, \zeta_0, \zeta'_1, \dots, \zeta'_{2r-1} \in \mathbf{R}$ постоянны, $t \in \mathbf{R}$, $K \in \mathcal{A}_r$ постоянно с $Re(K) = 0$, где $p'_0 = p_0$ и $\zeta'_0 = \zeta_0$, так как $v(1) = 1$ и, следовательно, $v(t) = t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Формула (i) справедлива тогда и только тогда, когда она справедлива после применения автоморфизма v к обеим частям равенства, так как $v(z) = v(\zeta)$ для $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$ равносильно тому, что $z = \zeta$.

Тогда в силу лемм 16 и 17 с точностью до автоморфизма алгебры $\mathcal{A}_r$ доказательство сводится к случаю $p = (p_0, p_1, 0, \dots, 0)$, $N = (N_0, N_1, N_2, \dots, N_{2r-1})$, где $N_0 = 1$, так как $\mathbf{R}$ является центром алгебры $\mathcal{A}_r$. Но это дает $p_1 = p_1(t) = Re(S\tilde{N}_1)t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Рассмотрим случай $c := Re(S\tilde{N}_1) \neq 0$, а тогда частный случай $Re(S\tilde{N}_1) = 0$ получится предельным переходом при $Re(S\tilde{N}_1) \neq 0$ стремящемся к нулю. Итак,

$$g_b(t) = (2\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_{a-Sb}^{a+Sb} \exp(at + c(\zeta_1 + t)K) \exp(-(a\tau + c(\zeta_1 + \tau)K)dp,$$
 так как $\zeta_0, a \in \mathbf{R}$, где K дается формулами 17(2,3). Тогда

$$\begin{aligned} g_b(t) &= (\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau) e^{a(t-\tau)} [\sin(bc(t-\tau))] (ct - c\tau)^{-1} \\ &= (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty f(\zeta + t) e^{-a(\zeta+t)} [\sin(b\zeta)] \zeta^{-1} d\zeta, \end{aligned}$$

где была использована замена $\tau - t = \zeta$. Положим $w(t) := f(t)e^{-at}$, где $w(t) = 0$ для любого $t < 0$. Поэтому,

$$g_b(t) = (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta + (\pi)^{-1} f(t) \int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta.$$
 Интеграл во втором слагаемом известен как интеграл Эйлера: $\int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = \pi$ для любого $b > 0$, следовательно, второе слагаемое равно $f(t)$. Остается доказать, что $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = 0$, что вытекает из следующей леммы.

20. Лемма. Если функция $\psi(\zeta)$ со значениями в алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0.$$

Доказательство. Если ψ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то в результате интегрирования по частям:

$$\int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = -\psi(\zeta) \cos(b\zeta) b^{-1} \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \psi'(\zeta) \cos(b\zeta) b^{-1} d\zeta$$
 и, следовательно, $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0$. Если же $\psi(\zeta)$ — произвольная интегрируемая функция, то для любого $\epsilon > 0$ существует непрерывно дифференцируемая функция $\psi_\epsilon(\zeta)$ такая, что $\int_\alpha^\beta |\psi(\zeta) - \psi_\epsilon(\zeta)| d\zeta < \epsilon/2$. Тогда $\int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = \int_\alpha^\beta [\psi(\zeta) - \psi_\epsilon(\zeta)] \sin(b\zeta) d\zeta + \int_\alpha^\beta \psi_\epsilon(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta$, где $|\int_\alpha^\beta [\psi(\zeta) - \psi_\epsilon(\zeta)] \sin(b\zeta) d\zeta| < \epsilon/2$ для любых b , так как $|\sin(b\zeta)| \leq 1$, а второе слагаемое стремится к нулю: $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \psi_\epsilon(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0$ по доказанному выше.

Окончание доказательства теоремы 19. Для фиксированного $\epsilon > 0$ имеется равенство:

$$\int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = \int_{-B}^B [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta + \int_{|\zeta| > B} w(\zeta + t) \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta - w(t) \int_{|\zeta| > B} \sin(b\zeta) \zeta^{-1} d\zeta.$$
 Второе и третье слагаемые являются сходящимися интегралами и поэтому при достаточно больших $B > 0$ они по модулю меньше $\epsilon/3$. В силу условия Гёльдера $|[w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1}| \leq A|\zeta|^{1-c}$, где $c > 0$, $A > 0$. Тогда в силу леммы 10 существует $b_0 > 0$ такое, что

$$|\int_{-B}^B [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta| < \epsilon/3 \text{ для любых } b > b_0. \text{ Итак,}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = 0.$$

Эту теорему в случае общей функции $M_N(p, t; \zeta)$ можно также доказать непосредственно вычислением встречающихся интегралов по вещественным переменным t и τ , используя лемму 20.

21. Теорема. Оригинал $f(t)$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, или $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$

над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $4 \leq r \in \mathbf{N}$, вполне определяется своим изображением ${}_NF_u(p; \zeta)$ с точностью до значений в точках разрыва.

Доказательство. В силу теоремы 19 значение $f(t)$ в любой точке t непрерывности $f(t)$ выражается через ${}_NF_u(p; \zeta)$ по формуле 19(i). При этом значения оригинала в точках разрыва не влияют на изображение ${}_NF_u(p; \zeta)$, так как на любом конечном интервале число точек разрыва конечно.

22. Теорема. Если функция ${}_NF_u(p; \zeta)$ аналитична по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в полупространстве $W := \{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > s_0\}$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, а также произвольной алгебры $\mathcal{A}_r$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \leq r < \infty$, $u(p, t; \zeta) = pt + \zeta$ или $u(p, t; \zeta) := p_0t + M(p, t; \zeta) + \zeta_0$, в полупространстве $\operatorname{Re}(p) > s_0$, причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что

(i) $|{}_NF_u(p)| \leq C_a \exp(-\epsilon_a|p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $\operatorname{Re}(p) \geq a$, где s_0 фиксировано, а интеграл

(ii) $\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_NF_u(p; \zeta) dp$ абсолютно сходится, то ${}_NF_u(p; \zeta)$ является изображением функции

$$(iii) f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_NF_u(p; \zeta) \exp(u(p, t; \zeta)) dp.$$

Доказательство. Случай $u(p, t; \zeta) = pt + \zeta$ получается из $u(p, t; \zeta) := p_0t + M(p, t) + \zeta_0$ при $p = (p_0, p_1, 0, \dots, 0)$, но интеграл вдоль прямой линии $a + St$, $t \in \mathbf{R}$, с таким p в базисе генераторов $(N_0, \dots, N_{2r-1})$ можно получить из общего интеграла автоморфизмом v , $z \mapsto v(z)$, алгебры $\mathcal{A}_r$, $r = 2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, $r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$. То есть, в силу лемм 16 и 17 достаточно доказать равенство типа (iii) после действия автоморфизмом v на левую и правую его части.

Пусть $\operatorname{Re}(p) = a > s_0$, тогда

$$\left| \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} \exp(M(p, t; \zeta)) {}_NF_u(p; \zeta) dp \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |{}_NF_u(a + S\theta; \zeta)| d\theta.$$

В силу предположения теоремы этот интеграл сходится равномерно относительно $t \in \mathbf{R}$. Для $f(t)$ даваемой формулой (iii) при $\operatorname{Re}(\eta) =: \eta_0 > s_0$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f(t) \exp(-\eta_0 t) dt \\ &= (2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} \int_0^\infty \left(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_NF_{u,j}(p; \zeta) \exp(u(p, t; \zeta)) dp \right) \exp(-\eta_0 t) (dt) N_j, \end{aligned}$$

в котором можно тогда изменить порядок интегрирования, так как $t \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-\eta_0 t) dt = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} \left(\int_0^\infty {}_NF_{u,j}(p; \zeta) \exp((a - \eta_0)t) dt \right) (dp) N_j,$$

так как $e^v \in \mathbf{R}$ для любого $v \in \mathbf{R}$, $e^{aM} e^{bM} = e^{(a+b)M}$ для любых $a, b \in \mathbf{R}$. Поскольку $a < \eta_0$ и

$$\int_0^\infty e^{(a-\eta_0)t} dt = -(a - \eta_0)^{-1},$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t) \exp(-\eta_0 t) dt &= -(2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} \left(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_NF_{u,j}(p; \zeta) (a - \eta_0)^{-1} dp \right) N_j \\ &= -(2\pi)^{-1} \tilde{S} \left(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_NF_u(p; \zeta) (a - \eta_0)^{-1} dp \right). \end{aligned}$$

Для окончания доказательства понадобится следующий аналог леммы Жордана.

23. Лемма. Пусть функция F переменной p из алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r \in \mathbf{N}$ удовлетворяет условиям (1 – 3):

(1) функция $F(p)$ непрерывна по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в (открытой) области W полупространства $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > s_0\}$, причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что

(2) $|F(p)| \leq C_a \exp(-\epsilon_a|p|)$ для любого $p \in C_{R(n)}$, $C_{R(n)} := \{z \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(z) \geq a\}$, $0 < R(n) < R(n+1)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \infty$, где s_0 фиксировано, а интеграл

$$(3) \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} F(p) dp \text{ абсолютно сходится. Тогда}$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp = 0$
 для любого $t > 0$ и любой последовательности спрямляемых кривых γ_n содержащихся в $C_{R(n)} \cap W$, причём или $F(p)$ голоморфна в W , которая является $(2^r - 1)$ -связной открытой областью в $\mathcal{A}_r$ (смотри [21]), так что проекция $\pi_{s,p,t}(W)$ односвязна в $s\mathbf{R} \oplus p\mathbf{R}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \mathcal{A}_r \ominus s\mathbf{R} \ominus p\mathbf{R}$ и $u \in s\mathbf{R} \oplus p\mathbf{R}$, для которых существует $z = t + u \in \mathcal{A}_r$; или существует константа $C_V > 0$ такая, что вариации (длины) кривых $V(\gamma_n) \leq C_V R_n$ для любого n , где $u(p, t; \zeta)$ - функция даваемая уравнениями $\mathfrak{z}(1-\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Если $0 < \epsilon \leq \min(a - s_0, \epsilon_a)$, тогда в силу условия (ii) существует константа $C > 0$ такая, что

$$(iv) |F(p)| \leq C e^{-\epsilon|p|},$$

для любых $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) \geq a > s_0$. Если U - это область в $\mathcal{A}_r$ диаметра не превосходящего ρ , то в силу (4) из доказательства теоремы 7 [14] выполняется неравенство:

$$\sup_{p \in U} \|\hat{F}(p)\| \leq \sup_{p \in U} |F(p)| C_1 \exp(C_2 \rho^n),$$

где C_1 и C_2 - это положительные постоянные независимые от F , $n = 2^r + 2$, $2 \leq r \in \mathbf{N}$. В частности, в качестве U можно взять внутренность параллелепипеда с ребрами длины не превосходящей $\rho/2^{r/2}$. Тогда путь интегрирования можно покрыть конечным числом таких параллелепипедов. В случае окружности радиуса R число необходимых параллелепипедов не превосходит $2\pi R/\rho + 1$. Существует $R_0 > 0$, так что для любого $R > R_0$ выполняется неравенство $2\pi R/\rho < \exp(C_2 \rho^{n-1}(R - \rho))$. Поэтому в ρ - окрестности C_R^ρ окружности радиуса R с $R > R_0$ выполняется неравенство:

$$\sup_{p \in C_R^\rho} \|\hat{F}(p)\| \leq \sup_{p \in C_R^\rho} |F(p)| C_1 \exp(C_2 \rho^{n-1} R).$$

Поскольку $\rho > 0$ можно взять произвольно малым, то существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любых $0 < \rho < \rho_0$ удовлетворяется неравенство $C_2 \rho^{n-1} < \epsilon$, следовательно,

$$\sup_{p \in C_R^\rho, Re(p) \geq a} \|\hat{F}(p)\| \leq C C_1 \exp((C_2 \rho^{n-1} - \epsilon)R) \leq C C_1 \exp(-\delta R)$$

в силу условия наложенного на F , где C - это положительная постоянная для данной F , $\delta = C_2 \rho^{n-1} - \epsilon > 0$. При этом длина пути интегрирования не превосходит $2\pi R$, а $\lim_{R \rightarrow \infty} C C_1 2\pi R \exp(-\delta R) = 0$. Функция $F(p)$ непрерывна по p , значит интегрируема вдоль любой спрямляемой кривой в области W полупространства $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > s_0\}$.

Если $F(p)$ голоморфна, то в силу теоремы 2.11 [14, 15] $\int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp$ не зависит от вида кривой и определяется лишь начальной и конечной её точками. Если $V(\gamma_n) \leq C_V R_n$ для любого n , то достаточно доказать утверждение леммы для любой подпоследовательности $R_{n(k)}$ с $R_{n(k+1)} \geq R_{n(k)} + 1$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Обозначим для простоты такую подпоследовательность через R_n . Каждую спрямляемую кривую можно аппроксимировать сходящейся последовательностью спрямляемых ломаных линий, составленных из дуг окружностей. Если кривая расположена на сфере, то эти окружности можно взять с общим центром со сферой. Условие (2) в каждой плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, где $N \in \mathcal{A}_r$, $Re(N) = 0$, $|N| = 1$, выполняется, причем равномерно относительно направляющих N и можно выполнить диффеоморфизм g в $\mathcal{A}_r$, так что $g(W) = W$, $g(S_n) = S_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, и образом C^1 кривой из W является дуга окружности, так как $0 < R_n + 1 < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Функционал $(F, \gamma) \mapsto \int_\gamma F(p) dp$ непрерывен из $C^0(V, \mathcal{A}_r) \times \Gamma$ в $\mathcal{A}_r$, где V - компактная область в $\mathcal{A}_r$, Γ - семейство спрямляемых кривых в V с метрикой $\rho(v, w) := \max(\sup_{z \in v} \inf_{\zeta \in w} |z - \zeta|, \sup_{z \in w} \inf_{\zeta \in v} |z - \zeta|)$ (смотри теорему 2.7 [14, 15]). Пространство C^1 непрерывно дифференцируемых функций вещественных переменных плотно в пространстве непрерывных функций C^0 в компактно-открытой топологии в случае конечного числа переменных. При этом спрямляемая кривая является

равномерным пределом C^1 кривых, так как каждая спрямляемая кривая непрерывна. Поэтому, рассмотрим $\gamma_n = \psi_n \cap \{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > a\} \cap W$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp = 0,$$

так как это выполняется для $\gamma_n = \pi_n \cap C_{R(n)}$, а значит и для общих γ_n с теми же начальными и конечными точками, где π_n – двумерные над $\mathbf{R}$ плоскости в $\mathcal{A}_r$.

Продолжение **доказательства** теоремы 22. В силу леммы 23

$$|\int_{\psi_R} F(p)(p - \eta_0)^{-1} dp| \leq u(R)\pi R/(R - |\eta_0|),$$

где $0 < u(R) < \infty$ и существует $\lim_{R \rightarrow \infty} u(R) = 0$, а ψ_R – дуга окружности $|p| = R$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ с $\operatorname{Re}(p) > a$, следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\psi_R} F(p)(p - \eta_0)^{-1} dp = 0,$$

так как $u(R) \leq u_0 \exp(-\delta R)$ для любого $R > R_0$, где $u_0 = \text{const} > 0$.

Тогда прямую $a + S\theta$ с $\theta \in \mathbf{R}$ можно заменить замкнутым контуром ϕ_R , составленным из ψ_R и отрезка $[a + Sb, a - Sb]$, проходимого сверху вниз. Итак,

$$\int_0^\infty \exp(-\eta_0 t) f(t) dt = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{\phi_R} F(p)(p - \eta_0)^{-1} dp,$$

где знак перед интегралом изменен за счет изменения направления обхода петли ϕ_R . Напомним, что в случае алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ вычет функции является оператором $\mathbf{R}$ -однородным и $\mathcal{A}_r$ -аддитивным аргумента $L \in \mathcal{A}_r$ с $\operatorname{Re}(L) = 0$, причем вычет естественно зависит от функции и точки. В области $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) \geq a, |p| \leq R\}$ аналитическая функция $F(p)$ имеет лишь одну особую точку $p = \eta_0$, которая является полюсом первого порядка с вычетом $\operatorname{res}(\eta_0; (p - \eta_0)^{-1} F(p)) \cdot L = LF(\eta_0)$ для любых $L \in \mathcal{A}_r$ с $\operatorname{Re}(L) = 0$, следовательно,

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-\eta_0 t) dt = F(\eta_0), \text{ так как } L = S \text{ в данном случае и } S\tilde{S} = 1.$$

При $t < 0$ в силу упомянутой выше $\mathcal{A}_r$ леммы 23 получим, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\phi_R} F(p) e^{pt} dp = 0,$$

так как $\operatorname{Re}(p) = a > 0$, следовательно, прямую $a + S\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$, можно заменить петлей ϕ_R , что и выше. Тогда при $t < 0$ получим:

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\phi_R} F(p) e^{pt} dp = 0,$$

так как $F(p)$ аналитична по p вместе с e^{pt} внутри области $\{p : p \in \mathcal{A}_r; |p| \leq R', \operatorname{Re}(p) > s_0\}$, $a > s_0$, $0 < R < R' \leq \infty$. То есть условие 2 для оригинала выполняется. С другой стороны,

$$|f(t)| \leq (2\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty |F(a + S\theta)| d\theta = Ce^{at},$$

где $C = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty |F(a + S\theta)| d\theta < \infty$, следовательно, выполнено условие (3). Также $f(t)$ является непрерывной, так как подинтегральная функция $F(p)$ непрерывна, удовлетворяет условиям (i, ii) и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(\theta): |\theta| \geq R} F(p) dp = 0. \text{ Более того, интеграл}$$

$$\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p; \zeta) [\partial \exp(u(p, t)) / \partial t] dp$$

сходится в силу условий (i, ii) и доказательства выше, следовательно, функция $f(t)$ дифференцируема, а значит и подавно удовлетворяет условию Липшица.

24. Замечание. В теореме 22 условие (i) можно заменить на

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \in C_{R(n)}} \|\hat{F}(p)\| = 0$$

по последовательности $C_{R(n)} := \{z \in \mathcal{A}_r : |z| = R(n), \operatorname{Re}(z) > s_0\}$, где $R(n) < R(n+1)$ для любых n , $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \infty$, так как это обеспечивает выполнимость $\mathcal{A}_r$ аналога леммы Жордана для любого $r \geq 2$ (смотри также замечание 36). Но в самой теореме 22 существенно используется альтернативность алгебры, то есть, в ней в общем случае возможны лишь $r = 2$ или $r = 3$ при $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, либо при условии $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \leq r \in \mathbf{N}$.

Далее рассматриваются свойства кватернионных, октонионных и общих $\mathcal{A}_r$ аналогов преобразования Лапласа.

25. Предложение. Если ${}_NF_u(p; \zeta)$ и ${}_NG_u(p; \zeta)$ – это изображения функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ в полупространствах $Re(p) > s_0(f)$ и $Re(p) > s_0(g)$ со значениями в $\mathcal{A}_r$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$ в случае $\mathbf{K} = \mathbf{H}$; а также f и g со значениями в $\mathbf{R}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$ или f и g со значениями в $\mathcal{A}_r$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ в случае $\mathcal{A}_r$ функция $\alpha {}_NF_u(p; \zeta) + \beta {}_NG_u(p; \zeta)$ является изображением функции $\alpha f(t) + \beta g(t)$ в полупространстве $Re(p) > \max(s_0(f), s_0(g))$.

Доказательство. Поскольку существуют ${}_NF_u(p; \zeta)$ и ${}_NG_u(p; \zeta)$, то интеграл $\int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t)) \exp(-u(p, t)) dt = \int_0^\infty \alpha f(t) \exp(-u(p, t)) dt + \int_0^\infty \beta g(t) \exp(-u(p, t)) dt$ сходится в полупространстве $Re(p) > \max(s_0(f), s_0(g))$. При этом $t \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}$ является центром алгебры $\mathcal{A}_r$. Алгебра $\mathbf{H}$ ассоциативна. Поэтому в указанных в условии случаях константы α, β можно вынести за знаки интегралов.

26. Примеры. Пусть сначала $u(p, t) = pt$, $p \in \mathcal{A}_r$, $2 \leq r$.

1. Если $f(t) = Ch_{[0, \infty)}(t)$ – характеристическая функция полупрямой $[0, \infty)$, то $F(p) = p^{-1}$, что вытекает из определения, так как $\int_0^\infty e^{-pt} dt = -p^{-1} e^{-pt} \big|_0^\infty = 1/p$.

2. Если $f(t) = \sin(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$, то $F(p) = \omega(p^2 + \omega^2)^{-1}$, где $\omega \in \mathbf{R}$.

3. Если $f(t) = \cos(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$, то $F(p) = p(p^2 + \omega^2)^{-1}$.

4. Для $f(t) = sh(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение $F(p) = \omega(p^2 - \omega^2)^{-1}$.

5. Для $f(t) = ch(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение $F(p) = p(p^2 - \omega^2)^{-1}$. Преобразования Лапласа в примерах 2-5 вытекают из предложения 25 и формул:

$$\int_0^\infty \cos(\omega t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty [e^{-(p_0 + S(p_s - \omega))t} + e^{-(p_0 + S(p_s + \omega)t)}] dt / 2 = [(p - \omega S)^{-1} + (p + \omega S)^{-1}] / 2,$$

где $p = p_0 + Sp_s$, $p_0 = Re(p)$, $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, $p_s \in \mathbf{R}$;

$$\int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty [e^{-(p_0 + S(p_s - \omega))t} - e^{-(p_0 + S(p_s + \omega)t)}] \tilde{S} dt / 2 = [(p - \omega S)^{-1} - (p + \omega S)^{-1}] \tilde{S} / 2,$$

$$\int_0^\infty ch(\omega t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty [e^{-(p_0 - \omega) + Sp_s t} + e^{-(p_0 + \omega) + Sp_s t}] dt / 2 = [(p - \omega)^{-1} + (p + \omega)^{-1}] / 2,$$

$$\int_0^\infty sh(\omega t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty [e^{-(p_0 - \omega) + Sp_s t} - e^{-(p_0 + \omega) + Sp_s t}] dt / 2 = [(p - \omega)^{-1} - (p + \omega)^{-1}] / 2,$$

так как $\cos(\omega t) = [e^{\omega t S} + e^{-\omega t S}] / 2$, $\sin(\omega t) = [e^{\omega t S} - e^{-\omega t S}] \tilde{S} / 2$, $ch(\omega t) = [e^{\omega t} + e^{-\omega t}] / 2$, $sh(\omega t) = [e^{\omega t} - e^{-\omega t}] / 2$, а рассматриваемые функции-оригиналы принимают лишь вещественные значения.

6. Рассмотрим теперь $f(t) = \exp(\zeta t) Ch_{[0, \infty)}(t)$, тогда

$$F(p) = \int_0^\infty \exp(\zeta t) \exp(-pt) dt,$$

где $\exp(\zeta t) \exp(-pt) = e^{(\zeta_0 - p_0)t} \exp(\zeta' t) \exp(-p' t)$, $\zeta_0 := Re(\zeta)$, $p_0 := Re(p)$, $\zeta' := \zeta - \zeta_0$, $p' = p - p_0$. Пусть элемент $N_1 \in \mathcal{A}_r$ такой, что $\zeta' = \zeta_1 N_1$, где $Re(N_1) = 0$, $\zeta_1 \in \mathbf{R}$, $|N_1| = 1$, тогда $p' = p_1 N_1 + p_2 N_2$, где $N_2 \perp N_1$ относительно скалярного произведения $Re(N_1 \tilde{N}_2)$, $p_1, p_2 \in \mathbf{R}$, то есть, $Re(N_1 \tilde{N}_2) = 0$, причем $Re(N_2) = 0$ и $|N_2| = 1$. Поэтому $\exp(\zeta' t) \exp(-p' t) = (\cos(\zeta_1 t) + \sin(\zeta_1 t) N_1)(\cos(|p'| t) - \sin(|p'| t)(p_1 N_1 + p_2 N_2)/|p'|) = [\cos(\zeta_1 t) \cos(|p'| t) + \sin(\zeta_1 t) \sin(|p'| t)/|p'|] + [-\cos(\zeta_1 t) \sin(|p'| t) p_1/|p'| + \sin(\zeta_1 t) \cos(|p'| t)] N_1 - [\cos(\zeta_1 t) \sin(|p'| t) p_2/|p'|] N_2 - [\sin(|p'| t) \sin(\zeta_1 t) p_2/|p'|] N_1 N_2$

в силу предложения 3.2 [14, 15], так как $|\zeta'| = |\zeta_1|$, $\cos(\phi)$ – четная функция от $\phi \in \mathbf{R}$, $\sin(|\phi|) \phi N / |\phi| = \sin(\phi) N$ для любых $\phi \in \mathbf{R}$ и $N \in \mathcal{A}_r$ с $Re(N) = 0$, где $\lim_{\phi \rightarrow 0} \sin(\phi)/\phi = 1$, а $\sin(\phi)$ – нечетная функция. При этом $N_1 = \zeta'/|\zeta'|$ при $\zeta' \neq 0$, $N_2 = [p' - p_1 N_1]/|p' - p_1 N_1|$ при $p' \neq p_1 N_1$ для некоторого $p_1 \in \mathbf{R}$, $p_2 N_2 = p' - p_1 N_1$. Поскольку $Re((p' - p_1 N_1) \tilde{\zeta}') = 0$, то $p_1 = Re(p' \tilde{\zeta}')/|\zeta'|$, так как $\zeta'^2 = -|\zeta'|^2$, а $N_1 \zeta' = -|\zeta'|$. Тогда $F(p) = 2^{-1} \{ c[(c^2 + a^2)^{-1}(1 - p_1/|p'|) + (c^2 + b^2)^{-1}(1 + p_1/|p'|) + [a(c^2 + a^2)^{-1} + b(c^2 + b^2)^{-1}](1 -$

$p_1/|p'|)N_1 - (a(c^2 + a^2)^{-1} + b(c^2 + b^2)^{-1})p_2N_2/|p'| - c((c^2 + a^2)^{-1} - (c^2 + b^2)^{-1})(p_2/|p'|)N_1N_2\}$, где $c := \zeta_0 - p_0$, $a := |p'| + |\zeta_1|$, $b := |p'| - |\zeta_1|$.

В этом и последующих примерах используются выражения p_j через p с помощью генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$ (смотри формулы 3(6)). При этом $|z| = [z(2^r - 2)^{-1}(-z + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(zi_j^*))]^{1/2}$ для любых $z \in \mathcal{A}_r$, что дает локальную аналитичность $F(p; \zeta)$ по p и ζ .

27. Теорема. Пусть $\alpha = \text{const} > 0$, $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ при $u = pt + \zeta$ или u дается формулами 3(1-3, 3') над $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$, тогда $F(p/\alpha; \zeta)/\alpha$ - изображение функции $f(\alpha t)$.

Доказательство. Поскольку $p_j t + \zeta_j = p_j(\tau/\alpha) + \zeta_j$ для любого j , где $t\alpha = \tau$, то замена переменной дает: $\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-u(p, t; \zeta)} dt = \int_0^\infty f(\tau)e^{-u(p, \tau/\alpha; \zeta)} d\tau = F(p/\alpha; \zeta)/\alpha$, так как $\mathbf{R}$ является центром алгебры $\mathcal{A}_r$.

28. Теорема. Если $f(t)$ - функция-оригинал, $F(p)$ - её изображение, где $u = pt$, $f^{(n)}(t)$ является оригиналом при $n \geq 1$, то

(i) $\mathcal{F}(f^{(n)}(t)Ch_{[0, \infty)}(t), pt; p; 0) = F(p)p^n - f(0)p^{n-1} - \dots - f^{(n-1)}(0)$ является изображением функции $f^{(n)}(t)$ над $\mathcal{A}_r$, где $f^{(k)}(0) := \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$.

Доказательство. Интегрирование по частям дает:

$$(ii) \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt.$$

Поскольку $Re(p) = s > s_0$, то $|f(t)e^{-pt}| \leq Ce^{-(s-s_0)t}$, поэтому из формулы (ii) вытекает формула (i) при $n = 1$. Применение последней формулы n раз дает общую формулу (i).

29. Теорема. Если $f(t)$ - функция-оригинал, $F(p)$ - её изображение над $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$, где $u = pt$, то $F^{(n)}(p) \cdot ({}_1h, \dots, {}_nh)$ является изображением оригинала $(-t)^n f(t) {}_1h \dots {}_nh$ для любых $n \in \mathbf{N}$ и ${}_1h, \dots, {}_nh \in \mathbf{R} \oplus p'\mathbf{R} \subset \mathcal{A}_r$, где $p' := p - Re(p)$.

Доказательство. Функция $F(p)$ в полупространстве $Re(p) > s_0$ является голоморфной. Тогда $F'(p) \cdot h = -[\int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt} dt]h$, так как h коммутирует с p и с t . Кратное дифференцирование дает $F^{(n)}(p) \cdot ({}_1h, \dots, {}_nh) = [\int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-pt} dt] {}_1h, \dots, {}_nh$.

30. Примеры. 1. Изображением функции-оригинала $t^n Ch_{[0, \infty)}(t)$ является $F(p) = n!p^{-n-1}$; для $f(t) = t \sin(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение равно $F(p) = 2p\omega(p^2 + \omega^2)^{-2}$; для $f(t) = t \cos(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение равно $F(p) = (p^2 - \omega^2)(p^2 + \omega^2)^{-2}$ при $u = pt$ в силу теоремы 29 и примеров 26.1-3, так как $\omega \in \mathbf{R}$, где $p \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 2$.

2. Для функции-оригинала $f(t) = t^n \exp(\zeta t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение равно $(-1)^n (\partial^n F(p)/\partial p^n) \cdot (1, \dots, 1) = \partial^n F(a, b, c)/\partial c^n$, где в последнем равенстве функция F выражена через переменные (a, b, c) как в примере 15.6 и обозначена F . В частности, при $n = 1$, получается изображение:

$\mathcal{F}(te^{\zeta t} Ch_{[0, \infty)}(t), pt; p; 0) = 2^{-1}\{(a^2 - c^2)(a^2 + c^2)^{-2}(1 - p_1/|p'|) + (b^2 - c^2)(b^2 + c^2)^{-1}(1 + p_1/|p'|) - 2c(a(a^2 + c^2)^{-2} + b(b^2 + c^2)^{-2})(1 - p_1/|p'|)N_1 + 2c(a(a^2 + c^2)^{-2} + b(b^2 + c^2)^{-2})(p_2/|p'|)N_2 - ((a^2 - c^2)(a^2 + c^2)^{-2} - (b^2 - c^2)(b^2 + c^2)^{-2})(p_2/|p'|)N_1N_2\}$, так как $(a^2 + c^2)^{-1} = (2a)^{-1}S((c + aS)^{-1} - (c - aS)^{-1})$, $c(a^2 + c^2)^{-1} = 2^{-1}((c + aS)^{-1} + (c - aS)^{-1})$ для любых $a, c \in \mathbf{R}$, $a^2 + c^2 > 0$, $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $Re(S) = 0$, где $p, \zeta \in \mathcal{A}_r$.

В общем случае

$$\begin{aligned} \partial^n [c(c^2 + b^2)^{-1}]/\partial c^n &= n!(-1)^n [(c + Sb)^{-n-1} + (c - Sb)^{-n-1}]/2 \\ &= n!(-1)^n (c^2 + b^2)^{-n-1} \sum_{0 \leq k \leq [(n+1)/2]} \binom{n+1}{2k} (-1)^k c^{n+1-2k} b^{2k}, \end{aligned}$$

где $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $b \neq 0$, $c, b \in \mathbf{R}$;

$$\partial^n (c^2 + b^2)^{-1} / \partial c^n = n! (-1)^n S b^{-1} [(c + Sb)^{-n-1} - (c - Sb)^{-n-1}] / 2 \\ = n! (-1)^n (c^2 + b^2)^{-n-1} \sum_{0 \leq k \leq [n/2]} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k c^{n-2k} b^{2k}.$$

Поэтому изображением функции $f(t) = t^n e^{\zeta t} Ch_{[0, \infty)}(t)$ является функция

$$F(p) = n! 2^{-1} (-1)^n \{ \sum_{0 \leq k \leq [(n+1)/2]} \binom{n+1}{2k} (-1)^k c^{n+1-2k} [a^{2k} (c^2 + a^2)^{-n-1} (1 - p_1/|p'|) + b^{2k} (c^2 + b^2)^{-n-1} (1 + p_1/|p'|)] + [N_1(1 - p_1/|p'|) - N_2 p_2/|p'|] \sum_{0 \leq k \leq [n/2]} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k c^{n-2k} [a^{2k+1} (c^2 + a^2)^{-n-1} + b^{2k+1} (c^2 + b^2)^{-n-1}] - [N_1 N_2 p_2/|p'|] [\sum_{0 \leq k \leq [(n+1)/2]} \binom{n+1}{2k} (-1)^k c^{n+1-2k} [a^{2k} (c^2 + a^2)^{-n-1} - b^{2k} (c^2 + b^2)^{-n-1}] \}.$$

3. Пусть теперь $f(t) = \exp(u(\zeta, t; \alpha)) Ch_{[0, \infty)}(t)$ и найдем ее изображение $F(p; \beta)$ при $u(p, t; \beta) := p_0 t + M(p, t; \beta) + \beta_0$, где $p, \zeta, \alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$, как и в определении 3. Для этого рассмотрим тригонометрические формулы:

- (i) $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos(a) \cos(b)$;
- (ii) $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b)$;
- (iii) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b)$;
- (iv) $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \sin(b) \cos(a)$

для любых $a, b \in \mathbf{R}$. Тогда

$$(1) \prod_{p=1}^n \cos(a_p) = 2^{1-n} \sum_{(v_2, \dots, v_n \in \{1, 2\})} \cos(a_1 + (-1)^{v_2} a_2 + (-1)^{v_3} a_3 + \dots + (-1)^{v_n} a_n)$$

для любых $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $2 \leq n \in \mathbf{N}$;

$$(2) \prod_{p=1}^{2m} \sin(b_p) = 2^{-m} \prod_{p=1}^m [\cos(b_{2p-1} - b_{2p}) - \cos(b_{2p-1} + b_{2p})] = \\ (-2)^m \sum_{(w_1, \dots, w_m \in \{1, 2\})} (-1)^{w_1 + \dots + w_m} (\prod_{p=1}^m \cos(b_{2p-1} + (-1)^{w_p} b_{2p})) \\ = 2^{1-2m} \sum_{(w_1, \dots, w_m \in \{1, 2\})} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} \sum_{(v_2, \dots, v_m \in \{1, 2\})} \cos(b_1 + (-1)^{w_1} b_2 + (-1)^{v_2} (b_3 + (-1)^{w_2} b_4) + (-1)^{v_3} (b_5 + (-1)^{w_3} b_6) + \dots + (-1)^{v_m} (b_{2m-1} + (-1)^{w_m} b_{2m}))$$

для любых $b_1, b_2, \dots \in \mathbf{R}$, $1 \leq m \in \mathbf{N}$;

$$(3) \prod_{p=1}^{2m+1} \sin(b_p) = 2^{-2m} \sum_{(w_1, \dots, w_m \in \{1, 2\})} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} \sum_{(v_1, \dots, v_m \in \{1, 2\})} \sin(b_{2m+1} + (-1)^{v_1} (b_1 + (-1)^{w_1} b_2) + (-1)^{v_2} (b_3 + (-1)^{w_2} b_4) + \dots + (-1)^{v_m} (b_{2m-1} + (-1)^{w_m} b_{2m}));$$

$$(4) (\prod_{p=1}^n \cos(a_p)) (\prod_{q=1}^{2m} \sin(b_q)) = 2^{1-n-2m} \sum_{(v_2, \dots, v_n \in \{1, 2\})} \sum_{(w_1, \dots, w_m \in \{1, 2\})} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} \sum_{(u_1, \dots, u_m \in \{1, 2\})} \cos(a_1 + (-1)^{v_2} a_2 + \dots + (-1)^{v_n} a_n + (-1)^{u_1} (b_1 + (-1)^{w_1} b_2) + (-1)^{u_2} (b_3 + (-1)^{w_2} b_4) + \dots + (-1)^{u_m} (b_{2m-1} + (-1)^{w_m} b_{2m}));$$

$$(5) (\prod_{p=1}^n \cos(a_p)) (\prod_{q=1}^{2m+1} \sin(b_q)) = 2^{-n-2m} \sum_{(v_1, \dots, v_n \in \{1, 2\})} \sum_{(w_1, \dots, w_m \in \{1, 2\})} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} \sum_{(u_1, \dots, u_m \in \{1, 2\})} \sin(b_{2m+1} + (-1)^{v_1} a_1 + (-1)^{v_2} a_2 + \dots + (-1)^{v_n} a_n + (-1)^{u_1} (b_1 + (-1)^{w_1} b_2) + (-1)^{u_2} (b_3 + (-1)^{w_2} b_4) + \dots + (-1)^{u_m} (b_{2m-1} + (-1)^{w_m} b_{2m})).$$

$$(6) \exp(M(p, t; \alpha)) = \cos(p_1 t + \alpha_1) + i_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) \cos(p_2 t + \alpha_2) + i_2 \sin(p_1 t + \alpha_1) \sin(p_2 t + \alpha_2) \cos(p_3 t + \alpha_3) + i_3 \sin(p_1 t + \alpha_1) \sin(p_2 t + \alpha_2) \sin(p_3 t + \alpha_3) \text{ для кватернионов};$$

$$(7) \exp(M(p, t; \alpha)) = \cos(p_1 t + \alpha_1) + i_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) \cos(p_2 t + \alpha_2) + i_2 \sin(p_1 t + \alpha_1) \sin(p_2 t + \alpha_2) \cos(p_3 t + \alpha_3) + \dots + i_6 \sin(p_1 t + \alpha_1) \dots \sin(p_6 t + \alpha_6) \cos(p_7 t + \alpha_7) + i_7 \sin(p_1 t + \alpha_1) \dots \sin(p_6 t + \alpha_6) \sin(p_7 t + \alpha_7) \text{ для октонионов. Тогда}$$

$$(8) \exp(M(\zeta, t; \alpha)) \exp(-M(p, t; \beta)) = [\cos(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(p_1 t + \beta_1) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(p_1 t + \beta_1) \cos(p_2 t + \beta_2) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \cos(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \sin(p_3 t + \beta_3)] \\ i_1 [-\cos(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(p_1 t + \beta_1) \cos(p_2 t + \beta_2) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(p_1 t + \beta_1) - \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \sin(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \cos(p_3 t + \beta_3)] \\ i_2 [-\cos(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \cos(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(\zeta_3 t + \alpha_3) \cos(p_1 t + \beta_1) - \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \cos(p_2 t + \beta_2) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \sin(p_3 t + \beta_3)] \\ i_3 [-\cos(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \sin(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(\zeta_3 t + \alpha_3) \cos(p_1 t + \alpha_1) - \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \cos(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \cos(p_2 t + \beta_2)].$$

При этом для любого $c > 0$:

$$(9) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t)) dt = 2^{1-n} c \sum_{v_2, \dots, v_n \in \{1,2\}} [c^2 + (\alpha_1 + (-1)^{v_2} \alpha_2 + \dots + (-1)^{v_n} \alpha_n)^2]^{-1};$$

$$(10) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^{2m} \sin(\beta_s t)) dt = 2^{1-2m} c \sum_{w_1, \dots, w_m, v_2, \dots, v_m \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} [c^2 + ((\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + (-1)^{v_2} (\beta_3 + (-1)^{w_2} \beta_4) + \dots + (-1)^{v_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m}))^2]^{-1};$$

$$(11) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^{2m+1} \sin(\beta_s t)) dt = 2^{-2m} \sum_{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_m \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} (\beta_{2m+1} + (-1)^{v_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + (-1)^{v_2} (\beta_3 + (-1)^{w_2} \beta_4) + \dots + (-1)^{v_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m})) [c^2 + (\beta_{2m+1} + (-1)^{v_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + (-1)^{v_2} (\beta_3 + (-1)^{w_2} \beta_4) + \dots + (-1)^{v_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m}))^2]^{-1};$$

$$(12) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t)) (\prod_{q=1}^{2m} \sin(\beta_q t)) dt = 2^{1-n-2m} c \sum_{v_2, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_m \in \{1,2\}} [c^2 + (\alpha_1 + (-1)^{v_2} \alpha_2 + \dots + (-1)^{v_n} \alpha_n + (-1)^{u_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + \dots + (-1)^{u_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m}))^2]^{-1};$$

$$(13) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t)) (\prod_{q=1}^{2m+1} \sin(\beta_q t)) dt = 2^{-n-2m} c \sum_{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_m \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} ((-1)^{v_1} \alpha_1 + (-1)^{v_2} \alpha_2 + \dots + (-1)^{v_n} \alpha_n + \beta_{2m+1} + (-1)^{u_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + \dots + (-1)^{u_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m})) [c^2 + ((-1)^{v_1} \alpha_1 + (-1)^{v_2} \alpha_2 + \dots + (-1)^{v_n} \alpha_n + \beta_{2m+1} + (-1)^{u_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + \dots + (-1)^{u_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m}))^2]^{-1}.$$

Тогда из формул (8 – 13) следует, что образом $\mathcal{F}(f, u; p; 0)$ функции-оригинала $f(t) = \exp(u(\zeta, t; 0)) Ch_{[0, \infty)}(t)$ при $u(p, t; 0) := p_0 t + M(p, t; 0)$ является:

$$(14) \mathcal{F}(f, u; p; 0) = \{(c/2) \sum_{v_1 \in \{1,2\}} [c^2 + (p_1 + (-1)^{v_1} \zeta_1)^2]^{-1} + (c/8) \sum_{v_1, w_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1+1} [c^2 + (p_2 + (-1)^{v_1} \zeta_2 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1))^2]^{-1} + (c/32) \sum_{v_1, w_1, w_2, u_1, u_2 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1+w_2} [c^2 + (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2))^2]^{-1} + (c/32) \sum_{w_1, w_2, w_3, u_1, u_2 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1+w_2+w_3+1} [c^2 + ((p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_1} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2) + (-1)^{u_2} (p_3 + (-1)^{w_3} \zeta_3))^2]^{-1}\} + i_1 \{ -4^{-1} \sum_{v_1, v_2 \in \{1,2\}} [(\zeta_1 + (-1)^{v_1} p_1 + (-1)^{v_2} \zeta_2) [c^2 + (\zeta_1 + (-1)^{v_1} p_1 + (-1)^{v_2} \zeta_2)^2]^{-1} - (p_1 + (-1)^{v_1} p_2 + (-1)^{v_2} \zeta_1) [c^2 + (p_1 + (-1)^{v_1} p_2 + (-1)^{v_2} \zeta_1)^2]^{-1}] - (32)^{-1} \sum_{v_1, w_1, w_2, u_1, u_2 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1+w_2} [(\zeta_3 + (-1)^{v_1} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2)) [c^2 + (\zeta_3 + (-1)^{v_1} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2))^2]^{-1} - (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2)) [c^2 + (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2))^2]^{-1}] \} + i_2 \{ (c/8) \sum_{v_1, w_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1+1} [(c^2 + (p_1 + (-1)^{v_1} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{w_1} \zeta_2))^2]^{-1} - [c^2 + (\zeta_1 + (-1)^{v_2} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} p_2))^2]^{-1}] + (c/16) \sum_{w_1, w_2, u_1, u_2 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1+w_2} [-[c^2 + (p_2 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (\zeta_2 + (-1)^{w_2} \zeta_3))^2]^{-1} + [c^2 + (\zeta_2 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} p_3))^2]^{-1}] \} + i_3 \{ 8^{-1} \sum_{v_1, w_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1+1} [(\zeta_3 + (-1)^{v_1} p_1 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{w_1} \zeta_2)) [c^2 + (\zeta_3 + (-1)^{v_1} p_1 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{w_1} \zeta_2))^2]^{-1} - (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_1 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} p_2)) [c^2 + (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_1 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} p_2))^2]^{-1}] + (16)^{-1} \sum_{v_1, v_2, w_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1} [(p_2 + (-1)^{v_1} \zeta_2 + (-1)^{v_2} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1)) [c^2 + (p_2 + (-1)^{v_1} \zeta_2 + (-1)^{v_2} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1))^2]^{-1} - (\zeta_2 + (-1)^{v_1} p_2 + (-1)^{v_2} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1)) [c^2 + (\zeta_2 + (-1)^{v_1} p_2 + (-1)^{v_2} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1))^2]^{-1}] \},$$

где $c = \zeta_0 - p_0$. Для ненулевых начальных фаз формула для $\mathcal{F}(f, u; p; \beta)$ функции-оригинала $f(t) = \exp(u(\zeta, t; \alpha)) Ch_{[0, \infty)}(t)$ при $u(p, t; \alpha) := p_0 t + M(p, t; \alpha) + \alpha_0$ аналогична, но более сложна и её можно выписать с использованием равенств:

$$(15) \int_0^\infty e^{-ct} \cos(at + b) dt = [c \cos(b) - a \sin(b)] [c^2 + a^2]^{-1},$$

$$(16) \int_0^\infty e^{-ct} \sin(at + b) dt = [c \sin(b) + a \cos(b)] [c^2 + a^2]^{-1}$$

для любых $c > 0$, $a, b \in \mathbf{R}$, а также формул (8 – 13).

31. Теорема. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал, так что $f'(t)$ тоже удовлетворяет условиям 1(1-3), $u(p, t) := p_0 t + M(p, t; \zeta) + \zeta_0$ над $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$ (смотри определение 3). Тогда

(1) $\mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = -f(0) + p_0\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) + p_1\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta - i_1\pi/2) + \dots + p_{2^r-1}\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2)$, где $Re(p) > s_0$.

Доказательство. Из уравнений 30(6,7) следует, что выполняется равенство:

(2) $\partial \exp(-u(p, t; \zeta))/\partial t = -p_0 \exp(-u(p, t; \zeta)) - p_1 \exp(-u(p, t; \zeta - i_1\pi/2)) - \dots - p_{2^r-1} \exp(-u(p, t; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2))$, так как

$$\exp(-u(p, t; \zeta)) = \exp(-p_0 t - \zeta_0) \exp(-M(p, t; \zeta)),$$

$$\partial \exp(-p_0 t - \zeta_0)/\partial t = -p_0 \exp(-p_0 t - \zeta_0),$$

$$\partial [\cos(p_j t + \zeta_j) - \sin(p_j t + \zeta_j) i_j] / \partial t = \partial \exp(-(p_j t + \zeta_j) i_j) / \partial t$$

$$= -p_j i_j \exp(-(p_j t + \zeta_j) i_j) = -p_j \exp(-(p_j t + \zeta_j - \pi/2) i_j)$$

$$= -p_j [\cos(p_j t + \zeta_j - \pi/2) - \sin(p_j t + \zeta_j - \pi/2) i_j],$$

а интегрирование по частям дает

$$\int_0^\infty f'(t) \exp(-u(p, t; \zeta)) dt = f(t) \exp(-u(p, t; \zeta))|_0^\infty - \int_0^\infty [f(t) \partial \exp(-u(p, t; \zeta))/\partial t] dt.$$

32. Теорема. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал, $u(p, t) := p_0 t + M(p, t; \zeta) + \zeta_0$ над $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$ (смотри определение 3). Тогда

(1) $(\partial \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta)/\partial p).h = -\mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta)h_0 - \mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta - i_1\pi/2)h_1 - \dots - \mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2)h_{2^r-1}$ для любого $h = h_0 i_0 + \dots + h_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, где $h_0, \dots, h_{2^r-1} \in \mathbf{R}$, $Re(p) > s_0$.

Доказательство. Из уравнений 30(6,7) следует, что

(2) $(\partial \exp(-u(p, t; \zeta))/\partial p).h = -p_0 \exp(-u(p, t; \zeta))h_0 - \exp(-u(p, t; \zeta - i_1\pi/2))h_1 - \dots - \exp(-u(p, t; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2))h_{2^r-1}$.

Поскольку $\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta)$ – голоморфная функция по p при $Re(p) > s_0$, а $f(t)$ удовлетворяет условиям определения 1, $|\int_0^\infty e^{-ct} t^n dt| < \infty$ для любых $c > 0$ и $n = 0, 1, 2, \dots$, то можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$(\partial (\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; \zeta)) dt) / \partial p).h = \int_0^\infty f(t) (\partial \exp(-u(p, t; \zeta))/\partial p).h dt.$$

33. Пример. Пусть $f_n(t) = t^n Ch_{[0,\infty)}(t)$ – функции-оригиналы, где $n = 0, 1, 2, \dots$, при $u(p, t) := p_0 t + M(p, t; \zeta) + \zeta_0$, тогда

(1) $\mathcal{F}(f_n(t), u; p; \zeta) = \int_0^\infty t^n \exp(-p_0 t - \zeta_0) \cos(p_1 t + \zeta_1) dt + \sum_{k=1}^{2^r-2} [\int_0^\infty t^n \exp(-p_0 t - \zeta_0) \sin(p_1 t + \zeta_1) \dots \sin(p_k t + \zeta_k) \cos(p_{k+1} t + \zeta_{k+1}) dt] i_k + [\int_0^\infty t^n \exp(-p_0 t - \zeta_0) \sin(p_1 t + \zeta_1) \dots \sin(p_{2^r-2} t + \zeta_{2^r-2}) \sin(p_{2^r-1} t + \zeta_{2^r-1}) dt] i_{2^r-1}$,

где $r = 2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ и $r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ – стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \in \mathbf{N}$. Рассмотрим интегралы:

$$(2) J_n(\alpha) := \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} dt$$

для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ с $Re(\alpha) > 0$. В частности,

$$(3) J_0(\alpha) = -\exp(-\alpha t)(\alpha)^{-1}|_0^\infty = \alpha^{-1}. \text{ Поэтому,}$$

$$(4) J_n(\alpha) = (-1)^n dJ_0(\alpha)/d\alpha^n = n! \alpha^{-n-1}, \text{ следовательно,}$$

$$(5) \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t - b} dt = e^{-b} J_n(\alpha) \text{ для любого } b \in \mathbf{C}, \text{ откуда следует, что}$$

$$(6) \int_0^\infty t^n \exp^{-\alpha_0 t} \cos(\alpha_1 t + \beta) dt = Re(\exp(-i\beta) J_n(\alpha)) = n! Re(\exp(-i\beta) \alpha^{-n-1}),$$

$$(7) \int_0^\infty t^n \exp^{-\alpha_0 t} \sin(\alpha_1 t + \beta) dt = -Im(\exp(-i\beta) J_n(\alpha)) = n! Im(\exp(-i\beta) \alpha^{-n-1})$$

для любого $\beta \in \mathbf{R}$, где $Re(\alpha) = \alpha_0 = (\alpha + \bar{\alpha})/2$, $Im(\alpha) = \alpha_1 = (\alpha - \bar{\alpha})/(2i)$, $i = i_1 = (-1)^{1/2}$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i$. Из уравнений

$$(8) \alpha^{-k} = \bar{\alpha}^k |\alpha|^{-2k} \text{ и}$$

$$(9) \alpha^{-k} = |\alpha|^{-2k} \sum_{q=0}^{[k/2]} \binom{k}{2q} (-1)^q \alpha_0^{k-2q} \alpha_1^{2q} - i \sum_{q=0}^{[(k-1)/2]} \binom{k}{2q+1} (-1)^q \alpha_0^{k-2q-1} \alpha_1^{2q+1},$$

где $\binom{k}{q} = k! / [(k-q)! q!]$ – это биномиальные коэффициенты для любых $0 \leq q \leq k \in \mathbf{Z}$, следует, что

$$(10) \operatorname{Re}(\exp(-\mathbf{i}\beta)J_n(\alpha)) = n![\cos(\beta) \sum_q \binom{n+1}{2q} (-1)^q \alpha_0^{n-2q+1} \alpha_1^{2q} - \sin(\beta) \sum_q \binom{n+1}{2q+1} (-1)^q \alpha_0^{n-2q} \alpha_1^{2q+1}] (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{-n-1} =: T_n(\alpha_0, \alpha_1, \beta),$$

$$(11) \operatorname{Im}(\exp(-\mathbf{i}\beta)J_n(\alpha)) = -(n!)[\sin(\beta) \sum_q \binom{n+1}{2q} (-1)^q \alpha_0^{n-2q+1} \alpha_1^{2q} + \cos(\beta) \sum_q \binom{n+1}{2q+1} (-1)^q \alpha_0^{n-2q} \alpha_1^{2q+1}] (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{-n-1} =: -S_n(\alpha_0, \alpha_1, \beta).$$

Тогда из уравнений (1–11) следует, что при $\mathbf{K} = \mathbf{H}$

$$(12) \mathcal{F}(f_n(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = e^{-\zeta_0} \{T_n(p_0, p_1, \zeta_1) - (i_1/2) \sum_{v_1 \in \{1,2\}} S_n(p_0, p_1 + (-1)^{v_1} p_2, \zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2) - (i_2/4) \sum_{v_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{v_1} T_n(p_0, p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2), \zeta_3 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2)) - (i_3/4) \sum_{v_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{v_1+1} S_n(p_0, p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2), \zeta_3 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2))\},$$

а над алгеброй $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$ изображение дается формулой:

$$(13) \mathcal{F}(f_n(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = e^{-\zeta_0} \{T_n(p_0, p_1, \zeta_1) - \sum_{s=1}^{2^{r-1}-1} i_{2s} 2^{-2s} \sum_{v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_s \in \{1,2\}} (-1)^{v_1+\dots+v_s+s} T_n(p_0, p_{2s+1} + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2) + \dots + (-1)^{u_s} (p_{2s-1} + (-1)^{v_s} p_{2s}), \zeta_{2s+1} + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2) + \dots + (-1)^{u_s} (\zeta_{2s-1} + (-1)^{v_s} \zeta_{2s})) - \sum_{s=0}^{2^{r-1}-2} (i_{2s+1} 2^{-2s-1}) \sum_{w, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_s \in \{1,2\}} (-1)^{v_1+\dots+v_s+s} S_n(p_0, p_{2s+1} + (-1)^w p_{2s+2} + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2 + \dots + (-1)^{u_s} (p_{2s-1} + (-1)^{v_s} p_{2s}), \zeta_{2s+1} + (-1)^w \zeta_{2s+2} + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2 + \dots + (-1)^{u_s} (\zeta_{2s-1} + (-1)^{v_s} \zeta_{2s})) - (i_{2r-1} 2^{-2r+2}) \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{2r-1-1}, u_1, u_2, \dots, u_{2r-1-1} \in \{1,2\}} (-1)^{v_1+v_2+v_{2r-1-1}+1} S_n(p_0, p_{2r-1} + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2) + (-1)^{u_2} (p_3 + (-1)^{v_2} p_4) + \dots + (-1)^{u_{2r-1-1}} (p_{2r-3} + (-1)^{v_{2r-1-1}} p_{2r-2}), \zeta_{2r-1} + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2) + (-1)^{u_2} (\zeta_3 + (-1)^{v_2} \zeta_4) + \dots + (-1)^{u_{2r-1-1}} (\zeta_{2r-3} + (-1)^{v_{2r-1-1}} \zeta_{2r-2}))\},$$

где для единообразия формулы при $s = 0$ суммирование по $v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_s$ не проводится и берется значение $(-1)^{v_1+\dots+v_s+s} = 1$.

34. Теорема. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал со значениями в $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$, $u = pt$, $g(t) := \int_0^t f(x)dx$, тогда

$$\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)p = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; 0),$$

в частности,

$$\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; 0)p^{-1} \text{ над алгеброй } \mathbf{K} = \mathbf{H} \text{ или } \mathbf{K} = \mathbf{O}.$$

Доказательство. В силу теоремы 28

$$\mathcal{F}(g'(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = \mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)p$$

в одной и той же области $\operatorname{Re}(p) > s_0$, так как $g(0) = 0$, и $g(t)$ тоже удовлетворяет условиям определения 1, где $s_0 \in \mathbf{R}$. Из альтернативности алгебры $\mathbf{K}$ следует, что

$$\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)p^{-1} = \mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0),$$

так как $g'(t) = f(t)$ для любых $t > 0$, и $g(t) = 0$ для любых $t \leq 0$.

35. Теорема. Если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ при $u = pt$ в полупространстве $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > s_0\}$ с $2 \leq r < \infty$, интеграл $\int_p^\infty F(z)dz$ сходится и выполнено условие 23(3), то

$$\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t)/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty F(z)dz.$$

Доказательство. Пусть путь интегрирования весь лежит в полупространстве $\operatorname{Re}(p) \geq a$ для некоторой константы $a > s_0$, тогда $|\int_0^\infty f(t) \exp(-pt)dt| \leq C \int_0^\infty \exp(-(p_0 - s_0)t)dt < \infty$ сходится, где $C = \text{const} > 0$, $p_0 \geq a$. Можно полагать $t > 0$, тогда выполнены условия леммы 23, причем $\int_p^\infty F(z)dz = \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_p^\infty F(z) \exp(-\theta z)dz$, так как интеграл $\int_{a-S_\infty}^{a+S_\infty} F(p)dp$ абсолютно сходится, а $\lim_{\theta \rightarrow 0} \exp(-\theta z) = 1$ равномерно по z на любом компактном подмножестве в $\mathcal{A}_r$. Поэтому в интеграле

$\int_p^\infty F(z)dz = \int_p^\infty (\int_0^\infty f(t) \exp(-pt)dt)dz$
 можно изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty F(z)dz = \int_0^\infty f(t)(\int_p^\infty \exp(-zt)dz)dt = \int_0^\infty f(t)[-e^{-zt}/t]_p^\infty dt = \int_0^\infty f(t)t^{-1} \exp(-pt)dt,$$

 так как в силу леммы 23 можно взять аргумент $z - z_0$ изменяющимся вдоль прямой линии параллельной $p - p_0$, причем z_0 стремится к $+\infty$, где $p_0 := Re(p)$.

36. Примеры. 1. При $u = pt$, $\mathcal{F}((e^{bt} - e^{ct})Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = (p - b)^{-1} - (p - c)^{-1}$ для любых $b, c \in \mathbf{R}$. Тогда в силу примера 26.6 и теоремы 35 $\mathcal{F}((e^{bt} - e^{ct})Ch_{[0,\infty)}(t)/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty ((z - b)^{-1} - (z - c)^{-1})dz = Ln[(p - b)^{-1}(p - c)]$ (смотри также следствия 3.5 и 3.6, и замечания 3.7, 3.8 в [14]).

2. В силу примера 26 и теоремы 35 $\mathcal{F}(\sin(t)Ch_{[0,\infty)}(t)/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty ((1 + z^2)^{-1}dz = (\pi/2) - \arctg(p) = \text{arccctg}(p)$.

Тогда из теоремы 34 следует, что $\mathcal{F}(si(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = p^{-1}\text{arccctg}(p)$, где $si(t) := \int_0^t t^{-1} \sin(t)dt$ обозначает интегральный синус.

3. Вычислим образ $F(p)$ функции-оригинала $f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t)(e^{bt} - e^{at})/t$, где $t \in \mathbf{R}$, параметры a и b принадлежат алгебре $\mathcal{A}_r$, $u = pt$. Тогда

(i) $F(p) = \int_0^\infty t^{-1}[\exp(b_0t)(\cos(|b'|t) + \sin(|b'|t)b'/|b'|) - \exp(a_0t)(\cos(|a'|t) + \sin(|a'|t)a'/|a'|)] \exp(-p_0t)(\cos(|p'|t) - \sin(|p'|t)p'/|p'|)dt,$

где $a = a_0 + a'$, $a_0 := Re(a)$, $b = b_0 + b'$, $b_0 := Re(b)$, $p = p_0 + p'$, $p_0 := Re(p)$. Пусть $a_0 \leq b_0 < p_0$. Прибавление и вычитание из правой части формулы (i) интеграла $\int_0^\infty t^{-1} \exp(b_0t)(\cos(|a'|t) + \sin(|a'|t)a'/|a'|) \exp(-p_0t)(\cos(|p'|t) - \sin(|p'|t)p'/|p'|)dt$, группировка членов и использование формул 30.3(i-iv) дает:

(ii) $F(p) = -\int_0^\infty t^{-1} \exp((b_0 - p_0)t)[\sin(((|b'| + |a'|)2^{-1} + |p'|)t) + \sin(((|b'| + |a'|)2^{-1} - |p'|)t) + (\cos((|b'| + |a'|)2^{-1} + |p'|)t) - \cos((|b'| + |a'|)2^{-1} - |p'|)t)p'] \sin((|b'| - |a'|)2^{-1}t)]dt + \int_0^\infty t^{-1} \exp((b_0 - p_0)t)(\sin(|b'|t) \cos(|p'|t)b'/|b'| - \sin(|b'|t) \sin(|p'|t)b'p'/|b'|^{-1}|p'|^{-1} - \sin(|a'|t) \cos(|p'|t)a'/|a'| + \sin(|a'|t) \sin(|p'|t)a'p'/|a'|^{-1}|p'|^{-1})dt + 2^{-1} \int_0^\infty t^{-1} \exp((b_0 - p_0)t)(1 - \exp((a_0 - b_0)t)(\cos((|a'| + |p'|)2^{-1}t) + \cos((|a'| - |p'|)2^{-1}t))dt + \int_0^\infty t^{-1}[\exp((b_0 - p_0)t) - \exp((a_0 - p_0)t)][-\cos(|a'|t) \sin(|p'|t)p'/|p'| + \cos(|p'|t) \sin(|a'|t)a'/|a'| - \sin(|p'|t) \sin(|a'|t)a'p'/|a'|^{-1}|p'|^{-1})dt.$

Теперь воспользуемся формулами для появившихся интегралов с параметрами $v, w, s \in \mathbf{C}$:

(iii) $J_1(v, s) := \int_0^\infty \exp(-vx)x^{-1} \sin(sx)dx = \arctg(s/v)$ при $Re(v) > |Im(s)|$;
 (iv) $J_2(v, w, s) := \int_0^\infty x^{-1} \exp(-vx) \sin(wx) \sin(sx)dx = 4^{-1} \ln[(v^2 + (w + s)^2)(v^2 + (w - s)^2)^{-1}]$,

при $Re(p) > |Im(w)| + |Im(s)|$;

(v) $J_3(v, w, s) := \int_0^\infty x^{-1} \exp(-vx) \sin(wx) \cos(sx)dx = 2^{-1} \arctg(2wv(v^2 + s^2 - w^2)^{-1}) + \{\frac{0}{\pi/2}\}$,

где $Re(v) > |Im(w)| + |Im(s)|$, $\{\frac{v^2 + s^2 \geq w^2}{v^2 + s^2 < w^2}\}$, и в зависимости от выполнения верхнего или нижнего неравенства берется 0 или $\pi/2$ в $\{\frac{0}{\pi/2}\}$;

(vi) $J_4(v, w, s) := \int_0^\infty \exp(-vx)(1 - \exp(-wx)) \cos(sx)dx = (2w)^{-1}[B(2, (v - is)w^{-1}) + B(2, (v + is)w^{-1})]$,

где $Re(w) > 0$, $Re(v) > |Im(s)|$ (смотри формулы 11 на стр. 447, 8, 10 на стр. 449 и 8 на стр. 450 в [18]), $B(v, w) := \int_0^1 \tau^{v-1}(1 - \tau)^{w-1}d\tau = \Gamma(v)\Gamma(w)/\Gamma(v + w)$ и $\Gamma(v) := \int_0^\infty e^{-t}t^{v-1}dt$ при $Re(v) > 0$, $Re(w) > 0$. Поэтому из формул (ii - vi) следует, что

(vii) $F(p) = -J_2(p_0 - b_0, (|b'| - |a'|)2^{-1}, (|a'| + |b'|)2^{-1} + |p'|) - J_2(p_0 - b_0, (|b'| - |a'|)2^{-1}, (|a'| + |b'|)2^{-1} - |p'|) - J_3(p_0 - b_0, (|b'| - |a'|)2^{-1}, (|b'| + |a'|)2^{-1} + |p'|)p' + J_3(p_0 - b_0, (|b'| - |a'|)2^{-1}, (|b'| + |a'|)2^{-1} - |p'|)p' + J_3(p_0 - b_0, |b'|, |p'|)b'/|b'| - J_3(p_0 - b_0, |a'|, |p'|)a'/|a'|$

$-J_2(p_0 - b_0, |b'|, |p'|)b'p'|b'|^{-1}|p'|^{-1} + J_2(p_0 - b_0, |a'|, |p'|)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1} + 2^{-1}J_4(p_0 - b_0, b_0 - a_0, (|a'| + |p'|)/2) + 2^{-1}J_4(p_0 - b_0, b_0 - a_0, (|a'| - |p'|)/2) - J_3(p_0 - b_0, |p'|, |a'|)p'/|p'| + J_3(p_0 - b_0, |a'|, |p'|)a'/|a'| - J_2(p_0 - b_0, |a'|, |p'|)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1} + J_3(p_0 - a_0, |p'|, |a'|)p'/|p'| - J_3(p_0 - a_0, |a'|, |p'|)a'/|a'| + J_2(p_0 - a_0, |a'|, |p'|)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1}$,
 где $\mathbf{i} = (-1)^{1/2} = i_1$. При этом $\mathcal{F}((e^{bt} - e^{at})/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty (\mathcal{F}(e^{bt}, pt; z; 0) - \mathcal{F}(e^{at}, pt; z; 0))dz$, где z стремится к бесконечности в угле $|Arg(z)| < \pi/2 - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \pi/2$.

37. Теорема. Если $f(t)$ – функция-оригинал, то

(1) $\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t - \tau), u; p; \zeta) = \mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t), u; p; \zeta + p\tau)$ при $u(p, t; \zeta) = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ или $u(p, t; \zeta) = pt + \zeta$ над $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$,

(2) $\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t - \tau), pt; p; 0) = \mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t), pt; p; 0)e^{-p\tau}$ над $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, или над $\mathcal{A}_r$ с $4 \leq r$ при $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, в полупространстве $Re(p) > s_0$.

Доказательство. Для p в полупространстве $Re(p) > s_0$ выполняются равенства:

$\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t - \tau), u; p; \zeta) = \int_\tau^\infty f(t - \tau)e^{-u(p, t; \zeta)}dt = \int_0^\infty f(t_1)e^{-u(p, t_1; \zeta + p\tau)}dt_1$
 $= \mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t), u; p; \zeta + p\tau)$, в силу формул 3(1-5), так как $p_jt + \zeta_j = p_jt_1 + (\zeta_j + p_j\tau)$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, где $t = t_1 + \tau$, в частности, при $u = pt$, над $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, или над $\mathcal{A}_r$ с $4 \leq r$ при $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$:

$\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t - \tau), pt; p; 0) = \int_\tau^\infty f(t - \tau)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t_1)e^{-p(t_1 + \tau)}dt_1$
 $= \mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t), pt; p; 0)e^{-p\tau}$, так как $t, \tau \in \mathbf{R}$, алгебра $\mathbf{K}$ альтернативна, а $\mathbf{R}$ – центр алгебры $\mathcal{A}_r$.

38. Замечание. В силу определения преобразования $\mathcal{F}$ и $u(p, t; \zeta)$, и теоремы 37 можно интерпретировать $\zeta_1 i_1 + \dots + \zeta_{2^r-1} i_{2^r-1}$ как начальную фазу запаздывания.

39. Теорема. Если $f(t)$ – функция-оригинал со значениями в $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$, $b \in \mathbf{R}$, тогда $\mathcal{F}(e^{bt}f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; \zeta) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p - b; \zeta)$ для любого $Re(p) > s_0 + b$.

Доказательство. Если $Re(p) > s_0 + b$, то сходится интеграл

$\mathcal{F}(e^{bt}f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; \zeta) = \int_0^\infty f(t)e^{bt} \exp(-pt - \zeta)dt$
 $= \int_0^\infty f(t) \exp(-(p - b)t - \zeta)dt = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p - b; \zeta)$.

40. Примеры. 1. $\mathcal{F}(e^{-bt} \sin(at)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = a[(p + b)^2 + a^2]^{-1}$, где $a, b \in \mathbf{R}$, $Re(p) > b$, $p \in \mathcal{A}_r$.

2. $\mathcal{F}(e^{-bt} \cos(at)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = (p + b)[(p + b)^2 + a^2]^{-1}$, где $a, b \in \mathbf{R}$, $Re(p) > b$.

3. $\mathcal{F}(e^{-bt} t^n Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = n!(p + b)^{-n-1}$, где $b \in \mathbf{R}$, $Re(p) > b$ (смотри примеры 26.2, 26.3 и 30.1).

41. Теорема. Если $f(t)$ и $g(t)$ – функции-оригиналы, где g с действительными значениями для любого t , тогда

$\mathcal{F}(\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, pt; p; 0) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)$
 для любых $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) > s_0$, где $s_0 = \max(s_0(f), s_0(g))$, а $2 \leq r < \infty$.

Доказательство. Свертка функций $q(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$ удовлетворяет свойствам 1 и 2 определения 1. При этом $|\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau| < C|\int_0^t \exp(s_0\tau) \exp(s_0(t - \tau))d\tau| = Ct \exp(s_0t) < C_1 \exp((s_0 + \epsilon)t)$, где C, C_1 – положительные постоянные, $\epsilon > 0$ можно выбрать произвольно малым числом для соответствующей константы C_1 . Значит, выполнено и свойство 3 определения 1, то есть, $q(t)$ является функцией-оригиналом. Запишем функции f и g в виде: $f = \sum_v f_v i_v$, $g = \sum_v g_v i_v$, где f_v и g_v – функции со значениями в $\mathbf{R}$, $\{i_v : v = 0, 1, \dots, 2^r - 1\}$ – генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$. Тогда в силу теоремы Фубини

$\mathcal{F}(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, pt; p; 0) = \sum_{w,v=0}^{2^r-1} i_w i_v \int_0^\infty (\int_0^t f_w(\tau)g_v(t-\tau)d\tau) \exp(-pt)dt$
 $= \sum_{w,v=0}^{2^r-1} i_w i_v (\int_0^\infty f_w(\tau) \exp(-p\tau)d\tau) (\int_0^\infty g_v(t_1) \exp(-pt_1)dt_1),$
 для любых $Re(p) > s_0$, где $t_1 := t - \tau$. Поскольку $g(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, то $g = g_0$, что дает формулу теоремы.

42. Теорема. Пусть $f(t)$ – действительнзначная функция-оригинал,
 $F(p) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t); u; p; 0)$, $G(p)$ и $q(p)$ – аналитические функции такие, что
 $\mathcal{F}(g(t, \tau)Ch_{[0,\infty)}(t); u; p; 0) = G(p) \exp(-u(q(p), \tau; 0))$
 для $u = pt$ или $u = p_0 t + M(p, t; 0)$, тогда
 $\mathcal{F}(\int_0^\infty g(t, \tau)f(\tau)d\tau; u; p; 0) = G(p)F(q(p))$
 для любых $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) > s_0$ и $Re(q(p)) > s_0$, где $s_0 = \max(s_0(f), s_0(g))$, $2 \leq r < \infty$.

Доказательство. Пусть $Re(p) > s_0$ и $Re(q(p)) > s_0$, где $s_0 = \max(s_0(f), s_0(g))$, тогда в силу теоремы Фубини и условий теоремы изменение порядка интегрирования дает равенства:

$$\int_0^\infty (\int_0^\infty g(t, \tau)f(\tau)d\tau) \exp(-u(p, t; 0))dt = \int_0^\infty (\int_0^\infty g(t, \tau) \exp(-u(p, t; 0))dt) f(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^\infty G(p) \exp(-u(q(p), \tau; 0))f(\tau)d\tau = G(p) \int_0^\infty f(\tau) \exp(-u(q(p), \tau; 0))d\tau = G(p)F(q(p)),$$

так как $t, \tau \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}$ – центр алгебры $\mathcal{A}_r$.

43. Примеры. Рассмотрим $G(p) = p^{-1/2}$ и $q(p) = p^{1/2}$, причем по формуле обращения теоремы 19 имеем $g(t) = (2\pi i_1)^{-1} \int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp$, так как p^s и p коммутируют при $s \in \mathbf{R}$ и $p \in \mathcal{A}_r$ в силу полярной формы $p = |p| \exp(\theta M)$ чисел Кэли-Диксона, в частности, кватернионов и октонионов, где $\theta \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, и формулы для экспоненциальной функции $\exp(\theta M) = \cos(\theta) + \sin(\theta)M$ [14, 15].

Рассмотрим сначала значения $t > 0$. Пусть $0 < v < R < \infty$ и рассмотрим петлю (замкнутую кривую) γ составленную из отрезка $\{z \in \mathcal{A}_r : z = a + i_1 c, c \in [-b, b]\}$, где $a^2 + b^2 = R^2$, дуг $S_1(R)$ и $S_2(R)$ окружности $S(R) = \{z \in \mathcal{A}_r : z = z_0 + i_1 z_1, |z| = R, z_0, z_1 \in \mathbf{R}\}$, где дуга $S_1(R)$ соединяет точку $(a + i_1 b)$ с $(-R + i_1 \epsilon)$ при обходе по часовой стрелке, $S_2(R)$ соединяет точку $(-R - i_1 \epsilon)$ с $(a - i_1 b)$, $\epsilon > 0$ – малое число. Точки $(-v + i_1 \epsilon)$ и $(-R + i_1 \epsilon)$ соединены отрезком $[-v + i_1 \epsilon, -R + i_1 \epsilon]$ прямой линии, а также $(-R - i_1 \epsilon)$ и $(-v - i_1 \epsilon)$ соединены отрезком прямой $[-R - i_1 \epsilon, -v - i_1 \epsilon]$. Остальная часть γ состоит из дуги $S_3(v)$ окружности $S(v)$ от точки $-v - i_1 \epsilon$ до $-v + i_1 \epsilon$, проходимой по против часовой стрелки. Внутри этого контура полагаем $-\pi < \theta < \pi$, где $M = i_1$. Тогда в силу теоремы 2.11 [14, 15] $\int_\gamma p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, следовательно,

$$\int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp =$$

$$\int_{S_2(R) \cup [-R-i_1\epsilon, -v-i_1\epsilon] \cup S_3(v) \cup [-v+i_1\epsilon, -R+i_1\epsilon] \cup S_1(R)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp.$$

В силу леммы 12.1 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_2(R) \cup S_1(R)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, следовательно,

$$g(t; \tau) = (2\pi i_1)^{-1} \int_{[-R-i_1\epsilon, -v-i_1\epsilon] \cup S_3(v) \cup [-v+i_1\epsilon, -R+i_1\epsilon]} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp.$$

Вдоль отрезка $[-R - i_1 \epsilon, -v - i_1 \epsilon]$ имеем $p = x \exp(-i_1 \pi) - i_1 \epsilon$ и $(p + i_1 \epsilon)^{1/2} = -i_1 x^{1/2}$, а вдоль отрезка $[-v + i_1 \epsilon, -R + i_1 \epsilon]$ получаем $p = x \exp(i_1 \pi) + i_1 \epsilon$ и $(p - i_1 \epsilon)^{1/2} = i_1 x^{1/2}$, где $x > 0$, $x^{1/2}$ – положительная ветвь квадратного корня (арифметическое значение), следовательно, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[-R-i_1\epsilon, -v-i_1\epsilon]} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = \int_R^v \tilde{i}_1 x^{-1/2} \exp(i_1 \tau x^{1/2} - xt)dx$ и $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[-v+i_1\epsilon, -R+i_1\epsilon]} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = -\int_v^R \tilde{i}_1 x^{-1/2} \exp(-i_1 \tau x^{1/2} - xt)dx$, а $\lim_{v \rightarrow 0} \int_{S_3(v)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, так как $|\int_{S_3(v)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp| \leq C 2\pi v^{1/2}$, где $C = const > 0$. Сдела-

ем замену переменной $x = y^2$ и воспользуемся известным интегралом Пуассона $\int_0^\infty \exp(-ax^2) \cos(bx) dx = (\pi/a)^{1/2} \exp(-b^2/(4a))/2$, где $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, тогда $g(t; \tau) = \pi^{-1} \int_0^\infty x^{1/2} \cos(\tau x^{1/2}) \exp(-xt) dx = (2/\pi) \int_0^\infty \exp(-ty^2) \cos(\tau y) dy = (\pi t)^{-1/2} \exp(-\tau^2/(4t))$. Далее получим, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_4(R)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt) dp = 0$ при $t < 0$, где $S_4(R)$ – дуга окружности $S(R)$, соединяющая точки $(a - i_1 b)$ и $(a + i_1 b)$ при обходе против часовой стрелки с $Re(p) > 0$, следовательно, аналогичные рассуждения приведенным выше показывают, что $g(t; \tau) = 0$ при $t < 0$. Тогда

$$(1) \quad g(t; \tau) = (\pi t)^{-1/2} \exp(-\tau^2/(4t)) \text{ при } t > 0.$$

Итак, в силу теоремы 42:

$$(1) \quad \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2} \int_0^\infty \exp(-\tau^2/(4t)) f(\tau) d\tau; u; p; 0) = p^{-1/2} F(p^{1/2}),$$

где $f(t)$ – оригинал функции $F(p)$.

В частности, возьмем $F(p) = p^{-1} \exp(-ap)$, где $0 < a \in \mathbf{R}$. Согласно формуле 26(2) $f(t) = Ch_{[0, \infty)}(t - a)$. Тогда в силу формулы (1) получим:

$$(2) \quad p^{-1} \exp(-ap^{1/2}) = \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2} \int_a^\infty \exp(-\tau^2/(4t)) d\tau; u; p; 0),$$

где $\int_a^\infty \exp(-\tau^2/(4t)) d\tau = 2(\pi)^{-1/2} \int_{t^{-1/2}a/2}^\infty \exp(-x^2) dx$, $x := t^{-1/2}\tau/2$. Обозначая стандартным образом $erf(y) := \int_0^y \exp(-x^2) dx$, $Er f(y) := 1 - erf(y)$, запишем формулу (2) в виде:

$$(3) \quad \mathcal{F}(Er f(t^{-1/2}a/2); u; p; 0) = p^{-1} \exp(-ap^{1/2}) \text{ при } u = pt \text{ и } Re(p) > 0, p \in \mathcal{A}_r, 2 \leq r \in \mathbf{N}.$$

44. Теорема. Пусть функция $F(p)$ голоморфна в полупространстве $Re(p) > s_0$, где $p \in \mathcal{A}_r$, $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $s_0 \in \mathbf{R}$. Причем, $F(p)$ правильна в бесконечно удаленной точке и имеет в её окрестности $\{p \in \mathcal{A}_r : |p| \geq R\}$ лорановское разложение:

$$(1) \quad F(p) = \sum_{l=1}^\infty c_l g_l(p),$$

где $c_l \in \mathcal{A}_r$, $g_l(p) := p^{-l}$ при $u = pt$, $g_l(p)$ с $l = n - 1$ дается формулами (12,13) примера 33 при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, $0 < R < \infty$, то оригиналом $f(t)$ является функция:

$$(2) \quad f(t) = Ch_{[0, \infty)}(t) \sum_{l=1}^\infty c_l t^{l-1} / (l-1)!.$$

Доказательство. Положим $q = p^{-1}$ и обозначим $G(q) := F(1/q)$. Поэтому функция $G(q)$ аналитична в шаре $\{q : |q| \leq R^{-1}\}$. При $u = pt$ каждая функция равна $g_l(1/q) = q^l$, а при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ функция $g_l(1/q)$ голоморфна по q , так как в примере 33 и последующих примерах используются выражения p_j через p с помощью генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$ (смотри формулы 3(6)), что дает локальную аналитичность $F(p; \zeta)$ по p и ζ . В силу формул 33(4,10,11) асимптотически $|g_l(1/q)|$ ведет себя как $|g_l(1/q)| \leq C' |q|^l$ при $|q| \rightarrow \infty$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus i_1 \mathbf{R}$, где $C' = const > 0$ независимая от $l = n - 1$. Тогда неравенство (4) из теоремы 2.7 и теорема 3.21 [14,15] дают $|c_l| < C_0 C_1 \exp(C_2 R^n) R^l$ для любого $l \in \mathbf{N}$, где $n = 2^r + 2$, $2 \leq r \in \mathbf{N}$, в частности, $r = 2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, $r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от функции, $C_0 = \max_{|q| \leq 1/R} |G(q)|$. Поэтому,

$$|f(t)| \leq \sum_{l=1}^\infty |c_l| t^{l-1} / (l-1)! \leq C_0 C_1 \exp(C_2 R^n) \sum_{l=0}^\infty (R|t|)^l / l! = C_0 C_1 \exp(C_2 R^n + R|t|), \text{ следовательно,}$$

$|f(t)| \leq C \exp(Rt)$ для любого $t \geq 0$, где $C = C_0 C_1 \exp(C_2 R^n)$. Итак, функция $f(t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ является оригиналом, так как $t \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}$ – центр алгебры $\mathcal{A}_r$. В силу равномерной сходимости ряда (2) его можно почленно интегрировать с множителем $\exp(u(p, t; \zeta))$ по t от 0 до ∞ при $Re(p) > R$. Следует отметить, что $|\mathcal{F}(t^{l-1}/(l-1)!, u; p; \zeta)| \leq [(l-1)!]^{-1} (\int_0^\infty t^{l-1} \exp(-p_0 t) dt) \leq p_0^{-l}$ при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$. Поскольку $\mathcal{F}(t^n; u; p; \zeta) = g_l(p)$, где $\zeta = 0$ при $u = pt$, $\zeta \in \mathcal{A}_r$ может быть отлично от нуля для $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, то отсюда и из примеров 26 и 33 следует утверждение данной теоремы.

45. Определение. Функция $F : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ из области U в алгебру $\mathcal{A}_r$ называется мероморфной, если она голоморфна на $U \setminus P$, где P – счетное множество точечных полюсов функции F , причем в каждой ограниченной подобласти V в U подмножество $V \cap P$ полюсов конечно, в частности, может быть $P = \emptyset$.

46. Теорема. Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет условиям:

(1) $F(p)$ мероморфна в полупространстве $W := \{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > s_0\}$ и все её полюсы могут быть лишь конечного порядка;

(2) причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что $|F(p)| \leq C_a \exp(-\epsilon_a |p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $\operatorname{Re}(p) \geq a$, где s_0 фиксировано, $2 \leq r < \infty$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $r \geq 4$;

(3) интеграл $\int_{a+i_1\theta, \theta \in \mathbf{R}} F(p) dp$ абсолютно сходится для любого $a > s_0$, где $i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$ – это стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$. Тогда оригиналом для $F(p)$ является функция

(4) $f(t) = (i_1)^{-1} \sum_{p_k} \operatorname{res}(p_k, F(p) \exp(u(p, t; 0))) \cdot i_1$
при $r = 2, 3$; а при $4 \leq r \in \mathbf{N}$, если $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$ в порядке неубывания их модулей.

Доказательство. В силу теоремы 22 над $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, а также произвольной алгебры $\mathcal{A}_r$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \leq r \in \mathbf{N}$, $F(p)$ является изображением функции

(5) $f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{i}_1 \int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp$. Из определения 34 следует, что существует последовательность радиусов $0 < R_n < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$, а сфера $S_n := S(\mathcal{A}_r, 0, R_n)$ не содержит ни одного полюса $p_k \in P$, следовательно, $\min_{p \in P, z \in S_n} |p - z| =: \delta_n > 0$ в силу компактности сферы S_n и шара $B(\mathcal{A}_r, 0, R_{n+1})$, где $S(\mathcal{A}_r, y, R) := \{z \in \mathcal{A}_r : |z - y| = R\}$, $y \in \mathcal{A}_r$, $0 < R < \infty$, $B(\mathcal{A}_r, y, R) := \{z \in \mathcal{A}_r : |z| \leq R\}$. Рассмотрим сечение сферы S_n плоскостью $\mathbf{R} \oplus i_1 \mathbf{R}$ и часть γ_n окружности $\psi_n := S_n \cap (\mathbf{R} \oplus i_1 \mathbf{R})$, расположенную правее гиперплоскости $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) = a\}$ над $\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_r$, то есть, в полупространстве $\operatorname{Re}(p) > a$. Обозначим через $a - i_1 b_n$ и $a + i_1 b_n$ точки пересечения окружности ψ_n с гиперплоскостью $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) = a\}$, а через w_n – петлю проходимую против часовой стрелки и составленную из γ_n и отрезка $[a - i_1 b_n, a + i_1 b_n]$. Согласно лемме 12.1

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(u(p, t)) dp = 0$, следовательно,

(7) $f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{i}_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{w_n} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp$.

Тогда из теоремы 3.23 [14, 15] и формул (6, 7) следует формула (4) данной теоремы.

47. Замечание. Лемма 23 также выполняется при условии

(2') существует последовательность гиперсфер $S_n = S(\mathcal{A}_r, 0, R_n)$ над $\mathbf{R}$ вложенных в $\mathcal{A}_r$ с центром в нуле и радиусов R_n с $R_n < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \in S_n \cap W} |\hat{F}(p)| = 0$ вместо условия (2) при выполнении остальных условий леммы 23.

В самом деле, достаточно её доказать для некоторой последовательности дуг γ_n окружностей ψ_n , содержащихся в плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, где $N \in \mathcal{A}_r$, $\operatorname{Re}(N) = 0$, $|N| = 1$.

Если $F(p)$ голоморфна в W , то в силу теоремы 2.11 [14, 15] $\int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp$ не зависит от вида кривой и определяется лишь начальной и конечной её точками. Если $V(\gamma_n) \leq C_V R_n$ для любого n , то достаточно доказать утверждение леммы для любой подпоследовательности $R_{n(k)}$ с $R_{n(k+1)} \geq R_{n(k)} + 1$ для любого $k \in \mathbf{N}$, что также видно из оценок интегралов ниже. Обозначим такую подпоследовательность через R_n . Каждую спрямляемую кривую можно аппроксимировать сходящейся последовательностью спрямляемых ломаных линий, составленных из дуг окружностей. Если кривая расположена на сфере, то эти

окружности можно взять на сфере с тем же центром. Поскольку условие (2') выполняется равномерно относительно направляющих N и можно выполнить диффеоморфизм g в $\mathcal{A}_r$, так что $g(W) = W$, $g(S_n) = S_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, и образом C^1 кривой из W является дуга окружности, так как $0 < R_n + 1 < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Функционал $(F, \gamma) \mapsto \int_\gamma F(p) dp$ непрерывен из $C^0(V, \mathcal{A}_r) \times \Gamma$ в $\mathcal{A}_r$, где V – компактная область в $\mathcal{A}_r$, Γ – семейство спрямляемых кривых в V с метрикой $\rho(v, w) := \max(\sup_{z \in v} \inf_{\zeta \in w} |z - \zeta|, \sup_{z \in w} \inf_{\zeta \in v} |z - \zeta|)$ (смотри теорему 2.7 [14, 15]). При этом спрямляемая кривая является равномерным пределом C^1 кривых, так как каждая спрямляемая кривая непрерывна, а пространство функций C^1 плотно в пространстве непрерывных функций C^0 в компактно-открытой топологии, каждая C^1 -кривая спрямляема. То есть, рассмотрим $\gamma_n = \psi_n \cap \{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > a\} \cap W$. Используя автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_r$ достаточно доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t)) dp = 0$$

для любого $t > 0$ при $u = pt + \zeta$ согласно леммам 8.1, 8.2 и доказательству теоремы 19. При этом $\exp(tNz)dz = (tN)^{-1}d\exp(tNz)$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$. Сделаем замену переменной $z = (p + \zeta/t)N$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp = \lim_{n \rightarrow \infty} [\int_{\eta_n} F(\tilde{N}z) \exp(tNz) dz] \tilde{N},$$

где $\eta_n = \gamma_n N$, а $z = x + Ny$, где $x, y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, $b_n := \sup_{p \in S_n \cap W} |\hat{F}_n(p)|$, $\phi_n := \arcsin(a/R_n)$. Тогда

$$|\int_{\eta_n; -a \leq y \leq 0} F(\tilde{N}z) \exp(tNz) dz| \leq b_n \exp(at) \phi_n R_n.$$

Поскольку $\sin(\phi) \geq 2\phi/\pi$ для любого $0 \leq \phi \leq \pi/2$, то $|\exp(tNz)| = \exp(-tR_n \sin(\phi)) \leq \exp(-2tR_n \phi/\pi)$, следовательно,

$$|\int_{\eta_n; 0 \leq y \leq R_n} F(\tilde{N}z) \exp(tNz) dz| \leq 2b_n R_n \int_0^{\pi/2} \exp(-2tR_n \phi/\pi) d\phi = 2b_n \pi (1 - \exp(-tR_n)) / (2t).$$

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\eta_n} F(\tilde{N}z) \exp(-u(\tilde{N}z, t)) dz = 0$ для любого $t > 0$. Отсюда вытекает равенство 12.1(4).

Тогда и теорема 22 выполняется при наложении условия (2') вместо условия (i) при выполнении остальных условий теоремы 22, а значит в таком варианте, при условии (2') вместо (2), выполняется и теорема 46.

48. Теорема. Если функция $f(t)$ и её производная $f'(t)$ являются оригиналами, а $F(p)$ – изображение функции $f(t)$ при $u = pt$ над $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r \in \mathbf{N}$, то

(1) $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p)p = f(0)$, где $p \rightarrow \infty$ внутри угла $|\operatorname{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \pi/2$ и $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$; если дополнительно существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то

(2) $\lim_{p \rightarrow 0} F(p)p = f(\infty)$, где $p \rightarrow 0$ внутри того же угла.

Доказательство. Если $z \in \mathcal{A}_r$, то оно имеет полярное разложение $z = |z| \exp(M)$, где $M \in \mathcal{A}_r$, $\operatorname{Re}(M) = 0$, $\operatorname{Arg}(z) := M$ (смотри следствие 3.6 в [14]). В силу теоремы 28 выполняется равенство $\mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0, \infty)}(t), pt; p; 0) = F(p)p - f(0)$. Тогда согласно замечанию 8 $\lim_{p \rightarrow \infty, |\operatorname{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta} (F(p)p - f(0)) = 0$. Если ещё существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, причем $|f(\infty)| < \infty$, то f ограничена на $\mathbf{R}$, следовательно, её порядок роста $s_0 \leq 0$, поэтому, функция $F(p)$ определена для любого $\operatorname{Re}(p) > 0$. Из формулы $\int_0^\infty f'(t) \exp(-pt) dt = F(p)p - f(0)$ вытекает, что при $p = 0$ интеграл $\int_0^\infty f'(t) dt$ сходится. Тогда в угле $|\operatorname{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta$ интеграл $\int_0^\infty f'(t) \exp(-pt) dt$ сходится равномерно по p . Поэтому, можно перейти к пределу при $p \rightarrow 0$ в этом угле, то есть, $\int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} F(p)p - f(0) = f(\infty) - f(0)$, следовательно, $\lim_{p \rightarrow 0} F(p)p - f(0) = f(\infty)$.

49. Теорема. Если функция $f(t)$ является оригиналом вместе со своей производной, а $F(p; \zeta)$ – изображение функции $f(t)$ над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с

$2 \leq r \in \mathbf{N}$ при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2^r-1} F(p; \zeta - i_{2^r-1} \pi/2) = f(0),$$

где $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$, а p стремится к бесконечности внутри угла $|\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \pi/2$. Если также существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то $\lim_{p \rightarrow 0} \{p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2^r-1} F(p; \zeta - i_{2^r-1} \pi/2)\} = f(\infty)$, где $p \rightarrow 0$ внутри того же угла.

Доказательство. В силу теоремы 31 выполняется равенство:

$$\mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2^r-1} F(p; \zeta - i_{2^r-1} \pi/2) - f(0),$$

при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, где $p = p_0 + p_1 i_1 + \dots + p_{2^r-1} i_{2^r-1}$, $p_0, \dots, p_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ – генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$. Из замечания 8 следует, что $\lim_{p \rightarrow \infty, |\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta} \mathcal{F}(f'Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = 0$, что дает первое утверждение теоремы.

Если также существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то f ограничена на $\mathbf{R}$ и $s_0 \leq 0$, а $F(p; \zeta)$ определена для любого $\text{Re}(p) > 0$. Поэтому, существует предел

$$\lim_{p \rightarrow 0, |\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta} \int_0^\infty f'(t) \exp(-pt - \zeta_0 - M(p, t; \zeta)) dt = \int_0^\infty f'(t) dt = f(\infty) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0, |\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta} \{p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2^r-1} F(p; \zeta - i_{2^r-1} \pi/2) - f(0)\},$$

откуда следует второе утверждение теоремы.

50. Пример. Рассмотрим изображения дробных степеней. Гамма-функция Эйлера дается интегралом $\Gamma(a+1) := \int_0^\infty t^a e^{-t} dt$ для любого $\text{Re}(a) > -1$. В полярной форме число $p \in \mathcal{A}_r$ имеет вид: $p = \rho \exp(S\alpha)$, где $\rho = |p|$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{A}_r$, $\text{Re}(S) = 0$, $|S| = 1$, $\text{Arg}(p) = S\alpha$ (смотри следствие 3.6 [14]). При $\text{Re}(p) > 0$ возьмем $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Введем новую переменную $q := tp^{-1}$, тогда $\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_L q^a \exp(-pq) dq$ (смотри определение 4.1 и предложение 4.2 [14]), где интеграл берется вдоль луча L , характеризуемого условием $\text{Arg}(q) = -\alpha S$. Для точек дуги $\gamma_R := \{q \in \mathcal{A}_r : |q| = R, -\alpha < (\text{Arg}(q))S^* < 0\}$ положим $q = R \exp(S\phi)$. Тогда $|\int_{\gamma_R} q^a \exp(-pq) dq| \leq R^a \int_{-\alpha}^0 \exp(-\rho R \cos(\phi + \alpha)) R d\phi$. Поскольку $0 < \alpha + \phi < \alpha$, то $\cos(\alpha + \phi) \geq \delta_0 > 0$, где $\delta_0 = \text{const} > 0$. Поэтому, существует предел

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} q^a \exp(-pq) dq = 0$, так как $0 < \alpha + \phi < \alpha$ и $\cos(\alpha + \phi) > c_0$, где $c_0 = \text{const} > 0$. Для любого $S \in \mathcal{A}_r$ с $|S| = 1$, $\text{Re}(S) = 0$ между лучом L и действительной осью $i_0 \mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_r$ нет особых точек подынтегральной функции. Таким образом, можно заменить $\int_L q^a \exp(-pq) dq$ на $\int_0^\infty q^a \exp(-pq) dq$, следовательно, $p^{-a-1} \Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^a \exp(-pt) dt$ над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$ в силу альтернативности алгебры октонионов и ассоциативности тела кватернионов; либо $\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_0^\infty t^a \exp(-pt) dt$ в случае алгебры $\mathcal{A}_r$ с $4 \leq r \in \mathbf{N}$, где переменная интегрирования снова обозначена через t . Итак,

$$(i) \mathcal{F}(t^a Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = p^{-a-1} \Gamma(a+1) \text{ над } \mathbf{H} \text{ или } \mathbf{O}; \text{ либо}$$

(i') $p^{a+1} \mathcal{F}(t^a Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = \Gamma(a+1)$ над $\mathcal{A}_r$ с $4 \leq r \in \mathbf{N}$. При $\text{Re}(a) \geq 0$ функция $f(t)$ является оригиналом, а при $-1 < \text{Re}(a) < 0$ функция $f(t) = t^a$ неограниченно возрастает при t стремящемся к нулю не удовлетворяет условиям, наложенным на оригинал. Но и для последнего интервала значений параметра a интеграл сходится и формула (i) или (i') соответственно выполняется. В этой ситуации можно сказать, что t^a является особым оригиналом, а $p^{-a-1} \Gamma(a+1)$ особым изображением над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$; либо $p^{a+1} t^a$ – особый оригинал для особого изображения $\Gamma(a+1)$ над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $4 \leq r \in \mathbf{N}$.

В частном случае $a = -1/2$ получим: $p^{-1/2} = \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2}, pt; p; 0)$ над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$; либо $1 = p^{1/2} \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2}, pt; p; 0)$ над $\mathcal{A}_r$ с $4 \leq r \in \mathbf{N}$.

Случай $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ с $\Gamma_M(a+1; \zeta) := \int_0^\infty t^a \exp(-M((1, 0, \dots, 0), t; \zeta) - t) dt$ для любого $\text{Re}(a) > -1$ сводится к разобранному выше, так как $M(g, t; \zeta) = M(0, 0; \zeta)$

при $g = Re(g)$. Но в общем случае, $\int_0^\infty t^a \exp(-p_0 t - M(p, t; 0)) dt$ можно выразить через интегралы (смотри формулу 4 на стр. 446 в [18]):

$$(1) T_a(v) := \int_0^\infty t^a \exp(-vx) \cos(bx) dx = \Gamma(a+1)(b^2 + v^2)^{-(a+1)/2} \cos(c),$$

$$(2) S_a(v) := \int_0^\infty t^a \exp(-vx) \sin(bx) dx = \Gamma(a+1)(b^2 + v^2)^{-(a+1)/2} \sin(c),$$

где $c = (a+1) \arctg(b/p)$, $Re(a) > -1$, $Re(v) > |Im(b)|$, подобно тому, как это было сделано в примере 33. То есть, достаточно воспользоваться формулами примера 33 с заменой интегралов (6, 7) на T_a и S_a соответственно.

Пусть $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, ψ - путь в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ вложенной в $\mathcal{A}_r$, так что ψ идет вдоль двубережного разреза плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ от $-\infty$ до $-\delta$ со стороны $z = a + Sb$ с $b < 0$, затем обходит окружность радиуса $\delta > 0$ с центром в нуле по часовой стрелке и идет по прямой от $-\delta$ до $-\infty$ со стороны $z = a + Sb$ с положительными $b > 0$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Тогда обозначим

$$(3) Re(N_1 S^*) \int_\psi \zeta^a \exp(u(\zeta, 1; 0)) d\zeta =: (2\pi S)(\Gamma_u(-a))^{-1},$$

где $u(p, t; \zeta) = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, $a, p, \zeta \in \mathcal{A}_r$, $Re(N_1 S^*) \neq 0$. В частном случае комплексных чисел и $u = pt$ формула (3) известна как ханкелевское интегральное представление гамма-функции. При $u = pt$ и $p \in \mathcal{A}_r$ функция $\Gamma_u(-a)$ совпадает с обычной гамма-функцией $\Gamma(-a)$ переменной $a \in \mathcal{A}_r$ (смотри определение 4.1 и предложения 4.2, 4.12 и следствие 4.13 в [14]).

51. Теорема. Пусть голоморфная функция $F(p)$ удовлетворяет условиям 23(1 - 3) или 47(2') вместо 23(2) при $p \rightarrow \infty$ в области $Re(p) < a$, $F(p) = \sum_{j=0}^\infty p^{j\beta+\alpha} c_j$ при $Re(p) < a$, $F(p)$ не имеет особых точек в $\mathcal{A}_r$ быть может, кроме нуля, являющегося точкой ветвления конечного порядка, и интеграл $\int_{(-\infty, -\delta] \cup S(\mathcal{A}_r, 0, \delta)} |c_j| |p^{j\beta+\alpha}| dt$ сходится для некоторого $\delta > 0$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, β - положительное рациональное число, $c_j \in \mathbf{R}$ для любого j при $4 \leq r \in \mathbf{N}$, $c_j \in \mathbf{K}$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$. Тогда оригиналом является функция

$$(i) f(t) = Ch_{[0, \infty)}(t) t^{-\alpha-1} \sum_{j=0}^\infty (\Gamma_u(-\alpha - j\beta))^{-1} t^{-j\beta} c_j,$$

удовлетворяющая свойствам 1(1, 2).

Доказательство. Пусть функция $F(p)$ имеет разложение в обобщенный степенной ряд $F(p) = \sum_{j=0}^\infty p^{j\beta+\alpha} c_j$, где $0 < \beta \in \mathbf{Q}$. Рассмотрим петлю γ , состоящую из отрезка $\gamma_1 := \{a + \theta S, |\theta| \leq b\}$, проходимогo сверху вниз, где $b > 0$, $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $Re(S) = 0$, γ_2 - часть окружности в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ от $-R$ до $-a + bS$ с центром в нуле, $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$, дуги γ_3 окружности от $a - bS$ до $-R$, двубережного разреза $\gamma_4 \cup \gamma_5$ вдоль оси $\mathbf{R}$ от $-R$ до $-\delta$, $\gamma_4 = [-\delta, -R] + \epsilon S$, $\gamma_5 = [-R, -\delta] + \epsilon S$, γ_6 - дуга окружности радиуса $\rho = (\delta^2 + \epsilon^2)^{1/2}$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ проходима по часовой стрелке от $(-\delta - \epsilon S)$ до $-\delta + \epsilon S$, где $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$ - произвольно малые числа, $\gamma = \bigcup_{k=1}^6 \gamma_k$. Для z в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ полагаем $z = |z| \exp(S\phi)$, где $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. В силу теоремы 2.15 [14, 15] $\int_{a-bS}^{a+bS} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp = \int_{\bigcup_{k=2}^6 \gamma_k} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp$. Из леммы 23 и замечания 47 следует, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2 \cup \gamma_3} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp = 0$ для любого $t > 0$. Контур интегрирования ψ в §50 симметричен относительно оси ox , так что при отражении в плоскости, содержащей ось ox и перпендикулярной S относительно скалярного произведения $(z, \eta) := Re(z\eta^*)$, направление его обхода меняется на противоположное, поэтому $\Gamma_u(w) \in \mathbf{R}$ для любых $w \in \mathbf{R}$ подобно обычной гамма-функции.

Из теоремы 22 следует, что функция-оригинал дается формулой:

$$Sf(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp.$$

$$\text{Тогда } Sf(t) = \sum_{j=0}^\infty (2\pi)^{-1} Re(N_1 S^*) \left[\int_{\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6} p^{\alpha+j\beta} \exp(u(p, t; 0)) dp \right] c_j.$$

В случае, когда все $c_j \in \mathbf{R}$, тогда $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, но $Sa = b$ для $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathcal{A}_r$ означает, что $a = S^*b$, так как $\mathbf{R}$ - центр алгебры $\mathcal{A}_r$. Сделаем замену переменной $\zeta = pt$, тогда

$(2\pi)^{-1} \int_{\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6} p^{\alpha+j\beta} \exp(u(p, t; 0)) dp = (2\pi)^{-1} t^{-\alpha-j\beta-1} \int_{(\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6)t} \zeta^{\alpha+j\beta} \exp(u(\zeta, 1; 0)) d\zeta = t^{-\alpha-j\beta-1} (\Gamma_u(-\alpha - j\beta))^{-1}$. Следовательно, у функции $F(p)$ существует оригинал, даваемый формулой (i), так как $t \in \mathbf{R}$ коммутирует с каждым $c_j \in \mathcal{A}_r$. Если $\alpha + j\beta$ - целое число, то интеграл от $p^{\alpha+j\beta} \exp(u(p, t; 0))$ равен нулю, то есть, из разложения (i) надо вычеркнуть все члены с целыми $\alpha + j\beta$.

Следует отметить, что этот оригинал в общем случае может не удовлетворять свойству 1(3), то есть $f(t)$ - особый оригинал.

52. Пример. Рассмотрим $F(p) := p^{-3/2} \exp(p^{1/2}(S - 1))$, где $S \in \mathbf{K}$, $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, $\operatorname{Re}(S) = 0$, $|S| = 1$. Пусть $p = R \exp(S\phi)$, $S - 1 = 2^{1/2} \exp(3S\pi/4)$, тогда $\operatorname{Re}(p^{1/2}(S-1)) = (2R)^{1/2} \cos(\phi/2 + 3\pi/4) < 0$, так как $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ и $\pi < \phi/2 + 3\pi/4 < 3\pi/2$. Если $|p'|$ велико, где $p' = p - p_0$, $p_0 := \operatorname{Re}(p)$, а $0 < p_0 < a$, то ϕ приблизительно равно $\pi/2$ или $3\pi/2$, поэтому, $p^{1/2}(S-1)$ приблизительно равно $-2^{1/2}R$ или $-S2^{1/2}R$. Если $p \in \mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$, то $F(p) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2} (j!)^{-1} \exp(3\pi j S/4) p^{(j-3)/2}$. Итак, $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Re}(p) < a$, то есть, $F(p)$ удовлетворяет условиям 23(1,2',3) и условиям теоремы 51, так как $a > 0$ и $p \neq 0$ вдоль прямой $\{z = a + S\theta : \theta \in \mathbf{R}\}$. В силу теоремы 51: $f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (-S)^j ((2j)!) \Gamma_u(3/2 - j) t^{-j-1/2}$.

53. Замечание. Как видно из предыдущего примера существуют оригиналы, не удовлетворяющие условию 1(3), но для которых существуют изображения. С другой стороны, не для всех изображений существуют оригиналы, удовлетворяющие условиям 1(1-3). Например, функции $1, p, p^2, \dots$ не имеют обычных оригиналов. Для того, чтобы расширить возможности преобразования Лапласа используют обобщенные функции, то есть, функционалы.

54. Определения. Пространство основных функций $\mathcal{D}$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{A}_r$ на $\mathbf{R}$ с компактными носителями, то есть, f обращается в нуль вне отрезка, зависящего от функции. Последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}$ сходится к нулю, если все f_n обращаются в нуль вне некоторого отрезка $[a, b]$, а на нем последовательность $f_n^{(k)}$ равномерно сходится к нулю для любого $k = 0, 1, 2, \dots$, где $f^{(k)}(t) := d^k f(t)/dt^k$, $f^{(0)} = f$. Такая сходимость определяет замкнутые подмножества в $\mathcal{D}$, а их дополнения по определению открыты, что задает топологию на $\mathcal{D}$.

Обобщенной функцией класса $\mathcal{D}'$ называется непрерывный $\mathbf{R}$ -линейный $\mathcal{A}_r$ -аддитивный функционал $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}_r$. Множество всех таких функционалов обозначается $\mathcal{D}'$. То есть, g непрерывен, если для любой последовательности $f_n \in \mathcal{D}$, сходящейся к нулю, последовательность чисел $g(f_n) =: (g, f_n) \in \mathcal{A}_r$ сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Обобщенная функция g обращается в нуль на открытом подмножестве V в $\mathbf{R}$, если $(g, f) = 0$ для любой $f \in \mathcal{D}$ равной нулю вне V . Носителем обобщенной функции g называется совокупность, обозначаемая $\operatorname{supp}(g)$, всех точек $t \in \mathbf{R}$ таких, что в любой окрестности каждой точки $t \in \operatorname{supp}(g)$ функционал g отличен от нуля. Сложение обобщенных функций g, h дается формулой: $(g + h, f) := (g, f) + (h, f)$. Умножение $g \in \mathcal{D}'$ на бесконечно дифференцируемую функцию w задается формулой: $(gw, f) = (g, wf)$ для любой основной функции $f \in \mathcal{D}$ с действительным образом $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$. Производной g' обобщенной функции g называется обобщенная функция g' , задаваемая формулой: $(g', f) := -(g, f')$.

Пространство основных функций $\mathcal{B}$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{A}_r$ таких, что существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^m f^{(j)}(t) = 0$ для любых $m, j = 0, 1, 2, \dots$. Последовательность $f_n \in \mathcal{B}$ называется сходящейся к нулю, если последовательность $t^m f_n^{(j)}(t)$ стремится к нулю равномерно на отрезке $[a, \infty)$ для любых $m, j = 0, 1, 2, \dots$ и каждого $-\infty < a < +\infty$. Семейство всех $\mathbf{R}$ -линейных и

$\mathcal{A}_r$ -аддитивных функционалов на $\mathcal{B}$ обозначается $\mathcal{B}'$.

Обобщенную функцию $f \in \mathcal{A}'$ с носителем содержащимся в $[0, \infty)$ назовем обобщенным оригиналом, если существует действительное число s_0 такое, что для любого $s > s_0$ обобщенная функция $f \exp(-st) \in \mathcal{B}'$. Изображением такого оригинала назовем функцию

(1) $\mathcal{F}(f, u; p; \zeta) := (f, \exp(-u(p, t; \zeta)))$ переменной $p \in \mathcal{A}_r$, определенной в полупространстве $Re(p) > s_0$, определяемую следующим правилом. Для данного $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) = s > s_0$ выберем $s_1 \in \mathbf{R}$ так, чтобы $s_0 < s_1 < s$, а тогда

(2) $(f, \exp(-u(p, t; \zeta))) := (f \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]))$, так как $\exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]) \in \mathcal{B}$, а по условию $f \exp(-s_1 t) \in \mathcal{B}'$.

55. Замечание и примеры. Очевидно, что $\mathcal{F}(f, u; p; \zeta)$ не зависит от выбора s_1 , так как $(f \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t])) = (f \exp(-s_1 t - bt), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t - bt]))$ для любого $b \in \mathbf{R}$ такого, что $s_0 < s_1 + b < s$, так как $\exp(-bt) \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}$ – это центр алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$.

Пусть δ – это дельта функция Дирака, определяемая уравнением $(\delta(t), \phi(t)) := \phi(0)$ для любой $\phi \in \mathcal{B}$. Тогда

(i) $\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t - \tau), u; p; \zeta) = (\delta^{(j)} \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]))$
 $= (-1)^j (d^j \exp(-[u(p, t; \zeta)]/dt^j)|_{t=\tau},$

так как можно взять $-\infty < s_0 < 0$ и $s_1 = 0$, где $\tau \in \mathbf{R}$ – параметр. В частности, при $j = 0$ имеем $\mathcal{F}(\delta(t - \tau), u; p; \zeta) = \exp(-u(p, \tau; \zeta))$, а при $u = pt$ имеем $\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t - \tau), pt; p; \zeta) = p^j \exp(-p\tau)$. В общем случае:

$\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t), u; p; \zeta) =$
 $\sum_{n_0, n_1, \dots, n_{2^r-1}=j} p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_{2^r-1}^{n_{2^r-1}} \exp(-\zeta_0 - M(p, 0; \zeta - (i_1 n_1 + \dots + i_{2^r-1} n_{2^r-1})\pi/2)),$
 причем $M(p, 0; \zeta) = M(0, 0; \zeta)$, где $n_0, n_1, \dots, n_{2^r-1}$ – это целые неотрицательные числа.

Преобразование $\mathcal{F}$ обобщенной функции является голоморфной функцией по $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) > s_0$ и по $\zeta \in \mathcal{A}_r$, так как правая часть уравнения 54(2) голоморфна по p с $Re(p) > s_0$ и по ζ в силу теоремы 7. Из уравнения 54(2) следует, что теоремы 27, 28 и 29 выполняются также для обобщенных функций.

56. Приложения некоммутативного преобразования Лапласа к (супер)дифференциальным уравнениям.

Пусть дано дифференциальное уравнение

(1) $L[x] = f(t)$, где $L[x] := (d^n x(t)/dt^n)a_0 + \dots + (dx/dt)a_{n-1} + xa_n$, $a_0 \neq 0$ и заданы начальные условия:

(2) $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$.

Предположим, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$, и его производные $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ являются оригиналами. Тогда $X(p)(p^n a_0 + p^{n-1} a_1 + \dots + a_n) = F(p) + x_0(p^{n-1} a_0 + \dots + pa_{n-2} + a_{n-1}) + x_1(p^{n-2} a_0 + \dots + pa_{n-3} + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0$, где $X(p) := \mathcal{F}(x, pt; p; 0)$, $F(p) = \mathcal{F}(f, pt; p; 0)$, $a_j \in \mathbf{H}$ в случае $\mathbf{H}$, $a_j \in \mathbf{R}$ в случае $\mathcal{A}_r$ с $3 \leq r \in \mathbf{N}$. Поскольку $\mathcal{F}(f'(t), u; p; \zeta) = F(p; \zeta)\Delta_p - f(0)$ при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, где $F(p; \zeta)\Delta_p := p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2^r-1} F(p; \zeta - i_{2^r-1} \pi/2)$, то $f^{(n)}(t) = F(p; \zeta)\Delta_p^n - f(0)p^{n-1} - \dots - f^{(n-2)}(0)p - f^{(n-1)}(0)$, так как $\exp(i_k \pi/2) = i_k$ для любого $k = 1, 2, \dots, 2^r - 1$, а $c\Delta_p = cp$ для $c = const \in \mathcal{A}_r$ в силу формулы 44(i), так как можно полагать $\zeta = 0$ для $c = const$. Итак,

(3) $X(p)A(p) = F(p) + B(p)$, где

(4) $A(p) = (p^n a_0 + p^{n-1} a_1 + \dots + a_n)$ и

(5) $B(p) = x_0(p^{n-1} a_0 + \dots + pa_{n-2} + a_{n-1}) + x_1(p^{n-2} a_0 + \dots + pa_{n-3} + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0$, в случае $u = pt$, $\zeta = 0$. При $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ имеется уравнение

$$(6) X(p)A(\Delta_p) = F(p; \zeta) + B(p),$$

где A уже многочлен от оператора Δ_p ,

(7) $B(p) = [(x_0\Delta_p^{n-1})a_0 + \dots + (x_0\Delta_p)a_{n-2} + a_{n-1}] + [(x_1\Delta_p^{n-2})a_0 + \dots + (x_1\Delta_p)a_{n-3} + a_{n-2}] + \dots + x_{n-1}a_0$. В частности, для тела кватернионов $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или алгебры октонионов $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, в силу альтернативности алгебры $\mathbf{K}$ получается операторное решение

$$(8) X(p) = (F(p; \zeta) + B(p; \zeta))A^{-1}(p),$$

где $A = A(p)$ или $A = A(\Delta_p)$ соответственно, полагаем $\zeta = 0$ в случае $u = pt$, $F(p) = F(p; \zeta)$, $X(p) = X(p; \zeta)$, $B(p) = B(p; \zeta)$, $A(\Delta_p) = A(\Delta_p; \zeta)$, ζ – параметр начальных фаз. В данном случае удобнее писать аргумент слева от оператора. Если уравнение (1) при начальном условии (2) имеет решение, $x(t)$, $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ удовлетворяет условиям наложенным на оригиналы, то $x(t)$ удовлетворяет уравнению (7). Можно записать оператор Δ_p в виде:

$$F(p; \zeta)\Delta_p = Re < p, F(p; \zeta)L >,$$

где $F(p; \zeta)L := i_0F(p; \zeta) + i_1F(p; \zeta - i_1\pi/2) + \dots + i_{2r-1}F(p; \zeta - i_{2r-1}\pi/2)$, а также

$$(f)\Delta_p = \mathcal{F}(f, u; p; \zeta) + \delta df(t)/dt,$$

где $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, δ – обобщенная функция из примера 55, $< a, b > := \sum_{l=1}^n {}^l\tilde{a} {}^l b$, где $a = ({}^1a, \dots, {}^na)$, $a, b \in \mathcal{A}_r^n$, $n \in \mathbf{N}$.

57. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение $x^{(2)} + xa^2 = b \sin(at)$, где $b \in \mathbf{H}$ в случае алгебры $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, $b \in \mathbf{R}$ в случае $\mathcal{A}_r$ с $3 \leq r \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$. Тогда операторное уравнение при $u = pt$ имеет вид: $X(p)(a^2 + p^2) = b(a^2 + p^2)^{-1}a + x_0p + x_1$. Для алгебр $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$ решение имеет вид: $X(p) = ab(p^2 + a^2)^{-2} + (x_0p)(p^2 + a^2)^{-1} + x_1(p^2 + a^2)^{-1}$. Пример 26.2, теоремы 27 и об интегрировании оригинала 34 дают: $ab(p^2 + a^2)^{-1} = \mathcal{F}([2^{-1}b \int_0^t t \sin(at) dt]; pt; p; \zeta) = \mathcal{F}(b(2a^2)^{-1}(\sin(at) - at \cos(at)); pt; p; \zeta)$. Если $x_0 \in \mathbf{R}$, то решение можно записать в виде:

$$x(t) = (x_1 + b(2a)^{-1})a^{-1} \sin(at) + (x_0 - bt(2a)^{-1}) \cos(at).$$

2. Уравнение $x^{(3)} + x = 1$ с нулевыми начальными условиями имеет операторное решение $X(p) = p^{-1}(p^3 + 1)^{-1}$. По теореме разложения 46 получим решение-оригинал $x(t) = 1 - e^{-t}/3 - (2/3)Re \exp[(1/2 + 3^{1/2}S/2)t] = 1 - e^{-t}/3 - (2/3) \exp(t/2) \cos(t3^{1/2}/2)$, где $S = p'/|p'|$ при $p' := p - Re(p) \neq 0$, а при $p' = 0$, S таково, что $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$.

References

- [1] J. C. Baez. The octonions. // Bull. Amer. Mathem. Soc. **39**: **2**, 145-205 (2002).
- [2] F. A. Berezin. Introduction to superanalysis. D. Reidel Publish. Comp., Kluwer group, Dordrecht, 1987.
- [3] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. Наука, Москва, 1971.
- [4] G. Emch. Méchanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte. // Helv. Phys. Acta **36**, 739–788 (1963).
- [5] F. Gürsey, C.-H. Tze. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. World Scientific Publ. Co., Singapore, 1996.
- [6] У. Р. Гамильтон. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. Наука, Москва, 1994.
- [7] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. Hypercomplex numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] A. Khrennikov. Superanalysis. Series "Mathem. and its Applic."; **470**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [9] А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. Наука, Москва, 1973.
- [10] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Наука, Москва, 1987.
- [11] Н. В. Lawson, M.-L. Michelson. Spin geometry. Princ. Univ. Press, Princeton, 1989.

- [12] С. В. Лютковский. Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. **1: 3**, 93-140 (2005).
- [13] С. В. Лютковский. Функции нескольких переменных чисел Кэли-Диксона и многообразия над ними. // Соврем. Матем. и её Прил. **28** (2005).
- [14] С. В. Лютковский. Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона и интегрирование вдоль путей. // Соврем. Матем. и её Прил. **28** (2005).
- [15] S. V. Lüdkovsky, F. van Oystaeyen. Differentiable functions of quaternion variables. // Bull. Sci. Math. **127**, 755-796 (2003).
- [16] F. van Oystaeyen. Algebraic geometry for associative algebras. Series Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem. **232**. Marcel Dekker, New York, 2000.
- [17] B. van der Pol, H. Bremmer. Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.
- [18] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Наука, Москва, 1981.
- [19] H. Rothe. Systeme Geometrischer Analyse. In: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie, 1277–1423. Teubner, Leipzig, 1914-1931.
- [20] М. А. Соловьёв. Структура пространства неабелевых калибровочных полей // Труды Физич. Инст. им. П. Н. Лебедева. **210**, 112-155 (1993).
- [21] E. H. Spanier. Algebraic topology. New York, Academic Press, 1966.
- [22] А. А. Элиович. О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением. // Гиперкомпл. числа в геом. и физ. **2: 2**, 24–50 (2004).

ПЕРВЫЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР "ГЕОМЕТРИЯ ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА"

Д. Г. Павлов, С. В. Сипаров

МГТУ им Н. Э. Баумана, geom2004@mail.ru

Гос. ун-т гражданской авиации, Санкт-Петербург, sergey@siparov.spb.su

С 15 по 22 октября 2005 года в Каире прошел первый международный научный семинар, организованный некоммерческим фондом развития исследований по финслеровой геометрии "Финслеровская премия" при поддержке МГТУ им. Н. Э. Баумана (ректор И. Б. Федоров, зав. кафедрой физики А. Н. Морозов, сотрудники МГТУ Т. М. Гладышева, В. О. Гладышев и Д. Г. Павлов). Семинар явился логическим продолжением работы финслеровой секции международной конференции "Физические интерпретации теории относительности" (Москва, 2005). В нем приняли участие ученые России, Румынии, Китая и Великобритании.

Научная программа

Во вступительном докладе Д. Павлова обсуждалось пространство с метрикой Бервальда-Моора с точки зрения живущего в нем наблюдателя. Было показано, что в определенном диапазоне параметров оно практически неотлично от пространства-времени СТО. Различия возникают лишь при достаточно специфических условиях. Таким образом, геометрия физического пространства-времени может рассматриваться на четырех уровнях: первый – классическая геометрия Галилея-Ньютона на основе линейной метрической формы, второй – геометрия Минковского-Эйнштейна на основе квадратичной формы, третий может оказаться связанным с кубической метрикой Чернова и, наконец, четвертый – с метрической функцией Бервальда-Моора, имеющей четвертый порядок. Четвертый уровень является красивым и простым, но одновременно и самым содержательным. Это обусловлено, в частности, тем, что геометрия такого пространства оказывается тесно связанной с коммутативной и ассоциативной т. н. квадрагиперболической алгеброй гиперкомплексных чисел (не являющихся кватернионами Гамильтона). При этом простота структуры квадрачисел не означает тривиальности связанного с ними пространства, в котором, помимо привычных изометрических и конформных преобразований, выделенную в метрическом плане роль играют еще несколько классов отображений, принципиально отсутствующих в квадратичных геометриях.

Всестороннему исследованию последней проблемы был посвящен доклад Г. Гарасько, в котором была установлена связь между обобщенно конформными преобразованиями в пространстве квадрачисел и обобщенно аналитическими функциями от них же.

В докладе Г. Асанова были в явном виде приведены формулы для преобразований координат пространства Бервальда-Моора, аналогичные преобразованиям Лоренца пространства Минковского. Аналогичные соотношения в другом виде были ранее получены Г. Богословским и Г. Гарасько, что вызвало оживленную дискуссию о приоритете.

Г. Богословский сообщил об изменениях, которым в пространстве с метрикой Бервальда-Моора подвергаются уравнения, связывающие канонический 4-импульс частицы с ее 3-скоростью. Эта работа замечательна тем, что раскрывает перед метрикой Бервальда-Моора широкие возможности использования в исследованиях, где применяются методы Гамильтонова формализма.

Как показал В. Чернов, геометрия пространства с метрикой Бервальда-Моора имеет тесную и естественную связь не только с уже используемыми физикой геометриями Галилея и Минковского, но и с пока еще не изученной геометрией, метрика которой выражается через третьи степени компонент вектора. Такая метрическая функция задает пространство, являющееся промежуточным случаем между пространством СТО и пространством с метрикой Бервальда-Моора.

В докладе С. Лебедева были предложены многоиндексные обобщения не только метрического тензора, но и коэффициентов связности, что развивает качественный подход, предложенный Д. Павловым. Применение таких методов вычисления тензора кривизны может привести к постоянной ненулевой величине скалярной кривизны для индикатрис пространств Бервальда-Моора. При использовании традиционных методов, использующих двухиндексные метрические тензоры и трехиндексные коэффициенты связности, эта величина оказывается нулевой.

Своеобразную черту под выступлениями российских теоретиков подвел С. Сипаров, обративший внимание собравшихся на фундаментальные проблемы, возникающие при использовании финслеровой геометрии в физике. Одновременно в докладе указывались обстоятельства, продуктивное исследование которых возможно именно на пути использования представлений об анизотропии пространства-времени, и был предложен простой подход к построению канонических уравнений для пространств с метрикой Бервальда-Моора.

Единственная экспериментальная работа, представленная на семинаре, была выполнена В. Панчелюгой и С. Шнолем. На примере исследования альфа-распада было показано, что тонкая структура функции распределения скорости этого распада в зависимости от времени весьма чувствительна к пространственной ориентации специально сконструированной лабораторной установки. Вывод, к которому пришли авторы работы, состоит в том, что на физические процессы в реальном мире влияет некоторая глобальная анизотропия, которую, быть может, как раз и следует искать в связи с финслеровским типом геометрии реального пространства-времени.

Другие экспериментальные данные, указывающие на возможную анизотропию, были получены в работах Ж.-П. Лумине (Франция) и Д. Макмиллана (США). Эти авторы были приглашены на семинар, но не смогли приехать в связи с поздним оповещением о дате его проведения. Возможно, встреча с ними состоится примерно через год там же в Каире на следующем семинаре.

Румынские ученые во главе с заведующим кафедрой геометрии Брашовского Государственного Университета Г. Атанасиу представили ряд докладов, связанных с введенным Д. Павловым понятием скалярного полипроизведения, обобщающего обычное скалярное произведение в римановых пространствах на более сложный случай пространств с финслеровыми неквадратичными метриками.

Так, в докладе В. Балана и Н. Бринзей обсуждалось векторное расслоение с метрикой Бервальда-Моора для вертикальной составляющей, в то время как для горизонтальной составляющей использовалась флаг-Финслерова метрика. Последняя представляет собой полипроизведение, приведенное к более традиционному виду. Для рассмотренной модели были построены уравнения Максвелла и Эйнштейна.

В докладе Г. Атанасиу, В. Балана и М. Неагу были введены 4-полиформы для импульсов, аналогичные координатным полипроизведениям, и исследовано их приложение для обобщенных Гамильтоновых пространств. Эта работа во многом переплеталась с докладом С. Лебедева, что указывает на непротиворечивость используемого подхода.

В докладе М. Пауна были представлены инвариантные финслеровы системы отсчета для метрик Бервальда-Моора.

В обобщающих докладах Г. Атанасиу и Н. Бринзей и Г. Атанасиу и В. Балана обсуждалось метрика Бервальда-Моора для касательных и кокасательных расслоений второго порядка.

Обсуждение результатов, полученных румынскими коллегами, привело к договоренности о подписании трехлетнего контракта между фондом "Финслеровская премия" и Брашовским Университетом (Румыния) на выполнение последним исследований в области пространств с метриками Бервальда-Моора и Чернова.

В докладе китайского ученого К. Мо было показано, что все биинвариантные финслеровские метрики на компактной связной группе Ли принадлежат метрикам типа Бервальда. Эта работа носила выраженный математический характер.

Английский ученый М. Райт, известный организатор международных научных семинаров, посвященных злободневным вопросам современной физики и математики, присутствовал на семинаре в качестве наблюдателя. По окончании семинара он выразил желание принять участие в последующей разработке данной тематики и стать официальным представителем фонда "Финслеровская премия" в Великобритании и Франции. Аналогичное пожелание высказал и Д. Масленников, проживающий в настоящее время в Египте.

Культурная программа

Участники семинара посетили главные пирамиды Египта. В этом им способствовали специалисты по египетской культуре Т. Шеркова и О. Кругляков. Участникам был также показан документальный фильм "Запретные темы истории" (с возможностью прослушивания английского текста), снятый по результатам прошлогодней экспедиции в Египет. Автор нескольких книг по альтернативной истории Египта и режиссер этого фильма А. Скляр (являющийся, кстати, выпускником МФТИ), дал свои комментарии на проблемы происхождения пирамид, что вызвало оживленную дискуссию.

* * *

Все доклады и экскурсии снимались на видео профессиональным оператором С. Бондаренко. В планы оргкомитета входит разместить соответствующую информацию в Интернете, а также смонтировать небольшой фильм о самых интересных моментах семинара. Настоящий, четвертый, номер журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике" в значительной мере посвящен теме Каирского семинара.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА МЕСТНОГО ВРЕМЕНИ НА МАЛЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБАХ

В. А. Панчелюга, В. А. Коломбет, М. С. Панчелюга,
С. Э. Шноль

Институт Теоретической и Экспериментальной Биофизики РАН
panvic333@yahoo.com, shnoll@iteb.ru

Статья представляет исследование, посвященное дальнейшему изучению одного из проявлений феномена макроскопических флуктуаций – эффекта местного времени. Показано существование названного эффекта для случая, когда разность долготного времени между местами проведения измерений порядка двух секунд, что соответствует пространственной разности около 500 м. Изучена структура распределения интервалов в окрестности пика местного времени, в результате чего обнаружено его расщепление. Полученные результаты ведут к заключению об анизотропии пространства-времени.

1 Введение

Настоящая работа выполнена в рамках исследования феномена макроскопических флуктуаций [1–3]. Эффект местного времени – синхронная по местному времени реализация сходных форм гистограмм в разных географических пунктах при измерениях флуктуаций в протекании процессов разной природы – свидетельствует о зависимости формы гистограмм от вращения Земли вокруг своей оси и ее движения по околосолнечной орбите. Этот эффект был исследован для различных расстояний между местами проведения измерений, вплоть до максимально возможных на Земле (ок. 15 тыс. км). Задачей настоящего исследования является изучение проявлений эффекта местного времени для относительно небольших расстояний между местами проведения измерений.

Одна из проблем, которая возникает при переходе к малым расстояниям между точками проведения измерений – необходимость повышения временного разрешения метода исследования. Как правило, работы, по исследованию эффекта местного времени, выполнялись с использованием процесса α -распада препаратов ^{239}Pu , как основного источника флуктуаций. Этот, во многих отношениях, удобный источник флуктуаций, становится мало пригодным в случае необходимости получения гистограмм длительностью в единицы миллисекунд и менее. Поэтому в настоящей работе мы отказались от использования α -распада. В качестве источника флуктуаций был выбран генерационно-рекомбинационный шум обратно смещенного $p - n$ перехода специального германиевого шумового диода. Подобный источник позволяет получать шумовой сигнал в полосе частот вплоть до десятков мегагерц и, в силу этого, полностью соответствует требованиям настоящего исследования.

Для того, чтобы удостовериться, что выбранный источник флуктуаций пригоден для исследования эффекта местного времени он был протестирован на расстояниях, для которых существование эффекта является доказанным. Описание этого эксперимента приведено в [4]. В этой работе была продемонстрирована пригодность источника флуктуаций на основе высокочастотного шумового диода для исследования эффекта местного времени.

2 Исследование эффекта местного времени на основе синхронных измерений в г. Пущино и пос. Большевик

Возможность использования высокочастотного источника флуктуаций позволила провести эксперимент, по исследованию эффекта местного времени для разности долготного времени между местами проведения измерений в десятки раз меньшей, чем в традиционно проводимых экспериментах [1–3]. Измерения проводились в г. Пущино ($54^{\circ}50.037'$ с. ш., $37^{\circ}37.589'$ в. д.) и пос. Большевик ($54^{\circ}54.165'$ с. ш., $37^{\circ}21.910'$ в. д.). Координаты мест проведения измерений определялись GPS-приемником BU-353. Долготная разность угловых координат мест проведения измерений составила $\alpha = 15.679'$. Полученной величине α соответствует разность долготного времени $\Delta t = 62.7$ сек и долготная разность пространственных координат Δl , около $\Delta l = 15$ км. Эта величина хорошо согласуется с картографическими данными.

Измерения аналогового шумового сигнала производились с частотой дискретизации равной 44100 Гц. После этого, с шагом кратным этой частоте, из исходного временного ряда извлекались отдельные измерения. Этот шаг для гистограмм соответствующих временным интервалам в 1 сек, 0.2 сек и 0.02 сек представлен во второй строке таблицы 1. Таким образом, были получены три временных ряда, частоты которых представлены в третьей строке таблицы 1. Разбивая эти ряды на отрезки длиной в заданное число точек (указано в четвертой строке таблицы 1) по стандартной методике вычислялись гистограммы, длительность которых приведена в последней строке таблицы 1.

Таблица 1. Параметры, используемые для вычисления гистограмм, соответствующих временным интервалам в 1 сек, 0.2 сек и 0.02 сек.

1	Частота дискретизации, Гц	44100	44100	44100
2	Шаг, точек	735	147	14
3	Частота данных, Гц	60	300	3150
4	Точек для вычисления гистограммы, штук	60	60	63
5	Гистограмм за 1 сек	1	5	50
6	Длительность гистограммы, сек	1	0.2	0.02

На рис. 1 представлено распределение интервалов, полученное в результате экспериментального сравнения последовательностей 1-секундных гистограмм. Как можно видеть, распределению присущ четкий пик, соответствующий временному интервалу между гистограммами равному 63 сек. С учетом точности синхронизации момента начала измерений (0.1–0.2 сек), и длительности используемых гистограмм, можно считать, что данный пик с хорошей точностью соответствует разности местного времени $\Delta t = 62.7$ сек между г. Пущино и пос. Большевик.

Пик местного времени, получаемый на распределениях интервалов, как правило, всегда очень острый, шириной в 1–2 гистограммы [1–3], т. е., практически лишен какой-либо структуры. То же можно видеть и на рис. 1. Возможность построения 0.2 сек гистограмм, на основе тех же рядов экспериментальных данных, на основе которых получено распределение рис. 1, позволило рассмотреть задачу детального исследования структуры полученного на рис. 1 пика местного времени, увеличив, таким образом, временное разрешение метода в пять раз. Так как положение этого пика во временном ряду уже известно, то ряды были сдвинуты на 60 сек. Т. е. к положению максимума на распределении интервалов для 0.2 сек гистограмм должна быть добавлена величина этого сдвига.

Результаты экспертного сравнения для последовательностей 0.2 сек гистограмм, приведены на рис. 2. Как можно видеть из этого рисунка, максимальное подобие наблюдается для пар гистограмм, разделенных интервалом, равным 15, что с учетом сделанных замечаний соответствует разности местного времени по прежнему равной 63 сек, но теперь уже эта величина определена с точностью в 0.2 сек.

Обращает на себя внимание, что в результате 5-кратного увеличения разрешения при переходе от 1-секундных к 0.2-секундным гистограммам мы получили снова один острый пик, соответствующий разности местного времени для мест проведения измерений. Т. е. изменение временного масштаба не привело к изменению вида распределения интервалов. Для того чтобы увеличить временное разрешение еще на порядок мы перешли к рассмотрению гистограмм, построенных по 0.02-секундным отрезкам временных рядов.

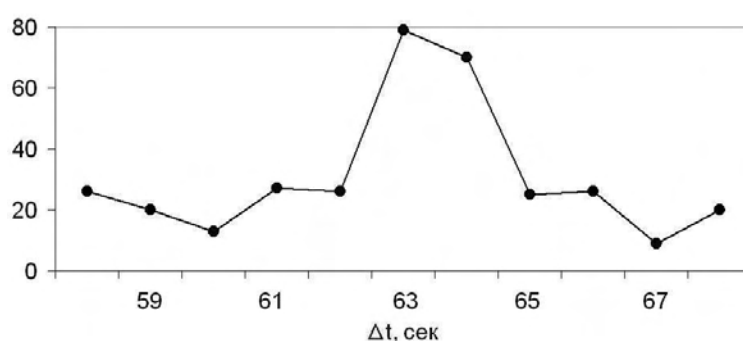


Рис. 1 Результаты экспертного сравнения для последовательностей 1-секундных гистограмм. Видно, что наиболее вероятно сходство гистограмм разделенных интервалом, соответствующим разнице местного времени – 63 сек. Ось Y – число гистограмм, найденных подобными, ось X – интервал времени между парами сравниваемых гистограмм, сек.

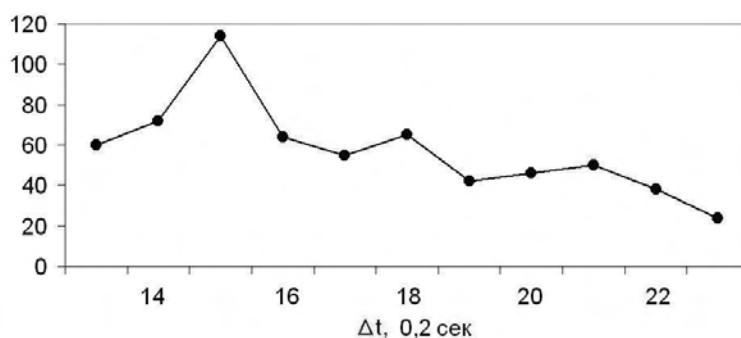


Рис. 2 Результаты экспертного сравнения для последовательностей 0.2-секундных гистограмм. Видно, что наиболее вероятно сходство гистограмм разделенных интервалом, соответствующим разнице местного времени – 63 сек с точностью в 0,2 сек. Ось Y - число гистограмм, найденных подобными, ось X – интервал времени между парами сравниваемых гистограмм равный, $60 + 0.2 \times \Delta t$.

Распределение интервалов для этого случая представлено на рис. 3. Здесь, так же как и в предыдущем случае, для того, чтобы исследовать окрестность пика местного времени, использовалось смещение временных рядов друг относительно друга, на величину равную 62 сек. В результате экспертного сравнения было получено распределение интервалов, состоящее из двух пиков. Первый пик, с учетом принятого

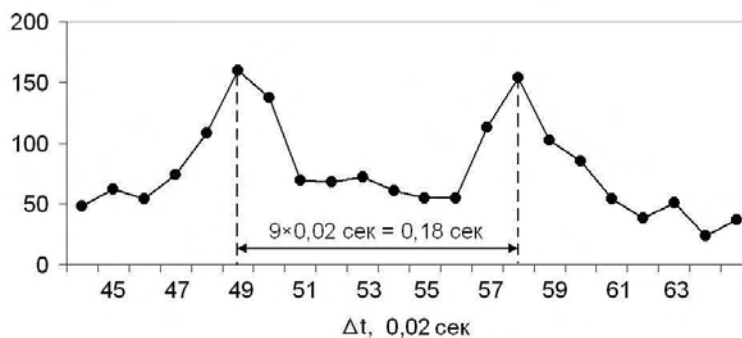


Рис. 3 Результаты экспертного сравнения для последовательностей 0.02-секундных гистограмм. Видно наличие двух экстремумов, соответствующих различиям "звездного" и "солнечного" местного времени. Ось Y — число гистограмм, найденных подобными, ось X — интервал времени между парами сравниваемых гистограмм равный $62 + 0.02 \times \Delta t$.

смещения, соответствует разности местного времени — 62.98 сек, а второй — 63.16 сек. Соответственно, разность между пиками составляет 0.18 сек.

Полученное расщепление пика местного времени подобно расщеплению суточного периода повторяемости гистограмм на два периода равных один солнечным, а другой звездным суткам [5–7].

3 Дальнейшее развитие экспериментов по исследованию эффекта местного времени

Представленный выше эксперимент показал наличие эффекта местного времени для расстояний между точками проведения измерений порядка 15 км и расщепление пика местного времени на два субпика. Естественный вопрос, который возникает в этой связи — чему равно минимальное расстояние, на котором описанная выше картина будет повторяться? В этой связи был поставлен представленный ниже эксперимент.

Таблица 2. Координаты мобильной измерительной системы и соответствующие им долготная разность угловых координат мест проведения измерений α , разница долготного времени Δt , долготная разность координат мест измерений Δl и величина расщепления пика местного времени $\Delta \tau$.

№	Координаты мобильной изм. системы	α	Δt , сек	Δl , км	$\Delta \tau$, сек
1	54°48.16' с.ш., 37°43.54' в.д.	5.95'	23.8	6	0.066
2	54°49.28' с.ш., 37°41.44' в.д.	3.85'	15.4	3.9	0.043
3	54°50.126' с.ш., 37°39.207' в.д.	1.618'	6.47	1.6	0.018
4	54°49.989' с.ш., 37°38.127' в.д.	0.538'	2.152	0.5	0.006

В эксперименте использовались две измерительных системы: стационарная, расположенная в г. Пущино (54°50.037' с.ш., 37°37.589' в.д.) и мобильная. Было выполнено четыре серии синхронных измерений. GPS — координаты мобильной измерительной системы для каждой серии измерений приведены во втором столбце таблицы 2. Долготная разность угловых координат мест проведения измерений, α , дана в третьем столбце таблицы. Разница долготного времени Δt и долготная разность координат мест измерений Δl даны, соответственно в четвертом и пятом столбцах таблицы. В последнем столбце приведена величина расщепления пика местного времени $\Delta \tau$.

Методика обработки экспериментальных данных была той же, что и в эксперименте Пушино-Большевик. В результате было обнаружено, что в пределах точности эксперимента была воспроизведена картина эффекта местного времени аналогичная описанной выше.

4 Обсуждение

Эффект местного времени, как отмечено в [1], связан с вращательным движением Земли. Самое простое объяснение этого феномена могло бы быть следующим. Через время Δt равное разности долготных времен в местах проведения измерений, измерительная №2 попадает в ту же точку пространства, где до этого была система №1, что и обуславливает подобие формы наблюдаемых гистограмм. Однако, кроме вращательного Земле присуще еще и поступательное, орбитальное движение, скорость которого значительно превышает скорость вращательного движения. Поэтому утверждение о том, что измерительная система №2 попадет в ту же точку пространства, становится неверным. Здесь можно говорить только о направлениях. Действительно, если мы проведем две плоскости, проходящие через ось вращения Земли и точки проведения измерений, то через время Δt плоскость №2 будет параллельна плоскости №1. Отсюда можно сделать вывод о том, что подобие формы гистограмм каким-то образом связано с направлением в пространстве.

Расщепление суточного периода повторяемости формы гистограмм на солнечный и звездный говорит о том, что в пространстве существуют два выделенных направления: на Солнце и на "сферу неподвижных звезд". Действительно, через время равное 1436 мин Земля совершает один полный оборот вокруг своей оси и плоскость измерительной системы становится параллельной направлению, которое она имела одни звездные сутки назад. А еще через 4 мин в эту плоскость попадает Солнце, что совпадает с солнечными сутками равными 1440 мин.

Предположим, что обнаруженное нами расщепление (рис. 3) имеет ту же природу, что и расщепление суточного периода на солнечный и звездный. Тогда из разности между солнечным и звездным периодами ΔT равной $\Delta T = 4$ мин вычисляем коэффициент пропорциональности k :

$$(1) \quad k = \frac{4 \text{ мин}}{24 \text{ ч}} = \frac{240 \text{ сек}}{86400 \text{ сек}} \approx 2.78 \cdot 10^{-3}$$

Разность долготного времени Пушино-Большевик t равна $t \approx 62.7$ сек. Отсюда, разность звездного и солнечного периодов, соответствующая данному Δt :

$$(2) \quad \Delta t = kt = 62.7 \times 2.78 \cdot 10^{-3} \approx 0.17 \text{ сек.}$$

Как показано на рис. 3, разность между пиками в распределении интервалов равна 0.18 сек, что с учетом точности определения пиков (0.02 сек) совпадает с расчетной величиной. На этом основании мы можем говорить о том, что обнаруженное нами расщепление пика местного времени обусловлено теми же причинами, какие вызывают появление солнечного и звездного периодов. То же подтверждается и данными, приведенными в таблице 2.

Говоря о выделенных направлениях в пространстве, неявно предполагается, что измерительная система является "направленной" и в силу этого может чувствовать, разрешать эти направления. Подобные представления, вполне приемлемые для случая, когда мы говорим о расщеплении суточного периода, становятся проблематичными, в случае расщепления, обнаруженного нами в эффекте местного времени.

Здесь угол, который должна разрешать измерительная система, уже настолько мал, что говорить о какой-либо присущей ей диаграмме направленности не приходится. В этом случае приходится признать, что мы имеем дело с динамически меняющейся картиной флуктуаций пространства-времени в околосемном пространстве, каким-то образом тесно связанной с выделенными направлениями, обсуждавшимися выше. Другими словами, мы можем говорить о ярко выраженной анизотропии околосемного пространства-времени.

Результаты, полученные в настоящей работе, обосновывают возможность исследования эффекта макроскопических флуктуаций на сравнительно небольших пространственных масштабах. Дальнейшее уменьшение этого масштаба является нашей ближайшей задачей. В то же время, субпики, полученные в результате расщепления пика местного времени, также состоят из одной-двух гистограмм, т. е. являются бесструктурными. Это обстоятельство также ставит в качестве одной из будущих задач исследование структуры субпиков пика местного времени.

Список литературы

1. Шноль С.Э., Коломбет В.А., Пожарский Э.В., Зенченко Т.А., Зверева И.М., Конрадов А.А. О реализации дискретных состояний в ходе флуктуаций в макроскопических процессах // Успехи Физич. Наук, 1998, т. 168, № 10 с. 1129–1140.
2. С.Э. Шноль, Т.А. Зенченко, К.И. Зенченко, Э.В. Пожарский, В.А. Коломбет, А.А. Конрадов. Закономерное изменение тонкой структуры статистических распределений как следствие космофизических причин // УФН 2000, 170 (2), с. 214–218.
3. С.Э. Шноль. Закономерные изменения тонкой структуры статистических распределений в случайных процессах, как следствие арифметических и космофизических причин. Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы" выпуск 3, М.: Книжный Дом "Университет", 2004, с. 121–154.
4. В.А. Панчелюга, В.А. Коломбет, А.В. Каминский, М.С. Панчелюга, С.Э. Шноль Эффект местного времени в шумовых процессах. // Вестник Калужского университета, 2006, в печати.
5. С.Э. Шноль. Макроскопические флуктуации как следствие арифметических и космофизических причин (Факторы, определяющие тонкую структуру гистограмм, возможно, находятся за пределами Солнечной системы) // Биофизика 2001, т. 46 №5 с. 775–782.
6. S. E. Shnoll, K. I. Zenchenko, and N. V. Udaltsova. Cosmophysical Effects in the Structure of Daily and Yearly Periods of Changes in the Shape of Histograms Constructed from the Measurements of ^{239}Pu alpha-Activity // Biophysics, 2004 Vol. 49, Suppl. 1, p. 155.
7. S. E. Shnoll, K. I. Zenchenko, N. V. Udaltsova, Cosmo-physical effects in structure of the daily and yearly periods of change in the shape of the histograms constructed by results of measurements of alpha-activity Pu-239, 2005 <http://arxiv.org/abs/physics/0504092>.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ФИНСЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия

gri9z@mail.ru

Предлагается строить лагранжиан поля (полей), исходя только из метрической функции финслерова пространства, а именно как единица, деленная на объем, который зачерчивает единичный вектор, пробегающий все точки индикатрисы в касательном пространстве, если считать, что касательное пространство является евклидовым. Для пространства, конформно связанного с пространством Минковского, в предположении экспоненциальной зависимости от времени и сферически симметричной зависимости от координат получено космологическое уравнение, из которого при расстояниях от начала координат много меньших размеров Вселенной следует выполнение закона Хаббла. Записано космологическое уравнение для поля, описывающее Вселенную с геометрией, конформно связанной с геометрией поличисел H_4 , которая обладает метрикой Бервальда-Моора.

Введение

Наиболее удобный способ получения уравнений поля как в классической теории [1], так и в теории квантованных полей [2] связан с понятиями лагранжиана, действия и принципа стационарного (или наименьшего) действия. При этом однозначно устанавливается связь [3] между непрерывными преобразованиями, относительно которых инвариантно действие, и физическими законами сохранения, которые могут быть проверены экспериментально.

Если x^0, x^1, x^2, x^3 – координаты, $f(x) \equiv f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ – скалярное поле в пространстве Минковского, а

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L} \left(f(x); \frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right), \quad (1)$$

– лагранжиан, то интеграл от лагранжиана по некоторому четырехмерному объему V пространства-времени,

$$I[f] = \int_V \mathcal{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2)$$

принято называть действием. Считая, что вариации функции поля δf равны нулю на границе объема интегрирования, и требуя стационарности действия, то есть

$$\delta I[f] = 0, \quad (3)$$

с помощью известной математической процедуры получим уравнение Лагранжа-Эйлера, которое и есть уравнение поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0. \quad (4)$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или строят, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения

в частных производных второго порядка. Построение качественно новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы является, в известном смысле, искусством.

Функционалу (2) можно придать чисто геометрический смысл и считать его не интегралом в пространстве Минковского от лагранжиана $\mathfrak{L}$, а объемом в некотором более сложном пространстве, в котором элемент объема имеет вид:

$$dV = \mathfrak{L} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (5)$$

Рассмотрим финслерово пространство $x^1, x^2, \dots, x^n$ [4] с метрической функцией

$$L(dx; x) \equiv L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (6)$$

В таком пространстве элемент длины ds по определению есть

$$ds = L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (7)$$

Более наглядно метрические свойства финслерова пространства можно описать с помощью понятия индикатрисы, которая определяется в каждой точке $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ основного пространства в соответствующем касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ как геометрическое место концов единичных радиус-векторов $\xi_{(1)}$. Такая гиперповерхность описывается уравнением

$$L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n) = 1. \quad (8)$$

Задание системы индикатрис в каждой точке основного пространства, или, что то же самое, задание множеств единичных векторов, полностью определяет финслерову геометрию. Для того, чтобы вычислить длину вектора $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$, надо найти сонаправленный вектору dx единичный вектор $\xi_{(1)}$, тогда числовой коэффициент ds в формуле

$$dx^i = ds \cdot \xi_{(1)}^i \quad (9)$$

и есть длина вектора dx . Из этой формулы следует, что элемент длины

$$ds = \frac{|dx|_{\text{ев}}}{|\xi_{(1)}|_{\text{ев}}}, \quad (10)$$

где $|dx|_{\text{ев}}$, $|\xi_{(1)}|_{\text{ев}}$ – длины векторов $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$, вычисляемые так, как если бы пространства $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ и $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ были евклидовы, а системы координат в них – декартовы прямоугольные.

Если при выполнении последних предположений можно вычислить объем индикатрисы, то есть n -мерный объем, который зачерчивает единичный вектор $\xi_{(1)}$ в касательном пространстве $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$, пробегая всю индикатрису, то в финслеровом пространстве можно (аналогично (10)) определить элемент объема dV по формуле

$$dV = \text{const} \cdot \frac{dx^1 dx^2 \dots dx^n}{(V_{\text{ind}})_{\text{ев}}}, \quad (11)$$

где $(V_{\text{ind}})_{\text{ев}}$ – объем индикатрисы, вычисленный в предположении, что касательное пространство евклидово, а координаты декартовы прямоугольные. Совершенно очевидно, что таким образом определенный элемент объема инвариантен относительно преобразования координат.

Рассмотрим n -мерное риманово пространство, метрическая функция в этом случае имеет вид

$$L(dx; x) = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}, \quad (12)$$

а уравнение индикатрисы соответственно –

$$g_{ij} \xi^i \xi^j = 1. \quad (13)$$

Это уравнение определяет гиперповерхность второго порядка, а именно, эллипсоид. Если считать пространство $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ евклидовым, то, как известно, объем такого эллипсоида есть

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{\det(g_{ij})}}. \quad (14)$$

Подставляя это выражение в формулу (11), получим элемент объема в произвольном римановом пространстве

$$dV = const \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (15)$$

что совпадает с обычным определением инвариантного элемента объема в римановом пространстве.

Для псевдоримановых пространств без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \quad \Rightarrow \quad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (16)$$

но можно провести цепочку рассуждений, которые позволяют и для псевдоримановых пространств предложить инвариантный элемент объема в виде формулы, аналогичной формуле (15). Точно такие же рассуждения приходится приводить и для получения инвариантного элемента объема в финслеровых пространствах, в которых имеет место проблема (16). Следует исходить из некоторого плоского пространства, близкого к пространству, элемент объема которого мы хотим определить.

Проведем эти рассуждения для конкретного примера: псевдориманового пространства с сигнатурой $(+, -, -, -)$. В этом случае рассмотрим вначале пространство Минковского x^0, x^1, x^2, x^3 , в котором метрическая функция имеет вид

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \equiv \sqrt{g_{ij}^o dx^i dx^j}, \quad (17)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 1 \quad (18)$$

является уравнением второго порядка и определяет гиперповерхность, которая является двуполостным гиперboloидом, поэтому проблема определения объема индикатрисы имеет место. Так как и метрическая функция, и уравнение индикатрисы не зависят от точки пространства, то каким бы образом мы ни регуляризовали соответствующий интеграл, мы получим действительное число, одно и то же во всех точках пространства. Обозначим это число $(V_{ind})_{ev}$. Для того, чтобы в пространстве Минковского получить инвариантный элемент объема по формуле (11) величину $(V_{ind})_{ev}$ следует записать в виде

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{-\det(g_{ij}^o)}}. \quad (19)$$

Перейдем от координат x^0, x^1, x^2, x^3 к некоторым криволинейным координатам $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$, тогда $\overset{o}{g}_{ij}$ перейдет в $g(x')_{i'j'}$, а значит элемент объема в пространстве Минковского в криволинейных координатах $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ будет определяться формулой

$$dV = \text{const} \cdot \sqrt{-\det(g(x')_{i'j'})} \, dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}, \quad (20)$$

но все же пока мы остались в том же самом пространстве Минковского.

Рассмотрим псевдориманово пространство, конформно связанное [4] с пространством Минковского,

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{\overset{o}{g}_{ij} dx^i dx^j}, \quad (21)$$

где $\kappa(x) > 0$, которое никаким преобразованием координат не может быть переведено в пространство Минковского. Уравнение индикатрисы для такого псевдориманово пространства можно записать следующим образом:

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = \frac{1}{\kappa^2(x)}. \quad (22)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (18), видим, что гиперповерхность, определяемая уравнением (22), получается из гиперповерхности, определяемой (18), общим масштабным преобразованием с коэффициентом $\frac{1}{\kappa(x)}$, поэтому если индикатрисе (18) мы приписывали объем (19), то индикатрисе (22) следует приписать объем

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{\text{const}'}{\kappa^4(x) \sqrt{-\det(\overset{o}{g}_{ij})}} = \frac{\text{const}'}{\sqrt{-\det(g(x)_{ij})}}, \quad (23)$$

где

$$g(x)_{ij} \equiv \kappa^2(x) \overset{o}{g}_{ij}. \quad (24)$$

Из выше проведенных рассуждений следует, что псевдориманову пространству с метрическим тензором $g(x)_{ij}$ и сигнатурой $(+, -, -, -)$ можно приписать инвариантный элемент объема вида

$$dV = \text{const} \cdot \sqrt{-\det(g(x)_{ij})} \, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (25)$$

что и принято в ОТО [1].

К проблеме (16) в псевдоримановых пространствах можно подойти более строго (в данной работе мы этого делать не будем), но при этом приходится переходить к пространствам более общим, чем псевдоримановы пространства. Поясним это на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского с метрической функцией (17) взять финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \quad (26)$$

и условием $dx^0 \geq 0$, где $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ — конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞ , когда параметр q_0 стремится к 0.

Итак, будем считать, что в любом финслеровом пространстве, в котором имеет место проблема (16), она может быть разрешена тем или иным способом. Тогда можно

утверждать, что из самой геометрии финслерова пространства, если в метрической функции содержатся некоторые поля, автоматически получается лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}}, \quad (27)$$

из которого затем получаются уравнения для полей.

Замечание. Ниже постоянные, которые фигурируют в формулах (11), (14),..., (27), мы будем опускать, так как они не входят в полевые уравнения.

1 Пространства, конформно связанные с евклидовыми пространствами

Пространство, конформно связанное с n -мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}, \quad (28)$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \kappa^n(x), \quad (29)$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x). \quad (30)$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля. Как это сделать, показано в работах [5], [6].

Обобщенные импульсы в пространстве (28) определяются формулой

$$p_i = \kappa(x) \frac{dx^i}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}}, \quad (31)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 - \kappa^2(x) = 0. \quad (32)$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве $x^1, x^2, \dots, x^n$ определяет нормальную конгруенцию геодезических и которую в классической механике принято называть действием как функцией координат, а в работе [5] функцию $S(x)$ предложено называть Мировой функцией, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 = \kappa^2(x). \quad (33)$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}, \quad (34)$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \quad (35)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y) , уравнение (35)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0, \quad (36)$$

то есть функция $S(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной. Тогда

$$\kappa(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2} \quad (37)$$

есть коэффициент конформного преобразования элемента длины евклидового пространства

$$ds' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \kappa(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} \quad (38)$$

при конформном преобразовании

$$x' = u(x, y), \quad y' = \pm v(x, y), \quad (39)$$

когда функция S является одной из компонент аналитической функции $u + iv$ комплексной переменной $x + iy$.

Найдем решение уравнения (35) в предположении, что функция S зависит только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}. \quad (40)$$

Это удобнее сделать, записав элемент объема в сферических координатах и проинтегрировав по всем углам,

$$dV_r = r^{n-1} \left| \frac{dS}{dr} \right|^n dr \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}_r = r^{n-1} \left| \frac{dS}{dr} \right|^n. \quad (41)$$

Тогда уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[r^{n-1} \left| \frac{dS}{dr} \right|^{n-1} \right] = 0. \quad (42)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{dr} = \frac{C}{r}, \quad S = C \ln \frac{r}{r_0}, \quad (43)$$

$C \neq 0$, $r_0 > 0$ – действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left| \frac{dS}{dr} \right| = \frac{|C|}{r}. \quad (44)$$

Геодезические в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = \frac{dS}{dx^i} \cdot \lambda(x), \quad (45)$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i$ – производная x^i по параметру вдоль геодезической τ . Выберем $\lambda(x) = r$, тогда из (45) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i. \quad (46)$$

Пусть $j > 1$, тогда

$$\frac{dx^j}{dx^1} = \frac{x^j}{x^1} \quad \Rightarrow \quad x^j = C^j x^1, \quad (47)$$

то есть геодезические в таком пространстве – это прямые линии, проходящие через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, \dots, C^n)$.

2 Пространства, конформно связанные с псевдоевклидовыми пространствами с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$

Пространство, конформно связанное с n -мерным псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+, -, -, \dots, -)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{n-1})^2}, \quad (48)$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{(-1)^{n-1} \det(g_{ij})} = \kappa^n(x), \quad (49)$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x). \quad (50)$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля [5], [6].

Обобщенные импульсы в пространстве (48) определяются формулами

$$p_0 = \frac{\kappa(x) dx^0}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{n-1})^2}}, \quad p_\mu = -\frac{\kappa(x) dx^\mu}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{n-1})^2}}, \quad (51)$$

$\mu = 1, 2, \dots, (n-1)$, а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_0^2 - p_1^2 - \dots - p_{n-1}^2 - \kappa^2(x) = 0. \quad (52)$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = \kappa^2(x). \quad (53)$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}, \quad (54)$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}-1} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка и это уравнение выполняется, если функция S удовлетворяет уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = 0.$$

Для того, чтобы уравнение поля (55) являлось волновым уравнением, функция S одновременно должна быть решением еще одного уравнения:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \dots - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = \text{const}.$$

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x, y) , уравнение (55) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0, \quad (56)$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (55) – это волновое уравнение.

Найдем решение уравнения (55) в предположении, что функция S зависит только от интервала

$$s = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{n-1})^2}. \quad (57)$$

Запишем для этого элемент объема, выделив в качестве одной из переменных интервал s , при интегрировании по гиперболическим углам возникнут трудности, которые аналогичны проблеме (16) и которые аналогично решаются, тогда

$$dV_s = s^{n-1} \left| \frac{dS}{ds} \right|^n ds \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}_s = s^{n-1} \left| \frac{dS}{ds} \right|^n, \quad (58)$$

а уравнение поля приобретает вид:

$$\frac{d}{ds} \left[s^{n-1} \left| \frac{dS}{ds} \right|^{n-1} \right] = 0. \quad (59)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{ds} = \frac{C}{s}, \quad S = C \ln \frac{s}{s_0}, \quad (60)$$

$C \neq 0$, $s_0 > 0$ – действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left| \frac{dS}{ds} \right| = \frac{|C|}{s}. \quad (61)$$

Геодезические в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^0 = \frac{dS}{dx^0} \cdot \lambda(x), \quad \dot{x}^\mu = -\frac{dS}{dx^\mu} \cdot \lambda(x), \quad (62)$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i$ – производная x^i по параметру эволюции τ , $\mu = 1, 2, \dots, n-1$. Выберем $\lambda(x) = \frac{s^2}{|C|}$, тогда из (62) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i, \quad (63)$$

или

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0} \quad \Rightarrow \quad x^\mu = C^\mu x^0, \quad (64)$$

то есть геодезические (экстремали) в таком пространстве – это прямые линии, проходящие через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, \dots, C^n)$. Интервал при этом изменяется тоже линейно относительно координаты x^0 ,

$$s = \sqrt{1 - (C^1)^2 - \dots - (C^{n-1})^2} \cdot x^0, \quad x^0 > 0. \quad (65)$$

Так как пространство, конформно связанное с пространством Минковского, мы будем ниже использовать для построения космологического уравнения, выпишем ряд формул этого раздела для $n = 4$, используя в них метрический тензор пространства Минковского $\overset{o}{g}_{ij}$:

связь между функцией $S(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ –

$$\overset{o}{g}^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} = \kappa^2(x), \quad (66)$$

лагранжиан –

$$\mathfrak{L} = \left(\overset{o}{g}^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \right)^2, \quad (67)$$

уравнение поля –

$$\overset{o}{g}^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial S}{\partial x^l} \left(\overset{o}{g}^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \right) \right] = 0. \quad (68)$$

3 Модельное космологическое уравнение в пространстве, конформно связанном с пространством Минковского

Запишем уравнение (68) в предположении, что функция S имеет вид

$$S(x^0, r) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r), \quad (69)$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, а γ и S_0 постоянные. Более просто получить уравнение поля такого вида, если в элементе объема перейти от пространственных координат x^1, x^2, x^3 к сферической системе координат и проинтегрировать по сферическим углам, тогда, опять же опуская постоянную, получим выражение для лагранжиана

$$\mathfrak{L} = r^2 \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right]^2, \quad (70)$$

а уравнение поля запишется следующим образом:

$$r^2 \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (71)$$

Подставляя в это уравнение функцию $S(x^0, r)$ (69), получим

$$3\gamma^2 r^2 \psi \left[\gamma^2 \psi^2 - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] - \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\gamma^2 \psi^2 - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (72)$$

Введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r$, тогда данное уравнение переписывается следующим образом:

$$3\xi^2\psi \left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] - \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (73)$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, то будем ее искать в виде

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp \left(\int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi \right), \quad (74)$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S перемножается с постоянной S_0 , поэтому положим ее равной единице, $\psi_0 = 1$. Подставляя (74) в (73), имеем

$$\frac{d}{d\xi} [\xi^2 \varphi(1 - \varphi^2)] - 3\xi^2(1 - \varphi^2)^2 = 0, \quad (75)$$

или

$$\xi(1 - 3\varphi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} + 2\varphi(1 - \varphi^2) - 3\xi(1 - \varphi^2)^2 = 0. \quad (76)$$

Не удалось получить аналитическое решение этого уравнения.

В области $\xi \ll 1$ будем искать решение в виде степенного ряда

$$\varphi \simeq A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + O(\xi^4). \quad (77)$$

Подставим это разложение в уравнение (76), приведем подобные и получим

$$\varphi \simeq \xi - \frac{1}{5}\xi^3 + O(\xi^4). \quad (78)$$

Движение пробных тел (звезд) происходит по геодезическим (экстремалиям) пространства с элементом длины

$$ds = \kappa(x^0, r) \sqrt{(dx^0)^2 - (dr)^2} \quad (79)$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_0^2 - p_r^2 = \kappa^2(x^0, r). \quad (80)$$

Для поля S (69), (74) коэффициент расширения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa(x^0, r) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2} = \gamma \cdot \sqrt{1 - \varphi^2} \cdot S(x^0, r). \quad (81)$$

Из этой формулы следует, что $|\varphi| < 1$. Уравнения движения в данном случае принимают вид

$$\dot{x}^0 = \frac{\partial S}{\partial x^0} \lambda = -\gamma S \lambda, \quad \dot{r} = -\frac{\partial S}{\partial r} \lambda = -\gamma S \varphi(\gamma r) \lambda, \quad (82)$$

где точка означает полную производную по некоторому параметру эволюции τ , а произвольная функция $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\frac{dr}{dx^0} = \varphi(\gamma r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = c\varphi(\gamma r). \quad (83)$$

Так как $|\varphi| < 1$, то

$$\left| \frac{dr}{dx^0} \right| < 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| < c.$$

Посмотрим, как ведет себя скорость пробного тела в области $\xi \ll 1$, для этого подставим (78) в полученную формулу:

$$\frac{dr}{dt} = c\gamma \left(1 - \frac{1}{5}\gamma^2 r^2 \right) \cdot r. \quad (84)$$

Если обозначить постоянную Хаббла через H_0 , то полученная формула дает нам хорошее выполнение закона Хаббла при $\gamma r < \frac{1}{10}$, причем $H_0 = c\gamma$, и тенденцию того, как первоначально должна изменяться "постоянная Хаббла" $H(r)$ с увеличением расстояния от центра:

$$\frac{dr}{dt} = H(r) \cdot r, \quad H(r) = H_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{5} \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 \cdot r^2 \right]. \quad (85)$$

В области $\xi \ll 1$ она уменьшается с увеличением расстояния от начала координат.

Для того, чтобы сказать что-то о размерах Вселенной и зависимости $H(r)$ во всей области возможных значений переменной r , необходимо вначале исследовать поведение решения $\varphi(\xi)$ уравнения (76), которое (решение) при $\xi \rightarrow 0$ имеет вид (78). Ни аналитически, ни численно нам не удалось этого сделать, так как при приближении к значению $\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ поведение такого решения становится весьма сложным (неустойчивым). Если предположить, что решение уравнения (76) будет получено и исследовано, то общий вид величины $H(r)$ можно будет записать следующим образом:

$$H(r) = H_0 \cdot \left[\frac{\varphi\left(\frac{H_0}{c}r\right)}{\frac{H_0}{c}r} \right]. \quad (86)$$

Если рассмотреть траектории движения в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 с Мировой функцией S (69), они (траектории) будут определяться уравнениями

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} = \varphi(\gamma r) \frac{x^\mu}{r},$$

т. е. движение происходит по лучам, исходящим из начала координат, а значит пробные частицы движутся прямолинейно, но, конечно, движение является неравномерным.

Так как пространство с элементом длины (79) является псевдоримановым с метрическим тензором

$$g_{ij}(x^0, r) = \kappa^2(x^0, r) \cdot \overset{o}{g}_{ij}, \quad (87)$$

где $\overset{o}{g}_{ij}$ – метрический тензор пространства Минковского и

$$\kappa(x^0, r) = \gamma S \sqrt{1 - \varphi^2}, \quad (88)$$

то для него можно найти тензор кривизны и его свертки, а также непосредственно из уравнений Эйнштейна можно получить тензор энергии-импульса материи T_{km} , который фигурирует в уравнениях Эйнштейна и который соответствует пространству с метрическим тензором (87). Заметим, что уравнения гравитационного поля, конечно, при

таким тензоре энергии-импульса материи выполняются автоматически, но с тензором T_{km} нельзя, вообще говоря, связывать законы сохранения энергии и импульса.

Введем удобное обозначение

$$a = \ln(\kappa^2 / \text{const}) . \quad (89)$$

Тогда, используя известные классические формулы, получим выражения:

для объекта связности –

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial x^l} \delta_k^i + \frac{\partial a}{\partial x^k} \delta_l^i - \overset{o}{g}^{\text{is}} \frac{\partial a}{\partial x^s} \overset{o}{g}_{kl} \right) , \quad (90)$$

тензора кривизны –

$$\begin{aligned} R_{klm}^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^k} \delta_m^i - \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} \delta_l^i - \overset{o}{g}^{\text{is}} \frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^s} \overset{o}{g}_{km} + \overset{o}{g}^{\text{is}} \frac{\partial^2 a}{\partial x^m \partial x^s} \overset{o}{g}_{kl} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial a}{\partial x^m} \frac{\partial a}{\partial x^k} \delta_l^i - \frac{\partial a}{\partial x^l} \frac{\partial a}{\partial x^k} \delta_m^i - \overset{o}{g}^{\text{ns}} \frac{\partial a}{\partial x^n} \frac{\partial a}{\partial x^s} \delta_l^i \overset{o}{g}_{km} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial a}{\partial x^l} \overset{o}{g}_{km} \overset{o}{g}^{\text{is}} \frac{\partial a}{\partial x^s} + \overset{o}{g}^{\text{ns}} \frac{\partial a}{\partial x^n} \frac{\partial a}{\partial x^s} \delta_m^i \overset{o}{g}_{kl} - \frac{\partial a}{\partial x^m} \overset{o}{g}_{kl} \overset{o}{g}^{\text{is}} \frac{\partial a}{\partial x^s} \right) , \end{aligned} \quad (91)$$

тензора Риччи –

$$R_{km} \equiv R_{klm}^l = \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} - \overset{o}{g}^{\text{ns}} \frac{\partial^2 a}{\partial x^n \partial x^s} \overset{o}{g}_{km} + \frac{\partial a}{\partial x^k} \frac{\partial a}{\partial x^m} - \overset{o}{g}^{\text{ns}} \frac{\partial a}{\partial x^n} \frac{\partial a}{\partial x^s} \overset{o}{g}_{km} \right) , \quad (92)$$

скалярной кривизны пространства –

$$R \equiv g^{km} R_{km} = \frac{1}{\kappa^2} \overset{o}{g}^{km} R_{km} = -\frac{3}{\kappa^2} \left(2 \overset{o}{g}^{km} \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} + \overset{o}{g}^{km} \frac{\partial a}{\partial x^k} \frac{\partial a}{\partial x^m} \right) , \quad (93)$$

тензора энергии-импульса материи –

$$T_{km} = \frac{c^4}{8\pi k} \left(R_{km} - \frac{1}{2} \kappa^2 \overset{o}{g}_{km} R \right) , \quad (94)$$

где k – гравитационная постоянная, тогда

$$T \equiv g^{km} T_{km} = \frac{1}{\kappa^2} \overset{o}{g}^{km} T_{km} = -\frac{c^4}{8\pi k} R . \quad (95)$$

Но так как мы "независимы" от уравнений гравитационного поля Эйнштейна, то мы можем вычислить полный тензор энергии-импульса $\hat{T}_{km}$. Для лагранжиана поля $\mathfrak{L}$ (67) получим

$$\hat{T}_m^k = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^m} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \frac{\partial S}{\partial x^k}} - \delta_m^k \mathfrak{L} = 4 \overset{o}{g}^{ks} \frac{\partial S}{\partial x^s} \frac{\partial S}{\partial x^m} \left(\overset{o}{g}^{rs} \frac{\partial S}{\partial x^r} \frac{\partial S}{\partial x^s} \right) - \delta_m^k \left(\overset{o}{g}^{rs} \frac{\partial S}{\partial x^r} \frac{\partial S}{\partial x^s} \right)^2 , \quad (96)$$

свернув по имеющимся двум индексам, получим

$$\hat{T}_k^k \equiv 0 . \quad (97)$$

Итак, тензоры T_{km} и $\hat{T}_{km}$ качественно различаются.

4 Пространство, конформно связанное с четырехмерным пространством Бервальда-Моора

Элемент длины в таком пространстве в специальном изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}. \quad (98)$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4} \kappa(\xi) \frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}. \quad (99)$$

Если $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$ – координаты касательного центроаффинного пространства в точке $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ основного пространства, то уравнение индикатрисы запишется

$$\eta^1 \eta^2 \eta^3 \eta^4 = \frac{1}{\kappa^4(\xi)}, \quad (100)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}. \quad (101)$$

Тогда функция S , определяющая нормальную конгруэнцию геодезических, удовлетворяет следующему нелинейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}. \quad (102)$$

Из формулы (100) следует, что

$$(V_{ind})_{ev} = const \cdot \frac{1}{\kappa^4}, \quad (103)$$

а значит, лагранжиан скалярного поля S запишется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4}. \quad (104)$$

Соответственно уравнение поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^4} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \right) = 0. \quad (105)$$

Любая функция S , зависящая не от всех координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ удовлетворяет этому уравнению.

Пусть поле S зависит только от одной величины

$$s = \sqrt[4]{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}. \quad (106)$$

Подставляя $S(s)$ в уравнение поля (105) и используя формулу

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^i} = \frac{1}{4} \frac{s}{\xi^i}. \quad (107)$$

получим

$$\frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) = 0. \quad (108)$$

Это же уравнение можно получить более просто, если записать элемент объема

$$dV = \mathfrak{L} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \quad (109)$$

выделив переменную s и три угловые переменные, а затем "проинтегрировать" по углам

$$dV_s = s^3 \left(\frac{dS}{ds} \right)^4 ds. \quad (110)$$

Интегрируя уравнение (108), получим

$$S(s) = S_0 \ln \frac{s}{s_0} \quad (111)$$

(S_0, s_0 – постоянные интегрирования), а также выражение для коэффициента растяжения-сжатия κ ,

$$\kappa = \frac{|A|}{s}. \quad (112)$$

Интересно сравнить последние две формулы с формулами (43), (44) и (60), (61).

Найдем траектории движения пробных частиц в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора, если функция S , определяющая конгруенцию геодезических, имеет вид (111), то есть коэффициент растяжения-сжатия определяется формулой (112). Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\dot{\xi}^i = \frac{\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4}}{\frac{\partial S}{\partial \xi^i}} \lambda(\xi), \quad (113)$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$ – некоторая скалярная функция. С учетом формулы (107) и при соответствующем выборе $\lambda(\xi)$, уравнения движения принимают более простой вид

$$\dot{\xi}^i = \xi^i. \quad (114)$$

Введем переменную

$$x^0 = \xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4, \quad (115)$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \quad \Rightarrow \quad \xi^i = \xi_0^i \cdot x^0, \quad (116)$$

где ξ_0^i – постоянные. Таким образом, все траектории движения – прямые линии, проходящие через начало координат, причем движение пробных тел является равномерным и прямолинейным относительно временной переменной x^0 .

Заключение

Предложенный новый подход однозначного построения лагранжиана по метрической функции финслерова пространства требует представления полей, которые входят в лагранжиан без своих частных производных по координатам, через другие поля так, чтобы частные производные по координатам от новых полей обязательно входили в лагранжиан, иначе не получить полевые уравнения как дифференциальные

уравнения в частных производных. Таким образом, искусство построения лагранжианов заменяется искусством представления физических полей через некоторые другие поля.

Для n -мерных римановых или псевдоримановых пространств с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \sqrt{|\det(g_{ij}(x))|}.$$

Метрический тензор $g_{ij}(x)$ можно представить, например, следующим образом:

$$g_{ij}(x) = \sum_{a=1}^N \varepsilon_{(a)} \frac{\partial f_{(a)}}{\partial x^i} \frac{\partial f_{(a)}}{\partial x^j},$$

где $\varepsilon_{(a)} = \pm 1$ – независимые знаковые множители, $f_{(a)}(x)$ – скалярные функции, причем $N \geq n$. Если $N < n$, то $\det(g_{ij}(x)) = 0$.

Литература

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., "Наука", 1967.
- [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., "Наука", 1973.
- [3] Нетер Э., Инвариантные вариационные задачи: Вариационные принципы механики, сб. статей под ред. Полака Л. С., М., "ГИФМЛ", 1959, стр. 611–630.
- [4] Раппель П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
- [5] Гарасько Г. И., О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 3–18.
- [6] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г., Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 19–27.

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2006 г.

ОТ СТРУН И БРАН К ЭПИСТЕМОЛОГИИ И ИЗМЕРЕНИЯМ В КОСМОСЕ (PIRT-2005)

В. О. Гладышев

МГТУ им. Н. Э. Баумана

В МГТУ им. Н.Э. Баумана (факультет "Фундаментальные науки", кафедра "Физики") состоялась Вторая Международная научная конференция "Физические интерпретации теории относительности". Программа конференции включала более 100 докладов представителей ведущих научных школ из 25 стран, включая Великобританию, Грецию, Испанию, Нидерланды, Норвегию, Румынию, Турцию, США, Финляндию. Конференция проходила в 2005 году, который объявлен ЮНЕСКО годом физики, и была посвящена 175-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана и 100-летию первых основополагающих работ А. Эйнштейна. Конференция с таким названием проводится в Лондоне (Империял колледж) с 1988 года каждые два года. Первая московская конференция была проведена в 2003 году. Информацию о ней можно найти на сайте http://fn.bmstu.ru/phys/nov/konf/pirt/pirt_main.html.

На торжественном открытии конференции с приветствиями к участникам выступили руководитель НУК "Фундаментальные науки" Б.П. Назаренко, заведующий кафедрой физики А.Н. Морозов, научный сотрудник Лаборатории им. Оливера Лоджа Физического факультета Ливерпульского университета П. Роулэндс. В программе конференции 2005 года были отражены следующие основные направления:

- Космология, гравитация и структура пространства-времени.
- Время, системы отсчета и основания теории относительности.
- Природа и модели физического вакуума.
- Эпистемология, физические измерения и интерпретации формальных структур.
- Финслеровы обобщения теории относительности.
- Экспериментальные аспекты теории относительности.
- Исторические и философские аспекты теории относительности.

Заседания конференции проходили в конференц-зале МГТУ им. Н.Э. Баумана. Конференция позволила ее участникам познакомиться с научными традициями в старейшем Российском техническом университете, в котором работали такие выдающиеся ученые как Д.И. Менделеев, Н.Е. Жуковский, П.Л. Чебышев, С.А. Чаплыгин, А.С. Ершов, Д.К. Советкин, Ф.М. Дмитриев, А.В. Летников, А.П. Гавриленко и многие другие. После заседаний секций для участников конференции была организована экскурсия по центру Москвы.

* * *

Основная часть докладов традиционно была посвящена математическим основаниям теории относительности, многомерным обобщениям теории относительности, наблюдаемым следствиям теории гравитации и космологии, их физическим интерпретациям, истории создания теории относительности. Обзорный доклад по наблюдательной космологии "Загадки и проблемы стандартной космологической модели" был представлен В.Н. Лукашом (Астрокосмический Центр ФИАН). Недавние данные по анизотропии и поляризации реликтового излучения (WMAP) и крупномасштабной структуре Вселенной позволили независимо восстановить как космологические параметры современного Мира, так и начальные условия для развития ранней

Вселенной. С одной стороны, это достижение привело к прорыву в понимании физики очень ранней Вселенной и к созданию стандартной космологической модели. С другой стороны, успех стандартной модели, заострил фундаментальные проблемы физики высоких энергий, поскольку такие «краеугольные камни» космологической модели как темная материя, темная энергия, бариогенезис и инфляция современная физика описать не в состоянии. На повестке дня стоит расширение космологической модели и построение новой физики, основные контуры которой намечаются сегодня наблюдательной космологией.

Участниками конференции было отмечен значительный прогресс, связанный с развитием концепции мира на бране, согласно которой наш мир представляет собой выделенную 4-поверхность (брану) в пространстве большего числа измерений, причем наблюдаемые физические поля должны быть сосредоточены на бране. В программе конференции данной концепции был посвящен ряд докладов. Среди них можно отметить доклады Д. Синглтон (Калифорнийский государственный университет, Фресно, США), К. А. Бронникова (Российский Университет Дружбы Народов), Б. Э. Мейеровича (Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН). Представленные результаты имеют важное значение для отбора жизнеспособных моделей мира на бране с целью их дальнейшего изучения и применения в космологии и физике частиц.

Часть докладов традиционно посвящена аксиоматике теории пространства времени. В докладе Ю. С. Владимирова (Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова) были изложены основы бинарной геометрофизики, представляющей собой новый подход к построению объединенной теории пространства-времени и физических взаимодействий. Предложенная автором теория опирается на идеи квантовой теории, многомерных геометрических моделей физических взаимодействий. В этом подходе используется идея о макроскопической природе пространства-времени, согласно которой классические пространственно-временные представления справедливы лишь при описании достаточно сложных макросистем и теряют силу в микромире. В частности, гравитационные взаимодействия не являются первичными, а определяются другими взаимодействиями и возникают вместе с понятиями классического пространства-времени.

Привлек внимание дискуссионный доклад М. Е. Герценштейна (Институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцина МГУ им. М. В. Ломоносова), в котором автор доказывает, что корректный учет поляризации вакуума позволяет устранить появление бесконечных величин в электродинамике, другими словами, на малых расстояниях электростатический потенциал слабее, чем это следует из закона Кулона. Детальному описанию структуры электрического поля также посвящен доклад В. Б. Розанова (Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН) и Т. Ярман (Айсик университет, Стамбул, Турция). Развиваемый подход позволяет объяснить замедление распада мюонов.

Математической связи уравнений электродинамики с уравнениями общей теории относительности посвящен доклад П. де Хаас (Вельюс Колледж, Апелдорн, Нидерланды). В работе обсуждаются пределы, при которых ограничения Эйнштейна для энергетического тензора напряжений могут выходить за рамки применимости классической электродинамики. Физическое происхождение принципа общей ковариантности в теории относительности обсуждали со времени создания теории относительности. В программе конференции этому вопросу были посвящены доклады А. Чаморро (Университет Страны Басков, Испания) и А. Л. Холмецкого (Беларусский государственный университет, Минск, Белоруссия).

Наряду с многомерными обобщениями теории относительности, такими как многомерные теории Калуцы-Клейна, теория суперструн, концепция бран, теории суперсимметрий продолжают поиски новых метрических функций. В этом случае римановы представления заменяются обобщенными.

В докладе М. Пауна (Университет Трансильвании, Брасов, Румыния) рассмотрены уравнения Эйнштейна в обобщенном пространстве Лагранжа. Автор обнаружил, что исследуемое пространство может оказаться весьма удобным для построения объединенной релятивистской модели.

К числу обобщенных геометрий относится также финслерова геометрия. Философским и математическим основаниям финслеровых расширений теории относительности посвящен доклад Д. Г. Павлова (МГТУ им. Н. Э. Баумана). В докладе анализируется связь гиперкомплексных чисел с финслеровыми представлениями, которая обнаруживает новые классы симметрий. Обнаружение данных симметрий является стимулом для поиска новых свойств в законах сохранения физики.

В настоящее время, наряду с финслеровым, изучаются также и другие подходы к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Среди них наиболее популярным является струнно-мотивированный подход. Он основан на таком расширении Стандартной Модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий, при котором фундаментальные поля рассматриваются на фоне релятивистски неинвариантного (например векторного) конденсата. Другими словами, в рамках SME подхода нарушение лоренцевой симметрии достигается за счет нарушения релятивистской симметрии.

Доклад Г. Ю. Богословского (НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, МГУ им. М. В. Ломоносова Россия) посвящен разработке финслерова подхода к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Как показано автором, финслеров подход допускает нарушение лоренцевой симметрии без нарушения релятивистской симметрии.

Исследования, посвященные финслеровой геометрии, как правило, имеют академический характер. К числу таких докладов следует отнести доклады В. Балана (Политехнический университет, Бухарест, Румыния) и Р. Тавакола (Лондонский Университет, Лондон, Великобритания). В этих докладах сделаны обзоры финслеровых пространств, рассмотрены уравнения движущихся систем отсчета и соответствующих условий интегрируемости для 3-мерных финслеровых пространств, показано, что в рамках финслеровой геометрии возможно получение пространств с постоянной гауссовой кривизной, обсуждается нарушение лоренцевой симметрии как эффекта физики планковских масштабов.

В связи с этим, особый интерес представляют работы, которые открывают путь для обсуждения новых наблюдаемых следствий финслерового обобщения псевдоевклидовой геометрии теории относительности.

В докладе Р. Г. Зарипова (Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань) впервые изучается нестандартная синхронизация часов в инерциальной системе отсчета на основе определения физического временного интервала и физического пространственного расстояния, что приводит к анизотропии однонаправленных скоростей света. Данный метод позволяет использовать сигнальный метод синхронизации часов Пуанкаре в релятивистской физике при построении различных финслеровых геометрий пространства-времени.

К числу оригинальных идей в области изучения природы гравитации, следует отнести идею, предложенную в 1937 году Г. Гамовым и Е. Теллером, согласно которой силы гравитационного притяжения можно объяснить обменом нейтрино-антинейтрино парами частицами макроскопических тел. В докладе В. М. Корюки-

на (Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола) для объяснения природы гравитационных явлений используется нейтринный фон Вселенной. При этом эффект Казимира служит аналогом для расчета Ньютоновских сил притяжения между макроскопическими телами. Данная работа позволяет нестандартным образом взглянуть на проблему детектирования гравитационных волн. Существующие экспериментальные результаты в области регистрации гравитационного излучения, которое было предсказано А. Эйнштейном пока не дают однозначного ответа о существовании гравитационных волн. В связи с этим прогресс в развитии теории относительности часто связывают с экспериментами нового поколения, такими как регистрация гравитационных волн наземными или космическими гравитационными антеннами.

Современные методы регистрации гравитационных волн обсуждаются в докладах В. И. Пустовойта (Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва) и С. В. Сипарова (Университет гражданской авиации, С-Петербург). В докладе В. И. Пустовойта предложено использовать многослойные структуры в качестве зеркал резонатора Фабри-Перо для повышения эффективности преобразования гравитационных волн в регистрируемый сигнал. В докладе С. В. Сипарова предложен новый метод радионаблюдения за космическими мазарами, который позволит по вариациям в линиях поглощения зарегистрировать гравитационную волну от периодического космического излучателя.

Часть представленных работ относится к теоретическому анализу существования или свойств гипотетической темной материи. К числу таких докладов относятся доклады Т. Сантола (Технологический университет в Тампере, Финляндия) и А. Д. Долгова (Институт теоретической и экспериментальной физики РАН, Национальный институт ядерной физики, Феррара, Италия). В докладе А. Д. Долгова обсуждается проблема вакуума в космологии. Так как астрономические данные свидетельствуют о ненулевой антигравитирующей темной энергии, автором анализируются возможные пути объяснения отличия на 2 порядка между теорией и наблюдениями.

В докладе Т. Сантола приходит к заключению, что наблюдения подтверждают модель сферически закрытого динамического пространства без темной энергии. При таком подходе энергия покоя вещества возникает как энергетическая масса, которая появляется благодаря движению пространства в направлении 4-радиуса структуры и скорость света в пространстве становится фиксированной по отношению к скорости пространства в 4 измерениях.

Прямой проверкой гипотезы существования темной материи могла бы стать регистрация ее частиц. Доклад Г. Н. Измайлова (Московский авиационный институт) относится к экспериментальному направлению поиска гипотетических частиц темной материи – WIMPs. В работе впервые указано на возможность использования когерентных состояний для регистрации слабовзаимодействующих частиц.

В последние годы широко обсуждается вопрос о возможном космологическом ускорении расширения Вселенной. В докладе В. Я. Варгашкина (Орловский государственный технический университет, Орёл) выполнена оценка параметров ускоренного расширения Вселенной с учётом влияния фактора гравитационного самолинзирования на фотометрию квазаров.

Не вызывает сомнения, что классические работы в области астрономии и небесной механики должны рассматриваться с учетом эффектов теории относительности. В связи с этим особенно интересны работы, обнаруживающие новые практические аспекты в области спутниковых космических систем.

В докладе А. В. Родникова (МГТУ им. Н. Э. Баумана) выполнен анализ относительного движения тросовой системы, перемещающейся по геоцентрической орбите. В работе показывается, что если орбитальная система представляет собой не обычную связку двух тел, а так называемый "леер", то есть трос, оба конца которого закреплены на протяженном теле (орбитальной станции), то существует принципиальная возможность преобразования произвольного неограниченного относительно станции движения материальной точки в периодическое с помощью захватывающего устройства, перемещающегося по инерции вдоль леера.

Значение оптических методов исследований в области проверки современных представлений о свойствах пространственно-временного континуума и изучения наблюдаемой части Вселенной трудно переоценить. В связи с этим особое методическое значение имеет работа Ю. Я. Голубя (МГТУ им. Н. Э. Баумана), В. С. Горелика (Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН) посвященная расчету показателя преломления и эффективной массы фотона в глобулярном фотонном кристалле.

Авторами рассчитана зависимость групповой скорости от волнового вектора и показано, что эффективная масса фотонов может быть как положительной, так и отрицательной и имеет разрыв при смене знака.

Влияние дисперсии на результаты фундаментальных оптических экспериментов обсуждалось неоднократно. Однако, в оптике движущихся сред существуют также и другие эффекты, которые способны оказывать существенное влияние на результаты измерений. Так, например, в работе H. R. Bilger & W. K. Stowell был поставлен эксперимент, в котором свет распространялся во вращающемся оптическом диске в кольцевом интерферометре. Как и следовало ожидать авторы зарегистрировали эффект Физо в материале стекла, однако, несмотря на высокую точность измерений, в теоретической модели не учитывался эффект нарушения закона Снеллиуса на границе раздела сред на торцевой поверхности вращающегося диска, и, тем не менее, результаты эксперимента совпали с предсказаниями расчетов. Это вызывает удивление, так как нарушение закона преломления на тангенциальном скачке скорости является одним из фундаментальных следствий электродинамики.

Фундаментальный аспект этого вопроса состоит в том, что уравнения электродинамики движущихся сред проверены лишь в ряде частных случаев. Прикладным аспектом является ответ на вопрос, в какой степени показания того или иного интерферометра, движущегося по земной орбите, зависят от положения и ориентации.

В связи с этим интерес представляют модели экспериментов (и их последующая реализация), в которых свет распространяется в трехмерном поле скоростей. Возможность осуществления подобных экспериментов обсуждается в докладе В. О. Гладышева, Т. М. Гладышевой, В. Е. Зубарева (МГТУ им. Н. Э. Баумана). Данные работы ведутся на кафедре физики МГТУ им. Н. Э. Баумана при поддержке Совета по грантам Президента РФ.

* * *

Основной целью организаторов конференции является поиск новых и обсуждение классических наблюдаемых следствий теории относительности и гравитации, таких, в частности, как излучение и регистрация гравитационных волн, отклонение электромагнитного излучения вблизи массивных объектов и др., которые оказывают влияние на решение задач астронавигации, проявляются во влиянии на процессы распространения электромагнитного излучения в космологических масштабах, должны учитываться при точном пространственно-временном описании событий. В связи с этим, подводя итоги конференции, на которой участниками обсуждались предложения о проведении новых тестов теории относительности, включая космические, обсужда-

лись результаты астрономических наблюдений последних лет, а также результаты их статистической обработки, их достоверность, а также допустимые физические интерпретации новых теоретических предсказаний, можно сделать заключение о растущей тенденции к практическому использованию результатов теории относительности и электродинамики, а также их современных обобщений.

По итогам работы конференции изданы избранные труды, информация о трудах опубликована на сайте кафедры физики МГТУ им. Н. Э. Баумана.

О МИРОВОЙ ФУНКЦИИ И СВЯЗИ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЯМИ

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва

gri9z@mail.ru

В работе показано, что Мировая функция может рассматриваться как связующий элемент между качественно различными геометриями с одной и той же конгруенцией мировых линий (геодезических). Если пространство, где определена Мировая функция, является поличисловым, то гипотеза аналитичности векторного поля обобщенных скоростей мировых линий приводит к сильным ограничениям на вид Мировой функции. Основной результат: пространство Минковского и пространство поличисел H_4 соответствуют одному и тому же физическому Миру.

Введение

Идея о том, что всем происходящим в физическом Мире управляет всего одна скалярная функция возникла давно и вряд ли может быть приписана какому-то одному ученому или даже группе ученых. Именно такую функцию и предлагается называть Мировая функция. До сих пор нет единого определения, что же такое Мировая функция. Так, например, Герман Вейль [1] употребляет термин "Мировая функция" при изложении теории Ми (полевая теория), где предлагается в качестве Мировой функции выбирать лагранжиан поля, то есть плотность функции Лагранжа, однако в теории поля стал общепринятым термин "лагранжиан".

Применение аналитических функций комплексной переменной для решения различных задач гидродинамики, теории упругости и электростатики позволяет в качестве Мировой функции выбрать действительную часть комплексного потенциала. Именно желание обобщить такой подход на пространства большей размерности привело нас к написанию данной работы. Можно было бы вместо термина "Мировая функция" использовать термин "вещественная часть гиперкомплексного потенциала", но многие построения данной работы применимы к пространствам, которые не являются гиперкомплексными.

В данной работе не затрагиваются вопросы полевых уравнений и теории поля. Оставаясь в рамках классической механики и финслеровой геометрии, наблюдателю вполне достаточно знать, как движутся все материальные точки, то есть достаточно знать конгруенцию мировых линий пространства-времени, но, кроме этого, необходимы еще и некоторые энергетические (импульсные) характеристики в каждой точке пространства-времени. В финслеровой геометрии конгруенция является нормальной конгруенцией геодезических [2], если существует такая скалярная функция S , гиперповерхности уровня которой являются трансверсальными поверхностями к данной конгруенции геодезических. В классической механике такую функцию принято называть действием как функцией координат. В данной работе предлагается именно функцию S считать Мировой функцией, так как именно она является обобщением вещественной части комплексного потенциала в теории функций комплексной переменной, если финслерово пространство является к тому же и пространством ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел).

Пусть в координатном пространстве¹ $x^1, x^2, \dots, x^n$ в качестве Мировой функции выступает скалярная функция $S(x)$, которой в классической механике соответствует понятие *действие как функция координат* $x^1, x^2, \dots, x^n$, именно это ниже и будет приниматься в качестве основной гипотезы. Сама по себе скалярная функция S может определять компоненты обобщенного импульса (обобщенные импульсы), но не может определить поле скоростей, а значит, не может определить конгруенцию геодезических, с каждой из которых можно связать наблюдателя или материальную частицу. Для этого дополнительно еще необходима некая процедура $\hat{\varphi}$ перехода от ковариантных "векторов" к контравариантным. В любой финслеровой геометрии Φ_n такая процедура имеется. Таким образом, пара $\{S; \hat{\varphi}\}$, как и пара $\{S; \Phi_n\}$, определяет нам конгруенцию мировых линий, то есть эволюцию этого пространства, и некие энергетические характеристики

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}$$

– обобщенные импульсы.

Пусть x^0, x^1, x^2, x^3 – пространство Минковского с элементом длины

$$ds = mc\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} \equiv mc\sqrt{\overset{o}{g}_{ij} x^i x^j}, \quad (1)$$

где необязательный с геометрической точки зрения множитель mc позволяет легче проводить физическую интерпретацию геометрических объектов; m – масса покоя частицы, c – скорость света в вакууме. Тангенциальное уравнение индикатрисы в таком пространстве запишем в виде

$$(p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = (mc)^2. \quad (2)$$

Тогда действие $S(x^0, x^1, x^2, x^3)$ как функция координат в пространстве Минковского должно удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби:

$$\left(\frac{dS}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{dS}{dx^1}\right)^2 - \left(\frac{dS}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{dS}{dx^3}\right)^2 = (mc)^2. \quad (3)$$

Подставим в уравнение (3) произвольную функцию $\tilde{S}$, которая подчиняется единственному требованию

$$\left(\frac{d\tilde{S}}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^1}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^3}\right)^2 > 0. \quad (4)$$

В результате получим, что функция $\tilde{S}$ является решением уравнения Гамильтона-Якоби, которое соответствует финслеровой геометрии с элементом длины

$$d\tilde{s} = \kappa(x) \cdot mc\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} \quad (5)$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$(p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = \kappa(x)^2 \cdot (mc)^2, \quad (6)$$

где

$$\kappa(x) \equiv \frac{1}{mc} \sqrt{\left(\frac{d\tilde{S}}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^1}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^3}\right)^2}. \quad (7)$$

¹ Если одна из координат x^0 имеет характер времени, то будем использовать иную индексацию координат $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$

Напомним, что если элементы длины $ds, d\tilde{s}$ двух геометрий в одном и том же координатном пространстве $x^1, x^2, \dots, x^n$ связаны формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x)ds, \quad (8)$$

$\kappa(x) > 0$ – произвольная функция точки, то такие две геометрии называются *конформно связанными* [2]. Геометрия $d\tilde{s}$ отличается от геометрии ds тем, что в бесконечно малой окрестности каждой точки пространства $x^1, x^2, \dots, x^n$ произведено общее масштабное преобразование, причем коэффициент растяжения-сжатия $\kappa(x)$ зависит от точки пространства.

Таким образом, задание произвольной скалярной функции $\tilde{S}$ с условием (4) в плоском пространстве Минковского (1) соответствует знанию Мировой функции в пространстве (5), конформно связанным с пространством Минковского.

Напомним, что канонические уравнения геодезических в финслеровом пространстве $x^1, x^2, \dots, x^n$ с тангенциальным уравнением индикатрисы $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n; x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$, или $\Phi(p; x) = 0$ имеют вид:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p, x), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \lambda(p, x),$$

где $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, $\dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{d\tau}$ – производные по некоторому параметру τ (параметру эволюции) вдоль мировой линии, а $\lambda(p; x) > 0$ – некоторая произвольная функция $2n$ переменных.

Знание Мировой функции позволяет записать уравнения для мировых линий из конгруэнции, соответствующей данной Мировой функции, в пространстве (5) следующим образом:

$$\dot{x}^i = g^{ij} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \lambda(x), \quad (9)$$

$\lambda(x) > 0$ – некоторая произвольная функция.

1 Случай $n = 2$

Все выше изложенное справедливо (при некоторых очевидных изменениях формул) для евклидовой или псевдоевклидовой геометрии произвольной размерности n , но только при $n = 2$ евклидовому и псевдоевклидовому пространству можно сопоставить систему ассоциативно-коммутативных невырожденных гиперкомплексных чисел (поличисел), соответственно комплексных C_2 и гиперболических H_2 . Пространства поличисел размерности $n > 2$ являются метрическими финслеровыми пространствами с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 \dots i_n}^o dx^1 dx^2 \dots dx^n},$$

где $g_{i_1 i_2 \dots i_n}^o$ – метрический тензор, и, следовательно, не могут быть евклидовыми или псевдоевклидовыми.

В представленном подходе вид Мировой функции ничем не ограничен, кроме неравенства (4). Для конкретизации Мировой функции в поличисловых пространствах P_n может быть использовано условие аналитичности (условие, устанавливающее некую связь между Мировой функцией и аналитическими функциями поличисловой переменной P_n), которое в настоящей работе реализовано в виде гипотез I, II. Конечно, возможны и другие реализации.

Комплексная плоскость

Гипотеза IC_2 : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции комплексной переменной.

Тогда согласно данной гипотезе

$$\lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = u, \quad \lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = v, \quad (10)$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – некоторая аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Соотношения Коши-Римана дают следующие уравнения в частных производных для Мировой функции $\tilde{S}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}. \quad (11)$$

Если $\lambda(x, y) \equiv 1$, то уравнения (11) упрощаются:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (12)$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\tilde{S} = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + a_1x + a_2y + b, \quad (13)$$

где A, a_1, a_2, b – действительные числа. Отметим, что функции $\tilde{S}$ не является компонентой аналитической функции комплексной переменной, если $A \neq 0$.

Гипотеза II_{C_2} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции комплексной переменной, сопряженной к аналитической функции комплексной переменной.

Тогда согласно данной гипотезе

$$\lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = u, \quad \lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = -v, \quad (14)$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – некоторая аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Соотношения Коши-Римана дают следующие уравнения в частных производных для Мировой функции $\tilde{S}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}. \quad (15)$$

Если $\lambda(x, y) \equiv 1$, то уравнения (15) упрощаются и сводятся к одному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, при выполнении гипотезы II_{C_2} и при $\lambda(x, y) \equiv 1$ функция $\tilde{S}$ является компонентой аналитической функции комплексной переменной, а соответствующая геометрия, конформно связанная с евклидовой плоскостью, получается с помощью конформного преобразования евклидовой плоскости.

Гиперболическая плоскость

Метрический тензор для гиперболической плоскости имеет вид

$$\overset{o}{g}_{ij} = \text{diag}(1, -1), \quad (17)$$

а соотношения Коши-Римана для аналитических функций $F(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ переменной $H_2 \ni z = x + jy$, $j^2 = -1$ записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (18)$$

Гипотеза I_{H_2} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции переменной H_2 .

Согласно данной гипотезе и в соответствии с аналогом формулы (9) для $n = 2$, имеем

$$\lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = u, \quad \lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = -v, \quad (19)$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – некоторая аналитическая функция переменной $H_2 \ni z = x + jy$. Тогда соотношения Коши-Римана дают следующие уравнения в частных производных для Мировой функции $\tilde{S}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}. \quad (20)$$

Если $\lambda(x, y) \equiv 1$, то уравнения (20) упрощаются:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (21)$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\tilde{S} = \frac{A}{2}(x^2 - y^2) + a_1x + a_2y + b, \quad (22)$$

где A, a_1, a_2, b – действительные числа. Отметим, что функции $\tilde{S}$ не является компонентой аналитической функции переменной H_2 , если $A \neq 0$.

Гипотеза II_{H_2} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции переменной H_2 , сопряженной к аналитической функции переменной H_2 .

Согласно данной гипотезе

$$\lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = u, \quad \lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = v, \quad (23)$$

где $F(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ – некоторая аналитическая функция переменной $H_2 \ni z = x + jy$. Тогда соотношения Коши-Римана дают следующие уравнения в частных производных для Мировой функции $\tilde{S}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}. \quad (24)$$

Если $\lambda(x, y) \equiv 1$, то уравнения (24) упрощаются и сводится к одному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, при выполнении *гипотезы* II_{H_2} и при $\lambda(x, y) \equiv 1$ функция $\tilde{S}$ является компонентой аналитической функции переменной H_2 , и соответствующая геометрия, конформно связанная с геометрией гиперболической плоскости, может быть получена с помощью конформного преобразования гиперболической плоскости.

2 Поличисла P_n

Рассмотрим некоторую систему невырожденных n -чисел P_n , то есть n -мерных ассоциативно-коммутативных невырожденных гиперкомплексных чисел; соответствующее координатное пространство $x^1, x^2, \dots, x^n$ является финслеровым метрическим пространством с элементом длины вида

$$ds = mc \sqrt[n]{\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}}, \quad (26)$$

$\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства. Такого рода финслеровы пространства давно изучаются в математической литературе (см., например, [3] – [6]), но то, что все невырожденные поличисловые пространства относятся именно к такому типу финслеровых пространств было установлено совсем недавно, начиная с работ [7], [8] и в последующих работах тех же авторов.

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (26) вычисляются по формулам:

$$p_i = mc \frac{\overset{o}{g}_{ij_2 \dots j_n} dx^{j_2} \dots dx^{j_n}}{\left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \right)^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (27)$$

Финслерову геометрию с элементом длины (26) будем называть *разрешимой*, если тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде

$$\overset{o}{g}^{i_1 i_2 \dots i_n} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n} = \mu^n (mc)^n, \quad (28)$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная. Для римановой или псевдоримановой геометрии разрешимость означает неравенство нулю определителя матрицы метрического тензора, то есть выполнение свойства невырожденности. По-видимому, финслерова геометрия в пространстве невырожденных поличисел всегда разрешима, но это утверждение требует строгого доказательства.

Из формул (26) – (28) следует соотношение, которому должны удовлетворять тензоры $\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $\overset{o}{g}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ разрешимой финслеровой геометрии,

$$\begin{aligned} \overset{o}{g}^{j_1 j_2 \dots j_n} \times \overset{o}{g}_{j_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \overset{o}{g}_{j_2 k_2 \dots k_n} dx^{k_2} \dots dx^{k_n} \dots \overset{o}{g}_{j_n m_2 \dots m_n} dx^{m_2} \dots dx^{m_n} = \\ = \mu^n \left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Действие как функция координат в геометрии (26) удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби:

$$g^{j_1 j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} = \mu^n (mc)^n. \quad (30)$$

Рассмотрим произвольную Мировую функцию $\tilde{S}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ с единственным условием

$$g^{j_1 j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} > 0, \quad (31)$$

тогда функция $\tilde{S}(x)$ является действием для геометрии, конформно связанной с геометрией (26), с элементом длины

$$d\tilde{s} = \kappa(x) \cdot mc \sqrt{g^{i_1 i_2 \dots i_n} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n}}, \quad (32)$$

где $\kappa(x) > 0$ – коэффициент растяжения-сжатия, вообще говоря, разный в разных точках координатного пространства,

$$\kappa(x) = \frac{1}{\mu \cdot mc} \sqrt{g^{j_1 j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}}}, \quad (33)$$

и Мировая функция $\tilde{S}$ является решением уравнения Гамильтона-Якоби следующего вида:

$$g^{j_1 j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} = \kappa(x)^n \cdot \mu^n (mc)^n. \quad (34)$$

Поле скоростей, определяющих конгруэнцию мировых линий, будет выражаться через Мировую функцию $\tilde{S}$ по формуле

$$\dot{x}^i = g^{ij_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} \cdot \lambda(x)^{n-1}, \quad (35)$$

где $\lambda(x) > 0$ – произвольная скалярная функция.

Алгебра поличисел $P_n \ni X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$ полностью определяется законом умножения базисных элементов:

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k \quad (36)$$

– то есть числовым тензором p_{ij}^k . Напомним, что поличисла P_n называются невырожденными, если

$$\det(q_{ij}) \neq 0, \quad q_{ij} \equiv p_{im}^k p_{kj}^m. \quad (37)$$

В этом случае можно построить тензор q^{ij} . Если ϵ^i – коэффициенты разложения единицы $1 \in P_n$ в базисе e_i , то соотношения Коши-Римана для аналитической функции $F(X) = f(x)^i e_i$ переменной P_n можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} - p_{ij}^k \epsilon^m \frac{\partial f^j}{\partial x^m} = 0. \quad (38)$$

Гипотеза I_{P_n} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции переменной P_n .

Если $F(X) = f(x)^i e_i$ – аналитическая функция переменной P_n , то данная гипотеза приводит к соотношениям:

$$f^i(x^1, x^2, \dots, x^n) = \overset{o}{g}^{ij_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} \cdot \lambda(x)^{n-1}. \quad (39)$$

Подставляя таким образом выраженные через Мировую функцию компоненты аналитической функции в соотношения Коши-Римана, получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, которым должна удовлетворять Мировая функция при реализации гипотезы IP_n .

Гипотеза IP_2 : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции переменной P_n , сопряженной с помощью некоторой специальной унарной операции (симметрического сопряжения) к аналитической функции той же переменной.

Определим на множестве $P_n \ni X, Y$ унарную операцию $\bar{X} = Y$ следующим образом:

$$y^i = \overset{o}{g}^{ij_2 \dots j_n} q_{j_2 m_2} \dots q_{j_n m_n} x^{m_2} \dots x^{m_n}. \quad (40)$$

Для комплексных чисел и гиперболических чисел H_2 такая унарная операция является обычным сопряжением, а на множестве поличисел H_4 (и H_n) с точностью до числового множителя эта операция совпадает с операцией *нормального сопряжения* [9]. Унарная операция (40) может быть обобщена для $(n-1)$ аргумента, симметрическим образом, при этом мы получим симметрическую $(n-1)$ -нарную операцию на множестве P_n . Чтобы отличать такую унарную операцию и соответствующую ей $(n-1)$ -нарную операцию от других сопряжений в поличисловых алгебрах назовем такую операцию *симметрическим сопряжением*.

Сравнив формулы (35) и (40) и заменив x^i на f^i получаем, что реализация гипотезы IP_2 приводит к соотношениям

$$q_{ij} f^j = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} \lambda(x), \quad (41)$$

или

$$f^i = q^{ij} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \lambda(x), \quad (42)$$

то есть величины $q^{ij} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \lambda(x)$ являются компонентами аналитической функции переменной P_n .

Покажем, что одна и та же пара {Мировая функция; конгруенция мировых линий} может быть реализована в разных финслеровых геометриях.

Введем обозначение

$$g^{ij}(x) = \left[\frac{1}{\kappa(x) \cdot \mu \cdot cm} \right]^{n-2} \overset{o}{g}^{ijj_3 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_3}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}}. \quad (43)$$

Будем предполагать, что $\det(g^{ij}(x)) \neq 0$, тогда можно построить дважды ковариантный тензор $g_{ij}(x)$. Рассмотрим псевдориманову геометрию с элементом длины

$$ds' = \kappa(x) \cdot \mu \cdot cm \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}. \quad (44)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы для такой геометрии будет иметь вид

$$g^{ij} p_i p_j = \kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (cm)^2, \quad (45)$$

а уравнение Гамильтона-Якоби для действия $S'(x)$ соответственно

$$g^{ij} \frac{\partial S'}{\partial x^i} \frac{\partial S'}{\partial x^j} = \kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (cm)^2. \quad (46)$$

Подставим в это уравнение выражение (43), получим

$$\frac{\partial S'}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial S'}{\partial x^{j_2}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_3}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} = \kappa(x)^n \cdot \mu^n (mc)^n. \quad (47)$$

Таким образом, функция $S' = \tilde{S}$ является решением уравнения (46), то есть функция $\tilde{S}$ остается Мировой функцией и в геометрии (44).

Поле скоростей в геометрии (44) будет определяться формулой

$$\dot{x}^i = g^{ij} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \cdot \lambda'(x), \quad (48)$$

где $\lambda'(x) > 0$ – некоторая скалярная функция. Подставим в эту формулу выражение (43), положим

$$\lambda'(x) = \kappa(x)^{n-2} \cdot \mu^{n-2} \cdot (cm)^{n-2} \cdot \lambda(x)^{n-1} \quad (49)$$

и получим формулу

$$\dot{x}^i = g^{ij_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} \cdot \lambda(x)^{n-1}, \quad (50)$$

которая совпадает с формулой (35).

Итак, одна и та же пара {Мировая функция; конгруенция мировых линий} может быть реализована в качественно разных геометриях.

Получить из метрического тензора $g_{i_1 i_2 \dots i_m}(x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n})$ метрический тензор с меньшим числом индексов $r < m$ можно, свернув часть индексов с векторными или тензорными контравариантными полями (см., например, [3] – [6]). Выше проведенные рассуждения, показывают, что для поличисловых пространств P_n из всех таких методов выделяется следующий:

$$g_{i_1 i_2 \dots i_r}(x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n}) = a(x) \cdot g_{i_1 i_2 \dots i_m}(x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n}) f_{(1)}^{i_{r+1}} f_{(2)}^{i_{r+2}} \dots f_{(m-r)}^{i_m},$$

где $a(x)$ – некоторая скалярная функция, а $f_{(A)}^i$ – компоненты аналитических функций переменной P_n или компоненты функций, сопряженных неким образом к аналитическим функциям той же переменной.

3 Гиперкомплексные числа H_4

Напомним, что система гиперкомплексных чисел H_4 изоморфна алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4 . Соответствующее координатное пространство является метрическим финслеровым пространством с метрикой Бервальда-Моора. В пространстве H_4 существует специальный базис e_1, e_2, e_3, e_4 с законом умножения

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k, \quad p_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во все остальных случаях,} \end{cases} \quad (51)$$

компоненты тензоров q_{ij} (37), q^{ij} в таком базисе образуют единичную матрицу:

$$(q_{ij}) = (q^{ij}) = \text{diag}(1, 1, 1, 1). \quad (52)$$

Элемент длины в пространстве H_4 в специальном базисе (51) имеет вид

$$ds = mc \sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4} \equiv mc \sqrt[4]{g_{ijkl}^o dx^i dx^j dx^k dx^l}, \quad (53)$$

где

$$g_{ijkl}^o = \begin{cases} \frac{1}{24}, & \text{если индексы } i, j, k, l \text{ все разные,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (54)$$

Компоненты обобщенного импульса определяются формулой

$$p_i = \frac{mc}{4} \cdot \frac{\sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4}}{dx^i}, \quad (55)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \left(\frac{mc}{4} \right)^4, \quad (56)$$

или в ковариантной форме

$$g^{ijkl} p_i p_j p_k p_l = \left(\frac{mc}{4} \right)^4, \quad (57)$$

причем в данном специальном базисе

$$\left(g^{ijkl} \right) = \left(g_{ijkl}^o \right). \quad (58)$$

Действие как функция координат в пространстве H_4 удовлетворяет уравнению

$$g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \frac{\partial S}{\partial x^k} \frac{\partial S}{\partial x^l} = \left(\frac{mc}{4} \right)^4, \quad (59)$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial x^1} \frac{\partial S}{\partial x^2} \frac{\partial S}{\partial x^3} \frac{\partial S}{\partial x^4} = \left(\frac{mc}{4} \right)^4. \quad (60)$$

Подставим в уравнение (60) некоторую мировую функцию $\tilde{S}(x)$, удовлетворяющую единственному условию

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} > 0, \quad (61)$$

и получим

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} = \kappa(x)^4 \cdot \left(\frac{mc}{4} \right)^4, \quad (62)$$

то есть функция $\tilde{S}(x)$ является Мировой функцией в геометрии, конформно связанной с геометрией Бервальда-Моора (53), а именно в геометрии с элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot mc \sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4}, \quad (63)$$

где коэффициент растяжение-сжатия задается выражением

$$\kappa(x) = \frac{4}{mc} \sqrt[4]{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4}}. \quad (64)$$

В этой геометрии поле скоростей, определяющих конгруенцию мировых линий, имеет вид

$$\dot{x}^i = \frac{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4}}{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}} \cdot \lambda(x)^3, \quad (65)$$

где $\lambda(x) > 0$ – некоторая скалярная функция.

Гипотеза I_{H_4} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции переменной H_4 .

В рассматриваемом специальном базисе произвольная аналитическая функция переменной H_4 имеет вид

$$F(X) = f^1(x^1)e_1 + f^2(x^2)e_2 + f^3(x^3)e_3 + f^4(x^4)e_4, \quad (66)$$

где f^i – произвольные функции одной действительной переменной, поэтому гипотеза I_{H_4} приводит к требованию

$$f^i(x^{i-}) = \frac{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4}}{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}} \cdot \lambda(x)^3, \quad (67)$$

где индекс $i \equiv i_-$, но по нему не ведется суммирование. Перемножая соотношения (67) с разными индексами и сделав некоторые преобразования, получим в результате

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} = \frac{\sqrt[3]{f^1 f^2 f^3 f^4}}{\lambda^4} \quad (68)$$

и

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} = \frac{\sqrt[3]{f^1 f^2 f^3 f^4}}{\lambda f^i}. \quad (69)$$

Из условия перестановочности частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \quad (70)$$

имеем систему шести дифференциальных уравнений, которым должна подчиняться функция $\lambda(x)$. Выпишем одно из этих уравнений для $i = 1, j = 2$:

$$3 \left(f^1 \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} - f^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right) = \lambda(f^1 - f^2). \quad (71)$$

Если $\lambda = \text{const}$, то $\dot{f}^1 = \dot{f}^2 = \dot{f}^3 = \dot{f}^4 = \text{const}$, из чего следует, что $f^i(x^{i-})$ – линейные функции координат вида:

$$f^i = ax^i + b^i, \quad (72)$$

где a, b^i – постоянные.

Если $\lambda \neq \text{const}$, введем обозначения для неопределенных интегралов

$$I^i = \int \frac{dx^{i-}}{f^{i-}}. \quad (73)$$

Тогда решением системы, состоящей из уравнения (71) и аналогичных уравнений, будет функция

$$\lambda(x^1, x^2, x^3, x^4) = \sqrt[3]{f^1 f^2 f^3 f^4} \cdot \exp [W(I^1 + I^2 + I^3 + I^4)] + \lambda_0, \quad (74)$$

где W – произвольная функция одного действительного аргумента, λ_0 – постоянная. Сама Мировая функция $\tilde{S}$, как в случае $\lambda = \text{const}$, так и в случае $\lambda \neq \text{const}$, может быть найдена через криволинейный интеграл второго рода по произвольному пути в пространстве H_4 , соединяющему некоторую фиксированную точку с точкой $M(x^1, x^2, x^3, x^4)$.

Из формул (69), (72), (73) и (74) следует, что производные $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}$ не являются компонентами или линейными комбинациями компонент аналитической функции переменной H_4 , кроме случая, когда все эти производные равны между собой и равны постоянной P . То же самое можно сказать о самой функции $\tilde{S}$, если исключить линейную зависимость вида

$$\tilde{S} = P \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4) + \text{const}.$$

Каждой аналитической функции $F(X)$ переменной H_4 соответствует Мировая функция $\tilde{S}$, которая выражается через компоненты $F(X)$ в квадратурах, при этом соответствующее поле скоростей, определяющее мировые линии, является аналитической функцией $F(X)$ переменной H_4 .

Гипотеза II_{H_4} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции переменной H_4 , симметрически сопряженной к аналитической функции той же переменной.

В силу формул (52), (54), (58) симметрическое сопряжение (40) в пространстве H_4 совпадает с нормальным сопряжением [9], причем в рассматриваемом специальном базисе формула (40) принимает вид

$$y^i = \frac{x^1 x^2 x^3 x^4}{x^i}. \quad (75)$$

Учитывая эту формулу и формулу (65), как следствие гипотезы II_{H_4} получим

$$\frac{f^1 f^2 f^3 f^4}{f^i} = \frac{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4}}{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}} \cdot \lambda(x)^3, \quad (76)$$

или

$$f^i(x^{i-}) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} \cdot \lambda(x). \quad (77)$$

Если $\lambda = \text{const}$, то

$$\tilde{S} = \frac{1}{4} \left(\tilde{f}^1(x^{1-}) + \tilde{f}^2(x^{2-}) + \tilde{f}^3(x^{3-}) + \tilde{f}^4(x^{4-}) \right), \quad (78)$$

где $\tilde{f}^i$ – функции одного действительного аргумента, эти функции с точностью до числового множителя суть первообразные компонент $f^i(x^{i-})$ исходной аналитической функции $F(X)$. Из свойств поличисел H_4 следует, что $\tilde{S}$ (78), являясь скалярной функцией, формально совпадает с компонентой аналитической функции

$$\tilde{F}(X) = \tilde{f}^i(x^{i-})e_i \quad (79)$$

при единичном элементе в базисе $1, j, k, jk$; $j^2 = k^2 = (jk)^2 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, & j &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4, \\ k &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4, & jk &= e_1 - e_2 - e_3 + e_4. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Пусть $\lambda \neq const$, тогда из соотношения (77) получим систему шести уравнений для определения функции $\lambda(x)$:

$$f^i \frac{\partial \lambda}{\partial x^j} = f^j \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \quad (81)$$

– общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\lambda(x) = \Lambda \left(\tilde{f}^1(x^{1-}) + \tilde{f}^2(x^{2-}) + \tilde{f}^3(x^{3-}) + \tilde{f}^4(x^{4-}) \right), \quad (82)$$

где Λ – функция одного действительного переменного, а $\tilde{f}^i(x^{i-})$ являются первообразными компонент $f^i(x^{i-})$ исходной аналитической функции $F(X)$.

Мировая функция $\tilde{S}$ может быть найдена через криволинейный интеграл второго рода по произвольному пути в пространстве H_4 , соединяющему некоторую фиксированную точку с точкой $M(x^1, x^2, x^3, x^4)$.

В общем случае $\lambda \neq const$ производные $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}$ уже не являются компонентами или линейными комбинациями компонент аналитической функции переменной H_4 . То же самое можно сказать о самой функции $\tilde{S}$. Но каждой аналитической функции $F(X)$ соответствует Мировая функция $\tilde{S}$, которая выражается через компоненты $F(X)$ в квадратурах, при этом соответствующее поле скоростей, определяющее мировые линии, является симметрически сопряженным к аналитической функцией $F(X)$ переменной H_4 .

Предположим, что нам известна Мировая функция в пространстве (63), конформно связанным с пространством Бервальда-Моора. Рассмотрим тензор

$$g^{ij}(x) = \frac{1}{\kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (mc)^2} g^{ijk m} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^m}, \quad (83)$$

где согласно формуле (57) $\mu = 1/4$. Будем предполагать, что $\det(g^{ij}(x)) \neq 0$, тогда в том же самом координатном пространстве x^1, x^2, x^3, x^4 можно определить псевдориманову геометрию с элементом длины

$$ds' = \kappa(x) \cdot \mu \cdot mc \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \quad (84)$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$g^{ij} p'_i p'_j = \kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (mc)^2. \quad (85)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для действия S' имеет вид

$$g^{ij} \frac{\partial S'}{\partial x^i} \frac{\partial S'}{\partial x^j} = \kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (mc)^2, \quad (86)$$

а компоненты поля скоростей, определяющих конгруенцию мировых линий, запишутся следующим образом:

$$\dot{x}^i = g^{ij} \frac{\partial S'}{\partial x^j} \lambda'(x), \quad (87)$$

где $\lambda'(x)$ – некоторая скалярная функция. Подставляя в последние две формулы выражение для g^{ij} (83), получим, что решением уравнения (86) является Мировая функция $S' = \tilde{S}$, а конгруенции мировых линий в пространствах (63) и (84) совпадают.

Рассмотрим тензор

$$G^{ij}(x) = g^{ijkm} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^m}, \quad (88)$$

который с точностью до скалярного множителя совпадает с тензором g^{ij} (83), в матричном виде

$$(G^{ij}(x)) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & 0 & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & 0 & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Так как

$$\det(G^{ij}) = -\frac{3}{12^4} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} \right)^2 \neq 0, \quad (90)$$

в силу неравенства (61), то можно построить тензор G_{ij} , а значит и тензор g_{ij} .

Используемый в настоящем разделе базис e_1, e_2, e_3, e_4 не является привычным физическим базисом, поэтому перейдем к базису (80), но не в общем случае, а при задании простейшей Мировой функции

$$\tilde{S} = \frac{1}{4} (x^1 + x^2 + x^3 + x^4) + const, \quad (91)$$

которая в базисе (80) имеет вид

$$\tilde{S} = x^0 + const, \quad (92)$$

где x^0 – координата при единичном элементе в базисе (80). В этом случае матрица (G^{ij}) принимает вид

$$(G^{ij}(x)) = \frac{1}{12 \cdot 4^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Для того, чтобы получить матрицу (G^{ij}) тензора G^{ij} в новом базисе (80), то есть матрицу $(G^{i'j'})$, надо умножить матрицу (G^{ij}) (с учетом того, что матрица перехода симметрическая) слева и справа на матрицу обратную матрице перехода, в результате получим

$$(G^{i'j'}(x)) = \frac{1}{4^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Таким образом, Мировой функции (91) в пространстве H_4 соответствует псевдо-евклидова геометрия с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$.

Заключение

Из вышеизложенного следует, что связь между Мировой функцией $\tilde{S}$, заданной в некотором поличисловом пространстве P_n , и аналитическими функциями переменной P_n может быть постулирована по-разному.

Наиболее сильные ограничения на вид Мировой функции $\tilde{S}$ налагает гипотеза I: компоненты векторного поля, порождающие мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции переменной P_n .

Менее сильные ограничения на вид Мировой функции $\tilde{S}$ налагает гипотеза II: компоненты векторного поля, порождающего мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции переменной P_n , симметрически сопряженной к аналитической функции той же переменной.

На наш взгляд, гипотеза II более тесно связана с физикой, так как в этом случае Мировая функция более тесно связана с аналитическими функциями соответствующей поличисловой переменной – она может являться компонентой аналитической функции при единице, то есть вещественной частью аналитической функции переменной P_n , что соответствует обобщению понятия комплексного потенциала на евклидовой плоскости.

Описанию Мира с помощью Мировой функции требует некой процедуры "поднятия индексов" у ковариантных тензоров, и эта процедура может быть всегда реализована в рамках некоторой фиксированной геометрии, самодостаточной паре {Мировая функция; конгруенция мировых линий} могут соответствовать качественно разные геометрии, точнее – некоторый класс, взаимосвязанных между собой геометрий.

В настоящей работе показано, что финслеровому пространству H_4 , пространству с метрикой Бервальда-Моора соответствует пространство Минковского, то есть эти геометрии, в данном смысле, принадлежат одному и тому же классу.

Таким образом, рассматривая физический Мир как пару {конгруенция мировых линий; Мировая функция}, мы приходим к выводу, что геометрия не является фиксированным понятием. Можно переходить от одной геометрии к другой в зависимости от круга решаемых задач, сохраняя при этом не только конгруенцию мировых линий, но и Мировую функцию, то есть сохраняя Мир – оставаясь в одном и том же Мире.

Пространство Минковского и пространство поличисел H_4 соответствуют одному и тому же физическому Миру.

Литература

- [1] Г. Вейль: Пространство, время, материя, М., "Янус", 1996
- [2] П. К. Рашевский: Риманова геометрия и тензорный анализ, М. Наука, 1967
- [3] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric. Tensor, N. S., Vol. 32 (1978), 161
- [4] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric II. Berwald-Moor's metric., Tensor, N. S., Vol. 32 (1978), 275
- [5] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with a cubic metric, Tensor, N. S., Vol. 33 (1979), 153
- [6] H. Shimada: On Finsler spaces with the metric L of m -th root metric, Tensor, N. S., Vol. 33 (1979), 365–372
- [7] Д. П. Павлов: Обобщенные аксиомы скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5–19
- [8] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 75–88
- [9] Д. П. Павлов, Г. И. Гарасько: Нормальное сопряжение на множестве поличисел, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (2)** (2004), 6–14

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА ГУРВИЦА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КВАЗИУНИТАРНЫХ МАТРИЦ, СУММИРУЕМОСТЬ И ДРУГИЕ СВОЙСТВА КВАЗИУНИТАРНЫХ СТРУКТУР

Соловей Л. Г.

Проблема А. Гурвица поиска соотношений вида "произведение суммы квадратов на сумму квадратов есть сумма квадратов" обобщена на случай произведения квазиунитарных матриц n -ого порядка, (т.е. матриц, удовлетворяющих соотношению $AA^+ = a$, где a – число). (При A действительном матрицы A назовём квазиортогональными). Тем самым эта проблема имеет решение для любого n . (При этом, разумеется, слагаемые в правой части этих соотношений уже не обязательно билинейные функции именно от аргументов в левой части).

Исследуются и другие свойства квазиунитарных структур, прежде всего условие их квазиунитарной суммируемости, т.е. условие того, чтобы сумма квазиунитарных (квазиортогональных) матриц снова была квазиунитарной (квазиортогональной). В частности, вводится понятие квазиантиэрмитовости матриц.

§1. Обобщенная проблема Гурвица

А. Гурвицем была доказана следующая теорема:
если имеется равенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \dots + \Phi_n^2, \quad (1')$$

где Φ_k – билинейные функции от действительных аргументов – a_i, b_k ($i, k = 1, 2, \dots, n$), то n может принимать только значения 1, 2, 4, 8 [1].

Однако это соотношение может быть обобщено на любое n , если под Φ_i понимать билинейные функции других аргументов (каких именно, будет указано в настоящем параграфе).

Рассмотрим подмножество матриц n -ого порядка, обладающих следующими свойствами:

если A – такая матрица, то

$$AA^+ = a, \quad (1)$$

где a – некоторое комплексное число (A^+ – матрица, эрмитово сопряженная матрице A).

Число a , однако, оказывается действительным и неотрицательным.

В самом деле,

$$a = (AA^+)_{kk} = \sum_{l=1}^n a_{kl}(a^+)_{lk} = \sum_{l=1}^n a_{kl}a_{kl}^* = \sum_{l=1}^n |a_{kl}|^2 \geq 0, \quad (2)$$

и равно нулю только при $A = 0$.

Такие матрицы назовём *квазиунитарными* при комплексных a_{kl} и *квазиортогональными*, если a_{kl} вещественны [2]. Полагая

$$a = |A|^2, \quad (3')$$

приходим к определению нормы или модуля $|A|$ квазиунитарной или квазиортогональной матрицы. Таким образом

$$AA^+ = |A|^2. \quad (3)$$

Легко видеть, что

$$A \cdot A^+ / |A|^2 = 1. \quad (4)$$

Следовательно,

$$A^+ / |A|^2 = A^{-1} \quad (5)$$

– матрица, обратная матрице A . Но поскольку,

$$AA^{-1} = A^{-1}A, \quad (6)$$

то

$$A^{-1}A = (A^+ / |A|^2)A = 1,$$

или

$$AA^+ = A^+A = |A|^2. \quad (7)$$

Для произведения AB квазиунитарных матриц A и B имеем:

$$(AB)(AB)^+ = (AB)(B^+A^+) = |A|^2|B|^2, \quad (8)$$

$$(AB)(AB)^+ = |AB|^2, \quad (9)$$

откуда

$$|AB| = |A||B|, \quad (10') \quad |AB|^2 = |A|^2|B|^2. \quad (10)$$

Следовательно, множество квазиунитарных матриц представляет собой полугруппу, а, исключая нулевую матрицу, группу вследствие наличия у каждого элемента (матрицы) A обратного.

Обозначим группу квазиунитарных матриц n -го порядка с положительным детерминантом через $QSU(n)$, а квазиортогональных матриц n -го порядка с положительным детерминантом через $QO^+(n)$ (по аналогии с обозначениями $SU(n)$ и $O^+(n)$ для групп унитарных и ортогональных матриц n -го порядка).

Далее, имеем, выражая обе части равенства (10) через матричные элементы a_{ik} , b_{ik} матриц A и B :

$$|A|^2 = \sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2, \quad (11)$$

$$|B|^2 = \sum_{s=1}^n |b_{ms}|^2, \quad (12)$$

$$D = AB, \quad (13)$$

$$|AB|^2 = \sum_{p=1}^n |d_{tp}|^2 = \sum_{p=1}^n |a_{tl}b_{lp}|^2, \quad (14)$$

(l – эйнштейновский индекс суммирования).

Теперь соотношение (10) принимает форму

$$\left(\sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2\right) \left(\sum_{s=1}^n |b_{ms}|^2\right) = \left(\sum_{p=1}^n |d_{tp}|^2\right), \quad (15)$$

или

$$\left(\sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2\right) \left(\sum_{s=1}^n |b_{ms}|^2\right) = \left(\sum_{p=1}^n |a_{tl} b_{lp}|^2\right). \quad (16)$$

Мы получили обобщенную проблему Гурвица [1]:

"сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, снова равна сумме квадратов", причём для любого n . При этом из соотношения (16) видно, что каждое слагаемое $|a_{tl} b_{lp}|$ в его правой части представляет собой билинейную функцию матричных элементов a_{tl} t -ой строки и b_{lp} p -го столбца матриц A и B .

В частности, при $k = m \neq t$

$$\left(\sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2\right) \left(\sum_{s=1}^n |b_{ks}|^2\right) = \left(\sum_{p=1}^n |a_{tl} b_{lp}|^2\right). \quad (16a)$$

Из (16) и (16a) следует, вообще говоря, многозначность этих соотношений. При $k = m = t$ получим:

$$\left(\sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2\right) \left(\sum_{s=1}^n |b_{ks}|^2\right) = \left(\sum_{p=1}^n |a_{kl} b_{lp}|^2\right). \quad (16b)$$

Для квазиортогональных матриц имеем соответственно:

$$\left(\sum_{r=1}^n a_{kr}^2\right) \left(\sum_{s=1}^n b_{ms}^2\right) = \left(\sum_{p=1}^n d_{tp}^2\right), \quad (15')$$

$$\left(\sum_{r=1}^n a_{kr}^2\right) \left(\sum_{s=1}^n b_{ms}^2\right) = \left(\sum_{p=1}^n a_{tl} b_{lp}^2\right), \quad (16')$$

$$\left(\sum_{r=1}^n a_{kr}^2\right) \left(\sum_{s=1}^n b_{ks}^2\right) = \left(\sum_{p=1}^n a_{tl} b_{lp}^2\right), \quad (16a')$$

$$\left(\sum_{r=1}^n a_{kr}^2\right) \left(\sum_{s=1}^n b_{ks}^2\right) = \left(\sum_{p=1}^n a_{kl} b_{lp}^2\right). \quad (16b')$$

Формулы (15) и (15') верны и для случая произведения матриц A и B с возможной перестановкой местами сомножителей матричных элементов a_{tl} и b_{lp} и тем самым применимы к случаю октав [2]. Полученные соотношения обобщают проблему Гурвица и на случай комплексных и (при перестановке сомножителей) кватернионных матричных элементов. При этом обязательно выполнение соотношений (10'), (10). Для комплексных чисел и кватернионов, записанных в матричном виде, получаются, естественно, стандартные результаты.

Пусть теперь A и B – октавы, записанные в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^+ & x_1^+ \end{pmatrix}, \quad (17) \quad A = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^+ & x_2^+ \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где x_i, y_i ($i = 1, 2$) – кватернионы, также записанные в матричном виде. Произведение AB квазиунитарно, и совокупность таких матриц альтернативна, только если в произведении AB переставлены местами некоторые сомножители. С учетом этого обстоятельства имеем [2]:

$$AB = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_2^+ y_1 & y_2 x_1 + y_1 x_2^+ \\ -x_2 y_1^+ - x_1^+ y_2^+ & -y_1^+ y_2 + x_2^+ x_1^+ \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Для вычисления матричных элементов d_{1p} ($p = 1, 2, \dots, n$) в формуле (16b') (при $k = 1$) достаточно вычислить кватернионы $x_1x_2 - y_2^+y_1$ и $y_2x_1 + y_1x_2^+$ и взять их первые строки.

Выпишем эти кватернионы с действительными матричными элементами.

$$x_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} & \tilde{D} \\ -\tilde{B} & \tilde{A} & -\tilde{D} & \tilde{C} \\ -\tilde{C} & \tilde{D} & \tilde{A} & -\tilde{B} \\ -\tilde{D} & -\tilde{C} & \tilde{B} & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ -b' & a' & -d' & c' \\ -c' & d' & a' & -b' \\ -d' & -c' & b' & a' \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} \tilde{A}' & \tilde{B}' & \tilde{C}' & \tilde{D}' \\ -\tilde{B}' & \tilde{A}' & -\tilde{D}' & \tilde{C}' \\ -\tilde{C}' & \tilde{D}' & \tilde{A}' & -\tilde{B}' \\ -\tilde{D}' & -\tilde{C}' & \tilde{B}' & \tilde{A}' \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Для произведений $x_1x_2 - y_2^+y_1$ и $y_2x_1 + y_1x_2^+$ получим с учетом формул (20)–(23):

$$x_1x_2 - y_2^+y_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$y_2x_1 + y_1x_2^+ = \begin{pmatrix} d_{15} & d_{16} & d_{17} & d_{18} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где искомые элементы d_{1p} ($p = 1, 2, \dots, 8$), входящие в формулу (15'), равны

$$d_{11} = aa' - bb' - cc' - dd' - \tilde{A}'\tilde{A} - \tilde{B}'\tilde{B} - \tilde{C}'\tilde{C} - \tilde{D}'\tilde{D}, \quad (26)$$

$$d_{12} = ab' + ba' + cd' - dc' - \tilde{A}'\tilde{B} + \tilde{B}'\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{D} - \tilde{D}'\tilde{C}, \quad (27)$$

$$d_{13} = ac' - bd' + ca' + db' - \tilde{A}'\tilde{C} - \tilde{B}'\tilde{D} + \tilde{C}'\tilde{A} + \tilde{D}'\tilde{B}, \quad (28)$$

$$d_{14} = ad' + bc' - cb' + da' - \tilde{A}'\tilde{D} + \tilde{B}'\tilde{C} - \tilde{C}'\tilde{B} + \tilde{D}'\tilde{A}, \quad (29)$$

$$d_{15} = \tilde{A}'a - \tilde{B}'b - \tilde{C}'c - \tilde{D}'d + \tilde{A}a' + \tilde{B}b' + \tilde{C}c' + \tilde{D}d', \quad (30)$$

$$d_{16} = \tilde{A}'b + \tilde{B}'a + \tilde{C}'d - \tilde{D}'c - \tilde{A}b' + \tilde{B}a' - \tilde{C}d' + \tilde{D}c', \quad (31)$$

$$d_{17} = \tilde{A}'c - \tilde{B}'d + \tilde{C}'a + \tilde{D}'b - \tilde{A}c' + \tilde{B}d' + \tilde{C}a' - \tilde{D}b', \quad (32)$$

$$d_{18} = \tilde{A}'d + \tilde{B}'c - \tilde{C}'b + \tilde{D}'a - \tilde{A}d' - \tilde{B}c' + \tilde{C}b' + \tilde{D}a', \quad (33)$$

т. е. стандартные результаты [1].

Рассмотрим теперь квазиортогональные матрицы 3-ого порядка (матричные элементы действительны). Вычисления, которые опущены, приводят к следующим результатам ($i = 1, 2$):

$$A = A_1, \quad B = A_2, \quad (34)$$

$$A_i =$$

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \\ -[z_i \cos \psi_i \sin \varphi_i (\pm)_1 i \rho_i \sin \psi_i | \cos \varphi_i|] & -z_i \sin \psi_i \sin \varphi_i (\pm)_1 i \rho_i \cos \psi_i | \cos \varphi_i| & r_i \sin \varphi_i \\ (\pm)_2 i [z_i \cos \psi_i | \cos \varphi_i| - (\pm)_1 i \rho_i \sin \psi_i \sin \varphi_i] & (\pm)_2 i [z_i \sin \psi_i | \cos \varphi_i| (\pm)_1 \rho_i \cos \psi_i \sin \varphi_i] & -(\pm)_2 i r_i | \cos \varphi_i| \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \quad (36)$$

$$\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \quad (37)$$

$$\cos \psi_i = x_i / r_i, \quad (38)$$

$$\sin \psi_i = y_i / r_i. \quad (39)$$

Полагая в формуле (16b') $k = 1$, получим (с учетом формул (35)–(39)) "соотношение квадратов" для $n = 3$:

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = \\ & = [x_1 x_2 - y_1 (z_2 \cos \psi_2 \sin \varphi_2 (\pm)_1 \rho_2 \sin \varphi_2 | \cos \varphi_2|) (\pm)_2 z_1 (z_2 \cos \psi_2 | \cos \varphi_2| - (\pm)_1 \rho_2 \sin \psi_2 \sin \varphi_2)]^2 + \\ & + [x_1 y_2 + y_1 (-z_2 \sin \psi_2 \sin \varphi_2 (\pm)_1 \rho_2 \cos \psi_2 | \cos \varphi_2|) (\pm)_2 z_1 (z_2 \sin \psi_2 | \cos \varphi_2| + (\pm)_1 \rho_2 \cos \psi_2 \sin \varphi_2)]^2 + \\ & + [x_1 z_2 + y_1 r_2 \sin \varphi_2 - (\pm)_2 z_1 r_2 | \cos \varphi_2|]^2. \end{aligned} \quad (40)$$

В правой части формулы (40) Φ_i (см. формулу(1)) являются однородными функциями первого порядка от аргументов (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) .

Для дальнейшего изучения свойств квазиунитарных структур (группоидов, колец и т. д.) мы не будем считать входящие в них элементы обязательно матрицами.

§2. Квазиунитарный группоид

Пусть имеется кольцо M с единицей, включающее все действительные числа, причём умножение действительных чисел на любой элемент кольца коммутативно и ассоциативно, т. е. M – алгебра над полем действительных чисел. Пусть также имеется отображение $f : M \rightarrow M^+$ кольца M на себя – автоморфизм, при котором

$$A \rightarrow A^{(+)}, B \rightarrow B^{(+)}, A \cdot B \rightarrow A^{(+)} \circ B^{(+)} = B^{(+)} \cdot A^{(+)}, \quad (41)$$

$$(A^{(+)})^{(+)} = A, \quad (41'),$$

$$c = c^{(+)}, \quad \text{если } c \text{ – действительное число} \quad (41''),$$

но $c \neq c^+$ для комплексных c .

$$(A + B)^{(+)} = A^{(+)} + B^{(+)}. \quad (41''')$$

В таком общем смысле назовём элемент $A^{(+)}$ сопряженным элементу A . Кроме того, пусть отображение $(+)$ предполагает существование элементов A , для которых

$$A^{(+)} \cdot A = A \cdot A^{(+)} = a \geq 0, \quad (42)$$

при отсутствии отрицательных и комплексных произведений $A^{(+)} \cdot A$,

$$a = |A|^2; \quad (43)$$

$|A|$ назовём модулем A , причём

$$A^{(+)}A = AA^{(+)} = 0 \quad \text{только при } A = 0. \quad (44)$$

Такие элементы A назовём *квазиунитарными по f* .

Элемент, сопряженный нулю, также равен нулю.

$$0^{(+)} = 0, \quad (45)$$

вследствие вещественности нуля.

В силу (41''), (42)–(45) нулевой элемент и все действительные числа являются квазиунитарными. Множество, все элементы которого квазиунитарны, назовём квазиунитарным. Пусть все квазиунитарные элементы кольца M составляют мультипликативный группоид. Очевидно, что все действительные числа в него входят, а единица кольца является единицей квазиунитарного группоида. Таким образом, предполагается, что если элементы A_i и A_k квазиунитарны, то произведение

$$(A_i A_k)(A_i A_k)^{(+)} = C_{A_i A_k} \geq 0, \quad (46)$$

т. е. квазиунитарно.

Пусть элемент A_i является определённой функцией φ (предполагается, конечно, также, что $C_{A_i A_k} = 0$ только при $A_i A_k = 0$) от некоторых переменных

$$(X_1^i, \dots, X_l^i) : \quad A_i = \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i), \quad (46')$$

(элемент A_i может быть и многокомпонентным), причём аргументами могут быть действительные числа, комплексные числа и даже кватернионы. Для выполнения условий (46) необходимо и достаточно, чтобы произведению $A_i \cdot A_k$ соответствовал такой новый набор независимых переменных $(X_1^{ik}, \dots, X_l^{ik})$, чтобы выполнялось условие

$$A_i A_k = \varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, \dots, X_l^{ik}) = \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i) \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k), \quad (46'')$$

(независимые переменные $(X_1^{ik}, \dots, X_l^{ik})$ произведений $A_i \cdot A_k$ – некоторые определённые функции от переменных $X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i; X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k$:

$$X_r^{ik} = f_r(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i; X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k).$$

Если A_i – действительное число a_i , то вместо (46'') имеем:

$$a_i A_k = \varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, \dots, X_l^{ik}) = a_i \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k). \quad (46''')$$

Действительные числа, для которых $a^{(+)} = a$, как уже говорилось, коммутируют и ассоциативны со всеми элементами кольца M . Таким образом, для элементов A, B кольца M

$$(aA) \cdot B = A \cdot (aB) = a(AB). \quad (47)$$

Из (42), (43) и (47) имеем для элементов квазиунитарного группоида $A \neq 0$

$$A \cdot A^{(+)} / |A|^2 = 1, \quad (48)$$

откуда правый обратный элемент

$$A_{right}^{-1} = A^{(+)} / |A|^2, \quad (49)$$

Точно так же

$$(A^{(+)}A) / |A|^2 = (A^{(+)} / |A|^2) \cdot A = 1; \quad A_{left}^{-1} = A_{right}^{-1} = A^{(+)} / |A|^2. \quad (50)$$

Таким образом, каждый ненулевой элемент квазиунитарного группоида имеет обратный элемент

$$A^{-1} = A_{right}^{-1} = A_{left}^{-1} = A^{(+)} / |A|^2.$$

Элемент $A' = A / |A|$, поскольку

$$A'^{(+)}A' = A' \cdot A'^{(+)} = 1, \quad (51)$$

назовём унитарным – по аналогии с унитарной матрицей.

Рассмотрим важные частные случаи.

1. Выполняется

$$(AB) \cdot B^{(+)} = A \cdot (BB^{(+)}) = A \cdot |B|^2, \quad (52)$$

$$B^{(+)} \cdot (BA) = (B^{(+)}B)A = |B|^2A. \quad (53)$$

Такие группоиды назовём альтернативными группоидами второго рода. Уравнения

$$BX = C, \quad (54)$$

$$YB = C', \quad (55)$$

где $C, C', B, X, Y, \dots$ – элементы квазиунитарного альтернативного группоида второго рода, $B \neq 0$, имеют единственное решение. В самом деле, $B^{(+)} \cdot (BX) = B^{(+)}C$; в силу (53)

$$|B|^2X = B^{(+)}C, \quad X = B^{(+)}C / |B|^2. \quad (56)$$

Точно так же

$$(YB)B^{(+)} = C'B^{(+)}; \quad Y \cdot |B|^2 = C'B^{(+)}; \quad Y = C'B^{(+)} / |B|^2. \quad (57)$$

Таким образом, квазиунитарный альтернативный группоид второго рода без нуля является группоидом с однозначным делением и с единицей, т. е. лупой [4].

2. Рассматриваемый квазиунитарный группоид (или всё кольцо M) является ассоциативным:

$$(AB)C = A(BC). \quad (58)$$

Легко видеть, что квазиунитарный ассоциативный группоид без нуля является группой. Возвращаясь к общему случаю, возьмём элементы A и B квазиунитарного мультипликативного группоида кольца M . Сумма $A + B$ квазиунитарна, если

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = d$$

где d – действительно и неотрицательно. Имеем:

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = (A + B)(A^{(+)} + B^{(+)}) = |A|^2 + |B|^2 + AB^{(+)} + BA^{(+)} = d \geq 0.$$

откуда эрмитов элемент $AB^{(+)} + BA^{(+)}$ удовлетворяет условию

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = c, \quad c - \text{действительно}, \quad (59)$$

причём в силу изложенного выше

$$d = |A|^2 + |B|^2 + c \geq 0. \quad (60)$$

Поскольку

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = (A + B)^{(+)}(A + B),$$

то

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = B^{(+)}A + A^{(+)}B. \quad (59')$$

Условие (59) верно, конечно, и для унитарных элементов A' и B' , однако их сумма, являясь квазиунитарной, вообще говоря, уже не унитарна. Условие "квазиунитарной суммируемости" для A и B (59), является, очевидно, необходимым и достаточным. Очевидно, квазиунитарная суммируемость A и B влечет за собой квазиунитарную суммируемость $-A$ и B , A и $-B$, αA и βB , где α, β действительны. Следовательно, любая совокупность квазиунитарно попарно суммируемых элементов $A, B, \dots$, включающая $-A, -B, \alpha A, \beta B, \dots$, составляет аддитивную группу – векторное пространство над полем действительных чисел. Элемент Q кольца M , удовлетворяющий условию

$$Q + Q^{(+)} = q, \quad q - \text{действительно}, \quad (61)$$

назовём *квазиантиэрмитовым* (при $q = 0$ элемент Q называется антиэрмитовым), очевидно, $Q^{(+)}$ – также квазиантиэрмитов. Легко показать, что для квазиунитарных элементов A_1 и A_2 ассоциативного кольца M выполняется соотношение

$$|A_1 A_2| = |A_1| |A_2|. \quad (61')$$

Это соотношение верно также для альтернативного квазиунитарного группоида второго рода (см. дополнение).

Легко также показать, что если M – кольцо комплексных матриц, то из условия

$$AA^+ = b, \quad (42')$$

следует

$$A^+ A = b, \quad (42'')$$

вещественность b и его неотрицательность, т. е. квазиунитарность A (В (42') символ " + " представляет собой оператор эрмитова сопряжения матриц; из сказанного выше следует, что он является оператором сопряжения и в общем смысле). Условие (59) квазиунитарной суммируемости квазиунитарных элементов A и B может быть сформулировано как квазиантиэрмитовость произведения $AB^{(+)}$, и, соответственно, $BA^{(+)}$, а также $B^{(+)}A$ и $A^{(+)}B$ как следствие. Если в некоторую квазиунитарно суммируемую аддитивную группу включены все действительные числа (сами по себе составляющие квазиунитарно суммируемую аддитивную группу), то, при b действительном,

$$bA^{(+)} + Ab = b(A + A^{(+)}) = \tilde{f},$$

где $\tilde{f}$ действительно, откуда

$$A + A^{(+)} = a, \quad \text{где } a \text{ действительно}, \quad (62)$$

т. е. квазиунитарно суммируемая аддитивная группа, включающая действительные числа, состоит из квазиунитарных квазиантиэрмитовых элементов. Легко доказывается, что квазиунитарная суммируемость элементов A и B влечёт за собой квазиунитарную суммируемость элементов $A, B^{(+)}$ если элементы A и B не только квазиунитарны, но и квазиантиэрмитовы, причём в этом случае

$$A^{(+)}B^{(+)} + BA = AB + B^{(+)}A^{(+)} \quad (\text{см. формулу (72)}).$$

Отметим, что квазиунитарно суммируемая аддитивная квазиунитарная группа является подмножеством квазиунитарного мультипликативного группоида, но не обязательно его подгруппоидом. Если квазиунитарный группоид является также подкольцом кольца M , то, с учетом (47), он является алгеброй над полем действительных чисел [6]. Рассмотрим случай, когда группоид квазиунитарных квазиантиэрмитовых элементов кольца M – альтернативная алгебра второго рода над полем действительных чисел; Согласно (52), (53), (62)

$$(AB)B^{(+)} = (AB)(b - B) = (AB)b - (AB)B, A(BB^{(+)}) = (AB)b - A(BB),$$

откуда

$$(AB)B = A(BB). \quad (63)$$

Аналогично получается:

$$B(BA) = (BB)A, \quad (64)$$

– алгебра оказалась альтернативной.

Таким образом:

1) квазиантиэрмитовый (и, следовательно, также квазиунитарный и квазиунитарно суммируемый) мультипликативный альтернативный группоид в кольце M , включающий действительные числа, сопряженные элементы и суммы любых двух элементов, является мультипликативным группоидом (без нуля – лупой) альтернативной алгебры с делением над полем действительных чисел, изоморфной, следовательно, алгебре Кэли (если алгебра неассоциативна и конечномерна) согласно обобщенной теореме Фробениуса [4].

2) Аналогичная квазиантиэрмитова (и, следовательно, квазиунитарная и квазиунитарно суммируемая) мультипликативная полугруппа (без нуля – группа) в кольце M является мультипликативным группоидом алгебры с делением на полем действительных чисел, при её конечном ранге, согласно теореме Фробениуса изоморфной либо кватернионам, либо комплексным числам, либо действительным числам. Обратно, как легко видеть, все элементы алгебры Кэли, кватернионов, комплексных и действительных чисел квазиунитарны и квазиантиэрмитовы.

3) Аналогичный неальтернативный квазиантиэрмитовый мультипликативный группоид в кольце M является мультипликативным группоидом алгебры над полем действительных чисел. Подчеркнем, однако, что в общем случае квазиунитарная мультипликативная группа (вместе с нулем) не всегда является мультипликативным группоидом кольца (мы это увидим и на примерах). Пусть A_i, A_k – элементы квазиунитарного группоида, и

$$A_{i+k} = A_i + A_k, \quad (65)$$

причём (согласно (46')), при квазиунитарности A_{i+k}

$$A_{i+k} = \varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, \dots, X_l^{i+k}), \quad (66)$$

$$A_i = \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i), \quad (67)$$

$$A_k = \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k). \quad (68)$$

Итак, если квазиунитарный группоид будет мультипликативным группоидом кольца, то для любого i и k

$$\begin{aligned} \varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, \dots, X_l^{ik}) &= \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i) \cdot \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k), \\ \varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, \dots, X_l^{i+k}) &= \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i) + \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k). \end{aligned} \quad (69)$$

Если $A_i = a_i$ – действительное или комплексное число, и

$$\varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, \dots) = a_i \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots) = \varphi(a_i X_1^k, a_i X_2^k, \dots);$$

если теперь

$$A_i + A_k = \varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, \dots) = \varphi(X_1^i + X_1^k, X_2^i + X_2^k, \dots) = \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots) + \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots)$$

то φ – линейная функция своих аргументов.

Рассмотрим произведение AB элементов A и B квазиунитарного группоида и возьмём суммы $AB + A, BA + A$. Имеем:

$$AB + A = A(B + 1), \quad (70)$$

$$BA + A = (B + 1)A. \quad (70')$$

Эти суммы квазиунитарны, если $B+1$ квазиунитарен, т. е. когда B квазиантиэрмитов, поскольку тогда B квазиунитарно суммируем с 1, и точно так же суммы

$$AB + B = (A + 1)B, \quad (71)$$

$$BA + B = B(A + 1), \quad (71')$$

квазиунитарны, если A квазиантиэрмитов. Вернёмся к условию (59) ($AB^{(+)}$ – квазиантиэрмитово) квазиунитарной суммируемости квазиунитарных элементов A и B . Если A и B ещё и квазиантиэрмитовы, то $A + A^{(+)} = a$ (a действительно), $B + B^{(+)} = b$ (b действительно), $AB^{(+)} + BA^{(+)} = c_{ab}$ (c_{ab} действительно) следует

$$AB + B^{(+)}A^{(+)} = A(b - B^{(+)} + (b - B)A^{(+)} = b(A + A^{(+)} - AB^{(+)} - BA^{(+)} = ba - c_{ab},$$

$$AB + B^{(+)}A^{(+)} = ba - c_{ab}, \quad (72)$$

т. е. AB – квазиантиэрмитово. Таким образом, если A и B квазиунитарны, квазиантиэрмитовы и квазиунитарно суммируемы, то все действительные числа c , а также A, B и AB – попарно квазиунитарно суммируемы (поскольку произведение AB квазиантиэрмитово). Рассмотрим несколько подробнее два случая.

а) Пусть A – квазиунитарный и квазиантиэрмитовый элемент квазиунитарного группоида, не являющийся действительным числом. Тогда совместно с единицей он составляет базис алгебры второго ранга над полем действительных чисел, изоморфной полю комплексных чисел. Действительно, произведение элементов $M_1 = \alpha_1 + a_1 A$ и $M_2 = \alpha_2 + a_2 A$ равно

$$M_1 M_2 = \alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 a_2 + a_1 \alpha_2) A + a_1 a_2 A^2, \quad (73)$$

причём

$$A^2 = A(a - A^{(+)}) = Aa - |A|^2. \quad (74)$$

Поэтому

$$M_1 M_2 = \alpha_1 \alpha_2 - a_1 a_2 |A|^2 + (\alpha_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_1 a_2 a) A, \quad (75)$$

т. е. элемент коммутативной алгебры. При этом, как легко видеть,

$$A = (A + A^{(+)})/2 + (A - A^{(+)})/2, \quad (76')$$

и, по определению,

$$Re A = a/2 = (A + A^{(+)})/2, \quad (76)$$

$$(A - A^{(+)})/2 = (i_A)Im A, \quad (77)$$

где

$$i_{A\pm} = \pm \frac{(A - A^{(+)})}{2} / \frac{|A - A^{(+)}|}{2}, \quad (78)$$

$$i_{A\pm}^2 = -1, \quad (78')$$

$$A = (a/2) \pm \frac{|A - A^{(+)}|}{2} i_{A\pm}. \quad (78'')$$

. Таким образом,

$$Im A = i_A(A^{(+)} - A)/2. \quad (79)$$

Разумеется, другому квазиунитарному квазиантиэрмитову элементу $A' \neq A$ может соответствовать другое поле комплексных чисел. Отметим, что вывод формул (70)–(79) не предполагает ассоциативность или даже альтернативность исходного кольца M , поскольку мы не рассматривали произведения более двух сомножителей.

б) Рассмотрим совокупность квазиунитарных квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых элементов. Выше говорилось, что эта совокупность является n -мерным векторным пространством над полем действительных чисел. Пусть $n > 2$. Выберем из совокупности два линейно независимых от 1 и друг друга элемента A и B , не являющихся, следовательно, действительными числами (1, A , B не лежат в одной плоскости). Предположим также, что рассматриваемая совокупность ассоциативна или хотя бы альтернативна. Произведение $A \cdot B$, в силу квазиунитарной суммируемости и квазиантиэрмитовости A и B квазиантиэрмитово, и, следовательно, квазиунитарно суммируемо с действительными числами. В силу квазиантиэрмитовости A и B оно также квазиунитарно суммируемо с A и B . Следовательно, 1, A , B и AB являются элементами некоторого векторного пространства над полем действительных чисел (при этом AB может и не принадлежать к исходному векторному пространству).

Возьмём два вектора этого пространства

$$Q_1 = \alpha_1 + \beta_1 A + \gamma_1 B + \delta_1 AB, \quad (80)$$

$$Q_2 = \alpha_2 + \beta_2 A + \gamma_2 B + \delta_2 AB, \quad (81)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ($i = 1, 2$) – действительные числа, и рассмотрим их произведение. Имеем:

$$Q_1 Q_2 = \alpha_1 \alpha_2 + (\beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2) A + (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) B + (\delta_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2 + \alpha_1 \delta_2) AB + \beta_1 \beta_2 A^2 + \\ + \gamma_1 \beta_2 BA + \delta_1 \beta_2 (AB) A + \gamma_1 \gamma_2 B^2 + \delta_1 \gamma_2 (AB) B + \beta_1 \delta_2 A(AB) + \gamma_1 \delta_2 B(AB) + \delta_1 \delta_2 (AB)^2. \quad (82)$$

Далее, полагая

$$a = A + A^{(+)}, \quad (83)$$

$$b = B + B^{(+)}, \quad (84)$$

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = c_{ab}, \quad (85')$$

(a, b, c_{ab} – действительные числа), имеем, учитывая альтернативность совокупности и опуская некоторые вычисления:

$$A^2 = aA - |A|^2, \quad (85)$$

$$BA = -c_{ab} + bA - AB + aB, \quad (86)$$

$$B^2 = bB - |B|^2, \quad (87)$$

$$(AB)A = (ab - c_{ab})A + |A|^2B - b|A|^2, \quad (88)$$

$$(AB)B = -|B|^2A + bAB, \quad (89)$$

$$A(AB) = -|A|^2B + aAB, \quad (90)$$

$$B(AB) = -a|B|^2 + |B|^2A + (ab - c_{ab})B, \quad (91)$$

$$(AB)^2 = (ab - c_{ab})AB - |AB|^2. \quad (92)$$

Таким образом, получена алгебра четвертого ранга над полем действительных чисел, как мы увидим, с базисом $1, A, B, AB$. Она изоморфна алгебре кватернионов. Действительно, переход от $1, A, B, AB$ к каноническому базису $1, i, j, k$ может быть сделан с помощью преобразования

$$i = (A - a/2)/|A - a/2|, \quad (93)$$

$$\bar{j} = [(B - b)/|B - b/2|] + [(ab/2 - c_{ab})/2|A - a/2||B - b/2|]i, \quad (94)$$

$$j = \bar{j}/|\bar{j}|, \quad (95) \quad k = ij, \quad (95')$$

аналогично тому, как это делается при выводе теоремы Фробениуса [4].

Рассмотрим снова два квазиунитарных элемента A и B квазиунитарно суммируемого векторного пространства. Имеем:

$$\begin{aligned} |A \pm B|^2 &= |A|^2 + |B|^2 \pm (AB^{(+)} + BA^{(+)}), \\ |A \pm B| &= \sqrt{|A|^2 + |B|^2 \pm (AB^{(+)} + BA^{(+)})}. \end{aligned} \quad (96)$$

Но вследствие квазиунитарной суммируемости и (76),

$$(AB^{(+)} + BA^{(+)})/2 = \operatorname{Re}(AB^{(+)}), \quad (97)$$

$$|A \pm B| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 \pm 2\operatorname{Re}(AB^{(+)})} \leq \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|\operatorname{Re}(AB^{(+)})|}. \quad (98)$$

Но

$$|\operatorname{Re}(AB^{(+)})| \leq |AB^{(+)}|. \quad (99)$$

При ассоциативном умножении рассматриваемых элементов

$$|AB^{(+)}| = |A| \cdot |B^{(+)}|. \quad (100)$$

Но, поскольку $|B^{+}| = |B|$, то

$$|AB^{(+)}| = |A| \cdot |B|. \quad (100')$$

Следовательно, в этих случаях

$$|A \pm B| \leq \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|} = |A| + |B|,$$

т. е.

$$|A \pm B| \leq |A| + |B|. \quad (101)$$

(Формулы (100) и (100')), а также формула

$$|AB| = |A||B|, \quad (100'')$$

верны и для случая альтернативного умножения в пространстве квазиантиэрмитовых квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов. В самом деле, A и B принадлежат или к полю комплексных чисел (при их линейной зависимости), или к некоторому телу кватернионов. Но в обоих случаях формулы (100), (100'), (100'') верны).

Таким образом, выполняется условие (101), а также условия

$$|A| = 0 \quad \text{при} \quad A = 0, \quad (102) \quad |A| > 0 \quad \text{при} \quad A \neq 0, \quad (103)$$

аналогично для B . Как известно, кольца, для которых выполняется условие (100''), (101) – (103), называются нормированными [4], а при

$$|AB| \leq |A||B| \quad (100''')$$

– псевдонормированными [4]. При выполнении равенств (100''), (101)–(103), модули $|A|$, $|B|$ называются нормами. По аналогии назовем векторные пространства квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов, для которых выполняются условия (100''), (101)–(103), нормированными векторными пространствами в кольце M . Как известно, векторные пространства, для которых выполняются только условия (101)–(103) и условие

$$|aB| = |a||B|, \quad (100'''),$$

где a – число (в нашем случае действительное), называются нормированными [5]. Таким образом, рассматриваемое нормированное векторное пространство в кольце M является нормированным в обычном смысле.

§3. Гиперкольца, гипертела, гипералгебры

Не любое векторное пространство квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов является кольцом или телом (по умножению в кольце M), поскольку не всегда совпадает со всем мультипликативным квазиунитарным группоидом, или полугруппой, или группой (исключая нуль). Может, однако, оказаться, и мы это увидим на примерах, что квазиунитарный группоид разбивается (возможно неоднозначно) на аддитивные группы (в частности, на векторные пространства), обладающие следующими свойствами:

- 1) они пересекаются только в некоторых нулевых точках;
- 2) умножение определено для всего рассматриваемого множества (в нашем случае для всего квазиунитарного группоида);
- 3) произведение любого элемента a_i i -й аддитивной группы на любой элемент a_k k -й аддитивной группы является элементом a_l l -й (фиксированной) аддитивной группы), причём аддитивные группы-сомножители могут совпадать;
- 4) выполняются правый и левый дистрибутивные законы.

Можно показать, что третье свойство следует из четвертого (дистрибутивности). Множество, обладающее свойствами 1) – 4), назовём *гиперкольцом* m -го порядка, где m – число аддитивных групп. Мы в основном будем рассматривать такие совокупности с одним общим нулем. При этом, как уже говорилось, аддитивными группами могут быть и векторные пространства (в данном случае одинаковой размерности). Если все элементы мультипликативного группоида, кроме нулей, составляют лупу или группу, назовём рассматриваемое множество *гипертелом* m -го порядка. Коммутативное ассоциативное гипертело m -го порядка назовём *гиперполем* m -го порядка по аддитивным группам. Если аддитивные группы рассматриваемого множества

являются векторными пространствами над полем P , то гиперкольцо назовём *гипералгеброй m -го порядка* по этим пространствам, а гипертело или гиперполе – *гипералгеброй m -го порядка с делением* по векторным пространствам. При этом должны выполняться соотношения

$$(aA) \cdot B = A(aB) = a(AB),$$

где a – элемент поля P , A и B – элементы векторного пространства.

Нетрудно показать, что гипертело (гиперполе) с ненулевыми аддитивными группами имеет среди своих аддитивных групп одно и только одно тело или поле. Очевидно, что кольцо, тело, поле или алгебра являются соответственно гиперкольцом, гипертелом, гиперполем или гипералгеброй первого порядка. Кольцо, тело, поле или алгебра могут быть одновременно гиперкольцом, гипертелом, гиперполем, гипералгеброй по каким-либо входящим в него аддитивным группам или пространствам. Если размерности рассматриваемых векторных пространств одинаковы и равны n , а их число m , то мы имеем гипералгебру m -го порядка n -го ранга. Гиперкольца, элементы которых квазиунитарны, назовём квазиунитарными. Гиперкольца, для которых выполняются условия (100'')–(103), назовём *нормированными*. Гиперкольца, для которых выполняются условия (100''')–(103), назовём *псевдонормированными*. Отметим, что совокупность M , включающая квазиунитарный мультипликативный группоид, может быть не только кольцом, но и гиперкольцом. Более подробное исследование гиперколец (гиперполей, гипертел, гипералгебр) выходит за рамки настоящей статьи.

§4. Пространство квазиунитарных квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых элементов как кольцо

Рассмотрим снова квазиунитарное квазиантиэрмитово и квазиунитарно суммируемое пространство. Оно, как уже говорилось, не обязательно является кольцом по умножению в кольце M . Однако, как известно, любую аддитивную группу можно сделать кольцом (например, нулевым [4]). Рассмотрим два других варианта.

1) В рассматриваемом пространстве может быть дополнительно определено умножение по правилу [4]

$$A \circ B = (1/2)(AB + BA), \quad (104)$$

(коэффициент $1/2$ в (104) введён для удобства, но в [4] опущен). При этом наше пространство становится новым коммутативным, но, вообще говоря, неассоциативным кольцом. Оно называется *йордановым* [4], если

$$((A \circ A) \circ B) \circ A = (A \circ A) \circ (B \circ A). \quad (104')$$

В нашем случае оно является алгеброй над полем действительных чисел. В самом деле, для элементов A и B , принадлежащих теперь нашему векторному пространству, имеем, в силу квазиантиэрмитовости и квазиунитарной суммируемости A и B :

$$A \circ B = (1/2)[A(b - B^{(+)} + B(a - A^{(+)})) = (1/2)(bA + aB - c_{ab}), \quad (105')$$

т.е. $A \circ B$ принадлежит нашему векторному пространству, что и требовалось доказать (a, b, c_{ab} – указанные выше действительные числа). (Эта алгебра, как нетрудно показать, является йордановой, поскольку условие (104') выполняется.) Это кольцо имеет единицу и квазиунитарно. В самом деле,

$$A \circ A^{(+)} = A^{(+)} \circ A = (1/2)(AA^{(+)} + A^{(+)}A) = |A|^2, \quad (105'')$$

$$A \circ 1 = \frac{1}{2}(A \cdot 1 + 1 \cdot A) = A \quad (105''')$$

(здесь символ $(+)$ совпадает с сопряжением в M , а единицей является единица кольца M). Можно показать, что рассматриваемое йорданово кольцо псевдонормировано, если квазиунитарный мультипликативный группоид альтернативен, за исключением случая, когда рассматриваемое кольцо – нормированная алгебра второго ранга над полем действительных чисел, всегда изоморфная полю комплексных чисел.

2) Введём теперь в нашем пространстве умножение по правилу

$$A \circ B = (1/2)(AB^{(+)} + BA^{(+)}) \quad (105)$$

(коэффициент $1/2$, как и в формуле (104), введён для упрощения дальнейших выкладок и рассуждений). При этом наше пространство так же, как и в пункте 1, превращается в коммутативное, но, вообще говоря, неассоциативное кольцо. Покажем, что рассматриваемое векторное пространство само по себе действительно является кольцом. В силу квазиунитарной суммируемости

$$A \circ B = (1/2)(AB^{(+)} + BA^{(+)}) = c_{ab}/2 = Re(A \cdot B^{(+)}). \quad (106)$$

Поскольку действительные числа принадлежат нашему пространству, $A \circ B$ ему принадлежит, что и требовалось доказать.

Поле действительных чисел является идеалом [4] рассматриваемого кольца. Интересно отметить, что произведение $A \circ B$ элементов нашего пространства аналогично скалярному произведению элементов A и B [1]. Введём обозначение

$$(\widetilde{A, B}) = A \circ B \quad (107)$$

(в нашем случае скалярное произведение вещественно). Действительно, имеем:

$$A \circ (B_1 + B_2) = A \circ B_1 + A \circ B_2; \quad (108)$$

пусть c – действительное число, тогда

$$A \circ cB = \frac{1}{2}(AcB^{(+)} + cBA^{(+)}) = c(AB^{(+)} + BA^{(+)})/2 = c(A \circ B), \quad (109)$$

$$A \circ B = B \circ A, \quad (110)$$

$$A \circ A = (1/2)(AA^{(+)} + AA^{(+)}) = AA^{(+)} = |A|^2, \quad (111)$$

откуда

$$A \circ A \geq 0, \quad (112)$$

причём $A \circ A = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$. (В частности, если e – единица кольца M , то

$$e \circ e = \frac{1}{2}(ee^{(+)} + ee^{(+)}) = \frac{1}{2}(ee + ee) = e.) \quad (112')$$

Но условиям (108)–(112) и должно удовлетворять скалярное произведение [5], хотя в рассматриваемом случае аналог скалярного произведения оказался принадлежащим векторному пространству, поскольку действительные числа ему принадлежат. Так, например, единица e поля действительных чисел (и кольца M) может быть выбрана одним из базисных векторов. Назовём $(\widetilde{AB}) = A \circ B$ *внутренним скалярным произведением*. Оно, как легко, видеть, не имеет единицы. Из формулы (111) следует,

что внутренний скалярный квадрат вектора A (квадрат его нормы [5]) равен квадрату его модуля (т.е. норма вектора A равна его модулю $|A|$ как квазиунитарного элемента). (Из (105'), (105) и (107) следует

$$\frac{1}{2}(AB + BA) = \frac{1}{2}(Ab + Ba) - (\widetilde{A}, B). \quad (107')$$

Далее, как известно,

$$|A \circ B| \leq |A| \cdot |B|, \quad (113)$$

$$|A + B| \leq |A| + |B|. \quad (113')$$

Формула (113) представляет собой неравенство Шварца. Оно называется также неравенством Коши-Буняковского [3]. Из (113), (113') следует псевдонормированность нашего кольца, а из (111) – его квазиунитарность, причём здесь

$$A^{(+)} = A, \quad (+) - \text{знак сопряжения в нашем кольце.}$$

Если A и B линейно зависимы, $B = aA$, то неравенство Шварца превращается в равенство [5], [3]. Если действительные числа не входят в рассматриваемое векторное пространство (т.е. если оно не квазиантиэрмитово), оно уже не является кольцом по умножению "о".

Отметим, однако, что любое евклидово векторное n -мерное пространство L [3] над полем P комплексных чисел, не принадлежащих к этому пространству, совместно с полем P представляет собой гиперкольцо второго порядка с единицей (совпадающей с единицей поля P) по аддитивным группам P и L . Умножением служат:

- 1) умножение в поле P ;
- 2) умножение векторов A и B , дающее скалярное произведение (A, B) ;
- 3) умножение элемента $\tilde{a}$ поля P на элементы A пространства L $\tilde{a} \cdot A$ согласно определению векторного пространства, причём здесь

$$D = \tilde{a} \circ A = A \circ \tilde{a}^* = \tilde{a} \cdot A \quad (D - \text{вектор}).$$

Нетрудно показать, что указанное гиперкольцо квазиунитарно и псевдонормировано, поскольку

$$|(A, B)| \leq |A| \cdot |B|, \quad (A, A) = |A|^2 \geq 0, \quad A^{(+)} = A, \quad \tilde{a}\tilde{a}^* = |\tilde{a}|^2 \geq 0, \quad |\tilde{a}\tilde{b}| = |\tilde{a}||\tilde{b}|,$$

$$(\tilde{a}, \tilde{b} - \text{комплексные числа}), \quad |\tilde{a} \cdot A| = |\tilde{a}| \cdot |A|.$$

(Однако пространство L , будучи вместе с P псевдонормированным гиперкольцом, само по себе нормировано, как говорилось выше, как евклидово векторное пространство [5]). Можно показать, что указанное гиперкольцо, но над полем P действительных чисел, йорданово и является гипералгеброй над ним.

§5. Примеры

а) Квазиунитарные матрицы n -го порядка с обычными правилами умножения и сложения, с комплексными или вещественными матричными элементами.

Кольцо M в данном случае – кольцо матриц n -го порядка. Операция сопряжения записывается обычным образом:

$$(A^+)_{ik} = A_{ki}^*, \quad (114)$$

а для вещественных матриц она совпадает с операцией транспонирования:

$$(A^{(+)}_{ik}) = (\tilde{A})_{ik} = A_{ki}. \quad (115)$$

Поскольку кольцо матриц ассоциативно, то к нему применены результаты предыдущих параграфов, полученные для ассоциативного кольца M . Векторные пространства квазиунитарных, квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых матриц вследствие ассоциативности кольца матриц нормированы в нём. Условие квазиантиэрмитовости (62) переписывается следующим образом:

$$A_{ii} + A_{ii}^* = f, \quad (62')$$

(f – действительно),

$$A_{ik} + A_{ki}^* = 0. \quad (i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (62'')$$

Действительные части диагональных матричных элементов, согласно (62'), равны. Вещественные квазиунитарные матрицы будем называть квазиортогональными (см. §1). Аргумент детерминанта квазиунитарной матрицы назовём *угловым параметром* этой матрицы. Угловой параметр произведения квазиунитарных (и, в частности, унитарных) матриц одного порядка равен сумме угловых параметров сомножителей. Введём обозначения (см. также §1): $QSU(n)$ – мультипликативная группа квазиунитарных отличных от нуля матриц n -го порядка с положительным детерминантом; $QO^+(n)$ – мультипликативная группа вещественных отличных от нуля квазиортогональных матриц n -го порядка с положительным детерминантом; $QO(n)$ – мультипликативная группа квазиортогональных вещественных отличных от нуля матриц n -го порядка; $QU(n)$ – мультипликативная группа квазиунитарных отличных от нуля матриц n -го порядка. Группы $QSU(n)$ и $QO^+(n)$ представляют собой группы вращения и растяжения, совокупности с отрицательным детерминантом – отражения и растяжения. Они не являются группой.

б) Группоид квазиортогональных вещественных матриц второго порядка. Отличные от нуля матрицы образуют группу $QO(2)$. Несложные вычисления показывают, что эти матрицы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad (116) \quad B = \begin{pmatrix} X' & Y' \\ Y' & -X' \end{pmatrix}, \quad (117)$$

причём

$$\det A = X^2 + Y^2 \geq 0, \quad (118)$$

$$\det B = -X'^2 - Y'^2 \leq 0. \quad (119)$$

Матрицы A , представляющие собой линейные функции от X и Y , квазиунитарны и в данном случае квазиортогональны, квазиунитарно суммируемы, образуя аддитивную группу, именно, аддитивную группу кольца, поскольку матрицы A в то же время составляют мультипликативный группоид, а отличные от нуля матрицы A , согласно (118), представляют собой мультипликативную группу $QO^+(2)$. Следовательно, кольцо матриц A представляет собой поле. Оно, как известно, изоморфно полю комплексных чисел [6]. Матрицы B , в силу их линейной зависимости от X' и Y' , также образуют аддитивную группу, но не образуют мультипликативного группоида. Однако совокупность матриц A и B совместно не образуют квазиунитарного

кольца. Как аддитивные группы матрицы A и B представляют собой двумерные векторные пространства над полем действительных чисел. Произведение двух матриц типа B , как легко показать, является матрицей типа A , хотя $B_1 B_2 \neq B_2 B_1$. Далее, произведения матриц типа A и типа B суть матрицы типа B , но матрицы типов A и B не коммутируют. Мы видим, что рассматриваемые матрицы представляют собой гиперкольцо и даже гипертело второго порядка, поскольку матрицы типов A и B совместно, исключая нуль, представляют собой группу. Таким образом, поскольку матрицы A и B – действительные векторные пространства, совокупность квазиортогональных матриц второго порядка представляет собой гипералгебру второго порядка второго ранга над полем действительных чисел с делением.

с) Совокупность A_φ комплексных квазиунитарных матриц второго порядка. Отличные от нуля матрицы образуют группу $QU(2)$. Вычисления, которые здесь опущены, приводят к следующей формуле для этих матриц:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^* e^{i\varphi} & X^* e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Детерминант матриц A_φ равен:

$$\det A_\varphi = (|X|^2 + |Y|^2) e^{i\varphi}. \quad (121)$$

Следовательно, согласно изложенному выше, φ является угловым параметром матрицы A_φ , причём угловые параметры матриц A_φ при их умножении складываются. Очевидно, что при заданном φ матрицы A_φ квазиунитарно суммируемы, образуя аддитивную группу – векторное пространство четвертого порядка над полем действительных чисел. При $\varphi = 0$ получим:

$$A_0 = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^* & X^* \end{pmatrix} \quad (122)$$

– матрицу, которая, как известно, изоморфна кватернионам [7]. Таким образом, мы получаем гипералгебру бесконечного порядка четвертого ранга с делением над полем действительных чисел. Более подробно примеры a и b рассмотрены в [2]. Там же см. шестой вариант в третьем примере, в целом представляющий собой альтернативное гиперкольцо второго рода, включающее алгебру Кэли.

d) Числа Клиффорда [7] в представлении дираковских матриц.

Как известно, числа Клиффорда в представлении матриц Дирака γ_μ составляют вместе с единицей базис гиперкомплексной системы вида [7, 8]:

$$1, \gamma_\mu, \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \sigma_{\mu\nu} = (1/2i)(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad \alpha_\mu = i\gamma_5 \gamma_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \quad (123)$$

Все указанные матрицы эрмитовы и унитарны. Далее, имеются системы попарно антикоммутирующих матриц:

$$\gamma_\mu, \gamma_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5); \quad \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu, \alpha_\mu \quad (\nu \text{ принимает все значения, не равные } \mu)$$

$$\alpha_\mu, \gamma_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_5);$$

далее

$$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}; \quad \sigma_{14}, \sigma_{24}, \sigma_{12}; \quad \sigma_{23}, \sigma_{24}, \sigma_{34}; \quad \sigma_{14}, \sigma_{13}, \sigma_{34}; \quad \dots \quad (124)$$

– 20 совокупностей, всего 26 совокупностей. Сделаем теперь следующее замечание. Пусть две матрицы A и B эрмитовы и унитарны. Тогда, очевидно, матрицы

$$A' = iA, \quad B' = iB, \quad (125)$$

антиэрмитовы и унитарны, и, следовательно, квазиунитарно суммируемы с действительными числами. Далее,

$$A'B'^+ + B'A'^+ = AB + BA. \quad (126)$$

Если

$$AB + BA = c_{ab} \quad (127)$$

– действительное число, то, следовательно,

$$A'B'^+ + B'A'^+ = c_{ab}. \quad (128)$$

Таким образом, при выполнении условия (128) матрицы A' , B' квазиунитарно суммируемы. С учетом сказанного получаем систему унитарных антиэрмитовых матриц

$$\gamma'_\mu = i\gamma_\mu, \quad \gamma'_5 = i\gamma_5 = i\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3\gamma'_4, \quad \sigma'_{\mu\nu} = i\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma'_\mu\gamma'_\nu - \gamma'_\nu\gamma'_\mu), \quad \alpha'_\mu = i\alpha_\mu = \gamma'_5\gamma'_\mu. \quad (129)$$

Системы антикоммутирующих матриц (124) переходят теперь в системы матриц, каждая из которых совместно с единицей являются базисом (как легко показать, ортонормированным) векторного пространства квазиунитарно суммируемых матриц над полем действительных чисел

$$1, \gamma'_\mu\gamma'_5(1, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4, \gamma'_5); 1, \gamma'_\mu, \sigma'_{\mu\nu}, \alpha'_\mu$$

(ν пробегает значения, не равные μ) – четыре совокупности;

$$1, \alpha'_\mu, \gamma'_5(1, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \gamma'_5); \quad 1, \sigma'_{12}, \sigma'_{13}, \sigma'_{23}; \quad \sigma'_{14}, \sigma'_{24}, \sigma'_{12}; \quad \sigma'_{23}, \sigma'_{24}, \sigma'_{34}; \quad \sigma'_{14}, \sigma'_{13}, \sigma'_{34}; \dots \quad (130)$$

– всего 26 совокупностей (26 векторных пространств квазиунитарно суммируемых элементов). Как мы видели, в каждом из этих пространств 1 и любая из базисных матриц могут служить базисом комплексных чисел; далее, единица, любые две базисные матрицы и их произведение могут служить базисом кватернионов. Размерности указанных пространств соответственно 6 (одно пространство), 6 (четыре пространства), 6 (одно пространство), 4 (20 пространств). Из указанных пространств четырехмерные могут служить аддитивной группой кватернионов. Каждое из указанных пространств является, согласно (105), кольцом – алгеброй над полем действительных чисел (является также йордановым кольцом, см. (104) и (104')).

§5. Заключение

Мы видим, что наряду с известными полями и телами, совокупность квазиунитарных матриц включает ряд гипералгебр, в том числе и с делением, а также содержит векторные пространства, не являющиеся подкольцами кольца M .

Квазиунитарные матрицы также позволяют рассмотреть обобщенную проблему Гурвица (см. §1).

Дополнение**Вывод формулы $|A_1 A_2| = |A_1| |A_2|$ для квазиунитарного альтернативного группоида второго рода**

Пусть A_1 и A_2 – два элемента квазиунитарного альтернативного группоида второго рода. Имеем, используя условия альтернативности второго рода:

$$\begin{aligned} [(A_1 A_2)(A_1 A_2)^{(+)}] A_1 &= (A_1 A_2)[(A_1 A_2)^{(+)} A_1] = (A_1 A_2)[(A_2^{(+)} A_1^{(+)} A_1)] = (A_1 A_2)[A_2^{(+)} |A_1|^2] = \\ &= |A_1|^2 [(A_1 A_2) A_2^{(+)}] = |A_1|^2 [A_1 |A_2|^2] = A_1 |A_1|^2 |A_2|^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} [(A_1 A_2)(A_1 A_2)^{(+)}] A_1 &= |A_1 A_2|^2 A_1 = |A_1|^2 |A_2|^2 A_1, \quad \text{т. е.} \\ |A_1 A_2|^2 A_1 &= |A_1|^2 |A_2|^2 A_1. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |A_1 A_2|^2 (A_1 A_1^{(+)} A_1) &= |A_1|^2 |A_2|^2 (A_1 A_1^{(+)} A_1), \quad \text{или} \\ |A_1 A_2|^2 |A_1|^2 &= |A_1|^4 |A_2|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$|A_1 A_2|^2 = |A_1|^2 |A_2|^2, \quad |A_1 A_2| = |A_1| |A_2|.$$

Литература

- [1] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. "Гиперкомплексные числа". "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1973.
- [2] Л. Г. Соловей. "О некоторых дистрибутивных универсальных алгебрах". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(2), Vol 4, 200.
- [3] Гельфанд И. М. "Лекции по линейной алгебре". 4-е изд. доп. "Наука", ГРФМЛ, М., 1971.
- [4] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", 2-е изд., ГИФМЛ, Москва, 1962.
- [5] Ю. Верле. "Релятивистская теория реакций (методы, не зависящие от моделей)". Перевод с английского Я. И. Азимова. Атомиздат, Москва, 1969.
- [6] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1949.
- [7] Э. Маделунг "Математический аппарат физики". Перевод с 6-го немецкого издания М. А. Иглицкого. Под редакцией В. И. Левина. Издание второе стереотипное. "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1968.
- [8] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. "Квантовая электродинамика". Издание третье, переработанное. "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1969.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАССИВНОГО ТЕЛА НА ФОРМУ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД ФЛУКТУАЦИЙ СКОРОСТИ α -РАСПАДА

Панчелюга В. А., Шноль С. Э.

*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, Россия
panvic333@yahoo.com, shnoll@iteb.ru*

Настоящая работа выполнена в рамках исследования эффекта макроскопических флуктуаций (МФ-эффекта) [1] и имеет своей целью выяснение его физических основ. В частности, проведено экспериментальное исследование возможности влияния быстро вращающегося массивного тела на форму функций распределения флуктуаций скорости α -распада. Изучалась возможная анизотропия подобного воздействия. В работе также представлена методика обработки экспериментальных данных и основная феноменология МФ-эффекта, накопленная за более чем полувековую историю исследования этого явления.

1 Основы МФ-эффекта. Методика обработки данных

Для уяснения сути МФ-эффекта рассмотрим простой пример. Предположим, у нас есть простейшая электрическая цепь, ток в которой равен некоторой постоянной величине. Также предположим, что мы последовательно проводим измерения тока в этой цепи, причем, каждый раз со все большей чувствительностью. Тогда, начиная с определенного момента, мы заметим, что величина тока, вначале казавшаяся нам постоянной, в действительности подвержена некоторым флуктуациям. Очевидно, что подобным образом возможно получить флуктуации, практически любого процесса. Временные ряды величин флуктуаций в протекании различных процессов являются исходным экспериментальным материалом для исследования МФ-эффекта.

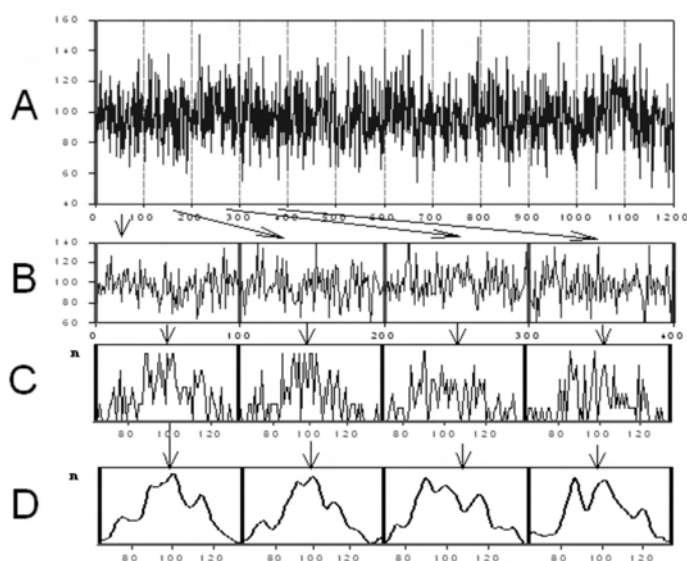


Рис. 1. Методика построения гистограмм.

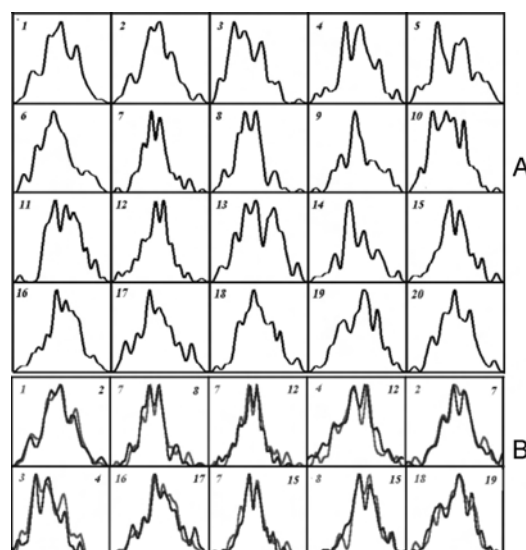


Рис. 2. Исходная последовательность и пары подобных гистограмм.

Рассмотрим методику обработки экспериментальных данных, на которой основано обнаружение основных феноменов эффекта макроскопических флуктуаций. Эту методику условно можно подразделить на два этапа. Первый этап показан на рис. 1. Здесь, рис. 1А представляет исходный ряд величин флуктуаций некоторого процесса, который разбивается на короткие отрезки, обычно 30–100 точек, рис. 1В. Для каждого такого отрезка строится гистограмма – функция распределения величин флуктуаций, рис. 1С. После этого, каждая гистограмма сглаживается несколько раз n -точечным прямоугольным окном, рис. 1D. Чаще всего используется $n = 4$. В результате, исходный ряд флуктуаций, рис. 1А, преобразуется в последовательность гистограмм, рис. 1D, которые являются предметом последующего анализа, иллюстрируемого рис. 2, где показан второй этап обработки гистограмм.

На рис. 2А дан пример последовательности из $N = 20$ гистограмм, являющейся исходным материалом для процесса экспертного сравнения. Данная последовательность, являясь результатом первого этапа, тождественна последовательности на рис. 1D. Каждая гистограмма в ней сравнивается со всеми другими гистограммами этой или другой подобной последовательности. В случае, если гистограммы сравниваются с гистограммами той же последовательности, необходимо произвести $N(N - 1)/2$ попарных сравнений, для различающихся последовательностей одинаковой длины – N^2 сравнений. Так, для исследования последовательности, рис. 2А, необходимо 190 сравнений. Рис. 2В дает 10 пар гистограмм, которые, в результате экспертной оценки, признаны похожими.

Как можно видеть из рис. 2В, процесс экспертного сравнения состоит в оценке подобия формы пар гистограмм. Как показала практика, экспертная оценка является наиболее чувствительной к особенностям формы гистограмм и, как правило, не может быть повторена традиционными методами корреляционного анализа, спектрального анализа, введением различного рода мер сходства и т. д. [2]. Как следует из многолетних попыток создания автоматических алгоритмов сравнения форм гистограмм, полная или частичная автоматизация процесса экспертного сравнения возможна на пути создания комплексных алгоритмов моделирующих отдельные аспекты человеческого восприятия, в особенности его целостную природу. Можно отметить определенные успехи, достигнутые на этом пути [3].

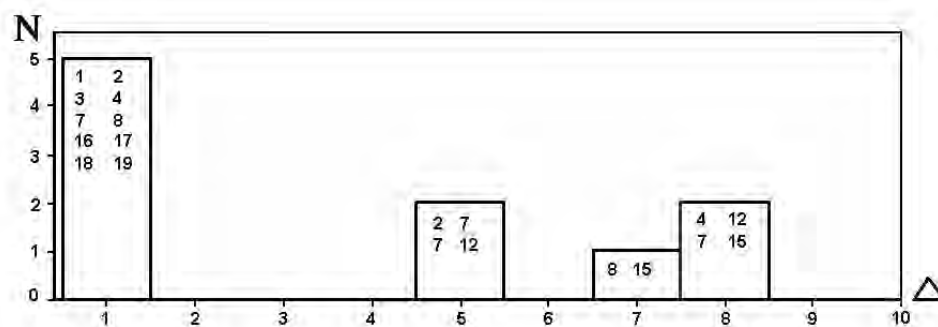


Рис. 3. Пример построения распределения интервалов для последовательности гистограмм, приведенной на рис. 2А.

Заключительной стадией второго этапа является получение распределения интервалов между парами подобных гистограмм, показанное на рис. 3. Под интервалом Δ понимается промежуток времени, разделяющий пару гистограмм во временном ряду. Экспертная оценка, являясь двузначной, имеет своим результатом заключение о подобии или непохожести гистограмм. В первом случае, интервал входит в

распределение с весом равным единице, во втором – нулю. Так, например, в последовательности из $N = 20$ гистограмм, представленной на рис. 2А, имеются $N - \Delta = 15$ пар гистограмм разделенных интервалом равным пяти. Из них только две пары с номерами №2 – №7 и №7 – №12 найдены подобными. Следовательно, в результирующем распределении, основанном на последовательности, показанной на рис. 2А, интервал №5 будет иметь значение равное двум.

Построение распределения интервалов, завершая процесс обработки экспериментальных данных, является основой дальнейшего анализа, в процессе которого получены основные свойства МФ-эффекта, которые рассмотрены ниже.

2 Основные свойства МФ-эффекта

Самый общий итог многолетних исследований эффекта макроскопических флуктуаций – доказательство неслучайности тонкой структуры формы гистограмм, построенных по относительно небольшому числу результатов измерений хода во времени флуктуаций процессов различной природы – от биохимических реакций и шумов в гравитационной антенне до α -распада. Рассмотрим основные черты МФ-эффекта.

1) Эффект ближней зоны

Этот эффект состоит в достоверно более высокой вероятности появления сходных гистограмм в ближайших (соседних) не перекрывающихся интервалах рядов результатов измерений, рис. 4 а). Из "эффекта ближней зоны" естественно следует понятие "время жизни" данной идеи формы. Однако пока не удалось найти столь малое время, чтобы форма гистограмм не успевала измениться. Максимальная вероятность сходства только в первом, ближайшем соседнем интервале времени не изменялась при изменении этого интервала от нескольких часов до миллисекунд. Физический смысл этой своеобразной фрактальности требует дальнейших исследований [1, 2, 4].

2) Универсальность МФ-эффекта

Универсальность МФ-эффекта заключается в высокой вероятности сходства формы гистограмм, построенных по результатам одновременных, независимых измерений флуктуаций в процессах различной качественной природы. Сходство гистограмм при исследовании процессов, в которых диапазоны превращаемой энергии отличаются на десятки порядков (энергия α -распада и шумов в гравитационной антенне – различие около 40 порядков) означает, что этот фактор неэнергетической природы. Ввиду принципиального различия природы процессов и методов их измерений такое сходство также означает весьма общую природу фактора, определяющего форму гистограмм [1, 2, 5].

3) Периодичность проявления МФ-эффекта

Важным свидетельством неслучайности формы гистограмм являются их закономерные изменения во времени. Эти закономерности проявляются в:

3.1. Наличии околосуточных периодов изменения вероятности реализации гистограмм данной формы; существовании хорошо разрешимых "звездного" (1436 минут) и "солнечного" (1440 минут) суточных периодов. Наличие этих периодов означает зависимость формы гистограмм от вращения Земли вокруг своей оси. При этом экспозиция относительно картины звездного неба и экспозиция относительно Солнца определяют форму гистограмм независимо.

3.2. Наличии около 27-ми суточных периодов изменения вероятности реализации гистограмм данной формы. Эти периоды можно считать признаком зависимости

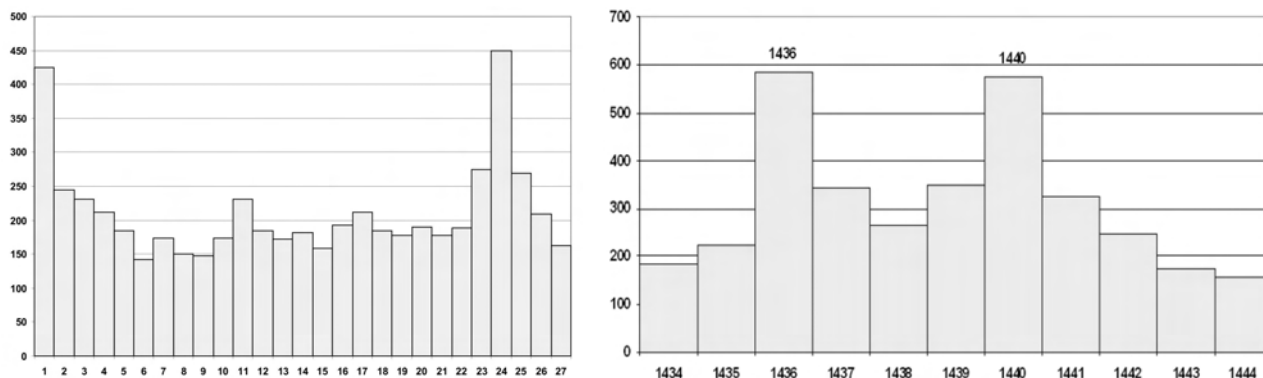


Рис. 4. а) Иллюстрация эффекта ближней зоны и суточного периода: 1-часовые гистограммы, построенные по 60-ти 1-мин измерениям активности ^{239}Pu . Видно, что наиболее вероятна повторная реализация гистограмм сходной формы в ближайший соседний интервал времени и через 24 часа [6].

б) "Расщепление" 24-часового пика при использовании 1-мин гистограмм, построенным по 60-ти 1-сек измерениям активности ^{239}Pu [7].

Для обоих графиков: ось X – интервал времени между парой гистограмм: а) часы, б) минуты; ось Y – число пар гистограмм, найденных подобными.

формы гистограмм от экспозиции относительно ближайших небесных тел – Солнца, Луны и, возможно, планет [8].

3.3. Наличии годовых периодов, проявляющихся в высокой вероятности реализации сходных гистограмм через годы; в существовании хорошо разрешимых "календарного" (365 солнечных суток) и "звездного" (сидерического: 365 солнечных суток плюс 6 часов и 9 минут) годовых периодов [9].

3.4. Результат, представляющийся парадоксальным: в дни равноденствий наблюдается четкий период увеличения вероятности сходства гистограмм, равный 718 минутам, т. е. звездным полусуткам. В дни солнцестояний такого периода нет. Этот феномен свидетельствует о зависимости формы гистограмм от положения Солнца на Эклиптике. При верности этого вывода можно ожидать, что на экваторе период 718 минут будет наблюдаться круглогодично.

Все вышеперечисленные периоды означают зависимость формы гистограмм от 1) вращения Земли вокруг своей оси и от 2) движения Земли по околосолнечной орбите.

4) Эффект местного времени

Зависимость формы гистограмм от вращения Земли вокруг своей оси с большой четкостью проявляется также в эффекте местного времени – высокой вероятности появления пар сходных гистограмм в разных географических пунктах – от Арктики до Антарктики, в Западном и Восточном полушариях в одно и то же местное (долготное) время. Необходимо отметить, что синхронность по местному времени с точностью в 1 минуту наблюдается на предельно возможных на Земле расстояниях (около 15 тысяч километров) независимо от широты местности. В некоторых случаях наблюдается также синхронность по абсолютному времени.

На рис. 5 приведены два распределения интервалов, построенные на основе рядов флуктуаций скорости α -распада ^{239}Pu , измеренных 1.03.2003 в Пущино ($54^{\circ}50'$ с. ш., $37^{\circ}38'$ в. д.) и на станции Новолазаревская в Антарктиде ($70^{\circ}02'$ ю. ш., $11^{\circ}35'$ в. д.). Расстояние между точками измерений около 14500 км и разность местного времени 103 мин. В левой части рис. 5 приведено распределение интервалов, показывающее

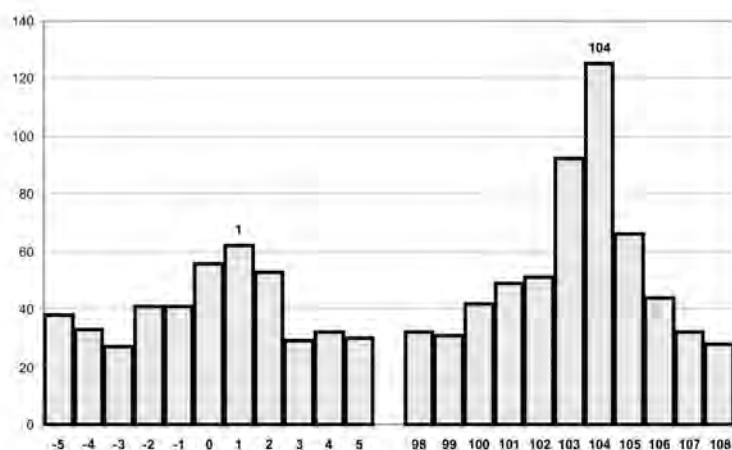


Рис. 5. Синхронность по абсолютному (левый рис.) и местному (правый рис.) времени. Ось X – интервал между парами подобных гистограмм, мин.; ось Y – число сходных пар, отобранных экспертом.

синхронность появления сходных пар гистограмм по абсолютному времени, в правой части рис. 5 – по местному времени. Видно, что синхронность по местному времени выражена значительно более ярко [1, 2].

5) Исчезновение суточных периодов при измерениях вблизи Северного полюса

Зависимость формы гистограмм от вращения Земли вокруг своей оси проявляется в исчезновении околосуточных периодов при измерениях вблизи Северного полюса. Такие измерения были проведены в 2000 г под 82° с. ш. Исчезли околосуточные периоды при построении гистограмм за 15 или 60 минут. Однако околосуточные периоды изменения вероятности повторного появления 1-минутных гистограмм данной формы сохранялись. Сохранялась также синхронность по местному времени появления 1-минутных гистограмм сходной формы [8].

Из этих результатов следовала необходимость проведения измерений возможно ближе к Полюсу. Ввиду невозможности реализации таких измерений были проведены измерения с использованием коллиматоров, вырезающих пучки α -частиц, вылетающих при радиоактивном распаде ^{239}Pu в разных направлениях. Результаты этих опытов привели к принципиальным изменениям наших представлений о природе МФ-эффекта [10].

6) Неподвижный коллиматор, направленный на Полярную звезду

Для гистограмм, построенных по результатам подсчета α -частиц, вылетающих при радиоактивном распаде на Север (в направлении на Полярную звезду), околосуточные периоды не наблюдаются и эффекта ближней зоны нет. Эти измерения осуществлялись в Пущино под 54° с. ш., а эффект аналогичен, ожидавшемуся под 90° с. ш. – на Северном полюсе. Это означает зависимость формы гистограмм от направления в пространстве. Такая зависимость, в свою очередь, влечет за собой вывод об анизотропии пространства [8, 10].

7) Опыты с неподвижными коллиматорами, направленными на восток и на запад

Вывод об анизотропии пространства был подкреплён одновременными измерениями с двумя коллиматорами – одним, направленным на восток и другим, направлен-

ным на запад. В этих опытах было получено два важных эффекта:

7.1. Гистограммы, регистрируемые при измерениях с "восточным" коллиматором, с высокой вероятностью реализуются при измерениях с "западным" коллиматором на 718 минут позже, т.е. через половину "звездных" суток.

7.2. При измерениях с "восточным" и "западным" коллиматорами одновременно, сходные гистограммы не наблюдаются. В опытах без коллиматоров, при измерениях в одном и том же месте, сходные гистограммы с высокой вероятностью наблюдаются в одно и то же время. Этой синхронности нет при одновременных измерениях числа α -частиц, вылетающих через коллиматоры в разных направлениях.

Эти результаты согласуются с представлениями об анизотропии пространства, т.е. о зависимости формы гистограмм от направления вылета α -частиц [11].

8) Опыты с вращаемыми коллиматорами

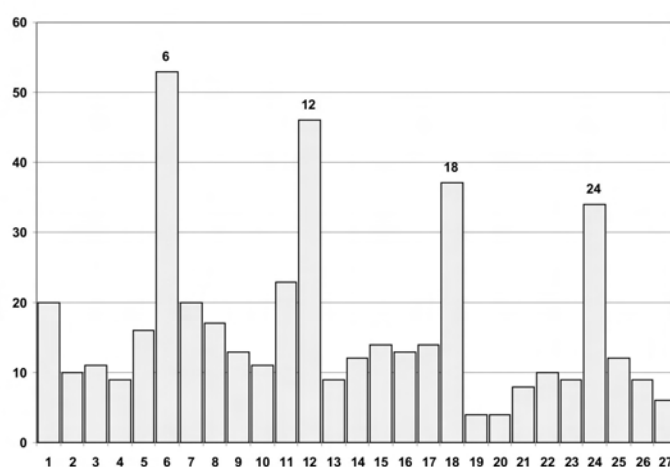


Рис. 6. Распределение интервалов, между парами 60-мин гистограмм, построенное на основе измерений флуктуаций скорости α -распада с использованием коллимированного источника ^{239}Pu , совершающего 3 оборота против часовой стрелки, плюс один оборот самой Земли – всего 4 оборота в сутки, т.е. "обзор неба" за 6 часов. Видны четкие 6-часовые периоды. Ось X – 1-часовые интервалы, Y – число схожих пар гистограмм.

Естественным развитием отмеченных выше исследований были опыты с вращением коллиматоров [12].

8.1. При вращении коллиматора против часовой стрелки (в направлении вращения Земли) сканирование небесной сферы производится с периодами, кратными числу оборотов коллиматора в сутки плюс 1 оборот, совершаемый самой Землей. Было проведено исследование зависимости вероятности появления сходных гистограмм от числа оборотов в сутки вращаемого коллиматора. Было получено, что вероятность появления гистограмм данной формы резко возрастает с периодами, равными 1440 минутам, деленным на число оборотов коллиматора плюс 1. Измеряли периоды при 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11 и 23 оборотах коллиматора в сутки. И нашли, соответственно, периоды равные 12, 8, 6 и т.д. часам. При 1-минутном разрешении эти периоды расщепились на два экстремума каждый – "звездный" и "солнечный". Эти результаты означали, что форма гистограмм, в самом деле, определяется направлением вылета α -частиц [12]. Пример 6-часовых периодов, полученных при трех оборотах против часовой стрелки для последовательности 1-часовых гистограмм, показан на рис. 6.

8.2. При вращении коллиматора, совершающего 1 оборот в сутки по часовой стрелке, произошла компенсация вращения Земли – α -частицы все время вылетали в

направлении к одному и тому же участку небесной сферы – и, соответственно, исчезли суточные периоды. Этот результат оказался полностью аналогичным результатам измерений вблизи Северного полюса и измерений с неподвижным коллиматором, направленным на Полярную звезду [11].

8.3. При вращении 1 оборот в сутки по часовой стрелке коллиматора, расположенного в плоскости Эклиптики и направленного на Солнце, α -частицы все время вылетают в направлении на Солнце. При этом, как и ожидалось, исчезли околосуточные периоды – и солнечный и звездный.

9) Выделенные формы гистограмм: новолуния и солнечные затмения

Все представленные выше результаты имеют вероятностный характер и были получены в результате десятков тысяч попарных сравнений гистограмм. Совершенно иначе обстоит дело с поиском характерных форм гистограмм в период новолуний и солнечных затмений. В этих случаях смотрится форма гистограмм в заранее рассчитанный момент новолуния или максимума солнечного затмения. При этом было обнаружено, что для этих моментов, практически одновременно, на разных долготах и широтах, по всей Земле, появляются гистограммы характерной, специфической формы. Эти характерные гистограммы соответствуют отрезку временного ряда длиной всего 0.5 – 1 мин [13]. В момент максимума солнечного затмения (как правило, не совпадающего с моментом наступления новолуния) появляется специфическая гистограмма, отличающаяся от гистограммы, появляющейся в моменты новолуний. Естественно, что формы подобные характерным для новолуний или затмений много раз встречаются во временном ряду. Но вероятность их случайного появления именно в эти моменты в разных местах, в разные даты (месяцы, годы) очень мала. Эти специфические формы не связаны с приливными эффектами. Не зависят они и от места на земной поверхности, на которое попадает тень от Луны при затмении или новолунии.

10) Выделенные формы гистограмм: восходы и заходы Солнца и Луны

Форма гистограмм определяется сложным комплексом космо-физических факторов. Как следует из наличия около 27-суточных периодов, среди этих факторов может быть пространственное взаиморасположение и состояние Солнца, Луны и Земли. Мы неоднократно наблюдали сходство гистограмм во времена восходов или заходов Солнца или Луны. Выполнен очень большой объем работы. Однако найти форму гистограмм характерную только для этих моментов не удалось. Обзор и анализ соответствующих результатов будет сделан в специальной публикации.

11) Зеркальная симметрия гистограмм

Весьма часто (до 30% случаев) форма последовательных гистограмм зеркально симметрична – есть правые и левые формы. При этом, речь может идти об очень сложных формах. Этот феномен, возможно, означает, что хиральность является имманентным свойством пространства-времени. [1]

3 Предположение о возможной природе МФ-эффекта.

Идея эксперимента

Приведенные выше свойства 3)–4) МФ-эффекта, указывающие на связь с пространственно-координатным положением небесных тел и свойство 2), утверждающее независимость феноменологии МФ-эффекта от качественной природы флуктуирующего процесса, дают основание предполагать, что наблюдаемые в его рам-

ках феномены могут быть обусловлены только таким общим фактором, как неоднородности пространства-времени или, согласно современным представлениям, быть связанными с гравитационным взаимодействием. С другой стороны, свойства 5)–8) указывающие на пространственную анизотропию фактора, создающего МФ-эффект, а также свойства 9)–10) – синхронное, в планетарном масштабе, появление одинаковых форм гистограмм, связанных с выделенными моментами в динамике Солнца, Земли и Луны, влекут за собой предположение о волновой природе действующего агента.

Суммируя можно предположить, что действующая причина, обуславливающая перечисленные свойства эффекта макроскопических флуктуаций имеет гравитационно-волновую природу. Соответственно этому, форма тонкой структуры функций распределения флуктуаций, являющаяся основным объектом изучения МФ-эффекта, может обладать чувствительностью к гравитационно-волновым воздействиям. Исходя из этого, был разработан эксперимент, упрощенная схема которого изображена на рис. 7.

4 Описание эксперимента. Ожидаемые результаты

Рассмотрим упрощенную схему эксперимента, по обнаружению влияния гравитационно-волнового воздействия на форму функций распределения флуктуаций скорости α -распада, показанную на рис. 7 а). В прямоугольной рамке, в левой части рисунка, схематически изображен источник гравитационно-волнового воздействия (ИГВ), в качестве которого использовалась центрифуга К70, фирмы "JANETZKI", симметрично нагруженная двумя стаканами с водой весом около 1.5 кг каждый.

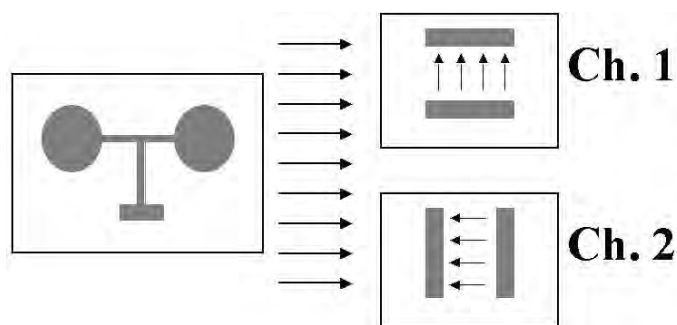


Рис. 7. Упрощенная схема эксперимента по обнаружению влияния гравитационно-волнового воздействия на форму функций распределения флуктуаций скорости α -распада.

Излучение ИГВ, условно показанное параллельными стрелками, воздействует на двухканальную регистрирующую систему, состоящую из двух регистраторов флуктуаций скорости α -распада от источников ^{239}Pu , обозначенных как Ch. 1 и Ch. 2. Средние скорости распада для Ch. 1 и Ch. 2 составляют 272 имп/сек и 174 имп/сек, соответственно. Оба регистратора расположены в плоскости вращения ротора на расстоянии 1.5 м от его оси. Для каждого из них, угол φ между волновым вектором ИГВ и направлением вылета α -частиц (показано стрелками внутри рамок, обозначающих Ch. 1 и Ch. 2) разный: для Ch. 1 $\varphi = 180^\circ$, а для Ch. 2 $\varphi = 90^\circ$. В силу предполагаемой волновой природы механизма воздействия на форму гистограмм, а следовательно, зависимости величины эффекта от φ , регистраторы Ch. 1 и Ch. 2 должны обладать неодинаковой чувствительностью к излучению ИГВ. Скорость распада α -частиц ежесекундно регистрируется специальной автоматической

компьютерной системой. Также использовалась отдельная компьютерная система, ежесекундно регистрирующая величину скорости вращения ротора центрифуги.

Эксперименты проводились как последовательность чередующихся 5-минутных циклов с работающим и выключенным ИГВ, т. е. период воздействия равнялся 10 мин. Скорость вращения ротора, при работающем ИГВ, равнялась 3000 об/мин. Выключенный ИГВ, за счет большой массы ротора К-70 сохранял скорость вращения в районе 300 об/мин.

На рис. 8 а) показана идеализированная диаграмма, иллюстрирующая изменение скорости вращения ротора центрифуги. Предположим, что гистограммы для интервалов с вращением должны быть подобными между собой, но не подобны гистограммам для интервалов без вращения. Так же и гистограммы для интервалов без вращения: подобны между собой и не подобны гистограммам для интервалов с вращением.

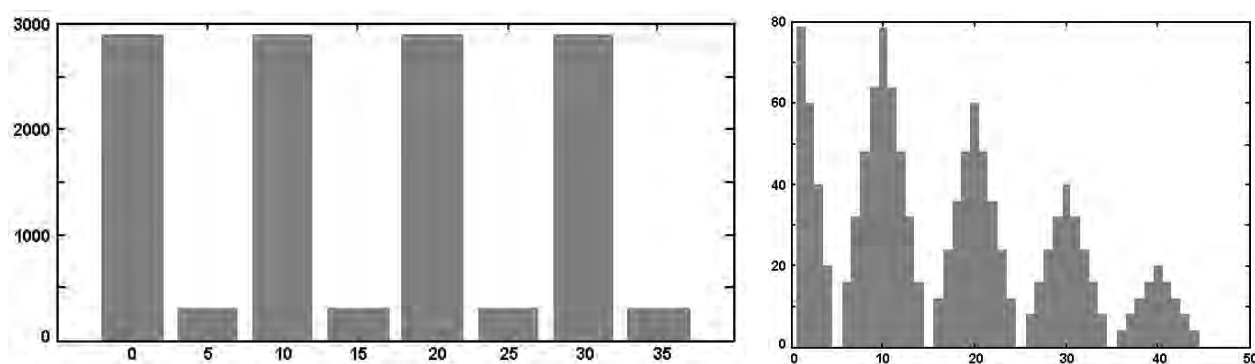


Рис. 8. Диаграмма изменения скорости вращения ротора центрифуги, а) и ожидаемое распределение интервалов, б).

Сделанные предположения позволяют смоделировать соответствующее им распределение интервалов, которое показано на рис. 8 б). Как можно видеть из приведенного рисунка, распределение интервалов, для экспериментальной записи конечной длины, должно состоять из пиков уменьшающейся амплитуды, повторяющихся с периодом равным периоду воздействия.

5 Полученные результаты

Согласно описанной выше методике, было проведено пять серий измерений с целью исследования возможного воздействия ротора вращающейся центрифуги на форму тонкой структуры гистограмм. Характерный пример экспериментальной записи, полученной от регистратора Ch. 1 для серии № 4 приведен на рис. 9 а). Здесь показаны первые 2500 сек записи длиной 26400 сек. На рис. 9 б) показана функция распределения амплитуд флуктуаций для всей записи. Как можно видеть из приведенных графиков, временная развертка флуктуаций скорости α -распада и функция распределения флуктуаций имеют характерный для этого процесса вид. Отсутствие особенностей в экспериментальной записи и соответствующей ей функции распределения является ожидаемым и свидетельствует всего лишь о качестве регистрации. Как уже отмечалось вначале, традиционные методы анализа временных рядов нечувствительны к проявлениям МФ-эффекта.

Согласно описанной в первом разделе методике, на основе полученных экспериментальных записей, были построены последовательности 0.5-минутных гистограмм,

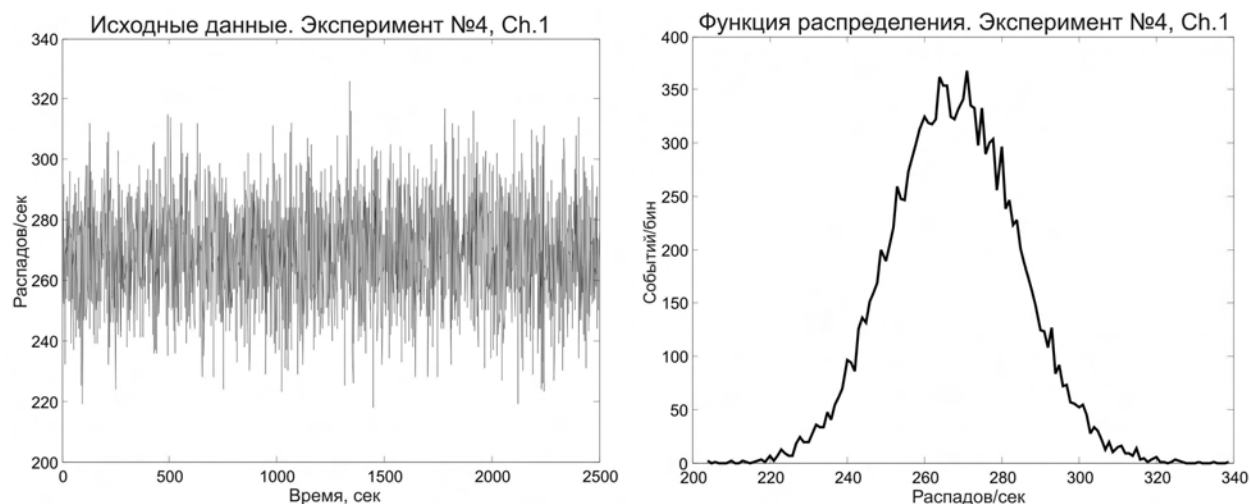


Рис. 9. Пример экспериментальной записи флуктуаций скорости α -распада ^{239}Pu , а) и соответствующая ей функция распределения амплитуд флуктуаций, б).

которые, затем, сравнивались экспертом (С.Э. Шноль). Типичный пример результатов экспертного сравнения для Ch. 1 серия № 4, приведен на рис. 10 а).

Как можно видеть из приведенного графика, в распределениях интервалов наблюдаются достаточно четкие пики с периодом повторения 5 мин. На рис. 10 б) показан спектр мощности, соответствующий распределению интервалов, рис. 10 а). Как следовало ожидать, исходя из вида распределения интервалов, в спектре мощности на рис. 10 б) присутствует четкий пик, соответствующий периоду в 5 мин. Появление периода равного 5 мин является несколько неожиданным с точки зрения описанной выше модели и будет рассмотрено ниже.

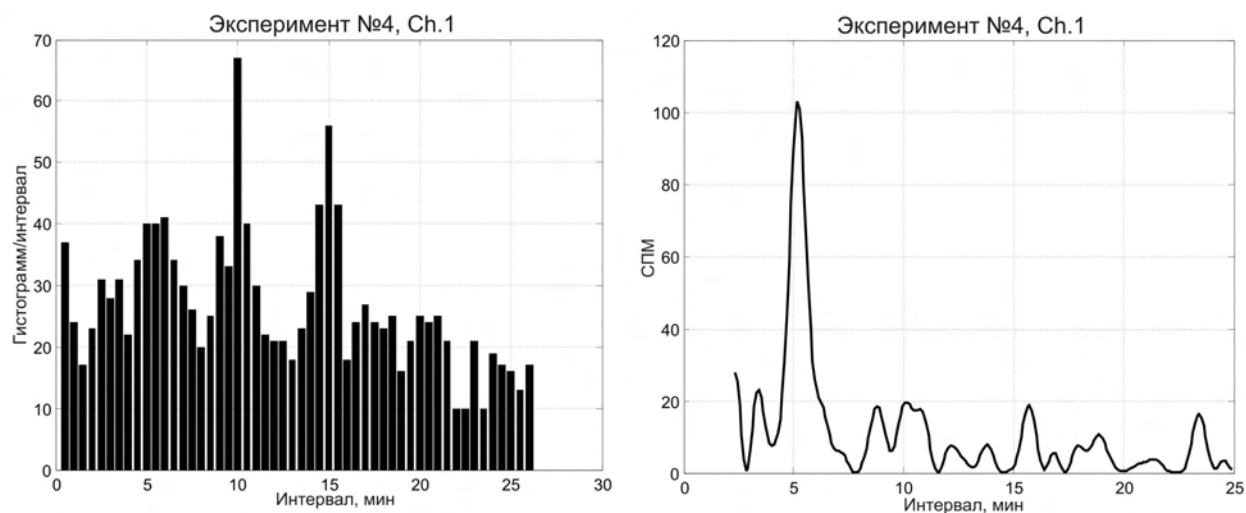


Рис. 10. Примеры распределения интервалов, полученного для Ch. 1 в серии измерений №4, а), и спектральная плотность мощности, построенная на его основе, б).

Для удобства сравнения на рис. 11 а) приведены графики распределений интервалов для Ch. 1 (помечено звездочками) и Ch. 2 (помечено кружочками). Как можно видеть, для Ch. 2 отсутствует характерная для Ch. 1 повторяемость пиков с 5-минутным периодом. На рис. 11 б) приведены спектры мощности, соответствующие распределениям интервалов на рис. 11 а). Видно полное отсутствие пика с периодом в 5 мин для Ch. 2. Данный результат свидетельствует о верности предположения

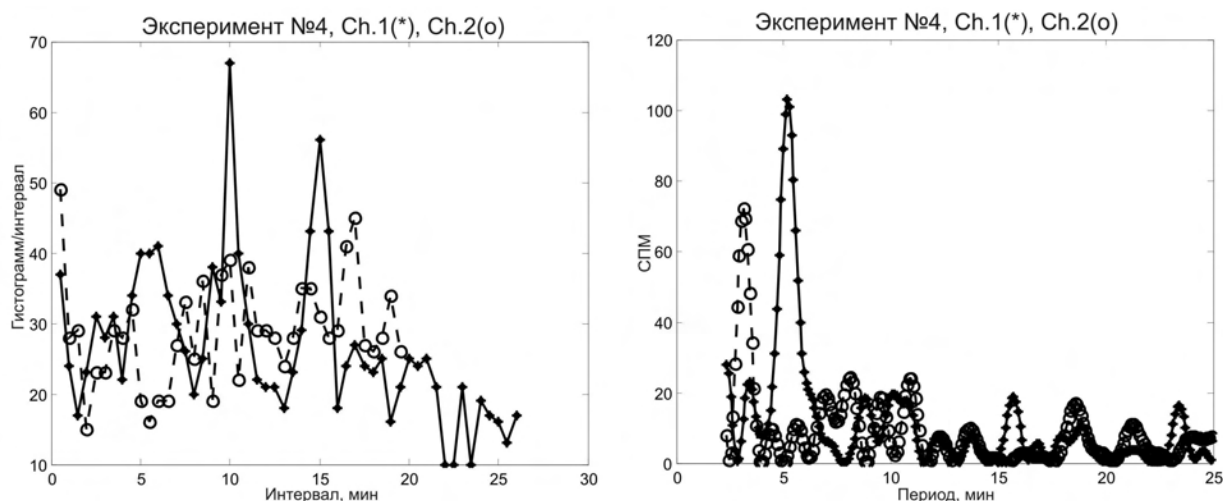


Рис. 11. Примеры распределения интервалов для Ch. 1 (*) и Ch. 2 (°), серия № 4 а) и полученные на его основе спектры мощности, б).

о зависимости наблюдаемого эффекта от угла. В то же время, иногда в спектрах мощности для Ch. 2 наблюдается пик с периодом в 2.5–3 мин, также показанный на рис. 11 б). Природа этого пика, его связь с динамикой ИГВ, пока неизвестна.

6 Обсуждение результатов эксперимента. Ускорения

Представленные выше результаты, проиллюстрированные данными для серии измерений №4, были получены также и во всех других сериях. Это дает нам основание утверждать о воздействии вращающегося ротора центрифуги на форму построенных по малым (30 штук 1-секундных измерений) выборкам функций распределения амплитуд флуктуаций скорости α -распада, проявляющемся в повышенной вероятности появления подобных форм гистограмм с периодом равным половине периода воздействия, т. е. 5 мин.

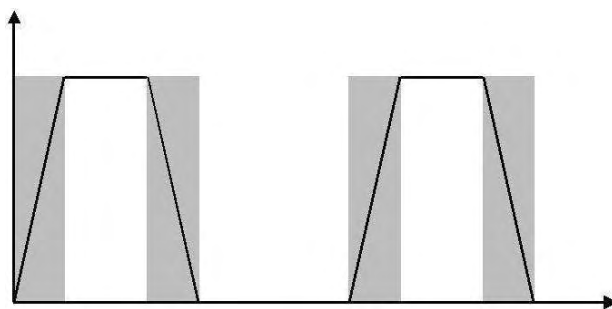


Рис. 12. Моменты разгона и торможения ротора центрифуги.

Появление пятиминутного периода, вместо ожидаемого периода в 10 мин заставляет предположить, что регистрирующая система чувствительна не к моментам наличия или отсутствия вращения ротора центрифуги, а к моментам его разгона и торможения, т. е. не к скорости вращения, как предполагалось в представленной на рис. 8 модели, а к ускорениям. Рис. 12 иллюстрирует данное предположение. Здесь серыми прямоугольниками отмечены моменты разгона и торможения ротора. Так как каждый период воздействия содержит по два таких момента, то в случае чувствительности формы гистограмм к моментам ускорений ротора центрифуги, должно

происходить удвоение частоты воздействия на форму гистограмм. При этом, распределение интервалов должно быть подобным представленному на рис. 8 б) с тем отличием, что период повторяемости пиков должен уменьшиться в два раза, что и наблюдается во всех экспериментах для данных, полученных от регистратора Ch. 1.

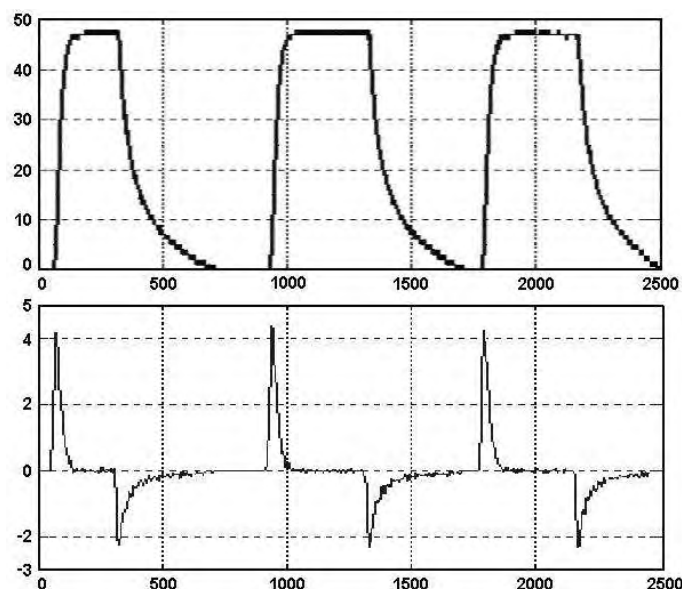


Рис. 13. Тестовая запись скорости вращения ротора центрифуги (вверху) и ее производная (внизу).

Данные о зависимости скорости вращения ротора центрифуги подтверждают это предположение. Действительно, на рис. 13, вверху, представлена тестовая запись трех циклов разгона-торможения скорости вращения ротора центрифуги. На том же рисунке, внизу, дана производная скорости вращения, соответствующая ускорениям ротора. Видны, узкие пики, соответствующие режимам с ускорением. Предположительно, моменты времени, соответствующие подобным пикам ответственны за возникновение форм гистограмм, обуславливающих наблюдаемый в представленных экспериментах пятиминутный период.

В пользу предположения о том, что именно режимы с ускорением могут приводить к изменению формы регистрируемых гистограмм, нам хотелось бы отметить работы [14, 15], в которых использовалась экспериментальная система, в некотором смысле комплиментарная представленной в настоящей статье. Чувствительным элементом этой системы являлась быстро вращающаяся масса, для которой искусственно создавались режимы с ускорением, путем подачи специального тормозящего импульса, длительностью 18–30% от величины периода вращения [14]. Регистрируемым параметром являлась угловая скорость вращающейся массы. Подобная система оказалась чувствительной к тем же событиям, которые отмечены в свойствах МФ-эффекта 9) и 10) [15]. Все эти события также связаны с определенными экстремумами в скорости изменения координатно-временного положения Солнца, Земли и Луны и поэтому могут рассматриваться как режимы с ускорением.

В качестве второго примера экспериментов, где, по нашему мнению, проявляются себя механизмы близкие к обнаруженным в настоящей работе, можно привести [16]. Здесь, в качестве регистрирующей системы, использовалась пара прецизионных кварцевых резонаторов опорных автогенераторов стандартных электронносчетных частотомеров с рабочей частотой 5 МГц, определенным образом ориентированных в пространстве. Регистрируемый параметр – относительные противофазные измене-

ния резонансных частот кварцевых резонаторов – назывался Т-сигналом. Исследование суточного хода Т-сигнала выявило его анизотропию с максимумами, соответствующими местному полудню и полночи. Авторами отмечается неэлектромагнитная природа Т-сигнала, его биологическая активность. Ход Т-сигнала связывается с гравитационно-волновым излучением Солнца.

Можно отметить общие моменты характерные для работ [14–16] и рассматриваемого в настоящей работе эксперимента. Первая важная особенность – наличие "режимов с ускорением" в регистрирующей системе, позволяющих выделить некоторое направление в пространстве. В наших экспериментах оно задается направлением вылета α -частиц, в [14–15] – моментом подачи подтормаживающего импульса, в [16] – перпендикуляром к плоскости колебаний пластины кварцевого резонатора. "Режимы с ускорением", обуславливая анизотропные свойства регистрирующей системы, в то же время, делают ее чувствительной к таким же "режимам с ускорением", которые являются внешними по отношению к ней и, предположительно, связаны с гравитационно-волновым излучением.

Суммируя отметим, что в результате проведенного экспериментального исследования зафиксировано воздействие быстро вращающегося массивного тела на форму тонкой структуры, построенных по малым выборкам, функций распределения амплитуд флуктуаций скорости α -распада ^{239}Pu , проявляющееся в повышенной вероятности подобия форм гистограмм для моментов соответствующих "режимам с ускорением". Воздействие обладает анизотропными свойствами и, предположительно, имеет гравитационно-волновую природу.

Литература

1. Шноль С. Э. и др. О реализации дискретных состояний в ходе флуктуаций в макроскопических процессах. // УФН, 1998, 168 (10), 1129–1140.
2. С. Э. Шноль, Т. А. Зенченко, К. И. Зенченко, Э. В. Пожарский, В. А. Коломбет, А. А. Конрадов. Закономерное изменение тонкой структуры статистических распределений как следствие космофизических причин // УФН 2000, 170 (2), 214–218.
3. Зенченко Т. А., Стрелков В. В., Шаповалов С. Н., Макаревич А. В., Зенченко К. И. Применение компьютерного алгоритма к установлению сходства форм гистограмм в "эффекте ближней зоны". Сходство спектральных характеристик ЭВЗ и параметров солнечного ветра. VI Международная крымская конференция "Космос и биосфера". Тезисы докладов. Партенит, Крым, Украина, 26 сентября – 1 октября 2005 г, с. 47–49.
4. С. Э. Шноль, Н. В. Удальцова, В. А. Коломбет, В. А. Намиот, Н. Б. Бодрова. Закономерности в дискретных распределениях результатов измерений (космофизические аспекты). // Биофизика, 1992, 37 (3), 467–488.
5. С. Э. Шноль, В. А. Намиот, В. Е. Жвирблис, В. Н. Морозов, А. В. Темнов, Т. Я. Морозова. Возможная общность макроскопических флуктуаций скоростей биохимических и химических реакций, электрофоретической подвижности клеток и флуктуаций при измерениях радиоактивности, оптической активности и фликкерных шумов. // Биофизика, 1983, 28 (1), 153–157.
6. С. Э. Шноль. Форма спектров состояний, реализуемых в ходе макроскопических флуктуаций, зависит от вращения Земли вокруг своей оси. // Биофизика, 1995, 40 (4), 865–875.
7. С. Э. Шноль. Макроскопические флуктуации как следствие арифметических и космофизических причин. // Биофизика, 2001, 46 (5), 775–782.
8. С. Э. Шноль. Закономерные изменения тонкой структуры статистических распределений в случайных процессах, как следствие арифметических и космофизических причин. (текст доклада 16.10.2002 г. на семинаре ректора МГУ академика В. А. Садовниченко).

Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы" выпуск 3, М. Книжный Дом "Университет", 2004, стр. 121–154.

9. Shnoll S. E., Zenchenko K. I., Udaltsova N. V., Cosmo-physical effects in structure of the daily and yearly periods of change in the shape of the histograms constructed by results of measurements of alpha-activity Pu^{239} . <http://arxiv.org/abs/physics/0504092>.

10. С. Э. Шноль, К. И. Зенченко, И. И. Берилис, Н. В. Удальцова, С. С. Жирков, И. А. Рубинштейн Зависимость "макроскопических флуктуаций" от космофизических факторов. Пространственная анизотропия. //Биофизика 2004, 49 (1), 132–139.

11. Simon E. Shnoll, Konstantin I. Zenchenko, Iosias I. Berulis, Natalia V. Udaltsova and Ilia A. Rubinstein Fine structure of histograms of alpha-activity measurements depends on direction of alpha particles flow and the Earth rotation: experiments with collimators. <http://arxiv.org/abs/physics/0412007>.

12. Shnoll S. E., Rubinshtejn I. A., Zenchenko K. I., Shlekhtarev V. A., Kaminsky A. V., Konradov A. A., Udaltsova N. V. Experiments with Rotating Collimators Cutting out Pencil of α -Particles at Radioactive Decay of ^{239}Pu Evidence Sharp Anisotropy of Space // Progress in Physics, V. 1, 2005, pp. 81–84. <http://arxiv.org/abs/physics/0501004>.

13. Shnoll S. E., Zenchenko K. I., Shapovalov S. N., Gorshkov S. N., Makarevich A. V. and Troshichev O. A. The specific form of histograms presenting the distribution of data of α -decay measurements appears simultaneously in the moment of New Moon in different points from Arctic to Antarctic. <http://arxiv.org/abs/physics/0412152>.

14. Б. Ю. Богданович, И. С. Щедрин, В. Н. Смирнов, Н. В. Егоров. Особый способ вращения массы – инструмент для астрофизических исследований. // Научная сессия МИФИ, 2003, т. 7, 45–46.

15. Б. Ю. Богданович, И. С. Щедрин, В. Н. Смирнов, Н. В. Егоров. Предварительные аналитические оценки изменения кинетической энергии вращающейся массы от координатно-временного положения Солнца и Луны. // Научная сессия МИФИ, 2003, т. 7, 47–48.

16. Н. В. Ключек, Л. Э. Паламарчук, М. В. Никонова. Предварительные результаты исследований воздействия космофизического излучения неэлектромагнитной природы на физические и биологические системы. // Биофизика, 1995, 40 (4), 889–896.

ОТНОШЕНИЕ ОДНОВРЕМЕННОСТИ В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия

zaripov@mail.knc.ru

Дается новое определение отношения одновременности разноместных событий, устанавливаемое сигнальным методом, в финслеровом пространстве-времени с форм-инвариантной метрической функцией и находятся общие преобразования проективных однородных координат в двух векторных формах. Взаимосвязь между событиями осуществляется плоскими волнами де Бройля по четырем векторам выделенных направлений трехмерного пространства. Исследуются групповые свойства неаддитивного закона композиции элементов группы трехмерных скоростей (неоднородных проективных координат) с квадратичной нелинейностью. Вводится новая аддитивная угловая мера, зависящая от векторов выделенных направлений. Используя гамильтонов формализм, находятся соотношения для энергии и импульса частицы, а также приводятся их преобразования в векторных формах. В частных случаях полученные результаты совпадают с известными. Рассматривается финслерово пространство-время с отношением абсолютной одновременности разноместных событий и преобразованиями Галилея.

1. Введение

В знаменитой работе [1] А. Пуанкаре впервые приводит определение физического понятия отношения одновременности разноместных событий в инерциальной системе отсчета. Геометрическим образом в трёхмерном пространстве выбрана волновая поверхность (или так называемая поверхность постоянной фазы) в виде сферы, обладающей центральной симметрией, а геометрическим объектом является расстояние. Используя методы метрической геометрии, А. Пуанкаре впервые рассмотрел формализм четырехмерного пространства-времени и нашел все инварианты группы Лоренца [2]. Наконец, Г. Минковский [3] использовал формализм четырехмерной метрической геометрии, предложенной А. Пуанкаре, и ввел локальное изотропное четырехмерное псевдоевклидово пространство-время в галилеевых координатах, которое является базисом физической релятивистской теории (для случая специальной теории относительности). Метрическая функция

$$F = ds = [(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2]^{1/2}, \quad (1.1)$$

равная расстоянию между событиями в пространстве-времени, имеет при $F = 0$ две характеристики для сигнала.

Работы французского ученого имеют большое значение для релятивистской механики и в настоящее время незаслуженно принижены. В 1904 году Казанское физико-математическое общество удостоивает А. Пуанкаре золотой медали фонда имени Н. И. Лобачевского, а премия имени Н. И. Лобачевского присуждается Д. Гильберту. Н. И. Лобачевский 19 лет (1827 – 1846 гг.) служил ректором Казанского Императорского университета, учрежденного 17 (5) ноября 1804 года императором Александром I, и в 1826 году впервые открыл неевклидову геометрию [4], которая, в частности, реализуется в трехмерном пространстве скоростей Фока [5]. А. Пуанкаре

и Н. И. Лобачевский утверждали, что различные физические явления могут быть описаны в терминах различных геометрий.

Существуют некоторые модели обобщения псевдоевклидовой геометрии. Одним из перспективных подходов является изучение локального финслерового пространства-времени, характерным свойством которого является наличие анизотропии. Недавно в работах [6–9] предложена новая модель четырехмерного пространства-времени в виде локальной анизотропной финслеровой геометрии с метрической функцией Бервальда-Моора

$$F = [(cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz)(cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz)]^{1/4} \quad (1.2)$$

и ее обобщения

$$F = [(cdt - dx - dy - dz)^{1+r_1+r_2+r_3} (cdt + dx - dy + dz)^{1-r_1+r_2-r_3} \times \\ \times (cdt - dx + dy + dz)^{1+r_1-r_2-r_3} (cdt + dx + dy - dz)^{1-r_1-r_2+r_3}]^{1/4}, \quad (1.3)$$

имеющих четыре характеристики для сигнала. При $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ и замене $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$ метрическая функция (1.3) совпадает с (1.2).

Геометрическим образом в трёхмерном пространстве выбрана замкнутая волновая поверхность: специально ориентированный координатный тетраэдр, не обладающий центральной симметрией. Геометрическим объектом является объем. В такой модели естественно применять методы проективной геометрии с соответствующей теорией инвариантов и мер, среди которых, как известно, отсутствует понятие расстояния в метрической форме, однако есть мера угла и т. п. Были получены преобразования проективных однородных координат t , x , y и z при переходах между движущимися инерциальными системами отсчетов, которые сохраняют форм-инвариантность метрических функций (1.2) и (1.3), а также преобразования проективных неоднородных координат u_x, u_y, u_z , являющихся компонентами трехмерной скорости движения. Преобразования импульса и энергии частицы в финслеровой геометрии с (1.3) даются в [10].

Метрические функции (1.2) и (1.3) принадлежат к классу функций

$$F = \left[(a_i dx^i)^{1+a} (b_i dx^i)^{1+b} (c_i dx^i)^{1+c} (e_i dx^i)^{1+e} \right]^{1/4}, \quad a + b + c + e = 0, \quad (1.4)$$

введенному Б. Риманом [11].

Целью настоящей работы является изучение отношения одновременности в общем виде для такой финслеровой структуры четырехмерной проективной геометрии и нахождение соответствующих преобразований проективных однородных и неоднородных координат, а также энергии и импульса частицы.

2. Отношение одновременности разноместных событий

Рассмотрим разноместные события в четырех точках трехмерного пространства инерциальной системы отсчёта (K), взаимосвязанные сигналом, являющимся наиболее быстрым процессом установления причинно-следственной цепи. Пусть из точки O в момент времени T посылаются сигналы в четыре точки A и A^n ($n = 1, 2, 3$). Сигналы достигают этих точек в момент времени t ($t > T$). После отражения от точек A^n сигналы возвращаются в точку O в момент времени T^n ($T^n > t$). Наблюдаемыми величинами являются T и T^n в точке O .

Определение 1. Имеется единое время (или дается отношение одновременности событий) для точек O , A и A^n при выполнении условия

$$(t - T) = (T^1 - t) + (T^2 - t) + (T^3 - t). \quad (2.1)$$

Данное определение означает равенство интервала времени при распространении сигнала от точки O до точки A сумме интервалов времён при распространении от трех точек A^n в точку O , записанное в виде $t_{OA} = t_{A^1O} + t_{A^2O} + t_{A^3O}$ ($t_{OA} = -t_{AO} > 0$, $t_{A^nO} = -t_{OA^n} > 0$). Из (2.1) получим значение момента времени t

$$t = T + \frac{1}{4} \sum_n^3 (T^n - T) = \frac{1}{4} \left(T + \sum_n^3 T^n \right), \quad (2.2)$$

зависящее от моментов времен T и T^n в точке O и являющееся их средним арифметическим. Согласно (2.2) часы в точках O , A и A^n являются синхронизованными.

Определение 2. Величина

$$\overline{OA} = \overline{A^1O} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O} \quad (2.3)$$

есть длина отрезка пути от точки O до точки A и равняется сумме длин путей от трех точек до точки O .

Определение 3. Величина

$$c = \frac{\overline{OA} + \overline{A^1O} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}}{t_{OA} + t_{A^1O} + t_{A^2O} + t_{A^3O}} \quad (2.4)$$

является универсальной постоянной и определяет физическую скорость сигнала в различных инерциальных системах отсчетов.

Согласно (2.1) и (2.3), из (2.4) получим соотношение $t - T = \overline{OA}/c$, из которого следует $\overline{OA} = -\overline{AO} > 0$. Аналогичные определения выполняются для точек A^1 , A^2 и A^3 . Например, используя определения для точки A^1 , запишем соотношения

$$\begin{aligned} t_{OA^1} &= t_{AO} + t_{A^2O} + t_{A^3O}, \quad \overline{OA^1} = \overline{AO} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}, \\ c &= \frac{\overline{OA^1} + \overline{AO} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}}{t_{OA^1} + t_{AO} + t_{A^2O} + t_{A^3O}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

и получим $T^1 - t = \overline{A^1O}/c$.

Таким образом, для остальных трех точек запишем следующие равенства

$$T^n - t = \frac{\overline{A^nO}}{c}, \quad \overline{A^nO} = -\overline{OA^n} > 0. \quad (2.6)$$

Пусть точка O – начало координат 3-мерного пространства. Из (2.5) и (2.8) следуют, с учетом неравенств для длин отрезков путей, линейные формы для координат

$$\overline{OA} = (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x}), \quad \overline{A^nO} = (\boldsymbol{\varepsilon}^n \mathbf{x}), \quad (2.7)$$

являющиеся скалярными произведениями векторов $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^n = \{\varepsilon_x^n, \varepsilon_y^n, \varepsilon_z^n\}$ и радиус-вектора $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Длина отрезков путей состоит из длин отрезков, направленных вдоль осей и параллельных им прямых. Имеем четыре выделенных направления в виде векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ и четыре равенства для характеристик

$$T = t - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x})}{c}, \quad T^n = t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n \mathbf{x})}{c}, \quad (2.8)$$

совпадающих с измеряемыми значениями моментов времен. Данные равенства характерны для проективной геометрии, где t , x , y , z есть проективные однородные

координаты. В метрической геометрии пространства-времени Минковского с (1.1) имеют место два равенства для характеристик $T = t - |\mathbf{x}|/c$, $T^1 = t + |\mathbf{x}|/c$, вытекающих из определения отношения одновременности Пуанкаре, определения расстояния между точками и определения универсальной постоянной c , как физической скорости сигнала.

Из (2.8) следует, что сигнал представляет собой монохроматическую волну. Для такой плоской волны поверхность постоянной фазы есть плоскость, которая движется с фазовой скоростью, не зависящей от частоты. Движение волновой поверхности происходит в направлениях четырёх векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$. Такое количество векторов, концы которых находятся в начале координат, является минимальным для образования в 3-мерном пространстве замкнутой волновой поверхности в виде четырехгранника.

Равенство 1. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4} (-\varepsilon_i + \varepsilon_i^1 + \varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^3) = 0, \quad (2.9)$$

которое является следствием соотношений (2.2), (2.8) и означает линейную зависимость векторов

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n. \quad (2.10)$$

Далее рассмотрим две инерциальные системы отсчетов (K) и (K') , которые совпадают. Тогда используем равенства $T = T'$ и $T^n = T'^n$ и имеем

$$t - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x})}{c} = t' - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}')}{c}, \quad t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\mathbf{x})}{c} = t' + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\mathbf{x}')}{c}. \quad (2.11)$$

Складывая равенства (2.11), получим $t' = t$, а для координат находим

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}) + \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n(\boldsymbol{\varepsilon}^n\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}') + \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n(\boldsymbol{\varepsilon}^n\mathbf{x}'). \quad (2.12)$$

Поскольку $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, то необходимо следующее дополнительное требование.

Равенство 2. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4} (\varepsilon_i \varepsilon_j + \varepsilon_i^1 \varepsilon_j^1 + \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 + \varepsilon_i^3 \varepsilon_j^3) = \delta_{ij}, \quad (2.13)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера (или единичная трехмерная матрица).

Используя (2.13), приведем соотношения для характеристик в различных системах отсчетов

$$t^2 + \mathbf{x}^2/c^2 = \frac{1}{4} \left(T^2 + \sum_n^3 (T^n)^2 \right), \quad t'^2 + \mathbf{x}'^2/c^2 = \frac{1}{4} \left(T'^2 + \sum_n^3 (T'^n)^2 \right) \quad (2.14)$$

и перепишем (2.8) в матричном виде $\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{X}$, где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_x & -\varepsilon_y & -\varepsilon_z \\ 1 & \varepsilon_x^1 & \varepsilon_y^1 & \varepsilon_z^1 \\ 1 & \varepsilon_x^2 & \varepsilon_y^2 & \varepsilon_z^2 \\ 1 & \varepsilon_x^3 & \varepsilon_y^3 & \varepsilon_z^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T \\ T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} t \\ x/c \\ y/c \\ z/c \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Воспользуемся результатом произведения матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ (где $\mathbf{H}^T$ – транспонированная матрица). Соотношения (2.14) справедливы тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия

$$1 - (\epsilon\epsilon^n) = 0, \quad 1 + (\epsilon^n\epsilon^r) = 0 \quad (n \neq r), \quad 1 + \epsilon^2 = 1 + (\epsilon^n)^2 = 4. \quad (2.16)$$

Модуль векторов равен $|\epsilon| = |\epsilon^n| = \sqrt{3}$, а $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = 4\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ – единичная четырехмерная матрица). Равенства (2.16) означают, что имеет место произвольно ориентированный правильный четырехгранник или координатный тетраэдр. Объем такого координатного тетраэдра с вершинами на концах четырех векторов $(-\epsilon)$ и ϵ^n принимает значение $V_{tetra} = \det \mathbf{H}/6 = (\epsilon^1 [\epsilon^2 \epsilon^3])/3$, равное трети объема параллелепипеда, построенного на некопланарных векторах $\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3$. Волновая поверхность представляет собой другой координатный тетраэдр с четырьмя гранями, перпендикулярными векторам $(-\epsilon)$ и ϵ^n .

Далее получим, согласно (2.2), (2.8), (2.9), (2.13) и (2.14), следующие соотношения

$$\begin{aligned} t^2 + \mathbf{x}^2/c^2 &= \frac{1}{4} \sum_m (T^m)^2, \\ \mathbf{x}/c &= \frac{1}{4} \sum_m \epsilon^m T^m, \quad t = \frac{1}{4} \sum_m T^m, \quad \frac{1}{4} \sum_m \epsilon_i^m = 0, \quad \frac{1}{4} \sum_m \epsilon_i^m \epsilon_j^m = \delta_{ij}, \\ 3t^2 - \mathbf{x}^2/c^2 &= \frac{1}{2} (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_1 T_4 + T_2 T_3 + T_2 T_4 + T_3 T_4), \\ \mathbf{u} &= c \frac{\sum_m \epsilon^m T^m}{\sum_m T^m}, \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^2} = c \left[\frac{\frac{1}{4} \sum_m (T^m)^2}{\left(\frac{1}{4} \sum_m T^m \right)^2} - 1 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

выраженные через моменты времени $T^m = t + \epsilon^m \mathbf{x}$ ($m = 1, 2, 3, 4$) и $\epsilon^m \rightarrow (-\epsilon, \epsilon^n)$. Поскольку $T^m \geq 0$, справедливо условие $1 + (\epsilon^m \mathbf{u})/c \geq 0$ со знаком равенства при движении на характеристиках. В (2.17) имеем квадратичную форму от проективных однородных координат, значения компонент радиус-вектора, координатного времени, координатной скорости сигнала и её модуля. При равенстве единице квадратичная форма определяет гиперповерхность второго порядка в пространстве-времени, пересекающую все четыре характеристики (2.8) для сигнала. Любые две строки матрицы $\mathbf{H}$ ортогональны в четырёхмерном евклидовом пространстве с галилеевыми координатами $\{ct, \mathbf{x}\}$. Таким образом, величины T^m линейной вектор-функции первого рода дают четыре оси рассматриваемой гиперповерхности. Рассматриваемый координатный тетраэдр есть граничный тетраэдр некоторого правильного тела в четырехмерном евклидовом пространстве. Известно, что таких тел, ограниченных трехмерными тетраэдрами имеется три.

Определение 4. Собственное время в точке $\{x, y, z\}$ определяется метрической функцией (1.3) в обобщенном виде

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{F}{c} = \prod_m (T^m)^{p^m} = \left[(T)^{1+(\epsilon^r)} (T^1)^{1-(\epsilon^1 r)} (T^2)^{1-(\epsilon^2 r)} (T^3)^{1-(\epsilon^3 r)} \right]^{1/4} = \\ &= \left\{ \left[t - \frac{(\epsilon \mathbf{x})}{c} \right]^{1+(\epsilon^r)} \left[t + \frac{(\epsilon^1 \mathbf{x})}{c} \right]^{1-(\epsilon^1 r)} \left[t + \frac{(\epsilon^2 \mathbf{x})}{c} \right]^{1-(\epsilon^2 r)} \left[t + \frac{(\epsilon^3 \mathbf{x})}{c} \right]^{1-(\epsilon^3 r)} \right\}^{1/4}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь вектор-параметр $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$ имеет постоянное значение в величинах

$p^m = (1/4)[1 - (\epsilon^m \mathbf{r})]$, для которых выполняются равенства

$$\frac{1}{4}(1 + \mathbf{r}^2) = \sum_m^4 (p^m)^2, \quad -\mathbf{r} = \sum_m^4 \epsilon^m p^m, \quad 1 = \sum_m^4 p^m. \quad (2.19)$$

При значении $F = 0$ уравнение (2.18) представляет собой уравнение гиперповерхности с четырьмя характеристиками в пространстве-времени. Это означает наличие четырех вещественных корней для времени t .

Отметим также работы [12–16], в которых приводится один из вариантов обоснования финслеровой геометрии, исходя из отношения одновременности [17, 18], устанавливаемого световым сигналом, при котором физическая скорость распространения волновой поверхности анизотропна в прямом и обратном направлениях.

3. Преобразования проективных однородных координат

Рассмотрим преобразования проективных однородных координат при переходе между инерциальными системами отсчетов (K) и (K') , движущимися с относительными скоростями $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ и $\mathbf{v}' = \{v'_x, v'_y, v'_z\}$, соответственно. Скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ с $c = 1$ выражаются в масштабных единицах систем отсчетов, согласно принципу относительности. Преобразования оставляет форм-инвариантным метрическую функцию (2.18) в глобальной геометрии и объем координатного тетраэдра. При переходе к локальной финслеровой геометрии проективные однородные координаты заменяются на их дифференциалы, а вектора ϵ^m являются постоянными величинами и имеем

$$\left\{ \prod_m^4 [dt + (\epsilon^m d\mathbf{x})]^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4} = \left\{ \prod_m^4 [dt' + (\epsilon^m d\mathbf{x}')]^{1-(\epsilon^m \mathbf{r}')} \right\}^{1/4}. \quad (3.1)$$

Обобщая метод коэффициента "k", ранее использованный для случая одной пространственной координаты [12–16], запишем соотношения $T^m = k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) T'^m$ и $T'^m = k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') T^m$ так

$$\begin{aligned} [t + (\epsilon^m \mathbf{x})] &= k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) [t' + (\epsilon^m \mathbf{x}')], \\ [t' + (\epsilon^m \mathbf{x}')] &= k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') [t + (\epsilon^m \mathbf{x})], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где коэффициенты $k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ и $k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}')$ характеризуют эффекты Допплера изменения частот ω^m и ω'^m плоской волны по четырем выделенным направлениям

$$\omega^m k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \omega'^m, \quad \omega'^m k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') = \omega^m \quad (3.3)$$

и удовлетворяют условиям

$$\prod_m^4 [k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})]^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} = \prod_m^4 [k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}')]^{1-(\epsilon^m \mathbf{r}')} = 1, \quad k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') = 1.$$

При $\mathbf{x}' = 0$ имеем $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$, а при $\mathbf{x} = 0$, соответственно, $\mathbf{x}' = \mathbf{v}'t'$. Следовательно, из (2.18) и (3.2) вытекают следующие равенства

$$\begin{aligned} t &= t' N(\mathbf{v}', \mathbf{r}'), \quad k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') t = [1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')] t', \\ t' &= t N(\mathbf{v}, \mathbf{r}), \quad k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) t' = [1 + (\epsilon^m \mathbf{v})] t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь введены выражения с трехмерными скоростями

$$\begin{aligned}
\frac{T_0}{t} &= N(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{v})}{A(\mathbf{v}, \mathbf{r})} = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})]^{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}, \\
\frac{T_0}{t'} &= N(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{v}')}{A(\mathbf{v}', \mathbf{r})} = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')]^{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}, \\
N(\mathbf{v}) &= \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})] \right\}^{1/4}, \quad N(\mathbf{v}') = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')] \right\}^{1/4}, \\
A(\mathbf{v}, \mathbf{r}) &= \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v})} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})/4}, \quad A(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = \left\{ \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{N(\mathbf{v}')} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})/4} \right\},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где множители $A(\mathbf{v}, \mathbf{r})$, $A(\mathbf{v}', \mathbf{r})$ зависят от вектора $\mathbf{r}$ и $N(\mathbf{v}) = N(\mathbf{v}, 0)$.

В результате из (3.4) получим значения коэффициентов и соответствующие тождества

$$\begin{aligned}
k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})}, \quad k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})}, \quad \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})} \cdot \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})} = 1, \\
\left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2} &= \frac{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})}, \quad \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{1 + \mathbf{v}'^2}}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})}, \\
\frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) &= \frac{1}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = \frac{1}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

в которые входят относительные скорости систем (K) и (K') .

Прямые и обратные преобразования характеристик (3.2) примут вид

$$\begin{aligned}
[t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})] &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})} [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')] = \frac{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')], \\
[t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')] &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})} [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})] = \frac{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})],
\end{aligned} \tag{3.7}$$

а из (3.3) получим формулы для эффекта Доплера

$$\omega'^m = \frac{A(\mathbf{v}, \mathbf{r}) [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})]}{N(\mathbf{v})} \omega^m, \quad \omega^m = \frac{A(\mathbf{v}', \mathbf{r}) [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')] }{N(\mathbf{v}')} \omega'^m, \tag{3.8}$$

с относительными скоростями движения источника и приемника сигналов в соответствии с принципом относительности.

В дополнение к равенству

$$\frac{t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})}{t + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \mathbf{x})} = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \mathbf{v})} \cdot \frac{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')}{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \mathbf{x}')}, \tag{3.9}$$

вытекающему из (3.7), имеем с учетом линейной зависимости векторов (2.10) соотношения для взаимосвязи скоростей

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r}) N(\mathbf{v}', \mathbf{r})} &= \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} = \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} = \frac{1}{1 + (\mathbf{v} \mathbf{v}')}, \\
1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}') &= \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \right]^{-1},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$1 + (\epsilon^m \mathbf{v}) = \frac{1}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')} \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')} \right]^{-1},$$

где $1 + (\epsilon^m \mathbf{v}) \neq 0$ и $1 + (\epsilon^m \mathbf{v}') \neq 0$. Согласно (3.10), справедливы следующие формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\epsilon^m}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v})} \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4} \sum_m \frac{\epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{v})}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v})} \right]^{-1}, \\ \mathbf{v} &= \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\epsilon^m}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')} \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4} \sum_m \frac{\epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{v}')}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$A(\mathbf{v}, \mathbf{r}) A(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = 1, \quad N(\mathbf{v}, \mathbf{r}) N(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = N(\mathbf{v}) N(\mathbf{v}').$$

Учитывая равенства (2.10) и (2.13) получим прямые преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}/c)} \left[\mathbf{x}' + \mathbf{v}t' + \frac{1}{4c} \sum_m \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{v}) (\epsilon^m \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \epsilon^m \left[\frac{\epsilon^m (\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t')}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')/c} \right], \\ t &= \frac{A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}/c)} \left[t' + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \frac{t' + (\epsilon^m \mathbf{x}')/c}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')/c} \end{aligned} \quad (3.12)$$

и обратные между системами отсчетов (K) и (K')

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \frac{1}{4c} \sum_m \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{v}') (\epsilon^m \mathbf{x}) \right] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m \epsilon^m \left[\frac{\epsilon^m (\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v})/c} \right], \\ t' &= \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[t + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}' \mathbf{x}) \right] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m \frac{t + (\epsilon^m \mathbf{x})/c}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v})/c} \end{aligned} \quad (3.13)$$

в масштабных единицах с $c \neq 1$ и в векторной форме I.

Пусть система отсчета (K') движется относительно (K) вдоль оси x со скоростью $\mathbf{v} = \{v_x, 0, 0\}$. Тогда из (3.13) следуют прямые преобразования координат и времени

$$\begin{aligned} x &= \frac{A(v_x/c, \mathbf{r})}{N(v_x/c)} \left[x' + v_x t' + \frac{v_x}{4c} \sum_m (\epsilon_x^m)^2 (\epsilon^m \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \epsilon_x^m \left[\frac{\epsilon^m (\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t')}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')/c} \right], \\ y &= \frac{A(v_x/c, \mathbf{r})}{N(v_x/c)} \left[y' + \frac{v_x}{4c} \sum_m (\epsilon_y^m \epsilon_x^m) (\epsilon^m \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \epsilon_y^m \left[\frac{\epsilon^m (\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t')}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')/c} \right], \\ z &= \frac{A(v_x/c, \mathbf{r})}{N(v_x/c)} \left[z' + \frac{v_x}{4c} \sum_m (\epsilon_z^m \epsilon_x^m) (\epsilon^m \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \epsilon_z^m \left[\frac{\epsilon^m (\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t')}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')/c} \right], \\ t &= \frac{A(v_x/c, \mathbf{r})}{N(v_x/c)} \left[t' + \frac{v_x x'}{c^2} \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \frac{t' + (\epsilon^m \mathbf{x}')/c}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')/c}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$N(v_x/c) = \left[\prod_m (1 + \epsilon_x^m v_x/c) \right]^{1/4}, \quad A(v_x/c, \mathbf{r}) = \prod_m \left[\frac{1 + \epsilon_x^m v_x/c}{N(v_x/c)} \right]^{(\epsilon^m \mathbf{r})/4}. \quad (3.15)$$

Скорость системы отсчета (K) относительно (K') равняется

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\epsilon^m}{1 + \epsilon_x^m v_x/c} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + \epsilon_x^m v_x/c} \right]^{-1} = \\ &= \left[-\frac{1}{4} \sum_m \frac{\epsilon^m \epsilon_x^m v_x}{1 + \epsilon_x^m v_x/c} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + \epsilon_x^m v_x/c} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

4. Закон композиции элементов группы координатных скоростей и его свойства

Рассмотрим закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей с $c = 1$. Воспользуемся равенством

$$N(\mathbf{u}', \mathbf{r}) t' = N(\mathbf{u}, \mathbf{r}) t, \quad N(0, \mathbf{r}) = 1, \quad (4.1)$$

вытекающим из определения метрической функции, и, учитывая (3.12) и (3.13), получим соотношения

$$N(\mathbf{u}', \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{v}', \mathbf{r}) N(\mathbf{u}, \mathbf{r})}{1 + (\mathbf{u}\mathbf{v}')}, \quad N(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{v}, \mathbf{r}) N(\mathbf{u}', \mathbf{r})}{1 + (\mathbf{u}'\mathbf{v})}, \quad (4.2)$$

$$N(\mathbf{v}) N(\mathbf{v}') = [1 + (\mathbf{u}'\mathbf{v})] [1 + (\mathbf{u}\mathbf{v}')],$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{x}/t$ и $\mathbf{u}' = \mathbf{x}'/t'$ – координатные скорости движения тел в системах (K) и (K') .

Закон композиции элементов группы в представлении группы в виде функции $k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ запишется, согласно (3.7) и (4.1), следующим образом

$$\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v})} \cdot \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u}')}{N(\mathbf{u}')}, \quad (4.3)$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = A(\mathbf{v}, \mathbf{r}) A(\mathbf{u}', \mathbf{r}), \quad A(\mathbf{u}', \mathbf{r}) = A(\mathbf{v}', \mathbf{r}) A(\mathbf{u}, \mathbf{r}).$$

для функции, зависящей только от скорости, и функции $A(\mathbf{u}, \mathbf{r})$. Для обеих функций выполняется бинарная операция закона композиции как обычная операция умножения. Пусть $\mathbf{w}'$ есть скорость движения третьей инерциальной системы отсчета (K'') относительно второй (K') , а $\mathbf{z}''$ – относительно первой (K) . Тогда получим операции умножения функций $k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ и, согласно (3.6), равенства

$$k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{u}', \mathbf{r}), \quad k^m(\mathbf{u}', \mathbf{r}) = k^m(\mathbf{w}', \mathbf{r}) k^m(\mathbf{u}'', \mathbf{r}),$$

$$k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = k^m(\mathbf{z}'', \mathbf{r}) k^m(\mathbf{u}'', \mathbf{r}), \quad k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{w}', \mathbf{r}) = k^m(\mathbf{z}'', \mathbf{r}),$$

$$\frac{\frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r})}{\left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{u}', \mathbf{r})}{\left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{u}', \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1 + (\mathbf{v}\mathbf{u}')}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2} \sqrt{1 + \mathbf{u}'^2}},$$

где имеем закон композиции элементов группы

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}', \quad \mathbf{u}' = \mathbf{w}' \circ \mathbf{u}'', \quad \mathbf{u} = \mathbf{z}'' \circ \mathbf{u}'', \quad \mathbf{v} \circ \mathbf{w}' = \mathbf{z}''. \quad (4.5)$$

Прямые и обратные преобразования безразмерных координатных трехмерных скоростей

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v} + \frac{1}{4} \sum_m \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u}') (\epsilon^m \mathbf{v})}{1 + (\mathbf{u}' \mathbf{v})} = \frac{\sum_m \epsilon^m \left[\frac{\epsilon^m (\mathbf{u}' - \mathbf{v}')}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')} \right]}{\sum_m \frac{1 + (\epsilon^m \mathbf{u}')}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v}')}}, \\
\mathbf{u}' &= \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}' + \frac{1}{4} \sum_m \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u}) (\epsilon^m \mathbf{v}')}{1 + (\mathbf{u} \mathbf{v}')} = \frac{\sum_m \epsilon^m \left[\frac{\epsilon^m (\mathbf{u} - \mathbf{v})}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v})} \right]}{\sum_m \frac{1 + (\epsilon^m \mathbf{u})}{1 + (\epsilon^m \mathbf{v})}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

в векторной форме I не зависят от вектор-параметра $\mathbf{r}$.

Таким образом, имеем неаддитивную группу элементов для координатных трехмерных скоростей, принадлежащих *только разным системам отсчётов*, с законом композиции, содержащим квадратичную нелинейность.

Формулы (4.6) есть дробно-линейные функции скоростей $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ и представляют собой прямые и обратные проективные (коллинеарные) преобразования неоднородных координат в проективной геометрии.

Рассмотрим основные свойства закона композиции $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2$, не различая скорости в разных системах и относительные скорости между ними. Закон композиции

$$\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \frac{1}{4} \sum_m \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u}_1) (\epsilon^m \mathbf{u}_2)}{1 + (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)} \tag{4.7}$$

имеет свойство коммутативности, то есть группа является абелевой.

Выполняются групповые аксиомы.

1. Ассоциативность:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2) \circ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{u}_1 \circ (\mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_3) = \left\{ \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \frac{1}{4} \sum_m [\epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u}_1) (\epsilon^m \mathbf{u}_2) + \right. \\
&+ \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u}_2) (\epsilon^m \mathbf{u}_3) + \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u}_3) (\epsilon^m \mathbf{u}_1)] + \frac{1}{4} \sum_m \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u}_1) (\epsilon^m \mathbf{u}_2) (\epsilon^m \mathbf{u}_3) \Big\} \times \\
&\times \left\{ 1 + (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) + (\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1) + \frac{1}{4} \sum_m (\epsilon^m \mathbf{u}_1) (\epsilon^m \mathbf{u}_2) (\epsilon^m \mathbf{u}_3) \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

2. Единичный элемент: $\mathbf{u} \circ \mathbf{E} = \mathbf{u}$. Единичный элемент соответствует нулевому значению скорости.

3. Обратный элемент: $\mathbf{u} \circ \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{E}$. Выражение обратного элемента равняется

$$\mathbf{u}^{-1} = \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\epsilon^m}{1 + (\epsilon^m \mathbf{u})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\epsilon^m \mathbf{u})} \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4} \sum_m \frac{\epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u})}{1 + (\epsilon^m \mathbf{u})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\epsilon^m \mathbf{u})} \right]^{-1} \tag{4.9}$$

при дополнительных условиях $1 + (\epsilon^m \mathbf{u}) \neq 0$ и $1 + (\mathbf{u} \mathbf{u}^{-1}) \neq 0$. Согласно (4.9) следует, что относительная скорость $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{-1}$ есть обратный элемент группы для относительной скорости $\mathbf{v}$, не равный противоположному элементу $(-\mathbf{v})$. Тогда закон композиции $\mathbf{u} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}'$ запишется в виде $\mathbf{u} = (\mathbf{v}')^{-1} \circ \mathbf{u}'$. Это означает некоммутативность закона композиции трёхмерных скоростей, принадлежащих *только одной системе отсчёта* при замене $\mathbf{v}'$ на $\mathbf{u}'$, что также следует из (4.6). Обратный элемент (4.9) равен сумме векторов ϵ^m , умноженных на коэффициенты, зависящие от скорости $\mathbf{u}$.

Используя закон композиции и приведенные свойства, находим следующие равенства

$$\begin{aligned}
1 + (\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}) &= \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})} \right]^{-1} = N(\mathbf{u}) N(\mathbf{u}^{-1}), \\
\frac{\mathbf{u} + \mathbf{u}^{-1}}{1 + (\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1})} &= \frac{1}{4} \sum_m \frac{\varepsilon^m + \mathbf{u}}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})} = \frac{1}{4} \sum_m \frac{\varepsilon^m + \mathbf{u}^{-1}}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})}, \\
\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{-1})^{-1} &= \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\varepsilon^m}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})} \right]^{-1}, \\
N(\mathbf{u}) &= \frac{N(\mathbf{u}_1) N(\mathbf{u}_2)}{1 + (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)}, \\
\frac{\mathbf{u}}{N(\mathbf{u})} &= \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \frac{1}{4} \sum_m \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)}{N(\mathbf{u}_1) N(\mathbf{u}_2)}, \\
[1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})] [1 + (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)] &= [1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_1)] [1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)], \\
\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \circ \mathbf{u}_2^{-1} &= \left\{ \frac{1}{4} \sum_m \frac{\varepsilon^m + \mathbf{u}}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)} + \frac{1}{4} \sum_k \sum_m \frac{\varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^k \mathbf{u}_2)}{1 + (\varepsilon^k \mathbf{u}_2)} \right\} \left\{ \frac{1}{4} \sum_m \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)} \right\}^{-1}, \quad (4.10) \\
\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^{-1} \circ \mathbf{u} &= \left\{ \frac{1}{4} \sum_m \frac{\varepsilon^m + \mathbf{u}}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_1)} + \frac{1}{4} \sum_k \sum_m \frac{\varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^k \mathbf{u}_1)}{1 + (\varepsilon^k \mathbf{u}_1)} \right\} \left\{ \frac{1}{4} \sum_m \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_1)} \right\}^{-1}, \\
\frac{1}{4} \sum_m \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) &= \mathbf{u}, \quad \frac{1}{4} \sum_m \varepsilon^m (\varepsilon^m \varepsilon^k) (\varepsilon^m \mathbf{u}) = \varepsilon^k (\varepsilon^k \mathbf{u}) - \mathbf{u}, \\
\frac{1}{4} \sum_m (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{16} \sum_k \sum_m (\varepsilon^k \varepsilon^m) (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2), \\
\frac{1}{4} \sum_m (\varepsilon^k \varepsilon^m) (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) &= (\varepsilon^k \mathbf{u}_1) (\varepsilon^k \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2), \\
|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^2} &= \sqrt{\frac{1}{4} \sum_m (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^m \mathbf{u})}.
\end{aligned}$$

Для векторов выделенных направлений, не являющихся элементами группы скоростей вследствие отсутствия обратных элементов, справедливо *только формальное равенство*

$$\varepsilon^m \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \varepsilon^m = \varepsilon^m. \quad (4.11)$$

Наконец, рассмотрим частный случай, когда закон композиции зависит только от значений неоднородных проективных координат. Необходимо, например, следующее дополнительное требование к **Равенствам 1 и 2**.

Равенство 3. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4} \sum_m \varepsilon_i^m \varepsilon_j^m \varepsilon_r^m = \varepsilon_{ijr}, \quad (4.12)$$

где ε_{ijr} – симметричный символ со свойствами $\varepsilon_{ijr} = 1$ при $i \neq j \neq r$, а остальные значения являются нулевыми. Тогда, закон композиции векторов в координатном

представлении имеет следующий вид

$$u_i = \left[u_{1i} + u_{pi} + \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} u_{1j} u_{2k} \right] \times \left[1 + \sum_{i,j}^3 \delta_{ij} u_{1i} u_{2j} \right]^{-1}. \quad (4.13)$$

5. Угловая мера

Определение 5. Выражение аддитивной угловой меры равняется

$$\alpha^m(\mathbf{u}) = \ln \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})}{N(\mathbf{u})}, \quad \alpha^m(0) = 0. \quad (5.1)$$

Согласно (3.6) и (5.1), имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \alpha^m(\mathbf{u}) &= \alpha^m(\mathbf{u}_1) + \alpha^m(\mathbf{u}_2), \quad \sum_m^4 \alpha^m(\mathbf{u}) = 0, \\ \frac{1}{4} \sum_m^4 \exp[\alpha^m(\mathbf{u})] &= \frac{1}{N(\mathbf{u})}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \exp[-\alpha^m(\mathbf{u})] = \frac{1}{N(\mathbf{u}^{-1})}, \\ \alpha^m(\mathbf{u}^{-1}) &= -\alpha^m(\mathbf{u}) = \ln \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})}{N(\mathbf{u}^{-1})}, \\ \mathbf{u} &= \frac{\sum_m^4 \varepsilon^m e^{\alpha^m(\mathbf{u})}}{\sum_m^4 e^{\alpha^m(\mathbf{u})}}, \quad \mathbf{u}^{-1} = \frac{\sum_m^4 \varepsilon^m e^{-\alpha^m(\mathbf{u})}}{\sum_m^4 e^{-\alpha^m(\mathbf{u})}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Определение 6. Вектор-параметр $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ угловой меры определяется так

$$\beta = \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m \alpha^m(\mathbf{u}). \quad (5.3)$$

Учитывая (2.15), (3.5) и (5.2), получим равенства для угловой меры и соотношения

$$\begin{aligned} \alpha^m(\mathbf{u}) &= (\varepsilon^m \beta), \quad (\mathbf{r} \beta) = \ln A(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \ln \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} \right]^{(\varepsilon^m \mathbf{r})/4}, \quad \beta(\mathbf{u}) = \beta(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}'), \\ t - (\mathbf{r} \mathbf{x})/c &= \sum_m^4 T^m p^m, \quad \mathbf{x} - \mathbf{r} c t - \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{x}) (\varepsilon^m \mathbf{r}) = c \sum_m^4 \varepsilon^m T^m p^m, \\ (\mathbf{u}/c) \circ (-\mathbf{r}) &= \frac{\sum_m^4 \varepsilon^m T^m p^m}{\sum_m^4 T^m p^m}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Преобразования характеристик (3.7) приобретут следующий вид

$$\begin{aligned} t + (\varepsilon^m \mathbf{x}) &= e^{(\mathbf{r} \beta)} e^{(\varepsilon^m \beta)} [t' + (\varepsilon^m \mathbf{x}')], \\ t' + (\varepsilon^m \mathbf{x}') &= e^{(\mathbf{r} \beta')} e^{(\varepsilon^m \beta')} [t + (\varepsilon^m \mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В (5.5) выделен конформный множитель, зависящий от вектор-параметров $\beta = \beta(\mathbf{v})$, $\beta' = \beta(\mathbf{v}') = -\beta$ и $\mathbf{r}$.

Согласно (2.17) и (5.1), справедливы представления характеристик

$$\begin{aligned} \frac{T^m}{\left(\frac{1}{4} \sum_m T^m\right)} &= e^{\beta + (\epsilon^m \beta)}, \quad \frac{cT^m}{F} = e^{(\mathbf{r}\beta) + (\epsilon^m \beta)}, \\ \frac{F}{\left(\frac{1}{4} \sum_m cT^m\right)} &= e^{\beta - (\mathbf{r}\beta)}, \quad \beta = \ln N(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Введем значения углов $\alpha_4 = -\alpha(\mathbf{v})$, $\alpha_n = \alpha^n(\mathbf{v})$ ($n = 1, 2, 3$) и запишем, согласно (5.5), прямые преобразования координат и времени с $c \neq 1$ в векторной форме II

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= e^{(\mathbf{r}\beta)} \left\{ \frac{c}{4} \sum_n^3 [e^{(\epsilon^n \beta)} + e^{-(\epsilon \beta)}] \epsilon^n t + \frac{1}{4} \sum_n^3 \left[e^{(\epsilon^n \beta)} \epsilon^n + e^{-(\epsilon \beta)} \sum_k^3 \epsilon^k \right] (\epsilon^n \mathbf{x}') \right\}, \\ t &= e^{(\mathbf{r}\beta)} \left\{ \frac{1}{4} \left[\sum_n^3 e^{(\epsilon^n \beta)} + e^{-(\epsilon \beta)} \right] t' + \frac{1}{4c} \sum_n^3 [e^{(\epsilon^n \beta)} - e^{-(\epsilon \beta)}] (\epsilon^n \mathbf{x}') \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Обратные преобразования имеют такой же вид при замене $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$, $t \rightarrow t'$ и $\beta \rightarrow -\beta$.

Из (5.2) и (5.3) вытекают выражение вектора трехмерной скорости $\mathbf{v}$ и вектор-параметра

$$\mathbf{v} = c \frac{\sum_n^3 \epsilon^n [e^{(\epsilon^n \beta)} - e^{-(\epsilon \beta)}]}{\left[\sum_n^3 e^{(\epsilon^n \beta)} + e^{-(\epsilon \beta)} \right]}, \quad \beta = \frac{1}{4} \sum_n^3 \epsilon^n [\alpha^n(\mathbf{u}) - \alpha(\mathbf{u})], \quad (\epsilon \beta) = \sum_n^3 (\epsilon^n \beta), \quad (5.8)$$

зависящие от рассматриваемых углов.

6. Энергия и импульс частицы

Приведем краткое рассмотрение движения частицы в инерциальной системе отсчета (K) и запишем при $c \neq 1$ функцию Лагранжа

$$L = -m_0 c^2 F(d\mathbf{x}/dt, \mathbf{r}) = -m_0 c^2 N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}), \quad N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}) = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\epsilon^m \mathbf{u})/c]^{1 - (\epsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}. \quad (6.1)$$

Здесь выполняется условие $\mathbf{r} \neq -\epsilon^k$ при $m_0 \neq 0$, так как при равенстве $\mathbf{r}$ с вектором одного какого-либо выделенного направления ϵ^k из (6.1) вытекает функция Лагранжа $L = -m_0 c^2 [1 - (\mathbf{r}\mathbf{u})/c]$, которая линейно зависит от скорости.

Используя гамильтонов формализм, находим импульс и энергию частицы в векторных формах

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = m_0 c N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}) \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \epsilon^m \frac{\epsilon^m (\mathbf{u}/c + \mathbf{r})}{1 + (\epsilon^m \mathbf{u})/c} \right] = \\ &= \frac{m_0 c}{N(\mathbf{u}^{-1}/c, \mathbf{r})} \left[-\mathbf{u}^{-1}/c + \mathbf{r} + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \epsilon^m (\epsilon^m \mathbf{u}^{-1}) (\epsilon^m \mathbf{r}) \right], \\ E &= (\mathbf{p}\mathbf{u}) - L = m_0 c^2 N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}) \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1 - (\epsilon^m \mathbf{r})}{1 + (\epsilon^m \mathbf{u})/c} \right] = \frac{m_0 c^2}{N(\mathbf{u}^{-1}/c, \mathbf{r})} [1 - (\mathbf{u}^{-1} \mathbf{r})/c], \end{aligned} \quad (6.2)$$

Будем различать три частных случая. В первом при $\mathbf{p} = 0$ имеет место $E = m_0 c^2 N(-\mathbf{r}, \mathbf{r})$ для движущейся частицы со скоростью $\mathbf{u} = -c\mathbf{r}$. Второй случай при $\mathbf{r} = 0$ соответствует обобщенной метрической функции Бервальда-Моора.

Для подобного пространства-времени имеем значения $\mathbf{p} = -m_0\mathbf{u}^{-1}/N(\mathbf{u}^{-1}/c)$ и $E = m_0c^2/N(\mathbf{u}^{-1}/c)$. Если $\mathbf{u} = 0$, то в третьем случае получим значения энергии $E_0 = m_0c^2$, импульса $\mathbf{p}_0 = m_0c\mathbf{r}$ и вектор-параметра $c\mathbf{p}_0/E_0 = \mathbf{r}$ покоящейся частицы, отмеченные в работе [10]. Отметим также наличие собственного момента импульса $\mathbf{M}_0 = m_0c[\mathbf{x}\mathbf{r}]$ покоящейся частицы, который изменяется при преобразованиях (3.12). В общем случае выражения (6.2) с учетом (4.10) дают соотношения

$$\begin{aligned} E - c(\epsilon^m\mathbf{p}) &= \frac{1 + (\epsilon^m\mathbf{u}^{-1})/c}{N(\mathbf{u}^{-1}/c, \mathbf{r})} [E_0 - c(\epsilon^m\mathbf{p}_0)], \\ E_0 - c(\epsilon^m\mathbf{p}_0) &= \frac{1 + (\epsilon^m\mathbf{u})/c}{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r})} [E - c(\epsilon^m\mathbf{p})], \end{aligned} \quad (6.3)$$

из которых вытекают энергия, импульс покоящейся частицы и вектор-параметр

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{E - (\mathbf{p}\mathbf{u})}{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r})}, \quad \mathbf{p}_0 = \frac{1}{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r})} \left[\mathbf{p} - E\mathbf{u}/c^2 + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \epsilon^m (\epsilon^m\mathbf{u}) (\epsilon^m\mathbf{p}) \right], \\ \mathbf{r} &= \frac{c\mathbf{p}_0}{E_0} = \frac{\left[\mathbf{p} - E\mathbf{u}/c^2 + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \epsilon^m (\epsilon^m\mathbf{u}) (\epsilon^m\mathbf{p}) \right]}{E - (\mathbf{p}\mathbf{u})}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Согласно (6.3) справедлива следующая формула

$$\left\{ \prod_m^4 [E - c(\epsilon^m\mathbf{p})]^{1-(\epsilon^m\mathbf{r})} \right\}^{1/4} = m_0c^2 \left\{ \prod_m^4 [1 - (\epsilon^m\mathbf{r})]^{1-(\epsilon^m\mathbf{r})} \right\}^{1/4} \quad (6.5)$$

взаимосвязи энергии и импульса, а также значения скоростей

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = c \sum_m^4 \frac{\epsilon^m (1 - \epsilon^m\mathbf{r})}{E - c(\epsilon^m\mathbf{p})} \left[\sum_m^4 \frac{1 - (\epsilon^m\mathbf{r})}{E - c(\epsilon^m\mathbf{p})} \right]^{-1}, \\ \frac{c^2\mathbf{p}}{E} &= \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \epsilon^m \frac{\epsilon^m(\mathbf{u} + c\mathbf{r})}{1 + (\epsilon^m\mathbf{u})/c} \right] \left[\sum_m^4 \frac{1 - (\epsilon^m\mathbf{r})}{1 + (\epsilon^m\mathbf{u})/c} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Представим (6.3) в общем виде

$$\begin{aligned} E - c(\epsilon^m\mathbf{p}) &= \frac{1 + (\epsilon^m\mathbf{v}')/c}{N(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} [E' - c(\epsilon^m\mathbf{p}')] = \frac{N(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})}{1 + (\epsilon^m\mathbf{v})/c} [E' - c(\epsilon^m\mathbf{p}')], \\ E' - c(\epsilon^m\mathbf{p}') &= \frac{1 + (\epsilon^m\mathbf{v})/c}{N(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} [E - c(\epsilon^m\mathbf{p})] = \frac{N(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{1 + (\epsilon^m\mathbf{v}')/c} [E - c(\epsilon^m\mathbf{p})], \end{aligned} \quad (6.7)$$

где используются коэффициенты $k^m(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})$ и $k^m(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})$. Тогда из (6.7) получим прямые преобразования энергии и импульса между инерциальными системами отсчётов (K) и (K') в векторной форме I

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[\mathbf{p}' - \frac{E'\mathbf{v}'}{c^2} + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \epsilon^m (\epsilon^m\mathbf{v}') (\epsilon^m\mathbf{p}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m^4 \epsilon^m \left[\frac{\epsilon^m(\mathbf{p}' + E'\mathbf{v}/c^2)}{1 + (\epsilon^m\mathbf{v})/c} \right], \\ E &= \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} [E' - (\mathbf{v}'\mathbf{p}')] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m^4 \frac{E' - c(\epsilon^m\mathbf{p}')}{1 + (\epsilon^m\mathbf{v})/c}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

которые оставляют форм-инвариантным соотношение (6.5). Обратные преобразования, вытекающие из (6.8), имеют такой же вид при замене $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$, $E \rightarrow E'$ и $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$.

Введем в пространстве с координатами $\{E, c\mathbf{p}\}$ четыре характеристики $E^m = E - c(\epsilon^m \mathbf{p})$, для которых справедливы соотношения

$$E^2 + c^2 \mathbf{p}^2 = \frac{1}{4} \sum_m^4 (E^m)^2, \quad E = \frac{1}{4} \sum_m^4 E^m, \quad -\mathbf{p} = \frac{1}{4c} \sum_m^4 \epsilon^m E^m, \quad -\frac{c\mathbf{p}}{E} = \frac{\sum_m^4 \epsilon^m E^m}{\sum_m^4 E^m}. \quad (6.9)$$

В (6.9) имеем квадратичную форму, которая при равенстве значению $(m_0 c^2)^2$ определяет гиперповерхность второго порядка, пересекающую все четыре характеристики. Величины E^m линейной вектор-функции первого рода дают четыре оси рассматриваемой гиперповерхности.

Преобразования (3.12) и (6.8) также вытекают из инвариантности соотношения для характеристик $E^m T^m = E'^m T'^m$, записанного в форме

$$[E - c(\epsilon^m \mathbf{p})][t + (\epsilon^m \mathbf{x})/c] = [E' - c(\epsilon^m \mathbf{p}')][t' + (\epsilon^m \mathbf{x}')/c]. \quad (6.10)$$

Согласно (5.5) из (6.10) получим преобразования с угловой мерой

$$E^m = e^{(\mathbf{r}\beta')} e^{(\epsilon^m \beta')} E'^m, \quad E'^m = e^{(\mathbf{r}\beta)} e^{(\epsilon^m \beta)} E^m. \quad (6.11)$$

Из преобразований (6.2), (6.4) и (6.8) находим законы композиции элементов группы с $c \neq 1$

$$\begin{aligned} (-c\mathbf{p}/E) &= (\mathbf{u}^{-1}/c) \circ (-\mathbf{r}), \quad (-\mathbf{r})^{-1} = (-c\mathbf{p}/E)^{-1} \circ (\mathbf{u}^{-1}/c), \\ (-c\mathbf{p}/E) &= (\mathbf{v}'/c) \circ (-c\mathbf{p}'/E'), \quad (-c\mathbf{p}'/E') = (\mathbf{v}/c) \circ (-c\mathbf{p}/E), \\ (-\mathbf{r}) &= (\mathbf{u}/c) \circ (-c\mathbf{p}/E) = (\mathbf{u}'/c) \circ (-c\mathbf{p}'/E'). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Следовательно, безразмерные скорости $\mathbf{u}/c$, $(-c\mathbf{p}/E)$ и вектор-параметр $(-\mathbf{r})$ являются равноправными элементами группы трехмерных скоростей и справедливы следующие условия $1 - (\epsilon^m \mathbf{p}) c/E \geq 0$, $1 - (\epsilon^m \mathbf{r}) > 0$. Последнее равенство в (6.12) означает инвариантность вектор-параметра $\mathbf{r}$, что и следовало ожидать.

Для частицы с $m_0 = 0$ из (6.3) следует равенство $E = c(\epsilon^m \mathbf{p})$ и, с учетом (4.11) и (6.12), имеют место соотношения

$$\begin{aligned} -\mathbf{u}^{-1} &= \mathbf{r} = -\epsilon^k, \quad \mathbf{p} = m c \mathbf{r} (1 + \mathbf{r}^2), \quad E = m c^2 (1 + \mathbf{r}^2), \\ m &= \lim_{\substack{m_0 \rightarrow 0 \\ \mathbf{u} \rightarrow c\epsilon^k}} \frac{m_0}{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r})}, \quad \mathbf{p} = \frac{E \mathbf{r}}{c}, \quad E = m c^2 \left(1 + \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{E^2}\right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Здесь $\mathbf{r}$ совпадает с фиксированным значением вектора выделенного направления и m есть масса "фотона" в финслеровом пространстве-времени.

Согласно (4.10) выпишем некоторые соотношения

$$\begin{aligned} EN(-c\mathbf{p}/E, \mathbf{r}) &= m_0 c^2 N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad N(0, \mathbf{r}) = 1, \\ N(-c\mathbf{p}/E) &= \left\{ \prod_m^4 [1 - (\epsilon^m \mathbf{p}) c/E]^{1 - (\epsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}, \quad N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \left\{ \prod_m^4 [1 - (\epsilon^m \mathbf{r})]^{1 - (\epsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}, \\ 1 - (\epsilon^m \mathbf{r}) &= \frac{[1 + (\epsilon^m \mathbf{u})/c][E - c(\epsilon^m \mathbf{p})]}{E - (c\mathbf{u}\mathbf{p})}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\frac{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})}{N(-\mathbf{r})} = \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})/c}{N(\mathbf{u}/c)} \cdot \frac{1 - (\varepsilon^m \mathbf{p})c/E}{N(-\mathbf{p}c/E)}, \quad N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}) N(-\mathbf{p}c/E, \mathbf{r})}{1 - (\mathbf{u}\mathbf{p})/E}.$$

Имеют место также выражение для обратного элемента вектор-параметра

$$(-\mathbf{r})^{-1} = \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\varepsilon^m}{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{r})}{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})} \right]^{-1} \quad (6.15)$$

и следующие равенства

$$\begin{aligned} \ln T_0 &= \sum_m^4 p^m \ln T^m, \quad \ln N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \sum_m^4 p^m \ln p^m, \\ T_0 &= \lim_{q \rightarrow 0} N_q(T), \quad N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} N_q(p), \\ N_q(T) &= \left\{ \sum_m^4 (T^m)^q p^m \right\}^{1/q}, \quad N_q(p) = \left\{ \sum_m^4 (p^m)^{q+1} \right\}^{1/q}, \\ &\frac{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})}{N(-\mathbf{r})} \cdot \frac{1 + [\varepsilon^m (-\mathbf{r})^{-1}]}{N[(-\mathbf{r})^{-1}]} = 1, \\ \prod_m^4 [t + (\varepsilon^m \mathbf{x})/c]^{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})/N(-\mathbf{r})} &= \prod_m^4 [t + (\varepsilon^m \mathbf{x})/c]^{N[(-\mathbf{r})^{-1}]/1 + [\varepsilon^m (-\mathbf{r})^{-1}]} \end{aligned} \quad (6.16)$$

При вероятностной трактовке величины p^m интерпретируются как распределение вероятностей, а T^m – как случайные величины, характеризующие объект геометрии. Тогда функция $N_q(T)$ для значения $1 \leq q < \infty$ есть выражения полунормы [19]. Для полунормы допустимо $N_q(T) = 0$ при $T \neq 0$. Этим свойством полунорма отличается от нормы $N_2(T) = \left\{ \sum_m^4 (T^m)^2 p^m \right\}^{1/2}$ при $q = 2$. Если $\mathbf{r} = 0$, то имеем равновероятное распределение $p^m = 1/4$.

Наконец, представим сигнал для установления отношения одновременности (2.2) в виде плоской волны де Бройля в нормальной форме

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A \exp i[Et - (\mathbf{p}\mathbf{x})]/\hbar = A \exp i\omega[t - (\mathbf{k}\mathbf{x})/\omega], \quad (6.17)$$

где A – амплитуда, $\mathbf{k}$ – волновой вектор, $E = \hbar\omega$ и $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Согласно (6.10) величина

$$\varphi = \frac{[Et - (\mathbf{p}\mathbf{x})]}{\hbar} = \frac{1}{4\hbar} \sum_m^4 E^m T^m = \frac{1}{4\hbar} \sum_m^4 E'^m T'^m \quad (6.18)$$

есть форм-инвариантная фаза волны.

Для частицы с $\mathbf{p} = 0$ и $\mathbf{u} = 0$ имеем, соответственно, волны в формах

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= A \exp i[Et]/\hbar = A \exp i[\omega_0 t N(-\mathbf{r}, \mathbf{r})], \quad \omega_0 = m_0 c^2/\hbar, \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= A \exp i[E_0 t - (\mathbf{p}_0 \mathbf{x})]/\hbar = A \exp i\omega_0[t - (\mathbf{r}\mathbf{x})/c]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Волновая функция в обобщенном пространстве-времени Бервальда-Моора с $\mathbf{r} = 0$ удовлетворяет, согласно (6.5), следующему уравнению в операторном виде

$$\left\{ \prod_m^4 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^m \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right] \right\} \psi(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right)^4 \psi(\mathbf{x}, t). \quad (6.20)$$

7. Обсуждение

В работе приводятся *Определения*, на основе которых строится теория анизотропного финслерова пространства-времени. Рассмотрим некоторые выводы, вытекающие из полученных результатов.

Используем значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon} = (-1, -1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (-1, 1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (1, -1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = (-1, -1, 1)$ для специально ориентированного координатного тетраэдра, введенные в работах [6–9] и удовлетворяющие *Равенствам 1–3*. В результате симметричная матрица H в (2.15) есть матрица Адамара порядка 4 с элементами равными числам ± 1

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1. \quad (7.1)$$

Матрица Адамара находится методом Сильвестра рекуррентным вычислением из матриц $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ и широко используется в теории информации. Поскольку первая строка и первый столбец состоят из чисел $+1$, то имеем нормализованную матрицу Адамара. Причём элементы строк матрицы являются дискретными значениями ортогональных функций Уолша.

Из (3.12), (3.13) и (4.6) получим известные прямые и обратные преобразования проективных однородных и неоднородных координат для метрических функций (1.2) и (1.3), зависящие только от компонент относительных скоростей. Из (6.2) и (6.5) вытекают известные соотношения для энергии и импульса [10]. Например, из (3.14) вытекают следующие прямые преобразования

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right)^{r_1/2} \frac{x' + v_x t'}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, & t &= \left(\frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right)^{r_1/2} \frac{t' + (v_x/c^2) x'}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \\ y &= \left(\frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right)^{r_1/2} \frac{y' + (v_x/c) z'}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, & z &= \left(\frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right)^{r_1/2} \frac{z' + (v_x/c) y'}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

которые при $r_1 = 0$ совпадают с известными [9]. Компоненты вектор-параметра угловой меры β равняются значениям групповых параметров и аргументов, введенных в работах [7, 8], а выражение β – соответствующему ему значению из работы [8]. Из (6.8) получим известные преобразования импульса и энергии [10], записанные в другой форме.

При формальном пределе $c \rightarrow \infty$ из (3.12), (3.13) и (4.6) получим прямые и обратные преобразования Галилея

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t', \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \quad t' = t \quad (7.3)$$

и закон композиции в абелевой группе трёхмерных скоростей

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}. \quad (7.4)$$

Здесь имеем относительную скорость $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{-1} = -\mathbf{v}$, вытекающую из (3.11), а для (7.4) выполняются групповые аксиомы.

Исследуем эффекты, связанные с изменением хода времени. Запишем преобразование времени (3.13) так

$$t' = \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[t + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}'\mathbf{x}) \right] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \left[t + \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{c + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \right]. \quad (7.5)$$

При $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$ находим из (7.5), согласно (3.10), формулу для эффекта замедления времени

$$t' = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} t \quad (7.6)$$

в начале координат $\mathbf{x}' = 0$ системы отсчёта (K'), что согласуется с (3.4).

Пусть в системе отсчёта (K') два события, происходящие в начале координат и в точке $\mathbf{x}'$, произошли одновременно, то есть $\Delta t' = t'(\mathbf{x}') - t'(0) = 0$. Тогда с системе отсчёта (K) эти события являются неодновременными и из (7.5) вытекает формула для эффекта относительности одновременности

$$\Delta t = t(\mathbf{x}) - t(\mathbf{v}t) = -\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\epsilon^m(\Delta \mathbf{x})}{c + (\epsilon^m \mathbf{v})} \quad (7.7)$$

в точках $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}t$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, где $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Эффект сокращения длины отрезков путей отражается в соотношении

$$\mathbf{x}' = \frac{N(\mathbf{v}/c)c}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m^4 \epsilon^m \frac{(\epsilon^m \Delta \mathbf{x})}{c + (\epsilon^m \mathbf{v})}. \quad (7.8)$$

Приведём краткое строгое кинематическое рассмотрение финслерового пространства-времени с сохранением преобразований (7.3) и (7.4) классической физики с абсолютной одновременностью разноместных событий.

Определение 7. Имеется единое время (или дается отношение одновременности событий) для точек O , A и A^n при выполнении условия

$$\sum_m^4 c^m (T^m - t) = 0, \quad (7.9)$$

где c^m есть скорость сигнала в направлениях выделенных векторов ϵ^m ($\sum_m^4 \epsilon^m = 0$) инерциальной системы отсчёта (K).

Длины отрезков путей, проходимых сигналом, есть величины $(\epsilon^m x)$ и для характеристик имеем следующие равенства

$$T^m = t + \frac{(\epsilon^m \mathbf{x})}{c^m}. \quad (7.10)$$

Определение 8. Величина

$$c = \frac{1}{4} \sum_m^4 c^m \quad (7.11)$$

является универсальной постоянной и определяет "среднюю" физическую скорость сигнала в различных инерциальных системах отсчётов.

Согласно (7.11), из (7.9) получим следующие соотношения

$$t = \frac{\sum_m^4 c^m T^m}{\sum_m^4 c^m} = \frac{1}{4c} \sum_m^4 c^m T^m, \quad \mathbf{x}/c = \frac{1}{4} \sum_m^4 \epsilon^m c^m T^m, \quad \mathbf{u} = c \frac{\sum_m^4 \epsilon^m c^m T^m}{\sum_m^4 c^m T^m}. \quad (7.12)$$

Определение 9. Форм-инвариантная метрическая функция в локальной финслеровой геометрии определяется так

$$F = \left\{ \prod_m^4 [c^m dt + \epsilon^m d\mathbf{x}]^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4} = \left\{ \prod_m^4 [c'^m dt' + \epsilon^m d\mathbf{x}']^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4} \quad (7.13)$$

и принадлежит классу функций (1.4).

Используем метод коэффициента "k" и запишем соотношения

$$t + \frac{(\epsilon^m \mathbf{x})}{c^m} = k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \left[t' + \frac{(\epsilon^m \mathbf{x}')}{c'^m} \right], \quad t' + \frac{(\epsilon^m \mathbf{x}')}{c'^m} = k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) \left[t + \frac{(\epsilon^m \mathbf{x})}{c^m} \right] \quad (7.14)$$

в векторных формах, где $k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = 1$. Подставим (7.14) в (7.13) и получим

$$\begin{aligned} \prod_m^4 (c^m)^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} \prod_m^4 [k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})]^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} &= \prod_m^4 (c'^m)^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})}, \\ \prod_m^4 (c'^m)^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} \prod_m^4 [k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r})]^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} &= \prod_m^4 (c^m)^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Далее находим равенства, вытекающие из (7.13) и (7.14), при известных условиях $\mathbf{x}' = 0$ при $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$ и $\mathbf{x} = 0$ при $\mathbf{x}' = \mathbf{v}'t'$, а также дополнительном требовании об анизотропии скорости сигнала в движущейся системе отсчёта.

Определение 10. Линейная вектор-функция первого рода

$$c'^m = c^m + (\epsilon^m \mathbf{v}) \quad (7.16)$$

является скоростью сигнала в системе (K'), зависящая от относительной скорости.

В итоге получим значения коэффициентов

$$k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 1 + \frac{(\epsilon^m \mathbf{v})}{c^m}, \quad k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = 1 + \frac{(\epsilon^m \mathbf{v}')}{c'^m} \quad (7.17)$$

с $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ и равенство $c'^m T'^m = c^m T^m$. Согласно (7.14), получим преобразования Галилея (7.3) и формулы для эффекта Доплера

$$\omega'^m = \left[1 + \frac{(\epsilon^m \mathbf{v})}{c^m} \right] \omega^m, \quad \omega^m = \left[1 + \frac{(\epsilon^m \mathbf{v}')}{c'^m} \right] \omega'^m \quad (7.18)$$

по четырём выделенным направлениям.

При $c^m = c$ и использовании динамического обоснования трёх эффектов, отраженных в формулах (7.6) – (7.8), имеем равенство $c'^m = c$ и преобразования (3.12) для метрической функции (3.1). Такая интерпретация преобразований (3.12) согласуется с идеей неувлекаемого эфира классической физики с преобразованиями Галилея со скоростью сигнала (7.16) и дальнейшей их трансформацией.

Список литературы

- [1] Poincare H. La mesure du temps // Rev. Metaphys. Mordle, 1898. V. 6. P. 1–13.
- [2] Poincare H. Sur la dynamique de l'électron // Rend. Circolo Mat. Palermo. 1906. V. 21. P. 129–176.
- [3] Minkowski H. I. "Raum und Zeit", address delivered at the 80th Assembly of German Scientists and Physicians (Koln, 1908) // Phys. Ztscht. 1909. Bd. 10. P. 104–134.

- [4] Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений, т. II. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 304 с.
- [5] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1955. 241 с.
- [6] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of the phase transitions in the geometric structure of space-time // *Phys. Lett. A*. 1998. V. 244. P. 222–226.
- [7] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. Finslerian Spaces Possessing Local Relativistic Symmetry // *Gen. Relativ. Grav.* 1999. V. 31. No. 10. P. 1565–1603.
- [8] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid // *arXiv: gr-gc/0206004*. 2002. V. 1. P. 1–16.
- [9] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. 2005. № 1 (3). С. 1–15.
- [10] Богословский Б. Ю. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. 2005. № 2 (4). С. 27–43.
- [11] Riemann B. *Abhandlungen der Konigl. Gesellschaft d. Wissenschaften*. Gottingen, 1867. V. 13. P. 14.
- [12] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности и финслерова структура плоского анизотропного пространства-времени // *Гравитация и теория относительности*. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та. 1992. Вып. 29. С. 64–71.
- [13] Zaripov R. G. Clock Synchronization and Finsler Structure of a Flat Anisotropic Space-Time // *Proceedings International Scientific Meeting PIRT-2003 "Physical Interpretations of Relativity Theory"*, Moscow, Liverpool, Sunderland, 2003. P. 241–248.
- [14] Zaripov R. G. The Law of a Composition of Physical Velocities in Locally Anisotropic Finsler Space-Time // *Proceedings International Scientific Meeting PIRT-2005 "Physical Interpretations of Relativity Theory"*, Moscow, Liverpool, Sunderland, 2005. P. 148–158.
- [15] Зарипов Р. Г. Бинарная система чисел и финслерова геометрия локального анизотропного пространства-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. 2005. № 1 (3). С. 47–60.
- [16] Зарипов Р. Г. Синхронизация часов и финслерова геометрия локального анизотропного пространства-времени // *Новейшие проблемы теории поля* / Под ред. А. В. Аминовой. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 2006. Т. 5. С. 99–114.
- [17] Зарипов Р. Г. К определению одновременности в специальной теории относительности // *Гравитация и теория относительности*. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1978. Вып. 14–15. С. 60–69.
- [18] Зарипов Р. Г. О физическом понятии отношения одновременности // *Гравитация и теория относительности*. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1980. Вып. 17. С. 47–51.
- [19] Зарипов Р. Г. Новые меры и методы в теории информации. – Казань: Изд-во Каз. гос. техн. ун-та, 2005. 364 с.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПСЕВДОРИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИИ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва
gri9z@mail.ru

Пространство ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел H_4 , являясь четырехмерным метрическим финслеровым пространством с метрикой Бервальда-Моора, позволяет строить тензорные поля на основе аналитических функций переменной H_4 , а также с нарушением таковой (аналитичности). Предложен способ построения метрического тензора четырехмерного псевдориманового пространства (пространства-времени) на основе четырехжды контравариантного тензора тангенциального уравнения индикатрисы пространства Бервальда-Моора и Мировой функции. Пространство Бервальда-Моора оказывается тесно связанным с пространством Минковского. Нарушение аналитичности Мировой функции приводит к нетривиальному искривлению четырехмерного пространства-времени, в частности, ньютоновскому потенциалу в нерелятивистском пределе.

1 Введение

Завораживающая красота теории функций комплексной переменной, в частности, выражающаяся в гармонии алгебраических фракталов на евклидовой плоскости, побуждает многих исследователей искать аналогичные числовые системы, элементам которых можно было бы ставить в соответствие уже точки не плоскости, а четырехмерного пространства-времени. В случае, если бы такая деятельность увенчалась успехом, у нас появились бы реальные основания с доверием отнестись к знаменитому высказыванию Пифагора "всё сущее суть числа". При использовании для этой цели кватернионов [1], бикватернионов [2-4], октав [5] и т. п. были получены интересные результаты. Однако ни одна из теорий этих числовых систем, все же, пока не может сравниться даже с теорией относительно простых двухкомпонентных комплексных чисел. Основная причина этому достаточно печальному обстоятельству видится в отсутствии у рассматриваемых алгебр одного из основных математических свойств – коммутативности (а иногда даже и ассоциативности) умножения. Хотя авторы настоящей работы вполне осознают концептуальную обоснованность самых различных алгебр, все же, коммутативность умножения является неотъемлемым свойством всех основных числовых систем, среди которых: натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа. В конце концов, коммутативность и ассоциативность произведений входят в набор аксиом фундамента математики – арифметики и было бы, наверное, странно, если бы вдруг оказалось, что самая естественная для описания нашего реального мира алгебраическая система, уже в своей основе не соответствовала бы правилам обычного счета.

В качестве одной из интересных числовых систем, свободной от отмеченного недостатка, может рассматриваться алгебра коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, связанных с прямой суммой четырех действительных алгебр, далее для краткости обозначаемая H_4 . Алгебра этих чисел изоморфна алгебре четырехмерных квадратных действительных диагональных матриц, а пространство, им соответствующее, является линейным финслеровым пространством с метрикой Бервальда-Моора (последнее обстоятельство было установлено авторами настоящей работы [6]). Следует отметить, что само финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора уже достаточно давно известно и частично исследовано [7–8].

Одним из важнейших обстоятельств, присущих данному пространству, является наличие в нем области параметров, в которой трехмерные расстояния (с точки зрения наблюдателя, использующего радарный метод их определения [9]) связаны с положительно определенной метрической функцией, в пределе переходящей в квадратичную форму [10]. Иными словами, трехмерный мир, увиденный глазами "живущего" в H_4 наблюдателя, с определенной точностью оказывается евклидовым. Более того, при переходе к релятивистским скоростям четырехмерные интервалы, разделяющие события в H_4 , приближенно оказываются подчиняющимися соотношениям пространства Минковского [11]. Все это позволяет предположить, что и само пространство H_4 , и связанная с ним финслерова геометрия с определенной степенью точности могут использоваться в качестве математических моделей реального пространства-времени, причем, возможно, даже более продуктивно, чем господствующие сегодня в физике псевдоримановы представления.

Любая гиперкомплексная алгебра полностью определяется заданием закона умножения элементов некоторого фиксированного базиса. В системе гиперкомплексных чисел H_4 имеется такой специальный базис e_1, e_2, e_3, e_4 (будем называть его изотропным), что

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k \quad p_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

Любая аналитическая функция в этом базисе имеет вид

$$F(X) = f^1(\xi^1)e_1 + f^2(\xi^2)e_2 + f^3(\xi^3)e_3 + f^4(\xi^4)e_4, \quad (2)$$

где

$$H_4 \ni X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3 + \xi^4 e_4, \quad (3)$$

а f^i – четыре произвольные гладкие функции одного действительного переменного.

В пространстве H_4 существует еще один выделенный базис $1, j, k, jk$ (будем называть его ортогональным), который связан с изотропным базисом формулами

$$\left. \begin{aligned} 1 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ j &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4, \\ k &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4, \\ jk &= e_1 - e_2 - e_3 + e_4, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где базисный элемент 1 – единица алгебры, а компонента аналитической функции переменной H_4 в этом базисе при единичном элементе определяется формулой

$$u = \frac{1}{4} [f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)] . \quad (5)$$

Если считать X радиус-вектором, то координатное пространство $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ является пространством Бервальда-Моора с элементом длины

$$ds = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4} \equiv \sqrt[4]{g_{ijkl} d\xi^i d\xi^j d\xi^k d\xi^l}, \quad (6)$$

где

$$g_{ijkl} = \begin{cases} \frac{1}{4!}, & \text{если все индексы разные,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (7)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы для такой геометрии можно записать следующим образом:

$$g^{ijkl} p_i p_j p_k p_l - 1 = 0, \quad (8)$$

где

$$g^{ijkl} = \begin{cases} \frac{4^4}{4!}, & \text{если все индексы разные,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (9)$$

$$p_i = \frac{g_{ijkl} d\xi^j d\xi^k d\xi^l}{(g_{mrst} d\xi^m d\xi^r d\xi^s d\xi^t)^{3/4}} \quad (10)$$

– компоненты обобщенного импульса, или обобщенные импульсы.

Имея в своем распоряжении тензоры p_{ij}^k , g_{ijkl} , g^{ijkl} и векторные поля аналитических функций $F_{(A)}(X)$ переменной H_4 , можно конструировать метрические тензоры в четырехмерном пространстве-времени многими способами, например,

$$g_{ij}(\xi) = g_{ijkl} f_{(1)}^k f_{(2)}^l, \quad (11)$$

а затем изучать полученную риманову геометрию. Разнообразие этих способов как раз и является главным недостатком такого подхода.

Как известно [12], если определено тангенциальное уравнение индикатрисы как

$$\Phi(p; \xi) = 0, \quad (12)$$

то геодезические будут решениями канонической системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p; \xi), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \cdot \lambda(p; \xi), \quad (13)$$

$\lambda(p; \xi) \neq 0$ – произвольная гладкая функция, а точка над символами ξ^i и p_i означает производную по некоторому параметру эволюции τ .

2 Построение метрической функции псевдориманова пространства

Рассмотрим пространство, конформно связанное с пространством H_4 , то есть пространство с элементом длины

$$ds' = \kappa(\xi) \cdot \sqrt[4]{g_{ijkl} d\xi^i d\xi^j d\xi^k d\xi^l}, \quad (14)$$

где $\kappa(\xi) > 0$ – некоторый коэффициент растяжения-сжатия, зависящий от точки пространства, скалярная функция.

Пусть в этом пространстве задана некоторая нормальная конгруенция геодезических (мировых линий), тогда существует скалярная функция $S(\xi)$ (см., например, [12]) такая, что ее гиперповерхности уровня трансверсальны этой нормальной конгруенции мировых линий и она является решением уравнения

$$g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \xi^i} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \frac{\partial S}{\partial \xi^k} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} = \kappa(\xi)^4, \quad (15)$$

причем обобщенные импульсы вдоль данной конгруенции мировых линий связаны с функцией $S(\xi)$ соотношениями

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial \xi^i}, \quad (16)$$

а уравнения мировых линий приобретают вид

$$\dot{\xi}^i = g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \frac{\partial S}{\partial \xi^k} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} \cdot \lambda(\xi), \quad (17)$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$.

В физике такую функцию $S(\xi)$ называют действием как функцией координат, а уравнение (15) – уравнением Гамильтона-Якоби. В работе [10] предложено называть функцию $S(\xi)$ *Мировой функцией*.

Если задана конгруенция мировых линий, то известно движение (эволюция) каждой точки пространства, в частности, известно поле скоростей в каждой точке пространства, но не известны энергетические характеристики материальных объектов (наблюдателей), соответствующих данной мировой линии. Знание Мировой функции $S(\xi)$ позволяет вычислять обобщенные импульсы p_i , с которыми связаны энергетические характеристики, и инвариантную энергетическую характеристику точки $\kappa(\xi)$, которая еще имеет смысл локального коэффициента растяжения-сжатия плоского пространства H_4 .

Таким образом, если парадигмой нашего мировоззрения является классическая механика, то любая пара из трех объектов: Мировая функция, конгруенция мировых линий, финслерова геометрия – дают нам полное знание о Море.

Построим дважды контравариантный тензор $g^{ij}(\xi)$ следующим образом:

$$g^{ij}(\xi) = \frac{1}{\kappa(\xi)^4} \cdot g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \xi^k} \frac{\partial S}{\partial \xi^l}. \quad (18)$$

Так как

$$\det(g^{ij}(\xi)) = -\frac{4^4}{3^3 \kappa(\xi)^8} \neq 0, \quad (19)$$

то везде, где определена геометрия (14), можно построить тензор $g_{ij}(\xi)$ такой, что

$$g^{ik}(\xi) g_{kj}(\xi) = \delta_j^i, \quad (20)$$

$$g_{ij}(\xi) = 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} & \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} & -2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^2} \right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} & -2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^3} \right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} & \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} & -2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^4} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Несомненно, что в том же самом координатном пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ такой тензор $g_{ij}(\xi)$ определяет риманову или псевдориманову геометрию с элементом длины

$$ds'' = \sqrt{g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j} . \quad (22)$$

Непосредственно из построения тензора $g_{ij}(\xi)$ следует, что при замене геометрии (14) на геометрию (22) исходная конгруенция мировых линий и соответствующая этой конгруенции Мировая функция $S(\xi)$ остаются теми же.

Таким образом, в нашей концепции одному и тому же Миру, то есть паре {Мировая функция; конгруенция мировых линий}, в общем случае соответствует некий класс жестко связанных между собой, но качественно различных финслеровых геометрий.

3 Условие аналитичности и пространство Минковского

Пусть Мировая функция $S(\xi)$ является компонентой некоторой аналитической функции переменной H_4 при единице в ортогональном базисе (4), то есть

$$S(\xi) = \frac{1}{4} [f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)] . \quad (23)$$

Тогда

$$g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \xi^i} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \frac{\partial S}{\partial \xi^k} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} = \frac{\partial f^1(\xi^1)}{\partial \xi^1} \frac{\partial f^2(\xi^2)}{\partial \xi^2} \frac{\partial f^3(\xi^3)}{\partial \xi^3} \frac{\partial f^4(\xi^4)}{\partial \xi^4} = \kappa(\xi)^4 > 0 , \quad (24)$$

что приводит к ограничению на функции f^i :

$$\frac{\partial f^1(\xi^1)}{\partial \xi^1} \frac{\partial f^2(\xi^2)}{\partial \xi^2} \frac{\partial f^3(\xi^3)}{\partial \xi^3} \frac{\partial f^4(\xi^4)}{\partial \xi^4} > 0 . \quad (25)$$

Из выражения (24) следует, что пространство с элементом длины (14) может быть получено из пространства с элементом длины (6) конформным преобразованием, то есть условие аналитичности Мировой функции можно трактовать, в некотором смысле, как условие конформной симметрии.

Построим по предложенному в предыдущем разделе алгоритму тензор $g_{ij}(\xi)$. Оказывается, что в той области, где функции f^i не имеют особенностей, всегда найдется такая система координат x^0, x^1, x^2, x^3 , в которой элемент длины ds'' имеет вид

$$ds'' = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} . \quad (26)$$

Выпишем формулы, выражающие координаты x^0, x^1, x^2, x^3 через исходные координаты $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{4} (f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)) , \\ x^1 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) - f^3(\xi^3) - f^4(\xi^4)) , \\ x^2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (f^1(\xi^1) - f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) - f^4(\xi^4)) , \\ x^3 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (f^1(\xi^1) - f^2(\xi^2) - f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)) . \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Таким образом, чтобы получить нетривиальное искривление пространства-времени необходимо использовать Мировые функции с нарушенной конформной симметрией.

4 Ньютоновский потенциал

Покажем, что существуют Мировые функции, приводящие к нетривиальным псевдоримановым четырехмерным пространствам. Для этого рассмотрим функцию вида

$$S(\xi) = \frac{1}{4} (\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4) + \alpha \cdot \psi(\varrho), \quad (28)$$

где α – параметр нарушения аналитичности Мировой функции (параметр нарушения конформной симметрии в пространстве H_4), ψ – произвольная функция одного аргумента

$$\varrho = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}, \quad (29)$$

а y^0, y^1, y^2, y^3 – координаты точки в ортогональном базисе 1, j, k, jk :

$$\left. \begin{aligned} y^0 &= \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4), \\ y^1 &= \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 - \xi^3 - \xi^4), \\ y^2 &= \frac{1}{4}(\xi^1 - \xi^2 + \xi^3 - \xi^4), \\ y^3 &= \frac{1}{4}(\xi^1 - \xi^2 - \xi^3 + \xi^4). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Тогда производные Мировой функции по координатам ξ^i можно выразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha}{\varrho} \frac{d\psi}{d\varrho} (y^1 + y^2 + y^3) \right], \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha}{\varrho} \frac{d\psi}{d\varrho} (y^1 - y^2 - y^3) \right], \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha}{\varrho} \frac{d\psi}{d\varrho} (-y^1 + y^2 - y^3) \right], \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^4} &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha}{\varrho} \frac{d\psi}{d\varrho} (-y^1 - y^2 + y^3) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Вычислим компоненты метрического тензора в координатах y^0, y^1, y^2, y^3 , используя инвариантность квадрата элемента длины

$$g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{ij}(y) dy^i dy^j \quad (32)$$

и приводя подобные, получим:

$$\tilde{g}_{00} = 1 - 3\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{d\varrho} \right)^2, \quad \tilde{g}_{\beta\beta-} = -3 \left\{ 1 + \alpha^2 \left(\frac{d\psi}{d\varrho} \right)^2 \left[1 - \frac{4(y^\alpha)^2}{3\varrho^2} \right] \right\}, \quad (33)$$

$$2\tilde{g}_{0\beta} = -4 \left[\alpha \frac{d\psi}{d\varrho} \frac{y^\beta}{\varrho} + 3\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{d\varrho} \right)^2 \cdot \frac{y^1 y^2 y^3}{y^\beta \varrho^2} \right], \quad (34)$$

$$2\tilde{g}_{\beta\gamma} = -4 \left[3\alpha \frac{d\psi}{d\varrho} \frac{y^\delta}{\varrho} + \alpha^2 \left(\frac{d\psi}{d\varrho} \right)^2 \cdot \frac{y^\beta y^\gamma}{\varrho^2} \right], \quad (35)$$

где индексы β, γ, δ , пробегают значения 1, 2, 3; $\beta \equiv \beta_-$, но по этой паре не ведется суммирование, в последней формуле индексы β, γ, δ все разные.

Если параметр $\alpha = 0$, то

$$(\tilde{g}_{ij}) = \text{diag}(1, -3, -3, -3). \quad (36)$$

Это говорит о том, что реальные физические координаты x^0, x^1, x^2, x^3 пространства-времени связаны с координатами y^0, y^1, y^2, y^3 следующим образом:

$$x^0 = y^0, \quad x^\beta = \sqrt{3} \cdot y^\beta. \quad (37)$$

Перейдем к физическим координатам x^0, x^1, x^2, x^3 :

$$\tilde{g}_{ij}(y)dy^i dy^j = \bar{g}_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (38)$$

где

$$\bar{g}_{00} = \tilde{g}_{00}, \quad \bar{g}_{0\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tilde{g}_{0\beta}, \quad \bar{g}_{\beta\gamma} = \frac{1}{3} \cdot \tilde{g}_{\beta\gamma}. \quad (39)$$

Введем обозначение

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \equiv \sqrt{3} \cdot \varrho, \quad (40)$$

тогда

$$\bar{g}_{00} = 1 - 9\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2, \quad \bar{g}_{\beta\beta_-} = - \left\{ 1 + 3\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \left[1 - \frac{4(x^\alpha)^2}{3r^2} \right] \right\}, \quad (41)$$

$$2\bar{g}_{0\beta} = -4 \left[\alpha \frac{d\psi}{dr} \frac{x^\beta}{r} + 3\sqrt{3}\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \cdot \frac{x^1 x^2 x^3}{x^\beta r^2} \right], \quad (42)$$

$$2\bar{g}_{\beta\gamma} = -4 \left[\sqrt{3}\alpha \frac{d\psi}{dr} \frac{x^\delta}{r} + \alpha^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \cdot \frac{x^\beta x^\gamma}{r^2} \right]. \quad (43)$$

Метрический тензор $\bar{g}_{ij}(x) = \bar{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ зависит только от пространственных координат x^1, x^2, x^3 , то есть соответствует стационарному гравитационному полю, стационарной Вселенной. Пробная частица массы m движется по геодезическим псевдориманового пространства с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3)$.

Пусть в данной системе отсчета пробная частица движется со скоростью много меньше скорости света c ,

$$\frac{dx^\beta}{dt} = v^\beta, \quad |v^\beta| \ll c, \quad (44)$$

а сами гравитационные поля слабые, то есть на тех временных отрезках, на которых рассматривается движение частицы, условие $|v^\beta| \ll 1$ сохраняется. Для описания такого нерелятивистского движения пробной частицы в слабом гравитационном поле получим функцию Лагранжа L . Для этого разложим правую часть соотношения

$$L = -mc \cdot \frac{\sqrt{\bar{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j}}{dt} \quad (45)$$

с точностью до членов $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ включительно:

$$L = -mc^2 \sqrt{\bar{g}_{00}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{g}_{00}} \left(2\bar{g}_{0\beta} \frac{v^\beta}{c} + \bar{g}_{\beta\gamma} \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right)}, \quad (46)$$

$$L \simeq -mc^2 \sqrt{\bar{g}_{00}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2\bar{g}_{00}} \left(2\bar{g}_{0\beta} \frac{v^\beta}{c} + \bar{g}_{\beta\gamma} \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) - \frac{1}{8\bar{g}_{00}^2} \left(2\bar{g}_{0\beta} \frac{v^\beta}{c} \right)^2 \right\}. \quad (47)$$

Если раскрыть скобки, то в правой части будет содержаться аддитивный член, являющийся полной производной по времени от некоторой функции $f(r)$, он будет линейно зависеть от компонент скорости и его можно опустить. Не меняя обозначение для функции Лагранжа, имеем

$$L \simeq -mc^2 \sqrt{\bar{g}_{00}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2\bar{g}_{00}} \cdot \bar{g}_{\beta\gamma} \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} - \frac{1}{8\bar{g}_{00}^2} \left(2\bar{g}_{0\beta} \frac{v^\beta}{c} \right)^2 \right\}. \quad (48)$$

Мы стремимся получить функцию Лагранжа вида

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(\vec{x}), \quad (49)$$

где $U(\vec{x})$ – потенциальная энергия пробной частицы, $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$, $\vec{v} \equiv (v^1, v^2, v^3)$, $r^2 = \vec{x}^2$, $\vec{v}^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \equiv v^2$. Для этого нам придется сделать некие предположения о связи параметра α со скоростью света:

$$\alpha = \frac{\nu}{c}, \quad \text{при } c \rightarrow \infty \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (50)$$

Кроме того, будем считать, что α того же (или более высокого порядка малости), что и отношение $\left| \frac{v}{c} \right|$. Тогда сохраним в формуле (48) лишь члены, не исчезающие при $c \rightarrow \infty$, имеем:

$$L \simeq -mc^2 + mc^2 \frac{9\nu^2}{2c^2} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 + m \cdot \frac{v^1 v^1 + v^2 v^2 + v^3 v^3}{2}. \quad (51)$$

Учитывая, что величина $(-mc^2)$ есть полная производная функции $(-mc^2 \cdot t)$ по времени, и опуская ее, получим

$$L \simeq \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{9m\nu^2}{2} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2. \quad (52)$$

Пусть в начале координат трехмерного пространства x^1, x^2, x^3 покоится точечная масса M , тогда потенциальная энергия пробной частицы массы m , находящейся в точке x^1, x^2, x^3 , равна

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r}, \quad (53)$$

γ – гравитационная постоянная. Сравнивая формулы (49) и (52), получим уравнение для функции $\psi(r)$

$$\frac{9m\nu^2}{2} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 = \gamma \frac{mM}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi}{dr} = \pm \frac{\sqrt{2\gamma M}}{3\nu} \frac{1}{r^{1/2}}. \quad (54)$$

Таким образом,

$$\psi(r) = \pm \frac{2\sqrt{2\gamma M}}{3\nu} \cdot r^{1/2} + \psi_0 \quad (\psi_0 - \text{постоянная}). \quad (55)$$

Итак, Мировая функция

$$S = x^0 \pm \frac{2\sqrt{2\gamma M}}{3c} \cdot r^{1/2} + C_0 \quad (C_0 - \text{постоянная}), \quad (56)$$

осуществляя конформное преобразование элемента длины плоского пространства Бервальда-Моора, индуцирует в пространстве Минковского псевдориманову геометрию, которая для нерелятивистской пробной частицы массы m дает уравнения движения кеплеровой задачи в поле притяжения гравитирующей точечной массы M , покоящейся в начале пространственных координат.

Более сложная Мировая функция, также, возможно, приводящая к стационарной Вселенной, имеет вид

$$S(\xi) = \frac{1}{4} (\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4) [1 + \alpha_1 \cdot \psi_1(\varrho)] + \alpha_2 \cdot \psi_2(\varrho), \quad (57)$$

где α_A – параметры нарушения аналитичности Мировой функции (параметры нарушения конформной симметрии в пространстве H_4), ψ_A – произвольные функции одного аргумента ϱ (29), (30).

Заключение

Полученные в настоящей работе результаты позволяют сделать вывод о глубокой связи, существующей между геометриями Эйнштейна и финслеровыми пространствами с метрической функцией Бервальда-Моора. Удалось указать конкретное финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора, которое в пределе оказалось связанным с искривленным псевдоримановым пространством, имеющим ньютонов характер гравитационного потенциала. Этот факт указывает на принципиальную возможность более интересных построений, в частности, отыскание таких финслеровых пространств, чьими предельными приближениями окажутся известные релятивистские решения.

Литература

- [1] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. Кватернионы в релятивистской физике. Минск, Наука, 1989.
- [2] Ефремов А. П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, Vol 4, 200.
- [3] Кассандров В. В. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, Vol 4, 200.
- [4] Казанова Г. От алгебры Клиффорда до атома водорода. М.: Платон, 1997.
- [5] J. C. Baez. The octonions. // Bull. Amer. Mathem. Soc. **39**: 2, 145–205 (2002).
- [6] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. ArXiv: gr-qc/0206004.
- [7] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F.: Phys. Lett. A 244, N 4, (1988) 222.
- [8] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F.: Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.
- [9] Пименов Р. И. Конструкции времени в естествознании: на пути к пониманию феномена времени. Часть 1. Междисциплинарное исследование. М.: Изд. Мос. Ун-та, 1996, с. 153–199.
- [10] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Трехмерные расстояния и модуль скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3, Vol 5, 200.
- [11] Павлов Д. Г. Число и геометрия пространства-времени. В сб. Метафизика. Век XXI. Под ред. Ю. С. Владимирова. М.: Бином, 2006.
- [12] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Изд. 2-е, ст. М.: Едиториал УРСС, 2003.

ФИНСЛЕРОВЫ 4-СПИНОРЫ КАК ОБОБЩЕНИЕ ТВИСТОРОВ

А. В. Соловьев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
anton@spin.phys.msu.ru

Изложены основные положения геометрии финслеровых 4-спиноров. Показано, что твисторы являются частным случаем финслеровых 4-спиноров. Установлена тесная связь между финслеровыми 4-спинорами и геометрией 16-мерного линейного финслерова пространства. Дано описание группы изометрий этого пространства. Изложена процедура размерной редукции к 4-мерным величинам.

Введение

В работах [1, 2] были введены *гиперспиноры* и рассмотрены их основные свойства. Эти же математические объекты под названием N -компонентных спиноров совершенно независимо изучались в работах [3, 4]. Наконец, в статье [5] была построена общая алгебраическая теория *финслеровых N -спиноров*. Последний термин представляется наиболее удачным, поскольку отражает тесную связь, существующую между гиперспинорами и финслеровой геометрией.

Настоящая работа посвящена изложению основных положений геометрии финслеровых 4-спиноров. Отмечается, что *твисторы* Р. Пенроуза [6] представляют собой частный случай финслеровых 4-спиноров и могут быть ассоциированы не только с псевдоевклидовой, но и с финслеровой геометрией. После вывода явного выражения для длины вектора в 16-мерном линейном финслеровом пространстве, дается описание соответствующей группы изометрий. Статья завершается изложением процедуры размерной редукции, которая позволяет переписать выражение для финслеровой длины 16-вектора в гораздо более обзримом виде, используя только 4-мерные геометрические объекты.

Геометрия финслеровых 4-спиноров

Пусть $\mathbb{C}^4$ — линейное пространство 4-компонентных столбцов комплексных чисел относительно стандартных матричных операций сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{C}$. Рассмотрим антисимметричную 4-линейную форму

$$[\xi, \eta, \lambda, \mu] = \varepsilon_{abcd} \xi^a \eta^b \lambda^c \mu^d, \quad (1)$$

где $\xi, \eta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}^4$, ε_{abcd} — символ Леви-Чивиты, нормированный условием $\varepsilon_{1234} = 1$, индексы a, b, c, d независимо пробегает значения от 1 до 4, а $\xi^a, \eta^b, \lambda^c, \mu^d \in \mathbb{C}$. Здесь и во всех последующих формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Пространство $\mathbb{C}^4$ с заданной на нем формой (1) назовем *пространством финслеровых 4-спиноров*. Само же комплексное число $[\xi, \eta, \lambda, \mu]$ будем называть *симплектическим скалярным 4-произведением* финслеровых 4-спиноров ξ, η, λ и μ .

Поскольку (1) представляет собой не что иное как определитель

$$[\xi, \eta, \lambda, \mu] = \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 & \lambda^1 & \mu^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \lambda^2 & \mu^2 \\ \xi^3 & \eta^3 & \lambda^3 & \mu^3 \\ \xi^4 & \eta^4 & \lambda^4 & \mu^4 \end{vmatrix} \quad (2)$$

со столбцами ξ , η , λ и μ , то, по известной теореме алгебры [7], симплектическое скалярное 4-произведение $[\xi, \eta, \lambda, \mu]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда финслеровы 4-спиноры ξ , η , λ и μ линейно зависимы. В частности, $[\xi, \xi, \xi, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \mathbb{C}^4$.

Найдем изометрии пространства финслеровых 4-спиноров, т. е. линейные преобразования

$$\xi' = D\xi \iff \xi'^a = d_b^a \xi^b \quad (D = \|d_b^a\|; d_b^a \in \mathbb{C}; a, b = \overline{1, 4}), \quad (3)$$

сохраняющие симплектическое скалярное 4-произведение:

$$[\xi', \eta', \lambda', \mu'] = [\xi, \eta, \lambda, \mu] \quad \text{для любых } \xi, \eta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}^4. \quad (4)$$

Подставляя (3) и аналогичные выражения для η' , λ' , μ' в условие (4), с учетом (2) получаем:

$$[\xi, \eta, \lambda, \mu] \det D = [\xi, \eta, \lambda, \mu]. \quad (5)$$

Ввиду произвольности $\xi, \eta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}^4$, из (5) следует унимодулярность матрицы преобразования (3): $\det D = 1$. Таким образом, изометрии пространства финслеровых 4-спиноров образуют группу $\text{SL}(4, \mathbb{C})$.

Пространство финслеровых 4-спиноров можно легко превратить в пространство твисторов, если надеть $\mathbb{C}^4$ дополнительной геометрической структурой. А именно, рассмотрим полуторалинейную эрмитову форму

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1 \overline{\eta^1} + \xi^2 \overline{\eta^2} - \xi^3 \overline{\eta^3} - \xi^4 \overline{\eta^4}, \quad (6)$$

где $\xi, \eta \in \mathbb{C}^4$, а черта обозначает комплексное сопряжение. Комплексное число $\langle \xi, \eta \rangle$ обычно называется (псевдоунитарным) скалярным произведением ξ и η . По отношению к скалярному произведению (6) пространство $\mathbb{C}^4$ является пространством твисторов [6]. Очевидно, преобразования (3), сохраняющие одновременно формы (1) и (6), образуют так называемую твисторную группу $\text{SU}(2, 2) \subset \text{SL}(4, \mathbb{C})$. В этом смысле твисторы представляют собой частный случай финслеровых 4-спиноров.

Вернемся, однако, к финслеровым 4-спинорам и рассмотрим подпространство линейного пространства $\mathbb{C}^4 \otimes \overline{\mathbb{C}^4}$, состоящее из эрмитовых тензоров. Это подпространство изоморфно 16-мерному действительному линейному пространству $\text{Herm}(4) = \{X \mid X = X^+\}$, образованному всеми эрмитовыми 4×4 -матрицами с комплексными элементами. Здесь и далее крест обозначает эрмитово сопряжение.

В качестве базиса пространства $\text{Herm}(4)$ выберем следующие линейно независимые матрицы:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\tau_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\tau_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\tau_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
\tau_{15} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Тогда для любого $X \in \text{Herm}(4)$ имеет место разложение

$$X = X^A \tau_A \quad (A = \overline{0, 15}), \tag{8}$$

где $X^A \in \mathbb{R}$ — компоненты 16-вектора X относительно базиса (7). Наряду с матрицами (7) введем еще один набор эрмитовых 4×4 -матриц с верхними индексами: $\tau^B = \tau_B$ ($B \neq 8, 15$), $\tau^8 = 2\tau_8$, $\tau^{15} = 2\tau_{15}$. При таком выборе матриц выполняются замечательные соотношения

$$\text{Tr}(\tau^A \tau_B) = 2\delta_B^A \quad (A, B = \overline{0, 15}), \tag{9}$$

где Tr обозначает операцию вычисления следа матрицы, а δ_B^A — символ Кронекера. На основании (8) и (9) немедленно заключаем, что

$$X^A = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau^A X). \tag{10}$$

Наделим $\text{Herm}(4)$ структурой финслерова пространства. Для этого определим длину $|X|$ 16-вектора $X \in \text{Herm}(4)$ следующим образом: $|X| \equiv \sqrt[4]{\det X}$. Вычисляя определитель от левой и правой частей разложения (8), получаем выражение для $|X|^4$ в базисе (7)

$$\begin{aligned}
|X|^4 &= G_{ABCD} X^A X^B X^C X^D = \\
&= X^{15} \{ [(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2] X^8 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [(X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2]X^0 + 2[X^4X^6 + X^5X^7]X^1 + \\
& + 2[X^5X^6 - X^4X^7]X^2 + [(X^4)^2 + (X^5)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2]X^3 \} - \\
& - [(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2][(X^{13})^2 + (X^{14})^2] + \\
& + [(X^4)^2 + (X^5)^2][(X^{11})^2 + (X^{12})^2] + [(X^6)^2 + (X^7)^2] \times \\
& \times [(X^9)^2 + (X^{10})^2] - X^0X^8[(X^9)^2 + (X^{10})^2 + (X^{11})^2 + (X^{12})^2] + \\
& + X^3X^8[(X^9)^2 + (X^{10})^2 - (X^{11})^2 - (X^{12})^2] + 2\{[X^0 - X^3] \times \\
& \times [X^4X^9X^{13} + X^4X^{10}X^{14} - X^5X^9X^{14} + X^5X^{10}X^{13}] + \\
& + [X^0 + X^3][X^6X^{11}X^{13} + X^6X^{12}X^{14} - X^7X^{11}X^{14} + \\
& + X^7X^{12}X^{13}] - X^1[X^4X^{11}X^{13} + X^4X^{12}X^{14} - X^5X^{11}X^{14} + \\
& + X^5X^{12}X^{13} + X^6X^9X^{13} + X^6X^{10}X^{14} - X^7X^9X^{14} + \\
& + X^7X^{10}X^{13} - X^8X^9X^{11} - X^8X^{10}X^{12}] - X^2[X^4X^{11}X^{14} - \\
& - X^4X^{12}X^{13} + X^5X^{11}X^{13} + X^5X^{12}X^{14} - X^6X^9X^{14} + \\
& + X^6X^{10}X^{13} - X^7X^9X^{13} - X^7X^{10}X^{14} + X^8X^9X^{12} - \\
& - X^8X^{10}X^{11}] - X^4[X^6X^9X^{11} + X^6X^{10}X^{12} + X^7X^9X^{12} - \\
& - X^7X^{10}X^{11}] + X^5[X^6X^9X^{12} - X^6X^{10}X^{11} - X^7X^9X^{11} - \\
& - X^7X^{10}X^{12}]\},
\end{aligned} \tag{11}$$

где G_{ABCD} — компоненты симметричного ковариантного тензора 4-го ранга на $\text{Herm}(4)$. Таким образом, финслерова длина 16-вектора $X \in \text{Herm}(4)$ задается в базисе (7) формой 4-й степени относительно переменных (10). Особо отметим обстоятельство, что форма (11) является знаконеопределенной, т. е. возможны три случая: $|X|^4 > 0$, $|X|^4 < 0$ или $|X|^4 = 0$. Поскольку $|X|^4 = \det X$, последний случай реализуется тогда и только тогда, когда $\det X = 0$.

Всякое линейное преобразование (3) пространства финслеровых 4-спиноров индуцирует в $\text{Herm}(4)$ преобразование вида

$$X' = DXD^+ \iff X'^{ab} = d_c^a \bar{d}_e^b X^{ce} \quad (X' = \|X'^{ab}\|; X = \|X^{ce}\|), \tag{12}$$

где как пунктирные, так и непунктирные индексы пробегает значения от 1 до 4 (точка над индексом означает, что он относится к элементу матрицы, комплексно сопряженной матрице $D = \|d_b^a\|$), а $X \in \text{Herm}(4)$. Очевидно, преобразование (12) обладает следующими свойствами.

1. Если $X = X^+$, то $X' = X'^+$, т. е. преобразование (12) не выводит за пределы пространства $\text{Herm}(4)$.
2. Преобразование (12) является линейным относительно X .
3. Если $\det D = 1$, то $\det X' = \det X$ для любого $X \in \text{Herm}(4)$.

Поскольку $|X| = \sqrt[4]{\det X}$, последнее свойство означает, что при $D \in \text{SL}(4, \mathbb{C})$ линейное преобразование (12) пространства $\text{Herm}(4)$ является финслеровой изометрией: $|X'| = |X|$. Понятно, что все такие изометрии образуют некоторую группу. Дадим явное матричное описание этой группы в базисе (7).

Подставим в (12) вместо X' , $X \in \text{Herm}(4)$ их разложения: $X' = X'^A \tau_A$, $X = X^B \tau_B$. Умножим получившееся равенство слева на τ^A , вычислим след от его обеих сторон и воспользуемся соотношениями (9). В результате будем иметь

$$X'^A = L(D)_B^A X^B \quad (A, B = \overline{0, 15}), \tag{13}$$

где

$$L(D)_B^A = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau^A D \tau_B D^+) \quad (14)$$

— элементы матрицы линейного преобразования (12) в базисе (7) (подчеркнем, что $L(D)_B^A \in \mathbb{R}$). Таким образом, при любой унимодулярной комплексной 4×4 -матрице D из группы $\text{SL}(4, \mathbb{C})$ преобразование (13) – (14) сохраняет форму (11): $G_{ABCD} X'^A X'^B X'^C X'^D = G_{ABCD} X^A X^B X^C X^D$.

Поскольку группа $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \subset \text{SL}(4, \mathbb{C})$ локально изоморфна собственной ортохронной подгруппе $O_+^\uparrow(1, 3)$ группы Лоренца [8], имеет смысл рассмотреть преобразования (13) – (14) при $D \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, т. е. с позиций “4-мерного наблюдателя”. Помимо всего прочего, это позволит представить выражение (11) для финслеровой длины 16-вектора в полностью 4-мерном виде.

Пусть

$$D_2 = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & 0 & 0 \\ d_1^2 & d_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D_2 = 1 \quad (d_b^{\hat{a}} \in \mathbb{C}; \hat{a}, \hat{b} = 1, 2). \quad (15)$$

Совокупность матриц (15) образует в $\text{SL}(4, \mathbb{C})$ подгруппу, изоморфную группе $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Подставим в (14) вместо D матрицу D_2 из (15). Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} L(D_2)_0^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^1 + d_2^1 \bar{d}_2^1 + d_1^2 \bar{d}_1^2 + d_2^2 \bar{d}_2^2), & L(D_2)_1^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^1 + d_2^1 \bar{d}_1^1 + d_1^2 \bar{d}_2^1 + d_2^2 \bar{d}_1^1), \\ L(D_2)_2^0 &= \frac{i}{2}(d_2^1 \bar{d}_1^1 + d_2^2 \bar{d}_1^1 - d_1^1 \bar{d}_2^1 - d_1^2 \bar{d}_2^1), & L(D_2)_3^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^1 + d_1^2 \bar{d}_1^1 - d_2^1 \bar{d}_2^1 - d_2^2 \bar{d}_2^1), \\ L(D_2)_0^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^2 + d_1^2 \bar{d}_1^1 + d_2^1 \bar{d}_2^2 + d_2^2 \bar{d}_2^1), & L(D_2)_1^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^2 + d_1^2 \bar{d}_2^1 + d_2^1 \bar{d}_1^2 + d_2^2 \bar{d}_1^1), \\ L(D_2)_2^1 &= \frac{i}{2}(d_2^1 \bar{d}_1^2 + d_2^2 \bar{d}_1^1 - d_1^1 \bar{d}_2^2 - d_1^2 \bar{d}_2^1), & L(D_2)_3^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^2 + d_1^2 \bar{d}_1^1 - d_2^1 \bar{d}_2^2 - d_2^2 \bar{d}_2^1), \\ L(D_2)_0^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^2 - d_1^2 \bar{d}_1^1 + d_2^1 \bar{d}_2^2 - d_2^2 \bar{d}_2^1), & L(D_2)_1^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^2 - d_1^2 \bar{d}_2^1 + d_2^1 \bar{d}_1^2 - d_2^2 \bar{d}_1^1), \\ L(D_2)_2^2 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^2 + d_2^1 \bar{d}_1^2 - d_1^2 \bar{d}_2^1 - d_2^2 \bar{d}_1^1), & L(D_2)_3^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^2 - d_1^2 \bar{d}_1^1 - d_2^1 \bar{d}_2^2 + d_2^2 \bar{d}_2^1), \\ L(D_2)_0^3 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^1 - d_1^2 \bar{d}_1^2 + d_2^1 \bar{d}_2^1 - d_2^2 \bar{d}_2^2), & L(D_2)_1^3 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_2^1 - d_1^2 \bar{d}_2^2 + d_2^1 \bar{d}_1^1 - d_2^2 \bar{d}_1^2), \\ L(D_2)_2^3 &= \frac{i}{2}(d_2^1 \bar{d}_1^1 - d_2^2 \bar{d}_1^2 - d_1^1 \bar{d}_2^1 + d_1^2 \bar{d}_2^2), & L(D_2)_3^3 &= \frac{1}{2}(d_1^1 \bar{d}_1^1 - d_2^1 \bar{d}_2^1 - d_1^2 \bar{d}_1^2 + d_2^2 \bar{d}_2^2), \end{aligned} \quad (16)$$

$$L(D_2)_{3+j}^{3+i} = L(D_2)_{8+j}^{8+i} = M(D_2)_j^i \quad (i, j = \overline{1, 4}), \text{ где}$$

$$\begin{aligned} M(D_2)_1^1 &= \frac{1}{2}(\bar{d}_1^1 + d_1^1), & M(D_2)_1^3 &= \frac{1}{2}(\bar{d}_1^2 + d_1^2), \\ M(D_2)_2^1 &= \frac{i}{2}(\bar{d}_1^1 - d_1^1), & M(D_2)_2^3 &= \frac{i}{2}(\bar{d}_1^2 - d_1^2), \\ M(D_2)_3^1 &= \frac{1}{2}(\bar{d}_2^1 + d_2^1), & M(D_2)_3^3 &= \frac{1}{2}(\bar{d}_2^2 + d_2^2), \\ M(D_2)_4^1 &= \frac{i}{2}(\bar{d}_2^1 - d_2^1), & M(D_2)_4^3 &= \frac{i}{2}(\bar{d}_2^2 - d_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(D_2)_1^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1 - \overline{d_1^1}), & M(D_2)_1^4 &= \frac{i}{2}(d_1^2 - \overline{d_1^2}), \\
M(D_2)_2^2 &= \frac{1}{2}(d_1^1 + \overline{d_1^1}), & M(D_2)_2^4 &= \frac{1}{2}(d_1^2 + \overline{d_1^2}), \\
M(D_2)_3^2 &= \frac{i}{2}(d_2^1 - \overline{d_2^1}), & M(D_2)_3^4 &= \frac{i}{2}(d_2^2 - \overline{d_2^2}), \\
M(D_2)_4^2 &= \frac{1}{2}(d_2^1 + \overline{d_2^1}), & M(D_2)_4^4 &= \frac{1}{2}(d_2^2 + \overline{d_2^2}),
\end{aligned} \tag{17}$$

$L(D_2)_8^8 = L(D_2)_{13}^{13} = L(D_2)_{14}^{14} = L(D_2)_{15}^{15} = 1$, а все оставшиеся элементы матрицы преобразования $X'^A = L(D_2)_B^A X^B$ обращаются в нуль. Таким образом, при $D = D_2$ финслерова изометрия (13) принимает вид

$$\begin{aligned}
X'^\alpha &= L(D_2)_\beta^\alpha X^\beta \quad (\alpha, \beta = \overline{0, 3}), \\
\theta^i &= M(D_2)_j^i \theta^j \quad (i, j = \overline{1, 4}), \\
X'^8 &= X^8, \\
\vartheta^i &= M(D_2)_j^i \vartheta^j \quad (i, j = \overline{1, 4}), \\
X'^{13} &= X^{13}, \\
X'^{14} &= X^{14}, \\
X'^{15} &= X^{15},
\end{aligned} \tag{18}$$

где $L(D_2)_\beta^\alpha, M(D_2)_j^i$ даются формулами (16) – (17) и использованы обозначения: $\theta^i = X^{3+i}, \vartheta^j = X^{8+j}$.

В работе [5] было показано, что (16) и (17) являются элементами матриц преобразований лоренцева 4-вектора и майорановского 4-спинора соответственно. Поэтому результат (18) сводится к утверждению, что при $D = D_2$ 16-вектор X^A расщепляется на лоренцев 4-вектор X^α , майорановские 4-спиноры θ^i, ϑ^j и лоренцевы 4-скаляры $X^8, X^{13}, X^{14}, X^{15}$.

Сказанное составляет суть процедуры размерной редукции, позволяющей выявлять “4-мерный состав” встречающихся 16-мерных выражений. Применим эту процедуру к весьма громоздкой формуле (11) для финслеровой длины 16-вектора X^A . Принимая во внимание (18), получаем

$$\begin{aligned}
|X|^4 &= X^{15}[X^8 g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu - g_{\mu\nu} X^\mu \bar{\theta} \gamma^\nu \theta] - \\
&\quad - [(X^{13})^2 + (X^{14})^2] g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu - X^8 g_{\mu\nu} X^\mu \bar{\vartheta} \gamma^\nu \vartheta + \\
&\quad + 2X^{13} g_{\mu\nu} X^\mu \bar{\theta} \gamma^\nu \vartheta + 2X^{14} g_{\mu\nu} X^\mu \bar{\theta} \gamma^5 \gamma^\nu \vartheta + \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \bar{\theta} \gamma^\mu \theta \bar{\vartheta} \gamma^\nu \vartheta,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\mu, \nu = \overline{0, 3}$, $\|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ — матрица компонент метрического тензора пространства Минковского в псевдоортонормированном базисе,

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
\gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

— матрицы Дирака в майорановском представлении [5], $\theta, \vartheta \in \mathbb{R}^4$ — 4-компонентные столбцы действительных чисел, а черта обозначает дираковское сопряжение: $\bar{\theta} = \theta^\top \gamma^0$, $\bar{\vartheta} = \vartheta^\top \gamma^0$ (здесь $\top$ — значок транспонирования матрицы). Таким образом, выражение (11) записано в гораздо более компактной 4-мерной форме (19).

Заключение

Подводя итоги, сделаем ряд замечаний по поводу полученных результатов.

Прежде всего, следует отметить двойственную природу твисторов: с одной стороны они являются спинорами 6-мерного псевдоевклидова пространства с двумя временноподобными измерениями [6], а с другой, как показано в данной статье, — частным случаем финслеровых 4-спиноров 16-мерного линейного пространства с метрической функцией, определяемой алгебраической формой 4-й степени (11).

Кроме того, в статье дано явное описание изометрий этого 16-мерного финслерова пространства и процедуры размерной редукции, позволившей представить форму (11) в 4-мерном виде (19). Последнее весьма существенно, ибо свидетельствует о выполнимости принципа соответствия со стандартной релятивистской теорией на уровне геометрии.

Автор благодарен Ю.С. Владимирову, С.В. Болохову и А.В. Пилипенко за заинтересованное обсуждение проблем, затронутых в статье.

Литература

- [1] D. Finkelstein. *Hyperspin and hyperspace*. Physical Review Letters **56**, 1532–1533 (1986).
- [2] D. Finkelstein, S.R. Finkelstein, and C. Holm. *Hyperspin manifolds*. International Journal of Theoretical Physics **25**, 441–463 (1986).
- [3] Ю.С. Владимиров, А.В. Соловьев. *Физическая структура ранга (4, 4; б) и трехкомпонентные спиноры*. “Системология и методологические проблемы информационно-логических систем”. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1990. — Вычислительные системы, вып. 135. — С. 44–66.
- [4] А.В. Соловьев. *К теории бинарных физических структур ранга (5, 5; б) и выше*. “Системология и методологические проблемы информационно-логических систем”. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1990. — Вычислительные системы, вып. 135. — С. 67–77.
- [5] A.V. Solov'yov and Yu.S. Vladimirov. *Finslerian N-spinors: Algebra*. International Journal of Theoretical Physics **40**, 1511–1523 (2001).
- [6] Р. Пенроуз, В. Риндлер. Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени. — М.: Мир, 1988. — 572 с.
- [7] А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 1994. — 320 с.
- [8] М.М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1986. — 400 с.

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И МЕТРИКА БЕРВАЛЬДА-МООРА (О ФОРМАЛИЗМЕ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ)

С. В. Сипаров

*Кафедра физики, Государственный университет гражданской авиации,
Санкт-Петербург, Россия
sergey@siparov.spb.su*

Обсуждаются особенности применения финслеровой геометрии к построению теории пространства-времени. Подчеркивается роль алгебраического подхода, с помощью которого удастся получить многие уравнения теоретической физики до введения геометрии. На основе формального использования функции, связанной с метрикой Бервальда-Моора выводятся канонические уравнения Гамильтона, которые можно использовать для дальнейшего построения физической теории в финслеровом пространстве.

1. Введение

Интерес к финслеровым пространствам может быть проявлен с трех направлений.

- Первое соответствует чисто математическому подходу, для которого характерно последовательное рассмотрение самосогласованных конструкций, возникающих на базе произвольно вводимых аксиом.
- Второе соответствует подходу теоретической физики. В его рамках требуется мотивации и имеется в виду сравнение новой теории с ранее известными, а также сопоставление используемых математических объектов и их свойств с результатами измерений, выполняемых в реальном мире.
- Третье направление характерно, скорее, для философии или, по крайней мере, для некоторой метатеории. Здесь обсуждается сама возможность использования данной математической конструкции для описания реального мира, а также смысл используемых понятий.

Второе и третье направления, естественно, перекликаются с возникновением, использованием и достижениями теории относительности Эйнштейна, построенной для изотропного пространства-времени Римана. Отличительной чертой финслеровой геометрии является зависимость метрического тензора не только от координаты, но и от направления некоторого вектора. Это означает, что во втором и третьем подходах речь может идти о возможных экспериментах, в которых проявляется анизотропия окружающего мира и ее следствия, а также о самой возможности такой анизотропии.

В монографии Р. И. Пименова [1] было проведено построение анизотропного финслерова обобщения теории относительности как структуры порядка. В [1] получены уравнения, аналогичные уравнению Эйнштейна в применении к финслеровым пространствам, причем рассмотрены примеры использования различных метрических функций. Работа [1] носит общематематический характер, а ее автор доказывает целый ряд утверждений, важных для всех трех направлений, упомянутых выше. Приведем некоторые из этих утверждений.

1. Финслерова геометрия доставляет модель пространства-времени, которая никакими наблюдениями за планетными орбитами не может быть отличима от Шварцшильдовского решения в пределах одинаковой точности наблюдений. В то же время ее особенностями является то, что она исключает возможность коллапса (образования черных дыр), а для Финслер-Фридмановского случая сценарий первых 6 секунд может быть совершенно иным, хотя красное смещение при этом остается.

2. В анизотропном мире энергия и импульс не обязательно сохраняются.

3. Анизотропия пространства-времени не изменяет структуру гамильтонова подхода при построении физической теории.

4. Для построения формальной базы теоретического рассмотрения финслерова многообразия существенно необходимо правило Лейбница (о дифференцировании произведения).

5. Если понимать одновременность в "радарном смысле" (как это делается в теории относительности Эйнштейна), то опыт типа опыта Майкельсона приведет к заключению об изотропности пространства, даже если оно таковым не является. Т. е. с помощью такого опыта обнаружить анизотропию невозможно. Поэтому принимать радарное определение как единственно верное нецелесообразно. Одновременно зависимость метрического тензора от направления приводит к неоднозначности в определении ортогональной (к мировой линии наблюдателя) гиперплоскости, что, в свою очередь, приводит к фундаментальной проблеме: считать ли "одновременность" понятием каузальной структуры, или считать ее понятием структуры лагранжиана.

6. В ходе построения финслеровой теории анизотропного пространства-времени выявляется неизбежность перехода от привычных гладких функций к функциям более широкого класса

Первые два вывода означают, что обнаружить анизотропию Вселенной как таковую наблюдательными средствами едва ли возможно. В то же время следствия такой анизотропии, проявляющиеся как нарушения законов сохранения, можно пытаться использовать как при интерпретации опытов с частицами (на такую возможность указывалось, в частности, в работе [2]), так и в космологических масштабах.

Выводы 3 и 4 означают, что при изучении финслеровых пространств применимы методы канонических уравнений и алгебр Ли.

Вывод 5 ставит серьезную проблему, решение которой, вероятно, выходит за рамки не только математики, но и физики.

Выводу, изложенному в пункте 6, посвящена отдельная работа [3], в которой автор указывает, что «детерминизм не был "обнаружен в природе", детерминизм не был "выведен логически" или "доказан математически". Мы всего лишь *верили в детерминизм*». В ней также подчеркивается следующее. Существенно недифференцируемые структуры важны в эмпирически-феноменологическом описании физической реальности – в науке о природе появились фрактальные объекты [4]. Общая теория относительности и базирующаяся на ней физическая космология совместимы только с очень хорошо дифференцируемыми структурами. Поэтому следует построить такой аналог общей теории относительности, который был бы свободен от гипотезы дифференцируемости используемых функций.

В связи с использованием конкретно метрики Бервальда-Моора

$$s(X) = \sqrt[4]{x^1 x^2 x^3 x^4} = (x^1 x^2 x^3 x^4)^{1/4} \quad (1)$$

можно упомянуть работу [5], в которой она была использована для описания гравитационного поля в финслеровом пространстве. Автор полагал, что им было ис-

пользовано понятие объема, однако это скорее просто указывало на вид метрической функции, нежели на действительное использование понятия объема для метризации.

В работах [6–8], в которых авторы также стремились использовать метрику Бервальда-Моора, основой рассмотрения служит введенное в [6] понятие скалярного полипроизведения. Необходимо подчеркнуть, что, несмотря на вполне удовлетворительную аксиоматику, этот объект является новым и пока еще не использовался для непосредственной интерпретации физических экспериментов, поэтому следует внимательно подходить к его применению. Следует отметить также, что одновременность в этих работах понималась именно в радарном смысле, что тоже может создать проблемы при интерпретации.

2. Алгебраический подход Кауфмана

Обстоятельства, отмеченные в выводах 3, 4 и 6 работы [1], привлекают внимание к работе Л. Кауфмана [9]. Алгебры Ли объявляются в [9] возможной новой основой описания физической реальности, что подчеркивает роль формализма при построении физической теории, обсуждавшуюся в работе [10], где было уделено внимание в том числе и роли детерминизма в теории. В работе [9] строится алгебра Ли, в которой сначала вводится операция дискретного дифференцирования, что немедленно приводит к расширению класса используемых функций. Затем выполняется переход к коммутаторам и введение операторов сдвига – элементов алгебры, сопряженных к исходным элементам, что непосредственно связано со стремлением обеспечить выполнение правила Лейбница. На основе тождества Якоби выполняется построение формальных алгебраических структур, вид которых оказывается совпадающим с целым рядом уравнений теоретической физики, в том числе и с каноническими уравнениями Гамильтона. При этом фактически задействовано преобразование Лежандра, характерное для этого подхода.

Накладывая ограничения на коммутационные свойства переменных (и соответствующих им операторов сдвига) с целью получить «пространство с "разумной" кривизной», можно получить алгебраические структуры, в которых легко угадываются уравнения теоретической физики. В частности, если элементам алгебры $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ соответствуют коммутационные операторы $\{H, P_1, \dots, P_n\}$, то, используя введенные определения, получают соотношения

$$\frac{dP_i}{dX_0} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}; \quad \frac{dX_i}{dX_0} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

вид которых в точности соответствует каноническим уравнениям Гамильтона. Далее в тех же терминах может быть формально введен оператор кривизны, определяющий для двух данных элементов X и Y степень "некоммутативности" соответствующих им операторов ∇_X и ∇_Y по отношению к "некоммутативности" X и Y . Далее появляется коммутатор $g_{ij} = [X_i, \dot{X}_j]$, который может быть естественно соотнесен с метрическим тензором, и связность Леви-Чивиты $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\nabla_i g_{jk} + \nabla_j g_{ik} - \nabla_k g_{ij})$, которая возникает в [9] исключительно из исчисления коммутаторов и тождества Якоби и не имеет изначальной связи с геометрией. Схожим формальным образом получаются соотношения, совпадающие по виду с уравнениями диффузии, Шредингера, Максвелла, калибровочных теорий.

Таким образом, структура некоторых основополагающих уравнений теоретической физики, в частности, уравнений Гамильтона, не связана с предварительным выбором геометрии, используемой для моделирования пространства-времени. Это

позволяет удобным образом формально использовать метрическую функцию при построении канонических уравнений.

3. Канонические переменные

Используем последнее обстоятельство для вовлечения в теорию метрики Бервальда-Моора. Рассмотрим векторное пространство с векторами $X = \{x^i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и, выбирая координатную систему надлежащим образом и считая, что все $x^i > 0$, введем скалярную функцию вида

$$s^2(X) = \sqrt{x^1 x^2 x^3 x^4}. \quad (3)$$

Она, с одной стороны, очевидным образом связана с метрикой Бервальда-Моора (1), а с другой, – позволяет использовать преобразование Лежандра и определить вектор P , сопряженный вектору X , как градиент введенного скаляра

$$P \equiv \nabla \frac{1}{2} s^2(X) = s(X) \nabla s(X). \quad (4)$$

(Обычно в дальнейшем функцию $s^2(X)$ используют для построения метрического тензора Картана $h_{ik} = \frac{1}{2} \partial_i \partial_k s^2(X)$.)

Считая $X = \{x^i\}$ записью вектора X в контравариантных компонентах, получим выражение для ковариантных компонент вектора $P = \{p_i\}$ в n -мерном случае из аналога формулы (3) и формулы (4) в виде

$$p_i = \frac{s^2(X)}{n x^i} = \frac{(x^1 x^2 \dots x^n)^{2/n}}{n x^i}. \quad (5)$$

Тогда в случае $n = 4$ эти компоненты имеют вид

$$p_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x^2 x^3 x^4}{x^1}}; \quad p_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x^1 x^3 x^4}{x^2}}; \quad p_3 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x^1 x^2 x^4}{x^3}}; \quad p_4 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x^1 x^2 x^3}{x^4}}. \quad (6)$$

Определим (псевдо)скалярное произведение (X, Y) следующим образом

$$(X, Y) = Y \frac{1}{2} \nabla s^2(X) = y^i x_i, \quad (7)$$

где по повторяющимся значкам ведется суммирование. Существенно, что скалярное произведение зависит от порядка сомножителей. С учетом (5, 7) скалярное произведение (X, Y) будет задаваться выражением

$$(X, Y) = y^i x_i = Y \frac{1}{2} \nabla s^2(X) = \frac{s^2(X)}{4} \sum_{k=1}^4 \frac{y^k}{x^k}. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что

$$(X, X) = s^2(X), \quad (9)$$

что соответствует обычному представлению о связи метрики и нормы, квадрат которой связан со скалярным произведением.

(При необходимости можно ввести и угол φ вектора Y относительно X . Это будет число, определяемое формулой $\operatorname{ch} \varphi = \frac{(X, Y)}{s(X)s(Y)}$. Конечно, угол от X к Y не равен углу от Y к X , поскольку скалярное произведение некоммукативно. Сложение таких углов на 2-плоскости не аддитивно).

Если скалярное произведение $(X, Y) = 0$, то вектор Y можно назвать ортогональным к X (при этом, вообще говоря, X не ортогонален Y). Тогда гиперплоскость всех таких Y можно назвать гиперплоскостью, ортогональной прямой λX . В соответствии с (8) она задается выражением

$$\sum_{k=1}^4 \frac{y^k}{x^k} = 0. \quad (10)$$

Последнее соотношение может служить определением поверхности относительной одновременности для инерциального наблюдателя λX . Иными словами, это есть собственное пространство наблюдателя, в котором можно строить траектории движения точек. Его размерность на единицу меньше размерности исходного пространства.

Вводя понятие действия S , видим, что имеет место обычное соотношение для импульсов, т. е.

$$S = -\frac{1}{2}s^2(X) \Rightarrow p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}; \quad i = 2, 3, 4. \quad (11)$$

Первую (в обычно используемых обозначениях – нулевую) компоненту из (6) можно считать "гамильтонианом", т. е. определим

$$p_1 \equiv H = -\frac{\partial S}{\partial x^1} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x^2 x^3 x^4}{x^1}}. \quad (12)$$

Тогда выполняется

$$\frac{\partial p_i}{\partial x^1} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}; \quad i = 2, 3, 4, \quad (13)$$

что совпадает с первым из уравнений (2).

Для того чтобы определить компоненты трехмерной скорости, выразим p_1 через p_i ($i = 2, 3, 4$)

$$p_1 = H = \frac{16p_2 p_3 p_4}{(x^1)^2} \quad (14)$$

Тогда для искомым компонент получим

$$\frac{dx^i}{dx^1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad i = 2, 3, 4 \quad (15)$$

– величины, равные отношениям v^i/c , если считать, что $x^1 = ct$. Выражение (16) совпадает со вторым уравнением (2).

Полученные канонические уравнения могут быть использованы для описания динамики в пространстве с метрикой Бервальда-Моора, если иметь в виду определения использованных "импульсов" и "гамильтониана" и внести в них физический смысл.

Для того чтобы сделать это, вспомним, что определение действия включает в себя константу:

$$S = -\alpha \int ds,$$

где в рассматриваемом случае ds является метрикой Бервальда-Моора (1).

В обычном случае псевдоевклидовой метрики СТО пространство-время было изотропным, а скорость света постоянной и не зависящей от направления. Константу было естественно определить из требования соответствия лагранжиана классическому выражению для лагранжиана свободной частицы $L = \frac{mv^2}{2}$ при $c \rightarrow \infty$, и поэтому константа оказывалась равной $\alpha = mc$. Но теперь так действовать нельзя. Пространство-время не является изотропным, поэтому лагранжиан свободной частицы не будет иметь указанного простого вида. Скорость света может зависеть от направления, поэтому предельный переход следует определить точнее. Эти обстоятельства будут подробнее рассмотрены в последующей работе.

Благодарности

Автор выражает свою признательность Д. Г. Павлову за стимулирующие обсуждения и поддержку.

Литература

- [1] Пименов Р. И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987.
- [2] Богословский Г. Ю. О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени. ДАН СССР, 213, с. 1055, 1973.
- [3] Пименов Р. И. Дифференциальные уравнения – насколько они оправданы. [http :
//www.chronos.msu.ru/public/pimenov_diffury.html](http://www.chronos.msu.ru/public/pimenov_diffury.html).
- [4] Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. W.H.Freeman, New York, 1982.
- [5] Асанов Г. С. Гравитационное поле в финслеровом пространстве, основанное на понятии объема. Вестник МГУ, 17, с. 288, 1976.
- [6] Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. ГКЧГФ, 1, с. 5, 2004.
- [7] Лебедев С. В. Свойства пространств, ассоциированных с коммутативно-ассоциативными алгебрами H_3 и H_4 . ГКЧГФ, 1, с. 68, 2004.
- [8] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. ГКЧГФ, 3, с. 3, 2005.
- [9] Kauffman L. The Non-Commutative Worlds. arXiv: quant-ph/0403012 v. 3.
- [10] Siparov S. The Physical World as a Function of Observer's Consciousness. In SS&T, vol. 5, p. 193, 1997.

РАСШИРЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Я. А. Фурман, А. В. Кревецкий

*Марийский государственный технический университет, г. Йошкар-Ола,
каф. радиотехнических и медикобиологических систем
inf@marstu.mari.ru*

Путем замены одномерной мнимой единицы i на многомерную $3D$ или $7D$ мнимую единицу r введены расширенные комплексные числа. Показано, что при таком подходе полные кватернионы и октавы возникают в результате поворота вокруг вещественной оси $0Re$ плоскости, в которой задано число $a+ib$, на ненулевой угол в $4D$ и $8D$ пространствах. Рассмотрены появляющиеся в результате подобных преобразований ротативно-компланарные классы кватернионов и октав, представляющих собой коммутативно-ассоциативные алгебры.

Введение

Пусть p и q – два полных кватерниона (КТ), равные $p = 0,5 + 0,5i + 0,707j$ и $q = 0,175 + 0,586i + 0,805j$. Если найти их произведение, то получим, что $pq = qp = -0,765 + 0,371i + 0,526j$. Пусть, далее, u , v и l – три полных октавы, равные

$$\begin{aligned} u &= 0,5 + 0,2i + 0,3j + 0,2k + 0,6E + 0,3I + 0,2J + 0,3K, \\ v &= 0,707 + 0,163i + 0,245j + 0,163k + 0,49E + 0,245I + 0,163J + 0,245K, \\ l &= 0,866 + 0,116i + 0,173j + 0,115k + 0,347E + 0,173I + 0,115J + 0,173K. \end{aligned}$$

Для этих октав справедливо:

$$\begin{aligned} uv &= vu = -0,261 + 0,222i + 0,335j + 0,223k + 0,669E + 0,335I + 0,222J + 0,334K; \\ u(vl) &= (uv)l = 0,575 + 0,188i + 0,284j + 0,189k + 0,567E + 0,284I + 0,188J + 0,283K. \end{aligned}$$

Здесь приведены нехарактерные для КТ и октав результаты: операция их перемножения является коммутативной и ассоциативной: $pq = qp$, $uv = vu$, $u(vl) = (uv)l$. Гиперкомплексные числа из данного примера условно названы ротативно-компланарными (РК). Рассмотрим в связи с чем РК полные кватернионы и октавы обладают подобными исключительными свойствами.

Постановка задачи

Как известно, система комплексных чисел строится на базе действительных чисел путем введения “мнимой” единицы. Необходимость рассмотрения таких чисел возникает при формальном решении уравнения вида $(x-a)^2 + b^2 = 0$. Корнем такого уравнения будет число $a + b\sqrt{-1}$. Л. Эйлер ввел буквенное обозначение $i = \sqrt{-1}$. Эта величина была названа мнимой единицей, а выражение вида $z = a + ib$ – комплексным числом. Здесь a и b – вещественные числа, а символу i приписывается свойство

$$i^2 = -1. \quad (1)$$

Операции над комплексными и вещественными числами носят одинаковый характер:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1; \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \quad (3)$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \quad (4)$$

Процедурой удвоения Кэли-Диксона на основе комплексных чисел вводятся кватернионы и октавы, для которых операция умножения является некоммутативной, т.е. $z_1 z_2 \neq z_2 z_1$, а для октав еще и неассоциативной, т.е. $(z_1 z_2) z_3 \neq z_1 (z_2 z_3)$.

В данной работе предлагается принцип обобщения комплексных чисел, состоящий в расширении перечня объектов, которые в соответствии с выражением (1) могут быть приняты в качестве мнимой единицы, т.е. i – это не только $\sqrt{-1}$.

В результате такого обобщения для специфических условий “хорошими” свойствами комплексных и вещественных чисел, задаваемых выражениями (2), (3) и (4), будут обладать также КТ и октавы.

Ротативно-компланарные кватернионы и октавы

Без большого ущерба для полученных результатов ниже будет дан анализ некоторых представлений и операций только над полными нормированными кватернионами и октавами:

$$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k, \quad |p| = 1,$$

$$u = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k + u_4 E + u_5 I + u_6 J + u_7 K, \quad |u| = 1.$$

В тригонометрической форме эти числа имеют вид:

$$p = \cos \varphi + r \sin \varphi; \quad r = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}; \quad |r| = 1$$

и

$$u = \cos \varphi + r \sin \varphi; \\ r = \frac{u_1 i + u_2 j + u_3 k + u_4 E + u_5 I + u_6 J + u_7 K}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2}}; \quad |r| = 1.$$

Здесь r – нормированный по длине 3D или 7D вектор, задаваемый соответственно векторными (мнимыми) числами полных кватерниона и октавы. Эти мнимые части чисел p и u обозначим через $p^{(v)}$ и $u^{(v)}$:

$$r = \frac{p^{(v)}}{|p^{(v)}|}, \quad r = \frac{u^{(v)}}{|u^{(v)}|}.$$

Величину r назовем *многомерной мнимой единицей*, соответственно *3D-единицей* (для кватернионного анализа) и *7D-единицей* (для анализа октав), а угол φ – аргументом соответственно полного КТ и октавы:

$$\varphi = \arg p, \quad \varphi = \arg u.$$

На рис. 1 условно в 4D-пространстве показан вектор p полного КТ $p = p_0 + p^{(v)}$. Здесь по оси $0Re$ откладывается вещественная часть p_0 кватерниона p , рассматриваемая как вектор, по осям x , y и z – соответственно значения p_1 , p_2 и p_3 . Ось $0Re$ с вещественной частью p_0 , векторы $p^{(v)}$ и $p = p_0 + p^{(v)}$ находятся в одной 4D плоскости, которую назовем собственной плоскостью полного КТ p .

Эту 4D плоскость далее будет обозначать через Ω с соответствующим нижним индексом. 4D векторы $p^{(v)} = (0, p_1, p_2, p_3)$ и $p_0 = (p_0, 0, 0, 0)$ ортогональны. Как видно из рис. 1, аргумент φ – это угол в собственной плоскости Ω_p , образуемый вектором

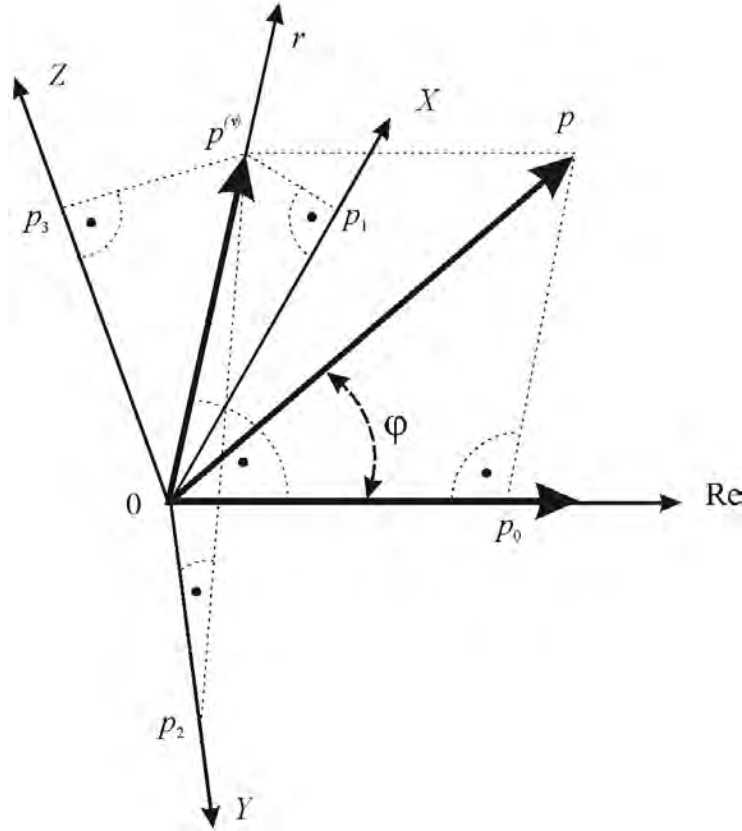


Рис. 1: Графическая интерпретация основных обозначений

полного КТ p и осью $0Re$. Векторы $p^{(v)}$ и r , $|r| = 1$, $|p^{(v)}| < 1$, коллинеарны, причем $p^{(v)} = r \sin \varphi$, а $p_0 = \cos \varphi$. Варьируя значения аргумента φ при фиксированном r в собственной плоскости Ω_p можно задать целый ряд полных КТ $p(\varphi)$, отличающихся друг от друга лишь значением φ :

$$p(\varphi) = \cos \varphi + r \sin \varphi, \quad r = \text{const}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

4D вектор $p(\varphi)$ есть результат вращения вектора в своей собственной плоскости Ω_p . Поэтому, естественно, векторы $p(\varphi)$ и связанные с ним полные КТ $p(\varphi)$ называть ротативно-компланарными с КТ p . Таким образом, РК кватернионы – это полные КТ, порождаемые вращением вектора p в собственной плоскости Ω_p . Аналогично можно ввести собственную 8D плоскость Ω_p для полной октавы $u = u_0 + u^{(v)}$ с аргументом $\varphi = \arccos u_0$ и ротативно-компланарные с u октавы $u(\varphi)$, $r = \text{const}$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Аналитические соотношения для РК кватернионов и октав

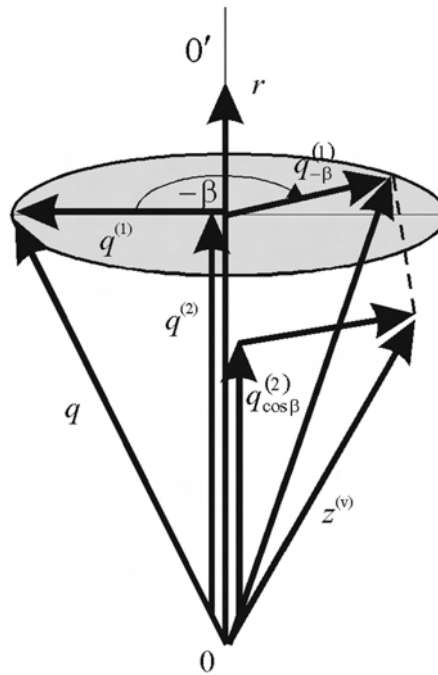
Квадрат нормированного векторного кватерниона или октавы

Покажем, что квадрат векторного КТ r , задающего 3D вектор $r = r_1i + r_2j + r_3k$, $|r| = 1$, есть минус единица:

$$r^2 = -1. \quad (5)$$

В общем случае произведение двух векторных КТ $q = q_1i + q_2j + q_3k$ и $g = g_1i + g_2j + g_3k$ равно

$$qg = -(q, g) + [q, g],$$

Рис. 2: Формирование векторной части $z^{(v)}$ произведения $z = qr$

где $(q, g) = ((q_1, q_2, q_3), (g_1, g_2, g_3))$ – скалярное произведение, а $[q, g] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$ – векторное произведение векторов q и g .

Для случая перемножения двух одинаковых нормированных векторных КТ r будем иметь: $(r, r) = 1$ и $[r, r] = 0$. Эти соотношения вытекают из автоколлинеарности любого нормированного вектора и приводят к равенству (5).

Аналогичный результат получается для произведения двух нормированных векторных октав $u^{(v)}$ и $l^{(v)}$, $|u^{(v)}| = |l^{(v)}| = 1$ при $u^{(v)} = l^{(v)} = r$.

Вращение вектора полного кватерниона в собственной плоскости

Пусть $p = \cos \varphi + r \sin \varphi$ и $q = \cos \psi + r \sin \psi$ – два полных нормированных КТ с одинаковым 3D вектором r и аргументами φ и ψ . При их перемножении с учетом (5) получим

$$t = pq = \cos(\varphi + \psi) + r \sin(\varphi + \psi). \quad (6)$$

КТ $t = pq$ характеризуется аргументом $\theta = \varphi + \psi$, единичным модулем и расположением в собственной плоскости КТ сомножителей p и q . Поэтому t является РК с кватернионами p и q и его можно рассматривать как результат поворота p в собственной плоскости вектора кватерниона на угол ψ . Если $\psi = \pi/2 - \varphi$, то в результате такого поворота получим чисто мнимый КТ $p = r$, а при $\psi = -\varphi$ – вещественное число $t = 1$. При изменении порядка следования сомножителей p и q результат (6) сохраняется:

$$qp = \cos(\varphi + \psi) + r \sin(\varphi + \psi) = pq = t.$$

Таким образом, операция умножения полных РК кватернионов является коммутативной. Рассмотрим геометрическую интерпретацию этого факта. На рис. 2 поясняется геометрический смысл получения векторной части $z^{(v)}$ произведения $z = qr$ при умножении произвольного векторного КТ $q = q_1i + q_2j + q_3k$ на полный КТ

$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = \cos \beta + r \sin \beta$, $|p| = 1$. Здесь через $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ обозначены квадратурные составляющие вектора q относительно вектора r . В процессе формирования $z^{(v)}$ ортогональная компонента $q^{(1)}$ поворачивается вокруг оси $00'$ с направляющим вектором r на угол $(-\beta)$ и затем складывается с коллинеарной компонентой $q^2 \cos \beta$. Вещественная часть КТ z равна $z_0 = -(q, p)^{(v)} \sin \beta$. Если q – не векторный, а полный КТ, то механизм перемножения q и p принципиально не меняется. Для нас здесь важен поворот квадратурной компоненты $q^{(1)}$ на угол $(-\beta)$ вокруг оси $00'$, приводящий к выходу вектора $z = qp$ из 4D плоскостей Ω_q . В результате операция $z = qp$ теряет свойство коммутативности.

Если же q и p – ротативно-компланарные КТ, то вектор $q^{(v)}$ одного из КТ коллинеарен вектору r , а значит и вектору $p^{(v)}$ другого перемножаемого КТ. Поэтому ортогональная квадратурная компонента $q^{(1)}$ будет равна нулю и вектор $z = qp$ остается в собственной плоскости Ω кватернионов сомножителей, т.е. ротативно-компланарен с ними. В результате операция $z = qp$ становится коммутативной.

Отметим, что выражение (6) сохраняет свою структуру и дает такой же результат при перемножении полных РК октав. При этом операция перемножения таких октав становится не только коммутативной, но и ассоциативной.

Расширение комплексных чисел

Полные нормированные КТ и октавы $p = \cos \varphi + r \sin \varphi$ и $u = \cos \varphi + r \sin \varphi$ формально можно рассматривать в качестве комплексных чисел $a + br$, $r^2 = -1$, представленных в своих собственных 4D и 8D плоскостях Ω_p и Ω_u . Каждая из таких собственных плоскостей задается углом α_p или α_u , который она образует с координатной плоскостью $X0Re$. Если $\alpha_p = \alpha_u = 0$, то $r = i$ и числа p и u становятся равными $p = \cos \varphi + i \sin \varphi$ и $u = \cos \varphi + i \sin \varphi$, т.е. обычными комплексными числами. По мере роста этих углов возникают ненулевые проекции вектора r на оси Y и Z для 3D вектора и на оси $X_2, X_3, \dots, X_6$ для 7D вектора, т.е. возникают полные кватернионы и октавы.

Если учесть возможность вращения вектора r вокруг оси $0X$, то при повороте собственной плоскости вокруг оси $0Re$ может быть получен произвольный КТ p или октава u . При этом векторы r и p_0 (r и u_0) сохраняют ортогональность. РК кватернионы p и октавы u являются расширенными комплексными числами, заданными только не в 2D плоскости $0Re$, а в собственной плоскости Ω , расположенной в 4D или 8D-мерной координатных системах. Именно этим и объясняется совпадение свойств РК кватернионов и октав со свойствами комплексных чисел, определяемых выражениями (2), (3) и (4).

Тригонометрические и показательные функции связаны формулой Эйлера. Для рассматриваемого случая данная связь имеет вид:

$$\cos \varphi + r \sin \varphi = \exp \{i\varphi\}. \quad (7)$$

С учетом (7) результаты умножения и деления РК кватернионов и октав могут быть получены как

$$\begin{aligned} pq &= \exp \{r(\varphi + \psi)\}; \quad uv = \exp \{r(\varphi + \psi)\}; \\ \frac{p}{q} &= \exp \{r(\varphi - \psi)\}; \quad \frac{u}{v} = \exp \{r(\varphi - \psi)\}, \quad q \neq 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой Муавра получим выражение возведения КТ или октавы в степень и извлечения квадратного корня:

$$p^n = \exp \{nr\varphi\}; \quad u^n = \exp \{nr\varphi\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{p^n} = p^{-n} = \exp \{-nr\varphi\}; \quad \frac{1}{u^n} = u^{-n} = \exp \{-nr\varphi\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p} = \exp \left\{ r \frac{\varphi + 2s\pi}{n} \right\}; \quad u^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u} = \exp \left\{ r \frac{\varphi + 2s\pi}{n} \right\}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

Необходимо отметить, что все участвующие в приведенных выше арифметических операциях КТ, p^n , p^{-n} , $p^{\frac{m}{n}}$, а также октавы u^n , u^{-n} , $u^{\frac{m}{n}}$ являются ротативно-компланарными с исходными произвольно выбранными КТ p и октавы u . Это связано с тем, что при данных операциях гиперкомплексная мнимая единица r не меняется. Также следует отметить, что если в операции участвуют ненормированные КТ и октавы, то модуль результата вычисляется на основе полной формулы Эйлера:

$$p = |p| (\cos \varphi + r \sin \varphi) = |p| \exp \{r\varphi\}.$$

В завершение этого раздела запишем выражение для скалярного произведения РК кватернионов и октав в виде расширения скалярного произведения РК комплексных чисел в унитарном пространстве [4]:

$$(q, p) = qp^* = (\cos \psi + r \sin \psi) (\cos \varphi - r \sin \varphi) = \cos (\psi - \varphi) + r \sin (\psi - \varphi),$$

$$(v, u) = vu^* = (\cos \psi + r \sin \psi) (\cos \varphi - r \sin \varphi) = \cos (\psi - \varphi) + r \sin (\psi - \varphi).$$

Из этих выражений видно, что скалярное произведение РК кватернионов и октав есть также РК кватернион и октава. Вещественная часть скалярного произведения равна скалярному произведению векторов q и p (v и u), заданных в действительном пространстве. Кроме того, наличие мнимой части $r \sin (\psi - \varphi)$ делает данные скалярные произведения более информативными по сравнению со скалярными произведениями, полученных для векторов q и p , (v и u), в действительном пространстве.

Заключение

Обычно мнимая единица была лишена конкретного содержания примерно так же, как точка, по Эвклиду, “есть то, что не имеет частей”. Представление $i = \sqrt{-1}$ связано лишь с историей комплексных чисел, потому что далее аксиоматически, без связи с конкретными объектами, было введено, что $i^2 = -1$. В данной работе была сделана одна из возможных попыток наполнить понятие мнимой единицы в составе комплексного числа определенным содержанием. В результате было показано существование ротативно-компланарных кватернионов и октав и на их основе введены арифметические операции над произвольными октавами и кватернионами по правилам аналогичных операций с комплексными числами. Также для ротативно-компланарных кватернионов и октав была показана коммутативность операции умножения, а отдельно для – октав еще и ассоциативность этой операции. Хотя подобные гиперкомплексные числа представляют собой узкий, скорее экзотический, класс кватернионов и октав, но их существование требует осторожности при утверждении вообще о некоммутативности операции перемножения кватернионов или октав и невыполнении сочетательного закона для октав.

Литература

1. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
2. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов. Я. А. Фурман, А. В. Кревецкий, и др.; Под ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2004. 456 с.

3. Furman Y. A. Processing of quaternion signals specifying spatially located group point objects. Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. V. 12, N 2, P. 173-191.

4. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974.

5. Ротативно-компланарные кватернионы и октавы/ Фурман Я. А., Кривецкий А. В.; МарГТУ. Йошкар-Ола. Деп. в ВИНТИ 4.11.2004 № 1736-В2004.

Expansion of Complex Number

Y. A. Furman, A. V. Krevetsky

*Mari state technical university, Yoshkar Ola, Radio engineering faculty,
inf@marstu.mari.ru*

The expanded complex numbers are introduced by means of imaginary unit i replacement by one-dimensional on multivariate $3D$ or $7D$ imaginary unit r . It is shown, full quaternions and octaves appear as a result of a turn around the material axis $0Re$ plane where $a + ib$ number is set in $4D$ and $8D$ spaces. Rotor-complanar classes of quaternions and the octaves appearing as a result of similar transformations are considered. They represent commutative-associative algebras.

НЕЗАМКНУТОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. Ф. Чуб

Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королева, г. Королев, Россия

Дается краткий теоретико-групповой сравнительный анализ трех теорий пространства-времени: (теории пространства-времени в рамках) классической механики Ньютона, специальной теории относительности и развитой автором теории, основанной на использовании кватернионов с комплексно-дуальными коэффициентами.

1. Введение

В работе обсуждается один из основных результатов статьи автора, опубликованной в журнале «Известия АН. Механика твердого тела» (2002), связанный с исследованием групповых свойств следующих физических преобразований: сдвигов (переносов, трансляций) пространства и времени, пространственных вращений (поворотов) и движений с постоянной скоростью (бустов), описываемых в рамках специальной теории относительности (СТО) и классической механики, соответственно, преобразованиями Лоренца и Галилея. Вышеупомянутый результат состоит в логической (математической) возможности построения новой теории пространства-времени на основе алгебры кватернионов с комплексно-дуальными коэффициентами и соответствующей «кватернионной группы».

Теоретико-групповые идеи играют основополагающую роль в геометрии и современной теоретической физике, а применение кватернионов представляет специальный интерес для журнала «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике». Автор надеется, что работа, носящая обзорно-методический характер, будет доступна широкому кругу читателей журнала, знакомых с основами теории групп и гиперкомплексных чисел.

2. Незамкнутость преобразований

Замкнутостью относительно операции называют “свойство подгрупп (или алгебраических подструктур) группы (алгебраической структуры), состоящее в том, что результат операции, производимой над элементами подгруппы (подструктуры), также принадлежит подгруппе (подструктуре)” [1, с. 254].

В основной части работы в качестве алгебраических структур будут использоваться только группы преобразований, а в качестве операции — только композиция (последовательное выполнение) преобразований. Соответственно, незамкнутостью назовем свойство подмножеств группы преобразований, состоящее в том, что результат композиции преобразований подмножества в общем случае не принадлежит подмножеству. В этом случае преобразования рассматриваемого подмножества не образуют группы (подгруппы исходной группы преобразований). Далее будет показано, что понятие незамкнутости допускает естественное расширение на случай пары подмножеств исходной группы преобразований.

Ниже приведены три таблицы, характеризующие свойства незамкнутости элементарных преобразований в рамках трех физических теорий пространства-времени, допускающих формулировку в рамках теоретико-группового подхода, т.е. свойства трех соответствующих фундаментальных групп преобразований:

- 10-параметрической группы Галилея;
- 10-параметрической группы Пуанкаре;
- 13-параметрической группы, исследуемой в работе [2].

	t	$\mathbf{r}$	ϑ	$\mathbf{v}$
t				$\mathbf{r}$
$\mathbf{r}$				
ϑ				
$\mathbf{v}$	$\mathbf{r}$			

	t	$\mathbf{r}$	ϑ	ψ
t				$\mathbf{r}$
$\mathbf{r}$				t
ϑ				
ψ	$\mathbf{r}$	t		ϑ

	t	$\mathbf{r}$	ϑ	ψ	φ
t					
$\mathbf{r}$				φ	
ϑ					
ψ		φ		ϑ	$\mathbf{r}$
φ				$\mathbf{r}$	

Здесь параметр:

t — соответствует переносу (сдвигу, трансляции) во времени;

$\mathbf{r}$ — переносу в пространстве;

ϑ — повороту в пространстве;

ψ (для группы Галилея использован символ $\mathbf{v}$) — бусту;

φ (только для кватернионной теории) — векторному преобразованию, не получившему физической интерпретации в работе [2].

В каждой клетке таблицы (кроме левого столбца и верхней строки) стоит параметр преобразования, возникающего при сложении (перестановке) преобразований, характеризуемых параметрами, стоящими в начале строки и столбца, образующих эту клетку¹⁾. Если новых типов преобразований не возникает, то клетка остается пустой.

3. Пояснения

Данные для заполнения таблиц взяты:

- Для кватернионной группы из формул пункта 2.4 статьи [2].
- Для группы Пуанкаре из формулы (ср. [3, с. 13]):

$$X' = e^{\frac{\psi}{2}} \circ e^{i\frac{\vartheta}{2}} \circ X \circ e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \circ e^{\frac{\psi}{2}} + t + \mathbf{r} \quad (1)$$

(где $X = \tau + \rho$ и $X' = \tau' + \rho'$ — координаты двух “точек”), обычным образом интерпретируемой (активная точка зрения) как преобразование геометрического объекта X типа “точка” под действием преобразования²⁾ общего вида из группы Пуанкаре. Для получения, например, перестановочного соотношения для буста и пространственного переноса следует приравнять результат действия буста с последующим переносом результату действия переноса с последующим бустом:

$$e^{\frac{\psi}{2}} \circ X \circ e^{\frac{\psi}{2}} + \mathbf{r} = e^{\frac{\psi}{2}} \circ (X + \mathbf{r}' + t) \circ e^{\frac{\psi}{2}}$$

(легко убедиться, что параметр буста не изменяется, а без переноса во времени в общем случае не обойтись).

¹⁾ Некоторая избыточность информации, связанная с симметричностью таблиц, полезна для визуального отделения диагональных членов.

²⁾ Повторное использование слова “преобразование” вряд ли может привести к недоразумениям (хотя, например, согласно работе [4], словосочетание “преобразование из группы Пуанкаре” следовало бы заменить на “переход из группы Пуанкаре”).

- Для группы Галилея из формулы (ср. [5, с. 11]):

$$X' = e^{i\frac{\vartheta}{2}} \circ X \circ e^{-i\frac{\vartheta}{2}} + t + \mathbf{r} + \tau \mathbf{v} \quad (2)$$

(где $X = \tau + \rho$ и $X' = \tau' + \rho'$), обычным образом интерпретируемой (активная точка зрения) как преобразование геометрического объекта X типа “точка” под действием преобразования общего вида из группы Галилея.

Заметим, что формула (2) получается из (1) не просто в первом порядке малости по параметру ψ (с заменой его на $\mathbf{v}$), но еще и в первом порядке малости по параметру $\frac{\rho}{\tau}$. Мы не будем останавливаться на формальном приеме введения константы, которая потом устремляется к бесконечности, часто используемом в учебниках по специальной теории относительности.

Таблицы для групп Пуанкаре и Галилея можно заполнить и на основании вида коммутаторов инфинитезимальных операторов соответствующих алгебр Ли³⁾. Все необходимые формулы приведены также в пункте 2.5 статьи [2]⁴⁾.

Из приведенных таблиц видно, что во всех трех группах есть подгруппы⁵⁾ движений пространства, соответствующие параметрам $\mathbf{r}$ и ϑ , (а также 7-параметрическая “группа Аристотеля”⁶⁾, соответствующая параметрам t , $\mathbf{r}$ и ϑ , отвечающая пустым квадратам 3×3 в верхних левых углах таблиц), т.е. есть и логическая возможность использовать бикватернионы Клиффорда [10, с. 67] для описания поворотов и переносов пространства во всех трех теориях.

4. Комментарии

Сделаем еще несколько замечаний по поводу выписанных таблиц.

Во-первых, понятие группы преобразований возникло и приобрело первостепенное значение в теоретической физике значительно позже механики Ньютона. Поэтому представления о пространстве-времени во времена Галилея и Ньютона были сформулированы отнюдь не в рамках теоретико-группового подхода [11]. В этом смысле и термин “группа Галилея” (или “галилей-ньютоновская группа”) связан с некоторой “рациональной реконструкцией” истории механики. Однако, *“следует принять во внимание, что группы преобразований — один из наиболее естественных и универсальных инструментов исследования и классификации фундаментальных явлений в точном естествознании”* [8, с. 563].

Во-вторых, 3-параметрическая группа Галилея, элементы которой описывают в рамках механики Галилея-Ньютона переходы *“от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой”*, *“в механике Ньютона всегда стояла особняком”*; *“группа, отражающая свойства однородности времени и однородности и изотропности пространства”*⁷⁾ и *группа Галилея*⁸⁾ имеют независимое существование, и глубокая связь между ними⁹⁾ долгое время,

³⁾ См., например, [6–8].

⁴⁾ Пользуясь случаем укажем, что выражение для $\mathbf{r}'$ в формулах (2.19) и (2.20) работы [2] выписано с ошибкой.

⁵⁾ Легко убедиться, выписав формулы полностью, что соответствующие подгруппы изоморфны.

⁶⁾ См. [9, с. 98]. Хотя, сравнив с указанной выше статьей [4], убедимся, что и здесь терминология неоднозначна.

⁷⁾ Описывается, соответственно, параметрами t , $\mathbf{r}$ и ϑ в наших обозначениях.

⁸⁾ Описывается параметрами $\mathbf{v}$ (тремя компонентами вектора скорости).

⁹⁾ Проявляющаяся, в частности, в непустоте выписанной нами таблицы для 10-параметрической группы Галилея.

вплоть до работ Пуанкаре и Минковского, по существу, не была установлена” [12, с. 13]. “По существу говоря, фундаментальная группа классической механики, т.е. галилей-ньютоновская группа, как единая система преобразований, действующая на пространственно-временном многообразии, была открыта только после построения основ СТО” [9, с. 77].

В-третьих, в специальной теории относительности переходы “от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой” (которые в механике Ньютона образуют 3-параметрическую группу Галилея), вообще не образуют 3-параметрической группы¹⁰⁾. Поскольку в СТО указанные преобразования кратко называют бустами, то отмеченный факт естественно назвать незамкнутостью бустов¹¹⁾. Следует отметить отсутствие единого общепринятого краткого термина для того физического преобразования, которое в механике Ньютона описывается (как известно, при больших скоростях — неадекватно) элементом 3-параметрической группы Галилея, а в СТО — гиперболическим поворотом (бустом). По мнению автора, целесообразно использовать для обозначения указанного физического преобразования термин “буст”, который сам по себе не несет прямого указания на конкретную математическую модель этого преобразования (в отличие от эквивалентных ему в СТО терминов “гиперболический поворот”, “чистое преобразование Лоренца”). Путаницы при этом возникнуть не должно, так как тем и отличаются различные физические теории, что одни и те же явления могут иметь в них прямо противоположные свойства. В частности, по нашей терминологии, в специальной теории относительности бусты незамкнуты, а в механике Ньютона — замкнуты.

Наконец, обратим внимание на то, что в развитой автором теории переносы во времени независимы от других элементарных преобразований (в отличие от СТО и механики Ньютона¹²⁾). На уровне выписанных нами таблиц этому факту соответствуют пустые столбец и строка, соответствующие параметру t , в последней из приведенных таблиц¹³⁾.

5. Заключение

В статье рассматривались три теории (модели), претендующие на описание одного и того же физического объекта — пространства-времени. Поэтому по крайней мере две из них ошибочны.

¹⁰⁾ Во избежание недоразумений укажем, что в литературе нередко встречаются ошибочные утверждения о существовании “трехпараметрической группы Лоренца” [5, с. 270] [13, с. 31], “параметрами которой являются 3 компоненты относительной скорости” [12, с. 105, 109–110] [14, с. 38, 43] (наличия трех однопараметрических групп Лоренца, параметрами которых являются 3 компоненты вектора скорости, недостаточно для существования соответствующей трехпараметрической группы; это можно установить прямым исследованием групповых свойств преобразований Лоренца [2], вычислением коммутаторов инфинитезимальных операторов преобразований Лоренца [5, с. 209] или изучением пространства скоростей СТО, т.е. пространства Лобачевского [15, с. 498]).

¹¹⁾ В энциклопедиях его обычно называют прецессией Томаса [16], хотя факт незамкнутости бустов был известен и до работ Л. Томаса (1926–1927 гг.). На уровне выписанной нами таблицы для группы Пуанкаре незамкнутость бустов [17, с. 134] [18, с. 403] проявляется в непустоте диагонали этой таблицы.

¹²⁾ В соответствии с развитой выше терминологией можно сказать, что в специальной теории относительности и в классической механике переносы во времени и бусты незамкнуты и порождают новое элементарное преобразование: переносы в пространстве.

¹³⁾ Но в отличие от пространственных поворотов, которым во всех трех таблицах также соответствуют пустые столбцы и строки, переносы во времени в кватернионной теории еще и коммутируют со всеми другими преобразованиями — см. Приложение.

В настоящее время имеется весьма убедительное доказательство ошибочности кватернионной теории пространства-времени как физической теории, связанное именно с независимостью в этой теории переносов во времени от других элементарных преобразований [2]. Также имеется доказательство ошибочности (как физической теории) теории пространства-времени, основанной на группе Галилея, связанное с экспериментально наблюдаемыми следствиями незамкнутости бустов [19].

Приложение. Некоммутативность преобразований

Обсуждаемое в статье понятие незамкнутости элементарных преобразований пространства-времени полезно сравнить с широко известным понятием некоммутативности преобразований и тесно связанным с ним понятием алгебры Ли непрерывной группы преобразований.

Ниже приведены таблицы, определяющие алгебры Ли для трех рассматриваемых в статье групп преобразований, вместе с физической интерпретацией элементов этих алгебр Ли (традиционно называемых операторами) и одним из их математических представлений. В каждой клетке таблиц (кроме левого столбца и верхней строки) стоит оператор, являющийся коммутатором $[\hat{U}, \hat{V}]$ операторов, стоящих в начале строки и столбца, образующих эту клетку. Если операторы перестановочны (коммутируют), то в соответствующей клетке стоит 0. Приведенные таблицы, конечно, содержат всю информацию, содержащуюся в таблицах, выписанных в основном тексте статьи, но не позволяют представить в чистом виде понятие, вынесенное в заголовок статьи.

Алгебра Ли группы Галилея

$\hat{U} \backslash \hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	0	0	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	0
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0
$\hat{N}_x$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	0	0
$\hat{N}_y$	$-\hat{P}_y$	0	0	0	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	0	0	0
$\hat{N}_z$	$-\hat{P}_z$	0	0	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	0	0	0

Здесь операторы инфинитезимальных преобразований:

$$\hat{T} = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{— перенос (сдвиг, трансляция) во времени;}$$

$$\hat{P}_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{— перенос (сдвиг, трансляция) по оси } x;$$

$$\hat{P}_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{— перенос (сдвиг, трансляция) по оси } y;$$

$$\hat{P}_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— перенос (сдвиг, трансляция) по оси } z;$$

$$\hat{M}_x = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— поворот вокруг оси } x;$$

$$\hat{M}_y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{— поворот вокруг оси } y;$$

$$\hat{M}_z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{— поворот вокруг оси } z;$$

$$\hat{N}_x = t \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{— буст (преобразование Галилея) по оси } x;$$

$$\hat{N}_y = t \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{— буст (преобразование Галилея) по оси } y;$$

$$\hat{N}_z = t \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— буст (преобразование Галилея) по оси } z;$$

$$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U}\hat{V} - \hat{V}\hat{U} \quad \text{— коммутаторы операторов преобразований.}$$

Алгебра Ли группы Пуанкаре

$\hat{U} \backslash \hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	$\hat{T}$	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	0	$\hat{T}$	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	$\hat{T}$
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0
$\hat{N}_x$	$-\hat{P}_x$	$-\hat{T}$	0	0	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$-\hat{M}_z$	$\hat{M}_y$
$\hat{N}_y$	$-\hat{P}_y$	0	$-\hat{T}$	0	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$\hat{M}_z$	0	$-\hat{M}_x$
$\hat{N}_z$	$-\hat{P}_z$	0	0	$-\hat{T}$	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$-\hat{M}_y$	$\hat{M}_x$	0

Здесь операторы инфинитезимальных преобразований:

$$\hat{T} = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{— перенос (сдвиг, трансляция) во времени;}$$

$$\hat{P}_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{— перенос (сдвиг, трансляция) по оси } x;$$

$$\hat{P}_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{— перенос (сдвиг, трансляция) по оси } y;$$

$$\hat{P}_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— перенос (сдвиг, трансляция) по оси } z;$$

$$\hat{M}_x = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— поворот вокруг оси } x;$$

$$\hat{M}_y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{— поворот вокруг оси } y;$$

$$\hat{M}_z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{— поворот вокруг оси } z;$$

$$\hat{N}_x = x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{— буст (преобразование Лоренца) по оси } x;$$

$$\hat{N}_y = y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{— буст (преобразование Лоренца) по оси } y;$$

$$\hat{N}_z = z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— буст (преобразование Лоренца) по оси } z;$$

$$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U}\hat{V} - \hat{V}\hat{U} \quad \text{— коммутаторы операторов преобразований.}$$

Алгебра Ли кватернионной группы

$\hat{U} \backslash \hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$	$\hat{\Phi}_x$	$\hat{\Phi}_y$	$\hat{\Phi}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	0	0	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	0	0	0
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0
$\hat{N}_x$	0	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$-\hat{M}_z$	$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	$\hat{P}_y$
$\hat{N}_y$	0	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$\hat{M}_z$	0	$-\hat{M}_x$	$\hat{P}_z$	0	$-\hat{P}_x$
$\hat{N}_z$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$-\hat{M}_y$	$\hat{M}_x$	0	$-\hat{P}_y$	$\hat{P}_x$	0
$\hat{\Phi}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	$-\hat{P}_z$	$\hat{P}_y$	0	0	0
$\hat{\Phi}_y$	0	0	0	0	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	$\hat{P}_z$	0	$-\hat{P}_x$	0	0	0
$\hat{\Phi}_z$	0	0	0	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	$-\hat{P}_y$	$\hat{P}_x$	0	0	0	0

Здесь операторы:

$\hat{T} = \varepsilon i/2$; $\exp(t\hat{T})$ — перенос (сдвиг, трансляция) во времени;

$\hat{P}_x = \varepsilon \mathbf{i}/2$; $\exp(x\hat{P}_x)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси x ;

$\hat{P}_y = \varepsilon \mathbf{j}/2$; $\exp(y\hat{P}_y)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси y ;

$\hat{P}_z = \varepsilon \mathbf{k}/2$; $\exp(z\hat{P}_z)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси z ;

$\hat{M}_x = \mathbf{i}/2$; $\exp(\vartheta_x \hat{M}_x)$ — поворот вокруг оси x ;

$\hat{M}_y = \mathbf{j}/2$; $\exp(\vartheta_y \hat{M}_y)$ — поворот вокруг оси y ;

$\hat{M}_z = \mathbf{k}/2$; $\exp(\vartheta_z \hat{M}_z)$ — поворот вокруг оси z ;

$\hat{N}_x = \mathbf{e}_x/2$; $\exp(\psi_x \hat{N}_x)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси x ;

$\hat{N}_y = \mathbf{e}_y/2$; $\exp(\psi_y \hat{N}_y)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси y ;

$\hat{N}_z = \mathbf{e}_z/2$; $\exp(\psi_z \hat{N}_z)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси z ;

$\hat{\Phi}_x = \varepsilon \mathbf{e}_x/2$; $\exp(\varphi_x \hat{\Phi}_x)$ — неинтерпретированное преобразование по оси x ;

$\hat{\Phi}_y = \varepsilon \mathbf{e}_y/2$; $\exp(\varphi_y \hat{\Phi}_y)$ — неинтерпретированное преобразование по оси y ;

$\hat{\Phi}_z = \varepsilon \mathbf{e}_z/2$; $\exp(\varphi_z \hat{\Phi}_z)$ — неинтерпретированное преобразование по оси z ;

$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U} \circ \hat{V} - \hat{V} \circ \hat{U}$ — коммутаторы половинок гиперкомплексных ортов;

$\varepsilon^2 = 0$; $i^2 = \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$; $\mathbf{i} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \circ \mathbf{i}$; $\mathbf{i} = i\mathbf{e}_x$; $\mathbf{j} = i\mathbf{e}_y$; $\mathbf{k} = i\mathbf{e}_z$;

$\circ$ — традиционное обозначение для кватернионного умножения.

Литература

- [1] Э. Фрид. Элементарное введение в абстрактную алгебру. М.: Мир, 1979.
- [2] В. Ф. Чуб. Изв. АН. МТТ. 2002. N 6. С. 3.
- [3] Ю. В. Новожиллов. Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.
- [4] Н. П. Клепиков. Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1995. Т. 36. С. 3.
- [5] В. Ф. Журавлев. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997.

- [6] Б. В. Медведев. Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977.
- [7] Г. А. Зайцев. О связи теории относительности с теорией групп. В кн.: М.–А. Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: Изд-во иностр. литературы, 1962. С. 447.
- [8] Л. М. Мархашов. ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 563.
- [9] В. П. Визгин. “Эрлангенская программа” и физика. М.: Наука, 1975.
- [10] В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.
- [11] Вл. П. Визгин. Галилеевский принцип относительности. В сб.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983. С. 200.
- [12] А. А. Логунов. Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.
- [13] В. Ф. Журавлев. Основания механики. Методические аспекты. Препринт N 251 Института проблем механики АН СССР. М.: ИПМ, 1985.
- [14] А. А. Логунов. Лекции по теории относительности: Современный анализ проблемы. М.: Изд-во Московского университета, 1983.
- [15] И. Ю. Кобзарев. Относительности теория. В кн.: Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: БРЭ, 1992. С. 493.
- [16] М. И. Войцеховский. Буст. В кн.: Математическая физика. Энциклопедия. М.: БРЭ, 1998. С. 63.
- [17] А. Пуанкаре. О динамике электрона. В сб.: Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973. С. 118¹⁴).
- [18] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977.
- [19] Г. Б. Малыкин, Г. В. Пермитин. Томасовская прецессия. В кн.: Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: БРЭ, 1998. С. 123.

Nonclosure of elementary space-time transformations

V. F. Chub

Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”

The article gives a brief group-theoretical comparative study of three space-time theories: (space-time theory in frames of) classical Newton mechanics, special theory of relativity and author-developed theory based on complex-dual quaternions.

¹⁴ См. также с. 51–54 монографии: А. А. Логунов. К работам Анри Пуанкаре “О динамике электрона”. М.: ИЯИ АН СССР, 1984.

СВЯЗЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОБОБЩЕННО-КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ОБОБЩЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ В ПОЛИЧИСЛОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва
gri9z@mail.ru

В настоящей работе установлена связь между функциями, осуществляющими элементарные обобщенно-конформное преобразование в пространстве невырожденных поличисел и обобщенно-аналитическими функциями той же поличисловой переменной. Кроме общих построений, в работе рассматриваются конкретные примеры для комплексных и гиперкомплексных чисел H_4 . Для указанных поличисел показано: эта связь может быть установлена так, что при переходе к конформным преобразованиям обобщенно-аналитические функции становятся аналитическими.

Введение

На комплексной плоскости конформные преобразования осуществляются аналитическими функциями комплексной переменной (конформные преобразования I рода) или комплексно сопряженными аналитическими функциями (преобразования II рода). Для поличисел размерности больше двух приходится несколько обобщать понятия аналитичности функций [1] и конформных преобразований [2], поэтому связи между этими обобщенными понятиями необходимо изучить заново.

Поличисловое пространство $P_n \ni X$,

$$X = x^i e_i, \quad e_k e_j = p_{kj}^i e_i, \quad (1)$$

где x^i координаты в базисе e_i , называется невырожденным, если компоненты тензора

$$q_{ij} = p_{ik}^m p_{mj}^k \quad (2)$$

образуют невырожденную матрицу, и следовательно можно построить дважды контравариантный тензор q^{ij} :

$$q^{im} q_{mj} = q_{jm} q^{mi} = \delta_j^i. \quad (3)$$

Функция

$$\Phi(X) = \varphi^1(x^1, x^2, \dots, x^n) e_1 + \varphi^2(x^1, x^2, \dots, x^n) e_2 + \dots + \varphi^n(x^1, x^2, \dots, x^n) e_n \quad (4)$$

поличисловой переменной $X \in P_n$ называется *обобщенно-аналитической* [1], если существуют такой объект связности $\tilde{\Gamma}_{kj}^i$ и такая функция

$$\dot{\Phi}(X) = \dot{\varphi}^1(x^1, x^2, \dots, x^n) e_1 + \dot{\varphi}^2(x^1, x^2, \dots, x^n) e_2 + \dots + \dot{\varphi}^n(x^1, x^2, \dots, x^n) e_n, \quad (5)$$

что

$$\tilde{D}\Phi(X) = \dot{\Phi}(X) dX, \quad (6)$$

где

$$\tilde{D}\Phi(X) = (\tilde{\nabla}_k \varphi^i) dx^k e_i, \quad \tilde{\nabla}_k \varphi^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}_{kj}^i \varphi^j. \quad (7)$$

Из формул (6), (7) получим

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}_{kj}^i \varphi^j = p_{kj}^i \dot{\varphi}^j. \quad (8)$$

Если ε^i – координаты единицы в базисе e_i , то

$$\varepsilon^k p_{kj}^i = \delta_j^i, \quad (9)$$

поэтому

$$\dot{\varphi}^i = \varepsilon^m \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^m} + \tilde{\Gamma}_{mj}^i \varphi^j \right). \quad (10)$$

Таким образом, обобщенно-аналитической функции должны удовлетворять соотношениям Коши-Римана:

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}_{kj}^i \varphi^j = p_{kj}^i \varepsilon^s \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^s} + \tilde{\Gamma}_{sm}^j \varphi^m \right), \quad (11)$$

или кратко

$$\tilde{\nabla}_k \varphi^i = p_{kj}^i \varepsilon^s \tilde{\nabla}_s \varphi^j. \quad (12)$$

Функции φ^i являются компонентами контравариантного тензора. Если $\tilde{\Gamma}_{sm}^j = 0$, то $\Phi(X)$ – аналитическая функция поличисловой переменной P_n .

Взаимно однозначное отображение одной области $O_X \ni X$ на ту же или на другую область $O_Y \ni Y$

$$y^i = f^{(i)}(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (13)$$

поличислового пространства $P_n \supset O_X, O_Y$ называется *элементарным обобщенно-конформным* [2], если функции $f^{(i)}$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x^k \partial x^l} = \Gamma_{kl}^m \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^m}, \quad (14)$$

где

$$\Gamma_{kl}^m = \frac{1}{2}(p_l \delta_k^m + p_k \delta_l^m) - \Delta_{kl}^{pm} \frac{\partial L}{\partial x^p}, \quad (15)$$

p_l, L – некоторые тензорные поля, а Δ_{kl}^{pm} – числовой тензор, определяемый метрикой поличислового пространства, то есть тензором p_{kj}^i . Функции $f^{(i)}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ – это скалярные функции точки пространства.

Группа обобщенно-конформных преобразований включает в себя элементарные обобщенно-конформные преобразования, обратные им и всевозможные произведения выше названных.

Построение обобщенно-аналитических функций

Предположим, что нам известно элементарное обобщенно-конформное преобразование (13)

$$O_X \xrightarrow{f} O_Y \quad (16)$$

в пространстве P_n , тогда нам известны n скалярных функций $f^{(i)}(x^1, \dots, x^n)$, из которых можно образовать n ковариантных тензоров

$$\varphi_i^{(k)} = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x^i}. \quad (17)$$

Существует много разных способов построения обобщенно-аналитических функций на основе функций $\varphi_i^{(k)}$. Особо важны такие способы построения, которые дают аналитические функции, если функции $f^{(i)}(x^1, \dots, x^n)$ есть компоненты аналитической функции. Приведем два наиболее интересные, на наш взгляд, и простые способа.

I способ

Так как поличисловое пространство невырождено, то существует тензор q^{ij} (2), (3); а значит, можно построить n контравариантных векторов

$$\varphi^{(s)i} = q^{ij} \varphi_j^{(s)}. \quad (18)$$

Для того чтобы функции $\varphi^{(s)i}$ являлись компонентами обобщенно-аналитической функции $\Phi^{(s)}(X)$, необходимо и достаточно выполнение соотношений Коши-Римана (11). Подставим (18) в (11), используем формулы

$$\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^m} \frac{\partial x^k}{\partial f^{(s)}} = \delta_m^k \quad (19)$$

и (3), получим

$$\tilde{\Gamma}_{kj}^i + q^{im} \tilde{\Gamma}_{km}^r q_{rj} = p_{kt}^i \varepsilon^s \left(\tilde{\Gamma}_{sj}^t + q^{tm} \tilde{\Gamma}_{sm}^r q_{rj} \right). \quad (20)$$

Эта система линейных уравнений относительно $\tilde{\Gamma}_{kj}^i$ содержит n^3 неизвестных. Не все из этих уравнений линейно независимы, так как существует, по крайней мере, n^2 линейных зависимостей между этими линейными уравнениями, чтобы это установить, достаточно свернуть левую и правую части системы (20) с тензором ε^k . Общее решение системы линейных уравнений можно всегда представить как сумму частного решения, в данном случае

$$\tilde{\Gamma}_{(p)kj}^i = -q^{im} \Gamma_{km}^r q_{rj}, \quad (21)$$

и общего решения $\tilde{\Gamma}_{(0)kj}^i$ соответствующего однородного уравнения. Объект

$$\tilde{\Gamma}_{(0)kj}^i = p_{kt}^i D_j^t(x^1, \dots, x^n) + \delta_k^i d_j(x^1, \dots, x^n), \quad (22)$$

где D_j^t , d_j – произвольные поля, является решением однородной системы уравнений (20) и формально содержит $(n^2 + n)$ произвольных функций, но нам не удалось строго доказать для произвольных невырожденных поличисел P_n , что (22) есть общее решение однородной системы уравнений. Тем не менее, того произвола, который содержится в (22), достаточно для построения обобщенно-аналитических функций комплексной и H_4 переменных.

Итак, если $f^{(i)}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ – функции осуществляющие элементарное обобщенно-конформное преобразование, то функции $\varphi^{(s)i}$ являются компонентами n обобщенно-аналитических функций

$$\Phi^{(s)}(X) = \varphi^{(s)i} e_i \quad (23)$$

с объектами связности

$$\tilde{\Gamma}_{kj}^i = \tilde{\Gamma}_{(p)kj}^i + \tilde{\Gamma}_{(0)kj}^i, \quad (24)$$

при этом за счет имеющегося произвола должно выполняться обязательное условие: когда $\Phi^{(s)}(X)$ – аналитическая функция,

$$\tilde{\Gamma}_{kj}^i \equiv 0. \quad (25)$$

Заметим, что это условие всегда можно выполнить, если $\tilde{\Gamma}_{(0)kj}^i$ – есть общее решение однородной системы уравнений (20), так как соотношения Коши-Римана выполняются при условии (25) для аналитических функций переменной P_n .

II способ

Образуем тензор вида

$$\omega_{ij} = a_{(st)}(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^i} \frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^j}, \quad (26)$$

где $a_{(st)}$ – скалярные функции точки, причем матрица $(a_{(st)})$ невырожденная. Тогда матрица (ω_{ij}) также является невырожденной, поэтому можно построить тензор ω^{ij} :

$$\omega^{ik} \omega_{kj} = \omega_{jk} \omega^{ki} = \delta_k^i. \quad (27)$$

Если матрица $(a_{(st)})$ несимметрическая, то и матрица (ω_{ij}) – тоже несимметрическая. Частные производные от элементов матрицы (ω_{ij}) определяются формулой

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_{(st)}}{\partial x^k} \frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^i} \frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^j} + \Gamma_{ki}^m \omega_{mj} + \omega_{im} \Gamma_{kj}^m, \quad (28)$$

тогда частные производные от контравариантного тензора ω^{ij} можно вычислять по формуле

$$\frac{\partial \omega^{ir}}{\partial x^k} = -\omega^{ip} \frac{\partial \omega_{pj}}{\partial x^k} \omega^{jr}. \quad (29)$$

Построим компоненты обобщенно аналитической функции следующим образом:

$$\varphi^{(s)i} = \omega^{ir} \frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^r}. \quad (30)$$

Подставим $\varphi^{(s)i}$ в соотношения Коши-Римана для обобщенно-аналитических функций, получим систему линейных уравнений для определения $\tilde{\Gamma}_{kq}^i$, причем общее решение соответствующей однородной системы будет таким же, как в I-м способе, а частное решение будет иметь вид

$$\tilde{\Gamma}_{(p)kq}^i = \Gamma_{kq}^i + \omega^{ir} \frac{\partial a_{(st)}}{\partial x^k} \frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^r} \frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^q}. \quad (31)$$

Если матрица (a_{st}) является числовой, то получим

$$\tilde{\Gamma}_{(p)kq}^i = \Gamma_{kq}^i. \quad (32)$$

Общее решение соответствующей однородной системы следует выбирать, как и выше, таким образом, чтобы в результате решение обладало свойством: когда функции (30) являются компонентами аналитической функции, $\tilde{\Gamma}_{kq}^i \equiv 0$.

Комплексные числа

Пусть

$$F(z) = f^{(1)} + if^{(2)} = u + iv \quad (33)$$

– аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$.

В работе [2] получены объекты Γ_{kl}^m для компонент аналитической функции $F(z)$ комплексной переменной,

$$\Gamma_{kl}^m = \frac{1}{2\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^l} \delta_k^m + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \delta_l^m - g^{mp} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^p} g_{kl} \right), \quad (34)$$

где

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \text{diag}(1, 1), \quad \Lambda = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (35)$$

I способ

Учитывая, что

$$(q_{ij}) = (q^{ij}) = \text{diag}(1, -1), \quad (36)$$

получим

$$(\varphi^{(1)i}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (\varphi^{(2)i}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (37)$$

Компоненты $\varphi^{(1)i}$ и $\varphi^{(2)i}$, являются компонентами двух аналитических функций. Первая – это производная от исходной аналитической функции, а так как компоненты второй функции удовлетворяют соотношениям Коши-Римана, то и она является аналитической.

Подберем $\tilde{\Gamma}_{(0)kj}^i$ таким образом, чтобы для конформного преобразования первого рода $\tilde{\Gamma}_{kl}^m = 0$. Подставим (34) в (21), добавим $\tilde{\Gamma}_{(0)kl}^m$ (22) и эту сумму приравняем к нулю. В результате получим систему уравнений

$$-\frac{1}{2} \left(q^{im} \frac{\partial \ln |\Lambda|}{\partial x^m} q_{kj} + \frac{\partial \ln |\Lambda|}{\partial x^k} \delta_j^i - q_k^i \frac{\partial \ln |\Lambda|}{\partial x^p} q_j^p \right) + p_{kt}^i D_j^t + \delta_k^i d_j = 0, \quad (38)$$

где

$$(q_k^i) = \text{diag}(1, -1). \quad (39)$$

Из этой системы уравнений найдем:

$$\left. \begin{aligned} D_1^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |\Lambda|}{\partial x} - d_1, \quad D_2^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |\Lambda|}{\partial y} - d_2, \\ D_1^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln |\Lambda|}{\partial y}, \quad D_2^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |\Lambda|}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где d_1 и d_2 – произвольные функции.

II способ

Пусть

$$(a_{(st)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

то есть

$$\omega_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} + \frac{\partial v}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j}. \quad (42)$$

Используя соотношения Коши-Римана для аналитической функции $F(z) = u + iv$, имеем

$$(\omega_{ij}) = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (44)$$

а значит

$$(\omega^{ij}) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Построим функции $\varphi^{(s)i}$:

$$(\varphi^{(1)i}) = \left(\omega^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$(\varphi^{(2)i}) = \left(\omega^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Так как

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (48)$$

$\varphi^{(1)i}$ и $\varphi^{(2)i}$ – компоненты аналитических функций комплексной переменной. Выясним возможно ли так подобрать в данном случае функции D_l^t и d_l в объектах связности $\tilde{\Gamma}_{kl}^m$, чтобы $\tilde{\Gamma}_{kl}^m = 0$. Для этого надо решить систему линейных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x^t} \delta_k^m + \frac{\partial L}{\partial x^k} \delta_l^m - g^{mp} \frac{\partial L}{\partial x^p} g_{kl} + p_{kt}^m D_l^t + \delta_k^m d_l = 0 \quad (49)$$

относительно неизвестных функций D_l^t , d_l . Эта система уравнений является совместной и имеет следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} D_1^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} - d_1, & D_2^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial y} - d_2, \\ D_1^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial y}, & D_2^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Поличисла H_4

В пространстве H_4 произвольная аналитическая функция в ψ -базисе имеет вид

$$F(X) = f^{(1)}(\xi^1)\psi_1 + f^{(2)}(\xi^2)\psi_2 + f^{(3)}(\xi^3)\psi_3 + f^{(4)}(\xi^4)\psi_4, \quad (51)$$

где

$$X = \xi^i \psi_i, \quad \psi_i \psi_j = p_{ij}^k \psi_k, \quad p_{ij}^k = \delta_{ij} \delta_{i-}^k, \quad (52)$$

$i = i_-$, но по этой паре индексов не ведется суммирование. Система уравнений для функций $f^{(i)}$, которые осуществляют элементарное обобщенно-конформные преобразования в координатном пространстве поличисел H_4 , имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial \xi^k \partial \xi^l} = \left[\frac{1}{2} (p_l \delta_k^m + p_k \delta_l^m) - p_{kl}^m \frac{\partial L}{\partial \xi^m} \right] \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \xi^m}. \quad (53)$$

Любая аналитическая функция переменной H_4 , которая осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой области координатного пространства H_4 на ту же или некоторую другую область того же пространства, определяет конформное преобразование и удовлетворяет системе уравнений (53) с

$$p_i = 0, \quad L = -\ln \left| \frac{\dot{f}^{(1)} \dot{f}^{(2)} \dot{f}^{(3)} \dot{f}^{(4)}}{\text{const}} \right|. \quad (54)$$

I способ

Так как в пространстве H_4 можно образовать тензор

$$q_{ij} = p_{ik}^m p_{mj}^k, \quad (q_{ij}) = \text{diag}(1, 1, 1, 1), \quad (55)$$

то существует и дважды контравариантный тензор q^{ij} , причем

$$(q^{ij}) = \text{diag}(1, 1, 1, 1). \quad (56)$$

Очевидно: если $f^{(s)}$ – компоненты аналитической функции, то и $\varphi^{(s)i}$ (18) – компоненты аналитической функции. Попробуем подобрать $\tilde{\Gamma}_{(0)kj}^i$ (22) таким образом, чтобы в этом случае $\tilde{\Gamma}_{kj}^i = 0$. Решая систему линейных уравнений

$$q^{im} p_{km}^r \frac{\partial L}{\partial \xi_{m-}} q_{rj} + p_{kt}^i D_j^t + \delta_k^i d_j = 0 \quad (57)$$

относительно неизвестных D_j^i и d_j , получим:

$$D_j^i = -\delta_j^i \frac{\partial L}{\partial \xi_{j-}} - d_j. \quad (58)$$

Итак, условие обращения в нуль объекта $\tilde{\Gamma}_{kj}^i$, когда функции $f^{(s)}$ осуществляют конформное преобразование, всегда можно выполнить, положив

$$d_i = 0, \quad D_k^i = -\delta_k^i \frac{\partial L}{\partial \xi_{k-}}. \quad (59)$$

II способ

Определим тензор ω_{ij} следующим образом:

$$\omega_{ij} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi^i} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \xi^i} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \xi^i} \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \xi^i} \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \xi^j}, \quad (60)$$

тогда, если $f^{(s)}$ – компоненты аналитической функции переменной H_4 , получим

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} (\dot{f}^{(1)})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\dot{f}^{(2)})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\dot{f}^{(3)})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\dot{f}^{(4)})^2 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$\left. \begin{aligned} (\varphi^{(1)i}) &= \left(\frac{1}{\dot{f}^{(1)}(\xi^1)}, 0, 0, 0 \right), \\ (\varphi^{(2)i}) &= \left(0, \frac{1}{\dot{f}^{(2)}(\xi^2)}, 0, 0 \right), \\ (\varphi^{(3)i}) &= \left(0, 0, \frac{1}{\dot{f}^{(3)}(\xi^3)}, 0 \right), \\ (\varphi^{(4)i}) &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{\dot{f}^{(4)}(\xi^4)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Таким образом, $\varphi^{(s)i}$ – компоненты аналитических функций переменной H_4 , поэтому надо потребовать, чтобы в этом случае объекты Γ_{kl}^m обращались в нуль, то есть выполнялась следующая система уравнений:

$$-p_{kl}^m \frac{\partial L}{\partial \xi^{l-}} + p_{kt}^m D_l^t + \delta_k^m d_l = 0. \quad (63)$$

Эта система линейных уравнений относительно D_l^t и d_l является совместной и имеет следующее решение:

$$D_j^i = \delta_j^i \frac{\partial L}{\partial \xi^{j-}} - d_j. \quad (64)$$

Заключение

В работе [1] отмечалось, что сформулированное в ней понятие обобщенно-аналитической функции слишком общо и нужны некоторые дополнительные условия (или условие) для выделения из этого множества функций физически значимого подмножества. В то же время понятие конформных преобразований в работе [2] обобщено, на наш взгляд, минимально возможным образом. Поэтому мы убеждены, что единственным и достаточным требованием для выделения физически значимого подмножества из множества обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной является следующее: любая физически значимая обобщенно-аналитическая функция поличисловой переменной P_n может быть получена тем или иным образом из обобщенно-конформных преобразований пространства P_n так, что, когда обобщенно-конформные преобразования осуществляются компонентами аналитических функций, получалась бы аналитические функции. В настоящей работе показано, что установить такое соответствие между обобщенно-конформными преобразованиями и физически значимым классом обобщенно-аналитических функций вполне возможно.

Литература

- [1] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 75–88.
- [2] Г. И. Гарасько: Обобщение понятия конформных преобразований, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (3) (2005), 16–25.

ФИЛОСОФСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ФИНСЛЕРОВЫХ РАСШИРЕНИЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана

geom2004@mail.ru

Исторически первое известное упоминание о принципиальной возможности существования геометрий, чей линейный элемент не обязан быть связываемым с корнем квадратным из квадратичной формы от дифференциалов компонент, принадлежит Риману. В связи с этим, такие геометрии, вполне уместно было бы называть римановыми, однако ныне их все же принято связывать с именем другого ученого – Финслера. Отчасти в данном казусе виноват сам Риман, так как буквально вслед за высказыванием о правомочности неквадратичных метрик, заявил, что такие геометрии слишком сложны, плохо интерпретируемы и, навряд ли, обладают сколь-нибудь своеобразным содержанием [1]. Как ни странно, абсолютное большинство современных физиков считает практически так же. Одной из целей данной работы является желание хотя бы отчасти поколебать эту несправедливую уверенность и показать, что финслерова геометрия в самом ближайшем будущем может стать той ареной, на которой продолжится развитие физики вообще и общей теории относительности в частности.

Конечно, пренебрежение финслеровой геометрией возникло не на пустом месте и к пессимистическому выводу о ее перспективах и Римана, и многих его современных последователей привели достаточно серьезные соображения. Первое из них, носящее скорее субъективный характер и связанное с предубеждением о сложности и малой наглядности, было уже высказано выше. Другим мощным сдерживающим фактором явилось доказательство в конце девятнадцатого – начале двадцатого века ряда теорем [2, 3], согласно которым группы симметрий, оставляющие инвариантным линейный элемент, оказываются обладающими максимальным числом независимых параметров именно в случаях квадратичных геометрий. Сомневаться же в рациональности использования в физике наиболее богатых на симметрии многообразий сегодня, похоже, не приходится. Третья причина была обусловлена отсутствием вплоть до последнего времени естественной альтернативы понятию скалярного произведения, широко используемого в римановых построениях. В связи с чем, в финслеровой геометрии доминирующее влияние приобрел так называемый финслеров метрический тензор [4], по сути, явившийся лишь незначительной модификацией риманова тензора и потому его использование лишь усугубило проблему. Следующий аргумент против финслеровой геометрии многие связывают с наблюдаемым фактом высокой степени изотропности окружающего нас трехмерного пространства. Поскольку финслеровы метрики приводят к анизотропии, значит, если и следует использовать неквадратичные геометрии, то лишь слабо отличающиеся от римановых. Наконец последняя, казалось бы, никак не коррелирующая с геометрией причина была обусловлена теоремой Фробениуса, утверждающей, что гиперкомплексные алгебры, обладающие обычными арифметическими законами сложения и умножения, связаны

только с действительными и комплексными числами. Некоторые математики увидели в этой теореме, в общем-то, не следующий из нее вывод, что классификация чисел далее комплексных не распространяется, а, следовательно, и мощнейший стимул изучения геометрий ассоциированных с соответствующим кругом гиперкомплексных алгебр оказался временно не задействованным.

Как будет показано ниже, к настоящему времени все приведенные выше аргументы против использования финслеровых построений применительно к реальному пространству-времени, если и не преодолены полностью, то значительно поколеблены, а, значит, нет и поводов относиться к финслеровой геометрии, как к второстепенному приложению к римановой.

* * *

Начнем с утверждения о сложности и малой наглядности. По сути, единственное отличие некоторых финслеровых пространств от привычной и во многом именно потому кажущейся наглядной евклидовой геометрии заключается в том, что множество точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки (а это ни что иное, как определение сферы) оказывается не обычной евклидовой сферой, а более сложной гиперповерхностью. Однако, даже в ставшей почти классической геометрии Минковского, такое множество отличается от евклидовой сферы и представляет собой объединение трех гиперboloидов: двух действительных и одного мнимого. Обычно их изображают в трехмерном аффинном пространстве в виде, как это представлено на рис. 1, а. Сегодня вряд ли кого удивляет, что эта поверхность, достаточно сильно отличающаяся от обычной сферы, в геометрическом смысле именно таковой и является. В простейших линейных финслеровых пространствах все почти аналогично псевдоевклидову случаю, с той разницей, что в аффинном представлении сфера (индикатрисса) может выглядеть еще более экзотично, например так, как это изображено на рис. 1, б.

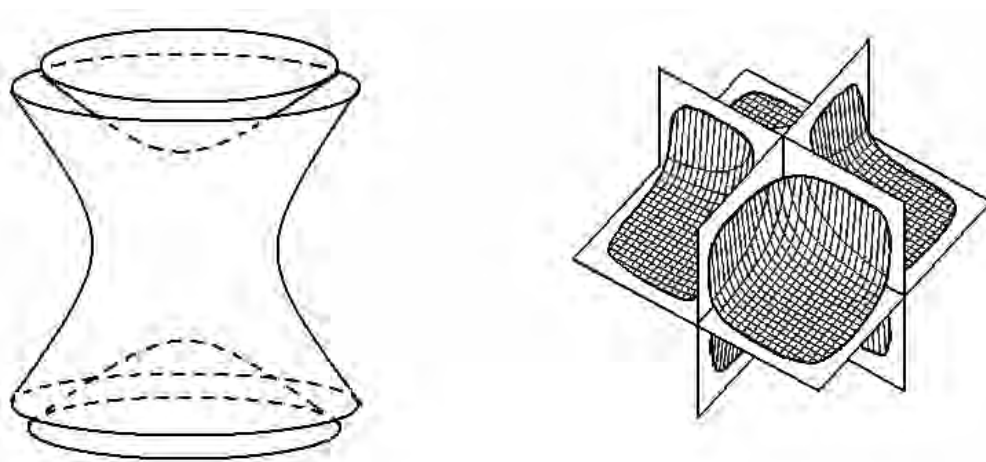


Рис. 1: Примеры индикатрис в трехмерном а) псевдоевклидовом и б) финслеровом пространствах.

Вслед за сферами можно ввести и другие элементарные поверхности, например, соответствующие евклидову понятию гиперплоскости. Для этого достаточно заметить, что гиперплоскость квадратичных пространств – это множество точек, каждая из которых удалена на одинаковое расстояние от двух фиксированных точек (рис. 2, а). В пространствах с другой метрикой так определенная поверхность уже не совпадает с аффинной плоскостью и, скажем, может выглядеть так, как изображено

на рис. 2, б. Опираясь этими и другими простейшими геометрическими объектами, геометрия, существенно отличающаяся от евклидовой, предстает перед нами, если и не очевидной, то достаточно простой и логичной.

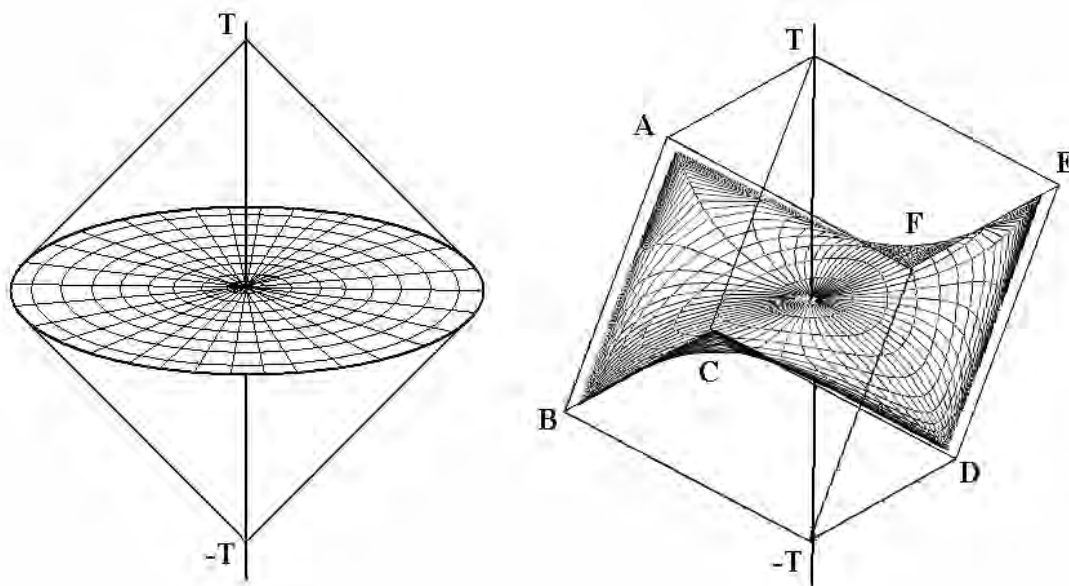


Рис. 2: Пример поверхностей, точки которых равноотстоят от двух фиксированных точек (T и $-T$) в трехмерном а) псевдоевклидовом и б) финслеровом пространствах.

Таким образом, в неквадратичных пространствах поверхности в метрическом плане играющие роль гиперплоскостей, в аффинном смысле таковыми не являются и это оказывается весьма существенным обстоятельством, так как приводит к необходимости отказаться от автоматического использования многих приемов римановой геометрии основывающихся на свойствах плоскости и, в частности, от метода касательных расслоений. При этом, естественно, такой отказ не обязан быть абсолютным, просто необходимо крайне осторожно относиться к формальным заимствованиям и там где требуется – разрабатывать естественные альтернативы.

* * *

Переходя к проблеме уникального богатства на симметрии именно квадратичных (то есть римановых) геометрий, следует отметить, что этот факт относится только к симметриям типа обычных движений, то есть, к линейным преобразованиям, оставляющим инвариантными расстояния между точками. Однако даже в случае квадратичных пространств к метрически выделенным, кроме изометрических преобразований относятся еще и преобразования, сохраняющие не длины, а углы. Такие преобразования иногда называют конформными движениями. Но ведь это те же симметрии, только нелинейные. И вот достаточно неожиданно выясняется, что, проигрывая квадратичным пространствам в разнообразии изометрических преобразований, некоторые финслеровы пространства оказываются существенно богаче тех в смысле симметрий общего нелинейного вида [6].

Но в вопросе о симметриях есть еще одно, даже более серьезное, чем сравнение конформных преобразований, обстоятельство. Симметрии пространств, к которым относятся многие финслеровы пространства, не ограничиваются одними изометриями и конформными движениями. Для них метрически выделенными оказываются преобразования, сохраняющие не только длины и углы, но и специфические для финслеровых геометрий величины, связываемые уже не с одним и с двумя, а с тре-

мя и более векторами. В квадратичных пространствах таких величин невозможно построить, поэтому подобного рода преобразования в римановых геометриях отсутствуют в принципе. Но в финслеровых пространствах они есть и являются не менее, а вероятно даже и более интересными, чем конформные. Таким образом, в некоторых финслеровых пространствах, в качестве своеобразной компенсации за относительную бедность изометрий, возникают не только более богатые группы конформных преобразований, но и существуют условия для появления целых классов новых метрически выделенных нелинейных отображений, которые, до появления подходящего собственного имени, временно будем называть *обобщенно конформными* [6].

На сегодняшний день нам известны только отдельные представители обобщенно конформных преобразований и только для некоторых финслеровых пространств. При этом решение задачи их полного перечисления является, на наш взгляд, одной из приоритетных в современной финслеровой геометрии. Следует отметить, что так ставящаяся задача достаточно сложна, поскольку предполагает работу уже не только с группами симметрий, но и с их обобщениями, например такими, когда некоторые множества преобразований связаны между собой не только би-, но и n -арными операциями, а те, в свою очередь, могут не иметь при этом в своем составе тождественного или обратного преобразования. По сути, речь идет о новом взгляде на широко известную Эрлангенскую программу Клейна, в которой основная задача геометрии была обозначена, как изучение групп симметрий. Сейчас же предлагается сосредоточиться на расширении самого понятия симметрии и перейти от его достаточно частного случая обязанного своим появлением изометрическим и конформным преобразованиям, к связанным с уже обобщенно конформными отображениями.

* * *

Перейдем теперь к проблеме скалярного произведения и тесно связанному с ней понятию метрического тензора. В двадцатых годах прошлого века Сингом, Тейлором и Бервальдом [4] было предложено определение финслерова метрического тензора, который с одной стороны наследовал одно из основных свойств обычного риманова метрического тензора иметь два индекса, а с другой — отражал специфическую особенность неквадратичных геометрий опираться на понятие обобщенной сферы, так называемую индикатрису. При всем удобстве такого подхода, он обладает определенной ограниченностью, основной причиной которой является то, что данный метрический тензор базируется не на собственном для конкретной финслеровой геометрии обобщении скалярного произведения, а заимствует структуру тензора совершенно иной (то есть квадратичной) природы. Образно выражаясь, финслерovu геометрию стали строить не на специально для нее подготовленном основании, а на фундаменте, предназначенном для совершенно другого здания. Вряд ли, при этом стоило ожидать особой элегантности получившейся конструкции. При этом абсолютное большинство физиков и математиков в своих выводах о малой перспективности финслеровых построений опираются именно на созерцание такой достаточно ущербной постройки.

Между тем, существует целый класс финслеровых пространств, которые допускают естественное расширение понятия скалярного произведения. В таких пространствах роль билинейной симметрической формы от двух векторов начинает играть полилинейная симметрическая форма от m векторов [5], а место квадрата длины вектора занимает его m -я степень. Принципиальным следствием такого расширения оказывается необходимость пересмотреть сложившуюся практику безальтернативного применения двухиндексного финслерова метрического тензора, упоминавшегося выше, заменяя его тензором, связанным с соответствующей полилинейной формой. Очевидно, что в таком общем случае у метрического тензора уже не два, а большее

число индексов. Преимущество подобной замены, помимо того, что она абсолютно естественна, заключается в том, что количество независимых компонент нового метрического тензора резко возрастает при той же размерности пространства. Так, в четырехмерных пространствах с кубической формой метрический тензор имеет уже не десять независимых компонент, как в классической ОТО, а двадцать. В пространствах же с квадратарной формой у метрического тензора уже тридцать пять независимых компонент. По сути, это означает, что системы уравнений, определяющих в соответствующих финслеровых многообразиях поля нового тензора, должны оказаться существенно более богатыми, чем система уравнений Эйнштейна, причем, оставаясь в рамках четырех измерений!

Следует отметить, что данное направление развития финслеровой геометрии и ее применений к физике идеологически достаточно близко к ОТО, однако связано с необходимостью разработки принципиально нового математического аппарата. В частности, привычное разделение компонент тензоров на ко- и контравариантные, по-видимому, потребует расширения, а это значит – понадобятся способы не только поднятия и опускания индексов, но и более сложные методы жонглирования ими.

* * *

Не менее интересна и проблема изотропности направлений. Традиционно считается, что если исходить из четырехмерности реального пространства-времени, то чуть ли не единственными метриками, удовлетворительно согласующимися с наблюдаемой в экспериментах высокой степенью изотропии окружающего нас трехмерного пространства, являются метрики Галилея и Минковского, содержащие евклидово пространство, как подпространство. При этом, часто упускается из виду, что сами эти четырехмерные пространства относятся к типично анизотропным, поскольку в них любое времениподобное направление кардинально отличается от всякого пространственноподобного. Кроме того, есть примеры четырехмерных финслеровых пространств, не содержащих евклидово подпространство, но в которых с точки зрения наблюдателя, воспринимаемое тем трехмерное окружение, будет *казаться* практически изотропным, во всяком случае, в некотором диапазоне параметров. Более того, уже сейчас можно назвать минимум две финслеровы метрические функции, которые приводят именно к таким квазиизотропным эффектом.

Одна из этих финслеровых метрик связана не с квадратичной, а с кубической формой и имеет вид симметрического многочлена третьей степени:

$$S^3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4. \quad (1)$$

Первым обратил внимание на данную метрику в контексте ее возможного отношения к геометрии реального пространства-времени профессор Самарского Аэрокосмического университета Владимир Михайлович Чернов, поэтому ее и связанное с ней пространство, я позволю себе называть его именем. Необычной особенностью пространства Чернова является то, что оно вообще не содержит непрерывных вращений, другими словами, группа линейных преобразований, аналогичная группе Лоренца в нем — нульпараметрическая. Однако, несмотря на это, утверждение, что данное пространство может с успехом конкурировать с пространством Минковского в качестве арены физических явлений не является абсурдным. Дело в том, что, отсутствуя в качестве изометрических симметрий, группа Лоренца может присутствовать в нем как одна из подгрупп обобщенно конформных преобразований. К сожалению, пространство Чернова еще слишком мало изучено, чтобы однозначно заявлять об этом. Уверен, что пристальное изучение данного пространства и исследование групп его

нелинейных симметрий помогут нам выйти за рамки привычных квадратичных представлений и приблизиться к пониманию существенно более сложных финслеровых пространств, чьи метрические формы имеют еще более высокий порядок.

В частности, к таким пространствам относится четырехмерное пространство с метрикой Бервальда-Моора, имеющей в одном из базисов вид симметрического многочлена (вернее моночлена) четвертой степени:

$$S^4 = x_1 x_2 x_3 x_4. \quad (2)$$

Кстати, нелишним будет отметить, что квадратичная форма пространства Минковского в аналогичном базисе, состоящем из четырех векторов лежащих на световом конусе, имеет также вид симметрического многочлена, только второй степени:

$$S^2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4. \quad (3)$$

Это поистине удивительное обстоятельство, которое по не очень понятным причинам почти не обсуждалось физиками, на наш взгляд, является ключевым в понимании тесной родственной связи трех геометрий, одна из которых общепризнанна, а две других с метриками (1) и (2), вполне вероятно, смогут стать не менее популярными в самом ближайшем будущем. Во всяком случае, в каждой из них с точки зрения наблюдателя, ассоциируемого с некоторой мировой линией, окружающий Мир предстает в виде пары: одномерного времени и трехмерного пространства, расстояния в котором в определенном диапазоне параметров соответствуют евклидовой геометрии. Иными словами, в определенном приближении реализуется геометрия пространства-времени классической физики Галилея-Ньютона.

* * *

Как ни парадоксально, самым содержательным и сложным из трех пространств оказывается то, что связано с метрической функцией Бервальда-Моора, которая хоть и выглядит наиболее элементарно, приводит к геометрии, включающей в себя в качестве последовательных приближений две остальные, а заодно, как отмечалось выше, и геометрию классической физики. Но у данного пространства имеется еще одно чрезвычайно важное обстоятельство. В отличие от пространств Галилея, Минковского и Чернова оно непосредственным образом связано с пожалуй самым фундаментальным понятием математики – *числом*. Причем эта связь реализуется практически так же, как между геометрией евклидовой плоскости и алгеброй комплексных чисел, а так же между геометрией четырехмерного евклидова пространства и алгеброй кватернионов. Только в отличие от последней, алгебра соответствующая пространству с метрикой Бервальда-Моора (назовем ее алгеброй квадрачисел), является коммутативно-ассоциативной и она изоморфна прямой сумме четырех действительных алгебр. Более простую четырехкомпонентную алгебру просто трудно представить.

С другой стороны, стоящая за этой простейшей алгеброй геометрия, далеко не тривиальна. Она оказывается таковой благодаря разнообразию нелинейных операций связанных с обобщенно конформными преобразованиями, примерно так же, как существование бесконечнопараметрической группы конформных преобразований евклидовой плоскости приводит к превращению, в общем-то, элементарной алгебры комплексных чисел в мощнейший аппарат комплексного анализа. Как известно, одним из последствий подобного симбиоза оказывается возможность построения на комплексной плоскости весьма интересных геометрических объектов: алгебраических фракталов, среди которых – носящие имена Жюлиа и Мандельброта. Красота

и гармония комплексных фракталов настолько замечательны, что, глядя на них, поневоле возникает желание повторить аналогичные построения и в многомерных пространствах. Представляется, что, используя квадрата, мы, как раз, и получаем соответствующую возможность, причем в этом случае фрактальные объекты могут изображаться трехмерными и к тому же эволюционирующими во времени.

Идея, что физику можно строить, отталкиваясь от гиперкомплексных числовых структур, принадлежит Уильяму Гамильтону, которому, как известно, принадлежит честь открытия первой гиперкомплексной алгебры – алгебры кватернионов. Замечу, что этот выдающийся математик известен многими достижениями, но кватернионы считал самым главным своим открытием и именно им он самозабвенно посвятил большую часть оставшейся жизни. И хотя претворить в жизнь красивейшую идею связать с кватернионами значительную часть физики ни ему, ни многочисленным его последователям так и не удалось, кватернионы, все равно, являются самыми известными гиперчислами, а их приложения достаточно интересны и многочисленны. Как знать, быть может то, что не удалось Гамильтону с кватернионами, окажется достижимым на основе более элементарных квадратов и мы, как некогда Пифагор, когда-нибудь сможем воскликнуть: “Все сущее – суть числа”. Только естественно, вместо достаточно узкого понимания под числами рациональных, действительных или комплексных представителей будем рассматривать существенно более широкий круг их гиперкомплексных расширений, а вместо обычной евклидовой или псевдо-евклидовой геометрии – их финслеровы обобщения.

Литература

1. Б. Риман: О гипотезах, лежащих в основании геометрии. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.
2. Г. Гельмгольц: О фактах, лежащих в основаниях геометрии. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.
3. С. Ли: Замечания на работу Гельмгольца “О фактах, лежащих в основаниях геометрии”. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.
4. Х. Рунд: Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. Наука, М. 1981.
5. Д. Г. Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)**, 2004.
6. Г. И. Гарасько: Обобщение понятия конформных преобразований. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (3)**, 2005.

4-ИМПУЛЬС ЧАСТИЦЫ И УРАВНЕНИЕ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПОЛНОСТЬЮ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Г. Ю. Богословский

*НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобелъцына,
МГУ им. М. В. Ломоносова
bogoslov@theory.sinp.msu.ru*

Работа посвящена исследованию модели плоского полностью анизотропного пространства-времени, метрика которого является обобщением финслеровой метрики Бервальда-Моора. Действие для массивной частицы в таком анизотропном пространстве определено исходя из соображений релятивистской инвариантности и минимальности на прямой мировой линии. С помощью вариационного принципа получены формулы, связывающие канонический 4-импульс частицы с ее 3-скоростью. Показано, что соответствующая массовая поверхность является инвариантом группы релятивистской симметрии полностью анизотропного пространства-времени.

Введение

Как известно, в рамках Общей теории относительности пространство-время является римановым. При этом, в силу уравнений Эйнштейна, распределение и движение материи определяет лишь его кривизну и никак не влияет на геометрию касательных пространств. Другими словами, вне зависимости от распределения и свойств материальной среды, заполняющей риманово пространство-время, любое плоское касательное пространство-время остается пространством-временем Специальной теории относительности, т. е. — пространством Минковского.

Вообще говоря, плоское пространство-время не обязательно должно обладать геометрией Минковского. Такая геометрия присуща ему только в том случае, если в качестве однородной группы изометрий оно допускает 6-параметрическую группу Лоренца. Последняя, как известно, включает в себя 3-параметрические лоренцевы бусты и подгруппу 3D вращений. Если же 3D изотропия плоского пространства-времени каким-либо образом нарушена, то его метрика уже не описывается квадратичной формой дифференциалов координат, а является некоторой (вообще говоря, достаточно произвольной) однородной функцией дифференциалов координат второй степени однородности. В таком случае говорят, что плоское пространство-время обладает финслеровой геометрией [1].

Уже сравнительно давно (см., в частности, [2]–[7]) предпринимаются попытки обобщить теорию поля и уравнения Эйнштейна для финслерова пространства-времени. Сложность такой задачи состоит прежде всего в том, что финслеров метрический тензор зависит не только от точек основного многообразия, но и от геометрических объектов, вообще говоря, произвольной природы. Поэтому всякий заметный прогресс в этой области связан с привлечением дополнительных физических идей. Отметим, в частности, исключительно плодотворную идею о нарушении лоренцевой симметрии при относительных скоростях инерциальных систем отсчета,

крайне близких к скорости света. Эта идея была высказана в работах [8], [9] в качестве наиболее вероятной причины отсутствия так называемого эффекта GZK [10], [11] и привела в конечном счете [12] к открытию жизнеспособной модели плоского пространства-времени с частично нарушенной 3D изотропией. Модель, о которой идет речь, описывается следующей финслеровой метрикой:

$$ds^2 = \left[\frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2}{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} \right]^r (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2), \quad (1)$$

где единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ указывает выделенное направление в 3D пространстве, а безразмерный параметр r определяет величину анизотропии, т. е. степень отклонения финслеровой метрики (1) от метрики изотропного пространства Минковского. При этом ясно, что метрика Минковского является предельным случаем метрики (1) при $r = 0$.

Для построения целостной картины динамики пространственно-временного многообразия важное значение имеет и другой предельный случай, а именно, $r = 1$. Согласно (1), метрика ds вырождается в этом случае в полный дифференциал абсолютного времени. Такая трансформация метрики позволяет сделать вывод о возможности фазовых переходов в геометрической структуре пространства-времени и связать их с фазовыми переходами, которые возникают в системе взаимодействующих фундаментальных полей при спонтанном нарушении калибровочной симметрии. Ниже, данную проблему мы обсудим более подробно, а сейчас обратим внимание на еще одно важное обстоятельство, касающееся конкретного вида финслеровой метрики (1).

Любая из финслеровых метрик $ds^2 = f((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2 / (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2)) (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2)$, где $f((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2 / (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2))$ — во многом произвольная функция своего аргумента, тоже описывает некоторое плоское финслерово пространство-время с частично нарушенной 3D изотропией, т. е. — аксиально симметричное финслерово пространство. Однако, если и только если f имеет вид $f = ((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2 / (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2))^r$, соответствующая метрика (1) описывает плоское анизотропное пространство-время, которое, помимо 1-параметрической группы вращений вокруг вектора $\boldsymbol{\nu}$, допускает однородную 3-параметрическую группу изометрий, состоящую лишь из некомпактных преобразований. Такие преобразования связывают физически эквивалентные инерциальные системы отсчета в анизотропном пространстве-времени (1) и называются обобщенными преобразованиями Лоренца, или обобщенными лоренцевыми бустами. В результате можно утверждать, что при переходе от пространства Минковского к финслерову пространству (1) с частично нарушенной 3D изотропией лоренцева пространственно-временная симметрия оказывается тоже нарушенной, но релятивистская симметрия, представленная группой обобщенных лоренцевых бустов, остается в силе [13]–[21].

В рамках описанной финслеровой модели источником анизотропии плоского пространства-времени является релятивистски инвариантный аксиально симметричный фермион-антифермионный конденсат, который возникает при спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии и появлении масс у фундаментальных полей материи. В отличие от стандартного механизма Хиггса и альтернативной ему схемы [22], [23], когда вместо конденсата Хиггса рассматривается скалярный фермион-антифермионный конденсат, перестройка вакуума с образованием релятивистски инвариантного аксиально симметричного фермион-антифермионного конденсата приводит к изменению геометрии плоского пространства-времени; вместо геометрии Минковского возникает финслерова геометрия с метрикой (1). При этом, как

уже отмечалось, такой геометрический фазовый переход сохраняет релятивистскую симметрию, но нарушает лоренцеву симметрию теории.

В последнее время, наряду с финслеровым, разрабатывается и другой, струнно мотивированный подход к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Дело в том, что, даже если исходная единая теория обладает лоренцевой симметрией на наиболее фундаментальном уровне, эта симметрия может спонтанно нарушиться за счет образования конденсата векторного или, например, тензорного поля. Предположение о существовании такого конденсата, или постоянного классического поля на фоне пространства Минковского подразумевает, что оно может влиять на динамику фундаментальных полей и тем самым модифицировать Стандартную модель сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий. Поскольку при пассивных преобразованиях постоянное классическое поле преобразуется как лоренцев вектор или тензор, естественным способом учета этого влияния является расширение лагранжиана Стандартной модели с помощью дополнительных членов, представляющих собой всевозможные лоренц-ковариантные свертки конденсата со стандартными фундаментальными полями. Феноменологическая теория, основанная на такой лоренц-ковариантной модификации Стандартной модели, получила название расширенной Стандартной модели (SME) [24]–[27]. Эта теория по построению не является лоренц-инвариантной, поскольку ее лагранжиан не остается инвариантным при активных лоренцевых преобразованиях фундаментальных полей на фоне фиксированного конденсата. К сказанному нужно добавить, что в контексте SME нарушение лоренцевой симметрии относительно активных лоренцевых преобразований подразумевает нарушение и релятивистской симметрии, т. к. наличие неинвариантного конденсата нарушает физическую эквивалентность различных инерциальных систем отсчета.

Не исключено, конечно, что природа устроена так, что при планковских масштабах энергии не только лоренцева, но и описанная выше обобщенная лоренцева симметрия окажутся полностью или частично [28] нарушенными. Однако, даже в этом случае более адекватной по сравнению с римановой может оказаться финслерова геометрическая модель пространства-времени. Хотя похожая точка зрения уже нашла свое место в работе [29], нелишне отметить, что при отсутствии у финслерова пространства-времени какой-либо группы локальных изометрий необходимы дополнительные физические критерии, позволяющие выбрать из множества финслеровых метрик лишь те, которые подходят для описания геометрических свойств пространственно-временного многообразия. Например, используя в качестве таких критериев наличие конформной и проективной структур у финслерова пространства, авторы работ [30]–[32] показали, что финслерово пространство-время, удовлетворяющее данным критериям, должно являться специальным финслеровым пространством Бервальда.

Возвращаясь к финслеровым пространствам, допускающим однородные некомпактные 3-параметрические группы изометрий и, следовательно, обладающие релятивистской симметрией, мы в настоящей работе сосредоточимся на дальнейшем исследовании плоского финслерова пространства-времени с полностью нарушенной 3D изотропией.

Релятивистски инвариантное плоское финслерово пространство-время с полностью нарушенной 3D изотропией

С точки зрения теории относительности основное свойство аксиально симметричного финслерова пространства-времени (1) состоит в том, что оно является

еще и релятивистски симметричным. Другими словами, преобразования, связывающие различные инерциальные системы отсчета, принадлежат группе его изометрий и сами образуют 3-параметрическую группу. Что касается аксиальной симметрии, то она означает, что при переходе от пространства Минковского к финслерову пространству-времени (1) изотропия 3D пространства нарушается лишь частично. Если в качестве источника анизотропии 3D пространства рассматривать анизотропию фермион-антифермионного конденсата, который образуется при том или ином спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии системы взаимодействующих фундаментальных полей, то напрашивается следующий вывод. Если аксиально симметричный конденсат порождает аксиально симметричное релятивистски инвариантное финслерово пространства-времени (1) и если помимо аксиально симметричного может также возникать полностью анизотропный конденсат, то последний должен порождать полностью анизотропное релятивистски инвариантное финслерово пространство-время. В наиболее общей форме соответствующая полностью анизотропная финслерова метрика была найдена в работе [33]. Как оказалось, она зависит от трех безразмерных параметров r_1 , r_2 , r_3 и имеет следующий вид:

$$ds = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)/4} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)/4} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)/4}. \quad (2)$$

Область возможных значений параметров r_1 , r_2 , r_3 ограничена условиями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &\geq 0, \quad 1 + r_1 - r_2 - r_3 \geq 0, \\ 1 - r_1 + r_2 - r_3 &\geq 0, \quad 1 - r_1 - r_2 + r_3 \geq 0 \end{aligned}$$

и представляет собой тетраэдр $ABCD$, изображенный на Рис. 1.

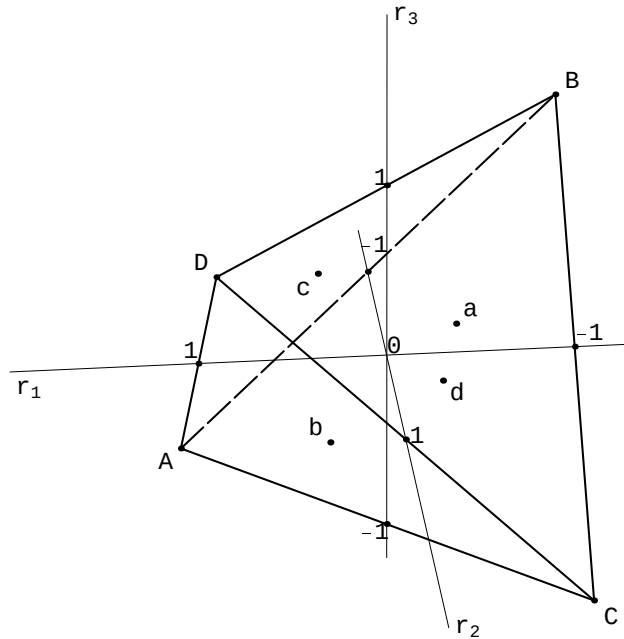


Рис. 1: Область возможных значений параметров r_1, r_2, r_3 .

При $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ метрика (2) сводится к корню четвертой степени из произведения четырех 1-форм

$$ds_{B-M} = [(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)]^{1/4}. \quad (3)$$

Если, подобно тому, как это сделано в [34], ввести новые координаты ξ_i так, что

$$\xi_i = A_{ij}x_j, \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

то в этих координатах (3) примет стандартный вид метрики Бервальда-Моора [35], [36], т.е. $ds_{B-M} = \sqrt[4]{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}$. Таким образом мы видим, что метрика Бервальда-Моора, представленная с помощью формулы (3), является частным случаем метрики (2) при значении параметров $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ (на Рис. 1 это – центральная точка тетраэдра $ABCD$).

Вершине A тетраэдра отвечают следующие значения параметров r_α ($r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = -1$); вершине B – ($r_1 = -1, r_2 = -1, r_3 = 1$); вершине C – ($r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = -1$) и, наконец, вершине D – ($r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1$). В каждой из этих вершин метрика (2), описывающая пространство-время с полностью нарушенной 3D изотропией, вырождается в соответствующую 1-форму, т.е. – в полный дифференциал абсолютного времени

$$ds_A = dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3; \quad ds_B = dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3; \\ ds_C = dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3; \quad ds_D = dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3.$$

Если теперь сопоставить данное наблюдение с уже отмеченным выше фактом, что метрика (1), описывающая пространство-время с частично нарушенной 3D изотропией, тоже вырождается при $r = 1$ в полный дифференциал абсолютного времени, то такое сопоставление наводит на мысль, что абсолютное время не является стабильным вырожденным состоянием пространства-времени и может трансформироваться либо в частично анизотропное пространство-время (1), либо в полностью анизотропное пространство-время (2). В любом случае соответствующий геометрический фазовый переход от абсолютного времени к четырехмерному пространству-времени можно рассматривать как "Акт Сотворения" 3D пространства. Это явление сопровождается перестройкой вакуумного состояния системы взаимодействующих фундаментальных полей, в результате чего появляются массы у элементарных частиц. Только после завершения описанного процесса понятие пространственной протяженности и понятие системы отсчета наполняются реальным физическим содержанием (в безмассовом мире бессмысленно говорить о пространственной протяженности чего-либо, равно как и о какой-либо системе отсчета¹). Наконец, обратим внимание еще и на то, что с формальной точки зрения абсолютное время играет роль того связующего звена, посредством которого удовлетворяется принцип соответствия для финслеровых пространств с частично и полностью нарушенной 3D изотропией.

¹ Отметим кстати, что уже в одной из первых единых калибровочных теорий – конформной теории Вейля [37], [38] само понятие пространственно-временного интервала приобретает физический смысл только после нарушения локальной конформной симметрии и появления массы у первоначально безмассового абелева векторного калибровочного поля.

Чтобы исследовать "тонкую структуру" геометрических фазовых переходов, целесообразно рассмотреть здесь некоторые финслеровы метрики, которые можно получить, используя метрику (2) в качестве производящей и выделяя из множества допустимых значений параметров r_1, r_2, r_3 соответствующие характерные подмножества.

Согласно Рис. 1, на грани ABC параметры r_α связаны соотношением $r_3 = -1 - r_1 - r_2$. Поэтому с помощью (2) мы получаем

$$ds_{ABC} = (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1)/2} (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1+r_2)/2} \times (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{-(r_1+r_2)/2}. \quad (4)$$

В центральной точке d грани ABC параметры r_α имеют значения $r_1 = r_2 = r_3 = -1/3$, а (4) сводится к следующему кубическому корню

$$ds_d = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}. \quad (5)$$

На грани BCD параметры r_α связаны соотношением $r_3 = 1 + r_1 - r_2$. Соответственно, формула (2) дает

$$ds_{BCD} = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1)/2} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_2)/2} \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{-(r_1-r_2)/2}. \quad (6)$$

В центральной точке a грани BCD $r_1 = -1/3, r_2 = r_3 = 1/3$ и, вследствие (6), мы снова получаем метрику в форме кубического корня

$$ds_a = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}. \quad (7)$$

На грани ABD $r_3 = 1 - r_1 + r_2$. В результате

$$ds_{ABD} = (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1)/2} (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_2)/2} \times (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(r_1-r_2)/2}. \quad (8)$$

В центральной точке c грани ABD $r_2 = -1/3, r_1 = r_3 = 1/3$, а метрика имеет вид

$$ds_c = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}. \quad (9)$$

На последней, четвертой грани ACD $r_3 = r_1 + r_2 - 1$ и мы получаем

$$ds_{ACD} = (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1)/2} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1-r_2)/2} \times (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(r_1+r_2)/2}. \quad (10)$$

В центральной точке b этой грани $r_1 = r_2 = 1/3, r_3 = -1/3$. Поэтому

$$ds_b = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)}. \quad (11)$$

Выясним, наконец, какую форму метрика (2) принимает на шести ребрах тетраэдра $ABCD$. Начнем с ребра BD . Согласно Рис. 1 это ребро является пересечением граней ABD и BCD . Поэтому на нем параметры r_α связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - r_1 + r_2 - r_3 &= 0, \\ 1 + r_1 - r_2 - r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $r_3 = 1$, $r_1 = r_2 = \tilde{r}$. В результате мы получаем

$$ds_{BD} = \left[\frac{(dx_0 - dx_3) - (dx_1 + dx_2)}{(dx_0 - dx_3) + (dx_1 + dx_2)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_3)^2 - (dx_1 + dx_2)^2}. \quad (12)$$

В середине ребра BD $r_3 = 1$, $r_1 = r_2 = \tilde{r} = 0$ и (12) сводится к двумерной метрике Минковского $ds^2 = (dx_0 - dx_3)^2 - (dx_1 + dx_2)^2$.

Рассмотрим ребро AD , которое является пересечением граней ABD и ACD . Параметры r_α связаны на этом ребре соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - r_1 + r_2 - r_3 &= 0, \\ 1 - r_1 - r_2 + r_3 &= 0. \end{aligned}$$

В результате $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \tilde{r}$ и

$$ds_{AD} = \left[\frac{(dx_0 - dx_1) - (dx_2 + dx_3)}{(dx_0 - dx_1) + (dx_2 + dx_3)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_1)^2 - (dx_2 + dx_3)^2}. \quad (13)$$

В середине ребра AD $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \tilde{r} = 0$ и (13) снова сводится к двумерной метрике Минковского $ds^2 = (dx_0 - dx_1)^2 - (dx_2 + dx_3)^2$.

Ребро CD есть пересечение граней ACD и BCD . На этом ребре параметры r_α связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - r_1 - r_2 + r_3 &= 0, \\ 1 + r_1 - r_2 - r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Это дает $r_2 = 1$, $r_1 = r_3 = \tilde{r}$. Следовательно

$$ds_{CD} = \left[\frac{(dx_0 - dx_2) - (dx_1 + dx_3)}{(dx_0 - dx_2) + (dx_1 + dx_3)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_2)^2 - (dx_1 + dx_3)^2}. \quad (14)$$

В середине ребра CD $r_2 = 1$, $r_1 = r_3 = \tilde{r} = 0$ и значит $ds^2 = (dx_0 - dx_2)^2 - (dx_1 + dx_3)^2$.

Ребро CB есть пересечение граней ABC и BCD . На нем параметры r_α связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &= 0, \\ 1 + r_1 - r_2 - r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $r_1 = -1$, $r_2 = -r_3 = \tilde{r}$. В результате

$$ds_{CB} = \left[\frac{(dx_0 + dx_1) - (dx_2 - dx_3)}{(dx_0 + dx_1) + (dx_2 - dx_3)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_1)^2 - (dx_2 - dx_3)^2}. \quad (15)$$

В середине ребра CB $r_1 = -1$, $r_2 = -r_3 = \tilde{r} = 0$ и $ds^2 = (dx_0 + dx_1)^2 - (dx_2 - dx_3)^2$.

Ребро AB является пересечением граней ABC и ABD и на нем параметры r_α связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &= 0, \\ 1 - r_1 + r_2 - r_3 &= 0, \end{aligned}$$

т.е. $r_2 = -1$, $r_1 = -r_3 = \tilde{r}$. В результате

$$ds_{AB} = \left[\frac{(dx_0 + dx_2) - (dx_1 - dx_3)}{(dx_0 + dx_2) + (dx_1 - dx_3)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_2)^2 - (dx_1 - dx_3)^2}. \quad (16)$$

В середине ребра AB $r_2 = -1$, $r_1 = -r_3 = \tilde{r} = 0$ и $ds^2 = (dx_0 + dx_2)^2 - (dx_1 - dx_3)^2$.

Последнее ребро AC является пересечением граней ABC и ACD . На нем параметры r_α связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &= 0, \\ 1 - r_1 - r_2 + r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно $r_3 = -1$, $r_1 = -r_2 = \tilde{r}$ и

$$ds_{AC} = \left[\frac{(dx_0 + dx_3) - (dx_1 - dx_2)}{(dx_0 + dx_3) + (dx_1 - dx_2)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_3)^2 - (dx_1 - dx_2)^2}. \quad (17)$$

В середине ребра AC $r_3 = -1$, $r_1 = -r_2 = \tilde{r} = 0$ и $ds^2 = (dx_0 + dx_3)^2 - (dx_1 - dx_2)^2$.

В следующем разделе, посвященном релятивистской механике частицы в полностью анизотропном пространстве-времени (2), мы существенно используем преобразования, составляющие однородную 3-параметрическую некомпактную группу изометрий этого пространства-времени. По своему смыслу такая группа представляет собой группу релятивистской симметрии пространства-времени (2). Она, как было выяснено в работе [39], является абелевой, а определяющие ее линейные преобразования имеют вид

$$x'_i = D L_{ik} x_k, \quad (18)$$

где

$$D = e^{-(r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3)}, \quad (19)$$

L_{ik} — унимодулярные матрицы, причем

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} & -\mathcal{C} & -\mathcal{D} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} & \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{D} & \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathcal{A} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{B} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

$$\mathcal{C} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{D} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — групповые параметры.

Преобразования, обратные (18), имеют вид

$$x_i = D^{-1} L_{ik}^{-1} x'_k, \quad (21)$$

где

$$L_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & -\tilde{\mathcal{B}} & -\tilde{\mathcal{C}} & -\tilde{\mathcal{D}} \\ -\tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{C}} \\ -\tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{B}} \\ -\tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{A}} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\tilde{A} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 - \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3, \quad (23)$$

$$\tilde{B} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 - \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3, \quad (24)$$

$$\tilde{C} = \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 - \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3, \quad (25)$$

$$\tilde{D} = \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 - \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3. \quad (26)$$

Учитывая, что преобразования (18), подобно преобразованиям Лоренца в пространстве Минковского, связывают различные инерциальные системы отсчета в финслеровом пространстве (2), целесообразно вместо групповых параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ использовать компоненты $v_1 = dx_1/dx_0$, $v_2 = dx_2/dx_0$, $v_3 = dx_3/dx_0$ скорости штрихованной системы отсчета. Хотя соответствующие соотношения можно найти в [39], мы все же их здесь воспроизведем:

$$v_1 = (\tanh \alpha_1 - \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3),$$

$$v_2 = (\tanh \alpha_2 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3),$$

$$v_3 = (\tanh \alpha_3 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3).$$

Обратные соотношения выглядят так:

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}.$$

Релятивистская механика в плоском полностью анизотропном финслеровом пространстве-времени

Исходя из соображений релятивистской инвариантности и минимальности на прямой мировой линии, запишем действие S для свободной частицы в плоском полностью анизотропном финслеровом пространстве-времени (2).

$$S = -mc \int_a^b ds, \quad (27)$$

где ds — интервал в финслеровом пространстве (2). Вариация данного действия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int_a^b (p_0 \delta x_0 - p_1 \delta x_1 - p_2 \delta x_2 - p_3 \delta x_3) \\ &= (-p_0 \delta x_0 + p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + p_3 \delta x_3)|_a^b \\ &\quad + \int_a^b [(dp_0/ds) \delta x_0 - (dp_1/ds) \delta x_1 - (dp_2/ds) \delta x_2 - (dp_3/ds) \delta x_3] ds. \end{aligned} \quad (28)$$

Если мы варьируем мировую линию при условии $(\delta x_i)|_a = (\delta x_i)|_b = 0$, то принцип наименьшего действия дает $p_i = \text{const}$, т.е. прямолинейное инерциальное движение. Если же мы варьируем координаты точки b при условии $p_i = \text{const}$, то приходим к следующим соотношениям:

$$p_0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0}, \quad p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x_\alpha}; \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (29)$$

Отсюда ясно, что p_i есть канонический 4-импульс частицы в финслеровом пространстве (2). Его компоненты, выраженные через 3-скорость $v_\alpha = dx_\alpha/dx_0$, имеют вид

$$p_0 = \frac{ds}{dx_0} \left(\frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 \{ 1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3 + r_1[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3] + r_2[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3] + r_3[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2] \}, \quad (30)$$

$$p_1 = \frac{ds}{dx_0} \left(\frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 \{ (1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3 + r_1[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] + r_2[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2] + r_3[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3] \}, \quad (31)$$

$$p_2 = \frac{ds}{dx_0} \left(\frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 \{ (1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3 + r_1[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2] + r_2[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] + r_3[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3] \}, \quad (32)$$

$$p_3 = \frac{ds}{dx_0} \left(\frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 \{ (1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2 + r_1[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3] + r_2[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3] + r_3[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] \}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} (dx_0/ds) (ds_{B-M}/dx_0)^4 &= (1 - v_1 - v_2 - v_3)^{(3-r_1-r_2-r_3)/4} \\ &\times (1 - v_1 + v_2 + v_3)^{(3-r_1+r_2+r_3)/4} \\ &\times (1 + v_1 - v_2 + v_3)^{(3+r_1-r_2+r_3)/4} \\ &\times (1 + v_1 + v_2 - v_3)^{(3+r_1+r_2-r_3)/4}, \end{aligned} \quad (34)$$

причем ds — метрика (2), а ds_{B-M} — метрика Бервальда-Моора (3). Отметим, что, начиная с формулы (30), во всех соотношениях положено $m = c = 1$.

Согласно (30)–(33), четыре величины, а именно, энергия p_0 и 3-импульс p_α являются функциями трех компонент v_α скорости частицы. Поэтому соотношения (30)–(33) можно рассматривать как уравнения, определяющие массовую поверхность в параметрической форме, а v_α — как внутренние координаты на ней. Ниже мы покажем, что уравнение массовой поверхности можно получить и в форме алгебраического соотношения для p_i . Что же касается физической стороны дела, то, как и должно быть, энергия p_0 , определенная с помощью (30), достигает своего абсолютного минимума $p_0 = 1$ при $v_\alpha = 0$, т. е. для покоящейся частицы. Важно, однако, отметить, что, помимо энергии покоя $p_0 = 1$, у частицы, находящейся в полностью анизотропном пространстве (2), остается отличный от нуля импульс покоя; в силу

(31)–(33) $p_1 = r_1, p_2 = r_2, p_3 = r_3$ при $v_\alpha = 0$. Более того, согласно тем же формулам, направление 3-импульса частицы не совпадает с направлением ее 3-скорости. Это говорит о том, что свободное движение частицы в полностью анизотропном пространстве аналогично движению квазичастицы в полностью анизотропной кристаллической среде.

Как и в случае пространства Минковского, зная 4-импульс частицы в полностью анизотропном пространстве, можно найти ее 3-скорость. Чтобы получить соответствующие формулы, начнем с некоторых полезных промежуточных соотношений, которые выполняются в силу (30)–(33):

$$\frac{p_0 + p_3}{p_1 + p_2} = \frac{(1 - v_3)(1 + r_3) + (v_1 + v_2)(r_1 + r_2)}{(1 - v_3)(r_2 + r_3) + (v_1 + v_2)(1 + r_3)}, \quad (35)$$

$$\frac{p_0 - p_1}{p_2 - p_3} = \frac{(1 + v_1)(1 - r_1) + (v_2 - v_3)(r_2 - r_3)}{(1 + v_1)(r_2 - r_3) + (v_2 - v_3)(1 - r_1)}, \quad (36)$$

$$\frac{p_0 + p_1}{p_2 + p_3} = \frac{(1 - v_1)(1 + r_1) + (v_2 + v_3)(r_2 + r_3)}{(1 - v_1)(r_2 + r_3) + (v_2 + v_3)(1 + r_1)}. \quad (37)$$

Данные соотношения приводят к следующей системе трех линейных уравнений относительно v_α :

$$a_{\gamma\alpha} v_\alpha = b_\gamma, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} = (p_0 + p_3)(1 + r_3) - (p_1 + p_2)(r_1 + r_2), \\ a_{13} &= b_1 = (p_1 + p_2)(1 + r_3) - (p_0 + p_3)(r_2 + r_3), \\ a_{21} &= -b_2 = (p_0 - p_1)(r_2 - r_3) - (p_2 - p_3)(1 - r_1), \\ a_{22} &= -a_{23} = (p_0 - p_1)(1 - r_1) - (p_2 - p_3)(r_2 - r_3), \\ a_{31} &= b_3 = (p_2 + p_3)(1 + r_1) - (p_0 + p_1)(r_2 + r_3), \\ a_{32} &= a_{33} = (p_0 + p_1)(1 + r_1) - (p_2 + p_3)(r_2 + r_3). \end{aligned}$$

При $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, т. е. в случае пространства Бервальда-Моора с метрикой (3), система уравнений (38) принимает вид

$$\begin{aligned} (p_0 + p_3)v_1 + (p_0 + p_3)v_2 + (p_1 + p_2)v_3 &= (p_1 + p_2), \\ (p_3 - p_2)v_1 + (p_0 - p_1)v_2 + (p_1 - p_0)v_3 &= (p_2 - p_3), \\ (p_2 + p_3)v_1 + (p_0 + p_1)v_2 + (p_0 + p_1)v_3 &= (p_2 + p_3). \end{aligned} \quad (39)$$

Решением системы уравнений (39) являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{p_1(p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - 2p_0p_2p_3}{p_0(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) + 2p_1p_2p_3}, \\ v_2 &= \frac{p_2(p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 + p_3^2) - 2p_0p_1p_3}{p_0(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) + 2p_1p_2p_3}, \\ v_3 &= \frac{p_3(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) - 2p_0p_1p_2}{p_0(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) + 2p_1p_2p_3}. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, четыре функции (30)–(33) от трех переменных v_α определяют массовую поверхность в параметрической форме. Получим теперь уравнение

массовой поверхности в алгебраической форме, т.е. в форме $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = 1$. Чтобы найти явный вид функции $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3)$, поступим следующим образом. Сначала выпишем четыре соотношения, которые выполняются в силу (30)–(33):

$$\frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}{1 + r_1 + r_2 + r_3} = \frac{ds}{dx_0} \left(\frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 (1 - v_1 + v_2 + v_3) [(1 + v_1)^2 - (v_2 - v_3)^2], \quad (40)$$

$$\frac{p_0 + p_1 - p_2 - p_3}{1 + r_1 - r_2 - r_3} = \frac{ds}{dx_0} \left(\frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 (1 - v_1 - v_2 - v_3) [(1 + v_1)^2 - (v_2 - v_3)^2], \quad (41)$$

$$\frac{p_0 - p_1 + p_2 - p_3}{1 - r_1 + r_2 - r_3} = \frac{ds}{dx_0} \left(\frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 (1 + v_1 + v_2 - v_3) [(1 - v_1)^2 - (v_2 + v_3)^2], \quad (42)$$

$$\frac{p_0 - p_1 - p_2 + p_3}{1 - r_1 - r_2 + r_3} = \frac{ds}{dx_0} \left(\frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 (1 + v_1 - v_2 + v_3) [(1 - v_1)^2 - (v_2 + v_3)^2]. \quad (43)$$

Обратим теперь внимание на структуру выражений, стоящих в правых частях формул (40)–(43). Если принять во внимание структуру общего множителя $(dx_0/ds)(ds_{B-M}/dx_0)^4$, которую демонстрирует формула (34), то легко заметить, что правые части формул (40)–(43) представляют собой произведения различных степеней четырех характерных "скобок" $(1 - v_1 - v_2 - v_3)$, $(1 - v_1 + v_2 + v_3)$, $(1 + v_1 - v_2 + v_3)$ и $(1 + v_1 + v_2 - v_3)$. Это наблюдение наводит на мысль, что функцию $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3)$ следует искать в виде

$$H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}{1 + r_1 + r_2 + r_3} \right)^a \left(\frac{p_0 + p_1 - p_2 - p_3}{1 + r_1 - r_2 - r_3} \right)^b \times \left(\frac{p_0 - p_1 + p_2 - p_3}{1 - r_1 + r_2 - r_3} \right)^c \left(\frac{p_0 - p_1 - p_2 + p_3}{1 - r_1 - r_2 + r_3} \right)^d. \quad (44)$$

Первое из условий, которые необходимо наложить на константы a, b, c, d , вытекает из физического смысла функции $H(p_0, p_1, p_2, p_3)$ и состоит в том, что эта функция должна иметь физическую размерность, совпадающую с размерностью импульса p_i . Поэтому функция (44) должна являться однородной функцией своих аргументов четвертой степени однородности. Данное требование означает, что

$$a + b + c + d = 4. \quad (45)$$

Остальные условия на константы a, b, c, d можно получить, потребовав, чтобы все показатели степени, которые возникнут у четырех характерных "скобок" после подстановки выражений (40)–(43) в (44), оказались бы равными нулю. Именно в этом случае мы получим уравнение массовой поверхности в виде $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = 1$, а поскольку у нас положено $m = c = 1$, то в обычных единицах ему будет соответствовать уравнение $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = (mc)^4$.

Итак, если выполнить намеченную программу, то, в дополнение к уравнению (45), мы придем к следующим четырём уравнениям для определения констант a, b, c, d :

$$b + c + d - (3 - r_1 - r_2 - r_3)(a + b + c + d)/4 = 0, \quad (46)$$

$$a + c + d - (3 - r_1 + r_2 + r_3)(a + b + c + d)/4 = 0, \quad (47)$$

$$a + b + d - (3 + r_1 - r_2 + r_3)(a + b + c + d)/4 = 0, \quad (48)$$

$$a + b + c - (3 + r_1 + r_2 - r_3)(a + b + c + d)/4 = 0. \quad (49)$$

В силу (45), систему пяти уравнений (45)–(49) можно переписать в виде

$$a + b + c + d = 4, \quad (50)$$

$$b + c + d - (3 - r_1 - r_2 - r_3) = 0, \quad (51)$$

$$a + c + d - (3 - r_1 + r_2 + r_3) = 0, \quad (52)$$

$$a + b + d - (3 + r_1 - r_2 + r_3) = 0, \quad (53)$$

$$a + b + c - (3 + r_1 + r_2 - r_3) = 0. \quad (54)$$

Очевидно, что, складывая уравнения (51)–(54), мы приходим к (50). Поэтому (50) не является независимым уравнением и для определения четырех констант a, b, c, d у нас остается четверка независимые уравнения (51)–(54), или соответствующая система

$$b + c + d = (3 - r_1 - r_2 - r_3), \quad (55)$$

$$a + c + d = (3 - r_1 + r_2 + r_3), \quad (56)$$

$$a + b + d = (3 + r_1 - r_2 + r_3), \quad (57)$$

$$a + b + c = (3 + r_1 + r_2 - r_3). \quad (58)$$

Решением этой системы являются следующие константы:

$$a = 1 + r_1 + r_2 + r_3, \quad b = 1 + r_1 - r_2 - r_3,$$

$$c = 1 - r_1 + r_2 - r_3, \quad d = 1 - r_1 - r_2 + r_3.$$

Данный результат означает, что уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном импульсном пространстве имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}{1 + r_1 + r_2 + r_3} \right)^{(1+r_1+r_2+r_3)} \left(\frac{p_0 + p_1 - p_2 - p_3}{1 + r_1 - r_2 - r_3} \right)^{(1+r_1-r_2-r_3)} \\ & \times \left(\frac{p_0 - p_1 + p_2 - p_3}{1 - r_1 + r_2 - r_3} \right)^{(1-r_1+r_2-r_3)} \left(\frac{p_0 - p_1 - p_2 + p_3}{1 - r_1 - r_2 + r_3} \right)^{(1-r_1-r_2+r_3)} = 1. \end{aligned} \quad (59)$$

Рассмотрим, наконец, группу релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства и покажем, что преобразования 4-импульсов, образующие эту группу, оставляют уравнение массовой поверхности (59) инвариантным. Из общих соображений ясно, что преобразования релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства индуцируются соответствующими преобразованиями (18) полностью анизотропного пространства событий (2). Чтобы в явном виде построить линейные преобразования 4-импульсов, представляющие группу релятивистской симметрии, мы будем исходить из определения канонического 4-импульса (29).

Итак, вследствие (29) и (21) справедливы соотношения

$$p'_0 = - \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_0} = D^{-1} (L_{00}^{-1} p_0 - L_{0\beta}^{-1} p_\beta), \quad (60)$$

$$p'_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} = D^{-1} (-L_{\alpha 0}^{-1} p_0 + L_{\alpha\beta}^{-1} p_\beta). \quad (61)$$

Принимая во внимание определение (22) матрицы L_{ik}^{-1} , мы можем оба соотношения (60) и (61) записать в виде одной формулы

$$p'_i = D^{-1} \mathcal{L}_{ik} p_k, \quad (62)$$

где, в силу (19) и (22),

$$D^{-1} = e^{(r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3)}, \quad (63)$$

$$\mathcal{L}_{ik} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} & \tilde{D} \\ \tilde{B} & \tilde{A} & \tilde{D} & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{D} & \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{D} & \tilde{C} & \tilde{B} & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

причем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — групповые параметры, а матричные элементы $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ матрицы $\mathcal{L}_{ik}$ определяются формулами (23)–(26). Таким образом, мы в явном виде (62) построили линейные преобразования 4-импульсов и эти преобразования образуют 3-параметрическую абелеву группу релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства.

Чтобы убедиться, что уравнение массовой поверхности (59) действительно не меняет своего вида, т. е. остается инвариантным при преобразованиях (62), целесообразно сначала выяснить как преобразуются четыре независимые 1-формы, входящие в уравнение (59). Прямое вычисление с помощью (62)–(64) и (23)–(26) приводит к следующему результату:

$$(p'_0 + p'_1 + p'_2 + p'_3) = e^{[(r_1-1)\alpha_1 + (r_2-1)\alpha_2 + (r_3-1)\alpha_3]}(p_0 + p_1 + p_2 + p_3), \quad (65)$$

$$(p'_0 + p'_1 - p'_2 - p'_3) = e^{[(r_1-1)\alpha_1 + (r_2+1)\alpha_2 + (r_3+1)\alpha_3]}(p_0 + p_1 - p_2 - p_3), \quad (66)$$

$$(p'_0 - p'_1 + p'_2 - p'_3) = e^{[(r_1+1)\alpha_1 + (r_2-1)\alpha_2 + (r_3+1)\alpha_3]}(p_0 - p_1 + p_2 - p_3), \quad (67)$$

$$(p'_0 - p'_1 - p'_2 + p'_3) = e^{[(r_1+1)\alpha_1 + (r_2+1)\alpha_2 + (r_3-1)\alpha_3]}(p_0 - p_1 - p_2 + p_3). \quad (68)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, при переходе от 4-импульсов p_i к четырем независимым 1-формам преобразования релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства существенно упрощаются и сводятся лишь к масштабным преобразованиям данных 1-форм. С помощью (65)–(68) уже не представляет труда проверить, что

$$\begin{aligned} & (p'_0 + p'_1 + p'_2 + p'_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)} (p'_0 + p'_1 - p'_2 - p'_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)} \\ & \times (p'_0 - p'_1 + p'_2 - p'_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)} (p'_0 - p'_1 - p'_2 + p'_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)} \\ & = (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)} (p_0 + p_1 - p_2 - p_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)} \\ & \times (p_0 - p_1 + p_2 - p_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)} (p_0 - p_1 - p_2 + p_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)}. \end{aligned}$$

Это равенство и доказывает, что уравнение массовой поверхности (59) остается инвариантным при преобразованиях (62).

Заключение

Лишь вскользь коснувшись релятивистски симметричного финслерова пространства событий с частично нарушенной 3D изотропией, мы основное внимание в данной работе уделили исследованию релятивистски симметричного финслерова пространства с полностью нарушенной 3D изотропией.

Во избежание недоразумений отметим, что обычно под релятивистской симметрией понимается симметрия относительно лоренцевых бустов или, в более широком смысле, симметрия относительно 6-параметрической группы Лоренца. Хотя любой элемент группы Лоренца можно представить как произведение лоренцева буста

и 3D поворота, нетривиальным моментом является то, что множество 3D поворотов составляет 3-параметрическую подгруппу группы Лоренца, а 3-параметрическое множество лоренцевых бустов никакой группы не составляет. Другими словами, в результате последовательного применения двух различных лоренцевых бустов мы переходим в инерциальную систему отсчета, пространственные оси которой оказываются не параллельными осям исходной системы, а повернутыми на некоторый угол. Именно этот эффект, приводящий, в частности, к томасовской прецессии, отражает тот факт, что произведение двух произвольных лоренцевых бустов уже не является чистым лоренцевым бустом. Вместе с тем, достаточно давно известно, что в группе Лоренца существует единственное (с точностью до изоморфизма) 3-параметрическое подмножество некомпактных преобразований, которое, подобно компактному подмножеству 3D вращений, тоже составляет группу. Поскольку в такую 3-параметрическую группу входят только преобразования, связывающие движущиеся инерциальные системы отсчета, то скорее ее, а не всю группу Лоренца, следует рассматривать в качестве группы релятивистской симметрии пространства Минковского. Это тем более оправдано, что при частичном нарушении 3D изотропии вместо пространства Минковского возникает финслерово пространство с группой релятивистской симметрии, которая локально изоморфна 3-параметрической группе релятивистской симметрии пространства Минковского. Что же касается полностью анизотропного финслерова пространства событий, то и для него группа преобразований, связывающих различные физически эквивалентные инерциальные системы отсчета, имеет смысл группы релятивистской симметрии. Однако, как было показано ранее, такая группа является абелевой 3-параметрической группой.

Литература

- [1] Рунд Х., Дифференциальная геометрия финслеровых пространств, М.: Наука, 1981.
- [2] Takano Y., Gravitational field in Finsler spaces, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, V. 10, N 17, 747–750.
- [3] Takano Y., On the theory of fields in Finsler spaces, in Proc. Int. Symp. "Relativity and Unified Field Theory", Calcutta, Bose Insit. Phys. Sci, 1975–1976, 17–26.
- [4] Ikeda S., On the theory of gravitational field in Finsler spaces, *Ann. d. Phys.*, 1987, V. 44, N 8, 558–562.
- [5] Ikeda S., On the theory of the gravitational field nonlocalized by the internal variables, *Nuovo Cimento B*, 1987, V. 98, N 2, 158–164.
- [6] Ikeda S., On the field equations in the theory of the gravitational fields in Finsler spaces, *Tensor N. S.*, 1987, V. 44, 157–163.
- [7] Ikeda S., Theory of fields in Finsler spaces, *Seminarul de mecanica, Univ. din Timisoara, Romania*, 1988, N 8.
- [8] Киржниц Д. А., Чечин В. А., Космические лучи и элементарная длина, *Письма в ЖЭТФ*, 1971, Т. 14, N 4, 261–262.
- [9] Киржниц Д. А., Чечин В. А., Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории, *ЯФ*, 1972, Т. 15, N 5, 1051–1059.
- [10] Greisen K., End to the cosmic-ray spectrum?, *Phys. Rev. Lett.*, 1966, V. 16, N 17, 748–750.
- [11] Зацепин Г. Т., Кузьмин В. А., О верхней границе спектра космических лучей, *Письма в ЖЭТФ*, 1966, Т. 4, N 3, 114–117.
- [12] Богословский Г. Ю., О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени, *ДАН СССР*, 1973, Т. 213, N 5, 1055–1058.

- [13] Bogoslovsky G. Yu., A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, *Nuovo Cimento B*, 1977, V. 40, N 1, 99–134.
- [14] Богословский Г. Ю., Теория локально анизотропного пространства-времени, М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [15] Bogoslovsky G. Yu., From the Weyl theory to a theory of locally anisotropic space-time, *Class. Quantum Grav.*, 1992, V. 9, 569–575.
- [16] Богословский Г. Ю. Финслерова модель пространства-времени, *ЭЧАЯ*, 1993, Т. 24, N 3, 813–877.
- [17] Bogoslovsky G. Yu., A viable model of locally anisotropic space-time and the Finslerian generalization of the relativity theory, *Fortschr. Phys.*, 1994, V. 42, N 2, 143–193.
- [18] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the generalization of the fundamental field equations for locally anisotropic space-time, in Proceedings of XXIV International Workshop “Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory” (27–29 June, 2001, Protvino, Russia), Editor V. A. Petrov, Protvino, Institute for High Energy Physics, 2001, 113–125.
- [19] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation, *Phys. Lett. A*, 2004, V. 323, 40–47.
- [20] Bogoslovsky G. Yu., Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry, hep-th/0511151.
- [21] Bogoslovsky G. Yu., Subgroups of the group of generalized Lorentz transformations and their geometric invariants, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 2005, V. 1, PN 17, 1–9.
- [22] Arbuzov B. A., Muon g-2 anomaly and extra interaction of composite Higgs in a dynamically broken electroweak theory, hep-ph/0110389.
- [23] Арбузов Б. А., Спонтанное возникновение эффективного взаимодействия в ренормируемой модели квантовой теории поля, *ТМФ*, 2004, Т. 140, N 3, 367–387.
- [24] Colladay D., Kostelecký A., CPT violation and the standard model, *Phys. Rev. D*, 1997, V. 55, N 11, 6760–6774.
- [25] Colladay D., Kostelecký A., Lorentz-violating extension of the standard model, *Phys. Rev. D*, 1998, V. 58, 116002.
- [26] CPT and Lorentz symmetry II, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2002.
- [27] CPT and Lorentz symmetry III, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2005.
- [28] Goenner H. F., Bogoslovsky G. Yu., A class of anisotropic (Finsler–) space-time geometries, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1999, V. 31, N 9, 1383–1394.
- [29] Kostelecký A., Gravity, Lorentz violation, and the standard model, *Phys. Rev. D*, 2004, V. 69, 105009.
- [30] Tavakol R., van den Bergh N., Finsler spaces and the underlying geometry of space-time, *Phys. Lett. A*, 1985, V. 112, 23–25.
- [31] Tavakol R., van den Bergh N., Viability criteria for the theories of gravity and Finsler spaces, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1986, V. 18, 849–859.
- [32] Roxburgh I. W., Tavakol R., van den Bergh N., The geometry of space-time and Berwald spaces, *Tensor*, 1992, V. 51, 72–77.
- [33] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, *Phys. Lett. A*, 1998, V. 244, 222–228.
- [34] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И., Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2005, Т. 1, N 3, 3–15.
- [35] Berwald L., Projective Krümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. Math. (2)*, 1947, V. 48, 755–781; und die Literaturhinweise darin.

- [36] Moór A., Ergänzung, *Acta math.*, 1954, V. 91, 187–188.
- [37] Weyl H., Gravitation und Elektrizität, *Sitzber. preuss Akad. Wiss., Physik-math. Kl.*, 1918, 465–480.
- [38] Weyl H., Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Ann. d. Phys.*, 1919, V. 59, N 10, 101–133.
- [39] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1999, V. 31, N 10, 1565–1603.

Статья поступила в редакцию 18.08.2005 г.

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ АССОЦИАТИВНО-КОММУТАТИВНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР И АССОЦИИРОВАННЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ

В. М. Чернов

Институт систем обработки изображений РАН
vche@smr.ru

В работе рассматриваются алгебраические уравнения, которым удовлетворяют элементы ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр. Исследована связь этих уравнений автоморфизмами алгебр. Вычислены однородные формы компонент элементов алгебр, являющиеся коэффициентами определяющих уравнений и которые могут быть ассоциированы, в частности, с известными метриками Минковского и Бервальда-Моора.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Эффективность использования теории и аппарата конечномерных алгебр (см., например, [1], [2]) при решении задач геометрии, физики, информатики определяется, по мнению автора, следующим основным фактором.

Наиболее широкое распространение в приложениях получили *композиционные алгебры*, то есть алгебры с единицей, на векторных пространствах которых определены невырожденные квадратичные формы $N(x)$ (*нормы*) с условием $N(xy) = N(x)N(y)$. Рекурсивный метод их построения и классификация над различными полями связана с существованием в алгебрах, получаемых на каждом шаге рекурсии (анти)автоморфизма $x \mapsto \bar{x}$ второго порядка, продолжаемого рекурсивно для последующих шагов построения и порождающих указанные выше формы $N(x)$. За желание иметь алгебры, отличные от R и C , но с аналогами вещественной или комплексной нормы, приходится расплачиваться некоммутативностью и/или неассоциативностью таких алгебр. Кроме того, рекурсивный процесс Кэли-Диксона построения композиционных алгебр уже на третьем шаге приводит к неассоциативности и не может быть продолжен дальше [3]. Тем не менее, например, некоммутативная четырехмерная алгебра кватернионов успешно используется при решении задач механики, машинного зрения, в физике. Это связано как и с наличием нормы, так и, например, с элегантным представлением ортогональных преобразований трехмерного пространства не на "внешнем" матричном языке, а в терминах внутренних операций алгебры кватернионов, то есть "бескоординатно". Автор полностью согласен с мнением Э. Артина, что "...преподавание математики все еще страдает от энтузиазма, вызванного открытием этого изоморфизма (сопоставляющего линейному преобразованию векторного пространства некоторую матрицу – В.Ч.). Следствием было то, что геометрия фактически исключалась и заменялась вычислениями. Вместо наглядных отображений пространства, сохраняющих сложение векторов и умножение их на скаляры $\langle \dots \rangle$, в рассмотрение вводились матрицы. Мой опыт показывает, что доказательства, включающие в себя матрицы, могут быть сокращены на 50%,

если выбросить матрицы¹ [4]. Так, например, представление элемента четырехмерной алгебры, изоморфной алгебре (2×2) -матриц $M_2(R)$ в "клиффордовом" базисе с правилом умножения базисных элементов в форме

$$\begin{aligned} e_0^2 &= e_0, \quad e_1^2 = e_0, \quad e_2^2 = e_0, \quad e_3^2 = -e_0; \\ e_1e_2 &= -e_2e_1, \quad e_1e_3 = -e_3e_1, \quad e_2e_3 = -e_3e_2; \quad e_1e_2 = e_3, \end{aligned}$$

и инволютивным отображением (т. н. *симплектическая инволюция*)

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \bar{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

естественным вложением $R \rightarrow M_2(R)$ с $y \mapsto ye_0$, $y \in R$, позволяет записать определяющее квадратное уравнение для элемента X с коэффициентами, выраженными в бескоординатной форме в терминах нормы $N(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и следа $Tr(X) = X + \bar{X} = a + d$:

$$X^2 - Tr(X)e_0X + N(X)e_0 = 0, \quad (1.1)$$

то есть, фактически, в форме частного (двумерного) случая теоремы Гамильтона-Кэли. Отсюда при надлежащей интерпретации следует, что все результаты "линейной" геометрии двумерной плоскости могут быть получены как следствия алгебраических свойств четырехмерной алгебры $M_2(R)$. Наиболее наглядным примером такой интерпретации является "хестеновский" формализм для алгебр Клиффорда, в котором за счет переопределения операций строится изоморфная алгебра, элементы которой могут быть интерпретированы как скаляры, векторы, бивекторы и т. д. (т. н. "геометрическая алгебра").

В такой алгебре указанные объекты ведут себя "равноправным" образом по отношению к введенным операциям, несмотря на то, что при канонических интерпретациях линейных геометрических объектов эти объекты принадлежат разным множествам с различными структурами [5]. Тем не менее, "клиффордов" подход к геометрии все же принципиальным образом связан с анализом симметрий, ассоциированных с автоморфизмами (или антиавтоморфизмами) *только второго порядка* (т. е., инволюциями).

В отличие от композиционных алгебр, ассоциативно-коммутативные конечномерные алгебры уже не являются все квадратичными алгебрами над полем R . Поэтому алгебраические уравнения для их элементов естественным образом ассоциированы с автоморфизмами более высоких порядков, что дает основание предполагать возможность анализа свойств геометрических интерпретаций этих алгебр, выражаемых в терминах группы "симметрий" более высокого порядка, чем второй.

Первым шагом к реализации отмеченного выше комплекса идей и пониманию роли автоморфизмов высокого порядка при создании геометро-физических моделей пространства-времени является, по мнению автора, определение инвариантных характеристик уравнений, которым удовлетворяют элементы ассоциативно-коммутативных алгебр. То есть, определение аналогов форм $N(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и $Tr(X) = X + \bar{X} = a + d$ соотношения (1.1). Настоящая работа и представляет собой указанный первый шаг.

¹Далее, правда, Э. Артин не без юмора замечает: "Иногда это невозможно; бывает, например, что нужно вычислить определитель".

Как ни парадоксально, но идея использования дополнительных (или переопределенных) операций на той или иной конечномерной алгебре, ассоциированных с автоморфизмами порядка выше второго, с целью алгебраической поддержки решения геометрических задач имеет почтенную историю. Существует достаточно экзотическая и малоизвестная алгебраическая структура, известная как "конечные почти-поля Цассенхауза" [6]. Именно, в поле F_q , $q = p^m$, (p – простое) вводится операция $x * y = y \cdot \eta(x)$, ($x, y \in F_q$), выражающаяся через операцию умножения в поле F_q по закону $x * y = y \cdot \eta(x)$, где η – автоморфизм Фробениуса специального вида. Эта операция некоммутативна и неассоциативна (последнее – в силу теоремы Веддербёрна). Тем не менее, некоторая $(*)$ -степень $((((x * x) * x) * \dots) * x)$ элемента x есть элемент простого поля F_p и может рассматриваться как специфическая "норма" элемента алгебры F_q над полем F_p , порождаемая некоторым "полилинейным скалярным произведением". В соответствующей интерпретации, авторские результаты, цитированные в [6] и касающиеся конечных геометрий, могут быть переформулированы и передоказаны в терминах "полилинейного скалярного произведения". Естественно, что конечность полей F_q , следовательно, и почти-полей Цассенхауза, ограничивает круг задач, решаемых с применением такой техники, исключительно конфигурационными задачами конечной геометрии. Идея рассмотрения "полилинейных", в отличие от классических "билинейных", скалярных произведений в ассоциативно-коммутативных алгебрах с целью создания адекватных геометро-физических моделей принадлежит, по всей видимости, Д. Г. Павлову [7].

Отметим несколько результатов работы, которые, по мнению автора, не лишены некоторой методологической значимости.

1. Следствие 2.1. Инвариантность коэффициентов определяющего многочлена $\Phi(\xi; w)$ для w относительно действия 24-элементной группы автоморфизмов S_4 . То есть, многочлен четвертой степени $\Phi(\xi; w)$ наряду с корнем w имеет своими корнями все его автоморфные образы этого корня относительно автоморфизмов $\sigma \in S_4$.

2. Следствие 2.2. Четыре автоморфизма, использованные в доказательстве Теоремы 2.1 для построения определяющего многочлена, образуют подгруппу группы S_4 , изоморфную циклической группе C_4 четвертого порядка. Однако, тот же самый многочлен порождают другие четыре автоморфизма образующие подгруппу четвертого порядка группы S_4 , но изоморфную другой группе – прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка.

3. Следствие 2.3. Более того, тот же самый определяющий многочлен могут порождать четыре автоморфизма, не образующие группу относительно операции композиции отображений. Это позволяет сделать осторожное предположение, что требование групповой структуры порождающих автоморфизмов не является обязательным.

О терминологии. Автор сознательно дистанцируется от возможности какой-либо геометрической или физической интерпретации полученных результатов, оставляя эту работу профильным специалистам. Именно поэтому в работе используется "нейтральная" по отношению к интерпретации терминология: "определяющее уравнение", "определяющие формы", хотя, например, в таких "определяющих" формах, полученных в результате анализа *алгебраических* структурных свойств соответствующих алгебр, легко узнаются *метрические* формы типа Минковского или Бервальда-Моора (см., например, равенства (2.6)).

Обозначения. Без специальных оговорок в работе используются обозначения R, C для обозначения полей вещественных и комплексных чисел, соответственно. Для обозначения прямой суммы алгебр используется символ $\dot{+}$, а символ $\oplus$ использует-

ся обозначения для поразрядного сложения ($\text{mod } 2$) битового представления целых чисел. Символом $H(k)$ обозначается прямая сумма k экземпляров поля R иногда с некоторыми контекстными оговорками

1.2. Теорема Вейерштрасса

Исчерпывающая классификация ассоциативно-коммутативных алгебр без нильпотентных элементов содержится в *теореме Вейерштрасса* [8]:

Теорема 1.1. Любая ассоциативно-коммутативная конечномерная алгебра без нильпотентных элементов над R изоморфна прямой сумме алгебр R и C .

Из этой теоремы легко следует, что существует не более трех неизоморфных четырехмерных алгебр этого класса, а именно:

$$R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R \cong (R \dot{+} R) \dot{+} (R \dot{+} R) \cong H(2) \dot{+} H(2) \cong H(4), \quad (1.2)$$

$$R \dot{+} R \dot{+} C \cong H(2) \dot{+} C, \quad (1.3)$$

$$C \dot{+} C. \quad (1.4)$$

Докажем неизоморфность этих трех алгебр. Выберем в каждой из алгебр базис, согласованный с ее представлением в виде прямой суммы:

- для алгебры $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.1.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	0	0	0
E_2	0	E_2	0	0
E_3	0	0	E_3	0
E_4	0	0	0	E_4

- для алгебры $R \dot{+} R \dot{+} C$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.2.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	0	0	0
E_2	0	E_2	0	0
E_3	0	0	E_3	E_4
E_4	0	0	E_4	$-E_3$

- для алгебры $C \dot{+} C$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.3.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	0	0
E_2	E_2	$-E_1$	0	0
E_3	0	0	E_3	E_4
E_4	0	0	E_4	$-E_3$

С учетом приведенных таблиц Кэли легко заметить, что умножение "постоянного" элемента $(aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4)$ на "переменный" элемент $(tE_1 + xE_2 + yE_3 + zE_4)$ равносильно действию линейных операторов на векторы компонент элементов $(tE_1 + xE_2 + yE_3 + zE_4)$, то есть вычислению матричных произведений

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

для алгебр $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$, $R \dot{+} R \dot{+} C$ или $C \dot{+} C$, соответственно. Ни одна из (4×4) -матриц в (1.5) не может быть представлена как матрица, соответствующая умножению в другой алгебре с базисом, полученным линейным преобразованием. Действительно, характеристические уравнения для матриц (1.5), являясь инвариантами относительно линейных преобразований базисов, соответствуют различным случаям корней многочленов четвертой степени: четырем вещественным, двум вещественным и паре комплексно сопряженных и двум парам комплексно сопряженных корней, соответственно.

2. Алгебра $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R \cong H(4)$, ее автоморфизмы и метрические формы

2.1. Случай "изотропного" базиса

Рассмотрим алгебру $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R \cong H(2) \dot{+} H(2) \cong H(4)$ с введенным выше базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.1. (Такой базис мы далее будем называть *изотропным*).

Мультипликативно нейтральным элементом (единицей алгебры) в этом базисе является элемент $I = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, а поле R канонически вкладывается в алгебру $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$:

$$R \rightarrow R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R \cong H(4), \quad x \mapsto xI, \quad x \in R.$$

Теорема 2.1. Алгебра $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$ является алгеброй четвертой степени над R , то есть, любой элемент $w \in R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$ удовлетворяет алгебраическому уравнению степени не выше четвертой с вещественными коэффициентами.

Доказательство. Пусть $w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \leftrightarrow (a, b, c, d)$. Рассмотрим четыре отображения алгебры $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$ в себя, являющихся, очевидно, автоморфизмами:

$$\begin{aligned} \tau_0 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4, \\ \tau_1 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto bE_1 + cE_2 + dE_3 + aE_4, \\ \tau_2 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto cE_1 + dE_2 + aE_3 + bE_4, \\ \tau_3 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto dE_1 + aE_2 + bE_3 + cE_4. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Другими словами, отображения переставляют циклическим образом компоненты (a, b, c, d) элемента w алгебры. Нетрудно показать, что элемент w является корнем многочлена

$$\Phi(\xi; w) = (\xi - \tau_0(w))(\xi - \tau_1(w))(\xi - \tau_2(w))(\xi - \tau_3(w)), \quad (2.2)$$

а также то, что коэффициенты полинома $\Phi(\xi; w)$ вещественные. Действительно, непосредственным вычислением получаем:

$$\Phi(\xi; w) = \xi^4 - s_1(w) I \xi^3 + s_2(w) I \xi^2 - s_3(w) I \xi^1 + s_4(w) I, \quad (2.3)$$

где вещественные коэффициенты $s_\nu(w)$ являются однородными симметричными формами компонент (a, b, c, d) элемента w алгебры:

$$\begin{aligned} s_1(w) &= a + b + c + d, \\ s_2(w) &= ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ s_3(w) &= bcd + acd + abd + abc, \\ s_4(w) &= abcd. \quad \square \end{aligned} \quad (2.4)$$

Определение 2.1. Многочлен $\Phi(\xi; w)$ минимальной степени с вещественными коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени ξ , равным единице, такой что $\Phi(\xi; w)|_{\xi=w} = 0$ будем называть *определяющим многочленом элемента w* , а его коэффициенты – *определяющими формами*.

Ясно, что один и тот же элемент w , представленный в разных базисах алгебры может иметь определяющие формы, различающиеся как функции этих компонент. В частности, формы (2.4) записаны как функции компонент элемента w , представленного в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.1 и т. д.

Несмотря на тривиальность результата Теоремы 2.1, она имеет важные следствия, нехарактерные для "классической" теории многочленов над полем.

Следствие 2.1. Формы (2.4) инвариантны относительно любой перестановки $\sigma \in S_4$ четырех компонент (a, b, c, d) элемента w алгебры. Следовательно, так как $\sigma \in S_4$ является автоморфизмом алгебры $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$ над R , то из равенства $\Phi(\xi; w) = 0$ следует

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma \left(\Phi(\xi; w)|_{\xi=w} \right) = \\ &= \sigma(w)^4 - \sigma(s_1(w)) I \sigma(w)^3 + \sigma(s_2(w)) I \sigma(w)^2 - \sigma(s_3(w)) I \sigma(w)^1 + \sigma(s_4(w)) I = \\ &= \sigma(w)^4 - s_1(\sigma(w)) I \sigma(w)^3 + s_2(\sigma(w)) I \sigma(w)^2 - s_3(\sigma(w)) I \sigma(w)^1 + s_4(\sigma(w)) I = \\ &= \Phi(\xi; \sigma(w)|_{\xi=\sigma(w)}) = 0 \end{aligned}$$

То есть, многочлен *четвертой* степени $\Phi(\xi; w)$ наряду с корнем w имеет своими корнями еще, по крайней мере, 23 корня $\sigma(w)$, $\sigma \in S_4$, то есть, *все* его автоморфные образы относительно автоморфизмов $\sigma \in S_4$. Заметим, что применение автоморфизма σ к обеим частям равенства нулю определяющего многочлена $0 = \sigma(\Phi(\xi; w)|_{\xi=w})$ в форме (2.2) с целью получения соотношения $\Phi(\xi; \sigma(w)|_{\xi=\sigma(w)}) = 0$ посредством цепочки равенств

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(\Phi(w; w)) = \\ &= (\sigma(w) - (\sigma \circ \tau_0)(w)) (\sigma(w) - (\sigma \circ \tau_1)(w)) (\sigma(w) - (\sigma \circ \tau_2)(w)) (\sigma(w) - (\sigma \circ \tau_3)(w)) = \\ &= (\sigma(w) - \tau_0(\sigma(w))) (\sigma(w) - \tau_1(\sigma(w))) (\sigma(w) - \tau_2(\sigma(w))) (\sigma(w) - \tau_3(\sigma(w))) = \\ &= \Phi(\sigma(w); \sigma(w)) \end{aligned}$$

не является корректным в силу некоммутативности группы автоморфизмов S_4 . Существенным является факт вещественности форм $s_1(w), s_2(w), s_3(w), s_4(w)$, обеспеченный специальным выбором автоморфизмов $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$.

Следствие 2.2. Четыре автоморфизма $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, использованные в доказательстве Теоремы 2.1, образуют подгруппу группы S_4 , изоморфную циклической группе C_4 четвертого порядка. Однако, как легко убедиться непосредственно, *тот же самый* многочлен (2.3) порождают *другие* четыре автоморфизма $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$:

$$\lambda_0 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4,$$

$$\lambda_1 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto cE_1 + dE_2 + aE_3 + bE_4,$$

$$\lambda_2 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto bE_1 + aE_2 + dE_3 + cE_4,$$

$$\lambda_3 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto dE_1 + cE_2 + bE_3 + aE_4,$$

образующие подгруппу четвертого порядка группы S_4 , но изоморфную *другой* группе – прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка.

Следствие 2.3. Более того, *тот же самый* многочлен (2.3) порождают другие четыре автоморфизма $\{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$:

$$\nu_0 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto dE_1 + aE_2 + bE_3 + cE_4,$$

$$\nu_1 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto bE_1 + cE_2 + dE_3 + aE_4,$$

$$\nu_2 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto cE_1 + bE_2 + aE_3 + dE_4,$$

$$\nu_3 : w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto aE_1 + dE_2 + cE_3 + bE_4,$$

не образующие группу относительно операции композиции отображений.

2.2. Случай "гиперболического" базиса

Под *базисом из гиперболических единиц* (или, для краткости, под *гиперболическим базисом*) мы далее будем понимать базис $\{E, I, J, K\}$ алгебры $H(4) \cong R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$ с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 2.1.

	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	E	K	J
J	J	K	E	I
K	K	J	I	E

Элемент $w \in H(4)$ представляется в форме $w = tE + xI + yJ + zK$ ($t, x, y, z \in R$), E – мультипликативно нейтральный элемент (единица) алгебры. Связь между изотропным базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и гиперболическим базисом $\{E, I, J, K\}$ осуществляется посредством линейного преобразования с ортогональной матрицей Адамара

$$had_4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

где $\otimes$ – знак кронекеровского произведения. Получение точных формул, связывающих компоненты элемента $w \in H(4)$ при представлении в этих двух базисах, является хрестоматийным упражнением по линейной алгебре. Автор счел возможным опустить рутинные выкладки.

Совершенно очевидно, что каждому автоморфизму, определяемому действием элемента группы S_4 , то есть, переставляющему компоненты элемента $w \in H(4)$, представленного в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, соответствует линейное преобразование компонент t, x, y, z элемента $w = tE + xI + yJ + zK$, и также реализующее некоторый автоморфизм алгебры $H(4)$. В частности, такими автоморфизмами являются:

$$\begin{aligned}\mu_0 : \quad w &\mapsto \mu_0(w) = tE + xI + yJ + zK, \\ \mu_1 : \quad w &\mapsto \mu_1(w) = tE + xI - yJ - zK, \\ \mu_2 : \quad w &\mapsto \mu_2(w) = tE - xI + yJ - zK, \\ \mu_3 : \quad w &\mapsto \mu_3(w) = tE - xI - yJ + zK.\end{aligned}\tag{2.5}$$

При представлении элемента $w \in H(4)$ в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ этой четверке преобразований соответствует действие на компоненты элемента некоторой подгруппы четвертого порядка (изоморфной прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка) группы S_4 .

Записывая в этом случае определяющий многочлен, непосредственным вычислением получаем:

$$\begin{aligned}\Phi(\xi; w) &= (\xi - \mu_0(w))(\xi - \mu_1(w))(\xi - \mu_2(w))(\xi - \mu_3(w)) = \\ &= (\xi^4 - S_1(w)\xi^3 + S_2(w)\xi^2 - S_3(w)\xi^1 + S_4(w))E,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}S_1(\omega) &= 4t \\ S_2(\omega) &= 6t^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 \\ S_3(\omega) &= -4tx^2 - 4y^2t - 4z^2t + 4t^3 + 8yzx = 4t(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 8yzx \\ S_4(\omega) &= x^4 + y^4 + z^4 - 2t^2x^2 - 2t^2y^2 - 2t^2z^2 + t^4 + 8txyz - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2\end{aligned}\tag{2.6}$$

Замечание 2.1. Необходимо отметить, что факты, приведенные в Следствиях 2.1. – 2.3. остаются, разумеется, справедливыми и в базисе $\{E, I, J, K\}$, но с соответствующей интерпретацией представлений автоморфизмов.

2.3. Случай "смешанного" базиса

Под *смешанным базисом* мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$ алгебры $H(4) \cong R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой суммы $H(2) \dot{+} H(2) \cong H(4)$ двух двумерных алгебр двойных чисел с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 2.2.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	B	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	D

При выборе такого базиса элемент $w \in H(2) \dot{+} H(2) \cong H(4)$ можно считать представленным в форме $w = (t + xA)B + (y + zC)D$, а мультипликативно нейтральным элементом алгебры $H(2) \dot{+} H(2)$ является $I = B + D$.

Выбирая четверку автоморфизмов

$$\begin{aligned}\zeta_0 : w &\rightarrow \zeta_0(w) = (t + xA)B + (y + zC)D, \\ \zeta_1 : w &\rightarrow \zeta_1(w) = (y + zA)B + (t + xC)D, \\ \zeta_2 : w &\rightarrow \zeta_2(w) = (y - zC)B + (t - xC)D, \\ \zeta_3 : w &\rightarrow \zeta_3(w) = (t - xC)B + (y - zC)D,\end{aligned}\tag{2.7}$$

получаем определяющий многочлен $\Phi(\xi; w)$ в форме

$$\Phi(\xi; w) = \xi^4 - \Sigma_1(w)I\xi^3 + \Sigma_2(w)I\xi^2 - \Sigma_3(w)I\xi^1 + \Sigma_4(w)I,$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_1(w) &= 2(t + y) \\ \Sigma_2(w) &= 4ty + t^2 + y^2 - x^2 - z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 - x^2 - z^2, \\ \Sigma_3(w) &= 2ty^2 + 2t^2y - 2tz^2 - 2x^2y, \\ \Sigma_4(w) &= t^2y^2 - t^2z^2 - x^2y^2 + x^2z^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Подробное рассмотрение в работе различных представлений определяющих многочленов и форм, ассоциированных с разными базисами, именно для алгебры $H(4)$ обуславливается разнообразием изоморфных представлений этой алгебры

$$R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R \cong H(2) \dot{+} H(2) \cong H(4)$$

и наличием 24-элементной группы ее автоморфизмов над R , изоморфной S_4 . Для алгебры $C \dot{+} C$ и, в особенности, алгебры $H_2 \dot{+} C$ эти группы автоморфизмов над R более бедные, что требует более существенных ограничений произвола выбора четверки автоморфизмов и базисов в этих алгебрах для получения определяющего многочлена с действительными коэффициентами.

3. Алгебра $C \dot{+} C$

Под базисом из эллиптически-гиперболических единиц (или, для краткости, под ЭГ-базисом) мы далее будем понимать базис $\{E, I, J, K\}$ алгебры $C \dot{+} C$ с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 3.1.

	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	J
J	J	K	$-E$	I
K	K	J	I	$-E$

Элемент $w \in C \dot{+} C$ представляется в форме $w = tE + xI + yJ + zK$ ($t, x, y, z \in R$), E – мультипликативно нейтральный элемент (единица) алгебры.

Под смешанным базисом в алгебре $C \dot{+} C$ мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой

суммы двух двумерных алгебр комплексных чисел с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 3.2.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	$-B$	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	$-D$

Элемент $w \in C \dot{+} C$ представляется в форме $w = (t + xA) B + (y + zC) D$, мультипликативно нейтральным элементом алгебры $C \dot{+} C$ является $I = B + D$.

Выбирая, в случае ЭГ-базиса четверку автоморфизмов в виде

$$\begin{aligned}
 \mu_0 : \quad w &\mapsto \mu_0(w) = tE + xI + yJ + zK, \\
 \mu_1 : \quad w &\mapsto \mu_1(w) = tE + xI - yJ - zK, \\
 \mu_2 : \quad w &\mapsto \mu_2(w) = tE - xI + yJ - zK, \\
 \mu_3 : \quad w &\mapsto \mu_3(w) = tE - xI - yJ + zK.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

а в случае смешанного базиса в виде

$$\begin{aligned}
 \zeta_0 : w &\rightarrow \zeta_0(w) = (t + xA) B + (y + zC) D, \\
 \zeta_1 : w &\rightarrow \zeta_1(w) = (y + zA) B + (t + xC) D, \\
 \zeta_2 : w &\rightarrow \zeta_2(w) = (y - zC) B + (t - xC) D, \\
 \zeta_3 : w &\rightarrow \zeta_3(w) = (t - xC) B + (y - zC) D,
 \end{aligned}$$

получаем определяющие формы

$$\begin{aligned}
 S_1(\omega) &= 4t, \\
 S_2(\omega) &= 6t^2 + 2x^2 - 2y^2 + 2z^2, \\
 S_3(\omega) &= +4tx^2 - 4y^2t + 4z^2t + 4t^3 + 8yzx = 4t(t^2 + x^2 - y^2 + z^2) + 8yzx, \\
 S_4(\omega) &= x^4 + y^4 + z^4 + 2t^2x^2 - 2t^2y^2 + 2t^2z^2 + t^4 - 8txyz + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

и

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1(w) &= 2(t + y), \\
 \Sigma_2(w) &= 4ty + t^2 + y^2 + x^2 + z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 + x^2 + z^2, \\
 \Sigma_3(w) &= 2ty^2 + 2t^2y + 2tz^2 + 2x^2y, \\
 \Sigma_4(w) &= t^2y^2 + t^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

соответственно. Заметим, что формы (3.3) получаются из форм (2.8), а формы (3.2) из форм (2.6) формальной заменой $x \mapsto ix$, $z \mapsto iz$.

4. Алгебра $H_2 \dot{+} C$

Под *смешанным базисом* в алгебре $H_2 \dot{+} C$ мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой суммы двух двумерных алгебр (алгебры двойных и алгебры комплексных чисел) с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 4.1.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	B	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	$-D$

Как и в предыдущих разделах, элемент $w \in H_2 \dot{+} C$ представляется в форме $w = (t + xA)B + (y + zC)D$, мультипликативно нейтральным элементом алгебры $H_2 \dot{+} C$ является $I = B + D$. Однако, в отличие от алгебр $C \dot{+} C$ и $H(2) \dot{+} H(2) \cong H(4)$, прямые слагаемые алгебры $H_2 \dot{+} C$ уже не обладают явно выраженной симметрией над полем R . Не останавливаясь на подробном обосновании правомочности "комплексной" замены переменной, заметим, что в этом случае характеристические формы получаются из форм (2.8) формальной заменой $x \mapsto ix$ и могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1(w) &= 2(t + z), \\
 \Sigma_2(w) &= 4ty + t^2 + y^2 + x^2 - z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 - x^2 + z^2, \\
 \Sigma_3(w) &= 2ty^2 + 2t^2y + 2tz^2 - 2x^2y, \\
 \Sigma_4(w) &= t^2y^2 + t^2z^2 - x^2y^2 - x^2z^2 = (t^2 - x^2)(y^2 + z^2).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

5. Некоторые обобщения на случай алгебр высших размерностей

Рассмотренный в работе подход к метрическим структурам на конечномерных ассоциативно коммутативных алгебрах был бы недостаточно общим, если бы автор не попытался перенести его на алгебры размерностей выше четвертой.

Разумеется, теорема Вейерштрасса остается справедливой в любых размерностях, однако количество неизоморфных алгебр растет с увеличением размерности, что затрудняет подробный анализ всевозможных метрических структур, порожденных коэффициентами определяющих уравнений для элементов этих алгебр. Тем не менее, мы остановимся на относительно подробном анализе структуры группы автоморфизмов, порождающих определяющие многочлены, для одного класса алгебр, получаемых рекурсивным применением процедуры удвоения размерности Грассмана-Клиффорда [9]–[11].

5.1. Процедура удвоения размерности Грассмана-Клиффорда

Рассмотрим алгебру A_1 над полем R . Пусть:

$$z_1 = z_0 + z'_0 \varepsilon_1 \in A_1, \tag{5.1}$$

где

$$\varepsilon_1^2 = \beta_1, \quad z_0, z'_0, \beta_1 \in R.$$

Процедура удвоения Грассмана-Клиффорда состоит в последовательном выполнении следующих шагов.

Шаг 1. Умножение элементов $z_1 = a_0 + b_0 \varepsilon_1$, $z'_1 = a'_0 + b'_0 \varepsilon_1 \in A_1$ определим следующим образом:

$$z_1 z'_1 = (a_0 a'_0 + \beta_1 b_0 b'_0) + (a'_0 b_0 + a_0 b'_0) \varepsilon_1. \quad (5.2)$$

В зависимости от значения параметра β_1 получаются двумерные алгебры комплексных, двойных или дуальных чисел.

Шаг 2. На втором шаге рассмотрим алгебру A_2 :

$$z = z_1 + z'_1 \varepsilon_2 \in A_2,$$

где

$$\varepsilon_2^2 = \beta_2, \quad \beta_2 \in R, \quad z_1, z'_1 \in A_1,$$

с законом умножения базисных элементов в форме:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \alpha_{12} \varepsilon_2 \varepsilon_1, \quad \alpha_{12} \in R.$$

Произведение $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ понимается как базисный элемент алгебры большей размерности.

Шаг 3. Продолжая индуктивно описанную процедуру, на n -м шаге получим алгебру A_n с элементами вида

$$z_n = z_{n-1} + z'_{n-1} \varepsilon_n \in A_n,$$

где z_{n-1} , z'_{n-1} — элементы алгебры, построенной на $(n-1)$ -м шаге, а ε_n — новый образующий элемент. Очевидно, что типичный элемент z_n новой алгебры A_n имеет вид

$$z_n = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \\ \alpha_j \in \{0, 1\}}} C_{\alpha_1 \dots \alpha_d} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_d^{\alpha_d}, \quad (5.3)$$

где $C_{\alpha_1 \dots \alpha_d} \in R$.

Приведенный процесс построения охватывает значительное число алгебр, используемых в прикладных задачах и в физике для построения математических моделей. Отметим некоторые из них в качестве примеров [9]:

- алгебра Клиффорда размерности 2^n при $\varepsilon_s^2 = \pm 1$, $\varepsilon_s \varepsilon_l = -\varepsilon_l \varepsilon_s$, $1 \leq s, l \leq n$;
- алгебра Грассмана размерности 2^n при $\varepsilon_s^2 = 0$, $\varepsilon_s \varepsilon_l = -\varepsilon_l \varepsilon_s$, $1 \leq s, l \leq n$;
- алгебра Паули $n = 3$ при $\beta_s = 1$, $\alpha_{ls} = -1$;
- алгебра Дирака $n = 4$ при $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = -1$, $\alpha_{ls} = -1$;
- алгебра Калуцы $n = 4$ при $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_4 = -1$, $\alpha_{ls} = -1$.

5.2. Классификация алгебр размерности 2^d , полученных методом Грассмана-Клиффорда

Рассмотренные выше алгебры $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R \cong H_R(4)$ и $C \dot{+} C \cong H_C(2)$ получались на втором шаге процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда. Заметим, что алгебра $R \dot{+} R \dot{+} C \cong H_R(2) \dot{+} C$ не получается с помощью этой процедуры. Оказывается, такое положение дел имеет место для любой размерности 2^d алгебр, полученных методом Грассмана-Клиффорда: существует ровно две "грассмано-клиффордовых" R -алгебры, хотя согласно теореме Вейерштрасса коммутативно-ассоциативных алгебр данной размерности существенно больше. Докажем классификационную теорему для "грассмано-клиффордовых" R -алгебр.

Пусть V есть d -мерное пространство над R с базисом $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d$.

Определение 5.1. Коммутативно-ассоциативной гиперкомплексной алгеброй B_d будем называть 2^d -мерную R -алгебру с базисом:

$$\Lambda = \left\{ \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \{0, 1\}; I = \{1, \dots, d\} \right\}, \quad (5.4)$$

где $\varepsilon_i^0 = 1$, $\varepsilon_i^1 = \varepsilon_i$, и законом умножения базисных элементов алгебры, индуцированным следующим правилом преобразования произведений базисных элементов пространства V :

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = \beta_i, \quad i, j \in I. \quad (5.5)$$

Алгебры B_d могут быть получены применением процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда. Действительно, связывая с двоичными наборами индексов $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ соответствующие целые числа

$$t = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \dots + \alpha_d 2^{d-1}, \quad \alpha_j \in \{0, 1\}, \quad (5.6)$$

где $t \in T = \{0, 1, \dots, 2^d - 1\}$, можем занумеровать элементы множества Λ :

$$E_t = \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_d^{\alpha_d}. \quad (5.7)$$

Тогда произвольный элемент $g \in B_d$ может быть представлен в форме

$$g = \xi_0 E_0 + \dots + \xi_{2^d-1} E_{2^d-1} = \sum_{t \in T} \xi_t E_t. \quad (5.8)$$

Операция сложения в алгебре B_d реализуется покомпонентно. Пусть

$$g = \sum_{t \in T} \xi_t E_t, \quad h = \sum_{t \in T} \eta_t E_t, \quad g, h \in B_d, \quad (5.9)$$

тогда

$$(g + h) = \sum_{t \in T} (\xi_t + \eta_t) E_t. \quad (5.10)$$

Операция умножения элементов B_d , представленных в виде (5.8), определяется правилами (5.5) для умножения базисных элементов пространства V , как элементов алгебры.

Следующая лемма позволяет указать явную связь между нумерацией (5.6) сомножителей и нумерацией произведений (5.4).

Лемма 5.1. Пусть $\oplus$ – поразрядное сложение по модулю 2:

$$\oplus : T \times T \rightarrow T, \quad t \oplus \tau = \sum_{i \in I} \left((\alpha_i + \alpha'_i) \bmod 2 \right) 2^{i-1}, \quad (5.11)$$

где

$$t = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad \tau = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d); \quad t, \tau \in T; \quad \alpha_i, \alpha'_i = 0, 1; \quad i \in I. \quad (5.12)$$

Пусть функция $h_i : T \times T \rightarrow \{0, 1\}$ определена равенством

$$h_i(t, \tau) = \alpha_i \alpha'_i, \quad i \in I, \quad (5.13)$$

а функция $\Psi : T \times T \rightarrow \{-1, 1\}$ равенством

$$\Psi(t, \tau) = \prod_{i \in I} \beta_i^{h_i(t, \tau)}, \quad \beta_i = \{-1, 1\}. \quad (5.14)$$

Тогда правила умножения базисных элементов Λ можно записать в форме:

$$E_t E_\tau = \Psi(t, \tau) E_{t \oplus \tau}, \quad \forall t, \tau \in T. \quad (5.15)$$

Доказательство. Пусть, согласно (5.7)

$$E_t = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i}, \quad E_\tau = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha'_i},$$

тогда

$$E_t \cdot E_\tau = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i + \alpha'_i \pm 2h_i(\alpha_i, \alpha'_i)}.$$

Учитывая, что $\alpha_i + \alpha'_i - 2h_i(\alpha_i, \alpha'_i) \equiv \alpha_i + \alpha'_i \pmod{2}$, получаем

$$\prod_{i \in I} \varepsilon_i^{2 \cdot h_i(\alpha_i, \alpha'_i)} E_{t \oplus \tau} = \Psi(t, \tau) E_{t \oplus \tau}. \quad \square$$

Из Определения 5.1. непосредственно не следует единственность алгебры B_d с базисом Λ и умножением, определенным соотношением (5.5). Классификация алгебр, введенных этим определением, приводится в Теореме 5.1. Доказательству теоремы предположим лемму.

Лемма 5.2. Если для некоторого индекса $l \in I$ в (5.5) справедливо равенство $\beta_l = -1$, то

$$\sum_{t \in T} E_t^2 = 0. \quad (5.16)$$

Доказательство. Разобьем сумму в левой части доказываемого равенства (5.16) на две суммы таким образом, что в одну сумму будут входить базисные элементы, содержащие ε_l^2 , а в другую – не содержащие ε_l^2 . Тогда получим:

$$\sum_{t \in T} E_t^2 = \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t, t) \neq 0}} E_t^2 + \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t, t) = 0}} E_t^2.$$

Количество слагаемых в обеих суммах одинаково:

$$\sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t, t) \neq 0}} 1 = \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t, t) = 0}} 1 = 2^{d-1}$$

Поэтому, так как $\beta_l = -1$, получаем

$$(1 + \beta_l) \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t, t) \neq 0}} E_t^2 = 0. \quad \square$$

Следствие 5.1. Если существует $t \in T$ такое, что $E_t^2 = -1$, тогда среди базисных элементов алгебры B_d содержится ровно 2^{d-1} элементов, квадрат которых равен (-1) . Ясно, что если $\beta_i = 1$, для всех $i \in I$, то для всех квадратов базисных элементов алгебры B_d также справедливо равенство $E_t^2 = +1$. Для единообразия обозначений

в этом разделе алгебру B_d , в которой $\beta_i = 1$ для каждого $i \in I$, будем обозначать B_d^+ . Нетрудно показать, что

$$B_d^+ \cong \underbrace{R \dot{+} R \dot{+} \dots \dot{+} R}_{2^d} \cong H_R(2^d)$$

Основным результатом раздела является теорема, утверждающая, что структура коммутативно-ассоциативной алгебры с базисом (5.4) (то есть, алгебры, построенной методом Грассмана-Клиффорда) зависит от существования *хотя бы одного* базисного элемента $\varepsilon_j \in V$ "порождающего" векторного пространства V , квадрат которого равен (-1) .

Теорема 5.1. Для любого $d \geq 1$ существует только две неизоморфных 2^d -мерных алгебры с операциями, определенными соотношениями (5.10), (5.15), а именно:

$$B_d^+ \cong \underbrace{R \dot{+} R \dot{+} \dots \dot{+} R}_{2^d} \cong H_R(2^d) \cong \underbrace{H_R(2) \dot{+} H_R(2) \dot{+} \dots \dot{+} H_R(2)}_{2^{d-1}}, \quad (5.17)$$

$$B_d^- \cong \underbrace{C \dot{+} C \dot{+} \dots \dot{+} C}_{2^{d-1}} \cong H_C(2^{d-1}). \quad (5.18)$$

Доказательство. Согласно следствию 5.1, если $\beta_i = 1$, для всех $i \in I$ то соответствующая алгебра есть

$$B_d^+ \cong \underbrace{R \dot{+} R \dot{+} \dots \dot{+} R}_{2^d} \cong H_R(2^d).$$

Поэтому предположим, что существует, по крайней мере, один базисный элемент ε_l пространства V , для которого $\varepsilon_l^2 = -1$, $l \in I$. Без ограничения общности будем считать $l = 1$. В базисе Λ этому элементу соответствует элемент E_1 . Выберем E_t такой, что $E_t^2 = 1$. Такой элемент существует, так как, либо существует $\beta_k = 1$, либо можно взять комбинацию $\varepsilon_1 \varepsilon_k = E_{1 \oplus k}$, где $\beta_k = -1$, $k \neq 1$. Тогда любой элемент $h \in B_d^-$ можно представить в виде

$$h = \sum_{i \in T} \eta_i E_i = \sum_{\substack{i \in T \\ h_k(i, i) = 0}} \eta_i E_i + \sum_{\substack{i \in T \\ h_i(i, i) = 1}} \eta_i E_i.$$

Из леммы 5.1 следует, что

$$E_i = \frac{1}{\Psi(t, t)} E_i E_t E_t$$

или, в данном случае, $E_i = E_i E_t E_t$. Отсюда легко получаем равенство

$$h = \sum_{\substack{i \in T \\ h_k(i, i) = 0}} \eta_i E_i + \left(\sum_{\substack{i \in T \\ h_k(i, i) = 1}} \eta_i E_i E_t \right) E_t.$$

Заметим, что все возможные произведения $E_i E_t$ не содержат образующего элемента ε_k , поэтому $h = a + b E_t$, где $a, b \in B_{d-1}$.

Непосредственно проверяется, что отображение $\Theta : B_d \rightarrow B_{d-1} \dot{+} B_{d-1}$, задаваемое соотношением $h = \alpha + \gamma E_t \mapsto (\alpha + \gamma, \alpha + \Psi(k, k) \gamma) \in B_{d-1} \dot{+} B_{d-1}$, является изоморфизмом. Применяя последовательно Θ к B_{d-1}^- , по индукции получаем

$$B_d \cong \left(\underbrace{R \dot{+} R \dot{+} \dots \dot{+} R}_{2^{(d-1)}} \right) + \varepsilon_1 \cdot \left(\underbrace{R \dot{+} R \dot{+} \dots \dot{+} R}_{2^{(d-1)}} \right). \quad (5.19)$$

Так как $\varepsilon_1^2 = -1$, то

$$B_d \cong \underbrace{C \dot{+} C \dot{+} \dots \dot{+} C}_{2^{d-1}} = B_d^-.$$

Таким образом, доказано, что любая алгебра, в которой существует базисный элемент векторного пространства V , квадрат которого равен -1 , изоморфна алгебре B_d^- . $\square$

Учитывая доказанную выше классификационную теорему, далее везде под алгеброй B_d^- будем понимать алгебру со следующим правилом умножения базисных элементов пространства V :

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = -1, \quad i \in I, \quad (5.20)$$

а под алгеброй B_d^+ будем понимать алгебру со следующим правилом умножения базисных элементов пространства V :

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = +1, \quad i \in I, \quad (5.21)$$

Легко проверить, что для произвольного номера l , $l \in T$ верны равенства

$$0 = 0 \oplus 0 = l \oplus l, \quad l = l \oplus 0 = 0 \oplus l. \quad (5.22)$$

Для функции Ψ и произвольного номера $l \in T$ справедливы равенства

$$\Psi(0, 0) = \Psi(0, l) = \Psi(l, 0) = \frac{1}{\beta_l} \Psi(l, l) \quad (5.23)$$

и, согласно (5.20), равенства

$$\Psi(0, 0 \oplus 0) = \frac{1}{\beta_l} \Psi(l, l \oplus 0) = \Psi(0, l \oplus 0) = \Psi(l, 0 \oplus 0). \quad (5.24)$$

5.3. Автоморфизмы алгебр размерности 2^d , полученных методом Грассмана-Клиффорда

Нижеследующая теорема обобщает утверждение, касающееся автоморфности отображений (2.5) и (3.1) на случай произвольной размерности 2^d .

Теорема 5.2. Пусть $\psi : T \times T \rightarrow \{-1, 1\}$:

$$\psi(j, t) = \prod_{i \in I} (-1)^{h_i(j, t)}. \quad (5.25)$$

Тогда множество из 2^d отображений $\sigma_j : B_d \rightarrow B_d$, таких, что

$$\sigma_j(\chi) = \sum_{i \in T} c_i \psi(j, i) E_i, \quad (5.26)$$

где $\chi = (c_0, \dots, c_{2^d-1}) \in B_d$, $c_i \in R$, $j \in T$, является множеством автоморфизмов алгебры B_d , независимо от того, какая именно алгебра рассматривается: алгебра B_d^+ или алгебра B_d^- .

Доказательство. Проверим, что отображения системы (5.25) биективны и сохраняют операции сложения и умножения. Действительно, базисные элементы Λ

не являются делителями нуля и отображения σ_j линейны. Таким образом, отображения σ_j являются биекциями. Покажем, что отображения σ_j сохраняют операции сложения и умножения. Пусть элементы $g, h \in B_d$ представлены в форме (5.8), тогда должны выполняться равенства:

$$\sigma_j(g + h) = \sigma_j(g) + \sigma_j(h), \quad (5.27)$$

$$\sigma_j(gh) = \sigma_j(g) \cdot \sigma_j(h). \quad (5.28)$$

Справедливость (5.27) легко следует из равенств:

$$\sigma_j(g + h) = \sum_{i \in T} (\xi_i + \eta_i) \psi(j, i) E_i = \sum_{i \in T} \xi_i \psi(j, i) E_i + \sum_{i \in T} \eta_i \psi(j, i) E_i = \sigma_j(g) + \sigma_j(h).$$

Докажем (5.28). Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sigma_j(gh) &= \sum_{i \in T} \sum_{t \in T} \Psi(t, t \oplus i) \xi_{i \oplus t} \eta_t \psi(j, i) E_i = \\ &= \sum_{t \in T} \eta_t \sum_{i \in T} \Psi(t, t \oplus i) \xi_{i \oplus t} \psi(j, i) E_i. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Далее, используя (5.15), (5.22) и учитывая, что $i = t \oplus i \oplus t$, преобразуем (5.29) к виду:

$$\sigma_j(gh) = \sum_{t \in T} \eta_t \psi(j, t) \Psi(t, t) E_t \sum_{i \in T} \xi_{i \oplus t} \psi(j, i \oplus t) \Psi(t, t \oplus i) E_{i \oplus t}. \quad (5.30)$$

Так как индекс i принимает все значения множества T , то и индекс $i \oplus t$ принимает все значения множества T . Поэтому, полагая в (5.29) $\tau = t \oplus i$, получаем:

$$\sigma_j(gh) = \sum_{t \in T} \eta_t \psi(j, t) E_t \sum_{\tau \in T} \xi_\tau \psi(j, \tau) E_\tau = \sigma_j(g) \cdot \sigma_j(h).$$

Предположим, что существуют отображения $\sigma_j(\chi) = \sigma_p(\chi)$, где $j \neq p$. Тогда последовательно получаем цепочку равенств:

$$\sigma_j(\chi) = \sigma_p(\chi),$$

$$\begin{aligned} \prod_{i \in T} (-1)^{h_i(j, l)} &= \prod_{i \in T} (-1)^{h_i(p, l)}, \quad l = \overline{0, 2^d - 1}, \\ \sum_{i \in T} h_i(j, l) &= \sum_{i \in T} h_i(p, l), \quad l = \overline{0, 2^d - 1}, \end{aligned}$$

откуда следует равенство $j = p$, что является противоречием. Тогда, если $j \neq p$, то и $\sigma_j(\chi) \neq \sigma_p(\chi)$. Поэтому все автоморфизмы σ_j , индексированные числами множества T с $\text{card } T = 2^d$ различны. $\square$

Рассмотрим множество из 2^d отображений $\sigma_j : B_d \rightarrow B_d$, определенных в теореме 5.2.

Следующее утверждение гарантирует вещественность коэффициентов определяющего уравнения элемента алгебры B_d в случае использования для получения этого уравнения автоморфизмов, рассмотренных в Теореме 5.2. Мы опускаем достаточно громоздкое, но совершенно прозрачное индуктивное доказательство этого утверждения.

Теорема 5.3. Пусть для элемента $w \in B_d$ многочлен $\Phi(\xi, w)$ определен равенством

$$\Phi(\xi, w) = \prod_{\sigma_j} (\xi - \sigma_j(w)) = \sum_{k=0}^{2^d} \xi^k (-1)^{2^d-k} S_{2^d-k}(w).$$

Тогда:

- а) элемент w и его автоморфные образы $\sigma_j(w)$ являются корнями многочлена $\Phi(\xi, w)$;
- б) значения функций $S_{2^d-k}(w)$ суть вещественные числа;
- в) функции $S_{2^d-k}(w)$ являются однородными функциями степени $(2^d - k)$ вещественных компонент $(c_0, c_1, \dots, c_{2^d-1})$ элемента w . $\square$

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития исследований по финслеровой геометрии.

Литература

1. E. Bayro-Corrochano, G. Sobczyk (Eds). *Advances in Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering*.-Birkhauser, Boston, 2001
2. G. Sommer (Eds) *Geometric Computing with Clifford Algebras*. Springer Verlag, 2000
3. *Общая алгебра*. (Под ред. Л. А. Скорнякова). М.: Наука, 1990
4. Э. Артин. *Геометрическая алгебра*, М.: Наука, 1969.
5. Lasenby, A. N., Doran, C. J. L. and Gull, S. F. (1996). *Lectures in Geometric Algebra*, In: W. E. Baylis, Ed., *Clifford (Geometric) Algebras with Applications to Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhauser, Boston, 1996.
6. М. Холл. *Теория групп*. ИЛ, 1962.
7. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. № 1, 2004, с. 5–19.
8. Allenby, R. B. J. T., *Rings, Fields and Groups: An Introduction to Abstract Algebra*, 2nd edition, 1991.
9. Березин Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*. М., Изд-во МГУ, 1983.
10. Бурлаков М. П. Клиффордовы структуры на многообразиях. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения*. М.: ВИНТИ, 1995. Т. 30: Геометрия 3, с. 205–257.
11. Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Г.И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

Конформные преобразования евклидовой (комплексной) плоскости обладают некой полнотой (достаточностью) для решения целого ряда математических и физико-математических задач формулируемых на этой плоскости. Для евклидовых, псевдоевклидовых и поличисловых пространств размерности больше двух такая полнота (достаточность) множества конформных преобразований отсутствует. В настоящей работе показано, что, используя понятие аналогичных геометрий, можно несколько обобщить понятие конформных преобразований, не только для евклидовых и псевдоевклидовых пространств, но и для финслеровых пространств, аналогичных пространствам аффинной связности. Приведены конкретные примеры таких преобразований для комплексных и гиперкомплексных чисел H_4 . В общем случае такие преобразования образуют группу переходов, элементы которой можно представлять как переходы между проективно евклидовыми геометриями выделенного класса, фиксируемого выбором метрической геометрии, допускающей аффинные координаты. Взаимосвязь между функциями, осуществляющими обобщенно-конформные преобразования, и обобщенно-аналитическими функциями может оказаться продуктивной для решения фундаментальных задач теоретической и математической физики.

Введение

Конформные преобразования играют в физике и математике выделенную роль. Не менее важны римановы и псевдоримановы пространства постоянной кривизны (к ним, например, относятся пространство Лобачевского и сферическое пространство), их однородность столь же полная, как и у евклидова пространства, так как группы движений таких пространств содержат то же число параметров, что и евклидово пространство [1]. В случае метрических пространств, а данная работа не выходит за рамки финслеровых пространств, допускающих аффинную систему координат, мы исходим из "главенства" элемента длины, а понятие угла будем считать "вторичным". Предложенный подход (конечно, несколько видоизмененный) применим и для пространств (геометрий), в которых элемент длины не определен, но зато в каждой точке определен угол между векторами.

Если V_n некое риманово или псевдориманово пространство с координатами x^i и метрическим тензором $g_{ij}(x)$, то коэффициенты связности Γ_{kl}^i в этом пространстве, как известно, определяются формулой

$$\Gamma_{kl}^i(g) = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (1)$$

Если

$$G_{ij}(x) = \Lambda(x) \cdot g_{ij}(x), \quad (2)$$

где $\Lambda(x) > 0$ - некая скалярная функция координат, тогда

$$\Gamma_{kl}^i(G) = \Gamma_{kl}^i(g) + \frac{1}{2\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^l} \delta_k^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \delta_l^i - g^{im} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^m} g_{kl} \right). \quad (3)$$

Пространства с метрическими тензорами g_{ij} и G_{ij} называются конформно связными [1].

Так как коэффициенты связности преобразовываются при переходе от одной системы координат к другой по формулам:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma_{kl}^i = \Gamma_{n'p'}^{i'} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l} \quad (4)$$

- конформные преобразования координат, осуществляемые функциями f^i в некоторой области $W_n \subset V_n$, где метрический тензор g_{ij} не зависит от точки пространства, должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{1}{2\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^l} \delta_k^m + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \delta_l^m - g^{mp} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^p} g_{kl} \right) \frac{\partial f^i}{\partial x^m}. \quad (5)$$

Свернем левую и правую части уравнений (5) с тензором g^{kl} сразу по двум индексам, получим

$$g^{kl} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{2-n}{2\Lambda} g^{kl} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \quad (6)$$

Таким образом, функции, которые осуществляют конформное преобразование в евклидовых или псевдоевклидовых пространствах, являются решениями дифференциального уравнения (6).

Для аналитических функций комплексной переменной (конформные преобразования евклидовой плоскости первого рода) и для комплексно сопряженной аналитической функции комплексной переменной (конформные преобразования евклидовой плоскости второго рода)

$$\Lambda = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2} \right)^2, \quad (7)$$

и уравнения (5) выполняются в области аналитичности и односвязности.

Обобщение конформных преобразований евклидовых и псевдоевклидовых пространств

В работе [2] введено понятие аналогичных геометрий. Предлагается называть геометрии аналогичными в некоторых областях, если эти геометрии одномерные и найдется такое отображение одной области на другую, при котором некоторый класс геодезических (экстремалей) одной геометрии совместятся полностью с некоторым классом геодезических (экстремалей) другой геометрии. При определенных допущениях аналогичность геометрий означает, что найдутся такие системы координат, в которых дифференциальные уравнения для геодезических (экстремалей) совпадают.

Если в некоторой геометрии аффинной связности к коэффициентам связности аддитивно добавить тензор

$$T_{kl}^i = \frac{1}{2} (p_k \delta_l^i + p_l \delta_k^i) + S_{kl}^i, \quad (8)$$

где p_i - произвольное ковариантное поле, а S_{kl}^i - произвольное поле тензора, антисимметрического по двум нижним индексам, то геодезические останутся теми же кривыми [1].

Пусть функции f^i осуществляют взаимно однозначное отображение некоторой области евклидового или псевдоевклидового пространства с метрическим тензором g_{ij} на некоторую другую область того же пространства, и при этом эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2} (p_l \delta_k^m + p_k \delta_l^m) - g^{mp} \frac{\partial L}{\partial x^p} g_{kl} \right] \frac{\partial f^i}{\partial x^m}, \quad (9)$$

где p_i - некое ковариантное векторное поле, а L - некое скалярное поле, тогда такое отображение (преобразование координат) будем называть элементарным обобщенно-конформным.

Заметим, что если бы мы для получения формул (9) использовали аддитивную добавку (8) с ненулевым тензором кручения S_{kl}^i , то вместо обобщения получили бы дополнительные условия

$$S_{kl}^m \frac{\partial f^i}{\partial x^m} = 0, \quad (10)$$

так как все остальные аддитивные члены в левой и правой частях системы уравнений (9) симметричны относительно перестановки индексов k и l .

Из определения элементарных обобщенно-конформных преобразований евклидовых и псевдоевклидовых пространств следует, что эти преобразования и функции f^i , которые их осуществляют, тесно связаны с понятием проективно евклидовых геометрий [1].

Таким образом, каждая функция (компонента) элементарного обобщенно-конформного преобразования удовлетворяют следующему скалярному уравнению:

$$g^{kl} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = g^{kl} \left(p_k - \frac{n}{2} \frac{\partial L}{\partial x^k} \right) \frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \quad (11)$$

Хотя для собственно обобщенно-конформных преобразований формула (2) не имеет места, будем считать по определению, что

$$\Lambda = \Lambda_0 \cdot \exp(L). \quad (12)$$

В каком-то смысле, таким образом определенное скалярное поле Λ будет характеризовать квадрат коэффициента "сжатия-растяжения" пространства при элементарном обобщенно-конформном преобразовании.

Для того чтобы показать нетривиальность такого обобщения понятия конформных преобразований приведем одно из решений системы уравнений (9):

$$f^i = \frac{x^i}{a + b \cdot g_{kl} x^k x^l}, \quad (13)$$

где a и b - некоторые действительные числа, причем

$$\Lambda = \frac{d}{(a - b \cdot g_{kl} x^k x^l)^2}, \quad (14)$$

где d - некоторое действительное число.

В случае евклидовой (комплексной) плоскости (x, y)

$$z = x + iy, \quad F(z) = f^1 + i f^2, \quad (15)$$

функция (13)

$$F(z) = \frac{z}{a + bz\bar{z}} \quad (16)$$

при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ не является ни аналитической, ни комплексно сопряженной аналитической, но осуществляет элементарное обобщенно-конформное преобразование евклидовой плоскости. При $a = 0$ эта функция становится комплексно сопряженной аналитической

$$F(z) = \frac{1}{b\bar{z}}, \quad (17)$$

что соответствует конформному отображению второго рода. При $b = 0$ функция $F(z)$ является аналитической,

$$F(z) = \frac{1}{a}z, \quad (18)$$

что соответствует конформному отображению первого рода.

Поличисла H_4

В пространстве H_4 четвертая степень элемента длины в ψ - базисе имеет вид

$$(ds)^4 = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \quad (19)$$

а конформно связная геометрия будет иметь элемент длины вида

$$(ds)^4 = \Xi d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \quad (20)$$

где $\Xi > 0$ - некоторое скалярное поле. Такая геометрия аналогична геометрии аффинной связности с коэффициентами связности [2]

$$\Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2}(p_k \delta_j^i + p_j \delta_k^i) - p_{kj}^i \frac{1}{\Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi_{j-}} + S_{kj}^i, \quad (21)$$

где

$$\psi_k \psi_j = p_{kj}^i \psi_i, \quad p_{kj}^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (22)$$

p_k , $S_{kj}^i = -S_{jk}^i$ - произвольные тензорные поля, индекс $j_- = j$, но по ним не ведется суммирование.

Таким образом, система уравнений для функций f^i , которые осуществляют элементарное обобщенно-конформные преобразования в координатном пространстве поличисел H_4 , имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l \delta_k^m + p_k \delta_l^m) - p_{kl}^m \frac{\partial L}{\partial x^l} \right] \frac{\partial f^i}{\partial x^m}, \quad (23)$$

где

$$\Xi = \Xi_0 \cdot \exp(L). \quad (24)$$

Любая аналитическая функция переменной H_4 которая осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой области координатного пространства H_4 на некоторую другую область того же пространства удовлетворяет системе уравнений (23), причем

$$p_i = 0, \quad \Xi = \dot{f}^1 \dot{f}^2 \dot{f}^3 \dot{f}^4, \quad L = \ln |\Xi/\Xi_0|. \quad (25)$$

Множество решений системы уравнений (23) не сводится только к аналитическим функциям переменной H_4 . Так решением этой системы уравнений является функция

$$f^i = \frac{f_0^i \ln \left| \frac{\xi^{i-}}{\xi_0^{i-}} \right|}{a + b \ln \left| \frac{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}{\xi_0^1 \xi_0^2 \xi_0^3 \xi_0^4} \right|}, \quad (26)$$

которая только при $b = 0$ становится аналитической функцией переменной H_4 . В формуле (26) a , b , ξ_0^i , f_0^i - постоянные, но, конечно, не все они независимы. Для функции (26)

$$\Xi = \frac{const}{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}. \quad (27)$$

Так как в пространстве H_4 можно образовать тензор

$$q_{ij} = p_{ik}^m p_{mj}^k, \quad (q_{ij}) = diag(1, 1, 1, 1), \quad (28)$$

то существует и дважды контравариантный тензор q^{ij} , причем

$$(q^{ij}) = diag(1, 1, 1, 1), \quad (29)$$

поэтому каждая компонента элементарного обобщенно-конформного преобразования в пространстве H_4 , должна удовлетворять следующему скалярному уравнению:

$$q^{kl} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = q^{kl} \left(p_k - \frac{\partial L}{\partial x^k} \right) \frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \quad (30)$$

Сравнивая уравнения (11), (30) и учитывая формулы (12) (24), видим, что скалярное уравнение (11), решениями которого являются функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования в 4-мерном евклидовом пространстве, и скалярное уравнение (30), которому подчиняются функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования в пространстве H_4 , имеют совершенно одинаковую структуру:

$$\delta^{kl} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \delta^{kl} \left(p_k - 4 \frac{\partial l}{\partial x^k} \right) \frac{\partial f^i}{\partial x^l}, \quad (31)$$

где коэффициент линейного "сжатия-растяжения" λ выражается через скалярное поле l и для 4-мерного евклидова пространства, и для пространства H_4 по одной и той же формуле

$$\lambda = \lambda_0 \exp(l). \quad (32)$$

Заметим однако, что при этом мы не можем утверждать, что p_k , l одинаковы для 4-мерного евклидова пространства и пространства H_4 . В то же время было бы весьма интересно найти такой класс элементарных обобщенно-конформных преобразований, для элементов которого одноковариантное поле $\left(p_k - 4 \frac{\partial l}{\partial x^k} \right)$ было бы одним и тем же как для 4-мерного евклидова пространства, так и для пространства H_4 , то есть в обоих случаях функции f^i удовлетворяли бы одному и тому же скалярному уравнению не только по форме. Линейные преобразования автоматически являются подмножеством такого класса преобразований.

Обобщенно-конформные преобразования

Предыдущие построения позволяют предположить, что наиболее общий вид системы уравнений, которые определяют элементарные обобщенно-конформные преобразования некоей метрической геометрии (на данный момент развития понятия финслеровой геометрии, по-видимому, более, чем достаточно для нужд теоретической и математической физики), допускающей аффинные координаты и для которой все ее конформно связанные пространства всегда аналогичны некоторой геометрии аффинной связности, в аффинных координатах таков:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l \delta_k^m + p_k \delta_l^m) - \Delta_{kl}^{pm} \frac{\partial L}{\partial x^p} \right] \frac{\partial f^i}{\partial x^m}, \quad (33)$$

где Δ_{kl}^{pm} - симметрический по нижним индексам числовой тензор в аффинной системе координат исходной метрической геометрии, L и p_k - скалярное и одноковариантное поля, причем для конформных преобразований коэффициент линейного "растяжения-сжатия" λ выражается через скалярное поле L по формуле

$$\lambda = \lambda_0 \exp(L/m) \equiv \lambda_0 \exp(l). \quad (34)$$

Здесь λ_0 - действительное число, а m - натуральное число, равное порядку формы финслеровой геометрии, через которую выражается элемент длины, например, для евклидовых и псевдоевклидовых геометрий $m = 2$, а для H_4 -чисел $m = 4$.

Из формул (33) следует, что любое линейное невырожденное преобразование является элементарным обобщенно-конформным с

$$p_i = 0, \quad L = \text{const}. \quad (35)$$

Хотя мы надеемся, что для всех возможных тензоров Δ_{kl}^{pm} вполне достаточно понятия финслеровой геометрии (возможно, что даже достаточно только понятия полиномиальной геометрии [3]), эта гипотеза (как и более жесткая) требует строгого доказательства.

Для невырожденных поличисловых пространств P_n всегда имеется тензор q^{ij} (см. (28), (29)), поэтому для таких пространств элементарные обобщенно-конформные преобразования удовлетворяют следующему скалярному уравнению:

$$q^{kl} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left(p_k q^{km} - q^{kl} \Delta_{kl}^{pm} \frac{\partial L}{\partial x^p} \right) \frac{\partial f^i}{\partial x^m}. \quad (36)$$

Элементарные обобщенно-конформные преобразования (33) не образуют группы, но всевозможные произведения (то есть последовательное выполнение) таких преобразований вместе с обратными элементарными преобразованиями образуют группу, которую будем обозначать $G_n(\Delta_{kl}^{pm})$ и называть группой обобщенно-конформных преобразований. Элементы этой группы - решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = & \left[\frac{1}{2}(p_l \delta_k^m + p_k \delta_l^m) - \Delta_{kl}^{pm} \frac{\partial L}{\partial x^p} \right] \frac{\partial f^i}{\partial x^m} - \\ & - \left[\frac{1}{2}(p'_r \delta_s^i + p'_s \delta_r^i) - \Delta_{sr}^{pi} \frac{\partial L'}{\partial x^p} \right] \frac{\partial f^s}{\partial x^k} \frac{\partial f^r}{\partial x^l}, \end{aligned} \quad (37)$$

где p_l , p'_k , L , L' - некоторые поля, Δ_{sr}^{pi} - тот же самый скалярный тензор, что и в системе уравнений (33); причем подразумевается, что производные $\frac{\partial L}{\partial x^p}$ явно выражены через частные производные по x^i .

Обобщенно-конформные преобразования, можно рассматривать как переходы в подмножестве (классе) проективно евклидовых пространств, которое (подмножество) однозначно характеризуется тензором Δ_{sr}^{pi} . Подчеркнем еще раз, что достаточно изучить элементарные обобщенно-конформные преобразования, так как произвольное обобщенно-конформное преобразование можно построить в виде произведения некоторого элементарного и некоторого обратного к элементарному преобразованию, конечно, другому, если мы не хотим получить в результате тождественное преобразование. Римановы и псевдоримановы конформно евклидовы пространства обязательно являются пространствами постоянной кривизны [1], поэтому предложенные построения определяют класс финслеровых пространств, которые можно назвать финслеровыми пространствами постоянной кривизны. Тем самым обобщенно-конформные преобразования образуют группу переходов между элементами такого класса финслеровых пространств.

Обобщенно-аналитические функции

Если исходное метрическое пространство, которому соответствует числовой тензор Δ_{kl}^{pm} , является поличисловым $P_n \ni X$, то, во-первых, аналитические функции поличисловой переменной P_n осуществляют, в области, где якобиан от их компонент не равен нулю, конформные преобразования, и, во-вторых, в этом же пространстве можно ввести понятие обобщенно-аналитической функции [3]. Конечно, в этом случае функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования, являются обобщенно-аналитическими данной поличисловой переменной. Более интересной является следующая задача: найти такой класс $\Upsilon(\Delta_{kl}^{pm}) \ni F(X)$ обобщенно-аналитических функций, любой элемент которого являлся бы автоматически решением системы уравнений (37).

Заметим, что если $F_{(1)}(X), F_{(2)} \in \Upsilon(\Delta_{kl}^{pm})$, то $F_{(1)}(F_{(2)}) \in \Upsilon(\Delta_{kl}^{pm})$. Это следует из групповых свойств обобщенно-конформных преобразований.

Обобщенно-аналитическая функция поличисловой переменной $X \in P_n$,

$$F(X) = f^1(x^1, x^2, \dots, x^n)e_1 + f^2(x^1, x^2, \dots, x^n)e_2 + \dots + f^n(x^1, x^2, \dots, x^n)e_n, \quad (38)$$

$X = x^i e_i$, e_i - базис, удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma_k^i = p_{kj}^i \dot{f}^j, \quad (39)$$

где $\dot{f}^j$ - обобщенная производная, тензор p_{kj}^i определяется соотношениями

$$e_k e_j = p_{kj}^i e_i, \quad (40)$$

а объект γ_k^i должен при переходе от одних координат к другим преобразовываться по закону

$$\gamma_{k'}^{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \gamma_k^i - \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i} f^i. \quad (41)$$

Если ε^i - коэффициенты разложения единицы в базисе e_i , то, учитывая формулу

$$\varepsilon^k p_{kj}^i = \delta_j^i, \quad (42)$$

из формулы (39) получим

$$\dot{f}^i = \varepsilon^m \frac{\partial f^i}{\partial x^m} + \varepsilon^m \gamma_m^i \quad (43)$$

и аналог соотношений Коши - Римана:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma_k^i - p_{kj}^i \left(\varepsilon^m \frac{\partial f^j}{\partial x^m} + \varepsilon^m \gamma_m^j \right) = 0. \quad (44)$$

Условия интегрируемости соотношений (39) относительно функций f^i выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \left(-\gamma_k^i + p_{kj}^i f^j \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(-\gamma_m^i + p_{mj}^i f^j \right). \quad (45)$$

Если система поличисел P_n невырождена и обобщенная производная также является обобщенно-аналитической функцией $\{f^i, \gamma_k^i\}$, то формально каждая компонента f^i удовлетворяет следующему скалярному уравнению:

$$q^{mk} \dot{\nabla}_m \tilde{\nabla}_k f^i = Q_r^i \ddot{f}^r, \quad (46)$$

где

$$Q_r^i = q^{mk} p_{kj}^i p_{mr}^j. \quad (47)$$

Для аналитических функций комплексной переменной это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f^i = 2 \ddot{f}^i \quad (48)$$

и выполняется тождественно. Таким образом, поле $(2\ddot{f}^i)$ можно рассматривать как поле источника поля f^i для оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (49)$$

Рассмотрим двумерное неоднородное (с правой частью) гиперболическое уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \right) u_s = f_s(t, x_s), \quad (50)$$

где t - время, x_s - координата вдоль струны, $u_s(t, x_s)$ - амплитуда поперечных малых колебаний струны, $\rho f_s dx_s$ - действующая на элемент $(x_s, x_s + dx_s)$ струны поперечная сила, ρ - плотность массы на единицу длины струны. При замене переменных

$$f^i = u_s, \quad at = x, \quad y = x_s, \quad \frac{1}{a^2} f_s(t, x_s) = 2f^i(x, y) \quad (51)$$

уравнения (48) и (50) переходят друг в друга, но правая часть уравнения (48) есть аналитическая функция комплексной переменной (x, y) , что существенно ограничивает разнообразие источников.

Итак, если функцией источника (правой частью) в неоднородном двумерном гиперболическом уравнении (волновом уравнении), записанном в специальном виде (48) является аналитическая функция комплексной переменной, то одним из частных решений этого уравнения будет вторая первообразная функции источника, деленная на два.

Кроме уравнения (48), каждая аналитическая функция комплексной переменной подчиняется также уравнению Лапласа, которое можно получить аналогично

уравнению (46), заменив тензор q^{mk} на тензор g^{mk} , который есть обратный к g_{ij} - метрическому тензору евклидовой плоскости:

$$g^{mk} \dot{\tilde{\nabla}}_m \tilde{\nabla}_k f^i = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f^i = 0. \quad (52)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для аналитических функций H_2 - переменной,

$$X = x + jy, \quad j^2 = 1, \quad (53)$$

но эллиптический и гиперболический типы уравнений меняются местами:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f^i = 2\ddot{f}^i, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f^i = 0. \quad (54)$$

Итак, если функцией источника (правой частью) в неоднородном двумерном уравнении Лапласа является аналитическая функция H_2 переменной, то одним из частных решений этого уравнения будет вторая первообразная функции источника, деленная на два.

Таким образом, при замене $C \leftrightarrow H_2$ не только "меняются местами" волновое уравнение и уравнение Лапласа, но при этом одно из них теряет источник (неоднородную правую часть), а другое приобретает. Есть все основания полагать, что подобная симметрия может иметь место для поличисел размерности больше двух и не только для аналитических, но и обобщенно-аналитических функций.

Скалярное уравнение (46) для аналитических функций H_4 -переменной в координатной системе ψ -базиса (22) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(\xi^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\xi^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\xi^3)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\xi^4)^2} \right) f^i = \ddot{f}^i, \quad (55)$$

или в координатной системе (x^0, x^1, x^2, x^3) базиса $\{1, j, k, jk\}$, состоящего из единицы и трех символьных единиц $j^2 = k^2 = (jk)^2 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3, \quad \xi^2 = x^0 + x^1 - x^2 - x^3, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3, \quad \xi^4 = x^0 - x^1 - x^2 + x^3 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

- то же уравнение запишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2} \right) f^i = 4\ddot{f}^i. \quad (57)$$

Итак, если функцией источника (правой частью) неоднородного 4-мерного уравнения Лапласа является аналитическая функция H_4 -переменной, то одним из частных решений этого уравнения является вторая первообразная функции источника, деленная на 4.

Заметим также, что в уравнениях (48), первом (54) и (57) можно брать произвольную линейную комбинацию компонент функции источника, не меняя координаты, так как индекс i свободен и в левой и правой частях, а также использовать симметрию (несвойственную соответствующим поличислам) скалярных операторов, стоящих в правой части, для перехода к другим координатам, не "перемешивая" компоненты аналитических функций. Эти обстоятельства несколько расширяют соответствующие множества функций источников.

Заключение

В настоящей работе предложено обобщение понятия конформных преобразований метрического пространства. Если ограничиться пространствами, которые допускают аффинные координаты, то обобщенно-конформные преобразования при фиксированном исходном метрическом пространстве можно рассматривать как группу переходов между элементами некоторого класса пространств постоянной кривизны.

При решении проблемы взаимно однозначного (с точностью до дискретной группы преобразований) соответствия между обобщенно-конформными преобразованиями пространства P_n и обобщенно-аналитическими функциями поличисловой переменной P_n есть все основания надеяться получить мощный математический аппарат для решения физико-теоретических и математических задач в пространствах P_n .

Литература

- [1] П.К.Рашевский: Риманова геометрия и тензорный анализ, Наука, М. 1967.
- [2] Г.И.Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 75 - 88.
- [3] Д.Г.Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 5 - 19.

ПОНЯТИЯ РАССТОЯНИЯ И МОДУЛЯ СКОРОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
hypercomplex@mail.ru

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия
gri9z@mail.ru

Получены формулы для трёхмерного расстояния и модуля скорости в четырёхмерном линейном пространстве с метрикой Бервальда-Моора при помощи разработанного алгоритма, который применим как для пространства Минковского, так и для произвольного полилинейного финслерова пространства, если в нем можно выделить времениподобную компоненту. Построенный в данной работе модуль трёхмерной скорости в пространстве с метрикой Бервальда-Моора при малых (нерелятивистских) скоростях совпадает с соответствующим выражением в пространстве Галилея, а при максимально возможных скоростях, то есть для мировых линий, лежащих на поверхности конуса будущего, – равен единице. Для построения трехмерного расстояния используется понятие поверхности относительной одновременности, что концептуально аналогично соответствующему методу специальной теории относительности. Выведены формулы преобразования скорости при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. В случае когда обе скорости направлены вдоль одной из трёх выделенных прямых, полученные соотношения совпадают с аналогичными соотношениями в специальной теории относительности, однако отличаются в других случаях. Получены выражения для преобразований, играющих роль преобразований Лоренца пространства Минковского. Если при этом три пространственные координатные оси есть прямые, вдоль которых скорости складываются так же, как в специальной теории относительности, то выбирая скорость новой инерциальной системы коллинеарной одной из таких координатных осей, получим, что преобразования этой координаты и временной совпадают с преобразованиями Лоренца, а преобразования двух поперечных координат отличаются от соответствующих преобразований Лоренца.

Введение

Геометрию пространства классической нерелятивистской физики, обычно связываемую с именами Галилея и Ньютона, можно считать приближением второго порядка по малому параметру (отношению модуля скорости к скорости света) от геометрии пространства Минковского. Однако, существуют и другие геометрии необязательно с квадратичной метрикой, для которых подобный предельный переход приводит к пространству Галилея, то есть к классической нерелятивистской механике.

Отталкиваясь от четырёх измерений, как несомненно присутствующих в нашем физическом мире, и желая рассмотреть, в первую очередь, простейшую метрическую форму четвертого порядка, мы считаем целесообразным начать подобные исследования с линейного пространства с метрикой Бервальда-Моора, интервал которого в одном из базисов представим в виде произведения четырех координат:

$$S = \sqrt[4]{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4}. \quad (1)$$

Такое пространство условимся обозначать H_4 [1]. Метрическая функция (1) является частным случаем более общей метрической функции ([2], [3])

$$S = \xi_1^{(1+r_1+r_2+r_3)/4} \xi_2^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \xi_3^{(1-r_1+r_2-r_3)/4} \xi_4^{(1-r_1-r_2+r_3)/4}, \quad (2)$$

когда входящие в нее три параметра r_1, r_2, r_3 оказываются равными нулю. Замечательной особенностью пространства H_4 является то, что с ним можно связать коммутативно-ассоциативную алгебру, а также естественным образом ввести аналог скалярному произведению, в качестве которого выступает симметрическая полилинейная форма от нескольких векторов [4].

Следует отметить, что несмотря на свой экзотический вид метрическая форма в правой части формулы (1) может рассматриваться как четырехмерное обобщение квадратичной формы обычной псевдоевклидовой плоскости, которая помимо привычной записи

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 \quad (3)$$

при переходе из ортонормированного базиса в специальный, состоящий из особого вида изотропных векторов, принимает вид:

$$S^2 = \xi_1 \xi_2. \quad (4)$$

Уже одного этого наблюдения достаточно, чтобы ожидать от пространства с метрикой (1) свойств, близких к свойствам псевдоевклидова пространства (особенно двухмерного), среди которых, конечно же, должны быть и релятивистские черты.

Замечание. Чтобы упростить написание формул, мы, как правило, все тензорные индексы будем писать внизу, а также иногда не станем выписывать координаты векторов через разности координат их конца и начала. Это не должно привести к ошибкам или непониманию, так как рассматриваются пока только аффинные пространства, а поднятие и опускание индексов не используется.

Физическая интерпретация основных геометрических объектов

В четырехмерном многообразии, рассматриваемом как некоторая модель пространства-времени, с наглядной точки зрения важны, прежде всего, эффекты, реализующиеся в его трехмерном подпространстве. Последнее желательно иметь возможность интерпретировать как обычное трехмерное пространство наблюдателя с его классическими свойствами. В пространстве Минковского (а также в его римановых обобщениях) евклидовы свойства некоторых из его (их) трехмерных подпространств заложены уже в самом виде фундаментальной метрической формы, включающей положительно определенную квадратичную составляющую. В связи с этим, методологические трудности при сопоставлении особенностей таких многообразий со свойствами реального трехмерного пространства (несомненно, весьма близкого к евклидовой геометрии), если и возникают, то только в отношении следствий, связанных с отказом от абсолютной одновременности.

При переходе от пространства Минковского с его квадратичной формой к финслерову пространству, в котором интервалы связаны с формой четвертого порядка, в частности к H_4 , ответ на вопрос, какую геометрию вокруг себя обнаружит "живущий" в таком многообразии наблюдатель, не является столь же очевидным. Чтобы ответить на него, рассмотрим, каким образом объектам данного многообразия можно сопоставить общепринятые физические понятия и величины. Прежде чем

сделать это, остановимся на интерпретациях геометрических объектов, связанных со специальной теорией относительности (СТО). К таким интерпретациям относятся:

- 1) точка четырехмерного пространства – событие;
- 2) прямая – мировая линия инерциальной системы отсчета;
- 3) расстояние между парой точек вдоль прямой – интервал между событиями;
- 4) множество изотропных (имеющих нулевой интервал) прямых, пересекающихся в одной точке, – световой конус;
- 5) гиперповерхность, точки которой удалены на равный интервал от некоторой фиксированной точки – гиперсфера пространства-времени, или множество событий, равноудаленных в собственном времени наблюдателя от фиксированного события;
- 6) гиперповерхность, точки которой равноотстоят от двух фиксированных точек – множество относительно одновременных событий в выделенной инерциальной системе отсчета, мировая линия которой проходит через фиксированные точки;
- 7) прямые, параллельные некоторой заданной, – множество неподвижных точек трехмерного пространства наблюдателя, находящегося в заданной инерциальной системе отсчета.

Для геометрических объектов, существующих в рассматриваемом пространстве H_4 (равно, как и для многих других линейных финслеровых пространств), можно оставить фактически те же физические интерпретации, что были перечислены выше и достаточно часто используются в СТО. Отличия проявляются только в частности и в рассматриваемом случае H_4 сводятся всего к трем фактам: место светового конуса, имеющего круговую симметрию, занимает конус с плоскими гранями; множество относительно одновременных событий (то есть множество событий, равноудаленных от двух фиксированных точек пространства-времени) оказывается не плоским, а представляет собой достаточно сложную гиперповерхность; и, наконец, аналогом псевдоевклидовой сферы, состоящей из трех односвязных гиперboloидов (поверхностей второго порядка), является гиперповерхность, состоящая из шестнадцати гиперboloидов (поверхностей четвертого порядка). Все эти обстоятельства являются прямыми следствиями того, что теперь интервал между двумя событиями определяется не квадратным корнем из квадратичной формы, а корнем четвертой степени из формы четвертого же порядка (1).

Специальный базис, в котором интервал пространства H_4 имеет лаконичный вид (1), связан с особыми изотропными векторами. В специальной теории относительности в аналогичном базисе квадрат интервала имеет также непривычный вид:

$$S^2 = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_4 + \xi_3\xi_4. \quad (5)$$

Такое представление интервала пространства Минковского довольно редко используется, поэтому, чтобы не отступать от общепринятых в СТО построений, напомним и нашу метрическую форму пространства H_4 в базисе, являющимся аналогом ортонормированного [5]. Для этого достаточно воспользоваться линейной подстановкой:

$$\xi_i = A_{ij}x_j, \quad (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{ik}A_{kj} = 4\delta_{ij} \quad (6)$$

– после которой четвертая степень интервала окажется связанной со своими компо-

нентами соотношением:

$$S^4 = x_0^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 8x_0x_1x_2x_3 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2. \quad (7)$$

Если квадрат интервала в пространстве Минковского

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (8)$$

возвести еще раз в квадрат, чтобы в обоих выражениях фигурировали одинаковые четвертые степени, то справа получится полином, напоминающий по виду полином в правой части (7):

$$S^4 = x_0^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2. \quad (9)$$

В областях, для которых $|v_\alpha| \ll 1$, где $v_\alpha = x_\alpha/x_0$, $\alpha = 1, 2, 3$, характерных для нерелятивистской физики, выражения (7) и (9) равны с точностью до бесконечно малых $|v_\alpha|$ второго порядка. Из этого следует уже отмеченный выше предельный переход от геометрии H_4 к геометрии пространства Галилея, то есть к геометрии классической ньютоновой физики.

Определение расстояния и модуля скорости в пространстве Минковского

В пространстве Минковского множество событий, которым с точки зрения наблюдателя правомерно приписывать одинаковые значения пространственной (в трехмерном смысле) удаленности можно получить простым и наглядным геометрическим приемом, пересекая друг с другом две сферы (имеющие в пространстве Минковского вид гиперboloидов) одинаковых по величине радиусов, но имеющих разные центры (рис. 1). Прямую, проходящую через точки центров этих гиперболических сфер, можно ассоциировать с инерциальной системой отсчета, с позиции которой события, являющиеся пересечением соответствующих гиперboloидов, оказываются равноудаленными.

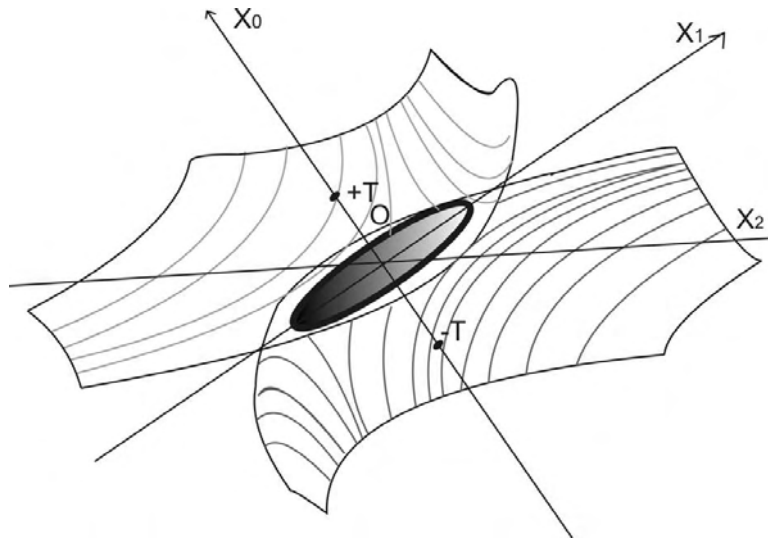


Рис. 1: Пересечение гиперboloидов в пространстве Минковского

Без потери общности рассуждения центры гиперboloидов можно разместить симметрично относительно начала координат и вдоль временной оси x_0 , связав с

точками: $(-T, 0, 0, 0)$ и $(T, 0, 0, 0)$. Чтобы получить уравнение поверхности, соответствующей пересечению двух псевдоевклидовых сфер радиуса S с центрами в данных точках, необходимо решить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} S^2 &= (T + x_0)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\ S^2 &= (T - x_0)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Складывая первое уравнение со вторым и вычитая одно из другого, мы переходим к эквивалентной системе

$$\left. \begin{aligned} S^2 &= T^2 + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\ 0 &= 2Tx_0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

первое из уравнений которой задает однополостный сферический гиперboloид (в качестве оси симметрии выступает временная ось), а второе описывает гиперплоскость $x_0 = 0$ ортогональную оси x_0 (рис. 2).

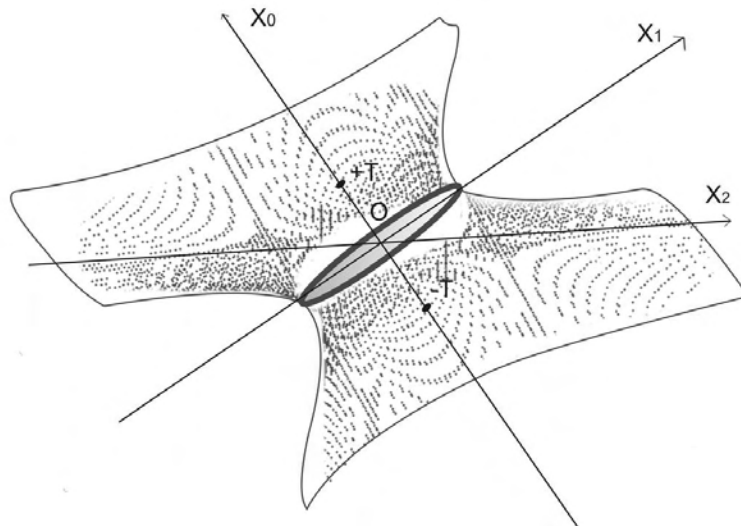


Рис. 2: Пересечение плоскости с однополостным гиперboloидом в пространстве Минковского

Варьируя величину интервала S от 0 до T , получаем семейство двумерных поверхностей, вложенных друг в друга. Каждой из этих поверхностей следует присвоить конкретное значение некоторой положительной действительной величины, под которой мы и могли бы понимать расстояние (с позиции наблюдателя, связанного с конкретной системой отсчета). Для этого достаточно присвоить конкретные величины расстояний хотя бы одной из точек каждой поверхности и распространить это значение уже на все ее точки. Реализовать последнее проще всего, выбрав прямую, пересекающую все такие поверхности, тогда линейный параметр вдоль этой прямой как раз и мог бы выступать в качестве понятия расстояния. В частности, нужной прямой может выступать ось x_1 . Принимая линейный закон соответствия расстояния l с координатой x_1 , то есть подставляя в первое уравнение (11) $x_0 = 0$, $x_1 = l$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, приходим к соотношению

$$l = \sqrt{T^2 - S^2}, \quad (12)$$

получая т. о. связь расстояния l с радиусом (интервалом) S исходных гиперboloидов, чье пересечение и дало нам поверхности с одинаковыми значениями расстояний. Это соотношение позволяет переписать первое уравнение (11) в виде общеизвестного в СТО выражения трехмерного расстояния от оси x_0 до параллельных ей мировых линий, задаваемых координатами (x_1, x_2, x_3) :

$$l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (13)$$

Следует отметить, что в СТО проделанная только что процедура получения формулы для расстояний, как правило, не применяется, но она совершенно равноценна тем, что обычно используются. Нам же такая, несколько усложненная, процедура потребовалась для того, чтобы реализовать аналогичное построение в пространстве H_4 , в котором обычно применяемые в СТО алгоритмы, не приводят к желаемому результату.

Для трехмерной скорости в пространстве Минковского можно также использовать похожие рассуждения. Две точки $(x_{(1)0}, x_{(1)1}, x_{(1)2}, x_{(1)3})$ и $(x_{(2)0}, x_{(2)1}, x_{(2)2}, x_{(2)3})$, вторая из которых находится в конусе будущего относительно первой, определяют вектор с координатами $(x_{(2)i} - x_{(1)i})$, которые можно переписать, введя понятие скорости следующим образом:

$$(x_{(2)i} - x_{(1)i}) \equiv (x_{(2)0} - x_{(1)0})v_i, \quad (14)$$

где $v_0 \equiv 1$, а компоненты v_1, v_2, v_3 образуют вектор трехмерной скорости. Тогда интервал между этими двумя точками может быть записан через компоненты скорости:

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt{1 - v^2}, \quad (15)$$

где

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \quad (16)$$

Отметим, что модуль v трехмерной скорости в СТО обладает свойством

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})f(v), \quad (17)$$

где $f(v)$ – функция одного действительного переменного. Если же вектор $(1, v_1, v_2, v_3)$, а значит и вектор $(x_{(2)0} - x_{(1)0}, x_{(2)1} - x_{(1)1}, x_{(2)2} - x_{(1)2}, x_{(2)3} - x_{(1)3})$ стремится к изотропному направлению, то $v \rightarrow 1$.

Определение расстояния и модуля скорости в пространстве H_4

Примем по определению, что в H_4 так же, как и в пространстве Минковского пересечение двух сфер (гиперboloидов) с одинаковыми радиусами, но разными центрами, представляет собой множество, точки которого (с позиции наблюдателя, чья мировая линия проходит через эти центры) являются равноудаленными в пространственном отношении от наблюдателя. Помимо аналогии с псевдоевклидовым случаем основанием к такому заключению служит факт равенства собственных времен для сигналов, исходящих из точки $(-T, 0, 0, 0)$ и приходящих в точки пересечения двух гиперboloидов, и собственных времен обратных сигналов, исходящих из этих точек и приходящих в точку $(T, 0, 0, 0)$. С позиции наблюдателя, чья мировая линия проходит через данные точки (то есть совпадает с осью x_0) и пользующегося информацией, связанной только с ним самим и с этими сигналами, последние отражаются от точек

трехмерного пространства, удаленных от него на одинаковые расстояния. При этом общее время в пути (по часам самих сигналов) оказывается для всех пар сигналов (вне зависимости от направления) равным $2S$. По часам же считающего себя неподвижным наблюдателя прошел интервал $2T$. Таким образом, ни показания часов, связанных с сигналами, ни показания часов самого наблюдателя не будут противоречить предположению, что расстояния от него до мировых линий, проходящих через точки поверхности, являющейся пересечением двух гиперboloидов, одинаковы и, следовательно, полностью характеризуются этими двумя величинами S и T .

Для пространства H_4 система двух уравнений, определяющая поверхность пересечения двух гиперboloидов с центрами в точках $(-T, 0, 0, 0)$ и $(T, 0, 0, 0)$, получается подстановкой в уравнение (7) вместо координат (x_0, x_1, x_2, x_3) вначале $(T + x_0, x_1, x_2, x_3)$, а затем $(T - x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$:

$$\left. \begin{aligned} S^4 &= (T + x_0)^4 - 2(T + x_0)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 8(T + x_0)x_1x_2x_3 + \\ &+ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2, \\ S^4 &= (T - x_0)^4 - 2(T - x_0)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 8(T - x_0)x_1x_2x_3 + \\ &+ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Перейдем, как и в случае пространства Минковского, к эквивалентной системе, взяв сумму и разность данных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} S^4 &= x_0^4 + 2x_0^2(3T^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + 8x_0x_1x_2x_3 + T^4 - \\ &- 2T^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2), \\ 0 &= x_0^3 + (T^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)x_0 + 2x_1x_2x_3. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

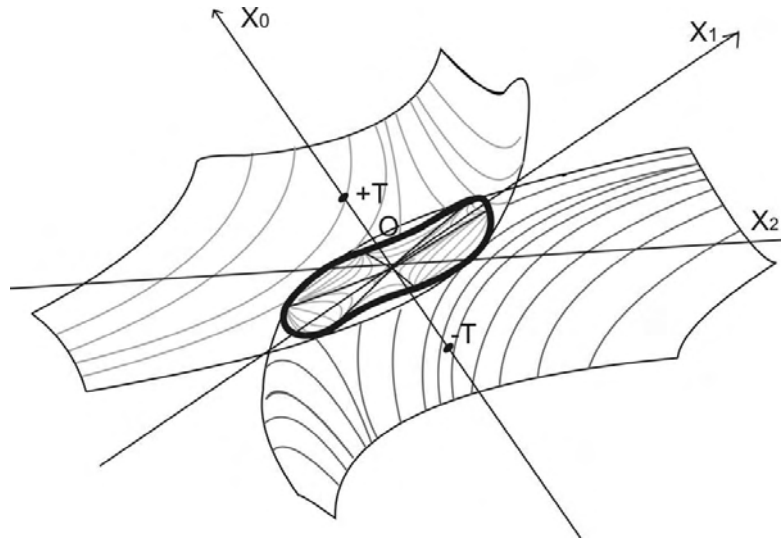


Рис. 3: Пересечение гиперboloидов в пространстве H_3

Изобразить, даже схематически, соответствующие системе уравнений (18) двумерные поверхности в четырехмерном пространстве затруднительно, поэтому для иллюстрации (рис. 3) мы воспользуемся более наглядным трехмерным случаем, соответствующим пространству H_3 , которое устроено аналогично исследуемому пространству H_4 и имеет в изотропном базисе метрическую форму:

$$S^3 = \xi_1\xi_2\xi_3. \quad (20)$$

Перейдя от (18) к системе уравнений (19), мы перешли от пересечения двух гиперboloидов к пересечению двух новых гиперповерхностей. Первая из них аналогична эквивалентна однополостному гиперboloиду пространства Минковского, а вторая – гиперплоскости $x_0 = 0$ псевдоевклидова пространства, поскольку каждая ее точка удалена на равные интервалы, как от точки $(-T, 0, 0, 0)$, так и от точки $(T, 0, 0, 0)$ (рис. 4). Однако теперь второе уравнение (19) определяет существенно нелинейную поверхность, что является следствием специфики финслеровых метрических функций более высокого порядка, чем квадратичная. С физической точки зрения такой гиперповерхности можно поставить в соответствие понятие относительной одновременности, в финслеровом случае имеющее смысл только тогда, когда указана конкретная система отсчета и характерный масштаб T , задающий интервал времени между мгновенным положением наблюдателя и событием, по отношению к которому эта одновременность определяется. В псевдоевклидовом случае указание конкретного масштаба было излишне, так как связанная с понятием относительной одновременности гиперплоскость оставалась одной и той же для всех интервалов, разделяющих наблюдателя и интересующий его слой относительно одновременных событий. В рассматриваемых линейных финслеровых пространствах это уже не так, что неизбежно приводит к необходимости переосмысления свойств времени, во всяком случае, для пространств с неквадратичной метрикой.

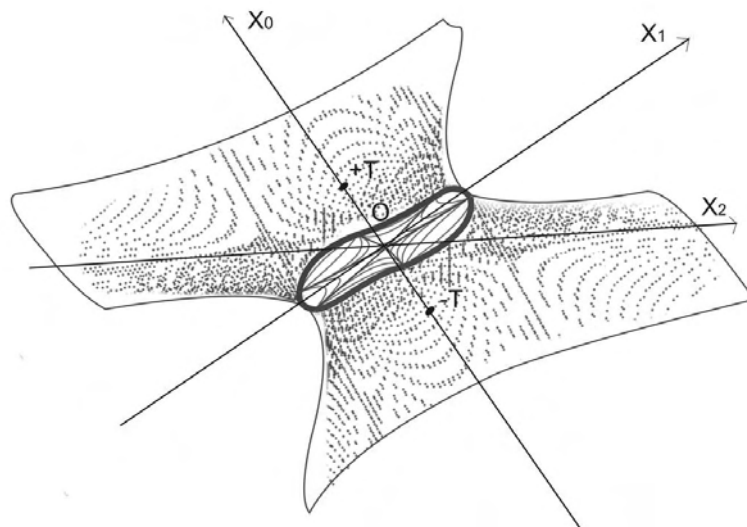


Рис. 4: Пересечение специальной поверхности с однополостным гиперboloидом в пространстве H_3

Пересечение гиперboloидов (18) с центрами в точках $(-T, 0, 0, 0)$ и $(T, 0, 0, 0)$ является множеством событий, которым с точки зрения наблюдателя, связанного с мировой линией, проходящей через эти точки, следует приписать одинаковые значения пространственной удаленности от данной мировой линии, то есть данного наблюдателя. Варьируя величину интервала S от 0 до T , мы получаем семейство таких двумерных поверхностей, вложенных друг в друга, каждой из которых отвечает только одно значение пространственного расстояния. Для того, чтобы каждое получающееся таким образом двумерное множество автоматически характеризовалось одним и тем же значением удаленности, нам достаточно присвоить конкретные величины расстояний хотя бы одной из точек каждой поверхности и распространить это значение уже на все ее точки. Для этого, как и в рассматривавшемся выше псевдоевклидовом случае, проще всего выбрать прямую, пересекающую все такие

поверхности, а линейному параметру l вдоль такой прямой поставить в соответствие величину, которую можно условиться называть расстоянием, но уже не в обычном псевдоевклидовом, а в линейном финслеровом пространстве-времени.

Из анализа системы уравнений (19) следует, что поверхности относительной одновременности пространства H_4 , соответствующей данному уравнению принадлежат все прямые, выходящие из начала координат и лежащие в одной из трех плоскостей: (x_1, x_2) , (x_1, x_3) или (x_2, x_3) . В частности, одной из таких прямых является ось x_1 , поэтому, принимая линейный закон соответствия расстояния l и координаты x_1 , из уравнений (19) получим связь расстояния l от наблюдателя до покоящихся относительно его других наблюдателей с радиусом S исходных гиперboloидов и половиной интервала между их центрами T . Для этого подставим в систему (19) $x_1 = l$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} S^4 &= x_0^4 + 2x_0^2(3T^2 - l^2) + T^4 - 2T^2l^2 + l^4, \\ 0 &= x_0^3 + (T^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)x_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из второго уравнения следует, что $x_0 = 0$, поэтому первое уравнение принимает вид

$$S^4 = T^4 - 2T^2l^2 + l^4. \quad (22)$$

Разрешая это уравнение относительно величины l , получим выражение

$$l = \sqrt{T^2 - S^2}. \quad (23)$$

Таким образом, трехмерное расстояние от мировой линии $(0, 0, 0)$ до параллельной ей мировой линии с координатами (x_1, x_2, x_3) выражается формулой:

$$l(T, x_1, x_2, x_3) = \sqrt{T^2 - S^2(T, x_1, x_2, x_3)}, \quad (24)$$

где $S^2(T, x_1, x_2, x_3)$ – корень квадратный из правой части первого соотношения (19) с заменой x_0 на действительный корень кубического уравнения (второго соотношения (19)) относительно неизвестной x_0 .

Получившееся выражение для трёхмерного расстояния помимо того, что оно существенно отличается от привычной сферически симметричной формулы (13), включает зависимость от явно отсутствующего в СТО параметра T . Эти отличия приводят к тому, что трехмерные расстояния в H_4 приобретают несколько необычные свойства. В частности, расстояние от мировой линии A до мировой линии B , как правило, не совпадает с расстоянием от B до A . Однако, подобные эффекты проявляются только когда хотя бы одним из модулей $|x_\alpha|$ нельзя пренебречь по сравнению с величиной T . Если третьими и более высокими степенями отношений $|x_\alpha|/T$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то выражение для расстояния (24) принимает вид:

$$l(T, x_1, x_2, x_3) \simeq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (25)$$

Качественно новой особенностью, проявившейся при построении поверхности относительно одновременных событий в H_4 по сравнению с пространством Минковского, оказалась необходимость конкретизации параметра T , имеющего размерность длины. Представляется логичным данный характерный масштаб, отсутствующий в явном виде в построениях СТО, связывать непосредственно с наблюдателем, то есть системой отсчета, и интерпретировать его, как дополнительный параметр, характеризующий систему отсчета и позволяющий в данной системе отсчета однозначно строить поверхность относительной одновременности.

Перейдем теперь к трехмерной скорости.

В пространстве H_4 две точки $(x_{(1)0}, x_{(1)1}, x_{(1)2}, x_{(1)3})$ и $(x_{(2)0}, x_{(2)1}, x_{(2)2}, x_{(2)3})$, вторая из которых находится в конусе будущего относительно первой, определяют вектор с координатами $(x_{(2)i} - x_{(1)i})$, которые можно переписать, введя понятие скорости:

$$(x_{(2)i} - x_{(1)i}) \equiv (x_{(2)0} - x_{(1)0})v_i, \quad (26)$$

где $v_0 \equiv 1$, а компоненты v_1, v_2, v_3 образуют вектор трехмерной скорости. Тогда интервал между этими двумя точками может быть записан через компоненты скорости следующим образом:

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt[4]{W}, \quad (27)$$

где

$$W = (1 + v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 - v_3)(1 - v_1 - v_2 + v_3). \quad (28)$$

Модуль v трехмерной скорости в пространстве H_4 должен обладать свойством

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})f(v), \quad (29)$$

где $f(v)$ – функция одного действительного переменного. Если только одна из компонент трехмерной скорости отлична от нуля, например v_1 , то естественно считать, что $v = |v_1|$, причем из формулы (27) следует, что в этом случае

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt{1 - v^2}. \quad (30)$$

Обобщая этот одномерный случай, как и в случае с трехмерным расстоянием, на произвольную скорость, получим

$$\sqrt{1 - v^2} = \sqrt[4]{W(v_1, v_2, v_3)}, \quad (31)$$

или

$$v = \sqrt{1 - \sqrt{W(v_1, v_2, v_3)}}. \quad (32)$$

В нерелятивистском приближении

$$v \simeq \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \quad (33)$$

Если же вектор $(1, v_1, v_2, v_3)$, а значит и вектор $(x_{(2)0} - x_{(1)0}, x_{(2)1} - x_{(1)1}, x_{(2)2} - x_{(1)2}, x_{(2)3} - x_{(1)3})$ стремится к изотропному направлению, то $v \rightarrow 1$. Отметим также, что в общем случае $W(-v_1, -v_2, -v_3) \neq W(v_1, v_2, v_3)$.

Сложение скоростей

Группа симметрии $G_1(H_4)$, оставляющая инвариантным интервал (1) и состоящая из непрерывных линейных преобразований вида

$$x'_i = \frac{1}{4}A_{ik}D_{km}A_{mj}x_j, \quad (34)$$

где

$$(D_{km}) = \text{diag}(\exp \varepsilon_0, \exp \varepsilon_1, \exp \varepsilon_2, \exp \varepsilon_3), \quad (35)$$

действительные параметры ε_i изменяются в пределах $(-\infty, \infty)$ и связаны соотношением

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad (36)$$

может быть параметризована тремя действительными величинами, V_1, V_2, V_3 , имеющими смысл компонент скорости, которую приобретает покоящийся объект после преобразования (35):

$$\exp \varepsilon_i = \frac{A_{ij}V_j}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (37)$$

где $i, j = 0, 1, 2, 3$; $V_0 = 1$. Если в исходной системе отсчёта объект имел скорость (v_1, v_2, v_3) , то в новой системе отсчёта этот же объект будет иметь скорость

$$\left. \begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1 + V_1 + v_2V_3 + v_3V_2}{1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3}, \\ v'_2 &= \frac{v_2 + V_2 + v_1V_3 + v_3V_1}{1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3}, \\ v'_3 &= \frac{v_3 + V_3 + v_1V_2 + v_2V_1}{1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Из определения группы $G_1(H_4)$ имеем

$$(x'_{(2)0} - x'_{(1)0})\sqrt{1 - (v')^2} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt{1 - v^2}, \quad (39)$$

что даёт формулу для модуля трёхмерной скорости в новой системе координат

$$v' = \sqrt{1 - \frac{(1 - v^2)(1 - V^2)}{(1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3)^2}}, \quad (40)$$

так как при преобразованиях (34) – (37)

$$x'_{(2)0} - x'_{(1)0} = \frac{1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3}{\sqrt{1 - V^2}}(x_{(2)0} - x_{(1)0}). \quad (41)$$

Если среди компонент v_α и V_α отличны от нуля только по одной компоненте вдоль одного и того же специального направления, например, $(v_1, 0, 0)$ и $(V_1, 0, 0)$, то формулы (38) совпадают с соответствующими формулами сложения скоростей в СТО.

Переход из покоящейся инерциальной системы в движущуюся

В данном разделе рассмотрим переход из старой (нештрихованной) системы отсчета в новую (штрихованную) систему отсчета, инерциально движущуюся со скоростью (V_1, V_2, V_3) относительно старой. Т. о. точка, движущаяся в старой системе отсчета со скоростью (V_1, V_2, V_3) , в новой системе отсчета будет двигаться со скоростью $(0, 0, 0)$. Формулы (34) – (36) останутся теми же, а вместо формулы (37) получим

$$\exp(-\varepsilon_i) = \frac{A_{ij}V_j}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (42)$$

то есть переходы от одной системы отсчета к другой, рассмотренные в предыдущем разделе и в данном, являются обратными друг к другу. Заметим, что замена в преобразовании (34) – (37) (V_1, V_2, V_3) на $(-V_1, -V_2, -V_3)$ не дает обратное преобразование к преобразованию (34) – (37).

Итак, при переходе к системе координат, движущейся со скоростью (V_1, V_2, V_3) , старые координаты будут выражаться через новые по формулам

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{1-V^2}} \cdot \hat{A} \cdot \begin{pmatrix} (1+V_1+V_2+V_3)(x'_0+x'_1+x'_2+x'_3) \\ (1+V_1-V_2-V_3)(x'_0+x'_1-x'_2-x'_3) \\ (1-V_1+V_2-V_3)(x'_0-x'_1+x'_2-x'_3) \\ (1-V_1-V_2+V_3)(x'_0-x'_1-x'_2+x'_3) \end{pmatrix}, \quad (43)$$

где матрица $\hat{A}$ имеет компоненты A_{ij} (6).

Рассмотрим это преобразование, когда компоненты скорости новой системы отсчета в старой по трем специальным направлениям все равны нулю, кроме одной компоненты, например, $V_1 \neq 0$, а $V_2 = 0$ и $V_3 = 0$. Тогда

$$V = |V_1|, \quad (44)$$

а формулы (43) принимают вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\ 0 & 0 & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{x'_0 + V_1 x'_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & x_1 &= \frac{V_1 x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\ x_2 &= \frac{x'_2 + V_1 x'_3}{\sqrt{1-V_1^2}} & x_3 &= \frac{V_1 x'_2 + x'_3}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (46)$$

Такое преобразование координат $(x'_0, x'_1) \leftrightarrow (x_0, x_1)$ совпадает с соответствующим преобразованием в СТО, а преобразование координат $(x'_2, x'_3) \leftrightarrow (x_2, x_3)$ отличается от соответствующих преобразования в СТО, где $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$.

Заключение

Пространство H_4 , являясь пространством ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел), алгебраически устроено весьма просто – оно изоморфно алгебре квадратных диагональных действительных матриц 4×4 . Это пространство есть неизотропное метрическое финслерово пространство с трехпараметрической абелевой группой симметрии и оно не сводится никоим образом к пространствам с квадратичной метрической функцией. Именно совместное рассмотрение и алгебраических, и геометрических свойств пространства H_4 приводит к появлению весьма нетривиального математического объекта. Как показано в настоящей работе, наполнение пространства H_4 , кроме алгебраической и геометрической структур, еще и физическим содержанием, делает его, несмотря на исходную алгебраическую простоту, еще более сложным и интересным. В нерелятивистском пределе (с точностью до второго порядка по отношению скорости физического объекта к скорости света) оно неотличимо как от пространства Галилея (то есть от пространства классической нерелятивистской механики), так и от пространства Минковского (СТО). Более того,

и в общем случае по некоторым выделенным направлениям и двумерным плоскостям свойства пространства H_4 совпадают с соответствующими свойствами пространства Минковского по тем же направлениям и плоскостям.

Так как отличие пространства H_4 от пространства Минковского связано с анизотропией первого и физическими эффектами порядка кубической и более высоких степеней отношений скоростей физических объектов к скорости света, вопрос о том, какое из пространств наиболее адекватно реальному Миру, на наш взгляд, остается открытым. Во всяком случае, представляется неоспоримой необходимость тщательного изучения пространства H_4 и ему подобных, тем более, что по ряду объективных и субъективных причин они оказались в стороне от основного направления современных геометрических и физических исследований и при этом вполне могут содержать в себе сущности, близкие к свойствам реального Мира.

Подчеркнем, что подход, предложенный в данной работе для получения модуля трёхмерной скорости и трёхмерного пространственного расстояния, применим для произвольного линейного финслерова пространства, если в нем некоторую специальную систему координат можно разделить на одну временную и остальные пространственные координаты.

Литература

- [1] Д. Г. Павлов, "Четырёхмерное время", Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 1, N 1, (2004), 33.
- [2] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner: Phys. Lett. A 244, N 4, (1988) 222.
- [3] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner: Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.
- [4] D. G. Pavlov: ArXiv: gr-qc/0206004.
- [5] Д. Г. Павлов, "Обобщение аксиом скалярного произведения", Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 1, N 1, (2004), 5.

О НОРМЕ БИКВАТЕРНИОНОВ И ИНЫХ АЛГЕБР С ЦЕНТРАЛЬНЫМ СОПРЯЖЕНИЕМ

А. А. Элиович

eliovich@mail.ru

В работе на примере алгебр бикватернионов и биоктав вводится понятие центрального сопряжения. С помощью предложенного метода анализа допустимых алгеброй сопряжений вводится ряд новых результатов. Доказывается, что алгебры с центральным сопряжением моноассоциативны. Доказывается, что альтернативные алгебры с центральным сопряжением обладают мультипликативной нормой 2 степени (вообще говоря, не вещественной). Как следствие, эти алгебры (в частности, бикватернионы и биоктавы) обладают мультипликативной вещественной нормой степени выше 2, которая может иметь несколько разных, но эквивалентных представлений. Вводится квадроскалярное и квадровекторное произведение. Для алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав ряд результатов представлен в изотропных базисах. Полученный аппарат может оказаться полезным при использовании алгебр бикватернионов и биоктав в геометрии и физики.

Введение

Бикватернионы – перспективная гиперкомплексная алгебра, являющаяся довольно естественным языком для релятивистской физики. Многие, кто когда-то были очарованы красотой кватернионов, вслед за этим переоткрывали и бикватернионы. Хороший обзор известных возможностей применения бикватернионов дан в [1]. Изучая бикватернионы десять лет назад, в 1994 г., автор установил для своего использования ряд фактов и формул, сочтя их слишком элементарными для публикации. Недавно выяснилось, что некоторые из этих фактов, по-видимому, остаются неизвестными, в том числе и для тех, кто работает с бикватернионами. В связи с этим, ряд вопросов в отношении бикватернионов до сих пор освещается некорректно. Распространено мнение, что бикватернионы а) обладают вещественной нормой 2 степени и б) норма бикватернионов не является мультипликативной (т. е. норма произведения не равна произведению норм). Это утверждение встречается даже в энциклопедических обзорах, например, [2]. Однако, подобная норма (механически записываемая в виде суммы и разности квадратов) не согласована с таблицей умножения бикватернионов и является для них довольно искусственной. Правильное утверждение, что бикватернионы обладают комплексной нормой 2 степени (и, как следствие, вещественной нормой 4 степени), встречается довольно редко. И автор ни разу не нашел в литературе указание на мультипликативность этой нормы.

Возможно, невнимание к формам степени выше 2 объясняется тем, что все классические полупростые группы Ли есть группы инвариантности той или иной квадратичной формы. Поскольку геометрии согласно Эрлангенской программе Клейна связаны с теми или иными группами, формы степени выше 2 выглядят излишними.

Данная работа основывается на двух идеях: 1) рассмотрение набора сопряжений, заданных в алгебре, позволяет доказать многие факты более простым и более общим образом, чем с помощью непосредственных алгебраических выкладок; 2) правильнее изучать полинормы, естественно возникающие в алгебрах, чем приписывать им квадратичную норму.

Нормы и скалярные произведения степени выше 2 на гиперкомплексных алгебрах ввел в 1950-х годах Р. Д. Шафер (R. D. Schafer) [5]–[7], установив ряд основополагающих фактов в данной области. В последнее время в России идею применения полином гиперкомплексных чисел в физике активно пропагандирует Д. Г. Павлов [9], [10].

В данной статье для лучшего понимания вопроса изучаются параллельно бикватернионы и дикватернионы, а также биоктавы.

Алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, биоктав

Кватернион (см., например, [3]) есть гиперкомплексное число

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3, \quad (1)$$

где a_i – вещественные числа, а орты $\mathbf{q}_i$ перемножаются согласно правилу умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j \mathbf{q}_k = -\delta_{jk} 1 + \varepsilon_{jkn} \mathbf{q}_n,$$

где δ_{jk} и ε_{jkn} – символы Кронекера и Леви-Чивиты ($j, k, n = 1, 2, 3$).

Бикватернионы есть кватернионы, определенные над полем комплексных чисел. *Дикватернионы* – это кватернионы, определенные над алгеброй двойных чисел. В связи с этим, эти числа можно по-прежнему записывать в виде (1), имея в виду под коэффициентами a_i уже комплексные (двойные) числа. Однако, мы примем более свободную трактовку бикватернионов (дикватернионов) как 8-мерной алгебры над полем вещественных чисел, состоящей из двух блоков:

$$\mathbf{a} = a + k \cdot \mathbf{i}_0, \quad (2)$$

или, в развернутой записи,

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3, \quad (3)$$

где a, k – кватернионы с вещественными коэффициентами. $\mathbf{i}_0$ является внешней единицей, коммутирующей с кватернионами a, k ; $\mathbf{i}_0^2 = -1$ для бикватернионов и $+1$ для дикватернионов, единицы $\mathbf{i}_j$ – результат внешнего (тензорного) произведения $\mathbf{i}_0 \otimes \mathbf{q}_j$. (Мы будем использовать для удобства изложения одинаковое обозначение $\mathbf{i}_0$ для обеих алгебр, поскольку перемешиваться в данной работе они не будут.) Отсюда вытекает правило умножения бикватернионов (дикватернионов) в блочном и табличном виде:

$$(a + k \cdot \mathbf{i}_0)(b + l \cdot \mathbf{i}_0) = ab \mp kl + (al + kb) \cdot \mathbf{i}_0. \quad (4)$$

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	∓ 1	$\mp \mathbf{q}_1$	$\mp \mathbf{q}_2$	$\mp \mathbf{q}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mp \mathbf{q}_1$	± 1	$\mp \mathbf{q}_3$	$\pm \mathbf{q}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mp \mathbf{q}_2$	$\pm \mathbf{q}_3$	± 1	$\mp \mathbf{q}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mp \mathbf{q}_3$	$\mp \mathbf{q}_2$	$\pm \mathbf{q}_1$	± 1

(Tab. 1)

Дуокватернионы есть кватернионы, определенные над полем дуальных чисел. Они в данной статье изучаться не будут.

Октонионы, или октавы, (см. [3] и [4]) есть гиперкомплексные числа вида

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 + A_0 \mathbf{e}_0 + A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3, \quad (5)$$

где правило умножения орт $\mathbf{q}_i, \mathbf{e}_j$ определяется на основании формулы удвоения Кэли-Диксона кватернионов:

$$(a + A \cdot \mathbf{e}_0)(b + B \cdot \mathbf{e}_0) = ab - \bar{B}A + (Ba + A\bar{b}) \cdot \mathbf{e}_0, \quad (6)$$

(a, b, A, B – кватернионы, $\bar{b}$ – сопряженный кватернион b , об этом см. далее). Если снять различие между мнимыми элементами $\mathbf{q}_i$ и $\mathbf{e}_j$ ($\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{q}_{j+4}$), правило умножения может быть выражено следующим образом:

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = -\delta_{ij} \cdot 1 + C_{ijk} \mathbf{q}_k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 7, \quad (7)$$

где полностью антисимметричные октонионные структурные константы C_{ijk} равны

$$C_{123} = C_{145} = C_{176} = C_{246} = C_{257} = C_{347} = C_{365} = 1 \quad (8)$$

(и обращаются в нуль в при других сочетаниях индексов).

Для удобства приведем таблицу умножения октав:

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	-1

(Tab. 2)

Наконец, биоктавы (биоктонионы) – это октавы, определенные над полем комплексных чисел. Из определения вытекает правило их умножения в блочном виде:

$$(a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0)(b + B \cdot \mathbf{e}_0 + l \cdot \mathbf{i}_0 + L \cdot \mathbf{f}_0) = ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K + (Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}) \cdot \mathbf{e}_0 + (al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) \cdot \mathbf{i}_0 + (La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l}) \cdot \mathbf{f}_0, \quad (9)$$

где $\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{e}_0$. Его можно записать в виде символической таблицы (для удобства таблица умножения приведена и в полном виде):

$\times$	b	$B \cdot \mathbf{e}_0$	$l \cdot \mathbf{i}_0$	$L \cdot \mathbf{f}_0$
a	ab	$Ba \cdot \mathbf{e}_0$	$al \cdot \mathbf{i}_0$	$La \cdot \mathbf{f}_0$
$A \cdot \mathbf{e}_0$	$A\bar{b} \cdot \mathbf{e}_0$	$-\bar{B}A$	$A\bar{l} \cdot \mathbf{f}_0$	$-\bar{L}A \cdot \mathbf{i}_0$
$k \cdot \mathbf{i}_0$	$k\bar{b} \cdot \mathbf{i}_0$	$Bk \cdot \mathbf{f}_0$	$-kl$	$-Lk \cdot \mathbf{e}_0$
$K \cdot \mathbf{f}_0$	$K\bar{b} \cdot \mathbf{f}_0$	$-\bar{B}K \cdot \mathbf{i}_0$	$-K\bar{l} \cdot \mathbf{e}_0$	$\bar{L}K$

и (Tab. 3)

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$
$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$
$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{q}_1$	1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

(Tab. 4)

Эта таблица содержит в качестве фрагментов таблицы умножения бикватернионов и октав.

Центральное сопряжение

Алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов обладают замечательными свойствами, которые вытекают из существования в этих алгебрах "очень хорошего" сопряжения.

Под сопряжениями принято понимать линейные инволюционные антиавтоморфизмы:

$$\begin{aligned}
 C(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) &= \lambda C(\mathbf{a}) + \mu C(\mathbf{b}) \quad (\lambda, \mu - \text{вещественные числа, линейность}), \\
 C(C(\mathbf{a})) &= \mathbf{a} \quad (\text{инволюция}), \\
 C(\mathbf{ab}) &= C(\mathbf{b}) \cdot C(\mathbf{a}) \quad (\text{антиавтоморфизм}).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Благодаря этим свойствам, выражения

$$\Re(\mathbf{a}) = 1/2(\mathbf{a} + C(\mathbf{a})) \quad (\text{реальная часть } \mathbf{a}), \tag{11}$$

$$N_r = \mathbf{a} \cdot C(\mathbf{a}) \quad (\text{правая 2-норма } \mathbf{a}), \tag{12}$$

$$N_l = C(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{левая 2-норма } \mathbf{a}), \tag{13}$$

не изменяются при сопряжении (назовем их *инвариантными* или *реальными* для данного сопряжения):

$$C(\Re(\mathbf{a})) = \Re(\mathbf{a}), \quad C(N(\mathbf{a})) = N(\mathbf{a}). \tag{14}$$

При этом

$$\Re(C(\mathbf{a})) = \Re(\mathbf{a}), \quad \text{но вообще говоря} \quad N(C(\mathbf{a})) \neq N(\mathbf{a}). \quad (15)$$

Подчеркнем, что хотя инвариантные выражения вводятся по тем же формулам, что и для классических алгебр кватернионов и октав, они, вообще говоря, могут и не являться вещественными числами. Однако, такая запись нормы выглядит все же более правомерной, чем вещественное выражение в виде суммы или разности квадратов, никак не укорененное в свойствах алгебры. Будем называть $\mathbf{a} \cdot C(\mathbf{a})$ и $C(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}$ *естественными 2-нормами* гиперкомплексной алгебры (правой и левой), подчеркивая их согласованность с таблицей умножения.

Отметим, что далеко не во всех гиперкомплексных алгебрах существует сопряжение, "плохих" гиперкомплексных алгебр без сопряжения несопоставимо больше.

Для кватернионов сопряжение $\bar{\mathbf{a}}$ можно ввести по следующему правилу:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3. \quad (16)$$

Это сопряжение может быть выражено через операции данной алгебры (будем называть такие сопряжения *согласованными с умножением алгебры*):

$$\bar{\mathbf{a}} = -1/2(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3), \quad (17)$$

и как следствие:

$$\Re(a) = 1/2(\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) = 1/4(\mathbf{a} - \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3). \quad (18)$$

В справедливости соотношения (17) легко убедиться, если учесть, что отображение $\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{q}_k\mathbf{a}\mathbf{q}_k$ меняет все компоненты, кроме $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_k$. Отметим, что сопряжение комплексных чисел не может быть выражено через умножение и сложение в силу коммутативности алгебры комплексных чисел; его приходится вводить "руками".

Учитывая, что бикватернионы и дикватернионы есть прямо удвоенные кватернионы, аналогичное *кватернионное сопряжение* $\bar{\mathbf{a}}$ для них можно ввести по очевидному правилу:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} &= a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3, \\ & \text{(запись с комплексными коэффициентами),} \\ \bar{\mathbf{a}} &= a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3, \\ & \text{(полная запись с вещественными коэффициентами),} \\ \bar{\mathbf{a}} &= \overline{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{a} + \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0 \\ & \text{(сокращенная запись).} \end{aligned} \quad (19)$$

Это сопряжение опять же согласовано с умножением. Для бикватернионов (верхний знак) и дикватернионов (нижний):

$$\bar{\mathbf{a}} = -1/4(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3) \pm 1/4(\mathbf{i}_0\mathbf{a}\mathbf{i}_0 - \mathbf{i}_1\mathbf{a}\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2\mathbf{a}\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3\mathbf{a}\mathbf{i}_3), \quad (20)$$

(Учитываем, что отображение $\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{q}_k\mathbf{a}\mathbf{q}_k$ меняет все компоненты, кроме $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_k$; отображение $\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{i}_k\mathbf{a}\mathbf{i}_k$ ведет себя точно так же для дикватернионов и обратным образом для бикватернионов).

Однако, для изучения 4-нормы и 4-скалярного произведения в алгебрах бикватернионов и дикватернионов этого сопряжения, как мы увидим ниже, недостаточно.

Введем поэтому второе, *дуальное кватернионное сопряжение* по следующему правилу (записи в той же последовательности):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}} &= a_0^* - a_1^* \mathbf{q}_1 - a_2^* \mathbf{q}_2 - a_3^* \mathbf{q}_3, \\ \tilde{\mathbf{a}} &= a_0 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3. \\ \tilde{\mathbf{a}} &= \widetilde{\alpha + k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{\alpha} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0\end{aligned}\quad (21)$$

Сопряжение $\tilde{\mathbf{a}}$ (21) также является инволюционным антиавтоморфизмом и поэтому заслуживает название сопряжения. Однако, сопряжение $\tilde{\mathbf{a}}$ не согласовано с умножением алгебры: из-за коммутативности орта $\mathbf{i}_0$ со всеми прочими ортами его невозможно подвергнуть отражению с помощью умножения и сложения.

Замечание 1. Рассмотрим комбинацию сопряжений $\tilde{\mathbf{a}}$ (записи в прежней последовательности):

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\mathbf{a}}} &= a_0^* + a_1^* \mathbf{q}_1 + a_2^* \mathbf{q}_2 + a_3^* \mathbf{q}_3, \\ \tilde{\tilde{\mathbf{a}}} &= a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 - k_0 \mathbf{i}_0 - k_1 \mathbf{i}_1 - k_2 \mathbf{i}_2 - k_3 \mathbf{i}_3, \\ \tilde{\tilde{\mathbf{a}}} &= \widetilde{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = a - k \cdot \mathbf{i}_0.\end{aligned}\quad (22)$$

Иначе говоря, это преобразование $\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}$ есть *комплексное сопряжение*, внешнее для кватернионов a, k . Обозначим его $\mathbf{a}^*$. Оно является инволюцией и автоморфизмом (а не антиавтоморфизмом):

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} \quad \text{и} \quad (\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^* \mathbf{b}^*. \quad (23)$$

Как следствие, выражение $\mathbf{aa}^*$ изменяется при сопряжении своего рода (иначе говоря, не является инвариантным, реальным для него):

$$(\mathbf{aa}^*)^* = \mathbf{a}^* \mathbf{a} \neq \mathbf{aa}^*. \quad (24)$$

В связи с этим, комбинированное преобразование (комплексное сопряжение) $\mathbf{a}^*$, строго говоря, не является сопряжением данной алгебры. Кроме того, поскольку комплексное сопряжение $\mathbf{a}^*$ изменяет знак орта $\mathbf{i}_0$, коммутирующего со всеми остальными ортами алгебр $\mathbb{H}_c$, оно не согласуется с умножением алгебры.

Самое важное преимущество базового сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (19) перед дуальным сопряжением $\tilde{\mathbf{a}}$ в том, что гиперкомплексные числа, реальные (инвариантные) относительно $\bar{\mathbf{a}}$, содержат в себе только орты 1 и $\mathbf{i}_0$ и поэтому, подобно вещественным числам, коммутируют с любыми числами алгебры. Данное свойство кватернионного сопряжения и является источником ряда хороших свойств алгебр кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, а также октав и биоктав. Важно, что далеко не все алгебры располагают таким "хорошим" сопряжением.

Более строго, реальные (инвариантные) относительно базового сопряжения элементы $\mathbf{r}$:

- 1) алгебраически замкнуты;
- 2) коммутируют со всеми элементами алгебрами $\mathbf{ar} = \mathbf{ra}$;
- 3) ассоциативно умножаются на любые элементы алгебры $\mathbf{r} \cdot \mathbf{ab} = \mathbf{ra} \cdot \mathbf{b}$.

Иначе говоря, они принадлежат коммутативному и одновременно ассоциативному центрам алгебры, т. е. центру алгебры в его обычном понимании. Итак, введем

Определение. *Сопряжение, реальные (инвариантные) числа которого принадлежат центру алгебры будем называть центральным.*

Далее алгебры, в которых существует центральное сопряжение, будем обозначать $\mathbb{A}_c$. Все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры (в частности, все алгебры бесконечной последовательности Кэли-Диксона), со всеми их комплексификациями (а равно и гиперболическими удвоениями), – алгебры с центральным сопряжением.

Замечание 2. Любые алгебры, обладающие естественной нормой 2 степени (т. е. нормой вида $a\bar{a}$, согласованной с таблицей умножения алгебры), являются алгебрами с центральным сопряжением (центр при этом сводится к вещественным числам). Поэтому все результаты для алгебр с центральным сопряжением есть вместе с тем и результаты для алгебр с квадратичной нормой.

Замечание 3. В силу того, что коммутативный центр алгебры $\mathbb{A}_c$ является (вообще говоря) подмножеством ассоциативного центра, справедливо

$$r_i q_n \cdot r_j q_m = r_i r_j \cdot q_n q_m.$$

Это значит, что алгебра с центральным сопряжением $\mathbb{A}_c$ представляет собой внешнее (тензорное) произведение своего центра $\mathbb{Z}$ на некоторую подалгебру $\mathbb{A}_0$, иначе говоря, является алгеброй $\mathbb{A}_0$ над своим центром $\mathbb{Z}$.

В принципе, почти все рассуждения данной статьи справедливы при более слабом условии принадлежности реальных (инвариантных) элементов сопряжения не ассоциативному, а альтернативному центру алгебры. В этом случае алгебра $\mathbb{A}_c$ уже не сводится к тензорному произведению своего центра $\mathbb{Z}$ на подалгебру $\mathbb{A}_0$. Однако неясно, является ли такое расширение понятия действительно содержательным.

Везде в настоящей статье будет подразумеваться, что алгебры обладают единицей и что они заданы над полем характеристики 0.

Моноассоциативность алгебр с центральным сопряжением

Итак, для коммутатора $[a, b]$ элементов алгебр $\mathbb{A}_c$ с центральным сопряжением (и, в том числе, кватернионов, бикватернионов и дикватернионов) справедливо:

$$[a, r] = 0, \quad \text{где} \quad r = \bar{r}, \quad (25)$$

($\bar{a} \equiv C(a)$ – базовое сопряжение алгебры $\mathbb{A}_c$) и, в частности,

$$[a, b + \bar{b}] = 0, \quad [a, b\bar{b}] = 0 \quad (26)$$

Из (26) немедленно следует

$$[a, b] = [\bar{b}, a], \quad (27)$$

и поэтому

$$[a, \bar{a}] = [a, a] = 0, \quad \text{то есть} \quad a\bar{a} = \bar{a}a. \quad (28)$$

Это означает, что верна

Лемма 1. В алгебрах с центральным сопряжением совпадают правая и левая 2-нормы:

$$N_l(a) \equiv \bar{a}a = N_r(a) \equiv a\bar{a}. \quad (29)$$

Но тогда верно следующее:

$$a \cdot \bar{a}a = a \cdot r = r \cdot a = \bar{a}a \cdot a = a\bar{a} \cdot a \quad (r \equiv \bar{a}a \in \text{центру алгебры}), \quad (30)$$

или, короче,

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}. \quad (31)$$

Поэтому прямым следствием Леммы 1 является степенная ассоциативность (моноассоциативность) алгебр $\mathbb{A}_c$ – ассоциативность подалгебры, состоящей из всех возможных произведений одного элемента ($\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{n+k}$). В самом деле, как известно, алгебра будет являться моноассоциативной, если в ней верны два тождества:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}\mathbf{a} = (\mathbf{a}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}. \quad (32)$$

Первое из этих свойств немедленно следует из (31), поскольку всякий элемент $\mathbf{a}$ алгебры $\mathbb{A}_c$ можно представить в виде суммы мнимой и реальной (инвариантной) относительно базового сопряжения алгебры частей $\mathbf{q}$ и $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{a} = 1/2(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) + 1/2(\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{q} + \mathbf{s}; \quad C(\mathbf{q} + \mathbf{s}) = -\mathbf{q} + \mathbf{s}$$

и реальные элементы умножаются ассоциативно ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}$). Аналогичным образом легко видеть, что

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}\mathbf{a} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}\mathbf{a} = \mathbf{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a},$$

откуда в силу принадлежности $\mathbf{s} = \Re(\mathbf{a})$ ассоциативному центру алгебры немедленно следует второе из свойств (32). Итак, доказана

Теорема 1. *Всякая алгебра с центральным сопряжением моноассоциативна.*

А вместе с ней и

Теорема 1b. *Всякая алгебра, обладающая согласованной с алгеброй квадратичной нормой, моноассоциативна.*

Хотя эти результаты, как видим, доказываются (на основе метода анализа сопряжений, допустимых в алгебре) очень просто, они, по-видимому, являются новыми.

Прочие ассоциативные свойства алгебр $\mathbb{A}_c$

Для упрощения дальнейших выкладок введем, как принято, ассоциатор

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \equiv (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}). \quad (33)$$

С очевидностью он линеен по каждому из элементов. В ассоциативных алгебрах ассоциатор тождественно равен нулю. В альтернативных он антисимметричен по всем переменным:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = -\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\} \quad (\text{правая альтернативность}), \quad (34)$$

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = -\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\} \quad (\text{левая альтернативность}). \quad (35)$$

Как следствие, ассоциатор цикличен:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = \{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}. \quad (36)$$

Альтернативные алгебры, с очевидностью, эластичны:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \text{поскольку в них} \quad (37)$$

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\} = -\{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0.$$

Но обратное неверно: не всякая эластичная алгебра альтернативна. Отметим, что свойство эластичности с очевидностью эквивалентно

$$\{a, b, c\} = -\{c, b, a\}. \quad (38)$$

Легко показать, что всякая алгебра, полученная удвоением Кэли-Диксона (6) из эластичной алгебры, также эластична. Таким образом, эластична вся бесконечная цепочка алгебр Кэли-Диксона, начинающаяся с вещественных чисел.

Во всякой альтернативной алгебре, как известно и как легко показать, справедливы тождества

$$\{a, b, bc\} = \{a, b, c\}b, \quad \{a, b, cb\} = b\{a, b, c\}, \quad (39)$$

из которых следуют известные тождества Муфанг:

$$\begin{aligned} (ab \cdot c)b &= a(bcb) & - & \text{правое,} \\ (aba)c &= a(b \cdot ac) & - & \text{левое,} \\ ab \cdot ca &= a(bc)a & - & \text{центральное.} \end{aligned} \quad (40)$$

С помощью этих соотношений и их линеаризаций легко доказывается теорема Артина: в альтернативной алгебре любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. (При линеаризации тождества приводятся к линейным по каждому переменному. Для этого повторяющийся элемент a заменяется на, допустим, $a + d$, после чего сокращаются уже известные тождества с повторяющимися переменными.)

Можно показать, что для алгебр с центральным сопряжением эластичность эквивалентна важному для физических приложений свойству *йордановости*:

$$a^2b \cdot a = a^2 \cdot ba \quad \text{или} \quad \{a^2, b, a\} = 0, \quad (41)$$

но в общем случае алгебр с единицей йордановость сильнее (уже) эластичности.

Для алгебр с центральным сопряжением альтернативность эквивалентна следующему полезному при выкладках свойству (назовем его *сопряженной альтернативностью*):

$$a \cdot \bar{b}b = a\bar{b} \cdot b \quad \text{и одновременно} \quad a \cdot \bar{a}b = a\bar{a} \cdot b, \quad (42)$$

а значит

$$\{a, \bar{b}, b\} = 0 \quad \text{и} \quad \{a, \bar{a}, b\} = 0, \quad (43)$$

или иначе

$$\{a, b, c\} = -\{a, \bar{c}, \bar{b}\} \quad \text{и} \quad \{a, b, c\} = -\{\bar{b}, \bar{a}, c\}. \quad (44)$$

Отметим, что сопряженная альтернативность вообще говоря сильнее (уже) альтернативности: если реальные элементы принадлежат коммутативному но не ассоциативному центру алгебры, из сопряженной альтернативности следует альтернативность, но не наоборот.

Подытожим все сказанное в виде иерархии уровней ассоциативных свойств (из верхних уровней вытекают нижние, но вообще говоря не наоборот):

ассоциативность:	$a \cdot bc = ab \cdot c$	$\{a, b, c\} = 0;$
альтернативность:	$a \cdot bb = ab \cdot b$	$\{a, b, c\} = -\{a, c, b\} \quad \{a, b, b\} = 0$
вместе с	$a \cdot ab = aa \cdot b$	$\{a, b, c\} = -\{b, a, c\} \quad \{a, a, b\} = 0;$
йордановость:	$a^2 \cdot ba = a^2b \cdot a$	$\{a^2, b, a\} = 0;$
эластичность:	$a \cdot ba = ab \cdot a$	$\{a, b, c\} = -\{c, b, a\} \quad \{a, b, a\} = 0;$
моноассоциативность:	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\{a^2, a, a\} = 0 \quad \{a, a, a\} = 0;$

Наконец, для дальнейшего важно, что ассоциатор элемента центра алгебры (в алгебрах $\mathbb{A}_c$ – реального элемента) с любыми элементами равен нулю:

$$\{\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0. \quad (45)$$

Мультипликативность 2-нормы алгебр $\mathbb{A}_c$

Существование центрального сопряжения (свойство (25)) в алгебрах $\mathbb{A}_c$ вместе с дополнительным условием их альтернативности имеет своим следствием замечательное свойство мультипликативности (комплексной, двойной и т. п.) 2-нормы в этих алгебрах. (Норма произведения равна произведению норм.) Цепочка рассуждений здесь такова (используется свойство сопряженной альтернативности):

$$N_2(\mathbf{ab}) = \mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}). \quad (46)$$

Доказательство основывается на свойстве $\mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}})$. Оно очевидным образом выполняется в альтернативных (и потому сопряженно-альтернативных) алгебрах. В самом деле,

$$\mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\}.$$

В силу сопряженной альтернативности это выражение равно

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\} &= -\{\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \bar{\mathbf{b}}\} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{ab})\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{a}(\mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}) = \\ &= (\mathbf{aa} \cdot \mathbf{b})\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = \mathbf{aa} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}\} = 0. \end{aligned}$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Всякая альтернативная алгебра с центральным сопряжением обладает мультипликативной (вообще говоря, не вещественной) 2-нормой $N_2 = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}$.*

Поскольку достаточно не ассоциативности, а альтернативности алгебры, мультипликативной 2-нормой (комплексной, двойной и т. п.) обладают не только алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, вместе со всевозможными биби-биди- диди- и т. п. кватернионами, но и октавы, комплексные биоктавы и двойные диоктавы и прочие всевозможные биби- биди- диди- октавы.

А что можно сказать, если мы имеем произвольную, неальтернативную алгебру с центральным сопряжением? Легко доказать следующую теорему:

Теорема 3. *В любой алгебре с центральным сопряжением 2-норма квадрата элемента равна квадрату 2-нормы этого элемента:*

$$N_2(\mathbf{aa}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}). \quad (47)$$

А значит, верна и

Теорема 3b. *В любой алгебре с естественной квадратичной нормой норма квадрата элемента равна квадрату нормы этого элемента.*

В самом деле, используя степенную ассоциативность алгебр $\mathbb{A}_c$:

$$N_2(\mathbf{aa}) = \mathbf{aa} \cdot \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})\mathbf{a} = (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a})\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}). \quad \square$$

Опять же, результат получается на основе метода анализа сопряжений легко, но по-видимому, является новым.

2-скалярное и 2-векторное произведения в алгебрах $\mathbb{A}_c$

Сначала докажем несколько важных вспомогательных результатов.

Лемма 2. *Для сопряжения ассоциатора справедливо:*

$$\overline{\{a, b, c\}} = -\{\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}\} \quad (48)$$

В самом деле,

$$\overline{\{a, b, c\}} = C((ab \cdot c - a \cdot bc)) = \bar{c} \cdot \bar{b}\bar{a} - \bar{c}\bar{b} \cdot \bar{a} = -\{\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}\}.$$

С помощью Леммы 2 легко доказываются две теоремы:

Теорема 4. *В эластичных алгебрах с центральным сопряжением ассоциатор чисто мним.*

В самом деле, согласно (45), ассоциатор элементов a, b, c в алгебрах $\mathbb{A}_c$ сводится к ассоциатору чисто мнимых элементов p, q, g и тогда

$$C(\{a, b, c\}) = C(\{p, q, g\}) = -\{\bar{g}, \bar{q}, \bar{p}\} = +\{g, q, p\} = -\{p, q, g\} = -\{a, b, c\}. \quad \square$$

Теорема 5. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением произведение трех элементов под знаком реальной части ассоциативно:*

$$\Re(ab \cdot c) = \Re(a \cdot bc). \quad (49)$$

(Заметим, что для произведения произвольного числа элементов это не так.)

В самом деле, это равенство есть ничто иное, как

$$\Re(ab \cdot c - a \cdot bc) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Re(\{a, b, c\}) = 0,$$

а это для эластичных алгебр выполняется согласно Теореме 4. $\square$

Далее, применяя (27) два раза, получим

$$[a, b] = [\bar{a}, \bar{b}]. \quad (50)$$

Это означает, что коммутатор двух элементов алгебры $\mathbb{A}_c$ является чисто мнимым относительно центрального сопряжения этой алгебры:

$$\overline{[a, b]} = \overline{(ab - ba)} = \bar{b}\bar{a} - \bar{a}\bar{b} = -(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{a}) = -[\bar{a}, \bar{b}] = -[a, b].$$

Однако, антикоммутатор $\{a, b\} = ab + ba$ реальным, вообще говоря, не является.

Из (50) вытекает

Теорема 6. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением возможна циклическая перестановка сомножителей под знаком реальной части.*

В самом деле,

$$ab - ba = \bar{a}\bar{b} - \bar{b}\bar{a} \Rightarrow ab + \bar{b}\bar{a} = \bar{a}\bar{b} + ba,$$

то есть

$$\Re(ab) = \Re(\bar{a}\bar{b}) = \Re(\bar{b}\bar{a}) = \Re(ba), \quad (51)$$

и, как следствие, в силу Теоремы 5

$$\Re(a \cdot bc) = \Re(ab \cdot c) = \Re(c \cdot ab) = \Re(ca \cdot b) = \Re(b \cdot ca). \quad \square \quad (52)$$

Введем теперь по тем же формулам, что и для кватернионов и октав, *правое и левое 2-скалярное произведение*. Подчеркнем, что оно теперь может и не быть вещественным числом (но обладает преимуществом согласованности с алгеброй):

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b})_p &\equiv \Re(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b})_l &\equiv \Re(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}).\end{aligned}\quad (53)$$

С очевидностью,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad \text{и} \quad (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})_p = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_l.$$

Из (51) следует

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_p = \Re(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = \Re(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})_p = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_l.$$

Иначе говоря, для алгебр $\mathbb{A}_c$ правое и левое 2-скалярные произведения совпадают, а кроме того

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}). \quad (54)$$

2-норма и 2-скалярное произведение связаны очевидной формулой:

$$N(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}) + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (55)$$

и следовательно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(N(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - N(\mathbf{a}) - N(\mathbf{b})), \quad (56)$$

и, в частности,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = N(\mathbf{a}), \quad (57)$$

поэтому совпадение правых и левых 2-норм и совпадение правых и левых 2-скалярных произведений связаны непосредственно.

Лемма 3. В альтернативных алгебрах с центральным сопряжением выполняется:

$$(\mathbf{ab}, \mathbf{cd}) + (\mathbf{ad}, \mathbf{cb}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}), \quad (58)$$

$$(\mathbf{ab}, \mathbf{cb}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})N_2(\mathbf{b}). \quad (59)$$

Эти формулы являются более общим выражением свойства мультипликативности нормы алгебр $\mathbb{A}_c$ и могут быть получены из него линеаризацией. (В равенство

$$N_2(\mathbf{ab}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}), \quad \text{то есть} \quad (\mathbf{ab}, \mathbf{ab}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}),$$

вместо $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ подставляются $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{b} + \mathbf{d}$, после чего сокращаются тождества мультипликативности нормы по каждому из переменных.)

Введем теперь, как это принято, *левое и правое векторные произведения*:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l &\equiv \Im(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}) \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_p &\equiv \Im(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}})\end{aligned}\quad (60)$$

С очевидностью, выполняется:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_p = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle_l. \quad (61)$$

Отметим, что для векторных произведений

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle \quad \text{или} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_p \neq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l.$$

Вместо этого, в силу свойства (45), в эластичных алгебрах с центральным сопряжением выполняется:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle^2, \quad \text{т. е.} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_p^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l^2, \quad (62)$$

однако, не является верным равенство

$$(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle)^2 \neq (\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{d}} \rangle)^2.$$

Для векторных произведений в альтернативных алгебрах $\mathbb{A}_c$, как несложно показать, справедлива формула, связанная с их мультипликативностью и сходная с (59):

$$\langle \mathbf{ca}, \mathbf{da} \rangle^2 = N_2^2(\mathbf{a}) \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle^2 = \langle \mathbf{ac}, \mathbf{ad} \rangle^2. \quad (63)$$

В ассоциативных алгебрах $\mathbb{A}_c$ эту формулу, с очевидностью, можно усилить до:

$$\langle \mathbf{ca}, \mathbf{da} \rangle_p = N_2(\mathbf{a}) \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle_p \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{ac}, \mathbf{ad} \rangle_l = N_2(\mathbf{a}) \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle_l. \quad (64)$$

В эластичных алгебрах $\mathbb{A}_c$ выполняется:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle_p \mathbf{a} = \mathbf{a} \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle_p \quad \text{и} \quad \mathbf{a} \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle_l = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle_l \mathbf{a}. \quad (65)$$

В альтернативных алгебрах $\mathbb{A}_c$ верно тождество

$$N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2. \quad (66)$$

Далее, если не указан индекс p или l , будет иметься в виду правое векторное произведение.

Геометрический аспект ассоциативных свойств: об алгебре, напрямую связанной с нормой Минковского

Значение ассоциативных свойств для геометрии, естественно порождаемой алгеброй, можно проиллюстрировать на одном довольно простом и наглядном примере.

Зададимся вопросом, какая гиперкомплексная алгебра соответствует напрямую метрике Минковского:

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (67)$$

Таких алгебр можно сконструировать, отталкиваясь от алгебры кватернионов, несколько, они будут распадаться на два класса с несколько разными свойствами. Рассмотрим, к примеру, две таблицы умножения:

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

(Tab. 5a)

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

(Tab. 5b)

Сопряжение в таких алгебрах существует и задается обычным образом (все орты, кроме 1, полагаются мнимыми):

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 \cdot 1 - a_1 \mathbf{q}_1 - a_2 \mathbf{q}_2 - a_3 \mathbf{q}_3.$$

Поскольку реальная часть элемента алгебр есть просто вещественное число, перед нами алгебры с центральным сопряжением. Естественная квадратичная норма также является вещественным числом и совпадает с метрикой Минковского:

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.$$

Рассматриваемые алгебры, с очевидностью, неассоциативны и, более того, неальтернативны:

$$\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1, \quad \text{но} \quad \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_3\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3(-\mathbf{q}_2) = -\mathbf{q}_1.$$

Вторая из алгебр даже не эластична (хотя согласно Теореме 1b, она, как и все алгебры с естественной квадратичной нормой, моноассоциативна). Убедиться в этом не так просто, как в случае неальтернативности: произведения орт будут всегда удовлетворять свойству эластичности (это связано с тем, что квадрат орта равен вещественному числу ± 1). С помощью (45), эластичность можно свести к эластичности произведения мнимых частей $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= 0 \quad \text{или} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} \cdot \overline{\mathbf{p}\mathbf{q}} &= 2\Re(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\mathbf{q}) = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Таким образом, получается удобный для практики критерий эластичности:

Алгебра с центральным сопряжением эластична, если в ней выражение из мнимых элементов $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\mathbf{q}$ не содержит реальных членов.

В данной же алгебре, как несложно убедиться,

$$\Re(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\mathbf{q}) = a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0.$$

Наконец, как и во всех алгебрах с квадратичной нормой, в обеих алгебрах норма квадрата элемента равна квадрату его нормы:

$$N_2(\mathbf{a}\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}).$$

Это тождество можно проверить и напрямую. Поскольку норма

$$\mathbf{a}\mathbf{a} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot 1 + 2a_0a_1\mathbf{q}_1 + 2a_0a_2\mathbf{q}_2 + 2a_0a_3\mathbf{q}_3,$$

тождество записывается как

$$(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 4a_0a_1^2 - 4a_0a_2^2 - 4a_0a_3^2.$$

Теперь рассмотрим непосредственные геометрические последствия всех этих алгебраических свойств.

1) Поскольку алгебры *неассоциативны*, движения в них нельзя задать посредством внутренних автоморфизмов:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}\mathbf{u}^{-1}, \quad (69)$$

поскольку не проходит то, что проходит в ассоциативных алгебрах:

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}\mathbf{u}^{-1}) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}\mathbf{u}^{-1}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{-1} = (\mathbf{a}\mathbf{b})'.$$

2) Поскольку алгебры *неальтернативны*, движения в них нельзя задать посредством умножения на элемент (элементы) единичной нормы. Ведь в неальтернативных алгебрах норма произведения не равна произведению норм, а значит норма образа элемента не будет равна норме прообраза:

$$N_2(\mathbf{e}\mathbf{a}) \neq N_2(\mathbf{e})N_2(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a}).$$

3) Поскольку вторая из алгебр *неэластична*, возникают проблемы с определением ортогональности чисто мнимых элементов (по идее, соответствующих векторам обычного трехмерного пространства). В самом деле, в эластичных алгебрах согласно (51) и (68)

$$\Re(\mathbf{q}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = \Re(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}\mathbf{p}) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= \Re(\mathbf{q}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \\ &= \mathbf{q}(\mathbf{q}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{q}) + (\mathbf{q}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{q} \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{q} = (\mathbf{q}, \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle). \end{aligned}$$

Итак, справедлива

Теорема 7. В эластичных алгебрах с центральным сопряжением векторное произведение произвольных мнимых векторов ортогонально каждому из этих мнимых векторов:

$$(\mathbf{q}, \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle) = 0. \quad (70)$$

Во второй из рассматриваемых алгебр это не так, а значит затруднительно алгебраическим образом ввести понятие ортогональности трехмерных векторов.

Все это показывает, что требование порождать "хорошие" геометрии для гиперкомплексных алгебр является довольно жестким ограничением. Чрезмерное удаление от ассоциативности приводит к малосодержательным, по-видимому, геометриям.

2-норма, 2-скалярное и 2-векторное произведение для алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав

2-скалярное произведение алгебр бикватернионов (верхний знак) и дикватернионов (нижний знак) рассчитывается легко. Для орт оно равно

$$(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_s) = \delta_{ks} \quad (\mathbf{q}_k, \mathbf{i}_s) = \mathbf{i}_0 \delta_{ks}, \quad (\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_s) = \mp \delta_{ks}. \quad (71)$$

В покомпонентном и в сокращенном виде скалярное произведение элементов равно:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \mp (k_0 l_0 + k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3) + \\ &+ (a_0 l_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + k_0 b_0 + k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3) \cdot \mathbf{i}_0, \end{aligned} \quad (72)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a, b) \mp (k, l) + ((a, l) + (k, b)) \cdot \mathbf{i}_0. \quad (73)$$

Отсюда или на основании (19) легко рассчитывается 2-норма $N_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$ алгебр бикватернионов и дикватернионов в кратком:

$$\begin{aligned} N_2(\mathbf{a}) &= \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = (a + k \cdot \mathbf{i}_0)(\bar{a} + \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0) = a\bar{a} \mp k\bar{k} + (a\bar{k} + k\bar{a}) \cdot \mathbf{i}_0, \quad \text{или} \\ N_2(\mathbf{a}) &= N_2(a) \mp N_2(k) + 2(a, k) \cdot \mathbf{i}_0, \end{aligned} \quad (74)$$

и в покомпонентном виде:

$$N_2(\mathbf{a}) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \mp (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + 2(a_0 k_0 + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3) \cdot \mathbf{i}_0 \quad (75)$$

Аналогично, 2-скалярное произведение для орт алгебры биоктав равно

$$(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_s) = (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_s) = \delta_{ks} \quad (\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_s) = (\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_s) = \mp \delta_{ks}, \quad (\mathbf{q}_k, \mathbf{i}_s) = (\mathbf{e}_k, \mathbf{f}_s) = \mathbf{i}_0 \delta_{ks}. \quad (76)$$

Все остальные пары орт дают 0. Отсюда 2-норма для алгебры биоктав в кратком:

$$\begin{aligned} N_2(\mathbf{a}) &= (a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0)(\bar{a} - A \cdot \mathbf{e}_0 + \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0 - K \cdot \mathbf{f}_0) = \\ &= a\bar{a} + \bar{A}A - k\bar{k} - \bar{K}K + (a\bar{k} + k\bar{a} + \bar{K}A + \bar{A}K) \cdot \mathbf{i}_0 + 0 \cdot \mathbf{e}_0 + 0 \cdot \mathbf{f}_0 = \\ &= N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K) + 2((a, k) + (A, K)) \cdot \mathbf{i}_0, \end{aligned} \quad (77)$$

и покомпонентном виде:

$$\begin{aligned} N_2(\mathbf{a}) &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 - K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2 \\ &\quad + 2(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + A_0K_0 + A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3) \cdot \mathbf{i}_0 \end{aligned} \quad (78)$$

Приведем также 2-векторное произведение для алгебр бикватернионов и дикватернионов в кратком виде:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle a + \mathbf{i}_0 k, b + \mathbf{i}_0 l \rangle = \langle a, b \rangle \mp \langle k, l \rangle + (\langle a, l \rangle + \langle k, b \rangle) \mathbf{i}_0, \quad (79)$$

и в покомпонентном виде:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= (-a_0b_1 + a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2 \mp (-k_0l_1 + k_1l_0 - k_2l_3 + k_3l_2)) \cdot \mathbf{q}_1 + \\ &\quad (-a_0b_2 + a_1b_3 + a_2b_0 - a_3b_1 \mp (-k_0l_2 + k_1l_3 + k_2l_0 - k_3l_1)) \cdot \mathbf{q}_2 + \\ &\quad (-a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 \mp (-k_0l_3 - k_1l_2 + k_2l_1 + k_3l_0)) \cdot \mathbf{q}_3 + \\ &\quad + (-a_0l_1 + a_1l_0 - a_2l_3 + a_3l_2 - k_0b_1 + k_1b_0 - k_2b_3 + k_3b_2) \cdot \mathbf{i}_1 + \\ &\quad + (-a_0l_2 + a_1l_3 + a_2l_0 - a_3l_1 - k_0b_2 + k_1b_3 + k_2b_0 - k_3b_1) \cdot \mathbf{i}_2 + \\ &\quad + (-a_0l_3 - a_1l_2 + a_2l_1 + a_3l_0 - k_0b_3 - k_1b_2 + k_2b_1 + k_3b_0) \cdot \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (80)$$

Мультинорма и мультискалярное произведение для алгебр $\mathbb{A}_c$

Вопрос о том, какие алгебры обладают мультипликативной нормой второй степени, был всесторонне рассмотрен и решен еще в XIX веке (см. [3], [11], [12]).

Согласно теореме Гурвица, любая алгебра с единицей, обладающая мультипликативной положительно определенной нормой, изоморфна либо действительным числам, либо комплексным числам, кватернионам или октавам.

Обобщенная теорема Фробениуса утверждает, что любая альтернативная алгебра с делением изоморфна опять же одной из алгебр этого списка.

Согласно теореме Алберта, альтернативными алгебрами с единицей, реальные элементы в которых суть вещественные числа, и которые обладают невырожденной мультипликативной квадратичной формой, являются только алгебры комплексных и двойных чисел, кватернионы и антикватернионы, октавы и антиоктавы.

Согласно обобщенной теореме Понтрягина, только вещественные, комплексные числа, кватернионы и октавы являются связными локально компактными альтернативными топологическими телами. Вследствие этого, пространства бикватернионов, дикватернионов и биоктав односвязными не являются.

Наконец, из теоремы Цорна вытекает, что единственными простыми альтернативными неассоциативными алгебрами являются октавы, антиоктавы и биоктавы.

В 50-60-х гг. XX века вопрос о мультипликативности форм степени выше 2 поставил и решил Р. Д. Шафер [5]–[7] (с дополнениями Кевина МакКриммона [8]). Под формами n -степени понимается следующее. Пусть V – векторное пространство, возможно бесконечномерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$ (вещественные

и комплексные числа имеют характеристику 0). Тогда отображение $\mathbf{u} \rightarrow N(\mathbf{u})$ V на F называется *формой степени n* на V в случае

$$N(\lambda \mathbf{u}) = \lambda^n N(\mathbf{u}) \quad \text{для любых } \lambda \in F, \mathbf{u} \in V.$$

Результатом исследований того времени стала следующая теорема.

Теорема Шафера. Пусть $\mathbb{U}$ – алгебра с единицей, вообще говоря бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Необходимое и достаточное условие для существования на $\mathbb{U}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей композицию, состоит в том, что $\mathbb{U}$ является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{U}_r$, $\mathbb{U}_i$ – простые алгебры степени m_i , где

$$n = m_1 f_1 + \dots + m_r f_r, \quad (81)$$

удовлетворяется для положительных целых чисел $f_i (i = 1, \dots, r)$. Более того, форма N на $\mathbb{U}$ задается посредством

$$N(\mathbf{u}) = [n_1(u_1)]^{f_1} \dots [n_r(u_r)]^{f_r}, \quad (82)$$

где $n_j(u_j)$ – форма, заданная на простой алгебре $\mathbb{U}_j$.

В теореме существенным является понятие *невырожденности* нормы степени n . Имеется в виду следующее. С каждой n -нормой естественным образом связывается n -линейная форма n -скалярного произведения от n гиперкомплексных чисел по формуле Шафера:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \frac{1}{n!} & \left[N(\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_n) - \sum_{i=1}^n N(\mathbf{u}_1 + \dots + \check{\mathbf{u}}_i + \dots + \mathbf{u}_n) \right. \\ & \left. + \sum_{i < j} N(\mathbf{u}_1 + \dots + \check{\mathbf{u}}_i + \dots + \check{\mathbf{u}}_j + \dots + \mathbf{u}_n) - \dots + (-1)^{n-1} \sum N(\mathbf{u}_i) \right], \end{aligned} \quad (83)$$

где запись $\check{\mathbf{u}}_i$ означает, что $\mathbf{u}_i$ опущен. Легко видеть, что

$$N_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \quad \text{поскольку} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$$

С очевидностью, форма $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ имеет все свойства, которые естественно ожидать от обобщения понятия скалярного произведения. Она вещественна, симметрична относительно любых перестановок входящих в него векторов, линейна по каждому из них (и, в частности, обращается в нуль, если один из векторов равен нулю).

По определению Шафера, формы степени n называются *невырожденными* в случае, если из $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = 0$ для всех $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ вытекает $\mathbf{u}_1 = 0$.

С очевидностью, альтернативные алгебры с центральным сопряжением удовлетворяют условию теоремы Шафера (если в них невырождена исходная 2-норма). Поэтому в них существует вещественная невырожденная мультипликативная норма степени n . В общем случае, теорема Шафера не дает явного алгоритма построения такой нормы. Для алгебр с центральным сопряжением этот алгоритм достаточно ясен, поскольку мы уже знаем 2-норму, мультипликативную согласно доказанному выше. Особенно легко построить n -норму, если алгебра может быть получена цепочкой тех или иных удвоений (не обязательно по Кэли-Диксону) из вещественных чисел, т. е. является последовательно градуированной и имеет размерность 2^p

(таковы все или почти все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры). Нужно, используя набор сопряжений, заданных в алгебре, каждый раз, удваивая степень нормы, избавляться от половины членов центра алгебры. Используется тождество $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 0$ (a и b коммутируют меж собой, принадлежа центру алгебры). Процесс повторяется, пока не останется лишь вещественное число. В результате, если центр алгебры (инвариантный относительно базового сопряжения) состоит из $r = 2^k$ элементов, то норма алгебры будет иметь степень $n = 2r = 2^{k+1}$.

Мультипликативность полученной n -нормы будет вытекать из мультипликативности 2-нормы. Докажем это с помощью метода индукции. В самом деле, верно, что

$$N_2(\mathbf{uv}) = N_2(\mathbf{u})N_2(\mathbf{v}),$$

и пусть это же верно для степени $m = 2^k$:

$$N_m(\mathbf{uv}) = N_m(\mathbf{u})N_m(\mathbf{v}).$$

Но $N_m(\mathbf{u})$ в алгебрах $\mathbb{A}_c$ принадлежит замкнутой ассоциативной коммутативной алгебре с единицей, являющейся подмножеством центра алгебры. Если эта алгебра (обозначим ее A_z) совпадает с 1, доказательство завершено. Если нет, рассмотрим алгебру, порожденную 1 и некоторым элементом r_1 из A_z . Если мы опять не получим всю алгебру A_z , добавим элемент r_2 из A_z и рассмотрим алгебру, образованную всеми произведениями $1, r_1, r_2$ (с любыми вещественными коэффициентами) и т. д. В конце концов, набор $\{1, r_1, \dots, r_z\}$ даст всю алгебру A_z , а набор $\{1, r_1, \dots, r_{z-1}\}$ даст ее "половинную" подалгебру A_{z-1} . Всякий элемент алгебры A_z можно записать в виде

$$\mathbf{t} = \mathbf{s} + \mathbf{r}_z \mathbf{S},$$

где $\mathbf{s}, \mathbf{S}$ принадлежат подалгебре A_{z-1} . Введем теперь инволюцию по формуле

$$C[\mathbf{s} + \mathbf{r}_z \mathbf{S}] = \mathbf{s} - \mathbf{r}_z \mathbf{S}, \quad \text{и в частности} \quad C(\mathbf{r}_z) = -C(\mathbf{r}_z).$$

Тогда $C[\mathbf{r}_z^2] = \mathbf{r}_z^2$ и, учитывая коммутативность алгебры A_z , получаем:

$$\begin{aligned} C[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] &= C[(\mathbf{s}_1 + \mathbf{r}_z \mathbf{S}_1)(\mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_z \mathbf{S}_2)] = C[\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_z^2 \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 + (\mathbf{s}_1 \mathbf{S}_2 + \mathbf{s}_2 \mathbf{S}_1) \mathbf{r}_z] = \\ &= \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_z^2 \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 - (\mathbf{s}_1 \mathbf{S}_2 + \mathbf{s}_2 \mathbf{S}_1) \mathbf{r}_z = (\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_z \mathbf{S}_1)(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_z \mathbf{S}_2) = C[\mathbf{r}_1] C[\mathbf{r}_2]. \end{aligned}$$

Теперь мы можем ввести норму степени $2k$ по правилу:

$$N_{2k}(\mathbf{u}) = N_k(\mathbf{u})C[N_k(\mathbf{u})]$$

и доказать ее мультипликативность:

$$\begin{aligned} N_{2k}(\mathbf{uv}) &= N_k(\mathbf{uv})C[N_k(\mathbf{uv})] = N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})] = \\ &= N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{u})]C[N_k(\mathbf{v})] = N_k(\mathbf{u})C[N_k(\mathbf{u})]N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{v})] = N_{2k}(\mathbf{u})N_{2k}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Итак, описанный метод построения вещественной n -нормы вместе с тем доказывает

Теорема 8. *Всякая альтернативная последовательно градуированная алгебра с центральным сопряжением и невырожденной 2-нормой обладает вещественной невырожденной мультипликативной нормой степени n , выражающейся с помощью набора сопряжений через исходную 2-норму. При этом степень нормы вдвое выше размерности центра алгебры (инвариантного относительно базового сопряжения) $n = 2r$.*

Поскольку посредством данного алгоритма n -норма строится на основе 2-нормы, многие ее свойства в альтернативных алгебрах с центральным сопряжением автоматически переносятся на n -норму и порождаемую ею n -скалярное произведение. Так,

$$\begin{aligned} N_n(\bar{\mathbf{u}}) &= N_n(\mathbf{u}), \\ (\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n) &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n), \\ (\mathbf{v}\mathbf{u}_1, \mathbf{v}\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{v}\mathbf{u}_n) &= N_n(\mathbf{v})(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n). \end{aligned} \quad (84)$$

Четырехнорма для бикватернионов, дикватернионов и биоктав

Особенно легко получить вещественную норму алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав, она будет иметь степень 4. Алгоритм очевиден: 2-норма является здесь комплексным или двойным числом; умножив его на сопряженное, получим вещественное число.

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* \quad (85)$$

Учитывая (23), получим:

$$N_4(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^*. \quad (86)$$

В блочном виде 4-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) \mp N_2(k))^2 \pm 4(a, k)^2, \quad (87)$$

а для биоктав:

$$N_4(a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0) = (N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K))^2 + 4((a, k) + (A, K))^2. \quad (88)$$

В покомпонентном виде 4-норма бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \mp (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2))^2 \pm 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)^2, \quad (89)$$

для биоктав:

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{a}) &= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 - K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2)^2 \\ &\quad + 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + A_0K_0 + A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)^2. \end{aligned} \quad (90)$$

С очевидностью, все нормы неотрицательны. Но они не являются положительно определенными (и не могут являться в силу теоремы Фробениуса): из факта $N_4(\mathbf{a}) = 0$ не следует $\mathbf{a} = 0$. В самом деле, для дикватернионов достаточно просто взять $a = A$, и 4-норма будет равна 0:

$$N_4(a + a \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) + N_2(a))^2 - 4(a, a)^2 = 4N_2(a)^2 - 4N_2(a)^2 = 0.$$

Для бикватернионов ситуация несколько хитрее. Как легко видеть, чтобы занулить 4-норму, нужно взять A равным по 2-норме a , и при этом перпендикулярным ему: $(a, A) = 0$. Например, $a = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_3$, $A = 2\mathbf{i}_0 + 3\mathbf{i}_2$.

Формула мультипликативности 4-нормы биоктав в кватернионной записи выглядит так (с помощью простых, но довольно длинных преобразований ее несложно

доказать и напрямую):

$$\begin{aligned}
 & (N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K))^2 + 4((a, k) + (A, K))^2 \cdot \\
 & (N_2(b) + N_2(B) - N_2(l) - N_2(L))^2 + 4((b, l) + (B, L))^2 = \\
 & (N_2(ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K) + N_2(Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}) \\
 & - N_2(al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) - N_2(La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l}))^2 \\
 & + 4((ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K, al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) \\
 & + (Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}, La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l}))^2
 \end{aligned} \tag{91}$$

Скорее для иллюстративных, чем прикладных целей покажем, как выглядит тождество, выражающее мультипликативность 4-нормы алгебры биоктав.

$$\begin{aligned}
 & \left[(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 - K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2)^2 \right. \\
 & \quad \left. + 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + A_0K_0 + A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)^2 \right] \cdot \\
 & \left[(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 - l_0^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 - L_0^2 - L_1^2 - L_2^2 - L_3^2)^2 \right. \\
 & \quad \left. + 4(b_0l_0 + b_1l_1 + b_2l_2 + b_3l_3 + B_0L_0 + B_1L_1 + B_2L_2 + B_3L_3)^2 \right] = \\
 & \left[(a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 - k_0l_0 + k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_3 + K_0L_0 + K_1L_1 + K_2L_2 + K_3L_3)^2 \right. \\
 & + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + A_0B_1 - A_1B_0 - A_2B_3 + A_3B_2 - k_0l_1 - k_1l_0 - k_2l_3 + k_3k_2 - K_0L_1 + K_1L_0 + K_2L_3 - K_3L_2)^2 \\
 & + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1 - k_0l_2 + k_1l_3 - k_2B_0 - k_3B_1 + A_0B_2 + A_1B_3 - A_2B_0 - A_3B_1 - K_0L_2 - K_1L_3 + K_2L_0 + K_3L_1)^2 \\
 & + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0 - k_0l_3 - k_1l_2 + k_2l_1 - k_3l_0 + A_0B_3 - A_1B_2 + A_2B_1 - A_3B_0 - K_0L_3 + K_1L_2 - K_2L_1 + K_3L_0)^2 \\
 & + (a_0B_0 - a_1B_1 - a_2B_2 - a_3B_3 + A_0b_0 + A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3 - k_0L_0 + k_1L_1 + k_2L_2 + k_3L_3 - K_0l_0 - K_1l_1 - K_2l_2 - K_3l_3)^2 \\
 & + (a_0B_1 + a_1B_0 - a_2B_3 + a_3B_2 - A_0b_1 + A_1b_0 - A_2b_3 + A_3b_2 - k_0L_1 - k_1L_0 + k_2L_3 - k_3L_2 + K_0l_1 - K_1l_0 + K_2l_3 - K_3l_2)^2 \\
 & + (a_0B_2 + a_1B_3 + a_2B_0 - a_3B_1 - A_0b_2 + A_1b_3 + A_2b_0 - A_3b_1 - k_0L_2 - k_1L_3 - k_2L_0 + k_3L_1 + K_0l_2 - K_1l_3 - K_2l_0 + K_3l_1)^2 \\
 & + (a_0B_3 - a_1B_2 + a_2B_1 + a_3B_0 - A_0b_3 - A_1b_2 + A_2b_1 + A_3b_0 - k_0L_3 + k_1L_2 - k_2L_1 - k_3L_0 + K_0l_3 + K_1l_2 - K_2l_1 - K_3l_0)^2 \\
 & - (a_0l_0 - a_1l_1 - a_2l_2 - a_3l_3 + k_0b_0 - k_1b_1 - k_2b_2 - k_3b_3 - A_0L_0 - A_1L_1 - A_2L_2 - A_3L_3 - K_0B_0 - K_1B_1 - K_2B_2 - K_3B_3)^2 \\
 & - (a_0l_1 + a_1l_0 + a_2l_3 - a_3l_2 + k_0b_1 + k_1b_0 + k_2b_3 - k_3b_2 + A_0L_1 - A_1L_0 - A_2L_3 + A_3L_2 + K_0B_1 - K_1B_0 - K_2B_3 + K_3B_2)^2 \\
 & - (a_0l_2 - a_1l_3 + a_2l_0 + a_3l_1 + k_0b_2 - k_1b_3 + k_2b_0 + k_3b_1 + A_0L_2 + A_1L_3 - A_2L_0 - A_3L_1 + K_0B_2 + K_1B_3 - K_2B_0 - K_3B_1)^2 \\
 & - (a_0l_3 + a_1l_2 - a_2l_1 + a_3l_0 + k_0b_3 + k_1b_2 - k_2b_1 + k_3b_0 + A_0L_3 - A_1L_2 + A_2L_1 - A_3L_0 + K_0B_3 - K_1B_2 + K_2B_1 - K_3B_0)^2 \\
 & - (a_0L_0 - a_1L_1 - a_2L_2 - a_3L_3 + A_0l_0 + A_1l_1 + A_2l_2 + A_3l_3 + k_0B_0 - k_1B_1 - k_2B_2 - k_3B_3 + K_0b_0 + K_1b_1 + K_2b_2 + K_3b_3)^2 \\
 & - (a_0L_1 + a_1L_0 - a_2L_3 + a_3L_2 - A_0l_1 + A_1l_0 - A_2l_3 + A_3l_2 + k_0B_1 + k_1B_0 - k_2B_3 + k_3B_2 - K_0b_1 + K_1b_0 - K_2b_3 + K_3b_2)^2 \\
 & - (a_0L_2 + a_1L_3 + a_2L_0 - a_3L_1 - A_0l_2 + A_1l_3 + A_2l_0 - A_3l_1 + k_0B_2 + k_1B_3 + k_2B_0 - k_3B_1 - K_0b_2 + K_1b_3 + K_2b_0 - K_3b_1)^2 \\
 & - (a_0L_3 - a_1L_2 + a_2L_1 + a_3L_0 - A_0l_3 - A_1l_2 + A_2l_1 + A_3l_0 + k_0B_3 - k_1B_2 + k_2B_1 + k_3B_0 - K_0b_3 - K_1b_2 + K_2b_1 + K_3b_0)^2 \Big]^2 \\
 & + 4 \left[(a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 - k_0l_0 + k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_3 + K_0L_0 + K_1L_1 + K_2L_2 + K_3L_3) \cdot \right. \\
 & (a_0l_0 - a_1l_1 - a_2l_2 - a_3l_3 + k_0b_0 - k_1b_1 - k_2b_2 - k_3b_3 - A_0L_0 - A_1L_1 - A_2L_2 - A_3L_3 - K_0B_0 - K_1B_1 - K_2B_2 - K_3B_3) \cdot \\
 & + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + A_0B_1 - A_1B_0 - A_2B_3 + A_3B_2 - k_0l_1 - k_1l_0 - k_2l_3 + k_3k_2 - K_0L_1 + K_1L_0 + K_2L_3 - K_3L_2) \cdot \\
 & (a_0l_1 + a_1l_0 + a_2l_3 - a_3l_2 + k_0b_1 + k_1b_0 + k_2b_3 - k_3b_2 + A_0L_1 - A_1L_0 - A_2L_3 + A_3L_2 + K_0B_1 - K_1B_0 - K_2B_3 + K_3B_2) \cdot \\
 & + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1 - k_0l_2 + k_1l_3 - k_2B_0 - k_3B_1 + A_0B_2 + A_1B_3 - A_2B_0 - A_3B_1 - K_0L_2 - K_1L_3 + K_2L_0 + K_3L_1) \cdot \\
 & (a_0l_2 - a_1l_3 + a_2l_0 + a_3l_1 + k_0b_2 - k_1b_3 + k_2b_0 + k_3b_1 + A_0L_2 + A_1L_3 - A_2L_0 - A_3L_1 + K_0B_2 + K_1B_3 - K_2B_0 - K_3B_1) \cdot \\
 & + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0 - k_0l_3 - k_1l_2 + k_2l_1 - k_3l_0 + A_0B_3 - A_1B_2 + A_2B_1 - A_3B_0 - K_0L_3 + K_1L_2 - K_2L_1 + K_3L_0) \cdot \\
 & (a_0l_3 + a_1l_2 - a_2l_1 + a_3l_0 + k_0b_3 + k_1b_2 - k_2b_1 + k_3b_0 + A_0L_3 - A_1L_2 + A_2L_1 - A_3L_0 + K_0B_3 - K_1B_2 + K_2B_1 - K_3B_0) \cdot \\
 & + (a_0B_0 - a_1B_1 - a_2B_2 - a_3B_3 + A_0b_0 + A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3 - k_0L_0 + k_1L_1 + k_2L_2 + k_3L_3 - K_0l_0 - K_1l_1 - K_2l_2 - K_3l_3) \cdot \\
 & (a_0L_0 - a_1L_1 - a_2L_2 - a_3L_3 + A_0l_0 + A_1l_1 + A_2l_2 + A_3l_3 + k_0B_0 - k_1B_1 - k_2B_2 - k_3B_3 + K_0b_0 + K_1b_1 + K_2b_2 + K_3b_3) \cdot \\
 & + (a_0B_1 + a_1B_0 - a_2B_3 + a_3B_2 - A_0b_1 + A_1b_0 - A_2b_3 + A_3b_2 - k_0L_1 - k_1L_0 + k_2L_3 - k_3L_2 + K_0l_1 - K_1l_0 + K_2l_3 - K_3l_2) \cdot \\
 & (a_0L_1 + a_1L_0 - a_2L_3 + a_3L_2 - A_0l_1 + A_1l_0 - A_2l_3 + A_3l_2 + k_0B_1 + k_1B_0 - k_2B_3 + k_3B_2 - K_0b_1 + K_1b_0 - K_2b_3 + K_3b_2) \cdot \\
 & + (a_0B_2 + a_1B_3 + a_2B_0 - a_3B_1 - A_0b_2 + A_1b_3 + A_2b_0 - A_3b_1 - k_0L_2 - k_1L_3 - k_2L_0 + k_3L_1 + K_0l_2 - K_1l_3 - K_2l_0 + K_3l_1) \cdot \\
 & (a_0L_2 + a_1L_3 + a_2L_0 - a_3L_1 - A_0l_2 + A_1l_3 + A_2l_0 - A_3l_1 + k_0B_2 + k_1B_3 + k_2B_0 - k_3B_1 - K_0b_2 + K_1b_3 + K_2b_0 - K_3b_1) \cdot \\
 & + (a_0B_3 - a_1B_2 + a_2B_1 + a_3B_0 - A_0b_3 - A_1b_2 + A_2b_1 + A_3b_0 - k_0L_3 + k_1L_2 - k_2L_1 - k_3L_0 + K_0l_3 + K_1l_2 - K_2l_1 - K_3l_0) \cdot \\
 & (a_0L_3 - a_1L_2 + a_2L_1 + a_3L_0 - A_0l_3 - A_1l_2 + A_2l_1 + A_3l_0 + k_0B_3 - k_1B_2 + k_2B_1 + k_3B_0 - K_0b_3 - K_1b_2 + K_2b_1 + K_3b_0) \Big]^2.
 \end{aligned} \tag{92}$$

Это слоноподобное тождество является непосредственным обобщением знаменитого тождества восьми квадратов. Более того, это тождество можно считать максимальным и исключительным. Поскольку по теореме Цорна биоктавы – максимальная простая альтернативная (неассоциативная) алгебра, то все тождества большей размерности, связанные с неассоциативными алгебрами, так или иначе сведутся к данному. Подобно формулам суммы квадратов, это тождество, случайное с позиций вещественных чисел, является отражением существования алгебр биоктав.

Знание 4-нормы позволяет ввести *обратный элемент* для алгебр би(ди)кватернионов и биоктав (и вообще для любой алгебры с центральным сопряжением и нормой 4 порядка). Поскольку

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}N_2^*(\bar{\mathbf{a}}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = N_4(\mathbf{a}),$$

то ясно, как ввести правый и левый обратный элемент:

$$\mathbf{a}_p^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a})}{N_4(\mathbf{a})} = \frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}^* \bar{\mathbf{a}}^*}{N_4(\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a}_l^{-1} = \frac{N_2^*(\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}}}{N_4(\mathbf{a})} \equiv \mathbf{a}_p^{-1}. \quad (93)$$

Поскольку $N_2(\bar{\mathbf{a}}) = N_2(\mathbf{a})$, то *правый и левый обратные элементы с очевидностью совпадают в любой алгебре с центральным сопряжением – с любой степенью нормы, поскольку рассуждение легко обобщается*. То, что формулы (93) действительно дают обратный элемент:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}_p^{-1} = \mathbf{a}_l^{-1}\mathbf{a} = 1. \quad (94)$$

вытекает из ассоциативности произведений реальной 2-нормы с любыми элементами алгебры (свойство (45)). Таким образом, обратный элемент существует для каждого элемента с ненулевой 4-нормой алгебры $\mathbb{A}_c$.

Дуальная четырехнорма для бикватернионов и дикватернионов

Неожиданным фактом является то, что есть и совершенно другой способ получения 4-нормы для алгебр бикватернионов и дикватернионов, иначе говоря, получения вещественного числа для произвольного элемента этих алгебр с помощью умножения и сопряжений. Если вместо $\bar{\mathbf{a}}$ взять как базовое сопряжение дуальное сопряжение $\tilde{\mathbf{a}}$ (21) то в произведении $\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}$ останутся лишь инвариантные (реальные) относительно него члены, пропорциональные ортам $1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Поскольку орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ антикоммутируют меж собой, можно умножить $\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}$ на его комплексное сопряжение $(\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}})^*$ (все члены с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ изменят знак) и получить вещественное число. Итак, вторую 4-норму для алгебр би(ди)кватернионов можно ввести как:

$$N_4^{\otimes}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}})^*. \quad (95)$$

Поскольку дуальное сопряжение равно $\tilde{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} - \mathbf{i}_0 \bar{k}$ (21), то в блочном виде альтернативная 2-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов ($\mathbf{i}_0^2 = \mp 1$) равна

$$N_2^{\otimes}(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (a + k \cdot \mathbf{i}_0)(\bar{a} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0) = N_2(a) \pm N_2(k) + 2\langle k, a \rangle \mathbf{i}_0. \quad (96)$$

Далее, $N_4^{\otimes}(\mathbf{a}) = N_2^{\otimes}(\mathbf{a})[N_2^{\otimes}(\mathbf{a})]^*$. Но поскольку

$$(m + \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_0)(m - \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_0) = m^2 \pm \mathbf{q}^2$$

для вещественного m и чисто мнимого кватерниона $\mathbf{q}$, то в блочном виде вторая 4-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4^{\otimes}(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) \pm N_2(k))^2 \pm 4\langle k, a \rangle^2. \quad (97)$$

Вместо скалярного произведения кватернионов в альтернативную норму входит их векторное произведение.

Так как для чисто мнимого кватерниона $\mathbf{q}^2 = -\sum_k \mathbf{q}_k^2$, то в покомпонентном виде альтернативная 4-норма бикватернионов и дикватернионов ($\mathbf{i}_0^2 = -1, +1$) равна:

$$N_4^{\otimes}(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \pm (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2))^2 \mp 4(a_1k_0 - a_0k_1 + a_3k_2 - a_2k_3)^2 \\ \mp 4(a_2k_0 - a_0k_2 + a_1k_3 - a_3k_1)^2 \mp 4(a_3k_0 - a_0k_3 + a_2k_1 - a_1k_2)^2. \quad (98)$$

Дуальная 4-норма совершенно не похожа на первую 4-норму. Тем не менее, докажем их эквивалентность. Учитывая (23) и то, что $\tilde{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}^*$, получим:

$$N_4^{\otimes}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\tilde{\mathbf{a}}^* = \mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*\bar{\mathbf{a}}.$$

Но $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}$, как и его модификация $(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*$, принадлежат центру алгебры. Следовательно,

$$N_4^{\otimes}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^* = N_4(\mathbf{a}).$$

Итак, мы доказали, что в алгебрах би(ди)кватернионов оба вида 4-нормы совпадают. Этот факт в кватернионной записи для бикватернионов (дикватернионы дают то же самое в другом порядке):

$$(N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a, k)^2 = (N_2(a) + N_2(k))^2 + 4\langle k, a \rangle^2, \quad (99)$$

и после очевидных преобразований сводится к тождеству (66)

$$N_2(a)N_2(k) = (a, k)^2 - \langle k, a \rangle^2.$$

В вещественных числах это тождество довольно красиво:

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = \\ (a_0A_0 + a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)^2 + (a_1A_0 - a_0A_1 + a_3A_2 - a_2A_3)^2 \\ + (a_2A_0 - a_0A_2 + a_1A_3 - a_3A_1)^2 + (a_3A_0 - a_0A_3 + a_2A_1 - a_1A_2)^2. \quad (100)$$

Четырехскалярное произведение для бикватернионов, дикватернионов и биоктав

Для случая $n = 4$ формула Шафера (83) выглядит так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{24} [N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) \\ - N_4(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + N_4(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + N_4(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \\ + N_4(\mathbf{b} + \mathbf{d}) + N_4(\mathbf{c} + \mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a}) - N_4(\mathbf{b}) - N_4(\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{d})]. \quad (101)$$

Учтя теперь формулу, выражающую для алгебр бикватернионов и дикватернионов 4-норму через 2-норму (85), и выражая 2-норму суммы через 2-скалярное произведение согласно (55), получаем после ряда преобразований и упрощений формулу 4-скалярное произведения в алгебрах $\mathbb{A}_c$ с нормой 4 степени:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{6} [(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{c}, \mathbf{d})^* + (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d})^* + (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})^* \\ + (\mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + (\mathbf{b}, \mathbf{d})(\mathbf{a}, \mathbf{c})^* + (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{d})^*], \quad \text{или} \quad (102)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{6} [(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}^*, \mathbf{d}^*) + (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*) + (\mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) + (\mathbf{b}, \mathbf{d})(\mathbf{a}^*, \mathbf{c}^*) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*)]. \quad (103)$$

Несложно вывести ряд полезных следствий из этой формулы. Так, при решении геометрических вопросов важны вещественные 4-формы от двух векторов. На основании 4-формы от 4 векторов их можно ввести две:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \frac{1}{6} [N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + 4(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})], \quad (104)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} [N_2(\mathbf{a})(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + (\mathbf{a}, \mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})], \quad (105)$$

а кроме того полезно иметь в виду третью

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{b})^*. \quad (106)$$

Отметим также симметризованную форму:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} [(N_2(\mathbf{a}) + N_2(\mathbf{b}))(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + (\mathbf{a}, \mathbf{b})(N_2^*(\mathbf{a}) + N_2^*(\mathbf{b}))] \quad (107)$$

С ее использованием формула 4-нормы суммы

$$N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = N_4(\mathbf{a}) + 4(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + 6(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) + 4(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) + N_4(\mathbf{b}) \quad (108)$$

выглядит так:

$$N_4(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = N_4(\mathbf{a}) + N_4(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a}) + 4\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} + 4\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \quad (109)$$

Свойства форм $(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ весьма различны. В самом деле, как несложно подсчитать, симметричная форма $(\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q, \mathbf{j}_q)$ для биоктав (и значит, в том числе, для октав, бикватернионов и в равной степени для дикватернионов) равна

$$\begin{aligned} (\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q, \mathbf{j}_q) &= 1 & \text{при } p = q, \\ (\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q, \mathbf{j}_q) &= \pm 1/3 & \text{при } p \neq q. \end{aligned} \quad (110)$$

Напротив, $\mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q$ равен нулю не только тогда, когда 2-скалярное произведение $(\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q) = 0$, но и во всех случаях, когда орты $\mathbf{j}_p$ и $\mathbf{j}_q$ различны:

$$(\mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{j}_q) = 0 \quad \text{если } p \neq q, \quad (111)$$

и поэтому

$$\mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q = \delta_{pq}, \quad (112)$$

Таким образом, отношение $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$ можно рассматривать как обобщение ортогональности векторов на случай форм 4 степени.

При проведении расчетов полезно иметь в виду, что

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a} \quad \text{и поэтому} \quad \mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{b}\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^*\mathbf{a} + \mathbf{a}^*\mathbf{b}. \quad (113)$$

Четырехвекторное произведение для бикватернионов и биоктав

Имеет смысл пойти дальше результатов Шафера и обобщить не только скалярное, но и векторное произведение. Для алгебр бикватернионов, биоктав и им подобным четырехвекторное произведение можно предложить на основе следующей формулы:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{6} [\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle^* + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle^* + \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle^* + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^* + \langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle^* + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle^*], \quad \text{или} \quad (114)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{6} [\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{c}^*, \mathbf{d}^* \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{d}^*, \mathbf{b}^* \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^* \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^* + \langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle^* + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{d}^* \rangle]. \quad (115)$$

Как легко видеть, 4-векторное произведение полностью антисимметрично относительно перестановок в любой паре векторов. Как и 2-векторное произведение, это не вещественное число, а гиперкомплексный вектор. Любопытно, что в отличие от чисто мнимого 2-векторного произведения, 4-векторное произведение реально относительно базового сопряжения $\bar{\mathbf{f}}$ (и содержит поэтому только орты $\mathbf{1}$ и $\mathbf{i}_0$). Можно показать, что если половина степени нормы $n/2$ – четное число, то n -векторное произведение будет реальным, при нечетном $n/2$ – мнимым (так, мнимо 2-векторное произведение кватернионов).

Если формально образовать 4-векторное произведение из кватернионов (алгебры с нормой степени 2, а не 4), получится вещественное число с ясным геометрическим смыслом. Для кватернионов, как легко показать, 4-векторное произведение равно детерминанту матрицы, составленной из координат входящих в него векторов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}. \quad (116)$$

Т. о. 4-векторное произведение для кватернионов равно 4-объему параллелепипеда, натянутого на четыре вектора, т. е. совпадает с смешанным произведением 4 порядка.

Норма и скалярное произведение бикватернионов в изотропном базисе

Структурные свойства алгебры, как правило, хорошо видны не в обычном базисе, а в базисах, образованных элементами с нулевой нормой. Как известно, в полупростых ассоциативных кольцах идеалы порождаются идемпотентами. Взяв в алгебре бикватернионов два изотропных идемпотента ($e^2 = e$) $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_0$, получим с их помощью изотропный базис $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_k\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= 1 + \mathbf{i}_3, & \mathbf{u}_1 &= \mathbf{q}_1(1 + \mathbf{i}_3), & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{q}_2(1 + \mathbf{i}_3), & \mathbf{u}_3 &= \mathbf{q}_3(1 + \mathbf{i}_3), \\ \mathbf{v}_0 &= 1 - \mathbf{i}_3, & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{q}_1(1 - \mathbf{i}_3), & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{q}_2(1 - \mathbf{i}_3), & \mathbf{v}_3 &= \mathbf{q}_3(1 - \mathbf{i}_3), \end{aligned} \quad (117)$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= 1 + \mathbf{i}_3, & \mathbf{u}_1 &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{i}_2, & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{q}_2 + \mathbf{i}_1, & \mathbf{u}_3 &= \mathbf{q}_3 - \mathbf{i}_0, \\ \mathbf{v}_0 &= 1 - \mathbf{i}_3, & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{q}_1 + \mathbf{i}_2, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{q}_2 - \mathbf{i}_1, & \mathbf{v}_3 &= \mathbf{q}_3 + \mathbf{i}_0. \end{aligned} \quad (118)$$

Таблица умножения алгебры бикватернионов в изотропном базисе:

$\times$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_0$	0	0	$\mathbf{u}_3$	0	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	0
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_1$	0	0	$-\mathbf{u}_2$	0	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_3$	0
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_2$	0	0	$\mathbf{u}_1$	0	$-\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_0$	0
$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_1$	0	0	$-\mathbf{u}_0$	0	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	0
$\mathbf{v}_0$	0	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	0	$\mathbf{v}_0$	0	0	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_3$	0	$\mathbf{v}_1$	0	0	$-\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_2$	0	$-\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_0$	0	$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	0	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	0	$\mathbf{v}_3$	0	0	$-\mathbf{v}_0$

(Tab. 6)

Мы видим, что наборы векторов $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ образуют левые идеалы в алгебре бикватернионов. (Умножение слева любого элемента алгебры на произвольный элемент набора дает снова элемент этого набора). Идеалы не могут быть двусторонними в силу простоты алгебры бикватернионов.

Таблица 2-скалярных произведений бикватернионов в изотропном базисе:

$(\times)$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	0	0	0	0	1	0	0	$\mathbf{i}_0$
$\mathbf{u}_1$	0	0	0	0	0	1	$-\mathbf{i}_0$	0
$\mathbf{u}_2$	0	0	0	0	0	$\mathbf{i}_0$	1	0
$\mathbf{u}_3$	0	0	0	0	$-\mathbf{i}_0$	0	0	1
$\mathbf{v}_0$	1	0	0	$-\mathbf{i}_0$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_1$	0	1	$\mathbf{i}_0$	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	0	$-\mathbf{i}_0$	1	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{i}_0$	0	0	1	0	0	0	0

(Tab. 7)

Отсюда вытекает вид 2-нормы алгебры бикватернионов в изотропном базисе $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$. Запишем $\mathbf{a}$ в изотропном базисе:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{a} &= r_0 \mathbf{u}_0 + r_1 \mathbf{u}_1 + r_2 \mathbf{u}_2 + r_3 \mathbf{u}_3 + s_0 \mathbf{v}_0 + s_1 \mathbf{v}_1 + s_2 \mathbf{v}_2 + s_3 \mathbf{v}_3, \end{aligned} \quad (119)$$

где вещественные числа r_k, s_k :

$$\begin{aligned} r_0 &= 1/2(a_0 + k_3), \quad r_1 = 1/2(a_1 - k_2), \quad r_2 = 1/2(a_2 + k_1), \quad r_3 = 1/2(a_3 - k_0), \\ s_0 &= 1/2(a_0 - k_3), \quad s_1 = 1/2(a_1 + k_2), \quad s_2 = 1/2(a_2 - k_1), \quad s_3 = 1/2(a_3 + k_0). \end{aligned} \quad (120)$$

Тогда 2-норма в изотропном базисе равна:

$$N_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = r_0 s_0 + r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 + \mathbf{i}_0 (r_0 s_3 - r_3 s_0 + r_2 s_1 - r_1 s_2) \quad (121)$$

Отсюда получается 4-норма бикватернионов в изотропном базисе:

$$N_4(\mathbf{a}) = (r_0 s_0 + r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3)^2 + (r_0 s_3 - r_1 s_2 + r_2 s_1 - r_3 s_0)^2. \quad (122)$$

Норма и скалярное произведение дикватернионов в изотропном базисе

Для дикватернионов ситуация с изотропным базисом несколько хитрее, но результат проще. Как легко видеть из таблицы 5, на квадратичном уровне двойная норма обратиться в нуль не может. Однако, ситуация меняется на уровне нормы 4 степени, которую можно занулить очевидным образом. Опять же взяв два идемпотента, выберем 4-изотропный базис в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= 1 + \mathbf{i}_0, & \mathbf{u}_1 &= \mathbf{q}_1(1 + \mathbf{i}_0), & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{q}_2(1 + \mathbf{i}_0), & \mathbf{u}_3 &= \mathbf{q}_3(1 + \mathbf{i}_0), \\ \mathbf{v}_0 &= 1 - \mathbf{i}_0, & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{q}_1(1 - \mathbf{i}_0), & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{q}_2(1 - \mathbf{i}_0), & \mathbf{v}_3 &= \mathbf{q}_3(1 - \mathbf{i}_0), \end{aligned} \quad (123)$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= 1 + \mathbf{i}_0, & \mathbf{u}_1 &= \mathbf{q}_1 + \mathbf{i}_1, & \mathbf{u}_2 &= \mathbf{q}_2 + \mathbf{i}_2, & \mathbf{u}_3 &= \mathbf{q}_3 + \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{v}_0 &= 1 - \mathbf{i}_0, & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{i}_1, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{q}_2 - \mathbf{i}_2, & \mathbf{v}_3 &= \mathbf{q}_3 - \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (124)$$

Таблица умножения алгебры дикватернионов в изотропном базисе:

$\times$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_1$	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	$-\mathbf{u}_0$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_0$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_0$

(Tab. 8)

Наборы векторов $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ образуют двусторонние идеалы в алгебре дикватернионов, которая разлагается в их прямую сумму. Иначе говоря, алгебра дикватернионов является не простой, но лишь полупростой.

Поэтому скалярное произведение дикватернионов в изотропном базисе устроено очень просто:

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \delta_{ik} \mathbf{u}_0, \quad (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k) = \delta_{ik} \mathbf{v}_0, \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_k) = 0, \quad (125)$$

Записав число $\mathbf{a}$ в изотропном базисе:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_0 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 + k_0 \mathbf{i}_0 + k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{a} &= r_0 \mathbf{u}_0 + r_1 \mathbf{u}_1 + r_2 \mathbf{u}_2 + r_3 \mathbf{u}_3 + s_0 \mathbf{v}_0 + s_1 \mathbf{v}_1 + s_2 \mathbf{v}_2 + s_3 \mathbf{v}_3, \end{aligned} \quad (126)$$

где вещественные числа r_k, s_k :

$$\begin{aligned} r_0 &= 1/2(a_0 + k_0), & r_1 &= 1/2(a_1 + k_1), & r_2 &= 1/2(a_2 + k_2), & r_3 &= 1/2(a_3 + k_3), \\ s_0 &= 1/2(a_0 - k_0), & s_1 &= 1/2(a_1 - k_1), & s_2 &= 1/2(a_2 - k_2), & s_3 &= 1/2(a_3 - k_3). \end{aligned} \quad (127)$$

получим вид 2-нормы в изотропном базисе:

$$N_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (1 + \mathbf{i}_0)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + (1 - \mathbf{i}_0)(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (128)$$

Поскольку для двойных чисел $(1 + \mathbf{i}_0)(1 - \mathbf{i}_0) = 0$, то

$$(\mathbf{r}(1 + \mathbf{i}_0) + \mathbf{s}(1 - \mathbf{i}_0))(\mathbf{r}(1 - \mathbf{i}_0) + \mathbf{s}(1 + \mathbf{i}_0)) = 2\mathbf{rs}.$$

Поэтому 4-норма дикватернионов в изотропном базисе распадается на произведение двух 2-норм

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* = (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2). \quad (129)$$

Выводы

Метод изучения алгебры на основе анализа допускаемых ею сопряжений позволяет не только получить простым образом уже известные результаты, но и некоторые интересные новые. В частности, упрощается работа с формами степени выше квадратичной.

Однако, поскольку уже 2-норма для алгебр бикватернионов и биоктав является мультипликативной и поскольку 4-норма однозначно выражается через нее, неясно, создает ли переход от комплексной (или двойной) 2-нормы к вещественной 4-норме какие-либо новые возможности. Точно так же неясно, дадут ли что-то принципиально новое 4-скалярное и 4-векторное произведения, поскольку и они выражаются через свои прототипы 2 степени. В любом случае, представляются интересными попытки придать этим квадраобъектам какой-либо геометрический и физический смысл.

Благодарности

Автору приятно выразить свою признательность Г. И. Гарасько, к. т. н. Д. Г. Павлову, проф. В. И. Санюку и А. В. Чалыку за ценное обсуждение.

Литература

- [1] А. П. Ефремов. *Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, см. также arXiv:math-ph/0501055.
- [2] В. В. Сильвестров. *Системы чисел*, Соросовский образовательный журнал. № 8, 1998, 121–127.
- [3] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.
- [4] John C. Baez. *The Octonions*. ArXiv: math-RA/0105155
- [5] R. D. Schafer. *On forms of degree n permitting composition*, J. Math. Mech. **12** (1963), 777–792. В русском переводе: Шафер Р. Д., *О формах степени n, допускающих композицию*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, 140–154.
- [6] R. D. Schafer. *Forms permitting composition*, Advances in Mathematics **4**, 111–148 (1970).
- [7] R. D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1 изд. 1967, 2 изд. 1991.
- [8] K. McCrimmon. *Generically algebraic algebras*, Trans. Amer. math. Soc. **127** (1967), 527–551.
- [9] Д. Г. Павлов. *Обобщение аксиом скалярного произведения*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.
- [10] D.G. Pavlov. *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, arXiv:gr-qc/0206004.
- [11] Б. А. Розенфельд: *Многомерные пространства*, Наука, М. 1966.
- [12] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский: *Геометрия групп Ли*, МЦНМО, М. 2003.
- [13] "Общая алгебра", том 1. Справочная математическая библиотека. М., "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

КВАТЕРНИОНЫ И НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА

В. Н. Кутрунов, З. С. Кутрунова

*Тюменский государственный университет
vkuurunov@utmn.ru*

Для кватернионных аналитических функций построены специальные интегральные тождества, позволившие изучить спектральные свойства ряда интегральных операторов теории потенциала и теории упругости, сконструировать новые интегральные уравнения для классической задачи восстановления векторного поля, разработать технику регуляризации некоторых сингулярных интегральных уравнений.

Известно, какую роль сыграли числа в современной цивилизации. На них базируется все современное логическое мышление, современная техника. Числа проникли во все сферы человеческой деятельности, привели к компактным формам рассуждений и к многим открытиям как в гуманитарной, так и в естественной сферах человеческой жизни. Развитие чисел насчитывает много тысяч лет и понятно, что человечество стало интересоваться, нельзя ли придумать объекты более сложной, чем числа, природы, но сохраняющие в основном их свойства. Цель в том, чтобы научиться мыслить с помощью более крупных структур, опуская мелкие детали. Удалось получить множество видов обобщений чисел, которые действительно оказались плодотворными. Среди них комплексные числа, на основе которых была построена теория функций комплексного переменного и, в частности, теория аналитических функций. На аналитические функции можно было смотреть, как на функции одного комплексного переменного, что позволяло сначала эвристически переносить, а затем и доказывать многие свойства, характерные для функций одной действительной переменной. Теория функций комплексного переменного была разработана для функций, заданных на плоскости и оказалась очень плодотворной. Было желательно построить аналогичные подходы к трехмерному пространству. Процесс был начат У. Р. Гамильтоном, который ввел понятие кватернионов. Из этой теории позже было выделено понятие скалярного и векторного произведений, которые сами по себе оказались интересными, и кватернионы на некоторое время были забыты.

Однако, при изучении свойств трехмерного физического пространства исследователи замечали, что его свойства делятся на скалярные и векторные. Оказалось, что эти свойства не целесообразно и даже затруднительно изучать отдельно. Вновь возникла необходимость в объектах более сложной природы, чем комплексные числа, произошел возврат к кватернионам и к другим, еще более сложным структурам. Кватернионы и кватернионные функции развивались по схеме теории функций комплексного переменного с естественными поправками на трехмерность пространства. К настоящему времени по соответствующей тематике опубликовано большое количество работ физиков, математиков, механиков, философов. Кватернионы и кватернионные функции используются для описания электромагнитных полей, для решения задач ориентации космических аппаратов, в задачах геофизики и сейсморазведки, в механике деформируемого тела, в теории фракталов и многих других науках. Нет никакого сомнения в том, что использование кватернионных функций в теоретических и практических исследованиях является сегодня актуальной задачей. В данной

заметке вводятся кватернионные аналитические функции и предлагаются некоторые их применения для исследования свойств интегральных операторов.

Будем считать, что известны как свойства, так и операции над кватернионами. Определим кватернионные аналитические функции (К-аналитические функции). Пусть $\{x_1, x_2, x_3\}$ – радиус-вектор некоторой точки в евклидовом пространстве E_3 . Поставим ему в соответствие мнимый кватернион $x = x_i e_i$. Здесь по индексу i осуществляется суммирование до трёх и e_i – мнимые единицы кватерниона. По аналогии с вектор-функциями введем кватернион-функции: $q(x) = p_0(x_1, x_2, x_3) + p_i(x_1, x_2, x_3) e_i = p_0 + p$ и символический мнимый кватернион, оператор дифференцирования Гамильтона: $\nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Правило действия оператора ∇ на функцию q в соответствии с распределительным законом будет следующим $\nabla q = \nabla p_0 + \nabla p$. Здесь

$$\nabla p_0 = e_i \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \quad (1)$$

и произведение ∇p двух мнимых кватернионов может быть представлено через скалярное и векторное произведение

$$\nabla p = -\nabla \bullet p + \nabla \times p, \quad (2)$$

где $\nabla \bullet p$ – скалярная функция-дивергенция вектора p , а $\nabla \times p$ – векторная функция-ротор вектора p . Справа операции выполняются в соответствии с векторным исчислением, а результат интерпретируется как кватернионная функция. То есть, величины e_i интерпретируются как орты ортогональной декартовой системы координат везде, где присутствуют операции векторного исчисления и как мнимые единицы кватерниона в других случаях. Выражения (1) и (2) позволяют записать произведение ∇q в форме

$$\nabla q = -\nabla \bullet p + \nabla p_0 + \nabla \times p. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что результатом произведения ∇q является кватернион, действительная часть которого равна $-\nabla \bullet p + \nabla p_0$, а мнимая $\nabla \times p$. Рассмотрим множество кватернион-функций q , удовлетворяющих условию

$$\nabla q = 0 \quad (4)$$

В этом равенстве должна равняться нулю отдельно действительная и мнимая части кватерниона ∇q , то есть

$$\begin{cases} \nabla \bullet p = 0 \\ \nabla p_0 + \nabla \times p = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Более детальная запись равенств (5) с учетом скалярного и векторного произведений дает:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_3}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + \frac{\partial p_1}{\partial x_3} - \frac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial p_0}{\partial x_3} + \frac{\partial p_2}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Пусть, в частности, $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = p_3(x, y)$, $p_0 = p_0(x, y)$. В этом случае кватернион имеет вид комплексной функции

$$q(x, y) = p_0(x, y) + e_3 p_3(x, y) \quad (8)$$

с мнимой единицей e_3 . Соотношение (6) удовлетворяется тождественно, а из (7) получается

$$\begin{cases} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_3}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p_0}{\partial x_2} - \frac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Уравнения (9) являются известными условиями Коши-Римана для комплексной функции q . Следовательно, в данном случае она является аналитической функцией. Рассмотренный частный случай показывает, что множество кватернион-функций q , удовлетворяющих условию (4), включает в себя множество аналитических функций.

Определение 1. Множество кватернион-функций, удовлетворяющих условию (4), называется кватернион-аналитическими (K -аналитическими) функциями.

Для K -аналитических функций справедлива следующая почти очевидная теорема:

Теорема 1. Пусть кватернион-функция q является K -аналитической в области $D^+(D^-)$, тогда каждая компонента этой функции является гармонической функцией.

Из теоремы следует, что K -аналитические функции включают в себя гармонические функции. K -аналитические функции обладают многими свойствами, похожими на свойства аналитических функций в теории функций комплексного переменного. В частности, для них может быть построен аналог интеграла Коши и типа Коши. Аналог интеграла Коши имеет вид:

$$\int_S \nabla \frac{1}{|r|} nq(x) d_x S = \begin{cases} 0, & y \in D^- \\ 2\pi q(y), & y \in S \\ 4\pi q(y), & y \in D^+ \end{cases} \quad (10)$$

Напомним, что все операции в этой формуле выполняются по правилам операций кватернионов. Под n здесь понимается мнимый кватернион, компонентами которого являются направляющие косинусы нормали в точке $x \in S$. Для $y \in S$ интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, причём в этом случае предполагается, что поверхность S является ляпуновской, а кватернионная плотность q удовлетворяет условию Гёльдера. Аналог интеграла типа Коши в поле произвольных (уже не K -аналитических) кватернионных функций q имеет вид:

$$Q(y) = \int_S \nabla \frac{1}{|r|} nq(x) d_x S, \quad y \in D^\pm. \quad (11)$$

Функция Q является K -аналитической. Поэтому её предельные граничные значения $Q^\pm$ должны удовлетворять соотношениям Коши:

$$\int_S \nabla \frac{1}{|r|} nQ^+(x) d_x S = 2\pi Q^+(y), \quad y \in S, \quad (12)$$

$$\int_S \nabla \frac{1}{|r|} nQ^-(x) d_x S = 2\pi Q^-(y), \quad y \in S \quad (13)$$

Вводя оператор

$$Aq = \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} nq(x) d_x S, \quad (14)$$

формулы (12) и (13) запишем в виде

$$AQ^+ = Q^+, \quad AQ^- = -Q^-. \quad (15)$$

С помощью предельного перехода и оператора A граничные значения $Q^\pm$ можно записать в виде

$$Q^\pm = \pm 2\pi q + 2\pi Aq.$$

Подставляя эти значения в граничный интеграл Коши (12) или (13) и проводя необходимые сокращения, получим одинаковый результат:

$$A^2 q = q. \quad (16)$$

Равенство (16) – фундаментальное тождество кватернионной теории аналитических функций. Заметим, что на основе кватернионных подходов оно практически в одно и то же время и независимо было получено [4], [8]. Однако позже было установлено, что в матричной форме оно было получено и исследовалось Бицадзе А. В. [11]. Обозначим $Aq = p$, тогда из (16) следует $Ap = q$. В интегральной форме эта пара кватернионных преобразований имеет вид:

$$\begin{aligned} q(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} np(x) d_x S, \\ p(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} nq(x) d_x S. \end{aligned} \quad (17)$$

Пользуясь векторной интерпретацией, эти кватернионные равенства можно представить в действительном виде. Приравнявая действительные и мнимые части левых и правых частей первого равенства, найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_S \left[-\nabla \frac{1}{|r|} \bullet np_0 - \left(\nabla \frac{1}{|r|} \times n \right) \bullet p \right] d_x S &= q_0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\nabla \frac{1}{|r|} \times np_0 - \left(\nabla \frac{1}{|r|} \bullet n \right) p + \left(\nabla \frac{1}{|r|} \times n \right) \times p \right] d_x S &= q \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь под p, q понимаются мнимые части кватернионов $p(x), q(x)$, которые теперь интерпретируются как вектора (т. е. мнимые части кватернионов обозначены теми же буквами, что и сами кватернионы). Аналогичные соотношения для второго уравнения (17) получается из (18) переменной местами букв $p \leftrightarrow q, p_0 \leftrightarrow q_0$.

Введем интегральные операторы B, C, F, D , среди которых только первый будет несобственным, если интеграл рассматривается на ляпуновской поверхности, а прочие будут сингулярными:

$$\begin{aligned} Bp_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} \bullet np_0 d_x S \\ Cp_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} \times np_0 d_x S \\ Fp &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\nabla \frac{1}{|r|} \times n \right) \bullet p d_x S \\ Dp &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left[-\nabla \frac{1}{|r|} \bullet np + \left(\nabla \frac{1}{|r|} \times n \right) \times p \right] d_x S \end{aligned} \quad (19)$$

тогда равенства (18) примут вид

$$\begin{aligned} - Bp_0 - Fp &= q_0 \\ Cp_0 + Dp &= q \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично, вторая группа равенств получается из (20) заменой букв:

$$\begin{aligned} - Bq_0 - Fq &= p_0 \\ Cq_0 + Dq &= p \end{aligned} \quad (21)$$

Подставим q и q_0 из (20) в (21)

$$\begin{aligned} - B[-Bp_0 - Fp] - F(Cp_0 + Dp) &= p_0 \\ C[-Bp_0 - Fp] + D(Cp_0 + Dp) &= p \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть $p(x)$ – произвольный кватернион. Тогда произвольны его скалярная и векторная части. Полагая равными нулю последовательно действительную и мнимую части кватерниона p , получим

$$\begin{aligned} B^2p_0 - FCp_0 &= p_0 \\ - CBp_0 + DCp_0 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} BFp - FDp &= 0 \\ - CFp + D^2p &= p \end{aligned} \quad (24)$$

Получены интегральные тождества для скалярной функции (23) и векторной функции (24). Эти тождества, полученные в работе [8], являются векторным представлением кватернионного тождества (16). Ниже будут продемонстрированы некоторые приложения этих тождеств, которые, следовательно, являются приложениями кватернионного тождества (16). Покажем сейчас некоторые приложения аналога интеграла Коши из теории кватернионных функций. Одно приложение фундаментального кватернионного тождества кватернионных аналитических функций, полученное в работах [16], [17], связано с доказательством операции коммутирования интегральных операторов потенциалов простого и двойного слоёв. Для этого введём кватернионный потенциал простого слоя:

$$\psi(y) = Bb = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} n_x b(x) dS_x, \quad r = |x - y|, \quad y \in R^3. \quad (25)$$

Этот потенциал отличается от классического наличием нормали под интегралом и тем, что n, b – кватернионные функции. При определённых требованиях к гладкости границы S и к функции $b(x)$ этот потенциал является непрерывным в R^3 и гармоничным в каждой из областей $D^\pm$. Из непрерывности следует, что предельные граничные значения функции изнутри и извне области D^+ равны прямому значению этого потенциала при $y \in S$. Для этого оператора и оператора A доказана теорема

Теорема 2. Для ляпуновской поверхности S и произвольной кватернионной функции $b(x)$, удовлетворяющей условию Гёльдера на границе, кватернионные интегральные операторы A, B простого и двойного слоёв (анти)коммутируют между собой по правилу $ABb = -BA b$.

Укажем на один факт, характерный для получения различных формул в кватернионном представлении. Внешне записи выглядят обычным (знакомым) образом, например, мы видим, что в последнем тождестве при перестановке операторов меняется знак. Однако, если теперь перейти к действительным записям, то получится четыре равенства, в которых исчезнет всякое внешнее сходство с операцией коммутирования. В каждом из равенств будут фигурировать различные операторы и трудно придумать метод для доказательства каждого из них. В этом одно из достоинств применения техники кватернионов в изучении свойств трёхмерного пространства. Эти свойства исследуются некоторым коллективным образом и не надо изобретать доказательств для отдельных свойств. Такие доказательства могут оказаться очень неуклюжими или очень сложными.

Доказательство теоремы связано с решением уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, преобразованного в факторизованное кватернионное дифференциальное уравнение $\nabla \nabla u = 0$. Факторизация происходит с помощью кватернионного оператора Гамильтона и легко проверяется вычислением символического кватерниона $\nabla \nabla$. Действительно, $\nabla \nabla = -\nabla \bullet \nabla + \nabla \times \nabla$. Теперь уравнение можно дважды последовательно проинтегрировать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Для этого используется аналог интеграла Коши в кватернионных функциях. Последовательное интегрирование этого уравнения по кватернионной схеме приводит к следующему решению (кватернионный аналог интеграла Коши, в кватернионной теории гармонических функций):

$$\begin{aligned} \nabla u(y) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} n_x \nabla u(x)^+ dS_x, \quad y \in D^+ \\ u(y) &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|y-x|} n_x \nabla u(x)^+ dS_x = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla_z \frac{1}{|z-y|} n_z [u(z) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|x-z|} n_x \nabla_x u(x)^+ dS_x] dS_z; \quad y \in D^+ \end{aligned}$$

Если бы были известны граничные значения $u(z)$, $\nabla u(z)^+$, то по этим формулам вычислялись бы эти же значения в области D^+ . Но эта информация для решения уравнения Лапласа является переопределённой, и при произвольном ее задании уравнение не будет иметь решения. Поэтому, последние равенства могут рассматриваться на границе области S как уравнения для определения части этих данных по другой известной части. Известная часть граничных данных кватернионов $u(z)$, $\nabla u(z)^+$ (или их комбинация) не должна быть переопределённой, достаточной для существования, по крайней мере, одного решения. Граничные равенства, соответствующие общему решению кватернионного уравнения Лапласа, получаются из последних равенств предельным переходом на границу области и выписываются из теории кватернионных аналитических функций:

$$\begin{aligned} \nabla u(y)^+ &= \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} n_x \nabla u(x)^+ dS_x, \quad y \in S \\ u(y) &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|y-x|} n_x \nabla u(x)^+ dS_x = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla_z \frac{1}{|z-y|} n_z [u(z) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|x-z|} n_x \nabla_x u(x)^+ dS_x] dS_z; \quad y \in S \end{aligned}$$

Используя предыдущую теорему, полученные граничные интегральные равенства кватернионной теории гармонических функций могут быть преобразованы. Результат формулируется в виде теоремы:

Теорема 3. *Граничные значения кватернионной гармонической функции u и её кватернионного градиента ∇u^+ удовлетворяют тождествам*

$$A\nabla u^+ = \nabla u^+, \quad B\nabla u^+ = \frac{1}{2}(Au - u).$$

Если имеются условия, связывающие на границе некоторые компоненты функции u и её кватернионного градиента, обеспечивающие существование решения, то тождества, рассматриваемые теперь как интегральные уравнения, позволяют определить оставшиеся компоненты этих величин и, следовательно, найти решение задачи. Если дополнительные граничные связи избыточны, то последние уравнения не будут иметь решения, следовательно, и краевая задача не имеет решений. Однако все же можно находить решение таких задач, пользуясь подходами теории некорректных задач, а именно, переопределенные граничные условия могли быть известны из опыта и по этой причине не точны. Поэтому, вместо строгих равенств в таких задачах можно потребовать близости левых и правых частей уравнений в некотором определённом смысле. В случае недостаточности граничных условий, краевая задача для кватернионного уравнения Лапласа будет иметь неединственное решение.

Для иллюстрации сказанного, кватернионные равенства применяются для исследования некоторых классических задач математической физики. В частности, повторён известный результат, что задача Дирихле для кватернионного уравнения Лапласа имеет единственное решение. В качестве второго примера рассматривается решение кватернионного уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области D^+ при условии, что на границе задан кватернионный градиент, то есть $\nabla u = f$. В этом случае граничные интегральные равенства имеют следующий вид: $Af = f$, $Bf = \frac{1}{2}(Au - u)$. Отсюда следует, что задание на границе кватернионного градиента избыточно. Действительно, если заданная функция f такова, что не выполняется первое равенство, то поставленная задача не имеет решения. Если первое равенство выполняется, тогда доказывается, что второе уравнение служит для определения граничного значения функции u с точностью до граничного значения произвольной кватернионной аналитической функции. Решение в области также находится с точностью до произвольной кватернионной аналитической функции.

Предыдущий подход, связанный с факторизацией дифференциального оператора Лапласа и последующим применением кватернионного аналога интеграла Коши, может быть применён в других задачах. Например, могут быть построены интегральные уравнения теории упругости. Для такого построения, прежде всего, понадобилась запись дифференциальных уравнений теории упругости (уравнений Ламе) в кватернионной форме:

$$\nabla((\lambda - \mu)\nabla u + (\lambda + \mu)u\nabla) = 0.$$

Здесь вектор перемещения u понимается как мнимая кватернионная функция, а λ, μ – физические константы Ламе. Выражение в скобках, являющееся кватернионной аналитической функцией, может быть представлено через ротор и дивергенцию вектора перемещений:

$$\nabla \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} (\nabla \bullet u) - \frac{1}{2} (\nabla \times u) \right] = 0.$$

Использование векторных операций символическое, временно, на момент выполнения векторных операций, мнимые единицы кватерниона рассматриваются как орты декартова базиса, а после их выполнения эти орты вновь рассматриваются как мнимые единицы. Пользуясь представлением кватернионных аналитических функций, это кватернионное уравнение можно один раз проинтегрировать, в полученном решении перейти к пределу на границу области. Разделяя скалярную и векторную части, это предельное равенство может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}\nabla \bullet u &= -\frac{1}{2\pi C} \int_S \left[C(\nabla \bullet u)n - n \times \frac{1}{2}(\nabla \times u) \right] \bullet \nabla \frac{1}{|r|} d_x S; \\ \frac{1}{2}(\nabla \times u) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left[C(\nabla \bullet u)n - n \times \frac{1}{2}(\nabla \times u) \right] \times \nabla \frac{1}{|r|} d_x S - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} \left(n \bullet \frac{1}{2}(\nabla \times u) \right) d_x S, \quad \text{где } C = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu}.\end{aligned}$$

Данные равенства удовлетворяются для ротора и дивергенции вектора перемещений u , являющегося решением уравнений Ламе. Если известны лишь некоторые компоненты ротора и дивергенция, или их комбинации, то на данные уравнения можно смотреть как на граничные интегральные уравнения для доопределения недостающих компонент. Заданных величин для этого может не хватать, быть достаточно, либо быть с избытком. Соответственно будет возникать неединственность решения задачи, решение будет единственным, либо задача будет некорректной. Различных вариантов таких уравнений может быть много. Например, на эти уравнения можно смотреть как на задачу восстановления вектора перемещения по его нормальной составляющей, заданной на поверхности. Особый интерес могут представлять именно некорректные постановки, что сейчас и наблюдается, например, при решении задач геофизики [18].

Заметим, также, что факторизации уравнений Ламе с помощью оператора Гамильтона недостаточно, чтобы эти уравнения проинтегрировать дважды, как это было сделано выше для уравнения Лапласа. Уравнения Ламе удалось проинтегрировать только один раз. Для устранения этого здесь может быть эффективным подход, опирающийся не на кватернионные аналитические функции, а на некоторое их обобщение, позволяющее получить другой класс аналогов интеграла Коши в кватернионных функциях [5]. Результаты интегрирования уравнений Лапласа и теории упругости с помощью аналогов интеграла Коши из теории кватернионных функций сами могут рассматриваться как аналоги интегралов Коши для соответствующих функций. Действительно, интеграл Коши в теории аналитических функций и теории кватернионных аналитических функций выражает аналитическую функцию через её граничное значение. Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка. Дифференциальные уравнения Лапласа и теории упругости Ламе являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Соответственно, интегральные представления их решений оказываются выраженными не только через граничные значения этих решений, но и через граничные значения некоторых комбинаций первых производных. Для техники построения тождеств это оказывается не принципиальным. Поэтому на их основе, как и в теории кватернионных функций, строятся аналоги интегралов типа Коши и далее, также по аналогии, некоторые кватернионные (и не только) интегральные тождества для достаточно произвольных функций. Полученные группы тождеств применены для исследования спектральных

свойств некоторых операторов кватернионной теории аналитических функций, классической теории потенциала, интегральных операторов теории упругости [3], [16]. Для примера, приведём результаты, непосредственно следующие из действительной формы записи фундаментального кватернионного тождества (23), (24):

Теорема 4. *За исключением точек $\lambda = \pm 1$ собственные числа операторов потенциала двойного слоя B и оператора D совпадают вместе с их кратностью, а соответствующие собственные функции φ и ψ взаимно-однозначно пересчитываются с помощью операторов C и F по следующей последовательности: $B\varphi = \lambda\varphi$, $C\varphi = \psi$, $D\psi = \lambda\psi$, $F\psi = (\lambda^2 - 1)\varphi$.*

Цепочка пересчёта позволяет сделать некоторые выводы о спектре операторов, получающихся суперпозицией. Действительно, из второго и четвёртого равенств цепочки следует: $FC\varphi = (\lambda^2 - 1)\varphi$, $CF\psi = (\lambda^2 - 1)\psi$. То есть собственные числа операторов FC , CF совпадают, а собственные функции φ , ψ являются собственными функциями соответственно операторов B , D . Отметим также, что спектры этих операторов расположены на интервале $(-1, 0)$.

Теорема 5. *Точки $\lambda = \pm 1$ являются точками непрерывного спектра оператора D бесконечной кратности. Точка $\lambda = 0$ может быть точкой сгущения спектра. Других точек непрерывного спектра у оператора D нет.*

По аналогии с предыдущим строится теория кватернионных функций двух переменных. Наличие трёх мнимых единиц отличает её от теории функций комплексного переменного. В ней получается как бы дополнительная степень свободы, возможность выхода в третье измерение. В результате, даже простое повторение исследований по аналогии с предыдущим приводит к некоторым неожиданным результатам. Например, спектр оператора потенциала двойного слоя в плоском случае оказывается симметричным [10]. Заметим, что проверить этот результат численно не удаётся, так как приближённая замена оператора нарушает это свойство. В частном случае кривой интегрирования, совпадающей с окружностью, указанный факт проверяется аналитически.

Вторая группа приложений получается применением полученных выше результатов и кватернионной техники исследования к изучению различных интегральных операторов или уравнений. Здесь нет кватернионных функций непосредственно, есть отдалённые следствия их исследований. Мы излагаем эти приложения, так как, если бы результаты, полученные с использованием кватернионов, не применялись в других исследованиях, то эти результаты были бы просто не нужны. Одним из первых приложений такого рода может служить непосредственное повторение схемы получения тождеств к функциям, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям, отличным от (4) и не являющимся кватернионными. Эти уравнения должны иметь аналоги интегралов Коши и типа Коши. Здесь кватернионы послужили толчком к размышлениям по аналогии. Например, по той же схеме на основе интегральных представлений функций класса C^2 демонстрируется аналогичный предыдущему подход к построению тождеств для некоторых уравнений эллиптического типа. В представление входят значения функций и их различные производные на границе области. Классическим примером является представление функций класса C^2 , записанное на основе формул Грина. На его основе строится аналог формулы Коши в теории гармонических функций, являющийся интегральным представлением гармонической функции через её граничное значение и граничное значение нормальной производной [2]. Полученные интегральные представления можно продифференцировать и,

используя предельный переход на границу области, получить столько граничных производных, сколько их содержалось в исходном интегральном представлении. Использование граничных интегральных равенств по схеме, изложенной выше, приводит к группам интегральных тождеств, включающих в себя значительный произвол. По аналогии вводятся граничные интегральные операторы

$$V\psi = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{|r|} \psi d_x S, \quad |r| = |x - z|, \quad z \in S; \quad B\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|r|} d_x S;$$

$$G\psi = \frac{1}{2\pi} \int_S \psi \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|r|} d_x S; \quad M\psi = \lim_{y \in D^+, y \rightarrow z \in S} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{2\pi} \int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|r|} d_x S \right)$$

Два из этих операторов хорошо известны в классической теории потенциала, это операторы V потенциала простого слоя и B – потенциала двойного слоя. В результате получим тождества, верные для достаточно произвольных функций φ и ψ . От функций φ и ψ , а также от поверхности S требуется степень гладкости, достаточная для существования предыдущих сингулярных и несобственных интегралов. Интегральные тождества для этих функций имеют вид [3]:

$$VG\psi = BV\psi; \quad \psi = G^2\psi - MV\psi;$$

$$\varphi = B^2\varphi - VM\varphi; \quad MB\varphi = GM\varphi.$$

По аналогии с исследованием тождеств для кватернионных функций и здесь устанавливаются некоторые факты для спектра и собственных функций интегральных операторов. Легко устанавливается известный факт о том, что спектры операторов потенциала двойного слоя B и нормальной производной потенциала простого слоя G совпадают. Кроме того, из записанных тождеств вытекает также, что собственные функции этих операторов взаимно пересчитываются с помощью операторов классической теории потенциала V и M . То есть одним из операторов пересчета собственных функций является оператор потенциала простого слоя. Цепочка, устанавливающая связь между собственными функциями и собственными числами операторов B, G , а также формулы взаимного пересчёта похожи на соответствующие формулы пересчета в кватернионной теории потенциала и имеют следующий вид: $B\varphi = \lambda\varphi$, $M\varphi = \psi$, $G\psi = \lambda\psi$, $V\psi = (\lambda^2 - 1)\varphi$.

Устанавливаются также спектральные свойства суперпозиций некоторых операторов. Именно, спектры операторов VM и MV дискретны, совпадают между собой и выражаются через спектр оператора потенциала двойного слоя, а собственные функции взаимно пересчитываются и связаны с собственными функциями оператора потенциала двойного слоя. Подход можно применить и к другим дифференциальным уравнениям эллиптического типа. Например, на основе интегрального представления решений уравнений Ламе теории упругости (аналог интеграла Коши в теории упругости [14])

$$\delta(y) u(y) = \int_S f(x) \bullet U(x, y) d_x S - \int_S u(x) \bullet \Phi(x, y) d_x S,$$

построены интегральные тождества [3] для уравнений теории упругости. Здесь $f(x)$ – граничное значение вектора напряжения, $u(x)$ – граничное значение вектора перемещения точек упругого тела, занимающего трёхмерную область D^+ с границей S ,

$U(x, y)$ – тензор второго ранга Кельвина-Соммильяна, а $\Phi(x, y)$ – силовой тензор влияния второго ранга. Кроме того, $\delta(y)$ – характеристическая функция области, равна 1, если $y \in D^+$ и 0, если $y \in D^-$. Отметим, что если S – ляпуновская поверхность и функция $u(y)$ на границе области удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым показателем β , то предыдущее представление верно и для $y \in S$ и в этом случае $\delta(y) = 0,5$. Граничный вектор напряжения вычисляется по вектору перемещения с помощью оператора дифференцирования

$$T_n u(x) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n (\nabla \bullet u) + \mu (n \times (\nabla \times u)) = f(x)$$

и последующего предельного перехода на границу области. Здесь λ, μ – физические константы, n – нормаль в точке к площадке, на которой вычисляется вектор напряжения. Применение оператора дифференцирования к интегральному представлению и последующий предельный переход на границу области приводит к результату:

$$\begin{aligned} u^+(z) &= 2 \int_S f(x) \bullet U(x, z) d_x S - \lim_{y \in D^+, y \rightarrow z \in S} \left(2 \int_S u(x) \bullet \Phi(x, y) d_x S \right) \\ [T_{n_z} u(z)]^+ &= 2 \int_S \Phi(z, x) \bullet f(x) d_x S - \lim_{y \in D^+, y \rightarrow z \in S} T_{n_z} \left(2 \int_S u(x) \bullet \Phi(x, y) d_x S \right) \end{aligned}$$

В этом случае $u^+(z) = u(z)$, $[T_{n_z} u(z)]^+ = f(z)$, $z \in S$. Используем их для получения других тождеств, содержащих произвол. Аналоги интегралов типа Коши могут быть построены из аналога интеграла Коши в теории упругости. Опуская выкладки и предельные переходы, введём операторы

$$\begin{aligned} H\varphi &= 2 \int_S \varphi(x) \bullet U(x, z) d_x S; \quad K^*\varphi = 2 \int_S \varphi(x) \bullet \Phi(x, z) d_x S; \\ K\varphi &= 2 \int_S \Phi(z, x) \bullet \varphi(x) d_x S; \quad L\varphi = \lim_{y \in D^+, y \rightarrow z \in S} T_{n_y} \left(2 \int_S \varphi(x) \bullet \Phi(x, y) d_x S \right). \end{aligned}$$

Первый из этих операторов известен в теории упругости как прямое значение обобщенного потенциала простого слоя, второй – прямое значение обобщенного потенциала двойного слоя. С помощью техники, аналогичной технике, продемонстрированной выше, получим четыре тождества, содержащие две произвольные вектор-функции φ и ψ :

$$\begin{aligned} HK\varphi &= K^*H\varphi; \quad LH\varphi = K^2\varphi - \varphi; \\ HL\psi &= -\psi + (K^*)^2\psi; \quad KL\psi = LK^*\psi. \end{aligned}$$

На основе этих тождеств также по аналогии с предыдущим доказан классический результат: совпадение спектров сопряжённых операторов K и K^* . Цепочка последовательных вычислений и пересчётов собственных функций имеет вид:

$$K\varphi = \lambda\varphi, \quad H\varphi = \psi, \quad K^*\psi = \lambda\psi, \quad L\psi = (\lambda^2 - 1)\varphi.$$

В классических исследованиях интегральных уравнений теории упругости не упоминается, что оператор обобщённого потенциала простого слоя оказывается оператором пересчёта собственных функций оператора K^* в собственные функции сопряжённого ему оператора K . Другое применение полученных интегральных тождеств в теории

упругости было указано в [12]. Именно, можно искать решение первой задачи теории упругости с помощью обобщенного потенциала простого слоя $u = H\varphi$, где u – искомый вектор перемещения, поиск которого сведён к поиску плотности потенциала φ . Как и в классической теории потенциала, если решение задачи Дирихле искать в виде потенциала простого слоя, получится интегральное уравнение, относящееся к классу интегральных уравнений первого рода, являющихся некорректными. Тождества для обобщенных потенциалов теории упругости позволяют достаточно просто преобразовать задачу к корректным граничным интегральным уравнениям второго рода, что обеспечивает возможность устойчивого численного счёта и использования теорем существования и единственности.

Полученные тождества относятся к теории упругости только по той причине, что в них содержится произвольная константа, коэффициент Пуассона ν . Из последних тождеств можно получить множество других, которые уже будут иметь общий характер, не относящийся к теории упругости, если этому коэффициенту придавать различные числовые значения. Конкретное задание этого числового параметра приводит к конкретному виду ядер интегральных операторов, входящих в тождества. Конечно, представляют интерес не все, получающиеся таким образом варианты тождеств. Как именно меняются ядра, можно видеть на примере распада интеграла, имеющего смысл интеграла Гаусса в теории упругости. Этот интеграл называется обобщённым интегралом Гаусса и в случае ляпуновской поверхности имеет вид:

$$\int_S \Phi(x, y) dS_x = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

Входящее сюда ядро является одним из двух ядер интегралов записанных тождеств и в диадном представлении эти ядра имеют вид

$$U(x, y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)|r|} \left[(3-4\nu)I + \frac{rr}{|r|^2} \right];$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)|r|^3} \left[(1-2\nu)(nr - rn - n \bullet rI) - 3\frac{n \bullet r}{|r|^2}rr \right],$$

Здесь $r = x - y$ – вектор, rr – диадное произведение векторов, I – единичный тензор. Так как равенство верно для произвольного коэффициента Пуассона ν , то, полагая $\nu = 0, 5$, получим следующий вид тензора:

$$\Phi(x, y) = \frac{-3}{4\pi} \frac{n \bullet r}{|r|^5} rr,$$

и интеграл Гаусса примет вид, не зависящий от теории упругости:

$$\int_S \frac{-3}{4\pi} \frac{n \bullet r}{|r|^5} rr d_x S = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

С учётом этого равенства, переходя к пределу $\nu \rightarrow \infty$, получим другое независимое от теории упругости равенство

$$\int_S \frac{1}{4\pi |r|^3} (nr - rn - n \bullet r I) d_x S = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

С учетом классического интеграла Гаусса из теории потенциала, можно записать:

$$\int_S \frac{n \bullet r}{4\pi |r|^3} I d_x S = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, запишем ещё один не зависящий от теории упругости интеграл:

$$\int_S \frac{1}{4\pi |r|^3} (nr - rn) d_x S = \begin{cases} 0, & y \in D^+ \\ 0, & y \in S \\ 0, & y \in D^- \end{cases}$$

Последний интеграл является сингулярным и непрерывным при переходе переменной y через границу области интегрирования S . Записанные интегралы могут иметь самостоятельный интерес, например, последний применён нами для регуляризации сингулярных интегральных уравнений теории упругости.

Тождества кватернионной теории аналитических функций представляют два варианта явной регуляризации сингулярных интегральных уравнений теории упругости. Оба варианта опираются на то, что интегральные операторы теории упругости K, K^* представляются в виде суммы $K = \beta D + T_1, K^* = \beta D + T_2$, где β – константа, выражающаяся через коэффициент Пуассона, D – сингулярный интегральный оператор из теории кватернионных аналитических функций (19), который является замкнутым линейным ограниченным интегральным оператором, а операторы T_1, T_2 для ляпуновских поверхностей вполне непрерывными интегральными операторами со слабой особенностью. Один вариант регуляризации связан со спектральными свойствами оператора D и обобщением теоремы Вейля о вполне непрерывных возмущениях, сформулированном, например, в [15]: Прибавление к замкнутому линейному оператору произвольного вполне непрерывного оператора не изменяет непрерывной части спектра. Следовательно,

Теорема 6. *Спектры интегральных операторов теории упругости имеют три точки непрерывного спектра: $0, \pm\beta$, других точек непрерывного спектра нет.*

Учитывая доказанный грузинской школой математиков во главе с В. Д. Купрадзе факт о том, что для интегральных уравнений теории упругости верны теоремы Фредгольма, [11], остаётся заключить, что эти точки могут быть только точками сгущения спектра. Они не могут быть точками спектра бесконечной кратности, так как их конечная кратность вытекает из теорем Фредгольма.

Если мы хотим теперь трансформировать интегральные уравнения теории упругости к уравнениям с вполне непрерывным оператором (а в этом и заключается

смысл регуляризации), то должны заметить, что у вполне непрерывного оператора спектр дискретный, может иметь только нуль в качестве точки сгущения и собственные числа имеют конечную кратность. Отсюда, на основании теоремы о отображении спектров, возникает идея регуляризации: Надо умножить интегральное уравнение на операторный полином некоторой степени n от интегрального оператора, входящего в интегральное уравнение. При этом в уравнении степень полинома повысится на единицу. Исходную степень и коэффициенты полинома надо подобрать так, чтобы трансформированное уравнение было во-первых, интегральным уравнением второго рода и, во-вторых, интегральный оператор (полином степени $n + 1$), входящий в уравнение, имел в качестве точки сгущения спектра только нулевую точку. Наконец, эта трансформация должна быть эквивалентной, то есть, не увеличивающей и не уменьшающей число решений исходного уравнения. Так как надо отобразить три точки спектра в одну точку, то в трансформированном уравнении полином должен быть минимально операторным полиномом третьей степени, следовательно, регуляризирующим оператором будет операторный полином второй степени. Эта идея реализована в [8]. Косвенно правильность подхода (а значит и кватернионных исследований, а также теоремы 6.) подтверждается совпадением результата с результатом [13] полученным, применением к построению регуляризатора теории символа С. Г. Михлина.

Однако спектральный подход позволяет построить целый класс регуляризаторов, а также становится прозрачной причина, почему надо регуляризовать сингулярные интегральные уравнения, прежде чем применять к ним некоторый численный метод решения. Любой численный метод редуцирует интегральный оператор к конечномерному оператору, спектр которого, как известно, состоит из конечного числа собственных чисел конечной кратности. Следовательно, наибольший ущерб наносится именно в спектральных свойствах. Оказывается, только в одном случае этот ущерб можно сделать сколь угодно малым: если спектр дискретен и может иметь единственную точку сгущения, равную нулю. Прозрачно понять это можно, если представить решение разложенным по собственным функциям оператора и посмотреть, что произойдёт, если в решении оставить конечное число слагаемых, а затем отбрасывать слагаемые с собственными функциями, соответствующими собственным числам, входящим в круг некоторого радиуса, с центром в нуле. То-есть, отбрасываются все собственные функции, соответствующие мало отличающимся от нуля собственным числам. Последующее уменьшение этого радиуса приведёт к улучшению аппроксимации интегрального оператора и к увеличению точности приближённого решения. Однако можно воспользоваться и известным из функционального анализа утверждением: вполне непрерывный оператор всегда можно заменить конечномерным с любой наперёд заданной точностью.

Другой вариант регуляризации заключается в таком умножении исходного интегрального уравнения на некоторый операторный полином, чтобы в результате умножения из сингулярного оператора D образовалась вполне непрерывная комбинация, полученная при исследовании фундаментального кватернионного тождества (16). Подчеркнём ещё раз, что изложенные идеи регуляризации оказались следствием исследования в кватернионных аналитических функциях, поэтому уместны в данной публикации.

Следующие приложения кватернионных аналитических функций связаны с конструированием различных интегральных уравнений. В частности, по новому сконструированы интегральные уравнения восстановления векторного поля по известным ротору и дивергенции. Сначала уравнения для ротора и дивергенции заменяются од-

ним кватернионным дифференциальным уравнением, затем это уравнение решается с помощью техники кватернионного интегрального представления функций через граничные значения этих функций и через кватернионные характеристики поля в объеме. Так как интегральное представление кватернионной функции эквивалентно четырем скалярным уравнениям, то возникла необходимость уменьшения их количества. Используя кватернионные интегральные тождества (16), с помощью серии теорем, доказывающих эквивалентность преобразований при переходе к меньшему числу уравнений, удалось показать, что для решения задачи потребуется решить два граничных интегральных уравнения относительно двух компонент векторного поля. Третья недостающая компонента определяется методами аналитической геометрии и далее по граничному значению вектора векторного поля оно восстанавливается в области. Прямое вычисление компонент векторного поля избавляет от необходимости численного дифференцирования так называемого потенциала векторного поля, к поиску которого обычно сводится эта классическая задача. Детально это приложение кватернионов дано в работе [6].

Для построения интегральных тождеств теории упругости на основе техники кватернионов понадобилась прежде всего, запись дифференциальных уравнений теории упругости (уравнений Ламе) в кватернионной форме:

$$\nabla((\lambda - \mu)\nabla u + (\lambda + \mu)u\nabla) = 0$$

Здесь λ, μ являются физическими постоянными Ламе. Выражение в скобках, являющееся кватернионной аналитической функцией. Оно может быть вычислено с помощью аналога интеграла Коши (10) из теории кватернионных аналитических функций, в котором следует положить :

$$q = (\lambda - \mu)\nabla u + (\lambda + \mu)u\nabla.$$

Действительная запись кватернионного равенства приводит к выражению ротора и дивергенции вектора перемещения через их граничные значения, а предельный переход на границу к кватернионным интегральным тождествам относительно граничных значений этих величин:

$$\begin{aligned} \nabla \bullet u &= -\frac{1}{2\pi C} \int_S \left[C(\nabla \bullet u)n - n \times \frac{1}{2}(\nabla \times u) \right] \bullet \nabla \frac{1}{|r|} d_x S; \\ \frac{1}{2}(\nabla \times u) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left[C(\nabla \bullet u)n - n \times \frac{1}{2}(\nabla \times u) \right] \times \nabla \frac{1}{|r|} d_x S \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \frac{1}{|r|} \left(n \bullet \frac{1}{2}(\nabla \times u) \right) d_x S, \quad \text{где } C = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu}. \end{aligned}$$

Данные равенства удовлетворяются для граничных значений ротора и дивергенции вектора u , являющегося решением уравнений Ламе. Если известны лишь некоторые компоненты ротора и дивергенция или их комбинации, то на данные уравнения можно смотреть как на граничные интегральные уравнения для доопределения недостающих компонент ротора и дивергенции. Известных величин может быть достаточно, либо не хватать, либо быть с избытком для определения решения. Соответственно будет возникать возможность единственного или неединственного решения задачи, либо задача будет некорректной. Различных вариантов таких уравнений может быть много. Например, на эти уравнения можно смотреть как на задачу

восстановления векторного поля. С механической точки зрения в этой задаче речь будет идти о восстановлении вектора перемещения по его нормальной составляющей, заданной на поверхности. Эта задача имеет не единственное решение. Следует обратить внимание на простоту, с которой благодаря кватернионам были получены данные равенства. Известны попытки их получения с помощью тензорного аппарата на двумерном многообразии. Техника была довольно сложной, вследствие чего возникали ошибки выкладок.

Итак, в кватернионной теории аналитических функций построены интегральные тождества. Они оказались полезными в нескольких отношениях: непосредственно с их использованием удалось исследовать спектры некоторых интегральных операторов и построить вполне непрерывные комбинации одного сингулярного интегрального оператора. С использованием этих свойств в приложениях удалось исследовать спектры интегральных операторов теории упругости и предложить два способа регуляризации соответствующих сингулярных интегральных уравнений. Исследовался спектр потенциала двойного слоя в плоском случае. Кватернионные тождества привели к аналогии, по которой были построены интегральные тождества для решений некоторых других дифференциальных уравнений. Эти тождества оказались полезными для анализа спектров соответствующих операторов.

Литература

- [1] Кантор И. Л. Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
- [2] Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.
- [3] Кутрунов В. Н. Курята З. С. Некоторые интегральные тождества математической физики // Вестник ТюмГУ, 1998. № 2. с. 34–41.
- [4] Василевский Н. Л., Жданов М. С., Шапиро М. В. Пространственные аналоги интеграла типа Коши и теория кватернионов // Препр. АН УССР, Ин-т земного магнетизма, ионосферы и распространения радио волн; 1987. №8 (737). 23 с.
- [5] M. Shapiro, N. L. Vasilevski, Quaternionic ψ -hyperholomorphic function, singular integral operators and boundary value problems. 1. ψ -hyperholomorphic function theory. Complex variables, Theory and applications, 1995, v. 27, 17–46
- [6] Кутрунов В. Н. Курята З. С. Интегральные уравнения векторного поля // Известия вузов, сер. математика, 1999. № 6. с. 33–36.
- [7] Кутрунов В. Н., Курята З. С. Кватернионы и интегральные уравнения теории упругости // Сборник докладов межд. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 90-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 22–23 января 2001 года) / под. ред. проф. И. А. Кийко, проф. М. Ш. Исраилова, проф. Г. Л. Бровко. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001, с. 303–305.
- [8] Кутрунов В. Н. Спектральная регуляризация интегральных уравнений теории упругости // ПММ. 1991. т. 2. с. 348–350.
- [9] Кутрунов В. Н. Кватернионный метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости. // ПММ, 1992. т. 56. Вып. 5. с. 864–868.
- [10] Кутрунов В. Н. Симметрия спектра оператора потенциала двойного слоя // Труды средневожского математического общества, 1999. т. 2. № 1, с. 57–65.
- [11] Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В., Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976.
- [12] Натрошвили Д. Г. Об одном интегральном уравнении первого рода // Сообщения академии наук Грузинской ССР. 1981. 102, № 3. с. 501–504. 5.

- [13] Мазья В. Г. Сапожникова В. Д. Замечание о регуляризации сингулярной системы изотропной теории упругости // Вест. ЛГУ, сер. математика, механика, астрономия, 1964. № 7. с. 165–167.
- [14] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
- [15] Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. 339 с.
- [16] Кутрунов В. Н., Кутрунова З. С. Интегрирование кватернионного уравнения Лапласа // Математическое и информационное моделирование: сборник научных трудов. Вып. 6. Тюмень: Издательство "Вектор Бук", 2004. с. 97–111.
- [17] Kutrunov V. N., Kutrunova Z. S. Quaternionian integral identities and Laplace equation integration // Number, Time, Relativity: Proceedings of International Meeting. Moscow, 10–13 August 2004. Moscow, 2004. p. 27–31.
- [18] Шваб А. А. Существенно переопределенная задача теории упругости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. т. 4. №1. с. 204–207.
- [19] Кутрунова З. С. Кватернионная факторизация некоторых дифференциальных уравнений и интегральные тождества // Труды 36-ой Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург: УрО РАН, 2005. с. 169–173.
- [20] Кутрунова З. С. Кватернионы и факторизация некоторых дифференциальных операторов // Сборник докладов межрегиональной конференции, посвященной 30-летию факультета математики и компьютерных наук ТюмГУ. Тюмень. 2005. с. 33–34.

НОРМАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛИЧИСЕЛ

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
hypercomplex@mail.ru

Поличисловое пространство является примером линейного пространства с несколькими полилинейными формами. На множестве невырожденных n -чисел вводится понятие нормального сопряжения. Нормальное сопряжение является $(n-1)$ -нарной операцией, коммутативной по всем аргументам, но в общем случае неассоциативной. Для комплексных и гиперболических чисел такая операция является обычным сопряжением. Нормальное сопряжение может быть применено для изучения алгебраической и геометрической структур координатного пространства n -чисел, а также для введения таких понятий, как скалярное произведение и угловые характеристики двух и более чисел (векторов).

Введение

Поличисловые пространства являются примерами векторных пространств, роль фундаментальных метрических форм в которых играют полиформы от нескольких векторов [1]. Такие пространства принципиальным образом отличаются от привычных евклидовых и псевдоевклидовых пространств и требуют разработки понятий, замещающих понятия угла, ортогональности, скалярного произведения и т. д. Необходимость соответствующих построений диктуется участвовавшими попытками рассматривать финслеровы пространства (а именно таковыми, как правило, являются поличисловые пространства) в качестве геометрического фундамента физики [2, 3]. Успехи же физики во многом зависят от адекватности применяемого математического аппарата и геометрических представлений.

Удивительно, но первое из известных упоминаний о подобных пространствах принадлежит Риману. В своей знаменитой лекции, прочитанной при вступлении в должность профессора Геттингенского университета в 1854 году, он отмечал, что помимо обычных квадратичных метрических форм, "случай, который можно назвать следующим по простоте, соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвертой степени из дифференциального выражения той же степени" [4]. По сути, в этой короткой фразе он описал частный случай пространств, впоследствии получивших название финслеровых.

Финслеровы метрические функции, даже когда они заданы на линейных пространствах, весьма разнообразны и нередко требуют индивидуального подхода в каждом конкретном случае. Однако, когда за финслеровыми пространствами стоят коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа (*поличисла*, *n-числа*), оказывается возможным предложить единый алгоритм, некоторые элементы которого рассматриваются ниже.

Несмотря на то, что исключительная роль поличисловых пространств не вызывает сомнений, в современной геометрической литературе они упоминаются весьма редко. Это объясняется, по-видимому, простой, на первый взгляд, алгебраической структурой поличисел, не стимулирующей исследования ни их самих, ни связанных с ними пространств. Однако, сюрприз, совсем недавно преподнесенный математикам от, казалось бы, со всех сторон изученных комплексных чисел в виде построения на их основе фракталов, говорит о том, что нечто подобное можно ожидать и от других представителей поличисел. Простота алгоритма, при помощи которого получены фрактальные объекты, подчеркивает потенциальное разнообразие, скрывающееся за самыми тривиальными числовыми структурами.

Такие понятия, как скалярное произведение, ортогональность, угол между двумя векторами – неотъемлемая часть аппарата теории евклидова пространства. Эти понятия естественным образом обобщаются на псевдоевклидовы пространства. Предлагаемый в данной работе подход позволяет единообразно обобщить указанные понятия на пространства поличисел.

Пространства поличисел P_n при $n > 2$ не являются евклидовыми или псевдоевклидовыми. Так, если $e_1, e_2, \dots, e_n \in P_n$ – базис и

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k, \quad (1)$$

$$P_n \ni X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n, \quad (2)$$

то n -я степень нормы числа X выражается через n -линейную симметрическую форму

$$(X, Y, \dots, Z) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_n} x^{i_1} y^{i_2} \dots z^{i_n} \quad (3)$$

от одного аргумента X . Так как при $n > 2$ и использовании двух аргументов X и Y получается $(n - 1)$ различных форм, то скалярное произведение и угол между парой векторов (чисел) можно ввести многими способами.

Кроме метрической формы (3) в пространстве P_n можно рассмотреть и другие инвариантные формы, например билинейную

$$((X, Y)) = q_{ij} x^i y^j, \quad (4)$$

где

$$q_{ij} = C p_{im}^k p_{kj}^m, \quad (5)$$

$C \neq 0$ – некоторое действительное число. Для каждой конкретной системы поличисел это число выбирается из соображений простоты и симметрии получаемых формул. Из определения следует, что данная форма является симметрической, то есть $((X, Y)) = ((Y, X))$.

Таким образом, пространство P_n является n -мерным линейным пространством с несколькими полилинейными формами, среди которых две выделенных: метрическая n -го порядка и билинейная.

Понятие сопряженного числа обычно (комплексные числа, кватернионы...) связывают с изменением знаков у мнимых (символьных) единиц. Это приводит к тому, что в поличисловом пространстве P_n приходится вводить в общем случае $(n - 1)$ сопряжение и использовать само число и $(n - 1)$ его сопряжение, чтобы сконструировать из них поличисло вида $(|X|^n \cdot 1 + 0e)$.

Нормальное сопряжение

Будем называть n -числа *невыврожденными*, если матрица (q_{ij}) (5) невырождена, то есть

$$\det(q_{ij}) \neq 0. \quad (6)$$

В этом случае, кроме дважды ковариантного тензора q_{ij} в координатном пространстве P_n определен дважды контравариантный тензор q^{ij} .

Определим $(n-1)$ -нарную операцию, которую в дальнейшем будем называть *нормальным сопряжением комплекса* $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}\}$, следующим образом:

$$[X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}] = \omega_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n} q^{i_n k} x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(n-1)}^{i_{n-1}} e_k. \quad (7)$$

Непосредственно из этой формулы видно, что операция нормального сопряжения коммутативна по всем аргументам, но она в общем случае не является ассоциативной. Постоянную C в формуле (5) можно, например, выбирать так, чтобы $[1, 1, \dots, 1] = 1$.

Будем говорить, что число $Z = [X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}]$ *нормально сопряженное* комплексу чисел $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}\}$.

Назовем *скалярным произведением числа X на комплекс* $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}\}$ билинейную форму

$$((X, Z)) = (X, X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-1)}). \quad (8)$$

Введем обозначение

$$\tilde{X} = [X, X, \dots, X], \quad (9)$$

и тогда

$$((X, \tilde{X})) = |X|^n, \quad (10)$$

если в данной системе поличисел n -я степень нормы числа X выражается формулой

$$|X|^n = (X, X, \dots, X). \quad (11)$$

Согласно определению, число $\tilde{X}$ является нормально сопряженным числу X .

Поясним введенные выше понятия на примерах.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

$$X = x^1 + ix^2, \quad i^2 = -1, \quad (12)$$

$$(X, Y) = x^1 y^1 + x^2 y^2, \quad (13)$$

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$(q_{ij}) = 2C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Выберем $C = \frac{1}{2}$, тогда

$$(\omega_{ik} q^{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\tilde{X} = x^1 - ix^2, \quad (17)$$

то есть нормальное сопряжение для комплексных чисел – это обычное комплексное сопряжение. Скалярное произведение числа X на Y есть

$$((X, \tilde{Y})) = x^1 y^1 + x^2 y^2 = (X, Y). \quad (18)$$

Таким образом

$$((X, \tilde{X})) = |X|^2, \quad (19)$$

$$X \cdot \tilde{X} = |X|^2 \cdot 1 + 0 \cdot i. \quad (20)$$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, H_2

$$X = x^1 + jx^2, \quad j^2 = 1, \quad (21)$$

$$(X, Y) = x^1 y^1 - x^2 y^2, \quad (22)$$

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$(q_{ij}) = 2C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Выберем $C = \frac{1}{2}$, тогда

$$(\omega_{ik} q^{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\tilde{X} = x^1 - jx^2, \quad (26)$$

то есть нормальное сопряжение для гиперболических чисел – это обычное сопряжение. Скалярное произведение числа X на Y есть

$$((X, \tilde{Y})) = x^1 y^1 - x^2 y^2 = (X, Y). \quad (27)$$

Таким образом,

$$((X, \tilde{X})) = |X|^2, \quad (28)$$

$$X \cdot \tilde{X} = |X|^2 \cdot 1 + 0 \cdot j. \quad (29)$$

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА H_3

С этими числами удобнее всего работать в ψ -базисе:

$$X = x^1 \psi_1 + x^2 \psi_2 + x^3 \psi_3, \quad (30)$$

$$p_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (31)$$

$$(q_{ij}) = C \cdot \text{diag}(1, 1, 1), \quad (32)$$

$$(X, Y, Z) = \frac{1}{6}(x^1 y^2 z^3 + x^1 y^3 z^2 + x^2 y^1 z^3 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2 + x^3 y^2 z^1). \quad (33)$$

Выберем $C = \frac{1}{3}$, тогда

$$[X, Y] = \frac{1}{2}[(x^2 y^3 + x^3 y^2)\psi_1 + (x^1 y^3 + x^3 y^1)\psi_2 + (x^1 y^2 + x^2 y^1)\psi_3], \quad (34)$$

$$[1, 1] = 1, \quad (35)$$

$$\tilde{X} = x^2 x^3 \psi_1 + x^1 x^3 \psi_2 + x^1 x^2 \psi_3, \quad (36)$$

$$X \cdot \tilde{X} = |X|^3 \cdot 1 + 0 \cdot e, \quad (37)$$

если норма $X \in H_3$ определяется формулой

$$|X|^3 = x^1 x^2 x^3. \quad (38)$$

Скалярное произведение комплекса $\{X, Y\}$ на число Z есть скаляр

$$((Z, [X, Y])) = (X, Y, Z). \quad (39)$$

Билинейная форма (4) от двух чисел X, Y имеет вид

$$((X, Y)) = \frac{1}{3}(x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3). \quad (40)$$

Найдем все такие числа H_3 , которые удовлетворяют уравнению

$$\tilde{X} = X. \quad (41)$$

Решая систему трех квадратных уравнений с тремя неизвестными, получим пять корней: $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$. Последние четыре числа составляют, если представить их радиус векторами, вершины правильного тетраэдра, а первая – его центр.

Для того чтобы $X, Y \in H_3$ были делителями нуля относительно операции нормального сопряжения (т. е. $[X, Y] = 0$, при $X \neq 0, Y \neq 0$), они должны быть делителями нуля относительно поличислового умножения.

Любое число $Y \in H_3$ можно представить в виде

$$Y = [1, Z], \quad \text{где} \quad Z = (-y^1 + y^2 + y^3, y^1 - y^2 + y^3, y^1 + y^2 - y^3). \quad (42)$$

Рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения вида

$$[1, Y] = \lambda Y, \quad (43)$$

где λ – некоторое действительное или комплексное число. Так как матрица линейного преобразования в правой части формулы (43) симметрическая, то собственные значения все действительные: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$. Собственные векторы, соответствующие первому собственному значению, образуют прямую $1t$, где t – параметр вдоль

прямой, а собственные векторы, соответствующие собственному значению $(-\frac{1}{2})$, образуют плоскость, перпендикулярную (в евклидовом смысле) прямой вдоль единицы и проходящую через начало координат, то есть плоскость натянутую на два радиус-вектора, например: $(2, -1, -1)$, $(0, 1, 1)$.

Формулы (30)–(40) автоматически обобщаются на поличисла¹ H_n с заменой $3 \rightarrow n$, $C = \frac{1}{n}$.

Из приведенных выше примеров, сравнивая формулы (20), (29) и (37), можно сделать вывод, что для комплексных и H_n чисел справедлива формула

$$X \cdot \tilde{X} = |X|^n \cdot 1 + 0 \cdot e. \quad (44)$$

Возможно, такая формула справедлива для любых невырожденных поличисел, но это утверждение требует доказательства.

Можно говорить, что число X "ортогонально" числу Y , если

$$((X, \tilde{Y})) = 0. \quad (45)$$

Отметим, что это понятие при $n > 2$, вообще говоря, не симметричное, то есть из того, что X ортогонально Y , в общем случае не следует, что Y ортогонально X . Если обе ортогональности имеют место, то числа X и Y называются *взаимно ортогональными*.

Если задан комплекс из $(n-1)$ чисел, часть из которых могут совпадать, и число Z является нормальным сопряжением этому комплексу, то число X "ортогонально" данному комплексу, если

$$((X, Z)) = 0. \quad (46)$$

Угловые параметры нескольких чисел

В пространстве поличисел $n > 2$ угол между двумя числами (векторами) можно ввести многими способами. В данной работе мы используем алгебраический подход на основе аналога формулы треугольника евклидова пространства.

Поясним это на примере чисел H_3 . Пусть числа X и Y таковы, что

$$x^i > 0, \quad y^i > 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (47)$$

В этом случае они не являются делителями нуля. Найдем выражение для куба нормы их суммы $Z = X + Y$

$$|Z|^3 = (X + Y, X + Y, X + Y) = |X|^3 + 3(X, X, Y) + 3(X, Y, Y) + |Y|^3. \quad (48)$$

Введем два гиперболических угла β_X, β_Y согласно формулам:

$$\cosh \beta_X = \frac{(X, X, Y)}{|X|^2 |Y|}, \quad \cosh \beta_Y = \frac{(X, Y, Y)}{|X| |Y|^2}, \quad (49)$$

тогда

$$|Z|^3 = |X|^3 + |Y|^3 + 3|X|^2 |Y| \cosh \beta_X + 3|X| |Y|^2 \cosh \beta_Y. \quad (50)$$

Эти два гиперболических угла β_X, β_Y будем называть *угловыми характеристиками* пары чисел X, Y .

¹ H_n – гиперкомплексные числа, изоморфные алгебре действительных квадратных диагональных матриц $n \times n$.

Поясним смысл форм, фигурирующих в формулах (48), (49). Для этого рассмотрим комплекс $\{X, Y\}$ и нормально сопряженное к этому комплексу число $W = [X, Y]$. Форма (X, X, Y) есть скалярное произведение числа X на комплекс $\{X, Y\}$, а форма (X, Y, Y) есть скалярное произведение числа Y на тот же комплекс.

Если числа X, Y не являются делителями нуля, но не удовлетворяют условиям (47), то правые части в формулах (49) могут принимать отрицательные значения. Если мы при этом хотим сохранить формулу (50), то угловые характеристики β_X, β_Y будут уже в общем случае комплексными числами. Если же нам важно, чтобы угловые характеристики оставались действительными, то приходится одновременно изменять формулы (49) и (50). Например, если в первой формуле (49) правая часть меньше нуля, то в этой формуле и в формуле (50) можно заменить $\cosh \beta_X$ на $\sinh \beta_X$.

Почему пара чисел (векторов) в трехмерном пространстве H_3 характеризуется двумя угловыми характеристиками, а не одной, как это имеет место в трехмерном евклидовом пространстве? Это связано с тем, что пространство H_3 , как и все поличисловые пространства размерности больше двух, имеет выделенные направления и плоскости, то есть не являются изотропным.

Фракталы

Последние тридцать лет в теории динамических систем бурно развивалось направление, связанное с комплексными фракталами [5], яркими представителями которых являются множества Жюлиа и Мандельброта. Однако на фоне многочисленных замечательных и красивых результатов почти затерялся тот факт, что практически все достижения были получены на основе комплексных чисел и евклидовой плоскости. В противоположность этому, построение многомерных фракталов на основе кватернионов в целом оказалось мало впечатляющим.

Глубинные основания проблем, возникающих на данном пути, следует отнести к принципиальной невозможности обобщить теорию аналитических функций комплексной переменной на кватернионную переменную. Последнее обстоятельство обусловлено некоммутативностью кватернионного произведения.

Структура поличисел, сохраняя симметрию (равносложность) между сложением и умножением, не содержит тех трудностей, которые возникают в некоммутативных или неассоциативных числовых алгебрах. Следовательно, на основе поличисел вполне можно ожидать построение многомерных фракталов более интересных, чем получились с использованием кватернионов. Обратившись в качестве примера к числам H_n , получим, что невозможно построить сколько-нибудь содержательные фракталы, используя обычные для множеств Жюлиа зависимости, например:

$$X_{(i+1)} = X_{(i)}^2 + C. \quad (51)$$

Это связано с чрезвычайно простым устройством чисел H_n и, в частности, H_3 . В специальном базисе аналитические функции переменной H_n распадаются на n функций одной действительной переменной, и в результате, получающийся итерационный процесс сводится к n независимым одномерным итерационным процессам, что мало интересно. Однако для поличисел имеется принципиальная возможность ввести дополнительные операции, среди которых имеется и рассмотренная выше операция нормального сопряжения, и использовать эти операции для построения более сложных не расщепляющихся итерационных процессов.

Так, для H_3 можно предложить несколько простых и нетривиальных итерационных процессов $X_{i+1} = F(X_i)$:

1. $F(X) = \tilde{X} + C$,
2. $F(X) = [X, \tilde{X}] + C$,
3. $F(X) = [X, [X, 1]] + C$,
4. $F(X) = [X, [X, [X, 1]]] + C$,
5. $F(X) = X \cdot [X, 1] + C$,
6. $F(X) = [X, [X, C]] - 1$,
7. $F(X) = [X \cdot X, X] + C = [X, X] \cdot [X, 1] + C$,

где $C \in H_3$. Начальные значения чисел для этих итерационных процессов брались на плоскостях, перпендикулярных (в евклидовом смысле) прямой $1 \cdot t$. Параметр t указывает точку пересечения этой прямой и плоскости, при $t = 0$ плоскость проходит через начало координат. Интересно, что при $C = 0$, $t = 0$ процессы 2, 3, 4 дают вокруг начала координат область сходимости в виде скругленного шестиугольника.

Исследование на сходимость итерационного процесса 1 дает достаточно интересные в геометрическом плане трехмерные области сходимости. Еще интереснее оказываются области сходимости процесса 7.

Заключение

Конечно, предложенные в данной работе построения можно обобщать и далее. Так, в самом общем случае можно рассмотреть n -мерное линейное пространство с полилинейной симметрической формой (3), разбить множество аргументов на два комплекса и говорить, что такая форма есть скалярное произведение этих двух комплексов. Это вызовет дальнейшее обобщение всех введенных выше понятий.

Несомненно, что операция нормального сопряжения имеет свое собственное алгебраическое значение. Для невырожденных поличисел построен удобный алгоритм обобщения геометрических объектов и величин, которые понятны и привычны в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах, такие как скалярное произведение, ортогональность, углы между векторами и т. п.

Введение над гиперкомплексными числами дополнительных операций превращает последние в нечто большее, чем линейные алгебры. Такие операции позволяют вместо достаточно тривиальных структур поличисел получить геометрии, количество и качество внутренних симметрий которых неизмеримо превышает возможности поличисел. Развивая эту идею, возможно будет уместно помимо общепринятого термина "линейная алгебра" ввести термин "линейная геометрия", понимая под этим линейную алгебру плюс все возможные на этом множестве независимые полилинейные операции, естественно вытекающие с помощью некоторых построений из самой линейной алгебры.

Одним из перспективных направлений использования потенциала таких линейных геометрий оказывается построение многомерных фрактальных числовых множеств, аналогичных множествам Мандельброта и Жюлиа на комплексной плоскости.

Вероятно, следует еще раз подчеркнуть, что построенные при помощи введенной авторами специфической $(n-1)$ -нарной операции фрактальные множества являются объектами не произвольного, а именно поличислового пространства, что открывает

перед ними широкие перспективы, отсутствующие, например, у фракталов, строящихся над телом кватернионов. Кватернионы, как известно, обладают некоммутативным умножением, что существенно сужает возможности их математических приложений, в частности, построение развитой теории аналитических функций. Поскольку этот недостаток отсутствует у поличисел, а также учитывая гипотезу о возможности замены пространства Минковского на одно из полипространств [6], предлагаемый подход, по-видимому, имеет широкие перспективы.

Литература

- [1] Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.
- [2] Богословский Г. Ю. Теория локально анизотропного пространства-времени. М., Издательство МГУ, 1992.
- [3] Asanov G. S. Finslerian Extension of General Relativity, Dordrecht, 1984.
- [4] Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии. – В кн.: Об основаниях геометрии. М., ТТЛ, 1956.
- [5] Пайтген Х. О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. М., "Мир", 1993.
- [6] Павлов Д. Г. Четырехмерное время. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

КОНФЕРЕНЦИЯ "ЧИСЛО, ВРЕМЯ, ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ" – 2004

В. О Гладышев, Д. Г. Павлов

hypercomplex@mail.ru

10–13 августа 2004 в МГТУ им. Н.Э. Баумана состоялась Международная научная конференция "Число, время, относительность".

Целью Конференции было привлечь внимание российских и зарубежных физиков к финслеровым обобщениям теории относительности, собрать ведущих специалистов в области гиперкомплексных чисел, Финслеровой геометрии, обобщающей римановы многообразия, а также специалистов в области теории относительности.

Конференция была посвящена 175-летию Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана и организована его кафедрой физики, кафедрой теоретической физики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Объединенным физическим обществом РФ. Генеральным спонсором Конференции являлся Фонд 175-летия МГТУ им. Н.Э. Баумана.

На торжественном открытии Конференции с приветствиями к участникам выступили проректор по международным связям МГТУ им. Н.Э. Баумана Г.П. Павлихин, заведующий кафедрой физики А.Н. Морозов, научный сотрудник Лаборатории им. Оливера Лоджа физического факультета Ливерпульского университета П. Роуландс.

Основные направления программы Конференции:

1. Финслерова геометрия.
2. Гиперкомплексные числа и связанные с ними пространства.
3. Поличисла и полипространства.
4. Геометрические аспекты понятия времени.
5. Финслеровы обобщения теории относительности.

Финслерова геометрия, на принципиальную возможность построения которой обратил внимание еще Риман, и гиперкомплексные числа, чья история берет свое начало в трудах Гамильтона, вплоть до конца XX века существовали как бы в не пересекающихся плоскостях. Организаторы Конференции ставили перед собой цель найти пути синтеза этих областей знания, что, возможно, приведет к созданию нового теоретического аппарата, удобного для более полного описания многообразия физических явлений. В связи с этим ряд докладов на Конференции был посвящен собственно Финслеровой геометрии, некоторые доклады были посвящены гиперкомплексным числам, но особый интерес вызвали доклады, нацеленные на объединение понятий числа и геометрии.

На Конференции были представлены свыше 50 докладов с результатами исследований, проводимых в МГУ им. М.В. Ломоносова, Институте общей физики РАН, Институте механики сплошных сред РАН, Акустическом институте им. акад. Н.Н. Андреева РАН, Институте механики и машиностроения КазНЦ РАН, Объединенном институте ядерных исследований и в других университетах и академических институтах России, стран ближнего и дальнего зарубежья.

Среди участников – физики и математики из России, Азербайджана, Алжира, Бангладеш, Бразилии, Великобритании, Греции, Индии, Казахстана, Канады, Португалии, США, Украины, Швеции.

Основными языками Конференции являлись русский и английский. Работа Конференции освещалась на Web-сайте <http://www.hypercomplex.ru>. Этот сайт, созданный по инициативе Д. Г. Павлова, содержит большое количество информации о научных работах, посвященных связи финслеровой геометрии и гиперкомплексных алгебр, о научных семинарах и конкурсах по этой тематике (в том числе студенческих).

Перед началом работы Конференции был издан сборника тезисов докладов на русском и английском языках под редакцией Д. Г. Павлова (председатель оргкомитета, МГТУ им. Н. Э. Баумана) и Г. С. Асанова (сопредседатель, МГУ им. М. В. Ломоносова). Полные тексты наиболее интересных докладов будут опубликованы в настоящем журнале "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике" на русском и английском языках.

Работа Конференции проходила в зале заседаний Ученого совета МГТУ им. Н. Э. Баумана. Для участников Конференции были организованы экскурсии в музей МГТУ, экскурсии по центру Москвы и в Сергиев Посад.

Конференция, посвященная юбилею Бауманского Университета, позволила участникам Конференции познакомиться с историей развития науки и техники в старейшем Российском техническом университете, в котором работали такие выдающиеся ученые как Д. И. Менделеев, Н. Е. Жуковский, П. Л. Чебышев, С. А. Чаплыгин, А. С. Ершов, Д. К. Советкин, Ф. М. Дмитриев, А. В. Летников, А. П. Гавриленко и многие другие, а также узнать о тесной исторической и научной связи двух главных Университетов страны (МГУ им. М. В. Ломоносова и МГТУ им. Н. Э. Баумана).

* * *

Основной задачей Оргкомитета было собрать физиков, математиков и философов, пытающихся взглянуть на наиболее глубокие проблемы естествознания с самых общих позиций, среди которых одно из первых мест занимает идея связи алгебраических структур, геометрии и физики.

Недавно завершившееся столетие отмечено двумя фундаментальными научными революциями. Одну из них произвели Эйнштейновские Частная и Общая теории относительности: изменив представления о пространства-времени, они позволили создать теорию гравитации. Другая революция в физике оказалась менее заметной для широкой публики, но более радикальной для физического мировоззрения: Бор, Гейзенберг, а вслед за ними Дирак создали квантовую механику. В итоге фундамент современной физики оказался состоящим из двух не связанных меж собой первоначал, своего рода двух китов, плавающих в совершенно неизведанном море. Теория относительности вполне удовлетворительно обрисовала картину мира. Квантовая теория также полно и непротиворечиво описала материальный мир для своего круга явлений. И хотя двух истин не бывает, в современном естествознании дело обстоит именно так. Поэтому с середины XX столетия многие выдающиеся ученые стремились найти более общую теоретическую концепцию.

Чтобы создать теорию относительности, Эйнштейну пришлось выйти за ставшие традиционными рамки классической геометрии Евклида, сменив ее на геометрию Римана. Можно предположить, что и будущее развитие физики потребует новой геометрии. Таковой может стать, например, Финслерова геометрия, являющаяся более общей геометрией, чем геометрия Минковского. Как известно, точки на прямой и плоскости являются геометрическими образами действительного и комплексного чисел. Точки n -мерных Финслеровых пространств во многих случаях могут выражаться гиперкомплексными числами, алгебрами со своими особыми свойствами.

В последние 20 лет число научных публикаций в области исследований гиперкомплексных чисел растет экспоненциально. Международная научная Конференция "Число, время и относительность" была призвана обсудить наиболее важные и интересные результаты последних лет в этой области.

Среди представленных на Конференции докладов наибольший интерес вызвали доклады Д. Г. Павлова "Число, геометрия пространства времени и относительность", Г. С. Асанова "Геометрия, основанная на финслероиде", Г. И. Гарасько "Нормальное сопряжение на множестве поличисел", П. Роуландса (Великобритания) "Нильпотентный вакуум", А. Ф. Турбина "Алгебры гиперкомплексных чисел: от алгебры к геометрии и анализу", Ф. Топпана (Бразилия) "Алгебры с делением, обобщенные суперсимметрии и октонионная М-теория", Э. Г. Мычелкина "Неизбежность антискалярной гравитации", Х. Б. Альмейда (Португалия) "Альтернативная формулировка Общей теории относительности в терминах четырехмерной оптики, новое определение времени", Р. В. Михайлова "Особая роль четырехмерных пространств в топологии", Ю. А. Рылова "Принцип деформации как основа физической геометрии" и ряд других.

Помимо нового взгляда на основания физики, исследования гиперкомплексных чисел могут приводить к важным прикладным результатам. Так, геофизик из Тюмени В. Кутрунов обнаружил, что с помощью кватернионов многие геофизические задачи, в том числе столь актуальные, как поиск новых нефтегазовых месторождений Сибири, решаются эффективней, чем векторными методами. Перспективы исследования гиперкомплексных чисел и Финслеровой геометрии, как следует из докладов, прозвучавших на Конференции, просматриваются в таких разных областях, как расчет электрических цепей, представление о природе гравитации, изучение феномена времени.

Это свидетельствует, что данное направление в науке продолжит свое развитие и завоеует признание научного сообщества. Однако в настоящее время оно развивается лишь благодаря энтузиазму исследователей. Поэтому, как отметил председатель оргкомитета Конференции Д. Г. Павлов, особенно важно поддержать молодых ученых и студентов, учредить специальные стипендии, организовать конкурсы работ, обеспечить возможность участия в Конференциях студентов и аспирантов. Первые шаги в этом направлении уже сделаны. Не один год проводится конкурс научных работ по проблемам, связанным с финслеровой геометрией, в 2004 году впервые при поддержке Объединенного физического общества состоялся конкурс рефератов студентов и школьников. За лучший реферат по гиперкомплексным числам студент из Саратова А. В. Малыгин получил возможность принять участие в Конференции и ежемесячную стипендию.

Подводя итоги Конференции, можно сказать, что она подтвердила существование тесной связи между гиперкомплексными алгебрами и некоторыми выделенными финслеровыми пространствами. Организаторам Конференции удалось поддержать и, в известном смысле, стимулировать рост интереса к этой тематике. Поэтому можно считать, что основная цель Конференции была достигнута.

ОБОБЩЕННО–АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И КОНГРУЕНЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

В данной работе изучаются некоторые свойства обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной. Классу $\{f^i; \Gamma_{kj}^i\}$ таких функций можно сопоставить множество пространств аффинной связности, в каждом из которых определяется конгруенция геодезических, ассоциированная с данным классом обобщенно-аналитических функций. Если векторное поле f^i в каждой точке такого пространства касательно одной из геодезических конгруенции, то такое свойство накладывает некоторые ограничения на саму обобщенно-аналитическую функцию.

Введение

Впечатляющие успехи теории функций комплексной переменной и ее приложений при решении физических задач побуждает искать обобщение такой теории для пространств размерности больше, чем два. Одним из таких возможных обобщений является построение теории обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной [1] с рядом дополнительных условий, выполнение которых позволяло бы автоматически применять такие функции при построении теоретико-физических моделей и решении конкретных физических задач.

Обобщенно-аналитическая функция (подробнее см. [1]) – это пара $\{f^i; \gamma_k^i\}$:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma_k^i = p_{kj}^i \dot{f}^j, \quad \text{или} \quad \tilde{\nabla}_k f^i = p_{kj}^i \dot{f}^j, \quad (1)$$

где $f^i, \dot{f}^i$ – одноковариантные векторные поля в пространстве $\{\mathbf{M}_n; \mathbf{P}_n\}$, $\mathbf{M}_n$ – n -мерное элементарное многообразие, допускающее взаимно однозначное отображение $\mathbf{M}_n \leftrightarrow \mathbf{P}_n$ на n -мерное пространство поличисел $\mathbf{P}_n$, а объекты γ_k^i при переходе от одной системы координат к другой преобразуются как объекты $(\Gamma_{kj}^i f^j)$, где Γ_{kj}^i – объекты аффинной связности. Одним из необходимых свойств пространства $\{\mathbf{M}_n; \mathbf{P}_n\}$ постулируется изоморфность касательного пространства в любой точке $X \in \{\mathbf{M}_n; \mathbf{P}_n\}$ пространству ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел) $\mathbf{P}_n$. Наличие взаимно однозначного отображения $\mathbf{M}_n \leftrightarrow \mathbf{P}_n$ позволяет вводить в пространстве $\{\mathbf{M}_n; \mathbf{P}_n\}$ специальные системы координат, в которых тензорное поле p_{kj}^i , определяющее правила поличислового умножения, не зависит от точки пространства; если $\mathbf{P}_n \ni e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис, то

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k. \quad (2)$$

Пусть ε^i – координаты разложения единицы, тогда

$$\varepsilon^i p_{ij}^k = \delta_j^k. \quad (3)$$

Используя эту формулу и формулу (1), получим явное инвариантное выражение обобщенной производной

$$\dot{f}^i = \varepsilon^k \tilde{\nabla}_k f^i \quad (4)$$

и соотношений Коши-Римана

$$\tilde{\nabla}_k f^i - p_{kj}^i \varepsilon^m \tilde{\nabla}_m f^j = 0. \quad (5)$$

Каждой обобщенно-аналитической функции $\{f^i; \gamma_k^i\}$ можно сопоставить множество пространств аффинной связности $\mathbf{L}_n(\Gamma_{kj}^i)$ с объектами аффинной связности Γ_{kj}^i , являющимися решениями системы уравнений

$$\Gamma_{kj}^i f^j = \gamma_j^i. \quad (6)$$

Множество всех функций с одним и тем же объектом связности, определяемым таким образом, образуют некоторое множество (класс функций), которое обозначается $\{f^i; \Gamma_{kj}^i\}$. В пространстве аффинной связности всегда найдется такой параметр τ , что система уравнений для определений геодезических $x^i = x^i(\tau)$ принимает [2] вид

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0. \quad (7)$$

Если заменить объект связности Γ_{kj}^i на другой

$$\tilde{\Gamma}_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i + \frac{1}{2}(p_k \delta_j^i + p_j \delta_k^i) + S_{kj}^i, \quad (8)$$

где p_i – произвольное одноковариантное поле, а S_{kj}^i – произвольный тензор, антисимметричный по нижним индексам, то есть тензор кручения, то геодезические останутся теми же (см., например, [2]).

Конгруенция геодезических, соответствующая обобщенно-аналитической функции

Пусть $\{f^i; \gamma_k^i\}$ – обобщенно-аналитическая функция, и векторное поле f^i определяет конгруенцию геодезических с объектом связности (8), где объект Γ_{kj}^i связан с данной обобщенно-аналитической функцией соотношением (6), причем касательный вектор вдоль геодезической $x^i = x^i(\tau)$ есть

$$\frac{dx^i}{d\tau} = f^i. \quad (9)$$

Тогда дифференциальные уравнения (7) с заменой Γ_{kj}^i на $\tilde{\Gamma}_{kj}^i$ для определения геодезических превратятся в соотношения для обобщенно-аналитической функции

$$f^k \tilde{\nabla}_k f^i + (p_m f^m) f^i = 0, \quad (10)$$

или

$$f^k p_{kj}^i \dot{f}^j + (p_m f^m) f^i = 0. \quad (11)$$

Итак, для того чтобы обобщенно-аналитическая функция определяла конгруенцию геодезических, предложенным выше способом, или, как мы будем говорить в дальнейшем, обладала X -свойством, она должна удовлетворять соотношениям (10), (11). Для краткости обобщенно-аналитические функции, обладающие X -свойством, будем называть X -функциями.

Система уравнений (11), рассматриваемая как система линейных уравнений относительно n неизвестных компонент $\dot{f}^i$, совместна, так как одно решение заведомо имеется

$$\dot{f}^i = -(p_m f^m) \varepsilon^i. \quad (12)$$

Если матрица

$$(a_{ij}) = f^k p_{kj}^i \quad (13)$$

невыврожденна в некоторой области, то (12) – единственное решение системы (11) в этой области пространства $\{\mathbf{M}_n; \mathbf{P}_n\}$.

В пространстве поличисел $X \in P_n$ n -ная степень "нормы" выражается через форму

$$\Omega(X) = \det(x^k p_{kj}^i). \quad (14)$$

Значение этой формы не зависит от базиса;

$$\Omega(YX) = \Omega(Y)\Omega(X) \quad (15)$$

при любых $X, Y \in P_n$; наконец $\Omega(1) = 1$. Таким образом, можно определить n -ную степень "нормы" формулой

$$|X|^n = \Omega(X) \quad (16)$$

или формулой

$$|X|^n = |\Omega(X)|. \quad (17)$$

В силу выше сказанного, можно ожидать, что решения уравнения (10) будут существенно зависеть от неравенства или равенства нулю нормы X -функции.

Покажем, что для произвольных поличисел аналитическая функция

$$F(X) = \omega X + V_0 \quad (18)$$

(ω – произвольное действительное число, а V_0 – произвольное поличисло) является именно функцией, определяющей конгруенцию геодезических, то есть является X -функцией. Если $\omega \neq 0$, то ее можно записать в виде

$$F(X) = \omega(X - X_0), \quad (19)$$

где X_0 – произвольное поличисло. Подставим (18) в (10) и, учитывая, что для аналитических функций $\gamma_k^i = 0$, получим

$$f^i[\omega + (p_m f^m)] = 0. \quad (20)$$

Так как $p_m - m$ произвольных функций-компонент, то всегда можно построить такие m компонент, что $(p_m f^m) = -\omega$. Что и требовалось показать.

Выясним вид кривых, которые определяются функцией (18). Для этого надо найти общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \omega x^i + v_0^i. \quad (21)$$

Оно имеет вид

$$x^i = v_0^i \tau + a^i e^{\omega \tau}. \quad (22)$$

Под конгруенцией кривых в некоторой области n -мерного пространства будем понимать $(n - 1)$ -параметрическое семейство кривых, причем через каждую точку этой n -мерной области должна проходить одна и только одна кривая. В общем решении (22) имеется $(2n + 1)$ независимый действительный параметр плюс параметр вдоль кривой, поэтому для того, чтобы уравнения (22) определяли конгруенцию, параметры v_0^i, a^i, ω должны выражаться через $(n - 1)$ независимый параметр, а область изменения параметра τ также может быть ограничена в зависимости от значений

этих $(n - 1)$ независимого параметра. Если мы фиксируем направление изменения параметра τ , например, от меньших к большим значениям, то каждая кривая получает еще и направление, то есть имеет вид линии тока или "силовой линии". Несмотря на простейший вид общего решения (22), эти формулы дают большое разнообразие конгруенций кривых, не все из них будут прямыми, а значит геодезическими. Таким образом, множество решений системы уравнений (10) включает в себя как подмножество X -функции. То есть выполнение уравнений (10) является необходимым, но не достаточным условием наличия у обобщенно-аналитической функции X -свойства.

В физике часто встречается условие $\nabla_i f^i = 0$. Так, например, выражается закон сохранения заряда, а также калибровка четырехвектора потенциала электромагнитного поля. Вычислим аналогичную свертку для обобщенно-аналитической функции, получим

$$\tilde{\nabla}_i f^i = p_{ij}^i \dot{f}^j. \quad (23)$$

Для X -функции при выполнении условия (12) имеем

$$\tilde{\nabla}_i f^i = -(p_m f^m), \quad (24)$$

а для X -функции (18), (19)

$$\tilde{\nabla}_i f^i = n\omega. \quad (25)$$

Примеры аналитических X -функций

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим аналитическую функцию

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (26)$$

комплексной переменной

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1. \quad (27)$$

Выпишем вначале матрицу (13)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \quad (28)$$

и найдем ее определитель

$$\det(a_{ij}) = u^2 + v^2. \quad (29)$$

Таким образом, для комплексных чисел справедлива формула (16)

$$\det(a_{ij}) = |F(z)|^2. \quad (30)$$

Решим систему уравнений (10). В данном случае они принимают вид

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + (p_1 u + p_2 v)u = 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (p_1 u + p_2 v)v = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Используя соотношения Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (32)$$

из этой системы уравнений получим две системы:

$$\begin{cases} (u^2 + v^2) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + (p_1 u + p_2 v) \right] = 0, \\ (u^2 + v^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (33)$$

и

$$\begin{cases} (u^2 + v^2) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ (u^2 + v^2) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + (p_1 u + p_2 v) \right] = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Рассмотрим эти системы уравнений в области $u^2 + v^2 \neq 0$. Тогда, сокращая на этот общий ненулевой множитель и записывая условия интегрируемости получившихся систем уравнений, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_1 u + p_2 v) = \frac{\partial}{\partial y}(p_1 u + p_2 v) = 0 \Rightarrow (p_1 u + p_2 v) = \text{const}, \quad (35)$$

и единственное решение для данного случая

$$F(z) = \omega z + w_0, \quad (36)$$

где ω – произвольное действительное число, $w_0 = u_0 + iv_0$ – произвольное комплексное число.

Вычислим свертку $\nabla_i f^i$ от X -функции (36), получим

$$\nabla_i f^i = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2\omega, \quad (37)$$

что согласуется с формулой (25).

Итак, мы доказали, что все аналитические X -функции комплексной переменной имеют вид (36) и что не существует аналитической X -функции от комплексной переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_i f^i \equiv 0$.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, H_2

Рассмотрим аналитическую функцию

$$F(z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad (38)$$

гиперболической переменной

$$z = x + jy, \quad j^2 = 1. \quad (39)$$

Вычислим матрицу (13)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \quad (40)$$

и ее определитель

$$\det(a_{ij}) = u^2 - v^2. \quad (41)$$

Таким образом, при $v = \pm u$ матрица (a_{ij}) является вырожденной, и для гиперболических чисел справедлива формула (16)

$$\det(a_{ij}) = |F(z)|^2, \quad (42)$$

если квадрат нормы в пространстве H_2 понимать как

$$|z|^2 = x^2 - y^2. \quad (43)$$

Для гиперболических чисел соотношения (10) имеют тот же самый вид, что и для комплексных чисел, а уравнения Коши-Римана несколько изменяются:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (44)$$

– поэтому в уравнениях (33), (34) изменяется только общий множитель, он должен быть заменен на $(u^2 - v^2)$. Действуя точно так же как в случае комплексных чисел, мы получим уже не одно, а три качественно различных решения:

$$F_{(0)}(z) = \omega z + w_0, \quad (45)$$

где ω – произвольное действительное число, а w_0 – произвольное гиперболическое число;

$$F_{(1)}(z) = f_{(1)}(x + y)(1 + j), \quad (46)$$

где $f_{(1)}(\xi)$ – произвольная функция одной действительной переменной;

$$F_{(2)}(z) = f_{(2)}(x - y)(1 - j), \quad (47)$$

где $f_{(2)}(\xi)$ – произвольная функция одной действительной переменной. В ψ -базисе:

$$\psi_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm j), \quad \psi_1\psi_1 = \psi_1, \quad \psi_2\psi_2 = \psi_2, \quad \psi_1\psi_2 = 0, \quad (48)$$

$$x + jy = (x + y)\psi_1 + (x - y)\psi_2 = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2$$

последние две X -функции принимают вид

$$F_{(1)}(z) = 2f_{(1)}(\xi^1)\psi_1, \quad F_{(2)}(z) = 2f_{(2)}(\xi^2)\psi_2, \quad (49)$$

причем $|F_{(1)}(z)| = 0, \quad |F_{(2)}(z)| = 0$.

Итак, аналитические X -функции H_2 переменной более разнообразны, чем соответствующие функции комплексной переменной. Это связано именно с наличием в алгебре H_2 делителей нуля.

Вычислим скаляры $\nabla_i f^i$ от трех полученных X -функций:

$$\nabla_i f_{(0)}^i = 2\omega, \quad \nabla_i f_{(1)}^i = 2\dot{f}_{(1)}(x + y), \quad \nabla_i f_{(2)}^i = 2\dot{f}_{(2)}(x - y). \quad (50)$$

Отметим, что не существует аналитической X -функции H_2 переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_i f^i \equiv 0$.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА H_4

Алгебра этих поличисел изоморфна алгебре действительных диагональных квадратных матриц 4×4 . Удобнее всего с этими числами работать в ψ -базисе: $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$;

$$\psi_i\psi_j = p_{ij}^k\psi_k, \quad p_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (51)$$

Произвольная аналитическая функция H_4 переменной имеет вид

$$F(x) = \varphi^1(\xi^1)\psi_1 + \varphi^2(\xi^2)\psi_2 + \varphi^3(\xi^3)\psi_3 + \varphi^4(\xi^4)\psi_4, \quad (52)$$

где φ^i – произвольные гладкие функции одной действительной переменной, а ξ^i – координаты $X \in P_n$ в ψ -базисе. Матрица (13) будет иметь вид

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \varphi^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi^4 \end{pmatrix} \quad (53)$$

а ее определитель равен

$$\det(a_{ij}) = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4. \quad (54)$$

Таким образом, для гиперкомплексных чисел H_4 справедлива формула (16)

$$|F|^4 = \det(a_{ij}), \quad (55)$$

если под четвертой степенью нормы в пространстве H_4 понимать

$$|X|^4 = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4. \quad (56)$$

Система уравнений (10) после подстановки в нее (52) запишется следующим образом:

$$\varphi^i \left[\frac{\partial \varphi^{i-}}{\partial \xi^{i-}} + p_m \varphi^m \right] = 0, \quad (57)$$

где $i \equiv i_-$, но по ним не ведется суммирование. Как мы уже отмечали выше, качественно различные решения системы уравнений (57) связаны с наличием различных делителей нуля в системе поличисел. Классифицируем все поличисла $X \neq 0$ в пространстве H_4 следующим образом:

- А) X не есть делитель нуля;
- Б) три координаты ξ^i, ξ^j, ξ^k , $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$ не равны нулю, а четвертая координата равна нулю;
- В) только две координаты ξ^i и ξ^j , $i \neq j$ отличны от нуля, а две другие равны нулю;
- Г) три координаты равны нулю, и только одна координата ξ^i не равна нулю.

В соответствии с этой классификацией проведем классификацию всех решений системы уравнений (57):

$$\text{А)} \quad F_{(0)}(X) = \omega X + W_0, \quad (58)$$

где ω – произвольное действительное число, а W_0 – произвольное поличисло;

$$\text{Б)} \quad F_{(i,j,k)}(X) = \omega(\xi^i\psi_{i-} + \xi^j\psi_{j-} + \xi^k\psi_{k-}) + \zeta_0^i\psi_{i-} + \zeta_0^j\psi_{j-} + \zeta_0^k\psi_{k-}, \quad (59)$$

где ω , ζ_0^m – четыре произвольные действительные числа для каждой X -функции этого вида;

$$\text{В)} \quad F_{(i,j)}(X) = \omega(\xi^i\psi_{i-} + \xi^j\psi_{j-}) + \zeta_0^i\psi_{i-} + \zeta_0^j\psi_{j-}, \quad (60)$$

где ω , ζ_0^m – три произвольные действительные числа для каждой X -функции этого вида;

$$\text{Г)} \quad F_{(i)}(X) = \varphi^i(\xi^{i-})\psi_{i-}, \quad (61)$$

где $\varphi^i(\xi^{i-})$ – одна произвольная гладкая функция одного действительного переменного для каждой X -функции этого вида.

Вычислим скаляры $\nabla_m \varphi^m$ от всех полученных X -функций:

$$A)\nabla_m \varphi^m = 4\omega, \quad B)\nabla_m \varphi^m = 3\omega, \quad (62)$$

$$B)\nabla_m \varphi^m = 2\omega, \quad \Gamma)\nabla_m \varphi^m = \dot{\varphi}^i(\xi^{i-}).$$

Таким образом, не существует аналитической X -функции H_4 переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_m \varphi^m \equiv 0$.

Невырожденные X -функции

Будем называть X -функцию *невырожденной*, если она не является делителем нуля, то есть $|F(X)| \neq 0$. Тогда из выше изложенного следует общий вид такой обобщенно-аналитической функции

$$\{f^i; \gamma_k^i\} = \{f^i; -\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \delta_k^i a(x)\}, \quad (63)$$

где f^i – произвольное гладкое векторное поле, а $a(x)$ – произвольное скалярное поле. Таким образом, для любых поличисел существуют невырожденные X -функции, все они имеют вид (63), причем

$$\dot{f}^i = \varepsilon^i a(x), \quad \tilde{\nabla}_i f^i = na(x). \quad (64)$$

Формально существуют отличные от постоянных невырожденные X -функции, для которых $\tilde{\nabla}_i f^i = 0$, но они тривиальны, так как скалярное поле $a(x)$ при этом тождественно равно нулю. Подчеркнем, что производная от невырожденной X -функции в базисе $e_1 = 1, e_2, \dots, e_n$ в общем случае имеет вид

$$\dot{F}(X) = a(x) + 0e_2 + 0e_3 + \dots + e_n. \quad (65)$$

Найдем условия, при выполнении которых поличисловое произведение двух невырожденных X -функций $F_{(1)}(X), F_{(2)}(X)$ опять есть невырожденная X -функция $F_{(3)}(X)$. Так как $|F_{(1)}(X)F_{(2)}(X)| = |F_{(1)}(X)||F_{(2)}(X)|$, то функция $F_{(3)}(X)$ будет невырожденной. Остается проверить выполнение для нее формулы (63). В работе [1] приводится формула поличислового произведения двух обобщенно-аналитических функций

$$\{f_{(1)}^i; \gamma_{(1)k}^i\} \{f_{(2)}^i; \gamma_{(2)k}^i\} = \{f_{(3)}^i; \gamma_{(3)k}^i\}, \quad (66)$$

где

$$\gamma_{(3)k}^i = p_{i_1 i_2}^i (f_{(2)}^{i_2} \gamma_{(1)k}^{i_1} + f_{(1)}^{i_1} \gamma_{(2)k}^{i_2}). \quad (67)$$

Потребуем, чтобы все γ -объекты в формуле (67) имели вид, определяемый формулой (63). Тогда после преобразований получим

$$a_{(3)} \delta_k^i = a_{(1)} p_{kj}^i f_{(2)}^j + a_{(2)} p_{kj}^i f_{(1)}^j. \quad (68)$$

Это и есть те условия, которым должны удовлетворять две невырожденные X -функции, чтобы их произведение опять было невырожденной X -функцией.

Заключение

В настоящей работе построены обобщенно-аналитические функции произвольной поличисловой переменной, которые названы невырожденными X -функциями и которые являются аналогами функции $F(z) = z$ комплексной переменной z . Эти функции, не являясь делителями нуля, могут определять в пространстве $\{\mathbf{M}_n; \mathbf{P}_n\}$ конгруэнцию геодезических, причем производная от такой функции есть поличисловая единица, умноженная на скалярное поле. Формально существуют отличные от постоянных невырожденные X -функции, для которых $\tilde{\nabla}_i f^i = 0$, но они тривиальны, так как в этом случае скалярное поле $a(x)$ тождественно равно нулю. Возможно, именно невырожденные X -функции будут играть ту же фундаментальную роль в теории обобщенно-аналитических функций, какую в теории аналитических функций комплексной переменной играет комплексная переменная z , то есть невырожденная X -функция $F(z) = z$.

Автор благодарен И. Н. Дулькину за доброжелательное внимание к его работе, Д. Г. Павлову за подробное обсуждение результатов и Л. М. Фишеру за серьезную техническую помощь.

Литература

- [1] Г. И. Гарасько, Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, стр. 77–90, 2004.
- [2] П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", 1967.

О НЕКОТОРЫХ ГИПЕРАЛГЕБРАХ, НЕПОСРЕДСТВЕННО СВЯЗАННЫХ С АССОЦИАТИВНЫМИ ТЕЛАМИ, ЕВКЛИДОВЫМИ ВЕКТОРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ, АЛГЕБРАМИ И ГИПЕРАЛГЕБРАМИ

Соловей Л. Г.

В статье [1] рассматривались гипертела, гиперполя, гиперкольца, гипералгебры – множества, представляющие собой несколько аддитивных групп, объединенных в один мультипликативный группоид, причем соблюдаются дистрибутивные законы. В [1], по определению, все аддитивные группы пересекаются только в одной (нулевой) точке. Однако такое ограничение является слишком жестким. В настоящей заметке это требование снимается: предполагается возможность нескольких нулей (но пересечение аддитивных групп в ненулевых точках по-прежнему запрещено). Это позволяет установить связи между алгебрами, телами, векторными евклидовыми пространствами, и соответствующими гипералгебрами, что и сделано в настоящей статье. Далее, дается определение фактор-гиперкольца, фактор-гипертела и фактор-гиперполя. Приведены два примера, показывающие, что в отличие от небольшого числа ассоциативных алгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел, количество ассоциативных гипералгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел бесконечно. Вводится понятие вырожденных гиперколец. Установлено однозначное соответствие между невырожденными гиперкольцами и обобщенными (в частности, стандартными) градуированными кольцами. Рассмотрен класс гиперколец, ближайших к кольцам (кольцеобразных гиперколец).

Введение

В статье [1] были даны определения гипертела, гиперполя, гиперкольца и гипералгебры. В настоящей заметке будет установлена связь евклидовых векторных пространств над полем действительных чисел, алгебр над полем P , ассоциативных тел, гипералгебр, с соответствующими гипералгебрами. Следует, однако, отметить, что данные в [1] определения слишком жестки. Поэтому мы вернемся к основным определениям с целью их расширения, во многом повторяя изложение в [1].

Гипертелом (гиперкольцом) k -го порядка по аддитивным группам назовем множество M , обладающее следующими свойствами:

- 1) Оно представляет собой k аддитивных групп, единственными точками пересечения которых являются, возможно, нули аддитивных групп (в [1] рассматривались только ненулевые аддитивные группы; при этом требовалось, чтобы все аддитивные группы имели один общий нуль); иными словами, аддитивные группы без нулей, принадлежащих более чем одной аддитивной группе, а также эти нули, определяют собой непересекающиеся классы некоторого разбиения π множества M [2].

- 2) Оно составляет, в случае гипертела, кроме нулей, входящих в ненулевые аддитивные группы, мультипликативную группу или лупу [2], а в общем случае гиперкольца группоид, включая нули.

- 3) Требование, содержащееся в [1], чтобы среди произведений элементов A_i, A_k из фиксированных аддитивных групп $\tilde{A}_i$ и $\tilde{A}_k$ обязательно были отличные от нуля,

принадлежащего более чем одной аддитивной группе для любых i и k , снимается (в общем случае); при выполнении этого требования назовем гиперкольцо невырожденным, а при невыполнении – вырожденным. Легко видеть, что гипертело является частным случаем невырожденного гиперкольца.

4) Выполняются левый и правый дистрибутивные законы по сложению в аддитивных группах и умножению.

5) Из предыдущего пункта следует (см. приложение), что два элемента из каких-либо двух (возможно, и совпадающих) аддитивных групп, будучи умножены друг на друга, дают или некоторый фиксированный нуль, принадлежащий более чем одной аддитивной группе, или элемент из фиксированной аддитивной группы, в обоих случаях определяемые только аддитивными группами, к которым принадлежат сомножители, и, возможно, порядком расположения сомножителей.

Следовательно, аддитивные группы $\tilde{A}_i$ и $\tilde{A}_k$ суть элементы группоида, причем для невырожденных гиперколец

$$\tilde{A}_i \cdot \tilde{A}_k = \tilde{A}_l \quad (a)$$

((a) выполняется всегда для гипертел); назовем этот группоид фактор-группоидом множества M по аддитивным группам.

Из сказанного следует, что если элементы множества M , не являющиеся общими нулями аддитивных групп, не являются делителями этих нулей, то разбиение π множества M как мультипликативного группоида представляет собой конгруэнцию в M по умножению [2], причем аддитивные группы (без таких нулей), а также эти нули, представляют собой элементы мультипликативного группоида, называемого фактор-группоидом; при этом аддитивные группы без указанных нулей составляют его подгруппоид, а если множество отличных от нулей элементов M представляет собой мультипликативную группу, то аддитивные группы (без нулей), как непересекающиеся классы разбиения π' , являются элементами мультипликативной группы, называемой фактор-группой [2]; при этом фактор-группоид или фактор-группа, элементами которых являются аддитивные группы без указанных нулей, изоморфны фактор-группоиду (фактор-группе) по целым аддитивным группам.

Отметим также, что если аддитивные группы гиперкольца или гипертела не имеют общих нулей, то они составляют конгруэнцию по разбиению π гиперкольца (гипертела) на эти аддитивные группы как по умножению, так и по сложению.

Гипертело с коммутативным и ассоциативным умножением назовем гиперполем k -го порядка по аддитивным группам. Гиперкольца, аддитивные группы которых являются векторными пространствами над полем P размерностей $n_1, n_2, \dots, n_k$, назовем гипералгебрами k -го порядка ранга $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ (при выполнении дополнительных условий [3])

$$(\alpha \cdot A_i) \cdot B_k = \alpha \cdot (A_i \cdot B_k) = A_i \cdot (\alpha \cdot B_k), \quad (1)$$

где α – элемент поля P , A_i, B_k – элементы множества M). В [1] рассматривались только векторные пространства одинаковой размерности n . Назовем их, согласно [1], гипералгебрами ранга n ; это – гипералгебры ранга $(n, n, \dots)$.

Гипералгебры, элементы которых, кроме нулей, входящих в ненулевые аддитивные группы, составляют мультипликативную группу (или лупу), назовем гипералгебрами k -го порядка ранга $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ с однозначным делением и единицей. Рассматриваемые в [1] гипертела, гиперполя, гиперкольца, гипералгебры с одним нулем являются часто встречающимися гипертелами, гиперполями, гиперкольцами и гипералгебрами (гипералгебры с одним нулем состоят из векторных пространств

одинаковой размерности). Обычные тела (поля, кольца, алгебры) являются гипертелами, гиперполями, гиперкольцами, гипералгебрами первого порядка по всему множеству M , являющемуся в данном случае единственной аддитивной группой.

Понятия гипертела, гиперполя, гиперкольца, гипералгебры являются непосредственным обобщением понятий тела, поля, кольца, алгебры, где определены две бинарные операции – сложение и умножение, связанные левым и правым дистрибутивными законами.

Расширение определений, данных в [1], позволяет привести дополнительный пример гипералгебры. Рассмотрим совокупность тензоров любого ранга в n -мерном пространстве. Определим произведение двух тензоров как совокупность произведений их составляющих в каком-либо установленном порядке (прямое произведение). В результате получается тензор, ранг которого равен сумме рангов сомножителей. Аддитивными группами являются совокупности тензоров заданного ранга. Поскольку складываются только тензоры заданного ранга, указанное множество не является кольцом. Оно представляет собой, однако, гиперкольцо – гипералгебру бесконечного порядка ранга $(1, n, n^2, \dots)$ (1 – размерность скалярного поля).

§1. Некоторые свойства гипертел и гиперколец

В [1] были рассмотрены свойства невырожденных гипертел и гиперколец с одним нулем. В настоящем параграфе полученные в [1] результаты будут повторены, однако при необходимости будут сделаны оговорки, связанные с расширением основных определений.

1. Среди аддитивных групп гипертела может быть не более одного тела (поля), та как единица, согласно пункту 1 определений, может принадлежать не более чем одной аддитивной группе.

2. Если рассматриваемое множество является гипертелом или гиперполем, то аддитивная ненулевая группа с единицей сама является телом или полем. Действительно, произведение единицы e на элемент этой аддитивной группы представляет собой тот же элемент и принадлежит, следовательно, той же аддитивной группе. Это же верно для элементов A, B из этой аддитивной группы. Пусть теперь

$$A \cdot X = B, \quad (1')$$

где A и B – элементы, принадлежащие рассматриваемой аддитивной группе. Но тогда X принадлежит той же аддитивной группе. В самом деле, если X принадлежал бы другой аддитивной группе, то eX принадлежал бы этой другой аддитивной группе, а, следовательно, и $B = AX$ принадлежал бы этой же аддитивной группе. Таким образом, X действительно принадлежит аддитивной группе, содержащей единицу, и является единственным решением уравнения (1'). Точно так же доказывается, что уравнение

$$Y \cdot A = B, \quad (1'')$$

где A и B принадлежат аддитивной группе с единицей, имеет единственное решение Y , принадлежащее аддитивной группе с единицей. Утверждение доказано.

Таким образом, если аддитивная группа гипертела или гиперполя, содержащая единицу, сама не является нулевой, то она является его единственной аддитивной группой, представляющей собой тело или поле. Легко также видеть, что для гиперкольца с единицей аддитивная группа, содержащая единицу, является кольцом, телом или полем.

3. В случае ассоциативного гипертела, как показано в [1], аддитивная группа, содержащая единицу, является (без нуля) нормальным делителем мультипликативной группы гипертела.

4. Без изменения остается утверждение, что любая аддитивная группа ассоциативного гипертела (гиперполя), кроме нулей, не входящих в мультипликативную группу гипертела или гиперполя, является смежным классом по нормальному делителю.

Отметим еще некоторые свойства гиперколец, гипертел и гиперполей.

5. Покажем, что для невырожденного гиперкольца

$$0_i \cdot B_k = O_l, \quad (2)$$

$$A_i \cdot O_k = O_l, \quad (3)$$

где $0_i, 0_k, 0_l$ – нули i -ой, k -ой и l -ой аддитивных групп, A_i и B_k – элементы i -ой и k -ой аддитивных групп, причем

$$A_i \cdot B_k = C_l, \quad (3')$$

где C_l – элемент l -ой аддитивной группы. Действительно,

$$0_i \cdot B_k = (A_i - A_i) \cdot B_k = C_l - C_l = 0_l,$$

$$A_i \cdot 0_k = A_i \cdot (B_k - B_k) = C_l - C_l = 0_l.$$

В случае вырожденных гиперколец наряду с соотношениями (2) и (3) для некоторых аддитивных групп $\widetilde{A}_{i'}, \widetilde{B}_{k'}, \dots$ выполняются соотношения

$$0_{i'} \cdot B_{k'} = 0_{l', m', \dots}, \quad (2'')$$

$$A_{i'} \cdot 0_{k'} = 0_{l', m', \dots}, \quad (3'')$$

где $0_{l', m', \dots}$ – общий нуль аддитивных групп $\widetilde{A}_{i'}, \widetilde{A}_{m'}, \dots$ (когда $A_{i'} \cdot B_{k'} = 0_{l', m', \dots}$).

6. Для невырожденных гиперколец, как уже отмечалось, аддитивные группы гиперкольца составляют мультипликативный группоид – его фактор-группоид по этим аддитивным группам. Легко также видеть, что аддитивные группы $\widetilde{A}_i$ сами являются единственными элементами аддитивных групп с законом сложения

$$\widetilde{A}_i + \widetilde{A}_i = \widetilde{A}_i, \quad (4)$$

причем $\widetilde{A}_i$ является как нулем $\widetilde{0}_i$ этой i -ой аддитивной группы, так и, следовательно, ее противоположным элементом. Поскольку в настоящей заметке расширено понятие гиперкольца, можно теперь утверждать (в [1] такое утверждение было невозможно), что множество аддитивных групп невырожденного гиперкольца само является гиперкольцом, которое назовем *фактор-гиперкольцом* гиперкольца по его аддитивным группам. Легко показать, что такое фактор-гиперкольцо гипертела (гиперполя) само является гипертелом (гиперполем), единицей которого является аддитивная группа, содержащая единицу. Назовем его фактор-гипертелом (фактор-гиперполем) по аддитивным группам гипертела (гиперполя). Единица фактор-гипертела (фактор-гиперполя), являющаяся нулевым кольцом, как таковое не считается телом или полем¹. Формула (4) подсказывает, что любой группоид может быть мультипликативным группоидом гиперкольца, для элементов A_i которого определяется сложение

¹ Если и для фактор-гипертела (фактор-гиперполя) принять, что тело (поле) является гипертелом (гиперполем) первого порядка, то единицу фактор-гипертела или фактор-гиперполя (нулевое подкольцо) следует считать полем. При таком подходе любое гипертело (гиперполе) обладало бы единственной аддитивной группой, являющейся телом или полем.

согласно этой формуле. Точно так же любая группа k -го порядка ($k > 1$) становится мультипликативной группой гипертела, если для ее элементов определить сложение согласно формуле (4).

Отметим еще одно обстоятельство. Пусть какая-нибудь аддитивная группа гипертела является нулевой – $\widetilde{0}_l$. Если при этом имеется хотя бы одна ненулевая аддитивная группа $\widetilde{A}_i$, то при $\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A}_k = \widetilde{0}_l$ произведение всех ее элементов на элемент A_k равно этому (одному и тому же) нулевому элементу $\widetilde{0}_l$ – деление неоднозначно. Поэтому такое гипертело невозможно. Следовательно, аддитивные группы гипертела либо все ненулевые, либо все нулевые. Фактор-гипертело как раз и является гипертелом с нулевыми аддитивными группами.

§2. Гипералгебры, непосредственно связанные с евклидовым векторным пространством

I. Рассмотрим векторное n -мерное пространство L над полем P действительных чисел, в котором определено скалярное произведение [4] (евклидово пространство). Как известно, такое векторное пространство не является алгеброй над полем P , так как скалярное произведение $\beta = (A, B)$ двух векторов является скаляром из поля P и, следовательно, не принадлежит векторному пространству. Скалярное поле P совместно с векторным пространством является, однако, гипералгеброй над полем P второго порядка ранга $(1, n)$, если определить умножение $\circ$ в этом множестве следующим образом:

$$1) \quad \alpha \circ A = A \circ \alpha = \alpha \cdot A; \quad (5)$$

(если P – поле комплексных чисел, положим

$$\alpha \circ A = A \circ \alpha^* = \alpha \cdot A), \quad (5')$$

где α – скаляр, A – вектор, $\alpha \cdot A$ – произведение скаляра α на вектор A согласно определению векторного пространства;

$$2) \quad \alpha \circ \beta = \alpha \cdot \beta, \quad (6)$$

где α и β – скаляры (действительные числа), $\alpha \cdot \beta$ – произведение действительных чисел α и β ;

$$3) \quad A \circ B = (A, B), \quad (7)$$

где A и B – векторы, (A, B) – их скалярное произведение.

Утверждение, что рассматриваемое множество является гипералгеброй над полем P , непосредственно следует из формул (5)–(7) и из выполнения условий (1), если P – поле действительных чисел. Полученная гипералгебра неассоциативна², поскольку $(A, B) \cdot C \neq A \cdot (B, C)$.

Она, однако, обладает единицей, которой является единица поля действительных чисел, поскольку в определение векторного пространства входит условие $1 \cdot A = A$. Пусть теперь рассматриваемое векторное пространство является алгеброй над полем P действительных чисел с единицей e . Тогда поле $\widetilde{P}$, полученное из поля P отображением

$$\alpha \rightarrow \alpha \cdot e, \quad (8)$$

² Она йорданова вследствие коммутативности и выполнения для любых ее элементов X, Y соотношений $((XX)Y)X = (XX)(YX)$.

$$\alpha e = \tilde{\alpha}, \quad (8a)$$

где α – произвольный элемент поля P , изоморфно полю P , но является подалгеброй рассматриваемой алгебры [3]. Пусть также

$$(e, e) = 1. \quad (8')$$

Определим произведение

$$\widetilde{(A, B)} = (A, B) \cdot e, \quad (9)$$

и назовем его внутренним скалярным произведением векторов A и B . Оно является элементом поля $\tilde{P}$. В частности,

$$\widetilde{(e, e)} = e. \quad (9')$$

Легко видеть, что указанная алгебра с единицей e над полем P действительных чисел является также множеством с алгеброй над полем P , умножение в которой определяется внутренним скалярным произведением (9). Поле $\tilde{P}$ является ее идеалом. С учетом (8a), (8') имеем для действительных чисел $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$:

$$\widetilde{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta} \quad (9'') \quad (\text{имеем также } (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \alpha\beta). \quad (9''')$$

Аналогично, если наше векторное пространство над полем P действительных чисел является подмножеством некоторого мультипликативного группоида с единицей e , и если e принадлежит векторному пространству L , то поле $\tilde{P} = \alpha \cdot e$ (α – любой элемент поля P) также принадлежит векторному пространству L , и внутреннее скалярное произведение (9) генерирует мультипликативный группоид алгебры с аддитивной группой L . Потребуем, как и в предыдущем случае, также выполнения условия (8') и вытекающего из него условия (9').

Векторное пространство над полем P комплексных чисел с определенным в этом пространстве скалярным произведением вместе с полем P также является гиперкольцом относительно умножения, определенного формулами (5') – (7), но не является гипералгеброй, поскольку не выполняются все условия (1). В рассмотренной в настоящем параграфе гипералгебре над полем P действительных чисел это поле принадлежит гипералгебре. Такие совокупности назовем гипералгебрами второго рода.

II. Матрицы A и векторы X в n -мерном комплексном евклидовом пространстве как гиперкольцо.

Это – гиперкольцо второго порядка по аддитивным группам матриц A и векторов X .

Законы умножения:

$$Y = AX \quad - \text{вектор}, \quad (10)$$

$$Z = XA \quad - \text{вектор}, \quad (11)$$

$$B = A_1 \cdot A_2 \quad - \text{матрица}, \quad (12)$$

$$a = (X_1, X_2) \quad - \text{скаляр},$$

т. е. диагональная матрица

$$A_d = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad (13)$$

§3. Гипералгебры, непосредственно связанные с алгебрами над полем P

а). Определим умножение $\circ$ в множестве M , содержащем поле P и алгебру N ранга n над этим полем:

$$1) \quad \alpha \circ \beta = \alpha \cdot \beta, \quad (6)$$

α, β – элементы поля P , где точка $\cdot$ – знак умножения элементов в поле P ;

$$2) \quad \alpha \circ A = \alpha \cdot A, \quad A \circ \alpha = \alpha \cdot A, \quad (5) \text{ и } (5'')$$

α – элемент поля P , A – элемент векторного пространства; $\cdot$ – знак умножения элемента поля P на элемент векторного пространства, согласно определению векторного пространства над полем P ;

$$3) \quad A \circ B = A \cdot B, \quad (14)$$

A, B – элементы алгебры N , точка $\cdot$ – знак умножения алгебры N .

Легко видеть, что относительно законов умножения (5), (5''), (6), (14) вследствие соблюдения условий (1) множество $P \cup N$ является гипералгеброй над полем P второго рода по аддитивным группоидам P и N второго порядка ранга $(1, n)$. Рассматриваемая гипералгебра ассоциативна при ассоциативности алгебры N , что следует из ассоциативности поля P и условий (1). Легко видеть, что алгебра N является идеалом рассматриваемой гипералгебры, при определении идеала гиперкольца обычным образом как аддитивной группы, умножение на элементы которой не выводит за пределы этой группы; отметим также, что единица поля P является единицей рассматриваемой гипералгебры³. Как уже говорилось, если алгебра N – совокупность элементов, обладающих единицей e , то, как известно,

$$\tilde{\alpha} = \alpha \circ e = \alpha \cdot e,$$

где α – любой элемент поля P , образует поле $\tilde{P}$, изоморфное полю P , являющееся подалгеброй алгебры N [3].

Отметим также, что если $\tilde{N}$ – гипералгебра над полем P , то поле P и гипералгебра $\tilde{N}$ составляют гипералгебру над полем P второго рода, аддитивными группами которой являются аддитивные группы гипералгебры $\tilde{N}$ и поля P , а умножение определяется формулами (5), (5''), (6), (14).

б). Пусть дана алгебра N без делителей нуля над полем P . Рассмотрим в ней совокупность прямых, проходящих через нуль. Пусть A_0 и B_0 – два ненулевых элемента алгебры без делителей нуля, и пусть

$$C_0 = A_0 \cdot B_0, \quad (15)$$

где C_0 – элемент алгебры, а $\cdot$ – знак умножения в ней. Векторы A_0, B_0, C_0 лежат на прямых $\alpha \cdot A_0$, $\beta \cdot B_0$, $\gamma \cdot C_0$, проходящих через нуль, где α, β, γ – произвольные элементы поля P . Согласно условию (1) имеем:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) &= \alpha\beta \cdot (A_0 \cdot B_0), \quad \text{или} \\ (\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) &= \gamma \cdot C_0, \quad \gamma = \alpha\beta. \end{aligned} \quad (16)$$

³ Рассмотренные объединения поля P и векторного пространства L в настоящем и предыдущем параграфе не являются гиперкольцами, если не вводить умножения $A \circ \alpha$.

Из формулы (16) следует, что произведение элементов прямых $\alpha \cdot A_0$ и $\beta \cdot B_0$ есть элемент, лежащий на прямой $\gamma \cdot C_0$. Отсюда следует, что совокупность прямых, проходящих через нуль алгебры N без делителей нуля, образует невырожденную гипералгебру над полем P по этим прямым бесконечного порядка ранга $(1, 1, \dots)$, или, согласно [1], первого ранга. (Дистрибутивные законы легко доказываются.) Если N – ассоциативная алгебра с делением, то рассматриваемая совокупность прямых – ассоциативная гипералгебра с делением бесконечного порядка первого ранга над полем P по этим прямым. Поле $\tilde{P}$, элементы которого равны элементам поля P , умноженным на единицу алгебры N , является (без нуля) нормальным делителем мультипликативной группы этой гипералгебры, а все прямые, проходящие через нуль (кроме нуля) – смежными классами.

При наличии делителей нуля могут быть C_0 , равные нулю. В этих случаях произведение элементов прямых $\alpha A_0, \beta B_0$ тождественно равно нулю – вырожденная гипералгебра. Все выводы пункта б) остаются в силе, если N – гипералгебра с общим нулем без делителей нуля. Примером вырожденной гипералгебры является совокупность прямых, проходящих через нуль, в гипералгебре, аддитивными группами которой являются трехмерные векторные пространства полярных и аксиальных векторов, а умножение определяется векторным умножением векторов [1]. Вырожденный характер гипералгебры следует из факта равенства нулю векторного произведения всех векторов, лежащих на одной прямой.

в). Пусть множество M состоит из точек прямых над полем P , пересекающихся только в нулевой точке, и является мультипликативным группоидом. Следовательно, задан закон умножения элементов поля P на элементы множества M :

$$B = \alpha \cdot A, \quad (17)$$

где α – элемент поля P , A – элемент множества M .

Пусть при этом выполняются условия

$$E = (\beta \cdot C) \cdot D = C \cdot (\beta \cdot D) = \beta \cdot (C \cdot D), \quad (18)$$

где β – элемент поля P ; C, D, E – элементы множества M .

В частности, множество M может быть алгеброй ненулевого ранга или гипералгеброй с одним нулем. Пусть элементы A, B лежат на прямых

$$A = \alpha \cdot A_0, \quad (19)$$

$$B = \beta \cdot B_0, \quad (20)$$

где A_0, B_0 – ненулевые элементы M , α, β – произвольные элементы P . Имеем:

$$\tilde{C} = A \cdot B = (\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) = \alpha\beta \cdot \tilde{C}_0 = \gamma \cdot \tilde{C}_0, \quad (21)$$

где

$$\tilde{C}_0 = A_0 \cdot B_0, \quad (\gamma = \alpha\beta). \quad (22)$$

При $\tilde{C}_0 = A_0 \cdot B_0 \neq 0$ имеем прямую; при $\tilde{C}_0 = 0$ мы также имеем $AB = 0$. Далее,

если A и B лежат на одной прямой, и $C = \gamma' \cdot C_0$ – элемент другой прямой, то

$$(A + B) \cdot C = (\alpha \cdot A_0 + \beta \cdot A_0) \cdot \gamma' \cdot C_0 = (\alpha + \beta) \cdot A_0 \cdot (\gamma' \cdot C_0) = \\ = (\alpha + \beta) \cdot \gamma' \cdot (A_0 \cdot C_0) = (\alpha + \beta) \cdot \gamma' \cdot D_0; \quad (D_0 = A_0 \cdot C_0);$$

$$A \cdot C + B \cdot C = \alpha \gamma' \cdot D_0 + \beta \gamma' \cdot D_0 = (\alpha + \beta) \gamma' \cdot D_0$$

$$C \cdot (A + B) = \gamma' \cdot C_0 (\alpha \cdot A_0 + \beta \cdot A_0) = \\ = \gamma' (\alpha + \beta) \cdot (C_0 \cdot A_0) = \gamma' (\alpha + \beta) \cdot D'_0 \quad (D'_0 = C_0 \cdot A_0);$$

$$C \cdot A + C \cdot B = (\gamma' \cdot C_0) \cdot \alpha \cdot A_0 + (\gamma' \cdot C_0) \cdot \beta \cdot A_0 = \\ = \gamma' \alpha \cdot (C_0 \cdot A_0) + \gamma' \beta \cdot (C_0 \cdot A_0) = \gamma' \alpha \cdot D'_0 + \gamma' \beta \cdot D'_0 = \gamma' (\alpha + \beta) \cdot D'_0.$$

Итак, соблюдаются левый и правый дистрибутивные законы. Следовательно, множество M является гипералгеброй первого ранга. Если указанный группоид, за исключением нуля, является группой, то мы имеем ассоциативную гипералгебру с делением по входящим в нее прямым первого ранга.

Рассмотрим два примера.

1). Пусть элементы множества M – квазиунитарные матрицы n -го порядка над полем комплексных чисел, т. е. матрицы A , для которых $A \cdot A^+ = A^+ \cdot A = a$, причем $a \geq 0$ [1]. Они, за исключением нуля, составляют мультипликативную группу, которую мы обозначим как $QU(n)$ [1]. Пусть A_0 – элемент M , $\alpha \cdot A_0$ – прямая, проходящая через нуль, если α – произвольное комплексное число. Согласно сказанному выше, $QU(n)$ и нуль – ассоциативная гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением по прямым, проходящим через нуль. Прямые здесь – одномерные векторные пространства над полем комплексных чисел.

2). Квазиортогональные матрицы n -го порядка с вещественными матричными элементами, т. е. вещественные матрицы A , для которых $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = a$, $a \geq 0$, ($\tilde{A}$ – транспонированная матрица). Множество M состоит их точек вещественных прямых, проходящих через общий нуль. Они образуют (кроме нуля) группу, которую мы обозначим как $QO(n)$ [1]. Как и в примере 1, убеждаемся, что $QO(n)$ и нуль – ассоциативная гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением по вещественным прямым, проходящим через нуль.

Уже из этих примеров видно, что в отличие от небольшого числа (трех) ассоциативных алгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел, число ассоциативных гипералгебр с делением конечного ранга над полем действительных, а также комплексных, чисел бесконечно. В данном примере, однако, порядок гипералгебры бесконечен. Ниже мы увидим, что этот вывод верен и для ассоциативных гипералгебр с делением над полем действительных чисел конечных порядка и ранга.

§4. Гипертела, связанные с ассоциативным телом или непростым полем

Рассмотрим ассоциативное тело или поле, обладающие подтелом или подполем $\tilde{P}$, мультипликативная группа которых является нормальным делителем мультипликативной группы тела или поля. Это, например, центр тела [2] или любое подполе непростого поля. Пусть A_i и B_i – элементы какого-нибудь класса смежности $\tilde{A}_i$, а P', P'', P''' – такие элементы нормального делителя – ненулевые элементы рассматриваемого подтела, что

$$A_i = A'_i \cdot P', \quad B_i = A'_i \cdot P'', \quad (23)$$

где A'_i – некоторый элемент класса $\widetilde{A}_i$,

$$A_i + B_i = A'_i(P' + P'') = A'_iP''', \quad (24)$$

$$-A_i = A'_i(-P') = -A'_iP', \quad (24')$$

$$P''' = P' + P''.$$

Мы видим, что $A_i + B_i$ – элемент класса $\widetilde{A}_i$. Следовательно, каждый смежный класс вместе с нулем является аддитивной группой. Но поскольку произведение элементов двух классов смежности по нормальному делителю – снова элемент какого-нибудь определенного класса смежности, мы видим, что наше тело или поле является гипертелом или гиперполем по классам смежности (вместе с нулем) по нормальному делителю – мультипликативной группе рассматриваемого подтела или подполя $\widetilde{P}$. Это гипертело или гиперполе является, если $\widetilde{P}$ – центр тела или подполя центра, даже гипералгеброй второго рода с делением первого ранга над $\widetilde{P}$. Поле $\widetilde{P}$ (без нуля) является нормальным делителем мультипликативной группы гипералгебры и (вместе с нулем) одной из прямых, проходящих через нуль, а остальные классы смежности вместе с нулем – также прямыми над $\widetilde{P}$, проходящими через нуль. В качестве примера рассмотрим совокупность прямых комплексной плоскости, проходящих через нуль. Действительная ось – подполе поля комплексных чисел и (без нуля) нормальный делитель мультипликативной группы. Рассматриваемые прямые (без нуля) – смежные классы мультипликативной группы по нормальному делителю. Рассматриваемому полю, согласно сказанному выше, соответствует гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по прямым, проходящим через нуль. Ее подгипералгебрами, не будучи полями, являются совокупности n прямых (включая действительную ось), проходящих через нуль и делящих комплексную плоскость на $2n$ равных углов. Это – гипералгебры с делением по этим прямым первого ранга n -го порядка. Из этого примера снова видно, что число ассоциативных гипералгебр с делением конечного ранга над полем действительных чисел бесконечно, причем в данном случае не только ранг, но и порядок гипералгебр конечен.

Еще одним примером является поле действительных чисел, рассматриваемое как гиперполе, аддитивными группами которого являются аддитивная группа поля рациональных чисел и остальные классы смежности по мультипликативной группе поля рациональных чисел (вместе с нулем). Это – гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением над полем рациональных чисел.

Отметим еще, что гипертелом является подмножество N некоторого кольца, включающее нуль, являющееся, кроме нуля, группой по умножению и имеющее подмножество, являющееся телом, мультипликативная группа которого – нормальный делитель мультипликативной группы множества N . Аддитивными группами этого гипертела являются все классы смежности по нормальному делителю вместе с нулем. Доказательство совершенно аналогично приведенному для ассоциативного тела. Примерами таких множеств являются рассмотренные выше совокупности прямых комплексной плоскости, проходящих через нуль и делящих комплексную плоскость на $2n$ равных углов; совокупность квазиунитарных матриц второго порядка, рассмотренная в [1], с подтелом кватернионов, а также квазиунитарные матрицы n -го порядка как гипералгебры с делением над полем комплексных чисел по прямым, проходящим через нуль.

В дополнение к вышесказанному отметим, что аддитивные группы ассоциативного гипертела, содержащего тело – аддитивную группу с единицей, представляют собой одномерные векторные пространства (прямые) над этим телом.

§5. Гиперкольца и градуированные кольца

I. Каждому невырожденному гиперкольцу соответствует некоторое кольцо, которое мы назовем *обобщенным градуированным кольцом*. Построим его так: возьмем прямую сумму аддитивных групп $\widetilde{A}_i$ гиперкольца [2], [5].

$$\widetilde{A} = \coprod_i \widetilde{A}_i, \quad (25)$$

а умножение в этой прямой сумме проводится почленно и покомпонентно с учетом дистрибутивных законов, правил умножения в гиперкольце и формулы

$$\widetilde{A}_i \widetilde{A}_k = \widetilde{A}_l. \quad (a)$$

Рассмотрим специальный случай, когда: 1) умножение по формуле (a) ассоциативно и коммутативно, но умножение элементов $A_i A_k = A_l$ не обязательно ассоциативно и коммутативно; 2) множество $\{\widetilde{A}_i\}$, как мультипликативный группоид, и множество индексов $\mathcal{J}(i, k, l, \dots)$ – изоморфные полугруппы, но композиция в $\mathcal{J}$ аддитивна, а в $\{\widetilde{A}_i\}$ мультипликативна. Тогда при

$$l = i + k, \quad \text{имеем} \quad (26)$$

$$\widetilde{A}_i \widetilde{A}_k = \widetilde{A}_{i+k} \quad (27)$$

и мы получаем стандартное градуированное кольцо [5]. (Гиперкольца, для которых выполняется соотношение (27), назовем *стандартными градуированными*.) В тех случаях, когда все $\widetilde{A}_i$ – аддитивные подгруппы группы $\widetilde{A}$, причем верна однозначная запись

$$A = A_1 + \dots + A_n, \quad (28)$$

прямая сумма изоморфна обычной [5].

II. Обратно, градуированному кольцу соответствует гиперкольцо, поскольку в нем для слагаемых $\widetilde{A}_i$ выполняются условия (a), а для рассмотренного специального случая – условия (26), (27).

Поскольку в градуированном кольце аддитивные подгруппы $\widetilde{A}_{iGR}$ обладают общим нулем [5], совокупность всех входящих в них элементов составляет гиперкольцо с одним общим нулем, тогда как гиперкольцо, составленное из элементов групп $\widetilde{A}_i$, может содержать нули 0_i этих групп, вообще говоря несовпадающие. В этом случае гиперкольца, составленные из элементов групп $\widetilde{A}_i$ и элементов соответствующих групп $\widetilde{A}_{iGR}$, не изоморфны, а лишь гомоморфны.

Рассмотрим примеры. Легко показать, что:

1a) Кольцо действительных матриц второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) всех квазиортогональных матриц второго порядка [1]

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} z & t \\ t & -z \end{pmatrix}, \quad (29')$$

поскольку

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Отметим, что это гиперкольцо представляет собой одномерное евклидово пространство векторов $A = \begin{pmatrix} z & t \\ t & -z \end{pmatrix}$ над полем P комплексных чисел $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ совместно с этим полем, причем $B \cdot A = A \cdot B^+$ – произведение элемента B поля P на вектор A , а $A_1 \cdot A_2 = (A_1, A_2)$ – скалярное произведение векторов A_1 и A_2 .

1b). Действительные антикватернионы (действительные матрицы второго порядка) [6] как градуированная алгебра, и соответствующая ей гипералгебра.

Антикватернион (действительные матрицы второго порядка) имеет вид [6]:

$$C = x1 + yi + zj + tk, \quad (30)$$

I – единица, x, y, z, t – действительные числа; i, j, k – мнимые единицы, причем

$$i^2 = -1, \quad j^2 = k^2 = I, \quad ji = -ij = k, \quad ik = -ki = j, \quad kj = -jk = -i. \quad (31)$$

Антикватернионы, как легко видеть, представляют собой градуированную алгебру, которой соответствует гипералгебра над действительным полем с делением по действительной и трем мнимым осям как аддитивным группам. Действительная и мнимые единицы могут быть получены из формул (29') для квазиунитарных матриц B и A :

$$\begin{aligned} I = B|_{x=1, y=0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = B|_{x=0, y=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ j = A|_{z=1, t=0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad k = A|_{z=0, t=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

Матрицы B и A теперь принимают вид:

$$B = x + yi, \quad A = zj + tk. \quad (33)$$

Прямая сумма аддитивных групп $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ с элементами B и A приводит к формуле (30).

2а) Кольцо комплексных матриц второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) квазиунитарных матриц второго порядка вида

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} z & t \\ t^* & -z^* \end{pmatrix}, \quad (34)$$

поскольку

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+d^*}{2} & \frac{b-c^*}{2} \\ -\frac{(b-c^*)^*}{2} & \frac{(a+d^*)^*}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-d^*}{2} & \frac{b+c^*}{2} \\ \frac{(b+c^*)^*}{2} & -\frac{(a-d^*)^*}{2} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

2b). Комплексные матрицы второго порядка как комплексные антикватернионы и как градуированное кольцо, и соответствующее ему гипертело.

Нетрудно показать, что комплексные матрицы $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ (см. (34)) имеют вид:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix} = \tilde{x}I + \tilde{y}i = I\tilde{x} + i\tilde{y}^+, \quad (36)$$

$$\tilde{A} = \tilde{z}j + \tilde{t}k = j\tilde{z} + k\tilde{t}^+, \quad (37)$$

где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{t} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^* \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}$ – комплексные матрицы типа $\tilde{w}$:

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^* \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Прямая сумма аддитивных групп $\hat{B}$ и $\hat{A}$ с элементами $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ приводит к кольцу комплексных матриц второго порядка $\tilde{C}$ с элементами:

$$\tilde{C} = \tilde{x}I + \tilde{y}i + \tilde{z}j + \tilde{t}k = I\tilde{x} + i\tilde{y}^+ + j\tilde{z} + k\tilde{t}^+. \quad (40)$$

Матрицы C , записанные в виде (40), могут рассматриваться как антикватернионы над матрицами $\tilde{w}$, которые, как легко показать, в совокупности изоморфны комплексным числам w . Нетрудно показать, что аддитивные группы элементов $\tilde{x}I, \tilde{y}i, \tilde{z}j, \tilde{t}k$ составляют гипертело четвертого порядка.

3) Кольцо (поле) комплексных чисел является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) действительной и мнимой осей.

Следует отметить, что не для всех гиперколец переход от них к соответствующим градуированным кольцам, сводящийся к составлению прямых сумм входящих в гиперкольцо аддитивных групп, целесообразен. Так, вряд ли имеет смысл составлять прямые суммы пространств полярных и аксиальных векторов, или прямые суммы физических величин, имеющих разные размерности.

§6. Кольцеобразные гиперкольца

Среди гиперколец следует выделить такие, которые в определенном смысле ближе других к кольцам. Пусть:

1) Имеется однозначное соответствие между элементами различных аддитивных групп, предполагаемых равномошными

$$a_i \rightleftharpoons a_k \rightleftharpoons a_l \rightleftharpoons \dots, \quad b_i \rightleftharpoons b_k \rightleftharpoons b_l \rightleftharpoons \dots, \quad c_i \rightleftharpoons c_k \rightleftharpoons c_l \rightleftharpoons \dots, \quad (41)$$

причем для каждой r -й аддитивной группы

$$a_r + b_r = d_r, \quad d_i \rightleftharpoons d_k \rightleftharpoons d_l \rightleftharpoons \dots. \quad (42)$$

Далее,

$$a_i \cdot b_k = e_l, \quad e_i \rightleftharpoons e_k \rightleftharpoons e_l \rightleftharpoons \dots. \quad (43)$$

2) Имеется единственная аддитивная группа A_0 , являющаяся кольцом, так что, согласно пункту 1,

$$a_0 \rightleftharpoons a_1 \rightleftharpoons a_2 \rightleftharpoons \dots, \quad b_0 \rightleftharpoons b_1 \rightleftharpoons b_2 \rightleftharpoons \dots, \quad e_0 \rightleftharpoons e_1 \rightleftharpoons e_2 \rightleftharpoons \dots, \quad (44)$$

$$a_0 b_0 = e_0, \quad (45)$$

где a_0, b_0, e_0 – элементы кольца A_0 .

3) Гиперкольцо имеет единственный нуль.

Такое гиперкольцо назовем кольцеобразным.

Можно, вместо формул (41)–(45), записать такое гиперкольцо в виде (вообще говоря, прямоугольной) матрицы с элементами $A_{\alpha i}$, причем столбцы этой матрицы (i фиксирован) образуют аддитивную группу, а ее строки – рассмотренные выше находящиеся в однооднозначном соответствии элементы. Индексы α, i могут быть непрерывными (часто; в примерах, приводимых ниже, индекс α непрерывен).

Согласно изложенному выше:

1) имеется единственное кольцо A_0 , $A_{\alpha 0}$ – элементы кольца;

2) гиперкольцо имеет единственный нуль, причем пусть

$$A_{00} = 0; \quad (46)$$

3) справедливо

$$A_{\alpha i} + A_{\beta i} = A_{\gamma(\alpha, \beta)i} \quad (47)$$

(γ не зависит от i); в частности,

$$A_{\alpha 0} + A_{\beta 0} = A_{\gamma 0}; \quad (48)$$

4)

$$A_{\alpha i} \cdot A_{\beta k} = A_{\delta(\alpha, \beta)l(i, k)}, \quad (49)$$

δ не зависит от i, k ; l не зависит от α, β .

Можно говорить об умножении и сложении строк, которые образуют кольцо, изоморфное кольцу A_0 .

Из формул (46), (47) следует

$$A_{00} + A_{\beta 0} = A_{\beta 0}, \quad A_{0i} + A_{\beta i} = A_{\gamma(0, \beta)i}. \quad (50)$$

Но поскольку γ не зависит от i , то

$$A_{0i} + A_{\beta i} = A_{\beta i}, \quad (51)$$

откуда

$$A_{0i} = 0i.$$

Но вследствие единственности нуля

$$A_{0i} = 0. \quad (52)$$

Приведем три примера кольцеобразных гиперколец.

1). Размерные действительные числа $A_{\beta i}$, причем индекс i характеризует размерность, $A_{\beta 0}$ – элементы кольца безразмерных чисел, строки $A_{\beta i}$ (β фиксирован) численно равны.

2). Гиперкольцо аксиальных и полярных векторов по векторному умножению $\vec{A}_{\beta i} (i = 0, 1)$, причем $\vec{A}_{\beta 0}$ – элементы кольца аксиальных векторов, $\vec{A}_{\beta 1}$ – элементы аддитивной группы полярных векторов, причем имеется два варианта: или $\vec{A}_{\beta 1}$ и $\vec{A}_{\beta 0}$ численно равны, или $\vec{A}_{\beta 1}$ и $-\vec{A}_{\beta 0}$ численно равны.

3). Действительная и мнимая оси двойных чисел, т. е. чисел $a + ib$, причем $i^2 = -1$.

а) Действительная ось

$$A_{a0} = a. \quad (53)$$

б) Мнимая ось. Имеется два варианта:

$$\text{или } A_{a1} = ai, \quad \text{или } A_{a1} = -ai. \quad (54)$$

Приложение

Пятое свойство, входящее в определение гиперкольца, как следствие дистрибутивности по сложению в гиперкольце и умножению

Рассмотрим $\widetilde{A}_i$ -ю и $\widetilde{A}_k$ -ю аддитивные группы гиперкольца. Тогда: либо

$$\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A}_k = 0_{l',m',\dots}, \quad (D1)$$

либо

$$\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A}_k \neq 0_{l',m',\dots}, \quad (D2)$$

где $0_{l',m',\dots}$ – некоторый нуль, принадлежащий аддитивным группам $l', m', \dots$, т. е. более чем одной аддитивной группе. В первом случае

$$A_i \cdot A_k = 0_{l',m',\dots} \quad \text{для всех } A_i \text{ и } A_k \quad (D3)$$

(A_i, A_k – элементы аддитивных групп $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{A}_k$).

Перейдем ко второму случаю. Пусть, например, $A_i \cdot A_k \neq 0_{l',m',\dots}$ и $A_i, B_i; A_k, B_k$ – элементы аддитивных групп $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{A}_k$ соответственно. Рассмотрим произведение $(A_i + B_i) \cdot (A_k + B_k)$. Используя дистрибутивные законы, получим:

$$(A_i + B_i) \cdot (A_k + B_k) = A_i \cdot A_k + B_i \cdot A_k + A_i \cdot B_k + B_i \cdot B_k. \quad (D4)$$

Поскольку все произведения в правой части (D4) соединены знаком "+", они принадлежат одной и той же, скажем, l -й аддитивной группе.

Таким образом, любые $B_i \cdot B_k$ принадлежат одной и той же аддитивной группе (той же, что $A_i \cdot A_k$). Следовательно, дистрибутивные законы (по сложению в гиперкольце и умножению) приводят к результатам:

либо верно (D3), либо все $A_i \cdot A_k$ принадлежат одной и той же, скажем l -й, аддитивной группе.

Литература

- [1] Соловей Л. Г. "О некоторых дистрибутивных универсальных алгебрах". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2**, 2004
- [2] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", ГИФМЛ, М., 1962.
- [3] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, М.-Л., 1949.
- [4] Гельфанд И. М. "Лекции по линейной алгебре". 4-е изд. "Наука", ГРФМЛ, М., 1971.
- [5] Ленг С. "Алгебра". Пер. с англ. под ред. А. И. Кострикина. "Мир", М., 1968.
- [6] Розенфельд Б. А. "Многомерные пространства", "Наука", М., 1966.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ ЧИСЕЛ КЭЛИ-ДИКСОНА

С. В. Лютковский

*Открытый Университет г. Брюсселя, Факультет Естественных Наук
sludkowski@mail.ru*

Мы исследуем супердифференцируемость функций, определенных на областях в вещественной октонионной (Кэли) алгебре, и получаем некоммутативную версию условий Коши-Римана. Далее мы изучаем некоммутативный аналог интеграла Коши, а также критерии, при которых функции октонионных переменных являются аналитическими. В частности, рассматриваются октонионные экспоненциальные и логарифмические функции. Более того, исследуются функции переменных, принадлежащих конечно и бесконечномерным алгебрам Кэли-Диксона (содержащим октонионную алгебру в качестве собственной подалгебры). Среди главных результатов имеются аналоги теорем Коши, Гурвица, принципа аргумента, Миттаг-Леффлера, Руше и Вейерштрасса для супердифференцируемых функций чисел Кэли-Диксона.

1. Введение

Функции действительных переменных со значениями в алгебрах Клиффорда были исследованы, например, [5]. В данной статье продолжены исследования функций переменных, принадлежащих некоммутативным супералгебрам [27]. Здесь рассматриваются функции октонионных переменных и также более общие алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \geq 4$, содержащие алгебру октонионов в качестве собственной подалгебры. Алгебра октонионов является альтернативной, что дает возможность определить вычеты функций разумным образом. Алгебры Кэли-Диксона большей размерности уже не являются альтернативными и обращаться с ними труднее. Тем не менее, используя их ассоциативность со степенями и дистрибутивность, можно определить дифференцируемость функций переменных, принадлежащих алгебрам Кэли-Диксона, так что дифференциал имеет достаточно хорошие свойства, чтобы определить последовательно интегралы вдоль путей над такими переменными. Этот интеграл продолжен на пространство непрерывных функций вдоль спрямляемых путей. Необходимо отметить, что градуированная структура алгебр Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ над $\mathbf{R}$ и её некоммутативность для действительной размерности не меньше, чем 4 приводит к хорошим свойствам супердифференцируемых функций $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$. В отличие от комплексного случая производная f' функции $f \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$ является оператором и в общем это не число даже при $U \subset \mathcal{A}_r$, $n = 1$.

Теория $\mathcal{A}_r$ -голоморфных функций, данная ниже, не может быть сведена к теории голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Более того, $\mathcal{A}_r$ -голоморфные функции имеют много специфических особенностей по сравнению с действительными локально аналитическими функциями, такие как, например, принцип аргумента, теорема о гомотопии 2.15, теорема о представлении функций с соответствующими множителями в виде интегралов вдоль петель (замкнутых путей) и т. д.

Дирак использовал бикватернионы (комплексифицированные кватернионы) в своих исследованиях квантовой механики. Уравнения Дирака $D_z f_1 - D_{\bar{z}} f_2 = m(f_1 +$

f_2) и $D_{\tilde{z}}f_1 + D_zf_2 = m(f_1 - f_2)$ на пространстве право суперлинейно $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемых функций кватернионных переменных может быть продолжено на пространство $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемых функций $f_1(z, \tilde{z})$ и $f_2(z, \tilde{z})$ (см. определение в §2.2 ниже и в [27]) дает очевидную физическую интерпретацию решения (f_1, f_2) , $r \geq 2$, как спинора, где m – это масса элементарной частицы. Мы продолжим оператор $(D_z^2 + D_{\tilde{z}}^2)$ с пространства право суперлинейно $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемых функций на пространство $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемых функций f , следовательно, мы получим уравнение Клейна-Гордона $(D_z^2 + D_{\tilde{z}}^2)f = 2m^2f$ в частном случае кватернионов и $\mathcal{A}_r$ -алгебр, $r \geq 3$.

Необходимо отметить, что предыдущие авторы использовали правую (или левую) суперлинейную супердифференцируемость функций, что не формирует алгебры функций и что они использовали кратные и итерированные интегралы и формулу Гаусса-Остроградского-Грина, но не использовали интегралы вдоль путей над $\mathcal{A}_r$ (см., например, [11] и ссылки там). Во время развития своей теории Янг и Миллс активно работали с кватернионами, но они испытывали недостаток в имевшейся тогда теории функций. Янг также выдвинул идею, что возможно в квантовой теории поля целесообразно использовать кватернионное время (см. стр. 198 в [11]). Известно также использование комплексного времени путем поворота Вика в квантовой механике, где мнимое время используется для интерпретаций вероятностей туннелирования под энергетическими барьерами (стенами). Использование специальной унитарной группы, вложенной в тело кватернионов (некоммутативное поле) $\mathbf{H}$, приводит к эквивалентности путем изоморфизма с $SO(3)$ всех пространственных осей. С другой стороны, главным инструментом для измерения является спектр. Когда имеются глубокие энергетические ямы или высокие энергетические барьеры, это создает препятствия для проникновения электромагнитных волн и радиации, что также хорошо известно в астрономии, в которой активно изучаются черные дыры (см. страницу 199 и §3.b в [11] и ссылки там).

У. Гамильтон в своих лекциях о кватернионах также затрагивал вопрос о событиях со значениями в $\mathbf{H}$ и думал об использовании кватернионов в астрономии и небесной механике (см. [12, 30] и ссылки там). В общем, для сравнения последовательности событий может быть необходимо в определенных ситуациях иметь пространство времени той же размерности, что и координатное пространство. С другой стороны, пространственная изотропность по крайней мере локально в определенных областях делает из каждой оси при вращениях и дилатациях $SU(2) \times \mathbf{R}$ изоморфное с $\mathbf{H}$. Поэтому оказывается, что в определенных ситуациях было бы достаточно использовать $\mathbf{H}^4$ вместо пространства-времени Минковского $\mathbf{R}^{1,3}$, где $\mathbf{R}^{1,3}$ имеет вложение в $\mathbf{H}$. Поскольку $\mathbf{H}$ как $\mathbf{R}$ -линейное пространство изоморфно $\mathbf{R}^4$, то существует вложение ζ пространства $\mathbf{R}^{1,3}$ в $\mathbf{H}$, так что $\zeta(x_1, x_i, x_j, x_k) = x_1 + x_i i + x_j j + x_k k$, где $\mathbf{R}^{1,3}$ -норма дается уравнением $|x|_{1,3} = (x^2 + \tilde{x}^2)/2 = \text{Re}(x^2) = x_1^2 - x_i^2 - x_j^2 - x_k^2$ и $\mathbf{R}^{1,3}$ скалярное произведение дается равенством $(x, y)_{1,3} := (xy + \tilde{y}\tilde{x})/2 = \text{Re}(xy) = x_1y_1 - x_iy_i - x_jy_j - x_ky_k$, где $x = x_1 + x_i i + x_j j + x_k k$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{R}$ (см. §2.1). Это также может быть использовано для вложений гиперболических многообразий в кватернионные многообразия. Тогда $\mathbf{H}^4$ может быть вложено в алгебру $\mathcal{A}_4$ седенионов (sedenions). Это также естественно для описания систем со спином, изоспином, ароматом, цветом и их взаимодействиями. Расширение пространства-времени также диктуется в некоторых ситуациях свойствами симметрии дифференциальных уравнений или множества операторов, описывающих систему. Например, специальная унитарная группа $SU(n)$, для $n = 3, 5 - 8, 11$ и т. д., исключительные группы Ли, активно используются в теории элементарных частиц [11], но эти группы мо-

гут быть вложены в соответствующие алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ [1]. В самом деле, $U(m) \subset GL(n, \mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^{n^2}$ в то время как $\mathbf{C}^m$ имеет вложение в $\mathcal{A}_r$, где $m = 2^{r-1}$, так что $\mathbf{C}^m \ni (x^1 + iy^1, \dots, x^m + iy^m) =: \xi \mapsto z := (x^1 + i_1 y^1) + i_2(x^2 + i_2^* i_3 y^2) + \dots + i_{2m-2}(x^m + i_{2m-2}^* i_{2m-1} y^m) \in \mathcal{A}_r$, так как $(i_l^* i_k)^2 = -1$ для любого $l \neq k \geq 1$, где $\{i_0, i_1, \dots, i_{2m-1}\}$ – это базис генераторов $\mathcal{A}_r$, $i_0 = 1$, $i_k^2 = -1$, $i_0 i_k = i_k i_0$, $i_l i_k = -i_k i_l$ для любых $k \neq l \geq 1$, $i = (-1)^{1/2}$, $z^* = x^1 - i_1 y^1 - i_2 x^2 - i_3 y^2 - \dots - i_{2m-2} x^m - i_{2m-1} y^m$, норма $(zz^*)^{1/2} =: |z| = (\sum_{k=1}^m |x^k + i y^k|^2)^{1/2} =: |\xi|$ удовлетворяет тождеству параллелограмма и индуцирует скалярное произведение.

Данная статья, как и предыдущая [27], посвящена решению проблемы У. Гамильтона развития интегрирования вдоль путей и теории голоморфных функций кватернионных переменных, но теперь рассматривается общий случай переменных алгебр Кэли-Диксона.

В данной работе исследуется дифференцируемость функций на областях действительной октонионной (Кэли) алгебры. Для этого далее рассматривается специфическое определение супердифференцируемости и получены некоммутативная версия супердифференцируемости и условий Коши-Римана в частном случае правосу-перлинейной супердифференцируемости. Также изучается некоммутативный аналог интеграла Коши, а также критерии того, чтобы функции октонионных переменных были локально аналитическими. В частности, рассмотрены октонионные экспоненциальные и логарифмические функции. Более того, исследуются супердифференцируемые функции от переменных, принадлежащих конечно и бесконечномерным алгебрам Кэли-Диксона (содержащим алгебру октонионов в качестве собственной подалгебры). Среди главных результатов имеются аналоги для алгебр Кэли-Диксона теорем Коши, Гурвица, принципа аргумента, Миттаг-Леффлера, Руше и Вейерштрасса.

Результаты данной статьи могут служить для последующих исследований специальных функций переменных из алгебр Кэли-Диксона, некоммутативной теории пучков, многообразий некоммутативной геометрии над алгебрами Кэли-Диксона, их групп петель и диффеоморфизмов (см. также [23, 24, 25, 26, 29]).

2. Дифференцируемость функций октонионных переменных

Во избежание недоразумений сначала приведены обозначения и определения.

2.1. Тело кватернионов над действительным полем $\mathbf{R}$ обозначается $\mathbf{H}$ с классическим кватернионным базисом $1, i, j, k$, удовлетворяющим соотношениям для $\mathcal{A}_2$ (см. введение). Тело кватернионов $\mathbf{H}$ имеет антиизоморфизм η порядка два $\eta: z \mapsto \tilde{z}$, где $\tilde{z} = w_1 - w_i i - w_j j - w_k k$, $z = w_1 + w_i i + w_j j + w_k k$; $w_1, \dots, w_k \in \mathbf{R}$. Имется норма в $\mathbf{H}$ такая, что $|z| = |z\tilde{z}|^{1/2}$, следовательно, $\tilde{z} = |z|^2 z^{-1}$.

Алгебра $\mathbf{K}$ октонионов (октав, алгебры Кэли) определяется как восьмимерная алгебра над $\mathbf{R}$ с базисом, например,

$$(1) \mathbf{b}_3 := \mathbf{b} := \{1, i, j, k, l, il, jl, kl\}, \text{ так что}$$

$$(2) i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = -1, ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j, li = -il, jl = -lj, kl = -lk;$$

$$(3) (\alpha + \beta l)(\gamma + \delta l) = (\alpha\gamma - \delta\beta) + (\delta\alpha + \beta\gamma)l$$

– это закон умножения в $\mathbf{K}$ для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{H}$, $\xi := \alpha + \beta l \in \mathbf{K}$, $\eta := \gamma + \delta l \in \mathbf{K}$, $\tilde{z} := v - wi - xj - yk$ для кватерниона $z = v + wi + xj + yk \in \mathbf{H}$ с $v, w, x, y \in \mathbf{R}$.

Алгебра октонионов не является ни коммутативной, ни ассоциативной, так как $(ij)l = kl$, $i(jl) = -kl$, но она дистрибутивна и $\mathbf{R}1$ является ее центром. Если $\xi := \alpha + \beta l \in \mathbf{K}$, то

(4) $\tilde{\xi} := \tilde{\alpha} - \beta l$ называется сопряженным элементом для ξ , где $\alpha, \beta \in \mathbf{H}$. Тогда
 (5) $(\xi\eta)^{\sim} = \tilde{\eta}\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} + \tilde{\eta} = (\xi + \eta)^{\sim}$ и $\xi\tilde{\xi} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$,
 где $|\alpha|^2 = \alpha\tilde{\alpha}$, так что

(6) $\xi\tilde{\xi} =: |\xi|^2$ и $|\xi|$ – это норма в $\mathbf{K}$. Поэтому,

(7) $|\xi\eta| = |\xi||\eta|$,

следовательно, $\mathbf{K}$ не содержит делителей нуля (см. также [17, 21, 35]). Умножение октонионов удовлетворяет уравнениям:

(8) $(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta)$,

(9) $\xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta$,

которые определяют свойство альтернативности алгебры. В частности, $(\xi\xi)\xi = \xi(\xi\xi)$. Положим $\tilde{\xi} = 2a - \xi$, где $a = \text{Re}(\xi) := (\xi + \tilde{\xi})/2 \in \mathbf{R}$. Поскольку $\mathbf{R}1$ является центром в $\mathbf{K}$ и $\xi\tilde{\xi} = \xi\xi = |\xi|^2$, тогда из уравнений (8, 9) по индукции следует, что для любого $\xi \in \mathbf{K}$ и любого n -кратного произведения, $n \in \mathbf{N}$, $\xi(\xi(\dots\xi\xi)\dots) = (\dots(\xi\xi)\xi\dots)\xi$ и результат не зависит от порядка скобок (порядка последовательных умножений), следовательно, определение $\xi^n := \xi(\xi(\dots\xi\xi)\dots)$ не зависит от порядка скобок. Это также показывает, что $\xi^m\xi^n = \xi^n\xi^m$, $\xi^m\tilde{\xi}^m = \tilde{\xi}^m\xi^n$ для любых $n, m \in \mathbf{N}$ и $\xi \in \mathbf{K}$. В отличие от кватернионов, октонионная алгебра не может быть реализована как подалгебра алгебры $\mathbf{M}_8(\mathbf{R})$ всех 8×8 -матриц над $\mathbf{R}$, так как $\mathbf{K}$ неассоциативна, но $\mathbf{M}_8(\mathbf{R})$ ассоциативна. Некоммутативная неассоциативная алгебра октонионов $\mathbf{K}$ является $\mathbf{Z}_2$ -градуированной $\mathbf{R}$ -алгеброй $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$, где элементы $\mathbf{K}_0$ являются *четными* и элементы в $\mathbf{K}_1$ являются *нечетными* (смотри, например, [20, 21, 34]). Существуют естественные вложения $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{K}$ и $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{K}$, но ни $\mathbf{K}$ над $\mathbf{C}$, ни $\mathbf{K}$ над $\mathbf{H}$, ни $\mathbf{H}$ над $\mathbf{C}$ являются алгебрами, так как их центры таковы: $Z(\mathbf{H}) = Z(\mathbf{K}) = \mathbf{R}$.

Рассмотрим также алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ над $\mathbf{R}$, где 2^n – это её размерность над $\mathbf{R}$. Они строятся по индукции стартуя с $\mathbf{R}$, так что $\mathcal{A}_{n+1}$ получается из $\mathcal{A}_n$ помощью процедуры удвоения, в частности, $\mathcal{A}_0 := \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$ и $\mathcal{A}_4$ известна как алгебра седенионов [1]. Алгебры Кэли-Диксона являются $*$ -алгебрами, то есть, существует действительно-линейное отображение $\mathcal{A}_n \ni a \mapsto a^* \in \mathcal{A}_n$, так что

(10) $a^{**} = a$,

(11) $(ab)^* = b^*a^*$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_n$. Тогда они хорошо нормированы, то есть,

(12) $a + a^* =: 2\text{Re}(a) \in \mathbf{R}$ и

(13) $aa^* = a^*a > 0$ для любого $0 \neq a \in \mathcal{A}_n$. Норма в ней определена путем

(14) $|a|^2 := aa^*$. Мы также обозначим a^* через $\tilde{a}$. Каждое $0 \neq a \in \mathcal{A}_n$ имеет мультипликативный обратный даваемый формулой $a^{-1} = a^*/|a|^2$.

Процедура удвоения состоит в следующем. Каждое $z \in \mathcal{A}_{n+1}$ записывается в виде $z = a + bl$, где $l^2 = -1$, $l \notin \mathcal{A}_n$, $a, b \in \mathcal{A}_n$. Сложение является покомпонентным. Сопряженным является

(15) $z^* := a^* - bl$.

Умножение дается уравнением (3).

Базис $\mathcal{A}_n$ над $\mathbf{R}$ обозначается через $\mathbf{b}_n := \mathbf{b} := \{1, i_1, \dots, i_{2^n-1}\}$, где $i_s^2 = -1$ для любого $1 \leq s \leq 2^n - 1$, $i_{2^n-1} := l$ является дополнительным элементом процедуры удвоения $\mathcal{A}_n$ из $\mathcal{A}_{n-1}$, выберем $i_{2^{n-1}+m} = i_m l$ для любого $m = 1, \dots, 2^{n-1} - 1$, $i_0 := 1$.

Алгебра называется альтернативной, если каждая подалгебра порожденная двумя элементами ассоциативна. Алгебра называется ассоциативной со степенями (power-associative), если её каждая подалгебра порожденная одним элементом ассоциативна. Только при $n = 0, \dots, 3$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ являются альтернативными алгебрами с делением. При $n \geq 4$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ не являются алгебрами с делением, но они являются ассоциативными со степенями. Для проверки последнего свойства рассмотрим $z \in \mathcal{A}_n$ записанное в виде $z = v + M$, где $v = \text{Re}(z)$,

$M := (z - z^*)/2 =: Im(z)$. Тогда v и M коммутируют и они ортогональны, $M^* = -M$. Поэтому, подалгебра, порожденная z ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра порожденная M ассоциативна. Поскольку $M^*M = MM^* = |M|^2$ и $M^* = -M$, тогда подалгебра порожденная M ассоциативна.

Проверим, что z и $\tilde{z}$ в $\mathcal{A}_r$ являются независимыми переменными. Предположим напротив, что существует $\gamma \in \mathcal{A}_r$ такое, что $z + \gamma\tilde{z} = 0$ для любых $z \in \mathcal{A}_r$. Запишем $z = a + bl$, $\gamma = \alpha + \beta l$, где $a, b, \alpha, \beta \in \mathcal{A}_{r-1}$. Тогда $z + \gamma\tilde{z} = 0$ эквивалентно $\alpha a^* + b^* \beta = -a$ и $-\beta \alpha + \beta a = -b$. Рассмотрим z с $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда из последних двух уравнений следует, что: $\alpha = -(a + b^* \beta)a|a|^{-2} = 1 + b^* \beta a|b|^{-2}$, так как $a^{-1} = a^*|a|^{-2}$. Это дает $\beta = -2b Re(a)|z|^{-2}$ и $\alpha = 1 - 2a Re(a)|z|^{-2}$. Беря в частности, $|z| = 1$ и $Re(a) \neq 0$ и варьируя z , мы приходим к противоречию, так как γ не постоянна. Поэтому, z и z^* – две переменные в $\mathcal{A}_r$ леволлинейно (или праволлинейно) независимы над $\mathcal{A}_r$.

Для любой алгебры $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 2$, $r \in \mathbf{N}$, имеются два тождества: $z + z^* = 2w_1$, $s(zs^*) = z^* + 2w_s s$ для любого $s \in \hat{b}$, где $z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s$, $w_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b} := \{1, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$, $\hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$, следовательно, $z^* = (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{b}} s(zs^*)\}$ для любого $r \geq 2$, $r \in \mathbf{N}$. Поэтому, z^* не играет такой специальной роли в $\mathcal{A}_r$, $r \geq 2$, как для $\mathbf{C}$.

В силу некоммутативности $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, и тождеств вызванных сопряжением (15), умножения (3) и аксиом аддитивности, например, уравнения (7, 8, 9) для октонионов, также уравнения (10, 11, 14) и условия (12, 13) в общем случае $\mathcal{A}_r$ полиномиальная функция $P : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ переменной z и z^{-1} могут иметь несколько различных представлений

$$\check{P}(z) = \sum_{k, q(m)} \{b_{k,1} z^{k_1} \dots b_{k,m} z^{k_m}\}_{q(m)},$$

где $b_{k,j} \in \mathcal{A}_r$ – это постоянные, $k = (k_1, \dots, k_m)$, $m \in \mathbf{N}$, $k_j = (k_{j,1}, \dots, k_{j,n})$, $k_{j,l} \in \mathbf{Z}$, $z^{k_j} := {}^1 z^{k_{j,1}} \dots {}^n z^{k_{j,n}}$, ${}^l z^0 := 1$, U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$. Конечно, мы можем рассматривать $z - z_0$ вместо z в формуле $\check{P}(z)$ с правой стороны, когда задана отмеченная точка z_0 . В силу неассоциативности $\mathcal{A}_r$ здесь используется обозначение $\{a_1 \dots a_m\}_{q(m)}$ для произведения элементов $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}_r$ соответствующих порядку произведений в этом члене определяемым расположением скобок $q(m) := (q_m, \dots, q_3)$, где $a_v := (b_{k,v} z^{k_v})$ для любых $v = 1, \dots, m$, $q_m \in \mathbf{N}$ означает, что первая (наиболее внутренняя скобка) соответствует умножению $a_{q_m} a_{q_m+1}$, так что ситуация $(a_1 \dots (a_t a_{t+1}) \dots (a_w a_{w+1}) \dots a_m)$ с формально двумя одновременно независимыми умножениями, но с $t < w$ по нашему определению упорядочения соответствует $q_m = t$. После первого умножения мы получим произведение $a'_1, \dots, a'_{m-1} \in \mathcal{A}_r$, где не менее, чем $m - 2$ из этих элементов те же, что и в предыдущем члене, тогда q_{m-1} соответствует первому умножению в новом члене. Мы опустим q_2 и q_1 , так как они единственны. Каждый член $\{b_{k,1} z^{k_1} \dots b_{k,m} z^{k_m}\}_{q(m)} =: \omega(b_k, z) \neq 0$ мы рассмотрим как слово длины $\xi(\omega) = \sum_{j,l} \delta(k_{j,l}) + \sum_j \kappa(b_{k,j})$, где $\delta(k_{j,l}) = 0$ для $k_{j,l} = 0$ и $\delta(k_{j,l}) = 1$ для $k_{j,l} \neq 0$, $\kappa(b_{k,j}) = j$ для $b_{k,j} = 1$, $\kappa(b_{k,j}) = j + 1$ для $b_{k,j} \in \mathcal{A}_r \setminus \{0, 1\}$. Полином P рассматривается как фразу $\check{P}$ длины $\xi(\check{P}) := \sum_k \xi(\omega(b_k, z))$. Используя умножение постоянных в $\mathcal{A}_r$, коммутативность $v \in \mathbf{R}$ с каждым ${}^l z$ и ${}^l \tilde{z}$, а ${}^l z^a {}^l z^b = {}^l z^{a+b}$ и ${}^l \tilde{z}^a {}^l \tilde{z}^b = {}^l \tilde{z}^{a+b}$, ${}^l z {}^l \tilde{z} = {}^l \tilde{z} {}^l z$, можно рассмотреть представление P как фразы $\check{P}$ минимальной длины $\xi(\check{P})$. Тогда упорядочим их лексикографически векторами $q(m)$. Выберем одну такую фразу $\check{P}$ минимальной длины и тогда минимальной относительно лексикографического упорядочения $q(m)$. В силу коммутативности сложения для членов $\{a_1 \dots a_m\}_{q(m)}$ и $\{a'_1 \dots a'_m\}_{q'(m)}$ равной длины и имеющих различные векторы $q(m)$ и $q'(m)$ порядок $q(m)$ и $q'(m)$ для $\check{P}$ не важен, так что минимальность тестируется по всем упорядочениям $q(m)$ среди всех членов данной длины в $\check{P}$.

Если $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ — это функция представленная сходящимся по z рядом $f(z) = \sum_n P_n(z)$, где $P_n(vz) = v^n P_n(z)$ для любого $v \in \mathbf{R}$ является $\mathbf{R}$ -гомогенным полиномом, $n \in \mathbf{Z}$, тогда рассмотрим среди всех представлений f такие, для которых $\xi(\check{P}_n)$ минимально для любого $n \in \mathbf{Z}$. Это служит для отыскания представлений классов эквивалентных элементов $\mathbf{R}$ -алгебры всех полиномов на U и z -аналитических функций. Соответствующее семейство локально z -аналитических функций на U обозначается $C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ или $C^\omega(U, \mathcal{A}_r)$. Каждый элемент из $C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ по нашему определению является единственной фразой, которая может быть бесконечной. Мы не исключаем возможности, что две различные фразы f и g могут иметь один и тот же теоретико-множественный график $\Gamma_f := \{(z, f(z)) : z \in U\}$ как отображения из U в $\mathcal{A}_r$, например, где класс эквивалентности определенный графиком имеет неединственный элемент минимальной длины. Если каждый P_n для f имеет разложение частного левого типа

$$\check{P}(z) = \sum_k b_k(z^k),$$

где $0 \leq k \in \mathbf{Z}$, $b_k \in \mathcal{A}_r$, тогда пространство всех таких локально аналитических функций на U обозначается через ${}_l C^\omega(U, \mathcal{A}_r)$. Пространство локально аналитических функций f имеющих разложение правого типа для любого P_n

$$\check{P}(z) = \sum_k (z^k) b_k$$

обозначается ${}_r C^\omega(U, \mathcal{A}_r)$. Соответствующее пространство по переменным $(z, \tilde{z})$ обозначается через $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ и по переменной $\tilde{z}$ посредством $C_{\tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$, где $C_{z, \tilde{z}}^\omega := C_{1z, 2z}^\omega(U^2, \mathcal{A}_r)|_{1z=z, 2z=\tilde{z}}$, $1z$ и $2z \in U$. По нашему определению каждый элемент $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ является единственной фразой, которая может быть бесконечной.

$\mathbf{R}$ -линейное пространство $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ плотно в $\mathbf{R}$ -линейном пространстве $C^0(U, \mathcal{A}_r)$ всех непрерывных функций $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$. Обозначим через $C_z^0(U, \mathcal{A}_r)$ $\mathbf{R}$ -линейное пространство всех классов эквивалентности последовательностей Коши из $C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ сходящихся относительно C^0 -равномерности. Аналогично мы определим $C_{\tilde{z}}^0(U, \mathcal{A}_r)$ и $C_{z, \tilde{z}}^0(U, \mathcal{A}_r)$.

2.1.1. Определение. Если $\mathcal{G} \in C_z^0(U, \mathcal{A}_r)$, то мы скажем, что $\mathcal{G}$ является z -представленным. Элементы в C_z^0 (или $C_{z, \tilde{z}}^0$) мы назовем $\tilde{z}$ - (или $(z, \tilde{z})$ - соответственно) представленными функциями. Если $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ является (теоретико-множественно) непрерывной функцией с $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \in C_{z, \tilde{z}}^0(U, \mathcal{A}_r)$, так что каждая последовательность Коши $\{\zeta_n : n \in \mathbf{N}\}$ из семейства $\mathcal{G}$ (сходящихся последовательностей Коши) сходится к f относительно C^0 -равномерности, то мы назовем каждое $g \in \mathcal{G} = \mathcal{G}(f)$ алгебраической непрерывной функцией g . (Поскольку $\mathcal{F}$ является классом эквивалентности, то каждое $\{\zeta_n : n\} \in \mathcal{G}$ сходится к тому же пределу f).

Мы скажем, что $\mathcal{G}$ обладает свойством A , если каждое $\{\zeta_n : n\} \in \mathcal{G}$ обладает свойством A . Мы скажем, что f обладает свойством A , если существует $\mathcal{G}(f)$ обладающее свойством A и такое, что $\mathcal{G}(f) = \mathcal{H}$, где или $\mathcal{H} \in C_z^0(U, \mathcal{A}_r)$ или $\mathcal{H} \in C_{\tilde{z}}^0(U, \mathcal{A}_r)$, или $\mathcal{H} \in C_{z, \tilde{z}}^0(U, \mathcal{A}_r)$. Если $\mathcal{G} \neq \emptyset$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ и $\mathcal{G} \neq \mathcal{H}$, то мы будем говорить о $(A, \mathcal{G})$ свойстве. Если f имеет больший класс гладкости C^m , C^∞ или C^ω и т.д., то мы возьмем пересечения $\mathcal{G}(f)$ и $\mathcal{H}$ с C^n или C^∞ , или C^ω и т.д., предполагая сходимости относительно соответствующей равномерности и так что $\mathcal{G}(f) \cap C^n$ или $\mathcal{G}(f) \cap C^\infty$, или $\mathcal{G}(f) \cap C^\omega$ и т.д. непусто. Записывая аргументы $(1z, \dots, nz)$ функции f мы выясним ситуацию в каждом случае укзывая в каждом случае подмножество переменных по которым выполнено свойство A . Мы можем писать кратко $f(z)$ или f вместо $f(z, \tilde{z})$

в ситуациях, в которых это не может вызвать неясности. Наше общее предположение состоит в том, что непрерывная функция имеет $(z, \tilde{z})$ -представление, если не предполагается иное.

2.1.2. Предложение. Пусть A является $\mathcal{A}_r$ -аддитивным, $\mathbf{R}$ -гомогенным оператором $A : \mathcal{A}_r^n \rightarrow \mathcal{A}_r^n$, $r \geq 2$, $n \geq 1$, тогда A является $\mathbf{R}$ -линейным и существует конечное семейство A_j право- $\mathcal{A}_r$ -линейных и B_j лево- $\mathcal{A}_r$ -линейных операторов $j \in \{1, 2, \dots, 2^r\}$ независимых от $h \in \mathcal{A}_r^n$, так что $A(h) = \sum_j A_j(hB_j)$ для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, где мы пишем $A_j(h) =: A_j h$ и $B_j(h) =: hB_j$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго отметим, что $A(h) = \sum_{j=0}^{2^r-1} A(i_j)h_j$, где $h_j \in \mathbf{R}^{n2^r}$, $h = \sum_{j=0}^{2^r-1} h_j i_j$, $A(i_j)$ является $\mathbf{R}$ -линейным оператором независимым от h_j . С другой стороны, $h_j = (-hi_j + i_j(2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(hi_j^*)\})/2$ для любого $j = 1, 2, \dots, 2^r - 1$, $h_0 = (h + (2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(hi_j^*)\})/2$. Подставляя эти выражения h_j , $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, в каждый член $A(i_j)h_j$, мы получим второе утверждение.

2.2. Определение. Рассмотрим открытую область U в $\mathcal{A}_r^n$, $r \geq 3$, n -кратное произведение копий $\mathcal{A}_r$, и пусть $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ является функцией. Тогда будем говорить, что f является z -супердифференцируемой в точке $({}^1z, \dots, {}^nz) = z \in U$, ${}^1z, \dots, {}^nz \in \mathcal{A}_r$, если она удовлетворяет условиям (2 – 7) ниже и если она может быть записана в виде

$$(1) \quad f(z+h) = f(z) + \sum_{j=1}^n A_j {}^j h + \epsilon(h)|h|$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, так что $z+h \in U$, где A_j является $\mathcal{A}_r$ -значным $\mathcal{A}_r$ -аддитивным $\mathbf{R}$ -гомогенным оператором h -переменных, в общем он нелинеен для любого $j = 1, \dots, n$ и A_j обозначается $(Df(z)).e_j$ и существует производная $f'(z)$, так что дифференциал дается уравнением

$$(2) \quad Df(z).h := f'(z).h := \sum_{j=1}^n (\partial f(z)/\partial {}^j z) {}^j h,$$

где $\epsilon(h)$, $\epsilon : \mathcal{A}_r^n \rightarrow \mathcal{A}_r$, является функцией непрерывной в нуле, так что $\epsilon(0) = 0$, $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ – это вектор в $\mathcal{A}_r^n$ с 1 на j -th месте,

$$(3) \quad Df(z).h =: (Df)(z; h)$$

так что $(Df)(z; h)$ аддитивен на h и $\mathbf{R}$ -гомогенен, то есть,

$$(4) \quad (Df)(z; h_1 + h_2) = (Df)(h_1) + (Df)(h_2) \text{ и } (Df)(z; vh) = v(Df)(z; h)$$

для любых h_1, h_2 и $h \in \mathcal{A}_r^n$, $v \in \mathbf{R}$. Также наложены условия:

$$(5) \quad (\partial_z z).h = h, \quad \partial_z 1 = 0, \quad \partial_z \tilde{z} = 0, \quad \partial_{\tilde{z}} z = 0, \quad (\partial_{\tilde{z}} \tilde{z}).h = \tilde{h}$$

$$\text{также } D = \partial_z + \partial_{\tilde{z}}, \quad (D(fg)).h = ((Df).h)g + f(Dg).h$$

для произведения двух супердифференцируемых функций f и g и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, где обозначение ∂_z соответствует $\partial/\partial z$ и $\partial_{\tilde{z}}$ соответствует $\partial/\partial \tilde{z}$. Мы также имеет законы дистрибутивности относительно умножения справа на элементы $\lambda \in \mathcal{A}_r$:

$$(6) \quad (D(f+g))(z; h\lambda) = (Df)(z; h\lambda) + (Dg)(z; h\lambda),$$

$$(Df)(z; h(\lambda_1 + \lambda_2)) = (Df)(z; h\lambda_1) + (Df)(z; h\lambda_2)$$

для любых супердифференцируемых функций f и g в точке z и любых λ , λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$. Имеются ещё законы дистрибутивности слева:

$$(7) \quad (D\lambda(f + g))(z; h) = \lambda(Df)(z; h) + \lambda(Dg)(z; h),$$

$$(D(\lambda_1 + \lambda_2)f)(z; h) = \lambda_1(Df)(z; h) + \lambda_2(Df)(z; h).$$

Если использовать $(z, \tilde{z})$ -представление полиномов и функций, то мы определим $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемость по паре $(z, \tilde{z})$, по z и по $\tilde{z}$, так что

$$(8) \quad D_z \tilde{z} = 0, D_{\tilde{z}} z = 0, (D_z z).h = h, (D_{\tilde{z}} \tilde{z}).h = \tilde{h}, \\ (D_{z, \tilde{z}}(fg)).h = ((D_{z, \tilde{z}}f).h)g + f(D_{z, \tilde{z}}g).h \text{ и } (D_{z, \tilde{z}}f).h = (D_z f).h + (D_{\tilde{z}} f).h$$

для любых двух $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемых функций f и g , любого $h \in \mathcal{A}_r^n$ (см. также [27]). Мы возьмем функцию $g(, \phantom{\tilde{z}})$ в z -представлении по и $\phantom{\tilde{z}}$, затем рассмотрим оператор D по переменной $(, \phantom{\tilde{z}})$ и в выражении $(Dg(, \phantom{\tilde{z}})).h$, положим для компонент $ = z$, $\phantom{\tilde{z}} = \tilde{z}$, $ = \tilde{h} =: \alpha \in \mathcal{A}_r^n$ и рассмотрим функцию $g(z, \tilde{z}) =: f$, где $z = (^1 z, \dots, ^n z) \in U \subset \mathcal{A}_r^n$, $\tilde{z} = (\phantom{\tilde{z}}^1 \tilde{z}, \dots, \phantom{\tilde{z}}^n \tilde{z})$, $az := (a ^1 z, \dots, a ^n z)$, $zb := (^1 zb, \dots, ^n zb)$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_r$.

Если существует функция $g(, \phantom{\tilde{z}})$ на открытом подмножестве W в $\mathcal{A}_r^{2n}$ со значениями в $\mathcal{A}_r$ $(, \phantom{\tilde{z}})$ -супердифференцируемая в точке $(, \phantom{\tilde{z}})$, и $\phantom{\tilde{z}} \in \mathcal{A}_r^n$, также

$$g(, \phantom{\tilde{z}})|_{=z, \phantom{\tilde{z}}=\tilde{z}} =: f(z, \tilde{z}), z = \xi,$$

Тогда мы скажем, что f является $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемой в точке ξ и

$$(9) \quad (D_z f(z, \tilde{z})).h = (\partial f(z, \tilde{z})/\partial z).h := \{(Dg(, \phantom{\tilde{z}})).(h, 0)\}|_{=z, \phantom{\tilde{z}}=\tilde{z}}, \\ (D_{\tilde{z}} f(z, \tilde{z})).h = (\partial f(z, \tilde{z})/\partial \tilde{z}).h := \{(Dg(, \phantom{\tilde{z}})).(0, h)\}|_{=z, \phantom{\tilde{z}}=\tilde{z}},$$

где $h \in \mathcal{A}_r^n$ и f предполагается определенной g и его ограничением на $\{(, \phantom{\tilde{z}}) \in W : = (^1 z)\}$,

$$(10) \quad D_{} g(, \phantom{\tilde{z}}).h := D_{(, \phantom{\tilde{z}})} g(, \phantom{\tilde{z}}).(h, 0), \\ D_{\phantom{\tilde{z}}} g(, \phantom{\tilde{z}}).h := D_{(, \phantom{\tilde{z}})} g(, \phantom{\tilde{z}}).(0, h), \\ (D_z f(z, \tilde{z})).e_j =: \partial f(z, \tilde{z})/\partial ^j z, (D_{\tilde{z}} f(z, \tilde{z})).e_j =: \partial f(z, \tilde{z})/\partial \phantom{\tilde{z}}^j \tilde{z}.$$

Поскольку алгебры Кэли-Диксона над $\mathbf{R}$ и дифференциалы Фреше единственны, то для функций $g : W \rightarrow \mathcal{A}_r$ и $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$, их супердифференциалы $(Dg).h$ и $(D_{z, \tilde{z}}f).h$ единственны, поэтому мы имеем $D_z = D_{}|_{=z}$, $D_{\tilde{z}} = D_{\phantom{\tilde{z}}}|_{\phantom{\tilde{z}}=\tilde{z}}$ в $(z, \tilde{z})$ -представлении, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$ так что $\{(= z, \phantom{\tilde{z}} = \tilde{z}) : z \in U\} \subset W$. В частности, если существуют функции f_1, f_2, f_3 такие, что $f_3 = f_1(z, \tilde{z})f_2(z, \tilde{z})$, $f_j = g_j(, \phantom{\tilde{z}})|_{=z, \phantom{\tilde{z}}=\tilde{z}}$, $j = 1, 2, 3$, где или g_j для любого j представлено минимизированным рядом §2.1, или при умножении $(f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2$ не производится реорганизация ряда, например, по минимальности (это имеет место в случае определения данного выше), тогда

$$(11) \quad (D_z f_1 f_2).h = ((D_z f_1).h)f_2 + f_1(D_z f_2).h \text{ и} \\ (D_{\tilde{z}} f_1 f_2).h = ((D_{\tilde{z}} f_1).h)f_2 + f_1(D_{\tilde{z}} f_2).h$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, так как $D_{z, \tilde{z}} = D_z + D_{\tilde{z}}$.

В общем случае, $(D_{z, \tilde{z}} f_1 f_2).h = ((D_{z, \tilde{z}} f_1).h)f_2 + f_1(D_{z, \tilde{z}} f_2).h$ для любых $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемых функций f_1 и f_2 на U и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$.

Функция $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ называется $\tilde{z}$ -супердифференцируемой в точке ξ , если существует функция $g : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ такая, что $g(\tilde{z}) = f(z)$ и $g(z)$ является z -супердифференцируемой в ξ .

Обозначения. Мы можем записывать функцию $f(z)$ с $z \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 2$, в переменных $((^j w_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, \dots, n)$, $\mathbf{b} := \mathbf{b}_r$, как

$$F((^j w_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, \dots, n) = f \circ \sigma((^j w_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, \dots, n),$$

где $\sigma(({}^j w_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, \dots, n) = ({}^j z : j = 1, \dots, n)$ – это биективное отображение. Для U открытого в $\mathcal{A}_r^n$ и $F : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ мы можем записать F в виде $F = \sum_{s \in \mathbf{b}} F_s s$, где $F_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$, $F_{vs} := vF_s$ для любого $v \in \mathbf{R}$.

2.2.1. Предложение. Пусть $g : U \rightarrow \mathcal{A}_r^m$, $r \geq 3$, и $f : W \rightarrow \mathcal{A}_r^n$ – это две супердифференцируемые функции на U и W соответственно, так что $g(U) \supset W$, U открыто в $\mathcal{A}_r^k$, W открыто в $\mathcal{A}_r^m$, $k, n, m \in \mathbf{N}$. Тогда сложная функция $f \circ g(z) := f(g(z))$ супердифференцируема на $V := g^{-1}(W)$ и

$$(Df \circ g(z)).h = (Df(g)).((Dg(z)).h)$$

для любого $z \in V$ и любого $h \in \mathcal{A}_r^k$, где f и g являются одновременно $(z, \tilde{z})$, или z , или $\tilde{z}$ -супердифференцируемыми и, следовательно, $f \circ g$ имеет тот же тип супердифференцируемости.

Доказательство. Поскольку g супердифференцируема, то g непрерывна и $g^{-1}(W)$ открыто в $\mathcal{A}_r^k$. Тогда $f \circ g(z+h) - f \circ g(z) = (Df(g))|_{g=g(z)} \cdot (g(z+h) - g(z)) + \epsilon_f(\eta)|\eta|$, где $\eta = g(z+h) - g(z)$, $g(z+h) - g(z) = (Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|$ (см. §2.2). Поскольку Df является $\mathcal{A}_r^m$ -аддитивным и $\mathbf{R}$ -гомогенным (и непрерывным) оператором на $\mathcal{A}_r^m$, то

$$f \circ g(z+h) - f \circ g(z) = (Df(g))|_{g=g(z)} \cdot ((Dg(z)).h) + \epsilon_{f \circ g}(h)|h|, \text{ где}$$

$$\epsilon_{f \circ g}(h)|h| := \epsilon_f((Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|) \cdot ((Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|)$$

$$+ [(Df(g))|_{g=g(z)} \cdot (\epsilon_g(h))]|h|,$$

$$|(Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h| \leq [\|Dg(z)\| + |\epsilon_g(h)|]|h|, \text{ следовательно,}$$

$$|\epsilon_{f \circ g}(h)| \leq |\epsilon_f((Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|)|[\|Dg(z)\| + |\epsilon_g(h)|] + \|(Df(g))|_{g=g(z)}\| |\epsilon_g(h)|$$

и неизбежно $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_{f \circ g}(h) = 0$. Более того, $\epsilon_{f \circ g}(h)$ непрерывна по h , так как ϵ_g и ϵ_f – это непрерывные функции, Df и Dg являются непрерывными операторами. Очевидно, если $\partial_{\tilde{z}} f = 0$ и $\partial_{\tilde{z}} g = 0$ на областях определений f и g соответственно, то $\partial_{\tilde{z}} f \circ g = 0$ на V , так как $D = \partial_z + \partial_{\tilde{z}}$.

2.3. Предложение. Функция $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ является z -супердифференцируемой в точке $a \in U$ тогда и только тогда, когда F является дифференцируемой по Фреше в a и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a} = 0$. Если f является z -супердифференцируемой на U , то f является z -представленной на U . Если $f'(a)$ является право суперлинейной на супералгебре $\mathcal{A}_r^n$, то f является z -супердифференцируемой в $a \in U$ тогда и только тогда, когда F является дифференцируемой по Фреше в $a \in U$ и удовлетворяет следующим уравнениям:

$$(1) \quad (\partial F_{ps} / \partial {}^j w_p) = ((ps)p^*)^* ((qs)q^*) (\partial F_{qs} / \partial {}^j w_q), \quad \text{для любых } p, q, s \in \mathbf{b}$$

или коротко:

$$(2) \quad \partial F / \partial {}^j w_1 = (\partial F / \partial {}^j w_q) q^*$$

для любого $q \in \hat{b}_r$ и любого $j = 1, \dots, n$. $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемая функция f в $a \in U$ является z -супердифференцируемой в $a \in U$ тогда и только тогда, когда $D_{\tilde{z}} f(z, \tilde{z})|_{z=a} = 0$.

Доказательство. Для любого канонического замкнутого компактного подмножества U в $\mathcal{A}_r$ множество всех полиномиальных по z функций плотно в пространстве всех непрерывных на U дифференцируемых по Фреше функций на $Int(U)$.

Как обычно множество A имеющее структуру аддитивной группы и имеющее дистрибутивное умножение его элементов на числа Кэли-Диксона $z \in \mathcal{A}_v$ слева и справа называется векторным пространством над $\mathcal{A}_v$. В таком смысле оно является $\mathbf{R}$ -линейным пространством, а также левым и правым модулем над $\mathcal{A}_v$. Для двух векторных пространств A и B над $\mathcal{A}_v$ рассмотрим их упорядоченное тензорное произведение $A \otimes B$ над $\mathcal{A}_v$ состоящее из элементов $a \otimes b := (a, b)$, так что $a \in A$ и $b \in B$,

$\alpha(a, b) = (\alpha a, b)$ и $(a, b)\beta = (a, b\beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_v$, $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ для любых $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$. В вышеупомянутом отношении $A \otimes B$ является $\mathbf{R}$ -линейным пространством и в тоже время левым и правым модулем над $\mathcal{A}_v$. Тогда $A \otimes B$ имеет структуру векторного пространства над $\mathcal{A}_v$. По индукции рассмотрим тензорные произведения $\{C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes C_n\}_{q(n)}$, где $C_1, \dots, C_n \in \{A, B\}$, $q(n)$ указывает на порядок тензорного умножения в $\{*\}$. Для двух $\mathcal{A}_v$ -векторных пространств V и W их прямая сумма $V \oplus W$ является $\mathcal{A}_v$ -векторным пространством состоящим из всех элементов (a, b) с $a \in V$ и $b \in W$, так что $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ и $(a, b)\beta = (a\beta, b\beta)$ для любых α и $\beta \in \mathcal{A}_v$. Поэтому, прямая сумма всех различных тензорных произведений $\{C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes C_n\}_{q(n)}$, которые являются $\mathbf{R}$ -линейными пространствами и правыми и левыми модулями над $\mathcal{A}_v$, поставяет минимальное тензорное пространство $T(A, B)$ порожденное A и B .

Операторы ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ определены на $C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ и $C_{\tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$, следовательно, они единственны на тензорном пространстве $T(C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r), C_{\tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r))$, которое плотно в $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$, так как $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r) := C_{1z, 2z}^\omega(U^2, \mathcal{A}_r)|_{1z=z, 2z=\tilde{z}}$. Поэтому, операторы ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ определены единственным образом на $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$.

Если имеется произведение fg двух фраз f и g из $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$, тогда если оно приведено к минимальной фразе ξ , тогда это делается с помощью формул $z^n \tilde{z}^m = z^{n+m}$, и $\tilde{z}^n z^m = \tilde{z}^{n+m}$, и тождеств для констант в $\mathcal{A}_r$, так как никакое сокращение связанное с их перестановкой $z\tilde{z} = \tilde{z}z$, или заменой z на $\tilde{z}$, или $\tilde{z}$ на z , например, используя тождество $\tilde{z} = l(zl^*)$ не разрешается в $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ в соответствии с нашим соглашением в §2.1, так как $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r) := C_{1z, 2z}^\omega(U^2, \mathcal{A}_r)|_{1z=z, 2z=\tilde{z}}$ и в $C_{1z, 2z}^\omega(U^2, \mathcal{A}_r)$ переменные $1z$ and $2z$ не коммутируют, $1z$ и $2z$ являются различными переменными, которые не связаны между собой. Поэтому, $\partial_z \xi.h = (\partial_z f.h)g + f(\partial_z g.h)$ и $\partial_{\tilde{z}} \xi.h = (\partial_{\tilde{z}} f.h)g + f(\partial_{\tilde{z}} g.h)$, следовательно, ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ корректно определены. В частности, семейство всех функций вида ряда $f = \sum \{l_t f \dots l_t f\}_{q(t)}$ сходящегося на U вместе со своим супердифференциалом на $Int(U)$, так что каждая $l_t f$ суперлинейно z -супердифференцируема на $Int(U)$ относительно супералгебры $\mathcal{A}_r$, плотно в $\mathbf{R}$ -линейном пространстве всех z -супердифференцируемых функций g на U , так как $(Dg(z)).h$ непрерывно по (z, h) . Мы можем использовать δ -приближение для любого $\delta > 0$ для $Dg(z).h$ на достаточно малом открытом подмножестве V в U , так что $z \in V$ функциями ζ_n полиномиальными в z и $\mathbf{R}$ -гомогенными $\mathcal{A}_r^n$ -аддитивными в h и разложением единицы в U по C_z^ω -функциям на, и тогда рассмотрим функции ξ_n с ξ_n' соответствующими ζ_n , так как $\epsilon(h)$ непрерывно в 0 для любого $z \in U$ и любого канонического замкнутого компактного подмножества W в U из каждого открытого покрытия мы можем выбрать конечное подпокрытие множества W .

Из условий 2.2.(2–7) следует, что условия z -супердифференцируемости определены единственным образом на пространстве полиномов. В силу условий 2.2.(1–7) z -супердифференцируемость полинома или сходящегося ряда P на U означает, что он выражается через сумму сходящегося ряда с членами состоящими из произведений $^j z$ и постоянных из $\mathcal{A}_r$. Поэтому, каждая z -супердифференцируемая функция f на U является классом эквивалентности всех последовательностей Коши из $C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ сходящихся к f относительно C^1 -равномерности, так как $(D*) . h : C^1 \rightarrow C^0$ непрерывно для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$.

Предположим, что f z -супердифференцируема в точке a . Каждой $f'(z)$ соответствует $\mathbf{R}$ -линейный оператор на Евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{2^n}$. Более того, мы имеем аксиомы дистрибутивности и ассоциативности для $(Df)(z; h)$ относительно правого умножения на элементы $\lambda \in \mathcal{A}_r$ (см. §2.1, 2.2). Тогда $f(a + h) - f(a) = \partial_a f(a).h + \epsilon(h)|h|$ и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a} = 0$, так как в общем случае

$f(a+h) - f(a) = (\partial_a f(a)) \cdot h + (\partial_{\bar{a}} f(a)) \cdot \bar{h} + \epsilon(h)|h|$, где $\epsilon(h)$ непрерывно по h и $\epsilon(0) = 0$. Обратно, если F является дифференцируемой по Фреше и $\partial_{\bar{z}} f(z)|_{z=a} = 0$, то выражая $w_s s$ для любого $s \in \mathbf{b}_r$ через линейные комбинации z (с умножением на постоянные из $\mathcal{A}_r$ слева и справа) с постоянными коэффициентами, мы получим f как выше.

Рассмотрим теперь частный случай, когда f' является право суперлинейной на супералгебре $\mathcal{A}_r^n$ и $\partial_{\bar{z}} f(z)|_{z=a} = 0$. В этом случае $f'(a)$ является $\mathcal{A}_r$ -линейной. Используя определение z -суперпроизводной и то, что существует биективное соответствие между z и $(({}^j w_s : s \in \mathbf{b}_r) : j = 1, \dots, n)$, ${}^j w_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}_r$, $j = 1, \dots, n$, мы рассмотрим функции $f = f(z)$ и $F(({}^j w_s : s \in \mathbf{b}_r) : j = 1, \dots, n) = f \circ \sigma$, где f является z -супердифференцируемой по z , следовательно, F является дифференцируемой по Фреше $(({}^j w_s : s \in \mathbf{b}_r) : j = 1, \dots, n)$ и мы получаем выражения:

$$\partial F / \partial {}^j w_s = (\partial F / \partial {}^j z) \cdot (\partial {}^j z / \partial {}^j w_s),$$

так как $\partial {}^j z / \partial {}^k w_s = 0$ и $\partial {}^j \bar{z} / \partial {}^k w_s = 0$ и $\partial f(z) / \partial {}^j \bar{z}|_{z=a} = 0$ для любого $k \neq j$. Из $\partial {}^j z / \partial {}^j w_s = s$ для любого $s \in \mathbf{b}_r$ мы получим уравнения (2), так как $ps = -sp$, $F_{ps} = -F_{sp}$ и $pp^* = 1$ для любого $p \neq s \in \hat{\mathbf{b}}$. Используя равенство $F = \sum_{s \in \mathbf{b}} F_s s$, мы получим уравнения (1) из последних уравнений, так как qf является право суперлинейно супердифференцируемой вместе с f для любого $q \in \mathbf{b}$, $((ps)p^*)^*((qs)q^*) \in \{-1, 1\} \subset \mathbf{R}$ для любых $p, q, s \in \mathbf{b}$.

Пусть теперь F является дифференцируемой по Фреше в точке a и пусть F удовлетворяет условиям (1). Тогда

$$f(z) - f(a) = \sum_{j=1}^n \sum_{s \in \mathbf{b}} (\partial F / \partial {}^j w_s) \Delta {}^j w_s + \epsilon(z-a)|z-a|,$$

где $\Delta({}^j w_s : s \in \mathbf{b}) = \sigma^{-1}({}^j z) - \sigma({}^j a)$ для любого $j = 1, \dots, n$. Из условий (2) эквивалентных (1), мы получим

$$\begin{aligned} f(z) - f(a) &= \sum_{j=1}^n \sum_{s \in \mathbf{b}} (\partial F / \partial {}^j w_1) s \Delta {}^j w_s + \epsilon(z-a)|z-a| = \\ &= \sum_{j=1}^n (\partial F / \partial {}^j w_1) \Delta {}^j z + \epsilon(z-a)|z-a|, \end{aligned}$$

где ϵ — это функция непрерывная в 0 и $\epsilon(0) = 0$. Поэтому, f является супердифференцируемой по z в a , так что $f'(a)$ является правосуперлинейной, так как $\partial F / \partial {}^j w_s$ — действительные матрицы и, следовательно, $f'(a) \cdot ({}_1 h \lambda_1 + {}_2 h \lambda_2) = (f'(a) {}_1 h) \lambda_1 + (f'(a) {}_2 h) \lambda_2$ для любых λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$ и любых ${}_1 h$ и ${}_2 h \in \mathcal{A}_r^n$.

Последнее утверждение этого предложения следует из определения 2.2.

2.3.1. Обозначения. Если $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ является либо z -супердифференцируемой, либо $\bar{z}$ -супердифференцируемой в точке $a \in U$ или на U , то мы можем также записать $D_{\bar{z}}$ вместо $\partial_{\bar{z}}$ и D_z вместо ∂_z в точке $a \in U$ или на U соответственно в ситуациях, когда это не может вызвать неопределенности, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$.

2.4. Следствие. Пусть f является непрерывно супердифференцируемой функцией по z с право суперлинейным супердифференциалом на супералгебре $\mathcal{A}_r^n$, $r \geq 3$, на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r^n$ и пусть F является дважды непрерывно дифференцируемой по $(({}^j w_s : s \in \mathbf{b}_r) : j = 1, \dots, n)$ на U , тогда каждая компонента F_s функции F является гармонической функцией по парам переменных $({}^j w_p, {}^j w_q)$ для любых $p \neq q \in \mathbf{b}_r$, а именно:

$$(1) \quad \Delta {}^j w_p, {}^j w_q F_s = 0,$$

для любых $j = 1, \dots, n$, где $\Delta_{jw_p, jw_q} F_s := \partial^2 F_s / \partial jw_p^2 + \partial^2 F_s / \partial jw_q^2$.

Доказательство. Из уравнений 2.3.(1) и в силу дважды непрерывной дифференцируемости F следует, что $(\partial^2 F_s / \partial jw_p^2) = (\partial^2 F_{(sp^*)q} / \partial jw_p \partial jw_q) = \partial^2 F_{(((sp^*)q)p^*)q} / \partial jw_q^2 = -(\partial^2 F_s / \partial jw_q^2)$, так как $F_{vs} = vF_s$ для любого $v \in \mathbf{R}$ и любого $s \in \mathbf{b}_r$, $p \neq q \in \mathbf{b}_r$ и, следовательно, $p^*q \in \hat{\mathbf{b}}_r$, $t^2 = -1$ для любого $t \in \hat{\mathbf{b}}_r$, $p^* = -p$ для любого $p \in \hat{\mathbf{b}}_r$, $pq = -qr$ для любого $p \neq q \in \hat{\mathbf{b}}_r$.

2.5. Замечание и определение. Пусть U является открытым подмножеством в $\mathcal{A}_r$ и пусть $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, является функцией определенной на U , так что

$$(i) \quad f(z, \tilde{z}) = \{f^1(z, \tilde{z}) \dots f^j(z, \tilde{z})\}_{q(j)},$$

где каждая функция $f^s(z, \tilde{z})$ представляется рядом Лорана

$$(ii) \quad f^s(z, \tilde{z}) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{m=m_0}^{\infty} (f_{n,m}^s(z - \zeta)^n)(\tilde{z} - \tilde{\zeta})^m$$

сходящимся на U , где $f_{n,m}^s \in \mathcal{A}_r$, $z \in U$, $\zeta \in \mathcal{A}_r$ является отмеченной точкой, n и $m \in \mathbf{Z}$, если $n_0 < 0$ или $m_0 < 0$, тогда $\zeta \notin U$. Рассмотрим случай $f_{-1,m}^s = 0$ для любых s и m . Случай с членами $f_{-1,m}^s \neq 0$ будет рассмотрен позже.

Пусть $[a, b]$ – это сегмент в $\mathbf{R}$ и $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ – непрерывная функция. Рассмотрим разбиение P отрезка $[a, b]$, то есть, P является конечным подмножеством в $[a, b]$, состоящим из возрастающей последовательности точек $a = c_0 < \dots < c_k < c_{k+1} < \dots < c_t = b$, тогда норма P определена так: $|P| := \max_k (x_{k+1} - x_k)$ и P -вариация γ как $v(\gamma; P) := \sum_{k=0}^{t-1} |\gamma(c_{k+1}) - \gamma(c_k)|$, где $t = t(P) \in \mathbf{N}$. Полная вариация (или длина) кривой γ определена как $V(\gamma) = \sup_P v(\gamma; P)$. Предположим, что γ спрямляема, то есть, $V(\gamma) < \infty$. Для f имеющей разложение (2.5.i, ii) с $f_{-1,m}^s = 0$ для любых s и m , и спрямляемого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ мы определим интеграл вдоль пути над (некоммутативной) алгеброй Кэли-Диксона. Рассмотрим более общий случай.

Пусть $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, где U открыто в $\mathcal{A}_r$, f определена непрерывной функцией $\xi : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$, так что

$$(1) \quad \xi(1z, 2z) \big|_{1z=z, 2z=\tilde{z}} = f(z, \tilde{z})$$

или коротко $f(z)$ вместо $f(z, \tilde{z})$, где $1z$ и $2z \in U$. Пусть также $g : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, которая является $1z$ -супердифференцируемой, так что

$$(2) \quad (\partial g(1z, 2z) / \partial 1z).1 = \xi(1z, 2z) \text{ on } U^2. \text{ Тогда положим}$$

(3) $\hat{f}(z, \tilde{z}).h := \hat{f}_z(z, \tilde{z}).h := [(\partial g(1z, 2z) / \partial 1z).h] \big|_{1z=z, 2z=\tilde{z}}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Коротко мы можем это записать в виде $(\partial g(z, \tilde{z}) / \partial z).1 = f(z, \tilde{z})$ и $\hat{f}_z(z, \tilde{z}).h := \hat{f}(z).h := (\partial g(z, \tilde{z}) / \partial z).h$. Если существует следующий предел

$$(4) \quad \int_{\gamma} f(z, \tilde{z}) dz := \lim_P I(f, \gamma; P), \text{ где}$$

$$(5) \quad I(f, \gamma; P) := \sum_{k=0}^{t-1} \hat{f}(z_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}).(\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$, $z_k := \gamma(c_k)$ для любого $k = 0, \dots, t$, тогда мы скажем, что f является интегрируемой вдоль пути γ по переменной z . Аналогично мы определим $\int_{\gamma} f(z, \tilde{z}) d\tilde{z}$ с $(\partial g(z, \tilde{z}) / \partial \tilde{z}).1 = f(z, \tilde{z})$, $\hat{f}_{\tilde{z}}(z, \tilde{z}).h := (\partial g(z, \tilde{z}) / \partial \tilde{z}).h$, где $g(1z, 2z)$ является $2z$ -супердифференцируемой.

Замечание. В силу определений 2.1, 2.2 и предложения 2.3 условия 2.5.(1 – 3) корректны, например, достаточно взять функции ξ и g в $(1z, 2z)$ -представлении.

Это определение оправдано следующей леммой и предложением.

2.5.1. Лемма. Пусть $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ удовлетворяет условиям 2.2.(1, 2, 5), где U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$. Тогда условия

(1) $\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ и $z \in U$,
где $z_{2j,2j+1} := w_s + w_p s^* p$ with $s = i_{2j}$, $p = i_{2j+1}$, эквивалентны с $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$ для любого $z \in U$.

Доказательство. Поскольку $(z + h)^* - z^* = h^*$, $((\lambda h)^*)^* = \lambda h$ для любого z и $h \in \mathcal{A}_r^n$ и любого $\lambda \in \mathcal{A}_r$, $(h_1 + h_p p)^* = h_1 - h_p p$ для любого $p \in \hat{b}$, $(s(h_s + h_p s^* p))^* = (h_s - h_p s^* p)s^*$ для любого $s \neq p \in \hat{b}$, $(\partial z/\partial z).h = h$, $(\partial \bar{z}/\partial \bar{z}).h = \tilde{h}$, $\partial z/\partial \bar{z} = 0$ и $\partial \bar{z}/\partial z = 0$, где $h_p \in \mathbf{R}$ для любого $p \in \mathbf{b}$, следовательно,

$(\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).h = (\partial f(z)/\partial \bar{z}).(sh)|_{h \in \mathbf{R} \oplus s^* p \mathbf{R}}$ и

$(\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).h = (\partial f(z)/\partial \bar{z}).(sh)|_{h \in \mathbf{R} \oplus s^* p \mathbf{R}}$, где $s = i_{2j}$ и $p = i_{2j+1}$, тогда

$\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$, $\partial \bar{z}/\partial z_{2j,2j+1} = 0$ и

$(\partial \bar{z}_{2j,2j+1}/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).h = h$, $(\partial z_{2j,2j+1}/\partial z_{2j,2j+1}).h = h$ для любого $h \in \mathbf{R} \oplus s^* p \mathbf{R}$. В силу предложения 2.2.1 из $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$ на U и условий 2.2.(1, 2, 5) следует, что для любого j :

$\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = (\partial f(z)/\partial \bar{z}).(\partial \bar{z}/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}) + (\partial f(z)/\partial z).(\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}) = 0$,

так как $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$ и $\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$. В общем для f ее производная $f'(z)$ не обязательно является право (или лево) суперлинейной на $\mathcal{A}_r$. Тогда $\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}$ являются $\mathbf{R}$ -однородными аддитивными операторами на $\mathbf{R}$ -линейном подпространстве $(\mathbf{R} \oplus s^* p \mathbf{R})$ в $\mathcal{A}_r$.

Пусть f удовлетворяет 2.2.(1, 2, 5) и (1), тогда

$$(Df(z)).h = \sum_{s \in \mathbf{b}} (Df(z)).h_s s = \sum_{s \in \mathbf{b}} (\partial f(z)/\partial w_s) h_s,$$

так как $\partial z/\partial w_s = s$ для любого $s \in \mathbf{b}$, где $h = \sum_{s \in \mathbf{b}} h_s s \in \mathcal{A}_r$, $h_s \in \mathbf{R} \forall s \in \mathbf{b}$. Из

$$(\partial f(z)/\partial w_s) h_s + (\partial f(z)/\partial w_p) h_p = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1}).(h_s + s^* p h_p)$$

для любых $s = i_{2p}$ и $p = i_{2j+1}$, так как

$$(\partial f(z)/\partial w_s) = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1}).1 + (\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).1,$$

$$(\partial f(z)/\partial w_p) = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1} - \partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).(s^* p)$$

и $\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$, следует, что $(Df(z)).h = (\partial f(z)/\partial z).h$, так как в силу предложения 2.2.1 и условий (1)

$$(\partial f(z)/\partial \bar{z}).(h_s s + h_p p) = (\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).(h_s + h_p s^* p) = 0 \text{ для любого } j$$

и $(\partial f(z)/\partial \bar{z}).h = \sum_{j=0}^{2^{r-1}-1} (\partial f(z)/\partial \bar{z}).(i_{2j}(h_{2j} + h_{2j+1} i_{2j}^* i_{2j+1}))$, так как $h_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$.

2.6. Предложение. Пусть f является функцией как в §2.5 и предположим, что имеются две постоянные r и R такие, что ряд Лорана (2.5.i, ii) сходится на множестве $B(a, r, R, \mathcal{A}_m) := \{z \in \mathcal{A}_m : r \leq |z - a| \leq R\}$ для любого $s = 1, \dots, j$, пусть также γ является спрямляемым путем содержащимся в $U \cap B(a, r', R', \mathbf{H})$, где $r < r' < R' < R$, $m \geq 3$. Тогда существует интеграл вдоль пути над алгеброй Кэли-Диксона.

Доказательство. Сначала отметим, что $\mathcal{A}_m$ является нормированной алгеброй, так что $|\xi\eta| \leq |\xi||\eta|$ для любого ξ и $\eta \in \mathcal{A}_m$. Это можно доказать по индукции начиная с $\mathbf{C}$ и используя процедуру удвоения. Предположим, что $m \geq 2$ и $\mathcal{A}_{m-1}$ является нормированной алгеброй, тогда $|(a, b)(c, d)| = (|ac - d^*b|^2 + |da + bc^*|^2)^{1/2} \leq (|ac|^2 + |d^*b|^2 + |da|^2 + |bc^*|^2)^{1/2} \leq (|a|^2 + |b|^2)^{1/2}(|c|^2 + |d|^2)^{1/2} = |(a, b)||c, d|$, где $a, b, c, d \in \mathcal{A}_{m-1}$, (a, b) и $(c, d) \in \mathcal{A}_m$. Поскольку каждая f^s сходится в $B(a, r, R, \mathcal{A}_m)$,

то

$$\overline{\lim}_{n+m>0} |f_{n,m}^s|^{1/(n+m)} R \leq 1, \text{ следовательно,}$$

$$\|f\|_\omega := \prod_{s=1}^j \left(\sup_{n+m<0} |f_{n,m}^s| r^{n+m}, \sup_{n+m \geq 0} |f_{n,m}^s| R^{n+m} \right) < \infty$$

и неизбежно

$$\|f\|_{1,\omega,B(a,r',R',\mathcal{A}_m)} := \prod_{s=1}^j \left[\left(\sum_{n+m<0} |f_{n,m}^s| r'^{n+m} \right) + \left(\sum_{n+m>0} |f_{n,m}^s| R'^{n+m} \right) \right] < \infty.$$

Для любой локально z -аналитической функции f на U и любого z_0 в U существует шар радиуса $r > 0$ с центром z_0 , так что f имеет разложение аналогичное (2.5.i, ii) в этом шаре со всеми n неотрицательными. Рассмотрим две z -локально аналитические функции f и q на U , так что f и q не коммутируют. Пусть $f^0 := f$, $q^0 := q$, $q^{-n} := q^{(n)}$, $(\partial(q^n)/\partial z).1 =: q^{n-1}$ и $q^{-k-1} = 0$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$, тогда

(i) $(fq)^1 = f^1q - f^2q^{-1} + f^3q^{-2} + \dots + (-1)^k f^{k+1}q^{-k}$. В частности, если $f = az^n$, $q = bz^k$, с $n > 0$, $k > 0$, $b \in \mathcal{A}_m \setminus \mathbf{RI}$, тогда $f^p = [(n+1)\dots(n+p)]^{-1} az^{n+p}$ для любого $p \in \mathbf{N}$, $q^{-s} = k(k-1)\dots(k-s+1)bz^{k-s}$ для любого $s \in \mathbf{N}$. Также

(ii) $(fq)^1 = f^1q - f^{-1}q^2 + f^{-2}q^3 + \dots + (-1)^n f^{-n}q^{n+1}$, когда $f^{-n-1} = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Применим (i) для $n \geq m$ и (ii) для $n < k$ для решения уравнения $(\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1 = f(z, \tilde{z})$ для любого $z \in U$. Если f и q имеют ряды сходящиеся в $\text{Int}(B(z_0, r, \mathcal{A}_m))$, то эти формулы показывают, что существует z -аналитическая функция $(fq)^1$ с рядом сходящимся в $\text{Int}(B(0, r, \mathcal{A}_m))$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (nr^n)^{1/n} = r$, где $0 < r < \infty$. Применяя эту формулу по индукции к произведениям полиномов $\{P_1 \dots p_n\}_{q(n)}$ и сходящимся рядам, мы получим g . Поскольку f является локально аналитической, то g также локально аналитична. Поэтому, для любой локально z -аналитической функции f существует оператор $\hat{f}$. Рассмотрение функции G действительной переменной соответствующей g дает в силу леммы 2.5.1, что все решения g отличаются на постоянные в $\mathcal{A}_m$, так как $\partial g/\partial w_s + (\partial g/\partial w_p).(s^*p) = 0$ для любых $s = i_{2j}$, $p = i_{2j+1}$, $j = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ и $\partial g/\partial w_1$ единственна, следовательно, $\hat{f}$ единственно для f . Поэтому,

$$(1) \quad |\{f_{n,m}^s(z_{j+1} - a)^k (\Delta z_j)(z_{j+1} - a)^{n-k} (\tilde{z}_{j+1} - \tilde{a})^m\}_{q(n+m+1)}| \leq$$

$$|f_{n,m}^s| |(z_{j+1} - a)^n (\tilde{z}_{j+1} - \tilde{a})^m| |\Delta z_j|.$$

Из уравнения (1) следует, что $|I(f, \gamma; P)| \leq \|f\|_{1,\omega,B(a,r',R',\mathbf{H})} v(\gamma; P)$, для любого P , и неизбежно

$$(2) \quad |I(f, \gamma; P) - I(f, \gamma; Q)| \leq w(\hat{f}; P) V(\gamma)$$

для любого $Q \supset P$, где

$$(3) \quad w(\hat{f}; P) := \max_{(z, \zeta \in \gamma([c_j, c_{j+1}]))} \{\|\hat{f}(z) - \hat{f}(\zeta)\| : z_j = \gamma(c_j), c_j \in P\},$$

$\|\hat{f}(z) - \hat{f}(\zeta)\| := \sup_{h \neq 0} |\hat{f}(z).h - \hat{f}(\zeta).h|/|h|$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (n)^{1/n} = 1$, то $\lim_P \omega(\hat{f}, P) = 0$. Из $\lim_P w(\hat{f}; P) = 0$ следует существование $\lim_P I(f, \gamma; P)$.

2.7. Теорема. Пусть γ – это спрямляемый путь в U , тогда для алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, интеграл вдоль пути имеет непрерывное продолжение на пространство $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$ ограниченных непрерывных функций $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$. Этот

интеграл является $\mathbf{R}$ -линейным и лево- $\mathcal{A}_r$ -линейным и право- $\mathcal{A}_r$ -линейным функционалом на $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$.

Доказательство. Поскольку γ непрерывна на компактном сегменте $[a, b]$, то существует компактное каноническое замкнутое подмножество V в $\mathcal{A}_r$, то есть, $cl(Int(V)) = V$, так что $\gamma([a, b]) \subset V \subset U$. Пусть $f \in C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$, тогда в силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса для функции $F(w_s : s \in \mathbf{b}) = f \circ \sigma(w_s : s \in \mathbf{b})$ и любого $\delta > 0$ существует полином T такой, что $\|F - T\|_0 < \delta$, где $\|f\|_0 := \sup_{z \in U} |f(z)|$. Этот полином принимает значения в $\mathcal{A}_r$, следовательно, он имеет вид: $T = \sum_{s \in \mathbf{b}} T_s s$, где $T_s : U \rightarrow \mathbf{R}$. Имеются соотношения $zp = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s sp$, $sp = -ps$ для любого $s \neq p \in \hat{b}$, следовательно, $zp = -w_p + \sum_{s \in \mathbf{b}; s \neq p} w_s sp$, $(zp)^* = p^* z^* = -w_p + \sum_{s \in \mathbf{b}; s \neq p} w_s (sp)^* = -w_p - \sum_{s \in \mathbf{b}; s \neq p} w_s sp$, так как $p^* = -p$ для любого $p \in \hat{b}$. Тогда $w_1 = (z + \tilde{z})/2$ и $w_p = (p\tilde{z} - zp)/2$ для любого $p \in \hat{b}$, где используется тождество $\tilde{z} = (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{b}} s(zs^*)\}$ (см. §2.1). Запишем $F = \sum_{s \in \mathbf{b}} F_s s$, где $F_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$, тогда применение теоремы Стоуна-Вейерштрасса по действительным переменным $(w_s : s \in \mathbf{b})$ выраженным через z и $s \in \mathbf{b}$ с действительными постоянными множителями дает, что $\mathbf{R}$ -линейное пространство функций даваемых уравнениями (2.5.i, ii) плотно в $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$.

Рассмотрим функцию $g(z)$ на U . Пусть $g(z)$ супердифференцируема по z . Рассмотрим пространство всех таких g на U , для которых $(Dg(z)).s$ – это ограниченная непрерывная функция на U для любого $s \in \mathbf{b}$, оно обозначается через $C_b^1(U, \mathcal{A}_r)$ и оно снабжено нормой $\|g\|_{C_b^1} := \|g\|_{C_b^0} + \sum_{s \in \mathbf{b}} \|(Dg(z)).s\|_{C_b^0}$, где $\|g\|_{C_b^0} := \sup_{z \in U} |g(z)|$, следовательно, $(Dg(z)).h \in C_b^0(U \times B(0, 0, 1, \mathcal{A}_r), \mathcal{A}_r)$, где $h \in B(0, 0, 1, \mathcal{A}_r)$. Поэтому, существует положительная постоянная C , так что

$$(1) \quad \sup_{h \neq 0} |(Dg(z)).h|/|h| \leq C \sum_{s \in \mathbf{b}} \|(Dg(z)).s\|_{C_b^0},$$

так как $h = \sum_{s \in \mathbf{b}} h_s s$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$ и $Dg(z)$ является $\mathbf{R}$ -линейной и $(Dg(z)).(^1h + ^2h) = (Dg(z)).^1h + (Dg(z)).^2h$ для любых ^1h и $^2h \in \mathcal{A}_r$, где h_s – действительное число для любого $s \in \mathbf{b}$, $G(w_s : s \in \mathbf{b}) := g \circ \sigma(w_s : s \in \mathbf{b})$ является дифференцируемой по Фреше на открытом подмножестве $U_\sigma \subset \mathbf{R}^{2^r}$, так что $\sigma(U_\sigma) = U$.

В §2.6 было показано, что уравнение $(\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1 = f(z, \tilde{z})$ имеет решение в классе локально z -аналитических функций на U . Подмножество $C^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ плотно в равномерном пространстве $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$.

Если $g = \{g^1 \dots g^j\}_{q(j)}$ является произведением функций $g^s \in C_b^1(U, \mathcal{A}_r)$, тогда $(Dg(z)).h = \sum_{v=1}^j \{g^1(z) \dots g^{v-1}(z) [(Dg^v(z)).h] g^{v+1}(z) \dots g^j(z)\}_{q(j)}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Рассмотрим пространство $\hat{C}_b^0(U, \mathcal{A}_r) := \{(Dg(z)).s : s \in \mathbf{b}\}$. Оно имеет вложение ξ в $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$ и $\|g\|_{C_b^1} \geq \sum_{s \in \mathbf{b}} \|(Dg(z)).s\|_{C_b^0}$. В силу неравенства (1) пополнение $\hat{C}_b^0(U, \mathcal{A}_r)$ относительно $\|\cdot\|_{C_b^0(U, \mathcal{A}_r)}$ совпадает с $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$.

Пусть $\{f^v : v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность функций имеющих разложение (2.5.i, ii) и сходящаяся к f в $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$ относительно метрики $\rho(f, q) := \sup_{z \in U} |f(z) - q(z)|$, так что $f^v = \xi((Dg^v(z)).s : s \in \mathbf{b})$ для некоторого $g^v \in C_b^1(U, \mathcal{A}_r)$. Относительно этой метрики $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$ полно. Мы имеем равенство

$$\partial \left(\int_0^q F(\phi h_s : s \in \mathbf{b}) \right) / \partial q = F(w_s : s \in \mathbf{b})$$

для любой непрерывной функции F на U_σ , где $w_s = w_{0,s} + qh_s$ для любого $s \in \mathbf{b}$, $(w_{0,s} : s \in \mathbf{b}) + \phi(h_s : s \in \mathbf{b}) \in U_\sigma$ для любого $\phi \in \mathbf{R}$ с $0 \leq \phi < q + \epsilon$, $0 < \epsilon < \infty$, $h_s \in \mathbf{R}$

для любого $s \in \mathbf{b}$. Пусть z_0 – это отмеченная точка в V . Существует $R > 0$, так что γ содержится во внутренности параллелепипеда $V := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s; |w_s - w_{0,s}| \leq R \text{ для любого } s \in \mathbf{b}\}$.

Если V не содержится в U , то рассмотрим непрерывное продолжение функции F с $V \cap U_0$ на V , где U_0 – это замкнутое подмножество в U , так что $\text{Int}(U_0) \supset \gamma$ (о теореме о непрерывном продолжении см. [9]). Поэтому, предположим, что F дана на V . Тогда функция $F_1(w_s : s \in \mathbf{b}) := \int_{w_{0,1}}^{w_1} \dots \int_{w_{0,t}}^{w_t} F(w_s : s \in \mathbf{b}) dw_1 \dots dw_t$ принадлежит $C^1(V, \mathcal{A}_r)$ (с односторонними производными на ∂V изнутри V), где $t := i_{2^r-1}$. Рассмотрим фолиацию (foliation) V посредством $(2^r - 1)$ -мерными C^0 -многообразия Υ_z , так что $\Upsilon_z \cap \Upsilon_{z_1} = \emptyset$ для любого $z \neq z_1$, где $z, z_1 \in \gamma$, $\bigcup_{z \in \gamma} \Upsilon_z = V_1$, V_1 является каноническим замкнутым подмножеством в $\mathcal{A}_r$, так что $\gamma \subset V_1 \subset V$. Рассмотрим эту фолиацию, так чтобы получить разложение меры Лебега dV в произведение мер $d\nu(z)$ вдоль γ и $d\Upsilon_z$ для любого $z \in \gamma$. В силу теоремы Фубини существует $\int_V f(w_s : s \in \mathbf{b}) dV = \int_\gamma (\int_{\Upsilon_z} f(z) d\Upsilon_z) d\nu(z)$. Если γ является отрезком прямой, тогда $\int_\gamma f(z) dz$ принадлежит $L^1(\Upsilon, \mathcal{A}_r)$. Пусть $U_{\mathbf{R}}$ – это действительная область в $\mathbf{R}^{2^r}$ соответствующая U в $\mathcal{A}_r$.

Рассмотрим пространство Соболева $W_2^q(U_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^{2^r})$ функций $h : U_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}^{2^r}$, для которых $D^\alpha h \in L^2(U_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^{2^r})$ для любого $|\alpha| \leq q$, где $0 \leq q \in \mathbf{Z}$. В силу теоремы 18.1.24 [14] (см. также обозначения там), если $A \in \Psi^m$ является псевдодифференциальным эллиптическим оператором порядка m с соответствующим носителем с главным символом $a \in S^m(T^*(X))/S^{m-1}(T^*(X))$ имеющим обратный в $S^{-m}(T^*(X))/S^{-m-1}(T^*(X))$, тогда можно найти $B \in \Psi^{-m}$ с соответствующим носителем, так что $BA - I \in \Psi^{-\infty}$, $AB - I \in \Psi^{-\infty}$. Тогда B называется параметриксой (parametrix) для A . В силу предложения 18.1.21 [14] каждое $A \in \Psi^m$ может быть записано в виде суммы $A = A_1 + A_0$, где $A_1 \in \Psi^m$ – это ядро A_0 с соответствующим носителем и принадлежащее C^∞ . В частности, мы можем взять псевдодифференциальный оператор с главным символом $a(x, \xi) = (b + |\xi|^2)^{s/2}$, где $b > 0$ – это постоянная и $s \in \mathbf{Z}$, что соответствует $b + \Delta$ для $s = 1$ с точностью до младших членов, где $\Delta = \nabla^2$ – это Лапласиан (см. также теорему 3.2.13 [10] о его семействе параметрикс). Для оценки решения может быть применена также теорема 3.3.2 и следствие 3.3.3 [10] относящееся к параболическим псевдодифференциальным уравнениям для нашего частного случая соответствующего $(\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1 = f$ переписанного в действительных переменных.

В силу теоремы Соболева (см. [32, 33]) существует вложение пространства Соболева $W_2^{2^{r-1}+1}(V, \mathcal{A}_r)$ в $C^0(V, \mathcal{A}_r)$, так что

(2) $\|g\|_{C^0} \leq C \|g\|_{W_2^{2^{r-1}+1}}$ для любого $g \in W_2^{2^{r-1}+1}$, где C – положительная постоянная независимая от g . Если $h \in W_2^{k+1}(V, \mathcal{A}_r)$, тогда $\partial h / \partial w_s \in W_2^k(V, \mathcal{A}_r)$ для любого $k \in \mathbf{N}$ и, в частности, для $k = 2^{r-1} + 1$ и любого $s \in \mathbf{b}$ (см. [32]). С другой стороны, $\|h\|_{L^2(V, \mathcal{A}_r)} \leq \|h\|_{C^0(V, \mathcal{A}_r)} (2R)^{2^{r-1}}$ для любого $h \in L^2(V, \mathcal{A}_r)$. Поэтому,

(3) $\|A^{-k}h\|_{W_2^k(V, \mathcal{A}_r)} \leq C \|h\|_{C^0(V, \mathcal{A}_r)} (2R)^{k+2^{r-1}}$ для любого $k \in \mathbf{N}$, где $C = \text{const} > 0$, A – это эллиптический псевдодифференциальный оператор, так что A^2 соответствует $(1 + \Delta)$. Для оценки снизу используется лемма Гронуолла (смотри, например, параграф 3.3.1 [3]), которая заключается в следующем. Пусть $\phi(t)$ и $\psi(t)$ – это ограниченные измеримые функции, а $\eta(t)$ – непрерывная неотрицательная функция, так что

$$\phi(t) \leq X + \psi(t) + \int_0^t \eta(\tau) \phi(\tau) d\tau. \text{ Тогда}$$

$$\phi(t) \leq X \exp\left[\int_0^t \eta(\tau) d\tau\right] + \psi(t) + \int_0^t \exp\left[\int_\tau^t \eta(v) dv\right] \psi(\tau) \eta(\tau) d\tau.$$

Воспользуемся этой леммой для $\phi(t) := |\int_{z \in \{\gamma(v): a \leq v \leq t\}} (f(z) - q(z)) dz|$, $X := C_1 \rho(f, q) V(\gamma)$, $\psi(t) = 0$, $\eta(t) = C'_2 R^{2^r+1}$, где $C_1 > 0$ и $C'_2 > 0$ являются подходящими

постоянными независимыми от f, q и γ , так как $\|(\hat{f} - \hat{q})(z)\| \leq \rho(f, q) + \|Im \circ (\hat{f} - \hat{q})(z)\|$ and $\|Im \circ (\hat{f} - \hat{q})(z)\| \leq \|\hat{f} - \hat{q}(z)\|$ и $\hat{f}(z).1 = f$ для любого $z \in \gamma([a, b])$,
 $|(\hat{f} - \hat{q})(\gamma(x_{k+1})) \cdot (\gamma(x_{k+1}) - \gamma(x_k))| \leq \|(\hat{f} - \hat{q})(\gamma(x_{k+1}))\| |\gamma(x_{k+1}) - \gamma(x_k)|$
 для любого разбиения $P: a = x_0 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_w = b$, где $Im(z) := (z - l(zl^*))/2$. Из уравнений 2.5.(1, 2) и неравенств (1 – 3) следует, что существует $0 < \epsilon < \infty$, так что

$$(4) \quad |I(f - q, \gamma; P)| \leq \rho(f, q)V(\gamma)C_1 \exp(C_2 R^{2^r+2})$$

для любого разбиения P нормы $|P|$ меньшей, чем ϵ , где C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от R, f и q . В силу формул 2.6.(1, 2) $\{\int_\gamma f^v(z)dz : v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность Коши в $\mathcal{A}_r$, а последнее пространство полно как метрическое пространство. Поэтому, существует $\lim_v \lim_P I(f^v, \gamma; P) = \lim_v \int_\gamma f^v(z)dz$, который обозначается через $\int_\gamma f(z)dz$. Как и в §2.6 мы получим, что все решения g отличаются на кватернионные постоянные на каждой связной компоненте в U , следовательно, функционал $\int_\gamma$ определен единственным образом на $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$. Функционал $\int_\gamma : C_b^0(U, \mathcal{A}_r) \rightarrow \mathcal{A}_r$ непрерывен в силу формулы (4) и очевидно является $\mathbf{R}$ -линейным, так как $\lambda z = z\lambda$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и любого $z \in \mathcal{A}_r$, то есть, $\int_\gamma (\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))dz = \int_\gamma (f_1(z)\lambda_1 + f_2(z)\lambda_2)dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1(z)dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2(z)dz$ для любых λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbf{R}$, f_1 и $f_2 \in C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$. Более того, он лево- $\mathcal{A}_r$ -линеен, то есть, $\int_\gamma (\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1(z)dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2(z)dz$ для любых λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$, f_1 и $f_2 \in C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$, так как $I(f, \gamma; P)$ является лево- $\mathcal{A}_r$ -линейным. Если $g_k \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, тогда $g_k \lambda \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$ для любого $\lambda \in \mathcal{A}_r$, а $(Dg_k(z)\lambda).h = (Dg_k(z).h)\lambda$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как $D\lambda = 0$, в частности, для g_k такого, что $(\partial g_k(z, \tilde{z})/\partial z).1 = f_k(z)$ и удовлетворяющего 2.5.1.(1) согласно лемме 2.5.1 на U , $k = 1, 2$, так как $g(\cdot, z)$ является $\cdot$ -супердифференцируемой. Поэтому, $\int_\gamma (f_1(z)\lambda_1 + f_2(z)\lambda_2)dz = (\int_\gamma f_1(z)dz)\lambda_1 + (\int_\gamma f_2(z)dz)\lambda_2$ для любых констант λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$, следовательно, $(\hat{f}_k(z).h)\lambda = (f_k(z)\lambda).\hat{h}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Но это конечно не означает, что $(\int_\gamma f(z)dz)\lambda$ и $\lambda(\int_\gamma f(z)dz)$ равны.

2.8. Замечание. Пусть η – это дифференциальная форма на открытом подмножестве U Евклидова пространства $\mathbf{R}^{2^r m}$ со значениями в $\mathcal{A}_r$, тогда она может быть записана в виде

$$(1) \quad \eta = \sum_{\Upsilon} \eta_{\Upsilon} db^{\wedge \Upsilon},$$

где $b = ({}^1b, \dots, {}^mb) \in \mathbf{R}^{2^r m}$, ${}^jb = ({}^jb_1, \dots, {}^jb_{2^r})$, ${}^jb_k \in \mathbf{R}$, $\eta_{\Upsilon} = \eta_{\Upsilon}(b) : \mathbf{R}^{2^r m} \rightarrow \mathcal{A}_r$ являются s раз непрерывно дифференцируемыми $\mathcal{A}_r$ -значными функциями с $s \in \mathbf{N}$, $\Upsilon = (\Upsilon(1), \dots, \Upsilon(m))$, $\Upsilon(j) = (\Upsilon(j, 1), \dots, \Upsilon(j, 2^r)) \in \mathbf{N}^{2^r}$ для любого j , $db^{\wedge \Upsilon} = d{}^1b^{\wedge \Upsilon(1)} \wedge \dots \wedge d{}^mb^{\wedge \Upsilon(m)}$, $d{}^jb^{\wedge \Upsilon(j)} = d{}^jb_1^{\Upsilon(j,1)} \wedge \dots \wedge d{}^jb_{2^r}^{\Upsilon(j,2^r)}$, где $d{}^jb_k^0 := 1$, $d{}^jb_k^1 = d{}^jb_k$, $d{}^jb_k^v = 0$ для любого $v > 1$. Если $s \geq 1$, тогда определён (внешний) дифференциал

$$d\eta = \sum_{\Upsilon, (j,k)} (\partial \eta_{\Upsilon} / \partial {}^jb_k) (-1)^{\alpha(j,k)} db^{\wedge (\Upsilon + e(j,k))},$$

где $e(j, k) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с 1 на $2^r(j-1) + k$ -м месте, $\alpha(j, k) = (\sum_{p=1}^{j-1} \sum_{v=1}^{2^r} \Upsilon(p, v)) + \sum_{v=1}^{k-1} \Upsilon(j, v)$. Теперь воспользуемся соотношениями

(2) ${}^jb_1 = ({}^jz + (2^r - 2)^{-1} \{-{}^jz + \sum_{s \in \hat{b}} s({}^jzs^*)\})/2$ и
 ${}^jb_p = (i_p(2^r - 2)^{-1} \{-{}^jz + \sum_{s \in \hat{b}} s({}^jzs^*)\} - {}^jzi_p)/2$ для любого $i_p \in \hat{b}$. Тогда η может быть выражена по переменным z . Рассмотрим базисные элементы $S = ({}^1S, \dots, {}^mS)$ и их упорядоченное произведение $S^{\rightarrow \Upsilon} := (\dots ({}^1S^{\rightarrow \Upsilon(1)} {}^2S^{\rightarrow \Upsilon(2)} \dots) {}^mS^{\rightarrow \Upsilon(m)}$, где ${}^jS =$

$({}^j S_1, \dots, {}^j S_{2^r}) = (1, i_1, i_2, \dots, i_{2^r-1})$, ${}^j S^{\Upsilon(j)} = (\dots (i_1^{\Upsilon(j,2)} i_2^{\Upsilon(j,3)}) \dots) i_{2^p-1}^{\Upsilon(j,2^r)}$, $S^0 = 1$. Тогда уравнение (1) может быть записано в виде:

$$(3) \quad \eta = \sum_{\Upsilon} \xi_{\Upsilon} d(Sb)^{\wedge \Upsilon},$$

где $Sb = ({}^1 S_1 {}^1 b_1, \dots, {}^1 S_{2^r} {}^1 b_{2^r}, \dots, {}^m S_1 {}^m b_1, \dots, {}^m S_{2^r} {}^m b_{2^r}) \in \mathcal{A}_r^{2^r m}$,
 $d {}^j S_k {}^j b_k = {}^j S_k d {}^j b_k$,
 $d(Sb)^{\wedge \Upsilon} := (\dots ((d {}^1 S {}^1 b)^{\wedge \Upsilon(1)} \wedge (d {}^2 S {}^2 b)^{\wedge \Upsilon(2)} \wedge \dots) \wedge (d {}^m S {}^m b)^{\wedge \Upsilon(m)})$,
 $(d {}^v S {}^v b)^{\wedge \Upsilon(v)} := (\dots ((d {}^v S_1 {}^v b_1)^{\Upsilon(v,1)} \wedge (d {}^v S_2 {}^v b_2)^{\Upsilon(v,2)} \wedge \dots) \wedge (d {}^v S_{2^r} {}^v b_{2^r})^{\Upsilon(v,2^r)})$,
 $\xi_{\Upsilon} := \eta_{\Upsilon}(S^{\rightarrow \Upsilon})^*$. Относительно внешнего произведения $d {}^j b_1$ антикоммутируют с другими базисными дифференциальными 1-формами ${}^j S_k d {}^j b_k$; для $k = 2, \dots, 2^r$ эти 1-формы коммутируют друг с другом относительно внешнего произведения. Это означает, что алгебра дифференциальных форм над алгеброй Кэли-Диксона градуирована относительно внешнего произведения.

Из уравнения (2) следует, что

$$(4) \quad db_1 = (dz + d(2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{b}} s(zs^*)\})/2,$$

$db_p = (di_p(2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{b}} s(zs^*)\} - dz i_p)/2$ для любого $i_p \in \hat{b}$. Поэтому, правая часть уравнения (3) может быть переписана с $d {}^j z i_p$, $di_p((s {}^j z)s^*)$ с правой стороны, где $i_p \in \{1, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$, $s \in \hat{b}$. Здесь также можно воспользоваться $di_p {}^j \tilde{z}$ и $d((2^r - 2)^{-1} \{- {}^j \tilde{z} + \sum_{s \in \hat{b}} s({}^j \tilde{z}s^*)\})i_p$ в зависимости от рассматриваемого представления либо z , либо $\tilde{z}$, либо $(z, \tilde{z})$ функций и дифференциальных форм. Эти 1-формы не являются ни коммутирующими, ни антикоммутирующими, так как они не являются чистыми элементами градуированной алгебры. Например,
 $d {}^j z \wedge d {}^j z = 2 \sum_{1 \leq v < k \leq 2^r-1} i_v i_k d {}^j b_{v+1} \wedge d {}^j b_{k+1}$;
 $(d {}^j z)^{\wedge p} = p! \sum_{1 \leq v(1) < \dots < v(p) \leq 2^r-1} (\dots (i_{v(1)} i_{v(2)}) \dots) i_{v(p)} d {}^j b_{v(1)+1} \wedge \dots \wedge d {}^j b_{v(p)+1}$ для любого $3 \leq p \leq 2^r$. С другой стороны уравнение (1) может быть переписано с использованием тождеств (2). Это показывает, что оператор внешнего дифференцирования $\mathcal{A}_r d$ для $\mathcal{A}_r$ -значных дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$ и оператор внешнего дифференцирования на дифференциальных формах в их действительной реализации ${}_R d$ совпадают и их общий оператор обозначается d . Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} (\partial \eta_{\Upsilon} / \partial {}^j b^l) {}^j b^l \wedge db^{\Upsilon} &= [(\partial \eta_{\Upsilon} / \partial {}^j z) \cdot (\partial {}^j z / \partial {}^j b^l)] {}^j b^l \wedge db^{\Upsilon} \\ &+ [(\partial \eta_{\Upsilon} / \partial {}^j \tilde{z}) \cdot (\partial {}^j \tilde{z} / \partial {}^j b^l)] {}^j b^l \wedge db^{\Upsilon}. \end{aligned}$$

Применяя его к $l = 1, \dots, 2^r$ и суммируя левые и правые части этих равенств мы получим $d\eta(z, \tilde{z}) = ((\partial \eta / \partial z) \cdot d {}^j z) \wedge db^{\Upsilon} + ((\partial \eta / \partial \tilde{z}) \cdot d {}^j \tilde{z}) \wedge db^{\Upsilon}$, следовательно, внешнее дифференцирование может быть представлено в виде

$$(5) \quad d = \partial_z + \partial_{\tilde{z}},$$

где ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ являются внешними дифференцированиями по переменным z и $\tilde{z}$ соответственно.

Конечно, для внешнего произведения $\eta_1 \wedge \eta_2$ не существует (в общем случае) $\lambda \in \mathcal{A}_r$ такого, что $\lambda \eta_2 \wedge \eta_1 = \eta_1 \wedge \eta_2$, если η_1 и η_2 не являются чистыми элементами (четными или нечетными) градуированной алгебры дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$.

2.9. Определение. Хаусдорфово топологическое пространство X называется n -связным для $n \geq 0$, если каждое непрерывное отображение $f : S^k \rightarrow X$ из k -мерной

действительной сферы в X имеет непрерывное продолжение на $\mathbf{R}^{k+1}$ для любого $k \leq n$. 1-связное пространство также называется просто связным.

2.10. Замечание. В соответствии с теоремой 1.6.7 [31] пространство X является n -связным тогда и только тогда, когда оно линейно связно и $\pi_k(X, x)$ тривиально для любой базисной точки $x \in X$ и любого k такого, что $1 \leq k \leq n$.

Обозначим через $Int(U)$ внутренность множества U в топологическом пространстве X , а через $cl(U) = \bar{U}$ замыкание U в X . Для подмножества U в $\mathcal{A}_r$, пусть $\pi_{s,p,t}(U) := \{u : z \in U, z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, u = w_s s + w_p p\}$ для любого $s \neq p \in \mathbf{b}$, где $t := \sum_{v \in \mathbf{b} \setminus \{s,p\}} w_v v \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, w_s = w_p = 0, w_v \in \mathbf{R} \forall v \in \mathbf{b}\}$. То есть, геометрически $\pi_{s,p,t}(U)$ – это проекция на комплексную плоскость $\mathbf{C}_{s,p}$ пересечения U с плоскостью $\tilde{\pi}_{s,p,t} \ni t$, $\mathbf{C}_{s,p} := \{as + bp : a, b \in \mathbf{R}\}$, так как $sp^* \in \hat{b}$.

2.11. Теорема. Пусть U – это область в $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, так что $\emptyset \neq Int(U) \subset U \subset cl(Int(U))$ и U является $(2^r - 1)$ -связной; $\pi_{s,p,t}(U)$ является просто связной в $\mathbf{C}$ для любого $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$, $s := i_{2k}$, $p := i_{2k+1}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$ для которого существует $z = u + t \in U$ (см. §2.10). Предположим, что $f \in C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$ и f супердифференцируема по $z \in U$ и f имеет непрерывное продолжение на открытую область W , так что $W \supset U$. Тогда для любого спрямляемого замкнутого пути (то есть, петли) γ в U интеграл вдоль пути над алгеброй Кэли-Диксона равен нулю, $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Доказательство. В силу Предложение 2.3 f является z -представленной и $\partial_z f = 0$ на U . Поэтому, $\xi(1z, 2z)$ независимо от $2z$, где ξ является соответствующей f функцией из §2.5, следовательно, $g(1z, 2z)$ также независима от $2z$ и мы можем записать коротко $g(z)$. Для пути γ существует компактное каноническое замкнутое подмножество в $\mathcal{A}_r$: $W \subset Int(U)$, так что $\gamma([0, 1]) \subset W$, так как γ спрямляем и $\mathcal{A}_r$ локально компактна. В силу теоремы 2.7 для любой последовательности функций $f_n \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$ сходящейся к f в $C_b^0(U, \mathcal{A}_r)$, так что $f_n(z) = (\partial g_n(z)/\partial z).1$ с $g_n(z) \in C^2(U, \mathcal{A}_r)$ и удовлетворяющей условиям §2.5, так как ξ независимо от $2z$, а каждая последовательность путей $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow U$ C^3 -непрерывно дифференцируема и сходится к γ относительно полной вариации $V(\gamma - \gamma_n)$, то существует $\lim_n \int_{\gamma_n} f_n(z, \tilde{z}) dz = \int_\gamma f(z) dz$. Поэтому, достаточно рассмотреть случай $f \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, так что $f(z) = (\partial g(z)/\partial z).1$ on U , and continuously differentiable γ , где $g \in C^2(U, \mathcal{A}_r)$ удовлетворяет условиям §2.5. Обозначим интеграл $\int_\gamma f(z) dz$ by Q . Можно записать этот интеграл в виде $Q = \int_0^1 (\partial g(z)/\partial z) \cdot \gamma'(t) dt$. Запишем f в виде:

$f = \sum_{s \in \mathbf{b}} f_s s = \sum_{\beta=0}^{2^{r-1}-1} f_{2\beta, 2\beta+1}$, где $f_{\beta, \nu} := f_{i_\beta} i_\beta + f_{i_\nu} i_\nu$, $f_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поэтому,

$d\gamma(t) = \gamma'(t) dt = \sum_{j=0}^{2^{r-1}-1} \gamma'_{2j, 2j+1}(t) dt$. Условие $\gamma(0) = \gamma(1)$ эквивалентно $\gamma_{2j, 2j+1}(0) = \gamma_{2j, 2j+1}(1)$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$. Мы имеем $\gamma_{\beta, \nu} \subset \pi_{\beta, \nu, t}(U)$ для любого $\beta \neq \nu \in \mathbf{b}$. Умножение в $\mathcal{A}_r$ дистрибутивно, следовательно,

$$(\partial g(z)/\partial z) \cdot (d\gamma(t)) = \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} (\partial g(z)/\partial z) \cdot (d\gamma_{2k, 2k+1}(t)).$$

В силу теоремы Гуревича об изоморфизме (см. §7.5.4 [31]) $H_q(U, x) = 0$ для любого $x \in U$ и любого $q < 2^r$, следовательно, $H^l(U, x) = 0$ для любого $l \geq 1$.

Если $f : Y \rightarrow V$ непрерывно, то $r \circ f : Y \rightarrow \Omega$ непрерывно, если f отображает на V , тогда $r \circ f$ отображает на Ω , где $r : V \rightarrow \Omega$ – это ретракция, V , Y и Ω – это топологические пространства. Топологическое пространство U метризуемо, следовательно, для любого замкнутого подмножества Ω in U существует каноническое замкнутое подмножество $V \subset U$, так что $V \supset \Omega$ и Ω является ретракцией V , то есть, существует непрерывное отображение $r : V \rightarrow \Omega$, $r(z) = z$ для любого $z \in \Omega$ (см. [9] и теорему 7.1 [16]). Поэтому, если V является $(2^r - 1)$ -связным каноническим

замкнутым подмножеством в U и Ω является двумерным C^0 -многообразием, так что Ω является ретракцией V , тогда Ω просто связна, так как каждое непрерывное отображение $f : S^k \rightarrow \Omega$ с $k \leq 1$ имеет непрерывное продолжение $f : \mathbf{R}^{k+1} \rightarrow V$ и $r \circ f : \mathbf{R}^{k+1} \rightarrow \Omega$ является также непрерывным продолжением f с S^k на $\mathbf{R}^{k+1}$.

Из $(2^r - 1)$ -связности U следует, что существует двумерное действительное дифференцируемое многообразие Ω содержащееся в U , так что $\partial\Omega = \gamma$. Это можно вывести из рассмотрения разбиений Z_n множества U посредством $S_{l,k}^n \cap U$ и беря $n \rightarrow \infty$, где $S_{l,k}^n$ – это параллелепипеды в $\mathcal{A}_r$ с ребрами длины n^{-1} , l, k и $n \in \mathbf{N}$, двумерные грани ${}_1S_l^n$ и 2^{r-1} -мерные грани ${}_2S_k^n$ для $S_{l,k}^n = {}_1S_l^n \times {}_2S_k^n$ параллельны $\mathbf{C}_{s,p}$ или $\mathcal{A}_{r,s,p}$ с $s = i_{2k}$ и $p = i_{2k+1}$ соответственно, так что существует последовательность путей γ_n сходящаяся к γ относительно $|\cdot|_{\mathcal{A}_r}$ и последовательность (непрерывных) двумерных C^0 -многообразий Ω^n с $\partial\Omega^n = \gamma^n$, $\Omega^n \subset \bigcup_{l,k} [(\partial {}_1S_l^n) \times (\partial {}_2S_k^n)]$. Выберем Ω ориентируемыми и класса C^3 как Римановы многообразия, так что взятие их проекции на $\mathbf{C}_{s,p}$ дает соответствующие пути $\gamma_{2k,2k+1}$ и области $\Omega_{s,p}$ в $\mathbf{C}_{s,p}$ удовлетворяющие условиям отмеченным выше в данном доказательстве.

К появляющимся интегралам можно применить классическую (обобщенную) теорему Стокса (см. теорему V.1.1 [36]):

$$\int_{\Omega_{2k,2k+1}} \eta(v) = \int_0^1 (\partial g(z)/\partial z) \cdot \gamma'_{2k,2k+1}(t) dt,$$

где $\Omega_{2k,2k+1}$ – это просто связная область в $\mathbf{C}_{i_{2k},i_{2k+1}}$, так что $\partial\Omega_{2k,2k+1} = \gamma_{2k,2k+1}$ для любого k , $\eta(v) = d[(\partial g(z)/\partial z) \cdot dv]$, $v = z_{2k,2k+1} \in \Omega_{2k,2k+1} \subset \mathbf{C}_{i_{2k},i_{2k+1}}$. Функция g принадлежит $C^2(U, \mathcal{A}_r)$, следовательно, $(D^2g(z)) \cdot (h_1, h_2) := (D^2g(z)) \cdot (h_2, h_1)$ для любых h_1 и h_2 в $\mathcal{A}_r$. Поэтому, в силу условий §2.5 наложенных на g выполняются равенства

$$\int_{\Omega_{2k,2k+1}} \eta(v) = \int_{\Omega_{2k,2k+1}} d[(\partial g(z)/\partial z) \cdot dv] = \int_{\Omega_{2k,2k+1}} d^2q(z_{2k,2k+1}) = 0$$

для любого $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$, так как

$$(\partial g(z)/\partial z) \cdot \gamma'_{2k,2k+1} = (\partial g(z)/\partial z) \cdot (s(\gamma'_{2k} + \gamma'_{2k+1}s^*p)), \text{ так что}$$

$$(\partial g(z)/\partial z) \cdot \gamma'_{2k,2k+1} = (\partial g(z)/\partial w_s) \cdot \gamma'_{2k} + (\partial g(z)/\partial w_p) \cdot \gamma'_{2k+1}$$

$$= (\partial g(z)/\partial z_{2k,2k+1}) \cdot (\gamma'_{2k} + \gamma'_{2k+1}s^*p),$$

$$\partial y(z)/\partial w_s = (\partial y(z)/\partial z_{2k,2k+1} + \partial y(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1}) \cdot 1 \text{ and}$$

$$\partial y(z)/\partial w_p = (\partial y(z)/\partial z_{2k,2k+1} - \partial y(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1}) \cdot (s^*p) \text{ для любой } z\text{-супердифференцируемой функции } y \text{ на } U \text{ и } \partial g(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1} = 0, \text{ где } q \text{ соответствует } g|_{\Omega_{2k,2k+1}}, s = i_{2k}, p = i_{2k+1}.$$

2.12. Определение. Непрерывная функция на открытой области U в $\mathcal{A}_r$ такой, что $\emptyset \neq U$ и $\int_\gamma f dz = 0$ для любой спрямляемой петли (то есть, замкнутого пути) γ в U , тогда f называется $\mathcal{A}_r$ -интегрально голоморфной на U (см. §2.5).

Если f является z -супердифференцируемой функцией на U , тогда она называется $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на U .

2.13. Следствие. Пусть f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на открытой $(2^r - 1)$ -связной области U в $\mathcal{A}_r$, так что $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связна в $\mathbf{C}_{s,p}$ для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, $s := i_{2k}$, $p := i_{2k+1}$ для которых существует $z = t + u \in U$, тогда f является $\mathcal{A}_r$ -интегрально голоморфной.

Это немедленно следует из теоремы 2.11.

2.14. Определение. Пусть U – это подмножество в $\mathcal{A}_r$, и $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_r$, и $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_r$ – два непрерывных пути. Тогда γ_0 и γ_1 называются гомотопными относительно U , если существует непрерывное отображение $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$ такое, что $\gamma([0, 1], [0, 1]) \subset U$, и $\gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$, и $\gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$ для любого $t \in [0, 1]$.

2.15. Теорема. Пусть W – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, и f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на W со значениями в $\mathcal{A}_r$. Предположим, что

существуют два спрямляемых пути γ_0 и γ_1 в W с общими начальной и конечной точками ($\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$) гомотопные относительно U , где U является $(2^r - 1)$ -связным подмножеством в W , так что $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связно в $\mathbf{C}$ для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$, для которых существует $z = u + t \in U$. Тогда $\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$.

Доказательство. Гомотопия γ_0 с γ_1 относительно U влечет гомотопию $(\gamma_0)_{2j,2j+1}$ с $(\gamma_1)_{2j,2j+1}$ относительно $\pi_{2j,2j+1,t}(U)$ в $\mathbf{C}_{s,p}$ с $s = i_{2j}$ и $p = i_{2j+1}$ для любого $j = 0, 1, 2^{r-1} - 1$, для любого $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которого существует $z = t + u \in U$. Рассмотрим путь ζ такой, что $\zeta(t) = \gamma_0(2t)$ для любого $0 \leq t \leq 1/2$ и $\zeta(t) = \gamma_1(2 - 2t)$ для любого $1/2 \leq t \leq 1$. Тогда ζ является замкнутым путем содержащимся в U . В силу теоремы 2.11 $\int_{\zeta} f(z) dz = 0$. С другой стороны, $\int_{\zeta} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz$, следовательно, $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$.

2.15.1. Следствие. Пусть $f \in C^1$ удовлетворяет условиям теоремы 2.15. Тогда для любого $z \in U$ существует $(\partial(\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta)/\partial z).h = \hat{f}(z).h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$, z_0 — это отмеченная точка в U .

2.16. Теорема. Пусть f является $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитической функцией на открытой области U в $\mathcal{A}_r^n$, тогда f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на U .

Доказательство. Из определения супердифференциала мы получим $(Dz^n).h = \sum_{k=0}^{n-1} z^k h z^{n-k-1}$. Используя формулу супердифференциала для произведения функций, из §2.7 мы получим, что каждая f вида (2.5.i, ii) супердифференцируема (по z), когда $n_0 \geq 0$ в (2.5.ii). Используя сходимость по норме $\|\cdot\|_{\omega}$ степенного ряда по z для данной $f \in C^{\omega}(U, \mathcal{A}_r)$, мы получим для любого $a \in U$, что существует её окрестность W , где f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной, следовательно, f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на U .

2.17. Замечание. В следующем параграфе показано, что октонион-голоморфная функция бесконечно дифференцируема; более того, при подходящих условиях там доказана эквивалентность между свойствами октонионной голоморфности, октонионной интегральной голоморфности и октонионной локальной z -аналитичности. Интеграл (2.5.4) может быть обобщен для непрерывной функции $q : U \rightarrow \mathcal{A}_r$, так что $V(q \circ \gamma) < \infty$. Заменяя Δz_k на $q(z_{k+1}) - q(z_k) =: \Delta q_k$ в формуле (2.5.5), мы получим

$$(1) \quad \int_{\gamma} f(z, \tilde{z}) dq(z) := \lim_P I(f, q \circ \gamma; P), \text{ где}$$

$$(2) \quad I(f, q \circ \gamma; P) = \sum_{k=0}^{q-1} \hat{f}(z_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}).(\Delta q_k).$$

В частности, если $\gamma \in C^1$ и q является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на U , а также $f(z, \tilde{z}) = (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1$, где $g \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, тогда

$$\int_{\gamma} f(z, \tilde{z}) dq(z) = \int_0^1 (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).((\partial_z q(z)|_{z=\gamma(s)}) \cdot \gamma'(s)) ds$$

и $V(\gamma) \leq \int_0^1 |\gamma'(s)| ds$.

Пусть $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на U , где U — это открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$. Если существует $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция $g : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ такая, что $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$, то g называется примитивной функцией для f .

2.18. Предложение. Пусть U – это открытое связное подмножество $\mathcal{A}_m^n$, $m \geq 3$, а g – это примитивная функция для f на U , тогда множество примитивных функций для f таково: $\{h : h = g + C, C = \text{const} \in \mathcal{A}_m\}$.

Доказательство. В силу леммы 2.5.1 для любых двух примитивных g_1 и g_2 для f и для любого $z \in U$ существует шар $B \subset U$, $z \in U$, так что $(g_1 - g_2)|_U = \text{const} \in \mathcal{A}_m$ (см. §2.7). Предположим, что $h'(z) = 0$ для любого $z \in U$, тогда рассмотрим $q(s) := h((1-s)a + sz)$ для любого $s \in [0, r]$, где a – это отмеченная точка в U и $B(a, r, \mathcal{A}_m)$ – это шар, содержащийся в U , $r > 0$, $z \in B(a, r, \mathcal{A}_m)$. Тогда q корректно определена на $q(0) = q(1)$. Поэтому, множество $V := \{z \in U : h(z) = h(a)\}$ открыто в U , так как с каждой точкой a она содержит окрестность. С другой стороны, она замкнута в силу непрерывности h , следовательно, $V = U$, так как U связна, следовательно, $h = \text{const}$ на U .

3. Мероморфные функции и их вычеты.

Сначала мы определим и опишем экспоненциальную и логарифмическую функции октонионных переменных и тогда применим их к исследованию октонионных вычетов. Более того, эти изучения выполнены также для переменных из алгебр Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ для любого $r \geq 4$.

3.1. Замечание и определение. Для переменной $z \in \mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$ положим

$$(3.1.) \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!.$$

В силу замечания 2.1 z^n и, следовательно, $\exp(z)$ корректно определены, так как действительные числа коммутируют с каждым элементом из $\mathcal{A}_r$, $n! \in \mathbf{N} \subset \mathbf{R}$. Если $|z| \leq R < \infty$, то ряд (3.1) сходится, так как $|\exp(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z^n/n!| \leq \exp(R) < \infty$. Поэтому, $\exp : \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r$. Ограничение $\exp$ на каждое подмножество $\mathbf{Q}_s := \{z : z \in \mathcal{A}_r, z = a + bs, a, b \in \mathbf{R}\}$ коммутативно, где $s \in \hat{b}$, $\hat{b}_r := \mathbf{b}_r \setminus \{1\}$, $\mathbf{b} := \mathbf{b}_r$, $\hat{b} := \hat{b}_r$, но в общем два элемента z_1 и $z_2 \in \mathcal{A}_r$ не коммутируют и функция $\exp(z_1 + z_2)$ на $\mathcal{A}_r^2$ не совпадает с $\exp(z_1)\exp(z_2)$.

3.2. Предложение. Пусть $z \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, записано в виде $z = v + M$, где $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, $\mathcal{I}_r := \{\eta \in \mathcal{A}_r : \text{Re}(\eta) = 0\}$, тогда

$$(3.2) \quad \exp(z) = \exp(v) \exp(M), \text{ где}$$

$$(3.3) \quad \exp(M) = (\cos |M|) + [(\sin |M|)/|M|]M$$

для $M \neq 0$ и $\exp(0) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим $M \in \mathcal{I}_r$ и запишем его в виде $M = a + bl$, где $l = i_{2r-1}$ – это элемент, возникающий в результате процедуры удвоения $\mathcal{A}_r$ из $\mathcal{A}_{r-1}$, $a, b \in \mathcal{A}_{r-1}$, $\text{Re}(a) = 0$. Тогда $M^2 = a^2 + a(bl) + a^*(bl) - (bl)(bl)^* = -(|a|^2 + |b|^2)$, так как $a^* = -a$, $(bl)(bl)^* = (bl)^*(bl) = (lb^*)(bl^{-1}) = b^*b = bb^*$, следовательно, $M^{2n} = (-|M|^2)^n$, $M^{2n+1} = (-|M|^2)^n M$ для любого $1 \leq n \in \mathbf{Z}$. Поэтому,

$$\begin{aligned} \exp(M) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-|M|^2)^n/(2n)! + \sum_{n=0}^{\infty} (-|M|^2)^n M/(2n+1)! \\ &= (\cos |M|) + [(\sin |M|)/|M|]M \end{aligned}$$

для любого $M \neq 0$, $\exp(0) = 1$. Поскольку $\lim_{0 \neq \phi \rightarrow 0} \sin(\phi)/\phi = 1$, где $\phi \in \mathbf{R}$, то предел взятый в формуле (3.3) при $|M| \neq 0$ стремящемся к 0 дает частный случай $\exp(0) = 1$. Поскольку $v \in \mathbf{R}$ коммутирует с M , $[v, M] = 0$, то $\exp(v + M) = \exp(v) \exp(M)$.

3.3. Следствие. Если $z \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, записано в виде $z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s$ с действительными w_s для любого $s \in \mathbf{b}$, то $|\exp(z)| = \exp(v)$.

Доказательство. Если $\sum_{s \neq 1} w_s^2 = 0$, то это очевидно. Предположим, что $\sum_{s \neq 1} w_s^2 \neq 0$. В силу формул (3.2, 3.3)

$$(3.4) \quad \exp(z) = \exp(v)A, \text{ где } A = \cos |M| + [(\sin |M|)/|M|]M$$

так как $A \in \mathcal{A}_r$, тогда $A^* = \cos |M| - [(\sin |M|)/|M|]M$, $M^* = -M$ и неизбежно $|\exp(z)| = \exp(v)$.

3.4. Следствие. Функция $\exp(z)$ на множестве $\mathcal{I}_r := \{z : z \in \mathcal{A}_r, \operatorname{Re}(z) = 0\}$ периодична с $(2^r - 1)$ генераторами периодов $s \in \hat{b}_r$, так что $\exp(z(1 + 2\pi n/|z|)) = \exp(z)$ для любого $0 \neq z \in \mathcal{I}_r$ и любого целого числа n . Если $z \in \mathcal{A}_r$ записано в виде $z = 2\pi sM$, где $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, то $\exp(z) = 1$ тогда и только тогда, когда $s \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. В силу формул (3.2, 3.3) $\exp(sM) = 1$ для данного $z = sM \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$ тогда и только тогда, когда $\cos(s|M|) = 1$ и $\sin(s|M|) = 0$, что эквивалентно $s \in \{2\pi n : n \in \mathbf{Z}\}$, так как $|M| = 1$ согласно гипотезе этого следствия. Частные случаи формулы (3.3) таковы: $w_{s_0} \neq 0$ и $w_s = 0$ для любого $s \neq s_0$ из $\hat{b} := \hat{b}_r$, следовательно, $s \in \hat{b}$ являются $(2^r - 1)$ генераторами для периодов $\exp$.

3.5. Следствие. Функция $\exp$ — это эпиморфизм с $\mathcal{I}_r$ на $(2^r - 1)$ -мерную единичную сферу $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r) := \{z : z \in \mathcal{A}_r, |z| = 1\}$.

Доказательство. В силу следствия 3.3 образ $\exp(\mathcal{I}_r)$ содержится в $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$. Сферы $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$ характеризуются условием $\sum_{s \in \mathbf{b}} w_s^2 = 1$ или $w_1^2 + |M_1|^2 = 1$, где $M_1 \in \mathcal{I}_r$. Для доказательства $\exp(\mathcal{I}_r) = S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$ достаточно найти $z = v + M$, где $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, так что $w_1 = \cos |M|$, $M_1 = [(\sin |M|)/|M|]M$. Для этого возьмем $|M| = \arccos w_1 \in [0, \pi]$, так как $w_1 \in [-1, 1]$, а при $|w_1| \neq 1$ положим $M = M_1(1 - w_1^2)^{-1/2} \arccos w_1$. В частности, для $w_1 = 1$ возьмем $M = 0$; для $w_1 = -1$ возьмем $M = \pi q$, где $q \in \hat{b}$.

3.6. Следствие. Каждый элемент алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, имеет полярное разложение

$$(3.5) \quad z = \rho \exp(2\pi(\sum_{s \in \hat{b}} \phi_s s)),$$

где $\phi_s \in [-1, 1]$ для любого $s \in \hat{b}$, $\sum_{s \in \hat{b}} \phi_s^2 = 1$, $\rho := |z|$.

Доказательство. Это следует из формул (3.2, 3.3) и следствия 3.5.

3.6.1. Определение. Пусть $\mathcal{A}_\infty$ обозначает семейство состоящее из всех элементов $z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s$ таких, что $\tilde{z} := w_1 - \sum_{s \in \hat{b}} w_s s$, $z\tilde{z} =: |z|^2 = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s^2 < \infty$, где $\mathbf{b} := \mathbf{b}_\infty := \bigcup_{r=2}^\infty \mathbf{b}_r = \{1, i_1, i_2, \dots, i_{2^r}, \dots\}$, $\hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$, $w_s \in \mathbf{R}$ для любого s .

3.6.2. Теорема. Семейство $\mathcal{A}_\infty$ имеет структуру нормированной ассоциативной со степенями лево и право дистрибутивной алгебры над $\mathbf{R}$ с внешней инволюцией порядка два.

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}_\infty := \{z \in \mathcal{A}_\infty : \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Тогда каждое $M \in \mathcal{I}_\infty$ является пределом последовательности $M_r \in \mathcal{I}_r$, также $|z| =: \rho$ — это предел последовательности $\rho_r := |z_r|$, где $z_r \in \mathcal{A}_r$. Поэтому, $z = \lim_{r \rightarrow \infty} z_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_r \{\cos |M_r| + [(\sin |M_r|)/|M_r|]M_r\} = \rho \{\cos |M| + [(\sin |M|)/|M|]M\} = \rho \exp(M)$. Использование полярных координат (ρ, M) доказывает ассоциативность со степенями. В самом деле,

существует естественная проекция P_r из $\mathcal{A}_\infty$ на $\mathcal{A}_r$ для любого $r \geq 2$ даваемая формулами: $M_r := \{\sum_{s \in \hat{b}_r} m_s s\} |M| [\sum_{s \in \hat{b}_r} m_s^2]^{-1/2}$ для $\sum_{s \in \hat{b}_r} m_s^2 \neq 0$ и $M_r = 0$ в противном случае для любого $M = \sum_{s \in \hat{b}} m_s s \in \mathcal{I}_\infty$, где $m_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \hat{b}$; тогда $z_r := P_r(z) = \rho_r \{\cos |M_r| + [(\sin |M_r|)/|M_r|] M_r\}$, где $\rho_r = (\sum_{s \in \mathbf{b}_r} w_s^2)^{1/2}$, $z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s$, $\lim_{\phi \rightarrow 0} \sin(\phi)/\phi = 1$. Итак, $\lim_{r \rightarrow \infty} z_r = z$ относительно нормы $|z|$ в $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому, для любого $n \in \mathbf{Z}$ существует $\lim_{r \rightarrow \infty} (\rho_r)^n \exp(n M_r) = \rho^n \exp(n M) = z^n$, следовательно, $\mathcal{A}_\infty$ ассоциативна со степенями, так как каждая $\mathcal{A}_r$ ассоциативна со степенями, а $\cos$ и $\sin$ – это непрерывные функции. Очевидно, $\mathcal{A}_\infty$ является $\mathbf{R}$ -линейным пространством. Непрерывность умножения относительно нормы $|z|$ следует из неравенств $|\xi_r \eta_r - \psi_r \zeta_r| \leq |\xi_r \eta_r - \xi_r \zeta_r| + |\xi_r \zeta_r - \psi_r \zeta_r| \leq |\xi| |\eta - \zeta| + |\xi - \psi| |\zeta|$ и взятия предела при r стремящемся к бесконечности, так как $|\xi_r| \leq |\xi|$ и $|\xi_r \eta_r| \leq |\xi_r| |\eta_r|$ для любого $\xi_r, \eta_r \in \mathcal{A}_r$ и для любого $r \in \mathbf{N}$. Левая и правая дистрибутивность $(\xi + \psi)\zeta = \xi\zeta + \psi\zeta$ и $\zeta(\xi + \psi) = \zeta\xi + \zeta\psi$ следует в результате взятия предела при r стремящемся к бесконечности и такой дистрибутивности в каждой $\mathcal{A}_r$. Инволюция $z \mapsto \tilde{z} =: z^*$ в $\mathcal{A}_r$ имеет порядок два, так как $(z^*)^* = z$. Она является внешней, так как не существует никакого конечного алгебраического соотношения с постоянными в $\mathcal{A}_\infty$ преобразующим переменную $z \in \mathcal{A}_\infty$ в z^* . Соотношение $z^* = \lim_{r \rightarrow \infty} (2^r - 2)^{-1} \{-z_r + \sum_{s \in \hat{b}_r} s(z_r s^*)\} = \lim_{r \rightarrow \infty} (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{b}_r} s(z s^*)\}$ имеет бесконечный порядок. Соотношения типа $z_r^* = l_{r+1}(z_r l_{r+1}^*)$ в $\mathcal{A}_r$ используют внешний автоморфизм с $l_{r+1} := i_{2r} \in \mathcal{A}_{r+1} \setminus \mathcal{A}_r$, более того, последнее соотношение не выполняется для z^* и $z \in \mathcal{A}_\infty$ вместо $z_r \in \mathcal{A}_r$.

Никакое конечное множество ненулевых постоянных $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}_\infty$ не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$. Для доказательства этого рассмотрим $\mathbf{R}$ -подалгебру $\Upsilon_{M_1, \dots, M_n}$ в $\mathcal{A}_\infty$ порожденную $\{M_1, \dots, M_n\}$, где $a_j = |a_j| e^{M_j}$, $M_j \in \mathcal{I}_\infty$. Поскольку $a_1 a_1^* = |a_1|^2 > 0$, то $\mathbf{R}|a_1|^2 = \mathbf{R} \subset \Upsilon_{M_1, \dots, M_n}$, следовательно, $1 \in \Upsilon_{M_1, \dots, M_n}$. Если $\Upsilon_{M_1, \dots, M_n} = \mathbf{R}$, тогда это конечно не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$. Рассмотрим $\Upsilon_{M_1, \dots, M_n} \neq \mathbf{R}$, без ограничения общности предположим, что $a_1 \notin \mathbf{R}$. Имеется скалярное произведение $Re(z\tilde{y})$ в $\mathcal{A}_\infty$ для любых $z, y \in \mathcal{A}_\infty$. Пусть b_1 – это проекция a_1 на подпространство в $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное $\mathbf{R}1$, тогда по нашему предположению $b_1 \neq 0$ и $b_1 \in \mathcal{I}_\infty$. Поэтому, $b_1^2/|b_1|^2 = -1$, следовательно, Υ_{M_1} изоморфно $\mathbf{C}$. Конечно, никакая $\mathcal{A}_r$, $r \in \mathbf{N}$, не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ или $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому, без ограничения общности предположим, что $\Upsilon_{M_1, \dots, M_n}$ не изоморфно $\mathbf{C}$ и $a_2 \notin \mathbf{C}$. Если $M, N \in \mathcal{I}_r$ и $Re(MN^*) = 0$, тогда $MN \in \mathcal{I}_r$ и, следовательно, $(MN)^* = NM = -MN$, так как $A^* = -A$ для любого $A \in \mathcal{I}_r$. Пусть b_2 – это проекция M_2 в подпространство в $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное Υ_{M_1} относительно скалярного произведения $Re(z\tilde{y})$. Тогда $b_2 \neq 0$ по нашему предположению и $b_2 \in \mathcal{I}_\infty$, $b_2^2/|b_2|^2 = -1$, следовательно, после процедуры удвоения с $b_2/|b_2|$ мы получим, что Υ_{M_1, M_2} – это подалгебра в $\mathcal{A}_4$. Тогда продолжим по индукции, предположим, что $\Upsilon_{M_1, \dots, M_k}$ – это подалгебра в $\mathcal{A}_{2^k}$, $k \in \mathbf{N}$, $k < n$. Поскольку $\mathcal{A}_{2^k}$ не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$, то предположим без ограничения общности, что $a_{k+1} \notin \Upsilon_{M_1, \dots, M_k}$ и рассмотрим ортогональную проекцию b_{k+1} вектора M_{k+1} в подпространство $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное $\Upsilon_{M_1, \dots, M_k}$ относительно скалярного произведения $Re(z\tilde{y})$. Тогда $b_{k+1} \neq 0$ и $b_{k+1} \in \mathcal{I}_\infty$, $b_{k+1}^2/|b_{k+1}|^2 = -1$. Итак, процедура удвоения с $b_{k+1}/|b_{k+1}|$ дает алгебру $\Upsilon_{M_1, \dots, M_{k+1}}$, которая является подалгеброй в $\mathcal{A}_{2^{k+1}}$, и т.д. В результате $\Upsilon_{M_1, \dots, M_n}$ – это подалгебра в $\mathcal{A}_{2^n}$ и она не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ алгебры $\mathcal{A}_\infty$, где $a_1, \dots, a_n \in \Upsilon_{M_1, \dots, M_n}$ в силу формулы полярного разложения (см. (3.2,3)) чисел Кэли-Диксона.

3.6.3. Замечание и определение. Пусть Λ обозначает хаусдорфово топологическое пространство с неотрицательной мерой μ на σ -алгебре борелевских подмножеств, так что для любой точки $x \in \Lambda$ существует открытая окрестность $U \ni x$ с $0 < \mu(U) < \infty$. Рассмотрим множество генераторов вещественной алгеб-

ры $\{i_x : x \in \Lambda\}$ такое, что $i_x i_y = -i_y i_x$ для любых $x \neq y \in \Lambda \setminus \{0\}$ и $i_x^2 = -1$ для любого $x \in \Lambda \setminus \{0\}$. К этому множеству присоединим единицу $1 =: i_0$ так, что $ai_x = i_x a$ для любых $a \in \mathbf{R}$ и $x \in \Lambda$. В случае конечного множества Λ алгебра Кэли-Диксона порожденная такими генераторами изоморфна $\mathcal{A}_{N-1}$, где $N = \text{card}(\Lambda)$ – мощность множества Λ . Для любого бесконечного счетного подмножества генераторов $\{i_0, i_{x_j} : j \in \mathbf{N}, x_j \in \Lambda\}$ конструкция выше из §3.6.1 дает алгебру изоморфную $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому рассмотрим случай $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$. Будем считать, что Λ линейно упорядочена и это линейное упорядочение дает интервалы $(a, b) := \{x \in \Lambda : a < x < b\}$ являющиеся μ -измеримыми, например, $\Lambda = \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^m$ имеет естественное линейное упорядочение индуцированное линейным упорядочением из $\mathbf{R}$ и лексикографическим упорядочением в произведении, где $n, m \in \mathbf{N}$.

Тогда рассмотрим конечное разбиение Λ в дизъюнктное объединение $\Lambda = \bigcup_{j=1}^p \Lambda_j$, где $x < y$ для любых $x \in \Lambda_j$ и $y \in \Lambda_l$ при $j < l \leq p$, $p \in \mathbf{N}$. Семейство таких разбиений обозначим $\mathcal{Z}$. Пусть $T \in \mathcal{Z}$, $x_j \in A_j$ – отмеченные точки. Тогда существует простая функция f_T такая, что $f_T(x) = C_j i_{x_j}$ для любого $x \in A_j$, где $C_j \in \mathbf{R}$. Рассмотрим норму $\|f_T\|_\Lambda^2 := \int_\Lambda f_T(x) \tilde{f}_T(x) \mu(dx)$, где $\tilde{f}_T(x) := C_0 \chi_{A_0}(x) \delta_{0, x_0} - \sum_{x_j \neq 0} C_j \chi_{A_j}(x) i_{x_j}$, $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$, $\delta_{x,y} = 1$ при $x = y$, $\delta_{x,y} = 0$ при $x \neq y$. Каждой f_T сопоставим элемент $z_{f_T} := \sum_j C_j i_{x_j} \mu(A_j)$. Алгебру являющуюся пополнением по $\|\cdot\|_\Lambda$ минимальной алгебры, порожденной семейством элементов z_{f_T} для f_T из семейства $\mathcal{F}$ всех простых функций и их всевозможных упорядоченных конечных произведений обозначим $\mathcal{A}_\Lambda$.

3.6.4. Теорема. *Множество $\mathcal{A}_\Lambda$ является алгеброй над $\mathbf{R}$ полной относительно нормы $\|\cdot\|_\Lambda$ с центром $Z(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathbf{R}$, причем имеются вложения $\mathcal{A}_\infty \hookrightarrow \mathcal{A}_\Lambda$ при $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$. Множество генераторов алгебры $\mathcal{A}_\Lambda$ имеет мощность $\text{card}(\Lambda)$ при $\text{card}(\Lambda) \geq \text{card}(\mathbf{R})$. Существует функция $\overrightarrow{\text{exp}}(\int_\Lambda f(x) \mu(dx))$ упорядоченного интегрального произведения из $\mathcal{A}_\Lambda$ на $\mathcal{A}_\Lambda$.*

Доказательство. При $\text{card}(\Lambda) \leq \aleph_0$ алгебра $\mathcal{A}_\Lambda$ изоморфна $\mathcal{A}_{N-1}$ или $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому остается рассмотреть случай $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$. Для любой $f_T \in \mathcal{F}$ можно задать упорядоченное интегральное экспоненциальное произведение $\overrightarrow{\text{exp}}(\int_\Lambda f_T(x) \mu(dx)) := \{\exp(C_1 \mu(A_1) \pi i_{x_1}/2) \dots \exp(C_p \mu(A_p) \pi i_{x_p}/2)\}_{q(p)}$ с $q(p)$ соответствующим левой расстановке скобок. Поэтому существуют вложения $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$. Тогда очевидно $Z(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathbf{R}$. Пополнение семейства $\mathcal{F}$ содержит все функции вида $f(x) = \sum_j f_j(x) \chi_{A_j}(x) i_{x_j}$, где $\{A_j : j \in \mathbf{N}\}$ является дизъюнктым объединением Λ , каждое A_j μ -измеримо, $f_j \in L^2(\Lambda, \mu, \mathbf{R})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j > n} \|f_j(x) \chi_{A_j}(x)\|_{L^2(\Lambda, \mu, \mathbf{R})}^2 = 0$. Поскольку $\exp(M) = \cos(|M|) + M \sin(|M|)/|M|$ для любого $M \in \mathcal{A}_\infty$, а $|\exp(M) - 1| \leq \exp(|M|) - 1$, то для любой $f \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует $\lim_{\mathcal{F} \ni f_T \rightarrow f} \overrightarrow{\text{exp}}(\int_\Lambda f_T(x) \mu(dx)) =: \overrightarrow{\text{exp}}(\int_\Lambda f(x) \mu(dx))$ относительно $\|\cdot\|_\Lambda$. Поскольку $\exp(\pi i_x/2) = i_x$ для любого $x \in \Lambda \setminus \{0\}$, то семейство всех элементов вида $\overrightarrow{\text{exp}}(\int_\Lambda f(x) \mu(dx))$, $f \in \mathcal{F}$ содержит все генераторы вложенной подалгебры $\mathcal{A}_\infty$, порожденной счетным подсемейством $\{i_{x_j} : j \in \mathbf{N}\}$. Пополнение $\tilde{\mathcal{F}}$ семейства $\mathcal{F}$ по норме $\|\cdot\|_\Lambda$ является бесконечномерным линейным подпространством над $\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_\Lambda$. Всевозможные упорядоченные конечные произведения элементов из $\tilde{\mathcal{F}}$ и пополнение их $\mathbf{R}$ линейной оболочки по $\|\cdot\|_\Lambda$ дает $\mathcal{A}_\Lambda$. Тогда для любого элемента из $\mathcal{A}_\Lambda$ существует представление в виде упорядоченного интегрального экспоненциального произведения. Поскольку $\mathcal{A}_\Lambda$ является алгеброй над $\mathbf{R}$ и $\text{card}(\Lambda)^{\aleph_0} = \text{card}(\Lambda)$, то семейство генераторов алгебры $\mathcal{A}_\Lambda$ имеет мощность $\text{card}(\Lambda)$.

3.6.5. Замечание. Из теорем 3.6.2, 4 следует, что $\mathcal{A}_\Lambda$ при $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$ вместе с $\mathbf{C} = \mathcal{A}_1$ – это два крайних случая, где сопряжение $z \rightarrow z^*$ является внешним авто-

морфизмом, хотя поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ легче использовать благодаря его коммутативности и ассоциативности, чем алгебру $\mathcal{A}_\Lambda$ при $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$, которая не является ни коммутативной, ни ассоциативной. В силу определения 3.6.1 и теорем 3.6.2, 4 предыдущие результаты можно перенести со случая $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 4$ на $\mathcal{A}_\Lambda$. Определения 2.1 – 2.2 переносятся на $\mathcal{A}_\infty$, более того, в силу алгебраической независимости z и z^* в $\mathcal{A}_\Lambda$ при $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$, мы получим, что z и z^* являются автоматически независимыми переменными, и имеются проекции $P_r : \mathcal{A}_\Lambda \rightarrow \mathcal{A}_r$ для любого $r \geq 2$ оправдывающие определения $C_{z,\tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ и $C_{z,\tilde{z}}^n(U, \mathcal{A}_r)$, также это оправдывает аксиомы супердифференцирования в §2.2. Очевидно, предложения 2.2.1, 2.3, 2.6 и следствие 2.4, лемма 2.5.1 выполняются в случае $\mathcal{A}_\Lambda$ с $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\Lambda$ вместо $\mathbf{b} = \mathbf{b}_r$. Определение 2.5 имеет смысл также для $\mathcal{A}_\Lambda$. Теорема 2.7 выполняется также для $\mathcal{A}_\Lambda$, так как для любого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует вложенная подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая z . Путь γ спрямляем, поэтому он имеет счетное плотное подмножество. Для любого $\epsilon > 0$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ проекция $\psi(t)$ на которую пути γ отличается от $\gamma(t)$ не более, чем на ϵ для любого $t \in [a, b]$, где $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_\Lambda$. Для $\mathcal{A}_\infty$ с помощью проекций P_r мы имеем $\psi = \lim_{r \rightarrow \infty} P_r(\psi)$, $P_r(\psi) \subset U_r$, $\{P_r(\gamma) : r \in \mathbf{N}\}$, сходится к ψ равномерно на компактном отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$, где $U_r = P_r(U)$. Возьмем последовательность таких путей ψ_n с $\sup_{t \in [a, b]} |\psi_n(t) - \gamma(t)| < 1/n$. Тогда $\int_{\psi_n} f(z) dz$ образуют последовательность Коши в $\mathcal{A}_\Lambda$, которая полна. Поэтому существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\psi_n} f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$. Следовательно, интеграл вдоль пути имеет единственное непрерывное продолжение на $C_b^0(U, \mathcal{A}_\Lambda)$.

В замечании 2.8 можно использовать $l_2(\mathbf{R})^m$ вместо $\mathbf{R}^{2^m}$ и представлять дифференциальные формы η над $\mathcal{A}_\infty$ как поточечные пределы (или равномерную сходимость на компактных подмножествах) дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$ при r стремящемся к бесконечности, так как $z_r \rightarrow z$ при r стремящемся к бесконечности, где $z \in \mathcal{A}_\infty$, $z_r := P_r(z)$. В случае $\mathcal{A}_\Lambda$ при $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$ можно использовать это поточно, так как для каждого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ и содержащая z . В общем случае:

$$(i) \quad \eta(z, \tilde{z}) = \sum_{I, J} \eta_{I, J} \{ (d^{p_1} z^{\wedge I_1} \alpha_1 \wedge \dots \wedge d^{p_n} z^{\wedge I_n} \alpha_n \wedge d^{t_1} \tilde{z}^{\wedge J_1} \beta_1 \wedge \dots \\ \dots \wedge d^{t_n} \tilde{z}^{\wedge J_n} \beta_n) \}_{q(|I|+|J|+2n)}$$

– это дифференциальная форма над $\mathcal{A}_\Lambda$, где каждая $\eta_{I, J}(z, \tilde{z})$ – это непрерывная функция на открытом подмножестве U_n в $\mathcal{A}_\infty^n$ со значениями в $\mathcal{A}_\infty$, $I = (I_1, \dots, I_n)$, $J = (J_1, \dots, J_n)$, $|I| := I_1 + \dots + I_n$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \in \mathbf{N}$, $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \in \mathbf{N}$, $0 \leq I_k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq J_k \in \mathbf{Z}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{A}_\Lambda$ являются постоянными для любого $k = 1, \dots, n$, $d^p z^0 := 1$, $d^p \tilde{z}^0 := 1$, $n \in \mathbf{N}$, $\pi_n^l(U_l) \subset U_n$ для любого $l \geq n$, где $\pi_n^l : \mathcal{A}_\Lambda^l \rightarrow \mathcal{A}_\Lambda^n$ – естественная проекция для любого $l \geq n$. Сходимость в правой части формулы (i) в случае бесконечного ряда по I или J предполагается относительно $C_b^0(W, \mathcal{A}_\infty^*)$ -топологии равномерной сходимости на W , где $W = pr - \lim \{U_n, \pi_n^l, \mathbf{N}\}$, $\mathcal{A}_\Lambda^{\wedge*}$ снабжена топологией нормы наследуемой из сопряженного пространства всех поли $\mathbf{R}$ -однородных $\mathcal{A}_\Lambda$ -аддитивных функционалов.

В замечании 2.10 определим $\mathcal{A}_{\Lambda, s, p}$ и используем проекции $\pi_{s, p, t}$ для любого $s \neq p \in \mathbf{b}$. Теоремы 2.11, 2.15 и следствия 2.13, 2.15.1 переносятся на $\mathcal{A}_\Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$ наложением условия $(2^r - 1)$ -связности $P_r(U) =: U_r$ для любого $r \geq 3$ и для всевозможных вложений $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$ для $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$ при соответствующем $\mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}_\infty$, рассматривая $\pi_{s, p, t}(U)$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $0 \leq k \in \mathbf{Z}$. Тогда определения 2.12, 2.14 и теорема 2.16, замечания 2.17, 3.1 выполняются также для $\mathcal{A}_\infty$. Выполнимость следствия 3.3 следует из доказательства теоремы 3.6.2. Мы также имеем

вместо 3.4 и 3.5 следующее.

3.4'. Следствие. Функция $\exp(z)$ на множестве $\mathcal{I}_\Lambda := \{z \in \mathcal{A}_\Lambda : \operatorname{Re}(z) = 0\}$ периодична с бесконечным семейством генераторов периодов $s \in \hat{b}_\Lambda$, так что $\exp(z(1 + 2\pi n/|z|)) = \exp(z)$ для любого $0 \neq z \in \mathcal{I}_\Lambda$ и любого целого числа n , где $\operatorname{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$. Если $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ записано в виде $z = 2\pi sM$, где $M \in \mathcal{I}_\infty$, $|M| = 1$, то $\exp(z) = 1$ тогда и только тогда, когда $s \in \mathbf{Z}$.

3.5'. Следствие. Функция $\exp$ является эпиморфизмом с $\mathcal{I}_\Lambda$ при $\operatorname{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$ на бесконечномерную единичную сферу $S^\Lambda(0, 1, \mathcal{A}_\Lambda) := \{z : z \in \mathcal{A}_\Lambda, |z| = 1\}$.

3.7. Замечание. В некоммутативном случае $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, имеется следующее соотношение для производной функции $\exp$:

$$(3.6) \quad \exp(z)' \cdot h = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} ((z^k)h) z^{n-k-1} / n!,$$

где z и $h \in \mathcal{A}_r$. В частности,

$$(3.7) \quad \exp(z)' \cdot v = v \exp(z)$$

для любого $v \in \mathbf{R}$, но в общем случае не для всех $h \in \mathcal{A}_r$. Функция $\exp$ периодична на $\mathcal{A}_r$, следовательно, обратная функция обозначаемая Ln определена только локально.

Пусть сначала $2 \leq r \in \mathbf{N}$. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{2^r}$ всех переменных $(w_s : s \in \mathbf{b})$ для которых $\exp$ периодична на $\mathcal{A}_r$. Условие $\sum_{s \in \hat{b}} w_s^2 = 1$ определяет в $\mathbf{R}^{2^r}$ сферу единичного радиуса S^{2^r-2} с центром в нуле. Последняя имеет элемент центральной симметрии C для преобразования $C(w_s : s \in \mathbf{b}) = (-w_s : s \in \mathbf{b})$. Рассмотрим подмножество $P = P_0 \cup \bigcup_{q, j_1, \dots, j_q} P_{j_1, \dots, j_q}$ в S^{2^r-2} , где $1 \leq q \leq 2^{r-1} - 1$, всех точек характеризуемых условиями:

$$P_0 := \{(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2} : w_s \leq 0, \forall s \in \hat{b}\},$$

$$P_{j_1, \dots, j_q} := \{(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2} : w_s \leq 0, \forall s \in \hat{b} \setminus \{j_1, \dots, j_q\},$$

$$w_s \geq 0, \forall s \in \{j_1, \dots, j_q\}\},$$

тогда $P \cup CP = S^{2^r-2}$ и пересечение $P \cap CP$ является $(2^r - 3)$ -мерным над $\mathbf{R}$. Эта сфера S^{2^r-2} соответствует вложению $\theta_1 : (w_s : s \in \hat{b}) \mapsto (0, w_s : s \in \hat{b}) \in \mathbf{R}^{2^r}$. Рассмотрим вложение $\mathbf{R}^{2^r}$ в $\mathcal{A}_r$ даваемое формулой $\theta_2 : (w_s : s \in \mathbf{b}) \mapsto \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s \in \mathcal{A}_r$. Это дает вложение $\theta := \theta_2 \circ \theta_1$ сферы S^{2^r-2} в $\mathcal{A}_r$. Каждая окружность единичного радиуса с центром в 0 в $\mathcal{A}_r$ пересекает экватор $\theta(S^{2^r-2})$ сферы $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$. Соединим каждую точку $\sum_{s \in \hat{b}} w_s s$ на $\theta(S^{2^r-2})$ с нулем в $\mathcal{A}_r$ отрезком прямой $\{a \sum_{s \in \hat{b}} w_s s : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$, где $\bar{\mathbf{R}}_+ := \{a \in \mathbf{R} : a \geq 0\}$. Эта линия пересекает круг вложенный в $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$, который является следом окружности $\{\exp(2\pi aM) : a \in [0, 1]\}$ радиуса 1 в $\mathcal{A}_r$, где $M = \sum_{s \in \hat{b}} w_s s$. Поэтому, $\psi(s) := \exp(v + 2\pi aM)$ как функция (v, a) для фиксированного $(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2}$ определяет биекцию области $X \setminus \{aM : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ на свой образ, где X – это $\mathbf{R}^2$ вложенное как $(v, a) \mapsto (v + aM) \in \mathcal{A}_r$, где $v \in \mathbf{R}$. Это означает, что $Ln(z)$ корректно определен на каждом подмножестве $X \setminus \{aM : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ in $\mathcal{A}_r$. Объединение $\bigcup_{(w_s : s \in \hat{b}) \in P} \{a \sum_{s \in \hat{b}} w_s s : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ дает $(2^r - 1)$ -мерное (над $\mathbf{R}$) подмножество $Q := Q_0 \cup \bigcup_{q, j_1, \dots, j_q} Q_{j_1, \dots, j_q}$, где $Q_0 = \theta(S_0)$, $Q_{j_1, \dots, j_q} := \theta(S_{j_1, \dots, j_q})$, $S_0 := \bar{\mathbf{R}}_+ P_0$, $S_{j_1, \dots, j_q} := \bar{\mathbf{R}}_+ P_{j_1, \dots, j_q}$, $1 \leq q \leq 2^{r-1} - 1$. Тогда, на области $\mathcal{A}_r \setminus Q$, функция $\exp(z)$ определяет биекцию с образом $\exp(\mathcal{A}_r \setminus Q)$ и ее обратная функция $Ln(z)$ корректно определена на $\mathcal{A}_r \setminus \exp(Q)$. Вращением $\mathcal{A}_r \setminus Q$ можно получить другие области на которых Ln может быть определен как функция (с одним значением в каждой точке, то есть, $Ln(z)$ – это одна точка в $\mathcal{A}_r$), но не на всей $\mathcal{A}_r$). Это означает, что $Ln(z)$ – это локально биективная функция. Выполняются элементарные тождества

$\cos(2\pi - \phi) = \cos(\phi)$ и $\sin(2\pi - \phi) = -\sin(\phi)$ для любого $\phi \in \mathbf{R}$. Если $0 < \phi < 2\pi$, то $w_1 \sin(\phi)/\phi = w_2 \sin(2\pi - \phi)/(2\pi - \phi)$ тогда и только тогда, когда $w_1 = -\phi w_2/(2\pi - \phi)$. Для исключения этой неопределённости положим в формуле (3.3) $\phi = |M| \geq 0$ и $w_{i1} \geq 0$. Поэтому, $Ln(\exp(z)) = z$ на $\mathcal{A}_r \setminus Q$, следовательно, используя формулы (3.4, 3.5) получим многозначную функцию

$$(3.8) \quad Ln(z) = \ln(|z|) + Arg(z), \text{ где } Arg(z) := arg(z) + 2\pi aM$$

на $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, где $\ln$ – это обычный действительный логарифм на $(0, \infty)$, $a \in \mathbf{Z}$,

$$|z| \exp(2\pi arg(z)) = z, \quad arg(z) := \sum_{s \in \hat{b}} w_{s,z} s, \quad (w_{s,z} : s \in \hat{b}) \in \mathbf{R}^{2^r-1},$$

$\sum_{s \in \hat{b}} w_{s,z}^2 \leq 1$, $w_{i1,z} \geq 0$, $M = \sum_{s \in \hat{b}} w_s s$ – это произвольный вектор единичной длины (то есть, $|M| = 1$) в $\mathcal{I}_r$ коммутирующий с $arg(z) \in \mathcal{A}_r$, $arg(z)$ определён однозначно таким ограничением $(w_s : s \in \hat{b})$, например, $M = \zeta arg(z)$ для любого $\zeta \in \mathbf{R}$, когда $arg(z) \neq 0$.

Для любого фиксированного $M \in \mathcal{I}_r$ $\exp(aM)$ – это однопараметрическое семейство специальных преобразований алгебры $\mathcal{A}_r$, то есть, $\exp(aM)\eta \in \mathcal{A}_r$ для любого $\eta \in \mathcal{A}_r$ и $|\exp(aM)| = 1$, где $\mathcal{A}_r$ как линейное пространство над $\mathbf{R}$ изоморфно $\mathbf{R}^{2^r}$. С другой стороны, существуют специальные преобразования алгебры $\mathcal{A}_r$, для которых $a = \pi/2 + \pi k$, но M – это переменная с $|M| = 1$, где $k \in \mathbf{Z}$, тогда $\exp(z) = (-1)^k M$. Каждой замкнутому пути (петле) γ в $\mathcal{A}_r$ соответствует петля $P_\xi(\gamma)$ в $\mathbf{R}$ -линейном подпространстве $\xi \ni 0$, где P_ξ – это проекция на ξ , например,

$$P_{\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}s}(z) = (z - s(zs))/2 = w_1 + w_s s \text{ для } \xi = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}s,$$

$$P_{\mathbf{R}s \oplus \mathbf{R}p}(z) = sP_{\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}s^*p}(s^*z) = [z - p(s^*z(s^*p))]/2 = w_s s + w_p p$$

для любого $s \neq p \in \hat{b}$. Частные случаи таких специальных преобразований также соответствуют $w_s = 0$ для $s \in \hat{b}$ при $M \neq 0$. Каждой петле γ в $\mathcal{A}_r$ и любым a и b в $\mathcal{A}_r$ с $ab \neq 0$ соответствует петля $(a\gamma)b$ в $\mathcal{A}_r$.

Вместо римановой двумерной поверхности комплексной логарифмической функции мы получим 2^r -мерное многообразие W , то есть, подмножество в $Y^{\aleph_0} := \prod_{i \in \mathbf{Z}} Y_i$, где $Y_i = Y$ для любого i , так что каждое Y является копией $\mathcal{A}_r$ вложенной в $\mathcal{A}_r \times \mathbf{R}^{2^r-1}$ и разрезанной по $(2^r - 1)$ -мерному подмногообразию Q и с диффеоморфной деформацией окрестности Q , так что два $(2^r - 1)$ -мерных края ${}_1Q$ и ${}_2Q$ для Y диффеоморфные Q не пересекаются вне нуля, ${}_1Q \cap {}_2Q = \{0\}$, то есть, граница ∂Q также разрезана везде вне нуля. Мы имеем $\partial Q = \bigcup_{j \in \hat{b}} \partial Q^j$, где $\partial Q^j := \{\theta(w_s : s \in \hat{b}) : w_j = 0, (w_s : s \in \hat{b}) \in S_0 \cup \bigcup_{q, j_1, \dots, j_q} S_{j_1, \dots, j_q}\}$, для любого $j \in \hat{b}$. Для исключения вращений в каждом подпространстве $v + a\xi$ изоморфном $\mathbf{R}^2$ и вложенном в $\mathbf{R} + \partial Q^j$, где $\xi \in \partial Q^j$, $\xi \neq 0$, мы разрезали ∂Q . Тогда в $\mathcal{A}_r \times \mathbf{R}^{2^r-1}$ две копии Y_i и Y_{i+1} склеены отношением эквивалентности ${}_2Q_i$ с ${}_1Q_{i+1}$ посредством отрезков $\{a_{l,i}M : a_{l,i} \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$, так что $a_{1,i+1} = a_{2,i}$ для любого $a_{l,i} \in \bar{\mathbf{R}}_+$ и любых данных $(w_s \in \mathbf{R} : s \in \hat{b}) \in P$ с $M = \sum_{s \in \hat{b}} w_s s$, $|M| = 1$. Это задает 2^r -мерное многообразие W вложенное в $\mathcal{A}_r \times \mathbf{R}^{2^r-1}$ и $Ln : \mathcal{A}_r \setminus \{0\} \rightarrow W$ – это однозначная функция, то есть, $Ln(z)$ – это одноточечное подмножество в W для любого $z \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$.

В случае $\mathcal{A}_\Lambda$ с $card(\Lambda) \geq \aleph_0$ рассмотрим семейство Υ подмножеств в $\hat{b} = \hat{b}_\Lambda$, так что если $A \in \Upsilon$, то $\hat{b} \setminus A \notin \Upsilon$, положим $Q := \{M \in \mathcal{I}_\Lambda : w_s \leq 0 \forall s \in A, w_s \geq 0 \forall s \in \mathbf{b} \setminus A, A \in \Upsilon\}$, где $M = \sum_{s \in \hat{b}} w_s s$, $w_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Тогда $\partial Q = \bigcup_{j \in \hat{b}} \partial Q^j$, где $\partial Q^j := \{z \in Q : w_j = 0\}$. Рассмотрим $Y^{\aleph_0} = \prod_{k \in \mathbf{N}} Y_k$, где $Y_k = Y$ – это копия $\mathcal{A}_\Lambda$ вложенная в $\mathcal{A}_\Lambda \times l_2(\mathbf{R})$ разрезанная по бесконечномерному подмногообразию Q и с диффеоморфной деформацией окрестности Q , так что бесконечномерные края ${}_1Q$ и

${}_2Q$ не пересекаются вне нуля, ${}_1Q \cap {}_2Q = \{0\}$. Тогда в $\mathcal{A}_\infty \times l_2(\mathbf{R})$ две копии Y_k и Y_{k+1} склеены отношением эквивалентности ${}_2Q_k$ с ${}_1Q_{k+1}$ по отрезкам $\{a_{l,k}M : a_{l,k} \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$, так что $a_{1,k+1} = a_{2,k}$ для любого $a_{l,k} \in \bar{\mathbf{R}}_+$ и любого данного $M = \sum_{s \in \hat{b}} w_s s \in Q \cap S(0, 1, \mathcal{I}_\Lambda)$ с $|M| = 1$, где $S(z_0, \rho, \mathcal{I}_\Lambda) := \{z \in \mathcal{I}_\Lambda : |z - z_0| = \rho\}$, $\rho > 0$. Это определяет бесконечномерное многообразие W вложенное в $\mathcal{A}_\Lambda \times l_2(\mathbf{R})$ и $Ln : \mathcal{A}_\Lambda \setminus \{0\} \rightarrow W$ – это однозначная функция.

3.8. Замечание. В действительном случае тригонометрические и гиперболические функции различны, но определенные как функции $\mathcal{A}_r$ -переменной они связаны. Положим

$$\begin{aligned}\cos(v) &:= [\exp(vM) + \exp(-vM)]/2, \\ \sin(v) &:= [\exp(vM) - \exp(-vM)]M^*/2, \\ \cosh(v) &:= [\exp(v) + \exp(-v)]/2, \\ \sinh(v) &:= [\exp(v) - \exp(-v)]/2\end{aligned}$$

для любого $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ и

$$\cos(z) := [\exp(z) + \exp(-z)]/2 \text{ и}$$

$\sin(z) := [\exp(z) - \exp(-z)](z^* - z)/[2|z - z^*|]$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, где $z \neq z^*$ в последнем случае, тогда

$$\begin{aligned}\cos(v + yM) &= \cos(v) \cosh(y) - \sin(v) \sinh(y)M, \\ \sin(v + yM) &= \sin(v) \cosh(y) + \cos(v) \sinh(y)M\end{aligned}$$

для любых $v, y \in \mathbf{R}$ и M как выше.

3.8.1. Предложение. Пусть предположения предложения 2.2.1 выполнены при $k = n = t$ и $f \circ g(z) = z$ для любого $z \in U$, где $g : U \rightarrow W$ – это биективное сюръективное отображение, то есть, существует обратное отображение $f = g^{-1}$. Тогда

$(Df(g)|_{g=g(z)}) \cdot \eta = (Dg(z))^{-1} \cdot \eta$ для любого $\eta \in \mathcal{A}_r^n$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$. Если f является или z , или $\tilde{z}$, или $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемой, тогда g является или z , или $\tilde{z}$, или $(z, \tilde{z})$ -супердифференцируемой соответственно.

Доказательство. В силу предложения 2.2.1 $(Df(g) \cdot ((Dg(z)) \cdot h) = h$ для любого $z \in U$ и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$. Поскольку $Dg(z)$ является $\mathbf{R}$ -однородным и $\mathcal{A}_r^n$ -аддитивным, то DG имеет обратный оператор, где $G = g \circ \sigma$ – это диффеоморфизм действительной области P (в $\mathbf{R}^{2^n}$ при $r \in \mathbf{N}$ или $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ при бесконечном r) соответствующей U , $\sigma(P) = U$, где $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ – гильбертово пространство над $\mathbf{R}$ с базисом мощности $\text{card}(\Lambda)$. Поэтому, существует обратный $\mathbf{R}$ -однородный $\mathcal{A}_r^n$ -аддитивный оператор $(Dg(z))^{-1}$ на $\mathcal{A}_r^n$. Полагая $\eta = (Dg(z)) \cdot h$, мы получим утверждение этого предложения. Последнее утверждение этого предложения следует из предложения 2.3, так как g является или z , или $\tilde{z}$, или $({}_1z, {}_2z)|_{{}_1z=z, {}_2z=\tilde{z}}$ -представленной вместе с f .

3.8.2. Предложение. Пусть $g : U \rightarrow \mathcal{A}_r$, $\infty \geq r \geq 3$ или $r = \Lambda$, является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на U , где U открыто в $\mathcal{A}_r$. Если $0 \notin g(U)$, то существует $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция $f = 1/g$ на U , так что

$$(Df(z)) \cdot h = [D(1/g)|_{g=g(z)}] \cdot ((Dg(z)) \cdot h) \text{ для любого } h \in \mathcal{A}_r.$$

В частности, $(Df(z)) \cdot h = -\xi[((Dg(z)) \cdot h)\xi]$ для $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, где $\xi := 1/g$.

Доказательство. В силу формул (3.2, 3.3) существует $f = 1/g$, то есть, $f(z)g(z) = g(z)f(z) = 1$ для любого $z \in U$, но это не означает существование решения уравнения $(ab)z = a$ в общем в $\mathcal{A}_r$ для $r \geq 4$. Используя предложение 2.2.1, получим

$$(Df(z)) \cdot h = (D(1/g)|_{g=g(z)}) \cdot ((Dg(z)) \cdot h),$$

так что $g((D(1/g)) \cdot h) = -((Dg) \cdot h)/g = -h/g$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. То есть, существует $D(1/g)$. Если $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, то $(D(1/g)) \cdot h = -\xi(h\xi)$, где $\xi := 1/g$, так как $\mathbf{K}$ является альтернативной.

3.8.3. Теорема. Функция Ln является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на любой области U в $\mathcal{A}_r$ полученной в результате $\mathcal{A}_r$ -голоморфного диффеоморфизма $\mathcal{A}_r \setminus Q$ на U , где $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$. Каждый путь γ в $\mathcal{A}_r$ такой, что $\gamma(t) = \rho \exp(2\pi t n M)$ с $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbf{R}_+$, $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$ замкнут в $\mathcal{A}_r$ тогда и только тогда, когда $n \in \mathbf{N}$, где $\rho > 0$. В этом случае

$$(3.9) \quad \int_{\gamma} z^{-1} dz = \int_{\gamma} d(Ln z) = 2\pi n M.$$

Доказательство. В силу формул (3.2, 3.3) каждое $0 \neq z \in \mathcal{A}_r$ имеет z^{-1} . Если U и V – это два открытых подмножества в $\mathcal{A}_r$ и $g : V \rightarrow U$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфным диффеоморфизмом V на U и f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на V , тогда $f \circ g^{-1}$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на U , так как $(f \circ g^{-1})'(z) \cdot h = (f'(\zeta)|_{\zeta=g^{-1}(z)} \cdot (g^{-1}(z))') \cdot h$ для любого $z \in U$ и любого $h \in \mathcal{A}_r$ (см. предложения 2.2.1 и 3.8.1). Поскольку $\exp$ является диффеоморфизмом из $\mathcal{A}_r \setminus Q$ на $\mathcal{A}_r \setminus \exp(Q)$, то Ln является $\mathcal{A}_r$ -голоморфным на $\mathcal{A}_r \setminus Q$ в силу предложения 3.8.1 и на каждом его $\mathcal{A}_r$ -голоморфном образе после выбора определенной ветви многозначной функции $Ln(z)$ (см. формулу (3.8)).

Путь γ определен для любого $t \in \mathbf{R}$ не только для $t \in [0, 1]$ благодаря существованию $\exp$. В силу формул (3.2, 3.3) путь γ замкнут (то есть, $\gamma(t_0) = \gamma(t_0 + 1)$) для любого $t_0 \in \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда $\cos(2\pi n) = \cos(0) = 1$ и $\sin(2\pi n) = 0$, то есть, $n \in \mathbf{N}$.

Из определения интеграла вдоль пути следует равенство: $\int_{\gamma} d(Ln z) = \int_0^1 (Ln z)' \cdot (\gamma'(t) dt)$. Рассмотрение интегральных сумм по разбиениям P отрезка $[0, 1]$ и взятие предела по семейству всех P с диаметром разбиения стремящемся к нулю дает, что $\int_{\gamma} d(Ln z) = Arg(\gamma(1)) - Arg(\gamma(0))$ для выбранной ветви функции $Arg(z)$ (см. формулу (3.8)). Поэтому, $\int_{\gamma} d(Ln z) = 2\pi n M$.

Поскольку $\mathcal{A}_r$ ассоциативная со степенями, то z коммутирует с собой, следовательно, $\exp(z)' \cdot z = \exp(z)z$. Поэтому, $\exp(Ln(z))' \cdot 1 = (d \exp(\eta)/d\eta)|_{\eta=Ln(z)} \cdot (Ln(z))' \cdot 1 = \exp(Ln(z))(Ln(z))' \cdot 1$, следовательно, $(Ln(z))' \cdot 1 = \exp(-Ln(z)) = z^{-1}$ и неизбежно

$$\lim_P I(z^{-1}, \gamma; P) = \lim_P \sum_l \hat{z}_l^{-1} \Delta z_l = \lim_P \Delta Ln(z_l) = \int_{\gamma} dLn(z),$$

следовательно, $\int_{\gamma} z^{-1} dz = \int_{\gamma} dLn(z)$. То есть, $\int_{\gamma} dLn(z)$ можно рассматривать как определение $\int_{\gamma} z^{-1} dz$.

3.8.4. Обозначения. Обозначим упорядоченную композицию функций $\{f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_m\}_{q(m)}$, где $q(m) := (q_m, \dots, q_3)$, $q_m \in \mathbf{N}$ означает, что первая (наиболее внутренняя скобка) композиции является $f_{q_m} \circ f_{q_{m+1}} = f_{q_m}(f_{q_{m+1}}) =: [f_{q_m} \circ f_{q_{m+1}}]$, так что ситуации $(f_1 \circ \dots \circ [f_t \circ f_{t+1}] \circ \dots \circ [f_w \circ f_{w+1}] \circ \dots \circ f_m)$ с двумя одновременными независимыми композициями, но $t < w$ по нашему определению упорядочения соответствует $q_m = w$ (в отличии от умножения). После первой композиции мы получим композицию $({}^1 f_1 \circ \dots \circ {}^1 f_{m-1})$, где не менее, чем $(m-2)$ элементов те же, что и в первой композиции, тогда q_{m-1} соответствует первой композиции в новом упорядоченном семействе функций, и так далее по индукции от j до $j-1$, $j = m, m-1, \dots, 3$. Поскольку q_2 и q_1 единственны, то мы опустим их. После шагов $q_m, \dots, q_{m-j+1}$ пусть соответствующая композиция обозначается

$$\{ {}^j g_1 \circ \dots \circ {}^j g_{m-j} \}_{q(m-j)},$$

где ${}^jg_1, \dots, {}^jg_{m-j}$ – результаты композиций на предыдущих шагах, некоторые из них могут принадлежать множеству $\{f_1, \dots, f_m\}$. Если f_l появляется в композиции на $k = k(l)$ шаге, то могут быть два варианта: $f_l \circ {}^l g_p$ или ${}^l g_p \circ f_l$, где $p = p(l)$, $j = j(l) = k(l) - 1$, ${}^0 g_p := f_p$. В первом случае предположим, что $\text{dom}(f_l) \subset {}^j g_p(\text{dom } {}^j g_p)$, во втором случае пусть $\text{dom}({}^j g_p) \subset f_l(\text{dom}(f_l))$ для любого $l = 1, \dots, m$.

3.8.5. Предложение. Пусть $f_1, \dots, f_m$ – семейство $\mathcal{A}_r$ супердифференцируемых функций или все по z , или все по $\tilde{z}$, или все по $(z, \tilde{z})$, $f_j : U_j \rightarrow \mathcal{A}_r^{t(j)}$, U_j открыто в $\mathcal{A}_r^{t(j+1)}$, $t(j) \in \mathbf{N}$ для любого $j = 1, \dots, m$, так что их области удовлетворяют условиям выше, где $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$. Тогда

$$(i) \quad (D\{f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_m\}_{q(m)}(z)).h = \{Df_1({}^{j(1)}g_{p(1)}).Df_2({}^{j(2)}g_{p(2)}).\dots(Df_m(z)).h\}_{q(m)}$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^{t(m+1)}$, где $Df_l({}^{j(l)}g_{p(l)}).\xi = (Df_l(\eta)|_{\eta = {}^{j(l)}g_{p(l)}(z)}).\xi$ для любого $\xi \in \mathcal{A}_r^{t(l+1)}$. Более того, $\{f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_m\}_{q(m)}$ супердифференцируема или по z , или по $\tilde{z}$, или по $(z, \tilde{z})$ соответственно. Если $r = 2$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, то композиция в (i) ассоциативна, для любого $r \geq 3$ она может быть в общем неассоциативной. В отмеченной точке $z = a \in U_m$ она имеет вид:

$$(ii) \quad (D\{f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_m\}_{q(m)}(z)).h = \{Df_1(\eta_1).Df_2(\eta_2).\dots(Df_m(z)).h\}_{q(m)},$$

где $\eta_l := f_l(f_{l+1}(\dots f_{m-1}(f_m(z))\dots))$ для любого $l = 1, \dots, m-1$.

Доказательство. Для $m = 2$ это предложение было доказано в §2.2.1. Докажем это предложение по индукции и применим предложение 2.2.1 к парам функций в появляющихся композициях. Сначала отметим, что порядок композиций для дифференциала существен для $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$. Частный случай всех правосупердифференцируемых функций показывает, что в общем $(Df_1.Df_2).Df_3$ не равно $Df_1.(Df_2.Df_3)$, так как эти операторы правосуперлинейны, но умножение матриц с элементами принадлежащими алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$ неассоциативно. Более того, эти выражения могут быть различны, когда Df_j не являются правосуперлинейными, но только $\mathcal{A}_r^{t(j+1)}$ -аддитивными.

Пусть предложение доказано для всех $n \leq m$, рассмотрим $\{f_1 \circ \dots \circ f_{m+1}\}_{q(m+1)}$. В нем f_1 участвует в композиции на $k(1)$ шаге с ${}^{j(1)}g_{p(1)}$ вида $f_1 \circ {}^{j(1)}g_{p(1)}$, так как f_1 находится в крайней левой позиции. Если $k(1) = 1$, то ${}^{j(1)}g_{p(1)} = f_2$ и $\{f_1 \circ \dots \circ f_{m+1}\}_{q(m+1)} = \{[f_1 \circ f_2] \circ \dots \circ f_{m+1}\}_{q(m)}$. Применяя предположение индукции к композиции функций $[f_1 \circ f_2]$, $f_3, \dots, f_{m+1}$ и подставляя в нее выражение $D(f_1 \circ f_2)$ согласно предложению 2.2.1, мы получим утверждение этого предложения в случае $k(1) = 1$. Если $k(1) > 1$, тогда на $k(1)$ шаге рассматривается композиция f_1 и ${}^{j(1)}g_2, \dots, {}^{j(1)}g_{m+1-j(1)}$, где $j(1) = k(1) - 1 \geq 1$, следовательно, $m+1-j(1) \leq m$. Применяя предположение индукции к $\{f_1 \circ {}^{j(1)}g_2 \circ \dots \circ {}^{j(1)}g_{m+1-j(1)}\}_{q(m+1-j(1))}$ и тогда к каждой ${}^{j(1)}g_p$ для нетривиальной композиции, мы получим утверждение предложения в случае $k(1) > 1$. Последнее утверждение также следует в силу математической индукции рассмотренной выше и из предложения 2.2.1.

Теоретикомножественная композиция функций независима от скобок, но она зависит только от порядка функций: $(f_1 \circ f_2) \circ f_3(z) = (f_1 \circ f_2)(f_3(z)) = f_1(f_2(f_3(z))) = f_1 \circ (f_2 \circ f_3(z))$, и т.д. по индукции. Неассоциативность в общем появляется после супердифференцирования над $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$. Поскольку $\{f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_m\}_{q(m)}(z) = f_1(f_2(\dots(f_m(z))\dots))$, то для отмеченной точки $z = a \in U_m$ формула (i) принимает вид (ii).

В случае $r = 2$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, каждый $\mathbf{R}$ -однородный $\mathbf{H}$ -аддитивный оператор A имеет вид

$A.h = \sum_j B_j h C_j$ для любого $h \in \mathbf{H}^n$, где сумма по j конечна, $1 \leq j \leq 4$ (см. формулы в доказательстве теоремы 3.28 [27]), где B_j является $n \times n$ матрицей, h – это $n \times 1$ матрица, A_j – это 1×1 матрица с элементами из $\mathbf{H}$. Пусть A_k – это оператор соответствующий $Df_k(\eta_k)$ для данной отмеченной точки $z = a \in U_3$, $A_k.h = \sum_j B_{j,k} h C_{j,k}$ для любого $k = 1, 2, 3$, тогда $(A_1.A_2).A_3.h = \sum_{j_1, j_2, j_3} (B_{j_1,1} B_{j_2,2}) (B_{j_3,3} h C_{j_3,3}) (C_{j_2,2} C_{j_1,1}) = \sum_{j_1, j_2, j_3} B_{j_1,1} (B_{j_2,2} B_{j_3,3}) h (C_{j_3,3} C_{j_2,2}) C_{j_1,1} = (A_1.(A_2.A_3)).h$, так как матричное умножение над $\mathbf{H}$ ассоциативно. Применяя последнюю формулу по индукции, мы получим, что в случае $\mathbf{H}$ композиция в формуле (i) ассоциативна.

3.9. Теорема. Пусть f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на открытой области U в $\mathcal{A}_r$, $\infty \geq r \geq 3$ или $r = \Lambda$. Если $(\gamma + z_0)$ и ψ представлены как кусочные объединения путей $\gamma_j + z_0$ и ψ_j относительно параметра $\theta \in [a_j, b_j]$ и $\theta \in [c_j, d_j]$ соответственно с $a_j < b_j$ и $c_j < d_j$ для любого $j = 1, \dots, n$, и $\bigcup_j [a_j, b_j] = \bigcup_j [c_j, d_j] = [0, 1]$, $\gamma_j + z_0$ и ψ_j гомотопны относительно $U_j \setminus \{z_0\}$, где $U_j \setminus \{z_0\}$ является $(2^r - 1)$ -связной открытой областью в $\mathcal{A}_r$, так что $\pi_{s,p,t}(U_j \setminus \{z_0\})$ просто связна в $\mathbf{C}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ ($\forall 0 \leq k \in \mathbf{Z}$ и $P_m(U_j \setminus \{z_0\})$ является $(2^m - 1)$ -связной для любого $4 \leq m \in \mathbf{N}$ если $r = \infty$ или $r = \Lambda$), для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = t + u \in \mathcal{A}_r$. Если $(\gamma + z_0)$ и ψ – замкнутые спрямляемые пути (петли) в U , так что $\gamma(\theta) = \rho \exp(2\pi\theta M)$ с $\theta \in [0, 1]$ и отмеченной $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$ и $z_0 \notin \psi$. Тогда

$$(3.10) \quad (2\pi)f(z)M = \int_{\psi} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$$

для любого $z \in U$ такого, что $|z - z_0| < \inf_{\zeta \in \psi([0,1])} |\zeta - z_0|$. Если $\mathcal{A}_r$ альтернативна, то есть, $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, или $f(z) \in \mathbf{R}$, тогда

$$(3.11) \quad f(z) = (2\pi)^{-1} \left(\int_{\psi} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta \right) M^*.$$

Доказательство. Соединим γ и ψ спрямляемым путем ω , так что $z_0 \notin \omega$, который проходится дважды в одном направлении и противоположном, обозначаемом ω^- , так что $\omega_j \cup \psi_j \cup \gamma_j \cup \omega_{j+1}$ гомотопна точке относительно $U_j \setminus \{z_0\}$ для подходящих ω_j и ω_{j+1} , где ω_j соединяет $\gamma(a_j)$ с $\psi(c_j)$, а ω_{j+1} соединяет $\psi(d_j)$ с $\gamma(b_j)$, так что z и $z_0 \notin \omega_j$ для любого j . Тогда $\int_{\omega_j} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = -\int_{\omega_j^-} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$ для любого j . В силу теоремы 2.15 выполняется равенство $-\int_{\gamma+z} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = \int_{\psi} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$. Поскольку $\gamma + z$ – это окружность вокруг z , то ее радиус $\rho > 0$ может быть выбран настолько малым, что $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta, z)$, где α – это непрерывная функция на U^2 , так что $\lim_{\zeta \rightarrow z} \alpha(\zeta, z) = 0$, тогда $\int_{\gamma+z} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = \int_{\gamma+z} f(z)(\zeta - z)^{-1} d\zeta + \delta(\rho) = 2\pi f(z)M + \delta(\rho)$, где $|\delta(\rho)| \leq \left| \int_{\gamma} \alpha(\zeta, z)(\zeta - z)^{-1} d\zeta \right| \leq 2\pi \sup_{\zeta \in \gamma} |\alpha(\zeta, z)| C_1 \exp(C_2 \rho^6)$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные (см. неравенство (2.7.4)), следовательно, $\lim_{\rho \rightarrow 0, \rho > 0} \delta(\rho) = 0$. Взятие предела при $\rho > 0$ стремящемся к нулю дает утверждение этой теоремы. Если $r = 3$, то есть, $\mathcal{A}_r = \mathbf{K}$, или $f(z) \in \mathbf{R}$, тогда $((2\pi)f(z)M)M^* = 2\pi f(z)$.

3.9.1. Следствие. Пусть f , U , ψ , z и z_0 те же, что и в теореме 3.9, тогда

$$|f(z)| \leq \sup_{(\zeta \in \psi, h \in \mathcal{A}_r, |h| \leq 1)} |\hat{f}(\zeta).h|.$$

3.9.2. Теорема. Пусть $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ – последовательность $\mathcal{A}_r$ -голоморфных функций на окрестности W ограниченного канонического замкнутого подмножества U в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$, так что $\text{Int}(U)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.9 и существует $\delta > 0$, для которого $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ равномерно сходится на δ -окрестности топологической границы $\text{Fr}(U)^\delta$ множества U . Тогда $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ сходится равномерно на U к $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функции на $\text{Int}(U)$.

Доказательство. В силу §2.7 последовательность $\hat{f}_n$ равномерно сходится на $\text{Fr}(U)^\delta \cap W$. Рассмотрим сечения W плоскостями $i_{2m}\mathbf{R} \oplus i_{2m+1}\mathbf{R}$ для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ и рассмотрим спрямляемые петли γ в $\text{Fr}(U)^\delta \cap W \cap (i_{2m}\mathbf{R} \oplus i_{2m+1}\mathbf{R})$. Для $r > 3$ рассмотрим все возможные вложения $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ и такие копии $\mathbf{K}$ содержат все соответствующие петли γ . В силу оценки 2.7.(4) и теоремы 3.9 последовательность $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ сходится равномерно на U к голоморфной функции, так как U имеет конечный диаметр.

3.10. Теорема. Пусть f – непрерывная функция на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, $3 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$. Если f является $\mathcal{A}_r$ -интегрально голоморфной на U , тогда f является $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитической на U .

Доказательство. Пусть $z_0 \in U$ – отмеченная точка и пусть Γ обозначает семейство всех спрямляемых путей $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, так что $\gamma(0) = z_0$, тогда $U_0 = \{\gamma(1) : \gamma \in \Gamma\}$ – связная компонента z_0 в U . Поэтому, $g = \{\gamma(1), \int_\gamma f(z)dz\}$ – это функция с областью U_0 . Из формул (3.2, 3.3) следует, что каждое $0 \neq z \in \mathcal{A}_r$ имеет обратное $z^{-1}z = zz^{-1} = 1$ (это не означает существования решения уравнения $(ab)z = a$ с $b \neq 0$ в общем на $\mathcal{A}_r$ для $r \geq 4$). В силу предложения 2.2.1 $\partial_z(\zeta - z)^{-k}.1 = k(\zeta - z)^{-k-1}$, так как $0 = (\partial_z 1).h = (\partial_z z^k z^{-k}).h = ((\partial_z z^k).h)z^{-k} + z^k((\partial_z z^{-k}).h)$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$ и $z \neq 0, z \in \mathcal{A}_r$. Как в §2.15 можно доказать, что $F(z) := \int_\gamma f(z)dz$, для любого спрямляемого пути γ в U , зависит лишь от начальной и конечной точек. Этот интеграл конечен, так как $\gamma([0, 1])$ содержится в компактном каноническом замкнутом подмножестве $W \subset U$, на котором f ограничена. Поэтому, $(\partial \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta / \partial z).h = \hat{f}(z).h$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_r$, $(\partial \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta / \partial \bar{z}) = 0$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_r$, где z_0 – отмеченная точка в U , так что z и z_0 принадлежат одной связной компоненте в U , так как $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta = \hat{f}(z).\Delta z + \epsilon(\Delta z)|\Delta z|$, где $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \epsilon(\Delta z) = 0$ (см. §2.5). В частности, $\hat{f}(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$. Здесь $\hat{f}$ корректно определено для любого $f \in C^{1,0}(U, \mathcal{A}_r)$ (см. следствие 2.15.1) в силу непрерывной супердифференцируемости функционала интегрирования на $C^0(U, \mathcal{A}_r)$. Для данной $z \in U$ выберем окрестность W удовлетворяющую условиям теоремы 3.9. Тогда существует спрямляемый путь $\psi \subset W$, так что $f(z)$ представляется формулой (3.10). Последний интеграл бесконечно дифференцируем по z , так что

$$(3.12) \quad 2\pi((\partial^k F(z) / \partial z^k).h)M = \left(\int_\psi F(\zeta)(\partial^k(\zeta - z)^{-1} / \partial z^k).h \right) d\zeta,$$

где $h \in \mathcal{A}_r^k$, в частности, для $h = (1, \dots, 1) =: 1^{\otimes k}$:

$$(3.13) \quad 2\pi((\partial^k F(z) / \partial z^k).1^{\otimes k})M = k! \left(\int_\psi F(\zeta)(\zeta - z)^{-k-1} d\zeta \right),$$

где $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Для простоты обозначений мы можем опустить $1^{\otimes k}$ слева в (3.13). В частности, мы можем выбрать шар $W = B(a, R, \mathcal{A}_r) := \{\xi \in \mathcal{A}_r : |\xi - a| \leq R\} \subset U$ для достаточно малого $R > 0$ и $\psi = \gamma + a$, где $\gamma(s) = \rho \exp(2\pi t M)$ с $t \in [0, 1]$, $0 < \rho < R$. Если мы докажем, что $F(z)$ является $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитической, то очевидно её z -производная $f(z) = F'(z).1$ также будет $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитической.

Если $r \geq 4$, то существуют различные вложения алгебры октонионов $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ (см. §3.6.2).

Предположим, что существует ряд $f(z) := \sum_j a_j(z - z_0)^j b_j$ сходящийся для $|z - z_0| < \rho$, где a_j, b_j для любого j принадлежат одной и той же подалгебре $\Upsilon_a \hookrightarrow \mathbf{C}$, $0 \neq a \in \mathcal{A}_r$, коэффициенты разложения не зависят от вложения $\Upsilon_{a, z-z_0}$ в $\mathcal{A}_r$, в то время как $z - z_0$ варьируется в пределах одной и той же копии $\mathbf{K}$. Тогда это разложение выполняется для любого $z \in \mathcal{A}_r$ с $|z - z_0| < \rho$, так как различные вложения $\mathbf{K}$ (с генераторами $\{1, M_1, \dots, M_7\} \hookrightarrow \mathcal{A}_r$, так что $|M_i| = 1$, $\text{Re}(M_i M_j) = 0$ и $|M_i M_j| = |M_i| |M_j|$ для любого $i \neq j$) в $\mathcal{A}_r$ дают все возможные значения $z \in \mathcal{A}_r$ с $|z - z_0| < \rho$. Рассмотрим ψ , так что $\Upsilon_{\zeta-a, z-a}$ имеет вложение в $\mathbf{K}$ для любого $\zeta \in \psi$, что в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15.

В силу последнего утверждения используя альтернативность $\mathbf{K}$, рассмотрим $z \in B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$ с $0 < \rho' < \rho$, тогда $|z - a| < |\zeta - a|$ для любого $\zeta \in \psi$ и $(\zeta - a - (z - a))^{-1} = (1 - (\zeta - a)^{-1}(z - a))^{-1}(\zeta - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ((\zeta - a)^{-1}(z - a))^k (\zeta - a)^{-1}$, где $0 \notin \psi$. Поэтому,

$$(3.14) \quad 2\pi F(z)M = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(z),$$

$$\text{где } \phi_k(z) := \left(\int_{\psi} F(\zeta) ((\zeta - a)^{-1}(z - a))^k (\zeta - a)^{-1} d\zeta \right).$$

Таким образом, $|\phi_k(z)| \leq \sup_{\zeta \in \psi} |F(\zeta)| (\rho'/\rho)^{-k}$ для любого $z \in B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$ и ряд (3.14) сходится равномерно на $B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$. Каждая функция $\phi_k(z)$ очевидно $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитична на $B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$, следовательно, также $F(z)M$ локально z -аналитична. Поскольку для любого $a \in U$ существует $\rho' > 0$, для которого это выполняется, то $F(z)M$ является $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитической функцией. Теперь запишем $f(z) = \sum_{s \in \mathbf{b}} f_s s$, где $f_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Если петля γ невырождена, тогда петли $s\gamma$, γs , $(2^r - 2)^{-1} \{-\gamma + \sum_{s \in \hat{b}} s(\gamma s^*)\} = \tilde{\gamma}$ невырождены. Если

(i) $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$, то $\int_{\gamma} s f(\zeta) d\zeta = 0$ и $\int_{\gamma} f(\zeta) s d\zeta = 0$ (см. теорему 2.7). В силу формул 2.8.(2):

$$f_1 = (f + (2^r - 2)^{-1} \{-f + \sum_{s \in \hat{b}_r} s(f s^*)\})/2 \text{ и}$$

$$f_p = (i_p(2^r - 2)^{-1} \{-f + \sum_{s \in \hat{b}_r} s(f s^*)\} - f i_p)/2$$

для любого $i_p \in \hat{b}_r$ (в случае $\mathcal{A}_{\infty}$ воспользуемся $\lim_{r \rightarrow \infty}$ справа в этих формулах, а для $\mathcal{A}_{\Lambda}$, $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$ можно использовать то, что для любого $z \in \mathcal{A}_{\Lambda}$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_{\infty}$, содержащая это z) мы имеем, что условие (i) эквивалентно: $\int_{\gamma} f_s(\zeta) d\zeta = 0$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поэтому, доказательство выше показывает, что каждая функция $2\pi f_s(z)M$ является $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитической, где M произвольно в $\mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Но $f_s(z) \in \mathbf{R}$ для любого $z \in U$, следовательно, $f_s(z) = (2\pi f_s(z)M)(2\pi)^{-1}M^* = f_s(z)$ является $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитической для любого $s \in \mathbf{b}$, следовательно, f является также $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитической на U .

3.11. Замечание. Теоремы 2.11, 2.15, 2.16, 3.10 и следствие 2.13 обосновывают эквивалентность понятий $\mathcal{A}_r$ -голоморфных, $\mathcal{A}_r$ -интегрально голоморфных и $\mathcal{A}_r$ локально z -аналитических классов функций на областях удовлетворяющих условиям выше.

3.11.1. Определения. Пусть U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ и $f \in C^0(U, \mathcal{A}_r)$, тогда мы скажем, что f обладает первообразной $g \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, если $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$. Область U в $\mathcal{A}_r$ назовем $\mathcal{A}_r$ -голоморфно односвязной, если каждая $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на ней обладает первообразной.

Из §3.10 мы получим.

3.11.2. Теорема. Если $f \in C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$, $2 \leq r \leq \infty$, где U является $(2^r - 1)$ -связной ($P_m(U)$ является $(2^m - 1)$ -связной для любого $4 \leq m \in \mathbf{N}$ при $r = \infty$, а при $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$ также при всевозможных вложениях $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$ и всевозможных проекторах P_m); $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связна в $\mathbf{C}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$ в $\mathbf{b}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = t + u \in U$, U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, тогда существует $g \in C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$, так что $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$.

3.11.3. Теорема. Пусть U и V – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфно односвязные области в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ со связным пересечением $U \cap V \neq \emptyset$. Тогда $U \cup V$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфно просто связной.

3.12. Следствие. Пусть U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$, $2 \leq r \leq \infty$, тогда семейство всех $\mathcal{A}_r$ -голоморфных функций $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ имеет структуру $\mathcal{A}_r$ -алгебра.

Доказательство. Если $f_1(z) = \alpha g(z)\beta + \gamma h(z)\delta$ или $f_2(z) = g(z)h(z)$ для любого $z \in U$, где α, β, γ и $\delta \in \mathcal{A}_r$ – постоянные, g и h являются $\mathcal{A}_r$ -голоморфными функциями на U , тогда F_1 и F_2 являются дифференцируемыми по Фреше на U по $(w_s : s \in \mathbf{b})$ (см. §2.1 и §2.2) и $\partial_{\bar{z}} f_1(z) = \alpha(\partial_{\bar{z}} g)\beta + \gamma(\partial_{\bar{z}} h)\delta = 0$, и $\partial_{\bar{z}} f_2(z) = (\partial_{\bar{z}} g)h + g(\partial_{\bar{z}} h) = 0$, следовательно, f_1 и f_2 также $\mathcal{A}_r$ -голоморфны на U .

3.13. Предложение. Для любой комплексно голоморфной функции f в окрестности $\text{Int}(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$, $\infty > \rho > 0$, точки $q_0 \in \mathbf{C}$ и любого $2 \leq r \leq \infty$, $s \neq p \in \mathbf{b}_r$, существует $\mathcal{A}_r$ z -аналитическая функция g на окрестности $\text{Int}(B(a, \rho, \mathcal{A}_r))$ точки $a \in \mathcal{A}_r$, так что $s^*g_{s,p}(u, t_0) = f(v)$ на $\text{Int}(B(u_0, \rho, \mathbf{C}))$, $u = s(\text{Re}(v) + s^*(p\text{Im}_{\mathbf{C}}(v)))$, где $B(x, \rho, X) := \{y \in X : d_X(x, y) \leq \rho\}$ – это шар в пространстве X с метрикой d_X , $a = u_0 + t_0$, $u_0 \in \mathbf{C}_{s,p}$, $t_0 \in \mathcal{A}_{r,s,p}$, $u_0 = s(\text{Re}(q_0) + s^*(p\text{Im}_{\mathbf{C}}(q_0)))$, $\text{Im}_{\mathbf{C}}(v) := (v - \tilde{v})/(2i)$.

Доказательство. Среди условий (2.3.1) имеются независимые:

$$(3.15) \quad \partial F_1 / \partial {}^j w_p = \partial F_{pq^*} / \partial {}^j w_q, \\ \partial F_1 / \partial {}^j w_q = -\partial F_{pq^*} / \partial {}^j w_p$$

для любого $p = i_m$, $q = i_{m+1} \in \mathbf{b}_r$, $0 \leq m \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим однородную полиномиальную функцию на открытом шаре $\text{Int}(B)$ в $\mathcal{A}_r$, так что $P_n(\lambda z) = \lambda^n P_n(z)$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$, $P_n : \text{Int}(B) \rightarrow \mathcal{A}_r$, тогда P_{n+1} можно записать в виде

$$(3.16) \quad P_{n+1}(z) = \sum_{s \in \mathbf{b}_r; k; j_1, \dots, j_k} C_{s; k; j_1, \dots, j_k} v_1^{j_1} \dots v_k^{j_k} s;$$

где $v_l := w_{i_l}$ – действительная переменная для любого l , $z = \sum_{s \in \mathbf{b}_r} w_s s$, $0 \leq j_1 \in \mathbf{Z}, \dots, 0 \leq j_k \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}$, $j_1 + \dots + j_k = n + 1$, $C_{s; k; j_1, \dots, j_k} \in \mathbf{R}$ – действительный коэффициент разложения для любого $s, k, j_1, \dots, j_k$. В силу (2.3.1) функция f является право суперлинейно $\mathcal{A}_r$ -супердифференцируемой в точке z_0 тогда и только тогда, когда sf является право суперлинейно $\mathcal{A}_r$ -супердифференцируемой в z_0 для любого $s \in \mathbf{b}_r$. Тогда (3.15) применённое к (3.16) даёт условия на коэффициенты однородных полиномов давая его правосуперлинейную супердифференцируемость:

$$(3.17) \quad C_{1; k; j_1, \dots, j_{m+1}, \dots, j_k}(j_m + 1) = C_{pq^*; k; j_1, \dots, j_{m+1}+1, \dots, j_k}(j_{m+1} + 1) \text{ и} \\ C_{1; k; j_1, \dots, j_{m+1}+1, \dots, j_k}(j_{m+1} + 1) = -C_{pq^*; k; j_1, \dots, j_{m+1}, \dots, j_k}(j_m + 1),$$

для любого $p = i_m$, $q = i_{m+1}$ in $\mathbf{b}_r$. Поскольку $j_l + 1 \geq 1$ для любого l , то коэффициенты справа выражаются через коэффициенты слева, которые могут быть взяты как свободные переменные. Поэтому, для любого $n \geq 0$ существует нетривиальный (ненулевой) P_{n+1} удовлетворяющий (3.15). Очевидно, $\mathbf{R}$ -линейное пространство всех правосуперлинейно $\mathcal{A}_r$ -супердифференцируемых функций бесконечномерно, так как для любого n существует нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений (3.17).

Рассмотрим сначала продолжение в классе $\mathcal{A}_r$ -голоморфных функций с супердифференциалом, который необязательно правосуперлинеен на супералгеб-

ре $\mathcal{A}_r$. Поскольку f голоморфна в $\text{Int}(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$, то она имеет разложение $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q - q_0)^n$, где $f_n \in \mathbf{C}$ – коэффициенты разложения, $q \in \text{Int}(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$. Рассмотрим его продолжение на $\text{Int}(B(z_0, \rho, \mathcal{A}_r))$, так что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$, $z_0 = u_0 + t_0$, $u_0 = s(\text{Re}(q_0) + s^*(p\text{Im}_{\mathbf{C}}(q_0)))$, $t_0 \in \mathcal{A}_{r,s,p}$. Очевидно, что этот ряд сходится для любого $z \in \text{Int}(B(z_0, \rho, \mathcal{A}))$ и это продолжение f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфным, так как $f_n \in \mathcal{A}_r$ для любого n и $\partial f / \partial \bar{z} = 0$.

Рассмотрим теперь более узкий класс $\mathcal{A}_r$ голоморфных функций с правосуперлинейным супердифференциалом на супералгебре $\mathcal{A}_r$. Условия Коши-Римана для комплексно голоморфных функций являются частными случаями (частью) условий (3.15). Сгруппировав ряд для комплексно голоморфной функции f в ряд по однородным полиномам и применив (3.17), мы получим коэффициенты разложения для правосуперлинейно супердифференцируемого продолжения функции f на $\text{Int}(B(z_0, \rho, \mathcal{A}))$.

3.14. Предложение. Если f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, а $\ker(f'(z_0)) = \{0\}$ и $f'(z_0)$ является правосуперлинейной, тогда она является конформным отображением в отмеченной точке $z_0 \in U$, то есть, сохраняющей углы между дифференцируемыми кривыми. Если $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, то $\ker(f'(z_0)) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in U$ и f является правосуперлинейно супердифференцируемой в z_0 . Рассмотрим скалярное произведение $(*, *)_r$ в $\mathbf{C}^m$ как во введении, $m = 2^{r-1}$ для $r < \infty$, или в $l_2(\Lambda, \mathbf{C})$ наследуемое из $\mathcal{A}_\Lambda$ при $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$, где $(x, y)_{l_2} = \lim_{r \rightarrow \infty} (x_r, y_r)_r$ (см. также §3.6.2). Правосуперлинейному оператору $f'(z_0)$ соответствует единственный ограниченный оператор A на $\mathbf{C}^m$ или $l_2(\Lambda, \mathbf{C})$ соответственно, так что $\ker(A) = \{0\}$, то есть, $Ah = 0$ тогда и только тогда, когда $h = 0$. Если $r = 3$, то A обратим тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$, так как $f'(z_0) \in \mathcal{A}_r$ и $\mathbf{K}$ является альтернативной: $(ab)y = a$ имеет единственное решение y для любого $b \neq 0$ in $\mathbf{K}$. В силу полярного разложения (3.5) $f'(z_0) = \rho \exp(M)$, где $\rho > 0$ и $M \in \mathcal{I}_r$. Тогда сопряженный оператор A^* соответствует $\rho \exp(-M)$, но $\exp(-M) \exp(M) = 1$, следовательно, A является унитарным оператором: $A \in U(m)$ или $A \in U(\infty)$ соответственно. Поскольку унитарная группа сохраняет скалярное произведение, то $f(z)$ сохраняет угол α между двумя дифференцируемыми кривыми в U пересекающимися в отмеченной точке z_0 : если ψ и $\phi : (-1, 1) \rightarrow U$ являются двумя дифференцируемыми кривыми пересекающимися в точке $z_0 \in U$, то $f(\psi(\theta))' = f'(z)|_{z=\psi(\theta)} \cdot \psi'(\theta)$, где $\cos(\alpha) = \text{Re}(\psi'(0), \phi'(0)) / (|\psi'(0)| |\phi'(0)|)$ при $\psi'(0) \neq 0$ и $\phi'(0) \neq 0$.

3.14.1. Замечание. Для любого $r \geq 4$ алгебра Кэли-Диксона не является алгеброй с делением, следовательно, условие $\ker(f'(z_0)) = \{0\}$ необходимо в предложении 3.14.

3.15. Теорема. Пусть f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$, на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, так что $\sup_{z \in U, h \in B(0, 1, \mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}] \cdot h| \leq C/|\zeta - z|^2$ для любого $\zeta \in \mathcal{A}_r \setminus \text{cl}(U)$. Тогда $|f'(z)| \leq C/d(z)$ для любого $z \in U$, где $d(z) := \inf_{\zeta \in \mathcal{A}_r \setminus U} |\zeta - z|$; $|f(\xi) - f(z)|/|\xi - z| \leq 2C/\rho$ для любого ξ и $z \in B(a, \rho/2, \mathcal{A}_r) \subset \text{Int}(B(a, \rho, \mathcal{A}_r)) \subset U$, где $\rho > 0$. В частности, если f – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция с ограниченной $[f(z)(\zeta - z)^{-2}] \cdot h|\zeta - z|^2$ на $\mathcal{A}_r^2 \times B(0, 1, \mathcal{A}_r)$ с $|\zeta| \geq 2|z|$, то есть, $\sup_{\zeta, z \in \mathcal{A}_r, |\zeta| \geq 2|z|, h \in B(0, 1, \mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}] \cdot h|\zeta - z|^2 < \infty$, Тогда f постоянна.

Доказательство. В силу теоремы 3.9 существует спрямляемый путь γ в U , так что

$$(3.18) \quad (\partial^k f(z) M / \partial z^k) \cdot h = (2\pi)^{-1} \left(\int_{\gamma + z_0} f(\zeta) (\partial^k (\zeta - z)^{-1} / \partial z^k) \cdot h d\zeta \right)$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^k$, где $\gamma(t) = \rho' \exp(2\pi t M)$ с $t \in [0, 1]$, $0 < \rho'$. Тогда, в частности, для $h = 1^{\otimes k}$, которое опустим для краткости, мы получим

$$(3.19) \quad (\partial^k f(z) M / \partial z^k) = k! (2\pi)^{-1} \left(\int_{\gamma+z_0} f(\zeta) (\zeta - z)^{-k-1} d\zeta \right).$$

Поэтому, $|f'(z)| \leq C/d(z)$, так как $|(\partial(\zeta - z)^{-1} / \partial z) \cdot s| = |\zeta - z|^{-2}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поскольку $\int_{\zeta}^z df(z) = f(z) - f(\zeta)$, то $|f(\xi) - f(z)| / |\xi - z| \leq \sup_{z \in B(a, \rho/2, \mathcal{A}_r)} [C/d(z)] \leq 2C/\rho$, где $\rho' < \rho/2$, ξ и $z \in B(a, \rho/2, \mathcal{A}_r) \subset \text{Int}(B(a, \rho, \mathcal{A}_r)) \subset U$. Беря ρ стремящимся к бесконечности, если f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной с ограниченной $[f(z)(\zeta - z)^{-2}] \cdot h |\zeta - z|^2$ на $\mathcal{A}_r^2 \times B(0, 1, \mathcal{A}_r)$ при $|\zeta| \geq 2|z|$, тогда $f'(z) = 0$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, так как f является локально z -аналитической и $\sup_{\zeta, z \in U, |\zeta| \geq 2|z|, h \in B(0, 1, \mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}] \cdot h| |\zeta - z|^2 < \infty$ ограничен, следовательно, f постоянна на $\mathcal{A}_r$.

3.16. Замечание. Теоремы 3.9, 3.10 и 3.15 являются $\mathcal{A}_r$ -аналогами теорем Коши, Морера и Лиувилля соответственно. Очевидно, что теорема 3.15 также выполняется для правосуперлинейной $\hat{f}(z)$ на $\mathcal{A}_r$ для любого $z \in U$ и с ограниченной $\hat{f}(z) \cdot h$ на $U \times B(0, 1, \mathcal{A}_r)$ вместо $[f(z)(\zeta - z)^{-2}] \cdot h |\zeta - z|^2$.

3.17. Теорема. Пусть $P(z)$ – полином на $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$, так что $P(z) = z^{n+1} + \sum_{\eta(k)=0}^n (A_k, z^k)$, где $A_k = (a_{1,k}, \dots, a_{m,k})$, $a_{j,l} \in \mathcal{A}_r$, $k = (k_1, \dots, k_m)$, $0 \leq k_j \in \mathbf{Z}$, $\eta(k) = k_1 + \dots + k_m$, $0 \leq m = m(k) \in \mathbf{Z}$, $m(k) \leq \eta(k) + 1$, $(A_k, z^k) := \{a_{1,k} z^{k_1} \dots a_{m,k} z^{k_m}\}_{q(m+\eta(k))}$, $z^0 := 1$. Тогда $P(z)$ имеет корень в $\mathcal{A}_r$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $r < \infty$. Предположим, что $P(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$. Рассмотрим спрямляемый путь γ_R в $\mathcal{A}_r$, так что $\gamma_R([0, 1]) \cap \mathcal{A}_r = [-R, R]$, а вне $[-R, R]$: $\gamma_R(t) = R \exp(2\pi t M)$, где M – это вектор в $\mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$, $0 \leq t \leq 1/2$. Выразим $\tilde{P}$ также через переменную z с использованием $z^* = (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{\mathbf{b}}_r} s(zs^*)\}$. Поскольку $\lim_{|z| \rightarrow \infty} P(z) z^{-n-1} = 1$, то в силу теоремы 2.11 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} (P\tilde{P})^{-1}(z) dz = \int_{-R}^R (P\tilde{P})^{-1}(v) dv = \int_{-R}^R |P(v)|^{-2} dv \geq 0$. Но $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} (P\tilde{P})^{-1}(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi R^{-2n-1} = 0$. С другой стороны, $\int_{-R}^R |P(v)|^{-2} dv = 0$ тогда и только тогда, когда $|P(v)|^{-2} = 0$ для любого $v \in \mathbf{R}$. Это противоречит нашему предположению, следовательно, существует корень $z_0 \in \mathcal{A}_r$, то есть, $P(z_0) = 0$.

В случае $r = \infty$ можно воспользоваться тем, что $z = \lim_{r \rightarrow \infty} z_r$. При $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$ рассмотрим все коэффициенты полинома принадлежащие $\mathcal{A}_\Lambda$. Их множество конечно. Минимальная подалгебра S_p в $\mathcal{A}_\Lambda$ порожденная этими коэффициентами конечномерна над $\mathbf{R}$. Таким образом, можно взять ограничение $P(z)$ на S_p , в которой $P(z)$ имеет корень, а значит и в $\mathcal{A}_\Lambda$.

3.18. Теорема. Пусть f – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$. Предположим, что $\epsilon > 0$ и K – это компактное подмножество в U . Тогда для любого $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, существует функция $g_M(z) = P_\infty(z) + \sum_{k=1}^\nu P_k[(z - a_k)^{-1}]$, $z \in \mathcal{A}_r \setminus \{a_1, \dots, a_\nu\}$, $\nu \in \mathbf{N}$, где P_∞ и P_j – полиномы, $a_j \in \text{Fr}(U)$, $\text{Fr}(U)$ обозначает топологическую границу U в $\mathcal{A}_r$, так что $|f(z)M - g_M(z)| < \epsilon$ для любого $z \in K$. Если $r = 2$ или $r = 3$, тогда это утверждение выполняется также для $M = 1$.

Доказательство. Рассмотрим кубы S_j с ребрами параллельными осям координат соответствующим каноническим базисным векторам, причем ребра имеют длину n^{-1} в $\mathcal{A}_r$. Положим $S := \cup_j S_j$, так что $K \subset \text{Int}(S)$, где $n \in \mathbf{N}$ стремится к бесконечности. Поскольку f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной и K – компакт, то мы можем применить формулу (3.10) к каждому пути $\gamma \subset \text{Fr}(S_j)$ определённому направляющим вектором $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Можно усмотреть, что f можно равномерно аппроксимировать на

К суммой вида $\sum_{k=1}^{\mu} \{(a_{1,k}(\zeta_k - z)^{-1}a_{2,k})\}_{q(3)}$, где $a_{j,k} \in \mathcal{A}_r$, $\zeta_k \in Fr(S_j)$. Для данного $n \in \mathbf{N}$, если $b \in Fr(S_j)$, то существует $a \in Fr(U_j) \cup \partial B(0, \rho, \mathcal{A}_r)$, так что $|b - a| \leq n^{-1}$. Если $z \in K$ и $|z - a| \geq n^{-1}$, тогда ряд $(z - b)^{-1} = (\sum_{k=0}^{\infty} [(z - a)^{-1}(b - a)]^k)(z - a)^{-1}$ сходится равномерно на K и ясно, что fM можно аппроксимировать равномерно на K функцией такого вида. В частности, при $r = 2$ или $r = 3$ уравнение $(ab)y = a$ имеет решение для любого $b \neq 0$ в $\mathcal{A}_r$, что даёт аппроксимацию f посредством $g_M M^*$.

3.19. Замечание и определения. Рассмотрим одноточечную (Александровскую) компактификацию $\hat{\mathcal{A}}_r$ локально компактного топологического пространства $\mathcal{A}_r$ для $2 \leq r \in \mathbf{N}$. Она гомеоморфна единичной 2^r -мерной сфере S^{2^r} в Евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{2^{r+1}}$. В случае $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) \geq \aleph_0$ рассмотрим сферу S^Λ единичного радиуса с центром в 0 в $\mathbf{R} \oplus \mathcal{A}_\Lambda$, так что $\mathcal{A}_\Lambda$ топологически гомеоморфна $S^\Lambda \setminus \{(1, 0, 0, \dots)\}$. Если ζ – это точка в S^{2^r} или в S^Λ отличная от $(1, 0, 0, \dots)$, тогда прямая линия содержащая $(1, 0, 0, \dots)$ и ζ пересекает π_S в конечной точке z , где π_S – это 2^r -мерное или $card(\Lambda)$ -мерное соответственно подпространство над $\mathbf{R}$ ортогональное вектору $(1, 0, 0, \dots)$ и касательное к S^{2^r} или S^Λ в южном полюсе $(-1, 0, 0, \dots)$. Это определяет биективное непрерывное отображение из $S^{2^r} \setminus \{(1, 0, 0, \dots)\}$ или $S^\Lambda \setminus \{(1, 0, 0, \dots)\}$ на π_S , так что $(1, 0, 0, \dots)$ соответствует точке в бесконечности. Поэтому каждая функция на подмножестве U в $\mathcal{A}_r$ как топологическое пространство можно рассмотреть на гомеоморфном подмножестве V в S^{2^r} или S^Λ . Бесконечномерная сфера S^Λ не является локально компактной относительно топологии нормы, но она компактна относительно слабой топологии наследуемой из $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ (см. [9, 28]).

Пусть $z_0 \in \hat{\mathcal{A}}_r$ – отмеченная точка. Если функция f определена и $\mathcal{A}_r$ -голоморфна на $V \setminus \{z_0\}$, где V – это окрестность точки z_0 , тогда z_0 называется изолированной особой точкой для f .

Предположим, что f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией в $B(a, 0, \rho, \mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$ для некоторого $\rho > 0$. Тогда мы скажем, что f имеет изолированную особенность в a . Пусть $B(\infty, \rho, \mathcal{A}_r) := \{z \in \hat{\mathcal{A}}_r, \text{ так что } \rho^{-1} < |z| \leq \infty\}$. Тогда мы скажем, что f имеет изолированную сингулярность в ∞ , если она $\mathcal{A}_r$ -голоморфна в некотором шаре $B(\infty, \rho, \mathcal{A}_r)$.

Пусть $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ – это функция, где U – окрестность $z \in \hat{\mathcal{A}}_r$. Тогда f называется мероморфной в z , если f имеет изолированную сингулярность в z . Если U является открытым подмножеством в $\hat{\mathcal{A}}_r$, тогда f называется мероморфной в U , если f мероморфна в каждой точке $z \in U$. Если U – это область определения f и f мероморфна в U , тогда f называется мероморфной в U . Обозначим через $\mathbf{M}(U)$ множество всех мероморфных функций на U . Пусть f является мероморфной в области U в $\hat{\mathcal{A}}_r$. Точка

$$c \in \bigcap_{V \subset U, V \text{ замкнуто и ограничено}} cl(f(U \setminus V))$$

называется предельным значением f .

3.20. Предложение. Пусть f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, с право $\mathcal{A}_r$ -суперлинейным супердифференциалом на открытом связном подмножестве $U \subset \hat{\mathcal{A}}_r$ и предположим, что существует последовательность точек $z_n \in U$ имеющих предельную точку $z \in U$, так что $f(z_n) = 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$, тогда $f = 0$ всюду на U .

Доказательство следует из локальной z -аналитичности f и того факта, что $f^{(k)}(z) = 0$ для любого $0 \leq k \in \mathbf{Z}$ (см. определение 2.2, теоремы 2.11 и 3.10), когда $f'(z)$ является право $\mathcal{A}_r$ -суперлинейной на U . Поэтому, f равна нулю на окрестности точки z . Максимальное подмножество в U , на котором f равна нулю открыто в U . С

другой стороны, оно замкнуто, так как f непрерывна, следовательно, f равна нулю на U , так как U связно.

3.21. Теорема. Пусть $\mathbf{A}$ обозначает семейство всех функций f таких, что f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на $U := \text{Int}(B(a, \rho, R, \mathcal{A}_r))$, $3 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$, где a – отмеченная точка в $\mathcal{A}_r$, $0 \leq \rho < R < \infty$ фиксированы. Пусть $\mathbf{S}$ обозначает подмножество в $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, так что для любого $k \in \mathbf{S}$ существует $m(k) := \max\{j : k_j \neq 0, k_i = 0 \text{ для любого } i > j\} \in \mathbf{N}$ и пусть $\mathbf{B}$ – семейство конечных последовательностей $b_k = (b_{k,1}, \dots, b_{k,m(k)}; q(m(k) + \eta(k)))$, так что $b_{k,j} \in \mathcal{A}_r$ для любого $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbf{N}$, $q(m(k) + \eta(k))$ (см. §2.1). Тогда существует биективное соответствие между $\mathbf{A}$ и $\zeta \in \mathbf{B}^{\mathbf{S}}$, так что

$$(3.20) \quad \lim_{m+\eta \rightarrow \infty} \sup_{z \in B(a, \rho_1, R_1, \mathcal{A}_r)} \sum_{k, m(k)=m, \eta(k)=\eta} |\{(b_k, (z-a)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}| = 0$$

для любых ρ_1 и R_1 таких, что $\rho < \rho_1 < R_1 < R$, где $\eta(k) := k_1 + \dots + k_{m(k)}$, $\zeta(k) := b_k = (b_{k,1}, \dots, b_{k,m(k)}; q(m(k) + \eta(k)))$, $\{(b_k, z^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))} = \{b_{k,1}z^{k_1} \dots b_{k,m(k)}z^{k_{m(k)}}\}_{q(m(k)+\eta(k))}$ для любого $k \in \mathbf{S}$, то есть, $f \in \mathbf{A}$ может быть представлена сходящейся последовательностью

$$(3.21) \quad f(z) = \sum_{b \in \zeta} \{(b_k, (z-a)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}.$$

Доказательство. Если выполнено условие (3.20), то ряд (3.21) сходится на $B(a, \rho', R', \mathcal{A}_r)$ для любых ρ' и R' таких, что $\rho < \rho' < R' < R$, так как ρ_1 и R_1 являются произвольными удовлетворяющими неравенству $\rho < \rho_1 < R_1 < R$ и $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ сходится для любого $|p| < 1$. В частности, беря $\rho_1 < \rho' < R' < R_1$ для $p = R'/R_1$ или $p = \rho_1/\rho'$. Поэтому, из (3.20) и (3.21) следует, что f представленная рядом (3.21) является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на U .

Обратно, пусть f принадлежит семейству $\mathbf{A}$. В силу теорем 2.11 и 3.9 существуют две спрямляемые петли γ_1 и γ_2 , так что $\gamma_2(t) = a + \rho' \exp(2\pi t M_2)$ и $\gamma_1(t) = a + R' \exp(2\pi t M_1)$, где $t \in [0, 1]$, M_1 и $M_2 \in \mathcal{A}_r$ с $|M_1| = 1$ и $|M_2| = 1$, где $\rho < \rho' < R' < R$, потому что как и в §3.9 U может быть представлена как конечное объединение областей U_j , каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 2.11 (см. также §3.6.5). Использование конечного числа спрямляемых путей w_j (соединяющих γ_1 и γ_2 внутри U_j) обходимых дважды в одном и обратном направлении приводит к заключению, что для любого $z \in \text{Int}(B(a, \rho', R', \mathcal{A}_r))$ функция $f(z)M$ с $M = M_1 = M_2$ представляется интегральной формулой:

$$(3.22) \quad f(z)M = (2\pi)^{-1} \left\{ \left(\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta \right) - \left(\int_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta \right) \right\}.$$

На γ_1 имеется неравенство: $|(\zeta - a)^{-1}(z - a)| < 1$, на γ_2 выполняется другое неравенство: $|(\zeta - a)(z - a)^{-1}| < 1$. В силу §3.6.2 как и в §3.10 рассматривая различные возможные вложения $\Upsilon_{\zeta-a, z-a} \subset \mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ и используя свойство альтернативности алгебры октонионов $\mathbf{K}$, мы получим, что для γ_1 ряд

$$(\zeta - z)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} ((\zeta - a)^{-1}(z - a))^k \right) (\zeta - a)^{-1}$$

сходится равномерно по $\zeta \in B(a, R_2 + \epsilon, R_1, \mathcal{A}_r)$ и $z \in B(a, \rho_2, R_2, \mathcal{A}_r)$ для ζ и z , так что $\Upsilon_{\zeta-a, z-a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, в то время как для γ_2 ряд

$$(\zeta - z)^{-1} = -(z - a)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} ((\zeta - a)(z - a)^{-1})^k \right)$$

сходится равномерно по $\zeta \in B(a, \rho_1, \rho_2 - \epsilon, \mathcal{A}_r)$ и $z \in B(a, \rho_2, R_2, \mathcal{A}_r)$ для ζ и z таких, что $\Upsilon_{\zeta-a, z-a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, для любого $\rho' < \rho_2 < R_2 < R'$ и любого $0 < \epsilon < \min(\rho_2 - \rho_1, R_1 - R_2)$, так как коэффициенты разложений по $((\zeta - a)^{-1}(z - a))$ в первом ряду и по $((\zeta - a)(z - a)^{-1})$ во втором ряду не зависят от типа вложения. Рассмотрим соответствующие γ_1 и γ_2 , так что $\zeta \in \gamma_1$ или $\zeta \in \gamma_2$ соответственно и a, ζ, z подчиняются условию $\Upsilon_{\zeta-a, z-a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, которое в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15. Следовательно,

$$(3.23) \quad f(z)M = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_k(z) + \psi_k(z)), \text{ где}$$

$$\phi_k(z) := (2\pi)^{-1} \left\{ \int_{\gamma_1} f(\zeta) (((\zeta - a)^{-1}(z - a))^k (\zeta - a)^{-1}) d\zeta \right\},$$

$$\psi_k(z) := (2\pi)^{-1} \left\{ \int_{\gamma_2} f(\zeta) ((z - a)^{-1} ((\zeta - a)(z - a)^{-1})^k) d\zeta \right\},$$

где $\phi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ являются $\mathcal{A}_r$ -голоморфными функциями, следовательно, fM имеет разложение (3.21) в U , так как в силу §2.15 и §3.9 существует $\delta > 0$, так что интегралы для ϕ_k и ψ_k вдоль γ_1 и γ_2 те же для любого $\rho' \in (\rho_1, \rho_1 + \delta)$, $R' \in (R_1 - \delta, R_1)$.

Используя определение $\mathcal{A}_r$ интеграла вдоль пути, мы получим ряд (3.21) сходящийся на U . Варьируя $z \in U$ по $|z|$ и $\text{Arg}(z)$, мы получим, что ряд (3.21) абсолютно сходится на U , следовательно, (3.20) выполнено для fM . Поскольку $M \in \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, произвольно, тогда как и в доказательстве теоремы 3.10 мы получим утверждение этой теоремы для f .

3.22. Замечания и определения. Пусть γ является замкнутой кривой в $\mathcal{A}_r$. Существуют естественные проекции из $\mathcal{A}_r$ на комплексные плоскости: $\pi_s(z) = w_1 + w_s s$ для любого $s \in \hat{b}_r$, где $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$, $z = \sum_{s \in \mathbf{b}_r} w_s s$ с действительной w_s для любого $s \in \mathbf{b}_r$. Поэтому, $\pi_s(\gamma) =: \gamma_s$ — это кривые в комплексных плоскостях $\mathbf{C}_s$ изоморфных $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}s$. Путь γ в $\mathcal{A}_r$ замкнут (петля, иными словами) тогда и только тогда, когда γ_s замкнут для любого $s \in \hat{b}_r$, то есть, $\gamma(0) = \gamma(1)$ и $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ соответственно. В каждой комплексной плоскости существует стандартное понятие комплексного топологического индекса $\text{In}(a_s, \gamma_s)$ петли γ_s в точке $a_s = \pi_s(a)$. Поэтому, существует вектор $\text{In}(a, \gamma) := \{\text{In}(a_s, \gamma_s) : s \in \hat{b}_r\}$, который мы назовем топологическим индексом петли γ в точке $a \in \mathcal{A}_r$. Этот топологический индекс инвариантен относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9.

Рассмотрим теперь стандартный замкнутый путь $\gamma(s) = a + \rho \exp(2\pi i t n M)$, где $M \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$, $n \in \mathbf{Z}$, $\rho > 0$, $t \in [0, 1]$. Тогда $\hat{\text{In}}(a, \gamma) := (2\pi)^{-1} (\int_{\gamma} dLn(z - a)) = nM$ называется $\mathcal{A}_r$ -индексом γ в точке a . Он инвариантен относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9. Более того, $\hat{\text{In}}(h_1(a h_2), h_1(\gamma h_2)) = \hat{\text{In}}(a, \gamma)$ для любых h_1 и $h_2 \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ таких, что $h_1(M h_2) = M$. Для $M = \sum_{s \in \hat{b}_r} m_s s$ выполняется равенство $\hat{\text{In}}(a, \gamma) = \sum_{s \in \hat{b}_r} \text{In}(a_s, \gamma_s) m_s s$ (принимая соответствующее соглашение для знаков индексов в каждой комплексной плоскости $\mathbf{C}_s$ и соглашение о положительном направлении обхода вдоль кривых). В силу свойств Ln для любой кривой ψ в $\mathcal{A}_r$ существует $\int_{\gamma} dLn(z - a) = 2\pi q M$ для некоторых $q \in \mathbf{R}$ и $M \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$. Для петли ψ с точностью до композиции гомотопий, каждая из которых характеризуется гомотопиями в $\mathbf{C}_s$ для $s \in \hat{b}_r$ существует стандартная γ с генератором M , для которого $\hat{\text{In}}(a, \gamma) = qM$, где $q \in \mathbf{Z}$. Поэтому, мы можем взять за определение $\hat{\text{In}}(a, \psi) = \hat{\text{In}}(a, \gamma)$. Определим также вычет мероморфной функции с изолированной особенностью в точке $a \in \mathcal{A}_r$ как

(i) $\text{res}(a, f)M := (2\pi)^{-1}(\int_{\gamma} f(z)dz)$, где $\gamma(t) = a + \rho \exp(2\pi tM) \subset V$, $\rho > 0$, $|M| = 1$, $M \in \mathcal{I}_r$, $t \in [0, 1]$, f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на $V \setminus \{a\}$. Продолжим $\text{res}(a, f)M$ по формуле (i) на $\mathcal{I}_r$ как

(ii) $\text{res}(a, f)M := [\text{res}(a, f)(M/|M|)]|M|$, $\forall M \neq 0$; $\text{res}(a, f)0 := 0$,

когда $\text{res}(a, f)M$ конечен для любого $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Для $r = 2$ или $r = 3$ уравнение для $\text{res}(a, f)$ можно разрешить для любого $M \neq 0$.

Если f имеет изолированную особую точку $a \in \hat{\mathcal{A}}_r$, тогда коэффициенты b_k её ряда Лорана (см. §3.21) независимы от $\rho > 0$. Общий ряд называется a -рядом Лорана. Если $a = \infty$, то $g(z) := f(z^{-1})$ имеет 0-ряд Лорана с коэффициентами c_k такими, что $c_{-k} = b_k$. Пусть $\beta := \sup_{b_k \neq 0} \eta(k)$, где $\eta(k) = k_1 + \dots + k_m$, $m = m(k)$ для $a = \infty$; $\beta = \inf_{b_k \neq 0} \eta(k)$ для $a \neq \infty$. Мы скажем, что f имеет устранимую особенность, полюс, существенную особенность в ∞ в соответствии с $\beta \leq 0$, $0 < \beta < \infty$, $\beta = +\infty$. Во втором случае β называется порядком полюса в бесконечности ∞ . Для конечного a соответствующие случаи следующие: $\beta \geq 0$, $-\infty < \beta < 0$, $\beta = -\infty$. Если f имеет полюс в a , тогда $|\beta|$ называется порядком полюса в a .

Значение функции $\partial_f(a) := \inf\{\eta(k) : b_k \neq 0\}$ называется дивизором f в точке $a \neq \infty$, $\partial_f(a) := \inf\{-\eta(k) : b_k \neq 0\}$ для $a = \infty$, где $b_k \neq 0$ означает, что $b_{k,1} \neq 0, \dots, b_{k,m(k)} \neq 0$. Тогда $\partial_{f+g}(a) \geq \min\{\partial_f(a), \partial_g(a)\}$ для любого $a \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ и $\partial_{fg}(a) = \partial_f(a) + \partial_g(a)$. Для функции f мероморфной на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$ функция $\partial_f(p)$ по переменной $p \in U$ называется дивизором f .

3.23. Теорема. Пусть U – открытая область в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, с n различными отмеченными точками $p_1, \dots, p_n$, и пусть f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на $U \setminus \{p_1, \dots, p_n\} =: U_0$ и ψ – спрямляемая петля лежащая в U_0 , так что U_0 удовлетворяет условиям теоремы 3.9 для любого $z_0 \in \{p_1, \dots, p_n\}$. Тогда

$$\int_{\psi} f(z)dz = 2\pi \sum_{j=1}^n \text{res}(p_j, f) \hat{I}n(p_j, \psi)$$

и $\text{res}(p_j, f)M$ является $\mathbf{R}$ -однородным $\mathcal{I}_r$ -аддитивным (по переменной M в $\mathcal{I}_r$) $\mathcal{A}_r$ -значным функционалом для любого j .

Доказательство. Для любого p_j рассмотрим главную часть T_j ряда Лорана для f в окрестности p_j , то есть,

$T_j(z) = \sum_{k, \eta(k) < 0} \{(b_k, (z - p_j)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}$, где $\eta(k) = k_1 + \dots + k_n$ для $k = (k_1, \dots, k_n)$ (см. теорему 3.21). Поэтому, $h(z) := f(z) - \sum_j T_j(z)$ – это функция имеющая $\mathcal{A}_r$ -голоморфное продолжение на U . В силу теоремы 3.9 для $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функции g в окрестности V точки p и спрямляемой петли ζ выполняется равенство:

$$g(p) \hat{I}n(p, \zeta) = (2\pi)^{-1} \left(\int_{\zeta} g(z)(z - p)^{-1} dz \right)$$

(см. §3.22). Мы можем рассмотреть достаточно малые петли ζ_j вокруг каждой p_j с $\hat{I}n(p_j, \zeta_j) = \hat{I}n(p_j, \gamma)$ для любого $j = 1, \dots, n$. Тогда $\int_{\zeta_j} f(z)dz = \int_{\zeta_j} T_j(z)dz$ для любого j . Представляя U_0 как конечное объединение открытых областей U_j и соединяя ζ_j с γ путями ω_j проходимыми в одном и обратном направлении как в теореме 3.9, мы получим

$$\int_{\gamma} f(z)dz + \sum_j \int_{\zeta_j^-} f(z)dz = 0,$$

следовательно,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_j \int_{\zeta_j} f(z)dz = \sum_j 2\pi \text{res}(p_j, f) \hat{I}n(p_j, \gamma),$$

где $\hat{I}n(p_j, \gamma)$ и $res(p_j, f)$ инвариантны относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9. Поскольку $\int_{\zeta_j} g(z) dLn(z - p_j)$ является $\mathbf{R}$ -однородным и $\mathcal{I}_r$ -аддитивным функционалом относительно направляющего вектора $M \in \mathcal{I}_r$ петли ζ_j , тогда $res(p_j, f)M$ определённый формулой 2.22.(i, ii) является $\mathbf{R}$ -однородным $\mathcal{I}_r$ -аддитивным по аргументу M в $\mathcal{I}_r$.

3.24. Следствие. Пусть f и T те же, что и в §3.23, тогда $res(p_j, f)M = res(p_j, T_j)M = res(p_j, \sum_{k, \eta(k)=-1} \{(b_k, (z - p_j)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))} M$, в частности, $res(p_j, \{b(z - p_j)^{-1}c\}_{q(3)})M = \{bMc\}_{q(3)}$ для любых $b, c \in \mathcal{A}_r$.

Доказательство. Первое утверждение следует из §3.23, второе утверждение следует из левой и правой- $\mathcal{A}_r$ -линейности интеграла вдоль пути, хотя он не является суперлинейным функционалом (см. теорему 2.7).

3.25. Следствие. Пусть U – открытая область в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, с n различными точками $p_1, \dots, p_n$, пусть также f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на $U \setminus \{p_1, \dots, p_n\} =: U_0$, $p_n = \infty$, а U_0 удовлетворяет условиям теоремы 3.9 с петлями ψ, γ и любой $z_0 \in \{p_1, \dots, p_n\}$. Тогда $\sum_{p_j \in U} res(p_j, f)M = 0$.

Доказательство. Если γ – это петля охватывающая $p_1, \dots, p_{n-1}$, тогда $\gamma^-(t) := \gamma(1 - t)$, где $t \in [0, 1]$, охватывает $p_n = \infty$ с положительным направлением обхода петли γ^- относительно p_n . Поскольку $\int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma^-} f(z)dz = 0$, то мы получим из теоремы 3.23, что $\sum_{p_j \in U} res(p_j, f)M = 0$ для любого $M \in \mathcal{I}_r$, следовательно, $\sum_{p_j \in U} res(p_j, f)M = 0$ – это нулевой $\mathbf{R}$ -гомогенный $\mathcal{I}_r$ -аддитивный $\mathcal{A}_r$ -значный функционал на $\mathcal{I}_r$.

3.26. Определения. Пусть f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией, $2 \leq r \leq \infty$, на окрестности V точки $z \in \mathcal{A}_r$. Тогда нижняя грань: $\eta(z; f) := \inf\{k : k \in \mathbf{N}, f^{(k)}(z) \neq 0\}$ называется кратностью нуля функции f в точке z . Пусть f является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной функцией на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$. Предположим, что $w \in \hat{\mathcal{A}}_r$, тогда валентность $\nu_f(w)$ функции f в точке w – это по определению $\nu_f(w) := \infty$, когда множество $\{z : f(z) = w\}$ бесконечно, а в противном случае $\nu_f(w) := \sum_{z, f(z)=w} \eta(z; f)$.

3.26.1. Теорема. Пусть f является $\mathcal{A}_r$ -мероморфной право суперлинейно супердифференцируемой функцией на области $U \subset \hat{\mathcal{A}}_r$. Если $b \in \hat{\mathcal{A}}_r$ и $\nu_f(b) < \infty$, тогда b не является предельным значением f и множество $\{z : \nu_f(z) = \nu_f(b)\}$ является окрестностью точки b . Если $U \neq \hat{\mathcal{A}}_r$ или f не постоянна, то выполняется противоположное утверждение. Тем не менее, оно ложно, когда $f = const$ на $\hat{\mathcal{A}}_r$.

3.26.2. Теорема. Пусть U – собственное открытое подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, предположим также, что f и g – две непрерывные функции из $\bar{U} := cl(U)$ в $\hat{\mathcal{A}}_r$, так что на топологической границе $Fr(U)$ области U они удовлетворяют неравенству $|f(z)| < |g(z)|$ для любого $z \in Fr(U)$. Предположим, что f и g являются $\mathcal{A}_r$ -мероморфными функциями в U , а h – это единственное непрерывное отображение из $\bar{U}$ в $\hat{\mathcal{A}}_r$, так что $h|_E = f|_E + g|_E$, где $E := \{z : f(z) \neq \infty, g(z) \neq \infty\}$, $[\partial Ln(h(z))/\partial z]$ право суперлинейно в U_{z_0} для любого нуля z_0 функции f и в $U_{z_0} \setminus \{z_0\}$ для любого поюса z_0 , где U_{z_0} – это окрестность z_0 , $z \in U_{z_0}$ или $z \in U_{z_0} \setminus \{z_0\}$ соответственно. Тогда $\nu_{g|U}(0) - \nu_{g|U}(\infty) = \nu_{h|U}(0) - \nu_{h|U}(\infty)$.

Доказательства этих двух теорем аналогичны доказательствам теорем VI.4.1, 4.2 [13]. Для доказательства теоремы 3.26.2 рассмотрим функцию $\zeta(z, t) := tf(z) + g(z)$ для любого $z \in \bar{U}$ и любого $t \in [0, 1] \subset \mathbf{R}$. Если z_0 – это полюс функции $h(z)$, то z_0 – это нуль функции $1/h(z)$. Согласно предположению теоремы 3.26.1, предположению 2.3 и теореме 3.9 $res(z_0, Ln(h))$ является право суперлинейным

оператором для любого нуля или полюса z_0 . С другой стороны существует $\delta > 0$, так что $\Delta_\gamma \text{Arg}(1 + tg^{-1}f) = 0$ для любого $t \in [-1, 1]$, когда ни один полюс или нуль функции g или f не принадлежит спрямляемой петле γ в U с $\text{dist}(\gamma, \text{Fr}(U)) < \delta$, где $\text{dist}(A, B) := \sup_{z \in A} (\inf_{\xi \in B} |\xi - z|) + (\sup_{\xi \in B} \inf_{z \in A} |\xi - z|)$. Тогда $\int_{z \in \gamma} d\text{Ln}\zeta(z, t)$ – непрерывная функция по $t \in [0, 1]$ принимающая значения $2\pi nM$, где $M \in \mathcal{I}_r$ характеризует спрямляемую петлю γ содержащуюся в U , $|M| = 1$, $n \in \mathbf{Z}$, M не зависит от t . Для любого $\delta > 0$ можно выбрать спрямляемую петлю γ в U , так что $\text{dist}(\gamma, \text{Fr}(U)) < \delta$. Тогда применим теорему 3.23 к подходящим кускам области U , чьи границы не содержат нулей и полюсов функций f и g .

Из доказательства теоремы 3.26.2 мы получим.

3.26.3. Следствие. Пусть предположения теоремы 3.26 выполнены может быть кроме условия правой суперлинейности $[\partial \text{Ln}(h(z))/\partial z]$, тогда $\Delta_{\partial U} \text{Arg}(f) = \Delta_{\partial U} \text{Arg}(g) = \int_\gamma d\text{Ln}(f(z))$, где γ та же, что и в §3.26.2.

3.27. Теорема. Пусть U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$, тогда существует представление $\mathbf{R}$ -линейного пространства $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ локально $(z, \tilde{z})$ -аналитических функций на U , так что оно изоморфно $\mathbf{R}$ -линейному пространству $C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ всех $\mathcal{A}_r$ -голоморфных функций на U .

Доказательство. Очевидно, что доказательство можно свести к случаю $n = 1$, методом математической индукции рассматривая локальные разложения в $(z, \tilde{z})$ -ряды по $({}^n z, {}^n \tilde{z})$ с коэффициентами являющимися сходящимися рядами $({}^1 z, {}^1 \tilde{z}, \dots, {}^{n-1} z, {}^{n-1} \tilde{z})$. Мы имеем

$$\tilde{z} = (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{b}_r} s(zs^*)\} \text{ для любого } 2 \leq r < \infty, \\ \tilde{z} = \lim_{r \rightarrow \infty} (2^r - 2)^{-1} \{-z + \sum_{s \in \hat{b}_r} s(zs^*)\} \text{ в } \mathcal{A}_\infty.$$

следовательно, каждый полином по переменным $(z, \tilde{z})$ также является полиномом только по z , более того, каждая полиномиальная локально $(z, \tilde{z})$ аналитическая функция на U также является полиномиальной локально z -аналитической функцией на U . Тогда, если ряд по $(z, \tilde{z})$ сходится в шаре $B(z_0, \rho, \mathcal{A}_r^n)$, тогда его ряд в z -представлении сходится в шаре $B(z_0, \rho', \mathcal{A}_r^n)$, где $\rho' = 2^r(2^r - 2)^{-1}\rho$ для любого конечного $r \geq 2$. При $r = \infty$ предельный переход дает $\rho' = \rho$. В случае $r = \Lambda$ для любого полинома существует подалгебра в $\mathcal{A}_\Lambda$ изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая все коэффициенты этого полинома, то есть, он характеризуется полностью своим ограничением на эту подалгебру.

Рассматривая базисные полиномы любого выбранного полиномиального базиса в $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ мы получим (благодаря бесконечномерности этого пространства) полиномиальный базис в $C_z^\omega(U, \mathcal{A}_r)$. Это устанавливает $\mathbf{R}$ -линейный изоморфизм между двумя этими пространствами. Более того, в таком представлении пространства $C_{z, \tilde{z}}^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ можно положить $D_{\tilde{z}} = 0$, что дает для дифференциальных форм $\partial_{\tilde{z}} = 0$. Это приводит к дифференциальному и интегральному исчислению только относительно D_z и dz .

3.28. Теорема (Принцип аргумента). Пусть f – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на открытой области U удовлетворяющей условиям §3.9, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$, пусть также γ – спрямляемая петля содержащаяся в U , где $[\partial \text{Ln}(f(z))/\partial z]$ является право суперлинейным в некоторой окрестности U_{z_0} для любого нуля z_0 функции $f(z)$. Тогда $\hat{I}n(0; f \circ \gamma) = \sum_{\partial_f(a) \neq 0} \hat{I}n(a; \gamma) \partial_f(a)$.

Доказательство. Выполняется равенство $\hat{I}n(0; f \circ \gamma) = \int_{\zeta \in \gamma} d\text{Ln}(f(\zeta)) = \int_0^1 d\text{Ln}(f \circ \gamma(s)) = \int_\gamma f^{-1}(\zeta) df(\zeta)$. Пусть $\partial_f(a) = n \in \mathbf{N}$, тогда

$$(i) \quad [\text{Ln}(f(z))]'.h = n(z - a)^{-1}h + \phi(z)h \quad \forall h \in \mathcal{A}_r \text{ и}$$

$$(ii) \quad f(z) = \sum_{l,k; n_1+\dots+n_k=\partial_f(a), 0 \leq n_j \in \mathbf{Z}, j=1,\dots,k} \{(z-a)^{n_1} g_{l,k,1;n_1,\dots,n_k}(z) \\ (z-a)^{n_2} g_{l,k,2;n_1,\dots,n_k}(z) \dots (z-a)^{n_k} g_{l,k,k;n_1,\dots,n_k}(z)\}_{q(n_1+\dots+n_k+k)},$$

где $\phi - \mathcal{A}_r$ -голоморфна на U_a , также $g_{l,p,k;n_1,\dots,n_k}(z)$ – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфные функции переменной z на U , так что $g_{l,p,k;n_1,\dots,n_k}(a) \neq 0$, где $l = 1, \dots, m$, $1 \leq m \leq 2^{r\partial_f(a)}$ для конечного r и любого $m \in \mathbf{N}$ для $r = \infty$ (см. §§2.8, 3.7, 3.21, 3.27), так как каждый член $\xi(z) \prod_{s \in \mathbf{b}_r} (w_s - w_{s,0})^{n_s}$ с $\sum_{s \in \mathbf{b}_r} n_s \geq \partial_f(a)$, $n_j \geq 0$, имеет такое разложение, где $2 \leq r < \infty$, $\xi(z)$ – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на окрестности точки a , так что $\xi(a) \neq 0$.

При $r = \infty$ можно воспользоваться пределом $z = \lim_{r \rightarrow \infty} z_r$. При $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$ для любого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая z . Для γ существует последовательность спрямляемых петель γ_n равномерно сходящаяся к γ , причём для каждой γ_n существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая γ_n .

Предположим, что ψ – это петля такая, что $\hat{I}n(p, \psi) = 2\pi nM$, $|M| = 1$, $M \in \mathcal{I}_r$, $0 \neq n \in \mathbf{Z}$. Тогда можно задать путь $\psi^{1/n} =: \omega$ как петлю, для которой $\hat{I}n(p, \omega) = 2\pi M$ и $\omega([0, 1]) \subset \psi([0, 1])$. Тогда мы назовем $\omega^n = \psi$. То есть, $\hat{I}n(p, \psi^{1/n}) = \hat{I}n(p, \psi)/n$. Последняя формула дает интерпретацию, когда $\hat{I}n(p, \psi)/n$ равен $2\pi qM$, где $0 \neq q \in \mathbf{Q}$. То есть, путь $\psi^{1/n}$ можно определить для любого $0 \neq n \in \mathbf{Z}$. Это означает, что γ можно представить как объединение путей ω_j , для любого из которых существует $n_j \in \mathbf{N}$ такое, что $\omega_j^{n_j}$ – петля.

Используя теоремы 3.23 на U и 3.26.2 на U_a для любого $a \in U$ с $\partial_f(a) \neq 0$, также используя формулы (i, ii), мы получим утверждение этой теоремы.

3.29. Теорема. Если f имеет существенную особенность в точке a , то $cl(f(V)) = \hat{\mathcal{A}}_r$ для любого $V \subset \text{dom}(f)$, $V = U \setminus \{a\}$, где U – это окрестность точки a .

Доказательство. Предположим, что утверждение этой теоремы ложно, тогда существовали бы $\rho > 0$ и $m > 0$, а также элемент $A \in \mathcal{A}_r$, так что f была бы z -аналитической в $B(a, 0, \rho, \mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$ и $|f(z) - A| \geq m$ для любого z такого, что $0 < |z - a| < \rho$. Если $\infty \notin cl(f(V))$, тогда существует $R > 0$, так что $A \notin cl(f(V))$ для любого $|A| > R$. Поэтому, функция $[f(z) - A]^{-1}$ является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной в $B(a, 0, \rho, \mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$. Следовательно, $[f(z) - A]^{-1} = \sum_k \{(p_k, (z-a)^k)\}_{q(\eta(k)+m(k))}$, где в этой сумме $k = (k_1, \dots, k_{m(k)})$ с $k_j \geq 0$ для любого $j = 1, \dots, m(k) \in \mathbf{N}$, p_k – это конечные последовательности коэффициентов для $[f(z) - A]^{-1}$ как и в §3.21.

Если $D_z^n([f(z) - A]^{-1})|_{z=a} = 0$ для любого $n \geq 0$, то $[f(z) - A]^{-1} = 0$ в окрестности точки a . Поэтому, $[f(z) - A]^{-1} = \sum_{n_1+\dots+n_l=n} \{g_1 z^{n_1} \dots g_l z^{n_l}\}_{q(\eta(n)+l)}$ для некоторого n , так что $0 \leq n \in \mathbf{N}$, $n_j \geq 0$ для любого $j = 1, \dots, l \in \mathbf{N}$, каждая g_j – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция (по z). Следовательно, беря обратные от обеих частей $[f(z) - A]$ и $(\sum_{n_1+\dots+n_l=n} \{g_1 z^{n_1} \dots g_l z^{n_l}\}_{q(\eta(n)+l)})^{-1}$, а также сравнивая их разложения в ряды, мы видим, что конечные последовательности b_k коэффициентов разложений для f имеют свойство $b_k = 0$ для любого $\eta(k) < -n$. Это противоречит гипотезе и доказывает теорему.

3.30. Определение. Пусть a и b – это две точки в $\mathcal{A}_r$, а θ – это стереографическая проекция действительной сферы S^{2^r} единичного радиуса с центром в нуле для $2 \leq r < \infty$ или S^Λ для $r = \Lambda$ на $\hat{\mathcal{A}}_r$. Тогда $\chi(a, b) := |\phi(a) - \phi(b)|_Y$ называется струнной метрикой, где $\phi := \theta^{-1} : \hat{\mathcal{A}}_r \rightarrow S^m$, S^m вложено в $Y := \mathbf{R}^{m+1}$ для $m := 2^r$ с $r < \infty$ или в $\mathbf{R} \oplus l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ для $m = \Lambda$ с $r = \Lambda$ при $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$, $|\cdot|_Y$ – это евклидова и гильбертова норма в Y соответственно.

3.30.1. Теорема. Пусть U – это открытая область в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ – это последовательность функций мероморфных на U сходящаяся равномерно на U к f относительно струнной метрики. Тогда или f является постоянной ∞ или f мероморфна на U .

3.30.2. Теорема. Пусть $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ – это последовательность мероморфных функций на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$, которая равномерно сходится относительно струнной метрики в U к f , $f \neq \text{const}$. Если $f(a) = b$ и $\rho > 0$ таковы, так $B(a, \rho, \mathcal{A}_r) \subset U$ и $f(z) \neq b$ для любого $z \in B(a, \rho, \mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$, тогда существует $m \in \mathbb{N}$, так что значение валентности $f_k|_{B(a, \rho, \mathcal{A}_r)}$ в точке b равно $\eta(b; f) = \eta(a; f)$ для любого $k \geq m$.

3.30.3. Замечание. Доказательства этих двух теорем являются формально теми же, что и доказательства теорем VI.4.3 и 4.4 [13]. Теоремы 3.26.2 и 3.30.2 являются $\mathcal{A}_r$ аналогами теорем Руше и Гурвица соответственно. Имеются также следующие $\mathcal{A}_r$ аналоги теорем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса. Их доказательства аналогичны доказательствам теорем VIII.1.1 и 1.2 [13] соответственно. Однако, вторая часть теоремы Вейерштрасса не верна из-за некоммутативности $\mathcal{A}_r$, то есть, функция $h \in \mathbf{M}(U)$ с $\partial_h = \partial$ не обязательно представима в виде $h = fg$, где g является $\mathcal{A}_r$ -голоморфной на U , а f – другая отмеченная функция $f \in \mathbf{M}(U)$, так что $\partial_f = \partial$.

3.31. Теорема. Пусть U – непустое собственное открытое подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$, пусть подмножество $A \subset U$ не содержит никакой предельной точки в U . Предположим, что существует функция $g_b \in \mathbf{M}(\hat{\mathcal{A}}_r)$ для любого $b \in A$ имеющая полюс в точке b и никакого другого. Тогда существует функция $f \in \mathbf{M}(U)$ $\mathcal{A}_r$ -голоморфная на $U \setminus A$ и имеющая ту же главную часть в точке b , что и g_b . Если f такая функция, тогда каждая другая такая функция имеет вид $f + g$, где g – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на U .

3.32. Теорема. Пусть U – это собственное непустое открытое подмножество $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$. Предположим также, что $\partial : U \rightarrow \mathbf{Z}$ – это функция такая, что $\{\partial(z) \neq 0\}$ не имеет предельной точки в U . Тогда существует $f \in \mathbf{M}(U)$ такая, что $\partial_f = \partial$.

Доказательство. Если a_j – это нуль, то есть, $\partial(a_j) \neq 0$, Тогда возьмём окружность радиуса $\delta_j > 0$ с центром в точке a_j . Возможны два случая: $|a_j|\delta_j \geq 1$ и $|a_j|\delta_j < 1$. В точке a_j первого типа построим в U мероморфную функцию $g(z)$ с главной частью $g_j(z) = n_j(z - a_j)^{-1}$, $n_j = \partial(a_j)$, $g(z) := \sum_{j=1}^{\infty} (g_j(z) - h_j(z))$, где $h_j(z) := -n_j \sum_{p=1}^{k_j} (a_j^{-1}z)^{p-1} a_j^{-1}$. Выберем k_j , так что в каждом ограниченном каноническом замкнутом подмножестве V в $\mathcal{A}_r$, $V \subset U$, ряд для g равномерно сходится. В точке a_j второго типа построим

$$g_j(z) := n_j \sum_{p=0}^{\infty} (z - b_j)^{-1} [(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p \text{ и}$$

$$h_j(z) := n_j \sum_{p=0}^{k_j} (z - b_j)^{-1} [(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p,$$

где $|a_j - b_j| < |z - b_j|$, a_j, b_j, z удовлетворяют условию $\Upsilon_{a_j - b_j, z - b_j} \hookrightarrow \mathbf{K}$, которое в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15. Выберем k_j , так что для любого z с $|z - b_j| \geq R > \delta_j$ мы имеем $|g_j(z) - h_j(z)| = |n_j \sum_{p=k_j+1}^{\infty} (z - b_j)^{-1} [(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p| \leq n_j \sum_{p=k_j+1}^{\infty} |(a_j - b_j)^p R_j^{-p-1}| < \epsilon_j$, где $\sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j < \infty$ сходится, $R_j > 0$ – это постоянная для любого j . Эти ряды по $(a_j^{-1}z)^p a_j^{-1}$ или по $(z - b_j)^{-1} [(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$, имеют действительные коэффициенты независимые от типа вложения $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$, где $z \in \Upsilon_{a_j, b_j, z_1} \hookrightarrow \mathbf{K} \hookrightarrow \mathcal{A}_r$ для любой данной точки $z_1 \in \mathcal{A}_r$ с переменной z в пределах данной копии октонионной подалгебры $\mathbf{K}$, следовательно, они могут

быть продолжены на соответствующие шары в $\mathcal{A}_r$. Теперь проинтегрируем $g(\zeta)$ вдоль спрямляемого пути γ в U , который не содержит ни одной точки a_j , $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$. Тогда $\int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} [w_j(z) - w_j(z_0)]$, так что $f_1(z) := \exp(\int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta)$ не зависит от пути (см. теоремы 2.15 и 3.8.3, а также следствия 3.4, 3.4' и §3.6.5 выше), где $\exp(w_j(z)) = ((1 - a_j^{-1}z) \exp(\sum_{p=1}^{\infty} (a_j^{-1}z)^p / p))^{n_j}$ в первом случае, $\exp(w_j(z)) = [(z - a_j)(z - b_j)^{-1}] \exp(\sum_{p=1}^{\infty} [(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p / p)^{n_j}$ во втором случае, но w_j и w_l в общем не коммутируют для $j \neq l$. Сходимость ряда аналогична сходимости ряда в теореме 25 [2] в комплексном случае. Две функции удовлетворяющие теореме 3.32 не обязаны отличаться на $\mathcal{A}_r$ -голоморфный множитель в отличие от комплексного случая, так как, например, $\zeta_j := \{f_1 \dots f_j g f_{j+1} \dots f_n\}_{q(n)}$ с различными $j = a$ и $j = b$ в $\{1, \dots, n\} \subset \mathbf{N}$ не коррелируют: $\zeta_a \neq \{h \zeta_b k\}_{q(3)}$ в общем для любых $\mathcal{A}_r$ -голоморфных функций h и k на U , где каждая f_l имеет нуль порядка $n_l > 0$ в точке a_l , $n \geq 2$. Более того, для $r \geq 3$ имеется также зависимость от порядка умножения $\{*\}_{q(n)}$.

3.33. Теорема. Пусть U – открытая область в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) > \aleph_0$, а f – это функция $\mathcal{A}_r$ -голоморфная на U с право суперлинейным супердифференциалом на U . Предположим, что f не постоянна на $B(a, \rho, \mathcal{A}_r) \subset U$, где $0 < \rho < \infty$. Тогда $f(B(a, \rho, \mathcal{A}_r))$ – окрестность точки $f(a)$ в $\mathcal{A}_r$.

3.34. Замечания. Для нескольких $\mathcal{A}_r$ переменных кратный $\mathcal{A}_r$ интеграл $\mathbf{I} := \{\int_{\gamma_n} \dots \int_{\gamma_1} f(\overset{1}{z}, \dots, \overset{n}{z} d \overset{1}{z} \dots d \overset{n}{z})\}_{q(n)}$ можно естественным образом рассмотреть для спрямляемых путей $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в $\mathcal{A}_r$, $3 \leq r \leq \infty$, где $2 \leq r < \aleph_0$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$, $\{*\}_{q(n)}$ обозначает порядок скобок в последовательных интегрированиях (см. также §2.1). В общем, порядок интегрирования важен, так как существование частной производной $\partial^n g(\overset{1}{z}, \dots, \overset{n}{z}) / \partial \overset{1}{z} \dots \partial \overset{n}{z}$ не влечёт за собой существования непрерывной $g^{(n)}$ и как показывает предложение 3.8.5 порядок дифференцирования в общем случае влияет на результат, например, даже в случае g соответствующей $f := \{f_1 \circ \dots \circ f_n\}_{q(n)}$ с $f_n(\overset{1}{z}, \dots, \overset{n}{z})$ со значениями в $\mathcal{A}_r^{n-1}$, $f_{n-1}(\overset{1}{z}, \dots, \overset{n-1}{z})$ со значениями в $\mathcal{A}_r^{n-2}$, ..., $f_2(\overset{1}{z}, \overset{2}{z})$ и $f_1(\overset{1}{z})$ со значениями в $\mathcal{A}_r$, $\{\partial^n g(\overset{1}{z}, \dots, \overset{n}{z}) / \partial \overset{1}{z} \dots \partial \overset{n}{z}\}_{q(n)} \cdot 1^{\otimes n} = f(\overset{1}{z}, \dots, \overset{n}{z})$ (см. также §2.7). Поэтому, существует естественное обобщение теоремы 3.9 для нескольких $\mathcal{A}_r$ переменных:

$$(i) \quad (2\pi)^n f(z_0) \{M_1 \dots M_n\}_{q(n)} = \\ \left\{ \int_{\psi_n} \dots \int_{\psi_1} f(\overset{1}{\zeta}, \dots, \overset{n}{\zeta}) (\overset{1}{\zeta} - \overset{1}{z_0})^{-1} d \overset{1}{\zeta} \dots (\overset{n}{\zeta} - \overset{n}{z_0})^{-1} d \overset{n}{\zeta} \right\}_{q(n)}$$

для соответствующего открытого подмножества $U = \overset{1}{U} \times \dots \times \overset{n}{U}$, где ψ_j и $\overset{j}{U}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.9 для любого j , а f – это $\mathcal{A}_r$ -голоморфная функция на U .

Благодарности

Автор искренне благодарен Научному Фламандскому Обществу за поддержку проекта "Некоммутативная геометрия: от алгебры к физике" и профессору Ф. ван Ойстаену за его интерес и плодотворные обсуждения работы.

Литература

- [1] J. C. Baez. "The octonions". Bull. Amer. Mathem. Soc. **39**: 2 (2002), 145-205.
- [2] Н. Behnke, F. Sommer. "Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen" (Springer-Verlag: Berlin, 1972).

- [3] Ya. I. Belopolskaya, Yu. L. Dalecky. "Stochastic equations and differential geometry" (Kluwer Acad. Publ.: Dordrecht, 1990).
- [4] F. A. Berezin. "Introduction to superanalysis" (D. Reidel Publish. Comp., Kluwer group: Dordrecht, 1987).
- [5] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen. "Clifford analysis" (London: Pitman, 1982).
- [6] A. Connes. "Noncommutative geometry" (Academic Press: San Diego, 1994).
- [7] B. DeWitt. "Supermanifolds" 2d ed. (Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1992).
- [8] G. Emch. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte". *Helv. Phys. Acta* **36**, 739-788 (1963).
- [9] Р. Энгелькинг. "Общая топология" (Мир: Москва, 1986).
- [10] G. Grubb. "Functional calculus of pseudodifferential boundary problems" (Birkhäuser: Boston, 1996).
- [11] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (World Scientific Publ. Co.: Singapore, 1996).
- [12] У. Р. Гамильтон. "Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Наука: Москва, 1994).
- [13] M. Heins. "Complex function theory" (Acad. Press: New York, 1968).
- [14] L. Hörmander. "The analysis of linear partial differential operators" (V. **3**; Springer-Verlag: Berlin, 1985).
- [15] L. Hörmander. "An introduction to complex analysis in several variables" (3rd ed.; North-Holland: Amsterdam, 1990).
- [16] J. R. Isbell. "Uniform neighborhood retracts". *Pacif. J. Mathem.* **11** (1961), 609-648.
- [17] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. "Hypercomplex numbers" (Berlin: Springer, 1989).
- [18] A. Khrennikov. "Superanalysis", (Series "Mathem. and its Applic."; V. **470**; Kluwer: Dordrecht, 1999).
- [19] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. "Элементы теории функций и функционального анализа" (Наука: Москва, 1989).
- [20] *Encyclop. of Math. Sci.* **V. 11** "Algebra". A. I. Kostrikin, J. R. Shafarevich (Eds.) (Springer-Verlag: Berlin, 1990).
- [21] А. Г. Курош. "Лекции по общей алгебре" (Москва: Наука, 1973).
- [22] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).
- [23] S. V. Lüdskovsky. "Generalized Loop Groups of complex manifolds, Gaussian Quasi-Invariant Measures on them and their Representations". *J. of Math. Sciences* **122: 1**, 2984-3011, 2004 (см. также более раннюю версию: Los Alamos National Laboratory, USA. Preprint **math.RT/9910086**, 18 October 1999).
- [24] С. В. Людковский. "Гауссовы меры на пространствах свободных петель". *Усп. Матем. Наук.* **56 : 5**, 183-184, 2001.
- [25] С. В. Людковский. "Стохастические процессы на группах диффеоморфизмов и петель действительных, комплексных и неархимедовых многообразий". *Фундам. и Прикл. Матем.* **7: 4**, 1091-1105 (2001) (см. также Los Alamos National Laboratory, USA. Preprint **math.GR/0102222**, 35 pages, 28 February 2001).
- [26] S. V. Lüdskovsky. "Poisson measures for topological groups and their representations". *Southeast Asian Bull. Math.* **25: 4**, 653-680 (2002).
- [27] S. V. Lüdskovsky, F. van Oystaeyen. "Differentiable functions of quaternion variables". *Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2.* **127** (2003), 755-796.
- [28] L. Narici, E. Beckenstein. "Topological vector spaces" (Marcel-Dekker: New York, 1985).
- [29] F. van Oystaeyen. "Algebraic geometry for associative алгебрас" (Series "Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem."; V. **232**; Marcel Dekker: New York, 2000).

- [30] H. Rothe. "Systeme Geometrischer Analyse" in: "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie", 1277-1423 (Leipzig: Teubner, 1914-1931).
- [31] E. H. Spanier. "Algebraic topology" (Acad. Press: New York, 1966).
- [32] E. M. Stein. "Singular integrals and differentiability properties of functions" (Princ. Univ. Press: New Jersey, 1970).
- [33] H. Triebel. "Interpolation theory. Function spaces. Differential operators" (Deutsche Verlag: Berlin, 1978).
- [34] B. L. van der Waerden. "A history of algebra" (Springer-Verlag: Berlin, 1985).
- [35] J. P. Ward. "Quaternions and Cayley numbers". Ser. Math. and its Applic. **403** (Dordrecht: Kluwer, 1997).
- [36] S. H. Weintraub. "Differential forms" (Academic Press: San Diego, 1997).

О НЕКОТОРЫХ ДИСТРИБУТИВНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

Соловей Л. Г.

Рассматриваются множества, не обязательно являющиеся кольцами, но в определенном смысле близкие к ним. Эти множества, названные гиперкольцами, состоят из нескольких аддитивных групп, пересекающихся только в нуле, и в то же время являются мультипликативными группоидами (или группами, исключая нуль). Выполняются дистрибутивные законы.

Кольца (и, в частности, тела или поля) представляют собой частный случай рассматриваемых множеств. Приводятся примеры, свидетельствующие о распространенности рассматриваемых множеств. Так, представление о том, что действительные физические величины "укладываются" в кольцо, неверно, так как они являются подмножеством гиперкольца.

Действительные гиперкольца с единицей (не сводящиеся к кольцам), аддитивные группы которых являются векторными пространствами, можно рассматривать как обобщенные гиперкомплексные системы, если в эти системы включить действительные бинарные (со сложением и умножением) дистрибутивные алгебраические структуры с единицей, где количество входящих в них векторных пространств больше единицы и конечно.

Примером гиперколец, наводящим на мысль о целесообразности их изучения, могут служить матрицы второго порядка, подобные ортогональным или унитарным, но нормированные не на единицу, а на произвольное неотрицательное число. Комплексные числа и кватернионы могут быть представлены такими матрицами, являясь их подмножествами.

§1. Гипертело (гиперполе, гиперкольцо) k -го порядка по аддитивным группам

В алгебре наряду с телами, полями, кольцами существуют и объекты более общего типа – универсальные алгебры [1]. В статье рассматривается один класс универсальных алгебр, включающий тела, поля и кольца.

Назовем *гипертелом* (соответственно, *гиперкольцом*) k -го порядка по аддитивным группам множество M , которое обладает следующими свойствами:

- 1) составляет k ненулевых аддитивных групп, единственной точкой пересечения которых является нуль;
- 2) составляет, кроме нуля, мультипликативную группу или лупу [1] (соответственно, мультипликативный группоид [1], включая нуль);
- 3) среди произведений элементов a_i, a_k из фиксированных аддитивных групп A_i и A_k есть отличные от нуля для любых i и k ;
- 4) два элемента из каких-либо двух (возможно, и совпадающих) аддитивных групп, будучи умножены друг на друга, дают элемент из фиксированной аддитивной группы, определяемой только аддитивными группами, к которым принадлежат сомножители, и, возможно, порядком расположения этих сомножителей; следовательно, аддитивные группы A_i и A_k суть элементы группоида, причем

$$A_i A_k = A_l$$

при фиксированных i и k l также фиксирован; назовем этот группоид *фактор-группоидом* множества M по аддитивным группам;

5) при этом становятся возможными левый и правый дистрибутивные законы, которые и выполняются.

Гипертело k -го порядка по аддитивным группам с коммутативным умножением назовем гиперполем k -го порядка по аддитивным группам. Гиперкольца, аддитивные группы которых являются n -мерными векторными пространствами над полем P [2], причем n одинаково для всех аддитивных групп, назовем *гипералгебрами k -го порядка n -го ранга* над полем P при выполнении соотношений:

$$(\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b),$$

где α – элемент поля P , а a, b – элементы гиперкольца. Такие же гипералгебры, элементы которых (кроме нуля) составляют мультипликативную группу или лупу, назовем *гипералгебрами k -го порядка n -го ранга с делением* над полем P . Обычные тела (поля, кольца) являются, таким образом, гипертелами (гиперполями, гиперкольцами) первого порядка по всему множеству M , являющемуся в данном случае единственной аддитивной группой.

Среди аддитивных групп гипертела может быть не более одного тела (поля), так как единица, согласно пункту 1, может принадлежать не более, чем одной аддитивной группе. Если рассматриваемое множество является гипертелом или гиперполем, то аддитивная группа с единицей сама является телом или полем. Действительно, произведение единицы e на элемент из этой аддитивной группы представляет собой тот же элемент и принадлежит, следовательно, той же аддитивной группе. Но тогда, согласно пункту 4, произведение любых двух элементов этой аддитивной группы есть элемент, принадлежащий той же аддитивной группе. Далее, любому элементу a рассматриваемой аддитивной группы (кроме нуля) соответствует обратный элемент, принадлежащий той же аддитивной группе. В самом деле, если бы обратный элемент a^{-1} принадлежал другой аддитивной группе, то, согласно пункту 4, $a^{-1}a$ должно было бы принадлежать аддитивной группе, содержащей a^{-1} ; но тогда $a^{-1}a$ не могло бы равняться e . Таким образом, аддитивная группа, содержащая единицу, является также (кроме нуля) мультипликативной группой или лупой и, следовательно, мультипликативной группой или лупой тела или поля¹. Рассматриваемая аддитивная группа (кроме нуля) в случае ассоциативного гипертела (в частности, гиперполя), будучи мультипликативной подгруппой всей мультипликативной группы, является ее нормальным делителем [1,3]. Действительно, для любого элемента b множества M , кроме нуля, выполняется соотношение:

$$b^{-1}eb = e.$$

Следовательно, согласно пункту 4, если $h_1 \neq 0$ принадлежит аддитивной группе с единицей, то

$$b^{-1}h_1b = h_2,$$

где h_2 также принадлежит этой аддитивной группе, что и требовалось доказать. Любая аддитивная группа ассоциативного гипертела (гиперполя), кроме нуля, является смежным классом по нормальному делителю. В самом деле, элемент $a \neq 0$ какой-либо аддитивной группы A_1 удовлетворяет соотношению $ae = a$; поэтому, согласно пункту 4, $ah_1 = b$, где h_1 – любой элемент нормального делителя H , а b

¹Аддитивная группа с единицей ассоциативной гипералгебры с делением конечного ранга над полем действительных чисел, являющаяся ассоциативной алгеброй конечного ранга с делением над полем действительных чисел, согласно теореме Фробениуса изоморфна либо действительным числам, либо комплексным числам, либо кватернионам [1].

– элемент той же аддитивной группы, что и a . Это означает, что весь левый смежный класс, соответствующий элементу a , принадлежит рассматриваемой аддитивной группе A_1 . Возьмем теперь произвольный элемент $a' \neq a$, $a' \in A_1$, причем $a' \neq 0$. Для a' , как и для a , справедливо соотношение $a'H \in A_1$. Если h_i – произвольный элемент H , то

$$a'h_i = aa^{-1}a'h_i.$$

Но

$$a^{-1}a = e \in H.$$

Следовательно, согласно пункту 4, $a^{-1}a' \in H$; пусть $a^{-1}a' = h_3$. Тогда $a'h_i = ah_3h_i = ah_4$, где $h_4 = h_3h_i \in H$, т. е. a' принадлежит тому же классу смежности, что и a , что и требовалось доказать.

Напомним теперь, что правые смежные классы по нормальному делителю совпадают с левыми [1, 3]. Все аддитивные группы ассоциативного гипертела (без нуля), следовательно, составляют фактор-группу его мультипликативной группы [1, 3] по аддитивной группе, содержащей единицу (без нуля).

Отметим еще некоторые свойства гиперколец (и, в частности, гипертел и гиперполей).

а) Так же, как и для колец [1], доказывается, что произведение (слева и справа) нуля на любой элемент гиперкольца равно нулю.

б) Мы видели, что аддитивные группы гиперкольца составляют мультипликативный группоид – его фактор-группоид по этим аддитивным группам. Легко также видеть, что аддитивные группы A_i сами являются единственными элементами аддитивных групп с законом сложения

$$A_i + A_i = A_i,$$

причем A_i является как нулем 0_i такой аддитивной группы, так и, следовательно, ее противоположным элементом, но не общим нулем всех таких аддитивных групп.

Наконец, отметим, что гипертела (гиперполя, гиперкольца) по аддитивным группам вообще говоря не являются телами (полями, кольцами), но могут и быть ими. Гипертела (гиперполя, гиперкольца) по аддитивным группам могут быть как конечного, так и бесконечного порядка.

§2. Ненормированные на единицу унитарные и ортогональные матрицы

Прежде чем перейти к примерам, рассмотрим необходимые для дальнейшего изложения ненормированные на единицу унитарные и ортогональные матрицы. Как известно, комплексная матрица n -го порядка A называется унитарной, если

$$AA^+ = A^+A = 1, \quad (1)$$

где A^+ – матрица, эрмитово-сопряженная матрице A . Матрица A называется ортогональной, если

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = 1, \quad (2)$$

где $\tilde{A}$ – матрица, транспонированная матрице A (в вещественной области унитарная матрица ортогональна [4]).

Рассмотрим теперь комплексную матрицу A n -го порядка, удовлетворяющую условию

$$AA^+ = \lambda I, \quad (3)$$

где λ – некоторое число, а I – единичная матрица. Число λ вещественно и неотрицательно. В самом деле, для любого индекса i

$$\lambda = (AA^+)_{ii} = \sum_k A_{ik}(A^+)_{ki} = \sum_k A_{ik}A_{ik}^* = \sum_k |A_{ik}|^2 \geq 0. \quad (4)$$

(знак равенства имеет место при $A = 0$).

Отметим также, что при выполнении условия (3)

$$AA^+ = A^+A = \lambda I. \quad (5)$$

Действительно, при $\lambda \neq 0$

$$A(A^+/\lambda) = I, \quad (6)$$

т. е. $A^+/\lambda = A^{-1}$ – матрица, обратная A . Но для обратных матриц, как известно,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I, \quad \text{т. е.} \quad (A^+/\lambda)A = A(A^+/\lambda) = I.$$

Следовательно, верно (5). Для нулевой матрицы соотношение (5) также выполняется (при $\lambda = 0$).

Матрицу A , удовлетворяющую условию (3) и, как следствие, условиям (4), (5), назовем ненормированной на единицу унитарной, или *квазиунитарной*. Если A – вещественная матрица n -го порядка, то точно так же, наряду с ортогональными матрицами, удовлетворяющими условиям (2), можно рассматривать матрицы, удовлетворяющие условию

$$A\tilde{A} = \lambda I. \quad (7)$$

Матрицу, удовлетворяющую условию (7), назовем ненормированной на единицу ортогональной, или *квазиортогональной*. Очевидно, что λ – вещественное число. Оно неотрицательно, что следует из того, что квазиортогональные матрицы в вещественной области квазиунитарны. Как и для квазиунитарных матриц, доказывается соотношение

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \lambda I. \quad (8)$$

Легко показать, что вещественные матрицы второго и четвертого порядка, изоморфные соответственно комплексным числам и кватернионам, являются квазиортогональными, а комплексная матрица второго порядка, также изоморфная кватернионам, является квазиунитарной.

Покажем теперь, что квазиунитарные матрицы n -го порядка (за исключением нуля) составляют мультипликативную группу.

В самом деле, единичная матрица является квазиунитарной и представляет собой единицу системы. Далее, как мы видели, каждой квазиунитарной матрице A (за исключением нулевой) соответствует квазиунитарная обратная матрица

$$A^{-1} = A^+/\lambda.$$

Рассмотрим теперь произведение AB квазиунитарных матриц A и B . Имеем:

$$AB \cdot (AB)^+ = AB B^+ A^+ = \lambda_B (AA^+) = \lambda_B \lambda_A, \quad \text{где} \quad \lambda_A = AA^+, \quad \lambda_B = BB^+. \quad (9)$$

Следовательно, AB – также квазиунитарная матрица. Таким образом, все условия, превращающие квазиунитарные матрицы n -го порядка, кроме нуля, в группу по умножению, выполнены. Назовем произведение

$$AA^+ = \lambda_A = |A|^2 \quad (10)$$

квадратом модуля квазиунитарной матрицы, а, следовательно,

$$|A| = \sqrt{AA^+} \quad (11)$$

– ее модулем или абсолютной величиной.

Из формулы (10) следует, что для детерминанта A имеем:

$$|\det A|^2 = |A|^{2n},$$

откуда

$$|\det A| = |A|^n \quad (10')$$

(n – порядок матрицы).

В вещественной области квазиортогональные матрицы n -го порядка, за исключением нуля, точно так же составляют мультипликативную группу. Модулем, или абсолютной величиной, квазиортогональной матрицы является величина

$$|A| = \sqrt{A\tilde{A}}. \quad (12)$$

Формула (10') верна, разумеется, и для вещественной квазиортогональной матрицы n -го порядка. Согласно (9)–(12) модуль произведения квазиунитарных (квазиортогональных) матриц равен произведению модулей сомножителей.

Группу (по умножению) квазиунитарных матриц n -го порядка (кроме нуля) обозначим символом $QU(n)$, а группу (по умножению) квазиортогональных матриц n -го порядка (кроме нуля) – символом $QO(n)$. Группу квазиунитарных матриц n -го порядка с положительным детерминантом обозначим через $QSU(n)$, а такую же группу квазиортогональных матриц – через $QO^+(n)$.

Подчеркнем, что совокупность квазиортогональных и квазиунитарных матриц n -го порядка содержит нулевую матрицу, что не имеет места для ортогональных и унитарных матриц.

§3. Примеры гипертел, гиперполей и гиперколец

1) Квазиортогональные вещественные матрицы второго порядка, образующие (кроме нуля) мультипликативную группу $QO(2)$.

Рассмотрим вещественную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Транспонируя A , получим:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} x & a_{21} \\ y & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Нас интересуют квазиортогональные матрицы. Условия квазиортогональности (7) дают:

$$(A\tilde{A})_{11} = x^2 + y^2, \quad (15)$$

$$(A\tilde{A})_{12} = xa_{21} + ya_{22} = 0, \quad (16)$$

$$(A\tilde{A})_{21} = a_{21}x + a_{22}y = 0, \quad (16')$$

$$(A\tilde{A})_{22} = (A\tilde{A})_{11} = a_{21}^2 + a_{22}^2 = x^2 + y^2. \quad (17)$$

Поскольку уравнения (16) и (16') совпадают, имеем систему уравнений (16), (17) относительно a_{21}, a_{22} :

$$xa_{21} + ya_{22} = 0, \quad (16)$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = x^2 + y^2. \quad (17)$$

Уравнение (16) дает

$$a_{21} = -\frac{y}{x} a_{22}. \quad (16'')$$

Подставляя (16'') в (17), получим:

$$\frac{(x^2 + y^2)a_{22}^2}{x^2} = x^2 + y^2. \quad (17')$$

При $x \neq 0$ имеем:

$$a_{22}^2 = x^2$$

откуда

$$a_{22} = \pm x. \quad (17'')$$

Подставляя (17'') в (16''), получим:

$$a_{21} = \mp y. \quad (18)$$

Следовательно, имеем два решения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix}. \quad (20)$$

При $x = 0, y \neq 0$ уравнения (16) и (17) дают:

$$a_{22} = 0, \quad (21)$$

$$a_{21} = \mp y. \quad (22)$$

Для матрицы A имеем:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}, \quad (19')$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & y' \\ y' & 0 \end{pmatrix}. \quad (20')$$

Матрицы (19') и (20') являются частными случаями матриц A_1 и A_2 ((19) и (20)). Наконец, при $x = y = 0$ имеем, согласно (17):

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 0, \quad (23)$$

откуда

$$a_{21} = a_{22} = 0, \quad (24)$$

и мы получим нулевую матрицу

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Но матрицы (25) также являются частными случаями матриц A_1 и A_2 ((19) и (20)).

Таким образом, квазиортогональные матрицы второго порядка в общем случае сводятся к матрицам A_1 и A_2 , определяемым формулами (19) и (20). Матрицы A_1 и A_2 определяются независимыми переменными $x, y; x', y'$.

Как известно [2], матрицы A_1 , определяемые формулой (19), изоморфны комплексным числам, причем модуль матрицы равен модулю комплексного числа. Легко видеть, что матрицы A_1 (комплексные числа) образуют (кроме нуля) мультипликативную группу $QO^+(2)$.

Как известно, придавая x и y различные значения и складывая матрицы типа A_1 (комплексные числа), получим:

$$A_1|_{x_1, y_1} + A_1|_{x_2, y_2} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

т. е. снова матрицы типа A_1 – квазиортогональные матрицы (комплексные числа). Точно так же сложение матриц типа A_2 дает снова матрицы типа A_2 . Сумма же $A_1 + A_2$ матриц A_1 и A_2 есть, вообще говоря, матрица, не принадлежащая ни к одному из указанных типов, т. е. не является квазиортогональной матрицей. Совокупности матриц A_1 и A_2 нигде, кроме нулевой матрицы, не пересекаются и, следовательно, являются двумя аддитивными группами, пересекающимися только в нуле.

Произведение двух матриц типа A_1 (комплексных чисел), как известно, есть снова матрица типа A_1 (т. е. комплексное число).

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} A_3 &= (A_2|_{x=x'_1, y=y'_1}) \cdot (A_2|_{x=x'_2, y=y'_2}) = \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \\ y'_1 & -x'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 & y'_2 \\ y'_2 & -x'_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2 & x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2 \\ y'_1 x'_2 - x'_1 y'_2 & y'_1 y'_2 + x'_1 x'_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Мы видим, что A_3 – матрица типа A_1 , т. е. комплексное число, хотя и зависит от порядка сомножителей.

Наконец,

$$A_4 = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' & xy' - yx' \\ -yx' + xy' & -yy' - xx' \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$A_5 = A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'x - y'y & x'y + y'x \\ y'x + x'y & y'y - x'x \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Таким образом, $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$, но как $A_4 = A_1 A_2$, так и $A_5 = A_2 A_1$ являются матрицами типа A_2 . Мы убедились в том, что:

а) квазиортогональные матрицы второго порядка не являются ни телом, ни даже кольцом, но представляют собой гипертело второго порядка;

б) матрицы типа A_1 (кроме нулевой матрицы) представляют собой нормальный делитель всей мультипликативной группы, причем аддитивная группа A_2 (без нуля) – класс смежности по нормальному делителю A_1 ;

с) поскольку, как легко видеть, аддитивные группы A_1 и A_2 – векторные двумерные пространства над полем действительных чисел, то квазиортогональные матрицы второго порядка представляют собой гипералгебру второго порядка второго ранга с делением по аддитивным группам над полем действительных чисел.

2) Квазиунитарные матрицы второго порядка, образующие (кроме нуля) мультипликативную группу $QU(2)$.

а) Пусть теперь A – комплексная матрица второго порядка. Как и в предыдущем примере, положим

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Определим матричные элементы a_{21} и a_{22} для квазиунитарной матрицы. Для A^+ получим:

$$A^+ = \begin{pmatrix} x^* & a_{21}^* \\ y^* & a_{22}^* \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Выпишем условия квазиунитарности:

$$(AA^+)_{11} = |x|^2 + |y|^2, \quad (31)$$

$$(AA^+)_{12} = xa_{21}^* + ya_{22}^* = 0, \quad (32)$$

$$(AA^+)_{21} = a_{21}x^* + a_{22}y^* = 0, \quad (33)$$

$$(AA^+)_{22} = |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 = |x|^2 + |y|^2. \quad (34)$$

Решая систему уравнений (33), (34), получим:

$$a_{21} = -\frac{a_{22}y^*}{x^*}, \quad (35)$$

$$|a_{22}|^2 \frac{(|y|^2 + |x|^2)}{|x|^2} = |x|^2 + |y|^2. \quad (36)$$

При $x \neq 0$ формула (36) дает:

$$|a_{22}| = |x|. \quad (37)$$

Не нарушая общности, запишем:

$$a_{22} = x^* e^{i\varphi}. \quad (38)$$

Подставляя (38) в (35), имеем:

$$a_{21} = -y^* e^{i\varphi}. \quad (39)$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* e^{i\varphi} & x^* e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

При $x = 0, y \neq 0$ получим, согласно (33), (34):

$$a_{22} = 0, \quad (41)$$

$$|a_{21}| = |y|, \quad (42)$$

откуда, не нарушая общности,

$$a_{21} = -y^* e^{i\varphi}. \quad (39')$$

При $x = 0, y = 0$ получим, согласно (34):

$$a_{21} = a_{22} = 0. \quad (43)$$

Таким образом, общий вид квазиунитарной матрицы дается формулой (40).

Назовем φ в формуле (40) угловым параметром квазиунитарной матрицы второго порядка. Легко видеть, что все матрицы A с одним и тем же угловым параметром φ составляют аддитивную группу.

Рассмотрим теперь две квазиунитарные матрицы с угловыми параметрами φ_1 и φ_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* e^{i\varphi_1} & x_1^* e^{i\varphi_1} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^* e^{i\varphi_2} & x_2^* e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$A_{12} = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} x_{12} & y_{12} \\ -y_{12}^* e^{i\varphi_{12}} & x_{12}^* e^{i\varphi_{12}} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

где

$$x_{12} = x_1 x_2 - y_1 y_2^* e^{i\varphi_2}, \quad (47)$$

$$y_{12} = x_1 y_2 + y_1 x_2^* e^{i\varphi_2}, \quad (48)$$

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi \quad (k - \text{целое}). \quad (49)$$

Произведение A_{12} , как и должно быть, описывается формулой (46), однотипной с формулой (40), причем его угловой параметр (с точностью до $2k\pi$) равен сумме угловых параметров сомножителей. Легко видеть из формулы (40), что:

$$\det A = |\det A| e^{i\varphi}. \quad (40')$$

В общем случае для матриц n -го порядка, очевидно, также выполняется равенство (40'), где φ – некоторый угол. Назовем φ в формуле (40') угловым параметром квазиунитарной матрицы n -го порядка. Очевидно, что и в общем случае квазиунитарной матрицы n -го порядка выполняется соотношение (49).

При $\varphi = 0$ квазиунитарные матрицы n -го порядка (кроме нуля) образуют мультипликативную группу $QSU(n)$ – подгруппу группы $QU(n)$.

Матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix} \quad (50)$$

с нулевым угловым параметром, как известно [4], изоморфны кватернионам. Они представляют собой (без нуля) нормальный делитель всей мультипликативной группы, поскольку содержат единичную матрицу.

Таким образом, из формул (44)–(50) следует, что квазиунитарные матрицы второго порядка представляют собой гипертело бесконечного порядка.

б) Рассмотрим теперь в качестве частного случая матрицы типа

$$A_{1,0} = A_1|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* & x_1^* \end{pmatrix}, \quad (44')$$

$$A_{2,0} = A_2|_{\varphi=\pi} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2^* & -x_2^* \end{pmatrix}. \quad (45')$$

Матрицы $A_{1,0}$ типа A_0 (см. (50)) и, следовательно, изоморфны кватернионам. Матрицы типа $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ представляют собой, согласно предыдущему, две аддитивные группы. Имеем:

$$A_{10,10'} = A_{1,0}A'_{1,0} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* & x_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \\ -y'^*_1 & x'^*_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x'_1 - y_1y'^*_1 & x_1y'_1 + y_1x'^*_1 \\ -x_1^*y'^*_1 - y_1^*x'_1 & x_1^*x'^*_1 - y_1^*y'_1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

– матрицы типа $A_{1,0}$;

$$A_{20,20'} = A_{2,0}A'_{2,0} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2^* & -x_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 & y'_2 \\ y'^*_2 & -x'^*_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x'_2 + y_2y'^*_2 & x_2y'_2 - x'^*_2y_2 \\ y_2^*x'_2 - x_2^*y'^*_2 & y_2^*y'_2 + x_2^*x'^*_2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

– матрицы типа $A_{1,0}$;

$$A_{10,20} = A_{1,0}A_{2,0} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2^* & x_1y_2 - y_1x_2^* \\ -y_1^*x_2 + x_1^*y_2^* & -y_1^*y_2 - x_1^*x_2^* \end{pmatrix} \quad (53)$$

– матрицы типа $A_{2,0}$;

$$A_{20,10} = A_{2,0}A_{1,0} = \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_2y_1^* & x_2y_1 + y_2x_1^* \\ y_2^*x_1 + x_2^*y_1^* & y_2^*y_1 - x_1^*x_2^* \end{pmatrix} \quad (54)$$

– матрицы типа $A_{2,0}$; легко показать, что матрицы, обратные матрицам $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$, также являются матрицами типа $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ соответственно. Матрицы $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ составляют, таким образом, гипертело второго порядка, причем матрицы $A_{1,0}$ (без нуля) – нормальный делитель мультипликативной группы.

3) *Квазиунитарные матрицы второго порядка с кватернионными матричными элементами и измененными законами умножения.*

Рассмотрим произведение матриц n -го порядка $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$ с измененным законом умножения:

$$D_{ik} = (A_{(1)} \circ A_{(2)})_{ik} = \sum_l A_{(1)il} P_{il,lk} A_{(2)lk}, \quad (55)$$

где $P_{il,lk}$ – оператор,

$$P_{il,lk} = \begin{cases} 1 & \text{для } A_{(1)il} \text{ и } A_{(2)lk}, \text{ которые не переставляются,} \\ p & \text{для } A_{(1)il} \text{ и } A_{(2)lk}, \text{ которые переставляются,} \end{cases} \quad (56)$$

т. е.

$$A_{(1)il} p A_{(2)lk} = A_{(2)lk} A_{(1)il}. \quad (57)$$

Нетрудно показать, что рассматриваемое изменение закона умножения матриц не нарушает дистрибутивных законов. Получим также условия, при которых выполняется правило сопряжения произведения матриц:

$$D^+ = (A_{(1)} \circ A_{(2)})^+ = A_{(2)}^+ \circ A_{(1)}^+, \quad (D = A_{(1)} \circ A_{(2)}). \quad (a)$$

Имеем:

$$D_{ik} = (A_{(1)} \circ A_{(2)})_{ik} = \sum_l A_{(1)il} P_{il,lk} A_{(2)lk}, \quad D_{ki} = \sum_l A_{(1)kl} P_{kl,li} A_{(2)li}.$$

Поскольку $(D^+)_{ik} = D_{ki}^+$, получим:

$$(D^+)_{ik} = ((A_{(1)} \circ A_{(2)})^+)_{ik} = \sum_l (A_{(2)li})^+ P_{kl,li} (A_{(1)kl})^+. \quad (58')$$

С другой стороны,

$$((A_{(2)}^+ \circ A_{(1)})^+)_{ik} = \sum_l (A_{(2)}^+)_{il} P_{il,lk} (A_{(1)}^+)_{lk} = \sum_l (A_{(2)li})^+ P_{il,lk} (A_{(1)kl})^+. \quad (58'')$$

Приравнивая правые части (58') и (58''), получаем условия выполнения соотношения (а):

$$P_{il,lk} = P_{kl,li}. \quad (58)$$

Рассмотрим теперь матрицы второго порядка вида (40), но теперь x, y – кватернионы. Если потребовать, чтобы $-y^+ e^{i\varphi}, x^+ e^{i\varphi}$ также были кватернионами, то $e^{i\varphi}$ должно быть действительным числом, что возможно только при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Таким образом, будем считать, что φ принимает только два значения, причем $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. При этом $e^{i\varphi}$ перестановочно с кватернионами. Для A_φ^+ имеем:

$$A_\varphi^+ = \begin{pmatrix} x^+ & -y e^{-i\varphi} \\ y^+ & x e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Далее,

$$A_\varphi A_\varphi^+ = \begin{pmatrix} |x|^2 + |y|^2 & (-xy + yx)e^{-i\varphi} \\ (-y^+ x^+ + x^+ y^+)e^{i\varphi} & |y|^2 + |x|^2 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

В силу некоммутативности x и y , а также x^+, y^+ недиагональные элементы матрицы $A_\varphi A_\varphi^+$ не обращаются в нуль, поэтому A_φ не квазиунитарна при обычном законе умножения матриц. Введем теперь операторы $P_{il,lk}$ в закон умножения матриц вида (40), подобрав их таким образом, чтобы матрицы A_φ стали квазиунитарными. Выпишем коэффициенты $P_{il,lk}$ в виде матрицы

$$P = \begin{pmatrix} P_{11,11} & P_{12,21} & P_{11,12} & P_{12,22} \\ P_{21,11} & P_{22,21} & P_{21,12} & P_{22,22} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Существует восемь значений матрицы P , при которых матрицы A квазиунитарны и составляют квазиунитарные группоид. Для этих вариантов матрицы P равны:

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & p & p & p \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & 1 \\ p & 1 & p & p \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & p \\ 1 & p & p & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} p & 1 & p & 1 \\ p & 1 & p & 1 \end{pmatrix}, \\ P_5 &= \begin{pmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 1 & p & 1 & p \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & p & p & 1 \\ p & 1 & 1 & p \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} p & p & 1 & p \\ 1 & p & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_8 = \begin{pmatrix} p & p & p & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (62)$$

Во всех вариантах, как следует из формул, которые приведены в дополнении, квазиунитарные матрицы представляют собой гиперкольца. Эти гиперкольца, как можно показать, состоят из двух аддитивных векторных пространств, представляемых матрицами $A|_{\varphi=0}$ и $A|_{\varphi=\pi}$, и являются гипералгебрами второго порядка восьмого ранга над полем действительных чисел. Легко проверяется выполнение условия

$$(A_{\varphi 1} \circ A_{\varphi 2})^+ = A_{\varphi 2}^+ A_{\varphi 1}^+ \quad (63)$$

для всех вариантов. В шестом варианте матрицы $A|_{\varphi=0}$ представляют собой алгебру Кэли [1] (матрицы $A|_{\varphi=0}$, как известно и легко показать, альтернативны [1], однако этого нельзя сказать о всех матрицах второго порядка с кватернионными матричными элементами и законом умножения (55)). Матрицы A_φ в данном случае представляют собой гипералгебру второго порядка восьмого ранга над полем действительных чисел с делением. Нетрудно показать, что не только для алгебры Кэли, но и для всей гипералгебры матриц A_φ выполняется соотношение

$$|A_{\varphi_1} \circ A_{\varphi_2}| = |A_{\varphi_1}| \cdot |A_{\varphi_2}|. \quad (64)$$

В остальных семи вариантах $|A_{\varphi_1} \circ A_{\varphi_2}| \neq |A_{\varphi_1}| \cdot |A_{\varphi_2}|$.

4) а. Квазиортогональные вещественные матрицы третьего порядка вида

$$A_{00} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad (a), \quad A_{10} = \begin{pmatrix} x' & y' & 0 \\ y' & -x' & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x'^2 + y'^2} \end{pmatrix} \quad (b), \quad (65)$$

$$A_{01} = \begin{pmatrix} x'' & y'' & 0 \\ -y'' & x'' & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{x''^2 + y''^2} \end{pmatrix} \quad (a), \quad A_{11} = \begin{pmatrix} x''' & y''' & 0 \\ y''' & -x''' & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{x'''^2 + y'''^2} \end{pmatrix} \quad (b). \quad (66)$$

Сами по себе матрицы (65) – (66) квазиортогональны, но квазиортогональность теряется, если складывать друг с другом эти матрицы даже одного типа по обычным правилам. Это положение может быть исправлено, если изменить правила сложения.

Для сокращения выкладок запишем матрицы (65) – (66) в компактном виде

$$A_{ik}^l = \begin{pmatrix} x_l & y_l & 0 \\ (-1)^{i+1}y_l & (-1)^i x_l & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{x_l^2 + y_l^2} \end{pmatrix}, \quad (i, k = 0, 1). \quad (67)$$

Определим теперь сумму двух матриц одного типа A_{ik}^1 и A_{ik}^2 следующим образом:

$$A_{ik}^0 = A_{ik}^1(+)A_{ik}^2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & 0 \\ (-1)^{i+1}(y_1 + y_2) & (-1)^i(x_1 + x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Из формулы (68) видно, что определенный ею закон сложения является ассоциативным. Также очевидно, что определенная формулой (68) суммарная матрица остается квазиортогональной. Матрицам (65) – (66), как квазиортогональным, соответствуют обратные матрицы. При умножении матриц типа (65) – (66), или (67), получаются матрицы тех же типов со следующей таблицей умножения

–	A''_{00}	A''_{10}	A''_{01}	A''_{11}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{11}$
A'_{10}	$\tilde{A}'_{10}$	$\tilde{A}'_{00}$	$\tilde{A}'_{11}$	$\tilde{A}'_{01}$
A'_{01}	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{11}$	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$
A'_{11}	$\tilde{A}'_{11}$	$\tilde{A}'_{01}$	$\tilde{A}'_{10}$	$\tilde{A}'_{00}$

Таблица № 1

(*Ремарка.* Первый множитель берется в первом столбце, второй – в верхней строке, произведение – на пересечении соответствующих строк и столбцов; например, $A'_{10} \cdot A''_{01} = \tilde{A}_{11}$ и т. д.)

Следовательно, матрицы типа (65)–(66), или (67) (кроме нуля) составляют группу, матрицы типа (65a) (кроме нуля) – нормальный делитель этой группы (как содержащие единичную матрицу); матрицы типа (65b)–(66b) (кроме нуля) – смежные классы по нормальному делителю. Они, как совокупности, вместе с нормальным делителем, но без нуля, являются (см. таблицу 1) элементами коммутативной факторгруппы [1,3]. Таблица 1 дает закон умножения факторгруппы – нормального делителя типа A_{00} и классов смежности типа A_{10} , A_{01} и A_{11} . Матрицы типа (67) представляют собой аддитивные группы согласно правилу сложения (68), поскольку сумма двух матриц одного типа – матрица того же типа; имеется 0 (нулевая матрица) и есть противоположная матрица

$$-A_{ik}^l(x, y) = A_{ik}^l(-x, -y.)$$

Покажем, что для матриц типа (67) с правилом сложения (68) выполняются законы дистрибутивности. Действительно,

$$A_{ik}^1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ (-1)^{i+1}y_1 & (-1)^i x_1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

$$A_{ik}^2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 0 \\ (-1)^{i+1}y_2 & (-1)^i x_2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \end{pmatrix}, \quad (70)$$

$$A_{ik}^1(+)A_{ik}^2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & 0 \\ (-1)^{i+1}(y_1 + y_2) & (-1)^i(x_1 + x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \end{pmatrix}. \quad (71)$$

$$A_{lm}^3 = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 & 0 \\ (-1)^{l+1}y_3 & (-1)^l x_3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \end{pmatrix}, \quad (72)$$

$$(A_{ik}^1(+)A_{ik}^2)A_{lm}^3 = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3(-1)^{l+1} & (x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3(-1)^l & \\ (-1)^{i+1}(y_1 + y_2)x_3 + (-1)^{i+l+1}(x_1 + x_2)y_3 & (-1)^{i+1}(y_1 + y_2)y_3 + (x_1 + x_2)x_3(-1)^{i+l} & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ (-1)^{k+m} \sqrt{[(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2](x_3^2 + y_3^2)} & & \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Далее,

$$A_{ik}^r A_{lm}^3 = \begin{pmatrix} (x_r x_3 + y_r y_3 (-1)^{l+1}) & x_r y_3 + y_r x_3 (-1)^l & 0 \\ (-1)^{i+1} y_r x_3 + (-1)^{i+l+1} y_3 x_r & (-1)^{i+1} y_3 y_r + (-1)^{i+l} x_r x_3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k+m} \sqrt{(x_r^2 + y_r^2)(x_3^2 + y_3^2)} \end{pmatrix}. \quad (74)$$

($r = 1, 2$). В результате несложных вычислений получим:

$$A_{ik}^1 A_{lm}^3 (+) A_{ik}^2 A_{lm}^3 = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) x_3 + (y_1 + y_2) y_3 (-1)^{l+1} & (x_1 + x_2) y_3 + (y_1 + y_2) x_3 (-1)^l & 0 \\ (x_1 + x_2) y_3 (-1)^{i+l+1} + (y_1 + y_2) x_3 (-1)^{i+1} & (x_1 + x_2) x_3 (-1)^{i+l} + (y_1 + y_2) y_3 (-1)^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k+m} \sqrt{[(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2](x_3^2 + y_3^2)} \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Из (73) и (75) следует:

$$A_{ik}^1 A_{lm}^3 (+) A_{ik}^2 A_{lm}^3 = (A_{ik}^1 (+) A_{ik}^2) A_{lm}^3, \quad (76)$$

т. е. правое правило дистрибутивности. Левое правило дистрибутивности доказывается аналогично.

Мы видим, что квазиортогональные матрицы A_{ik} при фиксированных i, k являются аддитивными группами, а их совокупность (кроме нуля) представляет собой мультипликативную группу. При этом, матрицы A_{00} , как легко показать, изоморфны комплексным числам, если при суммировании использовать знак $(+)$, но не знак $+$. Матрицы A_{ik} , взятые в отдельности при фиксированных i, k , как легко показать, представляют собой векторные двухмерные пространства над полем действительных чисел. Таким образом, совокупность матриц третьего порядка A_{ik} представляет собой гипералгебру четвертого порядка второго ранга с делением над полем действительных чисел, если сложение производить согласно формуле (68).

б. Легко показать с помощью таблицы 1, что каждая из совокупностей матриц $A_{00}, A_{10}; A_{00}, A_{01}; A_{00}, A_{11}$ представляет собой гиперподалгебру второго порядка второго ранга с делением. (Таблицы 2, 3, 4 – таблицы умножения для этих совокупностей, причем факторгруппы мультипликативных групп всех трех гиперподалгебр изоморфны.)

–	A''_{00}	A''_{10}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$
A'_{10}	$\tilde{A}_{10}'$	$\tilde{A}_{00}'$

–	A''_{00}	A''_{01}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{01}$
A'_{01}	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{00}$

–	A''_{00}	A''_{11}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{11}$
A'_{11}	$\tilde{A}_{11}'$	$\tilde{A}_{00}'$

Таблицы 2–4

Отметим в связи со сказанным изоморфизм всех конечных групп заданного простого порядка [1].

Если индексы i, k в A_{ik} считать элементами конечного поля Z_2 [2], принимающими значения 0, 1, причем $0+0 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$, $1+1 = 0 \pmod{2}$, то совокупность

i, k представляет собой двухмерный вектор над этим полем. Из таблицы 1 и таблиц 2,3,4 видно, что всегда выполняется условие

$$A_{i,k}A_{l,m} = A_{i+l,k+m}. \quad (77)$$

Следовательно, если составить из совокупностей матриц $A_{i,k}$ прямую сумму

$$\tilde{A} = \tilde{A}_{00} \oplus \tilde{A}_{10} \oplus \tilde{A}_{01} \oplus \tilde{A}_{11},$$

а умножение ее элементов A производить согласно дистрибутивному закону и формуле (77), то получим стандартную градуированную алгебру [5].

5) *Гипералгебра с делением над полем действительных чисел, соответствующая кольцу формальных действительных степенных рядов.*

Рассмотрим кольцо формальных действительных степенных рядов M [1]:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (78)$$

где a_k – действительные числа.

Совокупность аддитивных групп A_k с элементами $a_k x^k$ представляет собой, очевидно, гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел.

6) *Гипералгебра с делением над полем комплексных чисел, соответствующая кольцу формальных комплексных рядов Фурье вида*

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}, \quad (79)$$

где f_k – комплексные числа, k – целые числа, x – действительный аргумент. Совокупность аддитивных групп F_k с элементами $f_k e^{ikx}$ представляет собой гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем комплексных чисел.

7) *Действительная и мнимая оси в стандартной групповой гиперкомплексной системе n -ранга является гипералгеброй n порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по этим осям.*

8) а) *Прямые на комплексной плоскости, проходящие через начало координат.*
Рассмотрим совокупность прямых:

$$z = x + iy = \rho e^{i(\varphi+k\pi)}, \quad (80)$$

k – целое, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

При четном k имеем луч

$$z_1 = \rho e^{i\varphi}, \quad (81)$$

при нечетном – луч

$$z_2 = -\rho e^{i\varphi}. \quad (80')$$

Каждая прямая (φ задано) представляет собой аддитивную группу, действительная ось

$$z = \rho e^{ik\pi} \quad (82)$$

представляет собой поле действительных чисел, являясь (кроме нуля) нормальным делителем всех прямых комплексной плоскости, содержащих нуль, кроме нуля. Таким образом, легко видеть, что комплексная плоскость представляет собой гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по прямым, проходящим через начало координат (и, разумеется, алгебру второго ранга с делением над полем действительных чисел).

б) *Действительная и мнимая оси комплексной плоскости.*

Уравнения этих прямых запишутся соответственно

$$z_1 = \rho_1 e^{ik_1\pi} - \quad (83)$$

действительные числа,

$$z_2 = \rho_2 e^{i(\pi/2+k_2\pi)} - \quad (84)$$

мнимые числа (k_1 и k_2 – целые числа).

Каждая из этих прямых – аддитивная группа.

Далее, имеем:

$$z_1 \cdot z'_1 = \rho_1 \rho'_1 e^{i(k_1+k'_1)\pi} - \quad (85)$$

действительные числа,

$$z_2 \cdot z'_2 = \rho_2 \rho'_2 e^{i[\pi+(k_2+k'_2)\pi]} = \rho_2 \rho'_2 e^{i(k_2+k'_2+1)\pi} - \quad (86)$$

действительные числа,

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = \rho_1 \rho_2 e^{[\pi/2+i(k_1+k_2)\pi]} - \quad (87)$$

мнимые числа. Кроме того, обратные действительным числам суть

$$1/z_1 = 1/\rho_1 e^{-ik_1\pi} - \quad (88)$$

действительные числа; обратные мнимым числам –

$$1/z_2 = 1/\rho_2 e^{i(-\pi/2-k_2\pi)} = 1/\rho_2 e^{i[\pi/2-(k_2+1)\pi]} - \quad (89)$$

мнимые числа.

Чисто действительные и чисто мнимые числа (кроме нуля) представляют собой мультипликативную группу, действительные числа – нормальный делитель этой группы.

Таким образом, действительная и мнимая оси совместно являются гипералгеброй второго порядка первого ранга (по этим осям) с делением над полем действительных чисел.

9) *Действительная и мнимая оси кватернионов* являются гипералгеброй 4-го порядка 1-го ранга с делением над полем действительных чисел.

10) *Множество именованных (размерных) действительных чисел, применяемых в физике и геометрии.*

Числа, не имеющие размерности, являются частным случаем таких чисел. Как известно, суммируются только числа, имеющие одинаковую размерность, и, в частности, числа, не имеющие размерности. Таким образом, числа с одинаковой размерностью (в том числе числа, не имеющие размерности), представляют собой пересекающиеся только в нуле аддитивные группы, а вся совокупность действительных чисел,

кроме нуля, представляет собой мультипликативную группу. Безразмерные действительные числа (кроме нуля) представляют собой нормальный делитель всей мультипликативной группы. Следовательно, размерные и безразмерные действительные числа в совокупности представляет собой гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем безразмерных действительных чисел. Таким образом, физические величины "не укладываются" в кольцо.

11) Совокупность размерных и безразмерных целых чисел представляет собой гиперкольцо бесконечного порядка, поскольку указанная совокупность представляет собой только мультипликативную полугруппу [1] (целые числа не всегда можно делить друг на друга).

12) Трехмерное вещественное векторное пространство, в котором в качестве произведения векторов берется их векторное произведение [1]. Аддитивными группами множества M являются векторные пространства полярных и аксиальных векторов. Поскольку аксиальные и полярные векторы друг с другом обычно напрямую не складываются, сумма полярных и аксиальных векторов, как правило, не является кольцом. Произведение двух полярных векторов является аксиальным вектором; произведение двух аксиальных векторов – также аксиальный вектор, а произведение полярного вектора на аксиальный (в любом порядке) – полярный вектор. Следовательно, рассматриваемое множество является гипералгеброй второго порядка третьего ранга над полем действительных чисел. Пространство аксиальных векторов, как легко видеть, является кольцом. Таким образом, представление о векторном умножении как об умножении в кольце неполно.

Заметим, что во всех приведенных примерах фактор-группоиды и фактор-группы были коммутативными. Отметим также, что фактор-группы в примерах 1, 2b, 7b как группы простого (второго) порядка изоморфны.

Список примеров гипертел (гиперполей, гиперколец) можно было бы продолжить. Как известно, гиперкомплексные системы представляют собой действительные алгебры n -го ранга с единицей, $n > 2$ и конечно. Если включить в гиперкомплексные системы бинарные (со сложением и умножением) дистрибутивные алгебраические структуры с единицей над полем действительных чисел, содержащие более чем одно векторное пространство, то действительные гиперкольца с единицей также являются обобщенными гиперкомплексными системами, если они не сводятся к кольцам.

Заключение

Понятия гиперкольца, гипертела, гиперполя, гипералгебры являются непосредственным обобщением понятий кольца, тела, поля, алгебры, где определены две бинарные операции – сложение и умножение, связанные левым и правым дистрибутивными законами.

Для нужд физики имеет смысл подчеркнуть важность того, что:

- 1) физические величины не являются подмножеством кольца;
- 2) операция векторного умножения в множестве полярных и аксиальных векторов, вообще говоря, не является умножением в кольце.

Дополнение

Произведение квазиунитарных матриц второго порядка $A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2}$ с кватернионными матричными элементами и измененными законами умножения.

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^+ e^{i\varphi_1} & x_1^+ e^{i\varphi_1} \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_2^+ e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

$$1) P_1, A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_1 y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$2) P_2, A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2^+ e^{i\varphi_2} & y_2 x_1 + y_1 x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$3) P_3, A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2 x_1 - y_1 y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_1 y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$4) P_4, A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2 x_1 - y_1 y_2^+ e^{i\varphi_2} & y_2 x_1 + y_1 x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$5) P_5, A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} & x_1 y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+ y_2 e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$6) P_6, A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} & y_2 x_1 + y_1 x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+ y_2 e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$7) P_7, A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2 x_1 - y_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} & x_1 y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+ y_2 e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$8) P_8, A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2 x_1 - y_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} & y_2 x_1 + y_1 x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+ y_2 e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

Литература

- [1] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", ГИФМЛ, М., 1962 г.
- [2] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, М.-Л., 1949 г.
- [3] М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов. "Применение теории групп в квантовой механике". "Наука", ГРФМЛ, М., 1967 г.
- [4] Э. Маделунг. "Математический аппарат физики". Справочное руководство. Пер. с 6-го немецкого издания под ред. В. И. Левина. 2-е изд., "Наука", ГРФМЛ, М., 1968.
- [5] С. Ленг. "Алгебра". Пер. с англ. под ред. А. И. Кострикина. "Мир", М., 1968.

КВАТЕРНИОНЫ: АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

А. П. Ефремов

*Российский университет дружбы народов
a.yefremov@rudn.ru*

В статье дан обзор результатов изучения алгебраических, геометрических и дифференциальных свойств кватернионных ($\mathbb{Q}$) чисел и их приложений. Кратко изложены традиционная и "тензорная" формы записи и представления $\mathbb{Q}$ -единиц. Установлена их структура, а также определены группы их преобразований, сохраняющие форм-инвариантность правила $\mathbb{Q}$ -умножения. Рассмотрен ряд математических и физических приложений: применение триад $\mathbb{Q}$ -единиц как подвижных реперов, построение различных семейств векторных $\mathbb{Q}$ -пространств, запись уравнений механики в произвольно вращающихся системах отсчета, а также реализация модели $\mathbb{Q}$ -теории относительности, содержащей все эффекты специальной теории относительности, но допускающей описание кинематики неинерциального движения. Приведен перечень "кватернионных совпадений" – физических соотношений и теорий, естественным образом связанных с математикой $\mathbb{Q}$ -чисел.

Введение

Открытие кватернионных ($\mathbb{Q}$) чисел датируется 1843 годом и обычно связывается с именем В. Р. Гамильтона [1, 2], хотя еще в предшествующем веке в математику $\mathbb{Q}$ -типа объектов вклад внесли Эйлер и Гаусс; более того, Родригес записал правило умножения для элементов схожей алгебры [3-5]. Активное противостояние Гиббса и Хевисайда позициям учеников Гамильтона привело к возникновению современной векторной алгебры, позже – векторному анализу. После этого алгебра кватернионов практически перестала служить инструментом математической физики, несмотря на ее исключительный характер, установленный теоремой Фробениуса. В начале 20 века пал последний бастион любителей $\mathbb{Q}$ -чисел: распалось международное "Общество содействия изучению кватернионов". Единственной реминисценцией некогда знаменитых гиперкомплексных чисел явились матрицы Паули. В более позднее время кватернионы эпизодически использовались как математический аппарат для альтернативного описания уже известных физических моделей [6, 7] или, благодаря удивительным по содержанию и красоте свойствам, применялись в решении задач кинематики твердого тела [8]. Интерес к кватернионным числам существенно возрос в последние два десятка лет с приходом нового поколения теоретиков, почувствовавших в кватернионах высокий нераскрытый потенциал (e. g. [9-11]).

Данная работа представляет собой своего рода обзор направлений использования гиперкомплексных $\mathbb{Q}$ -чисел для описания различных физических систем, а также перспектив в этой области. Кроме того, здесь обсуждаются конкретные физические модели, иногда неожиданные, но, как представляется, заслуживающие внимания.

Обзор организован следующим образом. В разделе 1 кратко описаны общие соотношения алгебры кватернионов – как в традиционной Гамильтоновой формулировке, так и в "тензорном" формате. Раздел 2 посвящен описанию структуры трех "мнимых" кватернионных единиц. В разделе 3 приведены элементы дифференциальной $\mathbb{Q}$ -геометрии с примерами математических приложений. Раздел 4 посвящен

изложению механики Ньютона во вращающихся системах отсчета, описываемых посредством кватернионных реперов. В разделе 5 представлена кватернионная теория относительности и описан ряд следующих из нее кинематических релятивистских эффектов. Раздел 6 содержит список "замечательных кватернионных совпадений", а также заключительное обсуждение проблемы.

1. Алгебра кватернионов

Традиционный подход

По Гамильтону, кватернион есть математический объект вида

$$Q \equiv a + bi + cj + dk,$$

где a, b, c, d – действительные числа, a – множитель действительной единицы "1", а i, j, k – три разные мнимые кватернионные единицы. Правило умножения этих единиц, записанное еще Гамильтоном и часто повторяемое в литературе, имеет вид

$$\begin{aligned} 1i = i1 &\equiv i, & 1j = j1 &\equiv j, & 1k = k1 &\equiv k, \\ i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = -ji &= k, & jk = -kj &= i, & ki = -ik &= j \end{aligned}$$

Эти громоздкие уравнения означают, что Q -умножение теряет коммутативность

$$Q_1 Q_2 \neq Q_2 Q_1,$$

так что появляется понятие правого и левого умножения, но остается ассоциативным

$$(Q_1 Q_2) Q_3 = Q_1 (Q_2 Q_3).$$

В кватернионе естественно выделяются две алгебраически весьма различные части, которые можно обозначить как скалярную:

$$\text{scal } Q = a,$$

и векторную

$$\text{vect } Q = bi + cj + dk.$$

Сложение (вычитание) кватернионов осуществляется покомпонентно: отдельно складываются (вычитаются) скалярные и векторные части. По сложению Q -алгебра коммутативна и ассоциативна.

Далее вводится операция кватернионного сопряжения, аналогичного сопряжению комплексных чисел

$$\bar{Q} \equiv \text{scal } Q - \text{vect } Q = a - bi - cj - dk,$$

и определяется модуль Q -числа

$$|Q| \equiv \sqrt{Q\bar{Q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Последние действия позволяют сформулировать правило деления кватернионов, которое, как и умножение, может быть "правым" и "левым"

$$Q_L = \frac{Q_1 \bar{Q}_2}{|Q_2|^2}, \quad Q_R = \frac{\bar{Q}_2 Q_1}{|Q_2|^2}.$$

Из формулы модуля Q-числа сразу же следует знаменитое тождество четырех квадратов

$$|Q_1 Q_2|^2 = |Q_1|^2 |Q_2|^2.$$

В силу вышеперечисленных свойств Q-числа составляют алгебру, принадлежащую к элитной группе четырех так называемых исключительных – "очень хороших" – алгебр: действительных, комплексных, кватернионных чисел и октав (теоремы Фробениуса и Гурвица 1878-1898 г. г. [12]).

Особое внимание стоит уделить представлениям Q-единиц. В обозначениях Гамильтона действительная единица есть просто 1, тогда как три мнимые единицы по аналогии с алгеброй комплексных чисел обозначены как **i**, **j**, **k**. Позже было найдено простое представление этих единиц с помощью постоянных 2×2 матриц

$$\mathbf{i} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это представление, конечно, не единственное. Вот один простой пример. Если в последних выражениях мнимую единицу алгебры комплексных чисел i представить 2×2 матрицей с действительными компонентами

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то тогда три векторные Q-единицы оказываются представленными действительными 4×4 матрицами. Понятно, что процедуру удвоения ранга матриц представления можно продолжить до бесконечности.

"Тензорный" формат и представления

Если каждой Q-единице присвоить номер (подобно тому, как нумеруются компоненты тензора)

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \rightarrow (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \mathbf{q}, \quad k, j, k, l, m, n, \dots = 1, 2, 3,$$

то кватернионное правило умножения приобретает компактный вид

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j \mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn} \mathbf{q}_n,$$

где δ_{kn} и ε_{knj} – соответственно 3-мерные (3D) символы Кронекера и Леви-Чивиты. Далее, можно показать, что число представлений Q-единиц даже только 2×2 матрицами бесконечно. Действительно, из двух любых 2×2 матриц со свойствами

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}, \quad \text{Tr} A = \text{Tr} B = 0,$$

можно следующим образом сконструировать две первые Q-единицы

$$\mathbf{q}_1 = \frac{A}{\sqrt{\det A}}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{B}{\sqrt{\det B}},$$

при этом третья единица есть

$$\mathbf{q}_3 \equiv \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = \frac{AB}{\sqrt{\det A \det B}} \quad \text{при условии} \quad \text{Tr}(AB) = 0.$$

Скалярная единица всегда неизменна:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразования Q-единиц и инвариантность правила умножения

а. Преобразования спинорного типа

Если U – оператор, изменяющий сразу все единицы, и существует ему обратный U^{-1} : $UU^{-1} = E$, то преобразования

$$\mathbf{q}_{k'} \equiv U\mathbf{q}_kU^{-1} \quad \text{и} \quad 1' \equiv U1U^{-1} = E1 = 1$$

оставляют правило умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n$$

форм-инвариантным

$$\mathbf{q}_{k'}\mathbf{q}_{n'} = U\mathbf{q}_kU^{-1}U\mathbf{q}_nU = U\delta_{kn}U^{-1} + \varepsilon_{knj}U\mathbf{q}_jU^{-1} = \delta_{kn} + \varepsilon_{knj}\mathbf{q}_{j'}.$$

Такой оператор может быть представлен, например, 2×2 матрицей

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det U = 1,$$

или унимодулярным кватернионом

$$U = \frac{a+d}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2} \mathbf{q},$$

где

$$\mathbf{q} \equiv \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix}.$$

В общем случае это преобразование содержит 3 независимых комплексных параметра (или 6 действительных), тогда $U \in SL(2, C)$. В специальном случае есть только три действительных параметра, тогда $U \in SU(2)$.

б. Преобразования векторного типа

Векторные Q-единицы могут быть преобразованы с помощью 3×3 матрицы $O_{k'n}$

$$\mathbf{q}_{k'} = O_{k'n}\mathbf{q}_n.$$

Требование форм-инвариантности правила Q-умножения имеет следствием свойства ортогональности и унимодулярности матрицы преобразования

$$O_{k'n}O_{j'n} = \delta_{kn} \Rightarrow O_{nk'}^{-1} = O_{k'n}, \quad \det O = 1.$$

Понятно, что в общем случае и это преобразование имеет 6 независимых действительных параметров, тогда $O \in SO(3, C)$. В специальном случае параметров 3, тогда

$O \in SO(3, R)$. Ниже приведен вариант матрицы преобразования O , в которой x, y, z – произвольные действительные или комплексные функции

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2-z^2} & -\frac{x\sqrt{1-y^2-z^2}+yz\sqrt{1-x^2-z^2}}{1-z^2} & \frac{xy-z\sqrt{1-x^2-z^2}\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z^2} \\ x & \frac{\sqrt{1-x^2-z^2}\sqrt{1-y^2-z^2}-xyz}{1-z^2} & \frac{-y\sqrt{1-x^2-z^2}-xz\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z^2} \\ z & y & \sqrt{1-y^2-z^2} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица может быть представлена как произведение трех неприводимых сомножителей

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{1-z^2}} & -\frac{x}{\sqrt{1-z^2}} & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} & \sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{1-z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & \sqrt{1-z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1-y^2-z^2}{1-z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-z^2}} \\ 0 & \frac{y}{\sqrt{1-z^2}} & \sqrt{\frac{1-y^2-z^2}{1-z^2}} \end{pmatrix}.$$

и после подстановок $z \equiv \sin B$, $x \equiv -\sin A \cos B$, $y \equiv -\sin \Gamma \cos B$, где A, B, Γ – комплексные "углы" приведена к виду

$$O = \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos B & 0 & -\sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Gamma & \sin \Gamma \\ 0 & -\sin \Gamma & \cos \Gamma \end{pmatrix} = O_3^A O_2^B O_1^\Gamma.$$

Если углы действительные: $A = \alpha$, $B = \beta$, $\Gamma = \gamma$, то данное преобразование есть обычное векторное вращение, составленное из трех простых поворотов вокруг ортогональных пронумерованных осей: $O \Rightarrow R, R = R_3^\alpha R_2^\beta R_1^\gamma$. Взаимосвязь между родственными "спинорными" и "векторными" преобразованиями легко определяется:

$$O_{k'n} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(U \mathbf{q}_k U^{-1} \mathbf{q}_n), \quad U = \frac{1 - O_{k'n} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_n}{2\sqrt{1 + O_{mm'}}}$$

.

Q-геометрия в трехмерном пространстве

Еще Гамильтон заметил, что триада Q-единиц ведет себя как три взаимосвязанных единичных вектора (длиной i), порождающих декартову систему координат, впрочем, несколько экзотическую в силу собственной "мнимости". В связи с этим, в 3D-пространстве триада $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ будет называться кватернионным базисом (Q-базисом). Преобразования Q-единиц имеют при этом очевидный геометрический смысл различных поворотов Q-базиса. Пример: простое вращение на действительный угол вокруг оси № 3

$$\mathbf{q}' = R_3^\alpha \mathbf{q}.$$

В любом Q-базисе можно определить трехмерный кватернионный вектор (Q-вектор)

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{q}_k,$$

все компоненты которого a_k здесь действительны. Важнейшее свойство Q-вектора – его инвариантность по отношению к векторным преобразованиям из группы $SO(3, R)$

$$\mathbf{a}' = a_{k'} \mathbf{q}_{k'} = a_{k'} R_{k'j} \mathbf{q}_j = a_j \mathbf{q}_j = \mathbf{a}.$$

Проекция Q-вектора на произвольную координатную ось (представленную любой другой Q-единицей) может быть найдена двумя различными способами. Первый: если известны, по крайней мере, один набор проекций Q-вектора и матрицы поворота

$R_{nk'}$, то проекции этого вектора на повернутые оси сразу определяются из соотношения инвариантности

$$a_{k'} = a_n R_{nk'}.$$

Второй способ связан с наличием внутренней структуры Q-единиц; краткий анализ ее дан в следующем разделе.

2. Структура кватернионных "мнимых" единиц

Собственные функции Q-единиц [13]

Любую векторную Q-единицу можно рассматривать как оператор и сформулировать для нее задачу на собственные функции (СФ) и значения:

$$\mathbf{q}\psi = \lambda\psi, \quad \varphi\mathbf{q} = \mu\varphi.$$

Решением этой задачи являются собственные значения ("мнимая длина" Q-единицы с делением по четности)

$$\lambda = \mu = \pm i,$$

и два набора (один для каждой четности) СФ, представимых в виде столбцов $\psi^\pm$ и строк $\varphi^\pm$ и являющихся функциями компонент $\mathbf{q}$.

Вот пример явного вида СФ: для Q-единицы, представленной матрицей

$$\mathbf{q} = -\frac{i}{T} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

где $T \equiv a^2 + bc \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, ее СФ определяются как

$$\varphi^\pm = x \left(1 \pm \frac{b}{T \pm a} \right), \quad \psi^\pm = y \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \frac{c}{T \pm a} \end{pmatrix},$$

где x, y – произвольные комплексные множители.

Возникающая в процессе расчета свобода компонент редуцирована удобным условием нормировки

$$\varphi^\pm \psi^\pm = 1,$$

однако врожденным свойством СФ является их ортогональность по четности

$$\varphi^\mp \psi^\pm = 0.$$

Перемножая СФ тензорным образом, можно построить 2×2 матрицу

$$C^\pm \equiv \psi^\pm \varphi^\pm,$$

обладающую свойствами, взаимными по отношению к свойствам вектора:

$$\det C = 0, \quad \text{Tr } C = 1,$$

тогда как

$$\det \mathbf{q} = 1, \quad \text{Tr } \mathbf{q} = 0.$$

Матрица C является идемпотентной

$$C^n = C,$$

и выражается через порождающий ее единичный Q-вектор

$$C^\pm = \frac{1 \pm i\mathbf{q}}{2}.$$

Обращение последнего выражения дает представление о внутренней структуре Q-единицы

$$\mathbf{q} = \pm i(2C^\pm - 1) = \pm i(2\psi^\pm \varphi^\pm - 1),$$

которая, как видно, состоит из комбинации ее СФ и скалярной единицы.

Понятно, что каждая Q-единица имеет свои СФ, следовательно, любая триада Q-единиц имеет присущий только ей набор СФ $\{\varphi_{(k)}^\pm, \psi_{(k)}^\pm\}$. Относительного такого набора имеется интересное алгебраическое наблюдение. Если Q-единицы связаны между собой нелинейной комбинацией – умножением, например:

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2,$$

то соответствующие СФ, как несложно показать, зависят друг от друга линейно:

$$\varphi_{(3)}^\pm = \sqrt{\mp i} \varphi_{(1)}^\pm \pm \sqrt{i} \varphi_{(2)}^\pm, \quad \psi_{(3)}^\pm = \sqrt{\pm i} \psi_{(1)}^\pm \pm \sqrt{-i} \psi_{(2)}^\pm.$$

С помощью кватернионных СФ можно представить спинорного типа преобразование Q-единиц, оставляющее инвариантным Q-умножение, в знакомом виде

$$\psi_{(k')}^\pm = U \psi_{(k)}^\pm, \quad \varphi_{(k')}^\pm = \varphi_{(k)}^\pm U^{-1},$$

так что СФ можно трактовать как набор специфических спинорных функций, допускающих в общем случае преобразования из группы $SL(2C)$. Также стоит отметить еще одно математическое наблюдение: из пар СФ, принадлежащих разным Q-единицам одной триады и имеющим различную четность, можно построить 24 скалярных инварианта группы $SL(2C)$; эти инварианты являются действительными или комплексными числами, например:

$$\sigma_{12}^+ \equiv \varphi_{(1)}^+ \psi_{(2)}^+ = \sqrt{-\frac{i}{2}} = \frac{1-i}{2}.$$

Кватернионные собственные функции как проекторы

СФ действуют на свой собственный Q-базис следующим образом

$$\varphi_{(1)}^\pm \mathbf{q}_1 \psi_{(1)}^\pm = \pm i, \quad \varphi_{(1)}^\pm \mathbf{q}_2 \psi_{(1)}^\pm = 0, \quad \varphi_{(1)}^\pm \mathbf{q}_3 \psi_{(1)}^\pm = 0,$$

или, в краткой записи

$$\varphi_{(k)}^\pm \mathbf{q}_n \psi_{(k)}^\pm = \pm i \delta_{kn} \quad (\text{нет суммирования по } k).$$

Похоже на то, что СФ избирают проекцию порождающего их единичного Q-вектора. Эта идея подтверждается примером действия СФ одного Q-базиса на векторы повернутого Q-базиса

$$\varphi_{(k)}^\pm \mathbf{q}_{n'} \psi_{(k)}^\pm = \varphi_{(k)}^\pm R_{n'm} \mathbf{q}_m \psi_{(k)}^\pm = \pm i R_{n'k} = \pm i \cos \angle(\mathbf{q}_{n'}, \mathbf{q}_k) \quad (\text{нет суммирования по } k),$$

результат действия – с точностью до множителя проекция Q-базиса $\mathbf{q}'$ на $\mathbf{q}$. Проекцию в чистом виде удобно обозначить так

$$\langle \mathbf{q}_{n'} \rangle_k \equiv \mp i \varphi_{(k)}^\pm \mathbf{q}_{n'} \psi_{(k)}^\pm = \cos \angle(\mathbf{q}_{n'}, \mathbf{q}_k) \quad (\text{нет суммирования по } k).$$

Теперь несложно записать правило вычисления проекции любого Q -вектора $\mathbf{a}$ на произвольное направление, заданное вектором $\mathbf{q}_j$ (например, с помощью СФ положительной четности)

$$\langle \mathbf{a} \rangle_j^+ \equiv -i a_{k'} \varphi_{(j)}^+ \mathbf{q}_{k'} \psi_{(j)}^+ = a_{k'} R_{k'j} = a_j \quad (\text{нет суммирования по } j).$$

Таким образом, кватернионные СФ, будучи более фундаментальным, чем Q -единицы математическим объектом с интересными свойствами, к тому же являют собой полезный инструмент, который можно использовать в практических целях, в том числе, для вычисления проекций Q -векторов.

4. Дифференциальная Q -геометрия

Кватернионная связность

Если векторы Q -базиса являются достаточно гладкими функциями параметров $\mathbf{q}_k(\Phi_\xi)$ (индекс ξ перечисляет параметры), то

$$d\mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi kj} d\Phi_\xi,$$

где объект $\omega_{\xi kj}$ называется кватернионной связностью. Q -связность антисимметрична по векторным индексам

$$\omega_{\xi kj} + \omega_{\xi jk} = 0,$$

и имеет следующее число независимых компонент

$$N = Gp(p-1)/2,$$

где G – число параметров и $p = 3$ – число размерностей пространства. Если $G = 6$ [случай группы $SO(3, C)$], то $N = 18$; если $G = 3$ [случай группы $SO(3, R)$], то $N = 9$. Q -связность можно вычислить, по крайней мере, тремя способами:

$$\text{используя векторы } Q\text{-базиса} \quad \omega_{\xi kn} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial \Phi_\xi} \right\rangle_n^+,$$

используя матрицы из группы $SL(2C)$ (в общем случае) и специальное представление постоянных Q -единиц $\mathbf{q}_{\tilde{k}} = -i\sigma_k$, где σ_k – матрицы Паули

$$\omega_{\xi kn} = \left\langle U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \Phi_\xi} \mathbf{q}_{\tilde{k}} - \mathbf{q}_{\tilde{k}} U \frac{\partial U^{-1}}{\partial \Phi_\xi} \right\rangle_n^+,$$

и, наконец, используя матрицы O из $SO(3, C)$ (в общем случае)

$$\omega_{\xi kn} = \frac{\partial O_{k\tilde{j}}}{\partial \Phi_\xi} O_{n\tilde{j}}.$$

Все формулы, конечно, дают один и тот же результат.

С точки зрения векторных преобразований Q -связность не является тензором. Если $\mathbf{q}_k = O_{kp'} \mathbf{q}_{p'}$, то преобразованные компоненты связности выражаются через исходные с добавлением неоднородного слагаемого

$$\omega_{\xi kj} = O_{kp'} O_{jn'} \omega_{\xi p'n'} + O_{jp'} \frac{\partial O_{kp'}}{\partial \Phi_\xi}.$$

В трехмерном случае Q -связность имеет ясную геометрическую и физическую трактовку, поскольку переменный Q -базис ведет себя как картанов репер. Параметры его обычных поворотов могут зависеть от пространственных координат $\Phi_\xi = \Phi_\xi(x_k)$, тогда $\partial_n \mathbf{q}_k = \Omega_{nkj} \mathbf{q}_j$, и компоненты несколько модифицированной Q -связности

$$\Omega_{nkj} \equiv \omega_{\xi kj} \partial_n \Phi_\xi$$

имеют смысл коэффициентов вращения Риччи. Параметры могут также зависеть от длины линии движения Q -базиса или от времени наблюдателя. Тогда $\Phi_\xi = \Phi_\xi(t)$, $\partial_t \mathbf{q}_k = \Omega_{kj} \mathbf{q}_j$, и компоненты Q -связности

$$\Omega_{kj} \equiv \omega_{\xi kj} \partial_t \Phi_\xi$$

представляют собой обобщенные угловые скорости вращений репера.

Вот характерные примеры использования понятий Q -репера и Q -связности:

а) Репер Френе. Для гладкой кривой $x_{\bar{k}}(s)$, заданной в постоянном базисе, репер Френе представлен триадой $\mathbf{q}_k$, удовлетворяющей уравнениям

$$\frac{d}{ds} \mathbf{q}_1 = R_I(s) \mathbf{q}_2, \quad \frac{d}{ds} \mathbf{q}_2 = -R_I(s) \mathbf{q}_1 + R_{II}(s) \mathbf{q}_3, \quad \frac{d}{ds} \mathbf{q}_3 = -R_{II}(s) \mathbf{q}_2,$$

в которых первая и вторая кривизны суть

$$R_I = \Omega_{12}, R_{II} = \Omega_{23}.$$

б) Закрученная прямая линия. Для заданной прямой $x_1 = u$, $x_2 = x_3 = 0$, можно построить ассоциированный с ней Q -базис так, что один вектор является касательным линии. При этом Q -связность отлична от нуля и представлена единственной компонентой, описывающей закручивание прямой вдоль самой себя

$$\mathbf{q}_1 = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\gamma(u)} \\ ie^{i\gamma(u)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{23} = \frac{d\gamma}{du},$$

здесь $\gamma(u)$ – угол, произвольно, но гладко, зависящий от длины прямой.

Кватернионные пространства

Касательное Q -пространство [15]. Известно, что над любым N -мерным дифференцируемым многообразием U_N с координатами $\{y^A\}$ можно построить касательное пространство T_N с координатами $\{X^{(A)}\}$ так, $dX^{(A)} = g_B^{(A)} dy^B$, где $g_B^{(A)}$ – коэффициенты Ламе. Отсюда дополнительным поворотом строится касательное Q -пространство $T(U, \mathbf{q})$, имеющее координаты $\{x_k\}$, $k = 1, 2, 3$, ассоциированные с векторами Q -репера

$$dx_k = h_{k(A)} dX^{(A)} = h_{k(A)} g_B^{(A)} dy^B,$$

где $h_{k(A)}$ – вообще говоря, неквадратные матрицы, нормируемые с помощью проекторов базового пространства на трехмерное.

Собственно кватернионное пространство $\mathbf{U}_3$ определяется как 3D-пространство, локально идентичное собственному касательному пространству $T(\mathbf{U}_3, \mathbf{q})$. Q -пространство имеет следующие основные характеристики. Его Q -метрика представлена векторной частью правила Q -умножения $\mathbf{q}_j \mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn} \mathbf{q}_n$, она несимметрична, ее антисимметричная часть является Q -оператором (матрицей), так что каждая точка $\mathbf{U}_3$ имеет внутреннюю кватернионную структуру. Q -связность $\mathbf{U}_3$

может быть: (i) собственной (метрической) $\Omega_{nkj} \equiv \omega_{\xi kj} \partial_n \Phi_\xi$, для переменного Q-базиса она всегда отлична от нуля, и (ii) аффинной (неметрической), не зависящей от Q-базиса. Q-кручение в обоих случаях не исчезает, тогда как Q-кривизна $r_{knab} = \partial_a \Omega_{bkn} - \partial_b \Omega_{akn} + \Omega_{ajn} \Omega_{bjk} - \Omega_{bjk} \Omega_{ajn}$ для метрической Q-связности тождественно равна нулю, но может присутствовать в пространстве аффинной Q-связности.

С введением понятие Q-пространства возникает новая область исследований дифференцируемых многообразий и пространств. Так, в предварительной классификации Q-пространств по наличию и природе кривизны, кручения и неметричности различаются, по меньшей мере, 10 различных семейств [15]. Кроме того, Q-пространства могут быть нетривиальным фоном для построения теорий и решения задач классической и квантовой физики.

4. Механика Ньютона в Q-базисе

Уравнения динамики во вращающемся репере [16]

Наделенный часами Q-базис становится классической (нерелятивистской) системой отсчета. Для инерциального наблюдателя динамические уравнения классической механики могут быть записаны в постоянном Q-базисе

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_{\bar{k}} \mathbf{q}_{\bar{k}} = F_{\bar{k}} \mathbf{q}_{\bar{k}}.$$

$SO(3, R)$ -инвариантность двух Q-векторов – радиус-вектора $\mathbf{r} \equiv x_k \mathbf{q}_k$ и силы $\mathbf{F} \equiv F_k \mathbf{q}_k$ позволяют представить эти уравнения в векторной кватернионной форме

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_k \mathbf{q}_k) = F_k \mathbf{q}_k, \quad \text{или} \quad m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

В явном виде эти уравнения имеют достаточно сложную структуру

$$m \left(\frac{d^2}{dt^2} x_n + 2 \frac{d}{dt} x_k \Omega_{kn} + x_k \frac{d}{dt} \Omega_{kn} + x_k \Omega_{kj} \Omega_{jn} \right) = F_n$$

которая, тем не менее, поддается упрощению и физической интерпретации. Благодаря антисимметрии связности (обобщенной угловой скорости)

$$\Omega_j \equiv \Omega_{kn} \frac{1}{2} \varepsilon_{knj}, \quad \Omega_{kn} = \Omega_j \varepsilon_{knj},$$

уравнения динамики можно переписать в векторных компонентах

$$m \left(a_n + 2v_k \Omega_j \varepsilon_{knj} + x_k \frac{d}{dt} \Omega_j \varepsilon_{knj} + x_k \Omega_j \Omega_m \varepsilon_{jkp} \varepsilon_{mpn} \right) = F_n$$

или с помощью привычной векторной символики

$$m(\ddot{\vec{a}} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) = \vec{F}.$$

В слагаемых левой части, казалось бы, легко узнать четыре классических ускорения: линейное, кориолисово, угловое и центростремительное. Однако, такая традиционная интерпретация верна только для простого вращения; в случае комбинации многих вращений репера число компонент обобщенных ускорений подобного вида оказывается значительно больше, а сами уравнения существенно сложнее. Стоит заметить, что

вывод уравнений для самых сложных вращений с использованием понятий Q-базиса и Q-связности чрезвычайно прост.

Примеры Q-формулировки задач классической механики

Следящий Q-базис – это репер, один из векторов которого, например $\mathbf{q}_1$ всегда направлен на наблюдаемую частицу. Динамические уравнения для этого случая в явном виде записываются следующим образом

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) &= F_1/m, \\ 2\dot{r}\Omega_3 + r\dot{\Omega}_3 + r\Omega_2\Omega_1 &= F_2/m, \\ 2\dot{r}\Omega_2 + r\dot{\Omega}_2 + r\Omega_1\Omega_3 &= -F_3/m.\end{aligned}$$

Компоненты Q-связности заданы как функции углов двух поворотов, первого (угол α) – вокруг вектора $\mathbf{q}_3$, второго (угол β) – вокруг $\mathbf{q}_2$

$$\Omega_1 = \dot{\alpha} \sin \beta, \quad \Omega_2 = -\dot{\beta}, \quad \Omega_3 = \dot{\alpha} \cos \beta.$$

Метод следящего Q-базиса удобен для решения ряда механических задач, связанных с вращением – иной раз весьма сложным – наблюдаемых объектов и систем отсчета. Вот иллюстрация.

Вращающийся осциллятор. Ищется закон движения $r(t)$ гармонического осциллятора (масса m , упругость пружины k) имеющего свободу движения вдоль твердого гладкого стержня, вращающегося в плоскости вокруг одного своего конца (точки крепления пружины) с угловой скоростью ω ; точка равновесия находится на расстоянии l от центра вращения, сил тяжести нет. Радиальное и касательное динамические уравнения в следящем Q-базисе (F – неизвестная сила реакции стержня)

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -\frac{k}{m}(r - l), \quad 2\dot{r}\omega = \frac{1}{m}F,$$

имеют следующее семейство решений:

$$(i) \quad r(t) = r_0 + v_0 t + at^2$$

масса квадратично (или линейно) по времени движется в сторону от центра вращения,

$$(ii) \quad r(t) = const + Ae^{iwt} + Be^{-iwt}, \quad w \equiv \sqrt{k/m - \omega^2}$$

здесь три различные ситуации в зависимости от соотношения величин под радикалом:

- $r = const$,
- гармонические колебания,
- экспоненциальное по времени удаление от центра вращения.

Интересно, что варианты поведения вращающегося классического осциллятора при $l = 0$ в точности сходны с вариантами поведения четырех известных космологических моделей Эйнштейна-ДеСиттера-Фридмана, рассматриваемых в рамках общей теории относительности.

5. Построение кватернионной теории относительности

Гиперболические вращения и бикватернионы [17]

Выше было отмечено, что $SO(3, C)$ -преобразования Q -единиц допускают наличие чисто мнимых параметров. При этом повороты становятся гиперболическими (Н – от hyperbolic); например, простое Н-вращение $\mathbf{q}' = H_3^\psi \mathbf{q}$ осуществляется матрицей вида

$$H_3^\psi = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -i \sin \psi & 0 \\ i \sin \psi & \cosh \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а 2×2 -матрицы представления Q -единиц теряют свойство антиэрмитовости:

$$\mathbf{q}_{1'} = -i \begin{pmatrix} 0 & e^\psi \\ e^{-\psi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь уместно вспомнить о так называемых бикватернионных (BQ) векторах. BQ-вектор определяется как Q -вектор с комплексными компонентами $\mathbf{u} = (a_k + ib_k)\mathbf{q}_k$. Очевидно, что для векторов такого типа не всегда можно определить норму (или модуль). Но среди всех BQ-векторов есть подмножество "хороших" BQ-векторов с определяемой нормой $\mathbf{u}^2 = b^2 - a^2$. Эти векторы оказываются форм-инвариантными относительно преобразований подгруппы $SO(2, 1) \subset SO(3, C)$, и в частности, относительно простых Н-вращений $\mathbf{q}' = H\mathbf{q} = u_k\mathbf{q}_k = u_{k'}\mathbf{q}_{k'}$, но только при условии ортогональности друг другу взаимно-мнимых составляющих $a_k b_k = 0$.

Кватернионная теория относительности

Сделанные выше наблюдения позволяют предположить существование пространственно-временного BQ-векторного "интервала"

$$d\mathbf{z} = (dx_k + i dt_k)\mathbf{q}_k,$$

имеющего специфические свойства:

- (i) интервал времени задается мнимым вектором,
- (ii) пространство-время модели оказывается шестимерным (6D),
- (iii) вектор перемещения частицы и вектор соответствующего изменения времени должны быть всегда перпендикулярны друг другу $dx_k dt_k = 0$.

BQ-вектор-интервал при этом есть инвариант $SO(2, 1) \subset SO(3, C)$, как, конечно, и его квадрат (отличающийся от квадрата нормы лишь знаком) $d\mathbf{z}^2 = dt^2 - dr^2$, последний в точности повторяет вид интервала пространства-времени специальной теории относительности Эйнштейна. Таким образом построенная 6D-модель изначально получила название кватернионной теории относительности. Временная и пространственная переменные симметричным образом входят в выражение BQ-вектора-интервала, а связанная с ними триада Q -единиц описывает релятивистскую систему отсчета $\Sigma \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$. Переход от одной системы отсчета к другой осуществляется с помощью уравнений поворота вида $\Sigma' = O\Sigma$, где матрица O принадлежит $SO(2, 1)$ и представляет собой упорядоченное произведение матриц действительных и гиперболических поворотов; в связи с этим теорию можно было бы назвать (и может быть, более корректно) "вращательной" теорией относительности. Смысл простого Н-вращения немедленно раскрывается при записи первой строки уравнения $\Sigma' = H_3^\psi \Sigma$ в явном виде

$$i\mathbf{q}_{1'} = i \cosh \psi (\mathbf{q}_1 + \tanh \psi \mathbf{q}_2).$$

Если, как в специальной теории относительности, $\cosh \psi = dt/dt'$, то

$$idt' \mathbf{q}_{1'} = idt(\mathbf{q}_1 + V \mathbf{q}_2),$$

что означает движение системы отсчета Σ' относительно Σ со скоростью V вдоль направления $\mathbf{q}_2$. Легко проверить, что из $SO(2, 1)$ -поворотов Q -систем отсчета в точности следуют преобразования Лоренца для изменений координат, а следовательно, все кинематические эффекты специальной теории относительности.

Здесь стоит заметить, что параметры действительных и гиперболических поворотов могут быть переменными, например, зависеть от времени наблюдателей. Это позволяет предположить, что в рамках данной теории имеется возможность описания неинерциальных движений. Анализ уравнений поворота показывает, что это предположение полностью оправдывается. Так, движение постоянно ускоренной системы отсчета относительно инерциальной (гиперболическое движение), неоднократно рассмотренное в литературе с привлечением условий, дополнительных к специальной теории относительности, в кватернионной теории анализируется естественно и просто, причем с позиций любой из двух систем отсчета [18].

Задача кинематики другого неинерциального движения – релятивистского кругового движения – полностью и точно решается с помощью уравнения поворота $\Sigma' = H_2^{\psi(t)} R_1^{\alpha(t)} \Sigma$, где Σ' – система отсчета, вращающаяся по окружности вокруг неподвижной системы отсчета Σ . Эта задача может быть решена как с позиции инерциального наблюдателя, при этом результирующие соотношения имеют вид

$$t = \int dt' \cosh \psi(t'), \quad \alpha(t) = \frac{1}{R} \int dt' \tanh \psi(t'),$$

$$a_{\tan}(t) = \frac{1}{\cosh^2 \psi} \frac{d\psi}{dt}, \quad a_{\text{norm}}(t) = R \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)^2,$$

так и с точки зрения наблюдателя в произвольно движущейся по круговой орбите системе отсчета.

Решение задачи о "классической" прецессии Томаса в рамках СТО, но также с введением дополнительных условий, в кватернионной теории записывается в одну строчку – первую строку матрицы уравнения поворота $\Sigma'' = R_1^{-\alpha(t)} H_2^{\psi} R_1^{\alpha(t)} \Sigma$, при этом, конечно, получается верное значение частоты прецессии

$$\omega_T = (1 - \cosh \psi) \approx -\frac{1}{2} \omega V^2.$$

Более того, в рамках кватернионной теории относительности оказывается возможным описать прецессию Томаса для векторов, движущихся по траекториям общего вида. Базой решения проблемы, как всегда, является уравнение поворота, в данном случае естественно обобщенное: $\Sigma'' = R^{-\theta(t)} H^{\psi(t)} R^{\theta(t)} \Sigma$, здесь $\theta(t)$ – угол мгновенного поворота. Существенным также оказывается требование перпендикулярности оси гиперболического поворота к плоскости, образованной радиус-вектором наблюдаемого репера и вектором его скорости. При этом формула переменной во времени частоты общей прецессии Томаса имеет вид

$$\Omega_T = \frac{d}{dt}(\theta - \theta').$$

Примером такой прецессии Томаса может служить кажущееся смещение перигелия Меркурия, расчет дает следующую величину $\Delta\varepsilon = 2,7''/100$ лет.

Универсальный характер движения тел (включая неинерциальные движения) в кватернионной теории относительности располагает к поиску новых кинематических эффектов релятивизма. Один из эффектов можно подметить в движении спутников планет Солнечной системы. Относительная скорость Земли и другой планеты со временем изменяется и иногда достигает значительной величины, до известной степени сопоставимой с величиной фундаментальной скорости. Это может привести к расхождениям между расчетными и наблюдаемыми с Земли кинематическими величинами, характеризующими циклические процессы на данной планете или вблизи нее. В частности, должно иметь место кажущееся отклонение положения спутника планеты от расчетной позиции. Такое угловое отклонение рассчитано; оно, как оказалось, линейно зависит от времени наблюдения, то есть эффект накапливается

$$\Delta\varphi \approx \frac{\omega V_E V_P}{c^2} t,$$

здесь ω – угловая скорость движения спутника вокруг планеты, V – линейные скорости Земли и планеты относительно Солнца. Величина эффекта такова. Для ближайшего к Юпитеру и самого "быстрого" его спутника $\Delta\varphi \cong 12'$ за 100 земных лет; для спутника Марса (Фобос) $\Delta\varphi \cong 20'$ за 100 земных лет [19]. Оба значения представляются достаточно большими, и не исключено, что эффект может быть обнаружен в результате длительного точного наблюдения.

Можно сказать, что пространственно-временная модель и кинематика кватернионной теории относительности на сегодняшний день достаточно детально разработаны и могут служить эффективным аппаратом для вычисления многих релятивистских эффектов. Но пока не сформулирована соответствующая релятивистская динамика, нет кватернионной теории поля; Q-гравитация, электромагнетизм, слабые и сильные взаимодействия остаются отдаленными проектами. Однако, есть надежда, что это только начало пути, и теория "повзрослеет". Эта надежда поддерживается наблюдением ряда примечательных "кватернионных совпадений", образующих пока не слишком связную мозаику физико-математических фактов. Весьма возможно, что со временем она превратится в логически стройную схему, расширяющую инструментарий и понимание законов физики.

6. Замечательные "кватернионные совпадения"

Есть, по крайней мере, пять таких совпадений (все они приведены ниже), замеченных разными авторами в разное время.

1. *Уравнения Максвелла как условия аналитичности функций кватернионного переменного.*

В 1937 году Фютер [20] заметил, что уравнения Коши-Римана $\partial f / \partial z^* = 0$, определяющие дифференцируемость функции комплексного переменного и физически моделирующие плоское движение жидкости без источников и вихрей, имеют следующий кватернионный аналог

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q}_{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial x_{\bar{k}}} \right) \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = (B_{\bar{n}} + iE_{\bar{n}}) \mathbf{q}_{\bar{n}}.$$

Удивительный факт состоит в том, что соответствующей физической моделью оказываются уравнения классической электродинамики Максвелла в вакууме

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$$

2. Классическая механика во вращающихся системах отсчета.

Компактная форма уравнений Ньютона в кватернионном репере описана выше, в разделе 4. Остается подчеркнуть, что естественно возникающая и внешне примитивная запись уравнений динамики

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

скрывает любые по сложности комбинации вращений системы отсчета или наблюдаемого тела. Использование дифференциальных кватернионных объектов позволяет быстро получить явный вид этих уравнений, каждое слагаемое которых имеет очевидную физическую трактовку.

3. Кватернионная теория относительности.

1:1 изоморфизм группы Лоренца, ассоциируемой со специальной теорией относительности, и группы инвариантности кватернионного умножения $SO(3, C)$ имеет следствием появление нестандартной кватернионной теории относительности с симметричным 6-мерным пространством-временем. Эта теория происхождением, моделью, возможностями и математическим аппаратом сильно отличается от специальной теории относительности Эйнштейна, но предсказывает абсолютно одинаковые с ней кинематические эффекты. Инвариантность специфического бикватернионного векторного "интервала" $d\mathbf{z} = (dx_k n + i dt_k) \mathbf{q}_k$ относительно подгруппы $SO(2, 1)$ с, вообще говоря, переменными параметрами позволяет рассчитывать релятивистские эффекты неинерциального движения систем отсчета.

4. Уравнения Паули [21].

Если рассматривать квантовую частицу с электрическим зарядом e , массой m , и обобщенным импульсом

$$P_k \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{c} A_k$$

в простейшем кватернионном пространстве (все параметры постоянны, связность, кручение и кривизна равны нулю), то гамильтониан такой частицы, вычисляемый с помощью Q-метрики

$$H \equiv -\frac{1}{2m} P_k P_m \mathbf{q}_k \mathbf{q}_m$$

оказывается точной копией функции Гамильтона уравнения Паули

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{B} \cdot \vec{\sigma},$$

при этом спиновое слагаемое сразу же имеет в качестве коэффициента магнетон Бора.

5. Напряженность поля Янга-Миллса.

Если в произвольном кватернионном пространстве из компонент связности Ω_{amn} (индексы a, b, c нумеруют координаты базового Q-пространства, индексы j, k, m, n нумеруют векторы касательных триад), построить некоторый "потенциальный" вектор

$$A_{ka} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} \Omega_{amn},$$

а из компонент кватернионной кривизны

$$r_{knab} = \partial_a \Omega_{bkn} - \partial_b \Omega_{akn} + \Omega_{ajn} \Omega_{bjk} - \Omega_{bjk} \Omega_{ajn}$$

аналогичным образом построить вектор "напряженности"

$$F_{kab} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} r_{mnab},$$

то эти два геометрических объекта оказываются связанными между собой точно так же, как напряженность и потенциал поля Янга-Миллса

$$F_{kab} \equiv \partial_b A_{ka} - \partial_a A_{kb} + \varepsilon_{kmn} A_{ma} A_{nb}.$$

Нужно отметить, что для Q -пространств с метрической (не аффинной) связностью кривизна, а с ней и "напряженность" тождественно равны нулю.

Обсуждение

Кватернионы, конечно, в первую очередь – математические объекты, и задача развития их алгебры, анализа и геометрии, в известном смысле, самодостаточна. Но новейшая история науки удостоверяет: как только речь заходит о геометрии, тем более, дифференциальной, присутствие физики становится неизбежным. Есть известное мнение, что пионером геометризации физики был Эйнштейн, предложивший свою общую теорию относительности. Но известно также, что Максвелл сформулировал свою электродинамику именно на языке кватернионов, удобном для описания "напряжений эфира", каковыми представлялись векторы напряженности электромагнитного поля. Этот более чем геометричный язык был потом заброшен на многие десятилетия.

Предложенные в данном обзоре аспекты кватернионной математики еще раз указывают на "родственные связи" физики и геометрии: от описания вращений систем отсчета в классической механике и теории относительности до проявлений структуры кватернионных пространств в уравнениях Паули и в теории Янга-Миллса.

Богатство предоставляемых Q -подходом возможностей и появляющиеся с его использованием нетрадиционные физические модели типа 6-мерного пространства-времени или упомянутые выше совпадения могут вызвать отношение к кватернионам как всего лишь математической игре, своего рода элементам "лего", из которых можно построить немало экзотических конструкций. Но на этот счет есть два следующих соображения.

1) Несмотря на свою модельную нестандартность Q -метод позволяет решать физические задачи, так что это – практически полезный инструмент. Характерный пример: "врожденный" экспоненциальный характер представления простых вращений здесь приводит к простому описанию сложения поворотов, включая, конечно, и "мнимые" повороты, описывающие релятивистские бусты. Стоит напомнить, что суммирование обычных поворотов в классической механике являет собой не слишком простую задачу.

2) Все физические кватернионные теории не мучительно придумываются, а возникают просто и естественно, как отражение законов природы в математике. Привереженец пифагорейской философии "мир есть число" увидел бы здесь дополнительный аргумент в свою пользу. И действительно, Q -алгебра, последняя ассоциативная алгебра, отлично подходит для описания физических величин, а они – пока что все до единой – ассоциативны по умножению, от наблюдаемых кинематических и динамических, до порожденных теориями тензорных и спинорных.

Все эти обстоятельства позволяют надеяться, что дальнейшие усилия в исследовании отношения "кватернионы – законы физики" когда-то перерастут в широкую

научную программу. Еще один скромный, но настойчивый шаг в этом направлении сделан недавно, когда автору данного обзора в рамках кватернионной теории удалось найти точное решение задачи релятивистского осциллятора. Детали решения будут опубликованы в одной из последующих работ.

Литература:

1. Hamilton W. R. (1853) Lectures on Quaternions, Dublin, Hodges & Smith.
2. Hamilton W. R. (1969), Elements of Quaternions, Chelsey Publ. Co. N. Y.
3. Стройк Д. Я. (1969) Краткая история математики, М., Наука.
4. Бурбаки Н., (1963) Очерки по истории математики, М., Наука.
5. Боголюбов А. Н. (1983) Математики, Механики, Киев, Наука.
6. Klien F., (1924) Arithmetic, Algebra, Analyses, N. Y., Dover Publ. (Translation from 3-d German edition).
7. Rastall P. (1964) Quaternions in Relativity, Review of Modern Physics, July, 820-832.
8. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. (1973) Кватернионы в задачах ориентации твердого тела. М., Наука.
9. Horwitz L. P., Biedenharn L. C. (1984) Quaternionic Quantum Mechanics: Second Quantization and Gauge Fields, Ann. Phys., 157, 432-488.
10. Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. (1989) Кватернионы в релятивистской физике. Минск, Наука.
11. Bisht P. S, Negi O. P., Rajput B. S., (1991) Quaternionic Gauge Theory of Dyonic Fields, Progr. Theor. Phys., 85, № 1, 157-168.
12. И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.
13. Ефремов А. П. (1985) Q-поле, переменный кватернионный базис. Физика, Известия вузов, 12, 14-18.
14. Yefremov A. P. (2001) Tangent Quaternionic Space, Gravitation & Cosmology, 7, № 4 273-275.
15. Yefremov A. P. (2002) Structure Equations and Preliminary Classification of Quaternionic Spaces. Abstracts of 11 Int. GRG Conf, Tomsk, p.123.
16. Ефремов А. П. (1995) Механика Ньютона в кватернионном базисе. М., РУДН.
17. Yefremov A. P. (1996) Quaternionic Relativity. I. Inertial Motion, Gravitation & Cosmology, 2, № 1, 77-83.
18. Yefremov A. P. (1996) Quaternionic Relativity. II. Non-Inertial Motion, Gravitation & Cosmology, 2, № 4, 335-341.
19. Yefremov A. P. (2000) Rotational Relativity, Acta Phys. Hungarica, New Series - Heavy Ion Physics 11, № 1-2, 147-153.
20. Fueter R. (1934-1935) Comm. Math. Hel., B7S, 307-330.
21. Yefremov A. P. (1983) Quaternionic Multiplication Rule as a local Q-Metric, Lett. Nuovo Cim. 37, № 8, 315-316

ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ВРЕМЯ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
postmaster@hypercomplex.ru

На основе финслеровой метрической функции Бервальда-Моора строится обобщенно-метрическое пространство, которое может быть названо плоским четырехмерным временем. Данное многообразие позволяет ввести физические понятия: события, мировой линии, системы отсчета, множества относительно одновременных событий, собственного времени, трехмерного расстояния, скорости и других. Показано, как в абсолютно симметричном четырехмерном времени, с точки зрения физического наблюдателя, ассоциируемого с некоторой мировой линией, происходит противопоставление координаты, задающей его собственное время, с координатами, появляющимися в результате измерений с использованием эталонных сигналов. Когда сигналам соответствуют линии, почти параллельные мировой линии наблюдателя, в представлениях последнего возникает трехмерное пространство, в пределе оказывающееся евклидовым.

1. Введение

За последние сто лет в физике укоренилось представление, что в фундаменте геометрии реального пространства-времени лежит псевдоевклидова метрика со знакопеременной квадратичной зависимостью длины вектора от величины его компонент. Однако, многочисленные и разнообразные попытки связать с этой метрикой все известные силы природы и воплотить идею о полной геометризации физики до сих пор заканчивались неудачами. Это невольно подталкивает к мысли, что проблема заключается не в недостатке изобретательности ученых, а в самой метрике, вернее, в ее классической квадратичной форме, вместо которой, возможно, более перспективно использовать другие зависимости. К сожалению, и этот путь, на возможность которого обратил внимание еще Риман [1], впервые целенаправленно стал изучать Финслер [2], а к сегодняшнему дню испробовали сотни исследователей [3], также пока не принес существенных результатов. Хотя настоящая работа и продолжает поиски в том же направлении, она существенным образом отличается от многих из них, поскольку опирается на новое для финслеровой геометрии понятие скалярного полипроизведения и метрическую форму, непосредственно связанную с одним из наиболее фундаментальных понятий математики – действительным числом.

2. Многомерные времена

Среди всевозможных линейных финслеровых пространств уникально выделяются пространства, обладающие взаимнооднозначным соответствием с алгебрами, являющимися прямыми суммами нескольких алгебр действительных чисел. Метрические функции таких пространств не зависят от точки и в одном из базисов принимают вид:

$$F(x') = \left| \prod_{i=1}^n x'_i \right|^{1/n}, \quad (1)$$

где x'_i – компоненты вектора, а n – число измерений. В теории финслеровых пространств такие метрические функции хорошо известны и получили название функций Бервальда-Моора [3].

Геометрии с такими метриками во многом однотипны, а имеющиеся различия обусловлены исключительно размерностью. Их главной особенностью является полное равноправие всех неизотропных направлений, а поскольку любое из таких направлений может быть связано с собственным временем инерциальной системы отсчета, подобные пространства вполне уместно именовать *многомерными временами*.

Замечание. По-видимому, абстрактная возможность связывать с произвольной прямой собственное время некой инерциальной системы отсчета имеется в любом линейном пространстве, где определен элемент длины в каждой точке. Однако, во многих пространствах некоторые системы отсчета не допускают изотропных связей со всеми остальными прямыми, проходящими параллельно заданной. Для связанных с такими системами отсчета наблюдателей понятие физического расстояния, а следовательно и физического пространства, оказываются прямыми следствиями наличия изотропных векторов, с которыми обычно принято ассоциировать световые сигналы.

Определяемые так вещественные пространства далеко не всегда имеют тот же вид, к которому мы привыкли (по повседневной практике и благодаря усилиям Евклида и Минковского). При этом, в понятие физического пространства приходится вкладывать более общий смысл, чем обычно. С другой стороны, ничто не мешает считать, что в тех секторах или измерениях, где в принципе не устанавливаются изотропные связи, или же они носят какой-то экзотический характер, физические направления можно считать просто не обнаружимыми, хотя геометрически и присутствующими. Таким образом, логически вполне допустимо существование пространств, часть направлений и даже измерений которых физически внешне не проявляются. С такой точки зрения было бы очень интересно проанализировать произвольные линейные пространства, в частности, связанные с квадратичными формами и метриками Бервальда-Моора, взятыми над полем комплексных чисел.

Выделенным геометрическим элементом каждого n -мерного времени является его изотропное подпространство, представляющее собой фигуру из n гиперплоскостей, делящих все многообразие на 2^n равноправных односвязных камер. Любая из таких камер является смежной со всеми остальными, кроме противоположной, с которой граничит только в точке. Классифицировать смежные камеры по отношению к выделенной можно по размерности их общих пограничных подпространств: от 1 до $(n - 1)$. Все односвязные камеры одинаковы и имеют форму правильных пирамид, n гиперплоскостей которых, начинаясь из общей вершины, уходят в бесконечность. Такие пирамиды, по аналогии с изотропными конусами пространства Минковского, будем именовать световыми. Каждая *световая пирамида* имеет ровно n одномерных ребер, которые весьма удобно связывать со специальным базисом. В этом базисе геометрические соотношения многомерного времени выглядят наиболее простыми и, поскольку с точностью до перестановок такой базис является единственным, ему вполне логично присвоить имя *абсолютного*.

Любой единичный вектор, принадлежащий внутренней области некоторой световой пирамиды, может быть непрерывным образом переведен в любой другой единичный вектор, принадлежащий той же пирамиде. Соответствующие преобразования образуют абелеву $(n - 1)$ -параметрическую подгруппу движений, оставляющую инвариантной исходную метрическую функцию (1). Матрицы подобных преобразований в абсолютном базисе приводятся к диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} a'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a'_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\prod_{i=1}^n a'_i = 1$. Поскольку такие преобразования оставляют на месте точку схождения вершин всех пирамид, а изотропные грани последних при этом переходят сами в себя, соответствующие отображения можно классифицировать как гиперболические повороты, которые в определенном смысле аналогичны бустам псевдоевклидовых пространств. Помимо гиперболических вращений, среди непрерывных движений многомерного времени присутствует n -параметрическая подгруппа параллельных переносов. Других непрерывных конгруэнтных преобразований рассматриваемые многообразия не содержат и поэтому имеют меньше степеней свободы, чем пространства с квадратичными типами метрик. Именно это обстоятельство побудило Г. Гельмгольца, С. Ли и Г. Вейля доказать ряд теорем, утверждающих исключительность квадратичных метрик [4–6]. Главный акцент в их теоремах сделан на максимальной подвижности квадратичных пространств, выражающейся в наиболее богатой по числу свободных параметров группе движений в сравнении с пространствами с иными метрическими функциями. Это, по мнению авторов, дает все основания отказаться от рассмотрения других метрических форм в качестве геометрического фундамента реального пространства-времени. Не отрицая строгости этих теорем, отметим, что их доказательства базируются на рассмотрении только линейных преобразований, а значит оставляют возможность для других геометрий, в которых аналогичную роль могли бы играть некоторые нелинейные симметрии.

В противоположность непрерывным конгруэнтным преобразованиям, дискретные группы симметрий многомерного времени превосходят аналогичные группы евклидовых и псевдоевклидовых пространств, однако этого еще не достаточно для конкуренции с последними.

Что действительно делает многомерное время интересным, так это наличие в нем выделенных групп нелинейных преобразований, являющихся почти столь же фундаментальными, как и группы движений. Такие преобразования сохраняют инвариантными не интервалы, а специфические скалярные формы от нескольких векторов, не имеющие прямых аналогов в квадратичных пространствах, а потому до сих пор остающиеся мало изученными.

Подойти к пониманию важности таких полиформ лучше всего через обобщение понятия скалярного произведения. Оказывается, что для целого ряда линейных финслеровых пространств роль скалярного произведения может играть полилинейная симметрическая форма от n векторов [7], частным случаем которой как раз и является классическая билинейная форма. Условимся такую полилинейную форму именовать *скалярным полипроизведением*. Отталкиваясь от подобного обобщения, можно простым и естественным образом расширить на некоторые финслеровы пространства такие фундаментальные понятия геометрии, как длина, угол, ортогональность и другие, введение которых иными способами сопряжено со значительными трудностями [8].

Для многомерного времени скалярное полипроизведение в абсолютном базисе имеет вид:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Z}) = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a'_{i_1} b'_{i_2} \dots z'_{i_n}, \quad \text{при } i_j \neq i_k, \text{ если } j \neq k. \quad (3)$$

Несложно проверить, что при $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \dots = \mathbf{Z}$ форма (3) переходит в метрическую функцию (1). Используя полилинейную симметрическую форму вида (3), можно построить геометрию линейного времени произвольной натуральной размерности, однако, опираясь на обычные представления о числе физических измерений и явную топологическую выделенность четырехмерного пространства [9], ограничимся пока именно этим случаем.

3. Четырехмерное время

В соответствии с (3), скалярное полипроизведение, определяющее геометрию четырехмерного времени, в абсолютном базисе принимает вид:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \frac{1}{4!} \sum_{(i_1, i_2, i_3, i_4)} a'_{i_1} b'_{i_2} c'_{i_3} d'_{i_4}, \quad \text{при } i_j \neq i_k, \text{ если } j \neq k, \quad (4)$$

отсюда следует, что четвертая степень длины (интервала) вектора такого линейного пространства определяется выражением:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) = |\mathbf{X}|^4 = x'_1 x'_2 x'_3 x'_4. \quad (5)$$

При переходе в базис, аналогичный ортонормированному [7] (он несколько нагляднее, чем абсолютный), данное выражение преобразуется к более сложной (но по-прежнему симметричной) форме:

$$|\mathbf{X}|^4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2) + 8x_1 x_2 x_3 x_4. \quad (6)$$

В ряде случаев данную форму удобнее использовать в виде, выделяющем одну из координат, в частности, x_1 :

$$|\mathbf{X}|^4 = x_1^4 - 2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)x_1^2 + 8(x_2 x_3 x_4)x_1 + (x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_2^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_4^2 - 2x_3^2 x_4^2). \quad (7)$$

Основным аргументом в пользу возможности сопоставить с четырехмерным временем реальный физический мир является наличие в его геометрии нелинейной группы непрерывных симметрий [10], которую можно рассматривать как альтернативу линейной группе пространственных поворотов пространства Минковского. Инвариантом данных преобразований оказывается не скалярное полипроизведение четырехмерного времени (4), а специфическая форма, в образовании которой участвуют только два вектора:

$$S(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{B})}{(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A})^{1/2}} + \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})}{(\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})^{1/2}}. \quad (8)$$

Хотя форма $S(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и не является аддитивной величиной, для векторов, принадлежащих внутренней области одной световой пирамиды, она удовлетворяет другим важным свойствам обычного скалярного произведения, а именно: симметрии, правилу умножения на скаляр, знаковой определенности и правилу треугольника [10]. В связи с этим, в четырехмерном времени существует принципиальная возможность ввести понятие трехмерного расстояния, которое соответствует большинству привычных представлений о данной физической величине, кроме аддитивности. С философской точки зрения отсутствие последнего свойства весьма естественно. Действительно, почему закон сложения трехмерных скоростей должен концептуально отличаться от закона сложения трехмерных расстояний, ведь относительно обе эти

величины? Проявляется такая нелинейность только на больших расстояниях, подобно тому, как нелинейность закона сложения скоростей существенна только в релятивистской области. При этом роль скорости света для трехмерных расстояний берет на себя дополнительная фундаментальная постоянная – максимально возможный размер физической системы, или иными словами, радиус Вселенной. Для обычных в повседневной практике расстояний мы по-прежнему можем пользоваться линейным приближением, однако в космологических масштабах, в случае справедливости концепции многомерного времени, потребуется внести соответствующие коррективы.

4. Множество относительно одновременных событий

Чтобы естественным образом подойти к определению в четырехмерном времени понятий трехмерных скоростей и расстояний, определимся сначала с множествами *относительно одновременных событий*. Под таковыми условимся понимать совокупности точек, равноудаленных (естественно в смысле принятой финслеровой метрики (5)) от некоторых пар фиксированных событий. В отличие от пространства Минковского, где аналогичным образом определенные множества представляют собой гиперплоскости, в четырехмерном времени соответствующие поверхности нелинейны [11]. Их форма зависит не только от направления мировой линии, соединяющей фиксированные точки, но и от величины интервала, их разделяющего. Это наиболее фундаментальное отличие от пространства специальной теории относительности, поскольку понятие одновременности теперь определяется не только скоростью системы отсчета, но и интервалом времени, разделяющим мгновенное положение наблюдателя и изучаемый им пространственный слой событий. Таким образом, релятивизм в четырехмерном времени затрагивает не только гиперболические повороты, с помощью которых осуществляется переход от одних систем отсчета к другим, но и трансляции, позволяющие менять уже точки отсчета.

Философски такое обобщение принципа относительности вполне последовательно, поскольку, по сути, констатирует своеобразное родство между двумя подгруппами полной группы конгруэнтных симметрий. Косвенным подтверждением данного вывода может служить и факт, что трансляциям в алгебре, сопоставляемой четырехмерному времени, соответствует операция сложения, а гиперболическим поворотам – умножения, в родственной же связи этих двух фундаментальных операций математики сомневаться не приходится.

Естественным способом введения в четырехмерном времени понятия *физического расстояния* является прием, концептуально вполне аналогичный способу определения данного понятия в пространстве Минковского. По определению, под расстояниями можно понимать величины, равные (или пропорциональные) интервалам времени, проходящим на мировой линии наблюдателя, между посылкой им некоторых равномерно движущихся эталонных сигналов к мировым линиям изучаемых объектов и последующим приемом отраженных сигналов обратно. Такое правило приводит к тому, что в четырехмерном времени понятие расстояния бессмысленно применять к отдельным парам событий, оно продуктивно лишь в отношении их цепочек, представленных определенными линиями. В пространстве Минковского на данное обстоятельство можно было не обращать внимания, так как множества относительно одновременных событий там представляли собой гиперплоскости, в результате чего расстояния, определяемые, в общем-то, для произвольных пар параллельных прямых, оставались содержательными и для пар точек.

Чтобы не загромождать короткую статью излишней общностью, но при этом все же быть достаточно конкретными, ниже приведем результат, к которому приводит

описанный выше алгоритм лишь в одном частном случае. Предполагается, что мировая линия наблюдателя совпадает с действительной осью, сам он находится в точке $(T, 0, 0, 0)$, а интересующий его слой относительно одновременных событий проходит через точку $(0, 0, 0, 0)$, Рис. 1. [Здесь и далее фигурирующие координаты относятся к обобщенно-ортогональному базису [7], существенно отличающемуся от абсолютного].

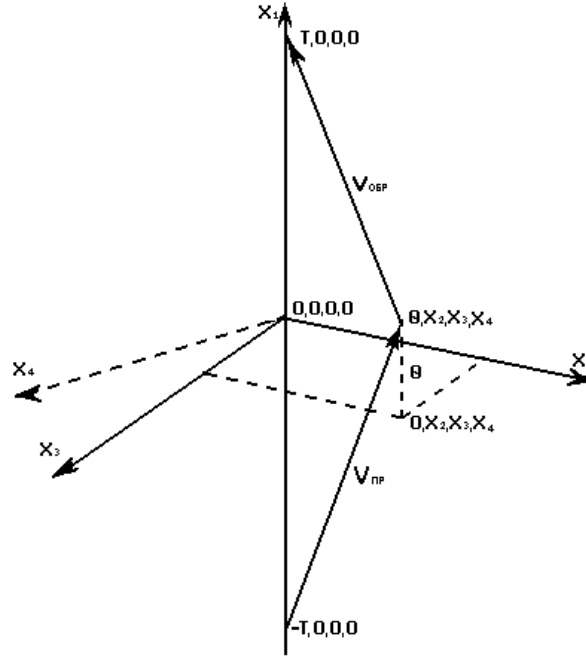


Рис. 1: Мировые линии прямого и обратного сигналов с равным модулем скорости

В рассматриваемом примере уравнение, связывающее действительную координату θ некоторой точки поверхности одновременности с тремя другими ее координатами x_2 , x_3 и x_4 , получается из условия равенства длин векторов, обладающих компонентами $(T + \theta, x_2, x_3, x_4)$ и $(T - \theta, -x_2, -x_3, -x_4)$. (Величина θ здесь имеет смысл отклонения конкретного события от гиперплоскости $x_1 = 0$.) Используя выражение для величины интервала (7), и одновременно учитывая, что для четных степеней $(-x)^n = x^n$, имеем:

$$(T + \theta)^4 - 2(x_2^2 - x_3^2 + x_4^2)(T + \theta)^2 + 8(x_2 x_3 x_4)(T + \theta) + (x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_2^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_4^2 - 2x_3^2 x_4^2) = (T - \theta)^4 - 2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(T - \theta)^2 + 8(x_2 x_3 x_4)(T - \theta) + (x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_2^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_4^2 - 2x_3^2 x_4^2)$$

Раскрытие скобок и приведение подобных приводит к уравнению

$$T\theta^3 + (T^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)T\theta + 2x_2 x_3 x_4 T = 0. \quad (9)$$

Вводя безразмерные величины $\eta = \theta/T$, $\chi_2 = x_2/T$, $\chi_3 = x_3/T$, $\chi_4 = x_4/T$ и учитывая, что $T \neq 0$, получаем кубическое уравнение относительно η :

$$\eta^3 + (1 - \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2)\eta + 2\chi_2 \chi_3 \chi_4 = 0. \quad (10)$$

Его действительный корень характеризует относительную величину отклонения абсциссы поверхности одновременности от проходящей через ее центр касательной гиперплоскости $x_1 = 0$. Условимся такой параметр именовать *коэффициентом неплоскостности*. Когда $\chi_2 \approx \chi_3 \approx \chi_4 \rightarrow 0$, η также стремится к нулю, т. е. в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$ поверхность одновременности переходит в гиперплоскость $x_1 = 0$.

Физический смысл поверхность одновременности имеет только внутри световой пирамиды, которой принадлежит мировая линия наблюдателя, в противном случае пришлось бы допустить и физический смысл сверхсветовых скоростей. Следуя методике специальной теории относительности, с каждым вектором, имеющим начало в точке $(-T, 0, 0, 0)$, а конец на поверхности одновременности, т. е. в точке $(\eta T, x_2, x_3, x_4)$, вполне естественно связывать мировую линию сигнала, обладающего определенной равномерной скоростью. Всем таким векторам, если они имеют одинаковые величины интервалов, поставим в соответствие сигналы с одним и тем же значением модуля скорости $|\mathbf{v}_{\text{пр}}|$. В соответствии с этой логикой сигнал, сопоставляемый вектору, соединяющему точку $(\eta T, x_2, x_3, x_4)$ с точкой $(T, 0, 0, 0)$, обладает равной, но обратной по величине скоростью $|\mathbf{v}_{\text{обр}}|$. В отличие от пространства Минковского такие вектора имеют компоненты, разнящиеся не только по знаку, но и по величине (Рис. 1), а именно: $\mathbf{v}_{\text{пр}} \leftrightarrow (\eta T + T, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{v}_{\text{обр}} \leftrightarrow (T - \eta T, -x_2, -x_3, -x_4)$. В пространстве Минковского коэффициент неплоскостности η для каждой точки поверхности одновременности равен нулю, в результате чего компоненты векторов, соответствующие прямому и обратному сигналам, принимают обычный вид: $\mathbf{v}_{\text{пр}} \leftrightarrow (T, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{v}_{\text{обр}} \leftrightarrow (T, -x_2, -x_3, -x_4)$.

Для конкретного определения расстояния между действительной осью и произвольной параллельной ей линией, полностью характеризующейся тремя фиксированными координатами x_2, x_3, x_4 , необходимо иметь эталонные сигналы, а вернее связанные с ними вектора, с помощью которых можно откладывать интервалы, соответствующие расстояниям в различных направлениях. В четырехмерном времени, как и в пространстве специальной теории относительности, такие эталонные сигналы наиболее удобно связывать с изотропными векторами, имеющими с одной стороны общее начало, а с другой – упирающиеся в поверхность одновременности. В геометрии Минковского множество концов таких векторов представляет собой пересечение двух световых конусов: будущего с вершиной в точке $(-T, 0, 0, 0)$ и прошлого, вершина которого смещена в точку $(T, 0, 0, 0)$. Как известно, результатом такого пересечения является обычная сфера, целиком лежащая в гиперплоскости $x_1 = 0$. Это характерно только для пространств с квадратичным типом метрики. Во всяком случае, в четырехмерном времени аналогичная фигура, получаемая как результат пересечения двух противоположащих световых пирамид, является существенно не плоской, хотя и состоит из линейных элементов.

Наглядно убедиться в этом лучше на примере не четырех-, а трехмерного времени [12], в частности, взглянув на Рис. 2, на котором в изометрии представлено пересечение двух световых пирамид. Для сравнения на том же рисунке изображено пересечение двух световых конусов трехмерного псевдоевклидова пространства. В трехмерном времени внутренняя область, принадлежащая обеим пирамидам, представляет собой обычный куб, одной из главных диагоналей которого является отрезок действительной оси $[-T, T]$. При этом пересечение двух световых пирамид оказывается фигурой, составленной из $(n - 2)$ -граней такого куба, не содержащих точки $-T$ и T . В данном случае, это шестиугольник $ABCDEF$ и он не принадлежит плоскости $x_1 = 0$, хотя и состоит из прямолинейных элементов.

Аналогично и в четырехмерном времени: область, принадлежащая одновременно двум противоположащим световым пирамидам, является четырехмерным кубом, а поверхность пересечения их изотропных граней оказывается образованной двенадцатью 2-гранями такого куба, не содержащими концы главной диагонали $[-T, T]$. Изобразить на плоском чертеже подобную фигуру трудно, поэтому мы ограничимся рассмотренным выше трехмерным прототипом. В работе [13] предпринята попытка рассмотреть соответствующий двенадцатигранник (правда, от ее автора, по-видимому,

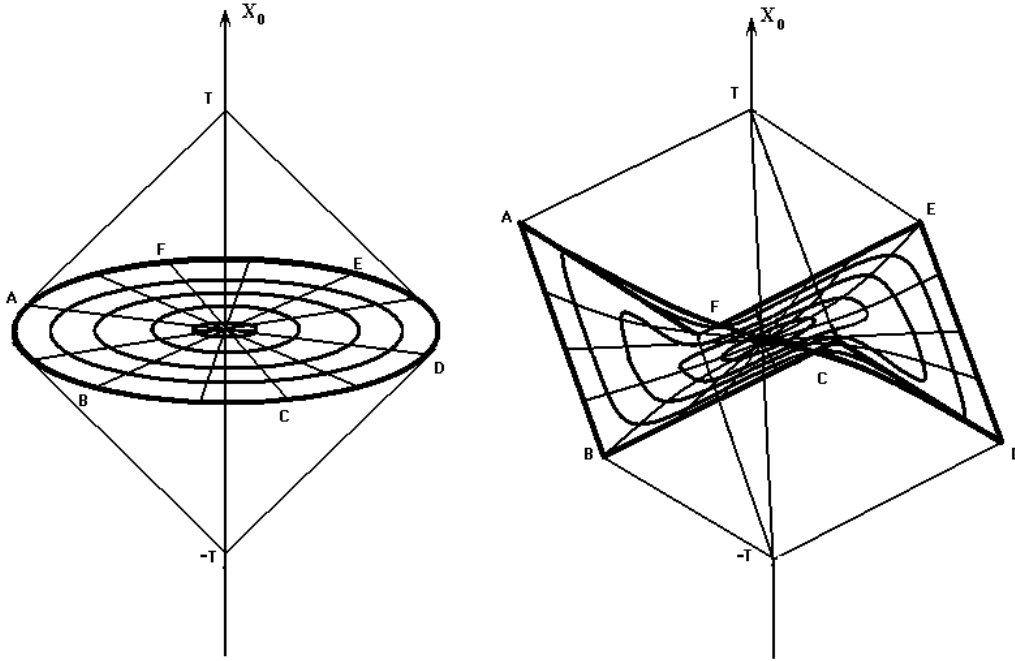


Рис. 2: Поверхность одновременности в трехмерном времени (справа) и трехмерном псевдоевклидовом пространстве (слева)

ускользнул принципиально четырехмерный характер исследуемой фигуры, и он изобразил ее как обычную трехмерную).

В пространстве Минковского мировые линии, параллельные мировой линии наблюдателя и касающиеся фигуры, являющейся пересечением двух световых конусов, принимаются за равноудаленные точки физического пространства наблюдателя, а в качестве расстояния берется величина, пропорциональная длине оси такого двойного конуса. В четырехмерном времени можно поступить аналогичным образом. В этом случае равноудаленными от действительной оси (ассоциируемой с мировой линией наблюдателя) оказываются параллельные ей линии, проходящие через точки пересечения граней двух противоположных световых пирамид, а в качестве расстояния выступает величина, пропорциональная главной диагонали гиперкуба, получающегося в результате такого пересечения. Чтобы найти численное значение этой величины, необходимо из четырех действительных корней уравнения

$$x_1^4 - 2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)x_1^2 + 8(x_2x_3x_4)x_1 + (x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_2^2x_4^2 - 2x_3^2x_4^2) = 0, \quad (11)$$

представляющих собой ничто иное, как абсциссы точек пересечения прямой, связанной с координатами x_2, x_3, x_4 , и четырех изотропных гиперплоскостей, выбрать два, имеющие физический смысл. Один из этих корней $x_{1,1}$ соответствует точке, принадлежащей пирамиде прошлого, другой $x_{1,2}$ – пирамиде будущего, тогда как два "лишних" корня $x_{1,3}$ и $x_{1,4}$ принадлежат граням боковых пирамид. Расстояние может быть принято как половина суммы первых двух корней: $R_c = 1/2(x_{1,1} + x_{1,2})$, при этом индекс "с" подчеркивает, что данная величина определяется с помощью световых сигналов.

Трехмерное пространство, возникающее в результате подобной процедуры, является финслеровым и полностью характеризуется своей индикатрисой, роль которой как раз и играет описанный в [13] двенадцатигранник. Это пространство по своим свойствам достаточно близко евклидову, в силу выпуклости и двухмерной замкнутости его индикатрисы, которая мало отличается от индикатрисы евклидова

пространства, представляющей собой обычную сферу. Однако разница между евклидовой сферой и рассматриваемым двенадцатигранником все же достаточно принципиальна, чтобы спутать связанные с ними геометрии. Именно поэтому в работе [13] делается вывод о нелогичности предположения, что в основе геометрии реального мира лежит метрика четырехмерного времени. Однако, на наш взгляд, при формулировке данного вывода не учитывалось то важное обстоятельство, что при ориентации в физическом пространстве наблюдатель пользуется не столько световыми, сколько существенно более медленными сигналами. Свет же играет лишь вспомогательную роль, призванную идентифицировать объекты, тогда как сопоставление этим объектам расстояний осуществляется уже другими, более медленными способами. В специальной теории относительности данный факт не имеет никакого значения, так как индикатриса физического пространства совершенно не зависит от скорости сигналов. В многомерном времени это уже не так. Чем больше скорость зондирующих сигналов отличается от световой, тем меньше соответствующая им индикатриса "выпирает" из гиперплоскости, тем более округлыми становятся ее "углы", и тем ближе ее форма к трехмерной сфере. В пределе, когда относительная скорость сигналов, с помощью которых "ощупывается" физическое пространство, стремится к нулю, оно вообще перестает отличаться от евклидова. Таким образом, если в четырехмерном времени факт присутствия каких-то неподвижных объектов фиксировать с помощью света, но расстояния между ними определять при помощи других, более медленных сигналов, то обнаружить удастся только евклидову геометрию. Заметим, что именно такие условия выполняются в большинстве обычных для человека ситуаций.

С другой стороны, почти не вызывает сомнений принципиальная возможность поставить эксперимент, позволяющий прояснить, какая все-таки геометрия имеет лучшее соответствие с реальным физическим пространством: риманова или финслерова? Для этого необходимо, чтобы замеры расстояний между несколькими фиксированными друг относительно друга объектами, производились как с помощью световых, так и более медленных сигналов. Парадоксально, но в колоссальном экспериментальном материале, имеющемся в арсенале современной физики, подобные опыты, во всяком случае, не допускающие двойкой трактовки, по-видимому, отсутствуют. Кроме того, отличия, которые нужно при этом отследить, относительно невелики и поэтому, даже будучи обнаруженными, могут истолковываться по-разному.

Принятая выше концепция построения трехмерного физического пространства объясняет, почему в абсолютно равноправном по своим геометрическим координатам четырехмерном времени наблюдатель, ассоциированный с некоторой мировой линией, регистрирует принципиальное отличие координаты, связываемой с его собственным временем, от трех других. Ответ заключается в топологическом различии индикатрис геометрического и физического пространств. (Под геометрическим мы понимаем само финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора, а под физическим – трехмерное многообразие, возникающее в представлении наблюдателя, оперирующего некоторыми эталонными сигналами.) Так, если первая индикатриса имеет вид специфического шестнадцатиполостного гиперboloида, вторая – представляет собой замкнутое по двум измерениям кольцо, точная форма которого, хотя и зависит от используемых в измерениях сигналов, в топологическом плане неизменна.

5. Заключение

Преобразования, сохраняющие скалярную форму (8), не оставляют инвариантными интервалы и, строго говоря, не являются движениями четырехмерного времени. Однако, поскольку они переводят в себя гиперповерхности одновременности типа

(10) и не изменяют трехмерных расстояний R_c , то вполне могут исполнять роль обычных физических поворотов. Кстати, при такой интерпретации реальных пространственных вращений неожиданно может получить объяснение известный парадокс, связанный с наблюдаемыми отличиями между поступательными и вращательными движениями. К последним достаточно сложно применить принцип относительности, а наиболее известная попытка разобраться в данной проблеме принадлежит Маху, который предположил, что центробежные силы, возникающие при вращении, обязаны своим появлением действию огромной массы всех тел Вселенной. Согласно Маху, если закрутить всю Вселенную, на оставшееся неподвижным малое тело будут действовать центробежные силы, в точности равные силам, возникающим при вращении самого тела. Справедливость такого утверждения остается спорной, а сам вопрос так и не потерял своей актуальности. В случае, если реальному миру вместо галилеевой или псевдоевклидовой метрик сопоставлять геометрию четырехмерного времени, проблема не возникает, так как преобразования, отвечающие за поступательные и вращательные движения этого пространства, относятся к принципиально разным типам непрерывных симметрий.

Проведенный в данной работе анализ свойств многообразия, претендующего на роль альтернативы пространству Минковского, далек от завершенности. Однако факт, что для одной из самых простых финслеровых метрик четвертого порядка, ничего общего не имеющей с обычной квадратичной формой, можно указать условия, при которых она в состоянии породить не только классические, но и релятивистские представления о физическом пространстве, — заслуживает внимания.

Литература

- [1] Б. Риман: *О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии*; – В кн.: Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.
- [2] P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Göttingen, 1918 (Dissertation).
- [3] G. S. Asanov: *Finslerian Extension of General Relativity*, Reidel, Dordrecht, 1984.
- [4] Г. Гельмгольц: *О фактах, лежащих в основании геометрии*. – В кн.: Об основаниях геометрии, ТТЛ, М. 1956.
- [5] С. Ли: *Замечания на работу Гельмгольца "О фактах, лежащих в основании геометрии"*. – В кн.: Об основаниях геометрии, ТТЛ, М. 1956.
- [6] Г. Вейль: *Пространство, время, материя*, Янус, М. 1996.
- [7] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, arXiv:gr-qc/0206004.
- [8] Х. Рунд: *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Наука, М. 1981.
- [9] Р. В. Михайлов: *О некоторых вопросах четырехмерной топологии: обзор современных исследований*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.
- [10] D. G. Pavlov: *Nonlinear Relativistic Invariance For Quadrihyperbolic Numbers*, arXiv: gr-qc/0212090.
- [11] Д. Г. Павлов: *Четырехмерное время как альтернатива пространству-времени Минковского*, Труды международной конференции "GEON-2003", Казань, 2003.
- [12] Д. Г. Павлов: *Хронометрия трехмерного времени*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.
- [13] Г. Ю. Богословский: *Статус и перспективы теории локально анизотропного пространства-времени*, Физика ядра и частиц. Издательство МГУ, М. 1997.

От редакции

ЧИСЛО, ГЕОМЕТРИЯ И ПРИРОДА

Число – одно из самых фундаментальных понятий не только математики, но и всего естествознания. Оно, быть может, первичней таких глобальных категорий, как время, пространство, вещество или поле. Поэтому, выпуская в свет первый номер журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике", редакционная коллегия искренне надеется, что на страницах данного издания найдут свое место работы, посвященные не просто числу вообще, но, прежде всего, раскрывающие его органическую связь с реальным миром.

Понятие числа многогранно и в самом широком смысле включает не только обычные числа, но и обобщенные объекты, наподобие кватернионов, октав, матриц и многих других. Не отрицая важной роли чисел всех видов, организаторы журнала выделяют среди них цепочку классов: натуральные $\rightarrow$ целые $\rightarrow$ рациональные $\rightarrow$ действительные $\rightarrow$ комплексные. Своей главной задачей журнал ставит обоснование возможности расширения приведенной классификации на числа больших размерностей, в первую очередь, обладающих коммутативно-ассоциативным умножением.

На первый взгляд, подобная программа представляется бесперспективной, поскольку теорема Фробениуса утверждает, что многокомпонентные числовые структуры с обычными арифметическими свойствами заканчиваются на комплексных числах. При этом особый акцент делается на отсутствии в соответствующих алгебрах так называемых делителей нуля. Конечно, отталкиваясь только от действительных и комплексных чисел, как неких эталонов, делители нуля представляются лишними. Однако, с точки зрения физики и тесным образом переплетенной с ней псевдоевклидовой геометрии, делители нуля оказываются одними из самых естественных объектов, поскольку именно с ними связаны мировые линии световых лучей. Факт, что псевдоевклидовой плоскости соответствует алгебра коммутативно-ассоциативных двойных чисел, имеющих в своем составе делители нуля, – лучшее тому подтверждение. Звучащие иногда высказывания, будто двойные числа слишком примитивны и не составляют реальной конкуренции комплексным, представляются несостоятельными, поскольку на языке геометрии это означает, что евклидовы пространства важнее псевдоевклидовых. Геометры давно пришли к выводу, что оба типа пространств равноценны, поэтому и двойные числа в основной классификации числовых структур должны стоять рядом с комплексными. Но, допуская мысль о фундаментальности двойных чисел, не остается оснований игнорировать делители нуля, а значит, оказывается вполне возможным, не вступая в противоречие с теоремой Фробениуса, строить числовые системы самых разных размерностей.

Замечательным примером подобных структур являются комплексные кватернионы (бикватернионы). Исследованию этих ассоциативных, но не коммутативных по умножению, гиперкомплексных чисел посвящен ряд интересных работ, представлены они и в первом номере настоящего журнала. Ожидание успехов данного направления основано на факте, что группа Пуанкаре, играющая исключительную роль в современной физике, является подгруппой полной группы симметрий восьмимерного пространства бикватернионов. С другой стороны, признание за делителями нуля права на звание обычных чисел, приводит к возможности построения и гиперкомплексных систем, наделенных коммутативно-ассоциативным произведением, что имеет свои

дополнительные преимущества. Подчеркивая особый статус подобных структур, их предлагается рассматривать под общим именем *поличисел*.

До последнего времени исследованию поличисел не уделяли особого внимания, поскольку их считали тривиальными. Отчасти это действительно так, однако, если отталкиваться не от алгебр, а от связанных с ними геометрий, разнообразие свойств сразу же значительно возрастает. Дело в том, что пространства, стоящие за поличислами, как правило, являются финслеровыми, а в них можно ожидать, что помимо специальных линейных преобразований своим особым положением будут выделяться и некоторые нелинейные отображения.

Как бы ни сложилось с обобщением понятия числа, существование финслеровых геометрий является бесспорным фактом, а, значит, и проблемы физики можно рассматривать в совершенно другой плоскости. Действительно, почему бы вместо поиска гиперкомплексных систем, соответствующих классическому пространству Минковского или его модификациям, не попытаться заменить сам геометрический фундамент физики в надежде, что он ближе к неквадратичным структурам? Если идея столь тесной связи математики и физики верна, можно предположить, что новая геометрия должна быть непосредственно соотносима с максимально простыми числовыми системами. Здесь-то и могут сыграть свою роль поличисла, которые, с одной стороны, элементарны, а с другой – являются объектами далеко не тривиальных геометрий. Даже если в отношении поличисел данные ожидания не оправдаются, существуют и другие гиперкомплексные числа, а учитывая фундаментальность поставленной задачи, заранее трудно предугадать, какой из путей окажется плодотворным.

ХРОНОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ВРЕМЕНИ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
postmaster@hypercomplex.ru

Концепция многомерного времени не раз возникала в естествознании, но всякий раз, под давлением парадоксов, от нее приходилось отказываться. Между тем, остается нерешенным философский вопрос, почему пространство допускает множество измерений, а время – нет. В настоящей работе предпринимается попытка разобраться в данной проблеме путем перехода от традиционных квадратичных метрик к финслеровым, допускающим произвольную степень компонент вектора, входящих в метрическую функцию. Хотя предлагаемый подход позволяет строить континуумы времен любой натуральной размерности, данное исследование ограничивается простейшим, после тривиального двухмерного случая, примером трех временных измерений, чтобы наиболее наглядно осветить специфику темы и использовать преимущество графических иллюстраций.

1. Введение

Идея пространства воспринимается человеком намного проще и нагляднее, чем идея времени. Это обусловлено тем, что пространство обозревается нами как бы все сразу в трехмерном виде, тогда как время предстает лишь в своей малой части. Подобная ситуация часто толкала ученых к попыткам "избавиться" от времени, ограничивая себя либо сугубо стационарными задачами, либо различными способами приводя время к уровню дополнительного пространственного измерения. Первый подход связывают с именем Архимеда, второй – впервые встречается у Галилея, достигает совершенства у Лагранжа и господствует до сих пор. И это, несмотря на то, что специальная теория относительности явно противопоставляет категории пространства и времени друг другу, объявляя их принципиально разными сущностями, обладающими фундаментальными отличиями уже на геометрическом уровне.

Однако, в среде физиков постепенно растет убеждение, сформулированное Сингом [1]. Согласно ему, Евклид направил естествознание по ложному пути, взяв в качестве первичного понятия науки пространство, а не время. Отсутствие до сих пор какого-либо общепринятого термина для наименования исследований времени служит, по мнению Синга, доказательством этого пренебрежения. Он предложил использовать слово "хронометрия" для обозначения той части науки, которая имеет дело с категорией времени в столь же широком смысле, как "геометрия" имеет дело с категорией пространства. И хотя Синг вряд ли рассматривал время как многомерную структуру, его высказывания именно в этом случае приобретают особое звучание.

2. Двухмерное время

Суть идеи многомерного времени, выступающего альтернативой многомерному пространству, можно проиллюстрировать парадоксальным утверждением, что с примером двухмерного времени почти все физики хорошо знакомы, однако, в силу устоявшихся традиций рассматривают его в совершенно иной интерпретации. Речь идет о самой обычной псевдоевклидовой плоскости. Удивительно, но среди всех псевдоевклидовых пространств только двухмерное выделяется своими уникальными особенностями, среди которых следует отметить следующие.

Во-первых, для всех псевдоевклидовых пространств размерности три и выше справедлива теорема Лиувилля, согласно которой полный перечень их конформных преобразований сводится к переносам, вращениям, дилатациям и инверсиям. На псевдоевклидовой плоскости же (как, впрочем, и евклидовой) разнообразие конформных отображений существенно шире.

Во-вторых, для векторов плоскости существует понятие их полного произведения, причем большинство из них имеют еще и обратные. Напротив, в других псевдоевклидовых пространствах под произведением векторов обычно понимаются только частные случаи этого общего понятия, деление же не определяется в принципе.

В-третьих, количество односвязных областей, на которые изотропные вектора разделяют псевдоевклидовы пространства с сигнатурой $(1, n - 1)$, всегда равно трем, за исключением плоскости, на которой таких областей четыре.

В-четвертых, даже при обычной интерпретации псевдоевклидовой плоскости как двумерного пространства-времени, в общем-то, не важно, какую из двух характерных линейных координат выбрать в качестве временной, а какую в качестве пространственной, результат от этого меняется с точностью до перестановок. В пространствах больших размерностей подобная симметрия нарушается и к времениподобному направлению применима только смена знака.

И, наконец, только плоскость (если не считать одномерное пространство) допускает соответствие с коммутативно-ассоциативной алгеброй, основные объекты которой носят название двойных чисел. Алгебра этих чисел обладает почти всеми признаками обычных действительной и комплексной алгебр (включая коммутативность произведений), за исключением появления особых объектов – делителей нуля. К ним относятся числа, отличные от нуля, но не имеющие обратных, как и сам нуль. Каждый делитель нуля имеет пару, также делитель нуля, в произведении с которым результатом оказывается опять же нуль. В сравнении с комплексными числами, двойные устроены весьма просто, однако, никакому псевдоевклидовому пространству большей размерности, чем два, нельзя сопоставить даже подобной алгебры.

На эти фундаментальные различия обычно не обращают внимания. Их, в лучшем случае, относят на счет вырожденности двумерного пространства, полагая, что унифицированный порядок начинается с размерности три и выше. Интересно отметить, что практически то же самое наблюдается и для евклидовых пространств, среди которых двумерная плоскость также стоит особняком, а ей, как известно, сопоставляется алгебра комплексных чисел.

Уже исходя из этих двух примеров, можно выдвинуть предположение, что по каким-то причинам связь некоторых метрических пространств с коммутативно-ассоциативными алгебрами делает их выделенными, а потому именно такие алгебры и соответствующие им пространства заслуживают отдельного внимания.

Утверждая в начале раздела право трактовать псевдоевклидову плоскость, как частный случай многомерного времени, мы опирались на то обстоятельство, что в данном пространстве не существует никаких объективных оснований различить, какие из его направлений подходят на роль времени, а какие нет. Изначально в таком пространстве все неизотропные направления абсолютно равноправны. Их дифференциация по физическому смыслу на пространственно- и времениподобные происходит лишь после того, как осуществляется субъективный выбор одного из квадрантов в качестве области будущего.

Замечание. Субъективный выбор касается не столько квадранта, сколько конкретной мировой линии, элемент длины которой трактуется как собственное время некоего наблюдателя, а область будущего определяется уже как следствие направления этой линии.

Только после выполнения данной процедуры точки противоположащего квадранта автоматически приобретают смысл прошедших событий, а точки двух боковых квадрантов – становятся абсолютно удаленными. Однако, на псевдоевклидовой плоскости мало что изменится, если в качестве области будущего выбрать любой другой квадрант, просто по отношению к нему все остальные должны поменять свои роли.

За исключением этого, на первый взгляд, несущественного момента, дальнейшие построения на псевдоевклидовой плоскости, понимаемой как двухмерное время, не отличаются от стандартных построений при ее обычной интерпретации в качестве пространства-времени. Но при переходе к трем и большему числу измерений, различия между многомерным временем и соответствующим ему по размерности псевдоевклидовым пространством-временем становятся принципиальными. Более того, если концепцию многомерного времени предполагать, как возможную геометрическую альтернативу пространству специальной теории относительности, необходимо пересмотреть не только математические, но и философские представления о структуре физической реальности.

3. Трехмерное время

Чтобы от модели двухмерного времени перейти к трехмерной, сосредоточимся на том факте, что в случае псевдоевклидовой плоскости соответствующая ей геометрия оказалась тесно связанной с понятием двойных чисел, относящихся к коммутативно-ассоциативным гиперкомплексным алгебрам. Первооткрыватель гиперкомплексных чисел Уильям Гамильтон, выступая на одном из заседаний ирландской Королевской академии, утверждал, что поскольку существует геометрия – чистая математическая наука о пространстве, – должна существовать столь же чистая математическая наука о времени. По его мнению, такой наукой должна была выступить алгебра [2]. Парадоксально, но именно Гамильтон фактически и опроверг собственную идею, когда обнаружил на примере открытых им кватернионов множественность принципиально различных алгебр. Попробуем все же вооружиться его утверждением как аксиомой, и по аналогии с алгеброй двойных чисел построим алгебру тройных чисел, которым и попытаемся сопоставить геометрию, или используя предложение Синга, хронометрию трехмерного времени.

Наличие в двойных числах выделенного (изотропного) базиса, в котором выражение для квадрата их модуля принимает полностью симметричный вид:

$$|\mathbf{X}|^2 = x'_1 x'_2, \quad (1)$$

наводит на мысль, что у чисел, способных быть алгебраическим аналогом векторов трехмерного времени, должен найтись базис, в котором величина куба их модуля окажется связанной с похожей на (1) симметрической формой от трех компонент:

$$|\mathbf{X}|^3 = x'_1 x'_2 x'_3. \quad (2)$$

Несложно убедиться, что алгебра таких чисел действительно существует, она коммутативна и ассоциативна. Кроме того, она является прямой суммой трех действительных алгебр, что продолжает тенденцию, наметившуюся ранее у двойных чисел, алгебра которых была связана с прямой суммой двух действительных. Как хорошо известно, одномерное время можно сопоставлять самым действительным числам, что служит дополнительным подтверждением правильности избранного нами алгебраического пути поиска моделей многомерных времен.

Многообразия, дифференциалы длин векторов которых выражаются формами типа (1)–(2), известны в геометрии и носят название финслеровых пространств с метрической функцией Бервальда-Моора [3]. Однако, обычно под финслеровыми понимают многообразия общего вида с ненулевыми значениями кривизны и кручения. Рассматриваемая же метрика (2) задает линейное пространство, в связи с чем оно является близким родственником как евклидовых, так и псевдоевклидовых пространств, хотя далеко не во всем на них похожим.

Условимся линейные финслеровы пространства, метрические функции которых в одном из базисов принимают вид:

$$F(x') = \left| \prod_{i=1}^n x'_i \right|^{1/n}, \quad (3)$$

называть *n-мерными временами*. Чтобы иметь не только аксиоматические, но и физические основания использовать данное яркое имя, попробуем каждую точку таких пространств интерпретировать как событие, а любую прямую – как мировую линию некоторой инерциальной системы отсчета.

Замечание. Определяемое таким образом понятие события, несмотря на сходство с классическим аналогом, введенным Минковским, все же несколько отличается от последнего. Это связано с тем, что в многомерном времени понятие события перестает быть однозначным и оказывается зависящим от того, с позиций какой системы отсчета оно рассматривается. Другими словами, одну и ту же точку многомерного времени следует интерпретировать как принципиально различные события, если мировые линии наблюдателей разделены изотропными гиперплоскостями. В их представлениях перепутаны категории времени и пространства, и то, что для одного кажется чисто пространственным интервалом, для другого может быть чисто временным и наоборот. Таких качественно различных наблюдателей в n -мерном времени 2^n (по числу односвязных областей), вследствие чего каждая точка имеет столько же независимых потенциальных возможностей интерпретироваться как событие. Однако, если рассматривать только такие системы отсчета, чьи мировые линии лежат в одном световом конусе, многозначности не возникает, и понятие события тогда почти ничем не отличается от своего классического аналога.

В каждой такой системе отсчета интервал собственного времени между произвольной парой событий равен величине длины связанного с этими событиями вектора. Из симметрии рассматриваемых пространств следует, что все их неизотропные направления абсолютно равноправны. И если поэтому с длиной каждого вектора мы решили связывать собственное время в выделенной системе отсчета, то и сами пространства, уже не только по определению, но и исходя из физических предпосылок, теперь вполне уместно именовать многомерными временами.

Остается вопрос, имеют ли подобные многообразия хоть какое то отношение к реальному миру? Чтобы приблизиться к ответу на него, попробуем рассмотреть свойства и особенности трехмерного времени, начав данный процесс с изучения структуры его изотропных подпространств.

4. Световые пирамиды

Форма (2) принимает нулевые значения в точках, соответствующих трем выделенным плоскостям, задаваемым уравнениями:

$$x'_1 = 0, \quad x'_2 = 0, \quad x'_3 = 0. \quad (4)$$

Вектора, лежащие в любой из этих плоскостей, имеют нулевое значение модуля и в этом смысле являются изотропными. При этом, прямые, принадлежащие одновременно двум плоскостям (равно, как и точка пересечения всех трех), автоматически также оказываются выделенными. Поскольку таких прямых, как и измерений, – три, из векторов, им принадлежащим, можно образовать специальный базис. Этот базис с точностью до перестановок является единственным и именно в нем приведенная выше форма (2), определяющая значение модуля произвольного числа, а, значит, и выражение для длины соответствующего ему вектора, принимают простейший вид. Учитывая уникальность такого базиса, присвоим ему имя *абсолютного*.

В данном плане рассматриваемое пространство оказывается устроенным существенно иначе, чем привычные евклидовы и псевдоевклидовы пространства, где выделенных базисов не существует (опять же, за исключением псевдоевклидовой плоскости), а потому изучение этих и обобщающих их геометрий часто стремятся свести к бескоординатному виду. Наличие в многомерных временах особых базисов означает, что если когда-нибудь удастся найти связь между соответствующими многообразиями и физической реальностью, в теоретических построениях некоторые системы координат будут играть явно выделенную роль.

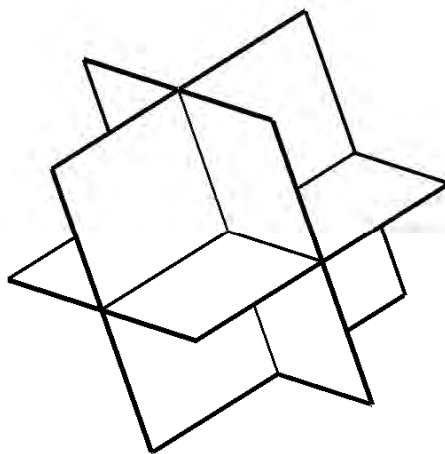


Рис. 1: Изотропные плоскости трехмерного времени

Сами изотропные плоскости (4) можно представлять себе так, как это изображено на Рис. 1. Из рисунка видно, что все трехмерное пространство рассекается изотропными плоскостями на восемь одинаковых камер-октантов, каждая из которых является областью односвязности. Любая из камер отделена от трех боковых своих соседей двухмерными гранями, еще с тремя граничит по лучам, и только с единственной противоположной камерой соприкасается в точке. Аналогично, только с поправкой на размерность, можно охарактеризовать и упоминавшееся выше двухмерное время, в котором изотропными прямыми все пространство делится на четыре камеры-квадранта. Каждый из таких квадрантов от двух смежных отделен изотропными лучами, а с единственным противоположащим граничит в точке. Тому же правилу подчиняется и одномерное время, поскольку его прямую можно рассматривать как две противоположащие камеры, разделенные одной особой точкой – нулем, которую можно считать предельно вырожденным случаем изотропного конуса.

Если из восьми камер-октантов трехмерного времени выделить два противоположащих и рассмотреть их объединенную изотропную границу, мы получим фигуру, изображенную на Рис. 2. Такое подпространство напоминает световой конус псевдоевклидова пространства (изображен на том же рисунке справа), с той разницей,

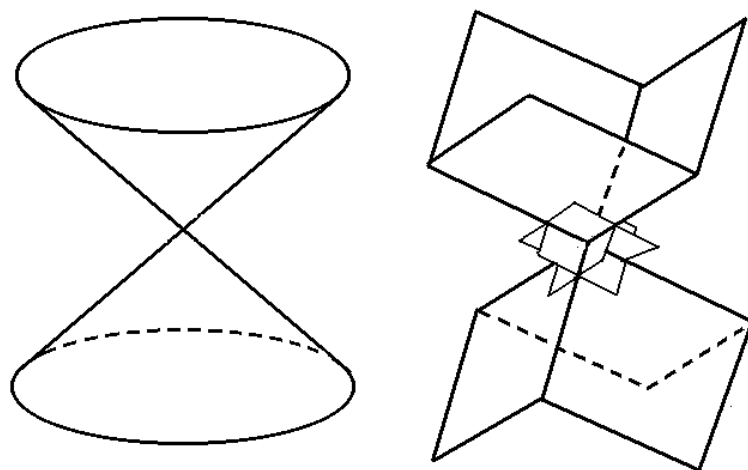


Рис. 2: Световые конусы трехмерного времени (справа) и трехмерного псевдоевклидова пространства (слева)

что первый не обладает непрерывной осевой симметрией. Внутри обоих противоположащих октантов располагаются вектора отличной от нуля длины, причем концы векторов единичной длины образуют две полости специфического гиперboloида, являющегося финслеровым аналогом двухполостного гиперboloида псевдоевклидова пространства. Обе эти фигуры изображены на Рис. 3, причем правая соответствует трехмерному времени и представляет собой только одну четвертую часть полного гиперboloида этого пространства, имеющего восемь полостей, по одной на каждую односвязную область. Точки этой фигуры удовлетворяют уравнению $|x'_1 x'_2 x'_3| = 1$, а ее общий вид представлен на Рис. 4.

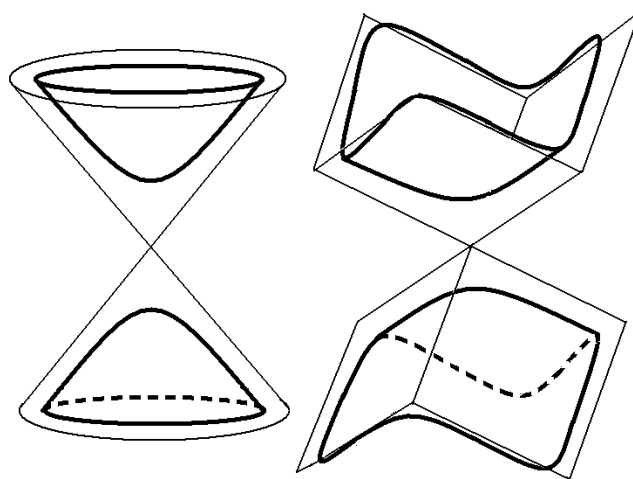


Рис. 3: Фрагменты единичных гиперboloидов

Среди единичных векторов, упирающихся в одну и ту же полость такого гиперboloида, возможны непрерывные переходы, осуществляемые абелевой двухпараметрической группой линейных преобразований, которые могут быть представлены в виде диагональных матриц:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

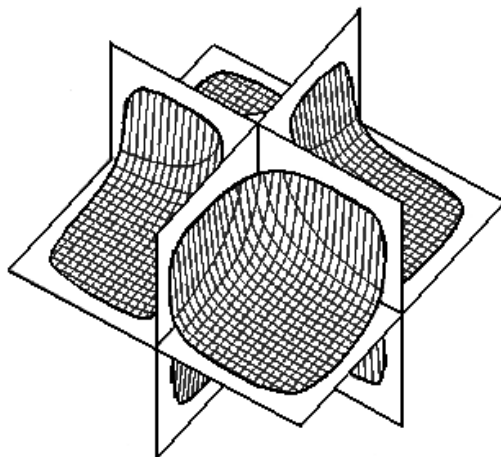


Рис. 4: Восьмиполостной гиперboloид трехмерного времени

с условием $a_1 a_2 a_3 = 1$. Преобразования данной группы оставляют инвариантными интервалы трехмерного времени (2) и поэтому являются его движениями. По своему характеру такие движения похожи на бусты соответствующего псевдоевклидова пространства с той разницей, что бусты не образуют группы и при однопараметрическом повороте в трехмерном пространстве-времени неподвижными остаются точки прямой, а в данном случае неподвижна всего одна точка. Преобразования этой группы условимся называть *гиперболическими вращениями трехмерного времени*.

Помимо гиперболических вращений, к движениям рассматриваемого времени относится трехпараметрическая группа параллельных переносов, имеющая обычное для линейных пространств представление. Других типов непрерывных преобразований, оставляющих инвариантными его интервалы, трехмерное время не содержит.

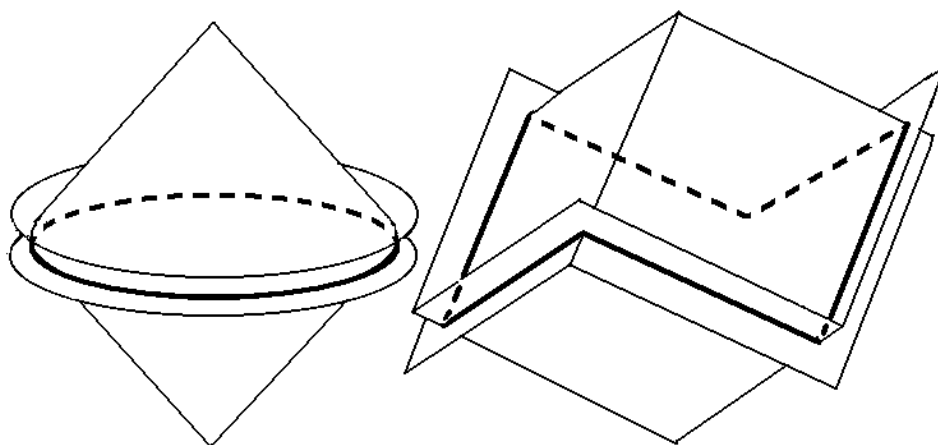


Рис. 5: Пересечения двух пар световых конусов

Изображенные на Рис. 2 и Рис. 3 изотропные грани и единичные гиперboloиды выделенной пары противоположащих октантов своими краями уходят в бесконечность. В связи с ограниченным пространством чертежа соответствующие поверхности оборваны, но не произвольно и не по характерным для псевдоевклидова пространства параллельным плоскостям, а более сложным образом, вытекающим из следующих рассуждений. Если границу одного из октантов пересечь с границей противоположащего и смещенного вдоль их общей оси, получится правильный шестиугольник, но

не плоский, а изломанный так, как это изображено на Рис. 5. Объем, принадлежащий внутренним областям обоих таких октантов, представляет собой обычный куб, а упомянутый выше шестиугольник оказывается состоящим из его ребер, не имеющих пересечений с главной осью.

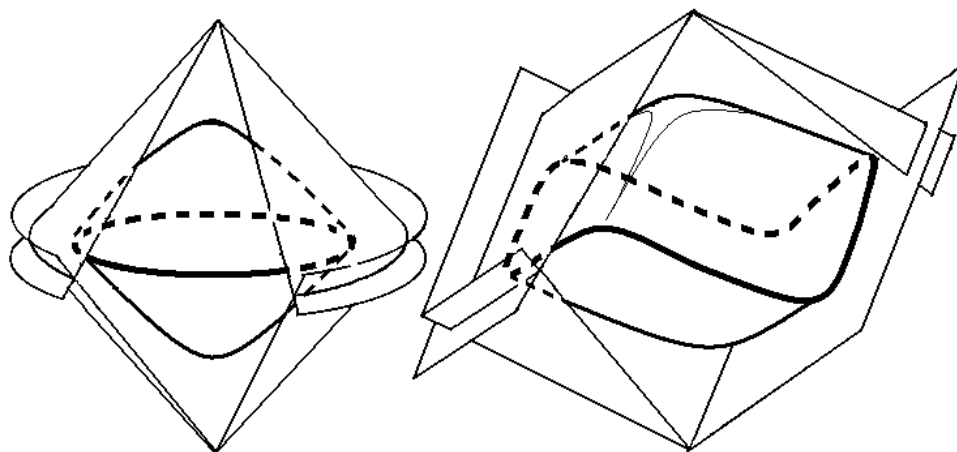


Рис. 6: Пересечения двух пар гиперboloидов с $0 < R < T$

Замечание. Можно утверждать, что в случае n -мерного времени фигура, являющаяся пересечением двух смещенных навстречу друг другу противоположащих камер, состоит ровно из половины $(n - 2)$ -граней образуемого ими гиперкуба, при этом в формировании такого пересечения принимают участие только грани, не имеющие общих точек с главной осью симметрии.

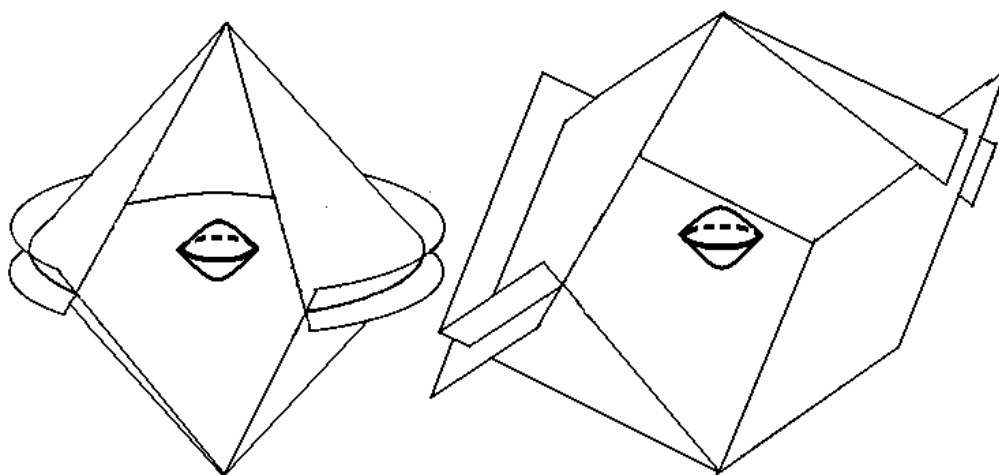


Рис. 7: Пересечения двух пар гиперboloидов с $R \approx T$

Если внутри образующих куб октантов построить две группы концентрических гиперboloидов (по сути являющихся финслеровыми обобщениями сфер) с центрами в противоположащих вершинах, результатом пересечения пар с одинаковыми радиусами оказывается непрерывное семейство замкнутых кривых, форма которых зависит от отношения соответствующего конкретной кривой радиуса гиперboloида R к половине главной диагонали куба T . Когда гиперboloиды имеют нулевые радиусы,

они совпадают с изотропными гранями октантов, а их пересечением является изломанный в пространстве шестиугольник, уже рассматривавшийся на Рис. 5. При $0 < R < T$ пересечение гиперboloидов осуществляется по кривым, похожим на кривую, представленную на Рис. 6. Они трехмерны и имеют по шесть скругленных углов. По мере приближения значения радиуса гиперboloидов к величине T , получаемые в результате их пересечения кривые, сглаживаются и сплюсциваются, а при $R \rightarrow T$ превращаются в идеально плоские окружности, хотя и бесконечно малого радиуса (Рис. 7).

В случае трехмерного псевдоевклидова пространства аналогичные построения приводят к образованию семейства лежащих в одной плоскости концентрических окружностей, изображения которых для сравнения представлены на тех же рисунках 5–7, справа. Окружность, принадлежащая двум световым конусам, т. е. соответствующая пересечению псевдоевклидовых сфер с $R = 0$, в специальной теории относительности интерпретируется как мгновенное положение светового фронта, который может регистрироваться наблюдателем, находящимся в вершине одного из конусов, в предположении, что в момент времени, совпадающий с вершиной другого конуса, произошла вспышка. Аналогичную трактовку следует применить и в случае трехмерного времени. Другими словами, ломаный шестиугольник изображенный на Рис. 5 может трактоваться как множество точек пространства наблюдателя, находящегося в точке T , с которыми тот связывает мгновенное положение светового фронта, вспышка которого произошла в точке $-T$. Для реализации такой ситуации достаточно принять, что изотропные грани противоположащих октантов являются аналогами световых конусов прошлого и будущего соответствующего по размерности псевдоевклидова пространства-времени. Данный прием выглядит вполне естественно и единственное усилие, которое приходится делать по сравнению с обычными для специальной теории относительности представлениями, – это допустить граненость светового конуса. Учитывая, что эта граненость осуществляется в пространстве, не доступном для непосредственного созерцания физическим наблюдателем, вопрос, отвечает ли она реалиям нашего мира, оказывается далеко не очевидным.

Хотя для изотропных границ односвязных камер можно было бы и сохранить название световых конусов, обычно используемое в случае псевдоевклидовых пространств, для того, чтобы лишний раз подчеркнуть особенности геометрии многомерных времен, соответствующие фигуры условимся называть *световыми пирамидами*, в первую очередь, выделяя среди них пирамиды прошлого и будущего.

5. Поверхности относительной одновременности

Логика проведенных выше построений требует идти дальше и принять аналогию не только между изотропными подпространствами и связываемыми с ними световыми фронтами, но и каждой общей окружности двух равных (развернутых навстречу друг другу) гиперboloидов псевдоевклидова пространства поставить в соответствие аналогичную кривую, являющуюся пересечением пары финслеровых сфер многомерного времени. При таком сопоставлении у нас появляется возможность достаточно естественным способом определить поверхность относительной одновременности трехмерного времени, ведь именно такой физический смысл играла в псевдоевклидовой геометрии представленная рассмотренным выше семейством окружностей плоскость. Исходя из данной логики, под одновременными событиями многомерного времени следует понимать множество точек, равноудаленных в смысле соответствующей финслеровой метрики от двух фиксированных точек. При этом одна из этих

фиксированных точек совпадает с мгновенным положением наблюдателя, а вторая – зеркальна ей относительно исследуемого слоя событий.

Прямая, проходящая через эти две точки, однозначно задает инерциальную систему отсчета. Однако, как следует из принятого определения одновременности, теперь это отношение событий зависит не только от скорости наблюдателя, но и от его мгновенного расположения относительно слоя, которому он собирается приписать одинаковые значения времени свершения. В ставшем почти классическим псевдоевклидовом случае, при определении одновременности значение имеет лишь относительная скорость системы отсчета, тогда как мгновенная расположенность наблюдателя не играет существенной роли. В трехмерном времени это уже не так и данное обстоятельство, по-видимому, является одним из наиболее значащих моментов, отличающих физические свойства рассматриваемого многообразия от обычных псевдоевклидовых построений.

Поверхность одновременности, соответствующую паре фиксированных точек, удобно описывать уравнением, связывающим ее координаты с координатами исходного аффинного пространства, представленными в абсолютном базисе. Такое уравнение несложно получить для произвольной пары точек, но наиболее просто оно выглядит в случае, когда мгновенное положение наблюдателя связывается с точкой (T, T, T) , а ее зеркальный образ имеет координаты $(-T, -T, -T)$. В этом случае условие равенства интервалов приводит к уравнению:

$$|(x'_1 + T)(x'_2 + T)(x'_3 + T)| = |(T - x'_1)(T - x'_2)(T - x'_3)|, \quad (6)$$

откуда, после раскрытия скобок и приведения подобных, имеем:

$$x'_1 x'_2 x'_3 + (x'_1 + x'_2 + x'_3)T^2 = 0. \quad (7)$$

Поверхность, соответствующая этому уравнению, изображена на Рис. 8.

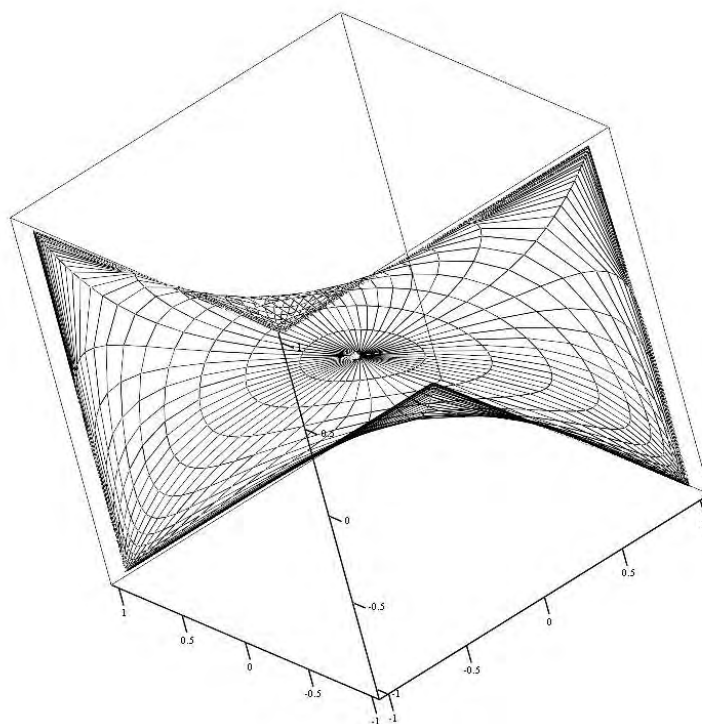


Рис. 8: Поверхность одновременности трехмерного времени

Кривые, рассматривавшиеся на рисунках 5–7, отмечают на поверхности одно-временности точки, в определенном смысле, равноудаленные от ее геометрического центра. Такие кривые во многом аналогичны обычным концентрическим окружностям, хотя геометрия связанного с ними пространства не совпадает с привычной евклидовой.

С другой стороны, пересекая поверхность одно-временности коническими поверхностями, названными в работе [4] *конусами вращения*, имеющими вершины в точке (T, T, T) и содержащими действительную ось, можно получить семейство кривых, соответствующих множеству радиальных линий евклидовой окружности. Таким образом, на поверхности одно-временности оказывается нанесенной сетка криволинейных координат, играющая в двухмерном физическом пространстве трехмерного времени ту же роль, что и полярная система координат на евклидовой плоскости.

Преобразования, переводящие в себя поверхность одно-временности так, что окружные и радиальные кривые при этом переходят снова в такие же кривые, оказываются во многом аналогичны пространственным поворотам вокруг начала координат в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, поскольку физические расстояния и там, и там, остаются неизменными. Однако в случае трехмерного времени эти преобразования нелинейны и, кроме того, они не оставляют инвариантными трехмерные интервалы.

6. Физические расстояния и скорости

Казалось бы, мы вплотную подошли к возможности ввести в трехмерном времени двухмерные физические расстояния и скорости, достаточно только установить взаимнооднозначное соответствие между полученными на поверхности одно-временности семействами окружных и радиальных кривых с соответствующими линиями полярной системы координат. Однако это не так. Дело в том, что рассматриваемое многообразие не допускает введения в качестве однозначных таких физических понятий, как расстояние и скорость, во всяком случае, если построение основывается на первичности измерений временных интервалов. То, что являлось, чуть ли, не очевидным свойством псевдоевклидовых пространств, оказывается, просто несовместимо с идеей многомерного времени. Как ни парадоксально, это обстоятельство не только не уменьшает, а наоборот, даже увеличивает возможность многомерного времени конкурировать с пространством Минковского за звание геометрического фундамента реального мира. Действительно, следуя идеологии хронометрии, с физическими расстояниями следует ассоциировать интервалы времени, проходящие в системе отсчета наблюдателя между посылкой некоторых эталонных сигналов и приемом их отражений обратно. Но любая попытка совместить этот естественный и понятный физический принцип с требованием однозначности расстояний наталкивается на противоречие. Красивым и далеко идущим выходом из этого парадокса представляется идея отказаться от однозначности физических расстояний, а следовательно и скоростей вообще, что может интерпретироваться как квантовомеханический принцип неопределённости.

Сказанное не означает, что место евклидовой геометрии физического пространства должна занять некая совершенно аморфная структура. Анализ показывает, что наше довольно радикальное предположение затрагивает не качественный, а лишь количественный аспект явлений. Расстояния и скорости, как самостоятельные физические категории не исключаются в многомерном времени полностью, а лишь видоизменяют свой статус, приобретая черты неопределенности на самом начальном геометрическом уровне. В частности, понятие равноудаленных в физическом плане

объектов становится зависящим от того, какими сигналами в качестве эталонных пользуется наблюдатель, определяющий эту самую равноудаленность. В свою очередь, эталонность некоторого класса сигналов определяется посредством требования равенства собственных времен, проходящих по часам, в связанных с этими сигналами инерциальных системах отсчета между посылкой, отражением и их последующим приемом. Учитывая, что интервалы времени – это единственные величины, которые по определению предполагаются измеримыми в нашем финслеровом многообразии, выделить среди непрерывного спектра наклонных мировых линий такие, которые характеризуются равенством интервалов, задача всегда разрешимая. Заметим, что этим приемом мы уже воспользовались выше, когда определяли понятие относительно одновременных событий. Эталонными можно считать сигналы (испущенные неподвижным наблюдателем), мировые линии которых начинаются в одной точке, достигают поверхности одновременности и после преломления собираются все вместе в другой фиксированной точке на мировой линии того же наблюдателя. Естественно, должно выполняться равенство интервалов всех получаемых таким образом отрезков, как до, так и после преломления.

Подобная логика построений приводит к тому, что в многомерном времени физическое пространство наблюдателя по своим геометрическим свойствам становится в определенной степени зависящим от того, каким набором эталонных сигналов эта геометрия определяется. Так, если мировые линии эталонных сигналов почти параллельны линии наблюдателя, в его представлениях возникает пространство по своим свойствам практически совпадающее с евклидовым. Это связано с тем, что концы векторов с равными значениями интервалов в данном случае лежат (как отмечалось выше) на почти плоской и практически идеальной окружности, а последняя в процессе построения физического пространства играет роль финслеровой индикатрисы. Индикатрисой двумерного евклидова пространства, как раз, и является обычная окружность. При переходе к сигналам, мировые линии которых имеют более значительный наклон, концы соответствующих векторов образуют уже не окружность, а более сложную замкнутую кривую, которая к тому же еще и не плоская. В пределе сигналов, чьи скорости интерпретируются как световые, данная кривая превращается в ломаный шестиугольник, рассматривавшийся на Рис. 5. Геометрия получающегося при этом двумерного физического пространства – финслерова, и именно она максимально расходится с евклидовой. Однако, поскольку индикатриса даже в этом предельном случае остается замкнутой и выпуклой, объективно присутствующие отличия двух геометрий невелики, в связи с чем в реальности их вполне вероятно спутать, особенно если экспериментальные факты ограничены малыми скоростями.

Таким образом, если предположить, что наш реальный мир действительно имеет прямую связь с рассматриваемой финслеровой геометрией, возникновение евклидовых и псевдоевклидовых представлений у находящегося в таком мире наблюдателя должно оказаться вполне естественным процессом последовательных приближений ко все более точному описанию. С другой стороны, в своей повседневной практике, исходя из которой, мы и пытаемся нащупать законы, управляющие миром, нам чаще всего приходится пользоваться сигналами, скорость которых существенно ниже световой. Как правило, свет при этом используется только для идентификации объектов, тогда как расстояния определяются более медленными способами, к числу которых относится и линейка. Поэтому, когда в специальных экспериментах на первый план выходят действительно высокоскоростные сигналы, геометрия пространства считается уже заведомо заданной, поэтому даже аномальные результаты будут, скорее всего, трактоваться как угодно, но только не в направлении пересмотра "очевидных" геометрических свойств.

7. Заключение

Из всех перечисленных выше свойств и особенностей трехмерного времени, как представителя весьма необычного класса (линейных) финслеровых пространств, пожалуй, важнейшее – связь с наиболее фундаментальным понятием математики – числом, причем числом, оказывающимся объектом алгебры, обладающей самыми обычными арифметическими свойствами. Следует еще раз подчеркнуть, что ни евклидовы, ни псевдоевклидовы пространства размерности три и выше не обладают аналогичным качеством. Используемые же иногда в подобных целях кватернионы и бикватернионы настоящими числами не являются, так как их алгебры наделены некоммутативным умножением. В результате этого, построение полноценной теории, обобщающей теорию функций комплексной переменной, невозможно (или весьма затруднительно). В то же время, приведенные выше примеры иллюстрируют, каким образом обычные евклидовы и псевдоевклидовы представления могут вытекать из рассматриваемого финслерова пространства, что делает идею замены псевдоевклидовой метрики на многовременную – достаточно интересной и актуальной.

Литература

- [1] J. L. Synge, The New Scientist, 19th February 1959, p. 410.
- [2] W. R. Hamilton, Trans. Roy. Irish. Acad., 1833-1835.
- [3] G. S. Asanov: *Finslerian Extension of General Relativity*, Reidel, Dordrecht 1984.
- [4] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, arXiv:gr-qc/0206004.

ФИНСЛЕРОИД – ПРОСТРАНСТВО, СНАБЖЕННОЕ УГЛОМ И СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Г. С. Асанов

*Кафедра Теоретической Физики, Московский Государственный Университет
asanov@newmail.ru*

Наука прошедшего столетия "сняла" тот ближайший успех, который возможно было достигнуть на основе геометрически-квадратичных представлений, как логически и математически простейших. Более глубокие истины требуют использования более емких геометрий, таких как финслерова. Она вносит структурность в геометрию, поскольку индикатриса уже не изотропна по всем направлениям. Возникающие при финслеровом обобщении трудности с обобщением геометрических понятий решаются в настоящей работе путем рассмотрения Финслероид-геометрии. Такая геометрия вводит одно выделенное направление, предполагая полную аксиальную симметричность вокруг него. При этом, открываются конструктивные пути введения угла и скалярного произведения вне рамок евклидовой геометрии.

"Евклидовы традиции слишком сильны, чтобы от них можно было бы легко отрешиться, и понадобится, быть может, работа нескольких поколений математиков, чтобы освободиться от их гнета." (Буземан [2], с. 8.)

Введение

Квадратичный метод наиболее прост для введения длины вектора. Согласно этому методу, длина определяется квадратным корнем из квадратичной формы. Основанные на нем евклидова геометрия и евклидовы вращения служили более 20 столетий для математических построений, обработки и предсказаний результатов экспериментов. Неквадратичные методы развиваются финслеровой геометрией (см. [1–6]).

К сожалению приходится констатировать, что изучению соответствующих возможностей в литературе не было уделено достаточного внимания. Традиционно идеи и уравнения математики и теоретической физики основываются на методе введения длины векторов с помощью квадратичного корня. И даже многочисленные интересные и глубокие критические исследования (см., например, монографии [7, 8]) геометрической структуры самого пространства-времени и возможностей ее переосмысления и обобщения как правило обходились без упоминаний существования идей и методов финслеровой геометрии. Несмотря на чувство высокой степени адекватности и точности совпадения, неясно, как можно было бы выразить эту степень точности в числах, – ведь евклидовы вращения не содержат малого параметра для оценок.

По сравнению с обычной евклидовой метрикой финслерова метрика вносит *структурность* в геометрию. Единичная поверхность евклидовой геометрии, сфера, изотропна по всем направлениям. Введение геометрически выделенных направлений приводит к обобщению сферы, а вслед за этим и к обобщению евклидовой геометрии. Соответствующая, более не изотропная, поверхность концов единичных

векторов (выходящих из фиксированной точки) порождает финслерову метрику. Обратно, подобные геометрии могут отражать те конкретные физические ситуации, в которых присутствует соответствующая анизотропия по направлениям. Метрика Бервальда-Моора максимально анизотропна, – в том смысле, что она предполагает наличие геометрически-выделенных направлений, по числу равных размерности пространства (соответственно трех в трехмерном случае и четырех в четырехмерном случае). Финслероид-геометрия вводит ровно одно выделенное направление, предполагая полную аксиальную симметричность вокруг него.

Априори вопрос о том, как обобщать евклидову метрическую функцию на финслеров случай, выглядит чрезмерно общим и весьма неясным для нахождения конкретного ответа. Если же однако подойти к проблеме с точки зрения инвариантности и возможности ввести угол и скалярное произведение, то открываются конструктивные пути выделения классов финслеровых пространств. В результате возникают методы выхода за рамки евклидовой геометрии.

Конечно, как бы ни было глубоко мотивировано стремление выйти за узкие границы "квадратичных представлений", речь не может идти о "полном преодолении квадратного корня". Иерархия геометрий глубоко коренится в обобщениях. Очевидно, что в Римановой геометрии присутствуют и работают идеи и методы Евклидовой геометрии. В работах по Финслеровой геометрии многие авторы использовали "ассоциируемую риманову геометрию", вводили "риманову связность" или "финслер-риманову связность", вводили "ассоциируемую относительную риманову геометрию вдоль векторных полей", строили "соприкасающееся риманово пространство" и "риманову развертку финслерова пространства вдоль кривой", и т. п. Одновременно в Пространствах Минковского постоянно использовали ассоциируемую Евклидову геометрию.

Можно сказать, что строение любой теории, выходящей за рамки представлений, диктуемых квадратичной формой, будет иметь пирамидальный характер: спускаясь с вершины "уникальной сверхгеометрии", исследователь должен будет входить в область "ассоциируемой Финслеровой геометрии", в которой в свою очередь будут возникать разнообразные римановы образы, а затем и многочисленные евклидовы картины.

Сказанное прямо относится к Квадрачисловой геометрии (развиваемой в работах Павлова [9, 10]). Действительно, она возникает из рассмотрения коммутативных гиперчисел и приписывает им Норму. Но при интерпретации компонент гиперчисел как компонент вектора эта метрика может быть отнесена к классу "Финслерова метрическая Функция Бервальда-Моора". На последнем пути можно (и нужно) развить теорию геометрических соотношений, – в том числе ввести геодезические, угол, перпендикулярность,... – которые разумеется не совпадают с аналогичными геометрическими соотношениями римановой или евклидовой геометрии. От последней невозможно полностью отказаться уже хотя бы по причинам использования графических изображений и рисунков – их приходится в конце концов строить в Евклидовом Пространстве!

В то же время, это не означает единственного и неизбежно-однозначного приписывания финслеровых геометрических свойств Квадрапространству. В самом деле, по его собственным представлениям, используя полиформу, могут быть введены соответствующие углы и перпендикулярность, – такое обобщенное развитие теории "более высокого уровня метричности" было проведено в работах [9, 10].

Геометрия Минковского содержит гораздо больше инвариантов, чем Евклидова геометрия, а Финслерова геометрия – чем Риманова геометрия. В таком контексте следует указать, что Квадрапространства имеют гораздо больше инвариантных объ-

ектов, чем Финслерова геометрии и геометрия Минковского, и могут предложить более богатую геометрическими представлениями теорию. В частности это богатство можно видеть в том, что Евклидова геометрия может легко ассоциироваться с Квадрапространством многими способами.

Философия и логика ассоциируемых проблем. Сыгранная в Истории роль труда Евклида едва ли может быть переоценена. Евклидова Квадратичная геометрия формировала и продолжает формировать образ мыслей и характер анализа исследователей и ученых. Например, риманова геометрия с самого исходного определения основывается на квадратичной форме (и даже иногда просто называлась "геометрией, порождаемой квадратичной формой"), теории расслоенных пространств также используют квадратичный метод (но разнообразнее, чем риманова геометрия), лагранжианы в теориях физических полей как правило квадратичны по производным, энергия и импульс релятивистской частицы связаны квадратичной формой, и т. д. Специальная и общая теория относительности основываются так же преданно на квадратичной форме, но теперь уже содержащей как плюсы $+$, так и минус $-$; к этому типу относится и геометрия Лобачевского.

В современной научной литературе геометрической ориентации разнообразно, и часто с определенным оттенком многозначительности, вводятся и изучаются различные "модели" обобщенных геометрий. В полном контрасте с этим в труде Евклида построена геометрия, а не "модель геометрии".

Почему евклидова геометрия устойчиво прошла через два тысячелетия? Ее "корнем" фактически является метод определения длины отрезков или векторов с помощью квадратного корня из квадратичной формы. Этот метод практически всюду – и в практике, и в математических и физических теориях, и в экспериментах, – используется он и в настоящее время. Это – логически простейший метод. Но "самый простой" не всегда может оказываться и "самым точным".

"Аксиоматики" на протяжении прошедшего столетия подробно анализировали структуру самой евклидовой геометрии (знаменитая работа Гильберта "Основания геометрии"), а не путей конструктивного обобщения "квадратичности" евклидовой метрики.

Нетрудно поставить под большое сомнение любое утверждение, настаивающее на "высокой экспериментальной верности" квадратичного метода задания длины. Кто, когда и с какой точностью проверил Теорему Пифагора? Такая проверка вообще едва ли возможна без того, чтобы исследователь использовал для сравнений более общие методы (подробные дискуссии на такую тему выходят за пределы настоящей работы, – читатели могут попытаться провести собственный анализ проблемы).

Фактически "евклидовость" моделей геометрии, или геометрий, сохраняется, пока сохраняется "квадратичность" определения длины. Но чтобы можно было бы сделать соответствующий решительный шаг, нужно больше, чем только смелость. Это трудная задача: чтобы выйти за пределы "евклидовости", нужно найти хороший способ заменить квадратичный метод определения длины на более общий и подробно пересмотреть современные уравнения математической физики на основе нового метода. Но это – и достойная задача для Ученых Нового Тысячелетия. Консерватизм мышления как тормоз соответствующему геометрическому прогрессу может быть эффективен только на весьма коротком промежутке времени.

Наука прошедшего столетия "сняла" тот ближайший успех, который возможно было достигнуть на основе геометрически-квадратичных представлений, как логически и математически простейших. Более глубокие истины потребуют использования более емких геометрий.

"Длина" – основополагающее понятие как теоретической, так и прикладной науки. По фундаментальности с ним можно соотнести понятие Числа. Развитие и различные приложения понятия Длины привели к созданию Геометрии, а понятия Числа – к созданию Алгебры.

Достаточно общий и современный соответствующий подход можно формулировать в контексте теории так называемого Пространства Минковского (говорят также о геометрии Минковского). На строгом современном математическом языке пространство Минковского часто определяется как Конечно-Мерное Банахово Пространство.

В Пространствах Минковского длина вводится общим определением, позволяющим ей быть заданной функциями весьма широкого класса с минимальными условиями гладкости. Расслоенные многообразия, в которых слоями являются Пространства Минковского, называют финслеровыми пространствами.

Геометрия Минковского и Финслерова геометрия изучались на протяжении прошедшего столетия многими авторами, было опубликовано по теме более 2000 статей и ряд монографий, но о достигнутом при этом успехе можно говорить лишь с большой осторожностью и условностью. В Финслеровой геометрии неизбежно появляется большое число тензоров (не имеющих нетривиальных прототипов в Римановой геометрии), и не очевидно, что подобный "количественный рост" предопределяет "качественный прогресс". Последним обстоятельством Финслерова геометрия отталкивала (и отталкивает) многих математиков, вызывая у них образ "непроходимого леса из тензоров" [в сравнение с этим Риманова геометрия весьма экономна: в ней есть метрический тензор и строящиеся по нему вполне определенным способом один набор коэффициентов связности и один тензор кривизны].

Однако нельзя слишком гипертрофировать чувство пессимизма от громоздкости формализма. Особенно в наше бурное время, когда многокомпонентностью объектов не многих можно удивить ни собственно в математике, и тем более ни в теоретической физике. Скорее реальные проблемы лежат в другой плоскости, а именно в отсутствии достаточно подходящих точных ключевых звеньев. В этом контексте уместно вспомнить замечание Буземана, что прогресс в движении "beyond Riemannian Geometry" должен состоять "не в обобщении методов Римановой геометрии, а в обобщении ее результатов".

Не должно ли развитие понятия "Длина" идти в тесной связи с развитием понятия "Число"?

Если обратиться к предыстории геометрии Евклида, – к деятельности Пифагора, – то хорошо известна от историков Трагедия Пифагора, возникающая у него, когда он обнаружил, что диагональ квадрата не соизмерима (рационально) с длинами сторон квадрата. То есть для Пифагора выглядело "катастрофой", что есть длина, которой не соответствует число. Этот "сюрприз" дал толчок, как известно, развитию понятия числа, а именно к созданию теории иррациональных чисел. Сложившееся при этом "соответствие" Длины и Числа составило основу геометрии Евклида, и тем более в ее аксиоматике (например, предложенной Гильбертом). В этом отношении развитая Гильбертом аксиоматика Евклидовой геометрии была как бы кульминацией тождества понятия арифметического числа и квадратичной длины, – многие ключевые геометрические понятия выводились из арифметических числовых свойств.

Последующий переход от Евклидовой геометрии к Римановой геометрии уже не вносит в эту дихотомию новых идей. Риманова геометрия – "просто расслоение Евклидовых геометрий", – так что в каждом слое действует обычная Евклидова геометрия и применяется обычное квадратичное определение длины.

Геометрия Минковского выходит за квадратичность определения длины, но (хотя, как известно, геометрические идеи появились у Минковского при изучении теории чисел) проводит развитие вопроса без какой-либо связки с развитием понятия числа. Нить Катастрофы Пифагора разорвалась! Это же можно сказать и про современные финслеровы пространства, – которые есть "просто расслоения с пространствами Минковского в слоях".

Такой экскурс в Историю помогает проявить достаточную смелость и выдвинуть следующую идею: *строить Финслерову геометрию в тесной связи с развитием понятия числа.*

Можно надеяться, что такая идея станет ключевой для успеха развития финслеровой геометрии в настоящем столетии. Спрашивается, где, на каком месте финслерова обобщения длины необходимо обобщение Понятия Числа? Ответ тут вообще говоря не очевиден, хотя очевиден обратный ход мыслей: мерой обобщенного числа должна быть (не евклидова, неквадратичная) финслерова метрическая функция.

Возникает острый для осознания вопрос: где в Финслеровой геометрии нужны Поличисла, так что без них нельзя обойтись? В Пифагоровой Трагедии ситуация ясна: для измерения длины диагонали единичного квадрата недостаточно рациональных чисел. Корни происхождения трансцендентных чисел также ясны: диаметр единичной окружности не измерим алгебраическим иррациональным числом.

Анизотропность предполагается при обобщении Евклидовой геометрии. В этой связи центральным понятием является индикатриса: поверхность концов векторов единичной длины, выходящих из фиксированной точки. В Евклидовой геометрии индикатрисой является сфера. Она символизирует изотропность пространства, одинаковость его свойств по всем направлениям. Поскольку в определении Пространства Минковского и Пространства Финслера входит условие однородности, анизотропность индикатрисы проявляет себя и в анизотропности любых векторов (не обязательно единичной длины). Переход от Евклидовой геометрии к геометрии Минковского символизирует отказ от полной изотропности пространства и после перехода соответствующая индикатриса больше не может быть поверхностью второго порядка.

С точки зрения анизотропности Метрика Бервальда-Моора характеризуется наличием выделенных направлений, по числу равных размерности пространства.

Содержание статьи. В настоящей работе введены необходимые исходные определения и приведены результаты вычислений ассоциируемых величин для Финслероид-геометрии ($\mathcal{E}_g^{PD}$ -геометрии), предполагающей наличие ровно одного выделенного направления. Наше предыдущее исследование [5, 6] показало, что область многообещающая. А именно, $\mathcal{E}_g^{PD}$ -подход применим к развитию новых направлений в метрической дифференциальной геометрии и может в частности быть эффективен в контексте геометрий Финслера или Минковского. Главным пунктом статьи является наблюдение, что ассоциируемая с $\mathcal{E}_g^{PD}$ -пространством одна-векторная финслерова метрическая функция весьма естественным образом допускает привлекательное дву-векторное обобщение, тем самым порождая угол и скалярное произведение.

Известные различные попытки ввести угол в пространство Минковского или Финслера постоянно сталкивались с двусмысленностями:

"Следовательно, никакая конкретная угловая мера не может быть вполне естественной в геометрии Минковского. Об этом свидетельствуют несчастливые попытки определить такую меру, ни одна из которых не получила общего признания". (Буземан [2], с. 279.)

"К сожалению, существует целый ряд различных инвариантов в пространстве Минковского, все из которых сводятся к одному и тому же евклидову инварианту,

если пространство Минковского вырождается в евклидово пространство. Вследствие этого различные определения появлялись в литературе, посвященной пространствам Минковского и Финслера". (Рунд [3], с. 26)

Тот факт, что попытки не привели к однозначному успеху, видимо был следствием недостаточности используемых методов. Действительно, принималось на веру мнение, что угол должен быть определен или построен в терминах основного финслерова метрического тензора (и следовательно должен быть выводимым из исходной финслеровой метрической функции). Позволим себе поставить под сомнение такую установку с самого начала! Вместо этого мы выдвинем альтернативно принцип, что угол является конкомитантом (**пояснение**) геодезических (а не собственно метрики). Угол определяется двумя векторами (вместо одного вектора в случае длины) и в действительности предполагает использование соответствующего обобщения финслеровой метрической функции на дву-векторную метрическую функцию (на скалярное произведение). Ниже мы применим такой наш принцип к изучению $\mathcal{E}_g^{PD}$ -пространства. Визуально сущность развиваемого обобщения можно видеть в деформации евклидовой сферы, – индикатрисы евклидова пространства.

Соответственно в Разделе 1 мы прежде всего занимаемся уравнением геодезических. Замечательно, уравнение допускает простое и явное общее решение. После этого выводится угол между двумя векторами. Обычно ожидают, что угловая мера должна быть аддитивной (для углов с общей вершиной). Замечательно, найденный угол только постоянным множителем отличается от евклидова угла в квазиевклидовом пространстве и вследствие этого аддитивен. Теорема косинусов остается верной при замене евклидова угла найденным ниже углом. Получено соответствующее скалярное произведение.

Формально в основе евклидовых представлений лежит использование метода введения длины векторов с помощью квадратного корня от квадратичной формы. В настоящей работе мы используем конкретное, аксиально-симметричное, обобщение такого метода, опираясь на конструктивные идеи финслеровой геометрии. Вводится соответствующая финслерова метрическая функция и подробно описываются ее основные свойства и следствия. Обобщение характеризуется одним безразмерным параметром, который ниже обозначается как g .

Ниже Раздел 2 вводит обозначения, определения и начальные понятия для пространства $\mathcal{E}_g^{PD}$. Оно строится в предположении, что пространство включает одно выделенное направление, которое мы часто будем условно называть Z -осью. Сокращения ФМФ и ФМТ будут использоваться для финслеровой метрической функции и финслерова метрического тензора соответственно. Характеристический параметр g может принимать значения между -2 и 2 ; при $g = 0$ пространство $\mathcal{E}_g^{PD}$ сводится к обычному евклидову пространству. После предварительного введения характеристической квадратичной формы B , которая отличается от евклидовой суммы квадратов присутствием в ней перекрестного члена (см. (2.22)), мы определяем ФМФ K для пространства $\mathcal{E}_g^{PD}$ с помощью формул (2.30) – (2.33). Характерной чертой формул является присутствие функции “arctan”. Затем мы вычисляем тензорные величины пространства. Появляется замечательное явление, упрощающее все построения: ассоциируемый картановский тензор оказывается имеющим простую алгебраическую структуру (см. формулы (2.66) – (2.67)). В частности это (уникальное) явление ведет к выводу, что индикатриса (обобщение сферы) пространства $\mathcal{E}_g^{PD}$ является пространством постоянной положительной кривизны. Значение кривизны зависит от параметра g согласно закону (2.73).

Раздел 3 вводит идею квазиевклидова отображения $\mathcal{E}_g^{PD}$ -пространства. Идея оказывается весьма плодотворной тем, что квазиевклидово пространство просто во

многих аспектах, так что соответствующее преобразование упрощает различные вычисления. Оно не является плоским, но является конформно плоским. Последний Раздел 4 раскрывает интересные свойства квазиевклидова метрического тензора. В Приложении помещены рисунки, которые иллюстрируют вид финслероидов при различных значениях параметра g .

1. Вывод геодезических и угла в ассоциируемом квазиевклидовом пространстве

Для изучаемого финслерова пространства геодезические могут быть получены как решения уравнения

$$\frac{d^2 R^p}{ds^2} + C_q^p{}^r(g; R) \frac{dR^q}{ds} \frac{dR^r}{ds} = 0, \quad (1.1)$$

коэффициенты которого $C_p^q{}^r$ задаются списком, помещенным в конце Раздела 2. Чтобы избежать сложностей вычислений, оказывается удобно перенести рассмотрение в квазиевклидов подход (см. Разделы 3 и 4). Соответственно мы положим

$$\sqrt{g_{pq}(g; R) dR^p dR^q} = \sqrt{n_{pq}(g; t) dt^p dt^q} \quad (1.2)$$

и

$$R^p(s) = \mu^p(g; t^r(s)) \quad (1.3)$$

вместе с

$$\frac{dR^p(s)}{ds} = \mu_q^p(g; t^r(s)) \frac{dt^q(s)}{ds}, \quad (1.4)$$

где $\mu^p(g; t^r)$ и $\mu_q^p(g; t^r)$ – коэффициенты, заданные соответственно формулами (3.14) и (3.38)–(3.40). Пусть задана кривая C : $t^p = t^p(s)$ в квазиевклидовом пространстве, где параметр длины s вдоль кривой определяется дифференциалом

$$ds = \sqrt{n_{pq}(g; t) dt^p dt^q}, \quad (1.5)$$

где $n_{pq}(g; t)$ – ассоциируемый квазиевклидов метрический тензор, задаваемый формулой (3.49). Соответственно с этим, касательные векторы

$$u^p = \frac{dt^p}{ds} \quad (1.6)$$

к кривой являются единичными в смысле, что

$$n_{pq}(g; t) u^p u^q = 1. \quad (1.7)$$

Поскольку $L_p = \partial S / \partial t^p$, мы имеем

$$L_p u^p = \frac{dS}{ds}. \quad (1.8)$$

Здесь $S^2(t) = n_{pq}(g; t) t^p t^q = r_{pq} t^p t^q$ (см. (3.46)). Использование (4.16) ведет с помощью хорошо-известных аргументов к следующему уравнению геодезических в квазиевклидовом пространстве:

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} G^2 \frac{\mathbf{t}}{S^2} H_{pq} u^p u^q, \quad (1.9)$$

где $H_{pq} = h^2(n_{pq} - L_p L_q)$ (см. (4.4)) и $\mathbf{t} = \{t^p\}$. Мы получаем

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} g^2 \frac{\mathbf{t}}{S^2} \left(1 - \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 \right) = \frac{1}{4} g^2 (a^2 - b^2) \frac{\mathbf{t}}{S^4} \quad (1.10)$$

и

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} g^2 (a^2 - b^2) \frac{\mathbf{t}}{S^4} \quad (1.11)$$

с

$$S^2(s) = a^2 + 2bs + s^2, \quad (1.12)$$

где a и b – две константы интегрирования.

Если мы положим

$$S(\Delta s) = \sqrt{a^2 + 2b\Delta s + (\Delta s)^2} \quad (1.13)$$

и

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}(0), \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}(\Delta s), \quad (1.14)$$

то получим

$$a = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \quad (1.15)$$

и

$$S(\Delta s) = \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \quad (1.16)$$

вместе с

$$(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) = a S(\Delta s) \cos \left[h \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]. \quad (1.17)$$

Здесь $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ – два вектора с фиксированным началом O ; они указывают точку соответственно в начале геодезической и в конце геодезической. Пара круглых скобок $(\cdot)$ используется для евклидова скалярного произведения, так что $(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) = r_{pq} t_1^p t_1^q$, $(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) = r_{pq} t_1^p t_2^q$, и r_{pq} – евклидов метрический тензор; $r_{pq} = \delta_{pq}$ в случае ортогонального базиса; δ используется для символов Кронекера. Из (1.15)-(1.17) прямо следует, что

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} = \tan \left[\frac{1}{h} \arccos \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \right]. \quad (1.18)$$

Равенство (1.18) подсказывает целесообразность ввести

Определение. $\mathcal{E}_g^{PD}$ -ассоциируемый угол задается согласно

$$\alpha := \frac{1}{h} \arccos \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}, \quad (1.19)$$

так что

$$\alpha = \frac{1}{h} \alpha_{Euclidean}. \quad (1.20)$$

Такой угол очевидно *аддитивен*:

$$\alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) = \alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) + \alpha(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3). \quad (1.21)$$

Кроме того, он равен нулю при равных векторах:

$$\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0. \quad (1.22)$$

Используя такой угол, мы предложим

Определение. При заданных двух векторах $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ векторы $\mathcal{E}_g^{PD}$ -перпендикулярны, если

$$\cos(\alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)) = 0. \quad (1.23)$$

Поскольку обращение в нуль (1.23) влечет за собой

$$\alpha_{quasi-Euclidean}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \frac{\pi}{2}, \quad (1.24)$$

ввиду (1.20) следует сделать вывод, что

$$\alpha_{Euclidean}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \frac{\pi}{2}h \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.25)$$

Следовательно векторы, перпендикулярные в собственно квазиевклидовом смысле, выглядят острыми с ассоциируемой евклидовой точки зрения.

Принимая во внимание равенство

$$(\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s)^2 + (a^2 + b\Delta s)^2 \equiv a^2 S^2(\Delta s), \quad (1.26)$$

мы также устанавливаем соотношения

$$\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s = aS(\Delta s) \sin \alpha \quad (1.27)$$

и

$$a^2 + b\Delta s = aS(\Delta s) \cos \alpha. \quad (1.28)$$

Они влекут за собой равенство

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{S(\Delta s) \cos \alpha - a}{S(\Delta s) \sin \alpha}, \quad (1.29)$$

из которого может быть найдена величина b .

Итак, каждый член вовлеченного набора $\{a, b, \Delta s, S(\Delta s)\}$ может быть явно выражен через исходные векторы $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$. Для многих случаев целесообразно переписать равенство (1.26) в виде

$$S^2(\Delta s) = (\Delta s)^2 - a^2 + 2(a^2 + b\Delta s). \quad (1.30)$$

Таким образом мы пришли к следующим последовательным пунктам:

$\mathcal{E}_g^{PD}$ -Теорема Косинусов

$$(\Delta s)^2 = S^2(\Delta s) + a^2 - 2aS(\Delta s) \cos \alpha; \quad (1.31)$$

$\mathcal{E}_g^{PD}$ -Двух-Точечная Длина

$$(\Delta s)^2 = (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) + (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) - 2\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha; \quad (1.32)$$

$\mathcal{E}_g^{PD}$ -Скалярное Произведение

$$\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha; \quad (1.33)$$

$\mathcal{E}_g^{PD}$ -Перпендикулярность

$$\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}. \quad (1.34)$$

Отождествление

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2 = (\Delta s)^2 \quad (1.35)$$

дает другое яркое представление

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2 = (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) + (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) - 2\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha. \quad (1.36)$$

Рассмотрение можно завершить следующим образом.

Теорема. *Общее решение уравнения геодезических (1.11) может быть найдено в явном виде*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) = & \frac{S(s)}{a} \frac{\sin \left[h \arctan \frac{fr\sqrt{a^2 - b^2}(\Delta s - s)a^2 + b\Delta s + (b + \Delta s)s}{a^2 + b\Delta s} \right]}{\sin \left[h \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]} \mathbf{t}_1 \\ & + \frac{S(s)}{S(\Delta s)} \frac{\sin \left[h \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2} s}{a^2 + bs} \right]}{\sin \left[h \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]} \mathbf{t}_2. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Собственно евклидов предел есть

$$\mathbf{t}(s) \Big|_{g=0} = \frac{(\Delta s - s)\mathbf{t}_1 + s\mathbf{t}_2}{\Delta s} = \mathbf{t}_1 + (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) \frac{s}{\Delta s},$$

так что геодезические становятся прямыми. Из (1.37) вытекает равенство

$$(\mathbf{t}(s)\mathbf{t}(s)) = S^2(s) \quad (1.38)$$

в согласии с (1.12). Поскольку общее решение (1.37) таково, что правая часть растягивается двумя векторами, $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$, мы вправе заключить, что *изучаемые геодезические являются плоскими кривыми.*

2. Финслероид-пространство $\mathcal{E}_g^{PD}$ положительно-определенного типа

Предположим, что задано N -мерное векторное пространство V_N . Обозначим через R векторы, составляющие пространство, так что $R \in V_N$. Любой заданный вектор R назначает определенное направление в V_N . Фиксируем элемент $R_{(N)} \in V_N$, введем прямую линию e_N , ориентированную вдоль вектора $R_{(N)}$, и используем e_N как R^N -координатную ось в V_N . Таким способом мы получим топологическое произведение

$$V_N = V_{N-1} \times e_N \quad (2.1)$$

вместе с разбиением

$$R = \{\mathbf{R}, R^N\}, \quad R^N \in e_N \quad \text{и} \quad \mathbf{R} \in V_{N-1}. \quad (2.2)$$

Для удобства мы часто будем использовать обозначение

$$R^N = Z, \quad (2.3)$$

а также

$$R = \{\mathbf{R}, Z\}. \quad (2.4)$$

Кроме того, мы введем евклидову метрику

$$q = q(\mathbf{R}) \quad (2.5)$$

на $(N - 1)$ -мерном векторном пространстве V_{N-1} .

Относительно допустимого координатного базиса $\{e_a\}$ в V_{N-1} мы получим координатные представления

$$\mathbf{R} = \{R^a\} = \{R^1, \dots, R^{N-1}\} \quad (2.6)$$

и

$$R = \{R^p\} = \{R^a, R^N\} \equiv \{R^a, Z\}, \quad (2.7)$$

а также

$$q(\mathbf{R}) = \sqrt{r_{ab}R^aR^b}, \quad (2.8)$$

где r_{ab} – компоненты симметричного положительно-определенного тензора на V_{N-1} . Индексы $(a, b, \dots)$ и $(p, q, \dots)$ будут принимать значения из наборов $(1, \dots, N - 1)$ и $(1, \dots, N)$ соответственно; векторные индексы являются верхними, а ко-векторные индексы являются нижними; по повторяющимся верхним и нижним индексам автоматически производится суммирование; обозначение δ_b^a будет использоваться для символа Кронекера. Переменные

$$w^a = R^a/Z, \quad w_a = r_{ab}w^b, \quad w = q/Z, \quad (2.9)$$

где

$$w \in (-\infty, \infty), \quad (2.10)$$

удобны в вычислениях, когда $Z \neq 0$. Иногда мы будем использовать ассоциируемый метрический тензор

$$r_{pq} = \{r_{NN} = 1, r_{Na} = 0, r_{ab}\}, \quad (2.11)$$

определенный на всем векторном пространстве V_N .

Задав параметр g при условии выполнения неравенства

$$-2 < g < 2, \quad (2.12)$$

мы введем удобные обозначения

$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}g^2}, \quad (2.13)$$

$$G = g/h, \quad (2.14)$$

$$g_+ = \frac{1}{2}g + h, \quad g_- = \frac{1}{2}g - h, \quad (2.15)$$

$$g^+ = -\frac{1}{2}g + h, \quad g^- = -\frac{1}{2}g - h, \quad (2.16)$$

так что

$$g_+ + g_- = g, \quad g_+ - g_- = 2h, \quad (2.17)$$

$$g^+ + g^- = -g, \quad g^+ - g^- = 2h, \quad (2.18)$$

$$(g_+)^2 + (g_-)^2 = 2, \quad (2.19)$$

$$(g^+)^2 + (g^-)^2 = 2. \quad (2.20)$$

Справедлива симметрия

$$g_+ \xrightarrow{g \rightarrow -g} -g_-, \quad g^+ \xrightarrow{g \rightarrow -g} -g^-. \quad (2.21)$$

Характеристическая квадратичная форма

$$B(g; R) = Z^2 + gqZ + q^2 \equiv \frac{1}{2} \left[(Z + g_+q)^2 + (Z + g_-q)^2 \right] > 0 \quad (2.22)$$

имеет отрицательный дискриминант, а именно

$$D_{\{B\}} = -4h^2 < 0, \quad (2.23)$$

как следствие формул (2.12) и (2.13). При $Z \neq 0$ удобно так же использовать квадратичную форму

$$Q(g; w) := B/(Z)^2, \quad (2.24)$$

получая

$$Q(g; w) = 1 + gw + w^2 > 0, \quad (2.25)$$

вместе с функцией

$$E(g; w) := 1 + \frac{1}{2}gw. \quad (2.26)$$

Легко проверить

$$E^2 + h^2w^2 = Q \quad (2.27)$$

тождество. В пределе $g \rightarrow 0$ определение (2.22) вырождается в квадратичную форму начального метрического тензора (2.11):

$$B|_{g=0} = r_{pq}R^pR^q. \quad (2.28)$$

Кроме того, справедливо предельное равенство

$$Q|_{g=0} = 1 + w^2. \quad (2.29)$$

С помощью таких обозначений мы вводим ФМФ

$$K(g; R) = \sqrt{B(g; R)} J(g; R), \quad (2.30)$$

где

$$J(g; R) = e^{\frac{1}{2}G\Phi(g; R)}, \quad (2.31)$$

$$\Phi(g; R) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{q}{hZ} + \frac{G}{2} \right), \quad \text{если } Z \geq 0, \quad (2.32)$$

$$\Phi(g; R) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{q}{hZ} + \frac{G}{2} \right), \quad \text{если } Z \leq 0, \quad (2.33)$$

или в других удобных видах,

$$\Phi(g; R) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{L(g; R)}{hZ} \right), \quad \text{если } Z \geq 0, \quad (2.34)$$

$$\Phi(g; R) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{L(g; R)}{hZ} \right), \quad \text{если } Z \leq 0, \quad (2.35)$$

где

$$L(g; R) = q + \frac{g}{2}Z, \quad (2.36)$$

и

$$\Phi(g; R) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{hq}{A(g; R)}, \quad \text{если } Z \geq 0, \quad (2.37)$$

$$\Phi(g; R) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{hq}{A(g; R)}, \quad \text{если } Z \leq 0, \quad (2.38)$$

где

$$A(g; R) = Z + \frac{1}{2}gq. \quad (2.39)$$

Эта ФМФ нормирована так, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.40)$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } q = 0 \text{ и } Z > 0; \quad \Phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } q = 0 \text{ и } Z < 0. \quad (2.41)$$

Мы также имеем

$$\operatorname{ctg} \Phi = \frac{hq}{A}, \quad \Phi|_{Z=0} = \operatorname{arctg} \frac{G}{2}. \quad (2.42)$$

Часто удобно использовать индикатор знака ϵ_Z для аргумента Z :

$$\epsilon_Z = 1, \quad \text{если } Z > 0; \quad \epsilon_Z = -1, \quad \text{если } Z < 0; \quad (2.43)$$

При этих условиях мы вводим $\mathcal{E}_g^{PD}$ -пространство:

$$\mathcal{E}_g^{PD} = \{V_N = V_{N-1} \times e_N; R \in V_N; K(g; R); g\}. \quad (2.44)$$

Правая часть определения (2.30) может рассматриваться как функция $\check{K}$ от аргументов $\{g; q, Z\}$, так что

$$\check{K}(g; q, Z) = K(g; R). \quad (2.45)$$

Мы видим, что

$$\check{K}(g; q, -Z) \neq \check{K}(g; q, Z), \quad (2.46)$$

если только значение параметра не равно тривиальному $g = 0$. Вместо этого, функция $\check{K}$ показывает свойство gZ -четности

$$\check{K}(-g; q, -Z) = \check{K}(g; q, Z). \quad (2.47)$$

Справедлива инвариантность относительно отражения $(N-1)$ -пространства

$$K(g; R) \overset{R^a \leftrightarrow -R^a}{\rightleftharpoons} K(g; R). \quad (2.48)$$

Часто бывает удобно переписать представление (2.30) в виде

$$K(g; R) = |Z|V(g; w) \quad (2.49)$$

(при $Z \neq 0$) с генерирующей метрической функцией

$$V(g; w) = \sqrt{Q(g; w)} j(g; w). \quad (2.50)$$

Мы имеем

$$j(g; w) = J(g; 1, w).$$

Используя (2.25) и (2.31) – (2.35), получим

$$V' = wV/Q, \quad V'' = V/Q^2, \quad (2.51)$$

$$(V^2/Q)' = -gV^2/Q^2, \quad (V^2/Q^2)' = -2(g+w)V^2/Q^3, \quad (2.52)$$

$$j' = -\frac{1}{2}gj/Q, \quad (2.53)$$

а также

$$\frac{1}{2}(V^2)' = wV^2/Q, \quad \frac{1}{2}(V^2)'' = (Q - gw)V^2/Q^2, \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{4}(V^2)''' = -gV^2/Q^3 \quad (2.55)$$

вместе с равенствами

$$\Phi' = -h/Q, \quad (2.56)$$

где штрих (') означает дифференцирование по w .

Укажем дополнительно два полезных тождества

$$(A(g; R))^2 + h^2 q^2 = B(g; R) \quad (2.57a)$$

и

$$(L(g; R))^2 + h^2 Z^2 = B(g; R). \quad (2.57b)$$

Простые результаты для производных сводят задачу вычисления компонент ассоциируемого ФМТ к легкому упражнению, действительно:

$$R_p := \frac{1}{2} \frac{\partial K^2(g; R)}{\partial R^p} : \quad (2.58)$$

$$R_a = r_{ab} R^b \frac{K^2}{B}, \quad R_N = (Z + gq) \frac{K^2}{B}; \quad (2.59)$$

$$g_{pq}(g; R) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2(g; R)}{\partial R^p \partial R^q} = \frac{\partial R_p(g; R)}{\partial R^q} :$$

$$g_{NN}(g; R) = [(Z + gq)^2 + q^2] \frac{K^2}{B^2}, \quad g_{Na}(g; R) = gq r_{ab} R^b \frac{K^2}{B^2}, \quad (2.60)$$

$$g_{ab}(g; R) = \frac{K^2}{B} r_{ab} - g \frac{r_{ad} R^d r_{be} R^e Z}{q} \frac{K^2}{B^2}. \quad (2.61)$$

Компоненты обратного тензора равны

$$g^{NN}(g; R) = (Z^2 + q^2) \frac{1}{K^2}, \quad g^{Na}(g; R) = -gq R^a \frac{1}{K^2}, \quad (2.62)$$

$$g^{ab}(g; R) = \frac{B}{K^2} r^{ab} + g(Z + gq) \frac{R^a R^b}{q} \frac{1}{K^2}. \quad (2.63)$$

Детерминант ФМТ, задаваемого формулами (2.59) – (2.60), легко находится в виде

$$\det(g_{pq}(g; R)) = [J(g; R)]^{2N} \det(r_{ab}), \quad (2.64)$$

что показывает, если учесть (2.31) – (2.33), что

$$\det(g_{pq}) > 0 \quad \text{на всей области определения.} \quad (2.65)$$

Ассоциируемый угловой метрический тензор

$$h_{pq} := g_{pq} - R_p R_q \frac{1}{K^2}$$

может быть задан компонентами

$$h_{NN}(g; R) = q^2 \frac{K^2}{B^2}, \quad h_{Na}(g; R) = -Z r_{ab} R^b \frac{K^2}{B^2},$$

$$h_{ab}(g; R) = \frac{K^2}{B} r_{ab} - (gZ + q) \frac{r_{ad} R^d r_{be} R^e}{q} \frac{K^2}{B^2},$$

откуда следует

$$\det(h_{ab}) = \det(g_{pq}) \frac{1}{V^2}.$$

Использование компонент картановского тензора (которые приведены в явном виде в конце настоящего раздела) ведет после довольно трудоемких вычислений к простому и замечательному результату:

Теорема 1. *Картановский тензор, ассоциируемый с ФМФ (2.30), имеет следующий специальный алгебраический вид*

$$C_{pqr} = \frac{1}{N} \left(h_{pq} C_r + h_{pr} C_q + h_{qr} C_p - \frac{1}{C_s C^s} C_p C_q C_r \right) \quad (2.66)$$

со сверткой

$$C_t C^t = \frac{N^2}{4K^2} g^2. \quad (2.67)$$

С помощью (2.65) выяснение структуры тензора кривизны

$$S_{pqrs} := (C_{tqr} C_p^t{}^s - C_{tqs} C_p^t{}^r) \quad (2.68)$$

приводит к простому представлению

$$S_{pqrs} = -\frac{C_t C^t}{N^2} (h_{pr} h_{qs} - h_{ps} h_{qr}). \quad (2.69)$$

Вставляя сюда (2.66), мы приходим к выводу, что справедлива

Теорема 2. *Тензор кривизны пространства $\mathcal{E}_g^{PD}$ имеет специальный вид*

$$S_{pqrs} = S^* (h_{pr} h_{qs} - h_{ps} h_{qr}) / K^2 \quad (2.70)$$

со значением

$$S^* = -\frac{1}{4} g^2. \quad (2.71)$$

Определение. ФМФ (2.30) вводит $(N - 1)$ -мерную гиперповерхность индикатрисы согласно уравнению

$$K(g; R) = 1. \quad (2.72)$$

Мы назовем эту гиперповерхность *Финслероидом* $\{Finsleroid \text{ по-английски}\}$, используя для него обозначение $\mathcal{F}_g^{PD}$.

Вспоминая известную формулу $\mathcal{R} = 1 + S^*$ для кривизны индикатрисы (см. [4]), из (2.70) – (2.71) мы делаем вывод, что

$$\mathcal{R}_{Finsleroid} = h^2 = 1 - \frac{1}{4}g^2, \quad 0 < \mathcal{R}_{Finsleroid} \leq 1. \quad (2.73)$$

Геометрически тот факт, что величина (2.71) не зависит от векторов R означает, что кривизна индикатрисы является константой. Следовательно верна

Теорема 3. *Финслероид $\mathcal{F}_g^{PD}$ является пространством постоянной кривизны с положительным значением (2.73) для кривизны.*

Кроме того, сравнивая результат (2.73) и формулы (2.22) – (2.23), мы можем утверждать, что справедлива

Теорема 4. *Кривизна финслероида соответствует дискриминанту исходной характеристической квадратичной формы (2.22) просто согласно равенству*

$$\mathcal{R}_{Finsleroid} = -\frac{1}{4}D_{\{B\}}. \quad (2.74)$$

Полезно заметить, что

$$\mathcal{R}_{Finsleroid} \xrightarrow{g \rightarrow 0} \mathcal{R}_{Euclidean \text{ Sphere}} = 1,$$

где мы использовали (2.73) и (2.23).

В заключение раздела мы выпишем явно компоненты соответствующего картановского тензора

$$\begin{aligned} C_{pqr} &:= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial R^r} : \\ R^N C_{NNN} &= gw^3 V^2 Q^{-3}, \quad R^N C_{aNN} = -gww_a V^2 Q^{-3}, \\ R^N C_{abN} &= \frac{1}{2} gw V^2 Q^{-2} r_{ab} + \frac{1}{2} g(1 - gw - w^2) w_a w_b w^{-1} V^2 Q^{-3}, \\ R^N C_{abc} &= -\frac{1}{2} g V^2 Q^{-2} w^{-1} (r_{ab} w_c + r_{ac} w_b + r_{bc} w_a) + gw_a w_b w_c w^{-3} \left(\frac{1}{2} Q + gw + w^2 \right) V^2 Q^{-3}; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} R^N C_N{}^N{}_N &= gw^3/Q^2, \quad R^N C_a{}^N{}_N = -gww_a/Q^2, \\ R^N C_N{}^a{}_N &= -gw(1 + gw)w^a/Q^2, \\ R^N C_a{}^N{}_b &= \frac{1}{2} gwr_{ab}/Q + \frac{1}{2} g(1 - gw - w^2) w_a w_b/wQ^2, \\ R^N C_N{}^a{}_b &= \frac{1}{2} gw\delta_b^a/Q + \frac{1}{2} g(1 + gw - w^2) w^a w_b/wQ^2, \\ R^N C_a{}^b{}_c &= -\frac{1}{2} g (\delta_a^b w_c + \delta_c^b w_a + (1 + gw)r_{ac} w^b) /wQ + \frac{1}{2} g(gwQ + Q + 2w^2) w_a w^b w_c/w^3 Q^2. \end{aligned}$$

Компоненты вычислялись с помощью формул (2.50) – (2.53).

Использование свертки

$$R^N C_a{}^b{}_c r^{ac} = -g \frac{w^b}{w} \frac{1+gw}{Q} \left(\frac{N-2}{2} + \frac{1}{Q} \right)$$

и

$$R^N C_a{}^b{}_c w^a w^c = -g \frac{w}{Q^2} (1+gw) w^b$$

удобно во многих вычислениях. Справедливо также

$$\begin{aligned} R^N C_N &= \frac{N}{2} gw Q^{-1}, & R^N C_a &= -\frac{N}{2} g(w_a/w) Q^{-1}, \\ R^N C^N &= \frac{N}{2} gw/V^2, & R^N C^a &= -\frac{N}{2} gw^a(1+gw)/wV^2, \\ C^N &= \frac{N}{2} gw R^N K^{-2}, & C^a &= -\frac{N}{2} gw^a(1+gw)w^{-1} R^N K^{-2}, \\ C_p C^p &= \frac{N^2}{4K^2} g^2. \end{aligned}$$

3. Квазиевклидово отображение Финслероида

Теорема 8 может быть продолжена дальше путем указания диффеоморфизма

$$\mathcal{F}_g^{PD} \xrightarrow{i_g} \mathcal{S}^{PD} \quad (3.1)$$

Финслероида $\mathcal{F}_g^{PD} \subset V_N$ единичной сфере $\mathcal{S}^{PD} \subset V_N$:

$$\mathcal{S}^{PD} = \{R \in \mathcal{S}^{PD} : S(R) = 1\}, \quad (3.2)$$

где

$$S(R) = \sqrt{r_{pq} R^p R^q} \equiv \sqrt{(R^N)^2 + r_{ab} R^a R^b} \quad (3.3)$$

является начальной евклидовой метрической функцией (см. (2.11)).

Диффеоморфизм (3.1) всегда может быть расширен, чтобы получить диффеоморфное отображение

$$V_N \xrightarrow{\sigma_g} V_N \quad (3.4)$$

всего векторного пространства V_N с помощью однородности:

$$\sigma_g \cdot (bR) = b\sigma_g \cdot R, \quad b > 0. \quad (3.5)$$

С этой целью достаточно взять просто

$$\sigma_g \cdot R = \|R\|_{i_g} \cdot \left(\frac{R}{\|R\|} \right), \quad (3.6)$$

где

$$\|R\| = K(g; R). \quad (3.7)$$

Из (3.1) – (3.7) вытекает

$$K(g; R) = S(\sigma_g \cdot R). \quad (3.8)$$

Тождество (2.57) подсказывает взять отображение

$$\bar{R} = \sigma_g \cdot R \quad (3.9)$$

с помощью компонент

$$\bar{R}^p = \sigma^p(g; R) \quad (3.10)$$

с функциями

$$\sigma^a = R^a h J(g; R), \quad \sigma^N = A(g; R) J(g; R), \quad (3.11)$$

где $J(g; R)$ и $A(g; R)$ – функции (2.31) и (2.39). Действительно, вставляя (3.11) в (3.3) и принимая во внимание (2.30) и (2.57), мы получаем тождество

$$S(\bar{R}) = K(g; R), \quad (3.12)$$

которое эквивалентно предположенному соотношению (3.8).

Итак, мы приходим к выводу, что справедлива

Теорема 5. *Отображение, заданное явно формулами (3.9) – (3.11), устанавливает диффеоморфизм между Финслероидом и единичной сферой согласно формулам (3.1) – (3.8).*

Соответственно мы введем

Определение. При этих условиях отображение (3.1) называется *квазиевклидовым отображением Финслероида*.

Обращение

$$R = \mu_g \cdot \bar{R}, \quad \mu_g = (\sigma_g)^{-1}, \quad (3.13)$$

преобразования (3.9) – (3.11) может быть представлено компонентами

$$R^p = \mu^p(g; \bar{R}) \quad (3.14)$$

с функцией

$$\mu^a = \bar{R}^a / h k(g; \bar{R}), \quad \mu^N = I(g; \bar{R}) / k(g; \bar{R}), \quad (3.15)$$

где

$$k(g; \bar{R}) := J(g; \mu(g; \bar{R})) \quad (3.16)$$

и

$$I(g; \bar{R}) = \bar{R}^N - \frac{1}{2} G \sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}. \quad (3.17)$$

Тождество

$$\mu^p(g; \sigma(g; R)) \equiv R^p \quad (3.18)$$

легко проверяется. Заметим, что

$$\frac{\sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}}{\bar{R}^N} = \frac{h q}{A(g; R)}, \quad w^a = \frac{R^a}{R^N} = \frac{\bar{R}^a}{h I(g; \bar{R})}, \quad (3.19)$$

и

$$\sqrt{B}/Z = S/I, \quad \sqrt{Q} = S/I. \quad (3.20)$$

σ_g -образ

$$\phi(g; \bar{R}) := \Phi(g; R)|_{R=\mu(g; \bar{R})} \quad (3.21)$$

функции Φ , описываемой формулами (2.31) – (2.42), имеет ясный смысл угла:

$$\phi(g; \bar{R}) = \operatorname{arctg} \frac{\bar{R}^N}{\sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}}{\bar{R}^N}, & \text{если } \bar{R}^N \geq 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}}{\bar{R}^N}, & \text{если } \bar{R}^N \leq 0; \end{cases} \quad (3.22)$$

он лежит в пределах

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.23)$$

Мы имеем

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \bar{R}^a = 0 \text{ и } \bar{R}^N > 0; \quad \phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \bar{R}^a = 0 \text{ и } \bar{R}^N < 0, \quad (3.24)$$

а также

$$\phi|_{\bar{R}^N=0} = 0. \quad (3.25)$$

Сравнение формул (3.16) и (2.31) показывает, что

$$k = e^{\frac{1}{2}G\phi}. \quad (3.26)$$

Правые части в (3.11) – однородные функции степени 1:

$$\sigma^p(g; bR) = b\sigma^p(g; R), \quad b > 0. \quad (3.27)$$

Следовательно тождество

$$\sigma_s^p(g; R)R^s = \bar{R}^p \quad (3.28)$$

должно быть верным для производных

$$\sigma_p^q(g; R) := \frac{\partial \sigma^q(g; R)}{\partial R^p}. \quad (3.29)$$

На таком пути получают простые представления

$$\sigma_N^N(g; R) = \left(B + \frac{1}{2}gqA \right) \frac{J}{B}, \quad (3.30)$$

$$\sigma_a^N(g; R) = -\frac{g(ZA - B)}{2q} \frac{Jr_{ab}R^b}{B}, \quad (3.31)$$

$$\sigma_N^a(g; R) = \frac{1}{2}gq \frac{JR^a h}{B}, \quad (3.32)$$

$$\sigma_b^a(g; R) = \left(B\delta_b^a - \frac{gr_{bc}R^c R^a Z}{2q} \right) \frac{Jh}{B}, \quad (3.33)$$

а также детерминант

$$\det(\sigma_p^q) = h^{N-1} J^N. \quad (3.34)$$

Соотношения

$$\sigma_b^a R^b = JhR^a(AZ + q^2)/B, \quad r^{cd}\sigma_c^a\sigma_d^b = J^2 h^2 \left[r^{ab} - g(R^a R^b Z/qB) + \frac{1}{4}g^2(R^a R^b Z^2/B^2) \right]$$

полезны во многих вычислениях, включающих коэффициенты $\{\sigma_p^q\}$.

В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем использовать подстановку

$$t^p = \bar{R}^p. \quad (3.35)$$

Снова мы учитываем однородность

$$\mu^p(g; bt) = b\mu^p(g; t), \quad b > 0, \quad (3.36)$$

для функций (3.15), откуда вытекает тождество

$$\mu_s^p(g; t)t^s = R^p \quad (3.37)$$

для производных

$$\mu_q^p(g; t) := \frac{\partial \mu^p(g; t)}{\partial t^q}. \quad (3.38)$$

Мы находим

$$\mu_N^N = 1/k(g; t) - \frac{1}{2}g \frac{m(t)I(g; t)}{k(g; t)(S(t))^2}, \quad \mu_a^N = \frac{1}{2}g \frac{r_{ac}t^c I^*(g; t)}{k(g; t)(S(t))^2}, \quad (3.39)$$

$$\mu_N^a = -\frac{1}{2}g \frac{m(t)t^a}{hk(g; t)(S(t))^2}, \quad \mu_b^a = \frac{1}{hk(g; t)}\delta_b^a + \frac{1}{2}g \frac{t^N t^a r_{bc}t^c}{m(t)hk(g; t)(S(t))^2}, \quad (3.40)$$

где

$$m(t) = \sqrt{r_{ab}t^a t^b}, \quad (3.41)$$

$$I^*(g; t) = hm(t) - \frac{1}{2}gt^N \quad (3.42)$$

и

$$S(t) = \sqrt{r_{rs}t^r t^s} \equiv \sqrt{(t^N)^2 + r_{ab}t^a t^b}. \quad (3.43)$$

В частности, из вышеприведенных формул получаются соотношения

$$\frac{\partial(1/k(g; t))}{\partial t^N} = -\frac{1}{2}g \frac{m(t)}{hk(g; t)(S(t))^2}, \quad \frac{\partial(1/k(g; t))}{\partial t^a} = \frac{1}{2}g \frac{t^N r_{ab}t^b}{m(t)hk(g; t)(S(t))^2}.$$

Следует отметить также, что

$$R_p \mu_q^p = t_q, \quad t_p \sigma_q^p = R_q. \quad (3.44)$$

Единичные векторы

$$L^p := \frac{t^p}{S(t)}, \quad L_p := r_{pq}L^q \quad (3.45)$$

удовлетворяют соотношениям

$$L^q = l^p \sigma_p^q, \quad l^p = \mu_q^p L^q, \quad l_p = \sigma_p^q L_q, \quad L_p = \mu_p^q l_q, \quad (3.46)$$

где $l^p = R^p/K(g; R)$ и $l_p = R_p/H(g; R)$ – начальные финслеровы единичные векторы.

Теперь мы используем явные формулы (2.61) – (2.62) и (3.29) – (3.32) для нахождения преобразования

$$n^{rs}(g; t) := \sigma_p^r \sigma_q^s g^{pq} \quad (3.47)$$

для ФМТ g_{pq} при $\mathcal{F}_g^{PD}$ -индуцированном отображении (3.9) – (3.11), так что справедлива

Теорема 6. *Получается простое представление*

$$n^{rs} = h^2 r^{rs} + \frac{1}{4} g^2 L^r L^s. \quad (3.48)$$

Ковариантная версия имеет вид

$$n_{rs} = \frac{1}{h^2} r_{rs} - \frac{1}{4} G^2 L_r L_s. \quad (3.49)$$

Детерминант этого тензора является константой:

$$\det(n_{rs}) = h^{2(1-N)} \det(r_{ab}). \quad (3.50)$$

Заметим, что

$$L^p L_p = 1, \quad n_{pq} L^q = L_p, \quad n^{pq} L_q = L^p, \quad n_{pq} L^p L^q = 1, \quad n_{pq} t^p t^q = (S(t))^2.$$

Из (3.47) очевидно следует

$$g_{pq} = n_{rs}(g; t) \sigma_p^r \sigma_q^s. \quad (3.51)$$

4. Квазиевклидов метрический тензор

Введем

Определение. Метрический тензор, задаваемый компонентами (3.48) – (3.49), называется *квазиевклидовым*.

Определение. *Квазиевклидово пространство*

$$\mathcal{Q}_N = \{V_N; n_{pq}(g; t); g\} \quad (4.1)$$

является обобщением евклидова пространства $\{V_N; r_{pq}\}$ на случай $g \neq 0$.

Преобразование (3.47) может быть обращено, что дает представление

$$g_{pq} = \sigma_p^r \sigma_q^s n_{rs}. \quad (4.2)$$

Для углового метрического тензора (см. формулу, идущую ниже (2.65)), из (3.46) и (4.2) мы выводим

$$h_{pq} = \sigma_p^r \sigma_q^s H_{rs} \frac{1}{h^2}, \quad (4.3)$$

где

$$H_{rs} := r_{rs} - L_r L_s \quad (4.4)$$

– тензор, показывающий свойство ортогональности

$$L^r H_{rs} = 0. \quad (4.5)$$

Легко найти, что

$$H_{rs} = h^2 (n_{rs} - L_r L_s).$$

Теорема 7. Квазиевклидов метрический тензор (3.48) – (3.49) является *конформным* евклидову метрическому тензору.

Действительно, если мы рассмотрим отображение

$$\bar{R}^p \rightarrow \tilde{R} : \quad \tilde{R}^p = f(g; \bar{R}) \bar{R}^p / h \quad (4.6)$$

с функцией

$$f(g; \bar{R}) = a \left(g; \frac{1}{2} S^2(\bar{R}) \right) \quad (4.7)$$

и используем коэффициенты

$$k_q^p := \frac{\partial \tilde{R}^p}{\partial \bar{R}^q} = (f \delta_q^p + a' \bar{R}^p \bar{R}_q) / h \quad (4.8)$$

для определения тензора

$$c^{pq}(g; \tilde{R}) := k_r^p k_s^q n^{rs}(g; \bar{R}), \quad (4.9)$$

то мы найдем, что

$$c^{pq} = f^2 r^{pq} \quad (4.10)$$

при

$$f = \left[\frac{1}{2} S^2(\bar{R}) \right]^{\gamma/2}, \quad (4.11)$$

где

$$\gamma = h - 1 \equiv \sqrt{1 - \frac{g^2}{4}} - 1 \quad (4.12)$$

– параметр. Доказательство Теоремы 7 завершено.

Используем теперь полученный квазиевклидов метрический тензор $n_{pq}(g; t)$ для построения ассоциируемых квазиевклидовых символов Кристоффеля $N_p^r{}_q(g; t)$. Мы последовательно находим:

$$n_{pq,r} := \frac{\partial n_{pq}}{\partial t^r} = -\frac{1}{4} G^2 (H_{pr} L_q + H_{qr} L_p) / S, \quad (4.13)$$

и

$$N_p^r{}_q = n^{rs} N_{psq}, \quad N_{prq} = \frac{1}{2} (n_{pr,q} + n_{qr,p} - n_{pq,r}), \quad (4.14)$$

вместе с

$$N_{prq}(g; t) = -\frac{1}{4} G^2 H_{pq} L_r / S, \quad (4.15)$$

что окончательно дает

$$N_p^r{}_q(g; t) = -\frac{1}{4} G^2 L^r H_{pq} / S. \quad (4.16)$$

Сравнение представления (4.16) с тождеством (4.5) показывает, что

$$t^p N_p^r{}_q = 0, \quad N_p^s{}_s = 0, \quad N_t^s{}_r N_p^t{}_q = 0. \quad (4.17)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial N_p^r{}_q}{\partial t^s} - \frac{\partial N_p^r{}_s}{\partial t^q} = -\frac{1}{4} G^2 (H_{pq} H_s^r - H_{ps} H_q^r) / S^2. \quad (4.18)$$

Используя тождества (4.17)-(4.18) в квазиевклидовом тензоре кривизны:

$$R_p^r{}_{qs}(g; t) := \frac{\partial N_p^r{}_q}{\partial t^s} - \frac{\partial N_p^r{}_s}{\partial t^q} + N_p^w{}_q N_w^r{}_s - N_p^w{}_s N_w^r{}_q, \quad (4.19)$$

мы приходим к простому результату:

$$R_{pqrs}(g; t) = -\frac{1}{4}G^2(H_{pq}H_{rs} - H_{ps}H_{qr})/S^2. \quad (4.20)$$

Отсюда вытекают тождества

$$L^p R_{pqrs} = L^q R_{pqrs} = L^r R_{pqrs} = L^s R_{pqrs} = 0. \quad (4.21)$$

Замечание. Вследствие законов преобразования (3.12) и (3.47) представление (4.20) равнозначно формулам (2.69) – (2.70). Следовательно мы получили другое строгое доказательство Теоремы 3, а также формулы (2.73), показывающей кривизну Финслероида.

Литература

- [1] Е. Картан: *Les espaces de Finsler*, Actualites 79, Hermann, Paris 1934.
- [2] Г. Буземан: *Геометрия Геодезических*, Физ.-Мат., М. 1962.
- [3] Х. Рунд: *Дифференциальная геометрия Финслеровых Пространств*, Наука, М. 1981.
- [4] G. S. Asanov: *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1985.
- [5] G. S. Asanov: *Aeq. Math.* **49** (1995), 234; *Rep. Math. Phys.* **45** (2000), 155; **47** (2001), 323; *Moscow University Physics Bulletin* **49**(1) (1994), 18; **51**(1) (1996), 15; **51**(2) (1996), 6; **51**(3) (1996), 1; **53**(1) (1998), 15.
- [6] G. S. Asanov: arXiv: hep-ph/0306023, 2003; arXiv: math-ph/0310019, 2003; arXiv: math.m.g./0402013, 2004.
- [7] К. Мёллер: *Теория Относительности*, Атомиздат, М. 1975.
- [8] Дж. Синг: *Общая Теория Относительности*, Ин.Лит., М. 1963.
- [9] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, gr-qc/0206004.
- [10] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Quadrahyperbolic Numbers and Associated Nonlinear Invariance*, gr-qc/021290.

Приложение

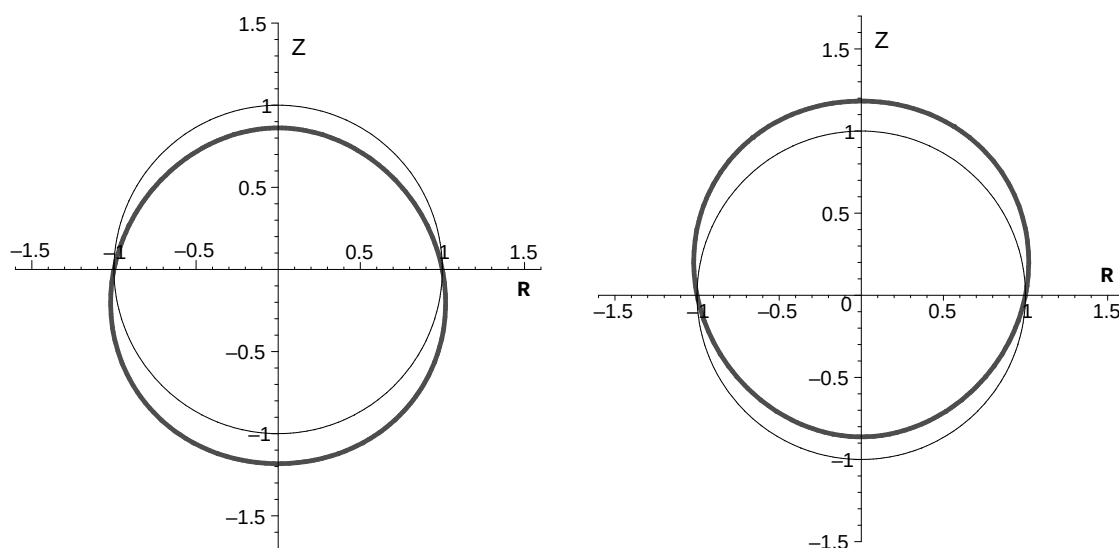


Рис. 3: $g = 0.2$ и $g = -0.2$

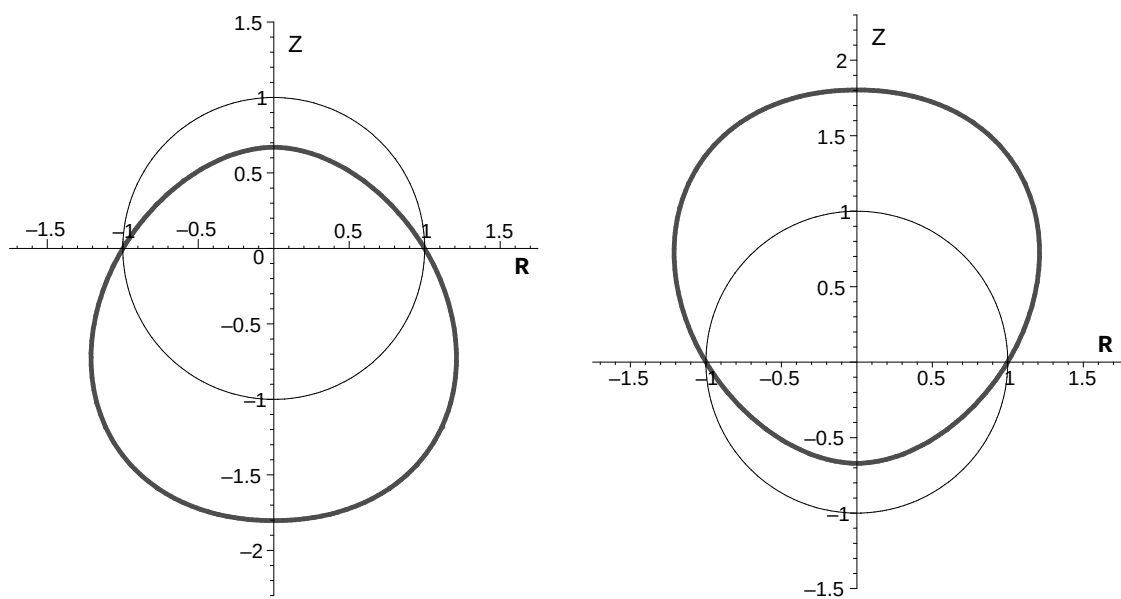


Рис. 4: $g = 0.6$ и $g = -0.6$

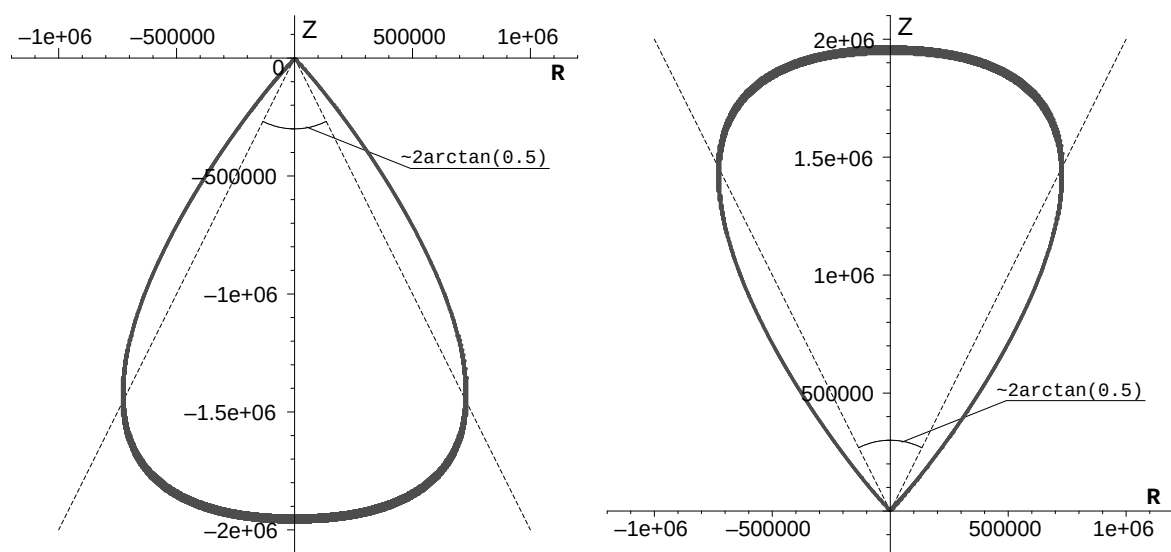


Рис. 5: $g = 1.96$ и $g = -1.96$

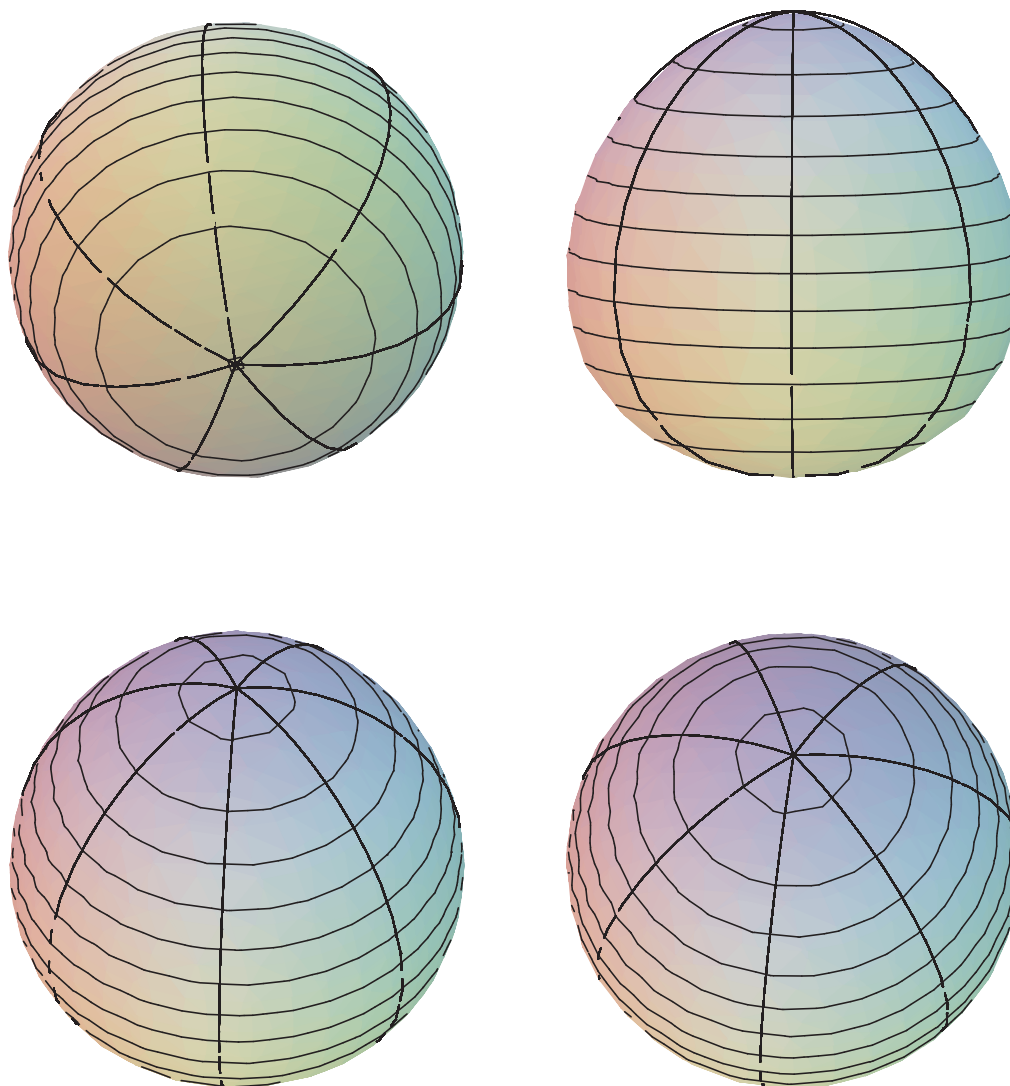


Рис. 6: 3D-образы Финслероида; $g = 0.6$

Полуточка: модель скорости.

Каратаев Евгений Анатольевич.

Одинцово, август 2002

В предыдущей статье о полуточке была предложена и сформулирована с некоторым практическим приближением модель мира. Была описана модель преобразований одной системы отсчёта в другую, образующая группу Пуанкаре, а также модель миров и времени миров. Настоящая статья строит модель скорости в рамках модели полуточки и приводит две простых иллюстрации, демонстрирующие и иллюстрирующие модель скорости в общеизвестных случаях поступательной и вращательной скорости. В статье приводится в основном модель скорости, и разбор отдельных случаев скорости и её видов представляется либо темой отдельной статьи, либо большой работы о кинематике, выраженной на языке гиперкомплексных чисел.

Для понимания предлагаемой модели скорости частично повторим основные положения модели полуточки и модели миров.

Точка пространства испытывает изменение при переходе от одной системы отсчёта к другой:

$$p \rightarrow \kappa p \hat{\chi} \quad (1)$$

Считается, что точка P принадлежит миру с временем S :

$$S = \ln(|p|) = Re(\ln(p)) \quad (2)$$

В этой статье понятия системы координат и системы отсчёта полагаются совпадающими. Полагается, что положение точки и её состояние измеряются в некоторой идеальной системе, выбираемой наблюдателем по его усмотрению.

Состояния точки в два различных момента времени могут быть определены относительно одной и той же системы координат. Будем полагать, что из первого состояния во второе можно попасть, совершив преобразование системы координат:

$$p \rightarrow e^{\alpha \Delta S} p e^{\overleftarrow{\alpha \Delta S}} \quad (3)$$

Здесь величина $e^{\alpha \Delta S}$ определяет преобразование, которое следует совершить для такого перехода. При этом ΔS есть разность времён этих двух миров:

$$\begin{aligned} & \Delta S = S_2 - S_1 \\ & \Delta S = S_2 - S_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Также будем полагать, что эти два состояния разделены друг от друга бесконечно малым расстоянием во времени:

$$\lim \Delta S = 0 \quad (5)$$

Под скоростью будем понимать величину, определенную классическим способом: Если величина x зависит от величины t , и с течением t величина x испытывает изменение, то скоростью называется предел отношения приращений величин x и t :

Ссылки по теме

[Элементарные функции матриц](#)[Полуточка](#)[Кватернионы и 3-мерные вращения](#)[Кватернионы и 3-мерные отражения](#)[Скалярная проекция гиперкомплексных чисел](#)[Версия для печати](#)

$$v = \dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (6)$$

Ещё одно небольшое отступление нужно сделать для описания и выбора точной модели преобразования Пуанкаре. Дело в том, что пока рассматриваются лишь пространственно-временные преобразования, им в действительности удовлетворяют два различных преобразования:

$$p \rightarrow \kappa \hat{\kappa} \quad (7)$$

и

$$p \rightarrow \kappa \overline{\kappa} \quad (8)$$

Здесь в первом случае используется скалярно-векторное сопряжение, во втором - скалярно-алгебраическое. Для того, чтобы выявить, в чем они различаются с точки зрения группы Пуанкаре, распишем их операторное представление:

$$\kappa = e^{\varphi} = \exp \left(i\dot{\varphi}_1 + i\dot{j}\varphi_2 + i\dot{k}\varphi_3 + i\dot{\varphi}_4 + i\varphi_5 + j\varphi_6 + k\varphi_7 \right) \quad (9)$$

$$\hat{\kappa} = \exp \left(i\dot{\varphi}_1 + i\dot{j}\varphi_2 + i\dot{k}\varphi_3 - i\dot{\varphi}_4 - i\varphi_5 - j\varphi_6 - k\varphi_7 \right) \quad (10)$$

$$\overline{\kappa} = \exp \left(i\dot{\varphi}_1 + i\dot{j}\varphi_2 + i\dot{k}\varphi_3 + i\dot{\varphi}_4 - i\varphi_5 - j\varphi_6 - k\varphi_7 \right) \quad (11)$$

Видно, что эти два оператора отличаются псевдоскалярной частью параметра. В силу того, что её можно вынести из оператора преобразования, оба варианта могут быть представлены как:

$$p \rightarrow \kappa_n e^{i\varphi_4} \hat{\kappa}_n e^{-i\varphi_4} = \kappa_n p \hat{\kappa}_n \quad (12)$$

$$p \rightarrow \kappa_n e^{i\varphi_4} \overline{\kappa}_n e^{i\varphi_4} = \kappa_n p \overline{\kappa}_n e^{2i\varphi_4} \quad (13)$$

где через κ_n обозначен оператор κ с вынесенной псевдоскалярной составляющей из его параметров:

$$\kappa_n = \exp \left(i\dot{\varphi}_1 + i\dot{j}\varphi_2 + i\dot{k}\varphi_3 + i\varphi_5 + j\varphi_6 + k\varphi_7 \right) \quad (14)$$

Таким образом, предстоит сделать выбор между двумя вариантами преобразований: 1) использовать скалярно-векторное сопряжение или 2) использовать скалярно-алгебраическое сопряжение. Выберем вариант 1 с отбрасыванием рассмотрения псевдоскалярной составляющей параметра преобразований в силу того, что пока в наши цели не входит рассмотрение псевдоскалярных преобразований и в силу того, что векторное сопряжение удобнее в силу его линейности.

А именно:

$$\left(e^{\mathfrak{q}} \right) = e^{\tilde{\mathfrak{q}}} \quad (15)$$

$$(e^{\dot{q}}) = e^{\dot{q}} \quad (16)$$

Поэтому мы можем выполнить дальнейший вывод более наглядно.

В силу того, что величина S и её приращение являются скалярами, имеем:

$$\widehat{(e^{\alpha \Delta S})} = e^{\dot{\alpha} \Delta S} \quad (17)$$

И в случае когда ΔS мало, имеем:

$$e^{\alpha \Delta S} \approx 1 + \alpha \Delta S \quad (18)$$

$$x \rightarrow e^{\alpha \Delta S} x \approx x + \alpha x \Delta S \quad (19)$$

Используя это соотношение для преобразования полуточки, распишем выражение для преобразования точки:

$$\begin{aligned} p \rightarrow (x + \alpha x \Delta S) \left(\dot{x} + \dot{x} \dot{\alpha} \Delta S \right) = \\ = x \dot{x} + \alpha x \dot{x} \Delta S + \alpha x \dot{x} \dot{\alpha} \Delta S^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Оставив члены первого порядка малости по ΔS :

$$p \rightarrow x \dot{x} + \alpha x \dot{x} + x \dot{x} \dot{\alpha} \Delta S \quad (21)$$

Используя определение полуточки

$$p = x \dot{x}$$

получим:

$$p \rightarrow p + \left(\alpha p + \dot{p} \dot{\alpha} \right) \Delta S \quad (22)$$

Положив точку функцией величины S и сравнив с разложением её в ряд Тейлора в окрестности P ,

получим:

$$\frac{dp}{dS} = \alpha p + \dot{p} \dot{\alpha} \quad (23)$$

Это выражение и является определением скорости точки $\mathbf{p}$, если она движется во времени S , испытывая в каждый его момент преобразование Пуанкаре:

$$\mathbf{p} \rightarrow e^{\alpha \Delta S} \widetilde{\mathbf{p} e^{\alpha \Delta S}} \quad (24)$$

Выражение (23) является скалярно-векторно сопряжённым самому себе:

$$\left(\widetilde{\alpha \mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}} \alpha} \right) = \widetilde{\dot{\mathbf{p}} \alpha} + \alpha \mathbf{p} \quad (25)$$

То есть абсолютное приращение точки $\mathbf{p}$ выполняется несмотря на произвольность величины α так, что

точка $\mathbf{p}$ остается сама себе скалярно-векторно сопряжённой.

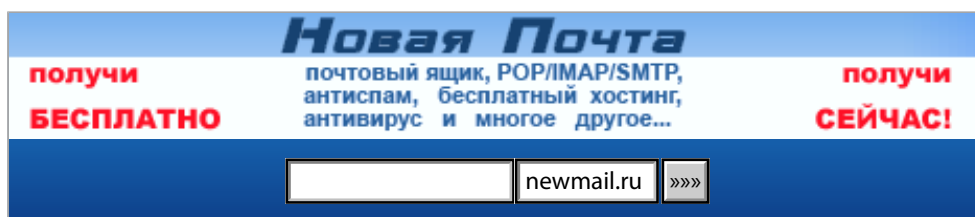
Отметим также, что в силу свойства точки $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}}$ верно равенство:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dS} = \alpha \mathbf{p} + \widetilde{\dot{\mathbf{p}} \alpha} = \alpha \mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}} \alpha \quad (26)$$

[Далее...](#)

[Главная](#) | [Математика](#) | [Программирование](#) | [Cashé](#) | [Творчество](#) | [Решатели](#) |

Дизайн и сопровождение: [Евгений Каратаев](#)



Полуточка: модель скорости.

Каратаев Евгений Анатольевич.

Одинцово, август 2002

В предыдущей статье о полуточке была предложена и сформулирована с некоторым практическим приближением модель мира. Была описана модель преобразований одной системы отсчёта в другую, образующая группу Пуанкаре, а также модель миров и времени миров. Настоящая статья строит модель скорости в рамках модели полуточки и приводит две простых иллюстрации, демонстрирующие и иллюстрирующие модель скорости в общеизвестных случаях поступательной и вращательной скорости. В статье приводится в основном модель скорости, и разбор отдельных случаев скорости и её видов представляется либо темой отдельной статьи, либо большой работы о кинематике, выраженной на языке гиперкомплексных чисел.

Для понимания предлагаемой модели скорости частично повторим основные положения модели полуточки и модели миров.

Точка пространства испытывает изменение при переходе от одной системы отсчёта к другой:

$$p \rightarrow \mathcal{K}p\tilde{\mathcal{K}} \quad (1)$$

Считается, что точка p принадлежит миру с временем S :

$$S = \ln(|p|) = Re(\ln(p)) \quad (2)$$

В этой статье понятия системы координат и системы отсчёта полагаются совпадающими. Полагается, что положение точки и её состояние измеряются в некоторой идеальной системе, выбираемой наблюдателем по его усмотрению.

Состояния точки в два различных момента времени могут быть определены относительно одной и той же системы координат. Будем полагать, что из первого состояния во второе можно попасть, совершив преобразование системы координат:

$$p \rightarrow e^{\alpha\Delta S} \widehat{pe^{\alpha\Delta S}} \quad (3)$$

Здесь величина $e^{\alpha\Delta S}$ определяет преобразование, которое следует совершить для такого перехода. При этом ΔS есть разность времён этих двух миров:

$$S \rightarrow S + \Delta S \quad (4)$$

Также будем полагать, что эти два состояния разделены друг от друга бесконечно малым расстоянием во времени:

$$\lim \Delta S = 0 \quad (5)$$

Под скоростью будем понимать величину, определенную классическим способом: Если величина x зависит от величины t , и с течением t величина x испытывает изменение, то скоростью называется предел отношения приращений величин x и t :

$$v = \dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (6)$$

Ещё одно небольшое отступление нужно сделать для описания и выбора точной модели преобразования Пуанкаре. Дело в том, что пока рассматриваются лишь пространственно-временные преобразования, им в действительности удовлетворяет два различных преобразования:

$$p \rightarrow \kappa p \hat{\kappa} \quad (7)$$

и

$$p \rightarrow \kappa p \check{\kappa} \quad (8)$$

Здесь в первом случае используется скалярно-векторное сопряжение, во втором - скалярно-алгебраическое. Для того, чтобы выявить, в чем они различаются с точки зрения группы Пуанкаре, распишем их операторное представление:

$$\kappa = e^{\varphi} = \exp(i\dot{i}\varphi_1 + \dot{i}j\varphi_2 + \dot{i}k\varphi_3 + \dot{i}\varphi_4 + i\varphi_5 + j\varphi_6 + k\varphi_7) \quad (9)$$

$$\hat{\kappa} = \exp(i\dot{i}\varphi_1 + \dot{i}j\varphi_2 + \dot{i}k\varphi_3 - \dot{i}\varphi_4 - i\varphi_5 - j\varphi_6 - k\varphi_7) \quad (10)$$

$$\check{\kappa} = \exp(i\dot{i}\varphi_1 + \dot{i}j\varphi_2 + \dot{i}k\varphi_3 + \dot{i}\varphi_4 - i\varphi_5 - j\varphi_6 - k\varphi_7) \quad (11)$$

Видно, что эти два оператора отличаются псевдоскалярной частью параметра. В силу того, что её можно вынести из оператора преобразования, оба варианта могут быть представлены как:

$$p \rightarrow \kappa_n e^{i\varphi_4} p \hat{\kappa}_n e^{-i\varphi_4} = \kappa_n p \hat{\kappa}_n \quad (12)$$

$$p \rightarrow \kappa_n e^{i\varphi_4} p \check{\kappa}_n e^{i\varphi_4} = \kappa_n p \check{\kappa}_n e^{2i\varphi_4} \quad (13)$$

где через $\varkappa_n$ обозначен оператор $\varkappa$ с вынесенной псевдоскалярной составляющей из его параметров:

$$\varkappa_n = \exp(\dot{i}i\varphi_1 + \dot{i}j\varphi_2 + \dot{i}k\varphi_3 + i\varphi_5 + j\varphi_6 + k\varphi_7) \quad (14)$$

Таким образом, предстоит сделать выбор между двумя вариантами преобразований: 1) использовать скалярно-векторное сопряжение или 2) использовать скалярно-алгебраическое сопряжение. Выберем вариант 1 с отбрасыванием рассмотрения псевдоскалярной составляющей параметра преобразований в силу того, что пока в наши цели не входит рассмотрение псевдоскалярных преобразований и в силу того, что векторное сопряжение удобнее в силу его линейности.

А именно:

$$\widetilde{(e^q)} = e^{\tilde{q}} \quad (15)$$

$$(e^q)' = e^{\acute{q}} \quad (16)$$

Поэтому мы можем выполнить дальнейший вывод более наглядно.

В силу того, что величина S и её приращение являются скалярами, имеем:

$$\widetilde{(e^{\alpha\Delta S})'} = e^{\acute{\alpha}\Delta S} \quad (17)$$

И в случае когда ΔS мало, имеем:

$$e^{\alpha\Delta S} \approx 1 + \alpha\Delta S \quad (18)$$

$$x \rightarrow e^{\alpha\Delta S} \varkappa \approx \varkappa + \alpha\varkappa\Delta S \quad (19)$$

Используя это соотношение для преобразования полуточки, распишем выражение для преобразования точки:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow (\varkappa + \alpha\varkappa\Delta S) \left(\check{\varkappa} + \check{\varkappa}\check{\alpha}\Delta S \right) = \\ &= \varkappa\check{\varkappa} + \alpha\varkappa\check{\varkappa}\Delta S + \alpha\varkappa\check{\varkappa}\check{\alpha}\Delta S^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Оставив члены первого порядка малости по ΔS :

$$p \rightarrow \varkappa\check{\varkappa} + \alpha\varkappa\check{\varkappa} + \varkappa\check{\varkappa}\check{\alpha}\Delta S \quad (21)$$

Используя определение полуточки

$$p = \mathcal{K}\tilde{\mathcal{K}}$$

получим:

$$p \rightarrow p + \left(\alpha p + \tilde{p}\tilde{\alpha} \right) \Delta S \quad (22)$$

Положив точку функцией величины S и сравнив с разложением её в ряд Тейлора в окрестности p , получим:

$$\frac{dp}{dS} = \alpha p + \tilde{p}\tilde{\alpha} \quad (23)$$

Это выражение и является определением скорости точки p , если она движется во времени S , испытывая в каждый его момент преобразование Пуанкаре:

$$p \rightarrow e^{\alpha \Delta S} \widetilde{p e^{\alpha \Delta S}} \quad (24)$$

Выражение (23) является скалярно-векторно сопряжённым самому себе:

$$\widetilde{\left(\alpha p + \tilde{p}\tilde{\alpha} \right)} = \tilde{p}\tilde{\alpha} + \alpha p \quad (25)$$

То есть абсолютное приращение точки p выполняется несмотря на произвольность величины α так, что точка p остается сама себе скалярно-векторно сопряжённой.

Отметим также, что в силу свойства точки $p = \tilde{p}$ верно равенство:

$$\frac{dp}{dS} = \alpha p + \tilde{p}\tilde{\alpha} = \alpha p + p\tilde{\alpha} \quad (26)$$

Придерживаясь модели полной группы Пуанкере, мы должны считать величины p и α дуальными бикватернионами, имеющими 16 компонент. В силу требования скалярно-векторной сопряжённости самой себе точка часть компонент имеет нулевыми.

Для понимания дальнейшего вывода представим величины p и α в виде, явно содержащем разделение на главную и дуальную части:

$$\begin{aligned} p &= p_m + \omega p_d \\ \alpha &= \alpha_m + \omega \alpha_d \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь индексом m обозначены главные части, а индексом d - дуальные. Пользуясь введенным обозначением, распишем выражение скорости:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dS} &= \alpha p + \dot{\tilde{p}}\dot{\tilde{\alpha}} = (\alpha_m + \omega\alpha_d) + \\ &+ (p_m + \omega p_d) \left(\dot{\tilde{\alpha}}_m + \omega\dot{\tilde{\alpha}}_d \right) = \\ &= \alpha_m p_m + \omega (\alpha_d p_m + \alpha_m p_d) + p_m \dot{\tilde{\alpha}}_m + \omega (p_m \dot{\tilde{\alpha}}_d + p_d \dot{\tilde{\alpha}}_m)\end{aligned}\quad (28)$$

Сгруппировав главные и дуальные части, получим:

$$\frac{dp}{dS} = \alpha_m p_m + p_m \dot{\tilde{\alpha}}_m + \omega \left(\alpha_d p_m + p_m \dot{\tilde{\alpha}}_d + \alpha_m p_d + p_d \dot{\tilde{\alpha}}_m \right) \quad (29)$$

Используя это разложение в главных и дуальных частях и задавая различные частные случаи величин p_m , p_d , α_m и α_d , оценим характер вклада в скорость точки p отдельных величин α_m и α_d . А также найдём их сопоставление отдельным общеизвестным скоростям.

Случай 1.

Зададим точку p как дуальный вектор с единичной главной частью:

$$p = 1 + \omega p_d \quad (p_m = 1) \quad (30)$$

а величину α как дуальный вектор с нулевой главной частью:

$$\alpha = \omega\alpha_d \quad (\alpha_m = 0) \quad (31)$$

Тогда, используя разложение (29), найдем скорость точки при таком преобразовании:

$$\frac{dp}{dS} = \alpha_m + \dot{\tilde{\alpha}}_m + \omega \left(\alpha_d + \dot{\tilde{\alpha}}_d + \alpha_m p_d + p_d \dot{\tilde{\alpha}}_m \right) \quad (32)$$

В силу того, что выбрано условие $\alpha_m = 0$, имеем:

$$\frac{dp}{dS} = \omega \left(\alpha_d + \dot{\tilde{\alpha}}_d \right) \quad (33)$$

Таким образом, в приведённых выше условиях величина $\alpha_d + \dot{\tilde{\alpha}}_d$ является линейной скоростью приращения дуальной части p_d . В силу того, что в состав величины α_d входит как полярная, так и дуальная части, то есть:

$$\alpha_d = Pol(\alpha_d) + Ax(\alpha_d) \quad (34)$$

то в силу свойств функций Pol и Ax , определённых как

$$Pol(q) = iiq_1 + ijq_2 + ikq_3 + \omega iiq_9 + \omega ijq_{10} + \omega ikq_{11} \quad (35)$$

$$Ax(q) = iq_5 + jq_6 + kq_7 + \omega iq_{13} + \omega jq_{14} + \omega kq_{15} \quad (36)$$

И имеющих свойства сопрягаться:

$$\widetilde{Pol(q)} = Pol(q) \quad (37)$$

$$\widetilde{Ax(q)} = -Ax(q) \quad (38)$$

Имеем равенство для первого случая:

$$\frac{dp}{dS} = 2\omega Pol(\alpha_d) \quad (39)$$

Или: величина $2Pol(\alpha_d)$ является линейной скоростью изменения вектора p_d .

Случай 2. Выберем величины p и α такими, что выполняются следующие условия:

$$p_m = 1, \quad \alpha_d = 0, \quad Pol(\alpha_m) = 0 \quad (40)$$

Используя выражение (29) с этими условиями, получим:

$$\frac{dp}{dS} = \alpha_m + \widetilde{\alpha_m} + \omega (\alpha_m p_d + p_d \widetilde{\alpha_m}) \quad (41)$$

В силу выбора $Pol(\alpha_m) = 0$ и свойства (38) имеем:

$$\alpha_m + \widetilde{\alpha_m} = 0 \quad (42)$$

И, также в силу свойства (38), в выражении скорости остаются члены:

$$\frac{dp}{dS} = \omega (Ax(\alpha_m) p_d - p_d Ax(\alpha_m)) \quad (43)$$

Переведя величины α и p в векторную запись и раскрыв произведение по правилу произведения кватернионов, получим:

$$\frac{dp}{dS} = \omega [2Ax(\alpha_m), p_d] \quad (44)$$

где с помощью скобок $[]$ обозначено традиционное векторное произведение 3-х мерных векторов p_d и $Ax(\alpha_m)$.

Или: величина $2Ax(\alpha_m)$ является угловой скоростью вращения вектора p_d .

Таким образом, величины $2Pol(\alpha_d)$ и $2Ax(\alpha_m)$ имеют всем хорошо известные механические кинематические интерпретации.

Целью настоящей работы было дать модель скорости и её иллюстрация в частных случаях. Поэтому полный разбор сочетаний α и p здесь не рассматривается и автор полагает, что такое рассмотрение должно стать темой отдельной работы, посвящённой именно этому вопросу.

К будущим исследованиям могут быть отнесены: величины $Pol(\alpha_m)$ и $Ax(\alpha_d)$, а также отдельное исследование главной части точки p_m . В данной работе рассматривалась лишь её дуальная составляющая. Но общая модель преобразования Пуанкаре потребовала объединения в одну величину дуальной и главной частей вектора p , существенно увеличив его размерность. Автор полагает, что будущие исследования покажут оправданность такого объединения. Кроме того, остаётся совершенно нерассмотренной возможность замены скалярно-векторного сопряжения на скалярно-алгебраическое в преобразовании Пуанкаре и следствия такой замены.

[Полуточка: модель скорости. Начало.](#)

Придерживаясь модели полной группы Пуанкере, мы должны считать величины $\mathbf{P}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ дуальными

бикватернионами, имеющими 16 компонент. В силу требования скалярно-векторной сопряжённости самой себе точка часть компонент имеет нулевыми.

Для понимания дальнейшего вывода представим величины $\mathbf{P}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ в виде, явно содержащем разделение на главную и дуальную части:

$$\begin{aligned} p &= p_m + \omega p_d \\ \alpha &= \alpha_m + \omega \alpha_d \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь индексом m обозначены главные части, а индексом d - дуальные. Пользуясь введенным обозначением, распишем выражение скорости:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dS} &= \dot{\alpha} p + \dot{p} \dot{\alpha} = (\alpha_m + \omega \alpha_d) + \\ &+ (p_m + \omega p_d) (\dot{\alpha}_m + \omega \dot{\alpha}_d) = \\ &= \alpha_m p_m + \omega (\alpha_d p_m + \alpha_m p_d) + p_m \dot{\alpha}_m + \omega (p_m \dot{\alpha}_d + p_d \dot{\alpha}_m) \end{aligned}$$

Сгруппировав главные и дуальные части, получим:

$$\frac{dp}{dS} = \alpha_m p_m + p_m \dot{\alpha}_m + \omega (\alpha_d p_m + p_m \dot{\alpha}_d + \alpha_m p_d + p_d \dot{\alpha}_m) \quad (28)$$

Используя это разложение в главных и дуальных частях и задавая различные частные случаи величин p_m , p_d , α_m и α_d , оценим характер вклада в скорость точки $\mathbf{P}$ отдельных величин α_m и α_d . А также найдём их сопоставление отдельным общеизвестным скоростям.

Случай 1.

Зададим точку $\mathbf{P}$ как дуальный вектор с единичной главной частью:

$$p = 1 + \omega p_d \quad (p_m = 1) \quad (29)$$

а величину $\boldsymbol{\alpha}$ как дуальный вектор с нулевой главной частью:

$$\alpha = \omega \alpha_d \quad (\alpha_m = 0) \quad (30)$$

Тогда, используя разложение (29), найдем скорость точки при таком преобразовании:

Ссылки по теме

[Элементарные функции матриц](#)

[Полуточка](#)

[Кватернионы и 3-мерные вращения](#)

[Кватернионы и 3-мерные отражения](#)

[Скалярная проекция гиперкомплексных чисел](#)

[Версия для печати](#)

$$\frac{dp}{dS} = \alpha_m + \widetilde{\alpha'_m} + \omega \left(\alpha_d + \widetilde{\alpha'_d} + \alpha_m p_d + p_d \widetilde{\alpha'_m} \right) \quad (31)$$

В силу того, что выбрано условие $\alpha_m = 0$, имеем:

$$\frac{dp}{dS} = \omega \left(\alpha_d + \widetilde{\alpha'_d} \right) \quad (32)$$

Таким образом, в приведённых выше условиях величина $\alpha_d + \widetilde{\alpha'_d}$ является линейной скоростью

приращения дуальной части p_d . В силу того, что в состав величины α_d входит как полярная, так и дуальная части, то есть:

$$\alpha_d = Pol(\alpha_d) + Ax(\alpha_d) \quad (33)$$

то в силу свойств функций Pol и Ax , определённых как

$$Pol(q) = i i q_1 + j j q_2 + k k q_3 + \omega i i q_9 + \omega j j q_{10} + \omega k k q_{11} \quad (34)$$

$$Ax(q) = i q_5 + j q_6 + k q_7 + \omega i q_{13} + \omega j q_{14} + \omega k q_{15} \quad (35)$$

И имеющих свойства сопрягаться:

$$\widetilde{Pol(q)} = Pol(q) \quad (36)$$

$$\widetilde{Ax(q)} = -Ax(q) \quad (37)$$

Имеем равенство для первого случая:

$$\frac{dp}{dS} = 2\omega Pol(\alpha_d) \quad (38)$$

Или: величина $2Pol(\alpha_d)$ является линейной скоростью изменения вектора p_d .

Случай 2. Выберем величины p и α такими, что выполняются следующие условия:

$$p_m = 1, \quad \alpha_d = 0, \quad Pol(\alpha_m) = 0 \quad (39)$$

Используя выражение (29) с этими условиями, получим:

$$\frac{dp}{dS} = \alpha_m + \dot{\alpha}_m + \omega \left(\alpha_m p_d + p_d \dot{\alpha}_m \right) \quad (40)$$

В силу выбора $Pol(\alpha_m) = 0$ и свойства (38) имеем:

$$\alpha_m + \dot{\alpha}_m = 0 \quad (41)$$

И, также в силу свойства (38), в выражении скорости остаются члены:

$$\frac{dp}{dS} = \omega \left(Ax(\alpha_m) p_d - p_d Ax(\alpha_m) \right) \quad (42)$$

Переведа величины α и P в векторную запись и раскрыв произведение по правилу произведения кватернионов, получим:

$$\frac{dp}{dS} = \omega [2Ax(\alpha_m), p_d] \quad (43)$$

где с помощью скобок $[]$ обозначено традиционное векторное произведение 3-х мерных векторов P_d и $Ax(\alpha_m)$.

Или: величина $2Ax(\alpha_m)$ является угловой скоростью вращения вектора P_d .

Таким образом, величины $2Pol(\alpha_d)$ и $2Ax(\alpha_m)$ имеют всем хорошо известные механические кинематические интерпретации.

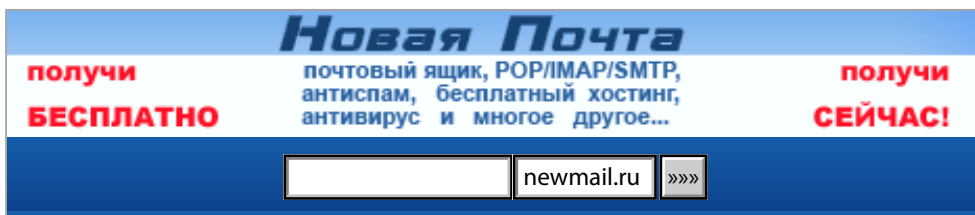
Целью настоящей работы было дать модель скорости и её иллюстрация в частных случаях. Поэтому полный разбор сочетаний α и P здесь не рассматривается и автор полагает, что такое рассмотрение должно стать темой отдельной работы, посвящённой именно этому вопросу.

К будущим исследованиям могут быть отнесены: величины $Pol(\alpha_m)$ и $Ax(\alpha_d)$, а также отдельное исследование главной части точки P_m . В данной работе рассматривалась лишь её дуальная составляющая.

Но общая модель преобразования Пуанкаре потребовала объединения в одну величину дуальной и главной частей вектора P , существенно увеличив его размерность. Автор полагает, что будущие исследования

покажут оправданность такого объединения. Кроме того, остаётся совершенно нерассмотренной возможность замены скалярно-векторного сопряжения на скалярно-алгебраическое в преобразовании Пуанкаре и следствия такой замены.

Дизайн и сопровождение: [Евгений Каратаев](#)



СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОММУТАТИВНО-АССОЦИАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ H_3 И H_4

С. В. Лебедев

*НИИ прикладной математики и механики МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005,
Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5
leb@edu.bmstu.ru*

В первой части работы действительная ось пространства, ассоциированного с алгеброй H_3 , и параллельные этой оси прямые интерпретируются как мировые линии покоящихся частиц; для введения расстояния между действительной осью и параллельной ей прямой используется поверхность одновременности. Задание на этой поверхности системы координат, аналогичной полярной, позволяет указать ее простейшие инвариантные преобразования. Во второй части преобразования Лоренца представлены в виде поворотов специального вида в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4 .

Введение

Алгебры H_3 и H_4 принадлежат к коммутативно-ассоциативным алгебрам типа H_n , которые наиболее просты по своей структуре. Алгебры такого вида характеризуются тем, что в них существует выделенный базис, в котором операция умножения чисел осуществляется покомпонентно – так же, как и операция сложения в произвольных алгебрах. С другой стороны, в алгебрах вида H_n , которые могут быть названы гиперболическими, алгебры H_3 и H_4 следуют непосредственно за алгебрами действительных (H_1) и двойных (H_2) чисел, которые обладают важными для их физического применения свойствами [6, 11]. Выскажем предположение о "наследовании" этих свойств рассматриваемыми алгебрами третьей и четвертой размерности. В качестве обоснования этого предположения напомним о связи рассматриваемой в финслеровом обобщении теории относительности метрики Бервальда-Моора с алгеброй H_4 [1]. С точки зрения возможных приложений гиперболическая алгебра H_4 наиболее перспективна в силу топологической выделенности пространств размерности $n = 4$ [7]. Однако алгебра H_3 обладает одним несомненным преимуществом. В трехмерном метрическом пространстве, ассоциированном с этой алгеброй, в полной мере возможно применение компьютерной визуализации и анимации фигур, поверхностей и линий. Хотя аналитические возможности такого применения не стоит переоценивать, оно придает особую наглядность геометрическим свойствам этого пространства. Поэтому предлагаемый в первой части работы достаточно общий подход к физической трактовке свойств гиперболических пространств излагается на примере пространства, ассоциированного с алгеброй H_3 . Ее свойства задают в ассоциированном пространстве куб нормы вида

$$|A|^3 = |a^1 a^2 a^3|,$$

где a^i – компоненты вектора в выделенном базисе, составленном из трех чисел e_i , где $i = 1, 2, 3$, со свойствами $(e_i)^2 = e_i$, $e_i \cdot e_j = 0$ при $i \neq j$. Действительные числа на прямой можно разделить на два разряда: расположенные справа от нуля положительные

числа и расположенные слева от нуля отрицательные. В алгебре двойных чисел две изотропные прямые делят псевдоевклидову плоскость на 2^2 квадрантов. Аналогично этому рассматриваемое ассоциированное пространство разделяется на 2^3 октантов, и для всех чисел, соответствующих точкам одного октанта, характерно одно и то же сочетание знаков компонент в выделенном базисе. Границами октантов являются три изотропных плоскости с уравнениями $a^i = 0$, где $i = 1, 2, 3$. Отметим также, что поскольку гиперболические алгебры являются алгебрами с единицей, определяемой выражением

$$1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n,$$

то два октанта рассматриваемого пространства являются выделенными. Это – октанты, содержащие 1 и -1; они характеризуются числами со всеми положительными или отрицательными компонентами соответственно.

Использование рассматриваемых алгебр требует наличия евклидовых или псевдоевклидовых свойств. В ряду алгебр: алгебра Дирака [2], кватернионов [3], бикватернионов [5] – существование таких свойств обеспечивает классический вид нормы числа. Однако количество таких алгебр незначительно, а среди коммутативно-ассоциативных алгебр к таковым относится (кроме комплексных чисел) только алгебра двойных чисел, в которой квадрат нормы числа имеет следующий вид [4]:

$$|A|^2 = |(a^1)^2 - (a^2)^2|.$$

Другую возможность для обнаружения в пространствах, ассоциированных с рассматриваемыми алгебрами, свойств, которые сходны со свойствами евклидовых или псевдоевклидовых пространств, дает метод хроногеометрии [8], [12]; использование этого метода применительно к H_3 рассматривается в первой части работы. Еще одна возможность для обнаружения искомых свойств дает применение ассоциированной с алгеброй симметричной полилинейной формы [9], имеющей, например, для алгебры H_3 следующий вид:

$$(A, B, C) = \frac{1}{3!}(a^1 b^2 c^3 + \dots + a^3 b^2 c^1).$$

С такой возможностью применительно к алгебре H_4 связана вторая часть настоящей работы, где форма, имеющая вид псевдоевклидовой метрики, определяется при помощи полилинейной формы от четырех векторов.

1. Поверхность одновременности в коммутативно-ассоциативных алгебрах (на примере H_3)

1.1. Аксиоматика

В основу физической интерпретации свойств рассматриваемого класса алгебр положим следующие положения, играющие роль аксиом:

1. Число алгебры можно связать с некоторым пространственно-временным событием.

2. Действительная ось пространства, направление которой задается единицей алгебры, трактуется как ось времени, а норма числа интерпретируется как интервал собственного времени наблюдателя, мировая линия которого совпадает с вектором, соответствующим данному числу.

3. Увеличение относительной скорости частицы или сигнала выражается в увеличении наклона касательной к мировой линии частицы в данной точке к мировой

линии наблюдателя, а покоящиеся материальные точки имеют в качестве мировых линий прямые, параллельные линии наблюдателя.

4. Световые сигналы, обладающие максимальной скоростью, связываются с изотропными гиперповерхностями алгебры; скорость световых сигналов полагается не зависящей от направления их распространения. В соответствии с этими положениями аналогами конусов будущего и прошлого пространства Минковского в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_3 , являются два упомянутых выше выделенных октанта с 1 и -1 соответственно. В отличие от пространства Минковского, в рассматриваемом пространстве область за пределами этих конусов также обладает изотропными направлениями, поскольку состоит из шести боковых конусов. В этой работе ограничимся наиболее простым частным случаем, когда мировая линия наблюдателя совпадает с действительной осью.

1.2. Экспоненциальная форма представления числа алгебры H_3 в базисе $(1, j, k)$

В выделенном базисе любое число представляется в виде:

$$A = a^1 \cdot e_1 + a^2 \cdot e_2 + a^3 \cdot e_3.$$

Для экспоненциальной функции в этом базисе имеет место формула:

$$\exp(a^1 \cdot e_1 + a^2 \cdot e_2 + a^3 \cdot e_3) = \exp(a^1) \cdot e_1 + \exp(a^2) \cdot e_2 + \exp(a^3) \cdot e_3. \quad (1)$$

Поскольку в рассматриваемой алгебре справедливо $|A|^3 = |a^1 a^2 a^3|$, то число с $a^i > 0$ представимо в виде

$$A = |A| \cdot \exp(b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3)$$

с условием

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0, \quad (2)$$

из которого вытекает тождество:

$$|\exp(b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3)| = 1.$$

Перейдем в другой базис алгебры, составленный из векторов:

$$\begin{cases} 1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ j = \sin \varphi_0 \cdot e_1 + \sin(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot e_2 + \sin(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot e_3 \\ k = \cos \varphi_0 \cdot e_1 + \cos(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot e_2 + \cos(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot e_3 \end{cases} \quad (3)$$

Этот базис составляют взаимно ортогональные (в привычном евклидовом смысле) векторы, а произвольный параметр φ_0 можно в определенном смысле трактовать как угол совместного поворота пары векторов j, k вокруг действительной оси. Если t, x, y – координаты числа в новом базисе, то в соответствии с правилами преобразования компонент числа при переходе к другому базису имеем систему:

$$\begin{cases} a^1 = t + \sin \varphi_0 \cdot x + \cos \varphi_0 \cdot y \\ a^2 = t + \sin(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot x + \cos(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot y \\ a^3 = t + \sin(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot x + \cos(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot y \end{cases} \quad (4)$$

откуда следует, что $t = (a^1 + a^2 + a^3)/3$. Поэтому в силу (2) число, представимое в экспоненциальной форме, в базисе $(1, j, k)$ имеет вид:

$$A = |A| \cdot e^{\alpha j + \beta k}.$$

Если модифицировать это экспоненциальное представление, введя обозначение $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, то получим

$$A = |A| \cdot e^{\rho(\cos \varphi \cdot j + \sin \varphi \cdot k)}. \quad (5)$$

Таким образом, согласно (5), число при таком представлении задается тремя параметрами: нормой числа $|A|$, "радиальной координатой" ρ и "угловой координатой" φ . Покомпонентная запись для (5) с учетом (1) и (3) имеет простой и красивый вид:

$$\begin{cases} a^1 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + \varphi]) \\ a^2 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + 2\pi/3 + \varphi]) \\ a^3 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + 4\pi/3 + \varphi]) \end{cases}$$

1.3. Метод задания расстояния между действительной осью и параллельной ей прямой

Для определения расстояния между мировыми линиями покоящихся частиц (одна из которых лежит на действительной оси) используем метод хроногеометрии. Рассмотрим обмен сигналами постоянной скорости $\nu \leq c$; для простоты точки-события испускания сигнала и приема обратного сигнала расположим симметрично на действительной оси относительно нулевого момента времени. Полагая в силу равенства скорости прямого и обратного сигналов равенство длин $|B - A_1| = |A_2 - B|$, получим:

$$(a^1 + T)(a^2 + T)(a^3 + T) = (T - a^1)(T - a^2)(T - a^3),$$

где $a^i + T > 0, T - a^i > 0$, что после раскрытия скобок дает:

$$(a^1 + a^2 + a^3) \cdot T^2 + a^1 a^2 a^3 = 0. \quad (6)$$

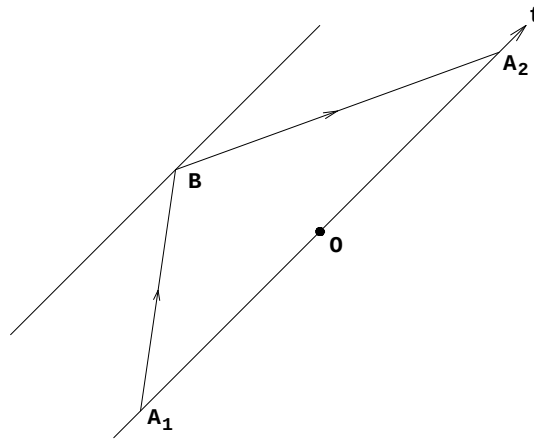


Рис. 1: Измерение расстояния между мировыми линиями путем обмена досветовыми сигналами.

Множество точек-событий, удовлетворяющих уравнению (6), образуют поверхность одновременности: для наблюдателя на действительной оси, находящегося в точке с координатой T , все эти события происходят в один и тот же нулевой момент времени. Поверхности одновременности принадлежит точка $A = (0, 0, 0)$, а плоскость, касательная к этой поверхности в начале координат, имеет уравнение:

$$a^1 + a^2 + a^3 = 0. \quad (7)$$

Подстановка (4) в (6) позволяет получить уравнение поверхности одновременности в форме зависимости времени прохождения сигнала (по часам неподвижного наблюдателя) T от введенных координат $\{t, x, y\}$ точки поверхности одновременности:

$$T^2 = \frac{1}{12}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} \left\{ t^2 + \frac{1}{t} \left[\frac{3}{4} xy(y \cdot \sin 3\varphi_0 - x \cdot \cos 3\varphi_0) + x^3 \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 + 2\pi/3) \sin(\varphi_0 + 4\pi/3) + y^3 \cos \varphi_0 \cos(\varphi_0 + 2\pi/3) \cos(\varphi_0 + 4\pi/3) \right] \right\}.$$

Согласно этому уравнению (и аналогичным уравнениям для других алгебр, в частности, алгебры H_4) первые слагаемые в правой части имеют евклидову форму, и при их доминировании над оставшимися слагаемыми квадрат времени прохождения сигнала линейно зависит от квадрата евклидова расстояния в пространстве мировых линий, что может представлять ценность для дальнейших физических интерпретаций.

1.4. Система криволинейных координат поверхности одновременности и преобразования, переводящие ее саму в себя

Учитывая важность инвариантных преобразований в современной физике, коснемся кратко темы нахождения преобразований, переводящих поверхность одновременности саму в себя. Введем на этой поверхности двухмерную систему координат $\{\rho, \varphi\}$, в чем-то аналогичную полярной системе координат на двухмерной плоскости, а именно:

$$\begin{cases} a^1 = (T - \rho) \cdot e^{R(\rho, \varphi) \sin(\varphi_0 + \varphi)} - T, \\ a^2 = (T - \rho) \cdot e^{R(\rho, \varphi) \sin(\varphi_0 + 2\pi/3 + \varphi)} - T, \\ a^3 = (T - \rho) \cdot e^{R(\rho, \varphi) \sin(\varphi_0 + 4\pi/3 + \varphi)} - T, \end{cases} \quad (8)$$

где зависимость $R = R(\rho, \varphi)$ находится из трансцендентного уравнения, получаемого подстановкой координат (8) в (6):

$$\bar{Z}^3 - \bar{Z}^2 [e^{-R \sin(\varphi_0 + \varphi)} + e^{-R \sin(\varphi_0 + 2\pi/3 + \varphi)} + e^{-R \sin(\varphi_0 + 4\pi/3 + \varphi)}] + 2\bar{Z} [e^{R \sin(\varphi_0 + \varphi)} + e^{R \sin(\varphi_0 + 2\pi/3 + \varphi)} + e^{R \sin(\varphi_0 + 4\pi/3 + \varphi)}] - 4 = 0,$$

где $\bar{Z} = (T - \rho)/T$.

В окрестности нуля при $a^1, a^2, a^3 \ll 1$, $R \ll 1$, $\rho \ll 1$ уравнения (8) упрощаются:

$$\begin{cases} a^1 \cong R \cdot T \cdot \sin(\varphi_0 + \varphi), \\ a^2 \cong R \cdot T \cdot \sin(\varphi_0 + 2\pi/3 + \varphi), \\ a^3 \cong R \cdot T \cdot \sin(\varphi_0 + 4\pi/3 + \varphi), \end{cases}$$

так что

$$a^1 + a^2 + a^3 \cong 0 \text{ и } (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \cong (R \cdot T)^2. \quad (9)$$

Таким образом, согласно (9), система координат (8) выделена: в окрестности нуля параметр R пропорционален евклидовому расстоянию от точки, расположенной на поверхности одновременности, до центра этой поверхности, в котором $R = 0$.

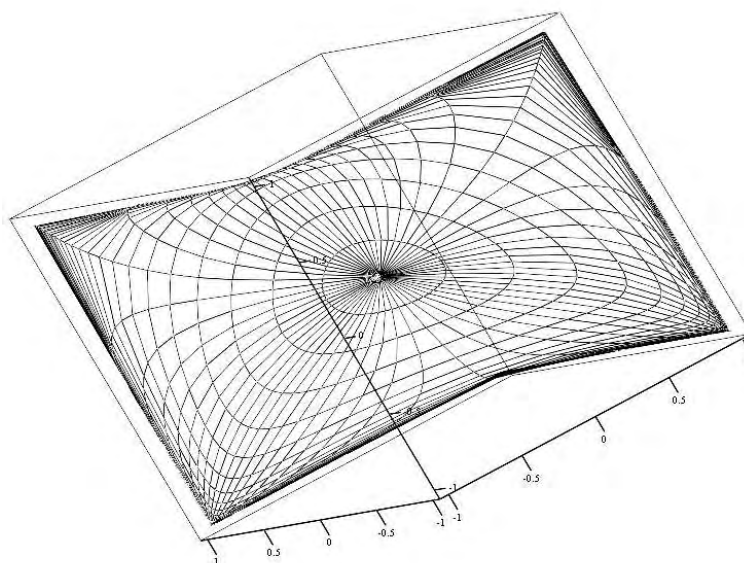


Рис. 2: Криволинейная система координат ρ, ϕ на поверхности одновременности.

Тогда искомые независимые преобразования поверхности одновременности есть "повороты" на угол $\Delta\varphi (\varphi \rightarrow \varphi + \Delta\varphi)$ и "преобразования подобия" с коэффициентом $K (\rho \rightarrow K \cdot \rho)$.

2. Представление преобразований Лоренца поворотами в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4

Поступая по аналогии с [10], определим скалярное произведение двух произвольных (с положительными значениями компонент) векторов A и B рассматриваемого пространства при помощи симметричной четырехформы пространства H_4 следующим образом:

$$(A, B) := \frac{(A, A, B, B)}{|A| \cdot |B|}.$$

Скалярное произведение двух векторов удовлетворяет свойствам положительности, однородности и нормированности:

1. $(A, B) > 0$;
2. $(kA, B) = (A, kB) = k(A, B)$;
3. $(A, A) = |A|^2$.

Скалярное произведение единичных векторов $a = A/|A|$ и $b = B/|B|$ может рассматриваться как угловая характеристика, определяющая связь двух задаваемых этими векторами направлений – оно выражается через компоненты частного этих векторов ($d = b/a$):

$$(a, b) = (d_1 d_2 + d_1 d_3 + \dots d_3 d_4)/6. \quad (10)$$

Рассмотрим в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4 , базис, состоящий из

векторов:

$$\begin{cases} 1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ j' = 3e_1 - e_2 - e_3 - e_4, \\ k' = \sqrt{2}(2e_2 - e_3 - e_4), \\ l' = \sqrt{6}(e_3 - e_4). \end{cases}$$

Обозначая координаты отношения двух рассматриваемых векторов в новом базисе через t_d, x_d, y_d, z_d и выражая (10) через эти компоненты, получим:

$$(a, b) = t_d^2 - x_d^2 - y_d^2 - z_d^2.$$

Назовем *поворотом* вектора B вокруг вектора A нелинейное преобразование ассоциируемого с алгеброй H_4 четырехмерного пространства, оставляющее неподвижными все векторы в направлении, задаваемом вектором A , и сохраняющее введенное скалярное произведение. Таким образом, в дополнение к другим представлениям группы Лоренца [13] может использоваться представление поворотами вокруг произвольной времениподобной оси в пространстве, связанном с алгеброй H_4 .

Результаты и выводы

Метод определения расстояний между мировыми линиями, предложенный для пространства, связанного с коммутативно-ассоциативной алгеброй H_3 (или H_4), позволяет выделить "евклидову составляющую".

Получена новая геометрическая интерпретация преобразований Лоренца как поворотов в пространстве, связанном с алгеброй H_4 . Возможно произвольное задание оси поворота; сказанное позволяет надеяться на применение такой новой интерпретации в релятивистской физике.

Литература

- [1] G. S. Asanov: *Finsler geometry, relativity and gauge theories*, Reidel, Dordrecht 1985.
- [2] D. Hestenes: *Space-time algebra*, Gordon and Breach, N. Y. 1966.
- [3] А. В. Березин, Ю. А. Курочкин и Е. А. Толкачев: *Кватернионы в релятивистской физике*, Наука и техника, Минск 1989.
- [4] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников: *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.
- [5] В. В. Кассандров: *Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика*, Изд-во Российского Университета Дружбы Народов, М. 1992.
- [6] М. А. Лаврентьев и Б. О. Шабат: *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М. 1977.
- [7] Р. В. Михайлов: *О некоторых вопросах 4-мерной топологии: обзор современных исследований*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.
- [8] Д. Г. Павлов: *Хронометрия трехмерного времени*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.
- [9] Д. Г. Павлов: *Обобщение аксиом скалярного произведения*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.
- [10] D. G. Pavlov: *Non-linear Relativistic Invariance for Quadrahyperbolic Numbers*, arXiv:gr-qc/0212090.
- [11] П. К. Рашевский: *Введение в риманову геометрию и тензорный анализ*, Гостехиздат, М. 1965.
- [12] Дж. Синг: *Общая теория относительности*, Ин. Лит., М. 1963.
- [13] Ф. И. Федоров: *Группа Лоренца*, Наука, М. 1979.

ПРИНЦИП ДЕФОРМАЦИИ КАК ОСНОВА ФИЗИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Ю. А. Рылов

Институт проблем механики РАН, Москва

rylov@ipmnet.ru

<http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm>

<http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm>

Физическая геометрия изучает взаимное расположение геометрических объектов и точек в пространстве или в пространстве-времени, которое описывается функцией расстояния d , или мировой функцией $\sigma = d^2/2$. Предлагается новый общий метод построения геометрии. Собственно евклидова геометрия записывается в терминах ее мировой функции σ_E . Любая физическая геометрия $\mathcal{G}$ получается из евклидовой геометрии как результат замены евклидовой мировой функции σ_E мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$. Этот метод очень прост и эффективен. Он вводит новое свойство геометрии: невырожденность. Используя этот метод, можно построить детерминированную геометрию пространства-времени с изначально стохастическим движением свободных частиц и геометризванной массой частиц. Такая пространственно-временная геометрия, определенная надлежащим образом (с квантовой постоянной как атрибутом пространства-времени), позволяет объяснить квантовые эффекты как результат статистического описания стохастического движения частиц (без использования принципов квантовой механики).

Введение

Геометрия лежит в основании физики и правильная концепция геометрии очень важна для последовательного развития физики. Принято считать, что все проблемы обоснования геометрии решены много лет назад. Это верно, но это касается геометрии, рассматриваемой как логическое построение. Физиков интересует геометрия, как наука о взаимном расположении геометрических объектов в пространстве или в пространстве-времени. Эти два аспекта совершенно различны, и можно говорить о двух различных геометриях, используя для них различные названия. Геометрия как логическое построение – это всегда однородная геометрия, где все точки имеют одинаковые свойства. Известный математик Феликс Клейн [1] считал, что только однородные геометрии заслуживают названия геометрии. По его мнению, риманову геометрию (вообще говоря, неоднородную) следует называть римановой географией, или римановой топографией. Другими словами, Феликс Клейн рассматривал геометрию главным образом как логическое построение. Мы будем называть такую геометрию математической геометрией.

Геометрию, рассматриваемую как науку о взаимном расположении геометрических объектов, мы будем называть физической геометрией, потому что в этом аспекте геометрии заинтересованы главным образом физики. Физические геометрии, вообще говоря, неоднородны, хотя они могут быть и однородными тоже. Например, собственно евклидова геометрия, с одной стороны, является физической геометрией, но, с другой стороны, она является логическим построением, потому что она однородна и может быть построена из простых элементов (точек, прямых, плоскостей

и т. д.). Все элементы евклидовой геометрии имеют одинаковые свойства в разных местах. Эти свойства могут быть описаны с помощью аксиом. Одинаковость геометрических элементов позволяет построить математическую (однородную) геометрию с помощью логических рассуждений. Собственно евклидова геометрия была построена много лет назад Евклидом. Непротиворечивость этого построения была исследована и доказана в [2]. Такое построение очень сложно даже в случае собственно евклидовой геометрии, потому что простые геометрические объекты используются для построения более сложных объектов, и сложный геометрический объект $\mathcal{O}$ нельзя построить без построения более простых составляющих этого объекта $\mathcal{O}$.

Заметим, что строя свою геометрию, Евклид не использовал координат для маркировки точек пространства. Его описание однородной геометрии было бескоординатным. Это означает, что координаты не являются необходимым атрибутом геометрии. Система координат есть метод описания, который может использоваться или не использоваться. *Применение координат и других средств описания ставит проблему отделения свойств геометрии от свойств средств описания.* Обычно разделение свойств геометрии и свойств системы координат осуществляется следующим образом. Геометрия описывается во всех возможных системах координат. Преобразования от одной системы координат к другой образуют группу преобразований. Инварианты этой группы преобразований имеют одни и те же значения во всех системах координат, и следовательно, они описывают свойства рассматриваемой геометрии.

В этом месте мы должны сделать важное замечание. *Любая геометрия есть совокупность всех геометрических объектов $\mathcal{O}$ и всех отношений $\mathcal{R}$ между ними.* Всякий геометрический объект $\mathcal{O}$ есть подмножество точек некоторого точечного множества Ω , на котором задана геометрия. В римановой геометрии (и других неоднородных геометриях) множество Ω есть n -мерное многообразие, точки P которого маркируются n координатами $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$. Эта маркировка (арифметизация пространства) рассматривается как необходимый атрибут римановой геометрии. Большинство геометров полагают, что риманова геометрия (и, вообще, физическая геометрия) не может быть построена без введения многообразия. Иначе говоря, они полагают, что многообразие есть атрибут римановой геометрии (и, вообще, любой непрерывной геометрии). Эта вера основана на том факте, что риманова геометрия всегда строится на некотором многообразии. Однако, это заблуждение. Тот факт, что мы всегда строим физическую геометрию на некотором многообразии, не означает, что физическая геометрия не может быть построена без ссылки на многообразие или систему координат. Разумеется, некоторая маркировка точек пространства удобна, но она не имеет отношения к построению геометрии, и *физическую геометрию следует строить без ссылки на систему координат.* Использование системы координат налагает ограничения на свойства построенной физической геометрии. Например, если мы используем непрерывную систему координат (многообразие), мы можем построить только непрерывную физическую геометрию. Чтобы построить дискретную физическую геометрию, построение геометрии не должно содержать ссылки на систему координат.

Здесь мы представляем метод построения физической геометрии, который не содержит ссылки на систему координат и другие средства описания. Он содержит ссылку только на функцию расстояния d , которая является существенной характеристикой физической геометрии.

Если геометрия неоднородна, и прямые, находящиеся в разных местах, имеют различные свойства, то нельзя описать свойства этих прямых с помощью аксиом, потому что нет таких аксиом, которые были бы справедливы для всей геометрии.

Взаимное расположение точек в физической (неоднородной) геометрии, заданной на множестве Ω точек P , описывается с помощью функции расстояния $d(P, Q)$

$$d : \quad \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \quad d(P, P) = 0, \quad \forall P \in \Omega \quad (1)$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. Функция расстояния d является главной характеристикой физической геометрии. Кроме того функция расстояния d есть *единственная характеристика* любой физической геометрии. Функция расстояния d полностью определяет физическую геометрию. Это утверждение очень важно для построения физической геометрии. Ниже оно будет доказано. Любая физическая геометрия $\mathcal{G}$ строится из собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_E$ с помощью деформации, т.е. заменой евклидовой функции расстояния d_E на функцию расстояния нужной геометрии. Например, строя риманову геометрию, мы заменяем бесконечно малое евклидово расстояние $dS_E = \sqrt{g_{Eik}dx^i dx^k}$ римановым бесконечно малым расстоянием $dS = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$. По-видимому, нет метода построения неоднородной физической геометрии, отличного от деформации евклидовой геометрии (или некоторой другой однородной геометрии), которая строится как математическая геометрия на основе аксиоматики и логики. К сожалению, традиционный метод построения римановой геометрии содержит ссылку на систему координат. Однако, эта ссылка может быть устранена, если использовать конечное расстояние d вместо бесконечно малого расстояния dS .

Для описания физической геометрии используется мировая функция σ [3], которая связана с функцией расстояния d с помощью соотношения $\sigma(P, Q) = \frac{1}{2}d^2(P, Q)$. Мировая функция определяется соотношением

$$\sigma : \quad \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \quad \sigma(P, P) = 0, \quad \forall P \in \Omega \quad (2)$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. Использование мировой функции более удобно в том отношении, что мировая функция вещественна даже тогда, когда функция расстояния d мнима и не удовлетворяет определению (1). Это важно при рассмотрении геометрии пространства-времени как физической геометрии.

Вообще говоря, физическая геометрия не может быть построена как логическая конструкция, потому что любое изменение мировой функции сопровождается изменением аксиоматики. Логическое построение практически нереально, потому что множество физических геометрий континуально. Содержит ли мировая функция всю информацию, необходимую для построения физической геометрии? Это очень важный вопрос. Например, можно ли извлечь информацию о размерности пространства из мировой функции для случая евклидовой геометрии? Несколько ниже мы дадим положительный ответ на этот вопрос. Сейчас мы сформулируем метод построения физической геометрии.

Представим себе, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_E$ может быть описана в терминах и только в терминах евклидовой мировой функции σ_E . Такое описание называется *σ -имманентным*. Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}_E$ и любое соотношение $\mathcal{R}_E$ между геометрическими объектами в геометрии $\mathcal{G}_E$ может быть описано в терминах σ_E в виде $\mathcal{O}_E(\sigma_E)$ и $\mathcal{R}_E(\sigma_E)$. Чтобы получить соответствующий геометрический объект $\mathcal{O}$ и соответствующее соотношение $\mathcal{R}$ между геометрическими объектами в другой физической геометрии $\mathcal{G}$, достаточно заменить евклидову мировую функцию σ_E мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$ в описании $\mathcal{O}_E(\sigma_E)$ и $\mathcal{R}_E(\sigma_E)$.

$$\mathcal{O}_E(\sigma_E) \rightarrow \mathcal{O}_E(\sigma), \quad \mathcal{R}_E(\sigma_E) \rightarrow \mathcal{R}_E(\sigma)$$

Индекс 'Е' показывает, что геометрический объект построен на основе евклидовой аксиоматики. При таком построении не нужны ни аксиомы, ни логические рассуждения. Не нужно никаких средств описания (топологических структур, непрерывности, многообразия, размерности и т. д.). Фактически используется аксиоматика евклидовой геометрии, которая деформируется заменой $\sigma_E \rightarrow \sigma$. Эта замена может быть интерпретирована как деформация евклидова пространства. Отсутствие ссылок на средства описания является большим преимуществом рассматриваемого метода построения геометрии. Кроме того, нет необходимости строить всю геометрию $\mathcal{G}$. Мы можем построить и исследовать только интересующую нас часть геометрии $\mathcal{G}$. Любая физическая геометрия может быть построена как результат деформации евклидовой геометрии.

Геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается с помощью каркас-оболочного метода [4]. Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множество объединений и пересечений элементарных геометрических объектов (ЭГО).

Конечное множество $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset \Omega$ параметров оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$ образует *каркас* элементарного объекта (ЭГО) $\mathcal{E} \subset \Omega$. Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих ЭГО называется *оболочкой* его каркаса $\mathcal{P}^n$. Для непрерывной физической геометрии оболочка $\mathcal{E}$ представляет собой обычно непрерывное множество точек. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$, определяющая ЭГО, есть функция текущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ есть алгебраическая функция s аргументов $w = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ есть мировая функция от двух аргументов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, либо принадлежащих каркасу $\mathcal{P}^n$, либо совпадающих с текущей точкой R . Таким образом, элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется своим каркасом и своей оболочной функцией.

Например, сфера $\mathcal{S}(P_0, P_1)$ с центром в точке P_0 определяется соотношением

$$\mathcal{S}(P_0, P_1) = \{R | f_{P_0 P_1}(R) = 0\}, \quad f_{P_0 P_1}(R) = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0, R)}, \quad (3)$$

где P_1 – точка, принадлежащая сфере. Элементарный объект $\mathcal{E}$ определяется сразу во всех физических геометриях. В частности, он определяется в собственно евклидовой геометрии, где мы можем получить его истолкование. Мы интерпретируем элементарные геометрические объекты $\mathcal{E}$, используя наше знание собственно евклидовой геометрии. Таким образом, *собственно евклидова геометрия используется как эталонная геометрия для интерпретации любой физической геометрии*.

Мы не пытаемся повторять предписания Евклида для построения геометрии. Вместо этого мы берем геометрические объекты и соотношения между ними, полученные в рамках евклидовой геометрии, и записываем их в терминах мировой функции. После этого мы деформируем их, заменяя евклидову мировую функцию σ_E мировой функцией σ строящейся геометрии. На практике построение элементарного геометрического объекта сводится к представлению соответствующего евклидова геометрического объекта в σ -имманентном виде, т. е. в терминах евклидовой мировой функции. Последняя проблема есть проблема собственно евклидовой геометрии. Проблема представления геометрического объекта (или соотношения между объектами) в σ -имманентном виде есть действительная проблема построения физической геометрии.

Очень важно, что такое построение не использует координат и других методов описания, потому что использование методов описания накладывает ограничения на построенную геометрию. Всякое средство описания есть некоторая структура St , заданная на базовой евклидовой геометрии с мировой функцией σ_E . Замена $\sigma_E \rightarrow \sigma$

достаточна для построения единственной физической геометрии $\mathcal{G}_\sigma$. Если мы используем дополнительную структуру St для построения физической геометрии, мы получаем, вообще говоря, другую геометрию $\mathcal{G}_{St}$, которая совпадает с $\mathcal{G}_\sigma$ не для всех σ , а только для некоторых мировых функций σ . Таким образом, использование дополнительных средств описания ограничивает список возможных физических геометрий. Например, если мы используем координатное описание при построении физической геометрии, то полученная геометрия оказывается непрерывной, потому что описание с помощью координат эффективно только для непрерывных геометрий, где число координат совпадает с размерностью геометрии.

Строя геометрию $\mathcal{G}$ с помощью деформации, мы существенно используем тот факт, что евклидова геометрия $\mathcal{G}_E$ есть математическая геометрия, которая была построена на основе евклидовой аксиоматики и логических рассуждений.

Мы будем называть этот метод построения физической геометрии *принципом деформации* и понимать деформацию в широком смысле этого слова. В частности, деформация евклидова пространства может преобразовывать евклидову поверхность в точку и евклидову точку в поверхность. Такая деформация может удалять некоторые точки евклидова пространства, нарушая его непрерывность или уменьшая число его измерений. Такая деформация может добавлять точки к евклидову пространству, увеличивая число его измерений. Другими словами, принцип деформации – это очень общий метод построения физической геометрии.

Принцип деформации как метод построения физической геометрии имеет две стадии:

(i) Представление геометрических объектов $\mathcal{O}$ и соотношений $\mathcal{R}$ евклидовой геометрии в σ -имманентной форме, т. е. в терминах и только в терминах мировой функции σ_E .

(ii) Замена евклидовой функции σ_E мировой функцией σ искомой геометрии.

Физическая геометрия, построенная с помощью только принципа деформации (т. е. без использования других методов) называется *T-геометрией* (*трубчатой геометрией, tubular geometry*) [5, 4, 6]. T-геометрия есть наиболее общий вид физической геометрии.

Применение принципа деформации как метода построения физической геометрии ограничено двумя условиями.

1. Описывая евклидовы геометрические объекты $\mathcal{O}(\sigma_E)$ и евклидовы соотношения $\mathcal{R}(\sigma_E)$ в терминах σ_E , мы не должны использовать специальные свойства евклидовой мировой функции σ_E . В частности, определения объектов $\mathcal{O}(\sigma_E)$ и соотношений $\mathcal{R}(\sigma_E)$ должны иметь один и тот же вид в евклидовых геометриях разных размерностей. Они не должны зависеть от размерности евклидова пространства.

2. Принцип деформации должен применяться отдельно от других методов построения геометрии. В частности, нельзя применять топологические структуры при построении физической геометрии. При построении физической геометрии нельзя использовать геометрические структуры, потому что для эффективного использования принципа деформации построенная физическая геометрия должна определяться только мировой функцией (метрикой).

Описание собственно евклидова пространства в терминах мировой функции

Ключевой точкой построения физической геометрии является описание евклидовой геометрии в терминах евклидовой мировой функции σ_E . Мы будем называть такое описание *σ -имманентным описанием*. К сожалению, оно не было известно в течении многих лет, хотя все физики знали, что бесконечно малый интервал $dS = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$ есть единственная существенная характеристика геометрии пространства-времени, и изменяя это выражение, мы изменяем геометрию пространства-времени. С физической точки зрения σ -имманентное описание очень разумно, поскольку оно не содержит никакой посторонней информации. σ -имманентное описание не ссылается на средства описания (размерность, многообразие, систему координат). Отсутствие ссылок на средства описания важно в том отношении, что *не возникает необходимости отделять информацию о самой геометрии от информации о средствах описания*. σ -имманентное описание содержит только существенную характеристику геометрии: ее мировую функцию. Впервые σ -имманентное описание было получено в 1990 году [5].

Первый вопрос, касающийся σ -имманентного описания такой. Содержит ли мировая функция информацию, достаточную для описания физической геометрии? Ответ положительный, по крайней мере, в случае собственно евклидовой геометрии, и этот ответ дается доказательством следующей теоремы.

Пусть σ -пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть множество Ω точек P с заданной на нем мировой функцией σ

$$\sigma : \quad \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \quad \sigma(P, P) = 0, \quad \forall P \in \Omega, \quad (4)$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. Пусть вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{P_0, P_1\}$ – упорядоченное множество из двух точек P_0, P_1 , и его длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ определяется соотношением $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = 2\sigma(P_0, P_1)$.

Теорема

σ -пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть n -мерное собственно евклидово пространство, если и только если мировая функция σ удовлетворяет следующим условиям, записанным в терминах мировой функции σ .

I. Условие симметрии:

$$\sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \quad \forall P, Q \in \Omega. \quad (5)$$

II. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \dots, P_n\} : \quad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \quad F_k(\Omega^{k+1}) = 0, \quad k > n, \quad (6)$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ – определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)||, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1). \quad (8)$$

Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ суть базисные векторы прямолинейной системы координат K_n с началом координат в точке P_0 . Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$,

$i, k = 1, 2, \dots, n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \quad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_l), \quad i, l = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

III. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) (x_i(P) - x_i(Q)) (x_k(P) - x_k(Q)), \quad \forall P, Q \in \Omega, \quad (10)$$

где координаты $x_i(P)$ точки P суть ковариантные координаты вектора $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}$, определенные соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{P}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

IV: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

V. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{P}) = y_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

рассматриваемая как система уравнений для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, всегда имеет одно и только одно решение. Условия II–V содержат ссылку на размерность n евклидова пространства.

Поскольку возможно σ -имманентное описание собственно евклидовой геометрии, то оно возможно и для любой Т-геометрии, потому что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ и любое соотношение $\mathcal{R}$ в физической геометрии $\mathcal{G}$ получается из соответствующего геометрического объекта $\mathcal{O}_E$ и из соответствующего соотношения $\mathcal{R}_E$ в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_E$ с помощью замены $\sigma_E \rightarrow \sigma$ в описании объекта $\mathcal{O}_E$ и соотношения $\mathcal{R}_E$. Для того, чтобы такая замена была возможна, описание объекта $\mathcal{O}_E$ и соотношения $\mathcal{R}_E$ не должно ссылаться на специальные свойства мировой функции σ_E , описываемые условиями II–V. Формальным признаком применения условий II–V является ссылка на размерность n , потому что любое из условий II–V содержит ссылку на размерность n собственно евклидова пространства.

Если, тем не менее, мы используем одно из специальных свойств II–V евклидова пространства в σ -имманентном описании геометрического объекта $\mathcal{O}$, или соотношения $\mathcal{R}$, мы ссылаемся на размерность n и в конечном счете на систему координат, которая является только средством описания.

Покажем это на примере определения прямой в n -мерном евклидовом пространстве. Прямая $\mathcal{T}_{P_0 Q}$ в собственно евклидовом пространстве определяется двумя ее точками P_0 и Q ($P_0 \neq Q$) как множество точек R

$$\mathcal{T}_{P_0 Q} = \{R \mid \mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \parallel \mathbf{P}_0 \mathbf{R}\}, \quad (14)$$

где условие $\mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \parallel \mathbf{P}_0 \mathbf{R}$ означает, что векторы $\mathbf{P}_0 \mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0 \mathbf{R}$ коллинеарны, т. е. скалярное произведение $(\mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{R})$ этих двух векторов удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \parallel \mathbf{P}_0 \mathbf{R} : \quad (\mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{R})^2 = (\mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{Q}) (\mathbf{P}_0 \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{R}), \quad (15)$$

где скалярное произведение определяется соотношением (8). Таким образом, прямая линия $\mathcal{T}_{P_0 Q}$ определяется σ -имманентно, т. е. в терминах мировой функции σ . Мы

будем использовать два различных названия (прямая и трубка) для геометрического объекта $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Мы будем использовать термин "прямая", когда хотим подчеркнуть, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ есть результат деформации евклидовой прямой. Мы будем использовать термин "трубка", когда хотим подчеркнуть, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ может быть многомерной поверхностью.

В евклидовой геометрии можно использовать другое определение коллинеарности. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, если составляющие векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в некоторой системе координат пропорциональны. Например, в n -мерной евклидовой геометрии можно ввести прямолинейную систему координат, выбрав $n + 1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ и образовав n базисных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда условие коллинеарности может быть записано в виде n уравнений

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{R} : \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = a (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

где a – некоторая вещественная постоянная. Соотношения (16) являются соотношениями для ковариантных составляющих векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в рассматриваемой системе координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, i = 1, 2, \dots, n$. Пусть точки $\mathcal{P}^n$ выбраны таким образом, что $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \neq 0$. Тогда, исключая параметр a из соотношений (16), получаем $n - 1$ независимых соотношений, и геометрический объект

$$\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{R}\} = \bigcap_{i=2}^{i=n} \mathcal{S}_i, \quad (17)$$

$$\mathcal{S}_i = \left\{ R \mid \left| \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{Q})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{Q})} = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R})} \right\}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (18)$$

определенный в соответствии с (16), зависит от $n + 2$ точек $Q, \mathcal{P}^n$. Этот геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ определен σ -имманентно. Он является комплексом, состоящим из прямой линии и системы координат, представленной $n + 1$ точками $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$. В евклидовом пространстве зависимость от выбора системы координат и от $n + 1$ точек $\mathcal{P}^n$, определяющих эту систему координат, фиктивна. Геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит только от двух точек P_0, Q и совпадает с прямой линией $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Однако, при деформации евклидова пространства геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{T}_{P_0Q}$ деформируются различно. Точки $P_1, P_2, \dots, P_n$ перестают быть фиктивными в определении объекта $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, и геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{T}_{P_0Q}$ становятся различными, вообще говоря, геометрическими объектами. Однако, будучи, вообще говоря, различными, они могут совпадать в некоторых частных случаях.

Какой из двух геометрических объектов в деформированной геометрии следует рассматривать как прямую линию, проходящую через точки P_0 и Q в геометрии $\mathcal{G}$? Разумеется, это $\mathcal{T}_{P_0Q}$, потому что ее определение не содержит ссылки на систему координат, тогда как определение величины $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит от выбора системы координат, представленной точками $\mathcal{P}^n$. Вообще говоря, определения геометрических объектов и соотношений между ними не должны ссылаться на средства описания.

Однако, в данном случае геометрический объект $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является, вообще говоря, $(n - 1)$ -мерной поверхностью, тогда как объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является пересечением $(n - 1)$ поверхностей размерности $(n - 1)$, т. е. $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является, вообще говоря, одномерной кривой. Одномерная кривая $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ лучше соответствует нашим идеям о прямой линии, чем $(n - 1)$ -мерная поверхность $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Тем не менее, в физической геометрии $\mathcal{G}$ именно $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является аналогом евклидовой прямой линии.

Очень трудно преодолеть нашу традиционное представление, что евклидова прямая не может быть деформирована в многомерную поверхность, и эта идея многие годы препятствовала построению T -геометрий. На практике использовались

такие физические геометрии, где деформация евклидова пространства преобразовывала евклидовы прямые в одномерные линии. Это означает, что выбирались геометрии, в которых геометрические объекты $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{QP^n}$ совпадали

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \mathcal{T}_{QP^n}. \quad (19)$$

Условие (19) совпадения объектов $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{QP^n}$, наложенное на Т-геометрию, ограничивает список возможных Т-геометрий.

Рассмотрим метрическую геометрию, заданную на множестве Ω точек. Метрическое пространство $M = \{\rho, \Omega\}$ задается метрикой (расстоянием) ρ .

$$\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty) \subset \mathbf{R}, \quad (20)$$

$$\rho(P, P) = 0, \quad \rho(P, Q) = \rho(Q, P), \quad \forall P, Q \in \Omega, \quad (21)$$

$$\rho(P, Q) \geq 0, \quad \rho(P, Q) = 0, \quad \text{iff } P = Q, \quad \forall P, Q \in \Omega, \quad (22)$$

$$0 \leq \rho(P, R) + \rho(R, Q) - \rho(P, Q), \quad \forall P, Q, R \in \Omega, \quad (23)$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. На первый взгляд, метрическое пространство есть частный случай σ -пространства (4), и метрическая геометрия является специальным случаем Т-геометрии с дополнительными ограничениями (22), (23), налагаемыми на мировую функцию $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$. Однако, это не так, потому что метрическая геометрия не использует принцип деформации. Тот факт, что евклидова геометрия может быть описана σ -имманентно, так же как условия (6) – (13), были неизвестны до 1990 года. Дополнительные (по отношению к σ -пространству) условия (22), (23) налагаются для того, чтобы исключить ситуацию, когда прямая не является одномерной линией. Дело в том, что в метрической геометрии кратчайшая (прямая) может быть построена только в том случае, когда она одномерна.

Рассмотрим множество $\mathcal{EL}(P, Q, a)$ точек R

$$\mathcal{EL}(P, Q, a) = \{R | f_{P,Q,a}(R) = 0\}, \quad f_{P,Q,a}(R) = \rho(P, R) + \rho(R, Q) - 2a. \quad (24)$$

Если метрическое пространство совпадает с собственно евклидовым пространством, это множество точек является эллипсоидом с фокусами в точках P, Q и большой полуосью a . Соотношения $f_{P,Q,a}(R) > 0$, $f_{P,Q,a}(R) = 0$, $f_{P,Q,a}(R) < 0$ определяют соответственно внешние точки, граничные точки и внутренние точки эллипсоида. Если $\rho(P, Q) = 2a$, то получается вырожденный эллипсоид, который совпадает с сегментом $\mathcal{T}_{[PQ]}$ прямой линии, проходящей через точки P, Q . В собственно евклидовой геометрии вырожденный эллипсоид является одномерным сегментом прямой линии, но совсем не очевидно, что одномерность будет иметь место в случае произвольной метрической геометрии. Для того, чтобы такой вырожденный эллипсоид был одномерным в любом метрическом пространстве необходимо, чтобы любой вырожденный эллипсоид $\mathcal{EL}(P, Q, \rho(P, Q)/2)$ не имел внутренних точек. Это условие записывается в виде

$$f_{P,Q,\rho(P,Q)/2}(R) = \rho(P, R) + \rho(R, Q) - \rho(P, Q) \geq 0. \quad (25)$$

Сравнивая соотношение (25) с соотношением (23), мы видим, что ограничение (23) вводится для того, чтобы сделать прямую (кратчайшую) линию одномерной (отсутствие внутренних точек в геометрическом объекте, определяемом двумя точками).

Поскольку метрическая геометрия не использует принцип деформации, то это – бедная геометрия. В рамках этой геометрии нельзя построить скалярное произведение двух векторов, определить линейную зависимость векторов и построить такие

геометрические объекты как плоскости. Все эти объекты, так же как и другие, строятся на основе деформации евклидовой геометрии.

Обобщая метрическую геометрию, Менгер [7] и Блюменталь [8] отбросили аксиому треугольника (23). Они пытались построить *дистантную геометрию*, которая была бы более общей геометрией, чем метрическая. Поскольку они не использовали принцип деформации, они не могли определить кратчайшую (прямую) линию без ссылки на топологическое понятие кривой $\mathcal{L}$, определенной как непрерывное отображение

$$\mathcal{L} : [0, 1] \rightarrow \Omega, \quad (26)$$

которое не может быть выражено только через расстояние. В результате дистантная геометрия не получилась чисто метрической геометрией, какой является Т-геометрия.

Условия применения принципа деформации

Римановы геометрии удовлетворяют условию (19). Риманова геометрия является разновидностью неоднородной геометрии, и следовательно она использует принцип деформации. При построении римановой геометрии бесконечно малое евклидово расстояние деформируется в бесконечно малое риманово расстояние. Деформация выбрана таким образом, что евклидова прямая $\mathcal{T}_{E P_0 Q}$, проходящая через точку P_0 , коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0 \mathbf{Q}$, преобразовывалась бы в геодезическую $\mathcal{T}_{P_0 Q}$, проходящую через точку P_0 , коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0 \mathbf{Q}$ в римановом пространстве.

Заметим, что в Т-геометрии, удовлетворяющей условию (19) для всех точек $Q, \mathcal{P}^n$, прямая линия

$$\mathcal{T}_{Q_0; P_0 Q} = \{R \mid \mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \parallel \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}\}, \quad (27)$$

проходящая через точку Q_0 коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0 \mathbf{Q}$, вообще говоря, не является одномерной кривой. Если бы римановы геометрии были Т-геометриями, они должны были бы содержать неоднородные геодезические (прямые). Но римановы геометрии не являются Т-геометриями, потому что при их построении был использован не только принцип деформации, а были использованы также другие методы, содержащие ссылку на средства описания. В частности, в римановых геометриях, вообще говоря, отсутствует абсолютный параллелизм, и нельзя определить прямую линию (27), потому что соотношение $\mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \parallel \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}$ не определено, если точки P_0 и Q_0 не совпадают. С одной стороны, отсутствие абсолютного параллелизма позволяет обойти проблему неоднородности прямых линий. Но с другой стороны, это делает римановы геометрии непоследовательными, поскольку они перестают быть Т-геометриями, которые последовательны по построению (см. детали в [9]).

Дело в том, что использование *одного только принципа деформации достаточно для построения физической геометрии*. Кроме того, такое построение последовательно, поскольку исходная евклидова геометрия последовательна и, деформируя ее, мы не используем никаких логических рассуждений. Если мы вводим некоторую дополнительную структуру (например, топологическую структуру), мы получаем обогащенную физическую геометрию, т. е. физическую геометрию с дополнительной структурой на ней. Физическая геометрия с дополнительной структурой на ней – более содержательная конструкция, чем просто физическая геометрия. Однако, это верно только в том случае, если дополнительная структура рассматривается как дополнение к физической геометрии. Если же мы используем дополнительную структуру в построении геометрии, то мы отождествляем эту дополнительную структуру

с одной из структур физической геометрии. Если же мы требуем, чтобы эта дополнительная структура была одной из структур физической геометрии, мы ограничиваем применение принципа деформации и ограничиваем список возможных физических геометрий. Ведь совпадение дополнительной структуры с некоторой структурой физической геометрии возможно не для всех физических геометрий, а только для некоторых из них.

Пусть, например, мы используем понятие кривой $\mathcal{L}$ (26) для построения физической геометрии. Понятие кривой $\mathcal{L}$, рассматриваемой как непрерывное отображение, есть топологическая структура, которая не может быть выражена через расстояние или мировую функцию. Введение отображения (26) требует введения топологического пространства и, в частности, понятия непрерывности. Если мы отождествляем топологическую кривую (26) с "метрической" кривой, определенной как ломаная линия

$$\mathcal{T}_{br} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}, \quad \mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]} = \left\{ R \mid \sqrt{2\sigma(P_i, P_{i+1})} - \sqrt{2\sigma(P_i, R)} - \sqrt{2\sigma(R, P_{i+1})} \right\}, \quad (28)$$

состоящая из отрезков $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ прямой линии между точками P_i, P_{i+1} , мы ограничиваем список возможных геометрий, потому что такое отождествление возможно только в некоторых геометриях. Отождествляя (26) и (28), мы исключаем все дискретные физические геометрии и те непрерывные физические геометрии, где сегмент $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ прямой линии есть поверхность, а не одномерное множество точек. Таким образом, дополнительные структуры могут приводить к (i) обогащенным физическим геометриям, (ii) ограниченным физическим геометриям и (iii) ограниченно обогащенным геометриям. Результат зависит от метода использования дополнительной структуры.

Заметим, что некоторые ограничения (непрерывность, выпуклость, отсутствие абсолютного параллелизма), налагаемые на физические геометрии являются результатом несогласованности применяемых методов построения геометрии. В Т-геометрии, которая использует только принцип деформации, таких ограничений нет. Кроме того Т-геометрия обладает некоторым новым свойством физической геометрии, которое традиционно не принимается другими версиями геометрии. Это свойство, называемое *невыврожденностью геометрии*, следует прямо из применения произвольных деформаций собственно евклидовой геометрии.

Геометрия вырождена в точке P_0 в направлении вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$, $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \neq 0$, если соотношения

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R} : \quad (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R}) = \sqrt{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{R}|}, \quad |\mathbf{P}_0\mathbf{R}| = a \neq 0, \quad (29)$$

рассматриваемые как уравнения для определения точки R , имеют не более одного решения для любых значений $a \neq 0$. В противном случае геометрия невырождена в точке P_0 в направлении вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$. Заметим, что первое уравнение (29) есть условие параллельности векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$.

Собственно евклидова геометрия вырождена, т. е. она вырождена во всех точках в направлении всех векторов.

Рассматривая геометрию Минковского, следует различать геометрию Минковского и Т-геометрию Минковского. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией, но различаются определением параллельности. В Т-геометрии Минковского параллельность двух векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ определяется первым уравнением (29). Это определение основано на принципе деформации. В геометрии Минковского параллельность определяется соотношением типа (16)

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R} : \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}) = a (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad a > 0, \quad (30)$$

где точки $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ определяют прямолинейную систему координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ в n -мерной геометрии Минковского (n -мерная псевдоевклидова геометрия индекса 1). Зависимость определения (30) от точек $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ фиктивна, но зависимость от числа $n + 1$ точек $\mathcal{P}^n$ существенна. Таким образом, определение (30) зависит от метода описания геометрии.

Т-геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех времениподобных векторов, и она невырождена, вообще говоря, во всех точках в направлении всех пространственноподобных векторов. Геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех векторов. Традиционно используют геометрию Минковского, игнорируя невырожденность в пространственноподобных направлениях.

Рассматривая собственно риманову геометрию, следует делать различие между римановой Т-геометрией и римановой геометрией. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией и различаются в определении параллелизма. В римановой Т-геометрии параллелизм двух векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ определяется первым соотношением (29). В римановой геометрии параллелизм двух векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ определен только в случае, когда точки P_0 и Q_0 совпадают. Параллелизм удаленных векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$, вообще говоря, не определен. Этот факт известен как отсутствие абсолютного параллелизма.

Собственно риманова Т-геометрия локально вырождена, т. е. она вырождена во всех точках P_0 в направлении всех векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$. В общем случае, когда $P_0 \neq Q_0$, риманова Т-геометрия, вообще говоря, невырождена. Собственно риманова геометрия вырождена, потому что она вырождена локально, тогда как нелокальная невырожденность не определена в римановой геометрии из-за отсутствия абсолютного параллелизма. Традиционно используется риманова геометрия, а свойство невырожденности полностью игнорируется.

С точки зрения традиционного подхода к физической геометрии невырожденность есть нежелательное свойство физической геометрии, хотя с точки зрения логики и с точки зрения принципа деформации невырожденность является естественным свойством физической геометрии. Нелокальная невырожденность изгоняется из собственно римановой геометрии отрицанием существования параллельности удаленных векторов. Невырожденность в направлении пространственноподобных векторов изгоняется из геометрии Минковского с помощью переопределения понятия параллельности двух векторов. Однако, невырожденность есть важное свойство реальной геометрии пространства-времени. Чтобы осознать это, рассмотрим пример.

Простой пример невырожденной геометрии пространства-времени

Т-геометрия [4] определяется на σ -пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$, где Ω есть произвольное множество точек и мировая функция σ определяется соотношениями

$$\sigma : \quad \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \quad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \quad \sigma(P, P) = 0, \quad \forall P, Q \in \Omega, \quad (31)$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. Геометрические объекты (вектор $\mathbf{PQ}$, скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$, коллинеарность $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, сегмент прямой линии $T_{[P_0P_1]}$, и т. д.) определяются в σ -пространстве точно так же, как они σ -имманентно определяются в собственно евклидовом пространстве. Практически используется принцип деформации, хотя он не упоминается в определениях.

Рассмотрим простой пример геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_d$, описываемый Т-геометрией на четырехмерном многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$. Мировая функция σ_d описывается соотношением

$$\sigma_d = \sigma_M + D(\sigma_M) = \begin{cases} \sigma_M + d & \text{если } \sigma_0 < \sigma_M \\ \left(1 + \frac{d}{\sigma_0}\right) \sigma_M & \text{если } 0 \leq \sigma_M \leq \sigma_0 \\ \sigma_M & \text{если } \sigma_M < 0, \end{cases} \quad (32)$$

где $d \geq 0$ и $\sigma_0 > 0$ суть некоторые постоянные. Величина σ_M есть мировая функция в пространственно-временной геометрии Минковского $\mathcal{G}_M$. В ортогональной прямойлинейной (инерциальной) системе координат $x = (t, \mathbf{x})$ мировая функция σ_M имеет вид

$$\sigma_M(x, x') = \frac{1}{2} \left(c^2 (t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \right), \quad (33)$$

где c – скорость света.

Сравним ломаную линию (28) в геометрии Минковского $\mathcal{G}_M$ и в геометрии $\mathcal{G}_d$ с дисторсией $D(\sigma_M)$. Мы предполагаем, что $\mathcal{T}_{br}$ есть времениподобная ломаная линия, и все звенья $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ ломаной $\mathcal{T}_{br}$ времениподобны и имеют одну и ту же длину

$$|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}|_d = \sqrt{2\sigma_d(P_i, P_{i+1})} = \mu_d > 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (34)$$

$$|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}|_M = \sqrt{2\sigma_M(P_i, P_{i+1})} = \mu_M > 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (35)$$

где индексы "d" и "M" означают, что величина подсчитывается с помощью σ_d и σ_M соответственно. Вектор $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$ интерпретируется как импульс частицы на сегменте $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$, величина $|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}| = \mu$ интерпретируется как ее (геометрическая) масса. Из определения (8) и соотношения (32) следует, что для времениподобных векторов $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$ с $\mu > \sqrt{2\sigma_0}$

$$|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}|_d^2 = \mu_d^2 = \mu_M^2 + 2d, \quad \mu_M^2 > 2\sigma_0, \quad (36)$$

$$(\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1})_d = (\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1})_M + d. \quad (37)$$

Расчет формы сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}(\sigma_d)$ в геометрии $\mathcal{G}_d$ дает соотношение

$$r^2(\tau) = \begin{cases} \tau^2 \mu_d^2 \frac{\left(1 - \frac{\tau d}{2(\sigma_0 + d)}\right)^2}{\left(1 - \frac{2d}{\mu_d^2}\right)} - \frac{\tau^2 \mu_d^2 \sigma_0}{(\sigma_0 + d)}, & 0 < \tau < \frac{\sqrt{2(\sigma_0 + d)}}{\mu_d} \\ \frac{3d}{2} + 2d(\tau - 1/2)^2 \left(1 - \frac{2d}{\mu_d^2}\right)^{-1}, & \frac{\sqrt{2(\sigma_0 + d)}}{\mu_d} < \tau < 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0 + d)}}{\mu_d} \\ (1 - \tau)^2 \mu_d^2 \left[\frac{\left(1 - \frac{(1-\tau)d}{2(\sigma_0 + d)}\right)^2}{\left(1 - \frac{2d}{\mu_d^2}\right)} - \frac{\sigma_0}{(\sigma_0 + d)} \right], & 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0 + d)}}{\mu_d} < \tau < 1, \end{cases} \quad (38)$$

где $r(\tau)$ – пространственный радиус сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}(\sigma_d)$ в системе координат, где точки P_0 и P_1 имеют координаты $P_0 = \{0, 0, 0, 0\}$, $P_1 = \{\mu_d, 0, 0, 0\}$, а τ есть параметр вдоль сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}(\sigma_d)$ ($\tau(P_0) = 0$, $\tau(P_1) = 1$). Можно усмотреть из (38), что характерная величина радиуса сегмента равна $\sqrt{d}$.

Пусть ломаная трубка $\mathcal{T}_{br}$ описывает "мировую линию" свободной частицы. Это по определению означает, что каждое звено $\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i$ параллельно смежному звену $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$

$$\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i \uparrow \uparrow \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1} : \quad (\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}) - |\mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i| |\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}| = 0. \quad (39)$$

Определение параллельности различно в геометриях $\mathcal{G}_M$ и $\mathcal{G}_d$. В результате звенья, параллельные в геометрии $\mathcal{G}_M$, не параллельны в геометрии $\mathcal{G}_d$ и наоборот.

Пусть $\mathcal{T}_{br}(\sigma_M)$ описывает мировую линию свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_M$. Угол ϑ_M между смежными звеньями в $\mathcal{G}_M$ определяется соотношением

$$\cosh \vartheta_M = \frac{(\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_M}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_M \cdot |\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0|_M} = 1. \quad (40)$$

Угол $\vartheta_M = 0$, и геометрический объект $\mathcal{T}_{br}(\sigma_M)$ есть времениподобная прямая на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$.

Пусть теперь $\mathcal{T}_{br}(\sigma_d)$ описывает мировую линию свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_d$. Угол ϑ_d между смежными звеньями в $\mathcal{G}_d$ определяется соотношением

$$\cosh \vartheta_d = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_d}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_d \cdot |\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_d} = 1. \quad (41)$$

Угол $\vartheta_d = 0$ также. Если нарисовать ломаную трубку $\mathcal{T}_{br}(\sigma_d)$ на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$, используя координаты опорных точек P_i , и измерить угол ϑ_{dM} между смежными звеньями в геометрии Минковского $\mathcal{G}_M$, мы получим для угла ϑ_{dM} следующее соотношение

$$\cosh \vartheta_{dM} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_M}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_M \cdot |\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_M} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_d - d}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_d^2 - 2d}. \quad (42)$$

Подставляя величину $(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_d$, взятую из (41), мы получим

$$\cosh \vartheta_{dM} = \frac{\mu_d^d - d}{\mu_d^2 - 2d} \approx 1 + \frac{d}{\mu_d^2}, \quad d \ll \mu_d^2. \quad (43)$$

Таким образом, $\vartheta_{dM} \approx \sqrt{2d}/\mu_d$. Это означает, что смежное звено расположено на конусе с углом $\sqrt{2d}/\mu_d$, и вся линия $\mathcal{T}_{br}(\sigma_d)$ имеет случайную форму, потому что каждое звено вихляет с характерным углом $\sqrt{2d}/\mu_d$. Характерный угол вихляния зависит от дисторсии пространства-времени d и от массы частицы μ_d . Угол вихляния мал для частиц большой массы. Случайное смещение конца сегмента порядка $\mu_d\vartheta_{dM} = \sqrt{2d}$, т.е. того же порядка, что и толщина сегмента. Это вполне понятно, поскольку оба явления имеют одну и ту же причину – дисторсию D пространства-времени.

Следует заметить, что влияние геометрии пространства-времени на стохастичность движения частицы нелокально в том смысле, что вид мировой функции (32) для значений $\sigma_M < \frac{1}{2}\mu_d^2$ несущественен для стохастичности движения частицы массы μ_d .

Ситуация, когда мировая линия свободной частицы стохастична при детерминированной геометрии и эта стохастичность зависит от массы частицы, кажется экзотичной и неправдоподобной. Но эксперименты показывают, что движение реальных частиц малой массы действительно стохастично, и эта стохастичность возрастает, если масса частицы уменьшается. С физической точки зрения, желательно теоретическое обоснование стохастичности, и многие исследователи изобретают стохастические геометрии, некоммутативные геометрии и другие экзотические геометрические построения для того, чтобы получить квантовую стохастичность. Но в римановой геометрии пространства-времени свободное движение частицы не зависит от ее массы, и в рамках римановой геометрии пространства-времени трудно объяснить стохастичность свойствами пространства-времени. Геометрия $\mathcal{G}_d$ с дисторсией непринужденно объясняет стохастичность и ее зависимость от массы частицы. Кроме того, при надлежащем выборе дисторсии d статистическое описание стохастических

мировых трубок $\mathcal{T}_{br}$ приводит к квантовому описанию (уравнению Шредингера) [10]. Достаточно положить

$$d = \frac{\hbar}{2bc}, \quad (44)$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c – скорость света и b есть некоторая универсальная постоянная, связывающая геометрическую массу μ с обычной массой m частицы с помощью соотношения

$$m = b\mu. \quad (45)$$

Другими словами, пространственно-временная геометрия $\mathcal{G}_d$ с дисторсией (32) ближе к реальной геометрии пространства-времени, чем геометрия Минковского $\mathcal{G}_M$.

Статистическое описание случайных мировых трубок

Статистическое описание мировых линий не может быть вероятностным статистическим описанием, потому что число мировых линий может быть отрицательным. В самом деле, плотность мировых линий в окрестности пространственно-временной точки x определяется соотношением

$$dN = j^k dS_k, \quad (46)$$

где dN – поток мировых линий через пространственноподобную площадку dS_k . 4-вектор $j^k = j^k(x)$ описывает плотность мировых линий в окрестности точки x . Величина dN может быть интерпретирована как число мировых линий в окрестности точки x . Это число может быть отрицательным.

В нерелятивистском случае соотношение (46) превращается в соотношение

$$dN = j^0 dS_0 = \rho dV, \quad (47)$$

где плотность частиц $j^0 = \rho \geq 0$, и ρ может служить основой для введения плотности вероятности. В релятивистском случае нельзя ввести плотность вероятности, потому что плотность мировых линий описывается 4-вектором j^k .

Для статистического описания случайных мировых линий мы используем динамическую концепцию статистического описания (ДКСО), которое не использует понятия плотности вероятности [11].

Пусть $\mathcal{S}_{st}$ есть стохастическая частица, состояние X которой описывается переменными $\{\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\}$, где $\mathbf{x}$ описывает положение частицы. Эволюция состояния частицы случайна и не существует динамических уравнений для $\mathcal{S}_{st}$. Эволюция состояния частицы $\mathcal{S}_{st}$ содержит как регулярную, так и случайную составляющие. Для выделения регулярной составляющей мы рассмотрим множество (статистический ансамбль) $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ из многих одинаковых независимых случайных частиц $\mathcal{S}_{st}$. Все случайные частицы $\mathcal{S}_{st}$ стартуют из одного и того же состояния. Это означает, что все $\mathcal{S}_{st}$ приготавливаются одним и тем же способом. Если число N таких частиц $\mathcal{S}_{st}$ очень велико, случайные элементы эволюции компенсируют друг друга, а регулярные накапливаются. В пределе $N \rightarrow \infty$ статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ превращается в динамическую систему, чье состояние эволюционирует в соответствии с некоторыми динамическими уравнениями.

Пусть статистический ансамбль $\mathcal{E}_d[\mathcal{S}_d]$ классических детерминированных частиц $\mathcal{S}_d$ описывается действием $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_d[\mathcal{S}_d(P)]}$, где P суть параметры, описывающие $\mathcal{S}_d$ (например, масса, заряд). Пусть под влиянием некоторого стохастического агента детерминированная частица $\mathcal{S}_d$ превращается в стохастическую частицу $\mathcal{S}_{st}$.

Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$ приводится к действию $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\text{red}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}$ для некоторого множества $\mathcal{S}_{\text{red}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$ одинаковых взаимодействующих детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\text{d}}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\text{red}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]}$ как функционал от состояния детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\text{d}}$ имеет вид $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}(P_{\text{eff}})]}$, где параметры P_{eff} являются параметрами P детерминированной частицы $\mathcal{S}_{\text{d}}$, усредненными по статистическому ансамблю, и это усреднение описывает взаимодействие частиц $\mathcal{S}_{\text{d}}$ во множестве $\mathcal{S}_{\text{red}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$. Это означает, что

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\text{red}}[\mathcal{S}_{\text{d}}(P)]} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}(P_{\text{eff}})]}. \quad (48)$$

Другими словами, стохастичность частиц $\mathcal{S}_{\text{st}}$ в ансамбле $\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$ заменяется взаимодействием частиц $\mathcal{S}_{\text{d}}$ в $\mathcal{S}_{\text{red}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$, и это взаимодействие описывается заменой

$$P \rightarrow P_{\text{eff}} \quad (49)$$

в действии $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}(P)]}$.

Свободная частица имеет единственный параметр – свою массу m , и действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\text{d}}}$ для свободной детерминированной частицы имеет вид

$$\mathcal{S}_{\text{d}} : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\text{d}}}[\mathbf{x}] = \int \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 dt, \quad (50)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \{x^1(t), x^2(t), x^3(t)\}$, а время t является независимой переменной.

Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}(P)]}$ для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$ свободных детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\text{d}}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}] : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]}[\mathbf{x}] = \int \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 dt d\xi, \quad (51)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi) = \{x^1(t, \xi), x^2(t, \xi), x^3(t, \xi)\}$. Независимые переменные $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ маркируют элементы $\mathcal{S}_{\text{d}}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$. Переменные ξ известны как лагранжевы координаты. Статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\text{d}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$ есть непрерывная динамическая система, имеющая бесконечное число степеней свободы, тогда как частица $\mathcal{S}_{\text{d}}$ есть дискретная динамическая система, имеющая шесть степеней свободы.

Если частицы стохастические, действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}$ для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$ свободных квантово-стохастических частиц $\mathcal{S}_{\text{st}}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}] : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u} \right\} dt d\xi, \quad (52)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ есть векторная функция от аргументов $t, \mathbf{x}$ (а не от t, ξ), и $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$ есть векторная функция от независимых переменных t, ξ . 3-вектор $\mathbf{u}$ описывает среднее значение стохастической составляющей движения частицы, которое является функцией переменных $t, \mathbf{x}$. Первый член $\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2$ описывает энергию регулярной составляющей движения стохастической частицы. Второй член $m\mathbf{u}^2/2$ описывает энергию случайной составляющей скорости. Составляющие $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и $\mathbf{u}$ полной скорости связаны с разными степенями свободы, и их энергии должны быть представлены в виде суммы в выражении для плотности функции Лагранжа. Последний член $-\hbar \nabla \mathbf{u}/2$ описывает взаимодействие между регулярной составляющей $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и случайной $\mathbf{u}$. Заметим, что $m\mathbf{u}^2/2$ является функцией от $t, \mathbf{x}$. Она влияет на регулярную составляющую $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ как потенциальная энергия $U(t, \mathbf{x}, \nabla \mathbf{x}) = -m\mathbf{u}^2/2$, порожденная случайной составляющей.

Динамическая система (52) является статистическим ансамблем, потому что плотность функции Лагранжа в действии (52) не зависит явно от ξ , и мы можем представить действие для отдельной системы $\mathcal{S}_{\text{st}}$

$$\mathcal{S}_{\text{st}} : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\text{st}}}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u} \right\} dt. \quad (53)$$

К сожалению, выражение для действия (53) является только символическим, потому что дифференциальный оператор $\nabla = \{\partial/\partial x^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ определен в непрерывной окрестности точки $\mathbf{x}$, а не для одной точки $\mathbf{x}$. Выражение (53) перестает быть символическим, если только $\hbar = 0$. В этом случае последний член, содержащий ∇ , обращается в ноль. Вариация действия (53) по $\mathbf{u}$ дает $\mathbf{u} = 0$, и действие (53) совпадает с действием (51) для $\mathcal{S}_{\text{d}}$. Если $\hbar \neq 0$, выражение для действия (53) не является хорошо определенным, и динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\text{st}}$ не существуют.

Динамическое уравнение для $\mathbf{u}$ получается из функционала действия (52) с помощью вариации по $\mathbf{u}$. Если квантовая постоянная $\hbar = 0$, то из динамического уравнения для $\mathbf{u}$ следует, что $\mathbf{u} = 0$, и действие (52) приводится к виду (51). В общем случае $\hbar \neq 0$ мы должны перейти к независимым переменным $\mathbf{x}$, потому что $\mathbf{u}$ является функцией от $t, \mathbf{x}$. Мы получаем вместо (52)

$$\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}] : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u} \right\} \rho dt d\mathbf{x}, \quad (54)$$

$$\rho = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right)^{-1}. \quad (55)$$

Вариация (55) по $\mathbf{u}$ дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}}{\delta \mathbf{u}} = m\rho \mathbf{u} + \frac{\hbar}{2} \nabla \rho = 0. \quad (56)$$

Разрешая динамическое уравнение (56) относительно $\mathbf{u}$ в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla \ln \rho \quad (57)$$

можно исключить среднюю стохастическую скорость $\mathbf{u}$ из действия (54). Получаем вместо (54)

$$\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}] : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\mathbf{x}] = \int \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - U(\rho, \nabla \rho) \right\} \rho dt d\mathbf{x}, \quad (58)$$

где

$$\rho U(\rho, \nabla \rho) = -\frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} - \frac{\hbar^2}{4m} \rho \nabla^2 \ln \rho \quad (59)$$

и ρ определяется выражением (55). Исключая дивергенцию, получаем вместо (59)

$$U(\rho, \nabla \rho) = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{4m} \frac{1}{\rho} \nabla^2 \rho. \quad (60)$$

Последний член в (60) не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Действие (58) превращается в

$$\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}] : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\xi] = \int \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right\} \rho dt d\mathbf{x}, \quad (61)$$

где переменные $t, \mathbf{x}$ являются независимыми переменными, а переменные ξ рассматриваются как зависимые переменные. Величины ρ и $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ являются функциями производных от зависимых переменных ξ по t и $\mathbf{x}$

$$\rho = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}, \quad (62)$$

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \rho^{-1} \frac{\partial(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, x^1, x^2, x^3)}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (63)$$

Динамические уравнения, порожденные действием (61), довольно сложны. Однако, в терминах волновой функции, действие (61) принимает более простой вид [12].

В терминах двухкомпонентной волновой функции ψ

$$\psi = \{\psi_1, \psi_2\}, \quad \psi^* = \left\{ \begin{matrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{matrix} \right\}, \quad \rho \equiv \psi^* \psi \equiv \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2, \quad (64)$$

действие (63) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}] : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\psi, \psi^*] = & \int \left\{ \frac{ib_0}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) - \frac{b_0^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi \right. \\ & \left. + \frac{b_0^2}{8m} \sum_{\alpha=1}^3 (\nabla s_\alpha)^2 \rho + \frac{b_0^2 - \hbar^2}{8\rho m} (\nabla \rho)^2 \right\} dt d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$s_\alpha \equiv \frac{\psi^* \sigma_\alpha \psi}{\rho}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (66)$$

и σ_α суть матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Здесь постоянная b_0 является произвольной постоянной. Переход от действия (61) к действию (65) с помощью замены переменных сопровождается интегрированием динамических уравнений и появлением трех произвольных функций $\mathbf{g}(\xi) = \{g^1(\xi), g^2(\xi), g^3(\xi)\}$.

Замена переменных, связывающая зависимые переменные ξ и ψ , имеет вид (смотри Приложение А или [12])

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho} e^{i\varphi} u_\alpha(\xi), \quad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho} e^{-i\varphi} u_\alpha^*(\xi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (68)$$

$$\psi^* \psi \equiv \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha^* \psi_\alpha, \quad (69)$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ являются функциями только переменных ξ и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^n \left(u_\alpha^* \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \xi_\beta} u_\alpha \right) = g^\beta(\xi), \quad \beta = 1, 2, 3, \quad \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha^* u_\alpha = 1. \quad (70)$$

Здесь φ – новая зависимая переменная, возникшая из фиктивной временной лагранжевой координаты ξ_0 , а b_0 есть произвольная постоянная. Число n есть такое натуральное число, что уравнения (70) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\xi)\}$, $\beta = 1, 2, 3$.

Смысл волновой функции ψ не ясен, и интерпретация производится на основе действия (54) или (61), где смысл всех величин ясен. Действие (54) описывает течение некоторой жидкости с плотностью ρ , определяемой соотношением (55), и с плотностью потока

$$\mathbf{j} = \rho \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (71)$$

В терминах волновой функции ψ эти величины имеют вид

$$\rho = \psi^* \psi, \quad \mathbf{j} = -\frac{ib_0}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \cdot \psi). \quad (72)$$

Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости. Если $\mathbf{g} = 0$, уравнения (70) имеют решение $u_1 = 1$, $u_\alpha = 0$, $\alpha = 2, 3, \dots, n$. В этом случае функция ψ может иметь один компонент (остальные обращаются в нуль), и течение жидкости потенциальное. Функция ψ имеет вид

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\varphi}, \quad \psi^* = \sqrt{\rho} e^{-i\varphi} \quad (73)$$

и скорость жидкости

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \nabla \frac{b_0 \varphi}{m} \quad (74)$$

имеет потенциал $b_0 \varphi / m$.

В частном случае потенциального течения жидкости

$$s_\alpha \equiv \frac{\psi^* \sigma_\alpha \psi}{\rho} = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (75)$$

и действие (65) превращается действие

$$\mathcal{A}_{S_q}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \frac{ib_0}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) - \frac{b_0^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + \frac{b_0^2 - \hbar^2}{8\rho m} (\nabla \rho)^2 \right\} dt d\mathbf{x}. \quad (76)$$

Если выбрать произвольную постоянную b_0 в виде $b_0 = \hbar$, действие (76) превращается в действие

$$\mathcal{A}_{S_q}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi \right\} dt d\mathbf{x}, \quad (77)$$

имеющее уравнение Шредингера

$$i\hbar \partial_0 \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (78)$$

в качестве динамического уравнения. Выражения (72) для плотности частиц и плотности тока частиц превращаются в традиционные выражения

$$\rho = \psi^* \psi, \quad \mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \cdot \psi). \quad (79)$$

Интерпретация всех величин получается на основе того факта, что квантовое описание в терминах уравнения Шредингера есть частный случай статистического описания в терминах статистического ансамбля (52).

Можно ли получить статистический ансамбль (52) из статистического ансамбля (51) с помощью замены $m \rightarrow m_{\text{eff}}$? Да, это возможно, если представить нерелятивистское действие (51) как нерелятивистское приближение

$$\mathcal{E}_d[\mathcal{S}_d]: \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_d[\mathcal{S}_d]}[\mathbf{x}] = \int \left\{ -mc^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 \right\} dt d\xi \quad (80)$$

релятивистского действия

$$\mathcal{E}_d[\mathcal{S}_d]: \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_d[\mathcal{S}_d]}[\mathbf{x}] = - \int mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2} dt d\xi. \quad (81)$$

Действие (52) получается из действия (80) как результат замены

$$m \rightarrow m_{\text{eff}} = m \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2c^2} + \frac{\hbar}{2mc^2} \nabla \mathbf{u} \right). \quad (82)$$

Практически замена производится только в первом члене действия (80), потому что замена во втором члене дает дополнительный член порядка c^{-2} , который мал в нерелятивистском приближении. Другой вариант замены в действии (80) имеет вид

$$m \rightarrow m_{\text{eff}} = m \left(1 - \frac{\hbar^2}{8m^2c^2} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2} \frac{1}{\rho} \nabla^2 \rho \right) \quad (83)$$

или

$$m \rightarrow m_{\text{eff}} = m \left(1 + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right). \quad (84)$$

Соотношение (83) получается из соотношения (82) после подстановки (57). Производя замену (84) в действии (80), получаем в нерелятивистском приближении действие (61).

В релятивистском случае вместо замены (82) получаем

$$m^2 \rightarrow m_{\text{eff}}^2 = m^2 (1 + u_l u^l + \lambda \partial_l u^l), \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad (85)$$

где переменные $u^k = u^k(x) = u^k(t, \mathbf{x})$, $k = 0, 1, 2, 3$ являются новыми зависимыми переменными, описывающими среднее значение случайной составляющей 4-скорости частицы. Замена (85) в действии (81) для статистического ансамбля свободных релятивистских частиц приводит в конце концов к действию [13]

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \hbar^2 \partial_k \psi^* \partial^k \psi - m^2 c^2 \rho - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_l s_\alpha) (\partial^l s_\alpha) \rho \right\} d^4 x, \quad (86)$$

где ψ есть двухкомпонентная волновая функция (68)–(70). Переменные ρ , s_α определяются соотношением (72) и кроме того постоянная $b_0 = \hbar$. Действие (86) является действием для статистического ансамбля свободных стохастических релятивистских частиц. В случае потенциального течения, когда волновая функция ψ может быть однокомпонентной, $s_\alpha = \text{const}$ и динамическое уравнение для действия (86) представляет собой уравнение Клейна-Гордона.

$$\hbar^2 \partial_k \partial^k \psi + m^2 c^2 \psi = 0. \quad (87)$$

Определение эффективной массы

Мы намерены показать, что замена (84) следует из вида мировой функции (32). На самом деле в работе [10] была решена обратная задача. Какой должна быть геометрия однородного пространства-времени, если статистическое описание свободных нерелятивистских частиц приводит к квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера? Решив эту задачу, мы получили мировую функцию (32). Сейчас мы покажем, что эффективная масса m_{eff} нерелятивистской частицы определяется соотношением (84).

Математический формализм теоретической физики приспособлен для работы в пространстве-времени Минковского. Математического формализма для работы в искаженном пространстве-времени V_d с мировой функцией (32) в настоящее время еще нет. Мы вынуждены работать в пространстве-времени Минковского, используя традиционный формализм и принимая во внимание искажение пространства времени с помощью некоторых поправок.

Введем понятие *приведенного вектора* $\vec{p} = \vec{p}(a, P_0, P_1)$ как единства вещественного или мнимого числа a и двух точек $\{P_0, P_1\}$

$$\vec{p} = \vec{p}(a, P_0, P_1) = a (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1) = a \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1. \quad (88)$$

Число a назовем *масштабом* приведенного вектора. Вектор $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ является частным случаем приведенного вектора $a \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ с масштабом $a = 1$. Скалярное произведение двух приведенных векторов $a_1 \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ и $a_2 \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(a_1 \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot a_2 \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1) = a_1 a_2 (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1). \quad (89)$$

Рассмотрим статистический ансамбль релятивистских частиц, описываемый действием (81) с ориентированной массой m_o , определенной соотношением

$$m_o = b \mu_o, \quad \mu_o = (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \vec{u}(R)), \quad (90)$$

где $\vec{u} = \vec{u}(R)$ – единичный приведенный вектор 4-скорости в точке $R \in \mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$, $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ – вектор импульса, деленный на скорость света c . Величина m_o называется *ориентированной массой*, потому что она зависит от взаимной ориентации векторов импульса и 4-скорости. Ориентированная масса имеет разный знак для частицы и античастицы.

4-скорость $\vec{u} = \vec{u}(R)$ является единичным приведенным вектором внутри сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ в пространстве-времени V_d

$$\vec{u}(R) = |\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d^{-1} \mathbf{P}_0 \mathbf{R} = (\mathbf{P}_0 \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{R})_d^{-1/2} \mathbf{P}_0 \mathbf{R}, \quad R \in \mathcal{T}_{[P_0 P_1]}, \quad (91)$$

$$(\vec{u}(R) \cdot \vec{u}(R))_d = 1. \quad (92)$$

Масса частицы, определенная соотношением (90), различна в V_d и в V_M . Поскольку $R \in \mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ и, следовательно, $\mathbf{P}_0 \mathbf{R} \uparrow \uparrow_d \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$

$$(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{R})_d = |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1|_d \cdot |\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d, \quad (93)$$

получаем для m_{od}

$$\begin{aligned} m_{od} &= b (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \vec{u}(R))_d = b |\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d^{-1} (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{R})_d \\ &= b |\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d^{-1} \cdot |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1|_d \cdot |\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d = b |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1|_d = b \mu_d, \end{aligned} \quad (94)$$

где b – постоянная, определенная соотношением (45).

Если точка R на сегменте $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ не слишком близка к концам P_0 и P_1 , (т.е. $|\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d^2 > 2\sigma_0$, $|\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1|_d^2 > 2\sigma_0$) и выполняется соотношение (37), получаем для ориентированной массы m_{oM} в V_M

$$\begin{aligned} m_{oM} &= b(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \vec{u}(R))_M = b|\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d^{-1} (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{R})_M \\ &= b|\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d^{-1} ((\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{R})_d - 2d) \\ &= b|\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1|_d - 2db|\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d^{-1} = b\mu_d - \frac{2bd}{|\mathbf{P}_0 \mathbf{R}|_d}. \end{aligned} \quad (95)$$

Таким образом, масса частицы m_{oM} , определенная соотношением (90) и вычисленная в V_M , зависит от точки R на поверхности сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$. В действии (81) используется некоторая эффективная масса m_{eff} , вычисленная в соответствии с (95) в пространстве-времени Минковского V_M с помощью соотношения

$$m_{\text{eff}} = b(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \vec{u}_{\text{eff}})_M, \quad (96)$$

где приведенный вектор $\vec{u}_{\text{eff}}$ является средней 4-скоростью внутри сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$.

Пусть точка P является центром сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$, как это показано на рис. 1. Точки P' и P'' являются центрами сегментов $\mathcal{T}_{[P'_0 P'_1]}$, $\mathcal{T}_{[P''_0 P''_1]}$, смежных мировых трубок статистического ансамбля. Рассмотрим нерелятивистский случай. Тогда векторы $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}'_0 \mathbf{P}'_1$, $\mathbf{P}''_0 \mathbf{P}''_1$ можно считать параллельными в V_M . Пусть сегменты $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$, $\mathcal{T}_{[P'_0 P'_1]}$, $\mathcal{T}_{[P''_0 P''_1]}$ расположены таким образом, что $P \in \mathcal{T}_{[P'_0 P'_1]}$, $P \in \mathcal{T}_{[P''_0 P''_1]}$. 4-скорость сегмента $\mathcal{T}_{[P'_0 P'_1]}$, определяемая вектором $\mathbf{P}'_0 \mathbf{P}$, и 4-скорость сегмента $\mathcal{T}_{[P''_0 P''_1]}$, определяемая вектором $\mathbf{P}''_0 \mathbf{P}$, дают вклад в эффективную 4-скорость $\vec{u}_{\text{eff}}$ сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$. Поместим начало приведенного вектора эффективной 4-скорости $\vec{u}_{\text{eff}}$ в точку P . Пусть пространственное расстояние между точками P, P' и P, P'' равно l . В соответствии с соотношением (38) получаем

$$l = \sqrt{-|\mathbf{P} \mathbf{P}'|^2} = \sqrt{-|\mathbf{P} \mathbf{P}''|^2} = r(0.5) = \sqrt{\frac{3d}{2}} = \sqrt{\frac{3\hbar}{4bc}}. \quad (97)$$

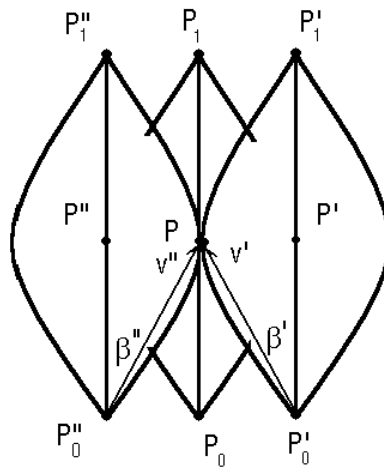


Рис. 1:

Выберем систему координат с началом в точке P и с временной осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$. В этой системе координат в пространстве-времени V_M ковариантные компоненты вектора $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ имеют вид

$$(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1)_k = \{\mu_d c, 0, \}. \quad (98)$$

Ковариантные компоненты 4-скорости сегмента $\mathcal{T}_{[P'_0 P'_1]}$ имеют вид

$$u^k = \{u^0, \mathbf{u}\} = \left\{ \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}, -\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \right\}, \quad \mathbf{v} = -\frac{2\mathbf{x}}{\mu_d}c, \quad (99)$$

где $\mathbf{x}$ суть пространственные координаты точки P' . Эффективная 4-скорость в точке P представляет собой сумму вкладов всех сегментов $\mathcal{T}_{[P'_0 P'_1]}$

$$u_{\text{eff}}^0 = A \int \rho(\mathbf{x}) \delta(l^2 - \mathbf{x}^2) u^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (100)$$

$$l = \sqrt{\frac{3\hbar}{4bc}}, \quad (101)$$

$$\mathbf{u}_{\text{eff}} = A \int \rho(\mathbf{x}) \delta(l^2 - \mathbf{x}^2) \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -A \int \frac{\rho(\mathbf{x}) \delta(l^2 - \mathbf{x}^2) 2\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_d}\right)^2} \mu_d} d\mathbf{x}, \quad (102)$$

где величина ρ – плотность мировых трубок в статистическом ансамбле, а величина A определяется из условия нормировки приведенного вектора $\vec{u}_{\text{eff}}(P)$

$$c^2 (u_{\text{eff}}^0)^2 - \mathbf{u}_{\text{eff}}^2 = 1. \quad (103)$$

Предполагая, что $\rho(\mathbf{x})$ изменяется медленно и разлагая $\rho(\mathbf{x})$ в ряд по степеням $\mathbf{x}$, получаем из (100), (102)

$$u_{\text{eff}}^0 = A \int \frac{\rho}{c\sqrt{1 - \left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_d}\right)^2}} \delta(l^2 - \mathbf{x}^2) d\mathbf{x} = \frac{2\pi A \rho l}{c\sqrt{1 - \left(\frac{2l}{\mu_d}\right)^2}}, \quad (104)$$

$$\mathbf{u}_{\text{eff}} = -A \int \frac{(\mathbf{x} \nabla) \rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_d}\right)^2}} \delta(l^2 - \mathbf{x}^2) \frac{2\mathbf{x}}{\mu_d} c d\mathbf{x} = -\frac{4\pi A l^3 \nabla \rho}{3\mu_d \sqrt{1 - \left(\frac{2l}{\mu_d}\right)^2}}, \quad (105)$$

где ρ – значение плотности в точке P . Подставляя (104), (105) в (103) и используя (101), получаем

$$A = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{2l}{\mu_d}\right)^2}}{2\pi l \rho \sqrt{1 - \left(\frac{\hbar}{2m_d c} \nabla \ln \rho\right)^2}}. \quad (106)$$

Подставляя (106) в (104), получаем

$$u_{\text{eff}}^0 = \frac{1}{c\sqrt{1 - \left(\frac{\hbar}{2m_d c} \nabla \ln \rho\right)^2}}. \quad (107)$$

Из соотношений (96), (98) и (107) следует

$$m_{\text{eff}} = m_d c u_{\text{eff}}^0 = m_d \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\hbar}{2m_d c} \nabla \ln \rho\right)^2}} = m_d \left(1 + \frac{\hbar^2}{8m_d^2 c^2} (\nabla \ln \rho)^2\right). \quad (108)$$

Этот результат совпадает с соотношением (84).

Мы допускаем, что существуют другие методы расчета величины m_{eff} , которые дают другой результат. В этом случае следует выбрать другую мировую функцию пространства-времени V_d , которая приводит к результату (108), потому что мы знаем, что эффективная масса, определяемая соотношением (108), согласуется с экспериментальными данными. Мы знаем о геометрии искаженного пространства-времени только то, что оно порождает стохастическое движение свободных частиц. Информация о его мировой функции получается из требования, чтобы мировая функция приводила к эффективной массе, определяемой соотношением (108).

Дальнейшее развитие статистического описания геометрической стохастичности приводит к созданию *модельной концепции квантовых явлений* (МККЯ), которая относится к традиционной теории квантовых явлений примерно так же, как статистическая физика относится к аксиоматической термодинамике. МККЯ является хорошо определенной релятивистской концепцией с эффективными методами исследования [14], тогда как традиционная квантовая теория не является хорошо определенной, поскольку она использует неправильную геометрию пространства-времени. Неправильность геометрии компенсируется дополнительными гипотезами (принципами квантовой механики). Кроме того, имеются проблемы с применением формализма нерелятивистской квантовой механики к релятивистским явлениям.

Геометрия $\mathcal{G}_d$ так же однородна, как геометрия Минковского, потому что мировая функция σ_d инвариантна относительно всех преобразований координат, относительно которых инвариантна мировая функция σ_M . В этой связи возникает вопрос, нельзя ли придумать аксиоматику для $\mathcal{G}_d$ и получить геометрию $\mathcal{G}_d$ из этой аксиоматики с помощью надлежащих логических рассуждений. Заметим, что такая аксиоматика должна зависеть от параметра d , потому что мировая функция σ_d зависит от этого параметра. Если $d = 0$, эта аксиоматика совпадает с аксиоматикой геометрии Минковского $\mathcal{G}_M$. Если $d \neq 0$, эта аксиоматика не может совпадать с аксиоматикой геометрии $\mathcal{G}_M$, потому что некоторые аксиомы геометрии $\mathcal{G}_M$ не выполняются в этом случае.

Вообще говоря, изобретение аксиоматики, зависящей от параметра d и в общем случае от функции дисторсии D , представляется очень трудной задачей. Кроме того, зачем изобретать аксиоматику? Мы получили аксиоматику для собственно евклидовой геометрии, которая была построена раньше. Нет необходимости повторять этот процесс всякий раз, когда мы строим новую геометрию. Достаточно применить принцип деформации к уже построенной евклидовой геометрии, записанной в σ -имманентном виде. Применение принципа деформации к евклидовой геометрии – очень простая и очень общая процедура, которая не ограничена условиями непрерывности, выпуклости и другими искусственными ограничениями, порожденными предвзятым подходом к физической геометрии. (Предвзятость подхода заключается в априорном допущении об одномерности прямой линии в любой физической геометрии, которое напоминает мнение древних египтян, что все реки текут на север).

Итак, мы видим, что невырожденность физической геометрии, так же как неодномерность прямой линии, являются свойствами реальных физических геометрий. Собственно евклидова геометрия является основой для всех физических геометрий, и она вырождена полностью. Однако, это не причина для отрицания существования невырожденных физических геометрий.

Принцип деформации вместе с σ -имманентным описанием оказывается очень эффективным математическим инструментом для построения физических геометрий:

1. Принцип деформации использует результаты, полученные при построении собственно евклидовой геометрии, и не добавляет каких-нибудь дополнительных предположений о свойствах геометрических объектов.
2. Принцип деформации использует только действительную характеристику физической геометрии – ее мировую функцию и не использует каких-нибудь дополнительных средств описания.
3. Принцип деформации очень прост и позволяет исследовать только ту часть геометрии, которая нам интересна.
4. Применение принципа деформации позволяет получить истинную геометрию пространства-времени, неожиданные свойства которой не могут быть получены при традиционном подходе к физической геометрии.

Приложение.

Преобразование действия для статистического ансамбля.

Чтобы преобразовать действие (61) к описанию в терминах волновой функции, перепишем его в виде

$$\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}] : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\mathbf{x}] = \int \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right\} dt d\xi, \quad (109)$$

где

$$\rho = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right)^{-1}. \quad (110)$$

Введем независимую переменную ξ_0 вместо переменной $t = x^0$ и перепишем действие (109) в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[x] = \int \left\{ \frac{m \dot{x}^\alpha \dot{x}^\alpha}{2 \dot{x}^0} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right\} d^4 \xi, \quad \dot{x}^k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \xi_0}, \quad (111)$$

где $\xi = \{\xi_0, \xi\} = \{\xi_k\}$, $k = 0, 1, 2, 3$, $x = \{x^k(\xi)\}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Здесь и далее производится суммирование по повторяющимся греческим индексам (1–3).

Будем рассматривать переменные $\xi = \xi(x)$ в (111) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det \|\xi_{i,k}\|, \quad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i, \quad i, k = 0, 1, 2, 3 \quad (112)$$

рассматривается как полилинейная функция от переменных $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4 \xi = J d^4 x, \quad \dot{x}^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (113)$$

После преобразования к зависимым переменным ξ действие (111) принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\xi] = \int \left\{ \frac{m}{2} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \right)^{-1} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} \right\} d^4 x, \quad (114)$$

Здесь зависимая переменная ξ_0 фиктивна.

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad \rho = j^0 \quad (115)$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\xi, j, p] = \int \left\{ \frac{m}{2} \frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} + p_k \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k \right) \right\} d^4 x. \quad (116)$$

Здесь и далее производится суммирование (0 – 3) по повторяющимся латинским индексам.

Заметим, что в соответствии с (113), соотношения (115) могут быть записаны в виде

$$j^k = \left\{ \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}, \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \left(J^{-1} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \right) \left(J^{-1} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \right)^{-1} \right\} = \left\{ \rho, \rho \frac{dx^\alpha}{dt} \right\}, \quad \rho \equiv \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}. \quad (117)$$

Из (117) очевидно, что j^k есть 4-поток частиц, причем $j^0 = \rho$ является плотностью частиц.

Вариация действия (116) по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}}{\delta \xi_i} = -\partial_l \left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \right) = -\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \partial_l p_k = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (118)$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}} \right), \quad (119)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \xi_{k,l} \equiv J \delta_k^i, \quad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \quad (120)$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (118) имеет вид

$$p_k = \frac{b_0}{2} (\partial_k \varphi + g^\alpha(\xi) \partial_k \xi_\alpha), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (121)$$

где $b_0 \neq 0$ есть произвольная постоянная, $g^\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции переменных $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0 , которая перестала быть фиктивной. Именно это концептуальное интегрирование позволяет ввести волновую функцию. Подставим (121) в (116). Член вида $\partial_k \varphi \partial J / \partial \xi_{0,k}$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамическое уравнение. Члены вида $\xi_{\alpha,k} \partial J / \partial \xi_{0,k}$ обращаются в нуль в силу тождеств (120). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\varphi, \xi, j] = \int \left\{ \frac{m}{2} \frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - j^k p_k - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} \right\} d^4 x, \quad j^0 = \rho, \quad (122)$$

где величины p_k определяются соотношениями (121).

Варьирование действия (122) по j^k дает

$$p_0 = -\frac{m}{2} \frac{j^\alpha j^\alpha}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} + 2 \nabla \frac{(\nabla \rho)}{\rho} \right), \quad (123)$$

$$p_\beta = m \frac{j^\beta}{\rho}, \quad \beta = 1, 2, 3. \quad (124)$$

Исключим теперь переменные $\mathbf{j} = \{j^1, j^2, j^3\}$ из действия (122), используя соотношение (124). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\rho, \varphi, \xi] = \int \left\{ -p_0 - \frac{p_\beta p_\beta}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right\} \rho d^4x, \quad (125)$$

где величины p_k определяются соотношением (121).

Теперь вместо зависимых переменных ρ, φ, ξ введем n -компонентную комплексную функцию ψ , определив ее соотношениями (68)–(70).

Функция ψ следующим образом построена из переменной φ , плотности жидкости ρ и лагранжевых координат ξ , рассматриваемых как функции от $(t, \mathbf{x})$, [12]. n -компонентная комплексная функция $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ определяется соотношениями

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho} e^{i\varphi} u_\alpha(\xi), \quad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho} e^{-i\varphi} u_\alpha^*(\xi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (126)$$

$$\psi^* \psi \equiv \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha^* \psi_\alpha, \quad (127)$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ суть функции только переменных ξ , и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^n \left(u_\alpha^* \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \xi_\beta} u_\alpha \right) = g^\beta(\xi), \quad \beta = 1, 2, 3, \quad \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha^* u_\alpha = 1. \quad (128)$$

Число n есть такое натуральное число, что уравнения (128) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\xi)\}$, $\beta = 1, 2, 3$. Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости.

Легко проверить, что

$$\rho = \psi^* \psi, \quad \rho p_0(\varphi, \xi) = -\frac{ib_0}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi), \quad (129)$$

$$\rho p_\alpha(\varphi, \xi) = -\frac{ib_0}{2} (\psi^* \partial_\alpha \psi - \partial_\alpha \psi^* \cdot \psi), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (130)$$

Вариационная проблема с функционалом действия (125) оказывается эквивалентной вариационной проблеме с функционалом действия

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \frac{ib_0}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) + \right. \\ \left. + \frac{b_0^2}{8m\rho} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \cdot \psi)^2 - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} \right\} d^4x. \end{aligned} \quad (131)$$

Мы надеемся, что в случае $n = 2$ уравнения (128) имеют решение для любых функций $\mathbf{g}$, потому что в этом случае число (четыре) вещественных составляющих функции ψ совпадает с числом гидродинамических переменных j^k ($k = 0, 1, 2, 3$). (Однако, это утверждение пока не доказано). Для двухкомпонентной функции ψ ($n = 2$) выполняются следующие тождества

$$(\nabla \rho)^2 - (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \cdot \psi)^2 \equiv 4\rho \nabla \psi^* \nabla \psi - \rho^2 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} (\nabla s_\alpha)^2, \quad (132)$$

$$\rho \equiv \psi^* \psi, \quad s \equiv \frac{\psi^* \sigma \psi}{\rho}, \quad \sigma = \{\sigma_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (133)$$

где σ_α суть матрицы Паули. В силу тождества (132) действие (131) приводится к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}] : \quad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\text{st}}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}[\psi, \psi^*] = & \int \left\{ \frac{ib_0}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) - \frac{b_0^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi \right. \\ & \left. + \frac{b_0^2}{8m} \sum_{\alpha=1}^3 (\nabla s_\alpha)^2 \rho + \frac{b_0^2 - \hbar^2}{8\rho m} (\nabla \rho)^2 \right\} d^4x, \end{aligned} \quad (134)$$

где $\mathbf{s}$ и ρ определяются соотношениями (133). Таким образом, мы доказали соотношение (65).

Литература

- [1] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung die Mathematik im 19. Jahrhundert* teil 1, Berlin, Springer 1926.
- [2] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. 7 Auflage, ed. B.G.Teubner, Leipzig, Berlin, 1930.
- [3] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960..
- [4] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (available at <http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002>).
- [5] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).
- [6] Yu. A. Rylov, Asymmetric nondegenerate geometry. (In preparation, available at <http://arXiv.org/abs/math.MG/0205061>).
- [7] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen*, **100**, 75-113, (1928).
- [8] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.
- [9] Yu. A. Rylov, Deformation principle and problem of parallelism in geometry and physics. (In preparation, available at <http://arXiv.org/abs/math.GM/0210413>)
- [10] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).
- [11] Yu. A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them. (Available at <http://arXiv.org/abs/physics/0210003>).
- [12] Yu. A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).
- [13] Yu. A. Rylov, Classical description of pair production. (Available at <http://arXiv.org/abs/physics/0301020>).
- [14] Yu. A. Rylov, Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods. (In preparation, available at <http://arXiv.org/abs/physics/0310050>, v2).

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ТОПОЛОГИИ: ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р. В. Михайлов

Harish-Chandra Research Institute, Jhansi, Allahabad, India
rmikhailov@mail.ru

1. Введение

Физическая интуиция выделяет четыре измерения как естественно соответствующие материальной реальности. И практически во всех многомерных современных физических теориях четырехмерность играет особую роль. Многомерные квантовые теории поля, теории струн часто рассматриваются вместе со своими компактификациями, т. е. в качестве основного пространства, описывающего реальность, берется некоторое четырехмерное пространство и умножается на многомерное компактное многообразие. Таким путем получается и пятимерная модель Калуцы-Клейна, и десятимерные теории суперструн.

Интересно, что с чисто математической точки зрения размерность четыре оказывается самой сложной. С первого взгляда, это противоречит нашим интуитивным представлениям о понятии размерности: ведь, чем выше размерность, тем появляется больше сложностей. Однако, это не всегда так. Новые размерности часто дают новую свободу действий. Естественно, что при этом должна возникнуть некая середина, в которой необходимая свобода действий отсутствует, а маломерные методы слабо применимы. В топологии эта середина и есть размерность 4.

Цель этой заметки – сделать небольшой обзор некоторых проблем, возникающих в 4-мерной топологии.

2. Проблема s -кобордизма

Одним из основных вопросов геометрической топологии является проблема классификации многообразий, принадлежащих тем или иным категориям, с соответствующими отношениями эквивалентности. Так, при работе в топологической категории встает вопрос классификации топологических многообразий, например, в предположении о компактности, связности и замкнутости с точностью до гомеоморфизма. В размерности один – это лишь окружности, в размерности два мы приходим к полной классификации: каждое связное замкнутое компактное многообразие гомеоморфно двумерной сфере с приклеенными ручками и листами Мебиуса. При этом, фундаментальные группы этих многообразий являются полными топологическими инвариантами. В размерности три вопрос о классификации перерастает в глобальную проблему: уже существование связного односвязного трехмерного многообразия, не гомеоморфного трехмерной сфере, представляет собой известную проблему Пуанкаре.

Интересно, что в размерности ≥ 5 , многие трудности, возникающие в меньших размерностях, преодолеваются. Это прежде всего связано с концепцией "общего положения" в многомерных пространствах. Говоря неформально, во многих важных

случаях, когда возникают самопересечения комплексов внутри многообразий, малыми шевелениями можно их устранить. В малых же размерностях этого сделать нельзя.

Введем одно из центральных отношений эквивалентности топологии многообразий, так называемую s -кобордантность. Пусть M_1 и M_2 – некоторые n -мерные многообразия, говорим, что они *кобордантны*, если существует $n + 1$ -мерное многообразие W , такое что $\partial W = M_1 \cup M_2$. Далее, если вложения $M_i \rightarrow W$ являются гомотопическими эквивалентностями, то этот кобордизм называется *h -кобордизмом*. Любая гомотопическая эквивалентность представляет элемент группы Уайтхеда, зависящей только от фундаментальной группы данного многообразия (или, в общем, клеточного комплекса). Группа Уайтхеда может быть определена как K_1 -функтор от целочисленного группового кольца фундаментальной группы, профакторизованный по действию самой группы. При этом, гомотопическая эквивалентность представляет тривиальный элемент группы Уайтхеда тогда и только тогда, когда она гомотопна композиции элементарных клеточных расширений и сдвливаний, т. е. так называемой простой гомотопической эквивалентности. h -кобордизм, при котором гомотопические эквивалентности являются простыми, называется *s -кобордизмом*. В частности, любая гомотопическая эквивалентность между односвязными многообразиями гомотопна простой.

Основным результатом многомерной топологии многообразий является следующая теорема (см. [1, 2]).

Теорема об s -кобордизме: Пусть $n \geq 5$, тогда связный h -кобордизм W между n -мерными многообразиями M_1 и M_2 гомеоморфен прямому произведению $W \equiv M_1 \times I$, если и только если этот кобордизм является s -кобордизмом.

В частности, если мы рассматриваем односвязные многообразия, то любой h -кобордизм между ними представляет собой прямое произведение. Из этого факта вытекает многомерная гипотеза Пуанкаре, утверждающая, что в размерности ≥ 5 гомотопическая сфера гомеоморфна стандартной сфере. В размерности 4 доказательство многомерной теоремы об s -кобордизме не проходит и аналогичное утверждение представляет собой открытую проблему.

Проблема. Верна ли теорема об s -кобордизме в размерности 4? Доказательство многомерной теоремы об s -кобордизме основано на разложении многообразия W на ручки, и дальнейшей их перегруппировке, сокращениям и так далее, последовательному приведению данного многообразия к структуре простого произведения M_i на отрезок. Главную роль в данном методе играет трюк Уитни. Это метод, позволяющий уничтожать точки пересечения вложенных подмногообразий, посредством вложенного двумерного диска (диска Уитни) (подробнее см. [1]). Основной проблемой распространения многомерного доказательства на случай четырехмерных многообразий является невозможность применения трюка Уитни в размерности 4. Действительно, как известно, любой двумерный комплекс может быть вложен в пятимерное пространство, и любой погруженный диск может быть произотопирован во вложенный. Однако, в размерности 4, это уже не верно: мы можем рассматривать диск Уитни лишь погруженным. Этот простой факт прямо рушит все многомерное доказательство теоремы об s -кобордизме в случае многообразий размерности 4.

Для преодоления трудностей, связанных с погруженным диском Уитни, были созданы новые методы. Наиболее эффективным оказался метод, предложенный А. Кассоном. Суть метода заключалась в последовательном заклеивании точек самопересечения все новыми погруженными дисками. Этот процесс можно продолжить бесконечно, при этом однако, окрестность полученного 2-комплекса будет представ-

лять ручку, гомотопически эквивалентную стандартной. Эта идея была использована М. Фридманом для доказательства 4-мерной топологической гипотезы Пуанкаре [3].

В целом, как отмечалось выше, проблема существования аналога теоремы об s -кобордизме в размерности 4 остается открытой. Однако, в 1996 г. М. Фридман и П. Тайхнер доказали аналог этой теоремы в классе 4-мерных многообразий, фундаментальные группы которых имеют субэкспоненциальный рост (вернее, рост не выше 2^n) [4].

3. Фальшивые и экзотические 4-мерные многообразия

Встает естественная задача сравнения отношений имеющихся эквивалентностей в классе многообразий фиксированной размерности: гомотопической эквивалентности, гомеоморфности, диффеоморфности. Так, вопрос о том верно ли, что два непрерывно гомеоморфных гладких многообразия являются диффеоморфными, имеет положительный ответ в размерностях меньших четырех. Ситуация в размерности начиная с четвертой оказывается более сложной.

Говорят, что многообразие N является *фальшивой копией* многообразия M , если N и M просто гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны. И N называется *экзотической копией* M , если N и M гомеоморфны, но не диффеоморфны.

Вопрос о существовании фальшивых и экзотических сфер представляет собой топологический и гладкий варианты гипотезы Пуанкаре. Гладкая гипотеза Пуанкаре верна в размерности меньше четырех: не существует экзотических трехмерных (и меньшемерных) сфер. Рассмотрение многомерного случая приводит к красивой теории экзотических сфер: замечательный результат Милнора утверждает, что существует 28 7-мерных многообразий, гомеоморфных 7-мерной сфере, но не диффеоморфной ей. Самым интригующим остается опять-таки 4-мерный случай. Это единственная размерность, в которой существование экзотических сфер остается открытой проблемой!

Не менее удивительной оказалась ситуация с экзотическими копиями пространств $\mathbb{R}^n$. В размерности $n \neq 4$ было известно, что экзотических $\mathbb{R}^n$ не существует и вопрос долгое время оставался открыт в размерности 4. В 80-е годы благодаря результатам Фридмана и Дональдсона было доказано существование бесконечного числа гладких, попарно недиффеоморфных 4-мерных многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^4$. При этом, в доказательстве были существенно использованы методы математической физики: инстантоны, связности Янга-Миллса и др. (см. [5]). Несколько более подробно. Одним из основных инвариантов односвязных 4-мерных топологических многообразий является форма пересечений – симметрическая билинейная форма, определенная на вторых гомологиях многообразия. Классическая теорема Уайтхеда утверждает, что два односвязных ориентированных замкнутых гладких 4-многообразия гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда их формы пересечений изоморфны. В связи с этим представлялся актуальным вопрос о перечислении симметрических билинейных форм, реализуемых как формы пересечений 4-многообразий. М. Фридман показал, что любая симметрическая билинейная форма может быть реализована как форма пересечения компактного односвязного 4-многообразия и что имеется не более двух многообразий с заданной формой. Дональдсон перечислил формы пересечения для гладких многообразий – их оказалось ограниченное число. Отсюда и вытекает существование экзотических гладких структур на $\mathbb{R}^4$. Структура экзотических $\mathbb{R}^4$ весьма сложна и занимает видное место в современных исследованиях. Остаются открытыми многие вопросы, связанные в

подобными многообразиями. В частности, существует ли экзотическое $\mathbb{R}^4$, такое, что оно не разбивается собственным вложенным $\mathbb{R}^3$ на два экзотических куска (проблема 4.43 (D) [6]).

Построение фальшивых четырехмерных многообразий требует применения иных техник. Как указывалось выше, фальшивых четырехмерных сфер не существует (четырёхмерная топологическая гипотеза Пуанкаре). Часто, вопрос о гомеоморфности двух гомотопных 4-многообразий является очень сложным, и проходя через топологическую категорию, доказывается их недиффеоморфность. Одним из первых подобных примеров 4-многообразий является конструкция Кэпела-Шейнсона (см. [2]) фальшивого проективного пространства $\mathbb{R}P^4$, гомотопически эквивалентного, но не диффеоморфного $\mathbb{R}P^4$. Это многообразие не является кусочно-линейно гомеоморфным $\mathbb{R}P^4$.

В заключении приведем еще некоторые простые по формулировке открытые проблемы в размерности 4, относящиеся к вопросу экзотических структур. Множество открытых проблем в данной тематике, как классических, так и современных, можно найти в списке [6] (см. также [7]).

Проблема (4.77 [6]): Верно ли, что произведение экзотического $\mathbb{R}^4$ на R^1 диффеоморфно $\mathbb{R}^5$?

Проблема (4.86 [6]): Верно ли, что все гладкие замкнутые 4-многообразия имеют более одной гладкой структуры? (Обобщение гладкой 4-мерной гипотезы Пуанкаре).

Проблема (4.87 [6]): Верно ли, что каждое некомпактное гладкое 4-многообразие имеет несчетное число гладких структур?

4. Гипотеза Шенфлиса

Приведем еще одну проблему, имеющую решение во всех размерностях, кроме четырех. Эта проблема связана с заузливанием в коразмерности 1. Напомним, что вложение $f : M^m \rightarrow N^{m+n}$ называется *локально-плоским*, если образ каждой его точки в N^{m+n} обладает окрестностью U , такой что пара (Imf, N^{m+n}) гомеоморфно (кусочно-линейно, если мы работаем в соответствующей категории) паре $(D^m \times D^n, D^m \times \{0\})$.

Гипотеза: Пусть $f : S^n \rightarrow S^{n+1}$ является кусочно-линейным локально-плоским вложением. Тогда $S^{n+1} \setminus Imf$ состоит из двух компонент, замыкание каждого из которых представляет собой кусочно-линейный n -мерный шар.

Грубо говоря, гипотеза утверждает, что n -мерная сфера не может заузливаться в $n+1$ -мерной. Оказывается, что в размерностях $n+1 \neq 4$ эта гипотеза оказывается верной. А в размерности 4, опять таки, не проходят методы, применимые в меньшей и больших размерностях.

Завершая данную заметку, еще раз отметим, что можно найти мало областей математики, изучение которых требует столь разнообразных методов. Проблемы 4-мерной топологии приводят к сложным вопросам теории групп. Это теория роста групп, проблемы типа Андрюса-Кертиса, нижних центральных рядов в группах. Также здесь применяются многомерные методы, например, точные последовательности хирургии, и методы теории узлов и зацеплений. Таким образом, размерность четыре с топологической точки зрения – единственная размерность, где сталкиваются столь разные техники и появляются вопросы, казалось бы, не относящиеся друг к другу. А

решение многих из них потребует развития еще более удивительных техник алгебры, геометрии и топологии.

Литература

- [1] К. Рурк и Б. Сандерсон: *Введение в кусочно-линейную топологию*, Мир, М. 1974.
- [2] Р. Мандельбаум: *Четырехмерная топология*, Мир, М. 1981.
- [3] М. Н. Freedman and F. Quinn: *Topology of 4-manifolds*, Princeton University Press, 1990.
- [4] М. Н. Freedman and P. Teichner: *4-Manifold topology I: Subexponential groups*, Invent. Math. **122**(3), pp. 509-529.
- [5] D. Freed and K. Uhlenbeck: *Instantons and four-manifolds*, Springer, N.Y. 1990.
- [6] R. Kirby: *Problems in low-dimensional topology*, 1996.
- [7] F. Quinn: *Problems in low-dimensional topology*, Science Bulletin of Josai University, **2**, pp. 97-104, 1997.

АЛГЕБРОДИНАМИКА: “ПРЕДСВЕТ”, ЧАСТИЦЫ-КАУСТИКИ И ПОТОК ВРЕМЕНИ

В. В. Кассандров

*Российский Университет дружбы народов, кафедра общей физики
117419, Москва, ул. Орджоникидзе 3
vkassan@sci.pfu.edu.ru*

В теориях поля с твисторной структурой частицы естественно интерпретировать как (пространственно локализованные) каустики изотропных геодезических конгруэнций, определяемых твисторным полем. В качестве реализации рассмотрены уравнения “алгебродинамики”, возникающие в контексте некоммутативного анализа (над алгеброй бикватернионов) и приводящие к полю комплексного эйконала и к набору калибровочных и твисторных полей, ассоциируемых с его решениями. Обсуждаются связанные с этим концепции производящей “Мировой функции” и многозначных физических полей. Возникающая картина Мира содержит в качестве основных элементов лоренц-инвариантный световой эфир и порождаемую светом материю. Вводится также представление о потоке Времени, отождествляемом с потоком первичного Света (“Предсвета”).

0. Введение: Алгебродинамическая единая теория поля

Теоретическая физика подошла к такому состоянию, когда невозможно продвигаться дальше, не пересмотрев полностью смысл и взаимосвязи трех основных ее составляющих: полей, частиц и пространственно-временной геометрии. *Теория (супер)струн* в принципе предоставляет возможность получения низкоэнергетической феноменологии (Стандартной модели) из единой и простой физики, сформулированной для планковской шкалы. Однако этот подход по-прежнему далек от таких основополагающих вопросов, как *происхождение* физических законов, существование первичного *Кода Вселенной* и т. п., являясь по существу лишь еще одной попыткой *описания* Природы (по возможности наиболее простым и эффективным способом), а отнюдь не ее *понимания*. Заметим, что до сих пор ни в рамках Стандартной модели, ни в теории суперструн нет никакого объяснения размерности пространства-времени, наблюдаемого спектра элементарных частиц и констант взаимодействия, в том числе “больших чисел” и др.

Твисторная программа Р. Пенроуза [1, 2] может рассматриваться как альтернатива струнной теории, претендующей на объяснение первичных физических структур. Для этого постулируется существование некоего предпространства – *пространства твисторов* $\mathbb{CP}^3$, – первичного по отношению к физическому пространству-времени и предопределяющего его геометрию как геометрию Минковского, и, в какой-то степени, набор физических полей.

Тем не менее, общая концепция твисторной программы как единой теории поля до сих пор не сформулирована. Какие именно уравнения выбрать в качестве фундаментальных, как описывать массивные поля и как получить спектр характеристик наблюдаемых частиц? И, наконец, почему именно твистор, весьма экзотический математический объект, кладется в основу фундаментальной физической теории?

Между тем, твисторная структура совершенно естественно возникает в рамках так называемого *алгебродинамического* подхода к теории поля, развитой в работах

автора с учениками. С общей точки зрения, алгебродинамическая парадигма может рассматриваться как возврат к идеям Пифагора и Платона о *свойствах Чисел, определяющих свойства видимого Мира*. Действительно, в качестве единственного (!) постулата алгебродинамики принимается существование некоторой единой структуры чисто абстрактной, алгебраической (числовой) природы, внутренние свойства которой полностью определяют как вид геометрии физического пространства-времени, так и всю динамику физических полей (набор и уравнения которых также диктуются исходной структурой, а не постулируются). Изложение основных принципов исповедуемой автором философии *неопифагорейства* в ее применении к построению фундаментальных физических теорий представлено в работе [39].

В наиболее развитой на сегодняшний день реализации алгебродинамики "Мировая" алгебраическая структура возникает при обобщении комплексного анализа на исключительные некоммутативные алгебры кватернионного ($\mathbb{Q}$) типа [13, 14, 15]. Было показано, в частности, что непосредственный учет некоммутативности в самом определении функций, "дифференцируемых" в $\mathbb{Q}$, приводит к *нелинейности* обобщенных уравнений Коши-Римана (ОУКР). Это, в свою очередь, позволило выбрать ОУКР в качестве фундаментальных уравнений динамики *взаимодействующих* физических полей, рассматриваемых как функции алгебраического переменного ($\mathbb{Q}$ -типа).

Широкий класс таких полей-функций возникает лишь при комплексном расширении алгебры $\mathbb{Q}$ до алгебры *бикватернионов* $\mathbb{B}$. При этом ОУКР не только оказываются лоренц-инвариантными, но и приобретают естественную спинорную и калибровочную структуры, что позволяет построить на их основе единую самосогласованную *алгебродинамическую* теорию поля [13, 14, 20, 23, 22, 24, 26, 39].

С физической точки зрения, наиболее важным свойством ОУКР оказывается их соответствие некоторой первичной *светоподобной* структуре. А именно, каждая (спинорная) компонента $S(x, y, z, t) \in \mathbb{C}$ первичного $\mathbb{B}$ -поля обязана удовлетворять *уравнению комплексифицированного эйконала* (УКЭ) [13, 14]

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = (\partial_t S)^2 - (\partial_x S)^2 - (\partial_y S)^2 - (\partial_z S)^2 = 0, \quad (1)$$

где матрица $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ представляет метрику Минковского, а символ ∂ отвечает частной производной по соответствующей координате. УКЭ (1) лоренц-инвариантно, нелинейно и играет роль, аналогичную линейному *уравнению Лапласа* в комплексном анализе. Каждое решение ОУКР может при этом быть восстановлено из набора нескольких (четырёх или менее) решений УКЭ.

В то же время, в работе [26] была обнаружена естественная *твисторная* структура УКЭ и на ее основе получено *общее решение* этого нелинейного уравнения. А именно, было показано, что в отношении к твисторной структуре каждое решение УКЭ принадлежит к одному из двух классов, оба из которых могут быть получены из некоторой производящей функции твисторных аргументов с помощью простой алгебраической процедуры. Та же конструкция позволяет дать естественное определение *сингулярностей* светоподобных геодезических конгруэнций, соответствующих полю эйконала – *каустик*. Именно на каустиках – *огibaющих* конгруэнции – соседние лучи пересекаются, а значения ассоциированных с конгруэнцией физических полей обращаются в бесконечность, формируя тем самым единый *частицеподобный* объект – *источник* полей и самой конгруэнции. Тем самым, в рассматриваемой алгебродинамической теории *частицы представляют собой (пространственно локализованные) каустики первичных светоподобных конгруэнций*.

С другой стороны, изотропные конгруэнции определяют универсальный локальный перенос основного твисторного поля с постоянной фундаментальной скоростью

“с” (аналогичный переносу поля электромагнитной волной) и тем самым дают указание на особую роль временной координаты в рассматриваемой алгебродинамической схеме и в твисторной теории вообще. Существование “Потока Времени” становится прямым следствием существования лоренц-инвариантного “эфира”, формируемого первичными светоподобными конгруэнциями (“Предсвета”). Принципиально важным при этом становится свойство *многозначности* фундаментального комплекснозначного решения УКЭ (“Мирового решения”) и ассоциированных с ним физических полей. В каждой точке пространства-времени мы имеем дело с *суперпозицией* большого числа лучей, принадлежащих локально различным конгруэнциям, и поток Времени формируется из многих *разнонаправленных* составляющих (глобально связанных комплексной структурой в единый объект).

В разделе 2 статьи описывается твисторная структура УКЭ и алгебраическая процедура получения двух классов его решений. Приведены несколько простых примеров решений УКЭ. В разделе 3 рассматривается структура каустик решений УКЭ, в том числе пространственно ограниченного типа, образующих *частицеподобные* сингулярные объекты, а также ассоциированных с решениями УКЭ физических полей. В четвертом разделе введено понятие *Мировой функции*, генерирующей “Мировое решение” УКЭ. В этой связи предложена и подробно обсуждается общая концепция *многозначности* физических полей. Заключительный раздел 5 посвящен вопросам, связанным с природой физического Времени: вводится понятие “предсветового” эфира, образованного первичными изотропными конгруэнциями, и поток Времени по существу отождествляется с потоком Предсвета. Обсуждается внутренняя структура этих фундаментальных потоков, связанная с многозначностью исходного твисторного поля.

Настоящая работа является расширенной версией английской статьи [27], а в описании физической картины Мира продолжает предыдущую статью автора [39]. Для простоты восприятия мы избегаем использования 2-спинорного формализма, дифференциальных форм и т. п., отсылая более подготовленного в математическом отношении читателя к работам [23, 26, 25, 21, 22].

Твисторная структура и два класса решений уравнения комплексного эйконала

Как известно, уравнение эйконала описывает процесс распространения волновых фронтов (разрывов поля) в любой релятивистской теории, включая электродинамику Максвелла [4, 5]. Математическим и физическим проблемам, связанным с уравнением эйконала, посвящено огромное количество работ, см. например, [7, 8, 9, 10]. Уравнение комплексифицированного эйконала (УКЭ) естественно возникает в задачах распространения ограниченных световых пучков [11] и в теории изотропных конгруэнций, связанных с решениями уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла [12]. В нашем подходе, однако, комплексный эйконал рассматривается в первую очередь как *фундаментальное физическое поле*, описывающее, в частности, взаимодействующие и обладающие дискретным спектром характеристик (“автоквантованные”) *частицеподобные* объекты, формируемые структурой особенностей решений УКЭ. С каждым из этих решений естественно сопоставляется также электромагнитное и другие известные из физики поля, ответственные за описание процесса взаимодействия сингулярностей-частиц.

Определим вначале, помимо обычных декартовых пространственно-временных координат $\{t, x, y, z\}$, естественные для геометрии Минковского *спинорные* или *изотропные* координаты $\{u, v, w, \bar{w}\}$ (скорость света здесь и в дальнейшем принимается

равной единице, $c = 1$)

$$u = t + z, \quad v = t - z, \quad w = x - iy, \quad \bar{w} = x + iy. \quad (2)$$

Эти координаты образуют эрмитову 2×2 -матрицу X вида

$$X = X^+ = \begin{pmatrix} u & w \\ \bar{w} & v \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В спинорных координатах УКЭ (1) выглядит следующим образом:

$$\partial_u S \partial_v S - \partial_w S \partial_{\bar{w}} S = 0 \quad (4)$$

и эквивалентно утверждению об изотропности комплексного 4-вектора градиента $\partial_\mu S$. Отметим, что УКЭ обладает замечательной *функциональной инвариантностью* [13, 14]: для каждого из его решений $S(X)$ любая (дифференцируемая) функция от него $f(S(X))$ также является решением УКЭ. Помимо этого, известно [6], что УКЭ инвариантно относительно преобразований полной 15-параметрической *конформной группы* пространства Минковского, включающих преобразования Лоренца.

Введем теперь в рассмотрение *произвольную однородную* функцию

$$\Pi = \Pi(\xi_0, \xi_1, \tau^0, \tau^1) \quad (5)$$

от двух пар комплексных переменных $\{\xi, \tau\}$, в каждой точке пространства-времени связанных между собой линейной зависимостью через т. н. *соотношение инцидентности*

$$\tau = X\xi \Leftrightarrow \tau^0 = u\xi_0 + w\xi_1, \quad \tau^1 = \bar{w}\xi_0 + v\xi_1, \quad (6)$$

и ведущих себя как *2-спиноры* при лоренцевых вращениях¹. Пара *инцидентных* друг другу 2-спиноров $\{\xi(X), \tau(X)\}$ образует алгебро-геометрический объект, известный в качестве (*изотропного проективного*) *твистора* пространства Минковского [2].

Предположим в дальнейшем, что одна из двух компонент спинора $\xi(X)$, например ξ_0 , отлична от нуля. В этом случае однородная функция Π зависит от *трех* (проективных твисторных) аргументов следующего вида:

$$\Pi = \Pi(G, \tau^0, \tau^1), \quad G = \xi_1/\xi_0, \quad \tau^0 = u + wG, \quad \tau^1 = \bar{w} + vG. \quad (7)$$

Мы готовы теперь сформулировать основной результат нашей работы [26].

Любое (аналитическое) решение УКЭ по отношению к твисторной структуре принадлежит к одному из двух и только двух классов и может быть получено из некоторой производящей функции вида (7) с помощью одной из двух различных чисто алгебраических процедур.

Для получения первого класса решений следует просто разрешить алгебраическое уравнение, определяемое функцией (7),

$$\Pi(G, u + wG, \bar{w} + vG) = 0 \quad (8)$$

относительно единственной неизвестной G . При этом получим некоторое комплекснозначное поле $G(X)$, тождественно удовлетворяющее УКЭ. Действительно, при подстановке $G = G(X)$ уравнение (8) становится *тождеством* и, в частности, может

¹ Для упрощения мы не различаем в записи пунктирные и непунктирные спинорные индексы. В соотношении инцидентности (6) опущен стандартный множитель " i ", что допустимо при соответствующем переопределении *нормы* твистора.

быть продифференцировано по спинорным координатам $\{u, v, w, \bar{w}\}$. Тогда будем иметь

$$P\partial_u G = -\Pi_0, \quad P\partial_w G = -G\Pi_0, \quad P\partial_{\bar{w}} G = -\Pi_1, \quad P\partial_v G = -G\Pi_1, \quad (9)$$

где через Π_0, Π_1 обозначены частные производные от функции Π по ее твисторным аргументам τ^0, τ^1 , а через P – полная производная этой функции по G

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = \frac{\partial\Pi}{\partial G} + w\Pi_0 + v\Pi_1, \quad (10)$$

которую мы будем пока что считать отличной от нуля в рассматриваемой области пространства-времени. Перемножая тогда уравнения (9), находим, что поле $G(X)$ действительно удовлетворяет УКЭ в форме (4). Легко убедиться также, что *произвольная* функция твисторных аргументов $S = S(G, u + wG, \bar{w} + vG)$ при подстановке полученной зависимости $G = G(X)$ также удовлетворяет УКЭ (вследствие функциональной зависимости (8) эта функция на самом деле зависит только от *двух* твисторных переменных).

Для получения второго класса решений УКЭ следует сначала продифференцировать производящую функцию (7) по G и лишь потом получившееся алгебраическое уравнение

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = 0 \quad (11)$$

разрешить относительно G . При этом функция $G(X)$ уже не будет сама по себе удовлетворять УКЭ; однако после ее подстановки в (7) производящая функция Π становится функцией пространственно-временных координат и сама с необходимостью удовлетворяет УКЭ (как и любая функция от нее $f(\Pi(X))$ в силу отмеченной выше инвариантности УКЭ). В самом деле, дифференцируя функцию (7) при $G = G(X)$ по спинорным координатам, имеем

$$\partial_u \Pi = \Pi_0 + P\partial_u G, \quad \partial_w \Pi = G\Pi_0 + P\partial_w G, \quad \partial_{\bar{w}} \Pi = \Pi_1 + P\partial_{\bar{w}} G, \quad \partial_v \Pi = G\Pi_1 + P\partial_v G, \quad (12)$$

откуда при учете генерирующего условия (11) немедленно следует УКЭ (4) для функции Π .

Функциональное соотношение (8) и отвечающие ему решения УКЭ первого класса хорошо известны. Действительно, помимо УКЭ поле $G(X)$, полученное из (8), удовлетворяет, как легко видеть из выражений для производных (9), *переопределенной* системе дифференциальных уравнений вида

$$\partial_u G = G\partial_w G, \quad \partial_{\bar{w}} G = G\partial_v G, \quad (13)$$

определяющей т. н. *бессдвиговые (изотропные геодезические) конгруэнции* (БСК). При этом алгебраическое уравнение (8) представляет собой *общее решение* этих уравнений (в неявном виде), описывая тем самым все БСК в пространстве Минковского. Это замечательное утверждение, доказанное впервые в [16], известно как *теорема Керра*.

Что касается второго класса решений УКЭ, генерируемых алгебраическим уравнением (11), то, по-видимому, он ранее не рассматривался в литературе². Известно, однако, что условие (11) определяет положение *особенностей* БСК и, соответственно,

² Изучение решений *действительного* уравнения эйконала с помощью дифференцирования производящих функций, зависящих от координат как параметров, используется в общей теории особенностей каустик и волновых фронтов [9].

– особенностей решений УКЭ *первого* класса, полученных из алгебраического уравнения (8). Точнее, уравнение (11) определяет *точки ветвления* основного комплекснозначного поля $G(X)$, т. е. точки пространства-времени, в которых производящее уравнение (8) имеет *кратные корни*. С другой стороны, для самих решений второго класса геометрическое место положения особенностей определяется, как это сразу следует из генерирующего эти решения уравнения (11), условием следующего вида:

$$\Lambda = \frac{d^2\Pi}{dG^2} = 0. \quad (14)$$

Изотропные конгруэнции (в том числе БСК), их особенности и точки ветвления играют определяющую роль в алгебродинамической теории поля. Подробнее они обсуждаются в следующих разделах. Здесь же мы лишь повторим, что согласно теореме, доказанной в работе [26],

две вышеописанные алгебраические процедуры в совокупности представляют общее решение УКЭ, т. е. все (аналитические) решения уравнения комплексного эйконала могут быть получены с помощью одной из этих процедур

(отметим только, что для решений с нулевой компонентой спинора $\xi_0 = 0$ должна быть выбрана иная, по сравнению с использованной выше, калибровка). Полученный результат можно рассматривать как *прямое обобщение теоремы Керра*.

В заключение приведем в качестве иллюстрации несколько примеров нахождения двух классов решений УКЭ с помощью вышеприведенной конструкции.

а. Статические решения. Пусть производящая функция Π зависит от своих твисторных переменных следующим образом:

$$\Pi = \Pi(G, H), \quad H = G\tau^0 - \tau^1 = wG^2 + 2zG - \bar{w}, \quad (15)$$

где $z = (u - v)/2$, а зависимость от временной координаты $t = (u + v)/2$ оказывается тем самым исключенной. Очевидно, более того, что анзац (15) представляет самый общий вид генерирующих функций, приводящих к статическим решениям УКЭ.

В [19, 12] было доказано, что статические решения уравнений БСК (а, следовательно, также и УКЭ первого класса), обладающие пространственно-ограниченной (*локализованной*) структурой сингулярного множества, с точностью до 3-мерных вращений и трансляций исчерпываются *решением Керра*, получающегося из функции

$$\Pi = H + 2iaG = wG^2 + 2z^*G - \bar{w}, \quad (z^* = z + ia) \quad (16)$$

с постоянным параметром $a \in \mathbb{R}$. Разрешая квадратичное по G уравнение $\Pi = 0$, получаем тогда следующие две “моды” поля $G(X)$:

$$G = \frac{\bar{w}}{z^* \pm r^*} \equiv \frac{x + iy}{z + ia \pm \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}}, \quad (17)$$

которые в случае $a = 0$ геометрически соответствуют обычной *стереографической проекции* $S^2 \mapsto \mathbb{C}$ из Северного или Южного полюсов соответственно. Нетрудно проверить, что оба решения, как и соответствующие им остальные компоненты твистора

$$\tau^0 = u + wG = t \pm r^*, \quad \tau^1 = \bar{w} + vG = G\tau^0, \quad (18)$$

действительно удовлетворяют УКЭ (так же, как и произвольная функция всех этих компонент). При этом, соответствующая БСК в простейшем случае $a = 0$ радиальна и имеет точечную сингулярность; в общем случае $a \neq 0$ БСК представляет

собой конгруэнцию прямолинейных образующих системы гиперboloидов и имеет *сингулярность типа “Керровского” кольца* радиуса $R = |a|$. Используя эту конгруэнцию, можно определить соответствующие ей риманову метрику (метрику типа “Керра-Шилда”) и электромагнитное поле (см. раздел 3), совместно удовлетворяющие электровакуумной системе уравнений Максвелла-Эйнштейна. В случае $a = 0$ это приводит к решению Райсснера-Нёрдстрема с кулоновским электрическим полем, в общем случае – к решению Керра-Ньюмена, характеризующимся тремя параметрами – массой M , электрическим зарядом Q и моментом импульса Msa , – и обладающим также магнитным моментом Qa , соответствующим “дираковской” частице [17, 18]. Более того, в рамках алгебродинамического подхода для электрического заряда точечной или кольцеобразной сингулярностей *оказывается допустимым только одно, единственное по модулю (“элементарное”) значение* [14, 24, 25]. Более подробно свойства этого исключительного решения в контексте алгебродинамики рассмотрены в работе [21].

Получим теперь из той же производящей функции (16) решение УКЭ *второго* класса. Дифференцируя функцию (16) по G и приравнявая производную нулю, получим $G = -z^*/w$; подставляя затем это выражение в качестве аргумента в функцию (16), будем иметь окончательно следующее статическое (всюду однозначное) решение УКЭ:

$$\Pi = -\frac{(r^*)^2}{w} = -\frac{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}{x - iy}. \quad (19)$$

Отметим, что при этом уравнение $\Pi = 0$, эквивалентное двум действительным уравнениям $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, определяет сингулярное кольцо для решения Керра (17), т. е. для соответствующего той же функции Π решения УКЭ *первого* класса, как это и должно быть в соответствии с вышедоказанной общей теоремой (см. также раздел 4).

При рассмотрении статических решений УКЭ с локализованной в 3-пространстве сингулярностью *второго* класса выясняется, однако, что в отличие от аналогичных решений первого они вовсе не исчерпываются решением (19). В качестве примера рассмотрим серию решений, которые можно получить из производящих функций следующего вида:

$$\Pi = \frac{G^n}{H}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n > 2 \quad (20)$$

Не приводя явного вида самих решений (для произвольного $n > 2$), найдем лишь пространственную структуру их особенностей, определяемую из решения совместной системы уравнений $P = 0$, $\Lambda = 0$ (см. уравнения (11), (14)). Исключая из нее неизвестное поле G , находим, что сингулярности (точки ветвления эйконала) снова имеют форму *колец* $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$, имеющих радиусы $R = a(n-1)/\sqrt{n(n-2)}$ соответственно. Интересно заметить, что этим решениям не соответствует, очевидно, никаких нетривиальных решений УКЭ первого класса, для которых уравнение $\Pi = 0$ определяло бы структуру сингулярностей, как это имеет место для случая пары “Керровских” решений (17) и (19).

б. Волновые решения. Рассмотрим теперь производящие функции, зависящие лишь от одной из твисторных переменных τ^0, τ^1 , например от τ^0 :

$$\Pi = \Pi(G, \tau^0) = \Pi(G, u + wG). \quad (21)$$

Оба класса решений УКЭ, генерируемых функциями вида (21), будут, очевидно, зависеть только от *двух* спинорных координат $u = t + z$, $w = x - iy$. Это означает,

в частности, что соответствующие поля распространяются вдоль оси Z с фундаментальной скоростью $c = 1$. Пример "фотоподобного" решения этого типа, с пространственно ограниченной (как в продольном, так и в поперечном направлениях) структурой сингулярного множества приведен в работе [25].

Отметим в заключение, что решение УКЭ значительно более сложной структуры рассмотрено ниже в разделе 4 (см. также [25]).

1. Частицы как каустики первичных светоподобных конгруэнций

Хорошо известно, что каждому решению уравнения эйконала соответствует некоторая изотропная конгруэнция лучей, ортогональная гиперповерхностям постоянного эйконала $S = \text{const}$ (волнового фронта) и определяемая направлением 4-вектора градиента $\partial_\mu S$. В обычно рассматриваемых ситуациях эти две структуры определяют *характеристики* и *бихарактеристики* некоторого (линейного) уравнения гиперболического типа, например, волнового уравнения $\square\Psi = 0$.

В рассматриваемом комплексном случае (УКЭ) поверхности постоянного эйконала и изотропные конгруэнции 4-градиента геометрически принадлежат уже *комплексному расширению пространства-времени Минковского* $\mathbb{C}M^4$, совершенно естественному также с точки зрения комплексной структуры исходной алгебры бикватернионов $\mathbb{B}$. Вопрос о физическом смысле дополнительных (мнимых) координат и соответствующих комплексных изотропных конгруэнций нетривиален и чрезвычайно важен, но мы не имеем возможности рассматривать его здесь, надеясь сделать это в отдельной статье.

Используем ниже другой, не менее интересный факт существования *действительной* изотропной геодезической конгруэнции для каждого из *комплекснозначных* решений УКЭ. Это замечательное свойство сразу следует из рассмотренной выше твисторной структуры УКЭ. А именно, каждое решение УКЭ (как первого, так и второго классов) полностью определяется соответствующим ему (изотропным проективным) твисторным полем $\{\xi(X), \tau(X)\}$, подчиненным условию инцидентности (6) (в выбранной выше калибровке $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = G(X)$). Это "условие Пенроуза" может быть в явном виде разрешено относительно пространственных координат $\{x_a\}$, $a = 1, 2, 3$, в результате чего получим:

$$x_a = \frac{\Im(\tau^+ \sigma_a \xi)}{\xi^+ \xi} - \frac{\xi^+ \sigma_a \xi}{\xi^+ \xi} t, \quad (22)$$

где $\{\sigma_a\}$ представляют собой обычные *матрицы Паули*, а временная переменная t *остается свободным параметром!* Из выражения (22) следует, что фундаментальное спинорное поле $\xi(X)$ *воспроизводит свои значения вдоль лучей, определяемых единичным векторным полем направлений* (полем т. н. *директора*)

$$\vec{n} = \frac{\xi^+ \vec{\sigma} \xi}{\xi^+ \xi}, \quad \vec{n}^2 \equiv 1, \quad (23)$$

распространяясь вдоль этих, локально определенных направлений с универсальной и постоянной скоростью $c = 1$. В ранее выбранной калибровке для декартовых компонент "директорного" вектора (23) имеем

$$\vec{n} = \frac{1}{(1 + GG^*)} \{ (G + G^*), -i(G - G^*), (1 - GG^*) \}; \quad (24)$$

при этом две его независимые степени свободы находятся в одно-однозначном соответствии с двумя компонентами основной комплекснозначной функции $G(X)$.

Таким образом, при выборе некоторого произвольного решения УКЭ пространство расслаивается пучком прямолинейных световых лучей – *изотропной геодезической*³ конгруэнцией (ИГК). Заметим, что как следствие прямолинейности изотропной конгруэнции “директорный” вектор автоматически удовлетворяет уравнению *геодезических* [39]

$$\partial_i \vec{n} + (\vec{n} \vec{\nabla}) \vec{n} = 0. \quad (25)$$

Фундаментальное поле $G(X)$, определяющее ИГК, может быть получено из одного из двух алгебраических условий (8) или (11), которые в общем случае имеют несколько (конечное или даже бесконечное число) локально различных решений. Предположим, что производящая функция Π *неприводима*, т. е. не может быть представлена в виде произведения некоторого числа твисторных функций того же вида (в противном случае следует сделать выбор в пользу одного из множителей). Тогда решение общего вида будет представлять собой *многозначную комплексную функцию* $G(X)$. Выберем в окрестности некоторой точки X одну из непрерывных *ветвей* этой функции (“мод”); при этом данной моде будет соответствовать некоторая ИГК и определенный набор физических полей.

В частности, для любого из решений УКЭ *первого* класса может быть определен спинор *электромагнитного поля* $F_{(AB)}$, непосредственно выражающийся через твисторное поле решения [23, 25, 26]

$$F_{(AB)} = \frac{1}{P} \left\{ \Pi_{AB} - \frac{d}{dG} \left(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P} \right) \right\}, \quad (26)$$

где Π_A, Π_{AB} представляют собой производные по твисторным аргументам τ^0, τ^1 от генерирующей функции Π первого и второго порядков соответственно. Для каждой из мод решения $G(X)$ построенное таким способом поле *локально удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла*. Помимо этого, в работах [14, 23, 21] было показано, что через ту же функцию $G(X)$ естественно определяется еще и комплексное $SL(2, \mathbb{C})$ калибровочное поле Янга-Миллса, а также *поле кривизны* некоторой эффективной римановой метрики.

Рассмотрим теперь *аналитическое продолжение* выбранной моды функции $G(X)$ вплоть до одной из ее точек ветвления, которые соответствуют кратным корням уравнения (8). В такой точке напряженность электромагнитного поля (26) обращается в бесконечность. То же самое имеет место и для других ассоциированных с решениями УКЭ физических полей, в частности поля кривизны⁴. Тем самым пространственная структура, определяемая положением точек ветвления функции $G(X)$ (которая может быть 0-, 1- или даже 2-мерной, см. раздел 4), проявляет себя как *общий источник* совокупности физических полей и (по крайней мере в случае, когда она ограничена в 3-пространстве) формирует некоторый хорошо определенный и единый *частицеподобный* объект.

Такие образования могут проявлять нетривиальную эволюцию во времени, моделирующую физические взаимодействия, а бифуркации сингулярностей весьма напоминают *взаимопревращения* элементарных частиц (см. пример в следующем разделе). Они обладают также реалистичным набором “квантовых чисел”, в том числе автоквантованным электрическим зарядом и гиромангнитным отношением, характерным для дираковской частицы (фермиона спина 1/2) [17, 18, 21]. Большое число

³ В пространстве Минковского геодезические, очевидно, являются прямыми.

⁴ Поле Янга-Миллса имеет, помимо этого, дополнительные сингулярности струнного типа.

таких частицеподобных решений и их сингулярная структура получены и изучались в наших работах [20, 21, 22, 25].

С другой стороны, для светоподобных конгруэнций (ИГК), сопоставляемых решениям УКЭ с помощью директорного вектора (24), положение их точек ветвления совпадает с положением точек ветвления самого фундаментального поля $G(X)$ и представляет хорошо известную из геометрической оптики структуру "протяженных фокусов" – *каустик*, т. е. огибающих системы лучей конгруэнции, на которых соседние лучи пересекаются (фокусируются). С этой точки зрения, в рассматриваемой теории "частицы" интерпретируются как (ограниченные в пространстве) *каустики ассоциированных с решениями УКЭ светоподобных прямолинейных конгруэнций*.

2. Мировая функция и многозначные физические поля

На данном этапе следует сделать выбор одного из двух типов решений УКЭ, которое в развиваемой теории могло бы в принципе отвечать за описание структуры Вселенной как целого. В качестве "*Мирового решения*" мы выбираем *некоторое решение первого класса*, поскольку большое количество интересных геометрических и физических структур может быть ассоциировано с каждым из решений именно этого класса [14, 20, 21]. Такое решение может быть получено алгебраически из условия Керра (8) и некоторой производящей твисторной "*Мировой функции*" Π ; геометрически оно порождает некоторую ИГК специального вида – *бессдвиговую изотропную конгруэнцию* [2, 3].

Более того, оказывается, что при этом выборе решение УКЭ *второго* класса, "сопряженное" Мировому, также играет важную роль, определяя характеристическую гиперповерхность для Мирового решения (I класса). Действительно, эта последняя находится из решения совместной системы алгебраических уравнений (8) и (11). Если разрешить уравнение (11) относительно G и подставить результат в (8), полученное уравнение $\Pi(G(X)) = 0$ и определит характеристическую гиперповерхность для "Мирового" решения. В то же время функция $\Pi(G(X))$ обязана при этом удовлетворять УКЭ, представляя некоторое решение второго класса (в соответствии с основной теоремой раздела 2). Таким образом, в рассматриваемой теории *поле эйконала выполняет две взаимодополняющие функции, являясь одновременно фундаментальным физическим полем (как решение УКЭ I класса) и в то же время характеристическим полем (как сопряженное ему решение II класса), определяющим геометрическое место точек ветвления исходного поля (точек разрыва его производных)*.

Предположим теперь, что Мировая функция Π представляет собой *неприводимый полином очень высокого, но конечного порядка*, так что уравнение (8) является алгебраическим в узком смысле (т. е. не трансцендентным) и геометрически определяет некоторую алгебраическую поверхность в проективном твисторном пространстве $\mathbb{CP}^3$. В этом случае Мировое решение УКЭ будет состоять из некоторого большого числа мод – ветвей многозначной комплексной функции $G(X)$ – и будет в каждой точке задавать соответствующее число изотропных направлений, определяемых в 3-пространстве директорным вектором (24) и порождающих равное им число локально различных ИГК.

Каждая пара этих конгруэнций в фиксированный момент времени будет, как правило, иметь *оггибающую*, состоящую из большого числа связных *одномерных* компонент-каустик⁵. Именно эти пространственные структуры и будут определять

⁵ Действительно, каустики **общего вида** определяются одним *комплексным* условием

в рассматриваемой теории “частицы” общего типа (по крайней мере, если они пространственно ограничены). Другие типы частицеподобных структур будут локализованы в фокальных точках пересечения *трех и более* ИГК, где уравнение (8) имеет корень более высокой кратности. Разумеется, образования этого вида будут встречаться относительно редко, и их устойчивость весьма проблематична.

На достаточно простом примере можно проиллюстрировать существование и свойства обоих вышепредставленных типов частиц-каустик. Выберем, например, в качестве производящей твисторную функцию вида [25]

$$\Pi = G^2(\tau^0)^2 + (\tau^1)^2 - b^2 G^2 = 0, \quad b = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

приводящую к уравнению 4-го порядка относительно поля $G(X)$. В начальный момент времени $t = 0$, как нетрудно проследить аналитически, геометрическое место особенностей состоит из пары точечных сингулярностей (обладающих равными “элементарными” зарядами противоположного знака) и электрически нейтральной 2-мерной поверхности (эллипсоидального “кокона”), окружающего точечные заряды (подробнее см. [25]). Кокон образован пересечением всех 4-х мод многозначного решения, в то время как каждая из точечных сингулярностей формируется пересечением одной из пар соответствующих (локально радиальных, т. е. кулоновского типа) ИГК.

Чрезвычайно интересной оказывается динамика этих сингулярностей. В частности, в момент времени $t = b/\sqrt{2}$ точечные сингулярности взаимоуничтожаются (при $r = 0$, т. е. в начале координат), моделируя тем самым процесс *аннигиляции* элементарных частиц; этот процесс сопровождается *излучением* вторичного волнового (светоподобного) фронта, представленного еще одной 2-мерной компонентой связности каустической структуры. Более подробно решение (27) будет рассмотрено в отдельной статье.

Итак, мы видим, что именно многозначное поле естественным образом обеспечивает возможность самосогласованной структуры и эволюции сложных (вплоть до приближенных к реальным) многочастичных сингулярных систем. Необходимо лишь преодолеть некий психологический барьер и допустить принципиальную возможность *многозначности* не только первичного G -поля, но и других ассоциированных с ним физических полей, включая, например, электромагнитное.

Действительно, в общепринятых классических подходах поля, по существу, служат лишь инструментом, позволяющим адекватным образом (с учетом запаздывания и т. п.) описать динамику частиц, и ничем более. Правда, в нелинейных теориях, так же, как и в представленном здесь алгебродинамическом подходе, поля играют более важную роль, отвечая за образование самих частиц как регулярных *солитонов* или сингулярностей (точечных или протяженных) соответственно. В первом, более привычном подходе, требование *однозначности* поля представляется вполне естественным, если не неизбежным. Та же ситуация имеет место и в квантовой механике, где “правила отбора” часто следуют именно из условия однозначности волновой функции.

Однако в алгебродинамике, как можно видеть на примере решения (27), требование однозначности поля не только не является необходимым, но и препятствует адекватному описанию взаимодействия частиц-сингулярностей. С другой стороны, признание многозначности поля вовсе не мешает получению дискретного спектра характеристик сингулярности по аналогии с квантовой механикой. Например, требование *однозначности некоторой, локально выбранной моды* первичного G -поля и

$\Pi(G(X)) = 0$ (двумя действительными условиями) на 3 координаты, при фиксированном $t = t_0$ определяющим некоторое число 1-мерных кривых – “струн”.

электромагнитного поля (вдали от точек ветвления первого и сингулярностей второго соответственно!) приводит к квантованию электрического заряда сингулярных источников в алгебродинамической теории поля [24, 25].

Наконец, если вести речь о т. н. процессе "измерения" напряженностей поля, например электромагнитного, то следует заметить, что в эксперименте непосредственно меряются лишь ускорения частиц, токи и т. п., и лишь затем результаты переводятся на привычный полевой язык. Однако это последнее действие – лишь дань традиции, вовсе не являющаяся обязательной (вспомним хотя бы электродинамику Фейнмана-Уилера или многочисленные релятивистски инвариантные теории "действия на расстоянии" [28, 29]). "На самом деле мы никогда не имеем дело с полями, а исключительно с частицами" (Ф. Дайсон).

Между тем, предлагаемый подход в этом отношении может даже считаться не столь радикальным, поскольку физическое поле, хотя и многозначное, сохраняет в нем свою фундаментальную роль и как строительная основа для частиц, и как посредник, осуществляющий взаимодействие между ними. Что касается второй из его функций, то уже на классическом уровне рассмотрения, при рассмотрении уравнения движения частицеподобной сингулярности, мы можем иметь дело с *усредненным значением* всех полевых мод, "внешних" по отношению к частице (т. е. несингулярных в точке ее нахождения). Отметим, что близкие представления естественно возникают и в некоторых квантовополевых подходах [32]. В нашей же схеме, истинную взаимосвязь первичного многозначного поля и "наблюдаемого" поля, описывающего межчастичные взаимодействия, еще предстоит осознать после получения спектра и эффективной механики частиц-сингулярностей.

Хочется надеяться, что концепция многозначности физических полей будет через какое-то время воспринята так же, как это произошло с гипотезой *многомерности* физического пространства-времени. Идея многозначности действительно выглядит чрезвычайно естественной и привлекательной. С чисто математической точки зрения эта концепция оправдана в свете естественной многозначности решений дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [30, 31]). Как выясняется, решения, описываемые обобщенными δ -функциями, представляют собой, по существу, лишь частный и не самый интересный случай решений общего вида. С физической точки зрения идея о локально многозначном, но *глобально едином комплекснозначном поле* позволяет простым образом ввести понятие о некотором дуалистическом комплексе "частицы-поле", комплексе чрезвычайно богатой и сложной структуры, объединяющем все частицы Вселенной в единый физический объект. При этом сами сингулярности-частицы хорошо определены и участвуют в коллективном движении, *свободном от всякой неоднозначности или расходимостей* (последние могут возникнуть в данной схеме лишь как результат неадекватного описания процесса эволюции и могут быть устранены, если возникнут, на совершенно законном основании, в отличие от процедур перенормировки в квантовой теории поля).

Наконец, что касается принципиально важной *финальной* проблемы выбора некоторой *исключительной по внутренним свойствам* производящей функции Π в качестве *Мировой функции Вселенной*, некоторые соображения могут быть высказаны уже на данном этапе развития теории. Мы собираемся рассмотреть их в отдельной статье.

3. "Предсвет", релятивистски инвариантный Эфир и поток Времени

Светоподобные конгруэнции (ИГК) являются основным элементом картины физического мира, возникающей в представленном алгебродинамическом подходе и да-

же в твисторной теории вообще. Лучи ИГК плотно заполняют пространство-время и в каждой точке состоят из *суперпозиции* огромного числа компонент-мод, имеющих различные изотропные направления, т. е. распространяющиеся (с 3-мерной точки зрения) в разных направлениях, но с постоянной по модулю и универсальной скоростью $c = 1$ (для каждой из мод многозначного решения, каждой точки и каждой инерциальной системы отсчета). С такой точки зрения, *во Вселенной не существует ничего, кроме этого первичного светоподобного потока (“Предсвета”)*, поскольку *вся физическая Материя порождена предсветом и из предсвета* на каустиках – своего рода областях “конденсации”, “уплотнения” лучей предсветовой конгруэнции.

При этом можно говорить о некоторой исключительной форме релятивистски инвариантного *эфира*, формируемого первичным предсветовым потоком. Такой эфир, разумеется, имеет очень мало общего со старыми моделями *светонесущего* эфира, рассматривавшегося как род упругой среды непонятной этиологии. Здесь же эфир состоит из *бесструктурных* (предматериальных) светоподобных элементов и, очевидно, находится в полном согласии с теорией относительности⁶.

В то же время, описанная выше картина эфира, формируемого потоком Предсвета, и материи, порожденной “сгущениями” первичного света, вызывает множество ассоциаций с Библией и с древней восточной философией. Не один теолог, мистик или философ наверняка уже приходил к представлению о подобной картине Мироздания. Однако возникающие в контексте последовательной и чисто дедуктивной физической теории, такие представления выглядят значительно более достоверными; насколько известно автору, ранее они практически не обсуждались в физической литературе⁷.

Существование формируемого Предсветом эфира и универсальное свойство “переноса” фундаментального “эфирообразующего” поля $G(X)$ с постоянной скоростью $c = 1$ указывает также на принципиально различный статус пространственных и временной координат и позволяет предложить *новый подход к проблеме физического Времени* в целом. При этом полезно вспомнить, что с тех пор, как Г. Минковский в 1908 году объединил пространство и время в единый 4-мерный континуум, никаких дальнейших продвижений в понимании проблемы Времени по существу не произошло. Более того, такой синтез во многом затушевывал качественные различия пространственной и временной сущностей и мало способствовал решению таких проблем, как (микро/макро) необратимость, (не)однородность и (не)локальность времени, зависимость хода времени от материальных процессов и др.

По нашему мнению, суть проблемы Времени очень проста и состоит в следующем. *Субъективно* мы воспринимаем время как некоторое непрерывное и невидимое движение, *поток*; каждый из нас прекрасно понимает, как это понимали еще древние греки, что имеется в виду под словами “Река Времени”. Мы воспринимаем такое внутреннее движение, как не зависящее ни от нашей воли, ни от материальных процессов и *равномерное*: недаром течение времени в физике моделируется равномерным движением ленты записывающего устройства и т. п. Кроме того, и в отличие от изменений в пространственных направлениях, именно с изменением во времени связано не только *сохранение* определенного набора *интегральных величин* (это-то как раз используется в ортодоксальной физике), но и более сильное, субъективно вос-

⁶ Сейчас кажется даже странным, что сам А. Эйнштейн не предложил концепцию релятивистского эфира, столь созвучного идеям и СТО, и любимого им *принципа Маха*. Удивительно и то, что Р. Пенроуз также просмотрел эту возможность, естественно вытекающую из самой структуры созданной им твисторной теории.

⁷ В отдельных аспектах близкие к вышерассмотренным идеи высказывались в работах [34, 35, 36]. Отметим особенно концепцию “лучистой частицы”, предложенную Л. С. Шихобаловым [33].

принимаемое условие – *повторение, воспроизведение локального состояния любой системы*. Именно поэтому для измерения времени и используются (*часы*) с принципом действия, основанным на повторяющихся, чисто периодических процессах. Наконец, в отличие от в значительной мере произвольных и различных изменений пространственного положения физических тел, все они и все мы всегда обладаем *общей и монотонно возрастающей временной координатой*, т. е. находимся в едином и перманентном движении в Реке Времени.

Удивительно, но теоретическая физика даже не пытается дать хоть какое-то объяснение подобных представлений, совершенно чуждых ей и, в том числе, теории относительности. При описании динамики (как нерелятивистской, так и релятивистски инвариантной) чисто постулативно выбирается “гиперповерхность, ортогональная оси времени”, т. е. фиксируется субъективно воспринимаемое всеми единство настоящего момента времени, момента “сейчас”; *никаких внутренних оснований для этого в структуре теоретической физики, включая СТО, не имеется!*

Такая ситуация, по крайней мере частично, обусловлена тем, что представление о вездесущем и вечном Потоке Времени немедленно приводит к вопросу о его (материальном? предматериальном?) носителе. В этой связи нельзя не вспомнить работы Н. А. Козырева [37], который настойчиво развивал представление об “активном” Потоке Времени, непосредственно влияющем на ход материальных процессов. По нашему мнению, однако, строгие физические обоснования идей Козырева сегодня отсутствуют. В предлагаемом нами подходе Поток Времени не является в подобном смысле материальным: он не *влияет* на Материю, и не *взаимодействует* с ней, а сам *порождает* ее. В отличие от концепции Козырева, здесь нет разных материальных сущностей, лишь одной из которых является Время: напротив, имеется лишь одна *триединая* сущность – Предсвет-Время-Материя. В некотором смысле наша концепция оказывается ближе к теории “время-генерирующих потоков” А. П. Левича [38].

С другой стороны, при рассмотрении проблемы носителя Потока Времени мы неизбежно возвращаемся к представлениям о некоторой форме *эфира*, который был, как известно, изгнан из физики после триумфа специальной теории относительности. Без него же никакой Поток Времени не может быть последовательно введен в структуру теоретической физики, и все субъективно воспринимаемые свойства времени не могут быть строго сформулированы и описаны.

Однако парадоксальным образом, как это часто бывает, именно СТО с ее постулатом постоянства и универсальности скорости света и оправдывает введение *динамического, лоренц-инвариантного эфира*, формируемого светоподобными конгруэнциями, как первичной структуры физического Мира. При этом Поток Времени совершенно естественно может быть отождествлен с Потоком первичного Света (Предсвета), а *Река Времени* – с *Рекой Предсвета*. Причем именно универсальность скорости света объясняет наше субъективное восприятие Потока Времени как равномерного и однородного.

Совершенно необычным и неожиданным оказывается, однако, другое: в данном подходе Поток Времени представляет собой **суперпозицию огромного числа разнонаправленных и локально независимых составляющих (субпотоков)**. В каждой точке 3-мерного пространства существует (конечное) множество направлений, и каждая из мод первичного многозначного поля $G(X)$ определяет одно из этих направлений и *распространяется вдоль него*, формируя одну из составляющих единого Потока Предсвета, тождественного Потoku Времени.

Можно предполагать, что именно благодаря такой локальной многозначности мы не способны субъективно воспринимать *направление* Потока Времени. Помимо

того, для сложного Мирового решения в структуре фундаментального временного-предсветового потоков обязательно присутствует и *стохастическая* компонента, проявляющая себя в хаотических изменениях локальных направлений световых конгруэнций, также труднодоступных для восприятия. В то же время, как уже отмечалось, именно существование постоянной по модулю и универсальной для всех ветвей многозначного Мирового решения *скорости распространения Предсвета* ответственно за возможность субъективного восприятия Потока Времени вообще и за восприятие хода времени как равномерного и однородного в частности.

4. Заключение

Итак, мы рассмотрели реализацию алгебродинамического подхода, в которой в качестве основы физической теории выбирается единственная структура чисто абстрактной природы (алгебра комплексных кватернионов и *обобщенные уравнения Коши-Римана* – условия дифференцируемости функций в этой алгебре). Та же самая структура на самом деле может быть выражена на многих эквивалентных алгебро-геометрических языках (ковариантно постоянных полей, твисторной геометрии, бессдвиговых изотропных конгруэнций и др.).

Исходные уравнения прямо приводят к полю комплексного эйконала, рассматриваемому в теории как первичное нелинейное физическое поле (в некотором смысле альтернативное линейным полям квантовой механики). С этим полем тесно связаны фундаментальное 2-спинорное и твисторное поля, на языке которых, в частности, формулируется общее решение уравнения комплексного эйконала. Через поле эйконала определяются также другие физические поля, в том числе электромагнитное поле и поле Янга-Миллса. Особенности поля эйконала и отвечающих ему изотропных конгруэнций рассматриваются как частицеподобные образования (“автоквантованные” и эффективно взаимодействующие).

В результате, возникающая как следствие одной лишь исходной структуры *физическая* картина Мира оказывается весьма неожиданной и красивой. Ее основными элементами являются первичный световой поток – “Предсвет” – и формируемый им релятивистский эфир, многозначные физические поля и порождаемая Предсветом материя (состоящая из частиц-каустики, образуемых суперпозицией отдельных ветвей единой предсветовой конгруэнции в точках их “фокусировки”).

Очень естественной и глубокой представляется возникающая в теории связь между существованием универсальной скорости (скорости “света”) и “Потоком Времени”, позволяющая в определенном смысле понять происхождение Времени как такового. *Время есть ничто иное, как первичный Свет*, эти две сущности неразделимы. С другой стороны, *нет ничего во Вселенной, помимо потока Предсвета*, порождающего всю без исключения “плотную” Материю во Вселенной.

Благодарности

Автор благодарен Д. Г. Павлову за приглашение участвовать в работе создаваемого им актуального научного журнала “Гиперкомплексные числа в физике и геометрии”, а также в конкурсе работ по данной тематике. Он также глубоко признателен А. П. Левичу и участникам руководимого им семинара по изучению феномена времени. Много дали мне беседы с В. И. Жариковым, В. Н. Журавлевым, Дж. А. Ризкалла, В. Н. Тришиным, В. П. Троицким, В. П. Царевым и с другими моими коллегами, которым я благодарен за многолетнюю дружбу и поддержку. Хочется

надеяться, что огромное здание физики на самом деле можно перестроить по новому проекту, значительно более простому, единственно возможному (Дж. А. Уилер) и приближающему нас к истинному Проекту, по которому и был создан наш Мир.

Литература

- [1] R. Penrose, in: *Quantum Gravity: an Oxford Symposium*, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama. – Clarendon Press, Oxford 1975.
- [2] Р. Пенроуз и У. Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Т. 2.* – Мир, М. 1989.
- [3] R. Penrose, *Classical and Quantum Gravity*, **14**, A299 (1997).
- [4] В. А. Фок, *“Теория пространства, времени и тяготения”*. – ГИТТЛ, М. 1955.
- [5] А. З. Петров, *“Новые методы в Общей теории относительности”*. – Наука, М. 1966.
- [6] Г. Бейтман, *“Математическая теория распространения электромагнитных волн”*. – Физматгиз, М. 1958.
- [7] S. Frittelli, E. T. Newman and G. Silva-Ortigoza, *J. Math. Phys.*, **40**, 383, 1999;
E. T. Newman and A. Perez, *J. Math. Phys.*, **40**, 1089 (1999).
- [8] В. И. Арнольд, *“Математические методы классической механики”*. – Наука, М. 1989.
- [9] В. И. Арнольд, *“Особенности каустик и волновых фронтов”*. – ФАЗИС, М. 1996.
- [10] С. Н. Кружков, *Мат. Сборник*, **98 (140)**, 450 (1975).
- [11] В. П. Маслов, *“Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях”*. – Наука, М. 1977.
- [12] R. P. Kerr and W. B. Wilson, *Gen. Rel. Grav.*, **10**, 273 (1979).
- [13] В. В. Кассандров, *“Алгебраическая структура пространства-времени и Алгебродинамика”*. – Изд-во Ун-та дружбы народов, М. 1992.
- [14] V. V. Kassandrov, *Gravitation & Cosmology*, **3**, 216 (1995); (gr-qc/0007027).
- [15] V. V. Kassandrov, *Acta. Applic. Math.*, **50**, 197 (1998);
V. V. Kassandrov, in: *“Quasigroups and Nonassociative Algebras in Physics”*, ed J. Lõhmus and P. Kuusk. – Inst. Phys. Estonia Press, 1990, p 202.
- [16] G. C. Debney, R. P. Kerr and A. Schild, *J. Math. Phys.*, **10**, 1842 (1969).
- [17] B. Carter, *Phys. Rev.*, **174**, 1559 (1968).
- [18] C. A. Lopes, *Phys. Rev.*, **D30**, 313 (1984).
- [19] А. Я. Буринский, in: *“Problems of Theory of Gravitations and Elementary Particles”*. No. 11, ed. K. P. Stan'yukovich. – Atomizdat, Moscow, 1980, p. 47 (in Russian).
- [20] В. В. Кассандров и Дж. А. Ризкалла, в: *“Современные проблемы теории поля”*, ред. А. В. Аминова. – Изд-во Казанского Ун-та, Казань 1998, с. 163; see also English version V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, in: *“Recent Problems in Field Theory”*, ed A. V. Aminova, Kasan Univ. Press, Kasan 1998, p 176; (gr-qc/9809078).

- [21] V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, in: *"Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory"*, ed. V.A. Petrov. – Inst. High Energy Phys., Protvino, 2002, p. 199; Preprint gr-qc/9809056, 1998.
- [22] V. V. Kassandrov and V. N. Trishin, *Gravitation & Cosmology*, **5**, 272 (1999); (gr-qc/0007026).
- [23] V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, Preprint gr-qc/0012109, 2000.
- [24] В. В. Кассандров, *Вестник Рос. Ун-та дружбы народов*, сер. Физика, **8(1)**, 34, 2000; ([www.chronos.msu.ru / relectropublications.html](http://www.chronos.msu.ru/relectropublications.html)).
- [25] V. V. Kassandrov, Preprint gr-qc /0308045.
- [26] V. V. Kassandrov, *Gravitation & Cosmology*, **8**, Suppl. 2, 57 (2002).
- [27] V. V. Kassandrov, in: *Proc. Int. Conf. "Physical Interpretations of Relativity Theory"*, eds. A. N. Morozov and V. O. Gladyshev. – Bauman Univ. Press, Moscow, 2003 (in print).
- [28] *Instantaneous Action-at-a-Distance in Modern Physics. "Pro" and "Contra"*, eds. A. Chubykalo, V. Pope and R. Smirnov-Rueda. – Nova Science Publ. Inc., NY, 1999.
- [29] Ю. С. Владимиров и А. Ю. Турыгин, *"Теория прямого межчастичного взаимодействия"*. – Энергоатомиздат, М. 1986.
- [30] F. Lizzi, G. Marmo, G. Sparano and A. M. Vinogradov, *J. Geom. Phys.*, **14**, 34, 1994.
- [31] V. V. Lychagin, *Acta Applic. Math.*, **3**, 135 (1985).
- [32] A. A. Kirillov, *Phys. Lett.*, **B555**, 13 (2003);
A. A. Kirillov and D. Turaev, *Phys. Lett.*, **B532**, 185 (2002).
- [33] Л. С. Шихобалов, *Вестник С.-П. Ун-та*, **1(3)**, 109 (1997); **1(4)**, 118 (1999).
- [34] И. А. Урусовский, *Зарубежная радиоэлектроника*, **3**, 3 (1996); **6**, 64 (1996); **6**, 66 (2000).
- [35] В. В. Смолянинов, *Успехи физич. наук*, **170**, 1064 (2000).
- [36] И. А. Шелаев, *Введение в необратимую электродинамику*. – Дубна, 1999.
- [37] Н. А. Козырев, *Избранные Труды*. – Л. 1991;
Н. А. Козырев, в: *"История и методология естественных наук. Вып. 2"*. – М., 1963, с. 95; (см. также труды этого автора в www.chronos.msu.ru/relectropublications.html).
- [38] А. П. Левич, в: *Конструкции времени в естественных науках: на пути к пониманию феномена времени*, ред. А. П. Левич. – Изд-во Московского Ун-та, М. 1996.
А. Р. Levich, *Gravitation & Cosmology*, **1(3)**, 237 (1995); (см. также труды этого автора в [www.chronos.msu.ru / relectropublications.html](http://www.chronos.msu.ru/relectropublications.html)).
- [39] В. В. Кассандров, в: *Математика и Практика. Математика и Культура. Вып. 2*, ред. М. Ю. Симаков. – Самообразование, М. 2001, с. 67; ([www.chronos.msu.ru / relectropublications.html](http://www.chronos.msu.ru/relectropublications.html)).

О КВАТЕРНИОНАХ

I. КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ТОЧКИ

Ханукаев Ю.И. (khan@ptci.ru)

При поддержке РФФИ, тема 2-07-90327, реализованы два приложения QuaPalette и DualPalette к пакету МАТНЕМАТИСА 4, позволяющие проводить аналитические вычисления с комплексными и дуальными кватернионами.

Ниже приводится текст статьи <http://zhurnal.apelarn.ru/articles/2002/033.pdf> дополненный примером построения дуальной матрицы поворота по конечному повороту и смещению тела и определения соответствующего дуального кватерниона.

Рассматривается техника кватернионов, как альтернатива векторного и матричного описания пространственных конечных перемещений твердого тела. Дано кватернионное описание преобразования Х.Лоренца

1. В 1853 году У.Гамильтон (1805-1865) ввел понятие кватернионов [1] как обобщение комплексных чисел на четырехмерное пространство. Аппарат кватернионов представляет собой пример четырехмерной алгебры, в которой для операции умножения однозначно определена обратная операция – деление. Особенность кватернионов состоит в правиле их умножения.

$$\text{Итак, } A = \{a_o, a_1, a_2, a_3\} = a_o + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3, \quad a \in R. \quad (1.1)$$

Операции умножения отражают возведение во вторую степень мнимой единицы и векторное перемножение элементов базиса декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} \tau_1 \circ \tau_2 &= \tau_3, & \tau_2 \circ \tau_1 &= -\tau_3, \\ \tau_1^2 &= \tau_2^2 = \tau_3^2 = -1, & \tau_2 \circ \tau_3 &= \tau_1, & \tau_3 \circ \tau_2 &= -\tau_1, \\ \tau_3 \circ \tau_1 &= \tau_2, & \tau_1 \circ \tau_3 &= -\tau_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, имеет место гиперкомплексное пространство a_o – скалярная часть кватерниона,

$\bar{a} = a_o + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3$ – векторная часть кватерниона.

Операции перемножения мнимых единиц позволяют записать

$$C = A \circ B = a_o b_o - (\bar{a} \cdot \bar{b}) + a_o \bar{b} + b_o \bar{a} + (\bar{a} \times \bar{b}). \quad (1.3)$$

Отсюда видно, что перемножение кватернионов не коммутативно. В скалярной и матричной форме имеем

$$\begin{aligned} c_o &= a_o b_o - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3, \\ c_1 &= a_o b_1 + b_o a_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ c_2 &= a_o b_2 + b_o a_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ c_3 &= a_o b_3 + b_o a_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1, \end{aligned} \quad c = A \cdot b = B \cdot a, \quad (1.4)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_o & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_o & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_o & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_o \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_o & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_o & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_o & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_o \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Матрицы A и B ортогональны при условии $\sum_{i=0}^3 a_i^2 = 1$, $\sum_{i=0}^3 b_i^2 = 1$, то есть имеем дело с четырехмерными матрицами поворота типа

$$A_R = \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_o & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix}, \quad B_R = \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_o & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Произведение $A_R \cdot B_R^T = \Lambda_R$ коммутативно и также дает ортогональную матрицу

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} \sum \lambda_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_o^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_o\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_o\lambda_2) \\ 0 & 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_o\lambda_3) & \lambda_o^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_o\lambda_1) \\ 0 & 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_o\lambda_2) & 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_o\lambda_1) & \lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

которая поворачивает векторную часть кватерниона, оставляя неизменной его скалярную часть. Матрицы A_R и B_R выделяют между ортогональными базисами $\mathbf{E}_o, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ортогональный базис $\mathbf{d}_o, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$: $\mathbf{E} = A_R \mathbf{d}$, $\mathbf{e} = B_R \mathbf{d}$, $\mathbf{E} = \Lambda_R \mathbf{e}$.

По аналогии с комплексными числами вводится понятия сопряженного кватерниона, нормы кватерниона и обратного кватерниона:

$$\tilde{A} = a_o - \bar{a} \text{ - кватернион, сопряженный кватерниону } A = a_o + \bar{a},$$

$$\|A\| = A \circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ A = a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \text{ - норма кватерниона } A,$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\|A\|} \text{ - кватернион обратный } A.$$

Операции сопряжения и определения нормы обладают следующими свойствами: $C = A \circ B$, $\tilde{C} = \tilde{B} \circ \tilde{A}$, $\|C\| = C \circ \tilde{C} = A \circ B \circ \tilde{B} \circ \tilde{A} = \|A\| \cdot \|B\|$.

Если кватернион нормирован, то обратный кватернион равен сопряженному кватерниону. Операция деления определяется как умножение на обратный кватернион $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = 1$.

Требование $\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, обеспечивающее ортогональность матриц A_R и B_R (1.6), будет выполнено, если ввести параметризацию

$$\lambda_i = \frac{q_i}{\sqrt{q_o^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Каждый кватернион определяет некоторое положительное число, равное норме кватерниона, единичный вектор $\bar{\tau} = \tau_1 \alpha_1 + \tau_2 \alpha_2 + \tau_3 \alpha_3$, $\bar{\tau}^2 = -1$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ и угол φ . Соотношения между этими величинами

$$\text{выражается формулой } U = \sqrt{\|U\|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{\tau} \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\|U\|} \exp \left(\bar{\tau} \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.8)$$

Представление кватерниона (1.8) аналогично представлению комплексного числа $z = r \exp(i\varphi)$, что позволяет рассматривать функции комплексного переменного как неразвернутые функции кватерниона. Точка мнимой оси разворачивается в плоскость трехмерного пространства $i = \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3$,

$$iy = \frac{U - \tilde{U}}{2}.$$

2. Свойство (1.7) матриц (1.6) позволяет использовать кватернионы для описания вращения твердого тела – трехмерной декартовой системы координат. Для этого полагают, что радиус-вектор $\mathbf{r}$ принадлежит четырехмерному пространству $\bar{r} \in H$, тогда отображение $H \rightarrow H$ по правилу

$$R = L \circ r \circ \tilde{L}, \quad \|L\| = 1 \quad (2.1)$$

эквивалентно преобразованию поворота. Проведем вычисления

$$\begin{aligned} R &= (\lambda_o + \bar{\lambda}) \circ (r_o + \bar{r}) \circ (\lambda_o - \bar{\lambda}) = \sum \lambda_i^2 r_o + (\lambda_o + \bar{\lambda}) \circ \bar{r} \circ (\lambda_o - \bar{\lambda}) = \\ &= (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) r_o + (-\bar{\lambda} \cdot \bar{r} + \lambda_o \bar{r} + \bar{\lambda} \times \bar{r}) \circ (\lambda_o - \bar{\lambda}) = \\ &= (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) r_o + \bar{r}(\lambda_o^2 - \bar{\lambda}^2) + 2\bar{\lambda}(\bar{\lambda} \cdot \bar{r}) + 2\lambda_o \bar{\lambda} \times \bar{r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В скалярной форме имеем $R_o = (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) r_o$,

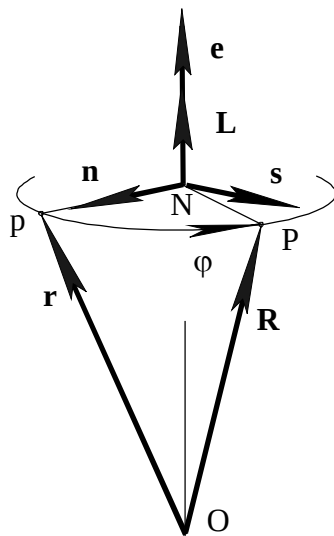
$$\begin{aligned} R_1 &= (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_1 + 2\lambda_1(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3) + 2\lambda_o(\lambda_2 r_3 - \lambda_3 r_2) = \\ &= (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_1 + 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_o \lambda_3) r_2 + 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_o \lambda_2) r_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_2 + 2\lambda_2(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3) + 2\lambda_o(\lambda_3 r_1 - \lambda_1 r_3) = \\ &= 2(\lambda_2 \lambda_1 + \lambda_o \lambda_3) r_1 + (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_2 + 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_o \lambda_1) r_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 &= (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_3 + 2\lambda_3(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3) + 2\lambda_o(\lambda_1 r_2 - \lambda_2 r_1) = \\ &= 2(\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_o \lambda_2) r_1 + 2(\lambda_3 \lambda_2 + \lambda_o \lambda_1) r_2 + (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2) r_3 \end{aligned}$$

или в матричном виде $R = \Lambda \cdot r$, где Λ – матрица (1.7). Норма кватерниона и норма его векторной части сохраняются.

Векторная часть преобразования (2.2) может быть получена прямым геометрическим построением.



При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси точки тела описывают окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения, а радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой точки с началом на оси вращения описывает коническую поверхность и преобразуется в вектор $\mathbf{R}$. Поворот вокруг оси, совпадающей по направлению с единичным вектором $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 a_1 + \mathbf{e}_2 a_2 + \mathbf{e}_3 a_3$, на угол φ можно определить

скаляром $\lambda_o = \cos \frac{\varphi}{2}$ и вектором

$$\mathbf{L} = \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2} = \mathbf{e}_1 \lambda_1 + \mathbf{e}_2 \lambda_2 + \mathbf{e}_3 \lambda_3,$$

$$\lambda_i = \alpha_i \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

Величины λ_i , $i = 0,1,2,3$ называются параметрами Эйлера, которые можно считать прямоугольными декартовыми координатами точки в четырехмерном пространстве. Точки на гиперсфере $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ определяют конечное положение тела. Выразим матрицу поворота через параметры Эйлера.

Пусть N общее основание перпендикуляров, опущенных из точек p и P на вектор $\mathbf{L}$. Единичный вектор вдоль отрезка Np обозначим через $\mathbf{n}$ и введем единичный вектор $\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{n}$. Разложим вектор $\mathbf{R}$ по трем взаимно ортогональным направлениям $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{s}$. $\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}NP \cos \varphi + \mathbf{s}NP \sin \varphi$,

где $ON = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}$, $NP = Np$, $\mathbf{n}Np = \mathbf{r} - \mathbf{e}ON$, $\mathbf{s}NP = \mathbf{e} \times \mathbf{n}Np = \mathbf{e} \times \mathbf{r}$ и, значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \varphi) + (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \sin \varphi = \\ &= \mathbf{r} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + 2\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2(\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \\ &= \mathbf{r}(\lambda_0^2 - \mathbf{L}^2) + 2\mathbf{L}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{r}) + 2\lambda_0(\mathbf{L} \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Это выражение совпадает с векторной частью (2.2).

Проведенное построение показывает, что преобразование $R = L \circ r \circ \tilde{L} = \Lambda \cdot r$ есть поворот вектора $\mathbf{r}$ в положительную сторону вокруг оси $\mathbf{e}$, либо изменение описания вектора $\mathbf{r}$ при повороте в противоположную сторону системы координат.

Аналогично, преобразование $r = \tilde{L} \circ R \circ L = \Lambda^T \cdot R$ есть поворот вектора $\mathbf{R}$ в отрицательную сторону, либо изменение описания вектора $\mathbf{R}$ при повороте системы координат в положительную сторону.

Формуле (2.3) можно придать другой вид введением вектора конечного поворота

$$\mathbf{F} = \mathbf{e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad (2.4)$$

Равенства $\mathbf{s}NP = \mathbf{e} \times \mathbf{n}Np = \mathbf{e} \times \mathbf{r}$, $ON = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}Np$ или $-\mathbf{n}Np = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{r} = \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r})$ позволяют записать исходное выражение $\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}NP \cos \varphi + \mathbf{s}NP \sin \varphi$ в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}Np \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} + (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \mathbf{r} + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} + (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$\text{Получили формулу Родрига (1794-1851)} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{2\mathbf{F} \times (\mathbf{r} + (\mathbf{F} \times \mathbf{r}))}{1 + \mathbf{F}^2} \quad (2.5)$$

Кватернионы поворота, записанные в виде $N = \nu_o(1 + \bar{\nu}/\nu_o) = \nu_o(1 + \bar{F}_\nu)$,

$$L = \lambda_o(1 + \bar{\lambda}/\lambda_o) = \lambda_o(1 + \bar{F}_\lambda), \quad M = \mu_o(1 + \bar{\mu}/\mu_o) = \mu_o(1 + \bar{F}_\mu)$$

устанавливают также связь между векторами конечного поворота

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\nu &= \mathbf{e}_\nu \operatorname{tg} \frac{\varphi_\nu}{2}, \quad \mathbf{F}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \operatorname{tg} \frac{\varphi_\lambda}{2}, \quad \mathbf{F}_\mu = \mathbf{e}_\mu \operatorname{tg} \frac{\varphi_\mu}{2}, \\ N &= \nu_o(1 + \bar{F}_\nu) = M \circ L = \mu_o(1 + \bar{F}_\mu) \circ \lambda_o(1 + \bar{F}_\lambda) = \mu_o \lambda_o (1 - \bar{F}_\mu \cdot \bar{F}_\lambda + \bar{F}_\mu + \bar{F}_\lambda + \bar{F}_\mu \times \bar{F}_\lambda) = \\ &= \mu_o \lambda_o (1 - \bar{F}_\mu \cdot \bar{F}_\lambda) \left(1 + \frac{\bar{F}_\mu + \bar{F}_\lambda + \bar{F}_\mu \times \bar{F}_\lambda}{1 - \bar{F}_\mu \cdot \bar{F}_\lambda} \right). \end{aligned}$$

Из этого равенства получаем правило сложения векторов поворота

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{\mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_\lambda + \mathbf{F}_\mu \times \mathbf{F}_\lambda}{1 - \mathbf{F}_\mu \cdot \mathbf{F}_\lambda}, \quad \nu_o = \mu_o \lambda_o (1 - \mathbf{F}_\mu \cdot \mathbf{F}_\lambda) \quad (2.6)$$

3. Аппарат кватернионов может быть использован для описания метрики Г.Минковского (1864-1909), инвариантной относительно преобразования Х.Лоренца (1853-1928). Обозначим какое-либо событие в пространстве-времени кватернионом $X = X_o + \tau_\alpha X_\alpha$, где $X_o = icT$, T – время, c – скорость света (фундаментальная постоянная), X_α – декартовы координаты точки. Интервал между двумя событиями метрики Минковского определяется формулой $s^2 = x \circ \tilde{x} = X \circ \tilde{X} = S^2$. Результаты измерений одного и того же события, наблюдаемого двумя наблюдателями s и S , связаны преобразованием Лоренца

$$\bar{r}_\parallel = (\bar{R}_\parallel - \bar{V}T)\gamma, \quad \bar{r}_\perp = \bar{R}_\perp, \quad t = \left(T - \frac{\bar{V} \cdot \bar{R}}{c^2}\right)\gamma, \quad \gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (3.1)$$

оставляющим инвариантным интервал

$$s^2 = \bar{r}_\parallel^2 + \bar{r}_\perp^2 - c^2 t^2 = \bar{R}_\parallel^2 + \bar{R}_\perp^2 - c^2 T^2 = S^2.$$

Формально преобразование Лоренца есть “жесткое” преобразование пространства-времени в себя и описывается ортогональной матрицей S :

$x_\alpha = S_{\alpha\beta} X_\beta$. Например, при движении вдоль оси OX_1

$$S = \begin{pmatrix} ch\psi & -ish\psi & 0 & 0 \\ ish\psi & ch\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma V/c & 0 & 0 \\ i\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\text{Рассмотрим преобразование} \quad L \circ R \circ \tilde{L}^*, \quad (3.3)$$

$$\text{где} \quad R = icT + \tau_1 X_1 + \tau_2 X_2 + \tau_3 X_3, \quad L = \cos \frac{i\psi}{2} + \tau_1 \sin \frac{i\psi}{2} = ch \frac{\psi}{2} + \tau_1 ish \frac{\psi}{2}.$$

Запишем в матричном виде произведение

$$\begin{aligned} L \circ R &= \lambda_o X_o - \bar{\lambda} \cdot \bar{X} + \lambda_o \bar{X} + X_o \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \times \bar{X} = \\ &= (\lambda_o X_o - \lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2 - \lambda_3 X_3) + \tau_1 (\lambda_1 X_o + \lambda_o X_1 - \lambda_3 X_2 + \lambda_2 X_3) + \\ &+ \tau_2 (\lambda_2 X_o + \lambda_3 X_1 + \lambda_o X_2 - \lambda_1 X_3) + \tau_3 (\lambda_3 X_o - \lambda_2 X_1 + \lambda_1 X_2 + \lambda_o X_3). \end{aligned}$$

В произведении кватернионов $L \circ R$ первому сомножителю соответствует квадратная матрица, а второму – матрица столбец

$$L \circ R \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_o & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = A_z R. \quad (3.4)$$

Далее запишем в явном виде произведение

$$\begin{aligned} R \circ \tilde{L}^* &= \lambda_o^* X_o + \bar{\lambda}^* \cdot \bar{X} + \lambda_o^* \bar{X} - X_o \bar{\lambda}^* + \bar{\lambda}^* \times \bar{X} = \\ &= (\lambda_o^* X_o + \lambda_1^* X_1 + \lambda_2^* X_2 + \lambda_3^* X_3) + \tau_1 (-\lambda_1^* X_o + \lambda_o^* X_1 - \lambda_3^* X_2 + \lambda_2^* X_3) + \\ &+ \tau_2 (-\lambda_2^* X_o + \lambda_3^* X_1 + \lambda_o^* X_2 - \lambda_1^* X_3) + \tau_3 (-\lambda_3^* X_o - \lambda_2^* X_1 + \lambda_1^* X_2 + \lambda_o^* X_3), \end{aligned}$$

$$R \circ \tilde{L}^* \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_o & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = B_Z R. \quad (3.5)$$

В последнем равенстве учтено, что $\lambda_o^* = \lambda_o$ и $\lambda_\alpha^* = -\lambda_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$.

По сравнению с выражением (3.4) транспонированным оказался блок, соответствующий векторной части. Это понятно: кватернионное и комплексное сопряжения в рассматриваемом случае совпадают, то есть $\tilde{L}^* = L$, а произведение $R \circ \tilde{L}^* = R \circ L$ отличается от произведения $L \circ R$ знаком векторного произведения.

Вычислим результирующую матрицу преобразования

$$S = A_Z \cdot B_Z = B_Z \cdot A_Z = \begin{pmatrix} 2\lambda_o^2 - 1 & -2\lambda_o\lambda_1 & -2\lambda_o\lambda_2 & -2\lambda_o\lambda_3 \\ 2\lambda_1\lambda_o & 1 - 2\lambda_1^2 & -2\lambda_1\lambda_2 & -2\lambda_1\lambda_3 \\ 2\lambda_2\lambda_o & -2\lambda_2\lambda_1 & 1 - 2\lambda_2^2 & -2\lambda_2\lambda_3 \\ 2\lambda_3\lambda_o & -2\lambda_3\lambda_1 & -2\lambda_3\lambda_2 & 1 - 2\lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

В рассматриваемом случае $\lambda_o = ch \frac{\psi}{2}$, $\lambda_1 = ish \frac{\psi}{2}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и S совпадает с (3.2). Само преобразование $r = SR$ есть преобразование Лоренца (3.1)

$$ict = icT\gamma - i\frac{V}{c}X_1\gamma = ic\left(T - \frac{VX_1}{c^2}\right)\gamma, \quad x_1 = -VT\gamma + X_1\gamma, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

В общем случае $\mathbf{V} = \mathbf{e}V$ и кватернион преобразования имеет вид

$$L = \cos \frac{i\psi}{2} + \tau_1 \alpha_1 \sin \frac{i\psi}{2} + \tau_2 \alpha_2 \sin \frac{i\psi}{2} + \tau_3 \alpha_3 \sin \frac{i\psi}{2}, \quad (3.7)$$

где $\cos i\psi = ch\psi = \gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, $\sin i\psi = ish\psi = i\frac{V}{c}\gamma = iV / c \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

Матрица поворота (3.3) в рассматриваемом случае принимает вид

$$S = \begin{pmatrix} \gamma & -i\frac{V_1}{c}\gamma & -i\frac{V_2}{c}\gamma & -i\frac{V_3}{c}\gamma \\ i\frac{V_1}{c}\gamma & 1 + \alpha_1^2(\gamma - 1) & \alpha_1\alpha_2(\gamma - 1) & \alpha_1\alpha_3(\gamma - 1) \\ i\frac{V_2}{c}\gamma & \alpha_2\alpha_1(\gamma - 1) & 1 + \alpha_2^2(\gamma - 1) & \alpha_2\alpha_3(\gamma - 1) \\ i\frac{V_3}{c}\gamma & \alpha_3\alpha_1(\gamma - 1) & \alpha_3\alpha_2(\gamma - 1) & 1 + \alpha_3^2(\gamma - 1) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Запишем само преобразование Лоренца

$$\begin{aligned} ict &= icT\gamma - i\gamma \sum_{\alpha=1}^3 V_\alpha X_\alpha / c & x_j &= -V_j T\gamma + X_j + \alpha_j \sum_{k=1}^3 \alpha_k X_k (\gamma - 1) & \text{или} \\ t &= \left(T - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}}{c^2}\right)\gamma, & \mathbf{r} &= \mathbf{R} - \frac{\mathbf{V}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{V})}{V} + \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{V})}{V} - \mathbf{V}T\right)\gamma \end{aligned} \quad (3.9)$$

4. В 1873 году У.Клиффорд (1845-1879) дал оригинальное описание [2] движения твердого тела с помощью кватерниона, у которого компонентами

являются величины $a + \varepsilon a^o$, где a, a^o – вещественные и комплексные числа и $\varepsilon^2 = 0$. Впоследствии величины $A = a + \varepsilon a^o$ Э.Штуди (1862-1930) назвал дуальными числами [3]. А.Котельникову (1865-1944) в 1895 году удалось истолковать все формулы теории кватернионов, как “неразвернутые” формулы теории дуальных кватернионов [4], то есть установить полную аналогию тех и других формул. Применительно к кинематике эта аналогия устанавливает соотношение между движениями тела с одной неподвижной точкой и движениями произвольного вида.

Действия над дуальными числами ассоциативны по отношению к умножению и дистрибутивны по отношению к сложению. В дуальном числе

$$A = a + \varepsilon a^o = a \left(1 + \varepsilon \frac{a^o}{a} \right) = a [1 + \varepsilon p(A)] \quad (4.1)$$

a – главная часть, $a^o = \text{mom}(A)$ – моментная часть,

$a^o/a = p(A)$ – параметр числа.

Если $a^o = 0$, то $p(A) = 0$ и дуальное число вещественно. За модуль дуального числа принимают модуль его главной части $|A| = |a|$. Равенство $A = a + \varepsilon a^o = 0$ означает, что одновременно $a = 0$ и $a^o = 0$.

$$A \pm B = (a \pm b) + \varepsilon (a^o \pm b^o),$$

$$A \cdot B = (a + \varepsilon a^o)(b + \varepsilon b^o) = ab + \varepsilon (a^o b + ab^o),$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(a + \varepsilon a^o)}{(b + \varepsilon b^o)} = \frac{(a + \varepsilon a^o)(b - \varepsilon b^o)}{(b + \varepsilon b^o)(b - \varepsilon b^o)} = \frac{ab}{b^2} + \varepsilon \frac{a^o b - ab^o}{b^2}.$$

Возведение в степень и извлечение корня (n – целое) производится по формулам бинома И.Ньютона:

$$A^n = (a + \varepsilon a^o)^n = a^n + \varepsilon n a^{n-1} a^o, \quad \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a + \varepsilon a^o} = \sqrt[n]{a} + \varepsilon \frac{1}{n} a^{1/n} \sqrt[n]{a^{1-n}}.$$

Функции дуальной переменной представляют также в виде дуальной величины и считают дифференцируемыми [5]. Общее выражение для функции дуальной переменной представляет собой первые два члена ряда Тейлора, в котором

$$\varepsilon \Delta x^o \text{ играет роль приращения: } F(X) = f(x) + \varepsilon \left[x^o \frac{df(x)}{dx} + f^o(x) \right] \quad (4.2)$$

Например, для функции $\exp X$ имеем $\exp X = \exp x \cdot \exp \varepsilon x^o = e^x (1 + \varepsilon x^o)$.

Для дифференцируемых функций дуальных переменных сохраняются все формулы и теоремы дифференциального и интегрального исчисления,

$$\text{например, } \frac{dX^n}{dX} = nX^{n-1}, \quad \frac{de^X}{dX} = e^X, \quad \frac{d \ln X}{dX} = \frac{1}{X}, \quad \frac{d \sin X}{dX} = \cos X,$$

$$\frac{d \cos X}{dX} = -\sin X, \quad \int X^A dX = \frac{1}{A+1} X^{A+1} + C, \quad \int \cos(AX) dX = \frac{1}{A} \sin(AX) + C.$$

Фигуру, образованную двумя скрещивающимися осями E_1 , E_2 и осью E , пересекающей E_1 и E_2 под прямым углом, называют дуальным углом. Для приведения единичного вектора E_1 к совпадению с единичным вектором E_2 необходимо оси E_1 сообщить винтовое движение, состоящее из смещения δ вдоль оси E и поворота на угол φ вокруг оси E . Дуальное число $\Phi = \varphi + \varepsilon \delta$ принимают за меру дуального угла между осями E_1 и E_2 . Числа φ, δ

считаются положительными, если вращение происходит в положительную сторону, а смещение - в положительном направлении оси винта $\mathbf{E}$.

Можем написать $\cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \delta \sin \varphi$, $\sin \Phi = \sin \varphi + \varepsilon \delta \cos \varphi$,

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\sin \varphi + \varepsilon \delta \cos \varphi}{\cos \varphi - \varepsilon \delta \sin \varphi} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon \delta}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi + \varepsilon \delta (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi).$$

Дуальный кватернион вводится равенством

$$\begin{aligned} \cos \frac{\Phi}{2} + \bar{E} \sin \frac{\Phi}{2} &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{E} \sin \frac{\varphi}{2} \right) + \varepsilon \frac{\delta}{2} \left(-\sin \frac{\varphi}{2} + \bar{E} \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{E} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ \left(1 + \varepsilon \bar{E} \frac{\delta}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\bar{E} = \tau_1 \alpha_1 + \tau_2 \alpha_2 + \tau_3 \alpha_3 = \bar{\tau}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, и представляет собой произведение кватерниона поворота и соосного ему кватерниона сдвига.

Кватернион сдвига получается из кватерниона поворота простой заменой

$$\text{угла } \varphi \text{ на смещение } \varepsilon \delta: \quad \cos \frac{\varepsilon \delta}{2} + \bar{E} \sin \frac{\varepsilon \delta}{2} = 1 + \varepsilon \bar{E} \frac{\delta}{2}. \quad (4.4)$$

При этом вектор Родрига $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ перейдет в $\boldsymbol{\theta}^o = \mathbf{E} \operatorname{tg} \varepsilon \frac{\delta}{2} = \varepsilon \mathbf{E} \frac{\delta}{2}$ и $1 + (\boldsymbol{\theta}^o)^2 = 1$, $\boldsymbol{\theta}^o \times (\boldsymbol{\theta}^o \times \mathbf{R}) = 0$.

Рассмотрим преобразование $L^o \circ \bar{f} \circ \tilde{L}^o$, где $\bar{f}$ – произвольный вектор-кватернион и $L^o = 1 + \varepsilon \bar{E} \frac{\delta}{2}$ – кватернион сдвига.

$$\begin{aligned} &\left(1 + \varepsilon \bar{E} \frac{\delta}{2} \right) \circ \bar{f} \circ \left(1 - \varepsilon \bar{E} \frac{\delta}{2} \right) = \\ &= \left(\bar{f} - \varepsilon \frac{\delta}{2} \bar{E} \cdot \bar{f} + \varepsilon \frac{\delta}{2} \bar{E} \times \bar{f} \right) \circ \left(1 - \varepsilon \bar{E} \frac{\delta}{2} \right) = \bar{f} + \varepsilon \delta \bar{E} \times \bar{f}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Преобразование (2.5) $\mathbf{f} + 2 \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{f} + \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{f})}{1 + \theta^2}$, эквивалентное $L \circ \bar{f} \circ \tilde{L}$, при замене вектора $\boldsymbol{\theta}$ на вектор $\boldsymbol{\theta}^o$ сразу дает (4.5) $\mathbf{f} + \varepsilon \delta \mathbf{E} \times \mathbf{f}$.

Итак, преобразуемый вектор заменяется совокупностью того же вектора и момента вектора относительно исходного полюса.

Поскольку скользящий вектор $\mathbf{f}$, приложенный в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, эквивалентен в начале координат вектору $\mathbf{f}$ и моменту $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$, то рассматриваемое преобразование (4.5) $\left(1 + \varepsilon \frac{\bar{r}}{2} \right) \circ \bar{f} \circ \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{r}}{2} \right) = \bar{f} + \varepsilon \bar{r} \times \bar{f}$ есть приведение скользящего вектора $\mathbf{f}$ к началу координат. Тогда преобразование $L \circ (\bar{f} + \varepsilon \bar{r} \times \bar{f}) \circ \tilde{L}$, где $L = \lambda_o + \bar{\lambda}$, есть поворот вектора $\mathbf{f}$, приложенного в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$.

Так возникает понятие дуального вектора и винтовое исчисление [7]

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon \mathbf{f}^o = \mathbf{e}_i (f^i + \varepsilon f^{oi}) = (\mathbf{f}, \mathbf{f}^o), \quad (4.6)$$

где $\mathbf{f}$ – главная часть дуального вектора,

$\mathbf{f}^o$ – моментная часть дуального вектора, момент.

Если момент (моментная часть) дуального вектора пропорционален его главной части, то дуальный вектор $(\mathbf{f}, p\mathbf{f})$ называется винтом, p – параметр винта.

Вектор $\mathbf{m}^o(\mathbf{F}) = p\mathbf{f} + \mathbf{r} \times \mathbf{f}$ называется моментом винта относительно точки O , а дуальный вектор $(\mathbf{f}, p\mathbf{f} + \mathbf{r} \times \mathbf{f})$ – мотором винта относительно точки O .

Винт полностью определяет мотор для любой точки пространства, этот мотор в свою очередь единственным образом определяет параметр винта, и,

$$\text{следовательно, сам винт} \quad p = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^o}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f} \cdot (p\mathbf{f} + \mathbf{r} \times \mathbf{f})}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}}. \quad (4.7)$$

Моментная часть мотора винта имеет минимальное значение для точек оси винта $\min \mathbf{f}^o = p\mathbf{f}$, $\mathbf{r} = \alpha \mathbf{f}$. При переходе к какой-либо другой точке пространства момент винта увеличивается, получая приращение, перпендикулярное вектору винта $\mathbf{f}^o_{\perp} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$. Компонента момента винта коллинеарная вектору винта, остается неизменной $\mathbf{f}^o_{\parallel} = p\mathbf{f}$. Таким образом, любой дуальный вектор $(\mathbf{f}, \mathbf{f}^o)$, заданный в некоторой точке O , можно рассматривать, как мотор винта $(\mathbf{f}, p\mathbf{f})$ для этой точки O .

Выбором точки приведения C на оси винта компонента $\mathbf{f}^o_{\perp}$ моментной части дуального вектора может быть обращена в нуль. Полагая $\mathbf{r}_{oc} = -\frac{\mathbf{f} \times \mathbf{f}^o}{f^2}$,

$$\text{получаем} \quad \mathbf{f}^c = \mathbf{f}^o + \mathbf{r}_{oc} \times \mathbf{f} = \mathbf{f}^o - \frac{\mathbf{f} \times \mathbf{f}^o}{f^2} \times \mathbf{f} = \mathbf{f} \frac{\mathbf{f}^o \cdot \mathbf{f}}{f^2} = p\mathbf{f}.$$

В основу всех действий над винтами положено действие над моторами, которые соответствуют этим винтам. При рассмотрении двух и более винтов выбирается в пространстве общая точка приведения O , и к ней относятся

$$\text{моторы всех винтов} \quad \bar{F} = \bar{f} + \varepsilon \bar{f}^o = \sum_i \left(1 + \varepsilon \frac{\bar{r}_{oi}}{2}\right) \circ (\bar{f}_i + \varepsilon \bar{f}_i^o) \circ \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{r}_{oi}}{2}\right),$$

$$\text{далее переход к точке } C \text{ на оси винта} \quad \left(1 + \varepsilon \frac{\bar{r}_{oc}}{2}\right) \circ (\bar{f} + \varepsilon \bar{f}^o) \circ \left(1 - \varepsilon \frac{\bar{r}_{oc}}{2}\right)$$

дает один из четырех винтов $\mathbf{F} = 0 + \varepsilon 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon 0$, $\mathbf{F} = 0 + \varepsilon \mathbf{f}^o$, $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon p\mathbf{f}$.

Любая алгебраическая операция над винтами (умножение на число, сложение и перемножение винтов) определяется как операция над моторами этих винтов, а так как каждый мотор формально выражается дуальным вектором, то алгебра винтов сводится к алгебре дуальных векторов, в которой работают обычные и дуальные кватернионы. О перенесении дуального формализма на трехмерное векторное пространство, тензорный анализ и т.д. укажем обзор [7].

Аналогия операций над дуальными объектами с операциями обычной векторной алгебры позволила А.П.Котельникову и Э.Штуди [6] сформулировать «принцип перенесения»: *все формулы векторной алгебры сохраняют силу при замене векторов $\mathbf{F} = \mathbf{f}$ или винтов $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon p\mathbf{f}$ моторами $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon (p\mathbf{f} + \mathbf{r} \times \mathbf{f})$, отнесенными к новой точке, и углов между винтами – дуальными углами между осями винтов.*

Техника кватернионов весьма эффективна при сложении поворотов. Пусть кватернионы L и M заданы в исходной системе координат, и каждый из них поворачивает произвольный вектор вокруг некоторой оси: $R' = L \circ R \circ \tilde{L}$,

$$R'' = M \circ R' \circ \tilde{M} = M \circ L \circ R \circ \tilde{L} \circ \tilde{M}, \quad R'' = N \circ R \circ \tilde{N}, \quad \text{где} \quad N = M \circ L.$$

Кватернион результирующего поворота N равен произведению составляющих кватернионов L и M в обратном порядке, то есть произведение кватернионов в обратном порядке есть два последовательных поворота вокруг двух осей, фиксированных в исходной системе координат. Это правило получения кватерниона результирующего поворота не изменяется при отображении составляющих кватернионов на любой базис. Пусть, например, это отображение задается кватернионом S , то есть

$$N_S = \tilde{S} \circ N \circ S, \quad L_S = \tilde{S} \circ L \circ S, \quad M_S = \tilde{S} \circ M \circ S, \\ N_S = \tilde{S} \circ M \circ L \circ S = \tilde{S} \circ M \circ S \circ \tilde{S} \circ L \circ S = M_S \circ L_S.$$

В большинстве практических случаев кватернионы составляющих поворотов заданы своими компонентами в осях, которые они сами поворачивают. В этих же осях требуется найти компоненты кватерниона результирующего поворота. Кватернионы, заданные таким образом, называются собственными. Один кватернион всегда можно считать собственным, так как его описание в исходных и повернутых им самим осях совпадают. Если же преобразование задается двумя собственными кватернионами, то их нужно выразить в какой либо одной системе осей, то есть преобразовать первый кватернион L к системе осей, преобразованной вторым кватернионом $L_M = \tilde{M} \circ L \circ M$, либо записать второй кватернион M в исходной системе осей $M_L = L \circ M \circ \tilde{L}$. Далее кватернионы, выраженные в одной системе осей, перемножаем в обратном порядке

$$N = M \circ L_M = M \circ \tilde{M} \circ L \circ M = L \circ M, \quad N = M_L \circ L = L \circ M \circ \tilde{L} \circ L = L \circ M.$$

Наконец, можно считать, что оба кватерниона L и M заданы в промежуточной системе координат, то есть в системе координат, в которую переходит исходная после первого преобразования. Кватернион результирующего поворота $M \circ L$ преобразуем к исходной и конечной системам координат

$$N = L \circ M \circ L \circ \tilde{L} = \tilde{M} \circ M \circ L \circ M = L \circ M.$$

1. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. Dublin, 1853
2. Clifford W. Preliminary Scetch of Biquaternions.
Proc. of London Math. Soc., 1873, v. IV, p. 381-393.
3. Study E. Ueber Nicht-Euklidische und Liniengeometrie.
Festschr. der Philos. Fakult. zu Greifswald, 1900.
4. Котельников А.П. Винтовое счисление и некоторые приложения
его к геометрии и механике. Казань, 1895.
5. Зейлигер Д.Н. Комплексная линейчатая геометрия. ОНТИ, 1934.
6. Котельников А.П. Теория винтов и комплексные числа.
Сб. Некоторые приложения идей Лобачевского
в механике и физике. Гостехиздат, 1950
7. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения.
М., Наука, Гл. ред. физ-мат лит., 1978

Построение дуальной матрицы поворота состоит в вычислении косинусов дуальных углов между осями системы отсчета $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ и осями $\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\beta$, связанными с телом :

$$\begin{aligned}\cos \Phi_{ij} &= \cos(\varphi_{ij} + \varepsilon d_{ij}) = \cos \varphi_{ij} - \varepsilon d_{ij} \sin \varphi_{ij} = \\ &= \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j - \varepsilon (\mathbf{E}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{E}_i \cdot [\mathbf{e}_j + \varepsilon (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_j)]\end{aligned}$$

В этом выражении d_{ij} - расстояние между скрещивающимися осями (проекция вектора смещения $\mathbf{r} = Oo$ на перпендикуляр к осям). Итак,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \cdot (\mathbf{e}_\tau + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\tau) & \mathbf{E}_y \cdot (\mathbf{e}_\tau + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\tau) & \mathbf{E}_z \cdot (\mathbf{e}_\tau + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\tau) \\ \mathbf{E}_x \cdot (\mathbf{e}_\nu + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\nu) & \mathbf{E}_y \cdot (\mathbf{e}_\nu + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\nu) & \mathbf{E}_z \cdot (\mathbf{e}_\nu + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\nu) \\ \mathbf{E}_x \cdot (\mathbf{e}_\beta + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\beta) & \mathbf{E}_y \cdot (\mathbf{e}_\beta + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\beta) & \mathbf{E}_z \cdot (\mathbf{e}_\beta + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\beta) \end{pmatrix}$$

Из начального положения $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ в конечное положение $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ оси можно перевести одним винтовым движением. Дуальный кватернион этого винта представляет собой суперпозицию поворота и сдвига вокруг оси, проходящей через точку, радиус-вектор которой равен $\mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + (\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}) \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left(1 + \varepsilon (\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}) \frac{d}{2} \right) = \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \varepsilon \frac{d}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) + (\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}) \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \varepsilon \frac{d}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= \cos(\Phi/2) + (\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e}) \sin(\Phi/2),\end{aligned}$$

Матрица поворота (1.7) определяет параметры винта:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(SpA - 1) &= \cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon d \sin \varphi, \\ A_{jk} - A_{kj} &= 2(\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e})_i \sin \Phi = \\ &= 2(\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{e})_i (\sin \varphi + \varepsilon d \cos \varphi), \quad ijk = 123, 231, 312\end{aligned}$$

Главная часть дуального кватерниона определяет ось винта $\mathbf{e}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ и угол поворота φ вокруг оси винта, а моментная часть – смещение d вдоль оси винта и радиус- вектор $\mathbf{r}$ от точки приведения до какой-либо точки оси винта.

ФОРМЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ КОМПОЗИЦИЮ

Р. Д. Шафер

Массачусеттский Технологический институт, Кембридж, Массачусеттс, 02139

Посвящается У. Т. Мартину

В данной работе мы в элементарных понятиях представляем старый вопрос о формах, допускающих композицию, то есть о формах N в алгебре, которые удовлетворяют

$$N(ab) = N(a)N(b),$$

и как этот вопрос был обобщен и полностью решен в недавней работе К. МакКриммона.

§1. Пусть F — произвольное поле. Обозначим как F_m ассоциативную алгебру всех матриц $m \times m$ $a = (\alpha_{ij})$ с элементами из F :

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Алгебра F_m имеет размерность m^2 над F .

Если $\xi_{ij} (i, j = 1, \dots, m)$ — m^2 алгебраически независимых элементов над F , и $K = F(\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{mm})$ есть поле, образованное присоединением ξ_{ij} к F , тогда матрица

$$x = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1m} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{m1} & \xi_{m2} & \cdots & \xi_{mm} \end{pmatrix} \quad (2)$$

есть так называемый "характерный элемент" (generic element) алгебры F_m . С очевидностью, x не является элементом F_m вообще, а вместо этого является элементом ассоциативной алгебры K_m над K . Мы получаем элементы F_m с помощью специализации: $\xi_{ij} \rightarrow \alpha_{ij}$. То есть, заменив ξ_{ij} на α_{ij} , получаем из x в (2) элемент a в (1). Причина использования характерного элемента в том, что теперь мы получаем в свое распоряжение свойства многочлена.

Каждая матрица $x = (\xi_{ij})$ имеет детерминант

$$\det x = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \xi_{1,\sigma_1} \xi_{2,\sigma_2} \cdots \xi_{m,\sigma_m}$$

который является однородным многочленом

$$\det x = d(\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{mm})$$

в кольце многочленов $F[\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{mm}]$. Однородный многочлен $d = \det x$ имеет степень m . Если $\eta_{ij}(i, j = 1, \dots, m)$ алгебраически независимы над K , то $y = (\eta_{ij})$ – еще один характерный элемент F_m , и как x , так и y входят в алгебру L_m , где

$$L = K(\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{mm}) = F(\xi_{11}, \xi - 12, \dots, \xi_{mm}, \eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{mm})$$

Мы можем образовать произведение xy матриц x, y в L_m . Известное правило мультипликативности детерминантов дает

$$\det(xy) = (\det x)(\det y). \quad (3)$$

В более общем случае, если s – произвольное положительное целое число, то однородный многочлен $N(x) = (\det x)^s$ степени ms обладает свойством

$$N(xy) = N(x)N(y),$$

так как

$$N(xy) = (\det(xy))^s = ((\det x)(\det y))^s = (\det x)^s (\det y)^s = N(x)N(y)$$

согласно (3).

Обратное этому утверждение было хорошо известно уже давно. Во всяком случае, допущение о несокращаемости многочлена $\det x$ в $F[\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{mm}]$ легко доказать.

Теорема 1. Пусть F_m – ассоциативная алгебра всех $m \times m$ матриц над произвольным полем F , и $\xi_{ij}, \eta_{ij}(i, j = 1, \dots, m)$ алгебраически независимы над F . Тогда однородный многочлен N степени $n > 0$ в $F[\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{mm}]$ удовлетворяет

$$N(xy) = N(x)N(y) \quad (4)$$

для $x = (\xi_{ij})$ и $y = (\eta_{ij})$ тогда и только тогда, когда $n = ms$ для некоторого положительного s и

$$N(x) = (\det x)^s$$

Доказательство. В (4) мы предполагали, что $N(y)$ и $N(xy)$ образованы из $N(x)$ с помощью замены ξ_{ij} на η_{ij} и $\sum_k \xi_{ik}\eta_{kj}$, соответственно. Мы уже видели справедливость "если" - части теоремы. Для того, чтобы убедиться в обратном, обозначим тождественную матрицу в F_m как 1. Тогда из (4) вытекает $N(1) = (N(1))^2$. Если $N(1) = 0$, то $N(x) = N(x1) = N(x)N(1) = 0$, что противоречит допущению что N имеет степень $n > 0$. Отсюда $N(1) = 1$. Характеристическим многочленом для x является

$$\det(\lambda 1 - x) = \lambda^m - \text{tr } x \lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m \det x \quad (5)$$

Согласно теореме Кэли-Гамильтона, x удовлетворяет этому многочлену и мы имеем $x^m - (\text{tr } x)x^{m-1} + \dots + (-1)^m(\det x)1 = 0$, или

$$xz = (\det x)1 \quad (6)$$

где $z = (\zeta_{ij})$ – матрица $m \times m$ с элементами ζ_{ij} в

$$F[\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{mm}].$$

Тогда из (4) и (6) вытекает $N(x)N(z) = (\det x)^n N(1) = (\det x)^n$, так как N – однородный многочлен степени n . То есть $N(x)$ делит (является делителем???) $(\det x)^n$ в

кольце многочленов $F[\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm}]$. Но известно, что $\det x$ несократим [7, стр. 115; 4, стр. 176]. Отсюда $N(x) = (\det x)^s$ для некоторого положительного целого числа s , так как $N(1) = 1$. Это завершает доказательство Теоремы 1.

Пусть $\mathbb{A}$ – любая конечномерная алгебра, не обязательно ассоциативная, над F . Отображение (посредством???) в однородный многочлен

$$a \rightarrow N(a)$$

из $\mathbb{A}$ в F называется *формой* на $\mathbb{A}$. Говорят, что форма на $\mathbb{A}$ *допускает композицию* в случае

$$N(ab) = N(a)N(b) \quad (7)$$

для всех a, b в $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbb{A}$ будет F_m , и пусть $N(x) = (\det x)^s$. Тогда, согласно (4), и специализации $(\xi_{ij} \rightarrow \alpha_{ij}; \eta_{ij} \rightarrow \beta_{ij})$, получаем

$$N(ab) = N(a)N(b)$$

для всех $a = (\alpha_{ij}), b = (\beta_{ij})$ в $\mathbb{A} = F_m$. Следовательно, форма

$$a \rightarrow N(a) = (\det a)^s$$

в $\mathbb{A} = F_m$ допускает композицию.

Обратно, мы можем сказать, что, всякий раз, когда форма N на F_m допускает композицию, (4) справедливо для порождающих x, y из F_m . Это действительно верно, если F содержит достаточно элементов. Для допущения

$$P = P(\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm}, \eta_{11}, \eta_{12} \dots, \eta_{mm})$$

будет ненулевой многочлен в

$$F[\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm}, \eta_{11}, \eta_{12} \dots, \eta_{mm}],$$

который ???????????????? n в любом из этих неопределенных. Если F содержит более чем n особых элементов, то

$$P\alpha_{11}, \alpha_{12} \dots, \alpha_{mm}, \beta_{11}, \beta_{12} \dots, \beta_{mm} \neq 0$$

для каких-либо α_{ij}, β_{ij} в F [11, стр. 32]. Отсюда, предположим что $N(x)$ имеет степень n и что F содержит более чем n особых элементов. Если

$$P = N(xy) - N(x)N(y)$$

не нулевой многочлен, тогда $N(ab) - N(a)N(b) \neq 0$ для некоторых a, b в F_m , что противоречит (7). Отсюда (7) включает (4) если F содержит более чем n элементов.

В доказательстве Теоремы 1 мы использовали характеристический многочлен порождающего элемента $x = (\xi_{ij})$ из F_m . Для отдельного элемента a из F_m характеристический многочлен от a не должен быть monic ??? многочленом наименьшей степени с коэффициентами из поля F , которое соответствует a . Однако, для порождающего элемента $x = (\xi_{ij})$, характеристический многочлен (5) легко представить в виде monic ??? многочлена наименьшей степени с коэффициентами из $K = F(\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm})$, который соответствует x ; так что, характеристический многочлен и минимальный многочлен $m_x(\lambda)$ совпадают. Для несократимости $\det x$ в $D = F[\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm}]$ предполагается несократимость в $D[\lambda]$ особого многочлена

(5). Тогда, так как минимальный многочлен $m_x(\lambda)$ из x делит ??? (5) и оба monic ???, $m_x(\lambda)$ равняется (5):

$$m_x(\lambda) = \lambda^m - \text{tr } x \lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m \det x \quad (8)$$

Для удобства терминологии в более общем случае, который будет показан в §3, мы назовем (8) *порождающим минимальным многочленом алгебры F_m* .

Для отдельного элемента $a = (\alpha_{ij})$ из F_m мы получим многочлен

$$m_a(\lambda) = \lambda^m - \text{tr } a \lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m \det a \quad (9)$$

из (8) с помощью специализации $(\xi_{ij} \rightarrow \alpha_{ij})$. В этом случае $m_a(\lambda)$ есть действительно характеристический многочлен от a . Тогда (9) называется *порождающим минимальным многочленом* элементов a из F_m , и $\det a$ – *порождающей нормой* от a .

Мы можем переформулировать Теорему 1 следующим образом:

Теорема 1'. Пусть N – форма степени $n > 0$ в ассоциативной алгебре F_m всех матриц $m \times m$ над произвольным полем F , которая содержит более чем n особых элементов. В этом случае N допускает композицию, тогда и только тогда, когда N есть степень порождающей нормы:

$$N(a) = (\det a)^s$$

для некоторого положительного целого числа s и для всех a из F_m .

§2. Долгая история форм, допускающих композицию, начинается с квадратичных форм. Превосходные обзоры истории невырожденных квадратичных форм, допускающих композицию содержатся в [6] и [3]. Мы не будем повторять здесь эту историю, заметим лишь, что самые ранние упоминания относятся к Диофанту и Эйлеру, и что в 1898 году появилась классическая теорема Гурвица [8] которая ограничила размерность конечномерных алгебр, содержащих такие формы, числами 1, 2, 4 и 8. Капланский в 1954 году доказал, что все алгебры, имеющие такие формы, с необходимостью конечномерны [12].

Все будет несколько проще, если мы примем что характеристика $F \neq 2$. В дальнейшем в этой работе мы будем исходить из этого допущения. К тому же, так как мы будем сталкиваться с алгебрами, которые неассоциативны, мы будем использовать термин *алгебра* для векторного пространства над F , на котором определено билинейное умножение, не обязательно ассоциативное.

Пусть V – векторное пространство над F , вообще говоря, бесконечномерное. Тогда отображение

$$a \rightarrow N(a)$$

V на F называется квадратичной формой на V в случае если

$$N(\alpha a) = \alpha^2 N(a)$$

для всех α в F , a в V и если

$$(a, b) = \frac{1}{2}[N(a+b) - N(a) - N(b)] \quad (10)$$

билинейна. Тогда $N(a) = (a, a)$. Эта терминология согласуется с той, что использовалась в §1 для конечномерного случая. Такая квадратичная форма называется *невырожденной* в случае, когда ассоциированная симметричная билинейная форма (10) невырождена; то есть, из $(a, b) = 0$ для всех b из V вытекает $a = 0$.

Примера будет достаточно, чтобы показать, почему если мы не знаем заранее алгебру, на которой определена форма, допускающая композицию, как мы это сделали в Теореме 1', мы ограничены рассмотрением невырожденных квадратичных форм. Пусть $\mathbb{R}$ – произвольная алгебра над F . Присоединим единичный элемент 1 к $\mathbb{R}$, чтобы получить алгебру $\mathbb{A} = F1 + \mathbb{R}$, в которой каждый элемент a из $\mathbb{A}$ имеет форму

$$a = \alpha 1 + r, \quad \alpha \text{ из } F, r \text{ из } \mathbb{R} \quad (11)$$

Определим

$$N(a) = \alpha^2$$

для всех a в (11). Тогда N является квадратичной формой в $\mathbb{A}$, допускающей композицию, так как $b = \beta 1 + s$, β из F , s из $\mathbb{R}$, откуда $ab = \alpha\beta 1 + \beta r + \alpha s + rs$ и $N(ab) = (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = N(a)N(b)$. Квадратичная форма N не сообщает совсем ничего о совершенно произвольной алгебре $\mathbb{R}$ (следовательно, ничего существенного об $\mathbb{A}$). $\mathbb{R}$ является радикалом N , так что N является невырожденной квадратичной формой в случае, если $\mathbb{R}$ не есть 0.

Нас интересуют те алгебры $\mathbb{A}$, не обязательно конечномерные, которые допускают невырожденные квадратичные формы, допускающие композицию. Зная такие алгебры, мы зададимся вопросом, какие возможны формы. Если $\mathbb{A}$ содержит 1, ответ легко сформулировать в терминах того, что Джекобсон [9] назвал *композиционными алгебрами*.

Пусть $\mathbb{B}$ – алгебра с 1 размерности n над F , причем $\mathbb{B}$ обладает инволюцией (то есть антиавтоморфизмом периода 2)

$$b \rightarrow \bar{b} \quad \text{для всех } b \text{ из } \mathbb{B},$$

удовлетворяющей

$$b + \bar{b} = t(b)1, \quad b\bar{b} (= \bar{b}b) = n(b)1 \quad (12)$$

для $t(b), n(b)$ из F . Тогда

$$b^2 - t(b)b + n(b)1 = 0$$

для всех b из $\mathbb{B}$. Мы построим алгебру $\mathbb{A}$ размерности $2n$ над F следующим образом: элементы $\mathbb{A}$ записываются как

$$a = b_1 + vb_2, \quad b_i \text{ из } \mathbb{B}, \quad (13)$$

равенство, сложение и умножение на скалярные величины определяется покомпонентно. Для любых $\mu \neq 0$ из F , умножение в $\mathbb{A}$ определяется посредством

$$(b_1 + vb_2)(b_3 + vb_4) = (b_1b_3 + \mu b_4\bar{b}_2) + v(\bar{b}_1b_4 + b_3b_2).$$

Тогда $\mathbb{A}$ является алгеброй с 1, обладающей композицией $a \rightarrow \bar{a}$ определенной посредством

$$\bar{a} = \bar{b}_1 - vb_2,$$

и удовлетворяющей

$$a + \bar{a} = t(a)1, \quad a\bar{a} (= \bar{a}a) = n(a)1$$

для всех a из $\mathbb{A}$, где *след* $t(a)$ есть

$$t(a) = t(b_1)$$

и *норма* $n(a)$ есть

$$n(a) = n(b_1) - \mu n(b_2) \quad (14)$$

для a из (13) и $t(b), n(b)$ из (12). Эта конструкция, процесс Кэли-Диксона, допускает повторение.

Если мы начинаем с 1-мерной алгебры $\mathbb{B} = F$, в которой имеется тождественное отображение в виде инволюции $b \rightarrow \bar{b}$, мы получим последовательность алгебр:

$$F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}, \dots$$

размерности 1, 2, 4, 8, ..., которые зависят исключительно от F и скалярных величин $\mu_i \neq 0$, использованных на пути от одной алгебры к следующей. В зависимости от выбора μ_1 (квадрат или неквадрат в F) $\mathbb{Z}$ является или $F \oplus F$, или полем, являющимся квадратичным расширением F . Алгебры $\mathbb{Q}$ являются (обобщенными) *кватернионными алгебрами* над F ; они включают алгебру F_2 всех 2×2 матриц над F . Алгебры $\mathbb{O}$ являются 8-мерными *алгебрами Кэли* над F .

$F, \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются ассоциативными алгебрами. Алгебры Кэли $\mathbb{O}$ неассоциативны. Они удовлетворяют более слабым тождествам

$$a^2b = a(ab), \quad ba^2 = (ba)a \quad (15)$$

для всех a, b из $\mathbb{O}$. Любая алгебра, в которой удовлетворяются тождества (15) называется *альтернативной*. С очевидностью, любая ассоциативная алгебра является альтернативной. Таким образом, любая из алгебр $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$ из последовательности выше альтернативна. Также квадратичная норма $n(a)$, определенная индуктивно с помощью (12) и (14), является невырожденной и допускает композицию на алгебрах $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$. Однако, никакие другие алгебры из последовательности, начатой $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}, \dots$ не являются альтернативными и не допускают композицию. Доказательства этих утверждений и нижеследующего обобщения знаменитой теоремы Гурвица можно найти в [9] или [20, часть III]. Алгебры $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$ называются *композиционными алгебрами*.

Теорема 2. Пусть $\mathbb{A}$ – алгебра с 1, возможно бесконечномерная, над полем F характеристики $\neq 2$. Необходимое и достаточное условие для существования невырожденной квадратичной формы N , допускающей композицию в $\mathbb{A}$, состоит в том, что $\mathbb{A}$ является одной из альтернативных композиционных алгебр $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$ размерности 1, 2, 4 или 8. Более того, N является квадратичной нормой, задаваемой посредством (12) и (14).

Из (14) следует, что по отношению к базисам $\{1, v_1, v_2, v_2v_1, v_3, \dots\}$, полученным процессом Кэли-Диксона, формы норм, упомянутые в Теореме 2 представляются как

$$\alpha^2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2 - \mu_1 \alpha_2^2, \\ &\alpha_1^2 - \mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_3^2 + \mu_1 \mu_2 \alpha_4^2 \end{aligned} \quad (17)$$

и

$$\alpha_1^2 - \mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_3^2 + \mu_1 \mu_2 \alpha_4^2 - \mu_3 \alpha_5^2 + \mu_1 \mu_3 \alpha_6^2 + \mu_2 \mu_3 \alpha_7^2 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \alpha_8^2$$

для произвольного $\mu_i \neq 0$ из F . Конечно, такие формы будут представляться различно в разных базисах $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ или $\mathbb{O}$.

Рассмотрим случай $n = m = 2$ в Теореме 1': F_2 является алгеброй всех 2×2 матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

с α_i из F . Тогда

$$\det a = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 \quad (18)$$

является квадратичной формой на 4-мерном пространстве F_2 . Ассоциированная симметричная билинейная форма есть

$$(a, b) = 1/2(\alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1),$$

которая имеет ранг 4 и является поэтому невырожденной. Может вызвать вопрос, как если F_2 является примером алгебры кватернионов, детерминант (18), допускающий композицию на F_2 и являющийся невырожденным, появляется среди возможных вариантов (17). Это получается благодаря подходящему изменению базиса. Если $\mu_1 = \mu_2 = 1$, то $\mathbb{H}$ изоморфно F_2 на основе изоморфизма

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 v_1 + \alpha_3 v_2 + \alpha_4 v_2 v_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_3 - \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Тогда детерминант согласно (18) есть

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2,$$

что соответствует (17).

F также изоморфна алгебре F_1 всех матриц 1×1 над F , где генерис норма равна $\det(\alpha 1) = \alpha$. Следовательно, форма (16), допускающая композицию на F_1 является power of the generic нормы, что требуется в Теореме 1'.

§3. Пусть $\mathbb{A}$ – произвольная алгебра, не обязательно ассоциативная, над произвольным полем F . Для фиксированного элемента a из $\mathbb{A}$ отображение

$$R_a : b \rightarrow ba = bR_a, \quad \text{для всех } b \text{ из } \mathbb{A},$$

является линейным оператором на $\mathbb{A}$ и называется правым умножением на $\mathbb{A}$, определенным посредством a . Аналогично, элемент a из $\mathbb{A}$ определяет левое умножение L_a на $\mathbb{A}$ посредством

$$L_a : b \rightarrow ab = bL_a, \quad \text{для всех } b \text{ из } \mathbb{A}.$$

Если $\mathbb{A}$ ассоциативна, то из $c(ab) = (ca)b$ для всех a, b, c из $\mathbb{A}$ вытекает

$$R_{ab} = R_a R_b \quad (19)$$

для всех a, b из $\mathbb{A}$. Таким образом, если $\mathbb{A}$ является ассоциативной алгеброй размерности n над F , то

$$a \rightarrow R_a$$

является представлением алгебры $\mathbb{A}$ линейными операторами, действующими на n -мерном векторном пространстве $\mathbb{A}$. Предположим, что это так, и положим

$$N(a) = \det R_a \quad (20)$$

для всех a из $\mathbb{A}$. Тогда N является формой степени n на $\mathbb{A}$. Более того, допускает композицию, так как из (19) вытекает, что

$$N(ab) = \det R_{ab} = \det(R_a R_b) = (\det R_a)(\det R_b) = N(a)N(b).$$

Таким образом, в любой конечномерной ассоциативной алгебре $\mathbb{A}$ существует форма (20), допускающая композицию. Однако, форма (20) может не отражать многих свойств алгебры. Если $\mathbb{A}$ нильпотентна, то каждый элемент a из $\mathbb{A}$ нильпотентен и это соответствует правому умножению R_a . Тогда $N(a)$ в (20) равно нулю для всех a из $\mathbb{A}$. Несколько более общо, если $\mathbb{R}$ есть $(n-1)$ -мерная нильпотентная ассоциативная алгебра, мы можем присоединить тождественный элемент 1 к $\mathbb{R}$, чтобы получить n -размерную ассоциативную алгебру $\mathbb{A} = F1 + \mathbb{A}$, в которой каждый элемент a из $\mathbb{A}$ имеет форму

$$a = \alpha 1 + z, \quad \alpha \in F, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Тогда, обозначая под I тождественный оператор на $\mathbb{A}$, мы имеем

$$R_a = \alpha I + R_z$$

так что $R_a - \alpha I$ нильпотентен, из чего следует, что характеристический полином R_a равен $(\lambda - \alpha)^n$. Следовательно,

$$N(a) = \det R_a = \alpha^n.$$

В этом случае, для любого a из (21) компонент z из $\mathbb{R}$ не вносит ничего в форму $N(a) = \alpha^n$. В определенном смысле, форма невырождена, если $\mathbb{R} \neq 0$.

Джекобсон дал в [10] и [11] теорию *generic* минимального полинома для широкого класса конечномерных неассоциативных алгебр. Пусть $\mathbb{A}$ – конечномерная алгебра с 1 над F , и пусть $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ – базис $\mathbb{A}$ над F . Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – алгебраически независимые элементы над F , и пусть $K = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Мы строим алгебру $\mathbb{A}_K (= K \otimes_F \mathbb{A})$, алгебра над K получается расширением базового поля F на расширенное поле K . В алгебре $\mathbb{A}_K$ мы рассматриваем элемент

$$x = \sum \xi_i u_i,$$

и называем x *generic* элемент алгебры $\mathbb{A}$ над F . Теперь предположим, что $\mathbb{A}$ является *строго степенной ассоциативной* (таковыми, к примеру, являются альтернативные алгебры). То есть, мы полагаем, что $\mathbb{A}$ является *степенной ассоциативной* в том смысле, что каждый элемент из $\mathbb{A}$ порождает ассоциативную подалгебру; более того, для строгой степенной ассоциативности мы полагаем, что если H – произвольное расширение F , то скалярное расширение $\mathbb{A}_K (= K \otimes_F \mathbb{A})$ алгебры $\mathbb{A}$ является степенно-ассоциативной. Поэтому в $\mathbb{A}_K$ мы можем однозначно образовывать многочлены в *generic* элементе x , полагая коэффициенты многочленов принадлежащими K . Существует единственный нормированный многочлен

$$m_x(\lambda) = \lambda^m - \sigma_1(x)\lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m \sigma_m(x) \quad (22)$$

наименьшей степени m , который удовлетворяет x из $\mathbb{A}_K$; это есть *generic* минимальный многочлен алгебры $\mathbb{A}$. На самом деле, коэффициенты $\sigma_i(x)$ из (22) принадлежат $F[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ и являются однородными многочленами степени i из набора ξ . *Generic* норма алгебры $\mathbb{A}$ есть $\sigma_m(x)$, и m называется *степенью алгебры* $\mathbb{A}$. Если a – произвольный элемент из $\mathbb{A}$, то

$$a = \sum \alpha_i u_i, \quad \alpha_i \in F,$$

и мы можем specialize ($\xi_i \rightarrow \alpha_i$), чтобы получить как

$$m_a(\lambda) = \lambda^m - \sigma_1(a)\lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m \sigma_m(a),$$

generic минимальный многочлен элемента a , так и $\sigma_m(a)$, *generic* норму a . Они не зависят от выбора базиса в $\mathbb{A}$.

В §1 мы использовали обычный базис $\{e_{ij}\}$ в F_m , где x из (2) равен $x = \sum \xi_{ij}e_{ij}$, чтобы получить *Generic* минимальный многочлен от (of) F_m .

Если $\mathbb{A} = F$, то *generic* элемент $\mathbb{A}$ есть $x = \xi 1$, и минимальный полином (of) $\mathbb{A}$ равен $\lambda - \xi$. *Generic* норма $a = \alpha 1$ из $\mathbb{A}$ есть просто α . Если $\mathbb{A}$ – композиционная алгебра, $\mathbb{A} \neq F$, то $\mathbb{A}$ обладает *generic* минимальным многочленом

$$\lambda^2 - t(x)\lambda + n(x)$$

степени 2, и каждый элемент a из $\mathbb{A}$ имеет квадратичную норму $n(a)$. Среди композиционных алгебр только $F \otimes F$ не удастся быть простой. Базис в $F \otimes F$ есть пара e_1, e_2 ортогональных идемпотентов, и *generic* элемент of $F \otimes F$ равен $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$. *generic* минимальный многочлен for $F \otimes F$ равен

$$\lambda^2 - (\xi_1 + \xi_2)\lambda + \xi_1 \xi_2,$$

и мы видим, что *generic* норма является произведением *generic* норм двух простых компонентов алгебры.

Результаты Джекобсона в [11] включают в себя:

- (i) *generic* норма любой альтернативной алгебры с 1 допускает композицию;
- (ii) *generic* норма любой простой альтернативной алгебры несократима (неприводима);
- (iii) если N – форма степени $n > 0$ на простой альтернативной алгебре над полем, содержащим более, чем n элементов, то N допускает композицию тогда и только тогда, когда N является степенью (power) *generic* нормы (обобщение теоремы 1').

Теорема 2 полностью разрешает вопрос, какие невырожденные квадратичные формы допускают композицию. Как обстоит дело с формами более высоких степеней?

Если $\mathbb{A}$ – конечномерная *сепарабельная* альтернативная алгебра над F , то $\mathbb{A}$ является прямой суммой

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{A}_r$$

простых идеалов $\mathbb{A}_i$, которые имеют центры, являющиеся сепарабельными расширениями F . Каждый простой компонент $\mathbb{A}_i$ либо ассоциативен, либо является алгеброй Кэли над своим центром. Произвольный элемент a из $\mathbb{A}$ может быть единственным образом записан как

$$a = a_1 + \dots + a_r,$$

где a_i принадлежат $\mathbb{A}$. *generic* нормы $n_i(a_i)$ of $\mathbb{A}_i$ ($i = 1, \dots, r$) допускают композицию и это дает произведение

$$n(a) = n_1(a_1) \dots n_r(a_r),$$

которое является *generic* нормой a из $\mathbb{A}$. Это также дает

$$N(a) = [n_1(a_1)]^{f_1} \dots [n_r(a_r)]^{f_r}, \quad (23)$$

где $f_1, \dots, f_r$ – произвольные положительные целые числа, поскольку из

$$ab = (a_1 + \dots + a_r)(b_1 + \dots + b_r) = a_1 b_1 + \dots + a_r b_r \quad \mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{A}_r$$

вытекает

$$\begin{aligned} N(ab) &= [n_1(a_1 b_1)]^{f_1} \dots [n_r(a_r b_r)]^{f_r} = \\ &= [n_1(a_1) n_1(b_1)]^{f_1} \dots [n_r(a_r) n_r(b_r)]^{f_r} = N(a) N(b). \end{aligned}$$

С очевидностью, N имеет степень

$$n = m_1 f_1 + \dots + m_r f_r, \quad (24)$$

где m_i является степенью $\mathbb{A}_i$ (то есть, степенью generic нормы $n_i(a_i)$). Оказывается, что (23) является наиболее общим типом формы, которую мы должны рассматривать. (Если f_i из (23) являются неотрицательными целыми числами, форма N допускает композицию. Однако, N является вырожденной, согласно определению, которое мы вскоре дадим, за исключением ситуации, когда все f_i положительны).

Мы можем выразить (23) эквивалентным образом в терминах generic элемента. Взяв базис for $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{A}_r$, который приспособлен для разложения в прямую сумму, мы получим generic элемент

$$x = x_1 + \dots + x_r,$$

где x_i – generic элемент of $\mathbb{A}_i$ ($i = 1, \dots, r$). Тогда generic норма алгебры $\mathbb{A}$ равна

$$n(x) = n_1(x_1) \cdots n_r(x_r),$$

где $n_i(x_i)$, generic норма простой альтернативной алгебры $\mathbb{A}_i$, несократима (неприводима). Поэтому

$$N(x) = [n_1(x_1)]^{f_1} \cdots [n_r(x_r)]^{f_r},$$

есть произведение степеней (с положительными показателями степени f_i) несократимых множителей $n_i(x_i)$ of generic нормы $n(x)$ of $\mathbb{A}$; кроме того $N(1) = 1$. Другой способ это выразить – это сказать, что N , нормализованная условием $N(1) = 1$, имеет те же самые несократимые множители, что и generic норма of $\mathbb{A}$.

Пусть V – векторное пространство, возможно бесконечномерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Тогда отображение

$$a \rightarrow N(a)$$

V на F называется *формой степени n на V* в случае

$$N(\alpha a) = \alpha^n N(a)$$

для любых $\alpha \in F, a \in V$, и "поляризованная форма"

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) = & \frac{1}{n!} \left[N(a_1 + \dots + a_n) - \sum_{i=1}^n N(a_1 + \dots + \hat{a}_i + \dots + a_n) \right. \\ & \left. + \sum_{i < j} N(a_1 + \dots + \hat{a}_i + \dots + \hat{a}_j + \dots + a_n) - \dots + (-1)^{n-1} \sum N(a_i) \right] \end{aligned}$$

является n -линейной, где запись $\hat{a}_i$ означает, что a_i опущен. Тогда $N(a) = (a, a, \dots, a)$. Эта терминология согласуется с тем, что было в §1 для конечномерного случая, и дает легкое расширение на бесконечномерные пространства записи отображения (посредством) однородных многочленов. ?????????? F . Обобщая определение, данное в §2 для невырожденных квадратичных форм, мы назовем формы степени n *невырожденными* в случае, если из $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ для всех $a_2, \dots, a_n \in V$ вытекает $a_1 = 0$.

Теорема 3. Пусть $\mathbb{A}$ – алгебра с 1, возможно бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Необходимое и достаточное условие для существования на $\mathbb{A}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей композицию,

состоит в том, что $\mathbb{A}$ является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{A}_r$, $\mathbb{A}_i$ – простые алгебры степени m_i , где (24) удовлетворяется для положительных целых чисел f_i ($i = 1, \dots, r$). Более того, N является формой на $\mathbb{A}$, задаваемой посредством (23).

Используя обобщение Джекобсона теоремы 1' на простые альтернативные алгебры, автор доказал теорему 3 с дополнительным предположением, что $\mathbb{A}$ является конечномерной [19]. Доказательство того, что $\mathbb{A}$ с необходимостью конечномерна, так же как смягчение ограничения на характеристику поля F , было дано МакКриммоном [14], и было результатом его значительно более общей теоремы, которую мы представим в §5.

В теореме 2 мы сказали, что только некоторые сепарабельные альтернативные алгебры $\mathbb{A}$ имеют невырожденную квадратичную форму, допускающую композицию, а именно, композиционные алгебры $\mathbb{F}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$ размерности 1, 2, 4, 8. Аналогично, условие (24) ограничивает возможность алгебры $\mathbb{A}$ обладать такой нормой степени n . К примеру, для $n = 3$ возможные размерности $\mathbb{A}$ есть 1, 2, 3, 5, 9; для $n = 4$ размерности есть 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16.

§4. В данном разделе мы представим другой тип композиции, введенный Джекобсоном в его исследовании Йордановых алгебр [10].

Мы начнем опять с рассмотрения ассоциативной алгебры F_m всех матриц $m \times m$ над полем F (характеристики $\neq 2$). Мы хотим построить новую алгебру, используя те же элементы (матрицы $m \times m$), то же сложение и то же умножение на скаляр, но измененное умножение. Вместо использования обычного умножения ab двух матриц a, b из F_m , мы применим *Йорданово умножение*

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba). \quad (25)$$

Обозначим под F_m^+ алгебру, полученную из F_m посредством использования $a \cdot b$ из (25) в качестве умножения вместо ab . С очевидностью, F_m^+ коммутативна. Также $a \cdot a = a^2$. Мы будем писать a^2 для $a \cdot a$, чтобы подчеркнуть, что мы образуем умножение в F_m^+ . Легко проверить, что

$$(a \cdot b) \cdot a^2 = a \cdot (b \cdot a^2) \quad (26)$$

удовлетворяется для всех a, b из F_m^+ .

Йордановой алгеброй $\mathbb{J}$ над F (характеристики $\neq 2$) является любая коммутативная алгебра над F , на которой удовлетворяется *Йорданово тождество* (26), где $a \cdot b$ обозначает абстрактное произведение на $\mathbb{J}$ и не обязано возникать из ассоциативного умножения как в (25). Алгебра F_m^+ – частный случай простой Йордановой алгебры. Все Йордановы алгебры являются строго степенно-ассоциативными.

Матрица (2) является порождающим элементом F_m^+ в той же мере, как и F_m . В K_m^+ , где $K = F(\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{mm})$, степени x^k порождающего элемента x совпадают с соответствующими степенями x^k в K_m . Поэтому порождающий минимальный многочлен Йордановой алгебры F_m^+ и порождающая норма F_m^+ являются теми же, что и на ассоциативной алгебре F_m . Таким образом, порождающая норма элемента a в Йордановой алгебре F_m^+ является детерминантом $\det a$.

Следуя Джекобсону, запишем

$$\{aba\} = 2(a \cdot b) \cdot a - b \cdot a^2 \quad (27)$$

для a, b из любой Йордановой алгебры $\mathbb{J}$. В F_m^+ это равно

$$2(a \cdot b) \cdot a - b \cdot a^2 = \frac{1}{2}(ab + ba)a + \frac{1}{2}a(ab + ba) - \frac{1}{2}(ba^2 + a^2b) = aba,$$

или

$$\{aba\} = aba \quad (28)$$

для всех a, b из F_m . Элемент слева в (28) дается посредством (27) в терминах Йорданова умножения в F_m^+ ; элемент справа в (28) есть ассоциативное умножение матриц в F_m . Тогда из (28) вытекает

$$\det \{aba\} = (\det a)^2 \det b.$$

В самом деле, если $N(a) = \pm(\det a)^s$, то

$$N(\{aba\}) = (N(a))^2 N(b) \quad (29)$$

для всех a, b из F_m^+ . Если N – произвольная форма, удовлетворяющая (29) на Йордановой алгебре $\mathbb{J}$, то таковой является и форма $-N$, и мы можем рассматривать только одну из форм в паре $\pm N$. Если $\mathbb{J}$ содержит 1, и если F содержит больше, чем n различающихся элементов, мы можем нормализовать N степени $n > 0$, как это показано ниже. Так как $\{1b1\} = b$ по (27), мы имеем $N(1) = N(\{111\}) = (N(1))^2 N(1) = (N(1))^3$ в случае, если N удовлетворяет (29). Теперь из $N(1) = 0$ вытекает $N(b) = N(\{1b1\}) = (N(1))^2 N(b) = 0$ для всех b из $\mathbb{J}$, противоречие, и мы имеем $N(1) = \pm 1$. В одном случае мы имеем

$$N(1) = 1. \quad (30)$$

Если $N(1) = -1$, тогда $-N$ удовлетворяет (29) и (30), и мы можем заменить N на $-N$. Мы будем говорить, что форма N на Йордановой алгебре $\mathbb{J}$ с 1 допускает Йорданову композицию в случае, если справедливы как (29), так (30).

Мы можем повторить доказательство Теоремы 1 почти дословно (изменив (6) в K_m на $\{xx\} = (\det x)x$ в K_m^+) чтобы получить следующую версию этой теоремы для Йордановых алгебр:

Теорема 1''. Пусть N – форма степени $n > 0$ на Йордановой алгебре F_m^+ всех матриц $m \times m$ над произвольным полем F характеристики $\neq 2$, которое содержит больше, чем $2n$ различающихся элементов. Тогда N допускает Йорданову композицию тогда и только тогда, когда N является степенью порождающей нормы:

$$N(a) = (\det a)^s$$

для некоторого положительного целого числа s и для всех a из F_m^+ .

Для любого a из Йордановой алгебры $\mathbb{J}$ определим линейный оператор U_a на $\mathbb{J}$ посредством

$$U_a : b \rightarrow \{aba\} = 2(a \cdot b) \cdot a - b \cdot a^2 \quad (31)$$

для всех b из $\mathbb{J}$. В частном случае $\mathbb{J} = F_m^+$, легко проверить, что

$$U_{\{aba\}} = U_a U_b U_a \quad (32)$$

для всех a, b из $\mathbb{J}$.

$$\{\{aba\}c\{aba\}\} = abacaba = \{a\{b\{aca\}b\}a\}$$

для всех a, b, c из F_m^+ . Более того, (32) справедливо в любой Йордановой алгебре. Следовательно, любая n -мерная Йорданова алгебра $\mathbb{J}$ с 1 обладает формой N степени $2n$ допускающей Йорданову композицию (29) и (30), а именно

$$N(a) = \det U_a$$

для всех a из $\mathbb{J}$.

$$N(\{aba\}) = \det U_{\{aba\}} = \det(U_a U_b U_a) = (\det U_a)^2 (\det U_b) = (N(a))^2 N(b)$$

для всех a, b из $\mathbb{J}$ согласно (32), в то время как из (31) вытекает, что $U_1 = I$, так что $N(1) = \det I = 1$.

Было бы чрезмерным надеяться, что Йорданова алгебра, которая имеет невырожденную форму, допускающую Йорданову композицию, будет с необходимостью конечномерной, как было в случае Теорем 2 и 3. Пусть $\mathbb{M} \neq 0$ – векторное пространство, возможно бесконечномерное, над F , и пусть (u, v) – невырожденная симметричная билинейная форма на $\mathbb{M}$. Пусть $\mathbb{J}$ – векторное пространство прямой суммы

$$\mathbb{J} = F1 + \mathbb{M},$$

так что элементы a, b из $\mathbb{J}$ могут быть записаны единственным образом в форме

$$a = \alpha 1 + u, \quad b = \beta 1 + v, \quad \alpha, \beta \in F; \quad u, v \in \mathbb{M}. \quad (33)$$

Определим произведение $a \cdot b$ в $\mathbb{J}$ посредством

$$a \cdot b = (\alpha\beta + (u, v))1 + \alpha v + \beta u$$

для a, b из (33). Тогда $\mathbb{J}$ коммутативно и

$$a \cdot^2 = (\alpha^2 + (u, u))1 + 2\alpha u = 1\alpha a - u(a)1$$

где

$$N(a) = \alpha^2 - (u, u) \quad (34)$$

для всех a из $\mathbb{J}$. Мы имеем Йорданово тождество (26), так что $\mathbb{J}$ является Йордановой алгеброй, а именно *Йордановой алгеброй невырожденной формы* (u, v) . Также

$$a \cdot^2 - 2\alpha a + n(a)1 = 0$$

для всех a из $\mathbb{J}$. Квадратичная форма $n(a)$ в (34) невырождена в $\mathbb{J}$ и допускает Йорданову композицию:

$$n(\{aba\}) = (n(a))^2 n(b)$$

для всех a, b из $\mathbb{J}$, и $n(1) = 1$. Если $M \neq 0$ конечномерно, то $\mathbb{J}$ имеет степень 2 и $n(a)$ является порождающей нормой a в $\mathbb{J}$, как это определено в §3. Если $\mathbb{M}$ конечномерно, то $n(a)$ дает пример невырожденной квадратичной формы, допускающей Йорданову композицию на бесконечномерной Йордановой алгебре $\mathbb{J}$.

Можно определить $\{aba\}$ в произвольной коммутативной алгебре $\mathbb{A}$ посредством (27). Тогда форма N в $\mathbb{A}$ с 1 называется допускающей Йорданову композицию в случае справедливости (29) и (30). МакКриммон доказал следующий аналог Теоремы 3 для коммутативных алгебр, допускающих Йорданову композицию.

Теорема 3'. Пусть $\mathbb{A}$ – конечномерная коммутативная алгебра с 1 над полем F характеристики 0 или $p > 2n$. Необходимое и достаточное условие существования в $\mathbb{A}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей Йорданову композицию, состоит в том, что $\mathbb{A}$ является сепарабельной Йордановой алгеброй $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{A}_r$, $\mathbb{A}_i$ – простые степени t_i , где (24) удовлетворяется для положительных целых чисел f_i , ($i = 1, \dots, r$). Более того, форма N в $\mathbb{A}$ задается посредством (23).

§5. МакКриммон широко обобщил две композиции, которые мы столь долго рассматривали, а именно, "ассоциативную" композицию

$$N(ab) = N(a)N(b)$$

в (7) и Йорданову композицию

$$N(\{aba\}) = (N(a))^2 N(b), \quad N(1) = 1$$

в (29) и (30). Его работы [13], [14] и [15] используют дифференциальное исчисление рациональных отображений векторных пространств, усовершенствованный вариант метода Брауна и Кочера [5]. Для конечномерных векторных пространств возможно кратко описать эвристическим образом, что из себя представляет этот метод, однако мы не будем представлять расширение теории, данное МакКриммоном, на бесконечномерные пространства. Этот аппарат позволил ему получить полное решение его обобщения проблемы форм, допускающих композицию.

Пусть F – бесконечное поле. Пусть

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i$$

является порождающим (generic) элементом n -мерной алгебры $\mathbb{A}$ над F и $K = F(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Предположим, что $\mathbb{M}$ – конечномерное векторное пространство над F с базисом $\{v_1, \dots, v_m\}$. Рациональное отображение G $\mathbb{A}$ на $\mathbb{M}$ получается специализацией элемента $u = \sum \eta_j v_j$ из $K \otimes_F \mathbb{M}$, где каждый $\eta_j = \eta_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ из K является рациональным относительно ξ ($j = 1, \dots, m$). Рациональное отображение G определено только для элементов $a = \sum \alpha_i u_i$, для которых знаменатели η_j не стремятся к нулю при специализации. Рациональная функция в $\mathbb{A}$ есть рациональное отображение $\mathbb{A}$ на F .

Если G – рациональное отображение $\mathbb{A}$ на $\mathbb{M}$, и u принадлежит $\mathbb{A}$, то дифференциальный оператор ∂_u , отображающий G на рациональное отображение $\partial_u G$ определяется эвристически как

$$\partial_u G|_a = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} G(a + \lambda u) \right|_{\lambda=0}$$

для любых a из $\mathbb{A}$ для которых определены отображения; то есть значение $\partial_u G(a) = \partial_u G|_a$ величины $\partial_u G$ на элементе a из $\mathbb{A}$ является коэффициентом λ в $G(a + \lambda u)$. Эвристически, $\partial_u G$ есть частная производная (или производная по направлению) G по направлению u . Тогда ∂_u обладает всеми обычными свойствами дифференциального оператора, включая цепное правило

$$\partial_u (G \circ H)|_a = \partial_v G|_{H(a)}, \quad \text{где } v = \partial_u H|_a.$$

Мы будем использовать факт, что из определения выше тривиально вытекает, что

$$\partial_u G|_a = G(u) \quad \text{если } G \quad \text{(однородно) линейно,} \quad (35)$$

поскольку

$$\partial_u G|_a = au + ua \quad \text{если } G(a) = a^2. \quad (36)$$

Пусть $\mathbb{A}$ – алгебра с 1 (возможно, бесконечномерная) над бесконечным полем F . Форма N на $\mathbb{A}$ допускает композицию МакКриммона в случае, если существуют два рациональных отображения

$$E : a \rightarrow E_a, \quad F : a \rightarrow F_a,$$

$\mathbb{A}$ в алгебру линейных операторов на $\mathbb{A}$, и две рациональные функции e, f на $\mathbb{A}$, удовлетворяющие

$$E_1 = F_1 = I, \quad (37)$$

$$\partial_u E|_1 = \alpha L_u, \quad \partial_u F|_1 = \beta R_u \quad \text{для} \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \in F, \quad (38)$$

$$N(bE_a) = e(a)N(b), \quad N(bF_a) = f(a)N(b), \quad (39)$$

где бы ни отображение не было бы определено, и

$$N(1) = 1. \quad (40)$$

Любая форма N степени $n > 0$, допускающая "ассоциативную" композицию (7), допускает композицию МакКриммона. Мы можем положить $E_a = L_a$, $F_a = R_a$, $\alpha = \beta = 1$, $e = f = N$. Для левого и правого умножений L_a и R_a (однородно) линейны на a , так что (38) следует из (35). Мы уже видели свойство (40) при доказательстве Теоремы 1.

Если N – форма степени $n > 0$, допускающая Йорданову композицию (29) и (30) на Йордановой алгебре $\mathbb{J}$, то N допускает композицию МакКриммона. Мы можем положить $E_a = F_a = U_a$ как в (31), $\alpha = \beta = 2$, $e = f = N^2$. Тогда из (31) вытекает, что

$$U_a = 2R_a^2 - R_{a,2}$$

для всех a из $\mathbb{J}$, где R_a является правым умножением

$$R_a : b \rightarrow bR_a = b \cdot a \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{J}.$$

То есть, используя обозначение, которое подчеркивает, что $R_{a,2}$ является сложной функцией

$$R_{a,2} = (R \circ G)(a), \quad \text{где} \quad G(a) = a^2,$$

мы имеем

$$U = 2R^2 - R \circ G.$$

Тогда, так как ∂_u – дифференциальный оператор,

$$\begin{aligned} \partial_u U|_1 &= 2\partial_u R^2|_1 - \partial_u(R \circ G)|_1 \\ &= 2((\partial_u R)R + R(\partial_u R))|_1 - \partial_v R|_{G(1)}, \quad \text{где} \quad v = \partial_u G|_1, \\ &= 2(\partial_u R|_1 R|_1 + R|_1(\partial_u R|_1)) - \partial_{2u} R|_1 \quad \text{согласно (36)} \\ &= 4R_u - R_{2u} \\ &= 2R_u, \end{aligned}$$

из чего вытекает (38), так как $\mathbb{J}$ коммутативна.

МакКриммон назвал форму G степени n на алгебре $\mathbb{A}$ с 1 невырожденной в случае, если симметричная билинейная форма

$$(u, v) = -\partial_u \partial_v \log G|_1 \quad (= G^{-2}(\partial_u G \cdot \partial_v G - G \cdot \partial_u \partial_v G)|_1)$$

является невырожденной. Это согласуется для характеристики 0 и $p > n$ с определением, данным в §3, когда G допускает композицию МакКриммона. Однако, это определение имеет то преимущество, что может быть использовано для любой характеристики. МакКриммон назвал произвольную невырожденную форму N , которая допускает композицию в смысле (37) – (40) на алгебре $\mathbb{A}$ с 1, *нормой* на $\mathbb{A}$, а любую такую $\mathbb{A}$ – *нормированной алгеброй*.

Некоммутативная Йорданова алгебра $\mathbb{A}$ над F является алгеброй над F , в которой удовлетворяется тождество Йордана (26), вместе с законом эластичности

$$(a \cdot b) \cdot a = a \cdot (b \cdot a) \quad \text{для всех } a, b \in \mathbb{A},$$

которое является избыточным, если $\mathbb{A}$ содержит 1. Любая альтернативная алгебра или (коммутативная) Йорданова алгебра является некоммутативной Йордановой алгеброй. Таковой является любая квазиассоциативная алгебра, как она была определена Албертом в [2]. Любая некоммутативная Йорданова алгебра является строго степенно-ассоциативной, так что, если она конечномерна и содержит 1, теория порождающих минимальных многочленов выполняется. МакКриммон довел свою теорию до "обобщенно алгебраических алгебр", вообще говоря, бесконечномерных над F .

Теорема 4. $\mathbb{A}$ является нормированной алгеброй (вообще говоря, бесконечномерной) над бесконечным полем F характеристики $\neq 2$ тогда и только тогда, когда она представляет собой сепарабельную некоммутативную Йорданову алгебру, равную прямой сумме $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{A}_r$ конечного числа простых идеалов $\mathbb{A}_i$, которые являются либо (i) степени 2 (и возможно бесконечной размерности) над своим центром

(ii) конечномерными квазиассоциативными алгебрами, либо

(iii) конечномерными (коммутативными) Йордановыми алгебрами.

Если N – норма на $\mathbb{A}$, то N имеет те же несократимые делители, что и порождающая норма $\mathbb{A}$.

Эта теорема дает полное решение проблемы, какие алгебры имеют формы, допускающие композицию МакКриммона, и чему эти формы равны [14,15,16].

В случае, когда форма N степени n допускает ассоциативную композицию (7) на $\mathbb{A}$, МакКриммон может исключить необходимость бесконечного поля F , требуя лишь, что F содержит больше, чем n различающихся элементов. Тогда $\mathbb{A}$ является альтернативной и в силу следствия из Теоремы 4 $\mathbb{A}$ конечномерна, из чего вытекает Теорема 3 со слабым предположением, что F содержит более, чем n различных элементов.

Как это часто бывает в математике, мы разрешили старую проблему посредством применения новых методов в более общей ситуации.

References

1. A. A. Albert. Quadratic forms permitting composition. Ann. of Math. **43** (1942), 161-177.
2. A. A. Albert. Power-associative rings. Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 552-593.
3. F. van der Blij. History of the octaves. Simon Stevin **34** (1961), 106-125.
4. M. Bôcher. "Introduction to Higher Algebra." Macmillan, New York, 1929.
5. H. Braun and M. Koecher. "Jordan-Algebren." Springer-Verlag, Berlin, 1966.
6. L. E. Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. Ann. of Math. **20** (1919), 155-171.
7. L. E. Dickson. "Algebras and their Arithmetics." University of Chicago Press, Chicago, 1923.
8. A. Hurwitz. Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1898), 309-316.
9. N. Jacobson. Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 55-80.

10. N. Jacobson. Some groups of linear transformations defined by Jordan algebras, I. J. reine angew. Math. **201** (1959), 178-195.
11. N. Jacobson. Generic norm of an algebra. Osaka Math. J. **15** (1963), 25-50.
12. I. Kaplansky. Infinite-dimensional quadratic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 956-960.
13. K. McCrimmon. Norms and noncommutative Jordan algebras. Pacific J. Math. **15** (1965), 925-956.
14. K. McCrimmon. A proof of Schafer's conjecture for infinite-dimensional forms admitting composition. J. Algebra **5** (1967), 72-83.
15. K. McCrimmon. Genetically algebraic algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 527-551.
16. J. M. Osborn. A norm on separable noncommutative Jordan algebras of degree 2. Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 423-425.
17. R. D. Schafer. On cubic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 917-925.
18. R. D. Schafer. Cubic forms permitting a new type of composition. J. Math. Mech. **10** (1961), 159-174.
19. R. D. Schafer. On forms of degree n permitting composition. J. Math. Mech. **12** (1963), 777-792.
20. R. D. Schafer. "An Introduction to Nonassociative Algebras." Academic Press, New York, 1966.

Внутреннее сопряжение кватернионов.

Каратаев Евгений Анатольевич.

Волжский, июль 2002

Эта статья является своего рода продолжением работы [1]. Речь пойдет о применении методики получения операции сопряжения как следствия процедуры удвоения алгебры. Сопряжение названо внутренним с целью дать ему собственное название. Ввиду того, что мне недоступны сведения об этом сопряжении из других источников, вполне допускаю, что данной публикацией мог повторить работу, выполненную ранее другими. В статье я описываю вывод сопряжения и рассуждения, с ним связанные, в том порядке, в котором они были получены.

Алгебра кватернионов Q образуется из алгебры комплексных чисел C некоммутативным удвоением:

$$Q = C_1 + C_2 j \quad (1)$$

Более подробное описание свойств алгебр кватернионов и комплексных чисел можно посмотреть, например, в [2].

Процедура некоммутативного удвоения неоднозначна: можно выполнить удвоение также как:

$$Q = C_1 + j C_2 \quad (2)$$

В первом случае будет получена система с правым законом умножения ($ij = k$), а во втором - с левым законом умножения ($ij = -k$). Далее для определённости будем оперировать правыми кватернионами.

Традиционное обозначение кватерниона в покомпонентной записи имеет вид:

$$q = q_0 + i q_1 + j q_2 + k q_3 \quad (3)$$

или

$$q = q_0 + i q_1 + (q_2 + i q_3) j \quad (4)$$

Следуя методике получения операции сопряжения как следствия операции удвоения, мы должны сменить знак у компонент при мнимых единицах, в образовании которых участвовала единица удвоения j . Временно обозначив такое сопряжение как q^* , получим:

$$q^* = q_0 + i q_1 - j q_2 - k q_3 \quad (5)$$

В силу линейности этой операции она имеет свойство:

$$a^* \pm b^* = (a \pm b)^* \quad (6)$$

Теперь распишем произведение двух кватернионов покомпонентно. Именно такое расписывание и поможет увидеть следующее и очень важное свойство.

$$\begin{aligned} ab &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ &+ i (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2) \\ &+ j (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3) \\ &+ k (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned} \quad (7)$$

Используем эту формулу в качестве заготовки и рассмотрим произведение вида a^*b^* :

$$\begin{aligned} a^*b^* &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ &+ i (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2) \\ &+ j (-a_0b_2 - a_2b_0 - a_3b_1 + a_1b_3) \\ &+ k (-a_0b_3 - a_3b_0 - a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнив результат с произведением ab , получаем что

$$a^*b^* = (ab)^* \quad (9)$$

Именно на этом соотношении и будет основан дальнейший вывод.

Рассмотрим произведение aa^* :

$$aa^* = a_0a_0 - a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + i(a_0a_1 + a_1a_0) \quad (10)$$

Остальные члены в этой формуле, в отличие от приведенных выше двух выкладок, сокращаются до нуля. Из этой же формулы следует ещё одно важное соотношение:

$$aa^* = a^*a \quad (11)$$

И это произведение является комплексным числом, числом алгебры, послужившей исходной в процедуре получения алгебры кватернионов путем удвоения.

Как и ожидалось (интуитивно, правда), сумма и произведение q и q^* дают комплексное число исходной алгебры и эти операции (сумма, произведение и сопряжение) могут быть использованы для выделения в кватернионе отдельных компонент. Уточним - в сочетании с сопряжением по мнимой единице i может быть выделен любой компонент кватерниона.

Сведём в список полученные свойства нового сопряжения:

$$\begin{aligned}
a^* \pm b^* &= (a \pm b)^* \\
a^* b^* &= (ab)^* \\
aa^* &= a^* a
\end{aligned} \tag{12}$$

В силу линейности операции сопряжения q^* она коммутирует с операцией векторного сопряжения по композиции:

$$\overline{(q^*)} = (\bar{q})^* = \bar{q}^* \tag{13}$$

При этом величина $\bar{q}^*$ образуется из q сменой знака у компоненты при единице i :

$$\bar{q}^* = q_0 - iq_1 + jq_2 + kq_3 \tag{14}$$

В силу циклической симметрии мнимых единиц i, j, k как правых так и левых кватернионов это сопряжение (смена знака у компоненты при одной мнимой единице) является одним из тройки сопряжений: по i , по j и по k . Обозначим сопряжение по одной из мнимых единиц верхним индексом в круглых скобках:

$$\begin{aligned}
q^{(i)} &= q_0 - iq_1 + jq_2 + kq_3 \\
q^{(j)} &= q_0 + iq_1 - jq_2 + kq_3 \\
q^{(k)} &= q_0 + iq_1 + jq_2 - kq_3
\end{aligned} \tag{15}$$

Назовём сопряжение, образованное путем смены знаков у мнимых единиц, внутренним и введём различие их на одинарное внутреннее ($q^{(i)}$) и двойное внутреннее ($\bar{q}^*$).

В силу свойств $\overline{(ab)} = \bar{b}\bar{a}$ и $a^* b^* = (ab)^*$ имеем:

$$\overline{(ab)^*} = \bar{b}^* \bar{a}^* \tag{16}$$

Или для тройки одинарных внутренних сопряжений:

$$\begin{aligned}
(ab)^{(i)} &= b^{(i)} a^{(i)} \\
(ab)^{(j)} &= b^{(j)} a^{(j)} \\
(ab)^{(k)} &= b^{(k)} a^{(k)}
\end{aligned} \tag{17}$$

В силу линейности одинарного внутреннего сопряжения также справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
a^{(i)} \pm b^{(i)} &= (a \pm b)^{(i)} \\
a^{(j)} \pm b^{(j)} &= (a \pm b)^{(j)} \\
a^{(k)} \pm b^{(k)} &= (a \pm b)^{(k)}
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, первоначально рассмотренное сопряжение (названное двойным внутренним) является последовательным применением одинарных внутренних сопряжений по j и k :

$$q^* = q^{(j,k)} \quad (19)$$

Одинарные внутренние сопряжения коммутативны по композиции в силу их линейности:

$$(a^{(i)})^{(j)} = (a^{(j)})^{(i)} = a^{(i,j)} = a^{(j,i)} \quad (20)$$

Таким образом, в алгебре кватернионов существует 3 одинарных внутренних сопряжения:

$$a^{(i)}, a^{(j)}, a^{(k)}$$

и 3 двойных внутренних сопряжения:

$$a^{(i,j)}, a^{(j,k)}, a^{(i,k)}$$

При этом векторное сопряжение может быть представлено в виде композиции всех трех одинарных внутренних сопряжений:

$$\bar{q} = q^{(i,j,k)} \quad (21)$$

И если с помощью операции суммы и сопряжения $q^{(j,k)}$ можно в кватернионе выделить комплексное число $q_0 + iq_1$, то с помощью операции суммы и сопряжений $q^{(j,k)}$ и $q^{(i,j)}$ можно выделить комплексные числа $q_0 + jq_2$ и $q_0 + kq_3$ соответственно.

В качестве дополнительных свойств внутреннего сопряжения рассмотрим очень важную функцию экспоненты. Экспоненциальный ряд задаётся как

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \quad (22)$$

Ряд состоит из сумм произведений. Применив свойства внутреннего сопряжения

$$(a \pm b)^{(i)} = a^{(i)} \pm b^{(i)}$$

и

$$a^{(i)}b^{(i)} = (ba)^{(i)}$$

а также тот факт, что произведения являются целыми степенями числа:

$$\begin{aligned} a^{(i)} a^{(i)} &= (aa)^{(i)} \\ a^{(i)} a^{(i)} a^{(i)} &= a^{(i)} (aa)^{(i)} = (aaa)^{(i)} \\ a^{(i)} a^{(i)} \dots a^{(i)} &= (aa \dots a)^{(i)} \end{aligned} \quad (23)$$

получим систему равенств:

$$\begin{aligned} \exp(q^{(i)}) &= (\exp(q))^{(i)} \\ \exp(q^{(j)}) &= (\exp(q))^{(j)} \\ \exp(q^{(k)}) &= (\exp(q))^{(k)} \end{aligned} \quad (24)$$

Проводя подобные рассуждения, но используя двойное внутреннее сопряжение, получим ещё одну систему равенств:

$$\begin{aligned} \exp(q^{(i,j)}) &= (\exp(q))^{(i,j)} \\ \exp(q^{(j,k)}) &= (\exp(q))^{(j,k)} \\ \exp(q^{(i,k)}) &= (\exp(q))^{(i,k)} \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для других элементарных функций, задаваемых в виде рядов. Отметим также, что вышеприведённые соотношения для экспоненты внутренне сопряжённого кватерниона могут быть получены из рассмотрения аналитического представления экспоненты от кватерниона:

$$e^q = e^{q_0} \left(\cos \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} + \frac{iq_1 + jq_2 + kq_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \sin \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \right) \quad (26)$$

Надеюсь, что знакомство с внутренним сопряжением кватернионов поможет найти решение в возможной затруднительной ситуации.

Ссылки

1. Каратаев Е.А. Сопряжения в гиперкомплексных алгебрах.
<http://karataev.hotmail.ru/conj/index.html>
2. Каратаев Е.А. Классификатор гиперкомплексных чисел.
<http://karataev.hotmail.ru/hipclass/index.html>

КВАТЕРНИОННЫЙ АНАЛИЗ¹

Энтони Садбери

as2@mailer.york.ac.uk

1. Введение

Богатство теории функций комплексного переменного делает естественным поиск подобной теории для единственной иной нетривиальной ассоциативной алгебры с делением, называемой кватернионами. Такая теория существует, но она достаточно труднодоступна и еще по-видимому мало известна. Она не развивалась почти столетие после открытия кватернионов Гамильтоном. Гамильтон (1) и его основные последователи и интерпретаторы, Тэйт (2) и Джоли (3), лишь развили теорию функций кватернионных переменных настолько, насколько это было возможно посредством общих методов теории функций многих действительных переменных (основные идеи этой теории появились в их современной форме первый раз в работе Гамильтона о кватернионах). Среди всех кватернионнозначных функций кватернионных переменных они не выделили специальный класс регулярных функции аналогично регулярным функциям комплексной переменной.

Это произошло из-за того, что распространение никакого из двух фундаментальных определений аналитической функции комплексной переменной на кватернионы не дает интересных следствий; одно слишком узко, другое недостаточно узко. Функции кватернионных переменных, которые имеют кватернионные производные в очевидном смысле, есть лишь константы и линейные функции (причем не все из них); функции, которые могут быть представлены посредством кватернионных степенных рядов, есть именно те, которые могут быть представлены как степенные ряды из четырех действительных переменных.

В 1935 Р. Фютер (4) предложил определение "регулярности" кватернионных функций посредством аналогии с уравнениями Коши-Римана. Он показал, что это определение привело к тесной аналогии с теоремой Коши, интегральной формулой Коши и разложением Лорана (5). В последующие 12 лет Фютер и его сотрудники развили теорию кватернионного анализа. Полная библиография этой работы содержится в (6), и простая сводка (на английском) по элементарным разделам этой теории дана Деворсом (7).

Теория, развитая Фютером и его школой, не завершена по нескольким направлениям и многие из их теорем не являются ни столь общими, ни столь строго доказанными, как требуют современные стандарты описания в комплексном анализе. Цель данной работы заключается в представлении замкнутого обзора главного направления кватернионного анализа, который исправляет эти недостатки, заодно добавляя некоторое число новых результатов. Используя внешнее дифференциальное исчисление мы готовы предоставить новые и простые доказательства большинства основных теорем и разъяснить связь между кватернионным анализом и комплексным анализом.

В разделе 2 этой статьи мы устанавливаем свои обозначения для кватернионов и вводим кватернионные дифференциальные формы dq , $dq \wedge dq$ и Dq , которые играют фундаментальную роль в кватернионном анализе. 1-форма dq и 3-форма Dq

¹ *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1979), **85**, 199-225. Пер. А. Виноградовой под ред. А. Элиовича.

имеют простые геометрические интерпретации как касательная к кривой и нормаль к гиперповерхности соответственно.

Раздел 3 касается определения регулярной функции. Здесь развиты замечания второго параграфа этого введения о возможных аналогиях в определении комплексно-аналитической функции (этот материал по-видимому широко известен, но трудно доступен в литературе); затем показано, что определение Фютера регулярной функции, посредством аналогии с уравнениями Коши-Римана, эквивалентно существованию некоторого типа кватернионной производной. Точно так же, как для функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, уравнение Коши-Римана $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$ (переменная имеет вид $z = x + iy$) эквивалентно существованию комплексного числа $f'(z)$ такого что $df = f'(z)dz$, так и для функции $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, уравнение Коши-Римана-Фютера

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

(переменная имеет вид $q = t + ix + jy + kz$) эквивалентно существованию кватерниона $f'(q)$ такого, что $d(dq \wedge dqf) = Dqf'(q)$.

Раздел 4 посвящен кватернионным версиям теоремы Коши и интегральной формулы Коши. Если функция f непрерывно дифференцируема и удовлетворяет (1.1), то можно применить теорему Гаусса, чтобы показать, что

$$\int_{\partial C} Dqf = 0, \quad (1.2)$$

где C – некоторое гладкое замкнутое 3-мерное многообразие в $\mathbb{H}$, и что если q_0 лежит внутри C , то

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q). \quad (1.3)$$

Мы покажем, что метод Гурса может быть использован для ослабления условий на контур C и функцию f , так что необходимо лишь потребовать спрямляемости C и производные функции f не обязательно должны быть непрерывными. Из интегральной формулы (1.3) следует, что как и в комплексном анализе, если f – регулярная функция на открытом множестве U , то она разлагается в степенной ряд в каждой точке множества U . Таким образом, поточечная дифференцируемость вместе с четырьмя действительными условиями (1.1) на шестнадцать частных производных функции f являются достаточным для обеспечения вещественной аналитичности.

В главе 5 мы показываем, как регулярные функции могут быть созданы из функций более обычного типа, а именно из гармонических функций четырех действительных переменных и аналитических функций комплексной переменной, и как регулярная функция порождает другие при конформных преобразованиях переменной.

Однородные компоненты в степенных рядах, представляющих регулярную функцию, сами являются регулярными; поэтому важно изучать регулярные однородные полиномы, базовые функции, через которые строятся все регулярные функции. Соответствующие функции комплексной переменной есть просто степени переменной, но ситуация с кватернионами более сложна. Множество однородных регулярных функций степени n формирует кватернионное векторное пространство размерности $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$; это справедливо для любого целого n , если подразумевается, что для отрицательных n функции определены и регулярны везде исключая 0. Функции с отрицательной степенью однородности соответствуют отрицательным степеням комплексной переменной и встречаются в кватернионном ряду Лорана, который существует для любой функции, регулярной на открытом множестве кроме одной точки.

Фютер нашел два естественных базиса для множества однородных функций которые играют двоякую роль в исчислении вычетов. (Он на самом деле только доказал, что эти базисы формируют остовы (натянутые множества, spanning sets)). В разделе 6 мы изучаем однородные регулярные функции при помощи гармонического анализа на единичной сфере в $\mathbb{H}$, которая формирует группу изоморфную $SU(2)$; это имеет такое же отношение к кватернионному анализу, как теория рядов Фурье – к комплексному анализу. В разделе 7 мы исследуем степенные ряды, представляющие регулярные функции, и получаем аналоги теоремы Лорана и теоремы вычетов.

Многие алгебраические и геометрические свойства комплексных аналитических функций не представлены в кватернионном анализе. Из-за того, что кватернионы не коммутируют, регулярные функции кватернионных переменных не могут быть перемножены или скомбинированы для создания новых регулярных функций. Поскольку кватернионы являются четырехмерными, не существует аналога геометрическому описанию комплексных аналитических функций как конформных отображений. Нули кватернионной регулярной функции не обязательно являются изолированными, а ее область значений не обязательно открыта; ни одно из этих множеств не обязательно даже быть подмногообразием $\mathbb{H}$. В соответствии с этим возникает сложность в структуре особенностей кватернионной регулярной функции; что было описано Фютером (9), но без четкой формулировки утверждений или доказательств. Эта тема не исследуется в настоящей работе.

2. Предварительные соображения

Обозначим четырехмерную действительную ассоциативную алгебру кватернионов через $\mathbb{H}$, ее единицу как 1; будем считать, что $\mathbb{R}$ вложено в $\mathbb{H}$ посредством отождествления $t \in \mathbb{R}$ с $1 \in \mathbb{H}$. Тогда мы имеем прямую сумму векторного пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus P$, где P – ориентированное трехмерное евклидово векторное пространство; в обычной системе обозначений для трехмерных векторов произведение двух элементов из P представляется в виде

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (2.1)$$

Мы выбираем ортонормированный положительно ориентированный базис i, j, k для P и записываем типичный кватернион как

$$q = t + ix + jy + kz \quad (t, x, y, z \in \mathbb{R}). \quad (2.2)$$

Иногда мы будем обозначать базис кватернионов i, j, k через e_i и координаты x, y, z через x_i ($i = 1, 2, 3$) и использовать правило суммирования для повторяющихся индексов. Тогда (2.2) принимает вид

$$q = t + e_i x_i \quad (2.3)$$

и умножение дается соотношением

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k. \quad (2.4)$$

Будем также иногда отождествлять поле, натянутое на 1 и i , с комплексным полем $\mathbb{C}$ и записывать

$$q = v + jw \quad (v, w \in \mathbb{C}), \quad (2.5)$$

где $v = t + ix$ и $w = y - iz$. Правило умножения тогда записывается

$$vj = j\bar{v} \quad (2.6)$$

для всех $v \in \mathbb{C}$.

Мы будем писать

$$\bar{q} = t - ix - jy - kz, \quad (2.7)$$

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

$$Re\,q = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) = t \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

$$Pu\,q = \frac{1}{2}(q - \bar{q}) = ix + jy + kz \in P, \quad (2.10)$$

$$Un\,q = \frac{q}{|q|} \in S, \quad (2.11)$$

где S – единичная сфера в $\mathbb{H}$; и

$$\langle q_1, q_2 \rangle = Re(q_1\bar{q}_2) = t_1t_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (2.12)$$

Тогда имеем

$$\overline{q_1q_2} = \bar{q}_2\bar{q}_1, \quad (2.13)$$

$$|q_1q_2| = |q_1| \cdot |q_2|, \quad (2.14)$$

$$Re(q_1q_2) = Re(q_2q_1) \quad (2.15)$$

и

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}. \quad (2.16)$$

Заметим, что если u_1 и u_2 – единичные кватернионы, т. е. $|u_1| = |u_2| = 1$, отображение $q \mapsto u_1qu_2$ является ортогональным относительно скалярного произведения (2.12) и имеет определитель 1; обратно, любое вращение $\mathbb{H}$ имеет форму $q \mapsto u_1qu_2$ с некоторыми $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ (смотри например **(10)**), раздел 10).

Скалярное произведение (2.12) порождает $\mathbb{R}$ -линейное отображение $\Gamma : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{H}$, где

$$\mathbb{H}^* = Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$$

– дуальное к $\mathbb{H}$ векторное пространство, заданное посредством

$$\langle \Gamma(\alpha), q \rangle = \alpha(q) \quad (2.17)$$

для $\alpha \in \mathbb{H}^*$, $q \in \mathbb{H}$. Так как $\{1, i, j, k\}$ – ортонормированный базис на $\mathbb{H}$, имеем

$$\Gamma(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k).$$

Множество $\mathbb{R}$ -линейных отображений из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ формирует двустороннее векторное пространство на $\mathbb{H}$ размерности 4, которое будем обозначать как F_1 . Оно порождается (на $\mathbb{H}$) $\mathbb{H}^*$, так что отображение Γ может быть расширено по линейности на правое $\mathbb{H}$ -линейное отображение $\Gamma_r : F_1 \rightarrow \mathbb{H}$ и левое линейное отображение

$$\Gamma_l : F_1 \rightarrow \mathbb{H}.$$

Это задается посредством

$$\Gamma_r(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k) \quad (2.18)$$

и

$$\Gamma_l(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k) \quad (2.19)$$

для любого $\alpha \in F_1$.

Ниже дана геометрическая терминология, используемая в настоящей статье:

Ориентированный k -параллелепипед в $\mathbb{H}$ есть отображение $C : I^k \rightarrow \mathbb{H}$, где $I^k \subset \mathbb{R}^k$ – замкнутый единичный k -куб, формы

$$C(t_1, \dots, t_k) = q_0 + t_1 h_1 + \dots + t_k h_k.$$

$q_0 \in \mathbb{H}$ называется *исходной вершиной* параллелепипеда, $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{H}$ – *векторами его боковых ребер*. Параллелепипед *невырожден*, если его вектора боковых ребер линейно независимы (над $\mathbb{R}$). невырожденный 4-параллелепипед является *положительно ориентированным*, если

$$v(h_1, \dots, h_4) > 0,$$

отрицательно ориентированным, если $v(h_1, \dots, h_4) < 0$, где v – объемная форма, определенная ниже (уравнение (2.26)).

Мы будем иногда упрощать запись, обозначая отображение $C(I^k)$ как просто C .

Кватернионные дифференциальные формы. Будем говорить, когда это необходимо во избежание путаницы с другими обозначениями дифференцируемости, что функция $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ *действительно дифференцируема*, если она дифференцируема в обычном смысле. Ее дифференциал в точке $q \in \mathbb{H}$ тогда будет $\mathbb{R}$ -линейным отображением $df_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Идентифицируя касательное пространство в каждой точке $\mathbb{H}$ с самим $\mathbb{H}$, мы можем рассматривать дифференциал как кватернионнозначную 1-форму

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (2.20)$$

Обратно, любая кватернионнозначная 1-форма $\theta = a_0 dt + a_i dx_i$ ($a_0, a_i \in \mathbb{H}$) может быть рассмотрена как $\mathbb{R}$ -линейное отображение $\theta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ представимое как

$$\theta(t + x_i e_i) = a_0 t + a_i x_i \quad (2.21)$$

Аналогично, кватернионнозначная r -форма может рассматриваться как отображение из $\mathbb{H}$ на пространство кососимметричных $\mathbb{R}$ -полилинейных отображений из $\mathbb{H} \times \dots \times \mathbb{H}$ (r раз) на $\mathbb{H}$. Определим внешнее произведение таких форм обычным способом: если θ – r -форма и ϕ – s -форма, то

$$\theta \wedge \phi(h_1, \dots, h_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\rho} \epsilon(\rho) \theta(h_{\rho(1)}, \dots, h_{\rho(r)}) \phi(h_{\rho(r+1)}, \dots, h_{\rho(r+s)}), \quad (2.22)$$

где сумма производится по всем перестановкам ρ $r+s$ объектов, и $\epsilon(\rho)$ – знак ρ . Тогда множество всех r -форм есть двустороннее кватернионное векторное пространство, и мы имеем

$$\left. \begin{aligned} a(\theta \wedge \phi) &= (a\theta) \wedge \phi, \\ (\theta \wedge \phi)a &= \theta \wedge (\phi a), \\ (\theta a) \wedge \phi &= \theta \wedge (\phi a) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

для всех кватернионов a , r -форм θ и s -форм ϕ . Пространство кватернионных r -форм имеет базис действительных r -форм, состоящий из внешних произведений действительных 1-форм dt, dx, dy, dz ; для таких форм левое и правое умножение на кватернионы совпадают. Заметим, что так как внешнее произведение определено в терминах

кватернионного умножения, которое не является коммутативным, вообще говоря, неверно, что $\theta \wedge \phi = -\phi \wedge \theta$ для кватернионных 1-форм θ и ϕ .

Внешняя производная кватернионной дифференциальной формы определена с помощью обычной рекурсивной формулы, а теорема Стокса остается в силе в обычной форме для кватернионных интегралов.

Следующие специальные дифференциальные формы будут часто использоваться на протяжении всей статьи. Дифференциал тождественной функции имеет вид

$$dq = dt + idx + jdy + kdz \quad (2.24)$$

и рассматривается как $\mathbb{R}$ -линейное преобразование $\mathbb{H}$, dq – тождественное отображение. Его внешнее произведение с самим собой есть

$$dq \wedge dq = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e_i dx_j \wedge dx_k = idy \wedge dz + jdz \wedge dx + kdx \wedge dy, \quad (2.25)$$

которое, как антисимметричная функция на $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, является коммутатором своих аргументов. Для постоянной (а по существу единственной) действительной 4-формы используем сокращение

$$v = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \quad (2.26)$$

так что $v(1, i, j, k) = 1$. Наконец, 3-форма Dq определяется как кососимметричная $\mathbb{R}$ -трилинейная функция посредством

$$\langle h_1, Dq(h_2, h_3, h_4) \rangle = v(h_1, h_2, h_3, h_4) \quad (2.27)$$

для всех $h_1, \dots, h_4 \in \mathbb{H}$. Таким образом $Dq(i, j, k) = 1$ и $Dq(1, e_i, e_j) = -\epsilon_{ijk} e_k$. В координатах выражение для Dq есть

$$Dq = dx \wedge dy \wedge dz - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k = \\ dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy. \quad (2.28)$$

Геометрически, $Dq(a, b, c)$ – это кватернион, который перпендикулярен к a, b и c и имеет величину, равную объему 3-мерного параллелепипеда с ребрами a, b и c . Он имеет также следующее алгебраическое выражение:

$$\text{УТВЕРЖДЕНИЕ 1. } Dq(a, b, c) = \frac{1}{2}(c\bar{a}b - b\bar{a}c).$$

Доказательство. Для любого единичного кватерниона u отображение $q \mapsto uq$ является ортогональным преобразованием $\mathbb{H}$ с детерминантом 1; следовательно

$$Dq(ua, ub, uc) = uDq(a, b, c).$$

Взяв $u = |a|^{-1}$ и используя $\mathbb{R}$ -трилинейность Dq , получим

$$Dq(a, b, c) = |a|^2 a Dq(1, a^{-1}b, a^{-1}c). \quad (2.29)$$

Теперь, так как

$$Dq(1, e_i, e_j) = -\epsilon_{ijk} e_k = \frac{1}{2}(e_j e_i - e_i e_j),$$

то при линеаризации имеем

$$Dq(1, h_1, h_2) = \frac{1}{2}(h_2 h_1 - h_1 h_2) \quad (2.30)$$

для всех $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$. Следовательно

$$Dq(a, b, c) = \frac{1}{2}|a|^2(a^{-1}ca^{-1}b - a^{-1}ba^{-1}c) = \frac{1}{2}(c\bar{a}b - b\bar{a}c). \quad \square$$

В ходе этого доказательства были получены две полезные формулы. Рассуждение, приведшее к (2.29), может быть обобщено, используя тот факт, что отображение $q \mapsto uqv$ есть вращение для любой пары единичных кватернионов u и v , на

$$Dq(ah_1b, ah_2b, ah_3b) = |a|^2|b|^2Dq(h_1, h_2, h_3)b; \quad (2.31)$$

и формула (2.30) может быть записана как

$$1 \rfloor Dq = -\frac{1}{2}dq \wedge dq, \quad (2.32)$$

где $\rfloor$ обозначает обычное скалярное произведение между дифференциальными формами и векторными полями и 1 обозначает постоянное векторное поле, величина которого равна 1 .

Так как дифференциал кватернионнозначной функции на H является элементом F_1 , отображение Γ_r может быть применена к нему. Результатом будет

$$\Gamma_r(df) = \frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.33)$$

Введем следующие обозначения для дифференциального оператора, записанного в (2.33), и для других связанных с ним дифференциальных операторов:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\partial}_l f &= \frac{1}{2}\Gamma_r(df) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \\ \partial_l f &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \\ \bar{\partial}_r f &= \frac{1}{2}\Gamma_l(df) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \right), \\ \partial_r f &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \right), \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Отметим, что $\partial_l, \bar{\partial}_l, \partial_r$ и $\bar{\partial}_r$ все коммутируют и что

$$\Delta = 4\partial_r \bar{\partial}_r = 4\partial_l \bar{\partial}_l. \quad (2.35)$$

3. Регулярные функции

Требование того, что функция комплексной переменной $z = x + iy$ должна быть комплексным полиномом, т. е. суммой членов $a_n z^n$, выделяет собственное подмножество полиномиальных функций $f(x, y) + ig(x, y)$. Соответствующее условие для функции кватернионных переменных $q = t + ix + jy + kz$, а именно чтобы она была суммой мономов $a_0 q a_1 \dots a_{r-1} q a_r$, не накладывает ограничение на функцию; в противоположность

комплексному случаю координаты t, x, y, z могут самостоятельно быть записаны как кватернионные полиномы:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{4}(q - iqi - jqj - kqk), \\ x &= \frac{1}{4i}(q - iqi + jqj + kqk), \\ y &= \frac{1}{4j}(q + iqi - jqj + kqk), \\ z &= \frac{1}{4k}(q + iqi + jqj - kqk), \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

и поэтому каждый действительный полином в t, x, y, z является кватернионным полиномом в q . Поэтому теория кватернионных степенных рядов будет тождественна теории действительных аналитических функций на $\mathbb{R}^4$.

С другой стороны, требование того, чтобы функция кватернионной переменной имела бы кватернионную производную в очевидном смысле, является слишком сильным для получения интересных следствий, как мы сейчас покажем.

Определение. Функция $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ кватернионно-дифференцируема слева в q , если предел

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h \rightarrow 0} [h^{-1} \{f(q+h) - f(q)\}]$$

существует.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что функция f определена и кватернионно-дифференцируема слева на всем связном открытом множестве U . Тогда на U f имеет форму

$$f(q) = a + qb$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{H}$.

Доказательство. Из определения следует, что если f кватернионно-дифференцируема слева в q , она действительно-дифференцируема в q и ее дифференциал является линейным отображением умножения справа на $\partial f / \partial q$:

$$df_q(h) = h \frac{df}{dq},$$

то есть

$$df_q = dq \frac{df}{dq}. \quad (3.2)$$

Приравнявая коэффициенты при dt, dx, dy и dz , получим

$$\frac{df}{dq} = \frac{\partial f}{\partial t} = -i \frac{\partial f}{\partial x} = -j \frac{\partial f}{\partial y} = -k \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (3.3)$$

Положим $q = v + jw$, где $v = t + ix$ и $w = y - iz$, и пусть $f(q) = g(v, w) + jh(v, w)$, где g и h – комплекснозначные функции двух комплексных переменных v и w ; тогда (3.3) может быть разделено на два набора комплексных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= -i \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = i \frac{\partial h}{\partial z}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= i \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = i \frac{\partial g}{\partial z}. \end{aligned}$$

В терминах комплексных производных это может быть записано как

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial w} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial w} \quad (3.5)$$

и

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.4) показывает, что g является комплексной аналитической функцией переменных v и $\bar{w}$, h – комплексной аналитической функцией переменных $\bar{v}$ и w . Отсюда согласно теореме Хартога ((11), стр. 133) g и h имеют непрерывные частные производные всех порядков, и таким образом из (3.5) вытекает

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial h}{\partial \bar{w}} \right) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right) = 0.$$

Предположим сначала, что U – выпуклое. Тогда можно заключить, что g – линейное по $\bar{w}$, h – линейное по w и h – линейное по $\bar{v}$. Таким образом

$$g(v, w) = \alpha + \beta v + \gamma \bar{w} + \delta v \bar{w},$$

$$h(v, w) = \epsilon + \zeta \bar{v} + \eta w + \theta \bar{v} w,$$

где греческими буквами обозначены комплексные константы. Теперь (3.5) и (3.6) дают следующие соотношения между этими константами:

$$\beta = \eta, \quad \zeta = -\gamma, \quad \delta = \theta = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f &= g + jh = \alpha + j\epsilon + (v + jw)(\beta - j\gamma) \\ &= a + qb, \end{aligned}$$

где $a = \alpha + j\epsilon$ и $b = \beta - j\gamma$; итак, f имеет указанную форму, если U – выпуклое. Произвольное связное открытое множество может быть покрыто выпуклыми множествами, любые два из которых могут быть связаны цепью попарно перекрывающихся выпуклых множеств; сравнивая формы функций f на перекрытиях, мы видим, что $f(q) = a + qb$ с теми же константами a, b на всем U . $\square$

Теперь дадим определение "регулярности" для кватернионной функции, которая обеспечивается большим классом функций и которая приводит к развитию теории, подобной теории регулярных функций комплексной переменной.

Определение. Функция $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ *лево-регулярная* в $q \in \mathbb{H}$, если она действительно-дифференцируема в q и там существует кватернион $f'_l(q)$ такой что

$$d(dq \wedge dqf) = Dqf'_l(q). \quad (3.7)$$

Она является *право-регулярной*, если там существует кватернион $f'_r(q)$ такой что

$$d(fdq \wedge dq) = f'_r(q)Dq.$$

Ясно, что теория лево-регулярных функций полностью эквивалентна теории право-регулярных функций. Для определенности мы рассмотрим только лево-регулярные функции, которые назовем просто *регулярными*. Запишем $f'_l(q) = f'(q)$ и назовем ее *производной* функции f в q .

Приложение теоремы Стокса дает следующее определение производной регулярной функции как предела разностного отношения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Предположим, что f регулярна в q_0 и непрерывно дифференцируема в окрестности q_0 . Тогда при данном $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что если C – невырожденный ориентированный 3-параллелепипед с $q_0 \in C(I^3)$ и $q \in C(I^3) \Rightarrow |q - q_0| < \delta$, то*

$$\left| \left(\int_C Dq \right)^{-1} \left(\int_{\partial C} dq \wedge dqf \right) - f'(q_0) \right| < \epsilon.$$

Соответствующее определение производной в терминах значений функции в конечном числе точек есть

$$\begin{aligned} f'(q_0) = \lim_{h_1, h_2, h_3 \rightarrow 0} [Dq(h_1, h_2, h_3)^{-1} \{ (h_1 h_2 - h_2 h_1)(f(q_0 + h_3) - f(q_0)) \\ + (h_2 h_3 - h_3 h_2)(f(q_0 + h_1) - f(q_0)) \\ + (h_3 h_1 - h_1 h_3)(f(q_0 + h_2) - f(q_0)) \}]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выражение обоснованно, если подразумевается, что h_1, h_2, h_3 кратны трем фиксированным линейно независимым кватернионам, $h_i = t_i H_i$, и предел берется как $t_1, t_2, t_3 \rightarrow 0$.

Переписав (3.7) в виде

$$dq \wedge dq \wedge df = Dq f'(q)$$

и выразив эти трилинейные функции через аргументы (i, j, k) и $(1, i, j)$, мы получаем два уравнения, которые дают выражение для производной

$$f' = -2\partial_i f = -\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.9)$$

и также

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *(Уравнения Коши-Римана-Фютера).*

Действительно-дифференцируемая функция f регулярна в q тогда и только тогда, когда $\bar{\partial}_i f = 0$, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (3.10)$$

Если мы напомним $q = v + jw$, $f(q) = g(v, w) + jh(v, w)$ как в Теореме 1, выражение (3.10) становится парой комплексных уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}}, \quad \frac{\partial g}{\partial w} = -\frac{\partial h}{\partial v}, \quad (3.11)$$

которые могут рассматриваться как комплексификация уравнений Коши-Римана для функции комплексной переменной.

Из Утверждения 3 и (2.35) следует, что, если f регулярна и дважды дифференцируема, то $\Delta f = 0$, то есть f – гармоническая функция. В следующем разделе мы увидим, что регулярная функция с необходимостью является бесконечно дифференцируемой, так что все регулярные функции гармонические.

4. Теорема Коши и интегральная формула

Интегральные теоремы для регулярных кватернионных функций имеют столь же широкую область справедливости, как их аналоги для регулярных комплексных функций, которая значительно шире, чем область справедливости интегральных теорем для гармонических функций. Теорема Коши справедлива для любого спрямляемого контура интегрирования; интегральная формула, которая подобна формуле Пуассона в том смысле, что она дает значение функции внутри области через значения на ее границе, справедлива в общем случае спрямляемой границы, и в этом заключается явное решение основной проблемы Дирихле.

Алгебраическим базисом этих теорем является уравнение

$$\begin{aligned} d(gDqf) &= dq \wedge Dqf - gDq \wedge df \\ &= \{(\bar{\partial}_r g)f + g(\bar{\partial}_l f)\}v, \end{aligned} \quad (4.1)$$

которое справедливо для любых дифференцируемых функций f и g . Взяв $g = 1$ и используя Утверждение 3, имеем:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Дифференцируемая функция f регулярна в q тогда и только тогда, когда

$$Dq \wedge df_q = 0.$$

Отсюда, вместе с теоремой Стокса, следует, что если f регулярна и непрерывно дифференцируема в области D с дифференцируемой границей, то

$$\int_{\partial D} Dqf = 0.$$

Как в комплексном анализе, однако, условия, накладываемые на f , могут быть ослаблены при использовании метода разбиений (dissection argument) Гурса. Применяя его к параллелепипеду, получим.

ЛЕММА 1. Если f регулярна в каждой точке 4-параллелепипеда C ,

$$\int_{\partial C} Dqf = 0. \quad (4.2)$$

Метод разбиений может также быть использован для доказательства интегральной формулы Коши-Фютера для параллелепипеда:

ЛЕММА 2. Если f регулярна в каждой точке положительно ориентированного 4-параллелепипеда C , и q_0 – точка внутри C , то

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q). \quad (4.3)$$

Доказательство. В (4.1) возьмем $g(q) = \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} = -\partial_r \left(\frac{1}{|q - q_0|^2} \right)$.

Тогда g дифференцируема всюду, исключая q_0 , и $\bar{\partial}_r g = 0$; отсюда, если f регулярна, то $d(gDqf) = 0$ всюду, исключая q_0 . Метод сечений теперь показывает, что в выше приведенном интеграле C может быть заменен на любой меньший 4-параллелепипед C' с $q_0 \in \text{int } C' \subset C$, и так как f непрерывна в q_0 , мы можем выбрать C' столь малым, что $f(q)$ может быть заменено на $f(q_0)$. Так как 3-форма gDq

замкнута и непрерывно дифференцируема в $\mathbb{H} - \{q_0\}$, мы можем заменить $\int_{\partial C} g Dq$ на интеграл по 3-сфере S с центром в q_0 , на которой

$$Dq = \frac{(q - q_0)}{|q - q_0|} dS,$$

где dS – обычный евклидовский элемент объема на 3-сфере. Следовательно

$$\int_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dq f(q) = \int_C \frac{dS}{|q - q_0|^3} = 2\pi^2 f(q_0). \quad \square$$

Мы будем использовать следующее специальное обозначение для функции, встречающейся в интегральной формуле:

$$G(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2}.$$

Эта функция действительно-аналитична всюду, кроме начала координат; поэтому в (4.3) подынтегральное выражение есть непрерывная функция (q, q_0) в $\partial C \times \text{int } C$ и, для каждого фиксированного $q \in \partial C$, действительно-аналитическая функция от q_0 в $\text{int } C$. Следовательно, ((12), стр. 7) этот интеграл есть действительно-аналитическая функция q_0 в $\text{int } C$. Поэтому мы имеем

ТЕОРЕМА 1. *Функция, регулярная на открытом множестве U , является действительно-аналитической в U .*

Это делает обоснованным применение теоремы Стокса и таким образом дает возможность получить теорему Коши для границы любой дифференцируемой 4-цепи. Все это может быть затем расширено на спрямляемые контуры, определенные ниже как:

Определение. Пусть $C : I^3 \rightarrow \mathbb{H}$ – непрерывное отображение единичного 3-куба в $\mathbb{H}$ и пусть $P : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_p = 1$, $Q : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_q = 1$ и

$$R : 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_r = 1$$

являются тремя разбиениями единичного интервала I . Определим

$$\begin{aligned} \sigma(C; P, Q, R) = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{r-1} Dq(C(s_{l+1}, t_m, u_n) - C(s_l, t_m, u_n), \\ C(s_l, t_{m+1}, u_n) - C(s_l, t_m, u_n), \\ C(s_l, t_m, u_{n+1}) - C(s_l, t_m, u_n)). \end{aligned}$$

C является *спрямляемой 3-ячейкой*, если существует действительное число M , такое что $\sigma(C; P, Q, R) < M$ для всех частей P, Q, R . В этом случае наименьшая верхняя грань чисел $\sigma(C; P, Q, R)$ называется *протяженностью C* и обозначается как $\sigma(C)$.

Пусть f и g – кватернионнозначные функции, определенные на $C(I^3)$. Будем говорить, что $f Dq g$ *интегрируема* над C , если сумма

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{r-1} f(C(\bar{s}_l, \bar{t}_m, \bar{u}_n)) Dq(C(s_{l+1}, t_m, u_n) - C(s_l, t_m, u_n), \\ C(s_l, t_{m+1}, u_n) - C(s_l, t_m, u_n), \\ C(s_l, t_m, u_{n+1}) - C(s_l, t_m, u_n)) g(C(\bar{s}, \bar{t}_m, \bar{u}_n)), \end{aligned}$$

где $s_l \leq \bar{s}_l \leq s_{l+1}$, $t_m \leq \bar{t}_m \leq t_{m+1}$ и $u_n \leq \bar{u}_n \leq u_{n+1}$, имеет предел в смысле интегрирования по Риману-Стилтьесу как $|P|, |Q|, |R| \rightarrow 0$, где

$$|P| = \max_{0 \leq l \leq p-1} |s_{l+1} - s_l|$$

является мерой грубости разбиения P . Если этот предел существует, обозначим его как $\int_C f Dqg$.

Мы расширим эти определения, чтобы определить спрямляемые 3-цепи и интегралы на спрямляемых 3-цепях обычным способом.

Точно так же, как для спрямляемых кривых, мы можем показать, что $f Dqg$ интегрируема над 3-цепью C , если f и g непрерывны и C спрямляема, и

$$\left| \int_C f Dqg \right| \leq (\max_C |f|)(\max_C |g|)\sigma(C).$$

Кроме того, мы имеем следующую слабую форму теоремы Стокса:

ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ СПРЯМЛЯЕМОГО КОНТУРА. Пусть C – спрямляемая 3-цепь в $\mathbb{H}$ с $\partial C = 0$, и предположим, что f и g – непрерывные функции, определенные в окрестности U образа C , и что $f Dqg = d\omega$, где ω есть 2-форма U . Тогда

$$\int_C f Dqg = 0.$$

Доказательство происходит с помощью аппроксимации C цепью 3-параллелепипедов с вершинами в точках $C_a(s_l, t_m, u_n)$, где C_a – 3-ячейка в C и (s_l, t_m, u_n) – точки разбиения в I . Теорема Стокса справедлива для этой цепи 3-параллелепипедов и мы можем использовать такое же рассуждение для спрямляемых кривых (смотри, например, (13), стр. 103).

Теперь мы можем дать наиболее общие формы теоремы Коши и интегральной формулы.

ТЕОРЕМА 2. (Теорема Коши для спрямляемого контура). Предположим, что f регулярна на открытом множестве U , и пусть C будет спрямляемой 3-цепью, которая гомологична 0 в сингулярной гомологии U . Тогда

$$\int_C Dqf = 0.$$

Доказательство. Сначала мы докажем теорему в случае, когда U – стягиваемая. В этом случае, так как $d(Dqf) = 0$ и f – непрерывно дифференцируема (по Теореме 1), применима лемма Пуанкаре и мы имеем $Dqf = d\omega$ для некоторой 2-формы ω на D . Но $\partial C = 0$, поэтому по теореме Стокса $\int_C Dqf = 0$.

В общем случае, предполагаем $C = \partial C^*$, где C^* – 4-цепь в U . Мы можем разбить C^* на

$$C^* = \sum_n C_n^*,$$

где каждая C_n^* – 4-ячейка, лежащая внутри открытого шара, содержащегося в U , причем C_n^* – спрямляема. Отсюда, по первой части теоремы $\int_{\partial C_n^*} Dqf = 0$, и поэтому

$$\int_C Dqf = \sum_n \int_{\partial C_n^*} Dqf = 0. \quad \square$$

Для общей формы интегральной формулы нам нужен аналог понятия числа оборотов кривой вокруг точки на плоскости. Пусть q – любой кватернион и пусть C – 3-цикл в $\mathbb{H} - \{q\}$. Тогда C – гомологичен $n\partial C_0$, где C_0 – положительно ориентированный 4-параллелепипед в $\mathbb{H} - \{q\}$ и n – целое (независимо от выбора C_0), которое мы назовем *числом оборотов C вокруг q* .

ТЕОРЕМА 3 (Интегральная формула для спрямляемого контура).

Предположим, что f – регулярная функция на открытом множестве U . Пусть q_0 – точка в U , и пусть C – спрямляемая 3-цепь, которая гомологична, в сингулярной гомологии $U - \{q_0\}$, дифференцируемой 3-цепи, образ которой есть ∂B для некоторого шара $B \subset U$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_C \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dq f(q) = n f(q_0)$$

где n – число оборотов C вокруг q_0 .

Многие стандартные теоремы комплексного анализа зависят только от интегральной формулы Коши и поэтому они также справедливы для кватернионных регулярных функций. Наглядными примерами являются теорема о максимуме модуля (смотри, например, (14), стр. 165 (первое доказательство)) и теорема Лиувилля ((14), стр. 85 (второе доказательство)). Теорема Морера также справедлива для кватернионных функций, но в этом случае обычное доказательство не может быть легко адаптировано. Она может быть доказана (8) при помощи метода разбиений (dissection argument), показывающего, что если f непрерывна на открытом множестве U и удовлетворяет

$$\int_{\partial C} Dq f = 0$$

для любого 4-параллелепипеда C , содержащегося в U , то f удовлетворяет интегральной формуле; и далее рассуждая, как при доказательстве аналитичности регулярной функции.

5. Построение регулярных функций

Регулярные функции могут быть созданы из гармонических функций двумя способами. Первый: если f – гармоническая, то (2.35) показывает, что $\partial_i f$ – регулярная. Второй: любая действительно-значная гармоническая функция является, по крайней мере локально, действительной частью регулярной функции:

ТЕОРЕМА 4. Пусть u – действительно-значная функция, определенная на звездном открытом множестве $U \subseteq \mathbb{H}$. Если u – гармоническая и имеет непрерывные вторые производные, то существует регулярная функция f , определенная на U , такая что $\operatorname{Re} f = u$.

Доказательство. Не ограничивая общности можем принять, что U содержит начало координат и является звездным относительно него. В этом случае покажем, что функция

$$f(q) = u(q) + 2Pu \int_0^1 s^2 \partial_i u(sq) q ds \quad (5.1)$$

регулярна в U .

Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q ds &= \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \left\{ t \frac{\partial u}{\partial t}(sq) + x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(sq) \right\} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \frac{d}{ds} [u(sq)] ds \\ &= \frac{1}{2} u(q) - \int_0^1 su(sq) ds, \end{aligned}$$

мы можем записать

$$f(q) = 2 \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q ds + 2 \int_0^1 su(sq) ds. \quad (5.2)$$

Так как u и $\partial_l u$ имеют непрерывные частные производные в U , можно ввести дифференцирование под знак интеграла, чтобы получить для $q \in U$,

$$\bar{\partial}_l f(q) = 2 \int_0^1 s^2 \bar{\partial}_l [\partial_l u(sq)] q ds + \int_0^1 s^2 \{ \partial_l u(sq) + e_i \partial_l u(sq) e_i \} ds + 2 \int_0^1 s^2 \bar{\partial}_l u(sq) ds.$$

Но $\bar{\partial}_l [\partial_l u(sq)] = \frac{1}{4} s \Delta u(sq) = 0$, так как u – гармоническая в U , и

$$\begin{aligned} \partial_l u(sq) + e_i \partial_l u(sq) e_i &= -2 \overline{\partial_l u(sq)} \\ &= -2 \bar{\partial}_l u(sq) \end{aligned}$$

так как u – действительная. Отсюда $\bar{\partial}_l f = 0$ в U и следовательно f – регулярная. $\square$

Если область U является звездной, относительно не начала координат, а какой-то другой точки a , формулы (5.1) и (5.2) должны быть применены для измененного начала координат так:

$$f(q) = u(q) + 2Pu \int_0^1 s^2 \partial_l u((1-s)a + sq)(q-a) ds \quad (5.3)$$

$$= 2 \int_0^1 s^2 \partial_l u((1-s)a + sq)(q-a) ds + 2 \int_0^1 su((1-s)a + sq) ds. \quad (5.4)$$

Пример, который, как можно надеяться, будет важным в случае функции

$$u(q) = |q|^{-2}.$$

Это элементарная потенциальная функция в четырех измерениях, подобно $\log |z|$ на комплексной плоскости, и таким образом, регулярная функция, действительная часть которой равна $|q|^{-2}$, является аналогом логарифма комплексной переменной.

Возьмем в качестве U всю $\mathbb{H}$, исключая начало координат и отрицательную часть вещественной оси. Тогда U является звездной по отношению к 1, и $|q|^{-1}$ – гармоническая в U . Положим

$$u(q) = \frac{1}{|q|^2}, \quad \partial_l u(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2}, \quad a = 1;$$

тогда (5.3) дает

$$\left. \begin{aligned} f(q) &= -(qPuq)^{-1} - \frac{1}{|Puq|^2} \arg q \quad \text{если } Puq \neq 0 \\ &= \frac{1}{|q|^2} \quad \text{если } q \text{ действительная и положительная,} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где

$$\arg q = \log(Un q) = \frac{Pu q}{|Pu q|} \tan^{-1} \left(\frac{|Pu q|}{Re q} \right), \quad (5.6)$$

который равен i , умноженному на обычный аргумент на комплексной плоскости, порожденный q . (На практике формулы (5.3) и (5.4) не особенно удобны для использования и проще получить (5.5), решая уравнения

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{2t}{(t^2 + r^2)^2}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{F} = \frac{2\mathbf{r}}{(t^2 + r^2)^2},$$

где $t = Re q$, $\mathbf{r} = Pu q$ и $r = |\mathbf{r}|$ — здесь выражают тот факт, что $\mathbf{F} : \mathbb{H} \rightarrow P$ чисто кватернионная часть регулярной функции, чья реальная часть равна $|q|^{-2}$, и допуская, что $\mathbf{F}$ имеет форму $F(r)\mathbf{r}$.)

Обозначим функцию (5.5) через $-2L(q)$. Производная от $L(q)$ может быть наиболее просто подсчитана при записи ее в форме

$$L(q) = -\frac{r^2 + te_i x_i}{2r^2(r^2 + t^2)} + \frac{e_i x_i}{2r^3} \tan^{-1} \left(\frac{r}{t} \right); \quad (5.7)$$

в результате получается

$$\partial_i L(q) = G(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2}. \quad (5.8)$$

Тогда $L(q)$ есть первообразная для функции, содержащейся в интегральной формуле Коши-Фютера, точно так же, как комплексный логарифм является первообразной для z^{-1} , — функции, содержащейся в интегральной формуле Коши.

Теорема 4 показывает, что регулярных функций кватернионной переменной существует столько же, сколько существует гармонических функций 4-х действительных переменных. Однако, эти функции не включают простые алгебраические функции, такие как степени переменных, которые оказываются аналитическими функциями в случае комплексной переменной. Фютер (4) также нашел метод создания регулярной функции кватернионной переменной из аналитической функции комплексной переменной.

Пусть для каждого $q \in \mathbb{H}$ $\eta_q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ является вложением комплексных чисел в кватернионы, таким, что q есть изображение комплексного числа $\zeta(q)$ лежащего в верхней полуплоскости; то есть

$$\eta_q(x + iy) = x + \frac{Pu q}{|Pu q|} y, \quad (5.9)$$

$$\zeta(q) = Re q + i|Pu q|. \quad (5.10)$$

Тогда имеем

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ аналитическая в открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}$ и определим $\tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ посредством*

$$\tilde{f}(q) = \eta_q \circ f \circ \zeta(q). \quad (5.11)$$

Тогда $\Delta \tilde{f}$ регулярна на открытом множестве $\zeta^{-1}(U) \subseteq \mathbb{H}$ и ее производная равна

$$\partial_i(\Delta \tilde{f}) = \Delta \tilde{f}', \quad (5.12)$$

где f' – производная комплексной функции f .

Для доказательства рассмотрим (7). Заметим, что если записать $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $t = \operatorname{Re} q$ и $r = \operatorname{Pu} q$, то

$$\tilde{f}(q) = u(t, r) + \frac{\operatorname{Pu} q}{r} v(t, r), \quad (5.13)$$

$$\Delta \tilde{f}(q) = \frac{2u_2(t, r)}{r} + \frac{2\operatorname{Pu} q}{r} \left\{ \frac{u_2(t, r)}{r} - \frac{u(t, r)}{r^2} \right\}, \quad (5.14)$$

где нижний индекс 2 означает дифференцирование по второму аргументу.

Функции формы $\tilde{f}$ были взяты как базис в альтернативной теории функций кватернионной переменной Куллена (15). Представляют интерес следующие примеры: когда

$$f(z) = z^{-1}, \quad \Delta \tilde{f}(q) = -4G(q); \quad (5.15)$$

когда

$$f(z) = \log z, \quad \Delta \tilde{f}(q) = -4L(q); \quad (5.16)$$

Взяв регулярную функцию f , можно сконструировать из нее остальные регулярные функции составлением и применением к ней конформных преобразований. В особенно полезны частные случаи инверсии и вращения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. (i) Дана функция $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, пусть $If : \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow \mathbb{H}$ – функция

$$If(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2} f(q^{-1}). \quad (5.17)$$

Если f регулярна в q^{-1} , то If – регулярна в q .

(ii) Дана функция $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ и постоянные кватернионы a, b , пусть $M(a, b)f$ – функция

$$[M(a, b)f](q) = bf(a^{-1}qb). \quad (5.18)$$

Если f регулярна в $a^{-1}qb$, то $M(a, b)f$ – регулярна в q .

Доказательство. (i) Согласно утверждению 4, достаточно показать, что

$$Dq \wedge d(If)_q = 0.$$

Теперь $If = G(f \circ i)$, где $G(q) = q^{-1}/|q|^2$ и $i : \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow \mathbb{H}$ есть инверсия $q \mapsto q^{-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned} Dq \wedge d(If)_q &= Dq \wedge dG_q f(q^{-1}) + Dq \wedge G(q) d(f \circ i)_q \\ &= Dq G(q) \wedge i_q^* df_{q^{-1}} \end{aligned}$$

так как G – регулярна в $q \neq 0$. Но

$$\begin{aligned} i_q^* Dq(h_1, h_2, h_3) &= Dq(-q^{-1}h_1q^{-1}, -q^{-1}h_2q^{-1}, -q^{-1}h_3q^{-1}) \\ &= -\frac{q^{-1}}{|q|^4} Dq(h_1, h_2, h_3)q^{-1} \end{aligned}$$

согласно (2.31). Тогда

$$Dq G(q) = -|q|^2 q i_q^* Dq$$

и таким образом

$$Dq \wedge d(If)_q = i_q^*(Dq \wedge df_{q^{-1}}) = 0$$

если f регулярна в q^{-1} .

(ii) Пусть $\mu : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ является отображением $q \mapsto aqb$. Тогда согласно (2.31)

$$\mu^* Dq = |a|^2 |b|^2 a Dqb$$

и таким образом

$$\begin{aligned} Dq \wedge d[M(a, b)f]_q &= Dq \wedge b\mu_q^* df_{\mu(q)} \\ &= |a|^{-2} |b|^{-2} a^{-1} (\mu_q^* Dq) b^{-1} \wedge b\mu_q^* df_{\mu(q)} \\ &= |a|^{-2} |b|^{-2} a^{-1} \mu_q^* (Dq \wedge df_{\mu(q)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

если f регулярна в $\mu(q)$. Из Утверждения 4 следует, что $M(a, b)f$ регулярна в q . $\square$

Общее конформное преобразование одноточечного компактного расширения (one-point compactification) $\mathbb{H}$ имеет форму

$$\nu(q) = (aq + b)(cq + d)^{-1} \quad (5.19)$$

где $a^{-1}b \neq c^{-1}d$. Такое преобразование ((16), стр. 312) является результатом последовательных преобразований вида, рассмотренного в Утверждении 5, совместно с преобразованиями $q \mapsto q + a$ (которое с очевидностью сохраняет регулярность). Соответствующее преобразование регулярных функций следует из:

ТЕОРЕМА 6. *Задана функция $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ и конформное преобразование ν как в (5.19), и пусть $M(\nu)f$ – функция*

$$[M(\nu)f](q) = \frac{1}{|b - ac^{-1}d|^2} \frac{(cq + d)^{-1}}{|cq + d|^2} f(\nu(q)).$$

Если f регулярна в $\nu(q)$, то $M(\nu)f$ регулярна в q .

6. Однородные регулярные функции

В этом разделе мы будем изучать взаимосвязь между регулярными полиномами, гармоническими полиномами и гармоническим анализом на группе S единичных кватернионов, который для кватернионного анализа является тем же, что Фурье анализ для комплексного анализа.

Базисные Фурье функции $e^{in\theta}$ и $e^{-in\theta}$ рассматриваются как функции на единичной окружности комплексной плоскости, каждая из них имеет два расширения к гармоническим функциям на $\mathbb{C} - \{0\}$; таким образом мы имеем четыре функции $z^n, \bar{z}^n, z^{-n}$ и $\bar{z}^{-n}$. Требование аналитичности отбирает половину из них, а именно z^n и z^{-n} . Таким же образом, все базисные гармонические функции на S , а именно матричные элементы матрицы унитарных неприводимых представлений S , имеют два расширения к гармоническим функциям на $\mathbb{H} - \{0\}$, одно с отрицательной степенью однородности и одно с положительной степенью. Мы увидим, что функциональное пространство, принадлежащее к частному унитарному представлению, соответствующему пространству комбинаций $e^{in\theta}$ и $e^{-in\theta}$ для частного значения n , может быть разложено на два взаимно дополнительных подпространства; одно (подобно $e^{in\theta}$) дает регулярную функцию на $\mathbb{H} - \{0\}$ когда умножается на положительную степень $|q|$, другое (подобно $e^{-in\theta}$) должно быть умножено на отрицательную степень $|q|$.

Пусть U_n – множество функций $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} - \{0\}$, которые регулярны и однородны степени n на $\mathbb{R}$, т. е.

$$f(\alpha q) = \alpha^n f(q) \quad \text{для } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Перенос начала координат из области f дает возможность рассмотреть оба случая: положительного и отрицательного n (альтернативная процедура добавления точки на бесконечности к $\mathbb{H}$ наталкивается на трудности, поскольку регулярные полиномы не обязательно допускают непрерывное расширение к $\mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^4$). Пусть W_n – множество функций $f : \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow \mathbb{H}$ которые гармоничны и однородны степени n на $\mathbb{R}$. Тогда U_n и W_n являются правыми векторными пространствами над $\mathbb{H}$ (с поточечным сложением и скалярным умножением) и, так как каждая регулярная функция является гармонической, мы имеем $U_n \subseteq W_n$.

Функции в U_n и W_n могут быть изучены посредством их ограничения на единичную сферу $S = \{q : |q| = 1\}$. Пусть

$$\tilde{U}_n = \{f|_S : f \in U_n\}, \quad \tilde{W}_n = \{f|_S : f \in W_n\};$$

где U_n и $\tilde{U}_n$ – изоморфны (как кватернионные векторные пространства) в силу соответствия

$$f \in U_n \Leftrightarrow \tilde{f} \in \tilde{U}_n, \quad \text{где } f(q) = r^n \tilde{f}(u), \quad (6.1)$$

используя обозначение $r = |q| \in \mathbb{R}$, $u = q/|q| \in S$.

Аналогично, изоморфны W_n и $\tilde{W}_n$.

Чтобы выразить уравнения Коши-Римана-Фютера в форме, подходящей для полярного разложения $q = ru$, введем следующие векторные поля $X_0, \dots, X_3$ на $\mathbb{H} - \{0\}$:

$$X_0 f = \frac{d}{d\theta} [f(qe^\theta)]_{\theta=0}, \quad (6.2)$$

$$X_i f = \frac{d}{d\theta} f[q \exp(e_i \theta)]_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} f[q(\cos \theta + e_i \sin \theta)]_{\theta=0} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.3)$$

Эти поля формируют базис для действительного векторного пространства левоинвариантных векторных полей на мультипликативной группе в $\mathbb{H}$, и они относятся к декартовым векторным полям $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x_i$ как

$$X_0 = t \frac{\partial}{\partial t} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (6.4)$$

$$X_i = -x_i \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{r^2} (t X_0 - x_i X_i), \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{r^2} (\epsilon_{ijk} x_j X_k + t X_i + x_i X_0). \quad (6.7)$$

Их скобки Ли равны

$$[X_0, X_i] = 0, \quad (6.8)$$

$$[X_i, X_j] = 2\epsilon_{ijk} X_k. \quad (6.9)$$

Используя (6.6) и (6.7), дифференциальные операторы $\bar{\partial}_l$ и Δ могут быть вычислены в терминах X_0 и X_i . Результат равен

$$\bar{\partial}_l = \frac{1}{2} \bar{q}^{-1} (X_0 + e_i X_i), \quad (6.10)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \{X_i X_i + X_0(X_0 + 2)\}. \quad (6.11)$$

Следующие факты относительно пространства гармонических функций W_n хорошо известны (и следуют из (6.11); смотри например (17), стр. 71):

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. (i) $\tilde{W}_n \cong \tilde{W}_{-n-2}$. (ii) $\dim W_n = (n+1)^2$. (iii) Элементы W_n являются полиномами в q .

Мы можем теперь установить основные факты относительно пространства U_n регулярных функций:

ТЕОРЕМА 7. (i) $\tilde{W}_n = \tilde{U}_n \oplus \tilde{U}_{-n-2}$. (ii) $U_n \cong U_{-n-3}$. (iii) $\dim U_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Доказательство. (i) Уравнение (6.10) показывает, что элементы U_n , которые удовлетворяют $X_0 f = n f$ и $\tilde{\partial}_i f = 0$, являются собственными функциями $\Omega = e_i X_i$ с собственными значениями $-n$. Так как векторные поля X_i являются касательными к сфере S , Ω может рассматриваться как оператор на $\tilde{W}_n$, и $\tilde{U}_n$ состоит из собственных функций из Ω с собственным значением $-n$. Используя (6.9), можно показать, что

$$\Omega^2 - 2\Omega + X_i X_i = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{f} \in \tilde{W}_n &\Rightarrow \Delta(r^n f) = 0 \\ &\Rightarrow X_i X_i f = -n(n+2)f \\ &\Rightarrow (\Omega - n - 2)(\Omega + n)f = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{W}_n$ является прямой суммой собственных пространств из $\tilde{\Omega}$ с собственными значениями $-n$ и $n+2$ (они являются векторными подпространствами $\tilde{W}_n$, так как собственные значения действительны), т. е.

$$\tilde{W}_n = \tilde{U}_n \oplus \tilde{U}_{-n-2}.$$

(ii) Из утверждения 5 (i) следует, что отображение I является изоморфизмом между U_n и U_{-n-3} .

(iii) Пусть $d_n = \dim U_n$. Согласно (i) и Утверждению 6 (ii)

$$d_n + d_{-n-2} = (n+1)^2$$

и по (ii),

$$d_{-n-2} = d_{n-1}.$$

Тогда

$$d_n + d_{n-1} = (n+1)^2.$$

Решение этого рекурсивного отношения с $d_0 = 1$, есть

$$d_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \quad \square$$

Существует связь между Утверждением 5 (ii) и тем фактом, что однородные регулярные функции являются собственными функциями Ω . Утверждение 5 (ii) относится к представлению M группы $\mathbb{H}^\times \times \mathbb{H}^\times$, определенной на пространстве действительно-дифференцируемых функций $f : \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow \mathbb{H}$ посредством

$$[M(a, b)f](q) = bf(a^{-1}qb).$$

Ограничиваясь подгруппой $\{(a, b) : |a| = |b| = 1\}$, которая изоморфна к

$$SU(2) \times SU(2),$$

мы получаем представление $SU(2) \times SU(2)$. Так как отображение $q \mapsto aqb$ является вращением при $|a| = |b| = 1$, множество W гармонических функций есть инвариантное подпространство в этом представлении. Теперь $W = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} W^C$, где W^C – множество комплекснозначных гармонических функций, и представление $SU(2) \times SU(2)$ может быть записано как

$$M(a, b)(q \otimes f) = (bq) \otimes R(a, b)f$$

где R обозначает квазирегулярное представление, соответствующее действию $q \mapsto aqb^{-1}$ из $SU(2) \times SU(2)$ на $\mathbb{H} - \{0\}$:

$$[R(a, b)f]q = f(a^{-1}qb).$$

Поэтому $M|W$ есть тензорное произведение представлений $D^0 \times D^1$ и $R|W^C$ из $SU(2) \times SU(2)$, где D^n обозначает $(n+1)$ -мерное комплексное представление $SU(2)$. Изотипичные компоненты $R|W^C$ являются однородными подпространствами W_n^C , на которых R действует неприводимо как $D^n \times D^n$. Таким образом, W_n является инвариантным подпространством в представлении M , и $M|W_n$ есть тензорное произведение $(D^0 \times D^1) \otimes (D^n \times D^n)$. W_n следовательно имеет два инвариантных подпространства, на которых M действует как неприводимое представление $D^n \times D^{n+1}$ и $D^n \times D^{n-1}$. Эти подпространства являются собственными пространствами Ω . Чтобы увидеть это, сосредоточим внимание на втором факторе в $SU(2) \times SU(2)$; мы имеем представление

$$M'(b)(q \otimes f) = M(1, b)(q \otimes f) = [D^1(b)q] \otimes [R(1, b)f],$$

где $D^1(b)q = bq$. Бесконечномалые генераторы представления $R(1, b)$ равны дифференциальным операторам X_i ; бесконечномалые генераторы $D^1(b)$ равны e_i (под ними мы подразумеваем левое умножение на e_i). Поэтому бесконечномалые операторы тензорного произведения M' равны $e_i + X_i$. Изотипичные компоненты W являются собственными пространствами оператора Казимира

$$(e_i + X_i)(e_i + X_i) = e_i e_i + X_i X_i + 2\Omega.$$

Но $e_i e_i = -3$, и $X_i X_i = -n(n+2)$ на W_n ; следовательно

$$(e_i + X_i)(e_i + X_i) = 2\Omega - n^2 - 2n - 3.$$

и таким образом, изотипичные компоненты W_n для представления M' являются собственными пространствами Ω . U_n , пространство однородных регулярных функций степени n , имеет собственное значение $-n$ для Ω , так что $M'|U_n$ есть представление D^{n+1} для $SU(2)$.

Аналогичное рассмотрение приводит к следующему факту:

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Если f регулярна, то qf – гармонична.

Представление M $SU(2) \times SU(2)$ может также быть использовано для нахождения базиса регулярных полиномов. Оно принадлежит к классу индуцированных представлений, изучавшихся в (18), где процедура дана для разбиения представления на неприводимые компоненты и нахождения базиса для каждой компоненты.

Вместо того, чтобы дать строгий эвристический вывод, следуя этой процедуре, которая мало что в этом случае разъясняет, мы установим результат и затем проверим, что он является базисом.

Так как рассматриваемые функции содержат множество факториалов, мы введем обозначение

$$z^{[n]} = \begin{cases} \frac{z^n}{n!} & \text{если } n \geq 0 \\ 0 & \text{если } n < 0 \end{cases}$$

для комплексной переменной z . Это обозначение позволяет ввести удобную формулу

$$\frac{d}{dz} z^{[n]} = z^{[n-1]}, \quad (6.12)$$

$$(z_1 + z_2)^{[n]} = \sum_r z_1^{[r]} z_2^{[n-r]} \quad (6.13)$$

где сумма производится по всем целым r .

Представление D^n из $S \cong SU(2)$ действует на пространстве однородных полиномов степени n от двух комплексных переменных посредством

$$[D^n(u)f](z_1, z_2) = f(z'_1, z'_2),$$

где

$$z'_1 + jz'_2 = u^{-1}(z_1 + jz_2).$$

Записав $u = v + jw$, где $v, w \in \mathbb{C}$ и $|v|^2 + |w|^2 = 1$, мы имеем

$$z'_1 = \bar{v}z_1 + \bar{w}z_2, \quad z'_2 = -wz_1 + vz_2.$$

Отсюда матричные элементы $D^n(u)$, соответствующие базису $f_k(z_1, z_2) = z_1^{[k]} z_2^{[n-k]}$ равны

$$D^n_{kl}(u) = (-)^n k!(n-k)! P^n_{kl}(u),$$

где

$$P^n_{kl}(v + jw) = \sum_r (-)^r v^{[n-k-l+r]} \bar{v}^{[r]} w^{[k-r]} \bar{w}^{[l-r]}. \quad (6.14)$$

Функции $P^n_{kl}(q)$ определены для всех кватернионов $q = v + jw$ и для всех целых k, l, n , но они равны нулю при $0 \leq k, l \leq n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. В качестве правого векторного пространства над $\mathbb{H}$, U_n имеет базис

$$Q^n_{kl}(q) = P^n_{kl}(q) - jP^n_{k-1,l}(q) \quad (0 \leq k, l \leq n).$$

Доказательство. Используя (6.14), легко проверить, что Q^n_{kl} удовлетворяет уравнениям Коши-Римана-Фютера в форме (3.11)

$$\frac{\partial P^n_{kl}}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial P^n_{k-1,l}}{\partial \bar{w}}, \quad \frac{\partial P^n_{kl}}{\partial w} = \frac{\partial P^n_{k-1,l}}{\partial v}.$$

Так как функции D^n_{kl} независимы над $\mathbb{C}$ как функции на S для $0 \leq k, l \leq n$, функции P^n_{kl} – независимы над $\mathbb{C}$ как функции на $\mathbb{H}$ для $0 \leq k, l \leq n$. Следовательно, функции Q^n_{kl} ($0 \leq k \leq n+1$, $0 \leq l \leq n$) независимы над $\mathbb{C}$ и поэтому покрывают правое векторное пространство над $\mathbb{H}$ размерности как минимум $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Так как это пространство есть подпространство U_n , которое имеет размерность $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, Q^n_{kl} покрывает U_n .

Так как $zj = j\bar{z}$ для любого $z \in \mathbb{C}$, из определения (6.14) следует, что

$$P_{kl}^n j = j P_{n-k, n-l}^n$$

и следовательно

$$Q_{kl}^n j = Q_{n-k+1, n-l}^n.$$

Тогда U_n охватывается Q_{kl}^n ($0 \leq k \leq l \leq n$), которые следовательно формируют базис для U_n . $\square$

Другой базис для U_n будет дан в следующем разделе.

Мы завершаем этот раздел изучением кватернионной производной ∂_l . Так как ∂_l есть линейное отображение из U_n в U_{n-1} и $\dim U_n > \dim U_{n-1}$, ∂_l должно иметь большое ядро и поэтому мы не можем сделать вывод из $\partial_l f = 0$, что f – константа. Однако, хотя результат отнюдь не однозначен, возможно проинтегрировать регулярные полиномы:

ТЕОРЕМА 8. *Каждый регулярный полином имеет первообразную, то есть ∂_l отображает U_n на U_{n-1} при $n > 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f \in U_n$ – такая, что $\partial_l f = 0$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Таким образом, f может быть рассмотрена как функция на пространстве P чисто мнимых кватернионов. Используя векторные обозначения для элементов из P и записывая $f = f_0 + \mathbf{f}$ с $f_0 \in \mathbb{R}$, $f \in P$, условие $e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ превращается в

$$\nabla f_0 + \nabla \times \mathbf{f} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{f} = 0.$$

Если $n \geq 0$, можно определить $f(0)$ так, что эти условия будут справедливы на всем P , и поэтому существует функция $\mathbf{F} : P \rightarrow P$ такая, что

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{F}, \quad f_0 = -\nabla \cdot \mathbf{F},$$

то есть

$$f = e_i \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}.$$

Тогда $\mathbf{F}$ – гармоническая, т. е. $\nabla^2 \mathbf{F} = 0$.

Пусть T_n – правое кватернионное векторное пространство функций $\mathbf{F} : P \rightarrow \mathbb{H}$, однородных степени n и удовлетворяющих $\nabla^2 \mathbf{F} = 0$; тогда $\dim T_n = 2n + 1$. Пусть K_n – подпространство T_n , состоящее из функций, удовлетворяющих $e_i \partial \mathbf{F} / \partial x_i = 0$; тогда $K_n = \ker \partial_l \subset U_n$. Выше показано, что $e_i \partial / \partial x_i : T_{n+1} \rightarrow T_n$ отображает T_{n+1} в K_n ; его ядро есть K_{n+1} и таким образом,

$$\dim K_n + \dim K_{n+1} = \dim T_{n+1} = 2n + 3.$$

Решение этого рекурсивного соотношения, с $\dim K_0 = 1$, есть $\dim K_n = n + 1$. Но

$$\dim U_n - \dim U_{n-1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = n + 1.$$

Из этого следует, что ∂_l отображает U_n в U_{n-1} . $\square$

ТЕОРЕМА 9. *Если $n < 0$, отображение $\partial_l : U_n \rightarrow U_{n-1}$ является взаимно однозначным.*

Доказательство. Введем следующее скалярное произведение между функциями, определенными на единичной сфере S :

$$\langle f, g \rangle = \int_S \overline{f(u)} g(u) du$$

где du обозначает меру Хаара на группе S , нормированную так, что

$$\int_S du = \frac{1}{2} \pi^2.$$

Для функций, определенных на $\mathbb{H}$, можно записать его в виде

$$\langle f, g \rangle = \int_S \overline{f(q)} q^{-1} Dq g(q).$$

Как отображение, $U_n \times U_n \rightarrow \mathbb{H}$, оно антилинейно по первой переменной и линейно по второй, то есть

$$\langle fa, gb \rangle = \bar{a} \langle f, g \rangle b \quad \text{для всех } a, b \in \mathbb{H}$$

и является невырожденным, поскольку $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Теперь пусть $f \in U_n, g \in U_{-n-2}$ и пусть I обозначает отображение $U_n \rightarrow U_{-n-3}$, определенное в Утверждении 5 (i). Тогда

$$\begin{aligned} \langle g, I \partial_l f \rangle &= \int_S \overline{g(q)} q^{-1} Dq g^{-1} \partial_l f(q^{-1}) \\ &= - \int_S \overline{g(q)} i^* (Dq \partial_l f), \end{aligned}$$

где i обозначает отображение $q \mapsto q^{-1}$, и мы использовали тот факт, что $i^* Dq = -q^{-1} Dq q^{-1}$ для $q \in S$. Так как f регулярна, $Dq \partial_l f = \frac{1}{2} d(dq \wedge dqf)$ и таким образом

$$\begin{aligned} \langle g, I \partial_l f \rangle &= -\frac{1}{2} \int_S \overline{g(q)} d[i^*(dq \wedge dqf)] \\ &= \frac{1}{2} \int_S \overline{dg} \wedge i^*(dq \wedge dqf), \quad \text{так как } \partial S = 0. \end{aligned}$$

На S инверсия i совпадает с объединением кватернионов; отсюда $i^* dq = d\bar{q}$ и поэтому

$$\begin{aligned} \langle g, I \partial_l f \rangle &= \frac{1}{2} \int_S \overline{g(q)} \wedge d\bar{q} \wedge d\bar{q} f(q^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \int_S \overline{dg} \wedge d\bar{q} \wedge d\bar{q} f(q^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \int_S \overline{Dq} \wedge \partial_l \overline{g(q)} f(q^{-1}) \end{aligned}$$

так как g – регулярная функция. Так как сопряжение есть ортогональное преобразование с детерминантом -1 , $Dq(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3) = -\overline{Dq(h_1, h_2, h_3)}$; следовательно, поскольку сопряжение – это то же самое, что инверсия на S ,

$$\overline{Dq} = -i^* Dq = q^{-1} Dq q^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle g, I \partial_l f \rangle &= \int_S \overline{\partial_l g(q)} q^{-1} Dq g^{-1} f(q^{-1}) \\ &= \langle \partial_l g, I f \rangle. \end{aligned}$$

Но I является изоморфизмом, а скалярное произведение невырождено на U_{-n-2} , и ∂_l отображает U_{-n-2} в U_{-n-3} если $n \leq 3$; отсюда следует, что $\partial_l : U_n \rightarrow U_{n-1}$ взаимно однозначно. $\square$

В пропущенных случаях $n = -1$ и $n = -2$, обе теоремы 8 и 9 справедливы тривиально, так как $U_{-1} = U_{-2} = \{0\}$.

7. Регулярные степенные ряды

Степенные ряды, представляющие регулярную функцию, и ряды Лорана, представляющие функцию с изолированной особенностью, наиболее естественно выражаются в терминах некоторых специальных однородных функций.

Пусть ν – неупорядоченное множество n целых $\{i_1, \dots, i_n\}$ с $1 \leq i \leq 3$; ν может также быть задано посредством трех целых n_1, n_2, n_3 с $n_1 + n_2 + n_3 = n$, где n_1 – количество первого в ν , n_2 – количество второго и n_3 – третьего, и мы будем писать $\nu = [n_1 n_2 n_3]$. Существуют $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ таких множеств ν ; обозначим множество всех их как σ_n . Они могут быть использованы как метки; когда $n = 0$, так что $\nu = \emptyset$, мы будем использовать нижний индекс 0 вместо $\emptyset$. Запишем ∂_ν для n -го порядка дифференциального оператора

$$\partial_\nu = \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial^n}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3}}.$$

Исследуемые функции есть

$$G_\nu(q) = \partial_\nu G(q) \quad (7.1)$$

и

$$P_\nu(q) = \frac{1}{n!} \sum (te_{i_1} - x_{i_1}) \dots (te_{i_n} - x_{i_n}), \quad (7.2)$$

где сумма берется по всем $n!/(n_1!n_2!n_3!)$ различных порядков n_1 – первого, n_2 – второго и n_3 – третьего. Тогда P_ν является однородной степени n и G_ν – однородна степени $-n - 3$.

Как в предыдущем разделе, U_n будет обозначать правое кватернионное векторное пространство однородных регулярных функций степени n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Полиномы P_ν ($\nu \in \sigma_n$) являются регулярными и формируют базис для U_n .*

Доказательство. (17) Пусть f – регулярный однородный полином степени n . Так как f – регулярная,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

и так как она однородная,

$$t \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(q).$$

Отсюда

$$n f(q) = \sum_i (x_i - te_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Но $\partial f / \partial x_i$ является регулярной и однородной степени $n - 1$, так что мы можем повторно применить рассуждение; после n шагов получим

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} (x_{i_1} - te_{i_1}) \dots (x_{i_n} - te_{i_n}) \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \\ &= \sum_{\nu \in \sigma_n} (-1)^n P_\nu(q) \partial_\nu f(q). \end{aligned}$$

Так как f – полином, $\partial_\nu f$ – константа; поэтому любой регулярный однородный полином является линейной комбинацией P_ν . Пусть V_n – правое векторное пространство, покрытое P_ν . Согласно утверждению 6 (iii), элементы из U_n являются полиномами, так $U_n \subseteq V_n$, но

$$\dim V_n \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \dim U_n$$

по Теореме 7 (iii). Отсюда $V_n = U_n$. $\square$

Зеркальное отражение этого рассуждения доказывает, что P_ν является также право-регулярным.

Так же, как для комплексного переменного, мы имеем

$$(1 - q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

для $|q| < 1$; ряды сходятся абсолютно и равномерно на любом шаре $|q| \leq r$ с $r < 1$. Это приводит к разложению $G(p - q)$ по степеням $p^{-1}q$; отождествляя его с рядами Тейлора G около p , получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Разложения*

$$\begin{aligned} G(p - q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) G_\nu(p) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} G_\nu(p) P_\nu(q) \end{aligned}$$

корректны (*valid*) для $|q| < |p|$; ряды сходятся равномерно в любой области $\{(p, q) : |q| \leq r|p|\}$ из $\mathbb{H}^2$ с $r < 1$.

Теперь те же рассуждения, что и в комплексном анализе, дают:

ТЕОРЕМА 10. *Предположим, что f – регулярная функция вблизи 0. Тогда существует шар B с центром в 0, в котором $f(q)$ представима в виде равномерно сходящихся рядов*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) a_\nu.$$

где коэффициенты a_ν даются выражением

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial B} G_\nu(q) Dq f(q) \\ &= (-1)^n \partial_\nu f(0). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ.

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_S G_\mu(q) Dq P_\nu(q) = \delta_{\mu\nu},$$

где S – любая сфера, содержащая начало координат.

ТЕОРЕМА 11 (Ряды Лорана). *Предположим, что f – регулярная функция на открытом множестве U за исключением, быть может, $q_0 \in U$. Тогда существует окрестность N точки q_0 , такая, что если $q \in N$ и $q \neq q_0$, $f(q)$ может быть представлена в виде ряда*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} \{P_\nu(q - q_0) a_\nu + G_\nu(q - q_0) b_\nu\}$$

который сходится равномерно в любом полом шаре

$$\{q : r \leq |q - q_0| \leq R\}, \quad \text{с } r > 0, \quad \text{который лежит внутри } N.$$

Коэффициенты a_ν и b_ν задаются посредством

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \int_C G_\nu(q - q_0) Dq f(q),$$

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \int_C P_\nu(q - q_0) Dq f(q),$$

где C – любая замкнутая 3-цепь в $U - \{q_0\}$, которая гомологична ∂B для некоторого шара с $q_0 \in B \subset U$ (так что C имеет число оборотов 1 вокруг q_0).

Я признателен за гостеприимство кафедре прикладной математики и теоретической физики Ливерпульского университета, где была сделана часть этой работы и лично доктору Р. J. McCarthy и доктору С. J. S. Clarke за весьма плодотворные дискуссии.

Литература

1. Hamilton W. R. Elements of quaternions (London, Longmans Green, 1866).
2. Tait P. G. An elementary treatise on quaternions (Cambridge University Press, 1867).
3. Joly C. J. A manual of quaternions (London, Macmillan, 1905).
4. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta \Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen. Comment. Math. Helv. **7** (1935), 307-330.
5. Fueter R. Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comment. Math. Helv. **8** (1936), 371-378.
6. Haefeli H. Hyperkomplexe Differentiale. Comment. Math. Helv. **20** (1947), 382-420.
7. Deavours C. A. The quaternion calculus. Amer. Math. Monthly **80** (1973), 995-1008.
8. Schuler B. Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionen-Variablen. Comment. Math. Helv. **10** (1937), 327-342.
9. Fueter R. Die Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comment. Math. Helv. **9** (1937), 320-335.
10. Porteous I. R. Topological geometry (London, Van Nostrand Reinhold, 1969).
11. Cartan H. Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables (London, Addison-Wesley, 1963).
12. Herv É M. Several complex variables (Oxford University Press, 1963).
13. Heins M. Complex function theory (London, Academic Press, 1968).

14. Titchmarsh E. C. The theory of functions, 2nd ed. (Oxford University Press, 1939).
15. Cullen C. G. An integral theorem for analitic intrinsic functions on quaternions. Duke Math. J. **32**(1965), 139-148.
16. Schouten J. A. Ricci-calculus, 2nd ed. (Berlin, Springer-Verlag, 1954).
17. Sugiura M. Unitary representations and harmonic analysis (London, Wiley, 1975).
18. McCarthy P. J. and Sudbery, A. Harmonic analysis of generalised vector functions, generalised spin-weighted functions and induced representations. J. Phys. **A 10** (1977), 331-338.

АЛГЕБРА С ДЕЛЕНИЕМ, ОБОБЩЕННЫЕ СУПЕРСИММЕТРИИ И ОКТОНИОННАЯ М-ТЕОРИЯ¹

Ф. Топпан

CBPF – CCP, Rio de Janeiro, Brazil
toppan@cbpf.br

Данная работа освещает исследования, проводимые автором и его коллегами, направленные на изучение взаимоотношения между понятиями алгебр с делением, представлений алгебр Клиффорда, обобщенных суперсимметрий с введением альтернативного описания М-алгебры в терминах неассоциативных октонионных структур. Излагаемые результаты были представлены на конференции "Число, время и относительность", проходившей в Техническом Университете им. Баумана (Москва) в августе 2004 года.

Введение

В наши дни программа объединения, нацеленная на общее описание известных взаимодействий совместно с непротиворечивой квантовой формулировкой гравитации, в основном возлагает надежду на многомерные суперсимметричные теории. На данный момент, самой многообещающей, но, в то же время, остающейся лишь гипотетической, является теория, рассматриваемая в одиннадцатимерных пространствах, которая носит имя М-теории [1]. Требования теоретической (и феноменологической) согласованности, накладываемые на любого допустимого кандидата на роль объединенной теории, обязательно приводят к систематическому исследованию свойств алгебр Клиффорда и спиноров в пространстве-времени произвольной размерности и сигнатуры. Обобщенные суперсимметрии, идущие дальше стандартной HLS схемы [2], допускают существование бозонных абелевых тензорных центральных зарядов, связанных с динамикой расширенных объектов (бран). Со времен работы [3] стало широко известно, что суперсимметрии связаны с алгебрами с делением. На самом деле, даже для обобщенных суперсимметрий, классификационные схемы базируются на ассоциативных алгебрах с делением ($\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$). Несравненно меньше известно относительно оставшейся делимой алгебры октонионов, что связано с осложнениями, проистекающими из неассоциативности. Несмотря на это, октонионная структура была рассмотрена в работах [4, 5] в рамках применения к теории суперструн.

Октонионы возникают не только как курьез. Они представляют собой максимальную алгебру с делением. Уже один этот факт показывает, что октонионы должны занять место, подобное тому, которое занимает, скажем, максимальная супергравитация. Однако, они важны не только поэтому. Октонионы являются сердцевинкой многих исключительных структур в математике и ответственны за их существование. Среди этих исключительных структур мы можем упомянуть 5 исключительных алгебр Ли и исключительные йордановы алгебры. На самом деле, алгебра Ли G_2 является группой автоморфизмов октонионов, в то время как F_4 есть группа автоморфизмов 3×3 октонионнозначных эрмитовых матриц, реализующих исключительную йорданову алгебру $J_3(\mathbf{O})$. Алгебра F_4 и оставшиеся исключительные алгебры Ли E_6 ,

¹ Перевод Р. Михайлова, ред. А. Элиовича.

E_7 , E_8 получаются из так называемой "конструкции магического квадрата Титса", которая сопоставляет алгебру Ли любой паре алгебр с делением, в случае если как минимум одна из алгебр этой пары совпадает с октонионной алгеброй [6].

Неоднократно отмечалось ([7, 8]), что исключительные алгебры Ли хорошо соответствуют сценарию Великого объединения. Более того, алгебра Ли E_8 вводит через тензорное произведение $E_8 \times E_8$ теорию гетеротических струн без аномалий, в то время как G_2 голономия семимерных многообразий требуется, на феноменологическом уровне, для создания 4-мерной $N = 1$ суперсимметричной теории поля посредством компактификации одиннадцатимерия. Это лишь часть списка разрозненных доводов (в том числе, см. [8]), наводящих на мысль, что по каким-то глубоким причинам, Природа, похоже, предпочитает исключительные структуры. В данном контексте заслуживает упоминания исключительная йорданова алгебра $J_3(\mathbf{O})$, которая не только связана с единственной последовательной квантово-механической системой (в подходе Йордана, см. [9]), основанной на неассоциативной алгебре, но и также связана с уникальной матричной теорией Черна-Саймонса йорданова типа (см. [10]).

В данной работе я буду обсуждать исследования, изложенные в работах [11, 12], посвященные вопросу возможности реализации общей суперсимметрии в терминах неассоциативной алгебры октонионов. В частности, в работе [11] было показано, что M -алгебра, предположительно обозначающая M -теорию, возникает в двух (и только двух, ввиду отсутствия комплексных и кватернионных структур) вариантах. Помимо стандартной реализации M -алгебры, включающей вещественные спиноры и, следовательно, использующей вещественную структуру, также может использоваться альтернативная формулировка, требующая введения октонионной структуры. Это возможно благодаря существованию октонионного описания алгебры Клиффорда, которое определяет 11-мерное пространство-время Минковского и связанные с ним спиноры. Особенности второго варианта, а именно, октонионной M -супералгебры, озадачивает. Не слишком удивительно, что эта алгебра содержит меньшее число бозонных генераторов, 52, в сравнении с 528-ю в случае стандартной M -алгебры (это, все-таки, можно ожидать, ввиду того, что наложение дополнительной структуры налагает ограничение на теорию). Что действительно является полной неожиданностью, так это появление новых условий, отсутствующих в стандартной M -теории. Эти условия означают, что различные секторы бран более не независимы. Одна октонионная 5-брана содержит целое множество степеней свободы, и следовательно, эквивалентна октонионным секторам $M1$ и $M2$. Символически мы можем записать эту эквивалентность как $M5 \equiv M1 + M2$. Этот результат, действительно, является интригующим. Он означает появление совершенно нетривиальных структур при исследовании октонионных конструкций в M -теории. Весьма заманчиво думать, что упомянутые выше исключительные структуры должны раскрываться более полно с помощью октонионного варианта M -алгебры, нежели с помощью стандартной вещественной M -алгебры.

Другой подход состоит в определении замкнутой алгебраической структуры, реализующей октонионную суперконформную M -алгебру. Получается, что суперконформная алгебра $OSp(1, 64)$ вещественной M -теории заменяется в октонионном случае на супералгебру суперматриц $OSp(1, 8|\mathbf{O})$ с октонионнозначными элементами и общим числом $7 + 232 = 239$ бозонных генераторов.

Об алгебрах Клиффорда

Классификация обобщенных суперсимметрий требует предварительной классификации алгебр Клиффорда, спиноров и их соотношений с алгебрами с делением.

Для замкнутости (самодостаточности) изложения, в данной части работы мы приведем обзор классификации алгебр Клиффорда, связанных с ассоциативными алгебрами с делением **R**, **C**, **H**, следуя работам [13] и [14].

Наиболее общие неприводимые *вещественные* матричные представления алгебры Клиффорда

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где $\eta^{\mu\nu}$ – диагональная матрица сигнатуры (p, q) (т. е. p положительных $+1$ и q отрицательных -1 диагональных элементов)¹ могут быть классифицированы согласно свойствам самой общей S матрицы, коммутирующей со всеми Γ ($[S, \Gamma^\mu] = 0$ для всех μ). В случае, когда самая общая S матрица является кратной тождественной, мы получаем нормальный (**R**) случай. В противном случае, S может быть суммой двух матриц, вторая из которых является кратным квадратного корня из -1 (что представляет почти комплексный, **C** случай) или линейной комбинацией 4 матриц, замыкающих кватернионную алгебру (это случай **H**). Согласно [13], *вещественные* неприводимые представления **R**, **C**, **H** типа строятся в соответствии со следующей таблицей, элементы которой представляют значения $p - q \bmod 8$

R	C	H
0, 2		4, 6
1	3, 7	5

(2)

Вещественное неприводимое представление всегда единственно при $p - q \bmod 8 = 1, 5$. В этих сигнатурах представлены два неэквивалентных вещественных представления, второе из которых восстанавливается переключением знака у всех Γ ($\Gamma^\mu \mapsto -\Gamma^\mu$).

Обозначим через $C(p, q)$ неприводимое представление алгебры Клиффорда, соответствующее сигнатуре (p, q) . Нормальный (**R**), почти комплексный (**C**) и кватернионный (**H**) типы соответствующих неприводимых представлений алгебры Клиффорда могут также быть рассмотрены следующим образом. В то время, как в **R**-случае, матрицы, реализующие неприводимое представление, обязательно имеют вещественные элементы, в **C**-случае могут использоваться матрицы с комплексными элементами, а в **H**-случае – с кватернионными.

Обсудим простейшие примеры. Алгебра Клиффорда $C(0, 1)$ **C**-типа может быть представлена как посредством вещественно-значных 2×2 матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, так и с помощью мнимого числа i .

С другой стороны, алгебра Клиффорда $C(0, 3)$ **H**-типа может быть реализована следующим образом:

и) тремя 4×4 вещественно-значными матрицами, заданными с помощью тензорного произведения $\tau_A \otimes \tau_1$, $\tau_A \otimes \tau_2$ и $\mathbf{1}_2 \otimes \tau_A$, где матрицы τ_A , τ_1 и τ_2 реализуют вещественное неприводимое представление $C(2, 1)$

¹ В рамках данной работы мы будем считать, что положительные собственные значения соотносятся с пространственно-подобными направлениями, а негативные – с времениподобными.

$$(\tau_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}),$$

ii) тремя 2×2 комплексно-значными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$,

iii) тремя мнимыми кватернионами e_i (более детально см. часть 3).

Формулы в пунктах i) и ii) представляют вещественное и комплексное представления, соответственно, для мнимых кватернионов. Они могут быть непосредственно расширены для получения вещественных и комплексных представлений алгебр Клиффорда **H**-типа посредством подстановки вместо кватернионных элементов соответствующих представлений (кватернионная единица заменяется в комплексном представлении единичной 2×2 матрицей $\mathbf{1}_2$ и единичной 4×4 матрицей $\mathbf{1}_4$ в вещественном представлении).

Стоит отметить, что в данных сигнатурах $p - q \bmod 8 = 0, 4, 6, 7$ без ограничения общности матрицы Γ^μ могут быть выбраны блочно антидиагональными (матрицы обобщенного вейлевского типа), т. е. имеющими форму

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Следовательно, в данных сигнатурах возможно ввести вейлевские проективные спиноры, число компонент которых равно половине размера соответствующих Γ -матриц².

Очень удобная форма неприводимых представлений алгебр Клиффорда, построенная с помощью алгоритма отбора (в произвольной сигнатуре пространства-времени) представителя (с точностью до смены знака $\Gamma^\mu \leftrightarrow -\Gamma^\mu$) в каждом неприводимом классе представлений гамма-матриц Клиффорда, приведена в работе [14]. Мы приведем и расширим здесь результаты, представленные в [14], устанавливая явную связь между максимальными алгебрами Клиффорда в таблице (6) ниже и свойствами соответствующих алгебр с делением.

Конструкция состоит в следующем. В начале доказывается, что из представления гамма-матриц Клиффорда, соответствующего заданной размерности D пространства-времени, с помощью двух алгоритмов можно рекурсивно построить гамма-матрицы Клиффорда, соответствующие размерности $D + 2$ пространства-времени. На самом деле, очень просто проверить, что если γ_i обозначают d -мерные гамма-матрицы $D = p + q$ пространства-времени с сигнатурой (p, q) (обеспечивающие именно представление алгебры Клиффорда $C(p, q)$), то $2d$ -мерные $D + 2$ гамма-матрицы (обозначаемые как Γ_j) $D + 2$ пространства-времени представляются в соответствии с

$$\Gamma_j \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$$

$$(p, q) \mapsto (p + 1, q + 1). \quad (4)$$

² Понятие вейлевского спинора, удобное для наших целей, отличается от принятого, связанного с комплексно-значными алгебрами Клиффорда и было введено в [14].

или

$$\Gamma_j \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ -\gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ \mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$$

$$(p, q) \mapsto (q + 2, p). \quad (5)$$

Следует отметить, что три введенные ранее матрицы τ_A , τ_1 , τ_2 , реализующие алгебру Клиффорда $C(2, 1)$ получаются посредством применения либо (4), либо (5) к числу 1, т. е. одномерной реализации $C(1, 0)$.

Все алгебры Клиффорда **R**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов (4) и (5) к алгебре Клиффорда $C(1, 0)$ ($\equiv 1$) и алгебрам Клиффорда серий $C(0, 7 + 8m)$ (с неотрицательным целым m), которые уже известны на предыдущем шаге рекурсии. Подобным образом, все алгебры Клиффорда **H**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов к алгебрам Клиффорда $C(0, 3 + 8m)$, а алгебры Клиффорда **C**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов к алгебрам Клиффорда $C(0, 1 + 8m)$ и $C(0, 5 + 8m)$. Это согласуется с приведенной ниже схемой, взятой из [14]. Мы имеем

Таблица максимальных алгебр Клиффорда (до $d = 256$).

	1	*	2	*	4	*	8	*	16	*	32	*	64	*	128	*	256	*
R	<u>(1, 0)</u>	⇒	(2, 1)	⇒	(3, 2)	⇒	(4, 3)	⇒	(5, 4)	⇒	(6, 5)	⇒	(7, 6)	⇒	(8, 7)	⇒	(9, 8)	⇒
C	<u>(0, 1)</u> (1, 2) → (2, 3) → (3, 4) → (4, 5) → (5, 6) → (6, 7) → (7, 8) → (3, 0) → (4, 1) → (5, 2) → (6, 3) → (7, 4) → (8, 5) → (9, 6) →																	
H	<u>(0, 3)</u> (1, 4) → (2, 5) → (3, 6) → (4, 7) → (5, 8) → (6, 9) → (5, 0) → (6, 1) → (7, 2) → (8, 3) → (9, 4) → (10, 5) →																	
C	<u>(0, 5)</u> (1, 6) → (2, 7) → (3, 8) → (4, 9) → (5, 10) → (7, 0) → (8, 1) → (9, 2) → (10, 3) → (11, 4) →																	
R/O	<u>(0, 7)</u> (1, 8) → (2, 9) → (3, 10) → (4, 11) → (5, 12) → (9, 0) → (10, 1) → (11, 2) → (12, 3) → (13, 4) →																	

$$\begin{array}{ccc}
& & \tau_A \otimes \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, \\
& & \tau_A \otimes \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\
C(0,3) \equiv \begin{array}{l} \tau_A \otimes \tau_1, \\ \tau_A \otimes \tau_2, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \end{array} & \text{и} & C(0,7) \equiv \begin{array}{l} \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_1, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_2, \\ \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\ \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\ \tau_A \otimes \tau_A \otimes \tau_A. \end{array} \quad (7)
\end{array}$$

Комплексные примитивные максимальные алгебры Клиффорда $C(0,1)$ и $C(0,5)$ могут быть получены из $C(1,2)$ и $C(0,7)$, соответственно, удалением двух гамма-матриц. В $C(0,7)$ мы можем, в том числе, рассмотреть последний тензорно умноженный столбец, устранить два члена, содержащие τ_1 и τ_2 , и заменяя $\mathbf{1}_2 \mapsto 1$, $\tau_A \mapsto i$, получить

$$\begin{array}{ccc}
& & \tau_A \otimes \tau_1, \\
& & \tau_A \otimes \tau_2, \\
C(0,5) \equiv & i\tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, & (8) \\
& i\tau_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\
& i\tau_A \otimes \tau_A.
\end{array}$$

Стоит отметить, что $C(0,1)$ и $C(0,5)$ серии были вполне корректно рассмотрены в [14] как "потомственные", ввиду того, что они могут быть получены из $C(1,2)$, $C(0,7)$ после стирания лишних гамма-матриц. Однако, здесь мы находим более удобным явно включить их в таблицу (6) и рассматривать их как "примитивные", из-за того, что они допускают иную структуру алгебры с делением (они почти комплексные, $\mathbf{C}$); что касается нормального ($\mathbf{R}$) типа максимальных алгебр Клиффорда, они выводятся отсюда.

Оставшиеся примитивные максимальные алгебры Клиффорда $C(0, x+8m)$, для положительных целых $m = 1, 2, \dots$ и $x = 1, 3, 5, 7$, могут быть восстановлены с помощью $\text{mod } 8$ свойств гамма-матриц. Пусть $\bar{\tau}_i$ – реализация $C(0, x)$ для $x = 1, 3, 5, 7$. Применяя алгоритм (4) к $C(0,7)$, мы сначала строим матрицы 16×16 , реализующие $C(1,8)$ (матрица с положительной сигнатурой обозначается γ_9 , $\gamma_9^2 = \mathbf{1}$, в то время как восемь матриц с отрицательными сигнатурами обозначаются через γ_j , $j = 1, 2, \dots, 8$, $\gamma_j^2 = -\mathbf{1}$). Теперь мы находимся в положении работы [14] для явной конструкции целой серии примитивных максимальных алгебр Клиффорда $C(0, x+8n)$, посредством формул

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\tau}_i \otimes \gamma_9 \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \gamma_9, \\
\mathbf{1}_4 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
C(0, x+8n) \equiv \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
\mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\
\dots & \dots & \dots, \\
\mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \dots & \dots & \dots \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j,
\end{array} \quad (9)$$

Здесь тензорное произведение 16-ти мерного представления берется n раз.

Об алгебрах с делением

В предыдущей части мы описали алгоритм явного построения любого неприводимого представления алгебры Клиффорда определенного делимо-алгебраического типа. Для удобства приведем здесь основные свойства алгебр с делением, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Четыре алгебры с делением: вещественных (**R**) и комплексных (**C**) чисел, кватернионы (**H**) и октонионы (**O**) имеют соответственно 0, 1, 3 и 7 мнимых элементов e_i , удовлетворяющих соотношениям

$$e_i \cdot e_j = -\delta_{ij} + C_{ijk}e_k, \quad (10)$$

(i, j, k принимают значение 1 комплексном случае, 1, 2, 3 в кватернионном случае и 1, 2, ..., 7 в октонионном; кроме того, по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

C_{ijk} представляют собой полностью антисимметричные структурные константы алгебр с делением. Октонионная алгебра с делением максимальна, ввиду того, что кватернионы, комплексные и вещественные числа могут быть получены как ее ограничения. Полностью антисимметричные октонионные структурные константы могут быть выражены как

$$C_{123} = C_{147} = C_{165} = C_{246} = C_{257} = C_{354} = C_{367} = 1 \quad (11)$$

(и обращаются в нуль в иных случаях).

Октонионы являются единственной неассоциативной, однако альтернативной (см. [17]), алгеброй с делением.

Вследствие антисимметричности C_{ijk} очевидно, что мы можем реализовать (1) посредством сопоставления сигнатур (0, 3) и (0, 7) мнимым кватернионам и октонионам соответственно.

Для дальнейшего изложения важную роль играет понятие главного сопряжения в алгебре с делением. Любой элемент X в заданной алгебре с делением может быть представлен как сумма

$$X = x_0 + x_i e_i, \quad (12)$$

где x_0 и x_i вещественны, по повторяющимся индексам предполагается суммирование, и положительные числа i ограничены 1, 3 и 7 в **C**, **H** и **O** случаях соответственно. Главное сопряжение X^* элемента X определяется как

$$X^* = x_0 - x_i e_i. \quad (13)$$

Это позволяет ввести норму в алгебре с делением посредством произведения X^*X . Ограничение единичной нормировки $X^*X = 1$ выделяет три параллелизуемые³ сферы S^1 , S^3 и S^7 в связи с **C**, **H** и **O** соответственно.

Дальнейшее рассмотрение алгебр с делением и их связи с алгебрами Клиффорда содержится в работах [14] и [17].

³ Доб. пер. Многообразие называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально.

О фундаментальных спинорах

В части **2** мы обсудили свойства неприводимых представлений алгебр Клиффорда, показав метод их явного построения, а также отметили их делимо-алгебраическую структуру. Стоит напомнить, что делимо-алгебраический характер фундаментальных спиноров не обязательно (в зависимости от данного пространства-времени) совпадает с делимо-алгебраическим типом соответствующего неприводимого представления алгебры Клиффорда.

Фундаментальные спиноры реализуют представление обобщенной Лоренцевой группы с минимальным числом вещественных компонент в соответствии с максимальной, совместимой, допустимой делимо-алгебраической структурой.

Следующая таблица, взятая из результатов [18] и [13], (см. также [14]), сравнивает между собой делимо-алгебраические свойства неприводимых представлений Клиффорда (Γ) и фундаментальных спиноров (Ψ), в различном пространстве-времени, параметризованном посредством $\rho = s - t \mod 8$. Имеем

ρ	Γ	Ψ
0	R	R
1	R	R
2	R	C
3	C	H
4	H	H
5	H	H
6	H	C
7	C	R

(14)

Из приведенной таблицы ясно, что для $\rho = 2, 3$, фундаментальные спиноры могут допускать более широкую делимо-алгебраическую структуру, нежели соответствующее неприводимое представление алгебр Клиффорда. Для $\rho = 6, 7$ верно обратное: неприводимые представления Клиффорда допускают более широкую делимо-алгебраическую структуру, нежели соответствующие спиноры. В некоторых случаях это несовпадение делимо-алгебраических структур играет важную роль. Например, в [11] был разработан метод построения суперконформных алгебр, основанный на минимальной делимо-алгебраической структуре, общей как для неприводимых представлений алгебры Клиффорда, так и для фундаментальных спиноров. Этот метод может быть напрямую преобразован для построения расширенных суперконформных алгебр, основанных на наибольшей делимо-алгебраической структуре. За такое обобщение приходится платить введением для $\rho = 2, 3$ приводимых представлений алгебры Клиффорда, и обратно, для $\rho = 6, 7$ – введением неминимальных спиноров.

Причина такого несовпадения может быть легко объяснена на основе алгоритмической конструкции части **2** и таблицы (6). Действительно, все максимальные потомственные алгебры Клиффорда, входящие в таблицу (6), имеют блочно антидиагональные гамма-матрицы, за исключением единственной гамма-матрицы, задающейся как $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$. Следовательно, все не максимальные алгебры Клиффор-

да, получающиеся посредством удаления этой дополнительной гамма-матрицы (детальное обсуждение данного вопроса содержится в [14]), имеют блочно антидиагональную форму. Напомним, что фундаментальные спиноры реализуют представление обобщенной группы Лоренца, генераторы которой задаются как коммутаторы гамма-матриц $[\Gamma_i, \Gamma_j]$. При рассмотрении немаксимальных алгебр Клиффорда, все эти коммутаторы имеют блочно-диагональную 2×2 форму, позволяющую ввести (обобщенную в смысле работы [14]) проекцию Вейля для фундаментальных спиноров с ненулевыми верхними и нижними компонентами.

Удобно непосредственно рассмотреть простейшие случаи пространств Минковского, в которых возникает несовпадение (общая процедура может быть напрямую получена из таблицы (6)). В обычном $(3, 1)$ пространстве-времени, $(\mathbf{R})$ неприводимое представление алгебры Клиффорда получается как немаксимальная алгебра Клиффорда $(3, 1) \subset (3, 2)$, полученная из максимальной $(\mathbf{R})$ $(3, 2)$ после удаления времени-подобных гамма-матриц. С другой стороны, фундаментальные комплексные спиноры получаются из приводимых представлений алгебры Клиффорда $(3, 1) \subset (4, 1)$, посредством удаления пространственноподобных гамма-матриц из $(\mathbf{C})$ неприводимого представления алгебры Клиффорда $(4, 1)$.

В других случаях пространств Минковского имеем

i) $(4, 1)$: $\mathbf{G}$ совпадает с максимальным клиффордовым представлением $(4, 1)$ $(\mathbf{C})$, в то время как Ψ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(4, 1) \subset (6, 1)$ $(\mathbf{H})$,

ii) $(7, 1)$: $\mathbf{G}$ совпадает с немаксимальным клиффордовым представлением $(7, 1) \subset (7, 2)$ $(\mathbf{H})$, в то время как Ψ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(7, 1) \subset (8, 1)$ $(\mathbf{C})$,

iii) $(8, 1)$: $\mathbf{G}$ совпадает с максимальным клиффордовым представлением $(8, 1)$ $(\mathbf{C})$, в то время как Ψ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(8, 1) \subset (10, 1)$ $(\mathbf{R})$.

Обобщенные суперсимметрии: примеры M и F алгебр

Необходимо ввести три матрицы, A, B, C , для описания трех сопряжений (эрмитова, комплексного и транспозиции), действующих на гамма-матрицах [3]. Ввиду того, что только две из этих матриц независимы, мы, следуя [14], будем работать лишь с A и C . A играет роль времениподобной матрицы Γ^0 в пространстве-времени Минковского и используется для введения сопряженных спиноров (barred spinors). C , с другой стороны, является матрицей зарядового сопряжения. С точностью до общего знака, в общем (s, t) пространство-времени A и C задаются как произведения всех времениподобных и, соответственно, всех симметричных (или антисимметричных) гамма-матриц⁴. Свойства A и C немедленно следуют из их явной конструкции, см. [3] и [14].

В представлении алгебры Клиффорда, реализованном матрицами с действительными элементами, сопряжение действует как тождественное преобразование, см. (13). В этом случае пространственноподобные гамма-матрицы симметричны, в то время как времениподобные гамма-матрицы антисимметричны, таким образом, A может быть отождествлена с матрицей зарядового сопряжения C_A .

⁴ В зависимости от заданного пространства-времени (см. [3] и [14]), существуют не более двух матриц зарядового сопряжения C_S, C_A , задаваемых как произведение всех симметричных и всех антисимметричных гамма-матриц соответственно. В специальных сигнатурах пространства-времени они сливаются в одну матрицу C .

Для наших целей, важность матрицы A и матрицы зарядового сопряжения C следует из того, что в D -мерном пространстве-времени ($D = s + t$), натянутом на $d \times d$ гамма-матрицы, они позволяют строить базис для $d \times d$ (анти)эрмитовых и (анти)симметричных матриц соответственно. Легко доказать, что в вещественном и комплексном случаях (кватернионный случай отличается), все $\binom{D}{k}$ антисимметризованные произведения k гамма-матриц $A\Gamma^{[\mu_1 \dots \mu_k]}$, являются эрмитовыми или антиэрмитовыми, в зависимости от значения $k \leq D$. Аналогично, антисимметризованные произведения $C\Gamma^{[\mu_1 \dots \mu_k]}$ все симметричны или все антисимметричны.

Что касается M -алгебры, 32-компонентные вещественные спиноры $(10, 1)$ -пространства-времени допускают антикоммутаторы $\{Q_a, Q_b\}$, которые являются 32×32 симметричными вещественными матрицами с, не более чем, $32 + \frac{32 \times 31}{2} = 528$ компонентами. Распиряя г.h.s.⁵ в терминах антисимметризованного произведения гамма-матриц, мы получаем, что оно может быть насыщено посредством так называемой M -алгебры

$$\{Q_a, Q_b\} = (A\Gamma_\mu)_{ab} P^\mu + (A\Gamma_{[\mu\nu]})_{ab} Z^{[\mu\nu]} + (A\Gamma_{[\mu_1 \dots \mu_5]})_{ab} Z^{[\mu_1 \dots \mu_5]}. \quad (15)$$

Действительно, $k = 1, 2, 5$ секторов г.h.s. доставляют $11 + 55 + 462 = 528$ общих компонент. Помимо сдвигов P^μ , в г.h.s. возникают антисимметричные абелевы тензорные центральные заряды ранга-2 и ранга-5 $Z^{[\mu\nu]}$ и $Z^{[\mu_1 \dots \mu_5]}$ соответственно.

Насыщенная M -алгебра (15) допускает конечное число подалгебр, которые согласуются с лоренцевыми свойствами одиннадцати измерений сигнатуры Минковского. Существует 6 таких подалгебр, которые восстанавливаются обнулением одного или двух среди трех тензорных центральных зарядов P^μ , $Z^{[\mu\nu]}$, $Z^{[\mu_1 \dots \mu_5]}$ (полностью вырожденная подалгебра получается посредством обнуления г.h.s. целиком).

То, что фундаментальные спиноры в $(10, 2)$ -пространстве-времени также допускают 32 компоненты, следует из существования проекции Вейля. Из этого вытекает, что насыщенная M -алгебра допускает $(10, 2)$ пространственно-временное представление, так называемую F -алгебру, в терминах $(10, 2)$ майорано-вейлевских спиноров $\tilde{Q}_{\tilde{a}}$, $\tilde{a} = 1, 2, \dots, 32$.

В случае вейль-спроецированных спиноров, г.h.s. необходимо перестроить с помощью оператора проекции, который выбирает верхний левый блок в 2×2 блочном разложении. Более точно, если $\mathcal{M}$ матрично разложена на 2×2 блоки как $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 & \mathcal{M}_4 \end{pmatrix}$, мы можем определить

$$P(\mathcal{M}) \equiv \mathcal{M}_1. \quad (16)$$

Насыщенная M -алгебра (15) может, следовательно, быть переписана как

$$\{\tilde{Q}_{\tilde{a}}, \tilde{Q}_{\tilde{b}}\} = P\left(\tilde{A}\tilde{\Gamma}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)_{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{Z}^{[\tilde{\mu}\tilde{\nu}]} + P\left(\tilde{A}\tilde{\Gamma}_{[\tilde{\mu}_1 \dots \tilde{\mu}_6]}\right)_{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{Z}^{[\tilde{\mu}_1 \dots \tilde{\mu}_6]}, \quad (17)$$

где все тильды ссылаются к соответствующим $(10, 2)$ величинам. Матрицы в г.h.s. симметричны при замене $\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{b}$. В этот момент возникают ранга-2 и самодуальные ранга-6 антисимметричные абелевы тензорные заряды, $\tilde{Z}^{[\tilde{\mu}\tilde{\nu}]}$ и соответственно $\tilde{Z}^{[\tilde{\mu}_1 \dots \tilde{\mu}_6]}$. Общее число их компонент $66 + 462 = 528$, что доказывает насыщенность г.h.s. Уравнение насыщения (17) называется F -алгеброй.

⁵ г.h.s. – right hand side – правая сторона, например, мир правых спиноров.

Вещественные, комплексные и кватернионные обобщенные суперсимметрии

Для вещественных n -компонентных спиноров Q_a , наиболее общая алгебра суперсимметрий представима как

$$\{Q_a, Q_b\} = \mathcal{Z}_{ab}, \quad (18)$$

где матрица $\mathcal{Z}$ возникающая в г.h.s., является наиболее общей $n \times n$ симметричной матрицей с общим числом компонент $\frac{n(n+1)}{2}$. Для любого заданного пространства-времени, мы легко можем посчитать соответствующее разложение $\mathcal{Z}$ в терминах антисимметризованных произведений k -гамма-матриц, а именно

$$\mathcal{Z}_{ab} = \sum_k (A\Gamma_{[\mu_1 \dots \mu_k]})_{ab} Z^{[\mu_1 \dots \mu_k]}, \quad (19)$$

где значения k , входящие в сумму г.h.s., ограничены требованием симметрии при замене $a \leftrightarrow b$ и специфичны для данного пространства-времени. Коэффициенты $Z^{[\mu_1 \dots \mu_k]}$ являются абелевыми тензорными центральными зарядами ранга k .

В случае, когда фундаментальные спиноры комплексные или кватернионные, они могут быть объединены в комплексные (для **C** и **H** случаев) и кватернионные (для **H** случая) мультиплеты, элементы которых являются комплексные числа и кватернионы соответственно.

Вещественная обобщенная алгебра суперсимметрии (18) теперь может быть заменена на более общие комплексную или кватернионную алгебры суперсимметрии, задаваемые антикоммутаторами среди фундаментальных спиноров Q_a и их сопряженных Q^*_a (где сопряжение использует главное сопряжение в данной алгебре с делением, см. (13)). В этом случае, имеем

$$\{Q_a, Q_b\} = \mathcal{Z}_{ab}, \quad \{Q^*_a, Q^*_b\} = \mathcal{Z}^*_{ab}, \quad (20)$$

вместе с

$$\{Q_a, Q^*_b\} = \mathcal{W}_{ab}, \quad (21)$$

где матрица $\mathcal{Z}_{ab}$ ($\mathcal{Z}^*_{ab}$ является ее сопряженной и не содержит новых степеней свободы) симметрична поскольку $\mathcal{W}_{ab}$ эрмитова.

Максимальное число допустимых компонент в г.h.s. задается для комплексных фундаментальных спиноров с n комплексными компонентами посредством:

ia) $n(n+1)$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в симметричную $n \times n$ комплексную матрицу $\mathcal{Z}_{ab}$ плюс

ii) n^2 (вещественных) бозонных компонент, входящих в эрмитову $n \times n$ комплексную матрицу $\mathcal{W}_{ab}$.

Аналогично, максимальное число допустимых компонент в г.h.s. для кватернионных фундаментальных спиноров с n кватернионными компонентами, задается как

ib) $2n(n+1)$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в симметричную $n \times n$ кватернионную матрицу $\mathcal{Z}_{ab}$ плюс

iib) $2n^2 - n$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в эрмитову $n \times n$ кватернионную матрицу $\mathcal{W}_{ab}$.

Приведенные числа не обязательно означают, что соответствующая обобщенная суперсимметрия действительно насыщена. Это верно, в частности, в кватернионном случае, см. [15].

Любая вещественная обобщенная суперсимметрия, допускающая комплексную структуру, может быть переписана в комплексном формализме с n -компонентными комплексными спинорами и общим числом $n(2n + 1)$ (вещественных) бозонных компонент, разбитых на $n(n + 1)$ компонент, входящих в симметричную матрицу $\mathcal{Z}$ и n^2 компонент, входящих в эрмитову матрицу $\mathcal{W}$. По иному обстоит дело в кватернионном случае. Кватернионная структура требует ограничения общего числа бозонных порождающих. n -компонентные кватернионные спиноры могут быть описаны как $4n$ -компонентные вещественные спиноры. Однако, г.х.с. кватернионной (20) и (21) супералгебры допускает не более чем $4n^2 + n$ бозонных компонент, вместо $8n^2 + 2n$ в случае наиболее общей суперсимметричной вещественной алгебры. Лоренц-ковариантность далее ограничивает число бозонных порождающих в кватернионной алгебре суперсимметрии.

Мы завершаем эту часть упоминанием о двух больших классах подалгебр, отвечающих лоренц-инвариантности, которые могут быть получены из (20) и (21) как в комплексном, так и в кватернионном случае. Они получаются посредством обнуления либо $\mathcal{Z}$, либо $\mathcal{W}$, а именно,

I) $\mathcal{Z}_{ab} \equiv \mathcal{Z}^*_{\dot{a}\dot{b}} \equiv 0$, так что лишь бозонные степени свободы входят в эрмитову матрицу $\mathcal{W}_{ab}$ или, обратно,

II) $\mathcal{W}_{ab} \equiv 0$, так что лишь бозонные степени свободы входят в $\mathcal{Z}_{ab}$ и сопряженную матрицу $\mathcal{Z}^*_{\dot{a}\dot{b}}$.

Соответственно, в будущем мы будем ссылаться на (комплексные или кватернионные) обобщенные суперсимметрии, удовлетворяющие ограничению I), как на "эрмитовы" (или "типа I") обобщенные суперсимметрии, в то время как на (комплексные или кватернионные) обобщенные суперсимметрии, удовлетворяющие ограничению II), будем ссылаться, как на "голоморфные" (или "типа II") обобщенные суперсимметрии.

Обобщенные суперсимметрии и октонионная M -супералгебра

Как уже отмечалось, в $D = 11$ пространстве-времени Минковского, где должна быть найдена M -теория, спиноры вещественны и имеют 32 компоненты. Так как наиболее общая симметричная 32×32 матрица допускает 528 компонент, легко доказать, что наиболее общая алгебра суперсимметрии в $D = 11$ может быть представлена как

$$\{Q_a, Q_b\} = (C\Gamma_\mu)_{ab}P^\mu + (C\Gamma_{[\mu\nu]})_{ab}Z^{[\mu\nu]} + (C\Gamma_{[\mu_1\dots\mu_5]})_{ab}Z^{[\mu_1\dots\mu_5]} \quad (22)$$

(где C – матрица зарядового сопряжения), $Z^{[\mu\nu]}$ и $Z^{[\mu_1\dots\mu_5]}$ – полностью антисимметричные тензорные центральные заряды, ранга 2 и 5 соответственно, которые соответствуют расширенным объектам [21, 22], p -бранам. Отметим, что общее число 528 получено в г.х.с. как сумма трех различных секторов, т. е.

$$528 = 11 + 66 + 462. \quad (23)$$

Алгебра (15) называется M -алгеброй. Она дает обобщение обычной алгебры суперсимметрии, восстанавливаемой посредством отождествления $Z^{[\mu\nu]} \equiv Z^{[\mu_1\dots\mu_5]} \equiv 0$.

Октонионная M -супералгебра вводится в предположении октонионной структуры спиноров, которые в $D = 11$ пространстве-времени Минковского представляют собой октонионнозначные 4-компонентные векторы. Алгебра, заменяющая (15), задается как

$$\{Q_a, Q_b\} = \{Q^*_a, Q^*_b\} = 0, \quad \{Q_a, Q^*_b\} = Z_{ab}, \quad (24)$$

где $*$ обозначает главное сопряжение в октонионной алгебре с делением и, как результат, бозонная абелева алгебра на r.h.s. ограничивается до эрмитовой

$$Z_{ab} = Z_{ba}^*, \quad (25)$$

оставляющей лишь 52 независимые компоненты.

Матрица Z_{ab} может быть представлена либо как 11 + 41 бозонных генераторов, входящих в

$$Z_{ab} = P^\mu (C\Gamma_\mu)_{ab} + Z_{\mathbf{O}}^{\mu\nu} (C\Gamma_{\mu\nu})_{ab}, \quad (26)$$

либо как 52 бозонных генератора, входящих в

$$Z_{ab} = Z_{\mathbf{O}}^{[\mu_1 \dots \mu_5]} (C\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_5})_{ab}. \quad (27)$$

Вследствие неассоциативности октонионов, в отличие от вещественного случая, сектора, определенные через (26) и (27), не являются зависимыми. Более того, как мы уже видели для $k = 2$, в антисимметричных произведениях k октонионнозначных матриц, некоторое их количество является излишним (для $k = 2$ из-за автоморфизмов G_2 14 таких произведений должны быть аннулированы). В общем случае [14], можно составить таблицу, выражающую число независимых компонент в D нечетно-мерном пространстве-времени октонионной реализации алгебры Клиффорда, принимая во внимание, что среди D гамма-матриц, 7 из них являются октонионнозначными, в то время как остальные $D - 7$ чисто вещественными. Мы получаем следующую таблицу, в которой столбцы отмечены числами k – количеством антисимметричных гамма-матриц, а строки нумеруются посредством размерности D (до $D = 13$)

$D \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	1	7	7	1	1	7	7	1						
9	1	9	22	22	10	10	22	22	9	1				
11	1	11	41	75	76	52	52	76	75	41	11	1		
13	1	13	64	168	267	279	232	232	279	267	168	64	13	1

(28)

Октонионная эквивалентность различных секторов может быть символически выражена для различных нечетных размерностей пространства-времени таблицей

$D = 7$	$M0 \equiv M3$
$D = 9$	$M0 + M1 \equiv M4$
$D = 11$	$M1 + M2 \equiv M5$
$D = 13$	$M2 + M3 \equiv M6$
$D = 15$	$M3 + M4 \equiv M0 + M7$

(29)

В $D = 11$ размерности соотношение между $M1 + M2$ и $M5$ может быть получено явно следующим образом. 11 векторных индексов μ разбиваются на 4 вещественных индекса, обозначаемых $a, b, c, \dots$, и 7 октонионных индексов, обозначаемых $i, j, k, \dots$. 52 независимые компоненты восстанавливаются из $52 = 4 + 2 \times 7 + 6 + 28$, в соответствии с

4	$M1_a$	$M5_{[aijkl]} \equiv M5_a$
7	$M1_i, M2_{[ij]} \equiv M2_i$	$M5_{[abcdi]} \equiv M5_i, M5_{[ijklm]} \equiv \widetilde{M5}_i$
6	$M2_{[ab]}$	$M5_{[abijk]} \equiv M5_{[ab]}$
$4 \times 7 = 28$	$M2_{[ai]}$	$M5_{[abcij]} \equiv M5_{[ai]}$

(30)

Октонионная суперконформная М-алгебра

Конформная алгебра октонионной М-теории может быть введена [12] адаптацией к одиннадцатимерию процедуры, обсуждаемой в [5] для 10-ти мерного случая. Это требует отождествления конформной алгебры октонионной $D = 11$ М-алгебры с обобщенной алгеброй Лоренца в $(11, 2)$ -мерном пространстве-времени. В таком пространстве-времени октонионные гамма-матрицы Клиффорда являются 8-мерными. Базис эрмитовых генераторов задается 64-мя антисимметричными два-тензорами $ST_{[\mu_1\mu_2]}Z^{\mu_1\mu_2}$ и 168 антисимметричными три-тензорами $ST_{[\mu_1\mu_2\mu_3]}Z^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ (или, эквивалентно, 232 антисимметричными шесть-тензорами $ST_{[\mu_1\dots\mu_6]}Z^{\mu_1\dots\mu_6}$). Это подсказывает, что общее число генераторов в конформной алгебре равно 232. Мы покажем, что это так.

В соответствии с [5], конформная алгебра может быть введена как алгебра преобразований, оставляющих инвариантным скалярное произведение дираковских спиноров. В $(11, 2)$ оно задается посредством $\psi^\dagger C \eta$, где матрица C , аналог Γ^0 , задаваемая как произведение двух пространственно-подобных гамма-матриц Клиффорда, является вещественнозначной и полностью антисимметричной. Следовательно, конформные преобразования реализуются как октонионнозначные 8-мерные матрицы M , оставляющие C инвариантным, т. е. удовлетворяющие

$$M^\dagger C + C M = 0. \quad (31)$$

Это позволяет отождествить (квази)-группу конформных преобразований с (квази)-группой симплектических преобразований. Действительно, после простой замены переменных, C может быть приведена к форме

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_4 \\ -\mathbf{1}_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Наиболее общая октонионнозначная матрица, оставляющая инвариантным Ω , может быть представлена через

$$M = \begin{pmatrix} D & B \\ C & -D^\dagger \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где 4×4 октонионные матрицы B, C эрмитовы

$$B = B^\dagger, \quad C = C^\dagger. \quad (34)$$

Легко видеть, что общее число независимых компонент в (33) есть в точности 232, как и ожидалось, исходя из предыдущих рассмотрений.

Стоит отметить, что множество матриц M типа (33) образуют замкнутую алгебраическую структуру посредством обычного матричного коммутирования. Действительно, $[M, M] \subset M$ обеспечивает структуру $Sp(8|\mathbf{O})$ на M . Для суперсимметричного расширения суперконформной алгебры, мы должны поместить 64-вещественно-компонентные (или 8-октонионно) спиноры из $(11, 2)$ в суперматрицу расширенной $Sp(8|\mathbf{O})$. Это может быть достигнуто следующим образом. Два 4-рядных октонионных спинора α и β могут быть помещены в суперматрицу следующей формы

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\beta^\dagger & \alpha^\dagger \\ \hline \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (35)$$

После антикоммутирования, нижний бозонный диагональный блок редуцируется к $Sp(8|\mathbf{O})$. С другой стороны, дополнительные семь генераторов, соответствующие 1-мерной антиэрмитовой матрице A

$$A^\dagger = -A, \quad (36)$$

т. е. представляющие семь мнимых октонионов, получаются в верхнем бозонном диагональном блоке. Следовательно, общий (generic) бозонный элемент принимает форму

$$\left(\begin{array}{c|cc} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & D & B \\ 0 & C & -D^\dagger \end{array} \right), \quad (37)$$

где A , B и C удовлетворяют (36) и (34).

Замкнутая супералгебраическая структура с (35) как общим (generic) фермионным элементом и (37) как общим бозонным элементом, будет обозначаться $OSp(1, 8|\mathbf{O})$. Это суперконформная алгебра M -теории, которая допускает общее число 239 бозонных генераторов.

Выводы

Мы увидели, что, вопреки общепринятому убеждению, может быть последовательно введена альтернативная формулировка M супералгебры и M суперконформной алгебры, на основе неассоциативной максимальной делимой алгеброй октонионов. При этом возникают необычные свойства, такие как отсутствие независимости различных октонионных секторов бран, что является отражением антисимметричных октонионных тензорных тождеств высокого ранга, обсуждаемых в части 5. Существование такого второго варианта M алгебры озадачивает. В конечном счете, это может быть связано с появлением исключительных структур (исключительных алгебр Ли и йордановых алгебр) в "Теории Всего" [19].

Так как мнимые октонионы допускают геометрическое описание в терминах семимерной сферы S^7 , вполне можно предположить, что высокоразмерные октонионные структуры, в том числе и одиннадцатимерные, соответствуют компактификациям одиннадцатимерной M теории на $AdS_4 \times S^7$. Эта компактификация соответствует естественному решению для 11-мерной супергравитации, см. [20].

Октонионная суперконформная алгебра $OSp(1, 8|\mathbf{O})$ была получена явно. Она соответствует суперсимметричному расширению бозонной конформной алгебры, которая интересна с математической точки, ввиду того, что она связана с замкнутой алгебраической структурой, которая выходит за рамки стандартного понимания конформной алгебры заданной йордановой алгебры, см. [12].

Помимо этого аспекта, было представлено понятие эрмитовой (комплексной или кватернионной) и голоморфной (комплексной и кватернионной) суперсимметрии, как последовательного делимо-алгебраического ограничения обобщенной суперсимметрии.

Физические следствия этих математических структур вполне очевидны. Классификация обобщенных суперсимметрий позволяет понять паутину взаимосвязанных дуальностей различных классов теорий, которые могут быть либо аналитически продолжены (скажем, на евклидовы случай), либо восстановлены посредством размерной редукции.

Как пример, мы можем упомянуть, что аналитическое продолжение M алгебры, как было доказано в [23], соответствует одиннадцатимерной комплексной голоморфной суперсимметрии. Более того, в [15] показано, что эта же алгебра допускает 12-мерное евклидово представление в терминах вейль-проективных спиноров. Эти два примера евклидовых суперсимметрий могут найти свои приложения в функционально-интегральных формулировках многомерных суперсимметричных моделей.

Существует интересный класс моделей, который хорошо вписывается в изложенную здесь схему и подвергается активному изучению. Это класс суперчастичных моделей, впервые введенных в [24] и изучавшихся в [25], бозонные координаты которых соответствуют тензорным центральным зарядам. В работе [26] было показано, что 4-мерная теория подобного рода приводит к башне безмассовых состояний высшего спина, конкретно осуществляя предложение Фронсдала [27] по введению бозонных тензорных координат для описания теорий безмассовых высших спинов (допускающих гелевость больше двойки). Это область активных исследований, основная мотивация которых – изучение пределов теории суперструн без напряжений, соответствующих башне безмассовых частиц высокой гелевости (см. [28]).

В каком-нибудь "ортогональном" направлении, класс теорий, которые могут быть изучены на данном пути, является классом суперсимметричных расширений супергравитаций Черна-Саймонса в высших размерностях, требующих в качестве базисной составляющей супералгебры Ли, допускающей оператор Казимира подходящего порядка, см. [29].

Литература

- [1] E. Bergshoeff and A. Van Proeyen, *Class. Quant. Grav.* **17**, 3277 (2000).
- [2] R. Haag, J. Łopuszański and M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B 88**, 257 (1975).
- [3] T. Kugo and P. Townsend, *Nucl. Phys.* **B 221**, 357 (1983).
- [4] D. B. Fairlie and A. C. Manogue, *Phys. Rev.* **D 34**, 1832 (1986).
- [5] K. W. Chung and A. Sudbery, *Phys. Lett.* **B 198**, 161 (1987).
- [6] C. A. Barton and A. Sudbery, *math.RA/0203010*.
- [7] E. Witten, "Quest For Unification", *hep-ph/0207124*.
- [8] P. Ramond, "Algebraic Dreams", *hep-th/0112261*.
- [9] M. Günaydin, C. Piron and H. Ruegg, *Comm. Math. Phys.* **61** (1978), 69.
- [10] L. Smolin, *hep-th/0104050*.
- [11] J. Lukierski and F. Toppan, *Phys. Lett.* **B 539**, (2002), 266.
- [12] J. Lukierski and F. Toppan, *Phys. Lett.* **B 567**, 125 (2003).
- [13] S. Okubo, *J. Math. Phys.* **32**, 1657 (1991); *ibid.* **32**, 1669 (1991).
- [14] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *JHEP04* (2003) 040.
- [15] F. Toppan, *JHEP09* (2004) 016.
- [16] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, *Mod. Phys. Lett.* **A 18**, 787 (2003).
- [17] J. Baez, "The Octonions", *math.RA/0105155*.
- [18] R. D'Auria, S. Ferrara, M. A. Lledo and V. S. Varadarajan, *J. Geom. Phys.* **40** 101 (2001); R. D'Auria, S. Ferrara and M. A. Lledo, *Lett. Math. Phys.* **57**, 123 (2001); S. Ferrara and M. A. Lledo, *Rev. Math. Phys.* **14**, 519 (2002).
- [19] L. Boya, "Octonions and M-theory", *hep-th/0301037*.
- [20] M. J. Duff and C. N. Pope, "Kaluza-Klein supergravity and the seven-sphere" in *Supersymmetry and Supergravity 82, Trieste proceedings*; M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, *Phys. Rep.* **130** (1986), 1.

- [21] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. Townsend, *Ann. Phys.* **18**, 330 (1987).
- [22] M. J. Duff, R. R. Khuri, J. X. Lu, *Phys. Rep.* **259**, 213 (1995).
- [23] J. Lukierski and F. Toppan, *Phys. Lett. B* **584**, 315 (2004).
- [24] E. Sezgin and I. Rudychiev, "Superparticles, p -form coordinates and the BPS condition", hep-th/9711128.
- [25] I. Bandos and J. Lukierski, *Mod. Phys. Lett. A* **14** 1257 (1999).
- [26] I. Bandos, J. Lukierski, C. Preitschopf and D. Sorokin, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 065009.
- [27] C. Fronsdal, "Massless Particles, Ortosymplectic Symmetry and Another Type of Kaluza-Klein Theory", in "Essays on Supersymmetry", Reidel (1986) (Math. Phys. Studies, v. 8).
- [28] D. Sorokin, "Introduction to the Classical Theory of Higher Spin", hep-th/0405069.
- [29] M. Hassaine, R. Troncoso and J. Zanelli, "Eleven-dimensional supergravity as a gauge-theory for the M -algebra", hep-th/0306258.