

ГОТЛОБ ФРЕГЕ

ЛОГИКО-ФИЛОСОФСКИЕ ТРУДЫ

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ОСНОВОПОЛОЖЕНИЯ АРИФМЕТИКИ



(ПУТИ ФИЛОСОФИИ — THE WAYS OF PHILOSOPHY)



GOTTLOB FREGE

**LOGISCHE
UNTERSUCHUNGEN**

**DIE GRUNDLAGEN
DER ARITHMETIC**



ГОТЛОБ ФРЕГЕ

**ЛОГИКО-
ФИЛОСОФСКИЕ
ТРУДЫ**

**ЛОГИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ**

**ОСНОВОПОЛОЖЕНИЯ
АРИФМЕТИКИ**



Сибирское университетское издательство

УДК 10 (09)
ББК 87.3
Ф86

Перевод с английского, немецкого, французского
Суровцев В. А.

В оформлении обложки использована миниатюра «Журавль»,
представленная в английском рукописном bestiarii кон. XII в.
(РНБ, Лат. Q.v.VI, XII в., л. 49)

Фреге Г.

Ф86 **Логико-философские труды [Текст] / Готлоб Фреге; пер. с англ., нем., франц. В. А. Суровцева. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. — 283 с. — (Пути философии).**

ISBN 978-5-379-00760-7

В сборнике представлены труды величайшего немецкого логика, философа и математика Готлоба Фреге (1848–1925), посвящённые философии логики и философии математики. Разрабатывая программу логицизма (программу сведения математики к логике), Фреге создал новые средства формального анализа, которые лежат в основании всех последующих разработок символической логики и исследований в основаниях математики. Новаторские взгляды Фреге входят в необходимый арсенал современных философских методов. Его идеи способствовали глобальной реформе в области философии математики, философии языка и теории познания. Его определение понятия числа с точки зрения логических понятий представляет собой классическую модель редукции одной области знания к другой. Его последовательная критика психологизма привела к значительному изменению структуры и формы теории познания, возродив, в противовес субъективизации познавательных процессов, так называемый «реализм» в логике и математике, который оказал значительное влияние на феноменологию. Принципы, сформулированные Фреге, до сих пор служат руководством для исследований в области лингвистической философии и языкознания.

УДК 10 (09)
ББК 87.3

© Суровцев В. А., вступит. статья,
2008, перевод, 1998, 2000, 2005

© Сибирское университетское
издательство, оформление, 2008

ISBN 978-5-379-00760-7

СОДЕРЖАНИЕ

В. А. Суровцев О ЛОГИКО-ФИЛОСОФСКИХ ВЗГЛЯДАХ ГОТЛОБА ФРЕГЕ	5
---	---

Готлоб ФРЕГЕ

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	27
Мысль: логическое исследование	28
Отрицание: логическое исследование	54
Логические исследования. Часть третья: сложная мысль	74
Сложная мысль первого рода	75
Сложная мысль второго рода	78
Сложная мысль третьего рода	80
Сложная мысль четвертого рода	81
Сложная мысль пятого рода	83
Сложная мысль шестого рода	85
Обзор шести сложных мыслей	90
Логическая всеобщность (фрагмент четвертого исследования)	96
<i>Примечания переводчика</i>	102
ОСНОВОПОЛОЖЕНИЯ АРИФМЕТИКИ. ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ О ПОНЯТИИ ЧИСЛА	125
Содержание	126
Введение	132
I. Мнения отдельных авторов	
о природе арифметических предложений	143
Доказуемы ли числовые формулы?	143
Являются ли законы арифметики индуктивными истинами?	149
Являются законы арифметики априорно синтетическими или же аналитическими?	153
II. Мнения отдельных авторов о понятии числа	159
Является ли число свойством внешних вещей?	161
Является ли число чем-то субъективным?	166
Число как множество	170
III. Мнения о единице и один	171
Выражает ли числительное «один» свойство предметов?	171
Равны ли единицы друг другу?	174
Попытки преодолеть затруднение	180
Решение затруднения	186
IV. Понятие числа	193
Каждое отдельное число является самостоятельным предметом	193
Чтобы получить понятие числа, необходимо установить смысл равенства чисел	197

Дополнение и проверка нашего определения	205
Бесконечные числа	218
Заключение	221
Другие числа	225
<i>Примечания переводчика</i>	237
ЦЕЛОЕ ЧИСЛО	239
<i>Примечания переводчика</i>	245
[17 УЗЛОВЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ О ЛОГИКЕ]	247
<i>Примечания переводчика</i>	249
 ПРИЛОЖЕНИЕ	
Пол Бенацераф	
ФРЕГЕ: ПОСЛЕДНИЙ ЛОГИЦИСТ	252
1. Логицизм	253
2. Фреге	260
3. Заключение	279

В. А. Суровцев

О ЛОГИКО-ФИЛОСОФСКИХ ВЗГЛЯДАХ ГОТЛОБА ФРЕГЕ*

В сборнике представлены труды величайшего немецкого логика, философа и математика Г. Фреге (1848–1925), посвящённые философии логики и философии математики. Цель данного предисловия — обрисовать их идеологический контекст, связанный с новым образом логики, её возможного содержания и её связи с математикой.

Взгляды Г. Фреге возникли на волне интереса к формальной логике, которая, обогатившись новыми методами, с середины XIX века начинает бурно развиваться. Обычно этот бурный рост связывают с последующим возникновением аналитической философии, воспользовавшейся этими достижениями для изменения образа философии. Но к этому необходимо добавить, что влияние логики отнюдь не ограничивалось лишь аналитической философией; во второй половине XIX века представители всех философских направлений, от позитивистов до неогегельянцев, писали «логические исследования», на этой же волне возникла и феноменология Гуссерля. Исключительное внимание к логике на рубеже веков трудно обосновать лишь ссылкой на то, что логика является философской наукой. Скорее, объяснение этому надо искать в её взаимодействии с теми отраслями знания, которые выходили за рамки философского. И здесь особую роль сыграли психология и математика. Появление психологии стимулировало развитие логической мысли в том отношении, что с привнесением в философию позитивного естественнонаучного духа возникала иллюзия, что теория познания обретёт наконец так недостающие ей прочные основания, и в этом отношении психологическое объяснение логики, как ядра теории познания, должно было сыграть свою ведущую роль. Цель психологизации, по существу, сводилась к стремлению объяснить логические структуры естественными процессами, протекающими в индивидуальном челове-

* При поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 07-06-00185-а, и гранта на поддержку научных школ НШ-5887.2008.6.

ческом сознании, а не способностями трансцендентального субъекта или самоопределением объективного духа. Однако психологизация не приводила к позитивному расширению границ логики как науки, с точки зрения содержания она всё так же понималась, по словам Канта, «вполне законченной и завершённой», ограничиваясь тем, что сейчас понимается под традиционной логикой. И несмотря на то, что рефлексия над основаниями логики не раз приводила к радикальному изменению философских установок, в данном случае был дан фальстарт. Психологическое обоснование не принесло ощутимой пользы, прочный фундамент так и не был заложен, а позитивное расширение границ логического ограничилось разработкой субъективных условий применения тех объективных законов и норм, которые и так давно были известны.

Иное дело — воздействие математики на логику. XIX век возродил идею Лейбница о *Mathesis Universalis* как единстве *characteristica universalis* (искусственного языка науки) и *calculus ratiocinator* (исчисления умозаключений), что не только позволило расширить границы формальной логики, но и совершить подлинную революцию как в понимании природы логического, так и в понимании перспектив применения философских методов. Последнее обстоятельство позволило Б. Расселу утверждать, что формальная логика с середины XIX века каждые десять лет создаёт больше, чем было создано за весь период от Аристотеля до Лейбница. Математизация логики — процесс прямо противоположный её психологизации и, пожалуй, характеризует одну из наиболее интересных коллизий в развитии науки.

В ряду известных философов и логиков конца XIX — начала XX века Г. Фреге занимает особое место. Его роль в современной логике, которую он в значительной степени создал, сравнима разве что с ролью Аристотеля в логике традиционной. Фреге, в частности, заложил основы той области знания, которая получила название оснований математики, впервые отчётливо связав проблему формального единства содержания математики с принятыми в ней способами рассуждения и заложив тем самым основы теории формальных систем. Это стало возможным только потому, что им была осуществлена одна из первых аксиоматизаций логики высказываний и логики предикатов, причём последняя фактически впервые появилась в его трудах. Г. Фреге заложил основы логической семантики, отделив в логической теории средства выражения (синтаксис) от того, что они обозначают. Наконец, он выдвинул программу прояснения основных понятий математики, которую и попытался осуществить с помощью процедуры сведения математики к логике, реализуя одну из возможных методик прояснения специфики математического знания.

Совокупность результатов, достигнутых им в логике, предполагала совершенно определённый концептуальный сдвиг, который отражает влияние Фреге на развитие современной мысли в целом. На чём же ос-

нован этот концептуальный сдвиг? Он основан на новом понимании роли языка, который начинает рассматриваться как исчисление, аналогичное математическим теориям.

Язык как вычислительная процедура представлен Г. Фреге в первой крупной работе *Begriffsschrift (Шрифт понятий)*, где он разрабатывает формальный язык, позволяющий явным образом представить систематическую связь теоретических истин. Своеобразие данной программы заключается в том, что она никогда не была ориентирована на прояснение сущности языка в том смысле, что она не отталкивается от общей предпосылки: язык функционирует, описывая реальность или в каком-либо отношении указывая на неё. Рассматривая мысль как содержание предложения, Г. Фреге никогда не ставил перед собой задачи выяснения того, каким образом мысль относится к действительности. Главная проблема, стоящая перед ним, — это проблема логического вывода, следовательно, все импликации его теории оправданы только в перспективе объяснения последнего. Использование языка не ограничивается высказыванием истин, обычный дискурс включает вопросы, императивы и другого типа нереференциальные выражения, которые невозможно редуцировать к индикативной функции, но цель Фреге ограничивается лишь таким анализом, который ориентирован на язык осуществления вывода. Он не говорит о том, что есть язык, но говорит о том, что если в языке должны осуществляться выводы и доказательства, а нечто должно признаваться истинным, то использование языка должно отвечать определённой структуре. Эта структура должна быть чётко зафиксирована с помощью определённых выразительных средств, имеющих формальный характер.

Наиболее важную роль такие выводы и доказательства играют в точных науках, особенно в математике, которая сама использует искусственный язык для выражения своих истин. Однако язык математики ограничивается выражением её собственного содержания, употребляя там, где нужно установить теоретическую связь истин, средства обыденного языка. Последние, однако, не свободны от двусмысленностей. В обыденном языке смешаны выражения, обозначающие индивидуальные мыслительные процессы, с помощью которых сознание отдельного человека приходит к выводу о связи разрозненных результатов, и объективные отношения, характеризующие систематическую связь истин. Двусмысленность выражений естественного языка отражается и на философии, поскольку лежит в основании попыток психологического обоснования логики и математики. Создавая искусственный язык логического следования, Г. Фреге ставит задачу последовательной экспликации объективного хода математического доказательства.

Поставленная задача сама по себе не есть совершенно новое изобретение, она ставилась много раз, но только Фреге впервые связывает её с анализом сущности выразительных средств. Исследование совокупности теоретических истин ставится в зависимость от исследования

языка. Отвлечение от конкретного содержания мышления естественным образом связано с отвлечением от конкретного содержания выражений, с проникновением в их чистую форму. Этому как раз и служит разработанный Г. Фреге «скопированный с арифметического чистый язык формульного мышления». Этот язык, являясь вспомогательным средством, позволяет скрупулёзно проанализировать структуру естественного языка, устраняя имплицитные двусмысленности последнего. Дело в том, что язык повседневного общения вовсе не приспособлен для выражения научных истин и тем более их теоретической связи, поскольку даже то, что может быть связано, не всегда в явном виде обнаруживает в нём эту связь.

Надо сказать, что и до Фреге логика использовала формальный язык для представления некоторых фрагментов вывода. Типичным, да и, пожалуй, единственным примером здесь является силлогистика. Язык, описывающий структуру простого атрибутивного суждения, в некоторой степени может служить аналогом тому, что хочет сделать Фреге. Однако его задача и по существу, и по объёму значительно превосходит то, что было сделано в традиционной логике. Дело даже не в том, что силлогистика не охватывает множества умозаключений, известных из практики рассуждений, например, выводы из сложных суждений, для которых традиционная логика так и не построила никакой целостной теории, но ограничилась лишь перечислением основных из них. Аппарат традиционной логики совершенно не приспособлен для выражения большинства утверждений математики, ориентированной на анализ отношений. Кроме того, даже представленная в формальном виде, традиционная силлогистика не является строго дедуктивной теорией. Вид, который придали ей учебники логики, скорее характеризует её как дескриптивную теорию, описывающую некоторую сложившуюся практику рассуждений с фиксированными правилами, следование которым позволяет из истинных посылок получать истинные заключения. Как зачаток дедуктивной формы силлогистики можно рассматривать процедуру сведения одних модусов к другим, но и здесь принципы сведения не всегда имеют чёткую формулировку и далеки от того идеала совершенства, который видится Г. Фреге. Однако силлогистика демонстрирует принципиальную возможность построения такой теории, которая отражает структуры вывода, а не содержание того, к чему он применяется.

Экспозиция логического вывода с помощью формального языка позволяет решить важную проблему чёткого разведения в рамках теории двух существенно разнородных частей: первой — связанной с совокупностью теоретических истин, относящихся к собственному содержанию данной теории, и второй — универсальной для всякого знания, если оно претендует хотя бы на видимость теоретического единства, истины этой части суть истины, относящиеся исключительно к ком-

петенции логики. По мысли Фреге, первая часть, выходящая за рамки логики и имеющая конкретный содержательный характер, должна служить своего рода совокупностью утверждений теории, тогда как вторая часть есть механизм получения следствий. Причём этот механизм должен быть настолько эффективным, что позволит получать из базиса всё содержание исследуемой науки.

Поскольку механизм дедукции независим от содержания любой теории, постольку он может быть исследован независимо от неё и сам представлен в виде теории, что и демонстрирует Фреге. Строя искусственный язык, он осуществляет первую аксиоматизацию логики, строго отделяя то, что принято называть законами, которые он рассматривает как основу своего формульного языка, от того, что позволяет из совокупности исходных законов получить производные положения, то есть то, что принято называть логическим выводом. Таким образом, искусственный язык является не просто средством описания, но представляет собой строгую дедуктивную систему, построенную по образцу вычислительных процедур математических теорий. Результативность такого подхода трудно переоценить. Помимо того, что многие результаты логики, полученные независимо друг от друга, наконец приобретают должное систематическое единство, многие истины, которые, казалось бы, можно получить только на основании наблюдения или предметного исследования, черпают своё основание из другого источника.

Конструируя формальный язык логики как разновидность исчисления, Фреге приводит общие соображения о его строении, отталкиваясь от тех средств, которые предоставляет формульный язык математического вычисления. Последний состоит из двух категорий знаков. Одни из них представляют переменные количества или неопределённые функции, а другие — константы, имеющие собственное, однозначно фиксированное значение. Так, в выражении $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ знаки a и b относятся к первой группе, а знаки $+$ и \times — ко второй. В общей теории величин формализация (отвлечение от содержания) затрагивает количество, делая безразличным его конкретное выражение. Однако эта процедура сохраняет фиксированное значение констант, что позволяет исследовать их свойства, характеризующие общий смысл операций вычисления. Теория величин стремится представить эти свойства в систематическом виде, фиксируя их, например, в виде правил арифметики. Сходная процедура применима и в логике, которая, отвлекаясь от конкретного содержания мысли, сохраняет фиксированные способы её соединения. Это известно уже силлогистике, которая, представляя структуру простых атрибутивных суждений в виде SaP , SeP , SiP , SoP , рассматривает S и P как знаки переменных содержаний, а a , e , i , o — как знаки константных способов связи. Фреге распространяет данный подход на конструируемый им формульный язык, отличая логические кон-

станты, выраженные такими словами, как 'все', 'некоторые', 'не', 'если... то' и т. п., от содержания, к которому они могут относиться. Например, выражение «Если сахар поместить в воду, то он растворится» состоит из содержания, которое может мыслиться переменным, и способа связи 'если... то', который остаётся тем же самым, даже если содержание заменить, скажем, так: «Если металлический стержень нагреть, то он увеличится в размерах». Данный пример показывает, что можно рассмотреть форму связи в отвлечении от содержания, представив её в виде «Если p , то q », где ' p ' и ' q ' суть знаки переменных содержаний. Но при этом необходимо учитывать, что выражение 'если... то', как оно используется в обыденном языке, может существенно отличаться от логического смысла условной связи. Для того чтобы избежать смешения различных смыслов таких выражений, в формульном языке за константами необходимо закрепить особые знаки, которые указывали бы только на тот смысл, который необходим при экспликации структуры логического вывода. Точно так же в математике знакам $+$ и \times придан совершенно определённый смысл, независимый от того, что в обыденном языке понимается под словами 'прибавить' и 'умножить'. Как и в математике, уровень формального анализа в логике позволяет систематически прояснить свойства и отношения констант, установив их в виде законов. Дедуктивная форма представления должна привести эти законы в систематическую связь, представленную в виде вычислительной процедуры, имеющей строгий алгоритм.

Представление языка в виде формальной структуры, аналогичной математической, заставляет по-новому взглянуть на грамматическую структуру выражений. Одно из самых главных достижений Фреге заключается в том, что он предложил формальный анализ предложений, существенно отличающийся от традиционной классификации суждений. Этот новый анализ базировался на аналогии между понятиями и функциями. Фреге не отрицает достижения традиционного анализа, основанного на аристотелевском способе членения логической структуры предложения. В последнем случае, как известно, в структуре суждения выделяются два термина, несущих содержательную нагрузку (субъект и предикат), и различные способы связи этих терминов. Выделение терминов суждения основано на принципе логического ударения, когда субъект определяется как то, о чём говорится в суждении, а предикат — как то, что говорится в суждении. Однако такая трактовка приемлема только в том случае, если суждение понимается как форма связи понятий, где субъект с предикатом и рассматриваются в качестве таковых. Причём определение позиции субъекта и предиката во многом зависит не от логической формы суждения, а производно от грамматической формы его языкового выражения. По мнению Фреге, ссылаться при таком членении суждения на грамматическую форму ошибочно, поскольку с точки зрения логики главным в высказывании являются не языковые средства выражения, а заключённый в них смысл,

который может быть выражен различными способами, сохраняя при этом свою тождественность. В этом случае ориентация на логическое ударение в рамках традиционного деления суждения становится бессмысленной. Возьмём следующий пример. Высказывания «При Платеях греки победили персов» и «При Платеях персы были побеждены греками» обладают одинаковым *понятийным содержанием*, которое только и имеет значение для логики. Однако при традиционном членении суждения мы должны были бы признать различие в их логической структуре, поскольку в первом случае субъектом были бы 'греки', а во втором — 'персы'. Кроме того, подход традиционной логики не оправдывает себя в тех случаях, когда необходим более точный анализ, связанный со спецификой термина, а не способа связи. Так, например, в традиционной логике суждения с общими и единичными субъектами относятся к одной разновидности, тогда как во многих случаях именно это различие играет существенную роль.

Фреге отказывается от принципа логического ударения, но тогда нужен какой-то новый принцип выделения элементов структуры предложения. Традиционная логика всегда начинала свой анализ с понятий, рассматривая их как исходный логический элемент. Фреге же предлагает собственное понимание логической структуры. Определяющим при этом становится не форма связи понятий, а условия истинности высказываний. С этой точки зрения элементы логической структуры высказывания должны определяться только в зависимости от той роли, которую они играют при установлении его истинностного значения. Отталкиваясь от этого принципа, Фреге заменяет субъект и предикат на функцию и аргумент. Функция понимается как то, что сопоставляет аргументам, входящим в высказывание, некоторое значение истинности. Так, например, в высказывании «Водород легче углекислого газа» выражение 'быть легче углекислого газа' может рассматриваться как функция, сопоставляющая аргументу 'водород' значение 'истина'. Если же в качестве аргументов взять другие названия газов, эта же функция может придавать им значение 'ложь'. В качестве замены слова 'водород' могут мыслиться 'кислород', 'азот' и т. д. Таким образом, любое высказывание распадается на две части: одна из них не изменяется, а другая мыслится заменяемой. Первая является функцией, а вторая — аргументом; первая содержит переменную, а вторая является значением переменной.

Позиция функции определяется наличием в ней некоторого *ненасыщенного* места, которое нужно заполнить для того, чтобы получить целостное высказывание, имеющее истинностное значение. Ненасыщенность есть специфическое свойство функциональных выражений и функций в противоположность насыщенным выражениям, именам, которым соответствуют предметы. С точки зрения Фреге, любое предложение, представляющее собой языковое выражение простого суждения, должно распадаться на функциональную и аргументную

части. Аргументная часть имеет собственное значение в виде предмета, который может мыслиться как заполняющий ненасыщенное место. Функциональная часть собственного значения не имеет, его смысл определяется только в контексте целостного предложения как функция, областью определения которой являются предметы, а областью значения — два выделенных значения: истина и ложь. С этой точки зрения, понятия, по Фреге, суть предметно-истинностные функции, сопоставляющие под них подпадающим предметам истинностное значение. Так, например, высказывание «Сократ — человек» не является формой связи понятий 'Сократ' и 'человек'. Данное выражение распадается на аргументное выражение 'Сократ', являющееся именем предмета, и функциональное выражение 'человек ...', соответствующее понятию, с которым предмет находится в отношении подпадения. Такой подход позволяет не только анализировать суждения о свойствах, но и даёт новый формальный аппарат для выражения отношений, которыми традиционная логика фактически пренебрегала. В приведённом выше примере «Водород легче углекислого газа» заменяемыми могут мыслиться два выражения — 'водород' и 'углекислый газ'. Соответственно остаётся вдвойне ненасыщенная часть '... легче ...', которая может рассматриваться как выражение двухместной функции, также являющейся предметно-истинностной. В принципе любое n -местное отношение можно выразить с помощью n -местной функции.

Согласно функциональному подходу отношение подпадения предмета под понятие необходимо строго отличать от отношения подчинения между понятиями, чем зачастую пренебрегала традиционная логика. С точки зрения последней высказывания «Сократ — человек» и «Человек — смертен» имеют одинаковую логическую форму, в которой приписывается свойство. Фреге же считает эти выражения различными на том основании, что во втором высказывании присутствуют два в равной степени ненасыщенных выражения 'человек ...' и 'смертен ...'. Каждое из этих выражений при заполнении ненасыщенной части может образовать высказывание, а стало быть, в отличие от «Сократ — человек» высказывание «Человек — смертен» является сложным, состоящим из двух простых. Речь в нём идёт о том, что если нечто удовлетворяет функцию 'человек ...', то оно удовлетворяет и функцию 'смертен ...'. Этот и ему подобные примеры выражают условную связь, так же как и высказывание «Если сахар поместить в воду, то он растворится», но в скрытой форме. Поэтому полный анализ логических связей, помимо простых высказываний, должен охватывать и логические союзы, выражающие отношения между ними.

При экспликации логических союзов Фреге также отталкивается от принципа, связывающего анализ логической структуры с истинностным значением высказывания. Рассматривая условную связь, нужно заметить, что истинность выражения 'Если p , то q ' зависит от истинно-

сти составляющих его 'р' и 'q'. Например, можно сказать, что при истинности и условия и следствия всё выражение будет истинным, а при истинности условия и ложности следствия всё выражение будет ложным. Аналогичным образом через комбинацию истинностных значений можно ввести и другие логические союзы. Например, соединительный союз (логическое умножение) подразумевает, что выражение 'р и q' будет истинным в том и только в том случае, если истинно и р и q, а разделительный союз (логическое сложение) подразумевает, что выражение 'р или q' будет ложным в том и только том случае, если и р и q являются ложными. Таким образом, Фреге интерпретирует логические союзы как выражение функций, но функций несколько иного рода. Логические союзы являющиеся ненасыщенными выражениями (например, 'Если ..., то ...', '... и ...', '... или ...') и требуют дополнения в виде высказываний, имеющих истинностное значение. Стало быть, соответствующие им функции являются истинностно-истинностными, поскольку и область их определения, и область их значения являются истина и ложь.

При общем подходе простейшая истинностно-истинностная функция соответствует уже простому высказыванию, взятому как единое целое. Такой подход позволяет совершенно иначе, чем в традиционной логике, интерпретировать отрицание. В случае простого атрибутивного суждения отрицание трактуется как внутреннее отношение между субъектом и предикатом. Так, например, в высказывании «Сократ не является христианином» традиционная логика объединяет частицу 'не' со связкой, рассматривая её как отрицание некоторого свойства у Сократа. Но с точки зрения Фреге отрицание затрагивает не форму связи понятий, а выражение целостного содержания, представленного в данном предложении, которое должно прочитываться как «Неверно, что Сократ — христианин». Все спекуляции о различии между внутренним и внешним, т. е. относящимся к содержанию целостного предложения, вхождении отрицания Фреге считает надуманными и не относящимися к делу. Для интерпретации собственно логического содержания мысли вполне достаточно второго. А в этом случае отрицание можно, подобно другим логическим союзам, рассматривать как истинностно-истинностную функцию, которая одному значению истинности сопоставляет другое. Так, например, значению 'ложь' выражения «Сократ — христианин» отрицание сопоставляет значение 'истина'.

Истинностно-истинностные функции не обязательно соотносятся с одним или двумя высказываниями. Сложное выражение может объединять несколько логических союзов и относящихся к ним содержаний, которые могут мыслиться переменными. Высказывание «Если Сократ — язычник, то он не является христианином» содержит два логических союза с соответствующими переменными содержаниями. Возможны любые комбинации логических союзов, представляющих форму соотношения сложных мыслей. В этой связи интересно то, что комбинации одних союзов можно рассматривать как равносильные

комбинациям других логических союзов. Поскольку здесь играет роль только соотношение значений истинности, то различные функции, сопоставляющие одинаковым аргументам одинаковые значения, можно отождествить.

Константные выражения, рассматриваемые в логике, не исчерпываются логическими союзами. Не меньшее значение имеют выражения общности. Такие слова, как 'все' или 'некоторые', уже традиционной логикой рассматривались как подпадающие под её компетенцию. Однако старый анализ относил эти выражения к способам связи субъекта и предиката, различая их в зависимости от того, приписывается ли свойство, выраженное предикатом, всему объёму субъекта или же некоторой его части, и соотнося их с отношением подчинения между понятиями. Структура выражения «Все люди смертны» рассматривалась как «Все S суть P », а структура предложения «Некоторые люди — греки» как «Некоторые S суть P ». Фреге предлагает иную точку зрения. Как уже указывалось выше, высказывания типа «Все люди смертны» не могут рассматриваться как предикирование свойства, поскольку содержат два функциональных выражения, находящихся в отношении условной связи. Выраженная в них всеобщность должна рассматриваться с позиций отношения подпадения предмета под понятие и интерпретироваться как способ координации подпадения одного и того же предмета под различные понятия.

Выражения общности (то, что в современной логике называют кванторами), 'все' и 'некоторые', интерпретируются Фреге как функции второго порядка. Они являются ненасыщенными выражениями и сами по себе не имеют никакого значения. Их смысл раскрывается в применении к предметно-истинностным функциям, которые рассматриваются как функции первого порядка. Возьмём, например, функцию 'легче углекислого газа ...'. Можно сказать, что эта функция выполняема, то есть сопоставляет значение 'истина' некоторым, но не всем аргументам. Поэтому выражение 'все' (квантор всеобщности) будет сопоставлять этой первопорядковой функции значение 'ложь', а выражение 'некоторый' (квантор существования) будет сопоставлять ей значение 'истина'. Таким образом, с точки зрения Фреге, выражение всеобщности ('все') должно рассматриваться как обозначение функции, значением которой является истина, если её аргументом, в свою очередь, является функция, значением которой является 'истина' для каждого аргумента, в противном случае значением второпорядковой функции будет 'ложь'. В простейшем случае (в случае одноместных функций или понятий) если аргументом общности является понятие, под которое подпадает каждый предмет, то всё выражение истинно, если же нет, то ложно.

Анализируя логические структуры, Фреге ориентируется на выделение в языке специфических функциональных выражений, которые являются ненасыщенными и требуют дополнения для образования целост-

ного предложения. Однако дело здесь не только в языковой структуре. Внешние формы выражения являются лишь материальной оболочкой некоторого содержания, и в этом смысле они могут оказаться вполне случайными. Функциональному выражению должно соответствовать нечто в содержании. Ненасыщенность в области знаков относится не к знакам самим по себе, а к способам их употребления, заданным отношением к обозначаемому. Поэтому необходимо чётко различать знак и обозначаемый им внеязыковой объект, функциональное выражение и соответствующую ему функцию. Особенности первого суть лишь отражение особенностей последней.

Проблема соотношения знака и внеязыкового объекта интересует Фреге не только в связи с функциональными выражениями. В языке наряду с последними мы находим знаки аргументов, или имена, и предложения, выражающие целостное содержание, оцениваемое как истинное и ложное. Естественно должен возникнуть вопрос, какова структура отношения этих знаков к тому, что они обозначают. Этот вопрос имеет ещё больший смысл, если учесть, что функциональное выражение приобретает значение только в контексте целостного предложения при дополнении её знаком аргумента.

Фреге начинает анализ отношения наименования со знаков аргументов, которые он называет собственными именами и под которыми понимает любое выражение, имеющее значение в виде самостоятельного предмета. В качестве отправной точки он избирает отношение тождества двух имён. Обычная трактовка связывает это отношение либо с отношением вещей, либо с отношением знаков. Однако Фреге отвергает и то и другое. Если бы тождество сводилось к совпадению предмета с самим собой, то установление подобного отношения не имело бы познавательного значения, так как соответствующее суждение было бы аналитическим в смысле Канта и не содержало бы никакого приращения знания. Тождественность предмета самому себе есть отправной пункт всякого познания, а не его результат. Когда же мы говорим, что ' $a = b$ ', мы утверждаем нечто явно отличное от ' $a = a$ ' ввиду различной эвристической ценности этих выражений. Скорее можно было бы предположить, что отношение тождества — это отношение между различными обозначениями одного и того же. Однако если всё сводилось бы лишь к отношению между знаками, то роль играл бы только используемый способ обозначения, что также не имело бы эвристической ценности ввиду произвольности принятой системы знаков. Как считает Фреге, разница может появиться только тогда, когда различию знаков соответствует различие в способах данности обозначаемого. Если мы намереваемся правильно решить проблему тождества, необходимо допустить ещё один компонент, характеризующий отношение наименования, то есть отношение между предметом и знаком. Таким компонентом является выраженный в языке способ указания на предмет, который не есть собственно язы-

ковая оболочка и не есть предмет объективной реальности, а отличается и от того, и от другого. Этому третьему элементу отношения наименования, который Фреге называет смыслом, отводится эвристическая функция приращения знания.

Введение в структуру отношения наименования такого компонента, как смысл, позволяет решить проблему осмысленного функционирования пустых, т. е. не имеющих предметного значения, имён, типа 'Одиссей' или 'самое большое число'. Когда встречаются такие выражения, речь, очевидно, не может идти об их предметном значении, но они могут употребляться осмысленно. В этом отношении наличие смысла независимо от наличия соответствующего объекта.

Под именами Фреге понимает любой знак, обозначающий самостоятельный предмет, а не только то, что обычно рассматривается как собственные имена, и в этом его терминология отличается от общепринятой. Отличается от общепринятой и его трактовка собственных имён, относительно которых обычно предполагается, что они не имеют смысла, а служат просто для указания на предмет. Фреге же распространяет своё различие смысла и значения в том числе и на них, он не отказывает собственным именам в наличии смысла. Однако в этом случае может возникнуть проблема с субъективизацией наполнения смыслом одной и той же языковой оболочки, поскольку с одним и тем же собственным именем разными людьми могут связываться разные смыслы. Однако эта проблема может быть разрешена на основании вводимого Фреге принципа контекстности, который говорит, что подлинным смыслом и подлинным значением выражения обладают только в контексте целостного предложения.

Требование рассматривать смысл и значение функциональных выражений и имён в контексте всего предложения заставляет поставить вопрос о смысле и значении последнего. Всякое повествовательное предложение, считает Фреге, содержит мысль, которая понимается как то, что может быть достоянием тех, кто понимает предложение. Является ли эта мысль как раз тем предметным значением, о котором говорит предложение? Если бы это было так, тогда замена одного из компонентов предложения на другое с тем же самым значением, но другим смыслом не оказывала бы влияние на предметное значение всего предложения. Однако если в предложении «Утренняя звезда — это планета, освещаемая Солнцем» мы заменим имя 'Утренняя звезда' на имя 'Вечерняя звезда', мысль, выраженная в предложении, очевидно, изменится. С точки зрения принципа контекстности, который утверждает, что смысл целого есть функция смыслов его частей, выраженную в предложении мысль скорее следует считать смыслом предложения. Но что же тогда представляет собой его предметное значение? Ответить на этот вопрос, полагает Фреге, поможет рассмотрение ситуации, в которой нас интересует предметное значение. Дело в том, что предложения могут осмысленно функционировать и в том случае, если мы ограничиваемся

лишь их смыслом. Например, предложение «Одиссея высадили на берег в состоянии глубокого сна» является вполне осмысленным, но вряд ли нам придёт в голову приписывать этому предложению истинностное значение, поскольку тогда пришлось бы вполне серьёзно утверждать, что и имя 'Одиссей' имеет значение.

Вопрос о значении составляющих предложение имён возникает только тогда, когда ставится вопрос об истинности или ложности предложения. Поэтому, руководствуясь всё тем же принципом контекстности, который значение целого ставит в зависимость от значения составляющих, необходимо признать, что значением предложения является его истинностное значение. Фреге развивает номинативную теорию предложений, где истина и ложь рассматриваются как особые предметы, именами которых являются предложения. В этом смысле класс имён расширяется, что вполне оправданно, поскольку логические союзы понимаются как выражение особого рода функций, аргументами которых являются предложения. В данном случае Фреге продолжает последовательное различие между понятием (функцией) и предметом. Именами такого, пусть и абстрактного, предмета, как истина, являются все истинные предложения, а именами такого предмета, как ложь, — все ложные предложения. Таким образом, все предложения, не содержащие пустых имён, разбиваются на две группы, каждая из которых соответствует одному из двух значений. Различаются же предложения выраженной в них мыслью, которая по-разному указывает на значение, выполняя функцию смысла, как определено выше.

Таким образом, в знаковой системе выделяются три категории знаков: собственные имена, имена функций и имена истинностных значений. Каждое из них связано с предметным значением посредством смысла. Принцип контекстности определяет, что предметное значение и смысл имени истинностного значения (предложения) есть производная значений и смысла собственных имён и имён функций.

Мысль и истинностное значение — это два совершенно разных элемента в отношении наименования; второе не является частью первого. Поскольку истина и ложь — не смысл, но предметы, пусть и абстрактные, стало быть, характеристика предложения как истинного или ложного ничего не добавляет к содержащейся в нём мысли. Приписывание мысли истинностного значения — это отношение иного рода, чем отношение между функцией и аргументом, из которых состоит мысль. Функция и аргумент находятся на одном уровне, дополняя друг друга, они создают целостную мысль, которая может функционировать, даже если мы ничего не знаем о её истинности. Вопрос об истине возникает только тогда, когда мы переходим к утверждению мысли.

С точки зрения Фреге, в структуре утвердительного предложения необходимо различать: 1) схватывание мысли — мышление; 2) признание истинности мысли — суждение; 3) демонстрацию этого суждения — утверждение. Первый этап соответствует усвоению содержания

предложения. Признание истинности заключено в форме утвердительного предложения и соответствует переходу от содержания предложения к его истинностному значению. Необходимость разведения мысли и суждения обосновывается тем, что усвоение содержания предложения не связано однозначно с возможным признанием его истинным или ложным, тот же самый смысл может быть усвоен в форме вопроса. Более того, очень часто случается так, что между усвоением мысли и утверждением её истинности лежит значительный промежуток времени, как, например, происходит в научных исследованиях. Признание истинности выражается в форме утвердительного предложения. При этом совсем не обязательно использовать слово 'истинный'. Даже в том случае, если это слово всё же употребляется, собственно утверждающая сила принадлежит не ему, а форме утвердительного предложения. Поскольку признание истинным зависит исключительно от *формы* утвердительного предложения, постольку оно не имеет никакого отношения к чувству субъективной уверенности, сопровождающему психологическое осуществление акта суждения. Признание истинным — объективный процесс, характеризующий форму выражения мысли.

Понимание логической структуры мысли и формальный язык, предложенный Фреге, предоставляют значительно больше возможностей, чем традиционный подход. Но структуры чего пытается эксплицировать логика, описывая их с помощью искусственного языка? Что представляет собой смысл, заключённый в языковых выражениях? Возможность отвлечения от содержания сама по себе ещё ничего не говорит о его специфике. Имеет ли оно характер индивидуального представления в сознании отдельного человека? Зависят ли специфические особенности содержания от внешних форм выражения, к которым можно отнести естественные языки, и сопутствующих обстоятельств, связанных с психологической окраской акта суждения? Отражают ли в этом случае логические структуры формы протекания индивидуальных психологических процессов, не являются ли законы логики предписаниями, касающимися осуществления конкретной душевной жизни? Господствующий во второй половине XIX века психологизм в обосновании логики и математики в основном отвечал на эти вопросы утвердительно. Однако для Фреге характерно последовательно проводимое различие логического (объективного) и психологического (субъективного).

Последнее проявляется уже при определении структуры мыслимого содержания. Его членение на функцию и предмет совершенно не зависит от возможных различий языковых оболочек, в которых она может быть выражена. Основанием выделения здесь выступает самоидентичность, скрытая за изменчивой формой предложения. Например, глагол из активного залога можно перевести в пассивный, но общее содержание предложения от этого не меняется. К сущности логического должно относиться только то, что не оставляет места для

догадки. С психологизацией логики связано уже понимание суждения как приписывание субъекту предиката. Но отношение элементов логической структуры не есть результат мыслительного процесса, их связь друг с другом установлена объективно, поскольку отражается на истинности целого, которая не имеет отношения к чувству субъективной уверенности, а представляет собой независимую оценку. Всё, что не влияет на такую оценку, относится лишь к намёкам, сопровождающим субъективный мыслительный акт, к которым можно отнести большую или меньшую степень уверенности, сомнения, расположения и прочие психологические модусы. К таким же несущественным деталям принадлежат стиль, интонация и пр. Для содержания теоремы Пифагора неважно, будет она выражена в поэтической форме или же прозой, будет её выражение сопровождаться уверенностью или же сомнением, соотношение гипотенузы и катетов от этого не изменится.

Ещё в меньшей степени содержание, оцениваемое как истинное или ложное, можно отнести к разряду субъективных представлений. Содержание индивидуальной психической жизни, формирующееся в результате чувственного восприятия, характеризуется относительностью и изменчивостью. Совершенно иные свойства мы находим у знаний, являющихся достоянием науки. Содержание научного закона не формируется в результате мыслительной деятельности отдельного человека. В противном случае оно менялось бы от одного носителя к другому.

Противопоставление смысла, как общего достояния, и представления, как части опыта одного человека, образует подоплёку всех философских рассуждений Фреге. Спецификация свойств представления позволяет ему провести демаркационную линию между психологией и логикой. В этой связи в структуре отношения знака к обозначаемому представлению играет немаловажную роль. С содержательной точки зрения, образующей философскую ткань произведений Фреге, скорее следовало бы говорить не о семантическом треугольнике 'знак-смысл-значение', а о четырёхэлементной структуре, определяющей динамику оперирования со знаками. Представление, как четвёртый компонент, отвечает за включение в отношение наименования всего того, что не оказывает влияния на объективные аспекты референции, а зависит от индивидуальной психической жизни. Можно было бы также сказать, что в отличие от смысла и значения, определяющих необходимые черты выражений, представления суть всё то, что для выражения является случайным.

Знание, претендующее на истинность, не должно принадлежать сознанию отдельного человека. Сама истина формирует объективные аспекты референции, поскольку выступает в качестве предметного значения, не зависящего от конкретной психической жизни. Таковы все истины науки, значение которых оставалось бы неизменным, даже если

бы не существовало ни одного человека. Объективность мысли сродни объективности вещей внешнего мира, которые не изменяются ни под воздействием нашего мышления, ни даже усилием воли. Дерево как внешний объект моих психических процессов не изменяется в результате того, что моё отношение к нему имеет определённую психологическую окраску, оно не изменяется в результате того, что я всегда воспринимаю лишь его часть. Так и мысль, будучи воспринята, не меняет своей истинности, но всегда пребывает самотождественной и неизменной. Отождествление мысли с представлением подобно отождествлению с представлением внешнего объекта. Моё восприятие дерева отличается от того, как воспринимает его другой; и если бы не было ничего, кроме восприятий, то, значит, и не было бы основания утверждать, что содержание моего сознания то же самое, что и содержание сознания другого. Точно так же утверждать, что мысль относится к содержанию моей психической жизни и что у другого она может быть другой в связи с особенностями его личного склада, — значит утверждать, что нет никакой объективной истины.

Фреге считает, что необходимо признать существование третьей области. Её содержание соответствует представлениям в том отношении, что не может быть воспринято чувствами, а вещам — в том отношении, что не требует носителя, сознанию которого принадлежит. Постулируя существование третьей области, Фреге возрождает точку зрения платонизма. Его позицию можно охарактеризовать как логический и лингвистический реализм, выносящий идеальное содержание нашего сознания за пределы последнего и утверждающий существование своеобразного мира идей. Смыслы представляют собой непсихологические, экзистенциально независимые от конкретной душевной жизни, объективные и внеэмпирические сущности, которые не являются собственностью мышления отдельного человека. Единственное отношение, связывающее их с познающим индивидом, Фреге обозначает как схватывание, но и оно не приводит к каким-либо изменениям в смыслах. Схватывание — это процесс, позволяющий выйти за пределы субъективной жизни и прикоснуться к объективной истине. Схватывание соответствует особой духовной способности, рассматриваемой Фреге на манер интеллектуального созерцания. В этом процессе мышление не создаёт мысли, но вступает в отношение с чем-то объективным. Мысль тесно связана с истиной, но то, что признаётся истинным, то, о чём выносится суждение, является истинным совершенно независимо от того, кто выносит суждение. Когда учёный говорит о факте как о твёрдом основании науки, он имеет в виду мысль, которая признаётся за истинную, и если бы последняя зависела от изменчивых состояний человеческого рассудка, то никакой речи об объективном знании идти не могло бы. Учёный не создаёт, но открывает истины, которые безотносительны ко времени. Мысль, выраженная в теореме Пифагора, вневременна, вечно; её содержание

можно применить к такому состоянию мира, когда человека вообще не было и, значит, некому было признать её истинной. Так, например, поступает астроном, изучая возникновение Вселенной.

Логика также не является наукой о субъективных психических процессах, её предмет не сводится к анализу структуры содержания индивидуального сознания. Логика изучает архитектонику объективной области смыслов, существующих до и независимо от человека. В этом отношении логика не сводима ни к психологии, ни к любой другой науке. Её искусственный язык описывает структурные взаимосвязи, столь же независимые, как и представленное в них содержание. Архитектоника искусственного языка логики есть образ архитектоники объективной области смыслов, которую искажает язык повседневного общения.

Область смыслов не является простой совокупностью разрозненных содержаний, а представляет собой систематическую связь истин. Дело логики состоит в прояснении этой систематической связи и представлении её в дедуктивной форме. Так называемые законы логики есть не что иное, как предписания, управляющие процедурой вывода одной мысли из другой. Предложения логики представляют собой не что иное, как законы дедукции, оправдывающие возможность логического вывода. Проверка следования одной мысли из другой всегда должна сводиться к проверке того, удовлетворяет ли вывод предписанию, выраженному в некотором предложении логики.

Все предложения логики можно привести в систематическую связь, представив в виде теории. Такой теорией и является формульный язык, цель которого не только отразить логическую структуру мысли, но и эксплицировать механизм получения следствий. Свою логистическую теорию Фреге строит по образцу аксиоматических теорий, где одни логические предложения рассматриваются как аксиомы и не требуют доказательств ввиду очевидности содержащейся в них мысли; все другие предложения рассматриваются как следствия исходных. Достаточным основанием признания логического закона в этом случае выступает возможность выведения его из аксиом. Таким образом, всё содержание логики представляется в строго дедуктивном виде и образует должное единство.

Реформа логики у Фреге не ограничивается тем, что традиционно связывалось с логическим, но распространяется и на основания математики, которые он находит в новой логике. К середине XIX века усилиями ряда мыслителей уже стал проясняться характер связи математики и логики, единство которых было предугадано ещё Лейбницем. Осознание тесной связи пришло со стороны математиков. Первый шаг на этом пути был сделан трудами англичан А. де Моргана и Дж. Буля. Предложив алгебраическую интерпретацию логических отношений, они создали предпосылки формирования математизированной логики, которая нашла своё окончательное выражение в трудах немецкого

математика Э. Шрёдера. Рассматриваемая как раздел алгебры, логика предстала здесь как совокупность вычислительных процедур, распространённых с отношений между переменными величинами на отношения между переменными содержаниями. Однако, несмотря на зримые достижения, такой подход таил одно парадоксальное следствие. С одной стороны, логика представлялась разделом математики; с другой стороны, понимаемая как наука об универсальных законах мышления, логика должна была оправдать в том числе и математические рассуждения. Выход из затруднительной ситуации был найден Г. Фреге, который взамен математизированной логики предложил логизированную математику.

Несмотря на новизну предложенного решения, суть новаций не выходила за рамки внутренних интенций развития современной математики. Создание неколичественной алгебры, теории трансфинитных чисел и т. д. всё более зримо указывало на отсутствие связи между математическими положениями и эмпирическим исследованием. Наличие независимых друг от друга, но в равной степени обоснованных теорий типа неевклидовых геометрий требовало нового обоснования специфики математического рассуждения. Таким образом, математика всё более утрачивала эмпирическую основу, что приводило к двум важным следствиям. Во-первых, математические символы всё более и более теряли конкретную связь с пространственными и количественными отношениями, приобретая формальный характер, более свойственный логике, которая, отвлекаясь от содержания мысли, оперирует чистыми формами, репрезентирующими последовательность рассуждений. Математика становится наукой о порядке. Во-вторых, математическое знание более не рассматривается как совокупность истин об особом роде предметов, как считалось со времён Платона, а понимается как выведение следствий. Математики отказываются от понимания истины как определённой адекватности между продуцируемым ими знанием и действительностью. Критерием истины становится непротиворечивость следствий, полученных из исходных постулатов. Стало быть, и в этом отношении логика, как анализ непротиворечивости рассуждения, приобретает исключительное значение. Оба следствия, по существу, содержат требование логического прояснения лежащих в основании математики понятий. Исследование должно выявить их структурные особенности, обеспечивающие возможность сугубо формального подхода, и гарантировать непротиворечивость формулируемых с их помощью постулатов.

В этом русле как раз и развиваются идеи Фреге, который ставит перед собой проблему выяснения того, как далеко можно продвинуться в арифметике только с помощью умозаключений. Свою задачу он видит в том, чтобы свести основное понятие арифметики 'упорядочивание в ряд' к логической последовательности и на этом пути объяснить понятие числа. Отсюда возникает своеобразная программа создания ло-

гизированной математики, получившая название логицизма. В общем виде эта программа результируется в двух принципах: во-первых, все понятия арифметики должны быть определены с помощью понятий логики и, следовательно, все утверждения арифметики должны быть преобразованы в утверждения логики; во-вторых, в результате такого перевода все истины арифметики должны стать истинами логики. Если учесть, что вся математика может быть сведена к арифметике, данная программа представляет собой проект последовательного выведения всего математического знания из логического. Несмотря на то, что осуществление задач, поставленных Фреге, в целом носит технический характер и на первый взгляд далеко отстоит от насущных проблем философии, их реализация имеет исключительный характер, в том числе и для последней. Со времён Канта истины арифметики и логики считались истинами совершенно различных типов, проходя под рубрикой синтетических и аналитических соответственно. Успешная реализация логицистской программы потребовала бы пересмотра характера всего математического знания, устранив из области арифметики созерцание.

Определяющая дистинкция между понятием и предметом, достигнутая Г. Фреге, используется им как мощное орудие разрешения затруднений с интерпретацией числовых операций и арифметических законов. Критикуя предшествующие способы обоснования чисел — от психологизирующего реализма до формализма, — он основывает своё исследование на специфике структуры понятия, рассматривая число как отражение особенностей этой структуры. Число предстаёт как свойство понятия, которое далеко отстоит как от психологической ассоциации представлений, так и от простого оперирования значками.

Определяя число в логических терминах, Фреге начинает с того, что переводит анализ чисел в область понятий. С его точки зрения, указание на определённое число предполагает соответствующее понятие, под которое подпадает это же самое количество предметов. Например, понятию соответствует число 0, если при любом a предложение, что a не подпадает под это понятие, имеет всеобщее значение. Сходным образом можно сказать: понятию F соответствует число 1, если при любом a предложение, что a не подпадает под F , не имеет всеобщего значения и если из предложений « a подпадает под F » и « b подпадает под F » всегда следует, что a и b суть одно и то же. Такой подход представляется очевидным, и аналогичным образом можно построить весь ряд чисел. Но этого определения явно не хватает, поскольку неясно, что именно считать числом, а что нет. Поэтому данное определение необходимо дополнить общим понятием числа, которое не использовало бы указание на какое-то конкретное число, и, уже отталкиваясь от него, дать определение отдельных чисел. С точки зрения Фреге, число представляет собой предмет и, стало быть, всегда, когда речь идёт о количестве чего-то,

как, например, в предложении «Число спутников Юпитера есть четыре» связка *есть* употребляется не атрибутивно, а как равенство. Поэтому действительная форма данного предложения должна выглядеть следующим образом: «Число четыре равно числу спутников Юпитера». Таким образом, чтобы определить число, необходимо эксплицировать смысла равенства. Равенство определяется через отношение взаимно однозначного соответствия двух классов, представляющих собой объёмы некоторых понятий. Поэтому число можно понимать как то, что соответствует классу всех тех классов, которые имеют одинаковое количество предметов. Так, например, число два соответствует классу всех тех классов, которые содержат ровно два предмета, число три соответствует классу всех тех классов, которые содержат три предмета, и т. д.

Подобное определение числа не содержит круга, как может показаться на первый взгляд, поскольку определение равенства двух классов не обязательно требует указания на число содержащихся в них предметов. Так, например, ожидая прихода гостей, мы можем сказать, что на накрытом столе в результате будет ровно столько обеденных приборов, сколько придёт гостей, хотя можем и не знать заранее, сколько их будет точно. Класс гостей и класс столовых приборов в этом случае находятся во взаимно однозначном соответствии и согласно терминологии Фреге являются равными. Учитывая, что класс представляет собой объём понятия, общее определение числа можно было бы тогда ввести следующим образом: «Выражение “и есть число” равнозначно выражению “Существует понятие такое, что и есть соответствующее ему число”». Таким образом, число можно определить как то, что соответствует классу всех тех классов, которые равны некоторому данному классу. Например, можно было бы сказать, что число два соответствует классу всех тех классов, которые равны классу спутников Марса, а число три соответствует классу всех тех классов, которые равны классу граций, и т. д. Однако такое понимание числа было бы сугубо эмпирическим, а стало быть, бесполезным для целей арифметики. Поэтому при определении каждого числа необходимо найти такое понятие, которое имело бы не только соответствующий объём, но и вводилось бы с помощью исключительно логических терминов, т. е. аналитически.

Фреге развивает данную программу с определения нуля, который соответствует классу всех тех классов предметов, которые не равны сами себе. Так как не существует предметов, не равных самим себе — Фреге считает данное утверждение аналитическим в смысле Канта, — есть только один подходящий класс, это класс, не содержащий элементов, нуль-класс. Входящие в него предметы как раз и подпадают под соответствующее понятие, как указано выше. Отталкиваясь от определения нуля, можно ввести все остальные числа. Поскольку нуль-класс единствен, то число один определяется как то, что соответствует классу всех тех классов, которые равны классу нуль-классов, или как то, что соответствует классу всех тех классов, которые равны классу, чьим единствен-

ным элементом является нуль-класс. Число два определяется как то, что соответствует классу всех тех классов, которые равны классу, содержащему нуль-класс и класс нуль-классов, т. е. класс, соответствующий числу один. Число три определяется как то, что соответствует классу всех тех классов, которые равны классу, содержащему нуль-класс, класс, которому соответствует число один, и класс, которому соответствует число два. Эти определения можно продолжить до бесконечности. Заметим, что данные определения сохраняют отношение порядка и все известные свойства ряда натуральных целых чисел.

Определение числа в терминах логики позволило: во-первых, рассмотреть способы рассуждения, ранее считавшиеся сугубо математическими (например, принцип математической индукции), как разновидность логического метода получения следствий; во-вторых, объяснить природу трансфинитных и комплексных чисел, существование которых казалось парадоксальным. Таким образом, арифметика получала столь необходимое ей достоверное основание, которое связывалось с очевидностью логического знания.

Однако, как это часто бывает с действительно великими идеями, теория Фреге оказалась несвободной от недостатков. В 1901 г., отталкиваясь от исходных положений, принятых Фреге, Б. Рассел сформулировал свой знаменитый парадокс. В целом логицистская программа Фреге оказалась внутренне противоречивой и потребовала значительного пересмотра, чем с большим или меньшим успехом в основном занялись его английские последователи Б. Рассел и А. Н. Уайтхед, реализовав программу изначально предложенную Фреге в капитальном трёхтомном труде *Principia mathematica* (1910–1913).

Однако обнаружение технических парадоксов ни в коей мере не отменяет значимость достижений Готлоба Фреге. Несмотря на то, что на дальнейшее развитие логики и математики задача создания новой логики оказала гораздо большее влияние (новые средства формального анализа, предложенные Г. Фреге, фактически лежат в основании всех последующих разработок символической логики и могут рассматриваться как достижение, по существу независимое от логицизма), чем сама логицистская программа, как и всякие новаторские взгляды, она содержит идеи, вошедшие в необходимый арсенал современных философских методов. Идеи Г. Фреге способствовали глобальной реформе в области философии математики, философии языка и теории познания. В исследованиях по символической логике и основаниям математики ссылки на работы Фреге присутствуют в обязательном порядке. Для философских школ аналитического направления его труды по многим вопросам до сих пор остаются определяющими. Определение понятия числа с точки зрения логических понятий представляет собой классическую модель редукции одной области знания к другой, которая до сих пор служит как образцом для исследований подобного рода, так и примером реализации критических усилий философов и матема-

тиков различных школ и направлений. Последовательная критика психологизма привела к значительному изменению структуры и формы теории познания, возродив, в противовес субъективизации описания познавательных процессов, так называемый «реализм» в логике и математике, который оказал значительное влияние на феноменологию. Ряд принципов (например, принцип контекстности), сформулированных Г. Фреге, до сих пор служит руководством для исследований в области лингвистической философии и языкознания.

При жизни Г. Фреге сетовал на непонимание ввиду технической сложности и оригинальности высказываемых им идей. Возможно, именно это сохраняет свежесть их восприятия современным читателем и служит поводом к новой интерпретации, зачастую далеко отстоящей от оригинального источника.

**ЛОГИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ**

(1918–1923)

МЫСЛЬ: ЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Слово «прекрасное» направляет эстетику, слово «доброе» — этику, а слово «истинное» — логику. Конечно, истина является целью любой науки; но логика связана с ней совсем иным способом. Логика соотносится с истиной примерно так же, как физика — с тяготением или с теплотой. Открывать истины — задача любой науки; логика же добивается познания законов истинности. Слово «закон» используется в двух смыслах¹.

Когда мы говорим о законах нравственности или законах государства, мы имеем в виду правила, которым должно следовать, но с которыми не всегда согласуется происходящее в действительности. Законы же природы суть общее в природных явлениях, которые всегда соответствуют этим законам. Именно в этом последнем смысле я говорю о законах истинности. Правда, речь в этом случае идёт не о том, что имеет место [Geschehen], а о бытии [Sein]. Из законов истинности выводятся правила для признания чего-либо истинным [Fürwahrhalten], мышления, суждения, умозаключения. И, таким образом, вполне можно говорить о законах мышления. Здесь, однако, возникает опасность смешения того, что по сути различно. Словосочетание «законы мышления» можно понимать по аналогии со словосочетанием «законы природы», подразумевая при этом общее в душевных [seelischen] проявлениях мышления. Законы мышления в этом смысле были бы психологическими законами. Поэтому можно прийти к мнению, что логика имеет дело с душевным процессом мышления и с теми психологическими законами, в соответствии с которыми он происходит. Но в этом случае задача логики была бы понята неправильно, поскольку истине не было бы отведено подобающее ей место. Заблуждение или суеверие, точно так же как и настоящее [richtige] знание, имеют свои причины. Признание истинным лжи и признание истинным истины в равной мере происходит в соответствии с психологическими законами. Производные этих законов и объяснение душевного процесса, являющегося источником такого утверждения, не могут подменить доказательство того, что утверждается. Может быть, логические законы также участвуют в этом душевном процессе? Я не хочу этого оспаривать; но

когда затрагивается истина, одной возможности ещё недостаточно. Возможно, что нелогическое также участвует в этом процессе, уводя в сторону от истины. Мы сможем решить это, только познав законы истинности; но мы, вероятно, способны обойтись без таких производных и объяснений душевного процесса, если нам важно решить, оправданно ли утверждение, берущее исток в этом процессе. Чтобы исключить всякое неправильное понимание и воспрепятствовать стиранию границ между психологией и логикой, я буду считать задачей логики обнаружение законов истинности, а не законов утверждения или мышления. В законах истинности раскрывается значение слова «истинный» [wahr].

Но прежде всего я попытаюсь наметить самый общий контур того, что в этой связи я хочу называть истинным. Тогда можно будет отвлечься от употреблений данного слова, лежащих за рамками нашего словоупотребления. Оно не будет употребляться здесь в смысле «подлинный» [wahrhaftig] или «правдивый» [wahrheitsliebend] и так, как это иногда имеет место при обсуждении проблем искусства, когда, например, речь идёт о правде [Wahrheit] искусства, когда правда провозглашается целью искусства, когда обсуждается правдивость произведения искусства или правдивость переданного ощущения. Слово «истинный» помещают также перед другим словом, желая подчеркнуть, что это последнее надлежит понимать в его собственном, непереносном смысле. Такое употребление также лежит вне пути, которому мы здесь следуем; имеется в виду лишь та истина, познание которой является целью науки.

В языковом отношении слово «истинный» проявляется как прилагательное. В связи с этим возникает желание более точно ограничить область, в которой применима истина, в которой вообще может быть поставлен вопрос об истине. Считают, что истина применима к изображениям, представлениям, предложениям и мыслям. Вызывает удивление, что предметы, воспринимаемые зрением и слухом, объединены здесь с предметами, которые в этом смысле не могут быть восприняты. Это указывает на то, что имеет место смысловой сдвиг. В самом деле, разве изображение в качестве видимого и осязаемого предмета может быть истинным в собственном смысле? Разве могут камень или лист быть неистинными? Разумеется, нельзя было бы назвать изображение истинным, если бы за ним не стоял некоторый замысел. Изображение должно нечто изображать. Точно так же и представление называется истинным не само по себе, а лишь в зависимости от того, согласуется ли оно с чем-либо ещё. Отсюда можно было бы предположить, что истинность состоит в согласовании изобра-

жения с изображаемым. Согласованность есть отношение. Этому, однако, противоречит употребление слова «истинный», которое не является соотносительным и не содержит указаний на нечто такое, что требует согласования. Если я не знаю, что некоторое изображение подразумевает изображение Кёльнского собора, то я не знаю, с чем следует сравнивать это изображение для того, чтобы решить, является ли оно истинным. Кроме того, согласованность может быть совершенной лишь в том случае, если согласующиеся вещи совпадают, то есть вообще не являются различными вещами. Подлинность, скажем, банкноты можно установить, сравнивая её с помощью стереоскопического наложения с некоторой настоящей банкнотой. Но попытка совместить таким же образом золотую монету и купюру в 20 марок могла бы только вызвать улыбку. Совместить представление о вещи с самой вещью было бы возможно, если бы вещь также была представлением. Тогда, если бы первое полностью согласовывалось со вторым, они бы совпадали. Но это совсем не то, к чему стремятся, когда определяют истину как согласованность представления с чем-то реальным. При этом существенно как раз то, что реальность отличается от представления. Тогда не может быть ни полного согласования, ни полной истины. Но тогда вообще ничто не было бы истинным; поскольку то, что истинно лишь наполовину, не истинно. Истина не терпит большей или меньшей степени. Или всё же можно полагать, что истина имеет место и тогда, когда согласование имеется лишь в определённом отношении? Но в каком именно? Что мы должны сделать, чтобы решить, является ли нечто истинным? Мы должны были бы исследовать, истинно ли то, что нечто — например, представление и действительность — согласуется в определённом отношении. Но тогда перед нами возник бы тот же самый вопрос, и всё пришлось бы начать сначала. Таким образом, попытка объяснить истинность как согласованность оказывается несостоятельной. Но таким же образом оказывается несостоятельной и всякая другая попытка определения истинности, так как в определении устанавливаются некоторые признаки; но в применении к каждому конкретному случаю всегда возникает вопрос, истинно ли то, что эти признаки наличествуют. Таким образом, мы возвращаемся по кругу. В соответствии с этим вероятно, что содержание слова «истинный» является в высшей степени своеобразным и не поддаётся определению.

Когда истинность приписывают изображению, на самом деле не намереваются приписать свойство, присущее этому изображению всецело независимо от других вещей; напротив, в таких случаях всегда имеют в виду некоторую другую вещь и хотят сказать,

что это изображение каким-то образом согласуется с вещью. «Мое представление согласуется с Кёльнским собором» есть предложение, и теперь возникает вопрос об истинности этого предложения. Таким образом, то, что ошибочно называет истинностью изображений и представлений, сводится к истинности предложений. Что называют предложением? Последовательность звуков; однако лишь в том случае, если она имеет смысл; при этом мы не подразумеваем, что всякая последовательность звуков, имеющая смысл, есть предложение. И когда мы называем предложение истинным, мы на самом деле имеем в виду его смысл². Отсюда следует, что вопрос об истине вообще встаёт относительно смысла предложения. Является ли теперь смысл предложения представлением? В любом случае, быть истинным не заключается в согласовании этого смысла с чем-то иным; в противном случае вопрос об истинности повторялся бы до бесконечности.

Не претендуя на определение, я буду называть мыслью нечто такое, относительно чего встаёт вопрос об истине³. Таким образом, то, что может быть ложным, я причисляю к мысли точно так же, как и то, что может быть истинным*. Сообразно с этим я могу сказать: мысль есть смысл предложения, не подразумевая при этом, что смыслом всякого предложения является мысль. Внечувственная сама по себе, мысль облекается в чувственную оболочку предложения и тем самым становится понятной нам. Мы говорим, что предложение выражает мысль.

Мысль есть нечто внечувственное, и все чувственно воспринимаемые вещи должны быть исключены из той области, в которой возникает вопрос об истине. Истина не является свойством, согласующимся с определённым видом чувственных впечатлений. Таким образом, она резко отличается от свойств, которые мы обозначаем словами «красный», «горький», «ароматный». Но разве мы не видим, что солнце взошло? И разве мы при этом не видим, что

* Сходным образом можно было бы сказать: «Суждение есть то, что является либо истинным, либо ложным». Фактически, я употребляю слово «мысль» [Gedanke] приблизительно в том смысле, который имеет в работах по логике слово «суждение» [Urteil]. Почему я предпочитаю «мысль», станет, как я надеюсь, ясно из дальнейшего. На приведённое объяснение можно возразить на том основании, что в нем вводится различие суждений на истинные и ложные, которое из всех возможных различий суждений является, быть может, наименее значимым. То, что наряду с объяснением вводится и некоторое различие, я не могу признать логическим недостатком. Что же касается его значимости, то её отнюдь не следует недооценивать, ибо логику, как я уже говорил, направляет именно слово «истинный».

это истинно? То, что солнце взошло, — это не предмет, который испускает лучи, достигающие моих глаз; это не вещь, которая видна подобно самому солнцу. То, что солнце взошло, признаётся истинным на основе чувственных впечатлений. Однако быть истинным не является чувственно воспринимаемым свойством. Точно так же магнетизм распознаётся на основе чувственных впечатлений вещи, хотя этому свойству, как и истине, столь же мало соответствуют чувственные впечатления особого рода. В этом указанные свойства совпадают. Однако нам необходимы чувственные впечатления для того, чтобы установить, что тело обладает магнетизмом. Если же я нахожу истинным, что в данный момент не ощущаю никакого запаха, то я делаю это не на основе чувственных впечатлений.

Тем не менее можно считать, что мы не в состоянии узнать свойство вещи, не осознав одновременно, что мысль о том, что данный объект имеет данное свойство, является истинной. Таким образом, с каждым свойством объекта связано некоторое свойство мысли, а именно свойство истинности⁴. Достоинно внимания также и то, что предложение «Я чувствую запах фиалок» имеет то же содержание, что предложение «Истинно, что я чувствую запах фиалок». Таким образом, кажется, что, приписывая мысли свойство истинности, мы ничего не прибавляем к самой мысли. Но разве нельзя говорить о значительном результате, когда после долгих колебаний и мучительных поисков исследователь наконец может сказать: «То, что я предполагал, истинно»? Значение слова «истинный» — в высшей степени своеобразно. Быть может, мы имеем здесь дело с чем-то таким, что в обычном смысле вообще не может быть названо свойством? Несмотря на это сомнение, я буду следовать обычному употреблению, как если бы истинность была свойством, до тех пор пока не будет найдено более подходящее.

Для более точной разработки того, что я хочу назвать мыслью, я буду проводить различие между разными видами предложений*. Предложению, выражающему приказ, нельзя отказать в наличии смысла; но этот смысл иного рода, о его истинности не может возникнуть вопроса. Поэтому смысл такого предложения я не буду называть мыслью. По тем же соображениям исключаются предложения, выражающие желание или просьбу. Будут рассматриваться только те предложения, в которых нечто сообщается или утверж-

* Я употребляю слово «предложение» здесь не в чисто грамматическом смысле, который охватывает и придаточные предложения. Изолированное придаточное предложение не всегда имеет смысл, об истинности которого можно поставить вопрос, тогда как сложное предложение, в состав которого входит придаточное, имеет такой смысл.

дается. Однако я не отношу к их числу возгласы, дающие выход чувствам, стоны, вздохи, смех и т. п., хотя по общему соглашению считается, что они должны нечто сообщать. Но что можно сказать о вопросительных предложениях? В частном вопросе [Wortfrage] мы высказываем неполное предложение, которое приобретает истинный смысл только после дополнения его тем, о чём мы спрашиваем. Соответственно такие вопросы остаются здесь вне рассмотрения. Иначе обстоит дело с общими вопросами [Satzfrage]⁵. В качестве ответа на них мы ожидаем услышать «да» или «нет». Ответ «да» подразумевает то же самое, что и утвердительное предложение; поскольку он указывает на истинность некоторой мысли, которая целиком содержится в вопросительном предложении. Таким образом, общий вопрос можно построить из каждого утвердительного предложения. Восклицание нельзя рассматривать как сообщение именно потому, что для него нельзя построить соответствующий общий вопрос. Вопросительное и утвердительное предложения содержат одну и ту же мысль; но утвердительное предложение содержит и нечто ещё, а именно само утверждение. Вопросительное предложение в свою очередь также содержит нечто ещё, а именно запрос [Aufforderung]. Таким образом, в утвердительном предложении следует различать две вещи: его содержание [Inhalt], которое совпадает с содержанием соответствующего общего вопроса, и утверждение. Первое является мыслью или по крайней мере содержит мысль. Возможно, следовательно, такое выражение мысли, которое не содержит указаний относительно её истинности. В утвердительных предложениях то и другое столь тесно связано, что их отделимость легко не заметить. Итак, мы будем различать:

- 1) схватывание [Fassen] мысли — мышление [Denken];
- 2) признание [Anerkennung] истинности мысли — суждение [Urteilen]*;
- 3) демонстрация [Kundgebung] этого суждения — утверждение [Behaupten]⁶.

* Мне представляется, что до сих пор мысль и суждение отчетливо не различались. Возможно, язык сам потворствует этому. Действительно, в утвердительном предложении нет специального компонента, соответствующего утверждению; то, что нечто высказывается, заключено в самой форме такого предложения. Есть некоторое преимущество в том, что в немецком языке главное и придаточное предложения различаются порядком слов. При этом следует заметить, что придаточное предложение также может содержать утверждение и что часто ни главное, ни придаточное предложения сами по себе не выражают полную мысль, а её выражает лишь сложное предложение.

Мы осуществляем первый этап, когда строим общий вопрос. Прогресс в науке обычно происходит так: вначале мысль схватывается, будучи выражена, например, в виде общего вопроса, а затем, после требуемых исследований, эта мысль признается истинной. Признание истинности мы выражаем в форме утвердительного предложения. При этом нам не требуется слово «истинный». И даже если мы употребляем это слово, собственно утверждающая сила [behauptende Kraft] принадлежит не ему, а форме утвердительного предложения; там же, где оно утрачивает свою утверждающую силу, её не сможет вернуть и слово «истинный». Это происходит, например, если мы говорим не всерьёз. Подобно тому как театральная гром является лишь имитацией грома, театральное сражение — лишь имитацией сражения, так и театральное утверждение является лишь имитацией утверждения. Это только игра, вымысел. Актёр, играя роль, ничего не утверждает, но он и не лжёт, даже если говорит то, в ложности чего он сам уверен. Вымысел — тот случай, когда выражение мыслей не сопровождается, несмотря на форму утвердительного предложения, действительным утверждением их истинности, хотя и можно предположить, что слушающий высказывает своё согласие. Таким образом, даже если перед нами нечто, по форме являющееся утвердительным предложением, всё же всегда необходимо спросить, действительно ли оно содержит утверждение. И на этот вопрос должно ответить отрицательно, если отсутствует требуемая серьёзность. И безразлично, будет ли при этом использоваться слово «истинный». Это объясняет, почему мы, по всей видимости, ничего не добавляем к мысли, приписывая ей свойство истинности⁷.

Утвердительное предложение, наряду с мыслью и утверждением, часто содержит ещё и третий компонент, на который утверждение не распространяется. Обычно его используют для воздействия на эмоции или воображение слушающего. Сюда относятся словосочетания «к сожалению», «слава богу» и им подобные. Такие компоненты предложений в большей степени известны поэзии, однако и в прозе они редко отсутствуют полностью. В сочинениях по математике, физике и химии они встречаются реже, нежели в сочинениях по истории. То, что называют науками о духе [Geisteswissenschaften], стоит ближе к поэзии, но потому и научного в них меньше, чем в точных науках, которые чем суше, тем точнее; ибо точная наука устремлена к истине, и только к истине. Таким образом, все компоненты предложения, на которые не распространяется утверждающая сила, не относятся к научному изложению, но даже тот, кто видит связанную с ними опасность,

едва ли избегает их полностью. Там, где главное — достичь на пути предчувствия [Ahnung] того, что непостижимо разумом, данные компоненты находят своё оправдание. Чем более строгим является изложение в научном отношении, тем менее заметна национальная принадлежность его создателя и тем легче оно поддаётся переводу. Напротив, перевод поэтических произведений те компоненты языка, к которым я здесь хотел привлечь внимание, заметно усложняют, а полный перевод почти всегда делают невозможным; хотя именно они в значительной степени составляют поэтическую ценность и наиболее существенно определяют различие языков.

Для мысли безразлично, какое из слов «лошадь», «конь», «рысак» или «кляча» я использую. Утверждающая сила не распространяется на то, что отличает эти слова друг от друга. То, что в поэзии называется настроением, обаянием, освещением [Beleuchtung], то, что изображается с помощью интонации и ритма, не относится к мысли.

В языке многое предназначено для того, чтобы облегчить слушающему понимание, например выделение члена предложения с помощью интонации или порядка слов. Можно вспомнить также слова типа «ещё» и «уже». В предложении «Альфред ещё не пришёл» сообщается, собственно, что «Альфред не пришёл», но при этом косвенно указывается, что его прихода ожидают, причём указывается именно косвенно [andenten]. Нельзя сказать, что смысл приведённого предложения оказался бы ложным, если бы прихода Альфреда никто не ожидал. Слово «но» отличается от слова «и» тем, что указывает на противопоставление того, что предшествует этому слову, и того, что следует за ним. Подобные намёки [Winke] не приводят к различиям в мысли⁸. Можно перестроить предложение таким образом, что глагол будет переведен из активного залога в пассивный, а аккузативное дополнение окажется подлежащим. Точно так же можно заменить дательный падеж именительным, подставляя вместо глагола «давать» глагол «получать». Разумеется, подобные преобразования не во всех отношениях безразличны; однако они не затрагивают мысли, они не затрагивают того, что может быть истинным или ложным. Признание недопустимости подобных преобразований затруднило бы всякое более глубокое логическое исследование. Одинаково важно как уметь игнорировать различия, не затрагивающие главного, так и уметь выделять те различия, которые касаются существа дела. Однако что именно является существенным — зависит от нашей цели. Для того, кто обращается к красоте языка, важным может оказаться как раз то, что безразлично для логика.

Таким образом, содержание предложения нередко оказывается шире, чем выраженная в нем мысль. Но часто случается и обратное, когда слово, как последовательность звуков [Wortlaut], зафиксированная на письме или с помощью фонографа, оказывается недостаточным для выражения мысли. *Tempus Praesens** употребляется двояким образом: во-первых, для указания на определённый момент времени и, во-вторых, для указания на отсутствие какой-либо временной определённости, когда примысливается вневременность или вечность. Примером здесь могут служить математические законы. Какой из двух указанных случаев имеет место, никак не выражается, об этом нужно догадываться. Если с помощью *Praesens* даётся указание на определённый момент времени, то для правильного понимания мысли необходимо знать время произнесения предложения. Следовательно, время произнесения является частью выражения мысли. Если кто-то сегодня намеревается сказать то же самое, что он выразил вчера, употребив при этом слово «сегодня», он должен заменить это слово на слово «вчера». Хотя это та же самая мысль, говорящий должен выразить её иными словами, чтобы избежать изменения смысла, которое может возникнуть из-за изменения времени произнесения предложения. Сходным образом обстоит дело и с употреблением слов типа «здесь», «там». Во всех подобных случаях слово, как последовательность звуков, в том виде, как оно может быть передано на письме, не обеспечивает полного выражения мысли, но для её правильного понимания необходимо знание некоторых обстоятельств, сопровождающих произнесение и используемых как средства выражения мысли. Сюда могут также относиться указание пальцем, движение руки, направление взгляда. Точно так же последовательность звуков, содержащая слово «я», в устах различных людей будет выражать различные мысли, среди которых одни могут быть истинными, а другие ложными.

С употреблением слова «я» в предложении связан ещё ряд проблем.

Представим себе следующий случай. Доктор Густав Лаубен говорит: «Я был ранен». Лео Петер слышит это и рассказывает через несколько дней: «Доктора Густава Лаубена ранили». Выражает ли последнее предложение ту же мысль, что и предложение, произнесённое самим доктором Лаубеном? Предположим, что Рудольф

* Настоящее время. (Примеч. перев.)

Лингенс был свидетелем слов доктора Лаубена, а теперь слышит и то, что рассказывает Лео Петер. Если доктор Лаубен и Лео Петер высказали одну и ту же мысль, то Рудольф Лингенс, вполне владея немецким языком и помня то, что сказал доктор Лаубен в его присутствии, должен, из рассказа Лео Петера, сразу же установить, что речь идёт об одном и том же. Однако знание немецкого языка — это ещё не всё, если речь идёт о собственных именах. Естественно предположить, что лишь для немногих людей в предложении «Доктора Густава Лаубена ранили» выражена определённая мысль. Для полного понимания в этом случае необходимо знание вокабулы «доктор Густав Лаубен». Если теперь и Лео Петер, и Рудольф Лингенс под словами «доктор Густав Лаубен» подразумевают некоторого единственного врача, который живет в некотором им обим известном месте, то оба они понимают предложение «Доктора Густава Лаубена ранили» одинаково, они вкладывают в него одну и ту же мысль. Но может случиться и так, что Рудольф Лингенс не знает доктора Лаубена лично и не знает, что именно доктор Лаубен недавно сказал «Я был ранен». В этом случае Рудольф Лингенс не может знать, что речь идёт об одном и том же. Поэтому я говорю, что в данном случае мысль, высказанная Лео Петером, не совпадает с мыслью, которую высказал доктор Лаубен.

Предположим, далее, что Херберт Гарнер знает, что именно доктор Густав Лаубен и никто другой родился 13 сентября 1875 г. в N.N., но не знает, где живёт доктор Лаубен в настоящее время и вообще не имеет никаких других сведений о нём. С другой стороны, предположим, что Лео Петер не знает, что доктор Густав Лаубен родился 13 сентября 1875 г. в N.N. В таком случае Херберт Гарнер и Лео Петер будут, употребляя имя собственное «доктор Густав Лаубен», говорить на разных языках, хотя они в действительности и будут этим именем обозначать одного и того же человека; поскольку они не будут знать, что делают именно это. Херберт Гарнер будет связывать с предложением «Доктора Густава Лаубена ранили» не ту мысль, которую хотел бы с его помощью выразить Лео Петер. Избегая явной погрешности, вызванной необходимостью принять, что Херберт Гарнер и Лео Петер говорят на разных языках, я допускаю, что Лео Петер употребляет собственное имя «доктор Лаубен», а Херберт Гарнер — собственное имя «Густав Лаубен». В таком случае возможно, что Херберт Гарнер будет считать истинным смысл предложения «Доктора Лаубена ранили», в то время как смысл предложения «Густава Лаубена ранили» он, введённый в заблуждение ложными сведениями,

будет считать ложным. Таким образом, если принять данные предположения, то эти две мысли оказываются различными.

Итак, собственное имя зависит от того, каким образом задается тот, та или то, кто ими обозначается⁹. Это может происходить различными способами, и каждый такой способ будет соответствовать особому смыслу предложения, содержащего собственное имя. Различные мысли, которые таким образом получаются из одного и того же предложения, в отношении истинностного значения, конечно, согласованы, то есть если одна — истинна, то и все остальные истинны, а если одна из них ложна, то и все остальные ложны. Вместе с тем следует признать и их различие. Поэтому необходимо требовать, чтобы каждому собственному имени был сопоставлен единственный способ, которым задается тот, та или то, кто обозначается этим именем. Выполнение этого требования бывает необязательным, но не во всех случаях.

Каждый представлен самому себе особым и непосредственным способом, как он не может быть представлен никому другому. Так, когда доктор Лаубен думает, что его ранили, он, вероятно, основывается на этом непосредственном способе, которым он представлен самому себе. Мысль, предопределённую этим способом, может схватить только сам доктор Лаубен. Теперь вдруг он собирается сообщить нечто другому. Он не может сообщить ту мысль, которую только он в состоянии схватить. Если же теперь он скажет «Я был ранен», то слово «я» он должен будет употребить в таком смысле, который был бы понятен другому человеку, приблизительно в смысле «тот, кто в этот момент говорит с тобой», используя обстоятельства, сопутствующие его речи, для выражения своей мысли*.

И всё же здесь возникает сомнение. Остаётся ли мысль одной и той же, если прежде её высказывает один человек, а затем другой?

Человек, не затронутый философией, осознает прежде всего те вещи, которые он может видеть и осязать, одним словом, вос-

* Я в данном случае нахожусь не в столь счастливых обстоятельствах, как минералог, который показывает своему собеседнику горный кристалл. Я не могу вложить мысль в руки своим читателям и попросить их хорошенько рассмотреть её со всех сторон. Я должен довольствоваться возможностью представить читателю мысль, саму по себе внечувственную, облачённую в чувственную языковую оболочку. Образность языка создаёт определённые трудности. Вторгаясь, чувственное всегда сообщает выражениям образность, а потому неточность. Таким образом, борьба с языком вынуждает меня заниматься им, хотя собственно это не входит в мою непосредственную задачу. Я надеюсь, что преуспел хотя бы в объяснении моим читателям того, что я хочу называть мыслью.

принимать с помощью чувств, такие как деревья, камни, дома, и он убежден, что и другой человек может точно так же видеть и осязать то же самое дерево, тот же самый камень, которые он сам видит и осязает. В разряд подобных объектов мысль, разумеется, не входит. Может ли она, несмотря на это, находиться в том же самом отношении к людям, что и дерево?

Даже нефилософствующий человек рано или поздно находит необходимым признать существование внутреннего мира, отличного от мира внешнего: мира чувственных впечатлений, созданий его воображения, ощущений, эмоций, настроений; мира склонностей, желаний и решений. Для краткости всё это — за исключением решений — я хочу объединить под названием «представление» [Vorstellung].

Принадлежат ли мысли этому внутреннему миру? Являются ли они представлениями? Очевидно, что решения таковыми не являются.

Чем отличаются представления от объектов внешнего мира?

Во-первых: Представления не могут быть восприняты ни зрением, ни осязанием, ни обонянием, ни вкусом, ни слухом.

Я прогуливаюсь вдвоём со спутником. Я вижу зелёный луг; у меня возникает зрительное ощущение зелёного. Я обладаю им, но я это ощущение не вижу.

Во-вторых: Представлениями обладают. Обладают ощущениями, эмоциями, настроениями, склонностями, желаниями. Представление, которым обладает некто, принадлежит содержанию его сознания.

Луг, лягушки на нём, солнце, их освещающее, существуют независимо от того, смотрю я на них или нет; но чувственное впечатление зелёного, которым я обладаю, существует только благодаря мне; я являюсь его носителем. Казалось бы несообразным, если бы боль, настроение или желание существовали в мире независимо, без их носителя. Ощущение невозможно без ощущающего. Внутренний мир предполагает того, чьим внутренним миром он является.

В-третьих: Представления нуждаются в носителе. Вещи же внешнего мира в этом отношении независимы.

Мой спутник и я убеждены в том, что мы видим один и тот же луг; но у каждого из нас своё особое чувственное впечатление зелёного. Среди зелёных листьев земляники я вижу ягоду. Мой спутник её не замечает; он — дальтоник. Цветовое ощущение, которое он получает от ягоды, практически не отличается от того, которое он получает от листьев. Видит ли мой спутник зелёный лист красным, видит ли он красную ягоду зелёной? Или он и то, и другое видит как один цвет, который вовсе мне не известен? Это вопросы, на которые нет ответа; это, собственно, бессмысленные вопросы. Когда слово «красный» не обозначает свойство вещей, а предназначено для характеристики чувственных впечатлений, принадлежащих моему сознанию, оно применимо только в области моего сознания; в этом случае сравнение моих впечатлений с впечатлениями другого человека невозможно. Для этого потребовалось бы совместить в едином сознании впечатление, принадлежащее одному сознанию, и впечатление, принадлежащее другому сознанию. Даже если бы было возможно сделать так, чтобы при исчезновении представления в одном сознании в то же самое время некоторое представление возникало в другом сознании, вопрос о том, будет ли это одно и то же представление в обоих случаях, все равно оставался бы открытым. Быть содержанием моего сознания настолько существенно для любого из моих представлений, что всякое представление другого человека уже только поэтому отличается от моего. Но, может быть, мои представления, полное содержание моего сознания, одновременно могут быть содержанием всеохватного, возможно божественного, сознания? Только в том случае, если я сам был бы частью божественного сознания. Но тогда были бы ли они на самом деле моими представлениями; разве был бы я их носителем? Последнее превосходит границы человеческого понимания до такой степени, что эту возможность можно не принимать во внимание. В любом случае для нас, как для людей, невозможно сравнение чужих представлений с нашими собственными. Я срываю землянику; я держу её своими пальцами. Теперь и мой спутник видит её, ту же самую ягоду; однако каждый из нас обладает своим собственным представлением. Никто другой не может обладать моим представлением; но многие могут видеть ту же самую вещь. Моя боль не может принадлежать никому другому. Кто-то другой может испытывать ко мне сострадание; но при этом моя боль всегда будет принадлежать мне, а его сострадание — ему. Он не испытывает моей боли, а я не испытываю его сострадания.

В-четвёртых: Всякое представление имеет только одного носителя; никакие два человека не обладают одним и тем же представлением.

В противном случае оно существовало бы независимо и от того, и от другого. Является ли вот эта липа моим представлением? Используя в данном вопросе выражение «вот эта липа», я, собственно, уже предвосхищаю ответ; поскольку этим выражением я хочу указать на то, что вижу я и что могут увидеть и к чему могут прикоснуться другие. И здесь есть две возможности. Если моё намерение исполнено, если выражением «вот эта липа» я указываю на нечто, тогда мысль, выраженная в предложении «Вот эта липа является моим представлением», очевидно должна быть отвергнута. Но если моё намерение не осуществлено, если я только считаю, что нечто вижу, а на самом деле не вижу, если, стало быть, обозначение «вот эта липа» пусто [leer], то я, сам того не зная и не желая, оказался в области вымысла. В этом случае ни содержание предложения «Вот эта липа является моим представлением», ни содержание предложения «Вот эта липа не является моим представлением» не будут истинными; в обоих случаях я обладаю высказываниями, объект которых отсутствует. Поэтому можно только уклониться от ответа на поставленный вопрос, обосновывая это тем, что содержание предложения «Вот эта липа является моим представлением» есть вымысел. Естественно, я и тогда получил некоторое представление; но я не связываю его со словами «вот эта липа». Теперь кто-то другой мог бы на самом деле обозначить словами «вот эта липа» одно из своих представлений; тогда он был бы носителем того, на что он захотел указать с их помощью, но он не видел бы этой липы, и никто другой не видел бы её и не был бы носителем соответствующего представления¹⁰.

Теперь я возвращаюсь к вопросу: является ли мысль представлением? Если мысль, которую я выражаю в теореме Пифагора, может быть признана истинной как мной, так и другими людьми, то она не относится к содержанию моего сознания, а я не являюсь её носителем, хотя и могу признать её истинной. Однако если я и кто-то другой считаем, что содержание теоремы Пифагора вообще не есть одна и та же мысль, тогда на самом деле нужно было бы говорить не «теорема Пифагора», но «моя теорема Пифагора», «его теорема Пифагора» — и они были бы различны; так как смысла необходимо принадлежит предложению. Тогда моя мысль могла бы быть содержанием моего сознания, а

его мысль — содержанием его сознания. Может ли смысл моей теоремы Пифагора быть истинным, в то время как смысл его теоремы Пифагора — ложным? Я говорил, что слово «красный» применимо только в области моего сознания, если считать, что оно не обозначает свойство вещей, а предназначено для характеристики одного из моих чувственных впечатлений. Таким образом, и слова «истинный» и «ложный», как я их понимаю, могли бы быть применимы только в области моего сознания, если предполагать, что они не связаны с тем, носителем чего я не являюсь, а применяются для характеристики того, что содержится в моём сознании. Тогда истина была бы ограничена содержанием моего сознания, и оставалось бы сомнительным, что в сознании других может вообще обнаружиться нечто подобное.

Если каждая мысль требует носителя, содержанию сознания которого она принадлежит, то она была бы мыслью только этого носителя и не было бы науки общей для многих, науки, которую могли бы разрабатывать многие; скорее, у меня будет своя наука, а именно целостность мыслей, носителем которых являюсь я, у другого — его наука. Каждый из нас занимался бы содержанием своего сознания. Тогда противоречие между двумя науками было бы невозможно; более того, споры об истине стали бы праздными, такими же праздными и даже, быть может, смешными, как спор двух людей о том, является ли подлинной банкнота в сто марок, где каждый из спорящих имеет в виду ту банкноту, которая находится у него в кармане, и понимает слово «подлинный» в своём собственном, особом смысле. Если кто-либо считает мысли представлениями, то то, что он, руководствуясь собственной точкой зрения, признаёт истинным, является содержанием его сознания и в сущности никак не соотносится с другими людьми. И если бы он услышал от меня мнение, что мысль не является представлением, он не мог бы оспаривать этого, ибо это мнение его никак не затрагивает.

Итак, мы приходим, по-видимому, к тому, что мысли не являются ни вещами внешнего мира, ни представлениями.

Следует признать третью область¹¹. То, что относится к этой области, соответствует представлениям в том отношении, что не может быть воспринято чувствами, а вещам — в том отношении, что не требует носителя, сознанию которого принадлежит. Так, например, мысль, которую мы выражаем в теореме Пифагора, является истинной безотносительно ко времени [zeitlos], истинной независимо от того, считает ли кто-нибудь её истинной. Она

не нуждается в посетителе. Она является истинной отнюдь не только с момента её открытия, но подобна планете, которая даже и не будучи ещё обнаруженной кем-либо, находится во взаимодействии с другими планетами*.

Однако нельзя не принять во внимание одно, несколько необычное, возражение. Я неоднократно предполагал, что если я вижу некоторую вещь, то и другие могут её видеть. Но вдруг всё это есть лишь сон? Если моя прогулка в сопровождении спутника — только сон, если мне лишь снится, что мой спутник, подобно мне, видит зелёный луг, если всё это — лишь пьеса на сцене моего сознания, то существование вещей внешнего мира было бы крайне сомнительным. Быть может, область вещей пуста, и я не вижу ни предметов, ни людей, а обладаю лишь представлениями, носителем которых сам и являюсь. Представление, будучи чем-то таким, что существует независимо от меня, в столь же малой степени, как моё ощущение усталости, не может быть человеком, не может вместе со мной смотреть на луг, не может видеть ягоду, которую я держу. Однако абсолютно невероятно, что вместо всего окружающего мира, в котором, как я предполагаю, я передвигаюсь и действую, я обладаю лишь своим внутренним миром. И вместе с тем это неизбежное следствие тезиса, что предметом моего рассмотрения может быть только то, что является моим представлением. Что следовало бы из этого тезиса, если бы он был истинным? Существовали бы в этом случае другие люди? Разумеется, их существование возможно, но я ничего не знал бы об этом: дело в том, что человек не может быть моим представлением, а следовательно, если наш тезис истинен, не может быть и предметом моего рассмотрения. И, таким образом, оказались бы беспочвенными соображения, основываясь на которых, я мог предположить, что нечто является предметом для другого человека, как и для меня самого; поскольку, даже если бы и была таковой, то я ничего не слышал бы об этом. Для меня оказалось бы невозможным отличить то, носителем чего я являюсь, от того, носителем чего я не являюсь. Вынося суждение о том, что нечто не является моим представлением, я тем самым делаю это нечто предметом моего мышления и, следовательно, моим представлением. Существует ли с этой точки зрения зелёный луг? Мо-

* Мы видим вещь, мы обладаем представлением, мы схватываем или мыслим мысль. Схватывая или мыслив мысль, мы не создаем её, а лишь вступаем с тем, что уже существовало раньше, в определённые отношения, которые отличаются от зрительного восприятия вещи и от обладания представлением.

жет быть; но он был бы для меня невидим. Ибо, если луг не является моим представлением, то, согласно нашему тезису, он не может быть предметом моего рассмотрения. Если же он является моим представлением, то он невидим; ведь представления невидимы. В самом деле, я могу обладать представлением о зелёном луге, но оно не будет зелёным, поскольку не существует зелёных представлений. А существует ли с этой точки зрения снаряд весом 100 кг? Возможно; но я не смогу ничего о нём узнать. Если снаряд не является моим представлением, тогда он — в соответствии с нашим тезисом — не может быть предметом моего рассмотрения, моего мышления. Но если бы снаряд являлся моим представлением, то он не мог бы иметь вес. Я могу иметь представление о тяжелом снаряде. Тогда оно содержит в качестве составной части представление о тяжести. Но это последнее является свойством целого представления ничуть ни более, чем Германия является свойством Европы. Таким образом, мы приходим к следующему:

Тезис, согласно которому предметом моего восприятия может быть лишь то, что является моим представлением, либо ложен, либо всё моё знание и познание [Erkennen] ограничиваются областью моих представлений, сценой моего сознания. В этом случае я обладал бы только внутренним миром и ничего не знал о других людях.

Удивительно, как противоположности переходят друг в друга в подобных рассуждениях. Возьмем, например, специалиста по физиологии чувств. Как подобает ученому-естествоиспытателю, он вначале далёк от того, чтобы считать своими представлениями объекты, которые он, по его убеждению, видит и осязает. Напротив, в чувственных ощущениях он склонен видеть надёжнейшие источники сведений о вещах, которые всецело независимы от его эмоций, воображения, мышления и которые не нуждаются в его сознании. Нервные волокна, нервные узлы он столь мало считает содержанием своего сознания, что он, напротив, скорее склонен рассматривать своё сознание как зависящее от нервных волокон и нервных узлов. Он устанавливает, что лучи света, преломляясь в глазу, воздействуют на окончания зрительных нервов и вызывают здесь изменение, раздражение. Оттуда нечто через нервные волокна передается к нервным узлам. Дальнейшие процессы происходят в нервной системе; возникают цветовые ощущения, и они связываются с тем, что мы, возможно, назовём представлением о

дереве. Мое представление отделено от дерева физическими, химическими, физиологическими процессами. Непосредственно с моим сознанием связаны, по-видимому, только процессы в моей нервной системе; причем у каждого смотрящего на дерево свои индивидуальные процессы в его индивидуальной нервной системе. Далее, лучи света, прежде чем достичь моих глаз, могут быть отражены поверхностью зеркала и распространяться далее так, как если бы они исходили из места, расположенного за зеркалом. Воздействие на зрительные нервы и всё последующее будут в этом случае происходить точно так, как это происходило бы, если бы лучи света исходили от дерева, расположенного за зеркалом, и неизменёнными попадали в глаз. Таким образом, представление о дереве, в конце концов, будет иметь место, несмотря на то, что подобного дерева вообще не существует. Отклонение световых лучей может воздействовать на глаза и нервную систему таким образом, что вызовет представление, которое ничему не соответствует. Раздражение зрительных нервов не обязательно происходит только под воздействием света. Если вблизи нас ударяет молния, мы считаем, что видим пламя, хотя саму молнию мы видеть не можем. В этом случае зрительный нерв раздражается, вероятно, под воздействием электрических токов, которые возникают в нашем теле вследствие удара молнии. Поскольку зрительный нерв в ответ на это испытывает такое же раздражение, какое он испытал бы в ответ на световые лучи, исходящие от пламени, то мы считаем, что видим пламя. Последнее зависит только от раздражения зрительного нерва; как именно это происходит — безразлично.

Можно продвинуться ещё на один шаг. На самом деле раздражение зрительного нерва не дано нам непосредственно, оно является лишь предположением. Мы считаем, что независимая от нас вещь раздражает нерв и в результате возникает чувственное впечатление; но, строго говоря, мы переживаем только конечный этап этого процесса, который проникает в наше сознание. Разве то чувственное впечатление, это ощущение, которое мы приписываем раздражению нерва, не может иметь также и других причин, подобно тому как одно и то же раздражение нерва может возникать различным образом? Если то, что попадает в наше сознание, мы называем представлением, то на самом деле мы переживаем только представления, а не их причины. И если исследователь захочет избавиться от всего, что является лишь предположением, то у него останутся только представления; все растворится в представлениях — и световые лучи, и нервные волокна, и нервные

узлы, из которых он исходил. Таким образом, он, в конце концов, подрывает основы своего собственного строения. Что же, всё является представлением? Всё предполагает носителя, без которого оно не может быть стабильным? Я рассматриваю себя как носителя своих представлений; но не являюсь ли и я сам представлением? Всё выглядит так, как если бы я лежал на кушетке и мог видеть носки начищенных сапог, верх брюк, жилет, пуговицы, части сюртука (в особенности рукава), две руки, бороду, размытые очертания носа. И всё это объединение зрительных впечатлений, это совокупное представление — это я сам? Мне также кажется, что я вижу на этом месте стул. Стул является представлением. В действительности я не так уж сильно отличаюсь от него; разве я сам не являюсь точно так же совокупностью чувственных впечатлений, представлением? Но где тогда носитель этих представлений? Каким образом я прихожу к выделению одного из этих представлений и полагаю его в качестве носителя остальных? Почему этим представлением должно быть то, которое я выбираю, называя его я? Разве я не могу точно так же выбрать то представление, которое обычно называю стулом? И для чего, наконец, вообще нужен носитель представлений? Однако он всегда был бы чем-то существенно отличным от носимых представлений, чем-то самостоятельным, независимым, не требующим никакого постороннего носителя. Если всё является представлением, то не существует и носителя представлений. И, таким образом, здесь я вновь наблюдаю переход в противоположность. Если не существует носителя представлений, то не существует и представлений; ибо представления требуют носителя, без которого они не могут существовать. Если нет господина, то нет и подданных. Зависимость, которой я вынужден наделять ощущения в отличие от ощущающего, упраздняется, если носителя более не существует. То, что я называл представлениями, становится тогда самостоятельными предметами. И отсутствует какая-либо причина принимать без доказательств особое положение того предмета, который я называю я.

Но возможно ли подобное? Может ли существовать переживание без того, кто это переживание испытывает? Чем было бы всё это зрелище без единого зрителя? Может ли существовать боль без того, кто её испытывает? Быть чьим-то ощущением — необходимо связано с болью, но и тот, кто ощущает, необходимо связан с тем, что ощущается. В таком случае существует и то, что не является моим представлением, но может быть предметом моего рассмотрения, моего мышления; и сам я — того же рода. Или

же я могу быть частью содержания своего сознания, в то время как другая его часть является, возможно, представлением о луне? Может быть, это имеет место тогда, когда я высказываю суждение о том, что я смотрю на луну? Тогда первая часть обладала бы сознанием, а я снова был бы частью содержания этого сознания, и т. д. Но то, что я так до бесконечности вкладываюсь в себя самого, конечно, неприемлемо; поскольку тогда существовал бы не только один я, а бесконечно много. Я не являюсь своим собственным представлением, и если я нечто утверждаю о себе самом, например, что в данный момент я не испытываю боли, то моё суждение имеет отношение к тому, что не является содержанием моего сознания, не является моим представлением; оно относится ко мне самому. Таким образом, то, о чём я нечто утверждаю, не обязательно является моим представлением. Однако мне могут возразить, что, когда я думаю, что в данный момент я не испытываю боли, разве слову «я» не соответствует ничто в содержании моего сознания? И не является ли это представлением? Такое действительно возможно. Определённое представление в моём сознании может быть связано с представлением, заключённым в слове «я». Но в этом случае оно является одним из представлений среди других представлений, а я являюсь его носителем, как и всех других представлений. Я обладаю представлением о себе самом, но я не являюсь этим представлением. То, что является содержанием моего сознания, моим представлением, необходимо строго отличать от того, что является предметом моего мышления. Следовательно, тезис, согласно которому предметом моего рассмотрения, моего мышления может быть только то, что принадлежит содержанию моего сознания, является ложным.

Теперь мне ясен способ, позволяющий признать, что другой человек, так же как и я, является самостоятельным носителем представлений. Я обладаю представлением о нём, но я не смешиваю это представление с ним самим. И если я нечто утверждаю о своем брате, то это утверждение относится к моему брату, а не к моему представлению о нем.

Больной, который испытывает боль, является её носителем; однако лечащий врач, который размышляет о причинах этой боли, не является её носителем. Врачу никогда не придёт в голову считать, что, введя себе обезболивающее, он тем самым устранит боль и у своего пациента. Некоторое представление в сознании врача может вполне соответствовать боли пациента; но это представление не есть боль, не есть то, что пытается устранить

врач. Врач может проконсультироваться со своим коллегой. Тогда нужно различать: во-первых, боль, носителем которой является больной; во-вторых, представление первого врача об этой боли; в-третьих, представление другого врача об этой же боли. Это представление действительно принадлежит содержанию сознания второго врача, но оно не является предметом его размышлений; в большей степени оно является вспомогательным средством для размышления, каковым вероятно мог бы быть рисунок. Оба врача имеют дело с одним и тем же предметом — с болью их пациента, носителями которой они не являются. Отсюда видно, что не только вещь, но и представление может быть общим предметом мышления людей, не обладающих этим представлением.

Итак, мне кажется, дело обстоит следующим образом. Если бы человек не мог мыслить и выбирать в качестве предметов своего мышления то, носителем чего он не является, он обладал бы только внутренним, но не внешним миром. Но не может ли это основываться на ошибке? Я убежден, что представление, которое я связываю со словами «мой брат», соответствует чему-то такому, что не является моим представлением и о чем я могу нечто высказать. Но не могу ли я ошибаться? Такие ошибки случаются. Тогда мы, вопреки нашей воле, впадаем в вымысел. В самом деле, признавая существование внешнего по отношению ко мне мира, я подвергаю себя опасности ошибиться. И здесь я сталкиваюсь с ещё одним различием между моим внутренним миром и внешним миром. У меня не может быть сомнений в том, что я обладаю зрительным впечатлением зелёного; однако я не столь уверен в том, что я вижу именно лист липы. Таким образом, вопреки широко распространённым взглядам мы обнаруживаем во внутреннем мире достоверность, в то время как с переходом во внешний мир сомнение никогда не покидает нас полностью. Как бы то ни было, во многих случаях очень трудно отличить здесь вероятное от достоверного, чтобы мы могли смело судить о предметах внешнего мира. Но если мы не хотим стать жертвами ещё больших опасностей, мы должны осмелиться на это, даже рискуя ошибиться.

Из приведенных рассуждений я делаю следующий вывод: не все то, что может быть предметом моего познания, является представлением. Я, будучи носителем представлений, сам не являюсь представлением. Теперь можно беспрепятственно признать и других людей носителями представлений, подобно мне самому. И, допустив однажды эту возможность, вероятность того, что другие являются носителями представлений, стано-

вится очень большой, настолько большой, что в моём мнении более неотличима от достоверности. Существовала ли, в противном случае, такая наука, как история? Не было ли, в противном случае, всякое учение о долге, всякое право несостоятельным? Что осталось бы тогда от религии? Да и естественные науки, подобно астрологии или алхимии, могли бы считаться только вымыслом. Таким образом, рассуждения, приведённые мной и предполагающие, что кроме меня существуют и другие люди, которые могут иметь общие со мною предметы рассмотрения и мышления, по существу остаются в силе.

Не всё является представлением. Таким образом, я могу также признать мысль, которую другие люди могут схватить в той же степени, что и я, независимой от меня. Я могу признать существование науки, в которой способны сотрудничать многие исследователи. Мы не являемся носителями мыслей так, как мы являемся носителями представлений. Мы обладаем мыслью не так, как мы, например, обладаем чувственным впечатлением; но мы и не видим мысль так, как мы видим, например, звезду. Поэтому разумно выбрать специальное выражение, и слово «схватывать» [fassen] для этого наиболее подходит. Схватывание* мыслей должно соответствовать особой духовной способности, мыслительной силе. В процессе мышления мы не производим мыслей, мы схватываем их. То, что я назвал мыслью, находится в теснейшей связи с истиной. То, что я признаю истинным то, о чём я выношу суждение, является истинным совершенно независимо от того, признаю ли я это истинным и думаю ли я об этом вообще. К истинности мысли не имеет отношения то, что её некто мыслит. «Факты! Факты! Факты!» — восклицает естествоиспытатель, желая подчеркнуть необходимость надёжного обоснования науки. Что такое факт? Факт — это мысль, которая истинна. Но естествоиспытатель, конечно же, не признаёт в качестве надёжного обоснования науки то, что зависит от изменчивых состояний человеческого сознания. Груз учёного состоит не в создании, а в открытии истинных мыслей. Астроном может использовать математическую истину для исследования давно минувших событий, которые происходи-

* Выражение «схватывать» столь же образно, как и выражение «содержание сознания». Природа нашего языка не позволяет выразиться иначе. То, что я держу в ладони, можно, конечно, считать содержащимся в ней, но моя ладонь содержит это совсем не так, как она содержит кости и мышцы, из которых состоит, содержимое ладони гораздо более чужеродно ладони, чем её составляющие.

ли тогда, когда на Земле ещё никто не мог признать эту истину. Астроном может это сделать, поскольку истинность мысли безот-носительна ко времени. Таким образом, эта истина не может возникнуть в момент её открытия¹².

Не всё является представлением. Иначе психология заключала бы в себе все науки или, по крайней мере, была бы высшим судьёй по отношению ко всем наукам; иначе психология господствовала бы над логикой и математикой. Ничто, однако, не было бы бóльшим заблуждением, чем подчинение математики психологии. Ни логика, ни математика не имеют задачи исследовать душу и содержание сознания, носителем которых является отдельный человек. Скорее, их задачей можно было бы считать исследование духа — духа, а не его носителя [des Geistes, nicht der Geister].

Схватывание мысли предполагает того, кто её схватывает, того, кто мыслит. Он является носителем мышления, но не мысли. Хотя мысль и не принадлежит содержанию сознания того, кто мыслит, тем не менее в его сознании нечто должно быть нацелено на мысль. Но это последнее не следует смешивать с самой мыслью. Так, звезда Алголь сама по себе отличается от представления, которым некто обладает об Алголи.

Мысль не относится ни к моему внутреннему миру как представление, ни к внешнему миру чувственно воспринимаемых вещей.

Этот вывод, как бы непреложно он ни следовал из приведённых рассуждений, тем не менее принимается не без некоторого сопротивления. Я думаю, нет ничего невероятного в том, чтобы какой-нибудь человек отрицал возможность получения сведений о чём-то, не относящемся к его внутреннему миру, помимо чувственного восприятия. Действительно, чувственное восприятие часто рассматривается как самый надёжный или даже как единственный источник сведений обо всём, что не относится к внутреннему миру. Но по какому праву? Чувственные впечатления являются необходимой составной частью чувственного восприятия и частью внутреннего мира. Два разных человека никогда не обладают одним и тем же внутренним миром, хотя они и могут испытывать сходные чувственные впечатления. Эти последние сами по себе не открывают нам внешнего мира. Возможно такое существо, которое обладает только чувственными впечатлениями, не видя и не осязая вещей. Обладать зрительными впечатлениями не значит видеть вещи. Как случилось, что я вижу дерево как раз там, где я его вижу? Очевидно, это

зависит от зрительных впечатлений, которыми я обладаю, а также от специфического типа зрительного аппарата, основанного на том, что я вижу двумя глазами. На сетчатке каждого глаза возникает, говоря языком физики, особое изображение. Другой человек видит дерево на том же самом месте. На сетчатке его глаз также имеются два изображения, которые отличаются от моих. Мы должны допустить, что эти изображения на сетчатке глаз являются определяющими для наших впечатлений. Следовательно, мы обладаем зрительными впечатлениями, которые не только не одинаковы, но даже заметно отличаются друг от друга. Однако мы все перемещаемся в одном и том же внешнем мире. Обладать зрительными впечатлениями, конечно, необходимо для того, чтобы видеть вещи, но недостаточно. То, что необходимо добавить, не относится к чувственности. И, однако, это как раз то, что открывает для нас внешний мир; без этого внечувственного элемента каждый человек оказался бы замкнутым в своем внутреннем мире. Поскольку ответ заключается во внечувственном, то нечто внечувственное могло бы вывести нас за пределы внутреннего мира и обеспечить возможность схватывания мысли там, где чувственные впечатления не затрагиваются. Помимо собственного внутреннего мира следовало бы различать собственно внешний мир чувственно воспринимаемых вещей и область того, что не может быть воспринято с помощью чувств. Для признания обеих областей нам требуется нечто внечувственное; но при чувственном восприятии вещей мы нуждаемся также в чувственных впечатлениях, и они всецело принадлежат внутреннему миру. Таким образом, основание различия в данности вещи и данности мысли состоит главным образом в том, что является атрибутом внутреннего мира и не принадлежит ни к одной из двух областей. Поэтому данное различие я не могу найти слишком большим, чтобы считать невозможным существование мысли, не принадлежащей внутреннему миру.

Правда, мысль не является тем, что мы обычно называем действительным [wirklich]. Мир действительности — это мир, в котором одно воздействует на другое, изменяет это другое и вновь подвергается обратному воздействию, изменяющему и его. Всё это суть события [Geschehen], происходящие во времени. То, что вневременно и неизменно, мы едва ли признаём реальным. Подвержена ли мысль изменениям или она вневременна? Мысль, высказанная в теореме Пифагора, очевидно, вневременна, веч-

на, неизменна. Но не существует ли таких мыслей, которые сейчас являются истинными, а спустя полгода окажутся ложными? Например, мысль, что вот это дерево покрыто зелёной листвой, очевидно, будет ложной спустя полгода? Нет; через полгода это будет уже другая мысль. Последовательность слов «вот это дерево покрыто зелёной листвой» сама по себе недостаточна для выражения, необходимо учесть также время её произнесения. Без соотнесения со временем, которое она подразумевает, мы не обладаем законченной мыслью, то есть вообще не обладаем мыслью. Только то предложение выражает мысль, которое дополнено соотнесением со временем и является полным во всех отношениях. Но такое предложение, если оно истинно, истинно не только сегодня или завтра; оно истинно безотносительно ко времени. *Praesens* в словах «является истинным», таким образом, не указывает на момент произнесения, а обозначает, если можно так выразиться, *Tempus* вневременности [*ein Tempus der Unzeitlichkeit*]. Когда мы употребляем обычную форму утвердительного предложения, избегая слова «истинный», необходимо различать выражение мысли и утверждение. Содержащееся в предложении указание на временную соотнесённость относится только к выражению мысли, в то время как истинность, признание которой заключается в форме утвердительного предложения, безотносительна ко времени. Правда, одна и та же последовательность слов может, учитывая изменчивость языка во времени, приобрести другой смысл и выражать другую мысль; эти изменения, однако, касаются только языковой стороны.

И всё же — какая ценность может заключаться для нас в вечно неизменном, которое не способно ни воздействовать на нас, ни испытывать наше воздействие? Нечто полностью и во всех отношениях недейственное [*unwirksam*] должно быть также недействительным [*unwirklich*] и не существующим для нас. Даже безотносительное ко времени, если оно должно быть чем-либо для нас, требует какой-то связи с временностью. Чем бы была для меня мысль, если бы она не схватывалась мной? Но, схватывая мысль, я вступаю в отношение к ней, а она — ко мне. Возможно, чтобы одна и та же мысль, которая пришла мне в голову сегодня, вчера не мыслилась мной. Тем самым строгая безотносительность ко времени, конечно, устраняется. Естественно, однако, различать существенные и несущественные свойства и считать нечто безотносительным ко времени, если изменения, которым оно подлежит, затрагивают только его несущественные

свойства. Несущественным же мы будем считать такое свойство мысли, которое заключается в том или следует из того, что эта мысль схватывается тем, кто мыслит.

Как воздействует мысль? Она воздействует, будучи схваченной и признанной за истинную. Это — процесс, происходящий во внутреннем мире того, кто мыслит, процесс, который может иметь дальнейшие следствия в этом внутреннем мире, которые, будучи перенесёнными в область волеизъявления, становятся заметными и во внешнем мире. Если я, например, схватываю мысль, выраженную в теореме Пифагора, то следствием может быть то, что я признаю её истинной и, далее, что я применяю её, принимая решения, которые вызывают ускорение масс. Таким образом, наши действия обычно подготавливаются мыслями и суждениями. И, таким образом, мысли могут непосредственно влиять на движение масс. Воздействие человека на человека чаще всего осуществляется посредством мысли. Мысль передаётся. Как это происходит? Один человек вызывает общие изменения во внешнем мире, которые, будучи восприняты другим человеком, должны побудить его к тому, чтобы схватить мысль и рассматривать её как истинную. Разве великие события мировой истории могли бы произойти, если бы не было передачи мыслей? Вместе с тем мы склонны не считать мысли действительными, поскольку они, по видимости, не влияют на ход событий, тогда как мышление, суждение, выражение, понимание — всё это деяния людей. Насколько более реальным кажется молоток в сравнении с мыслью! Насколько отличается процесс передачи молотка от передачи мысли! Молоток переходит от одного владельца к другому, его сжимают, он испытывает давление; при этом его плотность, взаимное расположение частей могут измениться. Ничего этого не происходит с мыслью. Будучи передана, она не меняет владельца, так как человек не имеет власти над ней. Когда мысль схватывается, она вызывает изменения вначале во внутреннем мире того, кто её схватывает; однако сама она в своей подлинной основе остаётся незатронутой, так как изменения, которые она испытывает, касаются лишь несущественных свойств. Здесь отсутствует то, что мы наблюдаем в естественном порядке вещей: взаимодействие. Мысли отнюдь не являются недействительными, но их действительность совсем иного рода, чем действительность вещей. И их воздействие вызывается действием того, кто мыслит, без чего, по крайней мере насколько мы можем видеть, они были бы неэффектив-

ными [wirkungslös]. Однако тот, кто мыслит, не создает мыслей, но должен принимать их такими, как они есть. Они могут быть истинными, даже не будучи схваченными тем, кто мыслит, но и в этом случае они не вполне недействительны, по крайней мере потому, что они в принципе могут быть схвачены и тем самым приведены в действие.

ОТРИЦАНИЕ: ЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Выраженный предложением вопрос [Satzfrage] содержит требование либо признать мысль истинной, либо отвергнуть её как ложную. Для того чтобы иметь возможность правильно выполнить это требование, необходимо, чтобы мысль, о которой идёт речь, была недвусмысленным образом опознана исходя из дословного текста вопроса и, во-вторых, чтобы данная мысль не являлась вымыслом. В дальнейшем я предполагаю эти условия неизменно выполненными. Ответ на вопрос* есть утверждение, в основе которого лежит суждение, и притом как в том случае, если вопрос получает утвердительный ответ, так и если он отрицается.

Но здесь возникает сомнение. Если бытие мысли состоит в её истинности [Wahrsein], тогда выражение «ложная мысль» столь же противоречиво, как и выражение «несуществующая мысль»; тогда выражение «мысль, что три больше пяти» является пустым, и поэтому в науке — кроме как в кавычках — вообще не может быть использовано, тогда нельзя сказать «то, что три больше пяти, является ложным», так как грамматический субъект пуст.

Но разве нельзя по крайней мере спросить, является ли нечто истинным? Требование вынести суждение в вопросе можно отличить от особого содержания вопроса, о котором должно быть вынесено суждение. В дальнейшем это особое содержание я буду называть просто содержанием вопроса или смыслом соответствующего вопросительного предложения. Обладает ли теперь смыслом вопросительное предложение

«3 больше 5?»,

* Здесь и далее, когда я пишу просто «вопрос», я всегда подразумеваю вопрос в форме предложения.

если бытие мысли состоит в её истинности?¹³ В таком случае мысль не может быть содержанием вопроса, и возникает желание сказать, что вопросительное предложение вообще не имеет смысла. Но это всё же случилось бы потому, что в этот момент ложность признаётся. Имеет ли теперь вопросительное предложение

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ «больше, чем } \sqrt[10]{10^{21}} \text{?»}$$

смысл? Если бы обнаружилось, что на вопрос следовало ответить утвердительно, можно было бы предположить осмысленность вопросительного предложения, так как оно обладало бы мыслью как смыслом. Но что, если бы на вопрос следовало ответить отрицательно? При наших предпосылках мысль как смысл не имела бы места. Однако хоть какой-нибудь смысл вопросительному предложению, пожалуй, необходимо иметь, если оно вообще должно содержать вопрос. И разве на деле в нём не спрашивается о чём-то? Разве не желательно получить по поводу этого ответ? В таком случае от ответа на вопрос зависит, следует ли считать мысль содержанием вопроса. Но ведь смысл вопросительного предложения должен быть схвачен ещё до ответа, потому что иначе никакой ответ не был бы возможен вовсе. Таким образом, то, что понимается в качестве смысла вопросительного предложения до ответа на вопрос — а только это может называться смыслом вопросительного предложения, — не может быть мыслью, если бытие мысли состоит в её истинности. А разве не истина, что Солнце больше Луны? И разве бытие истины не состоит именно в её истинности? Не следует ли тогда всё же признать смыслом вопросительного предложения «Солнце больше Луны?» истину, мысль, чьё бытие состоит в её истинности? Нет! Истинность не может относиться к смыслу вопросительного предложения. Это противоречило бы существу вопроса. Содержание вопроса — это то, что требует обсуждения. Поэтому истинность не может быть причислена к содержанию вопроса. Когда я спрашиваю, больше ли Солнце Луны, то этим я признаю смысл вопросительного предложения «Солнце больше Луны?». Если бы этот смысл был мыслью, бытие которой состояло бы в её истинности, то этим я бы одновременно признал истинность этого смысла. Схватывание смысла являлось бы одновременно суждением, а высказывание вопросительного

предложения было бы одновременно утверждением и, следовательно, ответом на вопрос. Но в вопросительном предложении не могут утверждаться ни истинность, ни ложность его смысла. Поэтому смысл вопросительного предложения не есть нечто такое, чьё бытие состоит в его истинности. Существо вопроса требует различения между схватыванием смысла и актом суждения. А так как смысл вопросительного предложения всегда присутствует и в утвердительном предложении, в котором дается ответ на вопрос, то и в утвердительном предложении следует осуществить данное различие. Вопрос в том, что понимается под словом «мысль». Во всяком случае требуется краткая характеристика того, чем может являться смысл вопросительного предложения. Я называю его мыслью. При этом словоупотреблении не все мысли истинны. Следовательно, бытие мысли состоит не в её истинности. Мы вынуждены признать мысли в этом значении, так как в научной работе мы используем вопросы; потому что иногда исследователю приходится довольствоваться постановкой вопроса, пока он не сможет на него ответить. Ставя вопрос, он схватывает мысль. Следовательно, я могу сказать также: иногда исследователь вынужден довольствоваться схватыванием мысли. Это всё же уже шаг к цели, хотя это ещё не суждение. Таким образом, мысль, в указанном мною смысле слова, должна иметь место. Мысли, которые позже, возможно, окажутся ложными, имеют своё основание в науке и не могут рассматриваться как несуществующие. Речь идёт о косвенном доказательстве. Познание истины при этом осуществляется как раз через схватывание ложной мысли. Преподаватель говорит: «Предположим, что a не равно b ». Начинаящий сразу же подумает: «Какая бессмыслица! Я же вижу, что a равно b ». Он путает бессмысленность предложения с ложностью выраженной в нём мысли.

Конечно, из ложной мысли нельзя ничего вывести: но ложная мысль может быть частью истинной мысли, из которой в отношении чего-либо может быть сделано заключение. Мысль, содержащаяся в предложении

«Если подозреваемый на момент происшедшего был в Риме, он не совершал убийства»*,

* Здесь следует предполагать, что дословный текст содержит мысль не полностью, но что, исходя из обстоятельств, при которых он произносится, можно сделать вывод о дополнении до полной мысли.

может быть признана истинной тем, кто не знает, был ли подозреваемый на момент случившегося в Риме и совершил ли он убийство. Если целое представляется истинным, то из двух составных мыслей, содержащихся в целом, с утверждающей силой не высказывается ни условие, ни следствие. В таком случае мы имеем один-единственный акт суждения, но три мысли, а именно, целую мысль, условие и следствие. Если бы предложения-части были бессмысленны, бессмысленным было бы и целое. Отсюда становится ясным, каково различие в том, бессмысленно предложение или же оно выражает ложную мысль. В отношении мысли, состоящей из условия и следствия, действует закон, что, без ущерба для истины, противоположное условию может сделаться следствием и, в то же время, противоположное следствию — условием. Англичане данный переход называют *contraposition*. В соответствии с этим законом можно от предложения

«Если $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ больше, чем $^{10}\sqrt{10^{21}}$, то $\left(\frac{21}{20}\right)^{1000}$ больше, чем 10^{21} »

перейти к предложению

«Если $\left(\frac{21}{20}\right)^{1000}$ не больше, чем 10^{21} , то $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ не больше, чем $^{10}\sqrt{10^{21}}$ ».

И такие переходы важны для косвенных доказательств, которые иначе были бы невозможны. Теперь, если условие первой составной мысли, а именно, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ больше, чем $^{10}\sqrt{10^{21}}$, — истинно, тогда следствие второй составной мысли, а именно, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ не больше, чем $^{10}\sqrt{10^{21}}$, — ложно. Кто, согласно этому, признает допустимость нашего перехода от *modus ponens* к *modus tollens*, должен признать и ложную мысль существующей; ведь иначе либо от *modus ponens* осталось бы только следствие, либо от *modus tollens* — только условие; но и из них одно отпало бы как несуществующее¹⁴.

Под бытием мысли можно понимать также и то, что мысль могла бы схватываться различными мыслящими существами в качестве тождественной. Тогда небытие мысли состояло бы в том, что из многих мыслящих каждый связывал бы с предложением свой собственный смысл, который в таком случае был бы содержанием его отдельного сознания, так что не существовало бы общего смысла предложения, который мог бы быть схвачен многими. Является ли ложная мысль несуществующей в этом смысле? В таком случае исследователи, которые обсуждали бы вопрос, переносится ли жемчужница с рогатого скота на человека, и которые в конце концов пришли бы к согласию, что в данном случае человек заразиться не может, оказались бы в положении людей, которые, беседуя, употребляли выражение «эта радуга», а теперь пришли к выводу, что они этими словами ничего не называли, так как каждый из них имел в виду явление, носителем которого являлся он сам. Исследователи, о которых идёт речь, должны были бы почувствовать себя обманутыми ложной видимостью; потому что условие, лишь при соблюдении которого их поступки и речи являлись бы осмысленными, оказалось бы не выполненным; они не обладали бы общим для них смыслом обсуждаемого ими вопроса.

Всё-таки должна быть возможность поставить вопрос, который сообразно истине можно подвергнуть отрицанию. Содержание такого вопроса, согласно моему словоупотреблению, есть мысль. Должно быть возможным, чтобы несколько слушающих выраженный в предложении вопрос схватывали и признавали ложным один и тот же смысл. Суд присяжных оказался бы в глупом положении, если нельзя было бы допустить, что присяжные в состоянии понять поставленный вопрос в тождественном смысле. Следовательно, смысл вопросительного предложения, даже если вопрос надлежит подвергнуть отрицанию, представляет собой нечто такое, что может быть схвачено многими.

Какими были бы последствия, если бы истинность мысли состояла в том, что она могла бы восприниматься многими как одна и та же, в то время как общего многим смысла предложения, выражающего нечто ложное, не было бы вовсе?

Если мысль истинна и состоит из мыслей, среди которых одна является ложной, то целая мысль могла бы быть воспринята многими в качестве той же самой, но не ложная мысль, её составляющая. Подобное может иметь место. Так, на суде присяжных с полным правом может утверждаться: «Если подозреваемый

на момент случившегося был в Риме, он не совершал убийства», и то, что на момент случившегося подозреваемый был в Риме, может быть ложью. Тогда присяжные при восприятии предложения «Если подозреваемый на момент случившегося был в Риме, он не совершал убийства» были бы в состоянии схватить тождественную мысль, в то время как с придаточным условием каждый из них связывал бы свой собственный смысл.

Возможно ли это? Разве может составная часть мысли, присутствующей для присяжных в качестве той же самой, не быть им общей? Если целое не нуждается в носителе, не нуждается в носителе и его часть.

Таким образом, ложная мысль не является несуществующей мыслью даже тогда, когда под бытием понимается отсутствие надобности в носителе. Ложную мысль следует время от времени признавать если и не в качестве истинной, то всё же как необходимую: во-первых, как смысл вопросительного предложения, во-вторых, как составную часть гипотетического соединения мыслей и, в-третьих, в отрицании. Необходима возможность подвергнуть ложную мысль отрицанию, а чтобы сделать это, мне нужна мысль. Я не в состоянии отрицать то, что не существует. И то, что нуждается во мне как своем носителе, я не могу посредством отрицания превратить в нечто такое, чьим носителем я не являюсь и что многими может быть схвачено как одно и то же.

Следует ли понимать отрицание мысли как разложение мысли на составляющие её части? Присяжные, вынося отрицательное суждение, не в состоянии ничего изменить в составе мысли, выраженной в поставленном перед ними вопросе. Мысль истинна или ложна абсолютно, независимо от того, правильно или нет они выносят суждение. И если она является ложной, то именно как мысль. Если после того как присяжные вынесли суждение, не обнаруживается никакой мысли, а только её обломки, значит, это же состояние имело место уже заранее; в мнимом вопросе им была представлена не мысль вовсе, а только обломки мысли; у них не было ничего из того, что можно было бы обсудить.

Своим суждением мы ничего не можем изменить в составе мысли. Мы лишь можем признать то, что есть. Мы не в состоянии повредить истинной мысли своим суждением. Мы можем в выражающее её предложение вставить «не» и вследствие этого получить предложение, которое, как уже говорилось, не содер-

жит не-мысли [Ungedanke], но которое может быть полностью оправдано как предложение-условие или предложение-следствие в составе сложного гипотетического предложения. Поскольку она является ложной, она может выражаться лишь без утвердительной силы. Но ту первую мысль этот процесс совершенно не затрагивает. Она остается истинной, как и прежде.

Можем ли мы причинить что-либо ложной мысли своим отрицанием? Тоже нет; потому что ложная мысль всегда остаётся мыслью и может встречаться как составная часть истинной мысли. Если в выражаемое без утвердительной силы предложение «3 больше 5», смысла которого ложен, мы вставим частицу «не», то получим «3 не больше 5» — предложение, которое может быть выражено с утвердительной силой. Здесь нигде нельзя обнаружить ничего из относящегося к разложению мысли, к отделению её частей.

Да и как же мысль могла бы разложиться? Как могла бы разорваться связь её частей? Мир мыслей отображается в мире предложений, выражений, слов, знаков. Строению мысли отвечает составление предложений из слов, причем последовательность вовсе не безразлична. Согласно с этим разложению, разрушению мысли будет соответствовать отделение слов друг от друга, что случается, например, когда написанное на бумаге предложение разрезается ножницами, так что на каждом из бумажных обрезков остаётся выражение части мысли. Эти отрезки затем могут быть произвольно перемешаны или унесены ветром.

Связь разрушается, первоначальное расположение более не узнаваемо. Происходит ли подобное, когда мы отрицаем мысль? Нет! Мысль, без сомнения, смогла бы перенести даже и эту свою казнь *in effigie**. Но слово «не» вставляется обычно в неизменённое расположение слов. Первоначальный дословный текст пока узнаётся; расположение не может быть произвольно изменено. Является ли это разложением, разделением? Напротив! Результат представляет собой прочное сооружение. Из рассмотрения закона *duplex negatio affirmat*** с особой ясностью может быть осознано, что отрицание не обладает разделяющим, разрушающим действием. Я исхожу из предложения

«Шнеекопфе выше, чем Броккен».

* Образцово, идеально. (Примеч. перев.)

** Двойное отрицание утверждает. (Примеч. перев.)

Вставляя «не», я получаю

«Шнеекоппе не выше, чем Броккен».

Оба предложения следует выразить без утвердительной силы. Второе отрицание дало бы, к примеру, предложение:

«Не верно, что Шнеекоппе не выше, чем Броккен».

Мы уже знаем: первое отрицание не может стать причиной разрушения мысли; но, несмотря на это, допустим первоначально, что после первого отрицания мы получили бы лишь обломки мысли. Затем нам следовало бы допустить, что второе отрицание могло бы эти обломки соединить вновь. Тем самым отрицание уподоблялось бы мечу, обладающему способностью заново приживлять отсечённые им звенья. Однако при этом потребовалась бы величайшая осторожность. Ведь части мысли, благодаря первому отрицанию, стали совершенно бессвязными и лишёнными всяческого отношения к чему бы то ни было. Следовательно, при неосторожном применении целительной силы отрицания легко можно было бы получить предложение

«Броккен выше, чем Шнеекоппе».

Как не-мысль не становится посредством отрицания мыслью, так и мысль через отрицание не превращается в не-мысль. Также и предложение, содержащее в сказуемом слово «не», может выражать мысль, способную стать содержанием вопроса, вопроса, который оставляет выбор ответа открытым, как и любой выраженный предложением вопрос.

Какие же предметы должны на самом деле разделяться отрицанием? Это не части предложения; в столь же малой степени это части мысли. Вещи внешнего мира? Последние наше отрицание не беспокоит вовсе. Представления во внутреннем мире отрицающего? Однако откуда же знает присяжный, какие из своих представлений ему следовало бы, при известных условиях, разделить? Поставленный перед ним вопрос ни на что ему не указывает. Он может пробудить в нем представления. Но пробуждаемые во внутренних мирах присяжных представления различны. И тогда каждый присяжный предпринял

бы своё собственное разделение в своём собственном внутреннем мире, и это не было бы суждением.

В соответствии с этим, по-видимому, невозможно указать, что же в сущности разлагалось бы, разрушалось или разделялось посредством отрицания.

С верой в разделяющую, разлагающую силу отрицания связано то, что отрицательную мысль считают менее полезной, чем утвердительную. Всё же совершенно бесполезной её также никто не будет считать. Рассмотрим заключение:

«Если подозреваемый в момент убийства не был в Берлине, он не совершал убийства; подозреваемый в момент убийства не был в Берлине; следовательно, он не совершал убийства».

и сравним его со следующим заключением:

«Если подозреваемый в момент убийства был в Риме, он не совершал убийства; подозреваемый в момент убийства был в Риме; следовательно, он не совершал убийства».

Оба заключения проходят в одной и той же форме, и нет ни малейшего объективного основания, чтобы в выражении положенного при этом в основу предложения-вывода отличить утвердительную посылку от отрицательной. Говорят об утвердительных и отрицательных суждениях. Даже Кант поступает так же. Переводя на мой способ выражаться, различают утвердительные и отрицательные мысли. Различение для логики по меньшей мере совершенно ненужное, основание которого следует искать за её пределами. Я не знаю ни одного логического закона, при словесном выражении которого было бы необходимо или хотя бы полезно употреблять данные обозначения*. В каждой науке, в которой вообще может идти речь о закономерности, следует спрашивать: какие искусственные выражения необходимы или по крайней мере полезны, чтобы точно

* Подобным образом выражение «отрицательная мысль» я не употреблял и в своей статье *Мысль* (см. настоящее изд.). Различение отрицательных и утвердительных мыслей только запутало бы дело. Нет никакой возможности высказать что-либо об утвердительных мыслях и исключить из этого отрицательные или высказать что-либо об отрицательных и исключить из этого утвердительные.

выразить законы данной науки? То, что подобного испытания не существует, — от лукавого.

Нужно добавить, что не так уж легко указать, что представляет собой отрицательное суждение (отрицательная мысль). Рассмотрим предложения «Христос — бессмертен», «Христос живет вечно», «Христос — не бессмертен», «Христос — смертен», «Христос живет не вечно». Где здесь у нас отрицательная, а где утвердительная мысль?

По привычке мы предполагаем, что отрицание распространяется на всю мысль, если «не» связано с глаголом сказуемого. Но иногда отрицательное слово грамматически образует также и часть подлежащего, как, например, в предложении «Никакой человек не живет больше сотни лет». Отрицание может находиться где-нибудь в предложении без того, чтобы мысль вследствие этого однозначно становилась бы отрицательной. Теперь видно, к каким замысловатым вопросам может вести выражение «отрицательное суждение» (отрицательная мысль). Следствием могут быть бесконечные, ведомые с величайшим остроумием и всё же в сущности бесплодные споры. Поэтому я предпочитаю, чтобы отличие отрицательного суждения от утвердительного оставили в покое до тех пор, покуда отсутствует признак, на основании которого в каждом случае можно было бы наверняка отличить отрицательное суждение от утвердительного. Когда будет такой признак, то также будет осознано, какую пользу следует ожидать от данного различения. Я пока ещё сомневаюсь, что это будет достигнуто. У языка этот признак отнять нельзя; потому что языки в вопросах логики неблагонадежны. Всё-таки это не одна из последних задач логики — указывать на сети, которые язык ставит тому, кто мыслит.

После того как заблуждения опровергнуты, может оказаться полезным изучить источники, из которых они проистекали. Одним из источников здесь мне кажется требование давать определения понятиям, которые намереваются обсудить. Конечно, стремление сделать по возможности ясным для себя смысл, связываемый с выражением, достойно похвалы. При этом, однако, не следует забывать, что не всё поддаётся определению. Когда намереваются непременно определить нечто такое, что, сообразно своей сущности, не определимо, легко связывают себя несущественными мелочами и, в результате, с самого начала выводят исследование на ложный путь. И подобное случалось со многими, кто намеревался объяснить, что есть суждение, додумываясь

до составленности*. Суждение состоит из частей, которые обладают определённым порядком, связью, соотносятся друг с другом. Но о каком целом не скажешь того же?

С этим связана другая ошибка, а именно, мнение, что судящий учреждает связь, порядок частей и, вследствие этого, осуществляет суждение. При этом схватывание мысли и признание её истинности не различаются. Конечно, во многих случаях эти действия происходят одно за другим столь непосредственно, что кажутся сплавленными в одно действие, однако не во всех. Годы труднейших исследований могут лежать между схватыванием мысли и признанием её истинности. Что данным суждением мысль, связь её частей не создаются — это очевидно; так как она прежде уже имела место. Но и схватывание мысли не является её сотворением, учреждением порядка её частей; потому что мысль уже раньше была истинной, следовательно, уже существовала в порядке своих частей прежде, чем была схвачена. Как странник, преодолевающий горы, вследствие этого данных гор не создает, также и судящий не создает мысль в результате того, что он признаёт её истинной. Если бы он делал это, то одна и та же мысль не могла бы признаваться истинной вчера одним, а сегодня другим; даже одним и тем же тождественная мысль не могла бы быть признана

* Пожалуй, более всего обыденному словоупотреблению отвечает то, когда под суждением понимают осуществление суждения, подобно тому как прыжок есть осуществление прыгания. При этом ядро затруднения, разумеется, остаётся без разрешения. В данном случае оно находится в слове «суждение». Судить, скажем сразу, — значит признавать нечто истинным. То, что признаётся истинным, может быть только мыслью. Первоначальное ядро кажется теперь расколотым; одна его часть находится в слове «мысль», другая — в слове «истинный». Здесь, пожалуй, следует остановиться. Чтобы не пришлось продолжать определение до бесконечности, необходимо сосредоточиться на этом с самого начала. Если суждение является действием, тогда оно происходит в известное время и после этого принадлежит прошлому. К действию относится и действующий, и действие познано не полностью, если действующий не известен. В таком случае нельзя говорить о синтетическом суждении в обычном смысле. Если то, что через две точки проходит только одна прямая, называют синтетическим суждением, то под суждением понимают не действие, которое было осуществлено конкретным человеком в конкретное время, но что-то, что истинно вневременным образом, даже тогда, когда его истинность не будет признаваться ни одним человеком. Если истиной называют нечто подобное, тогда вместо «синтетическое суждение», пожалуй, лучше говорить «синтетическая истина». Если, несмотря на это, предпочтение отдаётся выражению «синтетическое суждение», то тогда от смысла глагола «судить» необходимо отказаться.

истинной в разное время, так как потребовалось бы допустить непрерывность бытия данной мысли.

Если считать возможным, что благодаря своему суждению мы, учреждая связь и порядок частей, создаём то, что посредством вынесения суждения признается истинным, тогда естественно ожидать от себя также способности разрушения. Как разрушение противопоставляется строительству, учреждению порядка и связи, так и отрицание по видимости противостоит суждению, и легко прийти к допущению, что разрыв связей, так же как и их создание, происходит посредством суждения. Таким образом, суждение и отрицание оказываются парой противоположных полюсов, которые, именно как пара, равнозначны, сравнимы, к примеру, с окислением и восстановлением в химии. Но когда выяснилось, что актом суждения не производится никакой связи, но что порядок частей уже существовал до суждения, всё предстает в ином свете. Необходимо снова и снова указывать на то, что схватывание мысли ещё не суждение, что мысль можно выразить в предложении, не утверждая её этим как истинную, что в сказуемом предложения может содержаться отрицательное слово и что смысл этого слова, в таком случае, является составной частью смысла предложения, составной частью мысли, что при помещении «не» в сказуемое предложения, которое должно выражаться без утвердительной силы, обретается смысл, который, как и первоначальный, выражает мысль. Если такой переход от одной мысли к противоположной называют теперь отрицанием, то это отрицание не имеет равного с суждением значения и вовсе не может быть понято как противоположный суждению полюс; потому что в случае акта суждения речь идёт всегда об истине, в то время как переходить от одной мысли к другой можно, не спрашивая об истине. Чтобы исключить недоразумение, следует ещё заметить, что этот переход осуществляется в сознании мыслящего, а мысль, из которой исходят, равно как и мысль, к которой переходят, уже существовала прежде, чем это произошло, что, следовательно, посредством этого душевного процесса в составе мыслей и в их отношениях друг к другу ничто не меняется.

Возможно, то отрицание, которое влачит сомнительное существование в качестве полюса, противоположного акту суждения, является химерическим образованием, результатом сращивания суждения и того отрицания, которое я признал возможной составной частью мысли и которому в языке соответствует сло-

во «не» как составная часть сказуемого, химерическим потому, что данные части совершенно не однородны. Суждение именно как душевный процесс нуждается в судящем как своём носителе; но отрицание, как составная часть мысли, подобно самой мысли в носителе не нуждается. Тем самым его не следует понимать как содержание сознания. И всё же вполне понятно, как может возникнуть по крайней мере видимость такого химерического образования: В языке даже нет отдельного слова, особого звука для утвердительной силы, но она содержится в форме утвердительного предложения, которая особенно сказывается в сказуемом. С другой стороны, слово «не» теснейшим образом связано со сказуемым, за составную часть которого оно может быть принято. Следовательно, между словом «не» и утвердительной силой, которая в языковом отношении соответствует акту суждения, может образовываться мнимая связь.

Однако различить два типа отрицания нелегко. Ведь противоположный полюс суждения я ввёл, собственно говоря, лишь для того, чтобы приспособиться к чуждому для меня пониманию. Теперь я возвращаюсь к своему первоначальному словупотреблению. То, что я временно обозначил как противоположный полюс акта суждения, теперь я намерен рассматривать как второй тип суждения, не признавая этим того, что такой второй тип встречается. Таким образом, полюс и противоположный полюс я намереваюсь объединить под общим именем «суждение», что является оправданным, так как ведь и полюс, и противоположный полюс всё-таки принадлежат друг другу. В таком случае вопрос будет поставлен следующим образом:

Существуют ли различные способы суждения, один из которых употребляется при утвердительном, другой при отрицательном ответе на вопрос? Или же в обоих случаях процесс суждения один и тот же? Относится ли процесс отрицания к процессу суждения? Или же отрицание — часть мысли, подчинённая акту суждения? Является ли суждение и в случае отрицательного ответа на вопрос признанием истинности мысли? Тогда эта последняя не будет мыслью, непосредственно содержащейся в вопросе, а будет ей противоположной.

Предположим, к примеру, что вопрос гласит: «Умышленно ли подозреваемый поджег свой дом?». Как будет звучать ответ в виде утвердительного предложения, если он окажется отрицательным? Если для отрицания существует отдельный способ суждения, то мы, в соответствии с этим, должны владеть отдельным

способом утверждения. Например, я говорю в этом случае: «Это ложь, что...» и устанавливаю, что сказанное всегда должно быть связано с утвердительной силой. Тогда ответ будет гласить: «Это ложь, что подозреваемый умышленно поджёт свой дом». Если, напротив, имеется только один-единственный способ суждения, то с утвердительной силой будет сказано: «Подозреваемый поджёт свой дом не умышленно». И мысль здесь представляется истинной, противоположной той, что выражена в вопросе. Слово «не» здесь принадлежит выражению этой мысли. Теперь я обращаюсь к двум заключениям, которые я недавно сравнивал друг с другом. При этом вторая посылка первого заключения была отрицательным ответом на вопрос: «Был ли подозреваемый на момент убийства в Берлине?» и была отобрана именно для случая, что имеется только один способ суждения. Мысль, заключённая в этой посылке, содержится в предложении-условии первой посылки, которое выражено, однако, без утвердительной силы. Вторая посылка второго заключения была утвердительным ответом на вопрос: «Был ли подозреваемый на момент убийства в Риме?». Эти выводы осуществляются по одному и тому же правилу, и это прекрасно согласуется с мнением, что суждение остаётся одним и тем же как в случае отрицательного ответа на вопрос, так и в случае утвердительного. Если бы мы, напротив, должны были в случае отрицания признать отдельный способ суждения, которому в области слов и предложений соответствовал бы особый способ утверждения, дело обернулось бы иначе. Первая посылка первого заключения гласила бы как и прежде: «Если подозреваемый на момент убийства не был в Берлине, он не совершал убийства».

Здесь нельзя было бы сказать: «Если это ложь, что подозреваемый на момент убийства был в Берлине»; потому что было установлено, что слова «это ложь» должны всегда связываться с утвердительной силой; но с признанием истинности этой первой посылки истинными не признаются ни содержащееся в ней условие, ни следствие. В сравнении с этим вторая посылка теперь должна гласить: «Это ложь, что подозреваемый на момент убийства был в Берлине»; потому что как посылка она должна высказываться с утвердительной силой. Теперь вывод уже не возможен как прежде, так как мысль второй посылки больше не совпадает с мыслью условия первой посылки, а представляет собой мысль, что подозреваемый на момент убийства был в Берлине. Если с заключением всё-таки намерены считаться, то

этим признаётся, что во второй посылке содержится мысль о том, что подозреваемый на момент убийства не был в Берлине. Этим отрицание отделяют от суждения, извлекая сие из смысла выражения «Это ложь, что...», и объединяют отрицание с мыслью¹⁵.

Таким образом, допущение двух различных способов суждения необходимо отвергнуть. Но что же зависит от этого решения? Пожалуй, можно было бы считать его лишённым значения, если бы благодаря ему не происходила экономия логических первоэлементов и того, что им соответствует в языковом отношении. Предполагая два различных способа суждения, мы с необходимостью имеем:

- 1) утвердительную силу в случае утвердительного ответа,
- 2) утвердительную силу в случае отрицания, например, в неразложимом объединении со словом «ложь» [falsch],
- 3) отрицательное слово, к примеру «не», в предложениях, выражаемых без утвердительной силы.

Если в противоположность этому мы допустим лишь один-единственный способ суждения, то для этого нам необходимы

- 1) утвердительная сила,
- 2) отрицательное слово.

Подобная экономия¹⁶ всегда указывает на тщательное расчленение, а это последнее способствует более отчётливому пониманию. С ней связана экономия закона умозаключения. Там, где мы, при нашем решении, обходимся одним, в противном случае нам потребовалось бы два. Если мы в состоянии довольствоваться одним типом суждения, то и обязаны, и тогда мы не можем предоставить один тип суждения для учреждения порядка и связи, а другой — для разрушения.

Согласно этому, любой мысли принадлежит мысль, противоречащая* ей таким образом, что мысль объявляется ложной вследствие того, что мысль, противоречащая ей, признается истинной. Предложение, которое выражает противоречащую мысль, образуется из выражения первоначальной мысли посредством отрицательного слова.

* Можно было бы сказать также «противоположная».

Отрицательное слово или отрицательная частица, по-видимому, часто плотно присоединяется к части предложения, например к сказуемому. И из этого может возникнуть мнение, будто отрицается не содержание всего предложения, а только содержание данной части предложения. Можно назвать человека не знаменитым и вместе с тем мысль, что он знаменит, объявить ложной. Это можно воспринять как отрицательный ответ на вопрос: «Человек знаменит?», из чего следует, что этим отрицается не только смысл слова. Неправильным будет говорить: «так как отрицательная частица связана с частью предложения, то отрицается смысл не всего предложения». Напротив: вследствие того, что отрицательная частица связана с частью предложения, отрицается содержание всего предложения. Это должно означать, что в результате возникает предложение, мысль которого противоречит мысли первоначального предложения.

То, что отрицание иногда распространяется только на часть целой мысли, сказанным под вопрос не ставится.

Мысль, противоречащая некоторой мысли, является смыслом предложения, исходя из которого легко восстановить предложение, ту мысль выражающее. В соответствии с этим мысль, противоречащая некоторой мысли, оказывается составленной из той мысли и отрицания. Я не имею в виду отрицание как деятельность. Однако, такие слова, как «составленный», «состоять», «составная часть», «часть», способны склонить к неверному пониманию. Если речь здесь идёт о частях, то всё же эти части не расположены рядом друг с другом столь же самостоятельно, что является привычным в отношении частей некоторого целого. Ведь мысль для своего существования не нуждается в дополнении, она самодостаточна. В сравнении с этим отрицание требует дополнения мыслью. Обе составные части, если употреблять эти выражения, совершенно разнородны и совершенно различным образом способствуют образованию целого. Одно дополняет; другое дополняется. И посредством этого дополнения целое сохраняется в единстве. Чтобы потребность в дополнении сделать различимой и в языковом отношении, можно написать «отрицание того, что...» [die Verneinung von...]. При этом пропуск после «что» указывает, куда следует поместить дополняющее. Ведь дополнению в области мыслей и частей мыслей соответствует нечто подобное в области предложений и частей предложений. Вместо местоимения «что» с последующим именем существительным может,

впрочем, стоять существительное в родительном падеже, что, пожалуй, более соответствует словоупотреблению, однако не так хорошо способствует обнаружению в выражении части, требующей дополнения. Пример мог бы ещё более отчётливо продемонстрировать, как я себе это представляю. Мысль, которая противоречит мысли, что

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ равняется } \sqrt[10]{10^{21}},$$

состоит в том, что

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ не равняется } \sqrt[10]{10^{21}}.$$

Вместо этого можно сказать также: «Мысль, что

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ не равняется } \sqrt[10]{10^{21}},$$

представляет собой отрицание мысли, что

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ равняется } \sqrt[10]{10^{21}} \text{ »}.$$

Это последнее выражение после «представляет собой» позволяет распознать составленность мысли из части, требующей дополнения, и того, что её дополняет. Отныне слово «отрицание» я буду записывать здесь — наряду с помещением в кавычки — всегда только с определённым артиклем. Определённый артикль «die» в выражении

«die Verneinung des Gedankens, daß 3 größer als 5 ist»
 («отрицание мысли, что 3 больше 5»)

позволяет распознать, что данное выражение должно обозначать конкретное отдельное. Это отдельное здесь есть мысль. Опре-

делённый артикль превращает всё выражение в отдельное имя, в заместителя имени собственного.

Отрицание мысли, таким образом, само является мыслью и может в свою очередь служить дополнением отрицания. Используя мысль, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ равняется $\sqrt[10]{10^{21}}$, для дополнения отрицания, я получаю

отрицание отрицания мысли, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ равняется $\sqrt[10]{10^{21}}$

(die Verneinung der Verneinung des Gedanknes, daß $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ gleich $\sqrt[10]{10^{21}}$ sei).

Это снова мысль. Обозначения [Bezeichnungen] так образованных мыслей создаются по образцу

«отрицание отрицания A »
(die Verneinung der Verneinung von A),

причём « A » заменяет обозначение мысли. Такое обозначение следует прежде всего мыслить составленным из частей

«отрицание то, что...» (die Verneinung von...)

и

«отрицание A » (die Verneinung von A).

Однако возможна и такая точка зрения, что оно образуется из частей

«отрицание отрицания того, что...» (die Verneinung der Verneinung von...)

и

« A ».

Здесь я среднюю часть обозначения сначала соединил с частью, находящейся слева от неё, а затем полученное таким образом соединил с находящейся справа частью «А», в то время как первоначально средняя часть соединилась с «А», и полученное таким образом обозначение

«отрицание А» (die Verneinung von A)

объединилось с находящимся слева

«отрицание того, что...» (die Verneinung von...).

Двум различным точкам зрения на обозначение соответствуют и две различные точки зрения на строение обозначаемой мысли.

При сопоставлении обозначений

«отрицание отрицания того, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ равняется $\sqrt[10]{10^{21}}$ »

(die Verneinung der Verneinung davon, daß $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ gleich $\sqrt[10]{10^{21}}$ sei)

и

«отрицание отрицания того, что 5 больше 3»
(die Verneinung der Verneinung davon, daß 5 größer als 3 ist)

распознаётся общая составная часть

«отрицание отрицания того, что...»
(die Verneinung der Verneinung von...),

которая представляет собой обозначение части мысли, требующей дополнения. Последняя в каждом из двух случаев дополняется мыслью, в первом случае мыслью, что

$\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ равняется

$\sqrt[10]{10^{21}}$, во втором случае мыслью, что 5 больше 3. Результатом такого дополнения в обоих случаях является мысль. Общую тре-

бующую дополнения часть можно назвать двойным отрицанием. Данный пример показывает, как требующее дополнения может сплавляться с требующим дополнения в требующее дополнения. Здесь имеет место странный случай, что нечто — отрицание того, что... — сплавляется с самим собой. При этом образы, позаимствованные из телесной области, разумеется, не годятся; потому что тело не в состоянии сплавиться с самим собой так, чтобы из него возникало нечто, от него отличное. Но тела ведь и не нуждаются в дополнении в подразумеваемом здесь смысле. Конгруэнтные тела мы способны составить, и здесь, в сфере обозначений, мы также имеем конгруэнтность. Но конгруэнтным обозначениям то же самое соответствует в сфере обозначаемого.

Образные выражения, употребляемые с осторожностью, могут всё же поспособствовать прояснению. Тrequющее дополнения я сравниваю с оболочкой, которая, подобно костюму, не в состоянии собственными силами держаться стоймя, но нуждается для этого в том, кто в неё облачён. Последний может надевать последующие оболочки — например пальто. Обе оболочки объединяются в одну. Так возможна двойная точка зрения. Можно сказать, что уже облачённый в костюм теперь одевается второй оболочкой, пальто, или что его одеяние составлено из двух — костюм и пальто — оболочек. Эти точки зрения абсолютно равноправны. Добавляющаяся оболочка всегда объединяется с уже наличествующей, образуя новую. Конечно, при этом никогда не следует забывать, что в облачении и в составлении мы имеем процессы во времени, тогда как соответствующее в сфере мысли вневременно.

Если A суть мысль, не принадлежащая вымыслу, то и отрицание A вымыслом не является. В таком случае из двух мыслей: A и отрицания A — истинна всегда одна и только одна. Тогда точно так же из двух мыслей: отрицания A и отрицания отрицания A — истинна всегда одна и только одна. Отрицание A либо истинно, либо не истинно. В первом случае истинными не являются ни A , ни отрицание отрицания A . В другом случае истинны как A , так и отрицание отрицания A . Таким образом, из двух мыслей — A и отрицания отрицания A — истинны либо обе, либо ни одна. Это я могу выразить ещё и так:

двойное отрицание, облакающее мысль, не меняет оценки её истинности.

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ. ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ: СЛОЖНАЯ МЫСЛЬ

Поразительно, что делает язык, выражая немногими слогами необозримое количество мыслей; даже для мысли, схватываемой человеком впервые, он находит такое облачение, в котором она будет понятна тому, для кого является совершенно новой. Это было бы невозможно, если бы мы не были способны различать части мысли, которым соответствовали бы части предложения, таким образом, что структура предложения имела бы значение отображения структуры мысли. Конечно, на самом деле мы выражаемся фигурально, когда переносим отношение целого и части на мысли; однако аналогия так и просится в руки и в целом настолько уместна, что нас почти никогда не беспокоят помехи, которые случаются время от времени.

Если, таким образом, мы будем рассматривать мысли как составленные из простых частей и, в свою очередь, считать, что они соответствуют простым частям предложений, мы сможем понять, каким образом несколько частей предложений могут образовывать огромное количество предложений, которым, в свою очередь, соответствует огромное количество мыслей. Но тогда возникает вопрос о том, как конструируется мысль и как её части соединяются таким образом, что целое в итоге представляет собой нечто большее, нежели части, взятые сами по себе. В своей статье *Отрицание* я рассматривал тот случай, когда мысль, судя по всему, составлялась из части, нуждающейся в дополнении (или, как ещё можно сказать, ненасыщенной [ungesattigten] части), которой в языковом отношении соответствует слово со значением отрицания, и мысли. Мы не можем осуществить отрицание без того, что отрицается, и это последнее есть мысль. Благодаря тому, что мысль насыщает [sattigt] ненасыщенную часть или, как ещё можно сказать, дополняет часть, нуждающуюся в дополнении, имеет место спаянность целого¹⁷. Естественно предположить, что в логическом вообще соединении в целое всегда привходит через насыщение того, что ненасыщенно*.

Здесь мы должны рассмотреть особый случай такого соединения, а именно тот, при котором две мысли соединяются в одну. В области языка соединение предложений будет соответствовать такому целому, которое также является предложением. По аналогии со словосочетанием «сложное предложение» [Satzgefüge]

* Здесь и далее всегда необходимо помнить, что подобное насыщение и подобное соединение не являются темпоральными процессами.

из грамматики я образуя выражение «сложная мысль» [Gedankengefüge], не подразумеваю при этом, что каждому сложному предложению в качестве его смысла соответствует сложная мысль, или что каждая сложная мысль является смыслом сложного предложения. Под сложной мыслью я буду понимать такую мысль, которая состоит из мыслей, но не только из них. Поскольку мысль является полной и насыщенной, для того чтобы существовать, она не нуждается в дополнении. Поэтому мысли не сливались бы в единое целое, если бы они не объединялись чем-то таким, что не является мыслью. Мы можем предположить, что это связующее является ненасыщенным. Сложная мысль сама должна быть мыслью: т. е. чем-то таким, что является истинным или ложным (третьего не дано).

Не каждое предложение, которое в языковом отношении составлено из предложений, может предоставить нам пригодный пример; так как грамматике известны такие предложения, которые логика не может признать за подлинные [eigentliche] предложения, поскольку они не выражают мысли¹⁸. Это иллюстрируется придаточными предложениями; так как мы не можем сказать точно, на какое предполагаемое относительное местоимение указывает придаточное предложение, обособленное от своего главного предложения. Такое предложение не содержит смысла, истинность которого можно было бы установить; другими словами, смысла обособленного придаточного предложения не является мыслью. Таким образом, мы не можем ожидать, что смыслом сложного предложения, состоящего из главного и придаточного предложений, является сложная мысль.

Сложная мысль первого рода

В языковом отношении простейшим случаем, по-видимому, является соединение двух главных предложений с помощью союза «и». Однако существо дела не так просто, как кажется на первый взгляд, поскольку в утвердительном предложении мы должны проводить различие между выражаемой мыслью и утверждением. Здесь речь идёт только о первом, потому что соединяться должны не акты суждения*. Поэтому я понимаю предложения,

* По-видимому, логики часто обозначают словом «суждение» то, что я называю мыслью. В моей терминологии суждение выносится, когда мысль осознаётся как истинная. Этот акт осознания я называю суждением. Суждение демонстрируется предложением, высказанным с утверждающей силой. Однако можно схватить и выразить мысль, не осознавая её как истинную, т. е. не вынося суждения.

соединённые посредством «и», так, как если они выражаются без утверждающей силы. Легче всего элиминировать утверждающую силу, преобразовав целое в вопрос; поскольку одну и ту же мысль можно выразить в вопросе точно так же, как в утвердительном предложении, только без её утверждения¹⁹. Если мы используем союз «и», чтобы соединить два предложения, при высказывании которых сила утверждения не принимается в расчёт, и в том, и в другом случае необходимо задаться вопросом, будет ли мысль смыслом результирующего целого. В последнем случае не только каждое из частей предложения, но и их целое должно обладать смыслом, который может стать содержанием вопроса. Когда присяжных заседателей спрашивают: «Обдуманно ли обвиняемый развёл костёр и обдуманно ли устроил лесной пожар?», то проблема в том, затрагиваются ли здесь два вопроса или только один. Если присяжные заседатели свободны, чтобы дать утвердительный ответ на вопрос о костре, но отрицательный ответ на вопрос о лесном пожаре, тогда мы имеем два вопроса, каждый из которых содержит мысль. В этом случае мысль, составленная из этих двух мыслей, в вопросе отсутствует. Но если — как я буду предполагать — присяжным заседателям разрешают ответить только «да» или «нет», не допуская деления целого на подвопросы, тогда это целое представляет собой единственный вопрос, на который можно было бы ответить утвердительно только в том случае, если обвиняемый действовал обдуманно и когда развёл костёр, и когда устроил лесной пожар, и ответить отрицательно в любом другом случае. Таким образом, присяжный заседатель, который считает, что обвиняемый намеренно развёл костёр, но думает, что огонь распространился дальше и пожар возник независимо от желания обвиняемого, должен ответить на этот вопрос отрицательно. Поэтому мысль всего вопроса следует отличать от двух составляющих её мыслей. Кроме двух составляющих мыслей она содержит то, что их соединяет; и этому последнему в языковом отношении соответствует «и». Это слово употребляется здесь особым образом. Оно принимается во внимание только как соединение двух подлинных предложений. Я называю предложение подлинным, если оно выражает мысль. Но мысль является чем-то таким, что может быть либо истинным, либо ложным (третьего не дано). Союз «и», о котором здесь идёт речь, также должен связывать только те предложения, которые выражены без утверждающей силы. Этим не должен исключаться акт вынесения суждения; но если он имеет место, он должен относиться к сложной мысли. Если мы намереваемся предста-

вить структуру [Gefüge] первого рода как истинную, мы можем использовать фразу «истинно, что... и что...». Наш союз «и» не подразумевает, что вопросительные предложения соединены как-либо в большей степени, чем утвердительные предложения. В нашем примере перед присяжным ставится только один вопрос. Но мысль, предлагаемая вопросом на обсуждение, составлена из двух мыслей. Присяжный в своём ответе должен был вынести только одно-единственное суждение. Конечно, это может показаться излишней тонкостью, так как разве не одно и то же, когда свидетель прежде даёт утвердительный ответ на вопрос: «Обдуманно ли обвиняемый развёл костёр?», а затем такой же ответ на вопрос: «Обдуманно ли обвиняемый устроил лесной пожар?» и когда он отвечает утвердительно сразу на целый вопрос? Так вполне может показаться в случае утвердительного ответа, но когда ответ отрицательный, различия видны более отчётливо. Поэтому, если мысль должна быть понята верно, полезно выражать её вопросом, так как при этом случаи отрицания необходимо рассматривать так же, как и случаи подтверждения.

Союз «и», чей способ употребления более точно определяется таким образом, по-видимому, ненасыщен вдвойне. Его насыщение требует как предложения, стоящего перед ним, так и предложения, идущего после него. И то, что соответствует «и» в области смысла, также должно быть вдвойне ненасыщенным: насыщаясь посредством мыслей, оно эти мысли соединяет*. Разумеется, буква «и», рассмотренная просто как вещь, является ненасыщенной не в большей степени, чем любая другая вещь. Она может быть названа ненасыщенной с точки зрения своего использования, как знак, предназначенный для выражения смысла, поскольку в этом случае она может обладать предполагаемым смыслом только тогда, когда помещается между двумя предложениями: её назначение в качестве знака требует дополнения предшествующим и последующим предложением. Собственно говоря, ненасыщенность имеет место в области смысла и оттуда переносится на знак²⁰.

Если как «А», так и «В» являются подлинными предложениями, выраженными без утверждающей силы и не в качестве вопросов, тогда «А и В» также является подлинным предложением, а его смысла представляет собой сложную мысль первого рода. Вместо этого я также буду говорить, что «А и В» выражает сложную мысль первого рода.

* Ср. предыдущее примечание.

То, что «*B* и *A*» имеет тот же самый смысл, как у «*A* и *B*», можно видеть без доказательства, просто принимая в расчёт сам смысл. Здесь имеет место тот случай, когда двум лингвистически различным выражениям соответствует один и тот же смысл. Подобное расхождение знакового выражения и выражаемой мысли — неизбежное следствие различия между пространственно-временными феноменами и миром мыслей*.

Наконец, можно указать на вывод, который имеет место в этом случае:

A является истинным**;
B является истинным; следовательно,
 (*A* и *B*) является истинным.

Сложная мысль второго рода

Отрицание структуры первого рода, представляющей собой связь одной мысли с другой, само является структурой, состоящей из двух тех же самых мыслей. Подобную структуру я буду называть «сложной мыслью второго рода». Всякий раз, когда сложная мысль первого рода, состоящая из двух мыслей, является ложной, структура второго рода, состоящая из этих же мыслей, является истинной, и наоборот. Структура второго рода является ложной только в том случае, если каждая из составляющих её мыслей является истинной, и она является истинной всякий раз, когда по крайней мере одна из составляющих её мыслей является ложной. При этом предполагается, что мысли не являются вымыслом. Представляя сложную мысль второго рода как истинную, я утверждаю, что составляющие её мысли не совместимы.

Не зная,

будет ли $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ больше, чем $\sqrt[10]{10^{21}}$,

и не зная,

* Другая иллюстрация подобного различия: «*A* и *A*» имеет тот же смысл, как и «*A*».

** Когда я пишу «*A* является истинным», я подразумеваю в более точном смысле: «мысль, выраженная в предложении "*A*", является истинной». Это же относится ко всем аналогичным случаям.

будет ли $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ меньше, чем $\sqrt[10]{10^{21}}$,

я всё же могу признать, что структура первого рода, состоящая из этих двух мыслей, является ложной. Отсюда соответствующая структура второго рода является истинной. Кроме соединённых мыслей, мы имеем нечто такое, что их соединяет. Также и здесь связующее является вдвойне ненасыщенным: соединение осуществляется благодаря тому, что составные мысли насыщают связующее звено.

Чтобы выразить сложную мысль такого рода кратко, я пишу

«не [A и B]»,

где «A» и «B» — предложения, соответствующие соединённым мыслям. В этом выражении связующее звено выделяется более отчётливо: оно представляет собой смысл чего-то такого, что присутствует в выражении сверх букв «A» и «B». Два пробела в выражении

«не [и]»

позволяют распознать двойную ненасыщенность. Связующее звено есть вдвойне ненасыщенный смысл этого вдвойне ненасыщенного выражения. Насыщая пробелы выражениями мысли, мы образуем выражение сложной мысли второго рода. Но на самом деле мы не должны говорить, что сложная мысль возникает таким способом. Поскольку она является мыслью, а мысль не есть нечто возникшее.

В сложной мысли первого рода две мысли можно поменять местами. То же самое должно иметь место также и для отрицания сложной мысли первого рода, т. е. для сложной мысли второго рода. Если, таким образом, «не [A и B]» выражает сложную мысль, тогда «не [B и A]» выражает ту же самую структуру тех же самых мыслей. Подобная взаимозаменяемость должна рассматриваться в качестве теоремы не более, чем в случае структуры первого рода, поскольку в области смысла нет никакого различия. Таким образом, самоочевидно, что смысла второго сложного предложения является истинным, если истинен смысл первого — так как это тот же самый смысл.

Здесь также можно привести умозаключение:

не $[A \text{ и } B]$ является истинным;
 A является истинным; следовательно,
 B является ложным.

Сложная мысль третьего рода

Структура первого рода, представляющая собой связь отрицаний двух мыслей, также является структурой этих мыслей. Я называю её «структурой третьего рода», соединяющей первую и вторую мысль. Пусть, например, первая мысль говорит о том, что Поль умеет читать, а вторая — что Поль умеет писать; тогда структура третьего рода, связывающая эти мысли, говорит о том, что Поль не умеет ни читать, ни писать. Сложная мысль третьего рода является истинной только в том случае, если каждая из составляющих её мыслей является ложной, и она является ложной только тогда, когда по крайней мере одна из составляющих её мыслей является истинной. В сложной мысли третьего рода составляющие её мысли также являются взаимозаменяемыми. Если « A » выражает мысль, тогда «не A » должно выражать отрицание этой мысли, то же самое относится к « B ». Следовательно, если « A » и « B » являются подлинными предложениями, тогда смысл выражения

«(не A) и (не B)»,

для которого я также использую обозначение

«ни A , ни B »,

является структурой третьего рода, соединяющей две мысли, которые выражены посредством « A » и « B ».

В данном случае связующее звено является смыслом всего того, что в этих выражениях присутствует сверх букв « A » и « B ». Два пробела в

«(не) и (не)»

или в

«ни , ни »

показывают ненасыщенные пропуски, нуждающиеся в насыщении связующего этими выражениями. Когда последнее насыщается мыслями, образуется структура третьего рода, соединяющая эти мысли.

Вновь мы можем указать вывод:

A является ложным;
B является ложным; следовательно,
 (ни *A*, ни *B*) является истинным.

Скобки должны пояснять, что их содержание есть целое, чей смысл представлен как истинный.

Сложная мысль четвёртого рода

Отрицание структуры третьего рода, состоящей из двух мыслей, также является структурой этих двух мыслей: она может быть названа «сложной мыслью четвёртого рода». Структура четвёртого рода, состоящая из двух мыслей, представляет собой структуру второго рода, которая состоит из отрицаний этих двух мыслей. Представляя такую сложную мысль как истинную, мы тем самым утверждаем, что по крайней мере одна из составляющих её мыслей является истинной. Сложная мысль четвёртого рода является ложной только в том случае, если каждая из составляющих её мыслей является ложной. При условии, что «*A*» и «*B*» являются подлинными предложениями, смысл выражения

«не [(не *A*) и (не *B*)]»

представляет собой сложную мысль четвёртого рода, состоящую из мыслей, выраженных посредством «*A*» и «*B*». То же самое имеет место относительно выражения

«не [ни *A*, ни *B*]»,

которое более точно может быть записано в виде

«*A* или *B*».

В рассматриваемом смысле «или» имеет место только между предложениями — а на самом деле только между подлинными предло-

жениями. Признавая истинность такой сложной мысли, я не исключаю возможность истинности обеих мыслей, из которых она состоит: в этом случае мы имеем не-исключительное «или». Связующее является смыслом того, что имеет место в «А или В» обособленно от «А» и «В», т. е. смыслом

«(или)»,

где пробел с обеих сторон от «или» показывает два пропуска, которые требуют насыщения связующего. Предложения, соединённые с помощью «или», должны рассматриваться просто в качестве выражения мыслей, а следовательно, не как предложения, наделённые индивидуальной утверждающей силой. Сложная мысль как целое, с другой стороны, может признаваться за истинную. Языковое выражение не делает это ясным; каждое предложение, составляющее утверждение «5 меньше, чем 4, или 5 больше, чем 4», имеет такую языковую форму, которую оно имело также и в том случае, если бы было высказано отдельно с утверждающей силой, тогда как в действительности подразумевается, что только целостная структура представлена как истинная.

Вероятно, будет найдено, что смысл, приписываемый здесь слову «или», не всегда согласуется с обычным употреблением. В этом отношении нужно бы заметить, что при определении смысла научных выражений мы не можем ручаться за их точное соответствие использованию в обыденной жизни; последнее в действительности по большей степени не годится для научных целей, где мы чувствуем необходимость в более точных определениях. Учёный должен допустить, что его использование слова «или» отличается от обычного. В области логики от второстепенных деталей подобного рода можно отвлекаться. Благодаря тому, что было сказано о нашем использовании «или», мы вполне можем утверждать: «Фридрих Великий выиграл битву при Росбахе, или два больше трёх». Здесь кто-нибудь скажет: «Странно! Что общего имеет победа при Росбахе с бессмыслицей, что два больше трёх». Но «два больше трёх» является ложным, а не бессмысленным. Для логики безразлично, легко или трудно распознать ложность мысли. В предложениях, которые соединены с помощью «или», мы обычно предполагаем, что смысла одного предложения имеет нечто общее со смыслом другого, что между ними имеет место некоторое сродство; и в

данном случае нечто подобное может иметь место, но в другом случае может случиться так, что будет невозможно указать на смысловое сродство, которое постоянно связывалось бы с «или» и могло бы быть придано смыслу этого слова. «Но почему говорящий вообще добавляет второе предложение? Если он намеревается утверждать, что Фридрих Великий выиграл битву при Росбахе, тогда первого предложения было бы для этого достаточно. Мы всё-таки можем предположить, что он не намеревается утверждать, что два больше трёх. Если ему достаточно первого предложения, он не сказал бы большего, добавив несколько слов. Зачем, следовательно, лишняя трата слов?». Эти вопросы также только отвлекают на второстепенные детали. Каковы бы ни были намерения и мотивы говорящего, утверждающего то-то, а не то-то, нас они вообще не касаются, нас занимает только то, что он говорит.

Сложные мысли первых четырёх родов имеют то общее свойство, что соединённые мысли взаимозаменяемы.

Также и здесь получается вывод:

(*A* или *B*) является истинным;
A является ложным; следовательно,
B является истинным.

Сложная мысль пятого рода

Образуя структуру первого рода из отрицания одной мысли и второй мысли, мы получаем структуру пятого рода, состоящую из этих двух мыслей. При условии, что «*A*» выражает первую мысль, а «*B*» — вторую, смысл

«(не *A*) и *B*»

как раз и будет такой сложной мыслью. Структура такого рода будет истинной тогда и только тогда, когда первая составляющая её мысль является ложной, в то время как вторая является истинной. Таким образом, например, сложная мысль, выраженная в

«(не $3^2 = 2^3$) и ($2^4 = 4^2$)»,

т. е. мысль о том, что 3^2 не равно 2^3 , а 2^4 равно 4^2 , является истинной. После установления того, что 2^4 равно 4^2 , кто-нибудь может

посчитать, что показатель степени числа вообще можно поменять местами с самим числом. Другой попытается этой ошибки избежать, говоря, что « 2^4 равно 4^2 , но 2^3 не равно 3». Если спросить, какова разница между связью с помощью «и» и связью с помощью «но», ответ будет следующим: в отношении того, что я назвал мыслью или смыслом предложения, не существенно, будет ли выбрана идиома «и» или идиома «но». Различие заключается только в том, что я называю освещением мысли*; оно не относится к сфере логики.

Связующее в сложной мысли пятого рода представляет собой вдвойне нуждающийся в дополнении смысла вдвойне нуждающегося в дополнении выражения

«(не) и ()».

Здесь соединённые мысли не взаимозаменяемы, поскольку

«(не B) и A»

и

«(не A) и B»

выражают не одно и то же. Позиция, которую занимает в структуре первая мысль, обладает иным характером, нежели позиция второй мысли. Не решаясь создать новое слово, я обязан использовать слово «позиция» в переносном значении. При письменном выражении мыслей «позиции» может быть придан её обычный пространственный смысл. Позиции в выражении мысли должно соответствовать нечто в самой мысли, и для этого нечто я сохраняю слово «позиция». В данном случае мы не можем просто допустить, чтобы две мысли меняли свои позиции, но мы можем поместить отрицание второй мысли в позицию первой и в то же самое время отрицание первой — в позицию второй. (Конечно, это также должно пониматься с долей иронии, поскольку действие в пространстве и времени не подразумевается.) Таким образом, из

«(не A) и B»

* Ср. мою статью *Мысль*.

мы получаем

«(не (не B)) и (не A)».

Но так как «не (не B)» имеет тот же смысл, что и « B », мы имеем в данном случае

« B и (не A)»,

выражающее с

«(не A) и B »

одно и то же.

Сложная мысль шестого рода

Отрицание структуры пятого рода, соединяющей две мысли, является структурой шестого рода, состоящей из тех же самых мыслей. Можно также сказать, что структура второго рода, соединяющая отрицание одной мысли и вторую мысль, является структурой шестого рода, состоящей из тех же самых мыслей. Структура пятого рода, соединяющая первую мысль со второй, является истинной тогда и только тогда, когда первая мысль является ложной, а вторая мысль — истинной. Из этого следует, что структура шестого рода, соединяющая первую мысль со второй, является ложной тогда и только тогда, когда первая мысль является ложной, а вторая — истинной. Таким образом, такая сложная мысль является истинной, когда первая мысль истинна, независимо от того, будет ли вторая мысль истинной или ложной. Точно так же, такая сложная мысль является истинной, когда вторая мысль ложна, независимо от того, будет ли первая мысль истинной или ложной.

Не зная,

будет ли $\left(\left(\frac{21}{20} \right)^{100} \right)^2$ больше, чем 2^2 ,

и не зная,

будет ли $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ больше, чем 2,

я всё же могу распознать как истинную структуру шестого рода, соединяющую первую мысль со второй. Отрицание первой мысли и вторая мысль исключают друг друга. Это можно выразить следующим образом:

«Если $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ больше, чем 2, то $\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2$ больше, чем 2^2 ».

Вместо «сложная мысль шестого рода» я говорю также «гипотетическая сложная мысль» и называю первую мысль «заключением», а вторую — «условием» гипотетической сложной мысли. Таким образом, гипотетическая сложная мысль является истинной, если её заключение является истинным; она также является истинной, если её условие является ложным, независимо от того, будет ли заключение истинным или ложным. Заключение, тем не менее, всегда должно быть мыслью²¹.

Если вновь допустить, что «А» и «В» являются подлинными предложениями, тогда

«не [(не А) и В]»

выражает гипотетическую структуру, имеющую смысл (мыслимое содержание) предложения «А» в качестве заключения, а смысла предложения «В» — в качестве условия. Вместо этого мы можем также писать:

«Если В, то А».

Конечно, здесь могут возникнуть сомнения. Пожалуй, сочтут, что подобное словоупотребление не имеет места. В этом отношении необходимо вновь и вновь подчёркивать, что науке должно быть позволено иметь своё собственное словоупотребление, что она не может всегда подчиняться языку жизни. Как раз здесь я вижу самую большую трудность для философии: инструмент, который она находит пригодным для своей работы, а именно обыденный язык, мало подходит для её цели, его словообразование руководствуется потребностями, всецело отличными от

потребностей философии. Таким образом, также и логика вынуждена из того, что она находит, приготовить для себя подходящий инструмент. И для этой работы она находит инструмент поначалу лишь малопригодный.

Многие, несомненно, утверждали бы, что предложение

«Если 2 больше, чем 3, тогда 4 — простое число»

является бессмысленным; однако в соответствии с принятым мной допущением оно является истинным, потому что его условие является ложным. Быть ложным ещё не значит быть бессмысленным. Не зная,

будет ли $\sqrt[10]{10^{21}}$ больше, чем $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$,

можно признать, что

если $\sqrt[10]{10^{21}}$ больше, чем $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$, то $\left(\sqrt[10]{10^{21}}\right)^2$ больше, чем $\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2$,

и никто не увидит в этом бессмыслицы. Ложным теперь является то, что

$\sqrt[10]{10^{21}}$ больше, чем $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$,

и точно так же ложно, что

$\left(\sqrt[10]{10^{21}}\right)^2$ больше, чем $\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2$.

Если бы это можно было осознать так же легко, как мы осознаём ложность выражения «2 больше, чем 3», тогда гипотетическая

сложная мысль в данном примере казалась бы столь же бессмысленной, как и в предыдущем примере. С точки зрения логики к существу дела не относится, схватывается ли ложность мысли с большей или меньшей трудностью, поскольку это различие чисто психологическое.

Мысль, выраженная сложным предложением

«Если у меня есть петух, который сегодня снёс яйца, то Кёльнский собор завтра утром разрушится»,

также является истинной. Кто-нибудь, вероятно, скажет: «Но здесь условие внутренне никак не связано с заключением». С моей точки зрения, однако, такой связи не требуется, я прошу лишь того, чтобы «Если *B*, то *A*» понималось только с точки зрения того, что я говорил и выражал в форме

«не [(не *A*) и *B*]».

Конечно, такое понимание гипотетической сложной мысли поначалу вызовет недоумение. Но в мои расчёты не входит согласование с обыденным словоупотреблением, которое в большинстве случаев слишком расплывчато и недостаточно твёрдо для целей логики. Здесь встречается всё что угодно, например, отношение причины и следствия, намерение, с которым говорящий высказывает предложение формы «Если *B*, то *A*», основание, исходя из которого он принимает содержание предложения за истинное. Говорящий, пожалуй, подаёт намёки относительно подобных вопросов, неожиданно возникающих у слушателей. Эти намёки относятся к украшениям, часто обрамляющим мысль в обыденном словоупотреблении. Моя задача здесь состоит в том, чтобы, устраняя украшения, расчистить структуру двух мыслей, представляющую собой логическое ядро, структуру, которую я назвал гипотетической сложной мыслью. Понимание структуры мысли, составленной из двух мыслей, должно обеспечить основание для рассмотрения многообразия сложных мыслей²².

То, что я сказал о выражении «Если *B*, то *A*», не должно пониматься в том смысле, что каждое сложное предложение подобной формы выражает гипотетическую сложную мысль. Если «*A*» или «*B*» сами по себе не выражают мысль полностью, т. е. не являются подлинными предложениями, мы имеем иной случай. В сложном предложении

«Если кто-то является убийцей, тогда он — преступник»

ни предложение-условие, ни предложение-заключение, взятые сами по себе, не выражают мысль. Без некоторого дополнительного намёка мы не в состоянии определить, истина или ложь выражена в предложении «Он — преступник», когда оно вырвано из контекста; поскольку слово «он» не является собственным именем и, вырванное из контекста предложения в отсутствие дополнительного намёка, оно ничего не означает. Таким образом, придаточное предложение следствия не выражает никакой мысли и, стало быть, не является подлинным предложением. То же самое относится к придаточному предложению условия, поскольку оно включает составную часть «кто-то», которая также ничего не означает. Несмотря на это, такое сложноподчинённое предложение способно выразить мысль. «Кто-то» и «он» указывают друг на друга. Благодаря этому и посредством «Если —, то —» два предложения таким образом связаны друг с другом, что вместе они выражают мысль; тем временем мы можем вычленивать три мысли в гипотетической сложной мысли, а именно, условие, заключение и мысль, составленную из двух первых. Таким образом, сложное предложение не всегда выражает сложную мысль, и очень важно различать эти два случая, которые встречаются в сложном предложении формы

«Если B , то A ».

И здесь также я прилагаю вывод:

(Если B , то A) является истинным;
 B является истинным; следовательно,
 A является истинным.

В этом выводе характерные особенности гипотетической сложной мысли выявляются, вероятно, наиболее отчётливо.

Примечателен ещё и следующий способ вывода:

(Если C , то B) является истинным;
(Если B , то A) является истинным; следовательно,
(Если C , то A) является истинным.

Здесь можно упомянуть ту манеру выражаться, которая вводит в заблуждение. Многие из тех, кто пишет работы по математи-

ке, выражаются так, как если бы заключение могло быть выведено из мысли, чья истинность всё ещё остаётся сомнительной. Когда говорят, что «Я вывожу A из B », или что «На основании B я заключаю, что A — истинно», то под B понимают одну из посылок или единственную посылку вывода. Но прежде, чем установлена истинность мысли, никто не может использовать её как посылку и выводить или делать заключение на её основании. Если кто-то всё ещё намеревается это сделать, то он, по-видимому, путает признание истинности гипотетической сложной мысли с выводом, в котором условие, содержащееся в такой структуре, принимается за посылку. Ведь даже признание истинности смысла

«Если C , то A »

может основываться на выводе, как в приведённом выше примере, и при этом истинность C может оставаться сомнительной*; но мысль, выраженная в этом примере посредством « C », вовсе не является посылкой вывода; посылкой был смысл предложения

«Если C , то B ».

Если бы мыслимое содержание « C » было бы посылкой в выводе, оно не встречалось бы в заключении, поскольку именно в этом и состоит работа вывода.

Мы видели, что в сложной мысли пятого рода первую мысль можно заменить отрицанием второй при одновременной замене второй мысли отрицанием первой, не изменяя смысла целого. Поскольку сложная мысль шестого рода является отрицанием сложной мысли пятого рода, то же самое имеет место и для неё: т. е. мы можем заменить условие гипотетической структуры на отрицание следствия, одновременно заменяя следствие на отрицание условия, не изменяя тем самым её смысл. (Это — переход от *modus ponens* к *modus tollens*, контрапозиция.)

Обзор шести сложных мыслей

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| I. A и B . | II. не [A и B]. |
| III. (не A) и (не B). | IV. не [(не A) и (не B)]. |
| V. (не A) и B . | VI. не [(не A) и B]. |

* Более точно: что мысль, выраженная посредством « C », является истинной.

Напрашивается дополнение:

«*A* и (не *B*)».

Но смысл

«*A* и (не *B*)»

совпадает со смыслом

«(не *B*) и *A*»,

где «*A*» и «*B*» — также подлинные предложения. И так как

«(не *B*) и *A*»

имеет ту же самую форму, что и

«(не *A*) и *B*»,

мы не получаем ничего нового, но лишь вновь выражение сложной мысли пятого рода; а в

«не [*A* и (не *B*)]»

мы имеем другое выражение сложной мысли шестого рода. Таким образом, наши шесть родов сложных мыслей образуют завершённое целое, и первоначальными составными элементами здесь являются структура первого рода и отрицание²³. Преимущество, которым в соответствии с последним утверждением, по-видимому, обладают структуры первого рода по отношению к другим структурам — в той мере, в которой оно может быть приемлемо для психолога, — логически не обосновано; так как любой из шести родов сложной мысли можно положить в основание и вывести из него другие структуры с помощью отрицания; так что для логики все шесть родов равноправны. Если, например, исходить из гипотетической структуры

«Если *B*, то *C*»

или

«не ((не C) и B)»

и заменить « C » на «не A », то получится

«Если B , то не A »

или

«не (A и B)».

Отрицая целое, мы получаем

«не (если B , то не A)»

или

« A и B ».

В соответствии с этим

«не (если B , то не A)»

означает то же самое, что и

« A и B »,

а структура первого рода сводится к гипотетической структуре и отрицанию. А так как из структуры первого рода и отрицания могут быть выведены остальные сложные мысли, то все сложные мысли наших шести родов могут быть выведены из гипотетической структуры и отрицания. То, что говорилось о первом и шестом роде структур, относится в общем ко всем шести родам сложной мысли. Любой из них может служить основой для выведения других. Выбор не определяется логическим положением дел.

Нечто подобное имеет место в основаниях геометрии. Две различных геометрии могут быть сформулированы таким образом, что определённые теоремы одной будут аксиомами другой, и наоборот.

Рассмотрим теперь те случаи, где мысль соединена с самой собой, а не с некоторой другой мыслью. Для любого подлинного предложения « A »

«А и А»

выражает ту же самую мысль, которую выражает «А»: первое говорит не более и не менее, чем последнее. Из этого следует, что

«не [А и А]»

выражает то же самое, что и «не А». Равным образом,

«(не А) и (не А)»

также выражают то же самое, что «не А»; а, следовательно,

«не [(не А) и (не А)]»

выражает то же самое, что «не (не А)» или «А». Итак,

«не [(не А) и (не А)]»

выражает структуру четвертого рода, и вместо этого мы можем сказать

«А или А».

Соответственно не только

«А и А»,

но также

«А или А»

имеет смысл, одинаковый с «А».

Иначе для структуры пятого рода. Сложная мысль, выраженная в

«(не А) и А»,

является ложной, так как из двух мыслей, где одна является отрицанием другой, одна должна быть ложной; таким образом,

структура первого рода, составленная из них, также является ложной. Структура шестого рода, соединяющая мысль с самой собой, а именно та, которая выражена в

«не [(не А) и А]»,

соответственно является истинной (при условии, что «А» — подлинное предложение). Мы можем также передать эту сложную мысль вербально с помощью выражения

«Если А, то А»,

например, «Если Шнеекопке выше, чем Броккен, то Шнеекопке выше, чем Броккен».

В этом случае возникают вопросы: «Выражает ли это предложение мысль? Не отсутствует ли у него содержание? Узнаём ли мы из него нечто новое?». Ведь возможно, что до того, как о чём-то слышали, об истинности этого не знали вообще и, таким образом, не признавали. В этом отношении, при известных условиях, что-либо можно узнать благодаря тому, что оно представляет собой нечто новое. Однако не следует оспаривать истину, что Шнеекопке выше, чем Броккен, если Шнеекопке выше, чем Броккен. Поскольку только мысли могут быть истинными, это сложное предложение должно выражать мысль; и, несмотря на мнимую бессмысленность, отрицание этой мысли также является мыслью. Всегда необходимо помнить, что мысль может быть выражена без того, чтобы быть утверждаемой. В данном случае мы имеем дело как раз с мыслями, а бессмыслица привходит только от утверждающей силы, которая произвольно примысливается к высказанному предложению. Но разве кто-то говорит, что это предложение высказывается кем-то без утверждающей силы для того, чтобы представить его содержание как истинное? Может быть, он делает это с прямо противоположным намерением.

Последнее можно обобщить. Пусть «О» — предложение, которое выражает частный пример логического закона, но которое не дано как истинное. Тогда «не О» выглядит вполне бессмысленным, но только потому, что оно мыслится как высказанное утвердительно. Утверждение мысли, противоречащей логическому закону, действительно может выглядеть если и не бессмысленно, то по крайней мере абсурдно, поскольку истинность логического закона непосредственно очевидна сама по себе; т. е. на основании

смысла собственного выражения. Однако мысль, которая противоречит логическому закону, может быть выражена, так как она может отрицаться. Но само «О» часто кажется бессодержательным.

Каждая сложная мысль, сама будучи мыслью, может состоять из других мыслей. Таким образом, структура, выраженная с помощью

«(A и B) и C»,

составлена из мыслей, выраженных посредством

«A и B» и «C».

Но мы можем также рассматривать её как составленную из мыслей, выраженных посредством

«A», «B», «C».

Этим способом возникает сложная мысль, содержащая три мысли*. Другие примеры структур из трёх мыслей выражены в

«не [(не A) и (B и C)]»

и

«не [(не A) и ((не B) и (не C))]».

Вполне было бы возможно найти примеры сложных мыслей, содержащих четыре, пять и более мыслей.

Сложная мысль первого рода и отрицание в совокупности достаточны для образования всех таких структур, и любая другая из шести родов структур может быть выбрана вместо первой. В данном случае возникает вопрос, каждая ли сложная мысль образуется таким способом? Когда дело касается математики, я убеждён, что она не включает мыслей, образованных каким-либо другим способом. Вряд ли по-другому обстоит дело в физике, химии и астрономии; но предложения цели [Finalsätze] предписывают осторожность и, по-видимому, тре-

* Это возникновение не должно рассматриваться как темпоральный процесс.

буют более тщательного исследования. Здесь я оставляю этот вопрос открытым. Сложные мысли, образованные из структуры первого рода с помощью отрицания, по-видимому, заслуживают специального названия. Они могут быть названы математическими сложными мыслями. Это не подразумевает, что сложных мыслей другого типа не существует. Математические сложные мысли, по-видимому, обладают кроме этого ещё чем-то общим: так как если истинный компонент такой структуры заменить другой истинной мыслью, сложная мысль, получившаяся в результате, будет истинной или ложной соответственно тому, была ли первоначальная структура истинной или ложной. То же самое имеет место, если ложный компонент математической сложной мысли будет заменён другой ложной мыслью. В данном случае я хочу сказать, что две мысли имеют одинаковое истинностное значение, если они являются или оба истинными, или оба ложными. Я, следовательно, утверждаю, что мысль, выраженная посредством «А», имеет то же самое истинностное значение, что и мысль, выраженная посредством «В», если либо

«А и В»,

либо

«(не А) и (не В)»

выражает истинную мысль. Установив это, я могу перефразировать мой тезис следующим образом:

«Если один компонент математической сложной мысли заменить другой мыслью, имеющей то же самое истинностное значение, тогда сложная мысль, получившаяся в результате, будет иметь истинностное значение, совпадающее с истинностным значением исходной мысли»²⁴.

ЛОГИЧЕСКАЯ ВСЕОБЩНОСТЬ (фрагмент четвёртого исследования)

В опубликованной мною в этом журнале статье о сложных мыслях (см. предыдущее исследование) были рассмотрены, в частности, гипотетические сложные мысли. Естественно было

бы поискать способ, позволяющий осуществить переход от последних к тому, что в физике, в математике и в логике называется *законами*. Мы ведь очень часто выражаем закон в форме гипотетического сложного предложения, составленного из одного или более условий и следствия. Однако как раз в начале на нашем пути встречается препятствие. Гипотетические сложные мысли, которые я обсуждал, всё же не являются законами, поскольку не обладают всеобщностью, отличающей законы от отдельных фактов, например таких, с которыми мы привыкли сталкиваться в истории. В самом деле, различие между законом и отдельным фактом пролегает очень глубоко. Это как раз то, что создаёт фундаментальное различие между деятельностью естествоиспытателя и историка. Первый стремится установить законы; историк же пытается установить отдельные факты. Разумеется, историк также пытается понять причины вещей, а чтобы сделать это, он должен по крайней мере предполагать, что события согласуются с законами²⁵.

Этого, наверно, достаточно для того, чтобы показать необходимость более тщательного изучения всеобщности.

Ценность закона для нашего знания покоится на том, что он заключает в себе много — даже бесконечно много — отдельных фактов в качестве особых случаев. Мы извлекаем пользу из знания законов, черпая из них изобилие сведений и посредством вывода от общего к отдельному, для чего, разумеется, всегда всё же требуется действие души — действие вывода. Любой, кто знает, как осуществить такой вывод, схватывает также и то, что подразумевается под всеобщностью в указанном здесь смысле слова.

Посредством выводов другого рода мы можем получить новые законы из тех, которые нам уже известны.

Итак, в чём сущность всеобщности? Поскольку здесь мы имеем дело с законами, а законы суть мысли, предметом обсуждения в данном контексте может быть только всеобщность мысли. Всякое научное исследование осуществляется как последовательность мыслей, признаваемых истинными, но редко бывает так, что мысль становится объектом нашего исследования, тем, о чём мы высказываемся. По большей части в таком качестве фигурируют объекты чувственного восприятия. Утверждая о них нечто, мы выражаем мысль. Обычно именно так мысли фигурируют и в науке. Здесь же, утверждая всеобщность мыслей, мы делаем их объектом нашего исследования, и они занимают место, которое обычно занимали объекты чувственного восприятия. Эти

последние, которые в иных случаях, особенно в естественных науках, являются объектами исследования, сущностно отличны от мыслей. Так как мысли не могут быть восприняты чувствами. Правда, знаки, выражающие мысли, могут быть восприняты слухом или зрением, но не сами мысли. Чувственные впечатления могут вести нас к признанию истинности мысли; но мы также можем схватить мысль без признания её истинной. Ложные мысли также являются мыслями.

Как и сама мысль, всеобщность мысли не может быть воспринята чувствами. Я не могу представить мысль подобно минералогу, который представляет образец минерала с тем, чтобы привлечь внимание к его характерному блеску. Невозможно даже использовать определение, чтобы установить, что же подразумевается под всеобщностью.

Язык, по-видимому, может предложить выход из создавшегося положения, поскольку, с одной стороны, его предложения могут восприниматься чувствами, а с другой стороны, они выражают мысли. Как средство выражения мыслей язык должен быть подобен тому, что происходит на уровне мысли. Поэтому можно надеяться, что мы в состоянии использовать его в качестве мостика от чувственно воспринимаемого к не воспринимаемому чувствами. Как только мы приходим к пониманию того, что происходит на языковом уровне, мы можем обнаружить, что гораздо легче продолжать и применять то, что мы поняли, к тому, что имеет место на уровне мыслей, — к тому, что отражается в языке. В данном случае не стоит вопрос об обыденном понимании языка, о схватывании выраженных в нём мыслей: это вопрос о схватывании свойства мыслей, которое я называю логической всеобщностью. Правда, для этого мы должны полагаться на согласие между нами и другими, и здесь мы можем быть разочарованы. К тому же использование языка требует осторожности. Мы не должны игнорировать глубокую пропасть, которая всё ещё разделяет уровень языка и уровень мысли и которая налагает определённые ограничения на взаимное соответствие двух уровней.

Итак, в какой форме всеобщность проявляется в языке? Мы имеем различные выражения для одной и той же общей мысли:

‘Все люди смертны’,

‘Каждый человек смертен’,

‘Если нечто является человеком, то оно смертно’.

Различия в выражении не затрагивают саму мысль. Нам целесообразно ограничиться использованием одного способа выражения, чтобы не принять случайные различия — например, на строение мысли — за различия мысли. Выражения, включающие в себя 'все' и 'каждый', не пригодны для использования *всюду*, где присутствует всеобщность, поскольку не каждый закон может быть отлит в этой форме. В последнем способе выражения мы имеем форму гипотетического сложного предложения — форму, которую мы едва ли можем избежать и используем так же и в других случаях — вместе с неопределённо указующими частями предложения 'кто-то' и 'он'; и эти последние содержат собственно выражение всеобщности. От этого способа выражения мы можем легко перейти к отдельному заменой неопределённо указующих частей предложения такими частями, которые обозначают определённо:

'Если Наполеон является человеком, то Наполеон смертен'.

Чтобы иметь такую возможность перехода от общего к отдельному, мы должны использовать только выражение всеобщности с неопределённо указующими частями предложения, но если бы мы ограничились только этими 'некто' и 'оно', мы могли бы рассмотреть только самые простые случаи. Сейчас естественно применить методы арифметики, выбрав буквы для неопределённо указующих частей предложения:

'Если *a* является человеком, то *a* — смертен'.

Здесь буквы одинаковой формы взаимно указывают друг на друга. Вместо букв одинаковой с '*a*' формы мы можем точно так же взять буквы, имеющие одинаковую форму с '*b*' или '*c*'. Но существенным является то, что они должны быть одинаковой формы. Однако, если быть точным, мы тем самым выходим за пределы разговорного языка, предназначенного для слуха, и оказываемся в области записанного или напечатанного языка, предназначенного для зрения. Предложение, написанное автором, первоначально направлено на образование предложения, высказанного в языке, последовательности звуков которого служат в качестве знаков для выражения смысла. Поэтому с самого начала существует только опосредованная связь между записанными знаками и выраженным смыслом. Но как только эта связь установлена,

мы можем рассматривать записанное или напечатанное предложение уже как непосредственное выражение мысли, а потому как предложение в строгом смысле слова. Этим способом мы получаем язык, зависящий от чувства зрения, которому, в случае нужды, может быть обучен даже глухой человек. В этом языке отдельные буквы могут применяться как неопределённо указующие части предложения. Указанный нами только что язык, который я буду называть *вспомогательным языком* [Hilfssprache], должен служить нам в качестве мостика от чувственно воспринимаемого к чувственно невоспринимаемому²⁶. Он содержит две различных *составных части: части, связанные с формой слов*, и отдельные *буквы*. Первые соответствуют словам разговорного языка, последние играют неопределённо указующую роль. Этот вспомогательный язык необходимо отличать от языка, на котором я выстраиваю последовательность мыслей. Последний представляет собой обычный письменный или печатный немецкий, мой *язык изложения* [Darlegungssprache]. Напротив, предложения вспомогательного языка суть объекты, о которых говорится на моём языке изложения²⁷. А потому я должен быть способен обозначить их в моём языке изложения, подобно тому как в статье по астрономии планеты обозначаются своими собственными именами: 'Венера', 'Марс' и т. д. *В качестве* такого рода *собственных имён предложений вспомогательного языка я использую те же самые предложения, но заключённые в кавычки*. Кроме того, из этого следует, что предложения вспомогательного языка никогда не даны с утвердительной силой. 'Если *a* является человеком, то *a* смертен' представляет собой предложение вспомогательного языка, в котором выражена общая мысль. Мы переходим от общего к отдельному, подставляя вместо неопределённо указующих букв одинаковой формы собственные имена одинаковой формы. К сущности нашего вспомогательного языка относится то, что собственные имена одинаковой формы обозначают один и тот же объект (человека). Здесь пустые знаки (имена) вообще не суть собственные имена*. Подставляя вместо неопределённо указующих букв одинаковой с 'a' формы собственные имена формы 'Наполеон', мы получаем

* Я называю собственные имена нашего вспомогательного языка *имеющими одинаковую форму*, если тот, кто пишет, полагает их таковыми, обозначая одинаковым размером, и если мы можем распознать это намерение пишущего, даже если оно реализовано несовершенно.

‘Если Наполеон является человеком, то Наполеон смертен’.

Однако это предложение не должно рассматриваться как заключение, поскольку предложению ‘Если *a* является человеком, то *a* — смертен’ не придана утвердительная сила, а потому мысль, выраженная в нём, не представлена как мысль, признанная истинной, ибо *только мысль, признанная истинной, может быть сделана посылкой вывода*. Но она может быть переделана в вывод, если два предложения нашего вспомогательного языка освободить от кавычек, тем самым делая возможным таким образом их выдвижение с утвердительной силой.

Сложное предложение ‘Если Наполеон является человеком, то Наполеон — смертен’ [*Wenn Napoleon ein Mensch ist, so ist Napoleon sterblich*] выражает гипотетическую сложную мысль, составленную из одного условия и одного следствия²⁸. Первое выражено в предложении ‘Наполеон является человеком’ [*Napoleon ist ein Mensch*], последнее — в предложении ‘Наполеон — смертен’ [*Napoleon ist sterblich*]. Однако, строго говоря, наше сложное предложение не содержит ни предложения, имеющего одинаковую форму с ‘*Napoleon ist ein Mensch*’, ни предложения, имеющего одинаковую форму с ‘*Napoleon ist sterblich*’. В расхождении между тем, что встречается на языковом уровне, и тем, что встречается на уровне мысли, проявляется недостаток нашего вспомогательного языка, который всё ещё должен быть устранён. Теперь я намереваюсь облечь мысль, выраженную мной выше в предложении *Wenn Napoleon ein Mensch ist, so ist Napoleon sterblich*, в предложение *Wenn Napoleon ist ein Mensch, so Napoleon ist sterblich*, которое в последующем я хотел бы называть вторым предложением. Сходные случаи должны трактоваться точно таким же способом. Поэтому я также хочу преобразовать предложение *Wenn a ein Mensch ist, so ist a sterblich* в предложение *Wenn a ist ein Mensch, so a ist sterblich*, которое в последующем я буду называть первым предложением*. В первом предложении я отличаю две отдельные буквы, имеющих одинаковую с ‘*a*’ форму, от остальных частей²⁹.

* Первое предложение в отличие от второго не выражает сложной мысли, поскольку ни ‘*a* является человеком’, ни ‘*a* — смертен’ не выражают мысль. Реально мы имеем здесь только части предложения, а не предложения.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

Под заголовком *Логические исследования* здесь объединены связанные тематически и содержательно статьи Г. Фреге, дающие последовательную экспозицию его взглядов на философию логики и опубликованные в периодической печати с 1918 по 1923 год. Общий замысел подобного произведения связан с ситуацией, сложившейся вокруг его работ, касающихся разработки технических проблем создававшейся им новой логики и оснований математики. Адресуя свои работы в первую очередь философам и математикам, Фреге прекрасно понимал, с какими затруднениями ему придётся столкнуться. В одной из своих главных работ — *Основные законы арифметики (Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd. 1. — Jena, 1893. — S. xii.)* — он, затрагивая проблемы междисциплинарных исследований, отметил необычность своих представлений, заметив, что его идеи могут быть проигнорированы как математиками, которые, столкнувшись с выражениями типа «понятие», «отношение», «суждение», вполне могут отказаться от чтения его работ, сославшись на то, что это метафизика, так и философами, которые, увидев формулы, сочтут это математикой и также не будут читать. Несмотря на то, что практически каждая крупная работа Г. Фреге снабжена обширными философскими экскурсами, достаточно характеризующими его взгляды на природу логического вообще и его связь с математикой в частности, он никогда не оставлял намерения написать труд по философским основаниям логики, который бы адекватно отражал суть его реформаторских взглядов и в то же время был бы свободен от излишних технических тонкостей. Последние, в частности, в немалой степени объясняют неприятие его взглядов широкой аудиторией, для которой разработанный им в работе *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (русский перевод: *Фреге Г. Шрифт понятий, скопированный с арифметического формульный язык чистого мышления // Методы логических исследований. — Тбилиси: Мецниереба, 1987. С. 83–151*) и использованный в большинстве его сочинений символический язык оставался непонятым. В этом отношении *Логические исследования* представляют собой достаточно компактное и в то же время ёмкое изложение основных положений того, что можно было бы назвать философией логики, и отражают в высшей степени оригинальное

понимание этих вопросов Г. Фреге, отличающих его как от господствовавших во второй половине XIX века психологистских направлений в основаниях логики, так и от складывающихся в начале XX века феноменологии Э. Гуссерля и философии логического анализа, представленного трудами Б. Рассела и Л. Витгенштейна. Первые три исследования впервые появились в периодическом издании *Betrdge zur Philosophie des deutschen Idealismus* за 1918 (I), 1919 (II) и 1923 (III) годы. Фрагмент под заголовком *Логическая всеобщность* был обнаружен среди бумаг, оставшихся после смерти Г. Фреге. На то, что этот фрагмент непосредственно примыкает к трём предыдущим исследованиям и что при соответствующей доработке он должен был быть включён в их состав, указывает его начало, отсылающее к *Сложной мысли*. Кроме того, *Логическая всеобщность* не только очевидно продолжает тему трёх предыдущих работ, образуя последовательность изложения, которая свойственна всем крупным работам Фреге, разрабатывающим аналогичные вопросы, но и использует сходные сравнения. Перевод первых трёх исследований выполнен по изданию: *Frege G. Logische Untersuchungen*. — Göttingen, 1966. Фрагмент четвёртого исследования переведён по изданию: *Frege G. Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel*, Bd. I. — Hamburg, 1969.

¹ Различение двух смыслов слова «закон» проводится Фреге в *Основных законах арифметики*, однако предлагаемое там решение несколько отлично. Приведём для сравнения цитату: «В одном смысле закон утверждает то, что есть; в другом он предписывает то, что должно быть. Только в последнем смысле законы логики могут быть названы 'законами мысли': поскольку они обуславливают способ, которым должно мыслить. Любой закон, утверждающий то, что есть, может рассматриваться как предписывающий то, что должно мыслить в согласии с ним, и в этом смысле является, таким образом, законом мысли. Это относится к законам геометрии и физики не в меньшей степени, чем к законам логики. Эти последние имеют специальное название "законы мысли", только если мы нашим утверждением подразумеваем, что они являются наиболее общими законами, которые универсально предписывают способ, которым должно мыслить, если необходимо мыслить вообще» (*Frege G. Grundgesetze*, S. xv).

² В теории Фреге «смысл» — более широкое понятие, в отношении которого мысль занимает субординированное положение

ние. В одной из работ он описывает смысл следующим образом: «Знак как таковой (будь то слово, словосочетание или графический символ) может мыслиться не только в связи с обозначаемым, то есть с тем, что можно было бы назвать *значением* знака, но и в связи с тем, что мне хотелось бы назвать *смыслом* знака; смысл знака — это то, что отражает способ представления, обозначаемого данным знаком» (Фреге Г. Смысл и денотат // Семиотика и информатика (вып. 8). — М.: ВИНТИ, 1977. — С. 183). Соотношение смысла, как способа данности значения, под которым Фреге понимает определённую вещь в самом широком смысле слова, и мысли вытекает из его специфического понимания предложения как имени истинностного значения. Так, например, он пишет: «Смысл имени истинностного значения я называю *мыслью*» (Frege G. Grundgesetze, S. 7).

³ Несмотря на то, что смысл вообще и мысль в частности противопоставляются представлению во всех сочинениях Фреге, спецификация мысли через указание её свойства «быть истинным» характерна именно для этой работы. В *Шрифте понятий* основанием выделения мысли является её самождественность, независимость от различия языковых оболочек, в которых она может быть выражена. Там он говорит следующее: «Ту часть содержания, которая является *одной и той же* в обоих предложениях, я называю *понятийным содержанием*. Поскольку только такое содержание имеет значение для шрифта понятий, я не различаю предложения с одним и тем же понятийным содержанием» (с. 93). В данном случае то, что вместо термина «мысль» используется термин «понятийное содержание», не меняет существа дела. В работе *О смысле и денотате* спецификация мысли тесно связана с характеристикой того, что такое смысл, где в качестве отправной точки избирается проблема тождества имён. Применение хода рассуждения, представленного в данной работе, к мысли представляется достаточно очевидным, хотя здесь и могут возникнуть затруднения в связи с принимаемым немецким логиком принципом экстенциональности (см. заключительный абзац *Сложной мысли*, с. 96), согласно которому тождественность значительной части мыслей, пусть даже и сложных, сводится к тождественности истинностных значений.

⁴ Рассмотрение истинности как *свойства* мысли, на первый взгляд, не согласуется с номинативной теорией предложений, где *истина* и *ложь* рассматриваются как особые предметы, именами

которых являются предложения. В работе *О смысле и денотате* Фреге, например, пишет: «Значением предложения является его истинностное значение — “истина” или “ложь”; других истинностных значений не бывает. Всякое повествовательное предложение, в зависимости от значений составляющих его слов, может, таким образом, рассматриваться как имя, значением которого (если, конечно, оно существует) будет либо истина, либо ложь. Обе эти абстрактные вещи (истина и ложь) признаются, хотя бы молчаливо, всеми, кто вообще делает какие-либо утверждения или считает хотя бы что-нибудь истинным, то есть даже самыми последовательными скептиками» (с. 190–191). Ту же самую точку зрения он развивает в *Основных законах арифметики*, где говорит: «Прежде в том, чьей внешней формой является повествовательное предложение, я различал: (1) признание истинным, (2) содержание, которое признаётся истинным. Содержание я называл ‘возможным содержанием суждения’. Это последнее расчленяется мной теперь на то, что я называю ‘мысль’ и ‘истинностное значение’, как следствие различения между смыслом и значением знака. В этом случае смыслом предложения является мысль, а его значением является истинностное значение» (*Frege G. Grundgesetze, S. x*). Однако противоречие здесь лишь кажущееся. Говоря о своеобразии слова «истинный», Фреге и сам использует его в высшей степени свособразно. К существу логического относится не только то, что предложения есть имена истинностных значений. Как таковые, они имели бы мало значения для логики, поскольку для её главной цели, а именно, осуществления вывода рассмотрение истинностного значения как наименованного объекта недостаточно. По Фреге, в качестве элементов вывода могут использоваться только такие предложения, которые высказаны с утвердительной силой, т. е. соответствующая им мысль должна быть признана истинной. «Вывод вовсе не относится к области знаков. Он заключается в вынесении суждений, осуществляемом на основе уже вынесенных ранее суждений согласно логическим законам. Каждая из посылок есть определённая мысль, признанная истинной; точно так же признаётся истинной определённая мысль в суждении, которое является заключением вывода» (*Frege G. On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic. — London, 1971. — P. 58*). Признание истинным отлочно от номинативной функции предложений. А поскольку в *Логических исследованиях* Фреге интересуют не семантические

аспекты выражения мысли, а прежде всего возможность осуществления вывода, основное внимание он концентрирует как раз на втором моменте понимания истинности, а именно на акте суждения. В этом отношении истинность как истинностное значение и истинность как признание истинным не заменяют друг друга и тем более не являются в каком-либо смысле субординированными. Они отражают различные, не сводимые друг к другу аспекты логического: первый — референция; второй — мыслительный акт. Можно также заметить, что в *Шрифте понятий*, например, т. е. до разработки номинативной теории предложений, Фреге, рассматривая возможность вывода и связывая его с актом суждения, вообще не использует понятие истинностного значения.

⁵ Различая общие и частные вопросы, Фреге ориентируется на их базис. Базис общего вопроса образует совокупность двух альтернатив: признание истинности или ложности выраженной вопросом мысли. Базис же частного вопроса образует конструкция, содержащая переменную. Так, например, смысл, выраженный в вопросе «Кто открыл Америку?», можно эксплицировать с помощью базиса « x открыл Америку», который представляет собой функциональное или, как говорит Фреге, «ненасыщенное» выражение, которое для того, чтобы его можно было рассматривать как имя истинностного значения или же признать истинным, требует заполнения аргументного места или «насыщения ненасыщенной части».

⁶ Различению суждения, т. е. признания истинности мысли, и мысли как таковой Фреге придаёт важное значение во всех своих работах. В *Шрифте понятий* он вводит в разработанный им формальный язык специальный знак суждения « \vdash ». В *Основных законах арифметики* это различие проводится следующим образом: «В простом равенстве ещё нет утверждения; “ $2 + 3 = 5$ ” только обозначает истинностное значение, не говоря о том, какое из двух. Кроме того, если я написал “ $(2 + 3 = 5) = (2 = 2)$ ” и предполагается, что мы знаем, что $2 = 2$ суть Истина, я тем самым всё ещё не утверждал, что сумма 2 и 3 равна 5; скорее я только обозначил истинностное значение “ $2 + 3 = 5$ ” означает то же самое, что и “ $2 = 2$ ”. Нам, следовательно, требуется другой, особый знак для того, чтобы мы могли утверждать нечто как истинное. Для этой цели я предпосылаю знак “ \vdash ” имени истинностного значения, так что, например, в

“ $\vdash 2^2 = 4$ ”

утверждается, что 2 в квадрате равно 4. Я отличаю суждение от мысли следующим образом: под суждением я понимаю признание истинности мысли» (Frege G. Grundgesetze, S. 9). Как уже говорилось выше, признание истинности мысли играет особую роль в осуществлении вывода. Инкорпорируя знак суждения в структуру выражения мысли, Фреге, однако, не рассматривает его как конструкцию, аналогичную перформативным выражениям типа «Я утверждаю...», «Он утверждает...» и т. п. Знак суждения, выражающий утвердительную силу, никогда не может быть включён в содержание подчинённого предложения, поскольку, согласно Фреге, приписанное перформативу предложение имеет косвенное вхождение в выражение и как таковое имеет смысл и значение отличные от смысла и значения исходного предложения. Так, например, значением косвенного предложения, подчинённого перформативу, является не истина или ложь, а его обычный смысл (см.: Фреге Г. Смысл и денотат). Поэтому Фреге говорит именно о *форме* утвердительного предложения, которая соответствует знаку « \vdash » в естественном языке. Поскольку «признание истинным» зависит исключительно от *формы* утвердительного предложения, постольку оно также не имеет никакого отношения к чувству субъективной уверенности, сопровождающему психологическое осуществление акта суждения. Признание истинным — объективный процесс, характеризующий форму выражения мысли.

⁷ Так как свойство быть истинным характеризует лишь форму выражения, оно ничего не добавляет к мысли. Точно так же не является частью мысли и истинностное значение предложения. «Истинностное значение не может быть частью мысли, поскольку оно — не смысл, а вещь, точно так же, как не может быть, скажем, частью мысли о солнце само солнце» (Фреге Г. Смысл и денотат. С. 192).

⁸ В данном случае, с точки зрения Фреге, к намёкам можно было бы отнести всё то, что не влияет на истинностную оценку мысли. В *Шрифте понятий* приводится другой критерий, даже более сильный: «Содержания двух утверждений могут отличаться друг от друга двояко. В первом случае следствия, выводимые из одного вместе с определёнными другими утверждениями, следуют также из второго вместе с теми же утверж-

дениями; во втором случае это не имеет места» (с. 93). Однако то, что глагол в предложении можно перевести из активного залога в пассивный, не относится просто к разряду несущественных деталей, как можно было бы подумать на основании текста. Подобного рода процедура играет более важную роль, так как на ней основан один из аргументов Фреге в пользу отказа от членения высказывания на субъект и предикат, которое использует традиционная логика. Поскольку грамматические преобразования залогов не меняют мысли, постольку определение субъекта как такого понятия, о котором идёт речь в суждении, с точки зрения логики бессмысленно, так как то же самое можно отнести и к предикату. Если и имеет смысл говорить о субъекте, то только с языковой точки зрения. «Место субъекта в последовательности слов в языке имеет значение *отмеченного* места, куда ставится то, на что желательно обратить внимание слушателя. Это может, например, иметь целью указать отношение этого суждения к другим, чтобы облегчить слушателю понимание всего контекста» (там же). К сущности же логического должно относиться только то, что «не оставляет места для догадки».

⁹ Семантическую теорию Г. Фреге отличает от соответствующих теорий, например, Рассела и Витгенштейна то обстоятельство, что он не отказывает собственным именам, таким как 'Густав Лаубен', в наличии смысла. Однако с этим связан ряд затруднений. «По поводу того, что следует считать смыслом настоящих имён собственных, таких как, например, *Аристотель* могут быть разные мнения. Можно, в частности, считать, что слово *Аристотель*, имеет смысл 'ученик Платона и учитель Александра Великого'. Тот, кто придерживается такого мнения, извлечёт из предложения *Аристотель родился в Стагире* не тот же самый смысл, который извлечёт из него человек, считающий, что слово *Аристотель* имеет смысл 'учитель Александра великого, родившийся в Стагире'. Но до тех пор, пока значение имени остаётся одним и тем же, подобные колебания смысла допустимы, хотя в языках точных наук их следует избегать» (Фреге Г. Смысл и денотат. С. 183). В данном случае может возникнуть проблема субъективизации наполнения смыслом одной и той же языковой оболочки. Однако с точки зрения идей, высказанных Фреге ранее в работе *Основоположения арифметики*, эта проблема может быть разрешена на основании вводимого им принципа,

который можно назвать «принципом контекстности» и который утверждает, что «слова действительно имеют значение только в контексте предложения... Если предложение, взятое как целое, имеет смысл, этого достаточно; оно суть также то, что наделяет свои части их содержанием». Правда, позднее, в *Основных законах арифметики*, мы сталкиваемся с иным принципом: «Имена, простые или же такие, составные части которых сами включают имена истинностных значений, вносят вклад в выражение мысли, и этот вклад, который вносит отдельно, есть его *смысл*. Если имя является частью имени истинностного значения, тогда смысл первого имени есть часть мысли, выраженной последним именем» (Frege G. Grundgesetze, S. 51). Однако изменение акцентов с точностью до наоборот (поскольку теперь уже не целое определяет смысл частей, а части — смысл целого) не меняет существа дела. Сохраняется основная предпосылка, которую можно было бы назвать холистическим постулатом. Требования, выраженные в *Основаниях арифметики* и *Основных законах арифметики*, не отменяют друг друга, но представляют собой две стороны одного и того же более общего принципа; с одной стороны, смысл частей может быть усвоен, только если понято целое; с другой стороны, целое может быть понято только с точки зрения того, каким образом части участвуют в формировании его смысла. Или, другими словами, смысл части задан прообразом, выраженным соотношением элементов целого, а смысл целого есть функция смыслов составляющих его частей. Кроме того, несмотря на то, что в более поздних работах формулировка принципа контекстности отсутствует, а представленные в них взгляды, по видимости, ему противоречат, поскольку Фреге начинает приписывать эксплицитный смысл любому выражению, мы не можем сказать, что он утратил своё значение. Связано это прежде всего с тем, что ни в одной из этих работ не говорится, что смысл слова может быть однозначно усвоен вне контекста предложения. Примеры же, касающиеся употребления собственных имён, скорее демонстрируют обратное. Таким образом, можно было бы сказать, что с точки зрения этого принципа смысл собственного имени зависит не столько от мнения, сколько от контекста целостного предложения, в котором оно встречается.

¹⁰ Противопоставление смысла как «общего достояния» и представления как «части опыта одного человека» образует подоплёку всех философских рассуждений Фреге. Спецификация

свойств представления позволяет ему провести демаркационную линию между психологией и логикой. В этой связи в структуре отношения знака к обозначаемому представление играет немаловажную роль. С содержательной точки зрения, образующей философскую ткань произведений Фреге, скорее следовало бы говорить не о «семантическом треугольнике», а о «четырёх-элементной структуре», определяющей динамику оперирования со знаками. Представление, как четвёртый компонент, отвечает за включение в отношение наименования всего того, что не оказывает влияния на объективные аспекты референции, а зависит от индивидуальной психической жизни. Можно было бы также сказать, что в отличие от смысла и значения, определяющих необходимые черты выражений, представления суть всё то, что для выражения является случайным. «Значение собственного имени — это сама вещь, которую оно обозначает. Что же касается представления, связанного с данным именем, то оно абсолютно субъективно. Между значением и представлением располагается смысл — не столь субъективный, как представление, но и не совпадающий с самой вещью, то есть со значением. Поясним это соотношением следующим примером. Допустим, что некто смотрит на Луну в телескоп. При этом имеют место два реальных изображения Луны: первое образуется на линзах внутри телескопа, а второе — на сетчатке глаза наблюдателя. Тогда саму Луну можно сопоставить со значением, первое изображение Луны — со смыслом, а второе — с представлением (или восприятием). Верно, что изображение в телескопе является односторонним и зависит от расположения телескопа, тем не менее оно вполне объективно, поскольку его могут одновременно воспринимать несколько наблюдателей. Однако изображение Луны на сетчатке у каждого будет своё» (Фреге Г. Смысл и денотат. С. 186). Различная роль представления и смысла в определении значения знака позволяет установить степени отличия одного выражения от другого, где представления, практически никак не связанные с объективным значением слова, не должны играть никакой роли. В противном случае, «если бы каждый обозначал именем “Луна” нечто отличное, — а именно, одно из своих представлений, почти так же, как возгласом “ой” выражают свою боль, тогда психологический подход, конечно, был бы оправдан; но спор о свойствах Луны был бы беспредметным. Один с полным

правом мог бы утверждать о своей Луне прямо противоположное тому, что говорит другой. Если бы мы не могли схватить ничего кроме того, что есть в нас самих, тогда конфликт мнений, основанный на взаимопонимании, был бы невозможен, потому что было бы утрачено общее основание, а представления в психологическом смысле такого основания не могут нам предоставить. Не существовало бы логики, на которую можно было бы указать как на третейского судью в конфликте мнений» (*Frege G. Grundgesetze*, S. xix).

¹¹ Постулируя существование третьей области, Фреге, в данном случае, наиболее отчётливо выражает свою философскую позицию, которую можно было бы охарактеризовать как особую версию платонизма — «лингвистический реализм». Отнесение к этой области мыслей, однако, оставляет открытым вопрос о том, можно ли то же самое сказать о других аналогичных сущностях, например о смыслах собственных имён и вообще об абстрактных сущностях, таких как числа, функции, истинностные значения. Получить эксплицитный ответ из работ самого Фреге затруднительно, так как он однозначно и явно его не формулирует. Косвенный ответ можно было бы связать с введённым Фреге принципом контекстности. Поскольку смысл слова определим в контексте предложения, а смысл предложения (мысль) является элементом третьей области, то тем самым утверждается и реальность, в определяемом ниже по тексту значении этого слова, любой смысловой сущности. Несколько проще ответить на вопрос о таких абстрактных сущностях, как числа. В рецензии (1894) на первый том *Философии арифметики* Гуссерля Фреге, критикуя психологизм последнего, пишет: «Если бы географ должен был читать книгу по океанографии, в которой происхождение морей объяснялось психологически, у него несомненно появилось бы впечатление, что обсуждаемый предмет не достигнут... Несомненно, море есть нечто реальное, а число нет; но это не препятствует тому, чтобы оно было чем-то объективным» (*Frege G. Review of Dr. E. Husserl's «Philosophy of Arithmetic» // Mind*, vol. LXXXI, No. 323, 1972). В чём же заключается 'объективность' чисел? Объективность в отличие от реальности полностью определяется принципом контекстности: «Каким образом нам могут быть даны числа, если мы не можем обладать каким-либо представлением или созерцанием их? Поскольку слова имеют какое-либо значе-

ние только в контексте предложения, наша проблема сводится к следующему: определить смысл предложения, в котором встречается числительное» (Фреге Г. Основоположения арифметики). В конечном счёте объективность чисел Фреге сводит к возможности выведения их содержания из чисто логических, а следовательно, непсихологических принципов.

¹² Постижение мысли как процесс, отличный как от суждения, так и от утверждения, Фреге вводит в *Основных законах арифметики*, описывая его в сходных выражениях и рассматривая как способность выхода за рамки индивидуальной психической жизни. В частности, он пишет: «Если мы вообще хотим выйти за пределы субъективного, мы должны понимать познание как деятельность, которая не создаёт познаваемое, но схватывает то, что уже существует. Образ схватывания хорошо подходит для освещения существа дела. Если я схватываю карандаш, то в моём теле происходит возбуждение нервов, изменение напряжения и давления мышц, связок и костей, изменение движение крови, но совокупность этих процессов не есть карандаш и не порождает его; карандаш существует независимо от них. Для схватывания существенно, чтобы существовало нечто такое, что схватывается; внутренние изменения сами по себе не являются схватыванием. Точно так же то, что мы схватываем, существует независимо от этой деятельности, независимо от представлений и их изменений, которые являются частями схватывания или сопровождают его; то, что мы схватываем, не совпадает с совокупностью этих процессов и не создаётся ими как часть нашей духовной жизни» (Frege G. Grundgesetze, S. xxiv). Для Фреге процесс постижения мысли, по-видимому, лежит в основании теории познания, и его правильное объяснение должно по крайней мере разрешить проблему соотношения психологических особенностей индивидуальной жизни и объективности знания. В рукописи, озаглавленной *Логика* и по тематике близко примыкающей к *Логическим исследованиям*, он пишет: «Постижение... суть душевный процесс! Да, действительно, но процесс, который расположен на самых границах души и, следовательно, не может быть понят чисто с психологической точки зрения, потому что... необходимо рассматривать нечто такое, что по природе в собственном смысле не принадлежит душе, а именно мысль. И, вероятно, этот процесс более всего таинственен» (Frege G. Nachgelassene, S. 157).

¹³ В отличие от представителей логического атомизма и логического эмпиризма Фреге анализирует не только повествова-

тельные предложения. С его точки зрения, исследование императивов и вопросительных предложений позволяет лучше выявить специфику логического. На противопоставлении «запроса» и «суждения», например, основано выделение особой утвердительной силы, свойственной форме повествовательного предложения. В естественном языке, как считает немецкий логик, это противопоставление скрыто, в частности, тем обстоятельством, что отсутствует особый знак суждения, подобный «?» и «!». Именно поэтому в свой шрифт понятий, в котором все различия должны быть явно артикулированы, Фреге вводит особый знак суждения « \vdash ».

¹⁴ Специальный случай с *modus ponens*, как и вообще с условными предложениями, иллюстрирует возможный аргумент введения особой утвердительной силы, связанной с формой повествовательного предложения в естественном языке и знаком « \vdash » в исчислении Фреге и, позднее, у Рассела с Уайтхедом в системе *Principia mathematica*. С точки зрения последних, выделение особой формы суждения позволяет предотвратить *petitio principii*, скрытое в форме условно-категорического умозаключения. В «Если A , то B ; A , следовательно, B » заключение уже присутствует в условной посылке. Однако, если в это умозаключение явно ввести знак « \vdash », то *petitio principii* можно избежать. В « \vdash Если A , то B ; $\vdash A$, следовательно, $\vdash B$ » заключение в условной посылке не содержится, поскольку « $\vdash B$ » не совпадает с « B ».

¹⁵ Интерпретируя ложность через отрицание, Фреге использует в основном три аргумента: во-первых, бивалентность любой мысли можно интерпретировать через отрицание; во-вторых, отрицание сохраняется в отсутствие акта признания мысли истинной; в-третьих, в любом контексте конструкцию «не верно, что», то есть признание ложности мысли, можно заменить комбинацией утверждения и отрицательного слова. Этот ряд аргументов можно обнаружить практически в любом относящемся к этой теме рассуждении немецкого логика. Для сравнения приведем отрывок из уже цитировавшейся работы *Логика*: «Собственно мысль является истинной или ложной. Когда мы высказываем суждение о мысли, мы либо принимаем её как истинную, либо отвергаем её как ложную. Последнее выражение, однако, может ввести нас в заблуждение предположением, что мысль, которая отвергалась, должна быть предана забвению насколько возможно быстрее, так как более не имеет какого-либо использования. Нао-

борот, признание того, что мысль является ложной, может быть столь же продуктивным, как и признание того, что мысль является истинной. При надлежащем понимании между этими двумя случаями вообще нет различия. Считать одну мысль ложной значит считать (отличную) мысль истинной — мысль, которую мы называем противоположной первой. В немецком языке мы обычно показываем, что мысль является ложной, вставляя слово 'nein' в предикат. Но утверждение всё же сообщается повествовательной формой и не имеет необходимой связи со словом 'nein'. Отрицательная форма может быть сохранена, хотя само утверждение прекращается. Равным образом мы можем сказать как 'Мысль, что Петер не приехал в Рим', так и 'Мысль, что Петер приехал в Рим'. Таким образом, ясно, что, когда я утверждаю, что Петер не приехал в Рим, акт утверждения и суждения не отличается от того, когда я утверждаю, что Петер приехал в Рим; единственное различие в том, что мы имеем противоположную мысль. Так, каждой мысли соответствует противоположная. Здесь мы имеем симметричное отношение: Если первая мысль противоположна второй, тогда вторая противоположна первой. Объявить ложной мысль, что Петер не приехал в Рим, значит утверждать, что Петер приехал в Рим. Мы могли объявить её ложной, вставляя второе 'не' и говоря 'Петер (не) не приехал в Рим' или 'Не верно, что Петер не приехал в Рим'. И из этого следует, что два отрицания отменяют друг друга. Если мы берём противоположность противоположности, мы получаем то, с чего начинали» (*Frege G. Nachgelassene, S. 159*). Очевидно, что синтаксические соображения играют в этом случае столь же важную роль, как и семантические.

¹⁶ Экономия выразительных средств, принципиальная для Фреге, реализована в созданной им формальной системе, своеобразии которой состоит в том, что на её языке можно выразить как предложения, высказанные с утвердительной силой, так и простую констатацию. В последнем случае немецкий логик использует знак «-», который помещает перед предложением. Это знак является составной частью знака суждения «┌», и только вертикальная черта превращает констатацию в признание истинным. Поскольку, с точки зрения Фреге, нет никакой специфической «отрицательной силы», постольку для формальной системы достаточен только знак утверждения. Отрицание не затрагивает акт суждения и интегрировано в формальную запись на уровне констатации. Последнее осуществляется, например, следующим

образом: «Нам не нужен специальный знак для того, чтобы объявить, что истинностным значением является Ложь, поскольку мы обладаем знаком, посредством которого истинностное значение изменяется на противоположное; это также необходимо и по другим основаниям. Теперь я ставлю условием: Значением функции

$$\neg \xi$$

будет Ложь для каждого аргумента, для которого значением функции

$$-\xi$$

будет Истина; и будет Истина для всех других аргументов. Соответственно, в

$$\neg \xi$$

мы имеем функцию, значением которой всегда является истинностное значение; это — понятие, под которое подпадёт каждый объект, единственно за исключением Истины. <...> При принятых нами условиях $\neg 2^2 = 5$ есть Истина; а потому

$$\vdash 2^2 = 5,$$

используя слова: $2^2 = 5$ не есть Истина; или: 2 в квадрате не равно 5» (*Frege G. Grundgesetze, S. 10*). Таким образом, отрицание относится не к форме выражения, как это имеет место в традиционной логике, которая различает утвердительные и отрицательные суждения, а к элементам, связанным с содержанием. Мысль, выраженная в предложении, в этом смысле нейтральна, как вообще нейтрален способ данности объектов, каковыми в данном случае выступают Истина и Ложь. Уже в *Шрифте понятий* Фреге связывает отрицание с содержанием предложения, хотя и рассматривает эту связь несколько иначе: «Если к чёрточке содержания с нижней стороны присоединена маленькая вертикальная чёрточка, то этим выражается то обстоятельство, что это содержание не имеет места. Так, например,

$$\vdash A$$

означает, что не имеет места A . Эту маленькую чёрточку я называю *чёрточкой отрицания*. Часть горизонтальной линии правее чёрточки отрицания является чёрточкой содержания A , а часть, расположенная слева от неё, — чёрточкой содержания отрицания A . Без чёрточки суждения здесь, как и в других местах *Шрифта понятий*, $\neg A$ не выражает суждения, а служит только для обозначения представления, что не имеет места A , без указания того, истинно это представление или нет» (Фреге Г. Шрифт понятий. С. 99).

¹⁷ Ненасыщенность есть специфическое свойство функциональных выражений и функций в противоположность насыщенным выражениям — именам, которым соответствуют предметы (см. работы Фреге *Funktion und Begriff* (1891) и *Was ist eine Funktion?* (1904)). «Аргумент не принадлежит функции, но, сочленяясь с функцией, создаёт полное целое; ибо сама по себе функция должна быть названа неполной, нуждающейся в дополнении, или 'ненасыщенной'» (*Funktion und Begriff* // G. Frege. *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien*. — Göttingen, 1962. — S. 20). У Фреге функциональная трактовка как отрицания, так и бинарных логических союзов основана на его специфическом понимании предложений как имён истинностных значений, а последних — как особого рода предметов. В качестве таковых истинностные значения могут рассматриваться как аргументы особых, истинностно-истинностных функций. Заметим также, что простейшая функция в формульном языке Фреге вводится горизонтальной чертой, предпосланной аргументу. «Эта функция имеет своим значением сам аргумент, когда последний является истинностным значением». (там же, S. 30). Таким образом, каждая простая мысль также может рассматриваться с точки зрения истинностно-истинностных функций как функций, значением которых выступает их собственный аргумент.

¹⁸ К неподлинным предложениям относятся все придаточные. Однако нужно различать три случая. Во-первых, два неподлинных предложения, в совокупности образуя условную связь, могут служить выражением всеобщности посредством неопределённо указующих элементов (как в приводимом ниже (см. с. 89) примере «Если кто-то является убийцей, тогда он — преступник»). В этом случае анализ истинностного значения предложения связан с пробегом значений двух функций «быть убийцей» и «быть преступником». Здесь неподлинность предложения-условия и предложения-следствия вытекает из того факта, что, взятые сами по себе,

они представляют ненасыщенные выражения, поскольку утрачивается координирующая их всеобщность. Во-вторых, в качестве неподлинных предложений можно рассматривать косвенную речь (например, «Коперник думал, что орбиты планет являются окружностями»). Здесь, как считает Фреге, значением косвенного предложения является не истинностное значение, а его обычный смысл. В-третьих, неподлинными являются придаточные предложения, которые в грамматике называют придаточными подлежащего, определения и наречия. В этих случаях отсутствие выраженной мысли, т. е. того, что является истинным или ложным, связано с наличием в них неопределённо указующих элементов, которые в отсутствие главного предложения не могут быть однозначно соотнесены с каким-либо значением. Первый случай анализируется Фреге в работах, посвящённых логической всеобщности, второй и третий — специально в статье *Смысл и денотат*.

¹⁹ Возможность элиминации утвердительной силы и преобразование сложного предложения в вопрос указывает на то, что соединение осуществляется на уровне констатации. Следовательно, подобно отрицанию связь двух мыслей относится не к форме выражения, а к элементам содержания, так как связующее звено привносит дополнительный смысл. Можно сказать, что Фреге к смысловым элементам относит всё то, что не затрагивается преобразованием в вопрос.

²⁰ В отличие как от предшественников, так и от последователей, в частности, Рассела, Фреге всегда различает функцию и её аналитическое выражение. Поскольку, как он считает, ненасыщенность в области знаков относится не к знакам самим по себе, а к способам их употребления, заданным отношением к обозначаемому. В работе «*Was ist eine Funktion?*» различие между функцией и её аналитическим выражением Фреге основывает на отрицании понятия переменной величины, где он указывает, что переменными и постоянными могут быть только знаки, а не то, что они обозначают, из чего вытекает необходимость чёткого различения знака и внеязыкового объекта. «Особенность функциональных знаков, которую мы здесь называли 'ненасыщенностью', естественно имеет нечто соответствующее в самих функциях. Они также могут быть названы 'ненасыщенными'» (Frege G. Funktion, Begriff, Bedeutung, S. 90).

²¹ Фреге предлагает такую интерпретацию условной связи, которая в современной логике получила название материальной импликации. Подобного рода соединение не предполагает связи по содержанию, а следовательно, не эксплицирует тех особенностей,

которые отличают, например, причинную связь. Но он не претендует на то, чтобы условная связь, выраженная логическим союзом, говорила более, чем о совместимости истинностных значений, поскольку она однозначно выразима посредством других логических союзов (сложной мысли первого рода и отрицания). Заметим, что в *Шрифте понятий*, т. е. до разработки концепции истинностных значений, условная связь вводилась через комбинацию утверждения и отрицания: «Если A и B обозначают содержания, допускающие утверждение, то имеются следующие четыре возможности:

- 1) утверждается A и утверждается B ;
- 2) утверждается A и отрицается B ;
- 3) отрицается A и утверждается B ;
- 4) отрицается A и отрицается B .

Теперь



означает суждение, что имеет место не третья из указанных возможностей, а одна из трёх остальных» (Фреге Г. Шрифт понятий. С. 95). Впрочем, кажущееся различие всё же не столь существенно, поскольку под содержанием здесь, как и в более поздней работе *Основоположения арифметики*, Фреге понимал единство мысли и истинностного значения, на что, в частности, указывал в письме к Гуссерлю, где писал: «То, что я обычно называл содержанием утверждения, теперь я разделяю на мысль и истинностное значение. Суждение же в узком смысле может быть охарактеризовано как переход от мысли к истинностному значению» (Frege G. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. — Oxford, 1980. — P. 63). Об этом же он говорит в статье *Über Begriff und Gegenstand* (1892) (русский перевод см.: Фреге Г. Понятие и вещь // Семиотика и информатика (вып. 10). — М.: ВИНТИ, 1978).

²² С точки зрения Фреге, принимаемой современной логикой, предложение «Если кто-то является убийцей, тогда он преступник» выражает ту же самую мысль, что и предложение «Все убийцы преступники», а поэтому выражает всеобщность, которая анализируется иным способом, нежели сложная мысль. В данном случае соединение условия и следствия осуществляется не про-

сто через насыщение условной связи, а через координацию возможных значений двух вхождений предметной переменной, которые в приведённом примере заменяют неопределённо указующие слова «кто-то» и «он» (см.: *Логическая всеобщность*). Не выраженная явно обыденным языком всеобщность должна быть явно артикулирована в формальном языке.

²³ Возможность взаимной интерпретации логических союзов Фреге использует в своём формальном языке первоначально в *Шрифте понятий* и наиболее полно в *Основных законах арифметики*, где он ограничивается двумя первоначальными составными элементами, используя условную связь и отрицание. Там аргумент в пользу подобного выбора связывался с соображениями удобства записи в разработанном им формульном языке, который в отличие от современных формальных языков использует двухмерную запись. Сам характер аргумента (см., например, *Фреге Г. Шрифт понятий. С. 101*) указывает на несущественность выбора.

²⁴ Тезис, выдвинутый Фреге в заключении статьи, можно рассматривать как эксплицитную формулировку принципа экстенциональности для логики высказываний, основанную на синонимичности мыслей, имеющих одно и то же истинностное значение.

²⁵ Несмотря на то что Фреге рассматривает законы логики в одном ряду с законами математики и физики, он, тем не менее, прекрасно осознаёт их своеобразие. В *Основных законах арифметики*, полемизируя с психологистскими теориями обоснования логики, он пишет: «Выражение ‘законы мысли’ вызывает соблазн предположить, что эти законы управляют мышлением тем же самым способом, каким законы природы управляют событиями во внешнем мире. В этом случае они были бы ни чем иным, как законами психологии: поскольку мышление есть душевный процесс. И если бы логика была связана с этими психологическими законами, она была бы частью психологии» (*Frege G. Grundgesetze, S. xv*). Последнее же, с точки зрения Фреге, совершенно недопустимо, поскольку, «если быть истинным независимо от быть признанным за истинное тем или другим человеком, тогда законы истины не являются психологическими законами» (там же. *S. xvi*). Говоря о всеобщности, присущей любому закону, он имеет в виду лишь форму выражения, которая, с точки зрения записи на вспомогательном языке, одинакова.

²⁶ В различении между вспомогательным языком и языком изложения можно увидеть предвосхищение принятого в совре-

менной логике разведения между объектным языком и метаязыком, введённым А. Тарским в силу известных семантических соображений. В данном случае под вспомогательным языком Фреге понимает свой искусственный формульный язык, который уже в *Шрифте понятий* он называет «вспомогательным средством» и, устанавливая его отношение к повседневному языку, использует следующую аналогию: «Отношение моего шрифта понятий к повседневному языку, я думаю, лучше всего можно разъяснить, если сравнить микроскоп с глазом. Последний широтой поля зрения, подвижностью, способностью обозревать самые разные обстоятельства имеет большое превосходство над микроскопом. Глаз, как оптический аппарат, имеет много несовершенств, которые обычно остаются незамеченными лишь вследствие его внутренней связи с духовной жизнью. Но как только научные цели предъявят большие требования на резкость различения, обнаруживается неудовлетворительность глаза. В отличие от него микроскоп в совершенстве приспособлен именно для таких целей, однако по этой же причине он не пригоден для всего прочего» (с. 88).

²⁷ Символические языки Фреге рассматривает как средство, которое может обеспечивать строгость вывода там, где это более всего необходимо. В этом их безусловное преимущество, поскольку они способствуют закреплению того, что мыслится неотчётливо, расплывчато. Фреге неоднократно обращается к различиям, связанным с представлением символизма. И у записанного языка, и у языка, воспринимаемого на слух, есть как свои недостатки, так и свои преимущества. «Возникает вопрос, предпочтительнее ли знаки для слуха знакам для глаза. Прежде всего, первые имеют то преимущество, что их образование не зависит от внешних обстоятельств. Кроме того, отдельно должно упомянуть о близкой взаимосвязи между звуками и внутренними процессами. Даже переживаемая форма обоих состоит в темпоральной упорядоченности; и то и другое равным образом преходяще. Звуки имеют более сильное отношение к эмоциям, чем очертания или цвета, поскольку человеческий голос с его неограниченной областью изменений находится в положении, оправдывающем изящные сочетания и изменение ощущений. Тем не менее эти преимущества нужны для других целей, они лишены значения для строгих выводов. Такое близкое родство слуховых знаков телесным и душевным условиям разума вполне может нанести как раз вред, сохраняя разум более

зависимым от них. Видимое, в частности очертания, имеет совсем иное устройство. В целом оно точно определимо и ясно различимо. Такая определённая записанного знака имеет тенденцию к более чёткому выделению того, что символизируется. Точно такой же результат касается образов, которые требуются для строгой дедукции. К этому можно только стремиться, если знак стремится обозначать предмет непосредственно. Ещё одно преимущество записанного знака заключается в его неизменности и постоянстве. В этом отношении он похож на понятие, хотя по общему признанию он, поэтому, ещё менее похож на безостановочный поток нашего действительного мыслительного процесса. Записанный символизм предоставляет возможность здраво осознать многое одновременно; даже если мы в состоянии охватить взглядом лишь часть его в любой момент, мы всё ещё сохраняем общее впечатление остального, и оно находится в нашем распоряжении всякий раз, когда нам нужно. Пространственные отношения записанных знаков на двухмерной поверхности могут использоваться гораздо более различными способами для выражения внутренних взаимосвязей, чем простое наследование или предшествование в одномерном времени, факт, который упрощает узнавание того, на что мы желали бы направить наше внимание в данном случае. В самом деле, простое последовательное упорядочивание никоим образом не соответствует многообразию логических отношений, связывающих одну нашу мысль с другой. Таким образом, именно те свойства, которые лучше всего служат для возмещения определённых недостатков нашего устройства, отличают записанный символизм от высказанных слов и наиболее отделяют его от протекания наших душевных образов. Когда больше не стоит проблема простого представления естественного мышления, как оно развивалось во взаимодействии со словесным языком, но скорее стоит проблема возмещения односторонности, возникающей из слишком близкой связи мышления с чувством слуха, тогда записанный символизм становится предпочтительнее высказанного. Такой шрифт должен будет отличаться от всякого словесного языка, способствуя полному использованию специфических преимуществ зрительных знаков» (*Frege G. On the scientific justification of a concept-script // Mind, Vol. LXXIII, № 290. P. 158*). Кроме того, указывая, что любой способ выражения в языке характеризуется энтимемичностью, Фреге всё же отмечает, что «написанное слово имеет исключительную выгоду неизменности перед высказанным:

записанное изложение мысли можно просмотреть несколько раз, не беспокоясь, что оно изменится, и, таким образом, наблюдать её сокращения более основательно» (там же. Р. 157).

²⁸ В немецком языке, в отличие от русского, порядок слов в предложении изменяется, если оно становится условием или следствием в рамках сложного предложения. В силу указанного обстоятельства предложение немецкого языка, выражающее одно и то же содержание, имеет различную форму в зависимости от того, рассматривается ли оно само по себе или в составе сложного условного предложения. Все примеры, приводимые выше, удовлетворяют этому требованию немецкой грамматики. Трансформируя предложения в несвойственную им грамматическую форму, Фреге стремится выполнить собственное требование, согласно которому одинаковая форма отдельных экземпляров символа указывает на то, что различные вхождения в выражения имеет *один и тот же символ*.

²⁹ Трактовка логической всеобщности, пожалуй, одно из самых оригинальных достижений Фреге в сравнении с традиционной логикой. Именно на этом пути он пришёл к уточнению понятия функции и интерпретации общих простых атрибутивных суждений через имплицативную связь. Технически эти идеи, в общих чертах впервые высказанные Лейбницем, разрабатываются в целом ряде работ Фреге, начиная со *Шрифта понятий*. К сожалению, *Логическая всеобщность* осталась незаконченной. Тем не менее как о возможной её компоновке, так и о приблизительном содержании можно судить на основании других рукописей, трактующих этот вопрос. В качестве примера приведём отрывок под названием «Всеобщность» из работы, озаглавленной *Краткий обзор моей логической доктрины*, датированной 1906 годом (см. *Frege G. Nachgelassene*): «Мы только что отметили, что в гипотетических предложениях ни условие, ни следствие зачастую не выражают мысли и что причиной этому наличие неопределённости, хотя это ещё и не лишает смысла сложное предложение как целое. В примере 'Если a больше, чем 2, тогда a^2 больше, чем 2' буква ' a ' вызывает эту неопределённость, и эта буква обуславливает то, что мысль целого сложного предложения является общей. Это — обычное употребление букв в арифметике, даже если оно и не единственное. Конечно, естественные языки подразумевают то же самое (например, *tot-quot* в латыни); но менее определённым образом. Встречаются и предложения, в которых мы не можем вообще установить

часть, соответствующую букве 'а'. Здесь мы можем взять вышеупомянутое использование букв в арифметике за основу. Общими могут быть не только сложные гипотетические предложения. Можно привести предложение ' $a = a$ '. Для того чтобы облегчить распознавание того, какое предложение является общим, мы можем добавить 'не имеет значения то, чем может быть а'. Если в предложении

'Если a больше, чем 2, то a^2 больше, чем 2'

мы подставим вместо неопределённо указывающей буквы 'а' поочерёдно числа '1', '2', '3', каждое из которых обозначает отдельное, мы получим предложения

'Если 1 больше, чем 2, тогда 1^2 больше, чем 2',

'Если 2 больше, чем 2, тогда 2^2 больше, чем 2',

'Если 3 больше, чем 2, тогда 3^2 больше, чем 2'.

Мысли, выраженные этими предложениями, представляют собой отдельные случаи общей мысли. Точно так же мысли ' $1 = 1$ ' и ' $2 = 2$ ' являются отдельными случаями общей мысли, выраженной в предложении ' $a = a$ '.

Здесь мы имеем случай расщепления предложения на части, которые сами не являются предложениями. Таким образом, в общем предложении мы имеем часть, с которой сочетаются совпадающие части соответствующих предложений об отдельном, и часть — в нашем случае это буква 'а' — с которой сочетаются несовпадающие части отдельных предложений — числа '1', '2', '3'. Эти части предложения различны по роду. Часть, в которой общее предложение согласуется с соответствующим предложением об отдельном, показывает пропуск на том месте, где может встречаться другая часть предложения, например число '1'. Если мы заполняем эти пропуски буквой 'ζ', в нашем случае мы получаем

'Если ζ больше, чем 2, тогда ζ^2 больше, чем 2',

$\zeta = \zeta$.

Из них мы получаем особые предложения, заполняя пропуски, например, числами '1', '2' или '3'. Числа не указывают на какие-либо пропуски, заполняют пропуски в первых частях, так что мы получаем предложение. Если мы называем части предложения, которые

показывают пропуски ненасыщенными, а другие части полными, тогда мы мыслим предложение как возникающее из насыщения насыщаемой части полной частью. *Полную часть предложения я называю собственным именем, ненасыщенную часть — именем понятия.* Ненасыщенной части предложения здесь соответствует ненасыщенная часть мысли, а полной части предложения — полная часть мысли, и мы можем также говорить здесь о насыщении ненасыщенной части мысли полной частью. Мысль, представляющая собой сочленение таким способом, есть также то, что традиционная логика называет *единичным суждением*. Однако мы должны заметить, что одна и та же мысль может быть разделена на части различными способами и поэтому может быть сочленена из частей различными способами. Слово 'единичный' не приложимо к мысли самой по себе, но только в отношении к отдельным способам разделения её на части. Каждое предложение-часть

'1 больше, чем 2' и '1² больше, чем 2'

также может рассматриваться как сочлeнённые имени '1' ненасыщенной части. Соответствующее имеет место для родственных мыслей».

**ОСНОВОПОЛОЖЕНИЯ
АРИФМЕТИКИ**

**ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ
О ПОНЯТИИ ЧИСЛА**

(1884)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. В последнее время в математике заметно справедливое стремление к строгости доказательства и точному схватыванию понятия.

§ 2. Наконец проверка должна распространиться и до понятия числа. Цель доказательства.

§ 3. Философские мотивы для такого исследования: спорность вопроса о том, являются ли законы чисел аналитическими или синтетическими, априорными или апостериорными истинами. Смысл этих выражений.

§ 4. Задача этой книги.

I. МНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ АВТОРОВ О ПРИРОДЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

Доказуемы ли числовые формулы?

§ 5. Кант отрицает то, что Ханкель справедливо называет парадоксом.

§ 6. Доказательство $2 + 2 = 4$ у Лейбница содержит пробел. Определение Грассманом $a + b$ ошибочно.

§ 7. Мнение Милля о том, что определения отдельных чисел, из которых вытекает счёт, утверждают наблюдаемые факты, необоснованно.

§ 8. Для оправдания этих определений не требуется наблюдения таких фактов.

Являются ли законы арифметики индуктивными истинами?

§ 9. Законы природы у Милля. Называя законами природы арифметические истины, Милль смешивает последние с их применением.

§ 10. Доводы против того, что законы сложения являются индуктивными истинами: неоднородность чисел; в определённый момент мы ещё не обладаем множеством общих свойств чисел; напротив, вероятно, индукция основывается на арифметике.

§ 11. Выражение Лейбница «врождена».

Являются ли законы арифметики априорно синтетическими или же аналитическими?

§ 12. Кант. Бауман. Липшиц. Ханкель. Внутреннее созерцание как основание познания.

§ 13. Различие арифметики и геометрии.

§ 14. Сравнение истин в отношении управляемой ими области.

§ 15. Воззрения Лейбница и Джевонса.

§ 16. Милль, напротив, умаляет «искусное пользование словами». Знаки пусты не потому, что они не обозначают чего-то чувственно зримого.

§ 17. Недостаточность индукции. Предположение о том, что законы чисел являются аналитическими; в чём тогда заключается их польза. Ценность аналитических суждений.

II. МНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ АВТОРОВ О ПОНЯТИИ ЧИСЛА

§ 18. Необходимость исследовать общее понятие числа.

§ 19. Определение не может быть геометрическим.

§ 20. Определимо ли число? Ханкель. Лейбниц.

Является ли число свойством внешних вещей?

§ 21. Мнения Кантора и Шрёдера.

§ 22. Мнение Баумана противоположно: Внешние вещи не представляют строгих единиц. По-видимому, число зависит от нашего понимания.

§ 23. Мнение Милля о том, что число является свойством агломерата вещей, непрочное.

§ 24. Обширная применимость числа. Милль. Локк. Бестелесная метафизическая фигура у Лейбница. Если число являлось бы чем-то чувственным, оно не могло бы быть присуще нечувственному.

§ 25. Физическое различие между 2 и 3 у Милля. Согласно Беркли, число не есть реальное в вещах, но является созданием духа.

Является ли число чем-то субъективным?

§ 26. Описание числообразования у Липшица не подходит и не может заменить определение понятия. Число является не предметом психологии, но чем-то объективным.

§ 27. Число не является представлением места объекта в ряду, как хочет Шлёмильх.

Число как множество

§ 28. Тома о придании имени.

III. МНЕНИЯ О ЕДИНИЦЕ И ОДИН

§ 29. Многозначность выражений «*Μονάς*» и единица. Объяснение Шрёдером единицы как подлежащего счёту предмета, повидимому, бесцельно. Прилагательное «один» не содержит более близкого определения и не может служить в качестве предиката.

§ 30. После попытки определения Лейбница и Баумана понятие единицы кажется совершенно расплывчатым.

§ 31. Признак неделимости и отграниченности у Баумана. Идея единицы не даётся нам каждым объектом (Локк).

§ 32. Язык всё же указывает на связь с неделимостью и отграниченностью, однако при этом изменяется смысл.

§ 33. Нераздельность (Кёпл) — неустойчивый признак единицы.

Равны ли единицы друг другу?

§ 34. Равенство, как основание имени «единица». Шрёдер. Гоббс. Юм. Тома. Понятие числа не возникает абстрагированием от различия вещей, и благодаря ему вещи не становятся равными.

§ 35. Если речь должна идти о множественности, различие даже необходимо. Декарт. Шрёдер. Джевонс.

§ 36. Точка зрения на различие единиц также наталкивается на затруднения. Различие однёрки у Джевонса.

§ 37. Объяснение числа с точки зрения единицы или однёрки у Локка, Лейбница и Хессе.

§ 38. «Однёрка» является собственным именем, «единица» — понятийным словом. Число нельзя определить в качестве единиц. Различие «и» и +.

§ 39. Трудность примирения равенства единиц с их различимостью скрыта многозначностью слова «единица».

Попытки преодолеть затруднение

§ 40. Пространство и время как средство различия. Гоббс. Тома. Противоположная точка зрения: Лейбниц, Бауман, Девонс.

§ 41. Цель не достигается.

§ 42. Место в ряду как средство различия. Полагание у Ханкеля.

§ 43. Замещение предметов знаками 1 у Шрёдера.

§ 44. Девонс об отвлечении от характера различия с удержанием его просто как факта. 0 и 1 являются числами, как и все остальные. Затруднение остаётся.

Решение затруднения

§ 45. Ретроспективный взгляд.

§ 46. Указание на число содержит высказывание о понятии. Возражение, что у неизменного понятия число изменяется.

§ 47. Фактичность указания на число объясняется объективностью понятия.

§ 48. Разрешение некоторых затруднений.

§ 49. Подтверждение у Спинозы.

§ 50. Пояснение Шрёдера.

§ 51. Исправление этого пояснения.

§ 52. Подтверждение, взятое из немецкого словоупотребления.

§ 53. Различие между признаками и свойствами понятия. Существование и число.

§ 54. Единицей можно назвать субъект указания на число. Независимость и ограниченность единицы. Равенство и различимость.

IV. ПОНЯТИЕ ЧИСЛА

Каждое отдельное число

является самостоятельным предметом

§ 55. Попытка дополнить лейбницевские определения отдельных чисел.

§ 56. Пробные определения бесполезны, поскольку они объясняют высказывание, в котором число есть только составная часть.

§ 57. Указание на число следует рассматривать как равенство чисел.

§ 58. Возражение, связанное с непредставимостью числа как самостоятельного предмета. Число вообще не представимо.

§ 59. Предмет не исключается из исследования в результате того, что он непредставим.

§ 60. Даже конкретная вещь не всегда представима. Слово, когда спрашивается о его значении, необходимо рассматривать в предложении.

§ 61. Возражение, связанное с непространственностью числа. Не каждый объективный предмет является пространственным.

**Чтобы получить понятие числа,
необходимо установить смысла равенства чисел**

§ 62. Нам нужен критерий равенства чисел.

§ 63. Возможность однозначного соотнесения как такой критерий. Логическое сомнение, что равенство в данном случае объясняется особым образом.

§ 64. Примеры сходной процедуры: направление прямой, положение плоскости, контуры треугольника.

§ 65. Попытка определения. Второе сомнение: соблюдаются ли законы равенства.

§ 66. Третье сомнение: признак равенства недостаточен.

§ 67. Дополнение нельзя получить тем, что к признаку понятия добавляется способ, которым вводится предмет.

§ 68. Число как объём понятия.

§ 69. Комментарий.

Дополнение и проверка нашего определения

§ 70. Понятие отношения.

§ 71. Отношение как средство соотнесения.

§ 72. Взаимно однозначное отношение. Понятие числа.

§ 73. Число, соответствующее понятию F , равно числу, соответствующему понятию G , если существует отношение, которое взаимно однозначно соотносит предметы, подпадающие под F , с предметами, подпадающими под G .

§ 74. Ноль — это число, соответствующее понятию «неравное себе».

§ 75. Ноль — это число, соответствующее понятию, под которое не подпадает ничего. Ни один предмет не подпадает под понятие, если ноль есть соответствующее ему число.

§ 76. Объяснение выражения «В натуральном ряду чисел и следует непосредственно за n ».

§ 77. 1 — это число, соответствующее понятию «равное 0».

§ 78. Предложения, доказываемые посредством наших определений.

§ 79. Определение следования в ряду.

§ 80. Замечание к предыдущему. Объективность следования.

§ 81. Объяснение выражения « x принадлежит F -ряду, оканчивающемуся на u ».

§ 82. набросок доказательства того, что не существует конечного члена натурального ряда чисел.

§ 83. Определение конечного числа. Ни одно конечное число не следует в натуральном ряду чисел за самим собой.

Бесконечные числа

§ 84. Число, соответствующее понятию «конечное число», является бесконечным.

§ 85. Бесконечные числа Кантора; «мощность». Различия в терминологии.

§ 86. Следование в последовательности у Кантора и моё следование в ряду.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§ 87. Природа арифметических законов.

§ 88. Недооценка аналитических суждений Кантом.

§ 89. Предложение Канта: «Без чувственности нам не был бы дан предмет». Заслуги Канта перед математикой.

§ 90. Для полного доказательства аналитической природы арифметических законов не достаёт цепи выводов, лишённой пробелов.

§ 91. Помочь этому недостатку может мой шрифт понятий.

Другие числа

§ 92. Смысл вопроса о возможности чисел по Ханкелю.

§ 93. Числа не являются ни пространственными, внешними нам, ни субъективными.

§ 94. Отсутствие противоречия в понятии не гарантирует, что под него нечто подпадает, и само требует доказательства.

§ 95. $(c - b)$ не может безоговорочно рассматриваться как знак, решающий задачу на вычитание.

§ 96. Математик не может также создать нечто произвольное.

§ 97. Понятия следует отличать от предметов.

§ 98. Объяснение сложения Ханкелем.

§ 99. Недостаточность формальной теории.

§ 100. Попытка обосновать комплексные числа расширением значения умножения особым способом.

§ 101. Возможность такого обоснования не равносильна доказательству.

§ 102. Голое требование, что операция должна выполняться, не является его исполнением.

§ 103. Объяснение комплексных чисел Коссаком есть лишь руководство к определению и не избегает вмешательства чуждого. Геометрическое изображение.

§ 104. Всё зависит от того, чтобы установить смысла суждения отождествления для новых чисел.

§ 105. Очарование арифметики заключается в её разумном характере.

§ 106–109. Ретроспективный взгляд.

ВВЕДЕНИЕ

Если мы зададим вопрос, что такое число один или что обозначает знак 1, то большей частью получим ответ: Наверное, какую-то одну вещь. И если затем мы укажем на то, что предложение

«[die] Число один есть [ein] вещь»

не является определением, поскольку с одной его стороны стоит определённый артикль, а с другой — неопределённый, что это предложение означает только то, что число один относится к вещам, но не то, какой вещью оно является, нам, вероятно, предложат выбрать для себя какую-нибудь вещь, которая называлась бы один. Но если каждый вправе понимать под этим именем то, что ему хочется, тогда одно и то же предложение об один означало бы различное для разных людей; у таких предложений не было бы общего содержания. Некоторые, вероятно, отклонят вопрос ссылкой на то, что значение буквы a в арифметике тоже нельзя указать; и если говорят: a означает число, то в этом можно найти те же самые изъяны, как и в определении: один есть число. При ссылке на a отвод вопроса совершенно оправдан: она не означает определённого, заданного числа, но служит для того, чтобы выразить общность предложений. Если

вместо a в $a + a - a = a$ подставить любое, но всюду одно и то же число, то всегда получится истинное равенство. Буква a используется в этом смысле. Но с одним делом обстоит существенно иначе. Можем ли мы в равенстве $1 + 1 = 2$ вместо 1 в обоих случаях подставить один и тот же предмет, скажем, Луну? Напротив, кажется, что вместо первой 1 мы должны поставить нечто другое, чем вместо второй. В чём же дело, что здесь должно происходить как раз то, что в том случае было бы ошибкой. Чтобы выразить отношения между разными числами, арифметика не обходится одной буквой a , но должна использовать ещё и другие (b, c и т. д.). Таким образом, следовало бы полагать, что знака 1, если он сходным образом служит для придания общности предложениям, также могло бы не хватать. Но разве число один не выглядит как определённый предмет с заданными свойствами, например, оставаться неизменным при умножении на само себя? В этом смысле нельзя задать свойства a , поскольку то, что высказывается об a , есть общее свойство чисел, тогда как $1^1 = 1$ ничего не высказывает ни о Луне, ни о Солнце, ни о Сахаре, ни о Тенерифском пике, ибо что могло бы быть смыслом такого высказывания?

На такие вопросы, пожалуй, и большинство математиков не готовы дать удовлетворительного ответа. Не постыдно ли науке так и пребывать в неясности о её первейшем и, по-видимому, таком простом предмете? Ещё менее можно сказать, что такое число. Когда понятие, которое лежит в основании обширной науки, преподносит затруднения, неотложная цель, пожалуй, всё-таки состоит в его более тщательном исследовании и преодолении этих затруднений; пока осмотр основания всего строения арифметики всё ещё остаётся недостаточным, особенно трудно здесь, быть может, удастся прийти к полной ясности относительно отрицательных, дробных и комплексных чисел.

Многие, правда, сочтут, что это не стоит труда. Ведь с этим понятием, как они полагают, достаточно иметь дело в элементарных руководствах и на этом успокоиться на всю жизнь. Кто поверит, что в таком простом деле всё ещё можно чему-то научиться! Ибо понятие положительного целого числа так свободно от всяких затруднений, что и ребёнок может обращаться с ним научно исчерпывающе и каждый без дальнейших размышлений и без знакомства с тем, что думали другие, точно знает в нём толк. Так что часто недостаёт того первого предварительного условия обучения: знание незнания. В результате всё ещё довольствуются гру-

бым пониманием, хотя уже *Герbart* учил правильнее*. Печально и обескураживающе, что знание, которое уже было достигнуто, всегда, таким образом, находится под угрозой опять пропасть, что так много работы кажется напрасной, поскольку человек в воображаемом богатстве уверен в ненужности усвоения её результатов. Я хорошо вижу, что также и данная работа подвержена такой опасности. Мне противна та грубость понимания, когда счёт называется комбинаторным, механическим мышлением**. Я сомневаюсь, что такое мышление вообще существует. Комбинаторное воображение, наконец, даже может быть утрачено, но для счёта это не имеет значения. По существу мышление всюду одинаково; ведь различные виды мышления не принимаются в расчёт сообразно предметам. Различия заключаются только в большей или меньшей чистоте и независимости от психологических влияний и от внешней помощи мышлению, такой как язык, знаки чисел и т. п.; затем, кое-что ещё зависит от тонкостей в строении понятия, но как раз во внимании к этому математику не могут превзойти ни наука, ни сама философия.

Из данного сочинения можно усмотреть, что даже кажущийся собственно математическим вывод от n к $n + 1$ покоится на общих логических законах, что нет нужды в особых законах комбинаторного мышления. Можно, конечно, употреблять числовые знаки механически, как можно говорить подобно попутаю; но всё-таки едва ли так можно назвать мышление. Употреблять числовые знаки механически возможно только после того, как посредством действительного мышления математический знаковый язык разовьётся так, что он, как говорят, мыслит за нас. Последнее не доказывает, что числа образуются особым механическим способом, скажем, как куча песка образуется из гранул кварца. Я думаю, в интересах математиков противиться такому воззрению, которое удобно для того, чтобы принизить главный предмет их науки, а с тем и её саму. Но даже у математиков находятся вполне сходные изречения. Напротив, за понятием числа должно признать более тонкую структуру, чем у большинства понятий других наук, хотя оно и является простейшим арифметическим понятием.

* *Herbart*, Sammtliche Werke, herausgeb. von Hartenstein, Bd. X, 1 Thl. Umriss pädagogischer Vorlesungen § 252, Anm. 2: «Двойка означает не две вещи, но удвоение» и т. д.

** *K. Fischer*, System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, z. Aufl. § 94.

Чтобы опровергнуть то заблуждение, что при ссылке на положительные целые числа собственно вовсе нет противоречий, но царит совершенное согласие, мне кажется, подойдёт обсуждение мнений философов и математиков о вопросах, подлежащих здесь рассмотрению. Будет видно, как мало оказывается согласия, так что встречаются прямо противоположные изречения. Одни, например, говорят: «Единицы равны друг другу»; другие считают их за различные; для своих утверждений и те, и другие имеют основания, которые нельзя отклонить на скорую руку. Этим я стараюсь пробудить потребность в более тщательном исследовании. Одновременно я хочу посредством предварительного освещения явных воззрений других расчистить поле для своего собственного понимания, с тем чтобы сразу убедить, что эти другие пути не ведут к цели и что моё мнение не является равноправным среди многих; и я надеюсь, таким образом, окончательно решить вопрос, по крайней мере в главном.

Конечно, благодаря этому мои пояснения, пожалуй, станут более философскими, чем может показаться уместным многим математикам; но основательное исследование понятия числа всегда должно проходить несколько философски. Для философии и математики эта задача является общей.

Если совместная работа этих наук, несмотря на множество атак с обеих сторон, не является столь успешной, как хотелось бы и как, пожалуй, могло бы быть, то это, как мне кажется, зависит от преобладания в философии психологических способов рассмотрения, проникающих даже в логику. С данной тенденцией математика вовсе не имеет точек соприкосновения, и этим легко объясняется антипатия многих математиков к философскому рассмотрению. Когда, например, Штриккер* называет представления чисел моторными, зависящими от мускульных ощущений, то в этом математики не могут опознать свои числа и не знают, как приниматься за такое предложение. Арифметика, основанная на мускульных ощущениях, конечно, оказалась бы вполне чувственной, но в результате также и столь же расплывчатой, как и это основание. Нет, арифметика вовсе не должна работать с ощущениями. И столь же мало с внутренними образами, сливающимися из следов более ранних чувственных впечатлений. Переменчивость и неопределённость, характеризующие все эти образования, находятся в сильном контрасте с определённой

* *Stricker*, Studien über Association der Vorstellungen. Wien, 1883.

и устойчивостью математических понятий
ведь и с пользой рассматривать представл
при математическом мышлении; но психо
образать, что она может внести какой-то
арифметики. Для математиков как таковы
разы, их происхождение и изменение безра
кер говорит, что при слове «сто» он не пред
более, кроме знака 100. Другие могут предс
или что-то ещё. Не следует ли отсюда, что э
зы в нашем случае для существа дела сове
и случайны, так же случайны, как и то, что
мела вообще не заслуживают называться п
сто? Всё же в таких представлениях не сле
во дела! Не следует принимать описание
представление, за определение, не следует
на душевные и телесные условия, приводя
сознанию, за доказательство и не следует
в котором предложение становится мысл
ностью! Необходимо, как кажется, помнит
когда я его более не мыслю, перестаёт быть
мало, как уничтожается Солнце, когда я за
мы пришли бы к тому, что при доказательст
ра нужно учитывать фосфорное содержани

стоянном потоке, то мир перестал бы быть перепуталось. Кажется, думают, что в отделе возникают так же, как листья на деревьях, сущность можно познать, исследуя их возникновение психологически в природе чело такое понимание переводит всё в субъективать ему до конца, упраздняет истину. То, что ей понятия, является, пожалуй, историей или понятия, или значений слов. Познать понятия вободить его от чуждых наслоений, скрываюго взора, впервые удаётся посредством значработы, которая может продолжаться в течето же следует сказать на то, когда кто-нибудь продолжать эту работу, если она выглядиной, считает её за ничто, идёт в детскую или мыслимые древнейшими ступени развития чтам, подобно Дж. С. Миллю, открывать ари и булыжников! Не хватает только того, чтобы вкусом качеством пирожного особое :тия числа. Это прямо противоположно разулюбом случае нематематично настолько, наНичего удивительного, что математики не же. Вместо того чтобы искать особую чистоту пс близости предполагается их источник, всё в:

торым приходят к соответствующим предметам или понятиям. Этот случай легко узнать по тому, что в последующем к таким объяснениям больше не прибегают. Для учебных целей введение этих приспособлений даже вполне уместно; только их всегда нужно чётко отличать от определений. На то, что даже математики могут спутать основание доказательства с внутренними или внешними условиями проведения доказательства, забавный пример доставляет Э. Шрёдер*, предлагая под названием «Особая аксиома» следующее: «Задуманный принцип можно, пожалуй, назвать аксиомой неотъемлемости знаков. Она даёт нам уверенность в том, что при всех наших переходах и выводах знаки закрепляются в нашей памяти — а ещё прочнее на бумаге», и т. д. Насколько сильно математика должна протестовать против такой помощи со стороны психологии, настолько мало она может отрицать свою тесную связь с логикой. Да, в той мере, в которой признаётся, что каждое исследование об обязательности доказательства или оправдании определения должно быть логическим, я согласен с воззрением тех, кто считает невозможным резкое разделение. Но от таких вопросов математика вовсе и не отказывается, ведь только благодаря ответам на них достигается необходимая уверенность.

Разумеется, в этом направлении я также иду далее обычного. Большинство математиков при исследованиях подобного рода довольствуются удовлетворением непосредственных потребностей. Если определение пригодно для использования в доказательстве, если нигде не наталкиваются на противоречие, если можно познать связи между вещами, которые кажутся далёкими друг от друга, и если, благодаря этому, получается более высокая упорядоченность и закономерность, то имеют обыкновение принимать определение за достаточное и гарантированное и мало спрашивают о его логическом оправдании. Подобное поведение, во всяком случае, имеет то благо, что нелегко совершенно промахнуться мимо цели. Я тоже считаю, что определения должны оправдываться продуктивностью, возможностью проводить с их помощью доказательство. Но, пожалуй, следует принять во внимание, что строгость доказательства остаётся видимостью, даже при отсутствии пробелов в цепи заключений, если определения только задним числом оправдывают тем, что не столкнулись с противоречием. В сущ-

* E. Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.

ности, так всегда достигают только уверенности, основанной на опыте, и должны собственно быть готовы, в конце концов, всё же встретить противоречие, которое приводит всё здание к обвалу. Поэтому, я полагаю, к общим логическим основаниям нужно обратиться в несколько большей степени, чем считает необходимым большинство математиков.

В этом исследовании как основных я придерживаюсь следующих правил:

- строго отделять психологическое от логического, субъективное от объективного;
- о значении слова нужно спрашивать не в его обособленности, а в контексте предложения;
- не терять из виду различие между понятием и предметом.

Чтобы следовать первому правилу, я всегда буду употреблять слово «представление» в психологическом смысле и отличать представление от понятий и предметов. Если же остаётся незамеченным второе основное правило, за значение слов почти вынужденно принимаются внутренние образы или действия отдельной души, а это грешит также и против первого правила. Что касается третьего пункта, то это только видимость, если считают, что понятие, не изменяя его, можно сделать предметом. Отсюда непрочной оказывается распространённая формальная теория дробей, отрицательных чисел и т. д. Задуманное мной изменение я могу в этом сочинении только наметить. Во всех таких случаях, как и в случае положительных целых чисел, всё зависит от установления смысла равенства.

Я думаю, мои результаты, по крайней мере по существу, найдут согласие тех математиков, которые возьмутся за труд принять во внимание мои доводы. Мне кажется, они носят в воздухе, и отдельные из них, а может быть, уже все или, по крайней мере, подобные им, высказывались; но в такой связи друг с другом они всё ещё могут оказаться новыми. Меня иногда удивляло, что взгляды, в одном пункте подходившие к моему пониманию так близко, столь сильно отклонялись в другом.

У философов же приём будет различаться сообразно точкам зрения; самый скверный будет, пожалуй, у тех эмпириков, которые за изначальный способ вывода хотя признавать только индукцию, и даже её не как способ вывода, но как привычку. Может быть, по данному поводу те или другие подвергнут основания

своей теории познания обновлённой проверке. Тем же, кто мои определения может объявить за неестественные, я предлагаю обдумать то, что вопрос здесь не о естественности, но касается сути дела и логически свободен от возражений.

Я слею надежду, что при непредубеждённой проверке даже философы найдут в этом сочинении кое-что полезное.

§ 1. После того как в течение долгого времени математика отдалась от евклидовой строгости, сейчас она возвращается к ней и даже стремится её превзойти. В арифметике, уже вследствие индийского происхождения её многих методов и понятий, образ мыслей традиционно был слабее, чем в геометрии, преимущественно развиваемой греками. Появление анализа более высокого порядка только способствовало этому; ибо, с одной стороны, строгой трактовке данного учения противостояли значительные, почти непреодолимые затруднения, а с другой стороны, казалось, что их преодоление мало вознаграждало за прилагаемые к этому усилия. Однако дальнейшее развитие преподавало всё яснее, что в математике не достаточно лишь моральной уверенности, поддержанной многими успешными применениями. Доказательство теперь требуется для многого такого, что прежде считалось само собой разумеющимся. Благодаря этому во многих случаях впервые были установлены границы приемлемого. Обнаружилась необходимость в более точном определении понятий функции, непрерывности, предела, бесконечности. Более тщательной проверке своих полномочий должны были подвергнуться отрицательные и иррациональные числа.

Таким образом, всюду обнаруживается стремление строго доказать, точно провести границы приемлемого и, для достижения этого, точно схватить понятие.

§ 2. В том, что идёт ниже, следование этому пути должно привести к понятию числа [Anzahl] и к простейшим предложениям, относящимся к позитивным целым числам и образующим основание всей арифметики. Конечно, числовые формулы, типа $5 + 7 = 12$, и законы, типа закона ассоциативности сложения, так часто подтверждались бесчисленными применениями в каждодневном использовании, что почти нелепым могло бы выглядеть желание посеять сомнения потребностью в доказательстве. Но к сущности математики относится то, что она всюду, где возможно доказательство, предпочитает последнее оправданию посредством индукции. Евклид доказывает многое

из того, с чем и без этого с ним согласился бы каждый. Между тем некоторые остаются неудовлетворёнными и евклидовой строгостью, когда переходят к исследованиям, связанным с аксиомой о параллельных.

Таким образом, в правильном направлении уже много раз двигались те, кто, прежде всего, чувствовал потребность в большей строгости, и эта потребность всегда расширялась и крепла.

Доказательство как раз имеет целью не только поставить истинность предложений вне всяких сомнений, но также и проследить зависимость истин друг от друга. Убедившись в непоколебимости каменной глыбы в тщетных попытках её передвинуть, можно далее задаться вопросом, что же её так надёжно удерживает? При дальнейшем продолжении таких исследований всё сводится к немногим первичным истинам; и это упрощение само по себе уже является целью, достойной, чтобы её добиваться. Может быть, подтвердится также надежда, что, приводя к сознанию то, с чем люди в простейших случаях обращались инстинктивно, можно получить общие способы образования понятий или обоснований, которые применимы также и в запутанных случаях, и этим выделить общезначимое.

§ 3. К таким исследованиям меня также побуждают философские мотивы. Вопросы об априорной или апостериорной, синтетической или аналитической природе арифметических истин ждут здесь своего ответа. Ибо, даже если сами эти понятия и принадлежат философии, я всё же думаю, что решение не может воспоследовать без помощи математики. Разумеется, это зависит от смысла, приданного каждому из этих вопросов.

Нередко случается так, что сперва получают содержание предложения и затем проводят его строгое доказательство другим, более трудным способом, посредством которого часто условия пригодности могут быть также изучены более точно. Таким образом, вопрос о том, как мы приходим к содержанию суждения, в общем, нужно отделять от вопроса, каким образом мы оправдываем наше утверждение.

Эти различия априорного и апостериорного, синтетического и аналитического, по моему* мнению, относятся к пониманию не содержания суждений, но оправдания вынесения суждения. Ведь там, где это оправдание отсутствует, пропадает также

* Этим я в действительности не вкладываю новый смысл, но только трактую то, что имели в виду другие авторы, особенно Кант.

и возможность данных подразделений. Разве априорная ошибка не такой же вздор, как, скажем, голубое понятие? Когда предложение называют апостериорными или аналитическими в моём смысле, судят не о психологических, физиологических и физических обстоятельствах, которые делают возможным образование содержания предложения в сознании, а также не о том, как другой, возможно ошибочно, приходит к тому, что он считает его истинным, но о том, на чём в самых глубинных основаниях покоится оправдание признания за истинное.

Благодаря этому, если речь идёт о математической истине, вопрос переводится из области психологии в область математики. Теперь всё зависит от того, чтобы найти доказательство и свести математическую истину к первичным истинам. Если на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной, причём предполагается, что при рассмотрении указаны также и предложения, от которых, возможно, зависит допустимость определения. Но если невозможно провести доказательство без использования истин, не имеющих общей логической природы, но относящихся к особой области науки, то предложение является синтетическим. Для того чтобы истина была апостериорной, требуется, чтобы её доказательство не удавалось без ссылки на факты; т. е. на недоказуемые истины, не обладающие всеобщностью, которые содержат высказывание об определённых предметах. Если, наоборот, возможно провести доказательство всецело из общих законов, которые сами не способны и не нуждаются в доказательстве, то истина является априорной*.

§ 4. Исходя из таких философских вопросов, мы приходим к тем же самым требованиям, которые независимо от этого вырастают в области самой математики: доказать с наибольшей строгостью, если только возможно, основные предложения арифметики; ибо только если тщательно устранять каждый пробел в цепи

* Если вообще признаются общие истины, то должно также добавить, что существуют и такие первичные законы, потому что из сугубо единичных фактов не следует ничего, разве что только на основании законов. Сама индукция основывается на общем предложении, что данный метод может мотивировать истину или же видимость истины закона. При отрицании этого индукция становится не более чем психологической иллюзией, способом, которым люди приходят к убеждению в истинности предложения без того, чтобы благодаря этому данное убеждение было как-нибудь обосновано.

выводов, можно с уверенностью сказать, на какие первичные истины опирается доказательство; и только когда последние известны, можно ответить на эти вопросы.

Итак, если пытаются следовать данным требованиям, то очень скоро приходят к предложениям, доказательство для которых невозможно до тех пор, пока входящие в них понятия не удаётся разложить на более простые или подвести под более общие. В данном случае это относится ко всем числам, которые должны быть либо определены, либо признаны за неопределяемые. Это и должно быть задачей данной книги*. От её выполнения зависит решение относительно природы арифметических законов.

Рассмотрению самого этого вопроса я предпосылаю кое-что, что может дать указание, каков может быть на него ответ. А именно, если с других точек зрения обоснованно окажется, что принципы арифметики являются аналитическими, то это также говорит об их доказуемости и об определмости понятия числа. Противоположный эффект дал бы основания в пользу апостериорности этих истин. Поэтому предварительному освещению должен, прежде всего, подвергнуться этот спорный пункт.

I. МНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ АВТОРОВ О ПРИРОДЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

Доказуемы ли числовые формулы?

§ 5. Числовые формулы, типа $2 + 3 = 5$, которые имеют дело с определёнными числами, необходимо отличать от общих законов, имеющих силу для всех целых чисел.

Первые отдельными философами** считались недоказуемыми и непосредственно ясными, как аксиомы. Кант*** толковал

* Итак, в нижеследующем, если нет никаких оговорок, речь не идёт о каких-то других числах, кроме положительных целых чисел, отвечающих на вопрос «сколько?».

** Гоббс, Локк, Ньютон. Ср. *Wasmann*, die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik, S. 241–242, S. 365ff., S. 475. [*Ньютон И.* Введение в арифметику, или Книга об арифметических синтезе и анализе. — М.: Изд-во АН СССР, 1948 — С. 17; *Локк Дж.* Сочинения. В 3 т. Т. 1. — М.: Мысль, 1985. — С. 74–76.]

*** *Kritik der reinen Vernunft* herausgeg. v. Hartenstein. III. S. 157. [*Кант И.* Собрание сочинений. В 8 т. Т. 3. — М.: Чоро, 1994. — С. 175. (В переводе Н. Лосского.)]

их как недоказуемые и синтетические, но опасался называть аксиомами, поскольку они не являются общими и поскольку их число бесконечно. Ханкель* оправданно называет предположение о бесконечной множественности недоказуемых первичных истин неуместным и парадоксальным. В самом деле, оно противоречит потребности разума в наглядности первых основоположений. А разве непосредственно очевидно, что

$$135\ 664 + 37\ 863 = 173\ 527?$$

Нет! И как раз это приводит Канта к синтетической природе таких предложений. Но ещё больше это говорит против их недоказуемости; ибо как можно было бы усмотреть их иначе, нежели через посредство доказательства, ведь они не являются непосредственно очевидными? Кант хочет призвать на помощь созерцание пальцев или точек, из-за чего попадает в опасность, что эти предложения, согласно его мнению, могут показаться эмпирическими, поскольку созерцание 37 863 пальцев, во всяком случае, всё же не чисто. Также и выражение «созерцание», по-видимому, не оправдано, ведь уже 10 пальцев в своём расположении друг за другом могут вызывать различные созерцания. Разве мы вообще можем обладать созерцанием 135 664 пальцев или точек? Если можем, да к тому же обладаем созерцанием 37 863 пальцев и ещё 173 527, тогда оправданность нашего равенства, если оно не является доказуемым, должна быть тотчас же очевидной, по крайней мере для пальцев; но это не так.

Кант, очевидно, подразумевал только малые числа. Формулы, которые для них непосредственно очевидны через созерцание, затем были бы доказуемы для больших чисел. Сомнительно, однако, проводить принципиальное различие между малыми и большими числами, в особенности нельзя указать строгую границу. Если же числовые формулы были бы доказуемы, скажем, с 10, то оправдан вопрос: почему не с 5, не с 2, не с 1?

§ 6. Другие же философы и математики утверждали доказуемость числовых формул. Лейбниц** говорит:

* H. Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Functionen.

** Nouveaux Essais, IV. § 10. Erdm. S. 363. [Лейбниц Г. Сочинения. В 4 т. Т. 2. — М.: Мысль, 1983. — С. 422.]

«Два и два — четыре» — это совсем не непосредственная истина, если под *четырьмя* понимать три и один. Её можно, следовательно, доказать, и вот каким образом.

Определения:

1) 2 — это 1 и 1,

2) 3 — это 2 и 1,

3) 4 — это 3 и 1.

Аксиома: «При подстановке равных величин равенство сохраняется».

Доказательство:

2 и 2 — это 2 и 1 и 1 (по определению 1),

2 и 1 и 1 — это 3 и 1 (по определению 2),

3 и 1 — это 4 (по определению 3),

следовательно (по аксиоме)

2 и 2 = 4».

Это доказательство на первый взгляд построено всецело из определений и приведённой аксиомы. Последнюю также можно преобразовать в определение, как сам Лейбниц и поступает в другом месте*. Кажется, что об 1, 2, 3, 4 не нужно знать более того, что содержится в определениях. Однако при более тщательном рассмотрении обнаруживается пробел, который скрыт пропуском скобок. А именно, при большей точности нужно записать:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Здесь пропадает предложение

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,$$

которое является особым случаем

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Если предполагается данный закон, то легко видеть, что так можно доказать каждую формулу сложения. Каждое число тогда определяется из предшествующего. В самом деле, я не вижу, каким более подходящим, чем лейбницевский, способом нам могло бы

* Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm. S. 94. [Лейбниц Г. Указ. соч. Т. 3. С. 632.]

быть дано, скажем, число 437 986. А так прийти к нему всё же в наших силах, даже не обладая никаким его представлением. Посредством таких определений бесконечное множество чисел сводится к однёрке и увеличению на один, и каждая из бесконечно многих числовых формул может быть доказана из нескольких общих предложений.

Такого же мнения придерживаются Г. Грассман и Г. Ханкель. Первый хочет получить закон

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

посредством определения, говоря*:

«Если a и b являются произвольными членами основного ряда, то под суммой $a + b$ понимается тот член основного ряда, для которого имеет силу формула $a + (b + e) = a + b + e$ ».

При этом e должно обозначать положительную единицу. Против данного объяснения можно возразить двояко. Прежде всего, сумма объясняется через саму себя. Если ещё не известно, что должно обозначать $a + b$, выражение $a + (b + e)$ также не понятно. Но это возражение, пожалуй, можно устранить, сказав (конечно, противореча дословному тексту), что хотят объяснить не сумму, но сложение. Тогда всегда ещё можно возразить, что $a + b$ — это пустой знак, если в основном ряду нет никакого члена или нескольких членов требуемого вида. То, что этого не случается, Грассман просто предполагает без доказательства, так что строгость всего лишь иллюзорна.

§ 7. Можно подумать, что числовые формулы являются синтетическими или аналитическими, апостериорными или априорными смотря по тому, какими являются общие законы, от которых зависит их доказательство. Однако этому противостоит мнение Джона Стюарта Милля. Правда вначале кажется, что он, как и Лейбниц, хочет основать науку на определениях**, поскольку объ-

* *H. Grassmann, Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. I Theil: Arithmetik, Steettin, 1860, S. 4.*

** *Милль Дж. Ст. Система логики силлогистической и индуктивной. — М.: Изд-во Г. А. Лемана, 1914. — Кн. III, гл. xxiv, § 5. [На протяжении всей работы Фреге ссылается на немецкий перевод: *System der deductiven und inductiven Logik, übersetzt von J. Schiel*; в нашем переводе цитаты будут приводиться по указанному русскому изданию.]*

ясняет отдельные числа так же, как он; но его предрассудок, что все науки являются эмпирическими, тотчас портит правильную мысль. А именно, он поучает нас*, что это определения не в логическом смысле, что они не только устанавливают значение выражения, но вместе с тем также утверждают наблюдаемый факт. Чем же во всём мире мог бы быть наблюдаемый или, как также говорит Милль, физический факт, который утверждается в определении числа 777 864? Из всего обилия физических фактов, открывающихся перед нами, Милль называет один-единственный, который может утверждаться в определении числа 3. Согласно ему, он состоит в том, что имеется объединение предметов, которое, пока последние формируют смысл впечатления от ° °; может быть разъединено на две части, типа следующих: ° ° °. Всё-таки как хорошо, что не всё в мире склёпано и сколочено; тогда мы не смогли бы взяться за такое разъединение и $2 + 1$ не было бы 3! Как жаль, что Милль не изобразил также физический факт, лежащий в основании чисел 0 и 1!

Милль продолжает: «Раз такое предложение доказано, мы называем все такие сочетания “тремя”»**. Отсюда узнаётся, что собственно неверно, когда часы бьют три, говорить о трёх ударах или называть сладкое, кислое и горькое тремя вкусовыми ощущениями; так же не одобряется и выражение «три способа решения уравнения»; поскольку об этом никогда не получить такого чувственного впечатления, как от ° °.

Теперь Милль говорит: «Вычисления вытекают не из самого определения, а из предполагаемой им арифметической теоремы о существовании группы предметов, которая производит на чувство такое впечатление»***. Но где же в приведённом выше доказательстве Лейбниц должен сослаться на упомянутый факт? Милль упускает возможность удостоверить пробел, хотя он даёт вполне соответствующее лейбницеvскому доказательство предложения $5 + 2 = 7$ ****. Действительно, имеющийся в наличии пробел, заключающийся в пропуске скобок, он не замечает так же, как и Лейбниц.

Если определение каждого отдельного числа действительно утверждает особый физический факт, то нельзя было бы в достаточной мере восхищаться человеком, который проводит вы-

* Там же. Кн. II, гл. vi, § 2.

** Там же. Кн. II, гл. vi, § 2. С. 230.

*** Там же. Кн. II, гл. vi, § 2. С. 230.

**** Там же. Кн. III, гл. xxiv, § 5.

числения с девятизначными числами, из-за физического характера его знания. Возможно, мнение Милля всё же не доходит до того, что все эти факты должны наблюдаться в отдельности, но достаточно посредством индукции вывести общий закон, в который все они были бы включены. Но при попытке сформулировать такой закон оказывается, что это невозможно. Недостаточно сказать: Существует большая совокупность вещей, которую можно разложить; ибо этим не говорится, что существует совокупность такого размера и вида, которая требуется, скажем, для определения числа 1 000 000, а также не указывается точнее способ разделения. Миллевское понимание с необходимостью должно вести к требованию, чтобы для каждого числа наблюдался особый факт, поскольку в общем законе было бы потеряно как раз то своеобразие числа 1 000 000, которое необходимо принадлежит его определению. В самом деле, согласно Миллю нельзя установить $1\,000\,000 = 999\,999 + 1$, если не наблюдается именно своеобразный способ разделения совокупности вещей, который отличается от способа, подобающего для какого-либо другого числа.

§ 8. Милль, видимо, считает, что определения $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ и т. д. нельзя образовать до тех пор, пока не наблюдались упомянутые им факты. В самом деле, 3 нельзя определить как $(2 + 1)$, если $(2 + 1)$ вовсе не придан смысла. Но спрашивается, разве необходимо для этого наблюдать указанную совокупность и её разделения? Тогда было бы загадочно число 0; потому что до сих пор, пожалуй, никто не видел и не трогал 0 булыжников. Милль, конечно, объяснил бы 0 как нечто бессмысленное, только как манеру речи; вычисления с 0 были бы лишь игрой с пустыми знаками, и остаётся только удивляться, каким образом при этом может получаться что-то разумное. Но если эти вычисления имеют серьёзное значение, то и сам знак 0 не может быть совершенно бессмысленным. Оказывается, возможно, чтобы $2 + 1$ сходным с 0 образом всё-таки могло иметь смысл даже тогда, когда не наблюдается упоминаемый Миллем факт. В самом деле, разве кто захочет утверждать, что наблюдает тот факт, который, согласно Миллю, содержится в определении 18-значного числа, и разве кто захочет отрицать, что такой числовой знак всё же имеет смысл?

Может быть, имеется в виду, что физические факты используются только для малых чисел, скажем, до 10, в то время как остальные могут составляться из них. Но если 11 можно по-

строить из 10 и 1 лишь посредством определения, без того чтобы наблюдать соответствующую совокупность, то нет основания, по которому нельзя было бы таким же образом составить 2 из 1 и 1. Если вычисления с числом 11 не следуют из характерного для него факта, то, как получается, что вычисления с 2 должны зависеть от наблюдения определённой совокупности и её своеобразного разделения?

Быть может, зададут вопрос, как может существовать арифметика, если посредством чувств мы можем различить вовсе ни одной или только три вещи. Для нашего знания арифметических предложений и их применений такое состояние, конечно, было бы чем-то сомнительным; ну а как же для их истинности? Если предложение называют эмпирическим, потому что мы должны делать наблюдения, для того чтобы нам стало известно его содержание, то слово «эмпирический» используется не в том смысле, в котором оно противоположно «*a priori*». Тогда высказывается психологическое утверждение, которое относится только к содержанию предложения; является ли оно истинным, тем самым не рассматривается. В этом смысле все истории Мюнхгаузена также являются эмпирическими; ибо для того чтобы их можно было выдумать, конечно, необходимо делать различные наблюдения.

Являются ли законы арифметики индуктивными истинами?

§ 9. Прежние соображения делают правдоподобным то, что числовые формулы выводимы единственно из определений отдельных чисел при помощи нескольких общих законов, что эти определения не утверждают наблюдаемые факты и не предполагают их для своей законности. Это зависит также от познания природы указанных законов.

Миль* хочет использовать для своего (упомянутого выше) доказательства формулы $5 + 2 = 7$ предложение «Всё, что слагается из частей, слагается из частей этих частей». Его он принимает за характерное выражение предложения, прежде известного в форме «Суммы равных равны». Он называет его индуктивной истиной и законом природы высшего порядка. На недостаточность его экспозиции указывает то, что он совершенно не

* Там же. Кн. III, гл. xxiv, § 5. С. 558.

привлекает это предложение в том пункте доказательства, где оно, согласно его мнению, необходимо; всё-таки кажется, что его индуктивная истина должна заменить аксиому Лейбница: «Если подставить равное, равенство сохраняется». Однако для того чтобы арифметическую истину можно было назвать законом природы, Милль вкладывает в неё смысл, которого она не имеет. Он считает*, например, что равенство $1 = 1$ может быть ложным; поскольку один фунт не всегда имеет именно тот вес, который имеет другой фунт. Но предложение $1 = 1$ вовсе даже не стремится этого утверждать.

Милль понимает знак + так, чтобы благодаря этому выразить отношение частей физического тела или частей кучи к целому; но не в этом смысл данного знака. $5 + 2 = 7$ не означает, что если в 5 мер жидкости влить 2 меры жидкости, то получится 7 мер жидкости, но последнее есть применение первого предложения, которое допустимо только тогда, когда вследствие, скажем, химической реакции не наступает изменения объёма. Милль всегда смешивает применение, которое можно найти арифметическому предложению и которое часто бывает физическим и предполагает наблюдаемый факт, с самым чисто математическим предложением. Знак плюса может, правда, во многих применениях, по-видимому, соответствовать образованию кучи; но не в этом его значение; потому что при других применениях (если, например, заниматься подсчётом событий) о кучах, агломератах, отношении физического тела к своим частям не может быть и речи. Правда, здесь тоже можно говорить о частях; однако тогда это слово используется не в физическом или геометрическом, но в логическом смысле, как когда тираноубийство называют частью убийства вообще. Здесь имеется логическая субординация. Так и сложение, в общем, тоже не соответствует физическому отношению. Следовательно, общие законы сложения также не являются законами природы.

§ 10. Но, возможно, они всё-таки могут быть индуктивными истинами. Как же за это взяться? Из каких фактов необходимо исходить, чтобы подняться к общему? Пожалуй, таковыми могут быть только числовые формулы. Этим мы, конечно, опять утрачиваем преимущества, которые приобрели посредством определения отдельных чисел, и должны найти другой способ обоснования числовых формул. Но даже если сейчас мы и не принимаем

* Там же. Кн. II, гл. vi, § 3.

во внимание это вовсе не лёгкое сомнение, то всё равно находим почву для индукции неблагоприятной; потому что здесь отсутствует то однообразие, которое в ином случае могло бы придать этой процедуре большую надёжность. Уже Лейбниц* на утверждение Филалета:

«Различные модусы чисел могут отличаться друг от друга лишь по величине, поэтому они простые модусы, подобно модусам протяжения»

мог ответить:

«Это можно сказать о времени и о прямой линии, но ни в коем случае не о фигурах и тем более не о числах, которые не только не отличаются друг от друга по величине, но, кроме того, и не сходны между собой; чётное число можно разделить поровну на две части, а нечётное нельзя. Три и шесть — треугольные числа, четыре и девять — квадраты, восемь — куб и т. п. Сказанное относится к числам ещё больше, чем к фигурам, так как две неравные фигуры могут быть совершенно подобны друг другу, чего нельзя никогда сказать о двух числах».

Мы уже привыкли именно к тому, что числа во многих отношениях трактуются как однородные; но это происходит только постольку, поскольку мы знаем множество общих предложений, которые имеют силу для всех чисел. Здесь мы должны, однако, встать на точку зрения, с которой ещё ничего не оценивалось. В самом деле, было бы трудно найти пример для индуктивного вывода, соответствующий нашему случаю. Обычно мы часто устанавливаем предложение, что каждое место в пространстве и каждая временная точка в себе и для себя аналогична любой другой. При тех же самых условиях результат должен получаться столь же хорошо в другом месте и в другое время. Здесь это не применимо, поскольку числа внепространственны и вневременны. Позиция в ряду чисел не равноценна месту в пространстве.

Числа также ведут себя совершенно иначе, нежели, скажем, представители вида животных, так как числа по природе вещей

* *Waitsatt*, Op. cit., II, S. 39; Erdm. S. 243. [Лейбниц Г. Указ. соч. Т. 2. С. 156.]

имеют определённый порядок, каждое образуется собственным способом и обладает своеобразием, особенно заметным у 0, 1 и 2. Кроме того, если посредством индукции обосновывается предложение, относящееся к виду, обыкновенно уже имеется весь ряд с общими свойствами, уже единственно по определению понятия вида. Здесь же трудно найти даже единственное общее свойство, которое сперва само не доказывалось бы.

Наш случай легче всего можно сравнить со следующим. Пусть замечено, что с глубиной температура в буровой скважине регулярно увеличивается, причём до сих пор встречались совершенно разные слои горных пород. Очевидно, тогда, основываясь на наблюдениях за этой скважиной, никто не сделает вывода о состоянии более глубоких слоёв, и должно оставаться открытым, будет ли регулярность распределения температуры сохраняться далее. Хотя под понятие «то, что встречается при продолжении бурения» подпадает как то, что наблюдалось до сих пор, так и то, что залегает более глубоко, здесь, однако, это мало может пригодиться. В случае чисел нам так же мало может пригодиться то, что все они подпадают под понятие «то, что получается посредством увеличения на один». Различие между двумя случаями можно найти в том, что слои лишь встречаются, но числа посредством увеличения на единицу прямо-таки создаются и определяются во всём своём существе. Последнее может означать только то, что все свойства числа (например, 8) можно вывести из способа, которым оно возникает посредством увеличения на 1. Этим, в сущности, даётся то, что свойства числа вытекают из его определения, и открывается возможность доказать общие законы чисел из одинакового для них всех способа возникновения, в то время как особые свойства отдельных чисел выводятся из особого способа, которым они образуются с помощью продолжающегося увеличения на один. Таким же образом можно делать выводы именно из того, что у земного слоя определяется уже единственно посредством глубины, на которой он встречается, т. е. из обстоятельств его расположения, не нуждаясь в индукции; но то, что этим не определяется, нельзя узнать также и из индукции.

Вероятно, саму процедуру индукции можно оправдать только с помощью общих предложений арифметики, если под ней не понимать простую привычку. Последняя совершенно не обладает ручающейся за истину силой. В то время как научная процедура согласно объективным стандартам то находит обоснованной высокую вероятность в одном-единственном примере, то счи-

тает не имеющими цены тысячи событий, привычка определяет числом и силой впечатлений и субъективными обстоятельствами, которые не имеют никакого права оказывать влияние на суждение. Индукция должна опираться на учение о вероятности, поскольку она может сделать предложение не более чем вероятным. Однако не видно, как это учение можно развить, не предполагая арифметических законов.

§ 11. Лейбниц*, наоборот, считал, что необходимые истины, которые обнаруживаются только в арифметике, должны иметь принципы, доказательство которых не зависит от примеров и, следовательно, от показаний чувств, хотя никому и не приходит на ум мыслить об этом без чувств. «Вся арифметика врождена и заключается в нас потенциальным образом». То, как он понимает выражение «врождена», поясняет другое место**: «Я не могу признать также, будто всё то, что мы узнаём, не врождено. Истины о числах находятся в нас, и тем не менее мы узнаём их, либо извлекая эти истины из их источника, когда мы узнаём их путём рационального доказательства (что показывает, что они врождены), либо ...».

Являются ли законы арифметики априорно синтетическими или же аналитическими?

§ 12. Если взять антитезу аналитического и синтетического, получается четыре комбинации; однако одна из них, а именно,

аналитическое *a posteriori*,

отпадает. Если вместе с Миллем решить в пользу *a posteriori*, то выбора не остаётся; но нам всё ещё остаётся взвесить лишь две возможности:

синтетическое *a priori*

и

аналитическое.

* *Waismann*, Op. cit., Bd. II. S. 13–14; Erdm. S. 195, S. 208–209. [Лейбниц Г. Указ. соч. Т. 2. С. 78.]

** *Waismann*, Op. cit., Bd. II. S. 38; Erdm. S. 212. [Лейбниц Г. Указ. соч. Т. 2. С. 87.]

В пользу первого решает Кант. В этом случае, пожалуй, не остаётся ничего иного, как призвать чистое созерцание в качестве последнего основания познания, несмотря на то, что тут трудно сказать, является ли оно пространственным или временным, или же, кроме того, может быть каким-то ещё. Бауман* соглашается с Кантом, хотя и на несколько ином основании. Согласно Липшицу** предложения, которые утверждают независимость чисел от способа вычисления, также вытекают из внутреннего созерцания. Ханкель*** основывает учение о действительных числах на трёх принципах, которым он приписывает характеристику *notiones communes*****: «Посредством экспликации они становятся совершенно очевидными, имеющими силу для всего обладающего величиной согласно чистому созерцанию величины и могут, без утраты своей характеристики, быть преобразованы в определения тем, что говорят: Под сложением величин понимается операция, удовлетворяющая этим предложениям». В последнем утверждении содержится неясность. Пожалуй, определение можно дать, но оно не может составить замены этим принципам, поскольку при применении речь всегда шла бы о том, есть ли числовые величины и является ли то, что мы имеем обыкновение называть сложением, сложением в смысле данного определения? И при ответе необходимо уже знать эти предложения о числах. Далее, неприязнь вызывает выражение «чистое созерцание величины». Если задуматься над всем тем, что называется величинами (числа, протяжённости, площади, объёмы, угол, кривизна, массы, скорости, силы, освещённость, электрическое напряжение и т. д.), то, пожалуй, понятно, как их можно подчинить понятию величины; но выражение «созерцание величины» (и уж совсем «чистое созерцание величины») нельзя признать соответствующим. Раз уж я не могу согласиться с созерцанием 1 000 000, ещё меньше я могу согласиться с созерцанием числа вообще или, вообще, величины вообще. На внутреннее созерцание легко сослаться, когда нельзя указать на другое основание. Но всё же при этом не нужно совершенно терять из виду смысл слова «созерцание».

Кант определяет в *Логике* (ed. Hartenstein, VIII, S. 88):

* Op. cit., Bd. II. S. 669.

** *Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Bd. I. S. 1.*

*** *Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme. S. 54–55.*

**** Общих понятий (лат.). (*Примеч. перев.*)

«Созерцание есть *единичное* представление (*repraesentatio singularis*); понятие есть *общее* (*repraesentatio per notas communes*) или *рефлексивное* представление (*repraesentatio discursiva*)»*.

Здесь в выражение вовсе не входит отношение к чувственности, которое, однако, примысливается в *Трансцендентальной эстетике* и без которого созерцание не может служить для априорно синтетических суждений в качестве принципа познания. В *Критике чистого разума* (ed. Hartenstein III, S. 55) обозначено:

«Всякое мышление должно... иметь отношение к созерцаниям, стало быть, у нас — к чувственности, потому что ни один предмет не может быть нам дан иным способом»**.

Смысл нашего слова в *Логике*, таким образом, шире, чем в *Трансцендентальной эстетике*. В логическом смысле можно, пожалуй, назвать 1 000 000 созерцанием; поскольку оно не является общим понятием. Но взятое в этом смысле, созерцание не может служить основанием арифметических законов.

§ 13. В общем, было бы хорошо не переоценивать родство с геометрией. Против этого я уже приводил цитату из Лейбница. Геометрическая точка, рассмотренная сама по себе, совершенно не отличается от какой-нибудь другой; то же самое имеет силу для прямых и плоскостей. Они различаются, лишь когда несколько точек, прямых или плоскостей схвачены в созерцании одновременно. Если в геометрии общие предложения приобретаются созерцанием, то отсюда ясно, что созерцаемые точки, прямые и плоскости собственно вовсе не являются особенными и поэтому могут считаться представителями всего своего рода. У чисел дело обстоит по-иному; каждое из них имеет свои особенности. О том, каким образом определённое число может представлять другие и где предьявляет свои права его своеобразие, нельзя сказать безоговорочно.

§ 14. Сравнение истин при ссылке на область, где они господствуют, также говорит против эмпирической и синтетической природы арифметических законов.

* Кант И. Собрание сочинений. В 8 т. Т. 8. — М.: Чоро, 1994. — С. 346.

** Кант И. Указ. соч. Т. 3. С. 62.

Предложения опыта имеют силу для физической или психологической действительности, геометрические истины господствуют в области пространственно созерцаемого, неважно, будет ли оно только действительным или же продуктом силы воображения. Самый сумасшедший лихорадочный бред, самые смелые творения сказаний и поэтов, где животные говорят, где светила могут спокойно останавливаться, где из камня получается человек, а из человека дерево, где учат тому, как самого себя вытащить из болота за собственный чуб, всё ещё, поскольку остаются наглядными, связаны с аксиомами геометрии. Понятийное мышление может освободиться от этого только определённым способом, если, скажем, принять четырёхмерное пространство или положительное искривление. Такое рассмотрение вовсе не бесполезно, оно полностью покидает поле созерцания. Если же при этом последнее призывается на помощь, то оно всё-таки всегда является созерцанием евклидова пространства, единственного пространства, образом которого мы обладаем. Только тогда созерцание не таково, каково оно есть, но символизирует нечто иное; например, прямой или плоскостью называют то, что всё-таки созерцается как искривлённое. Для понятийного же мышления можно принять противоположное той или иной геометрической аксиоме, без того чтобы, если следствия выводятся из таких конфликтующих с созерцанием предпосылок, запутаться в противоречиях с самим собой. Эта возможность показывает, что геометрические аксиомы не зависимы друг от друга и от первичных логических законов, а являются синтетическими. Можно ли сказать то же самое об основоположениях науки о числах? Не смешается ли всё, если захотелось бы отрицать одну из них? Было ли бы тогда ещё возможно мышление? Не лежит ли основание арифметики глубже, нежели основа всего опытного знания, даже глубже, чем основание геометрии? Арифметические истины господствуют над областью исчислимого. Это основание является всеобъемлющим; так как ему принадлежит не только действительное, не только созерцаемое, но и всё мыслимое. Разве не должны тогда законы чисел находиться в теснейшей связи с законами мысли?

§ 15. Нетрудно предвидеть, что изречения Лейбница можно истолковать в пользу аналитической природы законов чисел, ведь для него *a priori* совпадет с аналитическим. Так, он говорит*, что алгебра заимствует свои преимущества у более высокого искус-

* *Baumann*, Op. cit., Bd. II. S. 56; *Erdm.* S. 424.

ства, а именно, подлинной логики. В другом месте* он сравнивает необходимые и случайные истины с соизмеримыми и несоизмеримыми величинами и подразумевает, что в случае необходимых истин возможно доказательство или сведение к тождествам. Эти мнения всё же теряют вес вследствие того, что Лейбниц склонен считать все истины доказуемыми**: «...Каждая истина извлекает своё априорное доказательство из понятия терминов, хотя не всегда в наших силах прийти к этому анализу». Правда, сравнение с соизмеримостью и несоизмеримостью опять устанавливает непреодолимый, по крайней мере для нас, барьер между случайными и необходимыми истинами.

Весьма решительно в пользу аналитической природы законов чисел высказывается У. Стенли Джевонс***: «Число есть только логическое различие и алгебра есть в высшей степени развитая логика».

§ 16. Но и эта точка зрения также имеет свои затруднения. Может ли высоко возвышающееся, разветвлённое и всё же постоянно растущее древо науки о числах укорениться в голых тождествах? И каким образом пустые формы логики приходят к тому, что из них получается такое содержание?

Миаль считает****: «Учение о том, что мы можем открывать факты и разоблачать сокровенные процессы в природе посредством искусного пользования словами, до такой степени противна здравому смыслу, что для того, чтобы поверить ему, надо сделать некоторые успехи в философии».

Верно, если бы при искусных манипуляциях не мыслили. Здесь Миаль выступает против формализма, который едва ли кто-нибудь защищает. Те, кто использует слова или математические знаки, претендуют на то, что они нечто обозначают, и никто не ждёт, что из пустых знаков вытекает нечто, наполненное смыслом. Однако возможно, что математик осуществляет длиннейшие вычисления без того, чтобы понимать под своими

* *Vaismann*, Op. cit., Bd. II. S. 57; Erdm. S. 83. [Лейбниц Г. Указ. соч. Т. 3. С. 496.]

** *Vaismann*, Op. cit., Bd. II. S. 57; Pertz, II. S. 55.

*** *Джевонс Ст.* Основы науки. — СПб.: Изд-во Л. Ф. Пантелеева, 1881. — С. 152. [Фреге на всём протяжении текста цитирует второе английское издание книги Ст. Джевонса: *The principles of science*, London, 1879, в нашем переводе все цитаты будут приводится по указанному русскому изданию.]

**** Там же. Кн. II, гл. vi, § 2. С. 227.

знаками нечто чувственно зримое, созерцаемое. Из-за этого знаки всё же не являются бессмысленными; от них самих всё же отличают их содержание, даже если, быть может, оно схватываемо только посредством знаков. Известно, что для одного и того же можно установить другие знаки. Нужно знать, как логически обращаться с символизированным в знаках содержанием и как должен совершаться переход к явлениям, когда хотят применения в физике. Однако в таком применении нельзя видеть собственный смысл предложений. При этом всегда пропадает большая часть общности и привходит нечто особенное, что при ином применении заменяется на другое.

§ 17. Вопреки всяческому умалению дедукции всё же нельзя отрицать, что законов, обоснованных посредством индукции, недостаточно. Из них должны выводиться новые предложения, которые ни в одном из них в отдельности не содержатся. То, что они уже определённым способом находятся в них всех вместе взятых, не освобождает от работы вытащить их оттуда и установить сами по себе. С этим открывается следующая возможность. Вместо того чтобы привязывать ряд выводов непосредственно к факту, можно, оставляя последний вопросом открытым, адаптировать его содержание в качестве условия. Благодаря тому, что все факты таким образом заменяются в ряду мыслей на условия, вывод получают в такой форме, что результат становится зависимым от ряда условий. Такая истина была бы обоснована посредством одного мышления или, по выражению Милля, посредством искусного пользования словами. Нет ничего невозможного в том, чтобы законы чисел относились к такой разновидности. Тогда, несмотря на то что они не обязательно открывались бы посредством одного мышления, они были бы аналитическими суждениями; ибо здесь рассматривается не способ поиска, но разновидность оснований доказательства; или, как говорит Лейбниц*, «Ведь здесь речь идёт не об истории наших открытий, которая различна у разных людей, но о естественной связи и естественном порядке истин, который всегда одинаков». Тогда в конце наблюдения решило бы, выполнено ли условие, содержащееся в обоснованных таким образом законах. В конце концов, так попадают именно туда, куда пришли бы с помощью непосредственной привязки ряда выводов к наблюдаемым фактам. Однако указанная здесь разновидность образа действия во многих случаях предпочтительнее, поскольку она приводит к общему предложению, кото-

* Nouveaux Essais, IV, § 9; Erdm. S. 360. [Лейбниц Г. Указ. соч. Т. 2. С. 420.]

рое не обязательно применимо только к непосредственно имеющимся в наличии фактам. Тогда истины арифметики относились бы к истинам логики подобно тому, как теоремы относятся к аксиомам геометрии. Последние конденсированно содержали бы в себе весь ряд выводов для будущего употребления, и их польза состояла бы в том, что больше не нужно было бы делать выводы порознь, но можно было бы сразу же выразить результат всего ряда. Тогда, ввиду сильного развития арифметических теорий и их многократного применения, не удержалось бы широко распространённое пренебрежение аналитическими суждениями и сказка о непродуктивности чистой логики.

Если же не здесь впервые выраженную точку зрения можно провести в частности так строго, чтобы не оставалось ни малейшего сомнения, то этот результат, как мне кажется, был бы вполне значим.

II. МНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ АВТОРОВ О ПОНЯТИИ ЧИСЛА

§ 18. Обращаясь к первичным предметам арифметики, мы, между тем, отличаем отдельные числа 3, 4 и т. д. от общего понятия числа. Итак, мы уже решили, что отдельные числа лучше всего выводить по способу Лейбница, Милля, Г. Грасмана и других из однёрки и увеличения на один и что это объяснение, однако, остаётся неполным, поскольку не объяснены однёрка и увеличение на один. Чтобы из этих определений вывести числовые формулы, как мы видели, нужны общие предложения. Такие законы, как раз благодаря их общности, можно вывести не из определений отдельных чисел, но только из общего понятия числа. Это последнее мы сейчас подвергнем более тщательному рассмотрению. При этом также предполагается, что необходимо обсудить однёрку и увеличение на один, а, стало быть, определения отдельных чисел также ждут дополнения.

§ 19. Здесь мне сразу же хотелось бы возразить на попытку, когда число понимают геометрически, как числовую пропорцию длин и площадей, очевидно, полагая облегчить многократные применения арифметики к геометрии тем, что их начала приравниваются в самом тесном отношении.

Ньютон* предлагает понимать под числом не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение любой величи-

* *Waitsman*, Op. cit., Bd. I, S. 475. [Ньютон И. Указ. соч. С. 8.]

ны к другой величине того же самого вида, которая берётся за единицу. Можно признать, что так соответствующим образом описывается число в широком смысле, к которому принадлежат также дроби и иррациональные числа; при этом всё же предполагаются понятия величины и отношения величин. Сообразно с этим кажется, что объяснение числа в более узком смысле (кардинального числа) излишним бы не было, поскольку Евклид, чтобы определить равенство двух пропорций между длинами, использует понятие равнократности, а равнократность вновь выводит на равночисленность. Однако может быть и так, что равенство пропорций между длинами независимо от определимости понятия числа. Тогда сверх того всё-таки остаётся сомнительным, в каком отношении определённое таким геометрическим образом число находится к числу обычной жизни. Последнее тогда совершенно расстается с наукой. И всё же от арифметики, пожалуй, можно требовать, чтобы она необходимо предполагала точку соприкосновения с каждым применением числа, даже если само применение и не является её делом. Даже обыкновенный счёт должен находить основание своего метода в науке. А тогда встаёт вопрос, обходится ли сама арифметика геометрическим понятием числа, если под числом мыслятся корни уравнения, число, меньшее и предшествующее некоторому числу, или нечто подобное. Зато число, отвечающее на вопрос «сколько?», может определять также, сколько единиц содержится в некоторой протяжённости. Вычисления с негативными, дробными, иррациональными числами можно свести к вычислениям с действительными числами. Но, быть может, Ньютон под величинами, через отношения которых определялось число, хочет понимать не только геометрические величины, но также и множества. Тогда для нашей цели объяснение всё-таки непригодно, поскольку из выражений «число, посредством которого определяется множество» и «отношение множества к единице множественности» последнее информирует не лучше, чем первое.

§ 20. Первый вопрос был бы теперь о том, определимо ли число. Ханкель высказывается против: «То, что подразумевается, когда объект мыслят или полагают 1 раз, 2 раза, 3 раза... определить нельзя, ввиду простоты понятия "полагать"»*. Всё-таки дело здесь не столько в «полагать», сколько в 1 раз, 2 раза, 3 раза. Если бы это можно было определить, то неопределимость «полагать» нас мало

* Theorie der complexen Zahlensysteme. S. 1.

бы тревожила. Лейбниц склонен рассматривать число как адекватную идею (или, по крайней мере, как идею, близкую адекватной), т. е. такую идею, которая настолько ясна, что всё входящее в неё вновь является ясным.

В целом, если более склоняются к тому, чтобы считать число неопределяемым, то, пожалуй, это связано с тем, что на неудачу обрекается попытка, нежели от встречных доводов, заимствованных из обстоятельств самого дела.

Является ли число свойством внешних вещей?

§ 21. Нам, по крайней мере, следует попытаться указать для числа его место среди наших понятий! В языке числа большей частью проявляются в форме прилагательного и в атрибутивной связи, наподобие слов твёрдый, тяжёлый, красный, обозначающих свойства внешних вещей. Напрашивается вопрос, должны ли точно так же пониматься отдельные числа и можно ли, соответственно этому, сопоставить понятие числа, скажем, с понятием цвета.

Таково, по-видимому, мнение М. Кантора*, когда он называет математику опытной наукой, поскольку она берёт своё начало с рассмотрения объектов внешнего мира. Числа возникают только посредством абстрагирования от предметов.

По Э. Шрёдеру** число копирует действительность, извлекается из неё тем, что единицы отображаются посредством однёрок. Это он называет абстрагированием числа. При таком отображении единицы представлены только в отношении их многочисленности, в то время как от всех других определений вещей, таких как цвет и очертания, отказываются. Многочисленность здесь есть лишь другое выражение для числа. Многочисленность или число Шрёдер также ставит на один уровень с цветом и очертаниями и трактует его как свойство вещей.

§ 22. Бауман*** отвергает мысль, что числа суть понятия, отвлечённые от внешних вещей, именно потому, «что внешние вещи не представляются строгими единицами; они представляются ограниченными группами или чувственными точками, но мы свободны вновь рассматривать каждую из них как многое». В са-

* *M. Cantor*, Grundzuge einer Elementarmathematik. S. 2, § 4.

** *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Leipz. 1873. S. 6, 10–11.

*** *Op. cit.*, Bd. II. S. 669.

мом деле, в то время как я ничуть ни в состоянии изменить простым способом схватывания цвет вещи или её твёрдость, я могу понимать *Илиаду* как одну поэму, как 24 песни или как большое число строф. Разве не в совершенно ином смысле, чем о зелёных листьях, говорится о 1000 листьях дерева? Зелёный цвет мы прилагаем каждому листу, но не так с числом 1000. Мы можем охватить все листья дерева под названием листва. Она также является зелёной, но не 1000. С чем же собственно соотносится свойство 1000? Кажется почти наверняка ни с отдельными листьями, ни с их совокупностью. Но, собственно говоря, может быть, оно вовсе не соотносится с вещами внешнего мира? Если я даю кому-нибудь камень со словами: «Определи его вес», то этим я полностью задаю предмет его исследования. Но если я вручаю ему колоду игральных карт со словами: «Определи их число», то ему неизвестно, хочу ли я узнать число карт, игровой комплект или, скажем, очки при игре в скат. Вручая ему колоду, я ещё не полностью задаю ему предмет его исследования; я должен добавить слово: карты, комплект, очки. Нельзя также сказать, что различные числа сосуществуют здесь друг с другом подобно различным цветам. Без использования слов я могу указать на отдельное цветовое пятно, но не на отдельное число. Если с одинаковым правом я могу назвать предмет и зелёным, и красным, то это знак того, что данный предмет не является настоящим носителем зелёного. Зелёное я имею только на поверхности, которая теперь является зелёной. Так и предмет, который я могу с одинаковым правом описать различными числами, не является настоящим носителем числа.

Существенное различие между цветом и числом, таким образом, состоит в том, что синий цвет принадлежит поверхности независимо от нашего произвола. Синий цвет — это способность отражать определённые лучи света и более или менее поглощать другие, и в этом наше восприятие не может изменить даже самую малость. Зато я не могу сказать, что число 1, 100 или какое-то другое принадлежит колоде карт самой по себе, но самое большее могу сослаться на наш произвольный способ восприятия, и даже тогда не так, что мы можем приписать ей число просто как предикат. То, что мы хотим назвать игровым комплектом, есть, очевидно, произвольное установление, и колоде карт ничего об этом не известно. Но, рассматривая её в этом отношении, мы, быть может, обнаружим, что можно назвать её двумя игровыми комплектами. Тот, кому не известно, что называется игровым

комплектом, найдёт, вероятно, в ней скорее какое-то другое число, нежели именно два.

§ 23. На вопрос, чему число принадлежит как свойство, Милль отвечает так*:

«Созначение числового наименования заключается, конечно, в том или другом свойстве того агломерата вещей, которому мы придаём такое наименование, и свойством этим служит тот особый способ, каким данный агломерат сложен из своих частей (и может быть на них разложен)».

Здесь ошибкой, прежде всего, является определённый артикль в выражении «[the] особый способ», поскольку существуют весьма различные способы, которыми можно разложить агломерат, и нельзя сказать, что особым был бы один-единственный. Например, пучок соломы можно разложить, разорвав все соломинки, или разделив его на отдельные соломинки, или образовав из него два пучка. Разве кучка из ста песчинок составлена точно так же, как пучок из ста соломинок? И всё же используется одно и то же число. Числительное «одна» в выражении «одна соломинка» не выражает, как эта соломинка составлена из клеток или молекул. Ещё большее затруднение с числом 0. Разве соломинки должны вообще образовывать пучок, чтобы быть сосчитанными? Необходимо ли слепых в Германии непременно объединить в сообщество, с тем чтобы выражение «число слепых в Германии» имело смысл? Разве тысяча зёрен пшеницы после того, как она была посеяна, больше не является тысячей зёрен? Разве существует в собственном смысле агломерат доказательств теорем или событий? И всё же их также можно считать. При этом безразлично, одновременны события или же разделены тысячелетиями.

§ 24. С этим мы приходим к другому основанию не сопоставлять число с цветом и твёрдостью, применимость которого гораздо обширнее.

По мнению Милля**, истина, что состоящее из частей состоит и из частей этих частей, действительна для всех естественных феноменов, поскольку со всеми ними можно проводить вычисления. Но разве нельзя проводить вычисления с гораздо

* Там же. Кн. III, гл. xxiv, § 5. С. 556.

** Там же. Кн. III, гл. xxiv, § 5.

большим? Локк говорит*: «Число приложимо к людям, ангелам, действиям, мыслям, ко всему, что существует или что можно представлять себе». Лейбниц** отвергает мнение схоластов, что число неприменимо к бестелесным вещам, и называет число в некотором смысле бестелесной фигурой, происходящей из объединения каких угодно вещей (например: Бог, ангел, человек, движение вместе суть четыре). Поэтому, по его мнению, число есть нечто совершенно общее и относится к метафизике. В другом месте*** он говорит: «Но есть такие вещи, которые нельзя взвесить, т. е. которые не обладают никакой силой и потенцией; есть и такие, которые не имеют частей и поэтому не допускают измерения. А ведь нет ничего такого, что не допускало бы выражения через число. Следовательно, число есть как бы метафизическая фигура».

Было бы в самом деле удивительно, если бы свойство, абстрагированное от внешних вещей, без изменения смысла могло переноситься на события, представления, понятия. Эффект был бы тот же, как если бы намеревались говорить о плавких событиях, синих представлениях, солёных понятиях и вязких суждениях.

Нелепо, чтобы то, что по своей природе чувственно, встречалось в нечувственном. Если мы видим синюю поверхность, то у нас есть своеобразное впечатление, соответствующее слову «синий»; мы узнаём его снова, если наблюдаем другую синюю поверхность. Если же мы хотим предположить, что таким же способом при взгляде на треугольник слову «три» соответствует нечто чувственное, то это же самое мы должны вновь обнаружить в трёх понятиях; нечто нечувственное несло бы в себе нечто чувственное. Пожалуй, можно согласиться, что слову «треугольность» соответствует разновидность чувственного впечатления, но при этом нужно принимать данное слово как целое. Три мы видим тут не непосредственно; но мы видим нечто такое, к чему можно привязать умственную деятельность, ведущую к суждению, в котором встречается число 3. Как же тогда мы знакомимся, скажем, с числом фигур силлогизма, установленного Аристотелем? Разве с помощью глаз? Самое большее, мы видим

* *Vaumann*, Op. cit., Bd. I. S. 409. [Локк Дж. Сочинения в 3 т. Т. 1. — М.: Мысль, 1985. — С. 255.]

** *Vaumann*, Op. cit., Bd. II. S. 56.

*** *Vaumann*, Op. cit., Bd. II. S. 2. [Лейбниц Г. Указ. соч. Т. 3. С. 412.]

определённые знаки для фигур силлогизма, а не их сами. Как же мы можем увидеть их число, если сами они остаются невидимыми? Но, пожалуй, имеют в виду, что достаточно видеть знаки; их число равно числу фигур силлогизма. Тогда откуда это известно? Для этого последнее всё-таки уже должно быть определено другим способом. Или же предложение «Число фигур силлогизма есть четыре» является только другим выражением для «Число знаков фигур силлогизма есть четыре»? Нет! О знаках можно ничего не говорить; никто ничего не желает знать о знаках, если их свойство одновременно не выражает свойство обозначаемого. Здесь без логической ошибки одно и то же может иметь различные знаки; числу знаков даже не нужно совпадать с числом обозначаемого.

§ 25. В то время как для Милля число есть нечто физическое, для Локка и Лейбница оно существует только в идее. В самом деле, как говорит Милль*, два яблока физически отличаются от трёх яблок, а две лошади физически отличаются от одной лошади из-за различия в видимом и осязаемом феномене**. Но должно ли из этого выводиться, что двойка или тройка есть нечто физическое? Пара сапог может быть таким же видимым и осязаемым феноменом, как два сапога. Здесь мы имеем числовое различие, которому не соответствует физическое, поскольку *два* и *одна пара* отнюдь не одно и то же, как, по странному стечению обстоятельств, по-видимому, считает Милль. Наконец, каким образом возможно, чтобы два понятия физически отличались от трёх понятий?

Беркли говорит так***: «Следует принять во внимание, что число... не есть нечто определённое и установленное, существующее реально в самих вещах. Оно есть всецело создание духа, рассматривающего или простую идею саму по себе, или какую-либо комбинацию простых идей, которой даётся одно имя и которая таким образом сходит за единицу. Соответственно различным способам, коими дух комбинирует свои идеи, изменяется также

* Там же. Кн. III, гл. xxiv, § 5.

** Если быть точным, необходимо добавить: когда они вообще являются феноменом. Ведь если у кого-то в Германии есть одна лошадь, а в Америке — другая (и никаких других нет), то он, конечно, владеет двумя лошадьми. Однако они не образуют феномен, но так можно назвать только каждую лошадь саму по себе.

*** *Baumann*, Op. cit., Bd. II. S. 428. [*Беркли Дж.* Сочинения. — М.: Мысль, 1978. — С. 102.]

и число, которое есть только совокупность единиц. Мы считаем окно за единицу и печь за единицу; однако и дом, в котором много окон и много печей, имеет такое же право называться единицей; множество же домов составляют один город».

Является ли число чем-то субъективным?

§ 26. Развивая мысль в этом направлении, легко прийти к тому, чтобы считать число чем-то субъективным. Кажется, что способ, которым число возникает в нас, может разъяснить его сущность. Следовательно, тогда всё зависело бы от психологического исследования. В этом смысле, пожалуй, высказывается Липшиц*:

«Тот, кто хочет составить обзор каких-то вещей, будет начинать с определённой вещи и постепенно добавлять новую вещь к предыдущим».

По-видимому, это больше подходит к тому, как мы получаем, скажем, созерцание созвездия, чем к числообразованию. Намерение составить обзор несущественно, поскольку едва ли можно сказать, что стадо стало обозримее, если установлено, из скольких голов оно состоит.

Такое описание внутренних процессов, предшествующих вынесению суждения о числе, никогда не может, даже если оно и является соответствующим, заменить подлинное определение понятия. Его никогда нельзя привлечь к доказательству арифметических предложений; посредством него мы не узнаем никакого свойства числа. Потому что число является предметом психологии или результатом психических процессов столь же мало, как, скажем, Северное море. Объективности Северного моря не наносится ущерб тем, что от нашего произвола зависит, какую часть водной поверхности Земли мы отграничиваем и хотим закрепить под именем «Северное море». Последнее не основание стремиться исследовать это море психологическими способами. Таким образом, и число тоже есть нечто объективное. Если говорят: «Северное море имеет величину

* Lehrbuch der Analysis, S. 1. Я полагаю, что Липшиц имеет в виду внутренний процесс.

10 000 квадратных миль», то ни посредством «Северное море», ни посредством «10 000» не указывают на состояние или процесс внутри себя, но утверждают нечто вполне объективное, независимое от наших представлений и т. п. Если же мы в другой раз обозначим границы Северного моря как-то иначе или захотим нечто другое понимать под «10 000», то то же самое содержание, которое прежде было правильным, не станет ложным; но, пожалуй, на место истинного содержания подставлено ложное, из-за чего истинность этого первого никоим образом не упраздняется.

Указывая число лепестков цветка, ботаник хочет сказать нечто столь же фактическое, как если он указывает его цвет. Одно столь же мало зависит от нашего произвола, как и другое. Здесь, следовательно, есть определённое сходство между числом и цветом; но оно состоит не в том, что и то, и другое чувственно воспринимается во внешних вещах, но в том, что и то, и другое является объективным.

Я отличаю объективное от осязаемого, пространственного, действительного. Земная ось, центр массы Солнечной системы являются объективными, но я не могу назвать их действительными, как саму Землю. Экватор часто называют *мысленной* линией, но было бы ложным назвать его *выдуманной* линией; он не является результатом душевного процесса, возникшим посредством мысли, но лишь познаётся, схватывается посредством мысли. Если бы становление познанным означало возникновение, то мы не могли бы высказать о нём ничего позитивного при ссылке на время, которое предшествует этому якобы возникновению.

Пространство, согласно Канту, относится к явлениям. Возможно, что другим разумным существам оно представляется совершенно иначе, чем нам. Ведь нам даже не известно, видится ли оно одним человеком так, как оно видится другим, поскольку мы не можем соположить созерцание пространства одним с созерцанием пространства другим, для того чтобы их сравнить. Но, тем не менее, здесь содержится нечто объективное; все познают одни и те же геометрические аксиомы, пусть даже только на деле, и должны поступать так, чтобы ориентироваться в мире. Объективным здесь является то, что закономерно, понятийно, выразимо суждением, что может быть выражено в словах. Чистое созерцаемое не передаваемо. Для пояснения пред-

§ 27. Поэтому я не могу согласиться со Шлёмильхом*, который называет число представлением места объекта в ряду**. Если бы число было представлением, то арифметика была бы психологией. Таковой она является столь же мало, как, скажем, астрономия. Как последняя имеет дело не с представлениями планет, но с ними самими, так же и предметом арифметики не являются представления. Если бы двойка была представлением, то она, прежде всего, была бы только моей. Представление другого человека уже как таковое является другим. Тогда, пожалуй, мы имели бы много миллионов двоек. Нужно было бы сказать: моя двойка, твоя двойка, какая-то двойка, все двойки. Если предполагать скрытые или неосознанные представления, то тогда были бы также и неосознанные двойки, которые осознавались бы позже. С подрастающими поколениями всегда возникали бы новые двойки, и кто знает, не изменились ли бы они в течение тысячелетий так, чтобы $2 \times 2 = 5$. Несмотря на это, всё ещё сомнительно, имеется ли бесконечно много чисел, как обычно думают. Ведь могло бы быть и так, чтобы 10^{10} являлось лишь пустым знаком, и не имелось бы вовсе никакого представления (в каком-нибудь существе), которое могло бы быть так названо.

Мы видим, к каким диковинам приводит развёртывание мысли, что число является представлением. И мы приходим к выво-

* *Schloemilch*, Handbuch der algebraischen Analysis, S. 1.

** Против этого можно также возразить, что когда появляется одно и то же число, тогда должно появляться одно и то же представление места, что, очевидно, ложно. Это следствие не соответствовало бы действительности и в том случае, если под представлением он хотел бы понимать объективную идею; ибо тогда не было бы никакого различия между представлением места и самим местом.

Представление в субъективном смысле есть то, что относится к психологическому закону ассоциации; оно имеет чувственный, образный характер. Представление в объективном смысле принадлежит логике и является сущностно нечувственным, хотя слово, обозначающее объективное представление, часто также сопровождается субъективным представлением, которое, однако, не является его значением. По достоверным сведениям, субъективное представление часто различается у разных людей, объективное же у всех одинаково. Объективные представления подразделяются на предметы и понятия. Чтобы избежать путаницы, я буду использовать «представление» только в субъективном смысле. Вследствие того, что Кант этим словом ссылался и на то, и на другое, он придал своему учению более субъективную, идеалистическую окраску и затруднил знакомство со своим настоящим мнением. Проводимое здесь различие столь же оправдано, как и различие между психологией и логикой. Следовало бы и последние всегда разделять очень строго!

положим наличие двух разумных существ, для которых созерцаемыми являются только проективные свойства и отношения: расположение трёх точек на прямой, четырёх точек на плоскости и т. д.; и пусть одному из них плоскостью кажется то, что другой созерцает как точку, и наоборот. То, что для одного из них является линейным соединением точек, для другого может быть сечением плоскостей и т. д. с постоянно соответствующей двойственностью. Тогда они весьма хорошо могли бы понимать друг друга и никогда бы не обнаружили различие своих созерцаний, поскольку в проективной геометрии каждой теореме противостоит другая, двойственная; отклонения же в эстетическом предпочтении признак не надёжный. В отношении всех геометрических теорем они были бы полностью согласны; по-разному они лишь переводили бы слова в своё созерцание. Скажем, со словом «точка» один связывал бы одно, а другой — другое созерцание. Всё-таки можно сказать, что их слово означает нечто объективное; только не нужно под этим значением понимать особенное в их созерцании. И в этом смысле земная ось также является объективной.

Обычно под «белый» мыслят определённое ощущение, которое, разумеется, является вполне субъективным; но уже в обыкновенном словоупотреблении, мне кажется, часто выступает объективный смысл. Если снег называют белым, то хотя бы выразить объективное свойство, которое распознаётся определённым ощущением при обычном дневном свете. Если он расцвечен освещением, то это учитывают при вынесении суждения, возможно, говоря: «Сейчас он *кажется* красным, но *является* белым». Также и дальтоник может говорить о красном и зелёном, хотя он не различает их в ощущении. Он узнаёт о различии из того, что его проводят другие, или, возможно, посредством физического опыта. Таким образом, слово для цвета часто обозначает не наше субъективное ощущение, о котором мы не можем знать, что оно совпадает с ощущением другого — ибо никоим образом не ручаемся за одинаковое название, — но объективное качество. Итак, под объективным я понимаю то, что независимо от нашего ощущения, созерцания и представления, от проектирования внутренних образов из воспоминания предшествующих ощущений, но не независимость от разума; ибо ответить на вопрос, что представляют собой вещи независимо от разума, значит вынести суждение, не вынося суждения, войти в воду, не замочив ног.

ду, что число не является ни пространственным и физическим, как груда бульжников и орехов у Милля, ни также субъективным, как представления, но является нечувственным и объективным. Ведь основание объективного не может лежать в чувственном впечатлении, которое в качестве аффектации нашей души является совершенно субъективным, но, насколько я вижу, лежит в разуме.

Было бы удивительно, если бы самая точная наука вынуждена была бы опираться на ещё неточную, продвигающуюся ощупью психологию.

Число как множество

§ 28. Отдельные авторы объясняют число как множество, многое или множественность. Недостаток здесь в том, что числа 0 и 1 исключаются из данного понятия. Эти выражения довольно неопределённые: то они более близки по значению к «куче», «группе», «агломерату» (причём мыслятся в пространственной связи), то используются почти равнозначно с «числом», только неопределённым. Поэтому в таком объяснении нельзя найти расклад понятия числа. Для образования числа Тома* требует, чтобы различным множествам объектов придавались различные имена. Под этим, очевидно, для каждого множества объектов подразумевается чёткое определение, для которого придание имени есть лишь внешний знак. Ну и каким же способом осуществляется это определение? Вот в чём вопрос. Очевидно, что идея числа не возникла бы, если для «3 звезды», «3 пальца», «7 звёзд» хотели бы ввести имена, у которых не были бы видны общие элементы. Дело здесь не в придании имени вообще, но в том, чтобы само собой указывалось, что число в этом есть. А для этого необходимо, чтобы число познавалось в своей особенности.

Должно принять во внимание ещё и следующее различие. Некоторые называют число множеством вещей или предметов; другие, как уже Евклид**, объясняют его как множество единиц. Последнее выражение требует отдельного обсуждения.

* *Thomae*, *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, S. 1.

** В начале VII книги *Элементов*: «Μονάς ἐστὶ, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται. Ἀριθμός δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκεϊμένον πλῆθος» [«Единица есть <то>, через что каждое из существующих считается единым. Число же — множество, составленное из единиц». — *Начала Евклида*. Кн. VII—X. — М.: ГИТТЛ, 1949. — С. 9.]

III. МНЕНИЯ О ЕДИНИЦЕ И ОДИН

Выражает ли числительное «один» свойство предметов?

§ 29. В определении, которое Евклид даёт в начале VII книги *Элементов*, кажется, что словом Μονάς он указывает то на подлежащий счёту предмет, то на свойство такого предмета, то на число один. Всегда обходятся переводом «единица», но лишь постольку, поскольку данное слово само переливается в этих различных значениях.

Шрёдер говорит*: «Каждая из подлежащих счёту вещей называется единицей». Спрашивается, почему вещь прежде подводят под понятие единица, а не объясняют просто: «Число есть множество вещей», что вновь вернуло бы нас к предыдущему. В том, что вещь называют единицей, быть может, прежде всего хотят найти более точное определение, в то время как, следуя языковой форме, «один» принимают за прилагательное и понимают «один город» так же, как «мудрый человек». Тогда единица была бы предметом, которому присуще свойство «один», и относилась бы к «один» подобно тому, как «мудрец» относится к прилагательному «мудрый». К основаниям, по которым выше предъявлялись претензии к тому, что число является свойством вещей, добавим здесь ещё несколько особых. Прежде всего бросалось бы в глаза то, что это свойство имела бы каждая вещь. Было бы непонятно, почему это свойство вообще отчётливо прилагается вещи. Утверждение «Солон был мудр» приобретает смысл только из-за возможности того, что нечто не является мудрым. При увеличении объёма содержание понятия уменьшается; если понятие становится всеобъемлющим, то содержание должно исчезнуть вовсе. Не легко помыслить, каким образом язык может сотворить прилагательное, которое совершенно не способно служить тому, чтобы ближе определить предмет.

Если бы «один человек» понимался наподобие «мудрый человек», то следовало бы думать, что «один» может использоваться как предикат, поэтому так же как «Солон был мудрый» можно было бы сказать «Солон был один» или «Солон был одним». Но если последнее выражение и можно встретить, то всё же само по себе оно непонятно. Оно, например, может означать: «Солон был мудрецом», если «мудрец» добавлено по контексту.

* Op. cit., S. 5

Но само по себе «один» не может быть предикатом*. Ещё яснее это проявляется при множественном числе. Тогда как «Солон был мудрый» и «Фалес был мудрый» можно скомбинировать в «Солон и Фалес были мудрые», нельзя сказать «Солон и Фалес были один». Этого невозможно было бы видеть, если «один», как и «мудрый», было бы свойством как Солона, так и Фалеса.

§ 30. С этим связано то, что свойству «один» нельзя дать определение. Когда Лейбниц говорит** : «Одно есть то, что мы охватываем одним актом понимания», он объясняет «один» через само себя. И разве мы не можем охватить многое в одном акте понимания? Последнее признаётся Лейбницем в том же самом месте. Подобное говорит и Бауман*** : «Одно есть то, что мы понимаем как одно», и далее: «То, что мы полагаем как точку или не хотим полагать как делимое далее, мы принимаем за одно; но каждое одно внешнего созерцания — как чистого, так и эмпирического — мы также можем рассматривать как многое. Каждое представление есть одно, если оно отграничено от другого представления; но в себе оно вновь может быть различено как многое». Так стирается всякое реальное ограничение понятия, и всё зависит от нашего понимания. Мы вновь задаём вопрос: какой смысл в том, чтобы какому-нибудь предмету прилагать свойство «один», если сообразно пониманию каждый предмет может как быть, так и не быть одним? Каким образом на столь расплывчатом понятии может основываться наука, которая снискала себе славу как раз самой большей определённости и точностью?

§ 31. Итак, хотя Бауман основывает понятие один на внутреннем созерцании****, в качестве признаков он в только что процитированном отрывке всё-таки называет неделимость и отграниченность. Если последнее соответствует действительности, то следовало бы ожидать, что также и животные могут иметь определённое представление единицы. Возможно ли, чтобы собака при взгляде на Луну имела о ней представление (пусть даже не столь определённое), которое мы обозначаем словом

* Встречаются обороты, которые этому, по видимости, противоречат, но при более тщательном рассмотрении обнаруживается, что добавлено понятийное слово или что «один» используется не как числительное, что хотя и утверждает не единичность, но единственность.

** *Baumann*, Op. cit., Bd. II, S. 2; Erdm. S. 8.

*** Op. cit., Bd. II, S. 669

**** Op. cit., Bd. II, S. 669.

«одна»? Вряд ли! И всё же она различает некоторые отдельные предметы. Другая собака, собственный хозяин, камень, с которым она играет, несомненно кажутся ей отграниченными, самодостаточными и нераздельными так же, как и нам. Правда, она будет замечать различие в том, обороняется ли она против нескольких собак или только против одной, но это то различие, которое Милль называет физическим. Дело собственно в следующем: осознаёт ли собака, пусть даже и смутно, общность, выражаемую нами словом «один», в случае, где она укушена одной большей собакой, и в случае, где она преследует одну кошку. Мне кажется это неправдоподобным. Отсюда я делаю вывод, что идея единицы не даётся разуму каждым объектом извне и каждой идеей изнутри, как считает Локк*, но познаётся нами посредством более высоких духовных сил, которые отличают нас от животных. Тогда такие свойства вещей, как неделимость и отграниченность, которые животные замечают столь же хорошо, как и мы, не могут быть существенными для нашего понятия.

§ 32. И всё же определённую связь можно предполагать. Язык указывает на это тем, что «объединённый» производно от «один». Чем больше различия в предмете отступают по сравнению с отличием от окружающего, чем больше внутренние связи преобладают над связями с окружающим, тем более удобно понимать нечто как отдельный предмет. Итак, «объединённый» означает свойство, которое даёт повод к тому, чтобы нечто обособить в понимании от окружения и рассматривать само по себе. Так можно объяснить и то, когда французское «uni» означает «как раз» или «ровно». Сходным образом используется и слово «единство», когда говорят о политическом единстве страны, единстве произведения искусства**. Но в этом смысле «единица» соотносится не столько с «один», сколько с «объединённый» или «единный». Ибо, когда говорят, что Земля имеет одну Луну, этим хотят объяснить не отграниченность, самодостаточность и нераздельность Луны, но это говорят в противоположность тому, что имеет место у Венеры, Марса или Юпитера. В отношении отграниченности и нераздельности луны Юпитера, пожалуй, могут помериться с нашей и, в этом смысле, являются такими же единными.

* *Вайтманн*, Op. cit., Bd. 1, S. 409. [Локк Дж. Указ. соч. Т. 1. С. 180.]

** Об истории слова «единица» ср.: *Eucken*, Geschichte der philosophischen Terminologie, S. 122–123, S. 136, S. 220.

§ 33. Некоторыми авторами неделимость усиливается до нераздельности. Г. Кёпп* называет каждую неразложимую и самодостаточную вещь (независимо от того, воспринимается она чувственно или же нет) единичным, а подлежащее счёту единичное — одним, где «один» очевидно используется в смысле «единица». Между тем, и Бауман — обосновывая своё мнение, что внешние вещи не представляют строгих единиц, тем, что мы свободны трактовать их как многое, — тоже выдаёт неразложимость за признак строгой единицы. Усиливая внутреннюю связность до безусловной, очевидно хотят получить признак единицы, который независим от произвольного понимания. Эта попытка не удаётся, потому что тогда почти не остаётся ничего такого, что можно было бы называть единицей и считать. По этой причине тотчас же начинается отступление, и как признак устанавливается не сама неразложимость, но становление мыслимым в качестве неразложимого. В результате же вновь приходят к неустойчивому пониманию. И разве есть какой-то выигрыш в том, чтобы мыслить вещи иными, нежели они есть? Наоборот, из ложного допущения можно вывести ложные заключения! Но если из неразложимости не хотят делать выводов, тогда какая от неё польза? Если без ущерба для понятия от строгости можно, и даже нужно, как-то отказаться, к чему тогда эта строгость? Но, возможно, разложимость лишь не нужно мыслить. Как будто отсутствием мысли можно было бы чего-то достигнуть! Но бывают случаи, где совершенно невозможно избежать того, чтобы мыслить разложимость, где даже вывод основывается на составленности единицы (например, в задаче: Один день включает 24 часа. Сколько часов включают 3 дня?).

Равны ли единицы друг другу?

§ 34. Таким образом, любая попытка объяснить свойство «один» терпит неудачу, и мы, пожалуй, должны отказаться от того, чтобы в обозначении вещи как единицы видеть более точное определение. Мы снова возвращаемся к нашему вопросу: почему вещи называют единицами, если «единица» есть лишь другое имя вещи, если все вещи являются единицами или могут пониматься как таковые? В качестве основания Э. Шрёдер** за-

* G. Köpp, Schularithmetik, Eisenach, 1867, S. 5, 6.

** Op. cit., S. 5.

даёт равенство, приписываемое объектам счёта. Прежде всего, не видно, почему столь же успешно на это не могут указывать слова «вещь» и «предмет». Затем спрашивается: зачем предметам счёта приписывается равенство? Оно им только приписывается или они действительно являются равными? Два предмета, во всяком случае, *никогда* не являются совершенно равными. С другой стороны, можно, пожалуй, почти всегда разыскать отношение, в котором два предмета совпадают. Если, вопреки истине, мы не захотим приписывать вещам равенство, идущее далее, чем им соответствует, мы вновь приходим к произвольному пониманию. В самом деле, многие авторы называют единицы равными без ограничения. Гоббс говорит*: «В абсолютном смысле, число в математике подразумевает под собой равные единицы, из которых оно построено». Юм** считает, что составные части количества и числа вполне однородны. Тома*** называет индивидуум множества единицей и говорит: «Единицы равны друг другу». С таким же успехом или даже более оправданно можно сказать, что индивиды множества отличаются друг от друга. Ну и что же означает это мнимое равенство для числа? Свойства, которыми отличаются вещи, для их числа суть нечто безразличное и чуждое. Поэтому от них хотят избавиться. Но таким способом ничего не достигнуть. Если, как требует Тома, «абстрагироваться от своеобразия индивидов множества объектов» или «при рассмотрении отдельных вещей отказаться от признаков, посредством которых различаются вещи», то, как считает Липшиц, остаётся не «понятие числа рассматриваемых вещей», но получается общее понятие, под которое подпадает каждая вещь. Сами вещи вследствие этого не теряют своих особенностей. Если, например, при рассмотрении белого и чёрного котов я откажусь от отличающих их друг от друга свойств, то, положим, получу понятие «кот». Если теперь я подвожу их обоих под это понятие и, положим, называю единицами, то белый всё равно всегда остаётся белым, а чёрный — чёрным. Следовательно, благодаря тому, что я не мыслю цвет или не собираюсь делать выводы из их различия, коты не становятся бесцветными и остаются столь же различными, какими и были.

* *Vaumann*, Op.cit, Bd. I, S. 242.

** *Vaumann*, Op. cit., Bd. II, S. 568. [Юм Д. Сочинения. В 2 т. Т. 2. — М.: Мысль, 1996. — С. 141.]

*** Op. cit., S. I.

Правда, понятие «кот», получившееся в результате абстракции, больше не содержит особенностей, но как раз поэтому оно и является лишь понятием.

§ 35. Голыми способами оперирования с понятием не удаётся сделать различные вещи равными; но если и удаётся, то получают уже не вещи, но только одну вещь; ибо, как говорит Декарт*, число (лучше: множественное число) возникает из различия вещей. Шрёдер правильно утверждает**: «Требование пересчитать вещи можно установить разумным способом только там, где имеются такие предметы, которые чётко отличимы друг от друга (например, разъединены пространственно и временно) и кажутся отграниченными в сравнении друг с другом». В самом деле, сильное сходство иногда затрудняет, к примеру, пересчёт прутьев решётки. С особой резкостью в этом смысле выражается У. Стенли Джевонс***: «Число есть только другое название для различия. Точное тождество есть единство, а от различия возникает множественность». И далее (с. 154): «Часто говорилось, что единицы суть единицы в том отношении, что они совершенно подобны одна другой; но хотя они могут быть подобны в некоторых отношениях, однако они должны быть и различны по крайней мере в одном пункте, иначе они не были бы способны к множественности. Если бы три монеты были подобны до такой степени, что занимали бы одно и то же пространство в одно и то же время, то они были бы не тремя монетами, но одной монетой».

§ 36. Но вскоре обнаруживается, что взгляд на различие единиц открывает новые затруднения. Джевонс объясняет: «Единица есть какой-нибудь предмет, который может быть отличаем от всякого другого предмета, рассматриваемого как единица в той же задаче». Здесь единица объясняется посредством самой себя, и дополнение «который может быть отличаем от любого другого объекта» не содержит более точного определения, поскольку оно разумеется само собой. Мы называем предмет другим только лишь постольку, поскольку можем отличить его от первого предмета. Далее Джевонс говорит****: «Когда я пишу символ 5, я собственно разумею

* *Vaughtan*, Op. cit., Vd. I, S. 103. [Декарт Р. Сочинения. В 2 т. Т. 1. — М.: Мысль, 1989. — С. 338.]

** Op. cit., S. 3.

*** Там же. С. 153.

**** Там же. С. 154.

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

и всегда ясно подразумевается, что каждая из этих единиц отлична от всех других. Собственно, я должен был бы обозначить их так:

$$1^I + 1^{II} + 1^{III} + 1^{IIII} + 1^{IIII}».$$

Конечно, обозначать их различно, если они различны, необходимо, ведь иначе возникнет величайшая путаница. Если уже различное место, на котором появляется однёрка, должно означать различие, то необходимо представить правило, не допускающее исключений, поскольку в противном случае никогда не было бы известно, должно $1 + 1$ обозначать 2 или же 1. Тогда нужно было бы отвергнуть равенство $1 = 1$, и мы пребывали бы в затруднении, никогда не будучи в состоянии обозначить одну и ту же вещь два раза. Очевидно, этого не происходит. Однако если различным вещам хотят придать различные знаки, то непонятно, почему всё-таки придерживаться одних и тех же составных частей, и не лучше ли вместо

$$1^I + 1^{II} + 1^{III} + 1^{IIII} + 1^{IIII}$$

написать

$$a + b + c + d + e.$$

Теперь равенство сразу же утрачивается, и указание не использует известного сходства. Таким образом, однёрка ускользает из рук; мы остаёмся с предметами со всеми их особенностями. Знаки типа

$$1^I, 1^{II}, 1^{III}$$

суть красноречивое выражение затруднения: нам нужно равенство, отсюда 1; нам нужно различие, отсюда индексы, которые, к сожалению, лишь снова устраняют равенство.

§ 37. У других авторов мы сталкиваемся с теми же самыми трудностями. Локк говорит*: «Повторением идеи единицы и соединением её с другой единицей мы образуем из них одну

* *Ваштани*, Op. cit., Bd. I, S. 409–411. [Локк Дж. Указ. соч. Т. 1. С. 257.]

совокупную идею, обозначенную именем “два”. И кто может так действовать и идти таким образом вперёд, всё время прибавляя по одной единице к последней полученной им совокупной идее числа, и даёт ей имя, тот может считать». Лейбниц* определяет число как 1 и 1 и 1 или как единицы. Хессе говорит**: «Если можно составить представление о единице, которая в алгебре выражается числом 1, ... то можно мыслить и вторую равноправную единицу и далее тем же способом. Объединение второй с первой в некоторое целое даёт число 2».

Здесь нужно обратить внимание на отношение, в котором находятся друг к другу значения слов «единица» и «однёрка». Лейбниц под единицей понимает понятие, под которое подпадает один и один и один; как он также говорит: «Абстракция от один есть единица». Локк и Хессе, по-видимому, употребляют единицу и один равнозначно. В сущности, и Лейбниц, пожалуй, поступает так же; поскольку, называя каждый отдельный предмет, который подпадает под понятие единицы, одним, он между тем обозначает этим словом не отдельный предмет, но понятие, под которое он подпадает.

§ 38. Чтобы не возникала путаница, было бы всё-таки хорошо строго сохранять различие между единицей и однёркой. Говорится «[die] число один» и определённым артиклем указывается на определённый, отдельный предмет научного исследования. Не существует различных чисел один, но только одно. В 1 мы обладаем собственным именем, которое, как таковое, столь же не способно к множественному числу, как «Фридрих Великий» или «химический элемент золото». То, что 1 пишут без различающих штрихов, — не случайность и не неточность способа обозначения. Равенство

$$3 - 2 = 1$$

Ст. Джевонс передал бы приблизительно так:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'.$$

Но что было бы результатом

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')?$$

* *Baumann*, Op. cit., Bd. II, S. 3.

** *Hesse*, *Vier Species*, S. 2.

Во всяком случае, не $1'$. Из этого вытекает, что, согласно его пониманию, существуют не только различные однёрки, но также различные двойки и т. д.; ибо $1'' + 1'''$ нельзя заменить на $1'''' + 1'''''$. Отсюда совершенно ясно видно, что число не является совокупностью вещей. Арифметика была бы упразднена, если бы вместо однёрки, которая всегда одна и та же, хотели бы ввести различные вещи, пусть даже и в столь сходных знаках. Ведь без ошибки последние не могли бы быть равными. Нельзя же предполагать, что самой глубокой потребностью арифметики является ошибочная запись. Поэтому невозможно 1 считать знаком различных вещей, типа Исландии, Альдебарана, Солона и т. п. Бессмыслица становится наиболее очевидной, если задуматься над случаем, когда уравнение имеет три корня, а именно 2, 5 и 4. Если вместо 3 записать теперь, как поступает Джевонс,

$$1' + 1'' + 1'''$$

и если под $1'$, $1''$, $1'''$ понимать единицы, а, стало быть, согласно Джевонсу, имеющиеся в наличии предметы мысли, причём $1'$ означало бы здесь 2, $1''$ — 5, а $1'''$ — 4, то разве не понятнее было бы вместо $1' + 1'' + 1'''$ записать

$$2 + 5 + 4?$$

Множественное число возможно только у понятийных слов. Поэтому, если говорят о «единицах», то это слово нужно использовать не равнозначно с «один», но как понятийное слово. Если «единица» означает «подлежащий счёту предмет», то число нельзя определять как единицы. Если под «единицей» понимается понятие, охватывающее собой однёрку и только её, то множественное число не имеет смысла и снова невозможно определять с Лейбницем число как единицы или как 1 и 1 и 1. Если «и» употребляется так, как в «Бунзен и Кирхгоф», то 1 и 1 и 1 есть не 3, но 1; так же золото и золото и золото никогда не являются чем-то иным, нежели золотом. Знак плюса в

$$1 + 1 + 1 = 3,$$

таким образом, должен пониматься иначе, чем «и», которое помогает обозначать совокупность или «коллективную идею».

§ 39. Сообразно этому мы стоим перед следующим затруднением: если мы хотим, чтобы число возникало посредством ох-

ватывания различных предметов, то получаем совокупность, в которой содержатся предметы как раз с теми свойствами, которыми они различаются, а это — не число. С другой стороны, если мы хотим образовать число посредством охватывания равного, то оно постоянно сливается в одно, и мы никогда не придём к множественности.

Если, используя 1, мы обозначаем каждый подлежащий счёту предмет, то это ошибка, поскольку сохраняем один и тот же знак для различного. Если же мы снабжаем 1 разными штрихами, то оно не пригодно для арифметики.

Слово «единица» отлично подходит для того, чтобы запутаться в этом затруднении; и это основание (пусть даже и неосознанное) того, почему предпочтительнее слова «предмет» и «вещь». Прежде всего, единицами называют подлежащие счёту вещи и, причём, сохраняют их право на различие; тогда охватывание, собиране, объединение, соединение (или, если угодно, воспользуйтесь другим названием) переходит в понятие арифметического сложения, а понятийное слово «единица» незаметно превращается в собственное имя «один». Вследствие этого тогда и получается равенство. Если к букве *t* я присоединяю букву *p*, а затем букву *i*, то каждый легко видит, что это не является числом 3. Но если я подвожу *t*, *p* и *i* под понятие «единица» и теперь для «*t* и *p* и *i*» говорю «единица и единица и единица» или «1 и 1 и 1», то благодаря этому легко поверить, что имеется 3. Затруднение столь хорошо скрывается за словом «единица», что лишь у немногих вызывает подозрение.

Здесь можно предоставить слово Миллю, по праву порицающему искусные манипуляции языком; ибо в данном случае имеет место внешнее проявление мыслительного процесса, но лишь иллюзия такового. В самом деле, здесь возникает впечатление, как если бы словам, опустошённым от мысли, придавалась некоторая таинственная сила, поскольку различное должно становиться равным просто благодаря тому, что называется единицей.

Попытки преодолеть затруднение

§ 40. Теперь мы рассмотрим отдельные пояснения, которые представляются попытками преодолеть данное затруднение, даже если они и не всегда делаются с ясным осознанием этого намерения.

Прежде всего, можно призвать на помощь свойство пространства и времени. А именно, пространственная точка, прямая или плоскость, конгруэнтные тела, сегменты поверхностей или линий, рассмотренные сами по себе, не различаются совершенно; они различаются лишь в совместном бытии как составные части одного общего созерцания. Таким образом, равенство здесь объединено с различимостью. То же самое имеет силу и для времени. Пожалуй, поэтому Гоббс полагает*, что равенство единиц едва ли может мыслиться иначе, чем устанавливаемое посредством деления континуума. Тома говорит**: «Множества индивидов или единиц представляют в пространстве и считают их последовательно, для чего требуется время; при любой абстракции в качестве отличительного признака единиц всё-таки остаётся их различное положение в пространстве и их различное следование друг за другом во времени».

Против такого способа понимания, прежде всего, возникает сомнение, что тогда исчисляемое ограничивалось бы пространственным и временным. Уже Лейбниц*** отклонял мнение схоластов, что число образуется голым делением континуума и не может применяться к бестелесным вещам. Бауман**** подчёркивает независимость числа от времени. Понятие единицы также мыслимо вне времени. Ст. Джевонс говорит*****: «Три монеты суть три монеты, будем ли мы считать их последовательно или смотреть на все три одновременно. Во многих случаях не может быть основанием различия ни пространство, ни время, и тогда нам может служить для этого только чистое качество. Мы можем различать вес, плотность и твёрдость золота, как три качества, хотя ни одно из них не существует прежде или после другого и не находится ни в пространстве, ни во времени. Каждое средство различения может быть источником множественности». Я добавляю: Если подлежащие счёту предметы не следуют друг за другом в действительности, но лишь пересчитываются друг за другом, то время не может быть основанием различия. Ибо, чтобы их можно было пересчитывать друг за другом, мы уже должны иметь различные характеристики. Для счёта время есть лишь психологическое

* *Baumann*, Op. cit., Bd. II, S. 242.

** *Elementare Theorie der analyt. Functionen*, S. 1.

*** *Baumann*, Op. cit., Bd. II, S. 2.

**** *Baumann*, Op. cit., Bd. II, S. 668.

***** Там же. С. 154.

требование, но оно не имеет дела с понятием числа. Если непространственные и невременные предметы представлять посредством пространственных или временных точек, то это, вероятно, может быть удобным для выполнения вычислений; но при этом принципиально предполагается применимость понятия числа к непространственному и невременному.

§ 41. Но если мы отказываемся от всех различных характеристик кроме пространственных и временных, разве цель объединения различного и равенство действительно достигаются? Нет! Мы ни на шаг не приблизились к решению. Больше или меньше сходство предметов не относится к делу, если они, в конце концов, всё-таки должны удерживаться отдельно друг от друга.

Отдельные точки, линии и т. п. я могу обозначить здесь как 1 в столь же малой степени, как при геометрическом рассмотрении именовать их одной и той же буквой *A*; ибо здесь, как и там, необходимо, чтобы они различались. Только в себе, если не обращать внимания на их пространственные отношения, точки равны друг другу. Но если я должен их охватить, то обязан рассматривать их в их совместном пространственном бытии, в противном случае они неминуемо сольются в одно. Точки в своей общности представляются, пожалуй, какой-нибудь фигурой, типа созвездия, или как-то расположенными на прямой; равные сегменты, соприкасаясь конечными точками, могут образовывать единый сегмент или располагаться отдельно друг от друга. Возникающее таким способом образование может быть совершенно различным для одного и того же числа. Таким образом, здесь мы также имели бы различные пятёрки, шестёрки и т. д. Временные точки разделяются посредством коротких или длинных, равных или неравных промежутков времени. Всё это суть обстоятельства, которые совершенно не имеют дела с числом самим по себе. Всюду вмешивается нечто особенное, далеко превосходящее числом в его общности. Даже отдельный момент имеет нечто своеобразное, то, чем он, скажем, отличается от пространственной точки и что не входит в понятие числа.

§ 42. Выход, заменить пространственное и временное расположение более общим понятием ряда, также не ведёт к цели; ибо место в ряду не может быть основанием различения предметов, поскольку последние, чтобы их можно было упорядочить в ряд, уже должны быть как-то различены. Такое расположение всегда предполагает отношения между предметами, будут ли они

пространственными, временными, логическими, связанными с интервалами тонов или какими-то ещё, посредством которых можно переходить от одного предмета к другому и которые необходимо объединены с этими различиями.

Когда Ханкель* мыслит или полагает предмет 1 раз, 2 раза, 3 раза, то это выглядит как попытка соединить различимость с равенством того, что подлежит счёту. Но также сразу видно, что это не более удачный ход; ибо представления или созерцания одного и того же предмета, чтобы не сливаться в одно, должны как-то различаться. Я также полагаю, что оправдано говорить о 45 миллионах немцев без того, чтобы прежде мыслить или полагать одного обыкновенного немца 45 миллионов раз; последнее было бы несколько затруднительно.

§ 43. Вероятно, для того, чтобы избежать затруднений, возникающих, если, следуя Джевонсу, каждым знаком 1 обозначать подлежащий счёту предмет, Э. Шрёдер хочет, чтобы посредством 1 предмет только замещался. Как следствие, он объясняет только числовой знак, а не число. А именно, он говорит**: «Теперь, чтобы получить знак, способный выражать, сколько имеется в наличии таких единиц***, внимание вдруг направляется на каждый из них поочередно и замещает их штрихом 1 (один, однёрка); эти однёрки располагаются в строчку рядом друг с другом, но соединяются они знаком + (плюс), ведь в противном случае 111, например, согласно обычному обозначению чисел, прочитывалось бы как сто одиннадцать. Таким способом получается такой знак, как

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

эту структуру можно описать говоря:

«Натуральное число есть сумма однёрок».

Отсюда видно, что для Шрёдера число есть знак. То, что выражается посредством этих знаков, то, что я до сих пор называл числом, он, как известно, предполагает словами «сколько имеется в наличии таких единиц». Также и под словом «один» он понимает знак 1, а не его значение. Знак + нужен ему, прежде всего,

* Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 1.

** Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, S. 5 ff.

*** Подлежащих счёту предметов.

только как внешнее средство связи, не имеющее собственного содержания; сложение объясняется лишь позднее. Более кратко он, пожалуй, мог бы выразиться так: Знаков 1 записывается друг подле друга столько же, сколько имеется подлежащих счёту предметов, и связываются они посредством знака +. Ноль выражался бы тем, что не записывается ничего.

§ 44. Чтобы не относить к числам различные обозначения вещей, Ст. Джевонс говорит*: «Нетрудно составить себе понятие о природе численного отвращения. Оно состоит в отвращении характера различия, дающего происхождение множественности и удержании его как простого факта. Когда я говорю *три человека*, то мне нет надобности сейчас же характеризовать знаки, по которым каждый может быть отличён от другого. Эти знаки должны существовать, если это действительно три человека, а не один и тот же человек, и, говоря о них как о нескольких, я предполагаю существование требуемых различий. Таким образом, отвращённое число есть *пустая форма различия*».

Как это понимать? Можно или абстрагироваться от различающихся свойств вещей прежде, чем объединять их в единое целое, или прежде образовать целое, а затем абстрагироваться от вида различия. При первом способе мы вовсе не пришли бы к различению вещей, а стало быть, не могли бы также удержать наличие различного; Джевонс, видимо, имеет в виду второй способ. Но я не думаю, что таким образом мы получили бы число 10 000, поскольку мы не в состоянии постигать столь много различного одновременно и удерживать его в наличии; ибо для числа рассмотрение перехода от одного к другому всегда недостаточно. Мы, правда, считаем во времени, но вследствие этого мы получаем не число, но лишь определяем число того, что сосчитали. Впрочем, указание на способ абстрагирования определением не является.

Что же следует мыслить под «пустой формой различия»? Скажем, под предложением типа

«*a* отлично от *b*»,

где *a* и *b* остаются неопределёнными? Было ли бы это предложение, скажем, числом 2? Равнозначно ли предложение

«Земля имеет два полюса»

* Там же. С. 155.

предложению

«Северный полюс отличен от Южного полюса?»

Очевидно, нет. Второе предложение может существовать без первого, а первое без второго. Тогда для числа 1000 в

$$\frac{1000.999}{1.2}$$

1.2

мы имели бы предложения, выражающие различие.

То, что говорит Джевонс, совершенно не проходит с 0 и 1. От чего, собственно, нужно абстрагироваться, чтобы, например, от Луны перейти к числу 1? Абстрагированием, пожалуй, получают понятия: спутник Земли, спутник планеты, не испускающее собственного света небесное тело, тело, предмет; но 1 в этом ряду не встречается, ибо 1 не является понятием, под которое может подпадать Луна. У 0 даже вовсе не имеется предмета, от которого отталкиваются при абстракции. На это не возразишь, что 0 и 1 не являются числами в том же самом смысле, как 2 и 3! Число отвечает на вопрос «сколько?», и когда, например, спрашивают: «Сколько лун имеет эта планета?», то ответ 0 или 1 можно понять столь же хорошо, как 2 или 3, без того чтобы смысл вопроса стал иным. Правда, число 0 имеет нечто особенное, так же как и 1, но, в сущности, это имеет силу для любого целого числа; только чем больше число, тем всё меньше это бросается в глаза. Проводить здесь видовые различия — дело совершенно произвольное. То, что не проходит с 0 или 1, для понятия числа существенным быть не может.

Наконец, при предположении данного способа возникновения числа затруднение, на которое мы натакиваемся при рассмотрении обозначения

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

для 5, вовсе не уничтожается. Эта запись вполне согласуется с тем, что Джевонс говорит об образовании чисел посредством абстракции; штрихи вверху обозначают как раз то, что различие есть, но не указывают его вид. Однако простое существование различия, как мы видели, уже достаточно для того, чтобы, согласно пониманию Джевонса, породить различные однёрки,

двойки, тройки, что совершенно несовместимо со структурой арифметики.

Решение затруднения

§ 45. Теперь нам следует составить обзор прежних констатаций и вопросов, всё ещё остающихся без ответа!

Число не абстрагируется от вещей по типу цвета, веса, твёрдости и не является свойством вещей в том смысле, как эти последние. Всё ещё остаётся вопрос, к чему относится то, что высказывается посредством указания на число.

Число — не физично, но также и не субъективно, оно не является представлением.

Число не возникает прибавлением вещи к вещи. Также ничего в этом отношении не меняет и придание имени соответственно каждому прибавлению.

Выражения «многое», «множество», «множественность» из-за их неопределённости не годятся для объяснения числа.

При ссылке на один и единицу остаётся вопрос, каким образом ограничить произвол понимания, который, по-видимому, стирает всякое различие между одним и многим.

Отграниченность, нераздельность, неразложимость — бесполезные признаки для того, что мы выражаем словом «один».

Если единицами называют подлежащие счёту вещи, то утверждение о равенстве единиц безусловно ложно. То, что они, в определённом отношении, являются равными, хотя и верно, но не имеет никакой ценности. Если должны быть числа больше 1, то различие подлежащих счёту вещей даже необходимо.

Таким образом, кажется, что мы должны придать единицам два противоречащих свойства: равенство и различимость.

Между один и единицей нужно проводить различие. Слово «однёрка» как собственное имя предмета математического исследования неспособно к множественному числу. Стало быть, образовывать число объединением единиц бессмысленно. Знак плюса в $1 + 1 = 2$ не может обозначать такого объединения.

§ 46. Чтобы пролить свет на предмет, было бы хорошо рассмотреть число в контексте суждения, где проявляется его изначальный способ применения. Если при рассмотрении одного и того же внешнего явления я с одинаковой истинностью могу сказать: «Это — группа деревьев» и «Это — пять деревьев» или «Здесь находится четыре группы людей» и «Здесь находится 500 человек»,

то при этом изменяется не отдельное и не целое, не агломерат, а моё название. Но последнее есть лишь знак замены одного понятия другим. Вследствие этого как ответ на первый вопрос предыдущего параграфа нам больше подходит то, что указание на число содержит высказывание о понятии. Более всего это, пожалуй, ясно относительно числа 0. Если я говорю: «Венера имеет 0 лун», то здесь вовсе нет луны или агломерата лун, о которых можно было бы нечто высказать; однако благодаря этому понятию «луна Венеры» прилагается свойство, а именно, под него ничего не подпадает. Если я говорю: «Карету кайзера везут четыре лошади», то понятию «лошадь, везущая карету кайзера» я прилагаю число четыре.

Можно возразить, что понятие, как, например, «граждане германского государства», хотя его признаки и остаются неизменными, если бы указание на число высказывало о нём такое свойство, имело бы год от года изменяющееся свойство. На это можно ответить, что и предметы изменяют свои свойства, но последнее не препятствует тому, чтобы опознавать их как одни и те же. Однако здесь можно указать более точное основание. А именно, понятие «граждане германского государства» содержит время как изменяющуюся составную часть или, выражаясь математически, является функцией времени. Вместо «*a* есть гражданин германского государства» можно сказать: «*a* принадлежит германскому государству», а это как раз и указывает на текущий момент времени. Таким образом, нечто текучее содержится уже в самом понятии. С другой стороны, понятию «гражданин германского государства на начало 1883 года по берлинскому времени» навски соответствует одно и то же число.

§ 47. То, что указание на число выражает нечто фактически независимое от нашего понимания, может вызвать удивление лишь у того, кто считает понятие чем-то субъективным, равным представлению. Но этот взгляд ложен. Если, к примеру, мы подчиняем понятие тела понятию тяжести или понятие кита понятию млекопитающего, то этим мы утверждаем нечто объективное. Если бы понятие было субъективным, то подчинение одного понятия другому, как отношение между ними, также было бы чем-то субъективным, наподобие отношения между представлениями. Конечно, на первый взгляд кажется, что в предложении

«Все киты — млекопитающие»

речь идёт о животных, а не о понятиях; однако, если спросить, о каком животном тогда идёт речь, то какого-то отдельного предъявить нельзя. Если предположить, что кит имеется в наличии, то наше предложение о нём всё-таки не утверждает ничего. Из него нельзя вывести, что имеющееся в наличии животное является млекопитающим, без добавочного предложения, что это животное — кит, которого наше предложение не содержит. Говорить о предмете без того, чтобы его как-то обозначить или назвать, вообще невозможно. Однако слово «кит» не обозначает отдельного существа. Если ответить, что оно говорит, конечно, не об одном отдельном, определённом предмете, но, пожалуй, о неопределённом предмете, то я считаю «неопределённый предмет» лишь другим выражением для «понятие», хотя и худшим, более исполненным противоречий. Даже если наше предложение и можно оправдать наблюдением за отдельным животным, это ничего не доказывает относительно его содержания. Для вопроса, о чём оно, безразлично, истинно оно или нет, или на каком основании мы принимаем его за истинное. Итак, если понятие есть нечто объективное, то и высказывание о нём может содержать нечто фактическое.

§ 48. Возникающая прежде при некоторых примерах видимость того, что одному и тому же соответствуют различные числа, объясняется тем, что носителем числа при этом считаются предметы. Как только мы восстановим в своих правах истинного носителя, понятие, обнаруживается, что числа столь же взаимоисключающи, как и цвета в своей области.

Теперь мы также видим, каким образом приходят к тому, что число хотят получить, абстрагируясь от вещей. То, что получается вследствие этого, является понятием, в котором тогда обнаруживается число. Таким образом, абстракция действительно часто предшествует образованию суждения о числе. Смещение здесь точно такое же, как если бы хотели сказать, что понятие пожарной опасности образуется тогда, когда из блоков с дощатыми фронтонами строится жилой дом с соломенной крышей и дырявой печной трубой.

Собирательная сила понятия далеко превосходит объединяющую силу синтетической апперцепции. Посредством последней невозможно связать в единое целое граждан германского государства; но зато их можно подвести под понятие «гражданин германского государства» и сосчитать.

Теперь объяснима также и обширная применимость числа. Действительно загадочно, как одно и то же может одновременно

высказываться о внешнем и о внутреннем явлении, о пространственном и временном и о непространственном и невременном. Но в указании на число это совершенно не имеет места. Число приложимо только к понятию, под которое подводится внешнее и внутреннее, пространственное и временное, непространственное и невременное.

§ 49. Подтверждение нашей точки зрения мы находим у *Спинозы*, который говорит*: «Я отвечаю, что вещь может называться единой или единственной лишь по отношению к своему существованию, а не по отношению к своей сущности, ибо мы мыслим вещи под [категорией] числа только после того, как они подведены под некоторый общий род. Так, например, человек, держащий в руке сестерцию и империял, не подумает о числе “два”, если он не имеет возможности назвать их одним и тем же именем, а именно: “монетами” или “деньгами”, ибо в этом случае он может утверждать, что имеет две монеты, так как этим именем он обозначает как сестерцию, так и империял». Когда же он продолжает: «Отсюда явствует, что вещь может называться единой или единственной лишь тогда, когда мы можем представить себе другую вещь, которая (как сказано) сходна с нею», и когда он полагает, что Бога нельзя в собственном смысле назвать одним или единственным, поскольку о его сущности мы не можем образовать абстрактное понятие, то он ошибается в мнении, что понятие можно получить лишь непосредственно через абстракцию от большего числа предметов. Напротив, чтобы перейти к понятию, может быть, достаточно и признака; а тогда возможно, чтобы под него не подпадала вещь. Если бы этого не случалось, никогда нельзя было бы отрицать существование, а с этим и утверждение существования утрачивало бы своё содержание.

§ 50. Э. Шрёдер** подчёркивает, что, если можно было бы говорить только о частотности вещей, именем этих вещей всегда должно было бы быть *родовое имя*, общее понятийное слово (*notio communis*): «А именно, как только предмет учтён полностью — во всех его свойствах и отношениях — то в мире он, таковой, имеется в единственном числе, и более нет ничего ему равного. Имя предмета тогда носит характер *собственного имени* (*notio propria*) и предмет не может мыслиться как встречающийся повторно. Однако это имеет силу не только для конкрет-

* *Вайманн*, Op. cit., Bd. I, S. 169. [*Спиноза Б.* Избранные произведения. В 2 т. Т. 2. — М.: ГИПЛА, 1957. — С. 567.]

** Op. cit., S. 6.

ных предметов. Это имеет силу вообще для каждой вещи; её представление посредством абстракций также может прийтись к месту, если только это представление заключает в себе такой элемент, который достаточен для того, чтобы соответствующую вещь сделать полностью определённой...». Стать объектом счёта «для вещи возможно только постольку, поскольку при этом отказываются или *абстрагируются* от некоторых её собственных признаков и отношений, посредством которых она отличается от всех других вещей; тогда благодаря этому то, что прежде было именем вещи, становится понятием, применимым к большему числу вещей».

§ 51. То, что в этом пояснении истинно, облечено в такие корявые и вводящие в заблуждение выражения, что их требуется просматривать и распутывать. Прежде всего, неуместно общее понятийное слово называть именем вещи. Вследствие этого возникает видимость, как если бы число было свойством вещи. Общее понятийное слово обозначает как раз понятие. Оно действует как собственное имя только с определённым артиклем или указательным местоимением. Предмет не встречается повторно, но скорее большее число предметов подпадает под понятие. То, что понятие получается не только абстракцией от подпадающих под него вещей, указано уже Спинозой. Здесь я добавляю, что понятие не перестаёт быть понятием вследствие того, что под него подпадает единственная вещь, которая сообразно этому полностью им определена. Такому понятию (например, спутник Земли) как раз и соответствует число 1, являющееся числом в том же самом смысле, как 2 и 3. Относительно понятия всегда спрашивается, подпадает ли под него нечто и что именно подпадает. Относительно собственного имени такой вопрос бессмысленен. Нельзя обманываться тем, что язык применяет собственное имя (например, Луна) как понятийное слово, и наоборот; несмотря на это, различие сохраняется. Как только слово употребляется с неопределённым артиклем или во множественном числе, оно является понятийным словом.

§ 52. Дальнейшее подтверждение точки зрения, что число прилагается понятиям, можно найти в немецком словоупотреблении. Так, говорят *zehn Mann, vier Mark, drei Fass*. Здесь единственное число может указывать на то, что подразумевается понятие, а не вещь. Преимущество этого способа выражения особо проявляется при числе 0. Кроме того, язык, конечно, прилагает число предметам, а не понятиям: «число

бочек» говорится так же, как «вес бочек». Таким образом, речь на первый взгляд идёт о предметах, тогда как на самом деле нечто хотят высказать о понятии. Такое словоупотребление запутано. Выражение «четыре породистых коня» вызывает видимость, как если бы «четыре» ближе определяло понятие «породистый конь» подобно тому, как «породистый» ближе определяет понятие «конь». Однако «породистый» есть только некоторый признак; словом же «четыре» мы нечто высказываем о понятии.

§ 53. Под свойствами, которые высказываются о понятии, я понимаю не признаки, составляющие понятие. Последние суть свойства вещей, подпадающих под понятие, а не понятия. Так, «прямоугольность» не является свойством понятия «прямоугольный треугольник»; однако предложение, что не существует прямоугольного, прямолинейного, равностороннего треугольника, высказывает свойство понятия «прямоугольный, прямолинейный, равносторонний треугольник»; последнему прилагается число 0.

В этом отношении существование имеет сходство с числом. Ведь утверждение существования есть ничто иное, как отрицание числа ноль. Поскольку существование есть свойство понятия, онтологическое доказательство существования Бога не достигает своей цели. Однако единственность является признаком понятия «Бог» в столь же малой степени, как и существование. Единственность не может использоваться в определении данного понятия, так же как прочность, вместительность, удобства дома не могут применяться при его строительстве наряду с камнями, строительным раствором и брёвнами. Однако отсюда не следует делать общий вывод, что из понятия, т. е. из его признаков нельзя вывести, что нечто является свойством понятия. При определённых обстоятельствах это возможно, как по виду строительного камня иногда можно сделать вывод о долговечности постройки. Стало быть, утверждение, что от признаков понятия никогда нельзя заключить к единственности или существованию, было бы слишком сильным; только это никогда не может происходить так же непосредственно, как приписывание в качестве свойства предмету, подпадающему под понятие, признака этого понятия.

Ложным было бы также отрицать, что существование и единственность когда-либо могут быть признаками понятий. Они лишь не являются признаками *тех* понятий, которым их мож-

но приписать, следуя языку. Если, например, все понятия, под которые подпадает только один предмет, собрать под одним понятием, то единственность была бы признаком этого понятия. Под него, например, подпадало бы понятие «луна Земли», но не называемое так небесное тело. Таким образом, понятие можно подвести под более высокое, так сказать, понятие второго порядка. Однако это отношение нельзя смешивать с отношением подчинения.

§ 54. Теперь становится возможным удовлетворительное объяснение единицы. Э. Шрёдер на с. 7 своего уже упоминавшегося учебника говорит: «Такое родовое имя или понятие будет называться наименованием числа, образованного заданным способом, и составлять сущность его единицы».

Действительно, разве не самым подходящим было бы при ссылке на число, соответствующее понятию, называть последнее единицей? Тогда мы сможем придать смысл высказыванию о единице, что она обособлена от окружения и является нераздельной. Тогда понятие, которому прилагается число, определённым способом в общем отграничивает то, что под него подпадает. Понятие «буква слова Zahl» отграничивает Z от a , a от h и т. д. Понятие «слог слова Zahl» понимает это слово как целое и нераздельное в том смысле, что более нет никаких частей, подпадающих под понятие «слог слова Zahl». Не со всеми понятиями дело обстоит так. Например, мы можем то, что подпадает под понятие красного, разделить разнообразными способами, без того чтобы получившиеся части перестали под него подпадать. Такому понятию не соответствует конечное число. Предложение об отграниченности и нераздельности единицы можно, следовательно, выразить так:

Единица при ссылке на конечное число может быть лишь таким понятием, которое определённо отграничивает то, что под него подпадает, и не допускает никакого разделения.

Видно, однако, что нераздельность имеет здесь особое значение.

Теперь мы легко ответим на вопрос, каким образом равенство единиц примиримо с их различимостью. Слово «единица» используется здесь в двояком смысле. Равными единицы являются в объяснённом выше значении данного слова. В предложении: «Юпитер имеет четыре луны» единицей является «луна Юпитера». Под это понятие подпадает как I, так и II, так и III, так и IV. Стало быть, можно сказать, что единица, отно-

сящаяся к I, равна единице, относящейся к II, и т. д. Здесь у нас есть равенство. Если, однако, утверждается различимость единиц, то под этим понимается различимость пересчитываемых вещей.

IV. ПОНЯТИЕ ЧИСЛА

Каждое отдельное число является самостоятельным предметом

§ 55. После того как мы узнали, что указание на число содержит высказывание о понятии, мы можем попытаться дополнить лейбницевские определения отдельных чисел определением 0 и 1.

В первую очередь попытаемся объяснить следующее: Понятию соответствует число 0, когда под него не подпадает ни один предмет. Но здесь, как кажется, на место 0 можно подставить равнозначное «не»; поэтому предпочтительнее выглядит следующая формулировка: Понятию соответствует число 0, если при любом a предложение, что a не подпадает под это понятие, имеет всеобщее значение.

Сходным образом можно сказать: Понятию F соответствует число 1, если при любом a предложение, что a не подпадает под F , не имеет всеобщего значения и если из предложений

« a подпадает под F » и « b подпадает под F »

всегда следует, что a и b суть одно и то же.

Остаётся ещё дать общее объяснение переходу от некоторого числа к последующему. Испробуем следующую формулировку: Понятию F соответствует число $(n + 1)$, если существует предмет a , подпадающий под F , причём понятию «подпадающий под F , но не a » соответствует число n .

§ 56. После наших предшествующих результатов эти объяснения представляются столь естественными, что потребуются изложить, почему их нам может не хватать.

Прежде всего сомнение вызывает последнее определение; ибо взятый в точном значении смысл выражения «понятию G соответствует число n » нам так же не известен, как и смысл выражения «понятию F соответствует число $(n + 1)$ ». Конечно, мы можем при помощи данного и предпоследнего объяснения сказать, что означает

«Понятию F соответствует число $1 + 1$ »,

и затем, используя это, задать смысла выражения

«Понятию F соответствует число $1 + 1 + 1$ »

и т. д.; но мы никогда не сможем — если взять грубый пример — посредством наших определений решить, соответствует ли понятию число *Юлий Цезарь* или является числом этот знаменитый покоритель галлов или же нет. Кроме того, мы не можем с помощью наших предварительных объяснений доказать, что если понятию F соответствует число a и этому же понятию соответствует число b , то должно быть $a = b$. Стало быть, выражение «число, соответствующее понятию F », оправдать нельзя и, как следствие, равенство чисел доказать невозможно, поскольку мы вовсе не смогли схватить какого-то определённого числа. Только кажется, что мы объяснили 0 и 1; на самом же деле мы лишь зафиксировали смысл речевых оборотов

«число 0 соответствует»,

«число 1 соответствует»;

но это не позволяет различить в них 0 и 1 как самостоятельные, отождествляемые предметы.

§ 57. Здесь как раз уместно уделить более тщательное внимание нашему выражению, что указание на число содержит высказывание о понятии. В предложении «Понятию F соответствует число 0», если мы рассматриваем понятие F как реальный субъект, 0 является только частью предиката. Поэтому я избегаю называть числа, типа 0, 1, 2, свойствами понятия. Отдельное число выглядит именно как самостоятельный предмет благодаря тому, что оно образует только часть высказывания. Выше я уже уделял внимание тому, что говорят «[die] 1» и благодаря определённому артиклю 1 изображает собой предмет. Эта самостоятельность повсеместно обнаруживается в арифметике, например в равенстве $1 + 1 = 2$. Поскольку здесь мы стремимся схватить понятие числа так, чтобы оно было пригодно в науке, нас не должно беспокоить, что в обычном языке жизни число также проявляется атрибутивно. Последнего всегда можно избежать. Например, предложение «Юпитер имеет четыре луны» может быть преобразовано в «Число лун Юпитера есть четыре». Здесь «есть» не должно рассматривать-

ся в качестве простой связки, как в предположении «Небо есть голубое». Последнее обнаруживается в том, что можно сказать: «Число лун Юпитера есть четыре» или «есть число 4». Здесь «есть» имеет смысл «есть равное», «есть то же самое, как и». Стало быть, у нас есть равенство, утверждающее, что выражение «число лун Юпитера» обозначает тот же самый предмет, как и слово «четыре». В арифметике форма равенства является господствующей. Это соображение не оспоришь тем, что в слове «четыре» не содержится ничего о Юпитере или о луне. И в имени «Колумб» нет ничего об открытии или об Америке, и всё же и Колумбом, и открывателем Америки называют одного и того же человека.

§ 58. Могут возразить, что о предмете, который мы называем четыре или числом лун Юпитера, как о чём-то самостоятельном мы вовсе не можем составить представления*. Но в этом неповинна самостоятельность, приданная нами числу. Правда, легко поверить, что в представление о четырёх глазках на игральной кости входит нечто соответствующее слову «четыре»; но это заблуждение. Помыслите [eine] зелёный луг и попробуйте, изменится ли представление, если неопределённый артикль заменить числительным «один». Ничего сверх того не происходит, в то время как слову «зелёный» в представлении всё-таки нечто соответствует. Если представляют напечатанное слово «медь», при этом никакого числа непосредственно не мыслят. Если же задаются вопросом, из скольких букв оно состоит, то получается число 4; но представление благодаря этому не становится чем-то более определённым, а может оставаться совершенно неизменным. Понятие «буквы слова медь», добавленное сверх того, и есть как раз то, где мы обнаружили число. У глазков на игральной кости дело несколько скрыто, так как понятие удостоверяет себя нам сходством глазков столь непосредственно, что мы едва замечаем его вмешательство. Число нельзя представить ни как самостоятельный предмет, ни как свойство внешней вещи, так как оно не является ни чем-то чувственным, ни свойством внешней вещи. С числом 0 дело наиболее ясно. Тщетно пытаться представить себе 0 видимых звёзд. Можно, правда, представить небо совершенно затянутым облаками; но здесь нет ничего, что соответствовало бы слову «звезда» или 0. Представляют только ситуацию, которой может способствовать суждение: сейчас не видно ни одной звезды.

* «Представления» в смысле чего-то такого, что понимается как образ.

§ 59. Каждое слово, может быть, и вызывает в нас какое-нибудь представление, даже такое как «только»; но оно не обязательно соответствует содержанию слова; у разных людей представление может быть совершенно различным. И потом, представляется, пожалуй, вся ситуация, вызванная предложением, в которое входит это слово; или случается, что произнесённое слово вызывает в памяти написанное.

Последнее относится не только к отдельным частям речи. Пожалуй, не подлежит никакому сомнению, что у нас нет никакого представления о нашем расстоянии до Солнца. Так как даже если нам известно правило, как часто мы должны умножать масштаб, то нам всё равно не удаётся никакой попытки согласно этому правилу сконструировать образ, который тоже лишь до некоторой степени приближался бы к желаемому. Однако это не основание сомневаться в правильности расчётов, посредством которых устанавливается расстояние, и никоим образом не препятствует нам на существовании этого расстояния основывать дальнейшие выводы.

§ 60. Даже такую конкретную вещь, как Земля, мы не в состоянии представить такой, какой, как мы знаем, она является; вместо этого мы довольствуемся шаром среднего размера, который считается нами знаком Земли; однако нам известно, что одно весьма отлично от другого. Итак, хотя наше представление часто совершенно не отвечает желаемому, мы всё-таки судим с большой уверенностью о таком предмете, как Земля, даже когда рассматривается её размер.

Очень часто мышление выводит нас за рамки представимого, и при этом не утрачивается основание наших выводов. Даже если, как кажется, человеческое мышление невозможно без представлений, то его связь с тем, что имеется в виду, всё-таки может быть совершенно внешней, произвольной, конвенциональной.

Стало быть, непредставимость содержания слова не является основанием лишить его всякого значения или исключить из обихода. Противоположный взгляд, вероятно, возникает вследствие того, что мы рассматриваем слова изолированно, а потом спрашиваем об их значении, за которое затем принимаем представление. Таким образом, кажется, что слово, которому недостаёт соответствующего внутреннего образа, не имеет содержания. Необходимо, однако, всегда учитывать полное предложение. Только в нём слова обладают подлинным значением. Внутренний образ, который при этом как бы витает, не обязательно соответствует логически составной части суждения. Достаточно, если предло

жение имеет смысл как целое; благодаря этому своё содержание получают также и его части.

Мне кажется, это замечание пригодится для того, чтобы пролить свет и на иные трудные понятия, типа понятия бесконечно малых⁷⁷, и его радиус действия, пожалуй, не ограничивается математикой.

Самостоятельность, которой я воспользовался для числа, не должна означать, что числительное что-то обозначает вне контекста предложения, но этим я хотел только исключить его употребление в качестве предиката или атрибута, благодаря чему несколько изменяется его значение.

§ 61. Однако, быть может, на это возразят, что даже если Земля и на самом деле непредставима, она всё-таки является внешней вещью, занимающей определённое место; но где находится число 4? Его нет ни вне нас, ни в нас. В пространственном смысле последнее понимается правильно. Определение местонахождения числа 4 не имеет смысла; но отсюда вытекает только то, что оно не является пространственным предметом, а не то, что его вообще нет. Не каждый предмет находится где-то. Так же и наши представления⁷⁸ в этом смысле находятся не в нас (под кожей). Там находятся нервные узлы, кровяные тельца и тому подобное, но не представления. К ним неприменимы пространственные предикаты: одно представление не находится ни справа, ни слева от другого; в миллиметрах нельзя указать расстояния, отделяющие представления друг от друга. Если мы всё-таки говорим, что они в нас, то этим хотим обозначить их как субъективные.

Но хотя субъективное и не обладает местом, как возможно, чтобы объективное число 4 нигде не находилось? Игак, я утверждаю, что в этом вовсе нет противоречия. Оно действительно в точности одно и то же для каждого, кто имеет с ним дело; но это не связано с пространственностью. Не каждый объективный предмет обладает местом.

Чтобы получить понятие числа, необходимо установить смысла равенства чисел

§ 62. Каким образом нам может быть дано число, если мы не в состоянии обладать его представлением или содержанием?

⁷⁷ Дело в том, чтобы определить смысл равенства, типа $0,999... = 1$, разве не в том, чтобы указать расстояние, ограниченное двумя различными точками, длина которого 0.

⁷⁸ Это слово имеет здесь в сугубо психологическом, а не психофизическом,

Слова обозначают нечто только в контексте предложения. Стало быть, всё идёт к тому, чтобы объяснить смысл предложения, в которое входит числительное. Прежде всего, в этом всё ещё остаётся много произвольного. Но мы уже установили, что под числительными следует понимать самостоятельные предметы. С этим нам дана разновидность предложений, которые должны обладать смыслом, предложений, которые выражают отождествление. Если знак должен обозначать для нас предмет, то мы должны обладать критерием, который всюду решал бы, является ли b тем же самым, что и a , даже если не всегда в наших силах установить, применим ли этот критерий. В нашем случае мы должны объяснить смысл предложения:

«Число, соответствующее понятию F , является тем же самым, как и то, что соответствует понятию G »;

т. е. мы должны воспроизвести содержание этого предложения другим способом, не используя выражения

«число, соответствующее понятию F ».

Этим мы зададим общий критерий равенства чисел. После того как таким образом мы приобретём средство схватывать определённое число и отождествлять его как одно и то же, мы можем придать ему числительное в качестве собственного имени.

§ 63. Такое средство называл уже Юм: «Когда два числа составлены таким образом, что каждая единица в одном из них всегда отвечает каждой единице в другом, мы признаём их равными»*. В новейшее время среди математиков**, кажется, многократный отклик встретило мнение, что равенство чисел должно определяться с помощью однозначного соотношения. Но сразу же возникают логические сомнения и затруднения, мимо которых мы не имеем права пройти без проверки.

Отношение равенства встречается не только среди чисел. Отсюда, по-видимому, следует, что оно должно быть определено не только для данного случая. Можно было бы подумать, что понятие равенства установлено уже заранее и что затем из него и по-

* *Baumann*, Op. cit., Bd. II, S. 565. [Юм Д. Указ. соч. Т. I. С. 128.]

** Ср. *E. Schroeder*, Op. cit., S. 7–8; *E. Kossak*, Die Elemente der Arithmetik, Program des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums. Berlin, 1872, S. 16; *G. Cantor*, Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883.

нения числа должно получаться то, когда одно число равно другому, без того, чтобы сверх этого иметь надобность ещё в особом определении.

В противовес этому нужно заметить, что для нас понятие числа ещё не установлено, но прежде должно быть определено при помощи нашего объяснения. Наше намерение — образовать содержание суждения, которое могло бы пониматься как равенство, так, чтобы каждая сторона этого равенства являлась числом. Мы, стало быть, хотим объяснить равенство не для данного случая, но при помощи уже известного понятия равенства, получить то, что рассматривается как равное. Конечно, это кажется весьма необычным видом определения, которому логики ещё не уделяли достаточного внимания; но то, что он не так уж и неслыхан, можно показать на нескольких примерах.

§ 64. Суждение: «Прямая a параллельна прямой b », в знаках:

$$a \parallel b$$

также может пониматься как равенство. Если мы так поступаем, то получаем понятие направления и говорим: «Направление прямой a равно направлению прямой b ». Таким образом, мы заменили знак \parallel на более общий $=$ тем, что распределили особое содержание первого между a и b . Мы расчленили содержание иначе, нежели изначальный способ, и благодаря этому получили новое понятие. Конечно, часто дело воспринимается наоборот, и многие руководства определяют: Параллельные прямые суть те, что имеют равное направление. Предложение: «Когда две прямые параллельны третьей, то они параллельны друг другу» можно тогда очень удобно доказать ссылкой на предложение о равенстве, гласящем нечто подобное. Жаль только, что при этом истинное положение дел ставится на голову! Так, всё геометрическое, пожалуй, всё же должно первоначально созерцаться. Теперь я спрашиваю, каждый ли обладает созерцанием направления прямой? Что касается прямой — пожалуй! Но различают ли в созерцании этой прямой ещё и её направление? Вряд ли! Это понятие прежде открывается посредством умственной деятельности, привязанной к созерцанию. Зато представлением параллельных прямых обладают. Упомянутое доказательство проходит только благодаря предвосхищению основания, тем, что, употребляя слово «направление», предполагают доказываемое; ибо если предположение: «Когда две прямые параллельны третьей, то они параллельны друг другу» было бы неверным, то $a \parallel b$ нельзя было бы превратить в равенство.

Подобным образом из параллелизма плоскостей можно получить понятие, соответствующее понятию направления у прямых. Для этого я подобрал имя «положение». Из геометрического сходства образуется понятие контуров, так что, например, вместо «Оба треугольника сходны» говорят: «Оба треугольника имеют равные контуры» или «Контур одного треугольника равен контурам другого». Также и из коллинеарного сродства можно таким же образом получить понятие, для которого, пожалуй, всё ещё не достаёт названия.

§ 65. Теперь, чтобы, например, от параллелизма* перейти к понятию направления, мы испробуем следующее определение:

Предложение

«Прямая a параллельна прямой b »

равнозначно с

«Направление прямой a равно направлению прямой b ».

Это объяснение отклоняется от привычного, поскольку оно, как кажется, устанавливает уже известное отношение равенства, тогда как на самом деле оно должно вводить выражение «направление прямой a », которое выглядит второстепенным. Отсюда вытекает второе сомнение, не впутают ли нас такие установления в противоречие с известными законами равенства. Каковы же эти законы? Как аналитические истины они могут развиваться из самого понятия. Так, Лейбниц определяет:

«Eadem sunt, quorum unum potest substiti alteri salva veritate»**.

Данное объяснение для равенства я принимаю. Говорят ли «равные» или, как Лейбниц, «одни и те же», значения не имеет. «Одни и те же» на самом деле кажется совершенно совпадающим с «равные», только выражающим то или иное отношение; но можно принять такую манеру речи, где это различие пропадёт (например, если вместо «Расстояния равны по длине» говорить: «Дли-

* Я говорю здесь о параллелизме, чтобы мне удобнее было выражаться и легче быть понятым. Существенное этого обсуждения может быть легко перенесено на случай равенства чисел.

** Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis, Erdm., S. 94. [«Тождественные суть те, один из которых может быть поставлен вместо другого с сохранением истинности». Лейбниц Г. В. Указ. соч. Т. 3. С. 632.]

на расстоянии является равной» или «одной и той же», а вместо «Поверхности равны по цвету» говорить: «Цвет поверхностей является равным»). Таким образом мы и употребляли это слово в вышеприведённых примерах. На самом же деле в общей заменимости содержатся вообще все законы равенства.

Для оправдания нашей попытки определить направление прямой мы должны, стало быть, указать, что

направление a

всюду можно заменить на

направление b ,

если прямая a и прямая b параллельны. Последнее упрощается, прежде всего, благодаря тому, что о направлении прямой не известно никакого другого высказывания, кроме совпадения с направлением некой другой прямой. Стало быть, нам нужно в таком равенстве или содержании, включающем такие равенства в качестве составных частей*, лишь указать на заменимость. Все другие высказывания о направлениях должны быть прежде объяснены, и для этих определений мы можем установить правило, что заменимость направления одной прямой на направление прямой, ей параллельной, должна сохраняться.

§ 66. Но относительно нашей попытки определения возникает ещё и третье сомнение. В предложении

«[die] Направление a равно направлению b »

направление a выглядит как предмет**, и наши определения дают нам средство отождествления этого предмета, если бы он выступал в другом одеянии, скажем, как направление b . Но этого сред-

* В гипотетическом суждении равенство направлений может, например, встречаться как условие или следствие.

** На это указывает определённый артикль. Для меня понятие является возможным предикатом сингулярного, выразимого суждением содержания, а предмет — его возможным субъектом. Если в предложении

«Направление оси телескопа равно направлению оси Земли»

мы рассматриваем направление оси телескопа как субъект, то предикатом является «равно направлению оси Земли». Последнее является понятием. Но направление оси Земли является только частью предиката; оно также является предметом, так как может быть преобразовано в субъект.

ства недостаточно для всех случаев. Сообразно с ним нельзя, к примеру, решить, являются ли Англия и направление оси Земли одним и тем же. Да простят нам этот кажущийся бессмысленным пример! Естественно, никто не смешивает Англию с направлением оси Земли; но это — не заслуга нашего объяснения. Последнее ничего не говорит о том, подтверждается предложение

«Направление a равно q »

или же отрицается, если само q не дано в форме «направление b ». Нам недостаёт понятия направления; если бы оно у нас имелось, мы могли бы это установить; если q — не направление, то наше предложение должно отрицаться; если q — направление, то решает прежнее объяснение. Итак, в первую очередь следует объяснить:

q является направлением, если существует прямая b , направлением которой является q .

Однако теперь ясно, что мы вращаемся по кругу. Чтобы это объяснение можно было применить в каждом случае, мы уже должны знать, подтверждается или отрицается предложение

« q равно направлению b ».

§ 67. Если хотят сказать, что q является направлением, когда оно вводится посредством определения, о котором говорилось выше, то способ, которым вводится предмет q , должен трактоваться как его свойство, чем он не является. Определение предмета как таковое собственно ничего о нём не утверждает, но устанавливает значение знака. После того как это случилось, оно преобразуется в суждение, в котором речь идёт о предмете, но теперь оно уже более его не вводит и находится на одном уровне с другими высказываниями о нём. Если избирается этот ход, необходимо предполагать, что предмет можно задать лишь единственным способом; ибо, в противном случае, из того, что q не вводится посредством нашего определения, не следовало бы, что оно не может быть таким образом введено. Все равенства получались бы тогда из того, что то, что задано одним и тем же способом, должно признаваться за одно и то же. Но это так очевидно и так неплототворно, что об этом не стоит и говорить. Отсюда в самом деле нельзя извлечь никакого следствия, которое отличалось бы от

каждой посылки. Разносторонние и важные применения равенств, напротив, основываются на том, что нечто можно отождествить, несмотря на то, что это нечто задаётся различными способами.

§ 68. Поскольку таким образом мы не можем получить точно ограниченного понятия направления и на том же самом основании точно ограниченного понятия числа, мы испробуем другой путь. Если прямая a параллельна прямой b , то объём понятия «прямая, параллельная прямой a » равен объёму понятия «прямая, параллельная прямой b »; и наоборот, если объём названных понятий равен, то a параллельна b . Стало быть, мы попробуем объяснить следующее:

Направление прямой a есть объём понятия «параллельна прямой a »;

Контуры треугольника d есть объём понятия «подобен треугольнику d ».

Если мы хотим применить это к нашему случаю, то должны на место прямой или треугольника подставить понятие, а на место параллелизма или подобия — возможность взаимно однозначного соотнесения предметов, подпадающих под одно и под другое понятие. Краткости ради, если имеется эта возможность, я буду называть понятие F и понятие G *равночисленными*, но должен просить, чтобы данное слово рассматривалось как произвольно выбранный способ обозначения, чьё значение заимствовано не языковым подбором, но данным установлением.

Итак, я определяю:

Число, соответствующее понятию F , есть объём* понятия «равночисленно понятию F ».

* Я полагаю, что вместо «объём понятия» можно было бы сказать просто «понятие». Однако возможно двойное возражение:

1. Это находится в противоречии с моим прежним утверждением, что отдельное число является предметом, на что указывает определённый артикль в выражениях типа «[die] два» и невозможность говорить об однёрках, двойках и т. п. во множественном числе, а также благодаря тому, что число составляет только часть предиката указания на число;
2. Могут быть понятия равного объёма, без того чтобы совпадать.

Правда, теперь я держусь мнения, что оба эти возражения возможно было бы устранить; но здесь это может далеко увести. Я полагаю известным, что представляет собой объём понятия.

§ 69. То, что это объяснение подходит, поначалу, пожалуй, едва ли очевидно. Разве под объёмом понятий не мыслится нечто иное? То, что под этим понимается, становится ясным из изначальных высказываний, которые можно сделать об объёмах понятий. Они следующие:

1. равенство;
2. один шире, чем другой.

Итак, предложение

Объём понятия «равночисленно понятию F » равен объёму понятия «равночисленно понятию G »

всегда истинно тогда и только тогда, когда и предложение

«Понятию F соответствует то же самое число, как и понятию G »

является истинным. Стало быть, здесь имеется полное согласие. Правда, не говорят, что одно число шире другого, в том смысле, в котором объём одного понятия шире, чем объём другого; однако не случается также и того, чтобы

объём понятия «равночисленно понятию F »

был шире, чем

объём понятия «равночисленно понятию G »;

но все понятия, равночисленные G , также равночисленны и F , таким же образом и наоборот, все понятия, равночисленные F , равночисленны G . Данное «шире», естественно, не совпадает с «больше», которое встречается у чисел.

Разумеется, все ещё допустим случай, когда объём понятия «равночисленно понятию F » более или менее широк, нежели объём другого понятия, который тогда, согласно нашему объяснению, не может быть числом; и не принято называть число более или менее широким, нежели объём понятия; но и тому, чтобы принять такую манеру речи — если бы подобное когда-нибудь произошло, — также ничего не препятствует.

Дополнение и проверка нашего определения

§ 70. Определения оказываются пригодными благодаря их плодотворности. Те из них, которые с таким же успехом могут отсутствовать без того, чтобы в процедуре доказательства открывались пробелы, должны отбрасываться как совершенно ничего не стоящие.

Нам, стало быть, следует попробовать, допустимо ли произвести из нашего объяснения числа, соответствующего понятию F , известное свойство чисел? Здесь мы довольствуемся самым простым.

Для этого необходимо всё ещё как-то точнее схватить равночисленность. Мы объяснили её с помощью взаимно однозначного соотнесения, и сейчас нужно изложить то, как я хочу понимать данное выражение, так как в этом легко можно предположить нечто созерцаемое.

Рассмотрим следующий пример. Если официант хочет быть уверен, что он положил на стол ножей столько же, сколько тарелок, ему нет надобности считать каждый из них; если только он справа от каждой тарелки рядом положил нож, тогда каждый нож на столе находится рядом справа от тарелки. Тарелки и ножи взаимно однозначно соотнесены друг с другом, и притом в равном соотношении местоположений. Если мы в предложении

« a находится рядом справа от A »

для a и A мыслим подставленными всё новые и новые предметы, остающаяся при этом неизменной часть содержания составляет сущность отношения. Это следует обобщить!

Обособив a и b в выразимом суждении содержания, в котором речь идёт о предмете a и предмете b , мы, таким образом, сохранили оставшееся понятие отношения, которое согласно этому двояким способом нуждается в дополнении. Если в предложении

«Земля по массе больше, чем Луна»

мы обособим «Земля», то сохраним понятие «по массе больше, чем Луна». Если мы, напротив, обособим предмет «Луна», то получим понятие «по массе меньше, чем Земля». Но если мы одно-

временно обособим и то, и другое, то обратно останемся с понятием отношения, которое само по себе одно имеет столь же мало смысла, как и обыкновенное понятие: оно всегда требует дополнения для выразимого суждением содержания. Но это может произойти различными способами; вместо «Земля» и «Луна» я могу, например, поставить «Солнце» и «Земля» и способствовать обособлению как раз благодаря этому.

Отдельная пара соотнесённых предметов относится — можно сказать как субъекты — к понятию отношения, подобно тому как отдельный предмет относится к понятию, под которое он подпадает. Субъект здесь является составным. Иногда, когда отношение обратимо, это к тому же выражается в языке, как в предложении «Пелей и Фетис были родителями Ахилла»*. В сравнении с последним содержание предложения «Земля больше, чем Луна» так преобразовать возможно не вполне, потому что «и» всегда указывает на определённую уравниность. Но это к делу не относится.

Понятие отношения как простое, стало быть, принадлежит чистой логике. Здесь учитывается не особое содержание отношения, но только логическая форма. И что бы о ней ни утверждалось, истинность этого является аналитической и известной *a priori*. Для понятий отношения это имеет силу, как и для других.

Подобно тому как

«*a* подпадает под понятие *F*»

является общей формой выражаемого суждением содержания, имеющего дело с предметом *a*, так и

«*a* находится в отношении ϕ к *b*»

можно считать общей формой выражаемого суждением содержания, имеющего дело с предметом *a* и предметом *b*.

§ 71. Теперь, если каждый предмет, подпадающий под понятие *F*, находится в отношении ϕ к предмету, подпадающему под понятие *G*, и если к каждому предмету, подпадающему под *G*, в отношении ϕ находится предмет, подпадающий под *F*, то предметы, подпадающие под *F* и *G*, соотнесены друг с другом посредством отношения ϕ .

* Данный случай нельзя путать с тем, где «и» только кажется субъектом, а на самом деле связывает два предложения.

Всё ещё можно спросить, что означает выражение

«Каждый предмет, подпадающий под F , находится в отношении ϕ к предмету, подпадающему под G »,

если предмет вовсе не подпадает под F . Под этим я понимаю:
Оба предложения

« a подпадает под F »

и

« a не находится в отношении ϕ к предмету, подпадающему под G »,

не могут сосуществовать друг с другом при любом значении a ; тогда или первое, или второе, или оба являются ложными. Отсюда получается, что «каждый предмет, подпадающий под F , находится в отношении ϕ к предмету, подпадающему под G », потому как, если нет предмета подпадающего под F , тогда первое предложение

« a подпадает под F »

должно всегда отрицаться, при любом a .

Также

«К каждому предмету, подпадающему под G , в отношении ϕ находится предмет, подпадающий под F »

означает, что оба предложения

« a подпадает под G »

и

«Предмет, подпадающий под F , не находится в отношении ϕ к a »

не могут сосуществовать друг с другом, при любом a .

§ 72. Итак, мы видели, когда предметы, подпадающие под понятия F и G , соотнесены друг с другом посредством отношения ϕ .

Здесь это соотнесение должно быть взаимно однозначным. Под этим я понимаю, что имеют силу оба следующих предложения:

1. Если d находится в отношении ϕ к a и если d находится в отношении ϕ к e , тогда a всегда есть одно и то же с e , при любых d, a и e ;
2. Если d находится в отношении ϕ к a и если b находится в отношении ϕ к a , тогда d всегда есть одно и то же с b , при любых d, b и a .

Этим мы свели взаимно однозначное соотнесение к чисто логическим обстоятельствам и теперь можем дать следующее определение:

Выражение

«Понятие F равночисленно понятию G »

равнозначно выражению

«Существует отношение ϕ , которое взаимно однозначно соотносит предметы, подпадающие под понятие F , с предметами, подпадающими под понятие G ».

Я повторю:

Число, соответствующее понятию F , есть объём понятия «равночисленно понятию F »,

и добавляю:

Выражение

« n есть число»

равнозначно выражению

«Существует понятие такое, что n есть соответствующее ему число».

Понятие числа, таким образом, объяснено; но, по-видимому, само через себя, однако всё-таки без изъяна, поскольку уже объяснено «число, соответствующее понятию F ».

§ 73. Теперь мы хотим сразу же показать, что число, соответствующее понятию F , равно числу, соответствующему понятию G ,

если понятие F и понятие G равночисленны. Конечно, последнее звучит тавтологично, но это не так, ведь значение слова «равночисленно» получено не подбором, но из объяснения, данного выше.

Согласно нашему определению, необходимо показать, что если понятие F равночисленно понятию G , то объём понятия «равночисленно понятию F » такой же, как объём понятия «равночисленно понятию G ». Другими словами, нужно доказать, что согласно этому предположению значение всеобщности имеют предложения:

Если понятие H равночисленно понятию F , то оно также равночисленно понятию G ;

и

Если понятие H равночисленно понятию G , то оно также равночисленно понятию F .

Из первого предложения вытекает, что существует отношение, которое взаимно однозначно соотносит предмет, подпадающий под понятие H , с предметом, подпадающим под понятие G , если существует отношение ϕ , которое взаимно однозначно соотносит предмет, подпадающий под понятие F , с предметом, подпадающим под понятие G , и если существует отношение ψ , которое взаимно однозначно соотносит предмет, подпадающий под понятие H , с предметом, подпадающим под понятие F . Следующее расположение букв сделало бы это наглядным:

$$H \psi F \phi G.$$

Фактически, такое отношение может быть задано; оно присутствует в содержании

«Существует предмет, к которому в отношении ψ находится c и который находится в отношении ϕ к b »,

если мы обособим в нём c и b (рассматривая их как пункты отношения). Можно показать, что это отношение является взаимно однозначным и что оно соотносит предметы, подпадающие под понятие H , с предметами, подпадающими под понятие G .

Сходным образом может быть доказано и другое предложение*. Это указание, надеюсь, в достаточной степени позволило объяснить, что здесь мы не нуждались в том, чтобы заимствовать основание доказательства у созерцания, и что с нашими определениями можно что-то делать.

§ 74. Теперь мы можем перейти к объяснению отдельных чисел.

Поскольку под понятие «неравное себе» ничто не подпадает, я объясняю:

0 — это число, соответствующее понятию «не равное себе».

Быть может, то, что я говорю здесь о понятии, сочтут шокирующим. Быть может, возразят, что в этом содержится противоречие, и упомянут старых знакомых, деревянное железо и круглый квадрат. Ныне я полагаю, что они вовсе не так плохи, как их подают. Правда, от них нет никакой пользы; но они также не могут принести и вреда, если только не предполагать, что под них нечто подпадает; а при голом употреблении понятий этого всё же не происходит. То, что понятие содержит противоречие, не всегда очевидно до такой степени, что исследования не требуется; для исследования же понятие необходимо прежде иметь и трактовать логически так же, как и всё другое. Всё, что со стороны логики и для строгости доказательства можно требовать от понятия, это его точные границы, чтобы для каждого предмета было определено, подпадает он под него или нет. Этому требованию всецело удовлетворяют понятия, содержащие противоречия, типа «не равное себе»; ибо для каждого предмета известно, что он под таковое не подпадает**.

* А равно и обратное ему: Если число, соответствующее понятию F , является тем же самым, что и число, соответствующее понятию G , то понятие F и понятие G равночисленны.

** С точки зрения понятия, под которое подпадает предмет, весьма различается то, что представляет собой определение этого предмета. К примеру, выражение « $\frac{1}{2}$ самая большая дробь» не имеет содержания, поскольку определённый артикль заявляет претензию на указание определённого предмета. Напротив, понятие «дробь меньше 1, причём такая, что нет дроби меньше 1, превосходящей её по величине» вовсе не вызывает сомнений, и для возможности доказательства того, что такой дроби нет, это понятие даже нужно, хотя оно и содержит противоречие. Но если посредством этого понятия хотят определить предмет, под него подпадающий, конечно необходимо прежде показать две вещи:

1. что под это понятие подпадает некий предмет;
2. что под него подпадает лишь единственный предмет.

Я использую слово «понятие» таким способом, чтобы

« a подпадает под понятие»

представляло собой общую форму выразимого суждением содержания, в котором речь идёт о предмете a и которое сохраняло бы выразимость суждением, независимо от того, что подставляется вместо a . И в этом смысле

« a подпадает под понятие “не равно себе”»

равнозначно с

« a не равно себе»

или

« a не равно a ».

Я могу принять за определение 0 любое другое понятие, под которое ничего не подпадает. Но дело в том, что мне нужно выбрать такое понятие, которое может быть доказано чисто логически; и для этого «не равно себе» представляется удобным. Причём для «равное» я признаю приведённое выше объяснение Лейбница, являющееся чисто логическим.

§ 75. Теперь с помощью прежних установлений должно быть возможным доказательство того, что каждое понятие, под которое ничего не подпадает, равночисленно с каждым понятием, под которое не подпадает ничего, и только с такими понятиями; отсюда следует, что 0 — это число, соответствующее такому понятию, и что предметы не подпадают под понятие, если соответствующее ему число есть 0.

Если мы предполагаем, что ни один предмет не подпадает ни под понятие F , ни под понятие G , то нам, чтобы доказать равночисленность, необходимо отношение ϕ , для которого имеют силу предложения:

Каждый предмет, подпадающий под F , находится в отношении ϕ к каждому предмету, подпадающему под G ; к каждому предмету, подпадающему под G , в отношении ϕ находится предмет, подпадающий под F .

После того, что прежде говорилось о значении этих выражений, каждое отношение, по нашему предположению, выполняет эти условия, а, стало быть, также и равенство, которое сверх того является взаимно однозначным; поскольку для него действительны оба требуемых выше для этого предложения.

Если, напротив, под G подпадает предмет, например a , в то время как под F не подпадает ни один, то друг с другом сосуществуют два предложения

« a подпадает под G »

и

«не подпадающий под F предмет находится к a в отношении ϕ »

для любого отношения ϕ , так как первое оправдывается первым предположением, а второе — вторым. То есть, если предмет, подпадающий под F , не существует, то не существует также и такого предмета, который находится к a в каком-нибудь отношении. Стало быть, не существует отношения, которое согласно нашему объяснению соотносит предметы, подпадающие под F , с предметами, подпадающими под G , и согласно этому понятия F и G неравночисленны.

§ 76. Теперь я хочу объяснить отношение, в котором находятся друг к другу по два смежных члена натурального ряда чисел. Предложение:

«Понятие F и подпадающий под него предмет x существуют таким способом, что n — это число, соответствующее понятию F , и что m — это число, соответствующее понятию “подпадающий под F , но не равный x ”»

равнозначно с

«В натуральном ряду чисел n следует непосредственно за m ».

Я избегаю выражения « n — это [die] число, идущее следом за m », поскольку для оправдания определённого артикля прежде должны быть доказаны два предложения*. На том же самом ос-

* См. примечание к § 74.

новании я ещё не говорю здесь « $n = m + 1$ »; так как благодаря знаку равенства ($m + 1$) также характеризуется как предмет.

§ 77. Чтобы теперь перейти к числу 1, мы должны сразу же показать, что существует нечто такое, что в натуральном ряду чисел следует непосредственно за 0.

Мы рассмотрим понятие — или, если угодно, предикат — «равно 0»! Под него подпадает 0. Напротив, под понятие «равно 0, но не равно 0» не подпадает никакой предмет, так что 0 — это число, которое принадлежит данному понятию. Таким образом, у нас есть понятие «равно 0» и некий предмет 0, под него подпадающий; отсюда имеет силу следующее:

Число, соответствующее понятию «равно 0», равно числу, соответствующему понятию «равно 0»;

0 — это число, соответствующее понятию «равно 0, но не равно 0».

Стало быть, согласно нашему объяснению, число, соответствующее понятию «равно 0», в натуральном ряду чисел непосредственно следует за 0.

Если теперь мы определяем:

1 — это число, соответствующее понятию «равное 0»,

то данное предложение можно выразить так:

В натуральном ряду чисел 1 следует непосредственно за 0.

Пожалуй, нелишне заметить, что определение 1, к его объективному оправданию, предполагалось вне наблюдаемого факта*; ибо в возможность определения легко впутать необходимость выполнения известных субъективных условий, а кроме них и то, что возбуждают в нас чувственные восприятия**. Оно всё равно может соответствовать, без того чтобы производные предложения оставались бы априорными. К таковым условиям относится, например, то, чтобы кровь — по крайней мере, насколько мы знаем, — в достаточном изобилии и подходящего качества циркулировала в мозге, но истинность нашего последнего предложения от этого не зависит; оно имеет место быть, даже если циркуляция

* Предложения без общности.

** Ср. В. Erdman, die Axiome der Geometrie, S. 164.

прекращается; и даже если все разумные существа когда-нибудь одновременно впадут в зимнюю спячку, оно не будет упразднено на столь же долгое время, но останется совершенно незатронутым. Быть истинным для предложения как раз не означает быть мыслимым.

§ 78. Здесь я предлагаю последовать нескольким предложениям, которые доказываются при помощи наших определений. Читатель легко увидит, как это можно осуществить.

1. Если в натуральном ряду чисел a следует непосредственно за 0, то $a = 1$.

2. Если 1 — это число, соответствующее понятию, то существует предмет, подпадающий под это понятие.

3. Если 1 — это число, соответствующее понятию F , тогда если предмет x подпадает под понятие F и если y подпадает под понятие F , то $x = y$; т. е. x есть одно и то же, что и y .

4. Если под понятие F подпадает предмет и если с тем, что x подпадает под понятие F и y подпадает под понятие F , всегда объединено $x = y$, то 1 — это число, соответствующее понятию F .

5. Отношение m к n , устанавливаемое посредством предложения:

«В натуральном ряду чисел n следует непосредственно за m »,

является взаимно однозначным.

Здесь ещё ничто не говорит о том, что для каждого числа существует другое число, которое следует непосредственно за ним или за которым оно непосредственно следует в ряду чисел.

6. В натуральном ряду чисел каждое число, кроме 0, непосредственно следует за неким числом.

§ 79. Для доказательства того, что в натуральном ряду чисел за каждым числом (n) непосредственно следует число, необходимо предъявить понятие, которому соответствует предыдущее число. В качестве такового мы выбираем:

«принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n »,

что сразу требует объяснения.

Прежде я воспроизведу другими словами определение последовательности в ряду, данное мною в *Шрифте понятий*.

Предложение

«Если каждый предмет, к которому в отношении ϕ находится x , подпадает под понятие F , и если из того, что d подпадает под понятие F , при любом d , всегда следует, что каждый предмет, к которому d находится в отношении ϕ , подпадает под понятие F , то u подпадает под понятие F , каким бы ни было понятие F »

равнозначно с

« u следует в ϕ -ряду за x »

и с

« x идёт в ϕ -ряду за u ».

§ 80. К этому нелишними были бы несколько замечаний. Так как отношение ϕ остаётся неопределённым, то ряд необязательно мыслить в форме пространственного или временного расположения, хотя этот случай не исключается.

Пожалуй, для большей естественности можно принять другое объяснение, к примеру: если, отправляясь от x , мы всегда переносим внимание с одного предмета на другой, к которому он находится в отношении ϕ , и если таким образом можно, наконец, достичь u , то говорят, что u следует за x в ϕ -ряду.

Последнее помогает понять суть дела, а не определение. Достигнем ли мы u при смещении нашего внимания, может зависеть от разных сопутствующих субъективных обстоятельств, например, от находящегося в нашем распоряжении времени или от нашего знания вещей. Следует ли u за x в ϕ -ряду, не имеет ничего общего с нашим вниманием и с условиями его поступательного движения, но представляет собой нечто объективное; так же и зелёный лист отражает определённые световые лучи независимо от того, попадают они мне в глаза, вызывая ощущения, или же нет; так же крупницы соли растворимы в воде, независимо от того, бросаю я их в воду, наблюдая за этим процессом, или же нет, они растворимы даже в том случае, когда я вообще не имею возможности провести данный опыт.

Благодаря моему объяснению суть дела переводится из области субъективных возможностей в область объективной опре-

делённости. В самом деле, то, что из одних предложений следует другое, есть нечто объективное, не зависящее от законов движения нашего внимания, и безразлично, осуществляем ли мы вывод на самом деле. Здесь у нас есть признак, который всегда разрешает данный вопрос там, где он может быть поставлен; и если этот признак наличествует, мы можем вынести суждение, даже если в отдельных случаях нам мешают внешние затруднения. Для сути дела это собственно безразлично.

Для уверенности, что предмет следует за неким членом, нам не всегда нужно просматривать все промежуточные члены от начального до данного предмета. Если, например, дано, что в ϕ -ряду b следует за a , а c следует за b , то мы можем согласно нашему объяснению заключить, что c следует за a , без того, чтобы знать промежуточные члены.

Благодаря этому только и возможно определение следования в ряду, а способ вывода от n к $(n + 1)$, который кажется свойственным математике, приводится к всеобщим логическим законам.

§ 81. Если теперь как отношение ϕ у нас есть отношение, в котором m установлено к n предложением

«В натуральном ряду чисел n непосредственно следует за m »,

то вместо « ϕ -ряд» мы говорим «натуральный ряд чисел».

Далее я определяю:
предложение

« u следует за x в ϕ -ряду, или же u есть то же самое, что и x »

равнозначно с

« u принадлежит ϕ -ряду, начинающемуся с x »

и с

« x принадлежит ϕ -ряду, оканчивающемуся на u ».

Согласно этому, a принадлежит натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n , если в натуральном ряду чисел n следует за a или равно a^* .

* Если n не является числом, само n только принадлежит натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n . Пусть вас не шокирует это выражение!

§ 82. Теперь следует показать, что — при уже заданном условии — число, соответствующее понятию

«принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n »,

следует непосредственно за n в натуральном ряду чисел. Благодаря этому тогда доказывается, что существует число, которое в натуральном ряду чисел следует непосредственно за n , и что не существует конечного члена данного ряда. Очевидно, что данное предложение нельзя установить эмпирическим способом или посредством индукции.

Демонстрация здесь самого доказательства увела бы нас далеко. Можно только кратко указать его ход. Следует доказать:

1. Если в ряду натуральных чисел a непосредственно следует за d и если для d имеет силу то, что:

число, соответствующее понятию

«принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на d »,

непосредственно следует за d в натуральном ряду чисел,

то для a также имеет силу:

число, соответствующее понятию

«принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на a »,

непосредственно следует за a в натуральном ряду чисел.

2. Следует доказать, что для 0 имеет силу то, что в только что приведённых предложениях говорилось о d и a , и затем вывести, что это также имеет силу и для n , если n принадлежит натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0. Данный способ вывода есть такое применение определения, переданное мной выражением

« u следует за x в натуральном ряду чисел»,

что общие выражения о d и a следует принимать в качестве понятия F о 0 и n .

§ 83. Чтобы доказать предложение 1 предыдущего §, мы должны показать, что a — это число, соответствующее понятию «принадлежащий натуральному ряду чисел, заканчивающемуся на a , но

не равное a ». А для этого вновь следует доказать, что данное понятие имеет объём, равный объёму понятия «принадлежащий натуральному ряду чисел, заканчивающемуся на d ». Для этого требуется предложение о том, что предмет, принадлежащий натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0, не может в натуральном ряду чисел следовать за самим собой. Это также должно доказываться с помощью нашего определения последовательности в ряду, как указано выше*.

Таким образом, это вынуждает нас к предложению, что число, соответствующее понятию

«принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n »,

непосредственно следует за n в натуральном ряду чисел, добавив условие, что n принадлежит натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0. Для этого употребителен более краткий способ выражения, который я теперь и объясняю:

Предложение

« n принадлежит натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0»

равнозначно с

« n есть конечное число».

Тогда указанное предложение мы можем выразить так: конечное число в натуральном ряду чисел не следует за самим собой.

Бесконечные числа

§ 84. Конечным противостоят бесконечные числа. Число, соответствующее понятию «конечное число», является бесконеч-

* Э. Шрёдер (Op. cit., S. 63), по-видимому, рассматривает это предложение как следствие иначе мыслимого способа обозначения. Здесь также даёт о себе знать недостаток, причиняющий вред всему его изображению сути дела. Этот недостаток связан с тем, что по-настоящему не известно, является ли число знаком и чем тогда является его значение или же оно как раз и есть это значение. Из того, что устанавливаются различные знаки, так чтобы один и тот же никогда не повторялся, всё же не следует, что эти знаки также обозначают различное.

ным. Обозначим его, скажем, так: ∞_1 . Если бы оно было конечным, то оно не могло бы следовать за самим собой в натуральном ряду чисел. Но можно показать, что с ∞_1 это происходит.

В числе ∞_1 , объяснённом таким образом, нет ничего сколько-нибудь таинственного или чудесного. «Число, соответствующее понятию F , есть ∞_1 » означает не более и не менее, чем: существует отношение, которое взаимно однозначно соотносит предметы, подпадающие под понятие F , с конечными числами. После наших объяснений это имеет совершенно ясный и однозначный смысл; этого достаточно, чтобы оправдать употребление знака ∞_1 и обеспечить ему значение. То, что мы не можем образовать для себя никакого представления о бесконечном числе, совершенно не важно, это же относится и к конечным числам. Наше число ∞_1 обладает, таким образом, чем-то столь же определённым, как и любое конечное число: оно отождествляется в качестве одного и того же и, несомненно, отличается от любого другого.

§ 85. Бесконечные числа не так давно ввёл Г. Кантор в своей замечательной работе*. Я всецело поддерживаю его в оценке мнения, которое за действительные вообще желает признавать только конечные числа. Чувственно воспринимаемыми и пространственными не являются ни они, ни дроби, ни отрицательные, ни иррациональные, ни комплексные числа; и если действительным называют то, что воздействует на чувства, или то, что как минимум имеет такое влияние, которое может иметь чувственное восприятие на приближённые или отдалённые последствия, то, конечно, эти числа не являются действительными. Но мы также вовсе не нуждаемся в таких восприятиях как основаниях доказательства наших теорем. Имя или знак, для введения которого нет логических возражений, мы можем безбоязненно использовать в наших исследованиях; таким образом, наше число ∞_1 столь же обоснованно, как два или три.

Правда, утверждая о согласии с Кантором, я всё же несколько отступаю от него в терминологии. Моё число он называет «мощность», в то время как его понятие** числа учитывает ссыл-

* G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.

** Данное выражение, по-видимому, может противоречить подчёркнутой ранее объективности понятия; но субъективным здесь является только название.

ку на упорядочивание. Конечные числа, разумеется, независимы от следования в ряду, иное дело бесконечно большие. Использование слова «число» и вопрос «сколько?» не содержат указания на определённое упорядочивание. Число у Кантора скорее отвечает на вопрос: «Какой член последовательности является крайним?». Поэтому, мне кажется, моё название лучше согласуется со словоупотреблением. Если расширять значение слова, то следовало бы обратить внимание на то, чтобы возможно большее количество общих предложений сохраняло его значение и особенно таких основополагающих, которые устанавливают для чисел независимость от следования в ряду. Нам совершенно не было надобности в расширении, поскольку наше понятие числа сразу объёмлет также и бесконечные числа.

§ 86. Чтобы получить своё бесконечное число, Кантор вводит понятие отношения следования в последовательности, которое отклоняется от моего «следования в ряду». Согласно ему, например, последовательность возникает, если конечные, положительные целые числа располагаются таким образом, чтобы нечётные числа сами по себе в своей естественной очерёдности, а также чётные числа в своём следовании друг за другом в дальнейшем устанавливались так, что каждое чётное число должно следовать за каждым нечётным. В этой последовательности, например, 0 следовал бы за 13. Но числа, непосредственно предшествующего 0, нет. Это как раз тот случай, который не может возникнуть при моём определении следования в ряду. Можно строго доказать без аксиомы, использующей созерцание, что если у следует за x в ϕ -ряду, существует предмет, который в этом ряду непосредственно предшествует y . Итак, мне кажется, что следованию в последовательности и числу у Кантора всё-таки недостаёт точных определений. Так, Кантор ссылается на какое-то таинственное «внутреннее созерцание», когда стремится добыть доказательство из определений, что, пожалуй, возможно. Ибо, я думаю, предвидимо, как можно было бы определить указанные понятия. Во всяком случае, посредством этих замечаний я совершенно не хочу подвергнуть нападкам их правомочность и плодотворность. Напротив, я приветствую в его исследованиях расширение науки, особенно потому, что благодаря им всё более торным становится чисто арифметический путь к бесконечно большим числам (мощностям).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§ 87. Надеюсь, в данном сочинении я сделал правдоподобным то, что арифметические законы являются аналитическими, а, следовательно, априорными суждениями. Сообразно этому, арифметика была бы лишь дальнейшим развитием логики, а каждое арифметическое предложение было бы логическим законом, хотя и производным. Применение арифметики к объяснению природы было бы логической обработкой наблюдаемых фактов*, счёт был бы выводением следствий. Законы чисел, чтобы быть применимыми к внешнему миру, не нуждаются, как полагает Бауман**, в испытании практикой; ибо во внешнем мире, в совокупности пространственного нет понятий, нет свойств понятий, нет чисел. Стало быть, законы чисел собственно не применимы к внешним вещам; они не являются законами природы. Они не утверждают связь между естественными явлениями, но утверждают таковую между суждениями; а к последним принадлежат и законы природы.

§ 88. Кант*** (вероятно, в результате более узкого определения понятия) недооценивал значение аналитических суждений, хотя, как кажется, ему чудилось более широкое понятие, которое используется здесь****. Если положить в основание его определение, деление суждений на аналитические и синтетические не является исчерпывающим. В данном случае он мыслит общеутвердительное суждение. Тогда, согласно определению, относительно понятия субъекта можно вести речь и спрашивать о том, содержится ли в нём понятие предиката. Но как быть, если субъект представляет собой единственный предмет или если имеют дело с суждением о существовании? Тогда в этом смысле и речи быть не может о понятии субъекта. Кант, по-видимому, думает определить понятие посредством заданных признаков; но такое образование понятий наименее продуктивно. Если мы окинем взглядом данные выше определения, то едва ли найдём образование понятий по этому способу. То же самое имеет силу и для действительно продуктивных определений в математике,

* Уже само наблюдение включает логическую деятельность.

** Op. cit., Bd. II, S. 670.

*** Op. cit., III. S. 39 u. ff. [Кант И. Указ. соч. Т. 3. С. 46.]

**** На с. 43 он говорит, что согласно закону противоречия синтетическое предложение можно осознать лишь тогда, когда предполагается другое синтетическое предложение. [Кант И. Указ. соч. Т. 3. С. 49.]

например непрерывности функции. Ведь у нас есть не ряд заданных признаков, но, я бы сказал, более интимная, более органичная связь определений. Различие можно сделать наглядным, используя геометрический образ. Если понятия (или их объёмы) изобразить на поверхности ограниченными областями, то понятиям, определённым посредством заданных признаков, соответствует область, для которой общими являются признаки всех областей; она окружена частями их границ. При таком определении, если говорить об образе, речь также идёт о том, чтобы уже заданные линии применить новым способом для ограничения области*. Но при этом не появляется ничего существенно нового. Более продуктивные определения понятий заключаются в том, чтобы указать линии границ, которые ещё совсем не были заданы. То, что из них можно вывести, обзревается не с самого начала; при этом не просто из сундука снова извлекается то, что там схоронили. Такие выводы расширяют наше знание, а поэтому их, следуя Канту, нужно считать синтетическими; и всё-таки их можно доказать чисто логически, и они к тому же аналитические. Действительно, они содержатся в определениях, но не как брёвна в доме, а как растения в семенах. Часто несколько определений используется для доказательства предложения, которое, таким образом, не содержится в них по отдельности и всё же вытекает из них всех в совокупности.

§ 89. Я должен также возразить на общее утверждение Канта, что без чувственности нам не были бы даны предметы. Ноль, один — суть предметы, которые не могут быть даны нам чувственно. Даже те, кто малые числа считает наглядными, всё же должны согласиться, что наглядно нам не могут быть даны числа большие, чем $(1000^{1000})^{1000}$, и что всё-таки мы о них кое-что знаем. Вероятно, Кант использует слово «предмет» в каком-то другом смысле; но тогда ноль, один, наше ∞_1 совершенно выпадают из его рассмотрения, поскольку они также не являются понятиями, и к тому же от понятий Кант требует**, чтобы им в созерцании прилагался предмет.

Для того чтобы меня не упрекнули в мелочных придирках к гению, которому нам следует лишь внимать с благодарным восхищением, я думаю, необходимо также подчеркнуть согласие, которое во многом преобладает. Если затрагивать только непосредственно

* Так же, если признаки связываются посредством «или».

** Op. cit., III, S. 82. [Кант И. Указ. соч. Т. 3. С. 90.]

лежащее на поверхности, я вижу большую заслугу Канта в том, что он провёл различие между синтетическими и аналитическими суждениями. Называя геометрические истины синтетическими и априорными, он раскрыл их подлинную сущность. И даже сейчас это заслуживает повторения, поскольку зачастую всё ещё не признаётся. Если Кант и заблуждался относительно арифметики, то для его заслуг, я думаю, это не существенный ущерб. Дело в том, что существуют синтетические суждения *a priori*; а встречаются ли они только в геометрии или также и в арифметике — менее значимо.

§ 90. Я не притязая на то, чтобы сделать аналитическую природу арифметических предложений более чем вероятной, поскольку всё равно всегда остаётся сомнение, можно ли вывести их доказательство совершенно из чисто логических законов, не вмешивается ли где-нибудь незаметно основание доказательства иного вида. Это сомнение полностью не устраняется даже указаниями, которые я добавил при доказательстве отдельных предложений; оно может быть снято лишь посредством лишённой пробелов цепи выводов, так чтобы не совершался шаг, который не согласуется с одним из немногих способов вывода, признанных за чисто логические. До сего времени, таким образом, едва ли было выведено хоть одно доказательство, поскольку математики довольствуются тем, чтобы каждый переход к новому суждению был очевидно правильным, не задаваясь вопросом о том, какова природа этой очевидности, является она логической или же относится к созерцанию. Такой шаг часто является весьма сложным и равноценен большему числу простых выводов, наряду с которыми может присутствовать нечто, вытекающее из созерцания. В математике продвигаются скачками, и отсюда возникает кажущееся исключительным богатство способов вывода; поскольку чем значительнее скачок, тем более многочисленные комбинации могут заменять простые выводы и аксиомы созерцания. Тем не менее, такой переход нам часто непосредственно очевиден, без того чтобы осознавались промежуточные ступени; и поскольку он не изображается как опознанный логический способ вывода, мы готовы тотчас же принять очевидность за созерцаемую, а открываемую истину за синтетическую, даже тогда, когда сфера значимости, очевидно, выходит за рамки созерцаемого.

На этом пути невозможно, основываясь на созерцании, чисто развести синтетическое и аналитическое. Не удаётся также пол-

ностью сопоставить аксиомы созерцания с уверенностью, что каждое математическое доказательство можно выводить из этих аксиом согласно логическим законам.

§ 91. Следовательно, требование избежать скачка в выведении следствий неопровержимо. То, что его так трудно удовлетворить, связано с продолжительностью пошагового выполнения этой процедуры. Каждое сколько-нибудь усложнённое доказательство угрожает принять чудовищные размеры. К этому нужно добавить, что чрезмерно большое многообразие логических форм, выраженных в языке, затрудняет ограничение круга способов вывода, достаточных во всех случаях и легко обозримых.

Чтобы уменьшить этот недостаток, я придумал свой шрифт понятий. Он должен добиваться большей краткости и наглядности выражений и обходиться согласно способу вычисления меньшим числом твёрдо установленных форм, так чтобы не допускать перехода, который не согласуется с правилом, установленным раз и навсегда*. Тогда основание доказательства не может вкрасься незамеченным. Так без заимствования аксиомы у созерцания я доказал предложение**, которое на первый взгляд может быть принято за синтетическое и которое я хочу здесь выразить следующим образом:

Если отношение каждого члена ряда к последующему является однозначным и если m и y в этом ряду следуют за x , то у в этом ряду либо предшествует m , либо совпадает с m , либо следует за m .

Из этого доказательства можно усмотреть, что предложения, расширяющие наше знание, могут включать аналитические суждения***.

* Однако он должен выражать не только логическую форму, по типу способа обозначения, принятого Булем, содержание также было бы уместно.

** *Begriffsschrift*, Halle a/S., 1879, S. 86, формула 133.

*** Это доказательство всегда находят слишком пространным. Данный недостаток, по-видимому, более чем уравнивает почти безусловная уверенность в отсутствии ошибки или пробела. Тогда моей целью было всё свести к наименее возможному числу по возможности наиболее простых логических законов. Следуя этому, я применял лишь единственный способ вывода. Однако уже тогда в предисловии (S. VII) я указывал, что при дальнейшем применении рекомендуется допускать большее число способов вывода. Последнее может произойти без того, чтобы обязательно была нарушена цепь выводов, и таким образом может быть достигнуто значительное сокращение.

Другие числа

§ 92. До сих пор мы ограничивали наше рассмотрение кардинальными числами. Теперь нам всё-таки следует обратить внимание на другие виды чисел и попытаться использовать для более широкой области то, что мы узнали относительно более узкой!

Проясняя смысл вопроса о возможности некоторых чисел, Ханкель говорит*:

«Сегодня число более не является вещью, субстанцией, самостоятельно существующей вне мыслящего субъекта и афицирующих его объектов, самостоятельным принципом, по типу того, как это было у пифагорейцев. Поэтому вопрос о существовании может указывать только на познающего субъекта или познаваемые объекты, отношения которых изображают числа. В математике за невозможное в строгом смысле считается только то, что невозможно логически, т. е. то, что самопротиворечиво. То, что нельзя допускать числа, невозможные в этом смысле, в доказательстве не нуждается. Но если соответствующие числа логически возможны, их понятие определяется ясно и точно, а стало быть, без противоречия, то этот вопрос зависит только от того, существует ли в области реального или в созерцании действительного, актуального их субстрат, существуют ли объекты, которые приводят к явлению числа, а стало быть, интеллигибельные отношения определённого вида».

§ 93. Относительно первого предложения можно сомневаться, существуют ли числа, согласно Ханкелю, в мыслящем субъекте, в афицирующих последнего объектах или же и в тех, и в других. Во всяком случае в пространственном смысле они не находятся ни вне, ни внутри ни субъекта, ни объекта. Однако они, пожалуй, вне субъекта в том смысле, что они не являются субъективными. Тогда как каждый чувствует лишь свою боль, своё желание, свой голод, может иметь своё впечатление звука и цвета, число для многих может быть общим предметом, а именно, у всех оно в точности одно и то же, а не более или менее сходное внутреннее состояние у разных людей. Когда Ханкель хочет отнести вопрос о существовании к мыслящему субъекту, этим он, по-видимому, сводит его к психологическому вопросу,

* Op. cit., S. 6–7.

каковым тот никоим образом не является. Математика не занимается природой нашей души, и ответ на какой угодно психологический вопрос должен быть для неё совершенно безразличным.

§ 94. Необходимо оспорить также и то, что математики считают за невозможное только самопротиворечивое. Понятие допустимо, даже если его признаки содержат противоречие; нельзя лишь допускать, что под него нечто подпадает. Но из того, что понятие не содержит противоречия, ещё нельзя вывести, что под него нечто подпадает. Как вообще можно доказать, что понятие не содержит противоречия? Это ясно отнюдь не всегда; из того, что противоречия не видно, не следует, что его здесь нет, и ясность определения не даёт на это гарантий. Ханкель доказывает*, что поле комплексных чисел более высокого порядка, чем обычное, содержит противоречие, если подчиняется всем законам сложения и умножения. Этого не видно тотчас же, а как раз должно быть доказано. До того, как это произойдёт, кто-то всё же может, используя такое поле чисел, достичь замечательных результатов, обоснование которых было бы не хуже чем то, которое Ханкель даёт теории детерминант с помощью изменяемых чисел; ибо кто поручится за то, что в этом понятии также не содержится скрытое противоречие? И даже если таковое вообще можно исключить для сколь угодно многих изменяемых единиц, отсюда всё-таки не следует, что такие единицы существуют. А как раз это нам и нужно. В качестве примера возьмём теорему 18 из первой книги *Элементов* Евклида:

В любом треугольнике большей стороне противолежит больший угол.

Чтобы доказать это, на большей стороне AC Евклид откладывает сегмент AD , равный меньшей стороне AB и при этом ссылается на прежнюю конструкцию. Доказательство разрушилось бы само собой, если бы такой точки не было, но этого недостаточно, чтобы в понятии «точка на AC , расстояние которой от A равно расстоянию от B » не обнаруживалось противоречие. Теперь B соединяется с D . То, что такая прямая существует, — предложение, на которое также опирается доказательство.

§ 95. Отсутствие противоречия в понятии можно, пожалуй, объяснить лишь доказательством того, что под него нечто под-

* Op. cit., S. 106–107.

падает. Обратное было бы ошибкой. В эту ошибку впадает Ханкель, когда, ссылаясь на равенство $x + b = c$, говорит*:

«Очевидно, что, если $b > c$, то в ряду 1, 2, 3, ... не существует числа x , решающего данную задачу; вычитание тогда *невозможно*. Однако в этом случае ничто не мешает нам рассматривать разность $(c - b)$ как знак, который решает задачу и с которым нужно оперировать точно так же, как если бы он был кардинальным числом из ряда 1, 2, 3, ...».

Правда, что-то мешает нам безоговорочно рассматривать $(2 - 3)$ как знак, решающий задачу; поскольку пустой знак задачу как раз и не решает; без содержания он есть лишь чернила или типографская краска на бумаге; как таковой он обладает физическими свойствами, но не свойствами, которые даёт умножение 3 на 2. Собственно, он вовсе не знак, и использование его как такового было бы логической ошибкой. Также и в случае, когда $c < b$, задачу решает не знак (« $c - b$ »), но его содержание.

§ 96. С таким же успехом можно сказать, что среди известных до сих пор чисел нет таких, которые одновременно удовлетворяли бы равенствам

$$x + 1 = 2 \text{ и } x + 2 = 1;$$

однако ничто не мешает нам ввести знак, решающий эту задачу. Скажут: но задача содержит противоречие. Конечно, если в качестве решения требуют действительного или обычного комплексного числа; но нам следует расширить нашу систему чисел и создать числа, которые удовлетворяют требованию! Подождём, докажет ли нам кто-нибудь противоречие! Кто знает, что возможно относительно этого нового числа? Тогда мы, конечно, не могли бы считать вычитание однозначным; однако, если мы хотим ввести отрицательные числа, мы должны отказаться также от однозначности знака извлечения корня; благодаря комплексным числам многозначными становятся логарифмы.

Почему бы не создать также числа, которые позволяли бы складывать расходящиеся ряды? Нет, математик в состоянии создать что угодно, в столь же малой степени, как и географ; он также может лишь обнаружить то, что есть, и дать этому название.

Этой ошибкой страдает формальная теория дробей, отрицательных и комплексных чисел**. Устанавливается требование,

* Op. cit., S. 5. Аналогично в *E. Kossak*, Op. cit., S. 17.

** То же самое относится к бесконечным числам Кантора.

чтобы известные правила счёта по возможности сохранялись для вновь введённых чисел, а отсюда выводятся общие свойства и отношения. Если нигде не сталкиваются с противоречием, то введение новых чисел считается оправданным, как будто бы противоречие не может всё-таки где-то скрываться и как будто бы отсутствие противоречия уже имеет место.

§ 97. То, что эту ошибку так легко совершить, пожалуй, поκειται на недостаточном различении понятий и предметов. Ничто не мешает нам использовать понятие «квадратный корень из -1 »; но мы не вправе безоговорочно помещать перед ним определённый артикль и рассматривать выражение «[die] квадратный корень из -1 » как осмысленное. Предполагая, что $i^2 = -1$, мы можем доказать формулу, посредством которой выражается синус угла, кратного углу α , через синус и косинус самого α ; но мы не должны забывать, что тогда это предложение вводит с собой условие $i^2 = -1$, которое мы не должны опускать безоговорочно. Если вовсе не существует того, чей квадрат был бы -1 , то использовать это равенство в нашем доказательстве не оправданно*, поскольку условие $i^2 = -1$, от которого, как кажется, зависит его значимость, никогда бы не выполнялось. Всё было бы так, как если бы в геометрическом доказательстве мы использовали вспомогательную линию, которую нельзя задать вовсе.

§ 98. Ханкель** вводит два вида операций, называемых им литическими и тетическими и определяемых посредством некоторых свойств, которые эти операции должны иметь. На это нечего возразить, но лишь пока не предполагается, что такие операции и предметы, которые могут быть их результатом, существуют***. Позднее**** он обозначает некую тетическую, совершенно однозначную, ассоциативную операцию посредством $(a + b)$ и соответствующую ей, также совершенно однозначную, литическую операцию посредством $(a - b)$. Некую операцию? Но какую? Какую угодно? Но тогда это не является определением $(a + b)$. Ну а если её не существует? Если слово «сложение» ещё не имеет значения, то логически допустимо сказать, что такую операцию мы хотим назвать сложением; но нельзя сказать, что [eine] та-

* Оно всегда может быть строго доказано другим путём.

** Op. cit., S. 18.

*** Используя уравнение $\Theta(c, b) = a$, Ханкель, собственно, уже делает это.

**** Op. cit., S. 29.

кая операция должна означать [die] сложение и обозначаться посредством $(a + b)$, прежде чем установлено, что существует одна и только одна такая операция. Нельзя с одной стороны равенства по определению использовать неопределённый артикль, а с другой определённый. Кроме того, без добавлений Ханкель говорит: «[der] модуль операции», не доказывая того, что существует один и только один модуль.

§ 99. Короче говоря, эта чисто формальная теория недостаточна. Её ценность заключается только в следующем. Доказывают, что если операция обладает некоторыми свойствами, типа ассоциативности и коммутативности, то для неё имеют силу определённые предложения. Затем показывают, что сложение и умножение, которые уже известны, обладают этими свойствами, и теперь о них без пространного, повторного в каждом отдельном случае доказательства можно сразу же высказать каждое из этих предложений. Известные предложения арифметики получают, сперва применяя эту формальную теорию к операции, заданной в другом месте. Однако никоим образом нельзя полагать, что этим способом можно ввести сложение и умножение. Задаётся только руководство для определения, а не оно само. Говорится, что имя «сложение» должно быть придано только тетической, совершенно однозначной, ассоциативной операции, но последняя, которая должна теперь так называться, этим вовсе не задаётся. Сообразно с этим ничто не противостоит тому, чтобы умножение назвать сложением и обозначить посредством $(a + b)$, и никто не смог бы с определённою сказать, равно ли $2 + 3$ пяти или же шести.

§ 100. Если мы задаём этот чисто формальный способ рассмотрения, то, как кажется согласно обстоятельствам, может представиться способ одновременно с введением новых чисел расширить значение слов «сумма» и «произведение». Возьмём предмет, скажем, Луну, и объясним, что Луна, умноженная на саму себя, даёт -1 . Тогда в Луне мы имеем квадратный корень из -1 . По-видимому, это объяснение допустимо, поскольку из прежнего значения умножения вовсе не вытекает смысл такого произведения и, стало быть, при расширении это значение может устанавливаться как угодно. Однако мы также используем произведение действительного числа с квадратным корнем из -1 . По этой причине в качестве квадратного корня из -1 лучше выберем временной интервал в одну секунду и обозначим её посредством i ! Тогда под $3i$ мы будем понимать 3 секунды

и т. д.* Какой тогда предмет мы обозначаем, скажем, посредством $2 + 3i$? Какое значение в этом случае придаётся знаку плюс? Теперь это должно устанавливаться в общем, что, конечно же, нелегко. Пусть мы всё же принимаем, что все знаки формы $a + bi$ обеспечены смыслом, а именно таким, чтобы имели силу известные предложения арифметики! Тогда в дальнейшем нам необходимо было бы установить, что в общем должно иметь место

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + cd);$$

и в результате мы шире определили бы умножение.

§ 101. Теперь, если бы нам было известно, что из равенства комплексных чисел вытекает равенство действительных частей, мы могли бы доказать формулу для $\cos(n\alpha)$. Это должно вытекать из смысла $a + bi$, который здесь мы принимаем как имеющийся в наличии. Теперь доказательство имело бы силу для установленного нами смысла комплексных чисел, их сумм и произведений. Поскольку для всякого действительного i и действительного α теперь i более вовсе не входит в равенство, то пытаются сделать вывод: Следовательно, совершенно безразлично, обозначает ли i секунду, миллиметр или что-то ещё, если только имеют силу наши предложения о сложении и умножении; всё зависит от этого, а остальное мы используем не заботясь. Вероятно, можно установить значение $a + bi$, суммы и произведения различными способами так, чтобы сохранялось каждое предложение; но вовсе не безразлично, можно ли вообще найти такой смысл для этих выражений.

§ 102. Часто поступают так, как если бы голое требование было возможно уже самим своим наличием. Требуют, чтобы вычитание**, деление, извлечение корня было всегда выполнимо, и думают, что этим сделано достаточно. Почему не потребуют также, чтобы через любые три точки проводилась прямая? Почему

* С тем же правом в качестве квадратного корня из -1 мы также могли бы избрать определённое количество электричества, определённую поверхность и т. д.; само собой разумеется, что тогда эти различные корни обозначались бы также различно. Тогда, по-видимому, можно было бы создать сколь угодно много квадратных корней из -1 . Это не так удивительно, если подумать, что значение квадратного корня этими установлениями ещё не задано неизменным, но определяется посредством и вместе с ними.

** Ср.: Kossak, Op. cit., S. 17.

не потребуют, чтобы для трёхмерной системы комплексных чисел все предложения сложения и умножения имели силу так же, как для системы действительных чисел? Потому что эти требования содержат противоречие. Тогда прежде следовало бы доказать, что и те, другие требования не содержат противоречия! Пока этого не сделано, вся строгость, претендующая на многое, есть не что иное, как пустая видимость и дым.

Указанная вспомогательная линия в геометрической теореме не встречается в доказательстве. Вероятно, может быть больше линий, если, к примеру, точку можно выбирать произвольно. Но даже если излишней может оказаться каждая из них в отдельности, то доказательство всё-таки зависит от того, чтобы можно было указать линию с требуемыми свойствами. Одного требования недостаточно. Таким образом, и в нашем случае также не безразлично для доказательной силы, имеет ли « $a + bi$ » смысл или является просто типографской краской. Кроме того, не достаточно требовать, что она должна иметь смысл, или сказать «[der] смысл суммы a и bi », если прежде не объяснить, что в данном случае означает «сумма», и если использование определённого артикля не оправданно.

§ 103. Против испробованного нами установления смысла « i » можно, конечно, многое возразить. Благодаря ему мы привносим в арифметику нечто совершенно чуждое — время. Секунда не находится ни в каком внутреннем отношении к действительным числам. Если бы не было другого вида доказательства или если бы нельзя было найти для i другой смысл, то предложения, доказываемые посредством комплексных чисел, были бы суждениями *a posteriori* или синтетическими. Во всяком случае, прежде всего необходимо сделать попытку доказать все предложения арифметики как аналитические.

Когда Коссак, ссылаясь на комплексные числа, говорит*: «Они являются составными представлениями разнообразных групп при равных друг другу элементах»**, то, по видимости, этим он уменьшает вмешательство чуждого; но эта видимость также возникает лишь вследствие неопределённости выражения. Совершенно не получен ответ на то, что же собственно означает

* Op. cit., S. 17.

** Для выражения «представление» сравни то, что говорится в § 27; для «группа» — то, что говорится относительно «агломерат» в § 23 и § 25; для равенства элементов — то, что говорится в § 34–39.

$1 + i$: представление яблока и груши или зубной боли и подагры? Всё-таки оно не обозначает и то, и другое одновременно, поскольку тогда $1 + i$ не всегда равнялось бы $1 + i$. Говорилось бы, что всё зависит от особого установления. Ну а тогда в предложении Коссака мы имели бы вовсе не определение комплексного числа, но лишь общее руководство к этому. Однако мы нуждаемся в большем; мы должны определённо знать, что обозначает « i », и если теперь, следуя этому руководству, мы захотели бы сказать: представление груши, то снова ввели бы в арифметику нечто чуждое.

То, что имеют обыкновение называть геометрическим изображением комплексных чисел, имеет перед рассмотренными до этого попытками то преимущество, что 1 и i при этом не выглядят совершенно несвязанными и неоднородными, но что отрезок, который рассматривается как изображение i , находится в закономерном отношении к отрезку, посредством которого изображается 1 . Впрочем, в точном смысле неправильно принимать, что при этом 1 означает некоторый отрезок, а i — перпендикулярный ему отрезок равной длины; но « 1 » везде означает одно и то же. Комплексное число задаёт здесь то, как отрезок, который считают его изображением, вытекает из данного отрезка (единичного отрезка) посредством тиражирования, деления и вращения*. Однако соответственно этому каждая теорема, чьё доказательство должно основываться на существовании комплексного числа, по-видимому, также зависит от геометрического созерцания и, стало быть, синтетична.

§ 104. Тогда каким образом нам должны быть даны дроби, иррациональные и комплексные числа? Если мы призываем на помощь созерцание, то вводим в арифметику нечто чуждое; однако, если мы лишь определяем понятие такого числа посредством признаков, если мы лишь требуем, чтобы число обладало некоторыми свойствами, то мы не ручаемся за то, что нечто также подпадает под это понятие и отвечает нашим требованиям, и всё-таки доказательство должно опираться как раз на это.

Ну а как тогда быть с натуральным числом? Действительно ли мы не можем вести речь о $(1000^{1000})^{1000}$, пока столько предметов не будет дано в созерцании? Нет! Оно имеет вполне определённый смысл, хотя, уже принимая во внимание краткость нашей жизни, для нас невозможно привести к сознанию столько

* Для простоты я отказываюсь здесь от несоизмеримости.

предметов*; но, несмотря на это, $(1000^{1000})^{1000}$ является предметом, свойства которого мы можем познать, хотя он и не созерцаем. В этом убеждаются тем, что при введении знака a^n для возведения в степень показывают, что посредством него всегда выражается одно и только одно положительное целое число, если a и n являются положительными целыми числами. Изложение в деталях того, как это может произойти, увело бы далеко. В общих чертах путь можно узнать из способа, которым мы объяснили ноль в § 74, единицу в § 77, бесконечное число ∞_1 в § 84, и из наброска доказательства того, что за каждым конечным числом в натуральном ряду чисел непосредственно следует некое число (§ 82 и 83).

При определении дробей, комплексных чисел и т. д. в конце концов всё также зависит от поисков выражаемого суждением содержания, которое можно превратить в равенство, где на сторонах последнего были бы как раз эти новые числа. Другими словами, мы должны установить для таких чисел смысла суждения отождествления. При этом нужно принять во внимание соображение, которое мы обсуждали (§§ 63–68) относительно такого преобразования. Если мы будем поступать так же, как там, то новые числа будут даны нам как объёмы понятий.

§ 105. Как мне кажется, при таком понимании чисел** легче объяснить очарование, которое оказывает занятие арифметикой и анализом. Видоизменив, можно, пожалуй, высказать известное предложение: Собственным предметом разума является разум. В арифметике мы занимаемся предметами, которые не как нечто чуждое известны нам извне через посредничество чувств, но которые даны непосредственно разуму, который может рассматривать их в совершенстве как то, что ему наиболее свойственно***.

И всё-таки, или скорее как раз поэтому, эти предметы не являются субъективными фантазиями. Нет ничего более объективного, чем арифметические законы.

* Простой расчёт показывает, что для этого было бы недостаточно миллионов лет.

** Его можно также назвать формальным. Однако оно совершенно отличается от понимания, обсуждаемого под этим названием выше.

*** Этим я вовсе не хочу отрицать, что без чувственного впечатления мы были бы глупы как доска и ничего бы не знали ни о числах, ни о чём-то ещё; но такое психологическое предложение здесь не затрагивается вовсе. Я подчёркиваю это ещё раз из-за имеющейся налицо опасности смешения двух в корне различных вопросов.

§ 106. Бросим ещё один краткий ретроспективный взгляд на ход нашего исследования! После того как мы установили, что число не является ни грудой вещей, ни свойством последних, что оно, однако, также не является субъективным продуктом душевных процессов, но что указание на число высказывает нечто объективное о понятии, мы, прежде всего, попытались определить отдельные числа 0, 1 и т. д. и прогресс в числовом ряду. Первая попытка не удалась, поскольку мы определили только высказывание о понятии, но не обособили 0 и 1, которые являются лишь его частями. Последнее имеет следствием то, что мы не можем доказать равенство чисел. Обнаруживается, что число, которым занимается арифметика, должно пониматься не как несамостоятельный атрибут, но субстантивно*. Таким образом, число проявляется как отождествляемый предмет, хотя и не как физический или даже пространственный, не как предмет, образ которого мы можем спроектировать посредством силы воображения. Мы устанавливаем теперь принцип, что значение слова нужно объяснять не в его обособленности, но в контексте предложения; следуя одному этому, как я думаю, можно избежать физического понимания числа без того, чтобы впасть в психологизм. Существует только один вид предложений, которые должны иметь смысл для каждого предмета, предложения отождествления, называемые в случае чисел равенствами. Мы видели, что и указание на число также понимается как равенство. Стало быть, всё зависит от того, чтобы установить смысл равенства чисел и выразить его без использования числительных или слова «число». Как содержание суждения отождествляющего числа мы осознаём возможность взаимно однозначного соотнесения предметов, подпадающих под понятие F , с предметами, подпадающими под понятие G . Стало быть, наше определение должно представить эту возможность, как равнозначную с равенством чисел. Мы напомним сходный случай: определение направленности при параллелизме, контуров при подобии и т. д.

§ 107. Тогда возникает вопрос: когда считать, что содержание понимается как суждение отождествления? Для этого должно выполняться условие, чтобы в каждом суждении без ущерба для его истинности левую сторону уравнения, рассматриваемого в качестве примера, можно было заменить на правую. Теперь, прежде всего, без установления дальнейших определений о левой и правой стороне такого уравнения нам не известно более никако-

* Различие соответствует различию между «голубой» и «цвет неба».

го суждения, кроме именно их равенства. Стало быть, в уравнении нужно только указать на заменимость.

Но всё ещё остаётся сомнение. А именно, предложение отождествления всегда должно иметь смысл. Если мы под равенством понимаем лишь возможность взаимно однозначного соотнесения предметов, подпадающих под понятие F , с предметами, подпадающими под понятие G , говоря при этом: «Число, которое соответствует понятию F , равно числу, которое соответствует понятию G », и вводя этим выражение «Число, которое соответствует понятию F », то у нас есть смысл для равенства только тогда, когда обе стороны имеют как раз упомянутые формы. Согласно данному определению, если только одна сторона имеет такую форму, мы не можем утверждать, является ли уравнение истинным или ложным. Это побуждает нас к определению:

Число, соответствующее понятию F , есть объём понятия «понятие, равночисленное понятию F », где понятие F мы называем равночисленным понятию G , если имеет место возможность взаимно однозначного соответствия.

При этом смысл выражения «объём понятия» мы предполагаем известным. Этот способ преодоления затруднения, пожалуй, не всюду найдёт одобрение, и многие предпочтут устранять эти сомнения другими способами. Также и я не придаю решающего значения привлечению объёмов понятий.

§ 108. В остальном, остаётся лишь объяснить взаимно однозначное соответствие; последнее мы сводим к чисто логическим обстоятельствам. Теперь, после того как мы указали доказательство предложения: «Число, соответствующее понятию F , равно числу, соответствующему понятию G , если понятие F равночисленно понятию G », мы определили 0, выражение «и следует в натуральном ряду чисел непосредственно за n », число 1 и показали, что 1 следует в натуральном ряду чисел непосредственно за 0. Мы привели отдельные предложения, которые в этом месте легко могут быть доказаны, и тогда подошли несколько ближе к следующему предложению, которое позволило бы узнать о бесконечности числового ряда:

В натуральном ряду чисел за каждым числом следует число.

Это привело нас к понятию «принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n », о котором мы хотели пока-

зять, что соответствующее ему число в натуральном ряду чисел непосредственно следует за n . Мы определили его, прежде всего, с помощью следования предмета y за предметом x в общем ф-ряду. Смысл этого выражения также был сведён к чисто логическим обстоятельствам. Посредством этого удалось доказать, что способ вывода от n к $(n + 1)$, который обычно принимался за собственно математический, покоится на общих логических способах вывода.

Теперь для доказательства бесконечности числового ряда нам нужно предложение, что никакое конечное число в натуральном ряду чисел не следует за самим собой. Так мы пришли к понятиям конечного и бесконечного числа. Мы показали, что последнее в сущности логически оправданно не менее, чем первое. Для сравнения были привлечены бесконечные числа Кантора и их «следование в последовательности», причём было указано на различия в выражениях.

§ 109. Теперь из всего предыдущего с большой вероятностью получалось, что природа арифметических истин является аналитической и априорной; и нам удалось исправить точку зрения Канта. Далее мы увидели, что чего-то всё ещё недостаёт, чтобы привести эту вероятность к очевидности, и указали путь, который должен к этому привести.

Наконец, мы использовали наши результаты для критики формальной теории отрицательных, дробных, иррациональных и комплексных чисел, посредством которой стала очевидной её недостаточность. Её ошибку мы увидели в том, что она предполагает, что отсутствие противоречия в понятии доказано, если противоречие не обнаружено, и что отсутствие противоречия в понятии уже достаточно гарантирует его наполненность. Эта теория воображает, что нужно лишь установить требования; их выполнение подразумевается само собой. Она ведёт себя как Бог, который посредством голого слова может сотворить то, что ему нужно. Достоинно порицания также и то, когда руководство к определению принимается за само определение, руководство, следуя которому, в арифметику вводится нечто чуждое; правда, само оно свободно от претензий на выражение, но лишь постольку, поскольку остаётся простым руководством.

Таким образом, эта формальная теория оказывается в опасности возвратиться к апостериорному или же синтетическому, сколько бы она ни создавала видимости того, что витает в вышине абстракций.

Наше прежнее рассмотрение положительных целых чисел демонстрирует теперь возможность избежать вмешательства внешних вещей и геометрического созерцания, без того чтобы впасть в ошибку данной формальной теории. Всё зависит от того, как здесь установить суждение отождествления. Если это вообще произойдёт, как думаем мы, то отрицательные, дробные, иррациональные и комплексные числа окажутся не более таинственными, чем положительные целые числа, которые реальны, действительны и явны не в большей степени, чем те.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

Работа Г. Фреге *Основания арифметики* впервые вышла в 1884 г. и с тех пор неоднократно переиздавалась. Данный перевод выполнен по первому изданию: *Frege G. Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* — Breslau, Verlag von Wilhelm Koenner, 1884.

Для уточнения характера работы переводчика приведём несколько соображений в пользу особенностей перевода отдельных ключевых терминов.

Во-первых: Для передачи понятия числа Г. Фреге использует два термина — *Zahl* и *Anzahl*. *Anzahl* мы переводим как ‘число’ и, за редким исключением, не отличаем от *Zahl* по двум причинам: 1) термин *Anzahl* обычно употребляется для обозначения кардинального числа, тогда как *Zahl* — для числа вообще, но у Фреге речь в основном идёт о кардинальных числах; 2) на протяжении всего текста эти два термина часто не различаются и используются как синонимы. Там, где в особых случаях такое различие всё же обнаруживается, мы переводим *Anzahl* как ‘кардинальное число’.

Во-вторых: Устанавливая природу математических предложений, Г. Фреге использует термин *Gleichung* (‘уравнение’), но понимает его в том смысле, который в большей степени соответствует русскому слову ‘равенство’, поскольку под уравнением в отечественной математической терминологии понимается выражение с неизвестными. Поэтому в нашем переводе этот термин, за редким исключением, передаётся как ‘равенство’.

В-третьих: В некоторых случаях, для того чтобы отличить числительное от существительного там, где не исключена возможность эквивокации, мы переводим *der Eins* несколько непривыч-

ным, но всё же допустимым в русском языке существительным 'однёрка'. Слово 'единица' зарезервировано как наиболее соответствующее по смыслу для передачи термина *Einheit*.

В-четвёртых: Соотношение числа и понятия Фреге передаёт термином *zikommen*. Мы переводим его как 'соответствовать', а не как 'принадлежать' или 'быть присущим', что принято в некоторых интерпретациях творчества немецкого логика на русском языке. Терминами 'принадлежать' и 'быть присущим' в отечественной логической литературе принято обозначать отношения между объемом понятия и предметом, подпадающим под это понятие (при переводе данные термины как раз и используются в этом смысле). Поскольку Фреге имеет в виду отношение иного рода, мы выбрали указанный вариант, чтобы избежать смешения.

В-пятых: Одна из специфических черт аргументации Г. Фреге — это апелляция к способам употребления артиклей. Поскольку для немецкого логика доводы такого рода имеют определяющее значение, мы не стали заменять артикли оборотами, так как в некоторых случаях это привело бы к искажению смысла. Поэтому там, где необходимо, мы указываем их в скобках.

ЦЕЛОЕ ЧИСЛО

(1895)

Я заметил, что данный журнал* пытается согласовать математику и философию, и это представляется мне весьма ценным. Действительно, эти науки не могут не получить выгоду, обмениваясь идеями. Это побуждает меня вступить в дискуссию. Взгляды, выдвинутые мсье Vallue в майском номере журнала**, несомненно разделяются большинством математиков. Но они содержат логические затруднения, которые кажутся мне достаточно серьёзными, заслуживая того, чтобы быть выставленными напоказ, всё больше потому, что они могут затемнить проблему и склонить философов более не беспокоиться об основоположениях арифметики. Для начала, по-видимому, следует указать на часто встречающийся промах математиков, который заключается в том, что они ошибочно рассматривают символы как объекты своих исследований. На самом же деле символы есть только средство исследования — хотя и очень полезное, даже неизбежное, — а не его объекты. Эти последние представлены посредством символов. Очертания знаков, их химические и физические свойства могут подходить в большей или меньшей степени, но они не являются существенными. Нет символа, который нельзя было бы заменить другим символом с иными очертаниями и качествами, связи между вещами и символами являются чисто конвенциональными. Это относится к любой системе знаков и к любому языку. Несомненно, язык — мощное оружие человеческого духа, но один язык может быть столь же пригоден, как и другой. Поэтому необходимо не переоценивать слова и символы, либо приписывая им псевдомагическую силу над вещами, либо ошибочно принимая их за действительные вещи, самое большее, более или менее точными представителями которых они являются. По-видимому, на этой точке зрения едва ли следует настаивать, но статья мсье Vallue, вероятно, не защищена от подобной ошибки. Его тема — целые числа. Что они собой представляют? Мсье Vallue говорит: «Множественности, представленные сим-

* Revue de Métaphysique et de Morale.

** Le Nombre entier considéré comme fonnement de l'analyse mathématique.

волами, называются целыми числами». Тогда, согласно ему, целые числа являются символами, и об этих символах он намеревается говорить. Но символы не являются и не могут являться основанием математического анализа. Когда я записываю $1 + 2 = 3$, я выдвигаю суждение о числах 1, 2 и 3, а не о тех символах, о которых при этом говорится. Их я могу заменить на А, В и С; я могу написать p вместо $+$ и e вместо $=$. Записывая $ApVeC$, я тогда выразил бы ту же самую мысль, что и ранее, но посредством иных символов. Теоремы арифметики никогда не относятся к символам, они относятся к вещам, представленным символами. Верно, что эти объекты не осязаемы и не видимы, они даже не реальны, если реальным называют то, что может оказать или вызвать воздействие. Числа не подвержены изменениям, ибо теоремы арифметики охватывают вечные истины. Стало быть, мы можем сказать, что эти объекты находятся вне времени, а из этого следует, что они не являются субъективными представлениями или идеями, поскольку последние непрерывно изменяются в соответствии с психологическими законами. Арифметические законы не образуют часть психологии. Дело обстоит не так, как если бы каждый человек имел своё собственное число, называемое *один* и образующее часть его души или его сознания. Под этим именем существует только одно число, одинаковое для каждого и объективное. Числа, стало быть, являются весьма странными объектами, объединяющими в себе кажущиеся противоречивыми качества объективности и нереальности. Но при более тщательном исследовании обнаруживается, что противоречия здесь нет. Отрицательные числа, дроби и т. д. имеют ту же самую природу, и, вероятно, поэтому слишком многое в арифметике устанавливается посредством символов. Из-за затруднений с отождествлением объектов, которые не различимы чувствами и не являются психологическими, вместо них подставляются видимые объекты. Но забывается, что эти символы не суть то, что мы хотим изучить. И поэтому числа наделяются двойной природой. Их называют символами, но тем не менее они представлены сами, им приданы имена. Мсье Ballue пишет: «Подобно всем символам, целое число допускает двойную репрезентацию: звук, который воздействует на слух, впечатление, которое оказывает его написанное имя на зрение... Кроме того, целое число предполагает свою собственную, отдельную репрезентацию, требующую использования особых значков, называемых *цифрами*. Цель цифрового обозначения заключается в том, чтобы изучить

способы репрезентации всех целых чисел с наименьшим количеством слов и цифр». Что же тогда обозначает цифра 2? Число, т. е., согласно мсье Vallue, символ. Будет ли это слово *два*? Если да, то мы, немцы, имели бы числа, которые отличались бы от чисел французов, а наша арифметика была бы наукой иной, чем у них, и имела бы другие объекты исследования. Вероятно, мнение мсье Vallue состоит в том, что слово *два* репрезентирует то же самое число, что и цифра 2. Но чем бы ни было это число, оно репрезентирует множественность, и само репрезентируется цифрой 2. Чего тогда мы хотим от этого несколько загадочного посредника? Почему бы не обозначать множественность непосредственно цифрой?

Можно подумать, что это лишь оговорка со стороны мсье Vallue, которую легко можно скорректировать, подставив в названии его статьи *множественность* вместо *целое число*. Ибо, согласно мсье Vallue, целые числа суть символические представители именно множественностей. Но это не оградит нас от всех затруднений. Что такое множественность? Мсье Vallue отвечает: «Скопление нескольких особых объектов, рассмотренных как особые, без внимания к природе или очертаниям этих объектов, называется *множественностью*. Станет очевидно, что множественность есть скопление единиц».

Это определение не является ясным, как, по-видимому, думает автор. Относительно слова *множественность* можно было бы считать, что его смысл содержится в слове *несколько* и во множественном числе, но мсье Vallue добавляет некоторые уточнения, говоря «особые объекты, рассмотренные как особые, без внимания к природе или очертаниям этих объектов». То, что здесь он называет *особые*, прежде он называл *изолированные*, говоря: «Изолированным объектам, рассмотренным как изолированные, при отвлечении от их природы или очертаний, даётся имя единицы». Вероятно, можно возразить, что если объекты полностью изолированы, то не было бы никакого скопления. К тому же сомнительно, существуют ли полностью изолированные объекты, ибо каждый объект соотнесён с любым другим посредством гравитации. Поэтому следовало бы определить точную степень изоляции. Я не буду разрабатывать последний пункт, но хочу более подробно исследовать, что же подразумевает мсье Vallue под словами «рассмотренные как особые, без внимания к природе или очертаниям этих объектов» и под словами «рассмотренные как изолированные, при отвлечении от их природы или очертаний». Для

меня удивительно здесь то, что способ рассмотрения объектов и абстракции, осуществлённые в душе субъекта, кажутся производными от качеств объекта. Я спрашиваю: после того как объект был рассмотрен как изолированный, остаётся ли он тем же самым объектом, что и ранее, или же при таком рассмотрении создаётся новый объект? В первом случае ничего бы существенного не произошло. И действительно, если я рассматриваю планету Юпитер как особую или изолированную, то её гравитационные связи с другими небесными телами не становятся более слабыми; и если я отвлекаюсь от массы и сферических очертаний, Юпитер не теряет ни своей массы, ни сферических очертаний. Тогда что же осуществляется посредством такого отвлечения? Точно так же здесь возникают и психологические затруднения. Пока я рассматриваю объект, я могу быть в нём уверен. Но, проводя доказательство, я последовательно фиксирую своё внимание на других объектах, ибо я не в состоянии одновременно рассматривать даже сто объектов. Затруднение здесь в том, что, если объекты не сравнивать между собой, я не могу уделять внимание их природе или очертаниям. Таким образом я утратил бы уверенность в том, что все эти объекты фактически являются единицами. Разумеется, они не были бы единицами по отношению ко мне. Быть может, они были бы таковыми по отношению к другим, но, вероятно, я ничего не знал бы об этом. И даже если бы знал, это было бы бесполезным с точки зрения моего доказательства, ибо отсюда я ничего не смог бы вывести.

Орион — это скопление звёзд. Для данного случая это было бы возможно, если в общем можно было рассматривать объекты как особые, без внимания к природе или очертаниям этих объектов. Следуя словам мсье Ballue и приняв его подход, мы говорили бы, что совокупность есть множественность. И поскольку имя *Орион* есть символ для этой множественности, мы рассматривали бы данное слово как число. Надо признаться, он не говорит, что звёзды рассматриваются как особые объекты и т. д. Да ведь здесь и совершенно некстати признавать, что совокупность есть множественность и что имя совокупности есть символ для множественности.

Рассмотрим теперь альтернативную позицию: рассматриваемый объект отличается от изначального. Солнце, например, как материальное, светящееся тело, имеющее очертания и занимающее место в пространстве, отличалось бы от Солнца, рассмотренного как особый объект, в отвлечении от его природы

и очертания. Можно было бы сказать, что последний создаётся посредством акта его рассмотрения и что, поскольку внешний объект не может быть создан таким способом, он был бы субъективной идеей или чем-то ещё в душе человека, осуществляющего такое рассмотрение и такую абстракцию. Посредством такого рассмотрения Солнца каждый создавал бы свою собственную идею, отличную от идеи кого-то другого. Множественность тогда также была бы субъективной. А это не совпадало бы с тем фактом, что естествоиспытатели дают объективные сведения, когда они определяют точное количество пестиков в цветке.

Каковым же может быть результат отвлечения от природы или очертания объекта? Утрачивает ли он свою природу или очертания? Представляется, что именно в этом результат мсье Ballue. Но очевидно, что внешний объект не может быть изменён таким образом. Когда кто-то образует идею объекта для себя, нет нужды в отвлечении для того, чтобы она утрачивала качества самого объекта. Идея Солнца не является материальным, светящимся телом. Но, тем не менее, эта идея в общем качественно отлична от идеи Луны у того же самого человека. Отвлечение по мсье Ballue может стереть различие между этими идеями. Но тогда что остаётся от множественности?

С этим близко связано и другое затруднение. Мсье Ballue говорит: «[le] Простейшая множественность образуется добавлением одной единицы к другой единице». Но если имеется более чем две единицы, тогда было бы несколько множественностей, образованных добавлением одной единицы к другой единице, и использование мсье Ballue определённого артикля в единственном числе было бы некорректным. Должно было бы быть «[les] Простейшие множественности образуются и т. д.» Но число *два* не является ни особой множественностью такого типа, ни символом для такой множественности. Вероятно, более верным было бы сказать, что оно является видом или классом множественностей, образованных добавлением одной единицы к другой единице. Но тогда, согласуясь с требованием точности, нам нужны подходящие определения *единицы* и *множественности*. Читатели данного журнала легко обнаружат, что первый из этих терминов не используется авторами единообразно. Сравнивая утверждение мсье Ballue («Простейшая множественность образуется добавлением одной единицы к другой единице») с тем, что говорят мсье Le Roy и мсье Vincent (в их совместной статье, опубликованной в сентябрьском номере, с. 519: «Возможность души

образовывать целые числа бесконечным добавлением единицы к самой себе»), мы видим, что эти авторы используют данный термин как собственное имя, тогда как мсье Ballue использует общий термин, предполагая существование нескольких единиц. В то же самое время мы видим, что слова *совокупность* и *добавление*, используемые мсье Ballue, требуют объяснения. Мсье Le Roy и мсье Vincent употребляют глагол *добавлять*, что, видимо, является действием, имеющим место в человеческой душе. Но трудно представить, каким образом вещь может быть добавлена к самой себе. Какого рода отношения задают эти совокупности? Являются ли они физическими, историческими, геометрическими или психологическими? Или же они чисто логические?

Читатели, вероятно, будут разочарованы, поскольку я лишь высказал возражения и сформулировал проблемы. Но поскольку позитивные решения проблем уже были представлены в моих работах*, здесь я могу ограничиться демонстрацией того, что тема затрагивает крайне трудные вопросы и что предмет гораздо сложнее, чем кажется на первый взгляд.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

Перевод выполнен по изданию: *Frege G. Le Nombre entier // Revue de Métaphysique et de Morale, 1895, III.*

В данной статье Фреге отстаивает реалистическую позицию во взглядах на природу математики и числа как её основного понятия, лежащую в основании предложенной им программы логицизма. Аргументация развивается как приложение критических усилий в отношении современного ему формалистского подхода. Он отвергает трактовку математических операций с точки зрения преобразования лишённых объективного содержания значков, рассматривая подобный подход как разновидность психологизма в математике. Критика психологизма в точных науках образует в той или иной мере фон всех философских идей Г. Фреге. Достоинство представленного текста в том, что он удачно дополняет критику индуктивистских, феноменалистских, физикалистских и других трактовок предложений и понятий математики и логики, которую Г. Фреге приводит в *Основных положениях арифметики*.

* Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau, Wilhelm Köbner, 1884; Grundgesetze der Arithmetik I, Jena, Hermann Pohle, 1893.

**[17 УЗЛОВЫХ
ПРЕДЛОЖЕНИЙ
О ЛОГИКЕ]**

(ок. 1905 г.)

1. Связи, конституирующие сущность мышления, имеют порядок, отличный от соединения представлений.

2. Это отличие связано не просто с наличием некоторой вспомогательной мысли, от которой в первом случае связи производят свой статус.

3. В случае мышления реально связываются не представления, но вещи, свойства, понятия, отношения.

4. Мысль всегда содержит нечто выходящее за рамки отдельного случая так, что он представлен нам как подпадающий под нечто общее.

5. В языке отличительная особенность мысли находит выражение в связке или личном окончании глагола.

6. Критерий того, конституирует ли мысль способ связи, заключается в том, что имеет смысл спрашивать, является ли она истинной или нет. Соединения представлений не являются ни истинными и ни ложными.

7. Что такое истинное, я считаю неопределимым.

8. В языке выражением мысли является предложение. В расширительном смысле мы также говорим об истинности предложения.

9. Предложение может быть истинным или же нет, только если оно является выражением мысли. Предложение 'Лео Закс — человек' является выражением мысли, только если 'Лео Закс' нечто обозначает. А потому также и предложение 'Этот стол — круглый' является выражением мысли, только если слова 'этот стол' есть для меня не пустой звук, но обозначение чего-то особенного.

11. '2 × 2 равно 4' — истинно и будет оставаться таковым, даже если в результате дарвиновской эволюции человеческие существа должны прийти к утверждению, что 2 × 2 равно 5. Каждая истина является внешней и независимой, даже будучи мыслью кого-либо, и даже будучи душевным продуктом того, кто её мыслит.

12. Логика становится возможной только при условии, что существует различие между истинным и неистинным.

13. Мы оправдываем суждение либо возвращаясь к истинам, которые уже были признаны, либо не прибегая к помощи

других суждений. Только первое, вывод, имеет отношение к логике.

14. Теория понятий и теория суждения только приготавливают теорию вывода.

15. Цель логики — установить законы, согласно которым суждение оправдывается другими суждениями, и безразлично, являются ли эти последние сами истинными.

16. Следование законам логики может гарантировать истинность суждений только настолько, насколько наши изначальные основания для осуществления этого имеют место в суждениях, являющихся истинными.

17. Психологическое исследование не может оправдать законы логики.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

Текст *17 узловых предложений о логике* опубликован в составе архивного наследия Г. Фреге: *Frege G. Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel, Bd. I.* — Hamburg, 1969. Название рукописи дано публикаторами. Текст, по-видимому, представляет собой план задуманной книги по философии логики, который частично был реализован в *Логических исследованиях*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пол Бенацераф

ФРЕГЕ: ПОСЛЕДНИЙ ЛОГИЦИСТ*

Первая версия этой статьи была подготовлена и прочитана на коллоквиуме в Чепел Хилл в университете Северной Каролины в октябре 1976 г. Она также послужила основой для двух семинаров, предложенных вниманию автором в университете Миннесоты в Морисе в феврале 1980 г. Я особенно признателен Стиву Вангеру, Фабрицио Мондадори, Глену Кесслеру, Яну Хакингу, Давиду Каплану, Джиму Вану Эйкену и Хайди Ишигуро за их полезные комментарии к первоначальному наброску. Окончательная версия была завершена, когда автор был стипендиатом Центра специальных исследований в науках о поведении. С благодарностью выражаю признательность за поддержку Центру, фонду Слоана, Национальному фонду гуманитарных наук и Принстонскому университету.

* Статья известного специалиста в области философии математики П. Бенацерафа вызывает интерес уже своим названием «Фреге: последний логицист». Долгое время философия математики Г. Фреге рассматривалась как исходный пункт разветвленного движения логицизма, стремящегося свести математику к логике. Логичизм при этом трактовался как утверждение об аналитической природе математических истин, применяемых для преобразования эмпирических предложений. Такой подход, например, был свойствен представителям *Венского кружка*. Однако, как показывает Бенацераф, истолкованный таким образом логицизм вовсе не был свойствен Фреге, который ни в коем случае не был сторонником эмпиризма. Его цель заключалась совсем в другом и была мотивирована попыткой возродить реализм платонистского толка в математике и логике. В этом отношении, если логицизм в основаниях математики связывать с именем Г. Фреге, то он действительно был не только первым, но и последним логицистом.

Перевод выполнен по изданию: *Benacerraf P. Frege: The last logicist*. In: *Midwest Studies In Philosophy VI*, Minneapolis, MN, 1981, P. 17-35.

Цитаты из *Grundgesetzen* приводятся по первому изданию (издания

В молодости меня научили нескольким фундаментальным истинам: Фреге был отцом логицизма, поскольку он показал, что арифметика на самом деле является только (искусно замаскированной) логикой и, следовательно, что она в действительности является аналитической и поэтому априорной. И всё это называется, где относительно арифметики, а также, вероятно, и относительно всего остального так называемого синтетического *a priori*, ошибался Кант.

Мне говорили также, что Фреге изобрёл ту логику, которой и была на самом деле арифметика (или, по крайней мере, что он был отцом современной логики). Я не задумывался (возможно, мне не приходило в голову задаться вопросом) над этим слишком уж счастливым совпадением открытия и изобретения. Необходимо учесть по меньшей мере десятилетний интервал, пролегающий между открытием (изобретением) законов логики и дальнейшим (?) открытием того, что они как раз и есть то, относительно чего нужно показать, что базовые законы арифметики на самом деле с самого начала являются базовыми законами логики.

Здесь у нас есть целый клубок проблем, а именно:

- касающихся того, что, работая, думал сам Фреге;
- касающихся того, что мы взяли из того, что он сделал как для логики, так и для арифметики;
- касающихся в более общих чертах надлежащей оценки философской важности этих достижений.

Данная статья посвящена некоторым из этих тем. Мой непосредственный интерес будет заключаться в том, чтобы исследовать роль логицистской доктрины в эмпирицизме двадцатого века с целью проверить, были ли взгляды позитивистов, усвоенные (или приспособленные) от Фреге, взглядами, которых придерживался он сам. Я надеюсь, что мои соображения послужат исходным пунктом для более полного понимания собственных взглядов Фреге и в конечном счёте для обсуждения увлекательных философских тем. Для начала я должен вернуться к фундаментальным истинам, которым меня научили в молодости. Они связаны с содержанием и философской важностью тезиса логицизма.

1. ЛОГИЦИЗМ

Логацизм — это учение, что фразы, выражающие истинные высказывания, являются истинными, а фразы, выражающие ложные высказывания, являются ложными.

напом, Гемпелем, членами Венского кружка, Айером и другими как ответ на учение Канта, что пропозиции арифметики являются априорно синтетическими. Фокусируясь на предложениях, выражающих математические пропозиции, логицисты допускают, что они являются априорными — что их можно знать независимо от опыта (кроме, конечно, того, что в опыте может возникнуть потребность для того, чтобы их сформулировать). Но, отвечая Канту, логицисты утверждают, что эти пропозиции являются априорными, потому что они *аналитические*, т. е. потому что они являются истинными (или ложными) просто «в силу» значений терминов, в которых они сформулированы. Таким образом, знать значения этих терминов — значит знать всё, что требуется для знания их истинности. Эмпирического исследования не требуется. Философская *цель* продвижения этого взгляда была открыто эпистемологической, ибо логицизм, если бы он был подтверждён, показал бы, что наше знание математики может быть объяснено нашим знанием языка, каким бы ни было объяснение. И, конечно, предполагалось, что знание языка *само* могло быть объяснено способами, совместимыми с эмпирицистскими принципами, которыми вполне можно *изучить* сам язык*. Таким образом, всё наше знание, следуя Юму, однажды можно было бы увидеть как затрагивающее либо «соотношение идей» (т. е. аналитическим и априорным), либо «факты» (т. е. синтетическим и апостериорным). Сомнение Канта в этой дихотомии было бы устранено демонстрацией того, что его наиболее сомнительный контрпример, а именно математика, хотя по общему признанию и априорная, была ошибочно классифицирована им как синтетическая.

Логицизм укладывается в несколько различных версий, каждая со своими новшествами, но большинство из этих версий имеет следующую общую структуру:

1. Истины арифметики *переводимы* в истины логики.

2. (1) демонстрируется тем, что:

а) устанавливаются определения для «внелогического» словаря (понятий) арифметики в «сугубо логических» терминах; и

* Современные дискуссии в основаниях лингвистической теории показали, что, даже принимая лингвистическую природу математических истин, эмпирицисты находятся на некотором расстоянии от цели. Я думаю, эти аргументы проблематичны, но само их существование показывает, что предмет не кристально ясен. Здесь я подразумеваю работы Ноама Хомского.

б) отмечается, что переводы, санкционированные этими определениями, перевели арифметические истины в логические истины, а арифметически ложные утверждения в логически ложные.

3. Об этой арифметической демонстрации затем утверждается, что обоснована аналитичность математических пропозиций, потому что: (а) поскольку определения, по предположению, сохраняют значение, логические переводы имеют то же самое значение, что и арифметические оригиналы, и (б) *сами* логические истины мыслятся истинными в силу значения, в данном случае значений, встречающихся в них логических частиц (и, таким образом, аналитическими).

Как бы там ни было, именно эта живучая точка зрения много раз обсуждалась. Я сам был вовлечён в эту дискуссию некоторое время назад*, в той её части, которая может быть прочитана как доказательство того, что либо определения математических терминов не сохраняют их значения, либо же что их значение не предопределяет их референт, поскольку различные и равным образом адекватные определения приписывают различные референты математическому словарю. Позднее я покажу, что Фреге и я говорим здесь в унисон (хотя прежде я и считал, что он придерживался противоположной точки зрения). Определения, адекватные *его* целям, не сохраняют референта. Но подробнее об этом позднее. В данный момент я прежде всего заинтересован в очерчивании логицистской позиции с целью сравнить её с позицией самого Фреге.

Относительно мало было написано на тему, является ли аналитичной сама логика, поэтому слово может здесь быть просто для того, чтобы локализовать вопрос и некоторые возможные на него ответы в спектре рассматриваемых позиций.

Если, как поступил У. В. Куайн**, определить аналитическую истину как преобразуемость в логическую истину посредством сохраняющих значение определений, тогда то, что законы логики являются аналитическими, становится тривиальным; но применительно к логике такое определение мало относится к традиционному подходу к аналитичности как истине-в-силу-значений.

* P. Benacerraf. What Numbers Could Not Be, *Philosophical Review* 74, No. 1 (January 1965); P. 47–73.

** W. V. Quine. Two Dogmas of Empiricism, перепечатано в *Philosophy of Mathematics*, ed. P. Benacerraf and H. Putnam (Englewood Cliffs, N.J., 1964). Далее этот сборник цитируется как «B&P».

Однако *это* последнее объяснение взяло на себя труд убедить нас в том, что аналитические пропозиции также являются априорными. В пользу определения Куайна следует также упомянуть, что оно выводит свою родословную от Фреге, а через него к Канту. Ибо рассмотрение аналитичности у Фреге в начале *Grundlagen* заключалось в следующем:

Это зависит от того, чтобы найти доказательство и свести математическую истину к первичным истинам. Если на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной... (*Grundlagen*, 27).

Таким образом, пропозиция является аналитической, если при её доказательстве используются только общие логические законы и определения.

Ниже мы рассмотрим данное определение в деталях. Аспект, который следует отметить в настоящий момент, состоит в том, что «доказательства» из общих законов и определений *достаточно* для аналитичности. Разумеется, это не делает описание Фреге эквивалентным описанию, предполагаемому (но не отстаиваемому) Куайном, поскольку у Куайна и Фреге есть различия относительно того, чем должна быть логика, и, вероятно, относительно роли определений. Для Куайна логика есть теория первого порядка с квантификацией плюс равенство, тогда как для Фреге она значительно обширней. Поскольку более узкая версия логики у Куайна недостаточна для «доказательства» законов арифметики, математика *не* является аналитической в смысле Куайна, хотя она всё ещё может оставаться таковой в смысле Фреге. Я говорю «может быть», поскольку, когда логика Фреге впала в противоречие (*и, предположительно, тем самым перестала также быть логикой*), его точка зрения осталась несколько неопределённой; окажется ли математика аналитичной в смысле Фреге, должно зависеть по крайней мере от того, какую логику подставляют вместо неудачной версии Фреге.

Связь с Кантом устанавливается самим Фреге, когда он одобряет свой собственный подход его подходу, но упрекает Канта за узость его концепции (*Grundlagen*, параграф 88). Он критикует Канта за то, что тот даёт определение, которое применимо только к универсальным общим пропозициям — к пропозициям, которые могут быть истолкованы как имеющие субъектно-пре-

дикатную форму, — и за слишком узкую концепцию определения, которая, вероятно, приспособлена для использования при демонстрации того, что понятие субъекта пропозиции содержит понятие предиката.

Поэтому Фреге, предлагая объяснение аналитичности, замыслил улучшить Канта в двух аспектах: (а) его объяснение классифицировало все пропозиции как аналитические или синтетические, т. е. оно, по предположению, является исчерпывающим, и (б) его объяснение расширяло концепцию определения за рамки кантовского понятия (на которое Фреге ссылается как на определение «посредством заданных признаков») (*Grundlagen*, 109) до понятия, которое охватывает «действительно продуктивные определения в математике» (*Grundlagen*, 110)*.

Я хочу подчеркнуть эпистемологическую мотивацию логика двадцатого века. Это, конечно, проявляется в третьей составляющей его точки зрения, где такой логик пытается пожинать богатый философский урожай из семян, которые посеял Фреге. Поразительный пример представляет собой позиция, представленная К. Г. Гемпелем в статье**, которая, хотя в действительности и не задаёт нового основания, представила ядро этих взглядов настолько, насколько удалось Гемпелю. Согласно Гемпелю, фреге-расселовское определение числа, 0, наследника и относящихся сюда понятий показало, что пропозиции арифметики являются аналитическими, поскольку они обосновываются, будучи обусловлены определениями, отталкивающимися от логических принципов. Ясно, что Гемпель подразумевает здесь то, что при объяснении формальной системы логики (теория множеств или второпорядковой логики

* Я не могу воздержаться, чтобы не заметить в защиту Канта, что при условии кантовского понятия аналитичности его концепция определения превосходна. Только когда вы расширяете данное понятие *à la* Фреге, это определение «посредством заданных признаков» становится слишком суженным — в частности, если вы определяете функции так же, как предикаты. Поэтому аргументация Фреге в конце параграфа 88, сводящаяся к тому, что Кант ошибочно рассматривал как синтетические определённые заключения, выведенные из его (Фреге) новой разновидности определения с помощью чисто логических средств, содержит со стороны Фреге *petitio principii*, ибо только на основании фрегевского понятия аналитичности они оказываются аналитическими, безотносительно к разновидности определения, используемой в доказательстве.

** С. G. Hempel. On the Nature of Mathematical Truth, перепечатано в «V&P».

плюс аксиома бесконечности) можно посредством оговоренных определений ввести выражения 'Число', 'Ноль', 'Наследник' таким способом, что предложения такой формальной системы, использующие эти введённые сокращения и которые формально являются теми же самыми (т. е. толкуются тем же самым способом), что и определённые предложения арифметики — например, 'Ноль есть число', — обнаруживаются как теоремы системы. Из этого неоспоримого факта он заключает, что эти определения показывают, что *теоремы арифметики* являются лишь относящимися к способу записи расширениями теорем логики и, таким образом, аналитическими.

У него нет полномочий на это заключение. У него не было бы полномочий, *даже* если бы теоремы логики в их изначальной записи сами были аналитическими. Ибо единственное, относительно чего можно показать, что оно следует из теорем логики *посредством соглашения*, суть сокращённые теоремы логической системы. Чтобы выгодно использовать это в аргументе относительно *пропозиций арифметики*, нужен аргумент, что предложения арифметики в их доаналитическом смысле *подразумевают то же самое (или приблизительно то же самое), что и их синонимы в логической системе*. Это требует особой и более широкой аргументации. Я ставлю это на обсуждение не для того, чтобы скомпрометировать Гемпеля, но чтобы использовать его взгляды как иллюстрацию эпистемологической мотивации, которая провоцирует логицистов двадцатого века. *Суть* логицизма должна сделать осмысленным то, как мы можем обладать априорным знанием математики. «Посредством соглашения», говорит Гемпель. Если бы это хоть в какой-то степени было правильным, всё сводилось бы к проблеме аналитичности логики, к проблеме, которую я здесь не решаю, хотя и буду указывать некоторые очевидные способы, в которых определённые ответы воздействуют на надлежащую оценку философской позиции логицистов.

Вопрос становится особенно запутанным, когда в контексте защиты такой логицистской позиции, в свою очередь, обсуждается аналитичность логики, ибо такая логика должна включать достаточное количество материала из теории множеств (или подходящего эквивалента), чтобы охватить достаточное количество математики. Единственное решение, которое, по-видимому, предлагается в этом случае, состоит в том, что аксиомы конституируют имплицитные определения понятий. Это — форма

конвенционализма, истолковывающая аксиомы как соглашения, которые должны управлять использованием терминов, которые они содержат: *Используй/понимай этот язык так, чтобы его предложения оказались истинными!* Достаточно трудно понять, когда интерпретация «логического словаря» фиксирована, ибо как инструкция, применимая ко всему языку, она вообще не имеет смысла, а как объяснение того, как предложения логики *фактически* получают свои истинностные значения, она бесполезна, что в значительной мере прояснили Куайн* и другие. Логика не нуждается в *применении* такого правила к индивидуальным случаям. Конечно, *фактически* может быть случай, при котором мы используем язык таким способом, что рассматриваемые предложения оказываются истинными. Но мы ищем такое *объяснение* этого факта, которое в то же самое время делало бы истинностные значения этих предложений известными *a priori*. Ибо это и есть цель, которую установили для себя логицисты двадцатого века.

До сих пор я концентрировался на истолковании комплекса философских взглядов, принятых в философской установке, отвечающей на кантовский вызов эмпирицизму, которым и был логицизм этого века. Я могу показаться крайне эксцентричным, поскольку, обсуждая логицизм двадцатого века, не упомянул наиболее известного его представителя, а именно Рассела-Уайтхеда. Я опустил упоминание о нём по двум причинам: (1) потому что краткий отчёт не охватит его изворотливые и меняющиеся установки; (2) потому что, вероятно, по этой самой причине то, что я в свободной манере называю «логицизмом», в большей степени питалось его (и Фреге) техническими достижениями, чем его неустойчивыми философскими мнениями об этих достижениях. (В скобках могу добавить, что сказанного даже много для того, чтобы уже установить несостоятельность различия между его «техническими достижениями» и его «философскими взглядами», как хорошо известно любому, кто пытался разгадать понятие пропозициональной функции в *Principia Mathematica*.)

Далее, общепризнанный взгляд таков: на вызов Канта был дан ответ. На самом деле математика аналитическая, а не синтетическая. Это было продемонстрировано Фреге, когда он показал, каким образом математические пропозиции имеют одинаковое значение с логическими пропозициями, которые сами являются

* W. V. Quine. Truth by Convention, перепечатано в «B&P».

аналитическими (и, следовательно, известными *a priori*). Фреге показал это, анализируя «внелогический» словарь арифметики и обеспечивая определениями, которые сохраняют значение (и, следовательно, референцию и истинность). Фреге, следовательно, был первым логицистом.

2. ФРЕГЕ

Если Фреге был первым логицистом, то он также был и последним. Если уместно провозгласить, что Фреге действительно верил в «логицизм», и если он был первым, кто верил в него, то, наиболее вероятно, он был также и последним. Насколько я знаю, никто со времён Фреге — и уж точно не «логицисты» двадцатого века — не придерживались в точности той позиции, которую защищал Фреге в *Grundlagen* и которая сподвигла его написать этот философский шедевр. Несмотря на то, что взгляды, представленные в общем виде в предыдущем параграфе, широко поддерживались (я думаю, что большинство философов, рассматривавших данную тему, близки «логицизму» в этом смысле), они не были фрегевскими. Есть различные точки соприкосновения, которые приводят к попытке сделать вывод, что Фреге придерживался такой позиции, но я буду отстаивать, что это не так, — что его точка зрения была намного более интригующей и в его духе прямо антитетической философской мотивации его «последователей» в двадцатом веке*.

Прежде всего, Фреге, конечно, не был эмпирицистом. Действительно, одной из философских целей *Grundlagen* было доказать

* Взгляд, который я назвал «логицизмом», очевидно, является сочетанием двух точек зрения: семантического тезиса в том смысле, что *арифметика является дефиниционным расширением логики*, и эпистемологического утверждения о том, *как это объясняет априорный характер арифметики*. Очевидно, можно (и, вероятно, следует) сохранить это название только для семантического тезиса, и в этом случае Фреге определённо был бы логицистом в той же степени, что и его последователи (хотя здесь также многое зависит от того, как интерпретировать «дефиниционные расширения» — коварный вопрос, который я детально рассмотрю в конце этой статьи).

Я избрал нынешний метод отчасти для драматического эффекта, отчасти потому, что на самом деле я не уверен в том, насколько ясно оба тезиса могут быть отделены один от другого — насколько философская мотивация за рамками заданной формы семантического тезиса заражает сам тезис.

несостоятельность доктрины Канта, что арифметика состоит из синтетических априорных пропозиций. Но Фреге охотно допускает то, чего не допускают эмпирицисты, — что геометрия Евклида является априорно синтетической. Он говорит:

Называя геометрические истины синтетическими и априорными, он [Кант] раскрыл их подлинную сущность. И даже сейчас это заслуживает повторения, поскольку зачастую всё ещё признаётся. Если Кант и заблуждался относительно арифметики, то для его заслуг, я думаю, это не существенный ущерб. Дело в том, что существуют синтетические суждения *a priori*; а встречаются ли они только в геометрии или также и в арифметике, менее значимо (*Grundlagen*, 111).

Поэтому для него доказательство аналитичности арифметических суждений не является способом защиты эмпирицизма против атаки Канта. Это доказательство имеет другую цель, которую я надеюсь раскрыть, исследуя то, как он вводит и защищает свои взгляды. Фреге открывает *Grundlagen*, сожалея о том факте, что никто, по-видимому, не дал удовлетворительного ответа на вопрос «Что такое число один?»:

Не постыдно ли науке так и пребывать в неясности о её первом и, по-видимому, таком простом предмете? Ещё менее можно сказать, что такое число. *Когда понятие, которое лежит в основании обширной науки, преподносит затруднения, неотложная цель, пожалуй, всё-таки состоит в его более тщательном исследовании и преодолении этих затруднений* (*Grundlagen*, 17).

Это подготавливает почву. В основаниях арифметики необходимо исследование с точки зрения преодоления «затруднений», которые порождают его фундаментальные понятия. Есть попытки считать, что Фреге выражается иронически, что на самом деле он не считал нашу неспособность дать удовлетворительное объяснение понятию числа подлинным затруднением *в рамках этой науки*. Конечно, это забота философии — забота, уместная для философии, — но не затруднение, *внутреннее для науки о самом числе*. Но это было бы ошибочным. Фреге подчёркивает, что это — предмет, с которым сами математики должны иметь дело

как математики, даже если исследование будет по необходимости содержать существенно философский компонент:

Благодаря этому мои пояснения, пожалуй, станут более философскими, чем может показаться уместным многим математикам; но основательное исследование понятия числа всегда должно проходить несколько философски. Для философии и математики эта задача является общей (*Grundlagen*, 19).

Принуждаемый тем, что доказательство является неполным, если определения до конца не оправданы, он говорит:

Но, пожалуй, следует принять во внимание, что строгость доказательства остаётся видимостью... если определения только задним числом оправдываются тем, что не столкнулись с противоречием. В сущности, так всегда достигают только уверенности, основанной на опыте, и должны собственно быть готовы, в конце концов, всё же встретить противоречие, которое приводит всё здание к обвалу. Поэтому, я полагаю, к общим логическим основаниям нужно обратиться в несколько большей степени, чем считает необходимым большинство математиков (*Grundlagen*, 23).

Нам следовало бы поймать его на этих словах. Они связаны с основаниями арифметики, которые мотивируют его исследование.

Это не удивительно, учитывая название этого исследования.

Но такое отношение может быть интерпретировано двумя различными способами, соответствующими интересам философа и интересам математика. Типично, что философы принимают остоу знания как заданный и имеют дело с эпистемологическими и метафизическими вопросами, которые вырастают при объяснении этого остова знания, примеряя его к общему объяснению знания и мира. В этом установка Канта. Он изучает природу математического знания в контексте исследования знания в целом. И это было позитивистской установкой, хотя они приходят к совершенно иным выводам.

Но интерес математика в том, что может быть названо «основаниями» в значительной степени иной. Как математик он связан с существенными вопросами относительно истины рассматри-

ваемых пропозиций, тогда как несколько более «философские» темы касаются того, как такие пропозиции, собственно, установлены. Интересы этих двух групп не разъединены — эти вопросы нельзя строго разделить. Но различия являются значимыми, и важно держать их в уме, поскольку мы подходим к Фреге. Я утверждаю, что Фреге времён *Grundlagen* имеет мотивацию математика, что там, где, как кажется, он непосредственно имеет дело с более типичными «философскими» темами (Являются ли пропозиции арифметики аналитическими или синтетическими? Априорными или апостериорными?), он уточнил эти вопросы и выразил их в такой форме, что ответы, которых они требуют, будут ответом на существенные математические вопросы, которые и составляют его принципиальный интерес. Таким образом, если логицизм является комплексом философских взглядов, описанных мной в первой части этой статьи, то Фреге не был логицистом.

Поэтому, с его точки зрения, если мы не делаем так, как настаивает он, то мы «должны, собственно, быть готовы, в конце концов, всё же встретить противоречие, которое приводит всё здание к обвалу»*. Что же нужно сделать? Совершенно явно следующее. Пропозиции арифметики нуждаются в *доказательстве*. Мы не можем просто принимать их за само собой разумеющееся согласно интуиции или принимать их, потому что они доказали свою полезность во многих случаях применения. «В математике не достаточна лишь моральная уверенность, поддержанная многими успешными применениями» (*Grundlagen*, 25). Эта ситуация вполне аналогична той, как если бы в некоторых более продвинутых областях математики остов «знания» возростал, но никогда не был бы адекватно обоснован. «Но к сущности математики относится то, что она всюду, где возможно доказательство, предпочитает последнее» (*Grundlagen*, 25).

В параграфе 1 Фреге объясняет *общую* потребность в строгости и доказательстве в математике. В параграфе 2 он защищает свой поиск доказательства таких пропозиций, как $7 + 5 = 12$, или закона ассоциативности сложения, ссылаясь на последнее из процитированных мной замечаний и уподобляя предмет случаю, когда «Евклид доказывает многое из того, с чем и без этого с ним

* Конечно, самая горькая ирония заключается в том, что Фреге должен был встретиться с такой возможностью, когда его система привела к противоречиям, — и что он не встретился бы с ней, если бы не продолжал свои основополагающие исследования.

согласился бы каждый» (*Grundlagen*, 25). Затем он переходит к тому, что я рассматриваю как сердцевину его точки зрения, когда он объясняет цель доказательства следующим образом:

К таким исследованиям меня *также* побуждают философские мотивы. Вопросы об априорной или апостериорной, синтетической или аналитической природе арифметических истин ждёт здесь своего ответа. Ибо, даже если сами эти понятия и принадлежат философии, я всё же думаю, что решение не может выследовать без помощи математики. Разумеется, это зависит от смысла, приданного каждому из этих вопросов (*Grundlagen*, 26).

Что касается выделенного мною «также», мотивы, обсуждаемые до сих пор, были математическими, а не философскими. Только теперь он обращается к тому, что, как он чувствует, может рассматриваться в качестве философского аспекта его работы. И он замечает, что будет так истолковывать «философские» вопросы об априорном и аналитическом характере арифметических истин, что они будут иметь математические ответы. Вне сомнения, это окажется несколько спорным в той мере, в которой переопределение Фреге этих понятий является простым прояснением, и в той мере, в которой оно является важной переинтерпретацией. Это будет зависеть от того, что мы принимаем за намерения Канта и Лейбница. Но меня больше задевает контраст между этими понятиями, как они определены у Фреге, и соответствующими понятиями, вплетёнными в ткань философских взглядов, которые я назвал «логицизмом» и набросок которых представил в первом разделе этой статьи.

Лучший способ найти эти ответы заключается в том, чтобы следовать параграфу 3, абзац за абзацем, добавляя, какие интерпретативные комментарии кажутся уместными. Параграф короткий, но мысли Фреге богаты содержанием.

Нередко случается так, что сперва получают содержание предложения, а затем проводят его строгое доказательство другим, более трудным способом, посредством которого часто условия пригодности могут быть также изучены более точно. Таким образом, вопрос о том, как мы приходим к содержанию суждения, в общем, нужно отделять от вопроса, каким образом мы оправдываем наше утверждение (*Grundlagen*, 26).

Это, по видимости, невинное различие, указывающее на то, что мы часто образуем пропозиции в наших сознаниях, — а на самом деле приходим к вере в них — и только позднее (или, вероятно, никогда) достигаем доказательств этих пропозиций (или их соответствующих уточнённых версий). Суть этого замечания состоит в том, чтобы попытаться отделить понятие содержания суждения от понятия обоснованности этого суждения — в смысле обоснования, введённого в предыдущих разделах, а именно, «поддержки» суждения пропозициями, от которых оно «зависит» в своей истинности. Попытки Фреге развести эти две идеи (содержание и обоснование) будут ключевыми для его критики Канта, центральным аспектом его переопределения аналитичности и центральным пунктом различия с позднейшими «логицистами».

Мы должны осознать это различие как первый этап атаки на Канта. Причина прозрачна. Для Канта различие между аналитическими и синтетическими пропозициями прежде всего было различием в *содержании* пропозиций. Эпистемологическая *суть* заключалась в том, что это различие в содержании имело для аналитических пропозиций непосредственное следствие, а именно, что они априорны, что они познаваемы независимо от опыта именно на основании рассмотрения их *содержания*. Ибо факт относительно содержания аналитических пропозиций состоял в том, чтобы было возможно заметить, что просто, принимая в расчёт такую пропозицию, нельзя не мыслить понятие её субъекта, не домысливая соответствующим способом понятие её предиката. Таким образом, главная проблема *Критики* состояла в установлении самой возможности априорно синтетических суждений, ибо казалось очевидным, почему аналитические суждения априорны; но продвинутая теория должна быть развита до априорного характера суждений, которые не проходят простой тест, удостоверяющий их как аналитические и, следовательно, очевидно априорные. «Логицисты» двадцатого века, следуя Канту в этом отношении, предоставили априорный статус расширенному классу аналитических пропозиций *на основе их содержания* — ибо истинность-посредством-значений есть просто расширение кантовского различия и эпистемологического анализа, который ему сопутствует. (Я бы добавил в скобках, что раз уж класс пропозиций был расширен за рамки субъектно-предикатных пропозиций, которыми Кант ограничил своё внимание, лёгкий путь к априорности от аналитичности более не доступен.) С этой ревизионистской точ-

ки зрения Кант ошибался, потому что был введён в заблуждение неадекватным понятием содержания из-за примитивной логической и семантической теории, он не понимал значения того факта, что арифметические пропозиции были также истинными по той же самой причине — просто посредством их содержания. Таким образом, согласно общепризнанному взгляду на работу Фреге и его отношение к этой традиции от него следовало бы ожидать утверждения как раз такого, которое я приписал «логицистам», а именно, что Кант ошибался в своём анализе *содержания* арифметических пропозиций. И действительно, как мы видели выше, Фреге критиковал кантовское различие между аналитическими и синтетическими суждениями, поскольку оно не было исчерпывающим (*Grundlagen*, параграф 88). Хотя было бы соблазнительно объяснить это как фрегевский критицизм кантовского анализа содержания арифметических суждений, объяснение, которое имело бы тенденцию поместить Фреге в эпистемологическую традицию, проходящую через Канта к современным логицистам, вводило бы в заблуждение. Ибо в самом начале следующего абзаца Фреге показывает, что он установил своё различие между содержанием и обоснованием для того, чтобы обозначить целью тщательно избегать разговора о содержании. Абзац полон скрытых ссылок на кантовское обсуждение аналитичности и содержит сноску, в которой Фреге утверждает, что следует Канту. Я процитирую как абзац, так и сноску (*Grundlagen*, 26–27):

Эти различия априорного и апостериорного, синтетического и аналитического, по моему мнению*, относятся к пониманию не содержания суждений, но оправдания вынесения суждения... Когда предложение называют апостериорным или аналитическим в моём смысле, судят не о психологических, физиологических и физических обстоятельствах, которые делают возможным образование содержания предложения в сознании, а также не о том, как другой, возможно ошибочно, приходит к тому, что он считает его истинным, но о том, на чём в самых глубинных основаниях покоится оправдание признания за истинное.

* Этим я в действительности не вкладываю новый смысл, но только трактую то, что имели в виду другие авторы, особенно Кант.

Суть введения различия содержание/обоснование заключается в том, чтобы поместить *как* различие априорное/апосте-

риорное, *так и* различие аналитическое/синтетическое прямо на стороне обоснования, что он и проводит в своём выводе, когда явно определяет все четыре понятия в следующем, заключительном, абзаце параграфа 3. Что касается приведённого выше абзаца, скрытые отсылки к Канту заключаются в отрицании того, что, называя пропозицию аналитической или априорной, мы каким-либо образом связаны с условиями, которые дают возможность образовать содержание суждения, или, по смыслу, с тем, что фактически происходит, когда образуют суждение в наших сознаниях. Это кантианский язык. Он имеет психологистский привкус, и Фреге хочет от него избавиться. В частности, он хочет избежать трактовки аналитичности пропозиций с точки зрения того, что происходит в сознании, когда пропозицию принимают во внимание. Как раз такое обсуждение должным образом обеспечивает для Канта связь между аналитичностью пропозиции и её априорным характером. Причины, по которым Фреге стремится избежать такого разговора вообще, и затруднения, к которым (по моему мнению) его в конечном счёте привела особая печать антипсихологизма, — вопросы сами по себе увлекательные, но предмет статьи иной. Я упомянул это, только чтобы сфокусировать контраст, прорисованный Фреге между его собственной позицией и позицией Канта, хотя сноски склоняет к обратному.

Итак, резюмируя аргументы, Фреге рассматривает *и* вопрос об аналитичности суждения, *и* вопрос о его априорном характере как вопрос, связанный с обоснованием суждения. Соответственно, он будет снабжать эти понятия (аналитическое/синтетическое, априорное/апостериорное) определениями, которые отражают этот взгляд. Поскольку дело касается арифметических пропозиций, вопрос об их обосновании является собственно предметом математики. Следовательно, эти понятия будут определены так, чтобы сделать собственно математическим вопрос, являются ли некоторые арифметические суждения аналитическими или синтетическими, априорными или апостериорными. Это вполне соответствует его замечаниям в конце первого абзаца параграфа 3, которые я ради удобства процитирую здесь снова:

Ибо, даже если сами эти понятия [аналитическое, синтетическое; априорное, апостериорное] и принадлежат философии, я всё же думаю, что решение не может воспоследовать без помощи математики. Разумеется, это зависит от смысла, приданного каждому из этих вопросов (*Grundlagen*, 26).

Смысл, в котором Фреге будет понимать их, будет заключаться в том, чтобы придать некоторое содержание понятию «о том, на чём в самых глубоких основаниях покоится оправдание признания суждения за истинное». Ибо это и есть то метафизическое понятие, от которого зависит его точка зрения. Я говорю «метафизическое», чтобы противопоставить зависимость, на которую он намекает, эпистемической зависимости. Может существовать иерархическая структура наших убеждений с иерархически репрезентированным отношением обоснования или оправдания, которое убеждения человека могут переносить друг на друга, т. е. отношением зависимости, которое действительно встречается и которое может различаться от человека к человеку, несмотря на то, что соответствующие убеждения сами могут быть близки к идентичности. Согласно некоторым взглядам, убеждения образуют такую структуру; согласно другим (например, холистским) — нет. Фреге имеет дело не с таким отношением, но с отношениями зависимости *между самими пропозициями*, независимо от того, убеждён ли в них кто-либо и каким образом эти убеждения соотносятся друг с другом в эпистемическом мире какого-либо индивида. Доказательство пропозиции (как минимум) включает её вывод из пропозиций, от которых она «зависит» в этом метафизическом смысле. Оно включает прослеживание её предшествующих линий зависимости до пропозиций, которые сами являются «фундаментальными» или «исходными» и не имеют доказательств и которые не могут быть сведены к более фундаментальным пропозициям*. Теперь я подведу баланс параграфа 3, в котором Фреге даёт свои определения и тем са-

* Интересно сопоставить установку Фреге на отношение между логическими аксиомами и математическими теоремами с установкой, которая выражена Расселом и Уайтхедом в следующем пассаже, взятом из предисловия ко второму изданию *Principia Mathematica* (A. N. Whitehead, B. Russell. *Principia Mathematica*, 2nd ed. (Cambridge, 1925), Vol. 1, P. V):

«...главный довод в пользу любой теории относительно оснований математики должен быть главным образом индуктивным, т. е. он должен покоиться на том факте, что рассматриваемая теория даёт нам возможность вывести обычную математику. В математике наибольшая степень самоочевидности не обнаруживается вполне с самого начала, но в некоторой более поздней точке; следовательно, предшествующие выводы, пока они не достигнут этой точки, дают основания скорее для веры в посылки, поскольку из них следуют истинные заключения, нежели для веры в заключения, поскольку они следуют из посылок».

мым фиксирует смысл вопросов: Являются ли пропозиции арифметики синтетическими или же аналитическими? Априорными или же апостериорными? Я посвящу итог моей статьи комментарию к этому абзацу.

Благодаря этому, если речь идёт о математической истине, вопрос переводится из области психологии в область математики. Теперь это зависит от того, чтобы найти доказательство и свести математическую истину к первичным истинам. Если на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной, причём предполагается, что при рассмотрении указаны также и предложения, от которых, возможно, зависит допустимость определения. Но если невозможно провести доказательство без использования истин, не имеющих общей логической природы, но относящихся к особой области науки, то предложение является синтетическим. Для того чтобы истина была апостериорной, требуется, чтобы её доказательство не удавалось без ссылки на факты; т. е. на недоказуемые истины, не обладающие всеобщностью, которые содержат высказывание об определённых предметах. Если, наоборот, возможно провести доказательство всецело из общих законов, которые сами не способны и не нуждаются в доказательстве, то истина является априорной (*Grundlagen*, 27).

Чтобы определить, является ли пропозиция аналитической, ищут её доказательство, в котором базовые пропозиции являются «исходными истинами», т. е. пропозициями, которые сами не имеют доказательства. Если такое доказательство существует (доказательство, в котором обращаются только к определениям и «исходным истинам») и привлекаемые исходные истины включают только законы логики, рассматриваемая пропозиция является аналитической. Если нет, синтетической. Таким образом, аналитическая пропозиция — это пропозиция, которая может быть доказана только из логических аксиом плюс определения. По крайней мере два аспекта этого определения заслуживают комментария.

Во-первых, Фреге включает в относящиеся к делу пропозиции, от которых зависит данная пропозиция, «предложения, от которых, возможно, зависит допустимость определения». Это — следствие его точки зрения, что определения должны не просто

вводиться в доказательство; доказательство не полно, если они также не обоснованы. (См. также *Grundlagen*, 22.) Много разных вопросов входят в суждение о допустимости определения, и столь же затруднительно было бы рассмотреть их здесь все. Фреге обсуждает по крайней мере следующие два: (а) Приведёт ли введение этого определения к противоречию? и (б) Будет ли введение этого определения продуктивным для доказательства — т. е. можем ли мы, используя его, доказать то, что не могли бы доказать без него (*Grundlagen*, 94)?

Включение этого элемента в определение аналитичности вводит для Фреге особую проблему, когда он обсуждает аналитичность законов арифметики. Она состоит в следующем. Естественно, отрицательный ответ на первый вопрос (Приведёт ли введение этого определения к противоречию?) или любой положительный ответ на второй (Будет ли доказательство продуктивным?) будет требовать доказательства, затрагивающего некоторый сорт индукции, вероятно, вплоть до ω , ω^2 или даже ε_0 . Если рассматриваемая пропозиция *сама имеет отношение к принципу индукции*, то либо (1) определения не затрагиваются в её доказательстве, и в этом случае она не сводима к арифметическим пропозициям и не является аналитической; или (2) определения затрагиваются, и как раз сама индукция является одним из принципов, от которых зависит эта пропозиция, поскольку некоторое обращение к индукции требовалось бы, чтобы продемонстрировать допустимость этих определений*. К несчастью, Фреге

* Если определения явные, то требование установления существования и единственности определённой сущности, которое Фреге навязывает в *Grundgesetze*, было бы достаточным, чтобы гарантировать, что система, включающая определение, была консервативным расширением первоначальной системы и, следовательно, непротиворечивой, если система была непротиворечивой до введения определений. Поэтому вопрос, является ли данный закон аналитическим, в лучшем случае зависит от того, являются ли законы, требуемые при доказательстве существования и единственности каждой определённой сущности, используемой в его доказательстве, сами законами логики. Я говорю «в лучшем случае» по двум причинам: (а) определения, которые не являются явными, но, возможно, контекстуальными, могут трактоваться как новые аксиомы, обоснованность которых требует по крайней мере необходимого аппарата, чтобы доказать непротиворечивость расширенной системы; (б) даже в простом случае эксплицитных определений, несмотря на то, что существование и единственность достаточны, чтобы гарантировать относительную непротиворечивость, я не уверен, что требование Фреге, чтобы определения

не рассматривает этот вопрос и оставляет понятие зависимости недостаточно определённым, чтобы решить эту проблему. Ибо являются ли *согласно определению Фреге* арифметические истины действительно аналитическими, зависело бы от того, достаточен ли «логический» принцип индукции — т. е. индукции в исходной логической записи, — чтобы установить допустимость определений, введённых в доказательство *математического* принципа индукции. Если нет, то арифметика *согласно определению Фреге* не является аналитической. Но это самый сложный вопрос, который не может быть здесь более полно изучен; я упомянул его как интересный и имеющий отношение к делу аспект фрегевского определения аналитичности.

Другой вопрос, который я должен прокомментировать (боюсь, также без окончательных выводов), также имеет дело с определениями. Если мы принимаем точку зрения, на которой я настаивал, что проблема *Grundlagen* состоит в том, чтобы доказать вероятность того, что можно найти доказательства прежде не вызывающих сомнений, но не доказанных арифметических пропозиций, и если мы всерьёз принимаем точку зрения Фреге, что поиск таких доказательств есть *математическая* проблема, подобная любой другой, то мы должны также рассматривать определения, которые использовались бы в этих доказательствах как математические определения, подобные другим математическим определениям. В *Grundlagen* Фреге не говорит нам явно, какие семантические условия этих определений должны встречаться. (Многое он говорит в *Grundgesetze*.) Здесь не место давать ни

были полностью обоснованы, не навязывает дальнейшего условия, чтобы было доказано, что существование и единственность были достаточны, чтобы гарантировать относительную непротиворечивость.

Эта путаница существует потому, что (по крайней мере, с синтаксической точки зрения) обоснование определений включает доказательство непосредственных комбинаторных теорем, чего-то такого, что, как давно показал нам Гёдель, часто эквивалентно самым трудным арифметическим вопросам, и даже хуже. Следовательно, если исходные законы, от которых зависит теорема, включают законы, на которых базируется обоснование определений, быть может, было бы лучше, чтобы теорема не являлась аналитической в смысле Фреге. В некотором смысле это несущественная придирка, ибо он может опустить это причиняющее беспокойство условие. Но этот вопрос важен для Фреге. Строгость в математике — это один из его наиболее мощных мотивов, и его упорствование в том, чтобы не использовать определения без обеспечения их надлежащим обоснованием, — тема, проходящая через всю его работу.

мой собственный позитивный отчёт о природе математических определений, ни то, каковой на это может быть позитивная точка зрения Фреге. Но то, что он говорит, несмотря на то, что остаётся открытым, какой позитивный отчёт предложил бы он, едва ли предоставляет определённые истолкования.

Определения являются не *просто* соглашениями о сокращении, ибо, если бы они были таковыми, в требовании продуктивности, процитированном выше, было бы мало смысла. Продуктивность была бы только психологической эвристикой, а не чем-то таким, чему Фреге придавал бы большое значение. Таким образом, даже если формально дефиниенс должен служить по крайней мере как «сокращение» для дефиниендума, важность и принципиальная роль определения должна лежать где-то ещё, кроме этой функции. А именно, канторовские определения трансфинитных чисел, которые сам Фреге цитирует и хвалит (с оговорками).

Сходным образом математические определения не отражают, как стандартно принимается, заранее существующую синонимию. Причин этому много. Помимо неопределённого статуса понятия синонимии в определении часто вводится новый термин, и, следовательно, здесь нет вопроса о заранее существующей синонимии. Но, что более важно, типичные и важные случаи математического определения именно того вида, который подразумевал Фреге, как раз и не подходят для этой модели. Обратимся к одному примеру, который комментирует сам Фреге, рассматривая теорию трансфинитных чисел Кантора. Фреге хвалит эту теорию как расширяющую наше знание, но мягко журит Кантора за апелляцию к «какому-то таинственному “внутреннему созерцанию”» (*Grundlagen*, 108) при развитии теории, «когда нужно стремиться добыть доказательство из определений, что, пожалуй, возможно» (*Grundlagen*, 108). Фреге затем добавляет: «Ибо, я думаю, предвидимо, как можно было бы определить эти понятия [следование в последовательности и число]» (*Grundlagen*, 108). Разумеется, чтобы ни утверждал здесь Фреге, он не утверждает, что Кантор проглядел возможность обращения к заранее существующей синонимии, относительно которой Фреге считает, что он может её предъявить. Анализ этого случая, который близок случаю с числом, усложнён. Но каким бы ни был корректный ответ, по-видимому, он не будет основываться ни на заранее существующей синонимии, ни на соглашениях о сокращениях.

Если упомянутые мною два случая исчерпывают виды определений, сохраняющих смысл или значение, остаётся открытым вопрос, используются ли определения этого вида в *Grundlagen* и его формальном двойнике *Grundgesetze*, если они адекватны и даже сохраняют *референцию*. Сам я в другом месте доказывал, что это не должно быть так*. Что думал Фреге? Я хотел бы указать на два пассажа, из которых, по-видимому, ясно, что по крайней мере для арифметики Фреге не ожидается, что посредством его определений сохраняется *даже референция*. Оба пассажа, которые я имею в виду, связаны с определением числа. Первый — это сноска к определению «числа, соответствующего понятию *F*» как «объёма понятия “равночисленно понятию *F*”» (*Grundlagen*, 92). В сноске, ключевой для слова «объём», читаем следующее:

Я полагаю, что вместо «объём понятия» можно было бы сказать просто «понятие». Однако возможно двоякое возражение:

1. Это находится в противоречии с моим прежним утверждением, что отдельное число является предметом, на что указывает определённый артикль в выражениях типа «[die] два» и невозможность говорить об однёрках, двойках и т. п. во множественном числе, а также благодаря тому, что число составляет только часть предиката указания на число.

2. Могут быть понятия равного объёма без того, чтобы совпадать.

Правда, теперь я держусь мнения, что оба эти возражения возможно было бы устранить; но здесь это может далеко увести. Я полагаю известным, что представляет собой объём понятия (*Grundlagen*, 92–93).

Это является в известной степени убедительным, если бы не необычность второго возражения Фреге, которое заключается в аргументе, что для числовых понятий понятия с идентичными объёмами не только не идентичны друг другу, но также не идентичны со своими объёмами. Это маловероятный ход для Фреге, если учесть его взгляды на различие между понятиями и объектами: понятия не могут быть идентичными чему-либо. Идентичность — это отношение, зарезервированное для объектов.

* P. Benacerraf. What Numbers Could Not Be.

Второй пассаж встречается в заключении, в качестве комментариев на то же самое определение:

Этот способ преодоления затруднения, пожалуй, не всюду найдёт одобрение, и многие предпочтут устранять эти сомнения другими способами. Так же и я не придаю решающего значения привлечению объёмов понятий (*Grundlagen*, 124).

Можно напомнить, в чём заключалось рассматриваемое «затруднение». Задав *контекстуальное* определение выражения «число, соответствующее понятию F » только для контекстов тождества, в которых обе стороны имеют одну и ту же форму — например, «число, соответствующее понятию F , равно числу, соответствующему понятию G », — Фреге отмечает, что для его определения оно должно фиксировать смысл всех контекстов, содержащих эту фразу. Например, адекватное определение предопределяло бы истинностное значение «число, соответствующее понятию “луны Юпитера”, идентично Агамемнону». Однако определения, предусмотренные до этого пункта, не предусмотрены для этой цели, и нужны дальнейшие спецификации. Фреге выбирает процитированное мною определение. Таким образом, именно в этом контексте — в контексте, наиболее подверженном критике при установлении, требовали Фреге, чтобы определения сохраняли референцию, — он отступает и допускает, что разные определения, обеспечивающие различные референты (вообще не совпадающие по объёму), также могут это делать. Всё обстоит так, как если бы математическая работа, связанная с определениями, уже была сделана, и всё, что требуется, было каким-то логическим упорядочиванием, важным, но не имеющим следствия для математики, и для всего, что имеет значение для математики, нечто можно было бы сделать равным образом хорошо многими различными способами. Мораль неизбежна. Не нужно даже сохранять референцию.

Нужно сказать даже более. Можно возразить, что во время *Grundlagen* Фреге не развил понятия смысла и референта в удовлетворительной степени, чтобы ответить на вопросы, которые я поставил относительно смысла, и, следовательно, что их не следовало бы ставить. Несмотря на то, что детали этого выходят за рамки данной статьи в данном случае, я уверен, те же самые вопросы могут быть поставлены относительно достижений Фреге

в *Grundgesetze*^{*}, которые достаточно поздние. Я набросаю свои доводы.

В *Grundgesetze* Фреге действительно завершает конструкцию, которую он только обещал в *Grundlagen*. Он конструирует систему, формальную в техническом смысле, фундаментальные принципы которой суть то, что он принимает за базовые законы логики, и из них он посредством определений выводит принципы, которые он прежде идентифицировал как фундаментальные законы арифметики. В процессе этой конструкции обнаруживаются некоторые пункты, выбор которых может быть сделан произвольно — произвольно в том смысле, что они не предопределены тем, что происходило ранее, но что, тем не менее, должно быть сделано уже ради полноты. Иллюстрацией будет служить следующий пример.

Фреге вводит то, что он называет «пробегами переменной», чтобы представить объём понятий. Он ставит условием, что две функции имеют один и тот же *пробег переменной*, если они имеют одно и то же значение для каждого аргумента. Если функция — это функция,

чьим значением всегда является истинностное значение, вместо «пробег значений функции» можно соответственно сказать «объём понятия»; и это, по-видимому, согласуется с тем, чтобы *понятие* прямо называть функцией, чьим значением всегда является истинностное значение (*Grundgesetze*, 36).

Пока всё хорошо. Единственное определяющее условие, которое он выдвигает для пробега значений, является контекстуальным — пробег значений двух функций был бы равным, если бы они имели одно и то же значение для каждого аргумента. Затем он отмечает, что ничто из того, о чём он говорил, не имеет отношения к тому, являются ли два истинностных значения, Истина и Ложь, сами пробегами значений, и если да, то которое из двух. Он подводит итог этой позиции:

Таким образом, без противоречия... [здесь он повторяет контекстуальное определение] всегда можно обусловить, что не-

* G. Frege. The Basic Laws of Arithmetic (trans. and ed. Montgomery Furth). Ссылки на эту работу будут даваться как на *Grundgesetze* с указанием страниц перевода.

кий произвольный пробег переменной должен быть Истиной, а другой — Ложью (*Grundgesetze*, 48).

Он затем отбирает частный случай и обуславливает, что он должен быть Истиной, а другой — Ложью. Проблема и её решение имеет в точности ту же самую форму, как и в случае чисел и объёмов понятий. И философские следствия являются теми же самыми. Если мы называем один из отобранных им случаев «Джордж», то у «Джордж = Истина» не было истинностного значения, пока он занимался отбором и пока «Джордж = Истина» в этом отборе приобретало Истину в качестве своего значения. Но отбери Фреге не Джорджа, а нечто другое, «Джордж = Истина» было бы ложно. Поскольку Джордж затем фигурирует в каждом пробеге значений, он фигурирует в объёме каждого (непустого) понятия. Не будь он удачлив в выборе, объём каждого понятия был бы иным.

Конечно, это не устанавливает какого-либо математического различия. Но то, что это не устанавливает никакого математического различия, имеет важную философскую суть, связанную с тем, что мы должны истолковать определения так, как это делает Фреге. Хотя я не могу продолжать здесь эту тему дальше, я надеюсь, эти примеры делают ясным, что непосредственно «реалистическое» истолкование намерений или достижений Фреге было бы ошибочным для оправдания его практики.

Как я и обещал, вывод неудовлетворителен. Представляется ясным, что определения для Фреге не являются многим из того, относительно чего мы могли бы подумать, что они могут этим быть. Но это оставляет неясным, чем по его мнению они являются. Соответственно, это оставляет неясным или, как минимум, точно не определённым его понятие аналитичности. Если мы принимаем точку зрения, что он просто требует, чтобы для арифметических пропозиций, которые мы прежде принимали без доказательств, были даны доказательства, то это понятие не хуже самого понятия математического доказательства, ибо трудно сказать, чем являются последние, но математики продуцируют и осмысливают их ежедневно. Конечно, это недостаточно хорошо для Фреге, который хотел вывести понятие математического доказательства из области интуиции и свести его к небольшому числу установленных формальных правил логики. Из этой дискуссии

мы усвоили, что он не достигнет успеха в достижении этой цели, пока не сделает того же самого для своего понятия определения.

Наконец, это приводит меня к фрегевскому понятию *a priori*.

Если возможно провести доказательство всецело из общих законов, которые сами не способны и не нуждаются в доказательстве, то истина является априорной (*Grundlagen*, 27).

Во-первых, для других авторов *a priori* имело определённую прямую связь с познанием. Для Фреге это не так, поскольку ничто в приведённом выше определении не предполагает, что какие-то априорные пропозиции познаваемы вообще, если не считать ссылку на факт, что предельные истины, из которых могут быть доказаны априорные пропозиции, сами *не нуждаются* в доказательстве. Но это скорее бессодержательно, поскольку нигде в *Grundlagen* Фреге не предлагает объяснение того, что должна означать потребность в доказательстве. Он утверждает, что именно арифметические пропозиции *делают*, а не основания (и это, видимо, принципиально для его убеждения), по которым они *восприимчивы* к доказательству.

Во-вторых, мне хотелось бы заметить, что идея пропозиций, не допускающих доказательства, производна от приписанной мной Фреге рационалистской концепции иерархии пропозиций, некоторые из которых являются абсолютно базовыми и образуют основание, на котором основываются все «другие». Он и в дальнейшем отдаёт предпочтение этой концепции, когда соглашается с критикой Ханкелем доктрины Канта, что числовые равенства конституируют бесконечное множество недоказуемых и самоочевидных пропозиций. Читатель, наверно, вспомнит, что Ханкель критиковал Канта за предположение, что числовые равенства все самоочевидны и всё же недоказуемы.

Ханкель оправданно называет предположение о бесконечной множественности недоказуемых первичных истин неуместным и парадоксальным. В самом деле, оно противоречит потребности разума в наглядности первых основоположений (*Grundlagen*, 13).

Должно быть только конечное (или легко контролируемое) число первых принципов, из которых могут быть выведены все другие априорные истины. Их обозримость есть предмет, которому Фреге не уделяет дальнейшего внимания, поскольку, я считаю, таковое требовало бы от него дать объяснение тому, как мы можем знать и действительно знаем то, что мы знаем, объяснение, которое принуждало бы его к обсуждению условий, при которых наши убеждения конституируют знание, т. е. к теме, которая, как он правильно осознаёт, повлекла бы определённые психологические исследования, но которую он (и, я думаю, ошибочно) выметает своей антипсихологической метлой. Но, как я говорил выше, это тема другой статьи.

Я закончу своё обсуждение параграфа 3 забавным, выбивающимся из общего подхода вопросом: Все ли аналитические истины, согласно определениям Фреге, являются априорными? Предположительно да, поскольку аналитическая истина, т. е. истина, чьё доказательство привлекает только первые принципы логики (и определения), и априорная истина, т. е. истина, которая может быть доказана исключительно из общих законов, не нуждаются и не требуют доказательства. Очевидно, Фреге верил, что они являются таковыми *par excellence*. Но как раз ясно: Фреге верил, что он показал, что все арифметические истины являются аналитическими. Это порождает проблему, ибо из этого вытекает, что есть множество логических первых принципов, из которых могут быть выведены все арифметические истины при использовании только определений и принципов логического вывода. Характеристики, данные Фреге природе логического доказательства, делают ясным, что понятие доказательства, которое он подразумевал, является «эффективным» в техническом смысле. Таким образом, если все арифметические истины являются аналитическими, тогда есть множество логических истин, из которых все арифметические истины выводимы эффективно. Но из этого следует, что если логика рекурсивно аксиоматизируема, то таковой является и арифметика. А из первой теоремы Гёделя о неполноте мы знаем, что арифметика таковой не является. Отсюда следует, что таковой не является и логика, что бы ни принималось за логику, поскольку считается, что она адекватна выводу арифметики. Но раз уж логика не является рекурсивно аксиоматизируемой, то её первые принципы конституируют «бесконечную множественность недоказуемых первичных истин», и, следовательно, она «неуместна и пара-

доксальна» и, таким образом, «противоречит потребности разума». Итак:

или

(1) не все арифметические истины аналитические;

или

(2) не все логические истины априорны (хотя все они тривиально аналитичны);

или

(3) вероятно, концепция бесконечной множественности недоказуемых первичных истин вообще неуместна и парадоксальна.

Ни один из указанных выше пунктов не достаточен для установления позиции Фреге, ибо я думаю, что он серьёзно относится ко всем трём точкам зрения. На самом деле, я считаю, что в философской мотивации *Grundlagen* многое образует для него их конъюнкция. Я доказываю, что его попытка установить аналитичность арифметики не должна истолковываться как попытка вступить в продолжающиеся философские дебаты между Кантом и эмпирицистами и что на самом деле само его объяснение вопроса уходит с этой арены. Скорее это была попытка доказать пропозиции, которые ещё должны быть доказаны, относительно которых он верил, что они *могут* быть доказаны, и относительно которых он верил, что их *следует* доказать. Конечно, многие резоны для осуществления этой попытки обеспечивались его общим взглядом на доказательство, на роль логики в доказательстве и на иерархическую структуру всех априорных пропозиций.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье я не касался большинства стимулирующих и важных разделов *Grundlagen*: т. е. реального обсуждения Фреге понятий арифметики. Скорее я сконцентрировался на том, чтобы попытаться поместить это обсуждение в философский кон-

текст, которому, как я думаю, это принадлежит. *Grundlagen* была написана в гораздо большей степени как работа по математике, чем это обычно допускается. Или, учитывая автобиографический контекст, чем я предпочитал думать. Итак, на мой взгляд, *Grundlagen* не только не являются работой в кантианско-эмпирицистской традиции, принимая как её принципиальную цель опровержение или установление дискуссионных философских доктрин, Фреге только по случаю рассматривал её как философскую работу. При обсуждении «философских» тем он не переопределяет некоторые философские понятия с тем, чтобы вопросы, выработанные в их рамках, имели математические ответы. Фреге объясняет предприятие *Grundlagen* как прежде всего и по преимуществу математическое, где проблемы центральны для математики. И он рассматривает аргументацию *Grundlagen* просто как набросок существенного ответа на проблему доказательства в прошлом не доказанных арифметических пропозиций. Успешно дополняя эту цель, он по случаю отвечал на то, что, по-видимому, составляет философский вопрос: Являются истины арифметики аналитическими или синтетическими? Но только впоследствии, переистолковав этот вопрос, он подходит к своим собственным целям. *Grundlagen* содержит лишь набросок, поскольку здесь Фреге не даёт строгих доказательств. Это он оставляет на потом, но это должно быть сделано:

Требование избежать скачка в выведении следствий неопровержимо (*Grundlagen*, 112).

Философия привходит как удобное средство для поддержки его утверждения, что арифметические пропозиции должны быть *доказаны*. Поэтому в начале параграфа 4 мы находим вывод, который, как он думает, следует сделать из его соображений, представленных в параграфе 3, над которыми мы работали на всём протяжении статьи:

Исходя из таких философских вопросов, мы приходим к тем же самым требованиям, которые независимо от этого вырастают в области самой математики: доказать с наибольшей строгостью, если только возможно, основные предложения арифметики... (*Grundlagen*, 27).



СИБИРСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Для писем: 630058, Россия, г. Новосибирск, а/я 134
Тел./факс: (383) 332-52-32

Отдел продаж: sales@sup99.ru
Москва: (495) 661-09-96
Новосибирск: (383) 330-50-19

Книга – почтой: post_book@sup99.ru

Информация для авторов, актуальный прайс-лист и подробное
описание продукции издательства – на официальном сайте
www.sup99.ru

Научное издание

Готлоб Фреге

ЛОГИКО-ФИЛОСОФСКИЕ ТРУДЫ

Заказывающий редактор *В. В. Иткин*
Оформление серии *В. В. Иткин*
Менеджер проекта *Т. П. Панова*
Корректоры *Л. А. Федотова, М. А. Русанова*
Обложка *В. А. Кривобоков*
Компьютерная верстка *И. В. Мелехов*

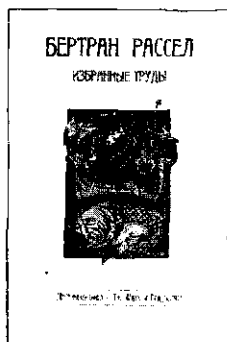
*Соответствует гигиеническим требованиям к книжным изданиям
(сан.-эпид. закл. № 54.НС.05.953.П.013186.12.05 от 26.12.05)*

Подписано в печать 22.05.08. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Варнок.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 13,8. Тираж 1500 экз. Заказ № 269.

Сибирское университетское издательство
630117, Новосибирск, ул. Арбузова, 1/1

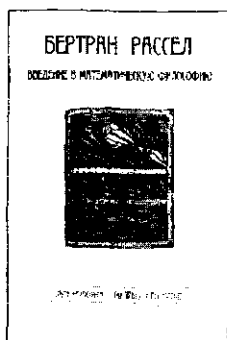
Отпечатано в типографии
Сибирского университетского издательства
630117, Новосибирск, ул. Арбузова, 1/1

«Сибирское университетское издательство»
ПРЕДСТАВЛЯЕТ:



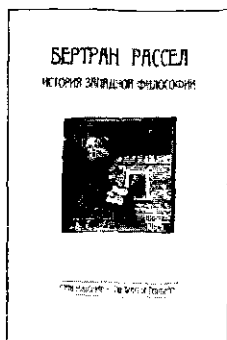
Бертран Рассел
Избранные труды

Об обозначении
Проблемы философии
Философия логического атомизма
О пропозициях; что они собой представляют
и каким образом обозначают



Бертран Рассел
**Введение
в математическую
философию**

Математическая логика,
основанная на теории типов
В. О. Куайн
Расселовская теория типов
К. Гёдель
Расселовская математическая логика



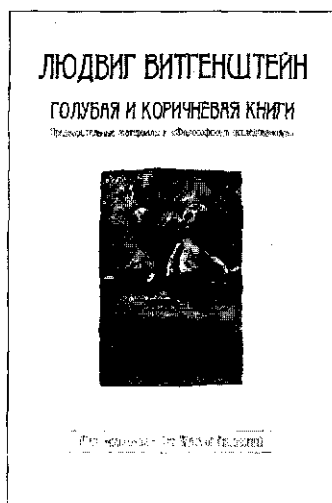
Бертран Рассел
**История западной
философии**

Серия «Пути философии —
The Ways of Philosophy»



ГОТОВИТСЯ К ВЫХОДУ:

Людвиг Витгенштейн
Голубая и коричневая книги
Предварительные материалы
к «Философским исследованиям»



В данном издании публикуются лекции и заметки Людвиг Витгенштейна, явившиеся предварительными материалами для его «Философских исследований», одного из основных философских произведений XX века. «Голубая книга» представляет собой конспект лекций, прочитанных Витгенштейном студентам в Кембридже в 1933–1934 гг. «Коричневая книга» была также надиктована философом его кембриджским ученикам. Именно здесь Витгенштейн пытается в популярной форме рассказать о ключевых для его поздней философии темах, а также дает подробный перечень и анализ языковых игр (в дальнейшем он не будет останавливаться на их детализации столь подробно).

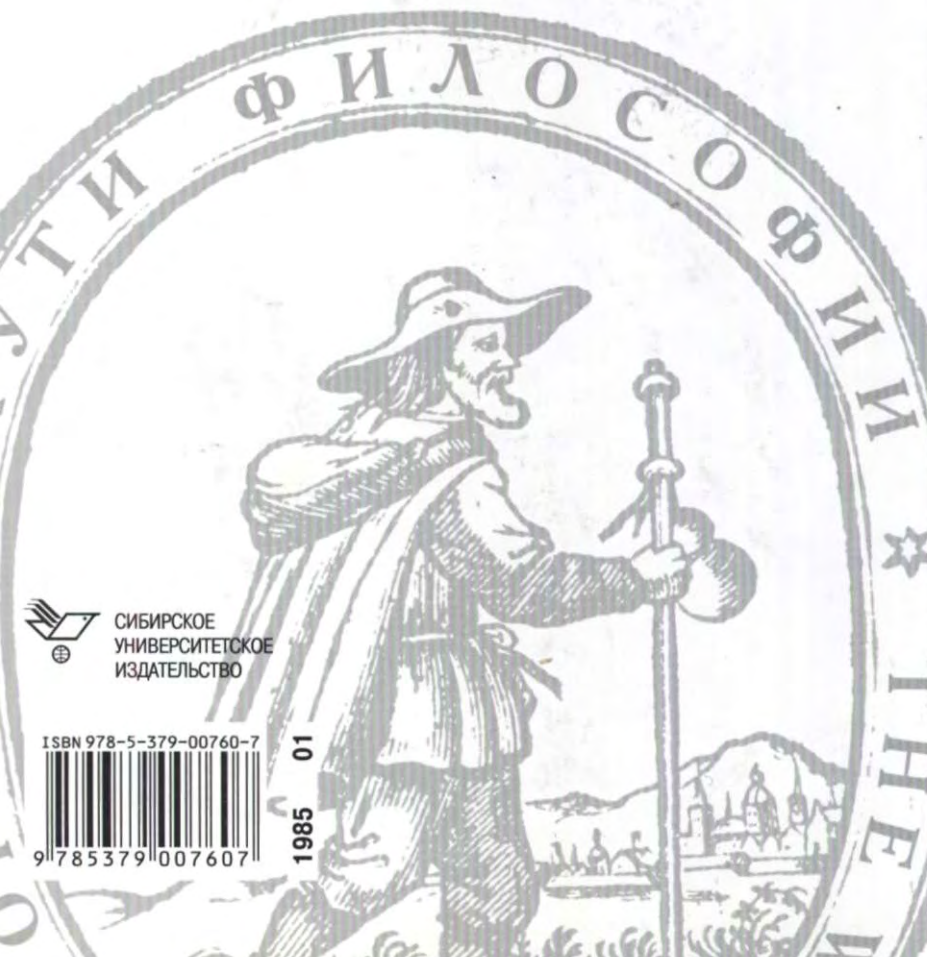
«Голубая и коричневая книги», классические тексты позднего Витгенштейна, дают нам возможность окунуться в необычный философский «поток сознания» и из первых рук узнать о размышлениях человека, который коренным образом изменил ход современной философии.

Серия «Пути философии —
The Ways of Philosophy»





Фридрих Людвиг Готлоб ФРЕГЕ (8 ноября 1848, Висмар — 26 июля 1925, Бад-Клайнен) — немецкий логик, математик и философ. Родоначальник аналитической философии. Профессор Йенского университета (1879–1918). Дал первую аксиоматику логики высказываний и предикатов, построил первую систему формализованной арифметики. Один из основоположников логической семантики. Сошел с ума и умер в нищете.



СИБИРСКОЕ
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ISBN 978-5-379-00760-7



9 785379 007607

1985 01