Готлоб Фреге

ОСНОВОПОЛОЖЕНИЯ АРИФМЕТИКИ

ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ О ПОНЯТИИ ЧИСЛА

Перевод В.А. Суровцева

Томск: Издательство «Водолей», 2000

ЛОГИЦИСТСКАЯ ПРОГРАММА Г.ФРЕГЕ

К середине XIX века усилиями ряда мыслителей стал, наконец, проясняться характер связи математики и логики, единство которых было предугадано ещё Г.Лейбницем. Осознание тесной связи пришло со стороны математиков. Первый шаг на этом пути был сделан трудами англичан А. де Моргана и Дж. Булля. Предложив алгебраическую интерпретацию логических отношений, они создали предпосылки для создания математизированной логики, которая нашла своё окончательное выражение в трудах немецкого математика Э. Шредера. Рассматриваемая как раздел алгебры логика предстала здесь как совокупность вычислительных процедур, распространённых с отношений между переменными величинами на отношения между переменными содержаниями. Однако, несмотря на зримые достижения, такой подход таил одно парадоксальное следствие. С одной стороны, логика представлялась разделом математики; с другой стороны, понимаемая как наука об универсальных законах мышления, логика должна была оправдать, в том числе и математические рассуждения. Выход из ситуации был найден великим немецким логиком Г. Фреге, который взамен математизированной логики предложил логизированную математику.

Несмотря на исключительную новизну предложенного решения, суть новаций не выходила за рамки внутренних интенций развития современной математики. Создание неколичественной алгебры, теории трансфинитных чисел и т.д. всё более зримо указывало на отсутствие связи между математическими положениями и эмпирическим исследованием. Наличие независимых друг от друга, но в равной степени обоснованных теорий типа неэвклидовых геометрий требовало нового обоснования специфики математического рассуждения. Таким образом, математика всё более утрачивала эмпирическую основу, что приводило к двум важным следствиям. Во-первых, математические символы всё более и более теряли конкретную связь с пространственными и количественными отношениями, приобретая формальный характер, более свойственный логике, которая, отвлекаясь от содержания мысли, оперирует чистыми формами, репрезентирующими последовательность рассуждений. Математика становится наукой о порядке. Во-вторых, математическое знание более не рассматривается как совокупность истин об особом роде предметов, как считалось со времён Платона, а понимается как выведение следствий. Математики отказываются от понимания истины как определённой адеквации между продуцируемым ими знанием и действительностью. Критерием истины становится непротиворечивость следствий, полученных из исходных постулатов. Стало быть, и в этом отношении логика, как анализ непротиворечивости рассуждения, приобретает исключительное значение. Оба следствия по существу содержат требование логического прояснения лежащих в основании математики понятий. Исследование должно выявить их структурные особенности, обеспечивающие возможность сугубо формального подхода, и гарантировать непротиворечивость формулируемых с их помощью постулатов.

В этом русле как раз и развиваются идеи Г.Фреге, который ставит перед собой проблему выяснения того, как далеко можно продвинуться в арифметике только с помощью умозаключений. Свою задачу он видит в том, чтобы свести основное понятие арифметики "упорядочивание в ряд" к логической последовательности и на этом пути объяснить понятие числа. Отсюда возникает своеобразная программа создания логизированной математики, получившая название логицизма. В общем виде эта программа результируется в двух принципах: во-первых, все понятия арифметики должны быть определены с помощью понятий логики и, следовательно, все утверждения арифметики должны быть преобразованы в утверждения логики; во-вторых, в результате такого перевода все истины арифметики должны стать истинами логики. Если учесть, что вся математика может быть сведена к арифметике, данная программа представляет собой проект последовательного выведения всего математического знания из логического. Однако решению этой основной задачи мешало одно препятствие. Дело в том, что язык, обычно применяемый математиками в своих рассуждениях, обладал значительными недостатками, связанными как с естественными эквивокациями, которые не устранялись математическими символами, поскольку для их связи всё ещё использовались выражения обыденного языка, так и с энтимемичностью, скрывающей полную совокупность умозаключений, приводящих к требуемому следствию. Этот недостаток невозможно было устранить и средствами, предлагаемыми традиционной логикой, поскольку её язык не приспособлен для выражения фундаментальных для математики понятий, например понятия отношения. Устраняя этот недостаток, Фреге дополняет логицистскую программу задачей создания новой логики, решение которой рассматривается как необходимое введение. На этом пути в первой крупной работе *Шрифт понятий* (1879)[1] немецкий логик фактически создаёт современную логику, которая замышлявшаяся как средство анализа математического рассуждения стала универсальным средством исследования любого языка.

Предлагаемая читателю в русском переводе вторая крупная работа Г. Фреге *Основоположения арифметики* (1884) решает задачи, связанные непосредственно с логицистской программой. Здесь решается проблема выражения с помощью собственно логических терминов основного арифметического понятия. Определяющая дистинкция между понятием и предметом, достигнутая в первой работе, используется как мощное орудие разрешения парадоксов интерпретации числовых операций и арифметических законов. Критикуя предшествующие способы обоснования чисел - от психологизируюшего реализма до формализма, - немецкий логик основывает своё исследование на специфике структуры понятия, рассматривая число как отражение особенностей этой структуры. Число предстаёт как свойство понятия, которое далеко отстоит как от психологической ассоциации представлений, так и от простого оперирования значками. Сведение числа к свойству понятия позволило: во-первых, рассмотреть способы рассуждения, ранее считавшиеся сугубо математическими (например, принцип математической индукции), как разновидность логического метода получения следствий, и, во-вторых, объяснить природу трансфинитных и комплексных чисел, существование которых казалось парадоксальным. Таким образом, арифметика получала столь необходимое ей достоверное основание, которое связывалось с очевидностью логического знания.

---

[1] *Фреге Г.* Шрифт понятий //Методы логических исследований. Тбилиси: Мецниереба, 1987. С 83-151.

Несмотря на то, что осуществление задач, поставленных Г.Фреге, в целом носит технический характер и на первый взгляд далеко отстоит от насущных проблем философии, их реализация имеет исключительный характер, в том числе и для последней. Со времён И.Канта истины математики и логики считались истинами совершенно различных типов, проходя под рубрикой синтетических и аналитических соответственно. Успешная реализация логицистской программы потребовала бы пересмотра характера всего знания, устранив из области математики созерцание.

Наиболее полно идеи, первоначально представленные в *Шрифте понятий* и *Основоположениях арифметики*, нашли своё окончательное выражение в капитальном труде (1893-1902) *Основные законы арифметики*[1]. Фреге считал свою миссию практически законченной, но как раз тогда английским философом и логиком Б.Расселом был обнаружен парадокс, показавший, что технические методы, которые разрабатывал и, как представлялось, успешно применял немецкий логик, таили в себе глубокое противоречие. С этого момента программа логицизма становится практически исключительной прерогативой Рассела, который представил её в реформированном виде в подготовленном совместно с А. Уайтхедом трёхтомном труде *Principia Mathematica* (1910-1913)[2]. По иронии судьбы логизированная математика становится делом англичан, поменявшись ролями с математизированной логикой, которая, возникнув в Англии, нашла своё завершение в Германии.

Однако обнаружение технических парадоксов ни в коей мере не отменяет значимость работы немецкого логика. Несмотря на то, что на дальнейшее развитие логики и математики пропедевтическая задача создания новой логики оказала гораздо большее влияние (новые средства формального анализа, предложенные Г.Фреге, фактически лежат в основании всех последующих разработок символической логики и могут рассматриваться как достижение, по существу независимое от логицизма), чем сама логицистская программа, как и всякая новаторская работа *Основоположения арифметики* содержит идеи, вошедшие в необходимый арсенал современных философских методов. Эта книга способствовала глобальной реформе в области философии математики, философии языка и теории познания. В исследованиях по символической логике и основаниях математики ссылки на эту работу присутствуют в обязательном порядке. Для философских школ аналитического направления данный труд по многим вопросам до сих пор остаётся определяющим. Определение понятия числа с точки зрения логических понятий представляет собой классическую модель редукции одной области знания к другой, которая до сих пор служит как образцом для исследований подобного рода, так и примером реализации критических усилий философов и математиков различных школ и направлений. Последовательная критика психологизма привела к значительному изменению структуры и формы теории познания, возродив, в противовес субъективизации описания познавательных процессов, так называемый "реализм" в логике и математике, который оказал значительное влияние на феноменологию. Ряд принципов (например, принцип контекстности), сформулированный Г.Фреге в данной работе, до сих пор служит руководством для исследований в области лингвистической философии и языкознания.

При жизни Г.Фреге сетовал на непонимание ввиду технической сложности и оригинальности высказываемых им идей. Возможно, именно это сохраняет свежесть их восприятия современным читателем и служит поводом к новой интерпретации, зачастую далеко отстоящей от оригинального источника.

В.А.СУРОВЦЕВ

---

[1] *Frege G.* Grundgesetz der Arithmetik, Bd.1.Jena,1893;Bd.2.Jena,1902.

[2] В сокращённой и свободной от технических деталей форме основные идеи этой работы можно найти в книге: *Рассел Б.* Введение в математическую философию. М.: Гнозис, 1996.

Die

Grundlagen der Arithmetik

eine logish mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl

VON

Dr. G.FREGE

a.o. Professor an der Universität Jena

Breslau
Verlag von Wilhelm Koebner
1884

СОДЕРЖАНИЕ

§24. Обширная применимость числа. Милль. Локк. Бестелесная метафизическая фигура у Лейбница. Если число являлось бы чем-то чувственным, оно не могло бы быть присуще нечувственному.

§25. Физическое различие между 2 и 3 у Милля. Согласно Беркли, число не есть реальное в вещах, но является созданием духа.

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ЧИСЛО ЧЕМ-ТО СУБЪЕКТИВНЫМ?

§26. Описание числообразования у Липшица не подходит и не может заменить определение понятия. Число является не предметом психологии, но чем-то объективным.

§27. Число не является представлением места объекта в ряду, как хочет Шлёмильх.

ЧИСЛО КАК МНОЖЕСТВО

§28. Тома о придании имени.

III. МНЕНИЯ О ЕДИНИЦЕ И ОДИН

§29. Многозначность выражений «*Μονάς*» и единица. Объяснение Э.Шрёдером единицы как подлежащего счёту предмета, по-видимому, бесцельно. Прилагательное «один» не содержит более близкого определения и не может служить в качестве предиката.

§30. После попытки определения Лейбница и Баумана понятие единицы кажется совершенно расплывчатым.

§31. Признак неделимости и отграниченности у Баумана. Идея единицы не даётся нам каждым объектом (Локк).

§32. Язык всё же указывает на связь с неделимостью и отграниченностью, однако, при этом изменяется смысл.

§33. Нераздельность (Г.Кёпп) – неустойчивый признак единицы.

РАВНЫ ЛИ ЕДИНИЦЫ ДРУГ ДРУГУ?

§34. Равенство, как основание имени «единица». Э.Шрёдер. Гоббс. Юм. Тома. Понятие числа не возникает абстрагированием от различия вещей, и благодаря ему вещи не становятся равными.

§35. Если речь должна идти о множественности, различие даже необходимо. Декарт. Э.Шрёдер. Ст.Джевонс.

§36. Точка зрения на различие единиц также наталкивается на затруднения. Различие однёрок у Ст.Джевонса.

§37. Объяснение числа с точки зрения единицы или однёрки у Локка, Лейбница и Хессе.

§38. «Однёрка» является собственным именем, «единица» – понятийным словом. Число нельзя определить в качестве единиц. Различие «и» и +.

§39. Трудность, примирить равенство единиц с их различимостью, скрыта многозначностью слова «единица».

ПОПЫТКИ ПРЕОДОЛЕТЬ ЗАТРУДНЕНИЕ

§40. Пространство и время как средство различия. Гоббс. Тома. Противоположная точка зрения: Лейбниц, Бауман, Ст.Джевонс.

§41. Цель не достигается.

§42. Место в ряду как средство различия. Полагание у Ханкеля.

§43. Замещение предметов знаками 1 у Шрёдера.

§44. Джевонс об отвлечении от характера различия с удержанием его просто как факта. 0 и 1 являются числами, как и все остальные. Затруднение остаётся.

РЕШЕНИЕ ЗАТРУДНЕНИЯ

IV. ПОНЯТИЕ ЧИСЛА

КАЖДОЕ ОТДЕЛЬНОЕ ЧИСЛО ЯВЛЯЕТСЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ ПРЕДМЕТОМ.

ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ ПОНЯТИЕ ЧИСЛА, НЕОБХОДИМО УСТАНОВИТЬ СМЫСЛ РАВЕНСТВА ЧИСЕЛ.

ДОПОЛНЕНИЕ И ПРОВЕРКА НАШЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Если мы зададим вопрос, что такое число один, или что обозначает знак 1, то большей частью получим ответ: Наверное, какую-то одну вещь. И если затем мы укажем на то, что предложение

«(die) Число один есть (ein) вещь»

не является определением, поскольку с одной его стороны стоит определённый артикль, а с другой - неопределённый, что это предложение означает только то, что число один относится к вещам, но не то, какой вещью оно является, нам, вероятно, предложат выбрать для себя какую-нибудь вещь, которая называлась бы одной. Но если каждый в праве понимать под этим именем то, что ему хочется, тогда одно и то же предложение об один означало бы различное для разных людей; у таких предложений не было бы общего содержания. Некоторые, вероятно, отклонят вопрос ссылкой на то, что значение буквы а в арифметике тоже нельзя указать; и если говорят: а означает число, то в этом можно найти те же самые изъяны, как и в определении: один есть число. При ссылке на а отвод вопроса совершенно оправдан: она не означает определённого, заданного числа, но служит для того, чтобы выразить общность предложений. Если вместо а в $a + a - a = a$ подставить любое, но всюду одно и то же число, то всегда получится истинное равенство. Буква а используется в этом смысле. Но с один дело обстоит существенно иначе. Можем ли мы в равенстве $1 + 1 = 2$ вместо 1 в обоих случаях подставить один и тот же предмет, скажем, Луну? Напротив, кажется, что вместо первой 1 мы должны поставить нечто другое, чем вместо второй. В чём же дело, что здесь должно происходить как раз то, что в том случае было бы ошибкой. Чтобы выразить отношения между разными числами, арифметика не обходится одной буквой а, но должна использовать ещё и другие (b, с и т.д.). Таким образом, следовало бы полагать, что знака 1, если он сходным образом служит для придания общности предложениям, также могло бы не хватать. Но разве число один не выглядит как определённый предмет с заданными свойствами, например, оставаться неизменным при умножении на само себя? В этом смысле нельзя задать свойства а, поскольку то, что высказывается об а, есть общее свойство чисел, тогда как $1^1=1$ ничего не высказывает ни о Луне, ни о Солнце, ни о Сахаре, ни о Тенерифском пике, ибо, что могло бы быть смыслом такого высказывания?

На такие вопросы, пожалуй, и большинство математиков не готовы дать удовлетворительного ответа. Не постыдно ли науке так и пребывать в неясности о её первейшем и, по-видимому, таком просто предмете? Ещё менее можно сказать, что такое число. Когда понятие, которое лежит в основании обширной науки, преподносит затруднения, неотложная цель, пожалуй, всё-таки состоит в его более тщательном исследовании и преодолении этих затруднений; пока осмотр основания всего строения арифметики всё ещё остаётся недостаточным, особенно трудно здесь, быть может, удастся придти к полной ясности относительно отрицательных, дробных и комплексных чисел.

Многие, правда, сочтут, что это не стоит труда. Ведь с этим понятием, как они полагают, достаточно иметь дело в элементарных руководствах и на этом успокоится на всю жизнь. Кто поверит, что в таком простом деле всё ещё можно чему-то научиться! Ибо понятие положительного целого числа так свободно от всяких затруднений, что и ребёнок может обращаться с ним научно исчерпывающе и что каждый без дальнейших размышлений и без знакомства с тем, что думали другие, точно знает в нём толк. Так что часто недостаёт того первого предварительного условия обучения: знание незнания. В результате всё ещё довольствуются грубым пониманием, хотя уже *Гербарт* учил правильнее[1]. Печально и обескураживающе, что знание, которое уже было достигнуто, всегда, таким образом, находится под угрозой опять пропасть, что так много работы кажется напрасной, поскольку человек в воображаемом богатстве уверен в ненужности усвоения её результатов. Я хорошо вижу, что также и данная работа подвержена такой опасности. Мне противна та грубость понимания, когда счёт называется комбинаторным, механическим мышлением[2]. Я сомневаюсь, что такое мышление вообще существует. Комбинаторное воображение, наконец, даже может быть утрачено, но для счёта это не имеет значения. По существу мышление всюду одинаково; ведь различные виды мышления не принимаются в расчёт сообразно предметам. Различия заключаются только в большей или

---

[1] Herbart, Sämmtliche Werke, herausgegeb. von Hartenstein, Bd.X, 1 Thl. Umriss pädagogischer Vorlesungen §252, Anm.2: «Двойка означает не две вещи, но удвоение» и т.д.

[2] K.Fischer, System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, z. Aufl. §94.

меньшей чистоте и независимости от психологических влияний и от внешней помощи мышлению такой, как язык, знаки чисел и т.п.; затем, кое-что ещё зависит от тонкостей в строении понятия, но как раз во внимании к этому математику не могут превзойти ни наука, ни сама философия.

Из данного сочинения можно усмотреть, что даже кажущийся собственно математическим вывод от n к n + 1 покоится на общих логических законах, что нет нужды в особых законах комбинаторного мышления. Можно, конечно, употреблять числовые знаки механически, как можно говорить подобно попугаю; но всё-таки едва ли так можно назвать мышление. Употреблять числовые знаки механически возможно только после того, как посредством действительного мышления математический знаковый язык разовьётся так, что он, как говорят, мыслит за нас. Последнее не доказывает, что числа образуются особым механическим способом, скажем, как куча песка образуется из гранул кварца. Я думаю, в интересах математиков противиться такому воззрению, которое удобно для того, чтобы принизить главный предмет их науки, а с тем и её саму. Но даже у математиков находятся вполне сходные изречения. Напротив, за понятием числа должно признать более тонкую структуру, чем у большинства понятий других наук, хотя оно и является простейшим арифметическим понятием.

Чтобы опровергнуть то заблуждение, что при ссылке на положительные целые числа собственно вовсе нет противоречий, но царит совершенное согласие, мне кажется подойдёт обсуждение мнений философов и математиков о вопросах, подлежащих здесь рассмотрению. Будет видно, как мало оказывается согласия, так что встречаются прямо противоположные изречения. Одни, например, говорят: «Единицы равны друг другу»; другие считают их за различные; для своих утверждений и те, и другие имеют основания, которые нельзя отклонить на скорую руку. Этим я стараюсь пробудить потребность в более тщательном исследовании. Одновременно я хочу посредством предварительного освещения явных воззрений других расчистить поле для своего собственного понимания, с тем, чтобы сразу убедить, что эти другие пути не ведут к цели, и что моё мнение не является равноправным среди многих; и я надеюсь, таким образом, окончательно решить вопрос, по крайней мере, в главном.

Конечно, благодаря этому мои пояснения, пожалуй, станут более философскими, чем может показаться уместным многим математикам; но основательное исследование понятия числа всегда должно проходить несколько философски. Для философии и математики эта задача является общей.

Если совместная работа этих наук, несмотря на множество атак с обеих сторон, не является столь успешной, как хотелось бы и как, пожалуй, могло бы быть, то это, как мне кажется, зависит от преобладания в философии психологических способов рассмотрения, проникающих даже в логику. С данной тенденцией математика вовсе не имеет точек соприкосновения, и этим легко объясняется антипатия многих математиков к философскому рассмотрению. Когда, например, *Штриккер*[1] называет представления чисел моторными, зависящими от мускульных ощущений, то в этом математики не могут опознать свои числа и не знают, как приниматься за такое предложение. Арифметика, основанная на мускульных ощущениях, конечно, оказалась бы вполне чувственной, но в результате также и столь же расплывчатой, как и это основание. Нет, арифметика вовсе не должна работать с ощущениями. И столь же мало с внутренними образами, сливающимися из следов более ранних чувственных впечатлений. Переменчивость и неопределённость, характеризующие все эти образования, находятся в сильном контрасте с определённостью и устойчивостью математических понятий и предметов. Можно ведь и с пользой рассматривать представления и их изменения при математическом мышлении; но психология не должна воображать, что она может внести какой-то вклад в обоснование арифметики. Для математиков как таковых эти внутренние образы, их происхождение и изменение безразличны. Сам *Штриккер* говорит, что при слове «сто» он не представляет себе ничего более, кроме знака 100. Другие могут представлять себе букву С или что-то ещё. Не следует ли отсюда, что эти внутренние образы в нашем случае для существа дела совершенно безразличны и случайны, так же случайны, как и то, что чёрная доска и кусок мела вообще не заслуживают называться представлением числа сто? Всё же в таких представлениях не следует видеть существо дела! Не следует принимать описание того, как возникает представление, за определение, не следует принимать указание на душевные и телесные условия, приводящие предложение к сознанию, за доказательство, и не следует смешивать процесс, в котором предложение становится мыслимым, с

[1] Stricker, Studien über Association der Vorstellungen. Wien 1883.

его истинностью! Необходимо, как кажется, помнить, что предложение, когда я его более не мыслю, перестаёт быть истинным столь же мало, как уничтожается Солнце, когда я закрываю глаза. Иначе мы пришли бы к тому, что при доказательстве теоремы Пифагора нужно учитывать фосфорное содержание нашего мозга и что астроном не распространяет свои заключения на давным-давно прошедшие времена, опасаясь возражения типа: «Ты вот считаешь, что $2 \times 2 = 4$; но ведь представление числа имеет развитие, историю! Можно сомневаться в том, было ли оно в те далёкие времена. Откуда ты знаешь, что в том прошлом это предложение уже имело место? Разве не могли существа, жившие в те времена, придерживаться предложения $2 \times 2 = 5$, из которого предложение $2 \times 2 = 4$ развилось лишь посредством естественного отбора в борьбе за существование и которому в свою очередь, может быть, назначено тем же самым способом развиться в $2 \times 2 = 3$?» Est modus in rebus, sunt certi denique fines![1] Исторический способ рассмотрения, прислушивающийся к становлению вещи и из становления старающийся познать её сущность, определённо во многом оправдан; но он также имеет и свои границы. Если все вещи не были бы прочными и вечными, а находились в постоянном потоке, то мир перестал бы быть познаваемым и всё перепуталось. Кажется, думают, что в отдельной душе понятия возникают также как листья на деревьях, и полагают, что их сущность можно познать, исследуя их возникновение, и ищут их объяснение психологически в природе человеческой души. Но такое понимание переводит всё в субъективное и, если следовать ему до конца, упраздняет истину. То, что называют историей понятия, является, пожалуй, историей или нашего познания понятия, или значений слов. Познать понятие в его чистоте, освободить его от чуждых наслоений, скрывающих его от духовного взора, впервые удаётся посредством значительной духовной работы, которая может продолжаться в течение столетий. Ну и что же следует сказать на то, когда кто-нибудь вместо того, чтобы продолжать эту работу, если она выглядит ещё незаконченной, считает её за ничто, идёт в детскую или переносит себя на мыслимые древнейшими ступени развития человечества, чтобы там, подобно *Дж.С.Миллю*, открывать арифметику пряников и булыжников! Не хватает только того, чтобы приписать приятным вкусовым качествам пироженного особое значение для понятия числа. Это прямо противоположно разумным методам и в любом случае нематематично настолько, насколько возможно. Ничего удивительного, что математики не желают знать об этом! Вместо того чтобы искать особую чистоту понятий там, где поблизости предполагается их источник, всё видится расплывчатым и неразличимым, как в тумане. Всё обстоит так, как если кто-нибудь, чтобы разузнать об Америке, хотел бы вернуться в ситуацию Колумба, когда тот увидел первый сомнительный отблеск своей предполагаемой Индии. Конечно, такое сравнение ничего не доказывает; но оно, надеюсь, поясняет моё мнение. Ведь может быть и так, что история открытий во многих случаях является полезной как подготовка для дальнейших исследований; но она не может занять их место.

Что касается математиков, борьба с подобными мнениями, пожалуй, вряд ли необходима; но ведь по возможности я хочу излагаемые спорные вопросы привести к разрешению также и для философов, и вынужден в некоторой степени связываться с психологией, хотя и только для того, чтобы предотвратить её вторжение в математику.

Впрочем, даже в учебниках по математике случаются психологические обороты. Когда чувствуют обязанность, но не могут, дать определение, то хотят, по крайней мере, описать способ, которым приходят к соответствующим предметам или понятиям. Этот случай легко узнать по тому, что в последующем к таким объяснениям больше не прибегают. Для учебных целей введение этих приспособлений даже вполне уместно; только их всегда нужно чётко отличать от определений. На то, что даже математики могут спутать основание доказательства с внутренними или внешними условиями проведения доказательства, забавный пример доставляет *Э.Шрёдер*[2], предлагая под названием «Особая аксиома» следующее: «Задуманный принцип можно, пожалуй, назвать аксиомой неотъемлемости знаков. Она даёт нам уверенность в том, что при всех наших переходах и выводах знаки закрепляются в нашей памяти - а ещё прочнее на бумаге», и т.д. Насколько сильно математика должна протестовать против такой помощи со стороны психологии, настолько мало она может отрицать свою тесную связь с логикой. Да, в той мере, в которой признаётся, что каждое исследование об обязательности доказательства или оправдании определения должно быть логическим, я согласен с воззрением тех, кто считает невозможным

[1] [«Мера должна быть во всём и всему, наконец, есть пределы!» (Гораций)]
[2] E.Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.

резкое разделение. Но от таких вопросов математика вовсе и не отказывается, ведь только благодаря ответам на них достигается необходимая уверенность.

Разумеется, в этом направлении я также иду далее обычного. Большинство математиков при исследованиях подобного рода довольствуются удовлетворением непосредственных потребностей. Если определение пригодно для использования в доказательстве, если нигде не наталкиваются на противоречие, если можно познать связи между вещами, которые кажутся далёкими друг от друга, и если, благодаря этому, получается более высокая упорядоченность и закономерность, то имеют обыкновение принимать определение за достаточное и гарантированное и мало спрашивают о его логическом оправдании. Подобное поведение, во всяком случае, имеет то благо, что не легко совершенно промахнуться мимо цели. Я тоже считаю, что определения должны оправдываться продуктивностью, возможностью проводить с их помощью доказательство. Но, пожалуй, следует принять во внимание, что строгость доказательства остаётся видимостью, даже при отсутствии пробелов в цепи заключений, если определения только задним числом оправдывают тем, что не столкнулись с противоречием. В сущности, так всегда достигают только уверенности, основанной на опыте, и должны собственно быть готовы, в конце концов, всё же встретить противоречие, которое приводит всё здание к обвалу. Поэтому, я полагаю, к общим логическим основаниям нужно обратиться в несколько большей степени, чем считает необходимым большинство математиков.

В этом исследовании как основных я придерживаюсь следующих правил:

– строго отделять психологическое от логического, субъективное от объективного;
– о значении слова нужно спрашивать не в его обособленности, а в контексте предложения;
– не терять из виду различие между понятием и предметом.

Чтобы следовать первому правилу, я всегда буду употреблять слово «представление» в психологическом смысле и отличать представление от понятий и предметов. Если же остаётся незамеченным второе основное правило, за значение слов почти вынужденно принимаются внутренние образы или действия отдельной души, а это грешит также и против первого правила. Что касается третьего пункта, то это только видимость, если считают, что понятие, не изменяя его, можно сделать предметом. Отсюда, непрочной оказывается распространённая формальная теория дробей, отрицательных чисел и т.д. Задуманное мной изменение я могу в этом сочинении только наметить. Во всех таких случаях, как и в случае положительных целых чисел, всё зависит от установления смысла равенства.

Я думаю, мои результаты, по крайней мере, по существу, найдут согласие тех математиков, которые возьмутся за труд принять во внимание мои доводы. Мне кажется, они носятся в воздухе, и отдельные из них, а может быть уже все, или, по крайней мере, подобные им, высказывались; но в такой связи друг с другом они всё ещё могут оказаться новыми. Меня иногда удивляло, что взгляды, в одном пункте подходившие к моему пониманию так близко, столь сильно отклонялись в другом.

У философов же приём будет различаться сообразно точкам зрения; самый скверный будет, пожалуй, у тех эмпириков, которые за изначальный способ вывода хотят признавать только индукцию, и даже её не как способ вывода, но как привычку. Может быть, по данному поводу те или другие подвергнут основания своей теории познания обновлённой проверке. Тем же, кто мои определения может объявить за неестественные, я предлагаю обдумать то, что вопрос здесь не о естественности, но касается сути дела и логически свободен от возражений.

Я лелею надежду, что при непредубеждённой проверке даже философы найдут в этом сочинении кое-что полезное.

§1. После того, как в течение долгого времени математика отдалялась от евклидовой строгости, сейчас она возвращается к ней, и даже стремится её превзойти. В арифметике, уже вследствие индийского происхождения её многих методов и понятий, образ мыслей традиционно был слабее, чем в геометрии, преимущественно развиваемой греками. Появление анализа более высокого порядка только способствовало этому; ибо, с одной стороны, строгой трактовке данного учения противостояли значительные, почти непреодолимые затруднения, а, с другой стороны, казалось, что их преодоление мало вознаграждало за прилагаемые к этому усилия. Однако дальнейшее развитие преподавало всё яснее, что в математике не достаточна лишь моральная уверенность, поддержанная многими успешными применениями. Доказательство теперь требуется для многого такого, что прежде считалось само собой разумеющимся. Благодаря этому, во многих случаях впервые были установлены границы приемлемого. Обнаружилась необходимость в более точном определении понятий функции, непрерывности, предела, бесконечности. Более тщательной проверке своих полномочий должны были подвергнуться отрицательные и иррациональные числа.

Таким образом, всюду обнаруживается стремление строго доказать, точно провести границы приемлемого, и для достижения этого, точно схватить понятие.

§2. В том, что идёт ниже, следование этому пути должно привести к понятию числа[1] и к простейшим предложениям, относящимся к позитивным целым числам и образующим основание всей арифметики. Конечно, числовые формулы, типа 5 + 7 = 12, и законы, типа закона ассоциативности сложения, так часто подтверждались бесчисленными применениями в каждодневном использовании, что почти нелепым могло бы выглядеть желание посеять сомнения потребностью в доказательстве. Но к сущности математики относится то, что она всюду, где возможно доказательство, предпочитает последнее оправданию посредством индукции. *Евклид* доказывает многое из того, с чем и без этого с ним согласился бы каждый. Между тем, некоторые остаются неудовлетворёнными и евклидовой строгостью, когда переходят к исследованиям, связанным с аксиомой о параллельных.

Таким образом, в правильном направлении уже много раз двигались те, кто, прежде всего, чувствовал потребность в большей строгости, и эта потребность всегда расширялась и крепла.

Доказательство как раз имеет целью не только поставить истинность предложений вне всяких сомнений, но также и просмотреть зависимость истин друг от друга. Убедившись в непоколебимости каменной глыбы в тщетных попытках её передвинуть, можно далее задаться вопросом, что же её так надёжно удерживает? При дальнейшем продолжении таких исследований всё сводится к немногим первичным истинам; и это упрощение само по себе уже является целью, достойной, чтобы её добиваться. Может быть, подтвердится также надежда, что приводя к сознанию то, с чем люди в простейших случаях обращались инстинктивно, можно получить общие способы образования понятий или обоснований, которые применимы также и в запутанных случаях, и этим выделить общезначимое.

§3. К таким исследованиям меня также побуждают философские мотивы. Вопросы об априорной или апостериорной, синтетической или аналитической природе арифметических истин ждёт здесь своего ответа. Ибо, даже если сами эти понятия и принадлежат философии, я всё же думаю, что решение не может воспоследовать без помощи математики. Разумеется, это зависит от смысла, приданного каждому из этих вопросов.

Нередко случается так, что сперва получают содержание предложения, и затем проводят его строгое доказательство другим, более трудным способом, посредством которого часто условия пригодности могут быть также изучены более точно. Таким образом, вопрос о том, как мы приходим к содержанию суждения, в общем, нужно отделять от вопроса, каким образом мы оправдываем наше утверждение.

---

[1] [Фреге использует здесь термин *Anzahl*. Мы переводим его как *число* и далее не отличаем от *Zahl* по двум причинам: во-первых, *Anzahl* – термин, употребимый для кардинального числа, тогда как *Zahl* – для числа вообще, но у Фреге в основном речь идёт только о кардинальных числах; во-вторых, на протяжении всего текста эти два термина практически не различаются и используются как синонимы. Там, где в редких случаях такое различие всё же обнаруживается, мы переводим *Anzahl* как *кардинальное число*.]

Эти различения априорного и апостериорного, синтетического и аналитического, по моему[1] мнению, относятся к пониманию не содержания суждений, но оправдания вынесения суждения. Ведь там, где это оправдание отсутствует, пропадает также и возможность данных подразделений. Разве априорная ошибка не такой же вздор, как, скажем, голубое понятие? Когда предложение называют апостериорными или аналитическими в моём смысле, судят не о психологических, физиологических и физических обстоятельствах, которые делают возможным образование содержания предложения в сознании, а так же не о том, как другой, возможно ошибочно, приходит к тому, что он считает его истинным, но о том, на чём в самых глубинных основаниях покоится оправдание признания за истинное.

Благодаря этому, если речь идёт о математической истине, вопрос переводится из области психологии в область математики. Теперь это зависит от того, чтобы найти доказательство и свести математическую истину к первичным истинам. Если на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной, причём предполагается, что при рассмотрении указаны также и предложения, от которых возможно зависит допустимость определения. Но если невозможно провести доказательство без использования истин, не имеющих общей логической природы, но относящихся к особой области науки, то предложение является синтетическим. Для того чтобы истина была апостериорной, требуется, чтобы её доказательство не удавалось без ссылки на факты; т.е. на недоказуемые истины, не обладающие всеобщностью, которые содержат высказывание об определённых предметах. Если, наоборот, возможно провести доказательство всецело из общих законов, которые сами не способны и не нуждаются в доказательстве, то истина является априорной[2].

§4. Исходя из таких философских вопросов, мы приходим к тем же самым требованиям, которые независимо от этого вырастают в области самой математики: доказать с наибольшей строгостью, если только возможно, основные предложения арифметики; ибо, только если тщательно устранять каждый пробел в цепи выводов, можно с уверенностью сказать, на какие первичные истины опирается доказательство; и только когда последние известны, можно ответить на эти вопросы.

Итак, если пытаются следовать данным требованиям, то очень скоро приходят к предложениям, доказательство для которых невозможно до тех пор, пока входящие в них понятия не удаётся разложить на более простые или подвести под более общие. В данном случае это относится ко всем числам, которые должны быть либо определены, либо признаны за неопределяемые. Это и должно быть задачей данной книги[3]. От её выполнения зависит решение относительно природы арифметических законов.

Рассмотрению самого этого вопроса, я предпосылаю кое-что, что может дать указание, каков может быть на него ответ. А именно, если с других точек зрения обоснованно окажется, что принципы арифметики являются аналитическими, то это также говорит об их доказуемости и об определимости понятия числа. Противоположный эффект дал бы основания в пользу апостериорности этих истин. Поэтому предварительному освещению должен, прежде всего, подвергнуться этот спорный пункт.

I. МНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ АВТОРОВ О ПРИРОДЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ.

ДОКАЗУЕМЫ ЛИ ЧИСЛОВЫЕ ФОРМУЛЫ?

§5. Числовые формулы, типа 2 + 3 = 5, которые имеют дело с определёнными числами, необходимо отличать от общих законов, имеющих силу для всех целых чисел.

---

[1] Этим я в действительности не вкладываю новый смысл, но только трактую то, что имели в виду другие авторы, особенно Кант.

[2] Если вообще признаются общие истины, то должно также добавить, что существуют и такие первичные законы, потому что из сугубо единичных фактов не следует ничего, разве что только на основании законов. Сама индукция основывается на общем предложении, что данный метод может мотивировать истину или же видимость истины закона. При отрицании этого индукция становится не более чем психологической иллюзией, способом, которым люди приходят к убеждению в истинности предложения без того, чтобы благодаря этому данное убеждение было как-нибудь обосновано.

[3] Итак, в нижеследующем, если нет никаких оговорок, речь не идёт о каких-то других числах, кроме положительных целых чисел, отвечающих на вопрос «сколько?».

Первые отдельными философами[1] считались недоказуемыми и непосредственно ясными, как аксиомы. *Кант*[2] толковал их как недоказуемые и синтетические, но опасался называть аксиомами, поскольку они не являются общими и поскольку их число бесконечно. *Ханкель*[3] оправданно называет предположение о бесконечной множественности недоказуемых первичных истин неуместным и парадоксальным. В самом деле, оно противоречит потребности разума в наглядности первых основоположений. А разве непосредственно очевидно, что

$$135664 + 37863 = 173527?$$

Нет! И как раз это приводит *Канта* к синтетической природе таких предложений. Но ещё больше это говорит против их недоказуемости; ибо, как можно было бы усмотреть их иначе, нежели через посредство доказательства, ведь они не являются непосредственно очевидными? Кант хочет призвать на помощь созерцание пальцев или точек, из-за чего попадает в опасность, что эти предложения, согласно его мнению, могут показаться эмпирическими, поскольку созерцание 37863 пальцев, во всяком случае, всё же не чисто. Также и выражение «созерцание», по-видимому, не оправдано, ведь уже 10 пальцев в своём расположении друг за другом могут вызывать различные созерцания. Разве мы вообще можем обладать созерцанием 135664 пальцев или точек? Если можем, да к тому же обладаем созерцанием 37863 пальцев и ещё 173527, тогда оправданность нашего равенства, если оно не является доказуемым, должна быть точас же очевидной, по крайней мере, для пальцев; но это не так.

Кант, очевидно, подразумевал только малые числа. Формулы, которые для них непосредственно очевидны через созерцание, затем были бы доказуемы для больших чисел. Сомнительно, однако, проводить принципиальное различие между малыми и большими числами, в особенности нельзя указать строгую границу. Если же числовые формулы были бы доказуемы, скажем, с 10, то оправдан вопрос: почему не с 5, не с 2, не с 1?

§6. Другие же философы и математики утверждали доказуемость числовых формул. *Лейбниц*[4] говорит:

««Два и два – четыре» – это совсем не непосредственная истина, если под *четырьмя* понимать три и один. Её можно, следовательно, доказать и вот каким образом.

Определения:
1) 2 – это 1 и 1,
2) 3 – это 2 и 1,
3) 4 – это 3 и 1.

Аксиома: «При подстановке равных величин равенство сохраняется».

Доказательство:
2 и 2 – это 2 и 1 и 1 (по определению 1),
2 и 1 и 1 – это 3 и 1 (по определению 2),
3 и 1 – это 4 (по определению 3),
следовательно (по аксиоме)
2 и 2 = 4.»

Это доказательство на первый взгляд построено всецело из определений и приведённой аксиомы. Последнюю также можно преобразовать в определение, как сам *Лейбниц* и поступает в другом месте[5]. Кажется, что об 1, 2, 3, 4 не нужно знать более того, что содержится в определениях. Однако при более тщательном рассмотрении обнаруживается пробел, который скрыт пропуском скобок. А именно, при большей точности нужно записать:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$
$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Здесь пропадает предложение

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,$$

---

[1] Гоббс, Локк, Ньютон. Ср. *Baumann*, die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik, S.241-242, S.365ff., S.475. [*Ньютон И.* Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе.– М.: изд.АНСССР, 1948.– С.17.; *Локк Дж.* Сочинения в трёх томах, т.1.– М.: Мысль, 1985.– С.74-76.]

[2] Kritik der reinen Vernunft herausgeg. v. Hartenstein. III. S.157. [*Кант И.* Собрание сочинений в восьми томах, т.3.– М.: Чоро, 1994.– С.175. (В переводе Н.Лосского.)]

[3] H.Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Functionen.

[4] Nouveaux Essais, IV. §10. Erdm.S.363. [*Лейбниц Г.* Сочинение в четырёх томах, т.2.– М.: Мысль, 1983.– С.422.]

[5] Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm. S.94. [*Лейбниц Г.* Сочинения в четырёх томах, т.3.– М.: Мысль,1984.– С.632.]

которое является особым случаем

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Если предполагается данный закон, то легко видеть, что так можно доказать каждую формулу сложения. Каждое число тогда определяется из предшествующего. В самом деле, я не вижу, каким более подходящим, чем лейбницевский, способом нам могло бы быть дано, скажем, число 437986. А так прийти к нему всё же в наших силах, даже не обладая никаким его представлением. Посредством таких определений бесконечное множество чисел сводится к однёрке и увеличению на один, и каждая из бесконечно многих числовых формул может быть доказана из нескольких общих предложений.

Такого же мнения придерживаются *Г.Грассман* и *Г.Ханкель*. Первый хочет получить закон

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

посредством определения, говоря[1]:

«Если a и b являются произвольными членами основного ряда, то под суммой a + b понимается тот член основного ряда, для которого имеет силу формула

$$a + (b + e) = a + b + e».$$

При этом e должно обозначать положительную единицу. Против данного объяснения можно возразить двояко. Прежде всего, сумма объясняется через саму себя. Если ещё не известно, что должно обозначать a + b, выражение a + (b + e) также не понятно. Но это возражение, пожалуй, можно устранить, сказав (конечно, противореча дословному тексту) что хотят объяснить не сумму, но сложение. Тогда всегда ещё можно возразить, что a + b - это пустой знак, если в основном ряду нет никакого члена или нескольких членов требуемого вида. То, что этого не случается, *Грассман* просто предполагает без доказательства, так что строгость всего лишь иллюзорна.

§7. Можно подумать, что числовые формулы являются синтетическим или аналитическими, апостериорными или априорными смотря по тому, какими являются общие законы, от которых зависит их доказательство. Однако этому противостоит мнение *Джона Стюарта Милля*. Правда вначале кажется, что он, как и *Лейбниц*, хочет основать науку на определениях[2], поскольку объясняет отдельные числа также как он; но его предрассудок, что все науки являются эмпирическими, тотчас портит правильную мысль. А именно, он поучает нас[3], что это определения не в логическом смысле, что они не только устанавливают значение выражения, но вместе с тем также утверждают наблюдаемый факт. Чем же во всём мире мог бы быть наблюдаемый или, как также говорит *Милль*, физический факт, который утверждается в определении числа 777864? Из всего обилия физических фактов, открывающихся перед нами, *Милль* называет один единственный, который может утверждаться в определении числа 3. Согласно ему он состоит в том, что имеется объединение предметов, которое, пока последние формируют смысл впечатления от $^{o}{}_{o}{}^{o}$, может быть разъединено на две части, типа следующих: $_{oo}$ $_{o}$. Всё-таки, как хорошо, что не всё в мире склёпано и сколочено; тогда мы не смогли бы взяться за такое разъединение, и 2 + 1 не было бы 3! Как жаль, что *Милль* не изобразил также физический факт, лежащий в основании чисел 0 и 1!

Милль продолжает: «Раз такое предложение доказано, мы называем все такие сочетания «тремя»»[4]. Отсюда узнаётся, что собственно неверно, когда часы бьют три, говорить о трёх ударах, или называть сладкое, кислое и горькое тремя вкусовыми ощущениями; так же не одобряется и выражение «три способа решения уравнения»; поскольку об этом никогда не получить такого чувственного впечатления, как от $^{o}{}_{o}{}^{o}$.

Теперь *Милль* говорит: «Вычисления вытекают не из самого определения, а из предполагаемой им арифметической теоремы о существовании группы предметов, которая производит на чувство такое впечатление»[5]. Но где же в приведённом выше доказательстве *Лейбниц* должен сослаться на упомянутый факт? *Милль* упускает возможность удостоверить

---

[1] H.Grassmann, Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. I Theil: Arithmetik, Steettin 1860, S.4.

[2] *Милль Дж.Ст.* Система логики силлогистической и индуктивной.– М.: изд. Г.А.Лемана, 1914.– Кн.III, Гл. xxiv, §5. [На протяжении всей работы Фреге ссылается на немецкий перевод: *System der deductiven und inductiven Logik, übersetzt von J.Schiel*; в нашем переводе цитаты будут приводиться по указанному русскому изданию.]

[3] Там же, Кн.II, Гл.vi, §2.

[4] Там же, Кн.II, Гл.vi, §2, С.230.

[5] Там же, Кн.II, Гл.vi, §2, С.230.

пробел, хотя он даёт вполне соответствующее лейбницевскому доказательство предложения 5 + 2 = 7[1]. Действительно, имеющийся в наличие пробел, заключающийся в пропуске скобок, он не замечает так же, как и Лейбниц.

Если определение каждого отдельного числа действительно утверждает особый физический факт, то нельзя было бы в достаточной мере восхищаться человеком, который проводит вычисления с девятизначными числами, из-за физического характера его знания. Возможно, мнение *Милля* всё же не доходит до того, что все эти факты должны наблюдаться в отдельности, но достаточно посредством индукции вывести общий закон, в который все они были бы включены. Но при попытке сформулировать такой закон оказывается, что это невозможно. Недостаточно сказать: Существует большая совокупность вещей, которую можно разложить; ибо этим не говорится, что существует совокупность такого размера и вида, которая требуется, скажем, для определения числа 1000000, а также не указывается точнее способ разделения. Миллевское понимание с необходимостью должно вести к требованию, чтобы для каждого числа наблюдался особый факт, поскольку в общем законе было бы потеряно как раз то своеобразие числа 1000000, которое необходимо принадлежит его определению. В самом деле, согласно *Миллю* нельзя установить 1000000 = 999999 + 1, если не наблюдается именно своеобразный способ разделения совокупности вещей, который отличается от способа, подобающего для какого-либо другого числа.

§8. *Милль*, видимо, считает, что определения 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1 и т.д. нельзя образовать до тех пор, пока не наблюдались упомянутые им факты. В самом деле, 3 нельзя определить как (2 + 1), если (2 + 1) вовсе не придан смысл. Но спрашивается, разве необходимо для этого наблюдать указанную совокупность и её разделения? Тогда было бы загадочно число 0; потому что до сих пор, пожалуй, никто не видел и не трогал 0 булыжников. *Милль*, конечно, объяснил бы 0 как нечто бессмысленное, только как манеру речи; вычисления с 0 были бы лишь игрой с пустыми знаками, и остаётся только удивляться, каким образом при этом может получаться что-то разумное. Но если эти вычисления имеют серьёзное значение, то и сам знак 0 не может быть совершенно бессмысленным. Оказывается, возможно, чтобы 2 + 1 сходным с 0 образом, всё-таки могло иметь смысл даже тогда, когда не наблюдается упоминаемый *Миллем* факт. В самом деле, разве кто захочет утверждать, что наблюдает тот факт, который, согласно *Миллю*, содержится в определении 18-значного числа, и разве кто захочет отрицать, что такой числовой знак всё же имеет смысл?

Может быть, имеется в виду, что физические факты используются только для малых чисел, скажем, до 10, в то время как остальные могут составляться из них. Но если 11 можно построить из 10 и 1 лишь посредством определения, без того чтобы наблюдать соответствующую совокупность, то нет основания, по которому нельзя было бы таким же образом составить 2 из 1 и 1. Если вычисления с числом 11 не следуют из характерного для него факта, то, как получается, что вычисления с 2 должны зависеть от наблюдения определённой совокупности и её своеобразного разделения?

Быть может, зададут вопрос, как может существовать арифметика, если посредством чувств мы можем различить вовсе ни одной или только три вещи. Для нашего знания арифметических предложений и их применений такое состояние, конечно, было бы чем-то сомнительным; ну а как же для их истинности? Если предложение называют эмпирическим, потому что мы должны делать наблюдения, для того чтобы нам стало известно его содержание, то слово «эмпирический» используется не в том смысле, в котором оно противоположно «a priori». Тогда высказывается психологическое утверждение, которое относится только к содержанию предложения; является ли оно истинным тем самым не рассматривается. В этом смысле все истории Мюнхгаузена также являются эмпирическими; ибо, для того чтобы их можно было выдумать, конечно, необходимо делать различные наблюдения.

ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ ЗАКОНЫ АРИФМЕТИКИ ИНДУКТИВНЫМИ ИСТИНАМИ?

§9. Прежние соображения делают правдоподобным то, что числовые формулы выводимы единственно из определений отдельных чисел при помощи нескольких общих законов, что эти

[1] Там же, Кн.III, Гл.xxiv, §5.

определения не утверждают наблюдаемые факты и не предполагают их для своей законности. Это зависит также от познания природы указанных законов.

Милль[1] хочет использовать для своего (упомянутого выше) доказательства формулы 5 + 2 = 7 предложение «Всё, что слагается из частей, слагается из частей этих частей». Его он принимает за характерное выражение предложения, прежде известного в форме «Суммы равных равны». Он называет его индуктивной истинной и законом природы высшего порядка. На недостаточность его экспозиции указывает то, что он совершенно не привлекает это предложение в том пункте доказательства, где оно, согласно его мнению, необходимо; всё-таки кажется, что его индуктивная истина должна заменить аксиому Лейбница: «Если подставить равное, равенство сохраняется». Однако для того чтобы арифметическую истину можно было назвать законом природы, *Милль* вкладывает в неё смысл, которого она не имеет. Он считает[2], например, что равенство 1 = 1 может быть ложным, поскольку один фунт не всегда имеет именно тот вес, который имеет другой фунт. Но предложение 1 = 1 вовсе даже не стремится этого утверждать.

Милль понимает знак + так, чтобы благодаря этому выразить отношение частей физического тела или частей кучи к целому; но не в этом смысл данного знака. 5 + 2 = 7 не означает, что если в 5 мер жидкости влить 2 меры жидкости, то получится 7 мер жидкости, но последнее есть применение первого предложения, которое допустимо только тогда, когда вследствие, скажем, химической реакции не наступает изменения объёма. *Милль* всегда смешивает применение, которое можно найти арифметическому предложению и которое часто бывает физическим и предполагает наблюдаемый факт, с самим чисто математическим предложением. Знак плюса может, правда, во многих применениях, по-видимому, соответствовать образованию кучи; но не в этом его значение; потому что при других применениях (если, например, заниматься подсчётом событий) о кучах, агломератах, отношении физического тела к своим частям не может быть и речи. Правда, здесь тоже можно говорить о частях; однако тогда это слово используется не в физическом или геометрическом, но в логическом смысле, как когда тираноубийство называют частью убийства вообще. Здесь имеется логическая субординация. Так и сложение, в общем, тоже не соответствует физическому отношению. Следовательно, общие законы сложения также не являются законами природы.

§10. Но возможно они всё-таки могут быть индуктивными истинами. Как же за это взяться? Из каких фактов необходимо исходить, чтобы подняться к общему? Пожалуй, таковыми могут быть только числовые формулы. Этим мы, конечно, опять утрачиваем преимущества, которые приобрели посредством определения отдельных чисел, и должны найти другой способ обоснования числовых формул. Но даже если сейчас мы и не принимаем во внимание это вовсе не лёгкое сомнение, то всё равно находим почву для индукции неблагоприятной; потому что здесь отсутствует то однообразие, которое в ином случае могло бы придать этой процедуре большую надёжность. Уже *Лейбниц*[3] на утверждение Филалета:

«Различные модусы чисел могут отличаться друг от друга лишь по величине, поэтому они простые модусы, подобно модусам протяжения»,
мог ответить:

«Это можно сказать времени и о прямой линии, но ни в коем случае не о фигурах и тем более не о числах, которые не только не отличаются друг от друга по величине, но, кроме того, и не сходны между собой; чётное число можно разделить поровну на две части, а нечётное нельзя. Три и шесть – треугольные числа, четыре и девять – квадраты, восемь – куб и т.п. Сказанное относится к числам ещё больше, чем к фигурам, так как две неравные фигуры могут быть совершенно подобны друг другу, чего нельзя никогда сказать о двух числах».

Мы уже привыкли именно к тому, что числа во многих отношениях трактуются как однородные; но это происходит только постольку, поскольку мы знаем множество общих предложений, которые имеют силу для всех чисел. Здесь мы должны, однако, встать на точку зрения, с которой ещё ничего не оценивалось. В самом деле, было бы трудно найти пример для индуктивного вывода, соответствующий нашему случаю. Обычно мы часто устанавливаем предложение, что каждое место в пространстве и каждая временная точка в себе и для себя аналогична любой другой. При тех же самых условиях результат должен получаться столь же

---

[1] Там же, Кн.III, Гл.xxiv, §5, С.558.
[2] Там же, Кн.II, Гл.vi, §3.
[3] Baumann, Op.cit., II., S.39; Erdm. S.243. [*Лейбниц Г.* Сочинения в четырёх томах, т.2…, С.156.]

хорошо в другом месте и в другое время. Здесь это не применимо, поскольку числа внепространственны и вневременны. Позиция в ряду чисел не равноценна месту в пространстве.

Числа также ведут себя совершенно иначе, нежели, скажем, представители вида животных, так как числа по природе вещей имеют определённый порядок, каждое образуется собственным способом и обладает своеобразием, особенно заметным у 0, 1 и 2. Кроме того, если посредством индукции обосновывается предложение, относящееся к виду, обыкновенно уже имеется весь ряд с общими свойствами, уже единственно по определению понятия вида. Здесь же трудно найти даже единственное общее свойство, которое сперва само не доказывалось бы.

Наш случай легче всего можно сравнить со следующим. Пусть замечено, что с глубиной температура в буровой скважине регулярно увеличивается, причём до сих пор встречались совершенно разные слои горных пород. Очевидно, тогда, основываясь на наблюдениях за этой скважиной, никто не сделает вывода о состоянии более глубоких слоёв, и должно оставаться открытым, будет ли регулярность распределения температуры сохранятся далее. Хотя под понятие «то, что встречается при продолжении бурения» подпадает как то, что наблюдалось до сих пор, так и то, что залегает более глубоко, здесь, однако, это мало может пригодиться. В случае чисел нам так же мало может пригодиться то, что все они подпадают под понятие «то, что получается посредством увеличения на один». Различие между двумя случаями можно найти в том, что слои лишь встречаются, но числа посредством увеличения на единицу прямо-таки создаются и определяются во всём своём существе. Последнее может означать только то, что все свойства числа (например, 8) можно вывести из способа, которым оно возникает посредством увеличения на 1. Этим, в сущности, даётся то, что свойства числа вытекают из его определения, и открывается возможность доказать общие законы чисел из одинакового для них всех способа возникновения, в то время как особые свойства отдельных чисел выводятся из особого способа, которым они образуются с помощью продолжающегося увеличения на один. Таким же образом можно делать выводы именно из того, что у земного слоя определяется уже единственно посредством глубины, на которой он встречается, т.е. из обстоятельств его расположения, не нуждаясь в индукции; но то, что этим не определяется, нельзя узнать также и из индукции.

Вероятно, саму процедуру индукции можно оправдать только с помощью общих предложений арифметики, если под ней не понимать простую привычку. Последняя совершенно не обладает ручающейся за истину силой. В то время как научная процедура согласно объективным стандартам то находит обоснованной высокую вероятность в одном единственном примере, то считает не имеющими цены тысячи событий, привычка определяется числом и силой впечатлений и субъективными обстоятельствами, которые не имеют никакого права оказывать влияние на суждение. Индукция должна опираться на учение о вероятности, поскольку она может сделать предложение не более чем вероятным. Однако не видно, как это учение можно развить, не предполагая арифметических законов.

§11. *Лейбниц*[1], наоборот, считал, что необходимые истины, которые обнаруживаются только в арифметике, должны иметь принципы, доказательство которых не зависит от примеров и, следовательно, от показаний чувств, хотя никому и не приходит на ум мыслить об этом без чувств. «Вся арифметика врождена и заключается в нас потенциальным образом». То, как он понимает выражение «врождена», поясняет другое место[2]: «Я не могу признать также, будто всё то, что мы узнаём, не врождено. Истины о числах находятся в нас, и тем не менее мы узнаём их, либо извлекая эти истины из их источника, когда мы узнаём их путём рационального доказательства (что показывает, что они врождены), либо …».

ЯВЛЯЮТСЯ ЗАКОНЫ АРИФМЕТИКИ АПРИОРНО СИНТЕТИЧЕСКИМИ ИЛИ ЖЕ АНАЛИТИЧЕСКИМИ?

§12. Если взять антитезу аналитического и синтетического, получается четыре комбинации; однако, одна из них, а именно,

аналитическое a posteriori,

отпадает. Если вместе с *Миллем* решить в пользу a posteriori, то выбора не остаётся; но нам всё ещё остаётся взвесить лишь две возможности

[1] Baumann, Op.cit., Bd. II. S.13-14; Erdm. S.195, S.208-209. [*Лейбниц Г.* Сочинения в четырёх томах, т.2… С.78.]

[2] Baumann, Op.cit., Bd. II., S.38; Erdm. S.212. [*Лейбниц Г.* Сочинения в четырёх томах, т.2 … С.87.]

синтетическое a priori

и

аналитическое.

В пользу первого решает *Кант*. В этом случае, пожалуй, не остаётся ничего иного, как призвать чистое созерцание в качестве последнего основания познания, несмотря на то, что тут трудно сказать, является ли оно пространственным или временным, или же, кроме того, может быть каким-то ещё. *Бауман*[1] соглашается с *Кантом*, хотя и на несколько ином основании. Согласно *Липшицу*[2] предложения, которые утверждают независимость чисел от способа вычисления, также вытекают из внутреннего созерцания. *Ханкель*[3] основывает учение о действительных числах на трёх принципах, которым он приписывает характеристику *notiones communes*[4]: «Посредством экспликации они становятся совершенно очевидными, имеющими силу для всего обладающего величиной согласно чистому созерцанию величины и могут, без утраты своей характеристики, быть преобразованы в определения тем, что говорят: Под сложением величин понимается операция, удовлетворяющая этим предложениям». В последнем утверждении содержится неясность. Пожалуй, определение можно дать, но оно не может составить замены этим принципам, поскольку при применении речь всегда бы шла о том, есть ли числовые величины и является ли то, что мы имеем обыкновение называть сложением, сложением в смысле данного определения? И при ответе необходимо уже знать эти предложения о числах. Далее, неприязнь вызывает выражение «чистое созерцание величины». Если задуматься над всем тем, что называется величинами (числа, протяжённости, площади, объёмы, угол, кривизна, массы, скорости, силы, освещённость, электрическое напряжение и т.д.), то, пожалуй, понятно, как их можно подчинить понятию величины; но выражение «созерцание величины» (и уж совсем «чистое созерцание величины) нельзя признать соответствующим. Раз уж я не могу согласиться с созерцанием 1000000, ещё меньше я могу согласиться с созерцанием числа вообще или, вовсе, величины вообще. На внутреннее созерцание легко сослаться, когда нельзя указать на другое основание. Но всё же при этом не нужно совершенно терять из виду смысл слова «созерцание».

Кант определяет в *Логике* (ed.Hartenstein, VIII, S.88):

«Созерцание есть *единичное* представление (repraesentatio singularis); понятие есть *общее* (repraesentatio per notas communes) или *рефлективное* представление (repraesentatio discursiva)»[5].

Здесь в выражение вовсе не входит отношение к чувственности, которое, однако, примысливается в *Трансцендентальной эстетике* и без которого созерцание не может служить для априорно синтетических суждений в качестве принципа познания. В *Критике чистого разума* (ed.Hartenstein III, S.55) обозначено:

«Всякое мышление должно … иметь отношение к созерцаниям, стало быть, у нас – к чувственности, потому что ни один предмет не может быть нам дан иным способом»[6].

Смысл нашего слова в *Логике*, таким образом, шире, чем в *Трансцендентальной эстетике*. В логическом смысле можно, пожалуй, назвать 1000000 созерцанием; поскольку оно не является общим понятием. Но взятое в этом смысле, созерцание не может служить основанием арифметических законов.

§13. В общем, было бы хорошо, не переоценивать родство с геометрией. Против этого я уже приводил цитату из *Лейбница*. Геометрическая точка, рассмотренная сама по себе, совершенно не отличается от какой-нибудь другой; то же самое имеет силу для прямых и плоскостей. Они различаются, лишь когда несколько точек, прямых или плоскостей схвачены в созерцании одновременно. Если в геометрии общие предложения приобретаются созерцанием, то отсюда ясно, что созерцаемые точки, прямые и плоскости собственно вовсе не являются особенными и поэтому могут считаться представителями всего своего рода. У чисел дело обстоит по иному; каждое из них имеет свои особенности. О том, каким образом определённое число может представлять другие, и где предъявляет свои права его своеобразие, нельзя сказать безоговорочно.

§14. Сравнение истин при ссылке на область, где они господствуют, также говорит против эмпирической и синтетической природы арифметических законов.

---

[1] Op.cit., Bd.II, S.669.
[2] Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Bd.I., S.1.
[3] Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, S.54-55.
[4] [Общих понятий – лат.]
[5] [*Кант И*. Собрание сочинений в восьми томах, т.8.– М.: Чоро, 1994.– С.346.]
[6] [*Кант И*. Собрание сочинений в восьми томах, т.3 … С.62.]

Предложения опыта имеют силу для физической или психологической действительности, геометрические истины господствуют в области пространственно созерцаемого, неважно будет ли оно только действительным или же продуктом силы воображения. Самый сумасшедший лихорадочный бред, самые смелые творения сказаний и поэтов, где животные говорят, где светила могут спокойно останавливаться, где из камня получается человек, а из человека дерево, где учат тому, как самого себя вытащить из болота за собственный чуб, всё ещё, поскольку остаются наглядными, связаны с аксиомами геометрии. Понятийное мышление может освободиться от этого только определённым способом, если, скажем, принять четырёхмерное пространство или положительное искривление. Такое рассмотрение вовсе не бесполезно, оно полностью покидает поле созерцания. Если же при этом последнее призывается на помощь, то оно всё-таки всегда является созерцанием евклидова пространства, единственного пространства, образом которого мы обладаем. Только тогда созерцание не таково, каково оно есть, но символизирует нечто иное; например, прямой или плоскостью называют то, что всё-таки созерцается как искривлённое. Для понятийного же мышления можно принять противоположное той или иной геометрической аксиоме, без того чтобы, если следствия выводятся из таких конфликтующих с созерцанием предпосылок, запутаться в противоречиях с самим собой. Эта возможность показывает, что геометрические аксиомы независимы друг от друга и от первичных логических законов, а являются синтетическими. Можно ли сказать то же самое об основоположениях науки о числах? Не смешается ли всё, если захотелось бы отрицать одну из них? Было ли бы тогда ещё возможно мышление? Не лежит ли основание арифметики глубже, нежели основа всего опытного знания, даже глубже, чем основание геометрии? Арифметические истины господствуют над областью исчислимого. Это основание является всеобъемлющем; так как ему принадлежит не только действительное, не только созерцаемое, но и всё мыслимое. Разве не должны тогда законы чисел находится в теснейшей связи с законами мысли?

§15. Нетрудно предвидеть, что изречения *Лейбница* можно истолковать в пользу аналитической природы законов чисел, ведь для него a priori совпадает с аналитическим. Так, он говорит[1], что алгебра заимствует свои преимущества у более высокого искусства, а именно, подлинной логики. В другом месте[2] он сравнивает необходимые и случайные истины с соизмеримыми и несоизмеримыми величинами и подразумевает, что в случае необходимых истин возможно доказательство или сведение к тождествам. Эти мнения всё же теряют вес вследствие того, что *Лейбниц* склонен считать все истины доказуемыми[3]: «... Каждая истина извлекает своё априорное доказательство из понятия терминов, хотя не всегда в наших силах прийти к этому анализу». Правда, сравнение с соизмеримостью и несоизмеримостью опять устанавливает непреодолимый, по крайней мере, для нас, барьер между случайными и необходимыми истинами.

Весьма решительно в пользу аналитической природы законов чисел высказывается *У.Стенли Джевонс*[4]: «Число есть только логическое различение и алгебра есть в высшей степени развитая логика».

§16. Но и эта точка зрения также имеет свои затруднения. Может ли высоко возвышающееся, разветвлённое и всё же постоянно растущее древо науки о числах укоренятся в голых тождествах? И каким образом пустые формы логики приходят к тому, что из них получается такое содержание?

Милль считает[5]: «Учение о том, что мы можем открывать факты и разоблачать сокровенные процессы в природе посредством искусного пользования словами, до такой степени противна здравому смыслу, что для того, чтобы поверить ему, надо сделать некоторые успехи в философии».

Верно, если бы при искусных манипуляциях не мыслили. Здесь *Милль* выступает против формализма, который едва ли кто-нибудь защищает. Те, кто использует слова или математические знаки, претендуют на то, что они нечто обозначают, и никто не ждёт, что из пустых знаков вытекает нечто, наполненное смыслом. Однако возможно, что математик осуществляет

---

[1] Baumann, Op.cit., Bd.II., S.56; Erdm. S.424.
[2] Baumann, Op.cit., Bd.II., S.57; Erdm. S.83. [*Лейбниц Г.* Сочинения в четырёх томах, т.3. … С.496.]
[3] Baumann, Op.cit., Bd.II., S.57; Pertz, II., S.55.
[4] *Джевонс Ст.* Основы науки.– С.-Пб.: изд. Л.Ф.Пантелеева, 1881.– С.152. [Фреге на всём протяжении текста цитирует второе английское издание книги Ст.Джевонса: *The principles of science, London 1879*, в нашем переводе все цитаты будут приводится по указанному русскому изданию.]
[5] Там же, Кн.II, Гл. vi, §2, С.227.

длиннейшие вычисления без того, чтобы понимать под своими знаками нечто чувственно зримое, созерцаемое. Из-за этого знаки всё же не являются бессмысленными; от них самих всё же отличают их содержание, даже если, быть может, оно схватываемо только посредством знаков. Известно, что для одного и того же можно установить другие знаки. Нужно знать, как логически обращаться с символизированным в знаках содержанием, и как должен совершаться переход к явлениям, когда хотят применения в физике. Однако в таком применении нельзя видеть собственный смысл предложений. При этом всегда пропадает большая часть общности, и привходит нечто особенное, что при ином применении заменяется на другое.

§17. Вопреки всяческому умалению дедукции всё же нельзя отрицать, что законов, обоснованных посредством индукции, недостаточно. Из них должны выводится новые предложения, которые ни в одном из них в отдельности не содержатся. То, что они уже определённым способом находятся в них всех вместе взятых, не освобождает от работы вытащить их оттуда и установить сами по себе. С этим открывается следующая возможность. Вместо того чтобы привязывать ряд выводов непосредственно к факту, можно, оставляя последний вопрос открытым, адаптировать его содержание в качестве условия. Благодаря тому, что все факты таким образом заменяются в ряду мыслей на условия, вывод получают в такой форме, что результат становится зависимым от ряда условий. Такая истина была бы обоснована посредством одного мышления или, по выражению *Милля*, посредством искусного пользования словами. Нет ничего невозможного в том, чтобы законы чисел относились к такой разновидности. Тогда, несмотря на то, что они не обязательно открывались бы посредством одного мышления, они были бы аналитическими суждениями; ибо здесь рассматривается не способ поиска, но разновидность оснований доказательства; или, как говорит *Лейбниц*[1], «Ведь здесь речь идёт не об истории наших открытий, которая различна у разных людей, но о естественной связи и естественном порядке истин, который всегда одинаков». Тогда в конце наблюдение решило бы, выполнено ли условие, содержащееся в обоснованных таким образом законах. В конце концов, так попадают именно туда, куда пришли бы с помощью непосредственной привязки ряда выводов к наблюдаемым фактам. Однако указанная здесь разновидность образа действия во многих случаях предпочтительнее, поскольку она приводит к общему предложению, которое не обязательно применимо только к непосредственно имеющимся в наличие фактам. Тогда истины арифметики относились бы к истинам логики подобно тому, как теоремы относятся к аксиомам геометрии. Последние конденсированно содержали бы в себе весь ряд выводов для будущего употребления, и их польза состояла бы в том, что больше не нужно было бы делать выводы порознь, но можно было бы сразу же выразить результат всего ряда[2]. Тогда, ввиду сильного развития арифметических теорий и их многократного применения, не удержалось бы широко распространённое пренебрежение аналитическими суждениями и сказка о непродуктивности чистой логики.

Если же не здесь впервые выраженную точку зрения можно провести в частностях так строго, чтобы не оставалось ни малейшего сомнения, то этот результат, как мне кажется, был бы вполне значим.

[1] Nouveaux Essais, IV, §9; Erdm. S.360. [*Лейбниц Г.* Сочинение в четырёх томах, т.2 … С.420.]

[2] Поразительно, что уже *Милль* (Там же, Кн.II, Гл.vi, §4), по-видимому, выражает эту точку зрения. Присущий ему здравый смысл время от времени пробивается через его предубеждение в пользу эмпирического. Однако последнее всегда всё вновь запутывает, смешивая у него физическое применение арифметики с самой арифметикой. Ему, видимо, неизвестно, что гипотетическое суждение может быть истинным тогда, когда условие истинным не является.

II. МНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ АВТОРОВ О ПОНЯТИИ ЧИСЛА

§18. Обращаясь к первичным предметам арифметики, мы, между тем, отличаем отдельные числа 3, 4 и т.д. от общего понятия числа. Итак, мы уже решили, что отдельные числа лучше всего выводить по способу *Лейбница*, *Милля*, *Г.Грасмана* и других из однёрки и увеличения на один, и что это объяснение, однако, остаётся неполным, поскольку не объяснены однёрка и увеличение на один. Чтобы из этих определений вывести числовые формулы, как мы видели, нужны общие предложения. Такие законы, как раз благодаря их общности, можно вывести не из определений отдельных чисел, но только из общего понятия числа. Это последнее мы сейчас подвергнем более тщательному рассмотрению. При этом также предполагается, что необходимо обсудить однёрку и увеличение на один, а, стало быть, определения отдельных чисел также ждут дополнения.

§19. Здесь мне сразу же хотелось бы возразить на попытку, когда число понимают геометрически, как числовую пропорцию длин и площадей, очевидно, полагая облегчить многократные применения арифметики к геометрии тем, что их начала приравниваются в самом тесном отношении.

Ньютон[1] предлагает понимать под числом не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение любой величины к другой величине того же самого вида, которая берётся за единицу. Можно признать, что так соответствующим образом описывается число в широком смысле, к которому принадлежат также дроби и иррациональные числа; при этом всё же предполагаются понятия величины и отношения величин. Сообразно с этим кажется, что объяснение числа в более узком смысле (кардинального числа) излишним бы не было, поскольку *Евклид*, чтобы определить равенство двух пропорций между длинами, использует понятие равнократности, а равнократность вновь выводит на равночисленность. Однако может быть и так, что равенство пропорций между длинами независимо от определимости понятия числа. Тогда сверх того всё-таки остаётся сомнительным, в каком отношении определённое таким геометрическим образом число находится к числу обычной жизни. Последнее тогда совершенно расстаётся с наукой. И всё же от арифметики, пожалуй, можно требовать, чтобы она необходимо предполагала точку соприкосновения с каждым применением числа, даже если само применение и не является её делом. Даже обыкновенный счёт должен находить основание своего метода в науке. А тогда встаёт вопрос, обходится ли сама арифметика геометрическим понятием числа, если под числом мыслятся корни уравнения, число, меньшее и предшествующее некоторому числу, или нечто подобное. Зато число, отвечающее на вопрос «сколько?», может определять также, сколько единиц содержится в некоторой протяжённости. Вычисления с негативными, дробными, иррациональными числами можно свести к вычислениям с действительными числами. Но, быть может, *Ньютон* под величинами, через отношения которых определялось число, хочет понимать не только геометрические величины, но также и множества. Тогда для нашей цели объяснение всё-таки непригодно, поскольку из выражений «число посредством которого определяется множество» и «отношение множества к единице множественности» последнее информирует не лучше, чем первое.

§20. Первый вопрос был бы теперь о том, определимо ли число. *Ханкель* высказывается против: «То, что подразумевается, когда объект мыслят или полагают 1 раз, 2 раза, 3 раза ..., определить нельзя, ввиду простоты понятия «полагать»»[2]. Всё-таки дело здесь не столько в «полагать», сколько в 1 раз, 2 раза, 3 раза. Если бы это можно было определить, то неопределимость «полагать» нас мало бы тревожила. *Лейбниц* склонен рассматривать число как адекватную идею (или, по крайней мере, как идею, близкую адекватной), т.е. такую идею, которая настолько ясна, что всё входящее в неё вновь является ясным.

В целом, если более склоняются к тому, чтобы считать число неопределяемым, то, пожалуй, это зависит скорее оттого, что на неудачу обрекается попытку, нежели от встречных доводов, заимствованных из обстоятельств самого дела.

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ЧИСЛО СВОЙСТВОМ ВНЕШНИХ ВЕЩЕЙ?

---

[1] Baumann, Op.cit., Bd.I, S.475. [*Ньютон И.* Всеобщая арифметика… С.8.]

[2] Theorie der complexen Zahlensysteme, S.1.

§21. Нам, по крайней мере, следует попытаться указать для числа его место среди наших понятий! В языке числа большей частью проявляются в форме прилагательного и в атрибутивной связи, наподобие слов твёрдый, тяжёлый, красный, обозначающих свойства внешних вещей. Напрашивается вопрос, должны ли точно также пониматься отдельные числа и можно ли, соответственно этому, сопоставить понятие числа, скажем, с понятием цвета.

Таково, по-видимому, мнение *М.Кантора*[1], когда он называет математику опытной наукой, поскольку она берёт своё начало с рассмотрения объектов внешнего мира. Числа возникают только посредством абстрагирования от предметов.

По *Э.Шрёдеру*[2] число копирует действительность, извлекается из неё, тем что единицы отображаются посредством однёрок. Это он называет абстрагированием числа. При таком отображении единицы представлены только в отношении их многочисленности, в то время как от всех других определений вещей, таких как цвет и очертания, отказываются. Многочисленность здесь есть лишь другое выражение для числа. Многочисленность или число *Шрёдер* также ставит на один уровень с цветом и очертаниями и трактует его как свойство вещей.

§22. *Бауман*[3] отвергает мысль, что числа суть понятия, отвлечённые от внешних вещей, именно потому, "что внешние вещи не представляются строгими единицами; они представляются ограниченными группами или чувственными точками, но мы свободны вновь рассматривать каждую из них как многое". В самом деле, в то время как я ничуть ни в состоянии изменить простым способом схватывания цвет вещи или её твёрдость, я могу понимать *Илиаду* как одну поэму, как 24 песни или как большое число строф. Разве не в совершенно ином смысле, чем о зелёных листьях, говорится о 1000 листьях дерева? Зелёный цвет мы прилагаем каждому листу, но не так с числом 1000. Мы можем охватить все листья дерева под названием листва. Она также является зелёной, но не 1000. С чем же собственно соотносится свойство 1000? Кажется почти наверняка ни с отдельными листьями, ни с их совокупностью. Но, собственно говоря, может быть, оно вовсе не соотносится с вещами внешнего мира? Если я даю кому-нибудь камень со словами: «Определи его вес», то этим я полностью задал предмет его исследования. Но если я вручаю ему колоду игральных карт со словами: «Определи, их число», то ему не известно, хочу ли я узнать число карт, игровой комплект, или, скажем, очки при игре в скат. Вручая ему колоду, я ещё не полностью задал ему предмет его исследования; я должен добавить слово: карты, комплект, очки. Нельзя также сказать, что различные числа сосуществуют здесь друг с другом подобно различным цветам. Без использования слов я могу указать на отдельное цветовое пятно, но не на отдельное число. Если с одинаковым правом я могу назвать предмет и зелёным, и красным, то это знак того, что данный предмет не является настоящим носителем зелёного. Зелёное я имею только на поверхности, которая теперь является зелёной. Так и предмет, который я могу с одинаковым правом описать различными числами, не является настоящим носителем числа.

Существенное различие между цветом и числом, таким образом, состоит в том, что синий цвет принадлежит поверхности независимо от нашего произвола. Синий цвет - это способность отражать определённые лучи света и более или менее поглощать другие, и в этом наше восприятие не может изменить даже самую малость. Зато я не могу сказать, что число 1, 100 или какое-то другое принадлежит колоде карт самой по себе, но самое большее могу сослаться на наш произвольный способ восприятия, и даже тогда не так, что мы можем приписать ей число просто как предикат. То, что мы хотим назвать игровым комплектом, есть, очевидно, произвольное установление, и колоде карт ничего об этом не известно. Но, рассматривая её в этом отношении, мы, быть может, обнаружим, что можно назвать её двумя игровыми комплектами. Тот, кому не известно, что называется игровым комплектом, найдёт, вероятно, в ней скорее какое-то другое число, нежели именно два.

§23. На вопрос, чему число принадлежит как свойство, *Милль* отвечает так[4]:

«Созначение числового наименования заключается конечно в том или другом свойстве того агломерата вещей, которому мы придаём такое наименование и свойством этим служит тот особый способ, каким данный агломерат сложен из своих частей (и может быть на них разложен)».

---

[1] M.Cantor, Grundzüge einer Elementarmathematik, S.2, §4.
[2] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipz.1873, S.6, 10-11.
[3] Op.cit., Bd.II, S.669.
[4] Там же, Кн. III, Гл. xxiv, §5, С.556.

Здесь ошибкой, прежде всего, является определённый артикль в выражении «(the) особый способ», поскольку существуют весьма различные способы, которыми можно разложить агломерат, и нельзя сказать, что особым было бы один единственный. Например, пучок соломы можно разложить, разорвав все соломинки, или разделив его на отдельные соломинки, или образовав из него два пучка. Разве кучка из ста песчинок составлена точно так же, как пучок из ста соломинок? И всё же используется одно и то же число. Числительное «одна» в выражении «одна соломинка» не выражает, как эта соломинка составлена из клеток или молекул. Ещё большее затруднение с числом 0. Разве соломинки должны вообще образовывать пучок, чтобы быть сосчитанными? Необходимо ли слепых в Германии непременно объединить в сообщество, с тем, чтобы выражение «число слепых в Германии» имело смысл? Разве тысяча зёрен пшеницы после того, как она была посеяна, больше не является тысячью зёрен? Разве существует в собственном смысле агломерат доказательств теорем или событий? И всё же их также можно сосчитать. При этом безразлично, одновременны события или же разделены тысячелетиями.

§24. С этим мы приходим к другому основанию не сопоставлять число с цветом и твёрдостью, применимость которого гораздо обширнее.

По мнению *Милля*[1], истина, что состоящее из частей, состоит и из частей этих частей, действительна для всех естественных феноменов, поскольку со всеми ними можно проводить вычисления. Но разве нельзя проводить вычисления с гораздо большим? *Локк* говорит[2]: «Число приложимо к людям, ангелам, действиям, мыслям, ко всему, что существует или что можно представлять себе». *Лейбниц*[3] отвергает мнение схоластов, что число неприменимо к бестелесным вещам, и называет число в некотором смысле бестелесной фигурой, происходящей из объединения каких угодно вещей (например: Бог, ангел, человек, движение вместе суть четыре). Поэтому, по его мнению, число есть нечто совершенно общее и относится к метафизике. В другом месте[4] он говорит: «Но есть такие вещи, которые нельзя взвесить, т.е. которые не обладают никакой силой и потенцией; есть и такие, которые не имеют частей и поэтому не допускают измерения. А ведь нет ничего такого, что не допускало бы выражения через число. Следовательно, число есть как бы метафизическая фигура».

Было бы в самом деле удивительно, если бы свойство, абстрагированное от внешних вещей, без изменения смысла могло переносится на события, представления, понятия. Эффект был бы тот же, как если бы намеревались говорить о плавких событиях, синих представлениях, солёных понятиях и вязких суждениях.

Нелепо, чтобы то, что по своей природе чувственно, встречалось в нечувственном. Если мы видим синюю поверхность, то у нас есть своеобразное впечатление, соответствующее слову «синий»; мы узнаём его снова, если наблюдаем другую синюю поверхность. Если же мы хотим предположить, что таким же способом при взгляде на треугольник слову «три» соответствует нечто чувственное, то это же самое мы должны вновь обнаружить в трёх понятиях; нечто нечувственное несло бы в себе нечто чувственное. Пожалуй, можно согласиться, что слову «треугольность» соответствует разновидность чувственного впечатления, но при этом нужно принимать данное слово как целое. Три мы видим тут не непосредственно; но мы видим нечто такое, к чему можно привязать умственную деятельность, ведущую к суждению, в котором встречается число 3. Как же тогда мы знакомимся, скажем, с числом фигур силлогизма, установленного Аристотелем? Разве с помощью глаз? Самое большее мы видим определённые знаки для фигур силлогизма, а не их сами. Как же мы можем увидеть их число, если сами они остаются невидимыми? Но, пожалуй, имеют в виду, что достаточно видеть знаки; их число равно числу фигур силлогизма. Тогда откуда это известно? Для этого последнее всё-таки уже должно быть определено другим способом. Или же предложение «Число фигур силлогизма есть четыре» является только другим выражением для «Число знаков фигур силлогизма есть четыре»? Нет! О знаках можно ничего не говорить; никто ничего не желает знать о знаках, если их свойство одновременно не выражает свойство обозначаемого. Здесь без логической ошибки одно и то же может иметь различные знаки; числу знаков даже не нужно совпадать с числом обозначаемого.

---

[1] Там же, Кн. III, Гл. xxiv, §5.

[2] Baumann, Op.cit., Bd.I, S.409. [*Локк Дж.* Сочинения в трёх томах, т.1.– М.: Мысль, 1985.– С.255.]

[3] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.56.

[4] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.2. [*Лейбниц Г.* Сочинения в четырёх томах, т.3 …, С.412.]

§25. В то время как для *Милля* число есть нечто физическое, для *Локка* и *Лейбница* оно существует только в идее. В самом деле, как говорит *Милль*[1], два яблока физически отличаются от трёх яблок, а две лошади физически отличаются от одной лошади из-за различия в видимом и осязаемом феномене[2]. Но должно ли из этого выводить, что двойка или тройка есть нечто физическое? Пара сапог может быть таким же видимым и осязаемым феноменом, как два сапога. Здесь мы имеем числовое различие, которому не соответствует физическое, поскольку *два* и *одна пара* отнюдь не одно и то же, как по странному стечению обстоятельств, по-видимому, считает *Милль*. Наконец, каким образом возможно, чтобы два понятия физически отличались от трёх понятий?

Беркли говорит так[3]: «Следует принять во внимание, что число … не есть нечто определённое и установленное, существующее реально в самих вещах. Оно есть всецело создание духа, рассматривающего или простую идею саму по себе, или какую-либо комбинацию простых идей, которой даётся одно имя и которая таким образом сходит за единицу. Соответственно различным способам, коими дух комбинирует свои идеи, изменяется также и число, которое есть только совокупность единиц. Мы считаем окно за единицу и печь за единицу; однако и дом, в котором много окон и много печей, имеет такое же право называться единицей; множество же домов составляют один город».

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ЧИСЛО ЧЕМ-ТО СУБЪЕКТИВНЫМ?

§26. Развивая мысль в этом направлении, легко прийти к тому, чтобы считать число чем-то субъективным. Кажется, что способ, которым число возникает в нас, может разъяснить его сущность. Следовательно, тогда всё зависело бы от психологического исследования. В этом смысле, пожалуй, высказывается *Липшиц*[4]:

«Тот, кто хочет составить обзор каких-то вещей, будет начинать с определённой вещи и постепенно добавлять новую вещь к предыдущим».

По-видимому, это больше подходит к тому, как мы получаем, скажем, созерцание созвездия, чем к числообразованию. Намерение составить обзор несущественно, поскольку едва ли можно сказать, что стадо стало обозримее, если установлено, из скольких голов оно состоит.

Такое описание внутренних процессов, предшествующих вынесению суждения о числе, никогда не может, даже если оно и является соответствующим, заменить подлинное определение понятия. Его никогда нельзя привлечь к доказательству арифметических предложений; посредством него мы не узнаем никакого свойства числа. Потому что число является предметом психологии или результатом психических процессов столь же мало, как, скажем, Северное море. Объективности Северного моря не наносится ущерба тем, что от нашего произвола зависит, какую часть водной поверхности Земли мы отграничиваем и хотим закрепить под именем «Северное море». Последнее не основание стремится исследовать это море психологическими способами. Таким образом, и число тоже есть нечто объективное. Если говорят: «Северное море имеет величину 10.000 квадратных миль», то ни посредством «Северное море», ни посредством «10.000» не указывают на состояние или процесс внутри себя, но утверждают нечто вполне объективное, независимое от наших представлений и т.п. Если же мы в другой раз обозначим границы Северного моря как-то иначе или захотим нечто другое понимать под «10.000», то то же самое содержание, которое прежде было правильным, не станет ложным; но, пожалуй, на место истинного содержания подставлено ложное, из-за чего истинность этого первого никоим образом не упраздняется.

Указывая число лепестков цветка, ботаник хочет сказать нечто столь же фактическое, как если он указывает его цвет. Одно столь же мало зависит от нашего произвола, как и другое. Здесь, следовательно, есть определённое сходство между числом и цветом; но оно состоит не в том, что и то, и другое чувственно воспринимаемо во внешних вещах, но в том, что и то, и другое являются объективными.

---

[1] Там же, Кн. III, Гл. xxiv, §5.

[2] Если быть точным, необходимо добавить: когда они вообще являются феноменом. Ведь если у кого-то в Германии есть одна лошадь, а в Америке - другая (и никаких других нет), то он, конечно, владеет двумя лошадьми. Однако они не образуют феномен, но так можно назвать только каждую лошадь саму по себе.

[3] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.428. [*Беркли Дж.* Сочинения.– М.: Мысль, 1978.– С.102.]

[4] Lehrbuch der Analysis, S.1. Я полагаю, что Липшиц имеет в виду внутренний процесс.

Я отличаю объективное от осязаемого, пространственного, действительного. Земная ось, центр массы Солнечной системы являются объективными, но я не могу назвать их действительными, как саму Землю. Экватор часто называют *мысленной* линией, но было бы ложным назвать его *выдуманной* линией; он не является результатом душевного процесса, возникшим посредством мысли, но лишь познаётся, схватывается посредством мысли. Если бы становление познанным означало возникновение, то мы не могли бы высказать о нём ничего позитивного при ссылке на время, которое предшествует этому якобы возникновению.

Пространство, согласно Канту, относится к явлениям. Возможно, что другим разумным существам оно представляется совершенно иначе, чем нам. Ведь нам даже не известно, видится ли оно одним человеком так, как оно видится другим, поскольку мы не можем соположить созерцание пространства одним с созерцанием пространства другим, для того чтобы их сравнить. Но, тем не менее, здесь содержится нечто объективное; все познают одни и те же геометрические аксиомы, пусть даже только на деле, и должны поступать так, чтобы ориентироваться в мире. Объективным здесь является то, что закономерно, понятийно, выразимо суждением, что может быть выражено в словах. Чистое созерцаемое не передаваемо. Для пояснения, предположим наличие двух разумных существ, для которых созерцаемыми являются только проективные свойства и отношения: расположение трёх точек на прямой, четырёх точек на плоскости и т.д.; и пусть одному из них плоскостью кажется то, что другой созерцает как точку, и наоборот. То, что для одного из них является линеарным соединением точек, для другого может быть сечением плоскостей и т.д. с постоянно соответствующей двойственностью. Тогда они весьма хорошо могли бы понимать друг друга и никогда бы не обнаружили различие своих созерцаний, поскольку в проективной геометрии каждой теореме противостоит другая, двойственная; отклонения же в эстетическом предпочтении признак не надёжный. В отношении всех геометрических теорем они были бы полностью согласны; по-разному они лишь переводили бы слова в своё созерцание. Скажем, со словом «точка» один связывал бы одно, а другой – другое созерцание. Всё-таки можно сказать, что их слово означает нечто объективное; только не нужно под этим значением понимать особенное в их созерцании. И в этом смысле земная ось также является объективной.

Обычно под «белый» мыслят определённое ощущение, которое, разумеется, является вполне субъективным; но уже в обыкновенном словоупотреблении, мне кажется, часто выступает объективный смысл. Если снег называют белым, то хотят выразить объективное свойство, которое распознаётся определённым ощущением при обычном дневном свете. Если он расцвечен освещением, то это учитывают при вынесении суждения, возможно говоря: «Сейчас он *кажется* красным, но *является* белым». Также и дальтоник может говорить о красном и зелёном, хотя он не различает их в ощущении. Он узнаёт о различии из того, что его проводят другие, или, возможно, посредством физического опыта. Таким образом, слово для цвета часто обозначает не наше субъективное ощущение, о котором мы не можем знать, что оно совпадает с ощущением другого - ибо никоим образом не ручаемся за одинаковое название - но объективное качество. Итак, под объективным я понимаю то, что независимо от нашего ощущения, созерцания и представления, от проектирования внутренних образов из воспоминания предшествующих ощущений, но не независимость от разума; ибо ответить на вопрос, что представляют собой вещи независимо от разума, значит вынести суждение, не вынося суждение, войти в воду, не замочив ног.

§27. Поэтому я не могу согласиться со *Шлёмильхом*[1], который называет число представлением места объекта в ряду[2]. Если бы число было представлением, то арифметика была бы психологией.

---

[1] Schloemilch, Handbuch der algebraischen Analysis, S.1.

[2] Против этого можно также возразить, что когда появляется одно и то же число, тогда должно появляться одно и то же представление места, что, очевидно, ложно. Это следствие не соответствовало бы действительности и в том случае, если под представлением он хотел бы понимать объективную идею; ибо тогда не было бы никакого различия между представлением места и самим местом.

Представление в субъективном смысле есть то, что относится к психологическому закону ассоциации; оно имеет чувственный, образный характер. Представление в объективном смысле принадлежит логике и является сущностно нечувственным, хотя слово, обозначающее объективное представление, часто также сопровождается субъективным представлением, которое, однако, не является его значением. По достоверным сведениям, субъективное представление часто различается у разных людей, объективное же у всех одинаково. Объективные представления подразделяются на предметы и понятия. Чтобы избежать путаницы, я буду использовать «представление» только в субъективном смысле. Вследствие того, что Кант этим словом ссылался и на то, и на другое, он придал своему учению более субъективную, идеалистическую окраску и затруднил знакомство со своим настоящим мнением.

Таковой она является столь же мало, как, скажем, астрономия. Как последняя имеет дело не с представлениями планет, но с ними самими, так же и предметом арифметики не являются представления. Если бы двойка была представлением, то она, прежде всего, было бы только моей. Представление другого человека уже как таковое является другим. Тогда, пожалуй, мы имели бы много миллионов двоек. Нужно было бы сказать: моя двойка, твоя двойка, какая-то двойка, все двойки. Если предполагать скрытые или неосознанные представления, то тогда были бы также и неосознанные двойки, которые осознавались бы позже. С подрастающими поколениями всегда возникали бы новые двойки, и кто знает, не изменились ли бы они в течение тысячелетий так, чтобы $2 \times 2 = 5$. Несмотря на это всё ещё сомнительно, имеется ли бесконечно много чисел, как обычно думают. Ведь могло бы быть и так, чтобы 10^{10} являлось лишь пустым знаком, и не имелось бы вовсе никакого представления (в каком-нибудь существе), которое могло бы быть так названо.

Мы видим, к каким диковинам приводит развёртывание мысли, что число является представлением. И мы приходим к выводу, что число не является ни пространственным и физическим, как груда булыжников и орехов у *Милля*, ни также субъективным, как представления, но является нечувственным и объективным. Ведь основание объективного не может лежать в чувственном впечатлении, которое в качестве аффектации нашей души является совершенно субъективным, но, насколько я вижу, лежит в разуме.

Было бы удивительно, если бы самая точная наука вынуждена была бы опираться на ещё неточную, продвигающуюся ощупью психологию.

ЧИСЛО КАК МНОЖЕСТВО.

§28. Отдельные авторы объясняют число как множество, многое или множественность. Недостаток здесь в том, что числа 0 и 1 исключаются из данного понятия. Эти выражения довольно неопределённы: то они более близки по значению к «куче», «группе», «агломерату» (причём мыслятся в пространственной связи), то используются почти равнозначно с «числом», только неопределённым. Поэтому, в таком объяснении нельзя найти расклад понятия числа. Для образования числа *Тома*[1] требует, чтобы различным множествам объектов придавались различные имена. Под этим, очевидно, для каждого множества объектов подразумевается чёткое определение, для которого придание имени есть лишь внешний знак. Ну и каким же способом осуществляется это определение? Вот в чём вопрос. Очевидно, что идея числа не возникла бы, если для «3 звезды», «3 пальца», «7 звёзд» хотели бы ввести имена, у которых не были бы видны общие элементы. Дело здесь не в придании имени вообще, но в том, чтобы само собой указывалось, что число в этом есть. А для этого необходимо, чтобы число познавалось в своей особенности.

Должно принять во внимание ещё и следующее различие. Некоторые называют число множеством вещей или предметов; другие, как уже *Евклид*[2], объясняют его как множество единиц. Последнее выражение требует отдельного обсуждения.

Проводимое здесь различие столь же оправдано, как и различие между психологией и логикой. Следовало бы и последние всегда разделять очень строго!

[1] Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen, S.1.

[2] В начале 7 книги *Элементов*: «*Μονάς έστι, καθ' ήν έκαστον τών όντων έν λέγεται. Άριθμός δέ τό έκ μονάδων συγκείμενον πλήθος*». [«*Единица* есть <то>, через что каждое из существующих считается единым. *Число* же – множество составленное из единиц.» – *Начала Евклида*, Кн.VII–X.– М.: ГИТТЛ, 1949.– С.9.]

III. МНЕНИЯ О ЕДИНИЦЕ И ОДИН.

ВЫРАЖАЕТ ЛИ ЧИСЛИТЕЛЬНОЕ «ОДИН» СВОЙСТВО ПРЕДМЕТОВ?

§29. В определении, которое *Евклид* даёт вначале 7 книги *Элементов*, кажется, что словом «*Μονάς*» он указывает то на подлежащий счёту предмет, то на свойство такого предмета, то на число один. Всегда обходятся переводом «единица», но лишь постольку, поскольку данное слово само переливается в этих различных значениях.

Шрёдер говорит[1]: «Каждая из подлежащих счёту вещей называется единицей». Спрашивается, почему вещь прежде подводят под понятие единица, а не объясняют просто: «Число есть множество вещей», что вновь вернуло бы нас к предыдущему. В том, что вещь называют единицей, быть может, прежде всего хотят найти более точное определение, в то время как следуя языковой форме «один» принимают за прилагательное и понимают «один город» так же, как «мудрый человек». Тогда единица была бы предметом, которому присуще свойство «один», и относилась бы к «один» подобно тому, как «мудрец» относится к прилагательному «мудрый». К основаниям, по которым выше предъявлялись претензии к тому, что число является свойством вещей, добавим здесь ещё несколько особых. Прежде всего бросалось бы в глаза то, что это свойство имела бы каждая вещь. Было бы непонятно, почему это свойство вообще отчётливо прилагается вещи. Утверждение «Солон был мудр» приобретает смысл только из-за возможности того, что нечто не является мудрым. При увеличении объёма содержание понятия уменьшается; если понятие становится всеобъёмлющим, то содержание должно исчезнуть вовсе. Не легко помыслить, каким образом язык может сотворить прилагательное, которое совершенно не способно служить тому, чтобы ближе определить предмет.

Если бы «один человек» понимался наподобие «мудрый человек», то следовало бы думать, что «один» может использоваться как предикат, поэтому также как «Солон был мудрый» можно было бы сказать «Солон был один» или «Солон был одним». Но, если последнее выражение и можно встретить, то всё же само по себе оно непонятно. Оно, например, может означать: «Солон был мудрецом», если «мудрец» добавлено по контексту. Но само по себе «один» не может быть предикатом[2]. Ещё яснее это проявляется при множественном числе. Тогда как «Солон был мудрый» и «Фалес был мудрый» можно скомбинировать в «Солон и Фалес были мудрые», нельзя сказать «Солон и Фалес были один». Этого невозможно было бы видеть, если «один» как и «мудрый» было бы свойством, как Солона, так и Фалеса.

§30. С этим связано то, что свойству «один» нельзя дать определение. Когда *Лейбниц* говорит[3]: «Одно есть то, что мы охватываем одним актом понимания», он объясняет «один» через само себя. И разве мы не можем охватить многое в одном акте понимания? Последнее признаётся *Лейбницем* в том же самом месте. Подобное говорит и *Бауман*[4]: «Одно есть то, что мы понимаем как одно», и далее: «То, что мы полагаем, как точку или не хотим полагать как делимое далее, мы принимаем за одно; но каждое одно внешнего созерцания - как чистого, так и эмпирического - мы также можем рассматривать как многое. Каждое представление есть одно, если оно отграничено от другого представления; но в себе оно вновь может быть различено как многое». Так стирается всякое реальное ограничение понятия, и всё зависит от нашего понимания. Мы вновь задаём вопрос: Какой смысл в том, чтобы какому-нибудь предмету прилагать свойство «один», если сообразно пониманию каждый предмет может, как быть, так и не быть одним? Каким образом на столь расплывчатом понятии может основываться наука, которая снискала себе славу как раз самой большей определённостью и точностью?

§31. Итак, хотя *Бауман* основывает понятие одного на внутреннем созерцании[5], в качестве признаков он в только что процитированном отрывке всё-таки называет неделимость и отграниченность. Если последнее соответствует действительности, то следовало бы ожидать, что также и животные могут иметь определённое представление единицы. Возможно ли, чтобы собака

---

[1] Op.cit., S.5.

[2] Встречаются обороты, которые этому по видимости противоречат, но при более тщательном рассмотрении обнаруживается, что добавлено понятийное слово или что «один» используется не как числительное, что хотят утверждать не единичность, но единственность.

[3] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.2; Erdm. S.8.

[4] Op.cit., Bd.II, S.669.

[5] Op.cit., Bd.II, S.669.

при взгляде на Луну имело о ней представление (пусть даже не столь определённое), которое мы обозначаем словом «одна»? Вряд ли! И всё же она различает некоторые отдельные предметы. Другая собака, собственный хозяин, камень, с которым она играет, несомненно кажутся ей отграниченными, самодостаточными и нераздельными так же, как и нам. Правда, она будет замечать различие в том, обороняется ли она против нескольких собак или только против одной, но это то различие, которое *Милль* называет физическим. Дело собственно в следующем: осознаёт ли собака, пусть даже и смутно, общность, выражаемую нами словом «один», в случае, где она укушена одной большей собакой, и в случае, где она преследует одну кошку. Мне кажется это неправдоподобным. Отсюда я делаю вывод, что идея единицы не даётся разуму каждым объектом извне и каждой идеей изнутри, как считает *Локк*[1], но познаётся нами посредством более высоких духовных сил, которые отличают нас от животных. Тогда такие свойства вещей, как неделимость и отграниченность, которые животные замечают столь же хорошо, как и мы, не могут быть существенными для нашего понятия.

§32. И всё же определённую связь можно предполагать. Язык указывает на это тем, что «объединённый» производно от «один». Чем больше различия в предмете отступают по сравнению с отличием от окружающего, чем больше внутренние связи преобладают над связями с окружающим, тем более удобно понимать нечто как отдельный предмет. Итак, «объединённый» означает свойство, которое даёт повод к тому, чтобы нечто обособить в понимании от окружения и рассматривать само по себе. Так можно объяснить и то, когда французское «uni» означает «как раз» или «ровно». Сходным образом используется и слово «единство», когда говорят о политическом единстве страны, единстве произведения искусства[2]. Но в этом смысле «единица» соотносится не столько с «один», сколько с «объединённый» или «единый». Ибо, когда говорят, что Земля имеет одну Луну, этим хотят объяснить не отграниченность, самодостаточность и нераздельность Луны, но это говорят в противоположность тому, что имеет место у Венеры, Марса или Юпитера. В отношении отграниченности и нераздельности луны Юпитера, пожалуй, могут помериться с нашей и, в этом смысле, являются такими же едиными.

§33. Некоторыми авторами неделимость усиливается до нераздельности. *Г.Кёпп*[3] называет каждую неразложимую и самодостаточную вещь (независимо от того, воспринимается она чувственно или же нет) единичным, а подлежащее счёту единичное - одним, где «один» очевидно используется в смысле «единица». Между тем, и *Бауман* - обосновывая своё мнение, что внешние вещи не представляют строгих единиц, тем, что мы свободны трактовать их как многое, - тоже выдаёт неразложимость за признак строгой единицы. Усиливая внутреннюю связность до безусловной, очевидно хотят получить признак единицы, который независим от произвольного понимания. Эта попытка не удаётся, потому что тогда почти не остаётся ничего такого, что можно было бы называть единицей и считать. По этой причине тотчас же начинается отступление, и как признак устанавливается не сама неразложимость, но становление мыслимым в качестве неразложимого. В результате же вновь приходят к неустойчивому пониманию. И разве есть какой-то выигрыш в том, чтобы мыслить вещи иными, нежели они есть? Наоборот, из ложного допущения можно вывести ложные заключения! Но если из неразложимости не хотят делать выводов, тогда какая от неё польза? Если без ущерба для понятия от строгости можно, и даже нужно, как-то отказаться, к чему тогда эта строгость? Но, возможно, разложимость лишь не нужно мыслить. Как будто отсутствием мысли можно было бы чего-то достигнуть! Но бывают случаи, где совершенно невозможно избежать того, чтобы мыслить разложимость, где даже вывод основывается на составленности единицы (например, в задаче: Один день включает 24 часа. Сколько часов включают 3 дня?).

РАВНЫ ЛИ ЕДИНИЦЫ ДРУГ ДРУГУ?

§34. Таким образом, любая попытка объяснить свойство «один» терпит неудачу, и мы, пожалуй, должны отказаться от того, чтобы в обозначении вещи как единицы видеть более точное определение. Мы снова возвращаемся к нашему вопросу: Почему вещи называют единицами, если «единица» есть лишь другое имя вещи, если все вещи являются единицами или могут пониматься

[1] Baumann, Op.cit., Bd.1, S.409. [*Локк Дж.* Сочинения в трёх томах, т.1 …, С.180.]
[2] Об истории слова «единица» ср. Eucken, Geschichte der philosophischen Terminologie, S.122-3, S.136, S.220.
[3] G.Köpp, Schularithmetik, Eisenach 1867, S.5,6.

как таковые? В качестве основания *Э.Шрёдер*[1] задаёт равенство, приписываемое объектам счёта. Прежде всего, не видно, почему столь же успешно на это не могут указывать слова «вещь» и «предмет». Затем спрашивается: Зачем предметам счёта приписывается равенство? Оно им только приписывается, или они действительно являются равными? Два предмета, во всяком случае, *никогда* не являются совершенно равными. С другой стороны, можно, пожалуй, почти всегда разыскать отношение, в котором два предмета совпадают. Если, вопреки истине, мы не захотим приписывать вещам равенство, идущее далее, чем им соответствует, мы вновь приходим к произвольному пониманию. В самом деле, многие авторы называют единицы равными без ограничения. *Гоббс* говорит[2]: «В абсолютном смысле, число в математике подразумевает под собой равные единицы, из которых оно построено». *Юм*[3] считает, что составные части количества и числа вполне однородны. *Тома*[4] называет индивидуум множества единицей и говорит: «Единицы равны друг другу». С таким же успехом или даже более оправданно можно сказать, что индивиды множества отличаются друг от друга. Ну и что же означает это мнимое равенство для числа? Свойства, которыми отличаются вещи, для их числа суть нечто безразличное и чуждое. Поэтому, от них хотят избавиться. Но таким способом ничего не достигнуть. Если, как требует *Тома*, «абстрагироваться от своеобразия индивидов множества объектов» или «при рассмотрении отдельных вещей отказаться от признаков, посредством которых различаются вещи», то, как считает *Липшиц*, остаётся не «понятие числа рассматриваемых вещей», но получается общее понятие, под которое подпадает каждая вещь. Сами вещи вследствие этого не теряют своих особенностей. Если, например, при рассмотрении белого и чёрного кота я откажусь от отличающих их друг от друга свойств, то, положим, получу понятие «кот». Если теперь я подвожу их обоих под это понятие их обоих и, положим, называю единицами, то белый всё равно всегда остаётся белым, а чёрный - чёрным. Следовательно, благодаря тому, что я не мыслю цвет или не собираюсь делать выводы из их различия, коты не становятся бесцветными и остаются столь же различными, какими и были. Правда, понятие «кот», получившееся в результате абстракции, больше не содержит особенностей, но как раз поэтому оно и является лишь понятием.

§35. Голыми способами оперирования с понятием не удаётся сделать различные вещи равными; но если и удаётся, то получают уже не вещи, но только одну вещь; ибо, как говорит *Декарт*[5], число (лучше: множественное число) возникает из различия вещей. *Шрёдер* правильно утверждает[6]: «Требование пересчитать вещи можно установить разумным способом только там, где имеются такие предметы, которые чётко отличимы друг от друга (например, разъединены пространственно и временно) и кажутся отграниченными в сравнении друг с другом». В самом деле, сильное сходство иногда затрудняет, к примеру, пересчёт прутьев решётки. С особой резкостью в этом смысле выражается *У.Стенли Джевонс*[7] «Число есть только другое название для *различия*. Точное тождество есть единство, а от различия возникает множественность». И далее (стр.154): «Часто говорилось, что единицы суть единицы в том отношении, что они совершенно подобны одна другой; но хотя они могут быть подобны в некоторых отношениях, однако они должны быть и различны по крайней мере в одном пункте, иначе они не были бы способны к множественности. Если бы три монеты были подобны до такой степени, что занимали бы одно и то же пространство в одно и то же время, то они были бы не тремя монетами, но одной монетою».

§36. Но вскоре обнаруживается, что взгляд на различие единиц открывает новые затруднения. *Джевонс* объясняет: «Единица есть какой-нибудь предмет, который может быть отличаем от всякого другого предмета, рассматриваемого как единица в той же задаче». Здесь единица объясняется посредством самой себя, и дополнение «который может быть отличаем от любого другого объекта» не содержит более точного определения, поскольку оно разумеется само собой. Мы называем предмет другим только лишь постольку, поскольку можем отличить его от первого предмета. Далее *Джевонс* говорит[8]: «Когда я пишу символ 5, я собственно разумею

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

---

[1] Op.cit., S.5.
[2] Baumann, Op.cit, Bd.I, S.242.
[3] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.568. [Юм Д. Сочинения в двух томах, т.2.– М.: Мысль, 1996.– С.141.]
[4] Op.cit., S.I.
[5] Baumann, Op.cit., Bd.I, S.103. [*Декарт Р.* Сочинения в двух томах, т.1.– М.: Мысль, 1989.– С.338.]
[6] Op.cit., S.3.
[7] Там же, С. 153.
[8] Там же, С. 154.

и всегда ясно подразумевается, что каждая из этих единиц отлична от всех других. Собственно я должен был бы обозначить их так

$$1^{/} + 1^{//} + 1^{///} + 1^{////} + 1^{/////}».$$

Конечно, обозначать их различно, если они различны, необходимо, ведь иначе возникнет величайшая путаница. Если уже различное место, на котором появляется однёрка, должно означать различие, то необходимо представить правило, не допускающее исключений, поскольку в противном случае никогда не было бы известно, должно 1 + 1 обозначать 2 или же 1. Тогда нужно было бы отвергнуть равенство 1 = 1, и мы пребывали бы в затруднении, никогда не будучи в состоянии обозначить одну и ту же вещь два раза. Очевидно, этого не происходит. Однако если различным вещам хотят придать различные знаки, то не понятно, почему всё-таки придерживаться одних и тех же составных частей, и не лучше ли вместо

$$1^{/} + 1^{//} + 1^{///} + 1^{////} + 1^{/////}$$

написать

$$a + b + c + d + e.$$

Теперь равенство сразу же утрачивается, и указание не использует известного сходства. Таким образом, однёрка ускользает из рук; мы остаёмся с предметами со всеми их особенностями. Знаки, типа

$$1^{/}, 1^{//}, 1^{///},$$

суть красноречивое выражение затруднения: нам нужно равенство, отсюда 1; нам нужно различие, отсюда индексы, которые, к сожалению, лишь снова устраняют равенство.

§37. У других авторов мы сталкиваемся с теми же самыми трудностями. *Локк* говорит[1]: «Повторением идеи единицы и соединением её с другой единицей мы образуем из них одну совокупную идею, обозначенную именем «два». И кто может так действовать и идти таким образом вперёд, всё время прибавляя по одной единице к последней полученной им совокупной идее числа, и даёт ей имя, тот может считать». *Лейбниц*[2] определяет число как 1 и 1 и 1 или как единицы. *Хессе* говорит[3]: «Если можно составить представление о единице, которая в алгебре выражается числом 1, ... то можно мыслить и вторую равноправную единицу и далее тем же способом. Объединение второй с первой в некоторое целое даёт число 2».

Здесь нужно обратить внимание на отношение, в котором находятся друг к другу значения слов «единица» и «однёрка». *Лейбниц* под единицей понимает понятие, под которое подпадает один и один и один; как он также говорит: «Абстракция от один есть единица». *Локк* и *Хессе*, по-видимому, употребляют единицу и один равнозначно. В сущности, и *Лейбниц*, пожалуй, поступает также; поскольку, называя каждый отдельный предмет, который подпадает под понятие единицы, одним, он между тем, обозначает этим словом не отдельный предмет, но понятие, под которое он подпадает.

§38. Чтобы не возникала путаница, было бы всё-таки хорошо строго сохранять различие между единицей и однёркой. Говорится «(die) число один» и определённым артиклем указывается на определённый, отдельный предмет научного исследования. Не существует различных чисел один, но только одно. В 1 мы обладаем собственным именем, которое, как таковое, столь же не способно к множественному числу, как «Фридрих Великий» или «химический элемент золото». То, что 1 пишут без различающих штрихов, - не случайность и не неточность способа обозначения. Равенство

$$3 – 2 = 1$$

Ст.Джевонс передал бы приблизительно так:

$$(1^{/} + 1^{//} + 1^{///}) – (1^{//} + 1^{///}) = 1^{/}.$$

Но что было бы результатом

$$(1^{/} + 1^{//} + 1^{///}) – (1^{////} + 1^{/////})?$$

Во всяком случае, не $1^{/}$. Из этого вытекает, что, согласно его пониманию, существуют не только различные однёрки, но также различные двойки и т.д.; ибо $1^{//} + 1^{///}$ нельзя заменить на $1^{////} + 1^{/////}$. Отсюда совершенно ясно видно, что число не является совокупностью вещей. Арифметика была бы упразднена, если бы вместо однёрки, которая всегда одна и та же, хотели бы ввести различные

[1] Baumann, Op.cit., Bd.I, S.409-411. [*Локк Дж.* Сочинения в трёх томах, т.1 …, С.257.]
[2] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.3.
[3] Hesse, Vier Species, S.2.

вещи, пусть даже и в столь сходных знаках. Ведь без ошибки последние не могли бы быть равными. Нельзя же предполагать, что самой глубокой потребностью арифметики является ошибочная запись. Поэтому, невозможно 1 считать знаком различных вещей, типа Исландии, Альдебарана, Солона и т.п. Бессмыслица становится наиболее очевидной, если задуматься над случаем, когда уравнение имеет три корня, а именно 2, 5 и 4. Если вместо 3 записать теперь, как поступает *Джевонс*,

$$1^{/} + 1^{//} + 1^{///},$$

и если под $1^{/}$, $1^{//}$, $1^{///}$ понимать единицы, а, стало быть, согласно *Джевонсу*, имеющиеся в наличие предметы мысли, причём $1^{/}$ означало бы здесь 2, $1^{//}$ – 5, а $1^{///}$ – 4, то разве не понятнее было бы вместо $1^{/} + 1^{//} + 1^{///}$ записать

$$2 + 5 + 4?$$

Множественное число возможно только у понятийных слов. Поэтому, если говорят о «единицах», то это слово нужно использовать не равнозначно с «один», но как понятийное слово. Если «единица» означает «подлежащий счёту предмет», то число нельзя определять как единицы. Если под «единицей» понимается понятие, охватывающее собой однёрку и только её, то множественное число не имеет смысла, и снова невозможно определять с *Лейбницем* число как единицы или как 1 и 1 и 1. Если «и» употребляется так, как в «Бунзен и Кирхгоф», то 1 и 1 и 1 есть не 3, но 1; так же золото и золото и золото никогда не являются чем-то иным, нежели золотом. Знак плюса в

$$1 + 1 + 1 = 3,$$

таким образом, должен пониматься иначе, чем «и», которое помогает обозначать совокупность или «коллективную идею».

§39. Сообразно этому мы стоим перед следующим затруднением: Если мы хотим, чтобы число возникало посредством охватывания различных предметов, то получаем совокупность, в которой содержатся предметы как раз с теми свойствами, которыми они различаются, а это - не число. С другой стороны, если мы хотим образовать число посредством охватывания равного, то оно постоянно сливается в одно, и мы никогда не придём к множественности.

Если, используя 1, мы обозначаем каждый подлежащий счёту предмет, то это ошибка, поскольку сохраняем один и тот же знак для различного. Если же мы снабжаем 1 разными штрихами, то оно не пригодно для арифметики.

Слово «единица» отлично подходит для того, чтобы запутаться в этом затруднении; и это основание (пусть даже и неосознанное) того, почему предпочтительнее слова «предмет» и «вещь». Прежде всего, единицами называют подлежащие счёту вещи и, причём, сохраняют их право на различие; тогда охватывание, собирание, объединение, соединение (или, если угодно, воспользуйтесь другим названием) переходит в понятие арифметического сложения, а понятийное слово «единица» незаметно превращается в собственное имя «один». Вследствие этого тогда и получается равенство. Если к букве **т** я присоединяю букву **р**, а затем букву **и**, то каждый легко видит, что это не является числом 3. Но если я подвожу **т**, **р** и **и** под понятие «единица» и теперь для «**т** и **р** и **и**» говорю «единица и единица и единица» или «1 и 1 и 1», то благодаря этому легко поверить, что имеется 3. Затруднение столь хорошо скрывается за словом «единица», что лишь у немногих вызывает подозрение.

Здесь можно предоставить слово *Миллю*, по праву порицающему искусные манипуляции языком; ибо в данном случае имеет место внешнее проявление мыслительного процесса, но лишь иллюзия такового. В самом деле, здесь возникает впечатление, как если бы словам, опустошённым от мысли, придавалась некоторая таинственная сила, поскольку различное должно становится равным просто благодаря тому, что называется единицей.

ПОПЫТКИ ПРЕОДОЛЕТЬ ЗАТРУДНЕНИЕ

§40. Теперь мы рассмотрим отдельные пояснения, которые представляются попытками преодолеть данное затруднение, даже если они и не всегда делаются с ясным осознанием этого намерения.

Прежде всего, можно призвать на помощь свойство пространства и времени. А именно, пространственная точка, прямая или плоскость, конгруэнтные тела, сегменты поверхностей или линий, рассмотренные сами по себе, не различаются совершенно; они различаются лишь в совместном бытии, как составные части одного общего созерцания. Таким образом, равенство здесь объединено с различимостью. То же самое имеет силу и для времени. Пожалуй, поэтому *Гоббс* полагает[1], что равенство единиц едва ли может мыслиться иначе, чем устанавливаемое посредством деления континуума. *Тома* говорит[2]: «Множества индивидов или единиц представляют в пространстве и считают их последовательно, для чего требуется время; при любой абстракции в качестве отличительного признака единиц всё-таки остаётся их различное положение в пространстве и их различное следование друг за другом во времени».

Против такого способа понимания, прежде всего, возникает сомнение, что тогда исчисляемое ограничивалось бы пространственным и временным. Уже *Лейбниц*[3] отклонял мнение схоластов, что число образуется голым делением континуума и не может применяться к бестелесным вещам. *Бауман*[4] подчёркивает независимость числа от времени. Понятие единицы также мыслимо вне времени. *Ст.Джевонс* говорит[5]: «Три монеты суть три монеты, будем ли мы считать их последовательно или смотреть на все три одновременно. Во многих случаях не может быть основанием различия ни пространство, ни время, и тогда нам может служить для этого только чистое качество. Мы можем различать вес, плотность и твёрдость золота, как три качества, хотя ни одно из них не существует прежде или после другого и не находится ни в пространстве, ни во времени. Каждое средство различения может быть источником множественности». Я добавляю: Если подлежащие счёту предметы не следуют друг за другом в действительности, но лишь пересчитываются друг за другом, то время не может быть основание различия. Ибо, чтобы их можно было пересчитывать друг за другом, мы уже должны иметь различные характеристики. Для счёта время есть лишь психологическое требование, но оно не имеет дела с понятием числа. Если непространственные и невременные предметы представлять посредством пространственных или временных точек, то это, вероятно, может быть удобным для выполнения вычислений; но при этом принципиально предполагается применимость понятия числа к непространственному и невременному.

§41. Но, если мы отказываемся от всех различимых характеристик кроме пространственных и временных, разве цель объединения различимого и равенство действительно достигаются? Нет! Мы ни на шаг не приблизились к решению. Большее или меньшее сходство предметов не относится к делу, если они, в конце концов, всё-таки должны удерживаться отдельно друг от друга.

Отдельные точки, линии и т.п. я могу обозначить здесь как 1 в столь же малой степени, как при геометрическом рассмотрении именовать их одной и той же А; ибо здесь, как и там, необходимо, чтобы они различались. Только в себе, если не обращать внимания на их пространственные отношения, точки равны друг другу. Но если я должен их охватить, то обязан рассматривать их в их совместном пространственном бытии, в противном случае они неминуемо сольются в одно. Точки в своей общности представляются, пожалуй, какой-нибудь фигурой, типа созвездия, или как-то расположенными на прямой; равные сегменты, соприкасаясь конечными точками, могут образовывать единый сегмент или располагаться отдельно друг от друга. Возникающее таким способом образование может быть совершенно различным для одного и того же числа. Таким образом, здесь мы также имели бы различные пятёрки, шестёрки и т.д. Временные точки разделяются посредством коротких или длинных, равных или неравных промежутков времени. Всё это суть обстоятельства, которые совершенно не имеют дела с числом самим по себе. Всюду вмешивается нечто особенное, далеко превосходимое числом в его общности. Даже отдельный момент имеет нечто своеобразное, то, чем он, скажем, отличается от пространственной точки и что не входит в понятие числа.

§42. Выход, заменить пространственное и временное расположение более общим понятием ряда, также не ведёт к цели; ибо место в ряду не может быть основанием различения предметов, поскольку последние, чтобы их можно было упорядочить в ряд, уже должны быть как-то различены. Такое расположение всегда предполагает отношения между предметами, будут ли они пространственными, временными, логическими, связанными с интервалами тонов или какими-то

---

[1] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.242
[2] Elementare Theorie der analyt. Functionen, S.1.
[3] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.2.
[4] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.668.
[5] Там же, С.154.

ещё, посредством которых можно переходить от одного предмета к другому, и которые необходимо объединены с этими различиями.

Когда *Ханкель*[1] мыслит или полагает предмет 1 раз, 2 раза, 3 раза, то это выглядит как попытка соединить различимость с равенством того, что подлежит счёту. Но также сразу видно, что это не более удачный ход; ибо представления или созерцания одного и того же предмета, чтобы не сливаться в одно, должны как-то различаться. Я также полагаю, что оправдано говорить о 45 миллионах немцев без того, чтобы прежде мыслить или полагать одного обыкновенного немца 45 миллионов раз; последнее было бы несколько затруднительно.

§43. Вероятно, для того, чтобы избежать затруднений, возникающих, если, следуя *Джевонсу*, каждым знаком 1 обозначать подлежащий счёту предмет, *Э.Шрёдер* хочет, чтобы посредством 1 предмет только замещался. Как следствие, он объясняет только числовой знак, а не число. А именно, он говорит[2]: «Теперь, чтобы получить знак, способный выражать, *сколько* имеется в наличие таких единиц[3], внимание *вдруг* направляется на каждый из них поочерёдно и замещает их штрихом 1 (один, однёрка); эти однёрки располагаются в строчку рядом друг с другом, но соединяются они знаком + (плюс), ведь в противном случае 111, например, согласно обычному обозначению чисел, прочитывалось бы как сто одиннадцать. Таким способом получается такой знак, как

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

эту структуру можно описать говоря:

«НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЕСТЬ СУММА ОДНЁРОК».

Отсюда видно, что для *Шрёдера* число есть *знак*. То, что выражается посредством этих знаков, то, что я до сих пор называл числом, он, как известно, предполагает словами «сколько имеется в наличие таких единиц». Также и под словом «один» он понимает знак 1, а не его значение. Знак + нужен ему, прежде всего, только как внешнее средство связи, не имеющее собственного содержания; сложение объясняется лишь позднее. Более кратко он, пожалуй, мог бы выразиться так: Знаков 1 записывается друг подле друга столько же, сколько имеется подлежащих счёту предметов, и связываются они посредством знака +. Ноль выражался бы тем, что не записывается ничего.

§44. Чтобы не относить к числам различные обозначения вещей, *Ст.Джевонс* говорит[4]: «Не трудно составить себе понятие о природе численного отвлечения. Оно состоит в отвлечении характера различия, дающего происхождение множественности и удержании его как простого факта. Когда я говорю *три человека*, то мне нет надобности сейчас же характеризовать знаки, по которым каждый может быть отличён от другого. Эти знаки должны существовать, если это действительно три человека, а не один и тот же человек, и говоря о них, как о нескольких, я предполагаю существование требуемых различий. Таким образом отвлечённое число есть *пустая форма различия*».

Как это понимать? Можно или абстрагироваться от различающихся свойств вещей прежде, чем объединять их в единое целое, или прежде образовать целое, а затем абстрагироваться от вида различия. При первом способе мы вовсе не пришли бы к различению вещей, а, стало быть, не могли бы также удержать наличие различного; *Джевонс*, видимо, имеет в виду второй способ. Но я не думаю, что таким образом мы получили бы число 10000, поскольку мы не в состоянии постигать столь много различного одновременно и удерживать его в наличие; ибо для числа рассмотрение перехода от одного к другому всегда недостаточно. Мы, правда, считаем во времени, но вследствие этого мы получаем не число, но лишь определяем число того, что сосчитали. Впрочем, указание на способ абстрагирования определением не является.

Что же следует мыслить под «пустой формой различия»? Скажем, под предложением, типа

«a отлично от b»,

где a и b остаются неопределёнными? Было ли бы это предложение, скажем, числом 2? Равнозначно ли предложение

«Земля имеет два полюса»

---

[1] Theorie der complexen Zahlensysteme, S.1.
[2] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, S.5 ff.
[3] Подлежащих счёту предметов.
[4] Там же, С.155.

предложению

«Северный полюс отличен от Южного полюса»?

Очевидно, нет. Второе предложение может существовать без первого, а первое без второго. Тогда для числа 1000 в

$$\frac{1000 \,.\, 999}{1 \,.\, 2}$$

мы имели бы предложения, выражающие различие.

То, что говорит *Джевонс*, совершенно не проходит с 0 и 1. От чего собственно нужно абстрагироваться, чтобы, например, от Луны перейти к числу 1? Абстрагированием, пожалуй, получают понятия: спутник Земли, спутник планеты, не испускающее собственного света небесное тело, тело, предмет; но 1 в этом ряду не встречается, ибо 1 не является понятием, под которое может подпадать Луна. У 0 даже вовсе не имеется предмета, от которого отталкиваются при абстракции. На это не возразишь, что 0 и 1 не являются числами в том же самом смысле, как 2 и 3! Число отвечает на вопрос «сколько?», и когда, например, спрашивают: «Сколько лун имеет эта планета?», то ответ 0 или 1 можно понять столь же хорошо, как 2 или 3, без того чтобы смысл вопроса стал иным. Правда, число 0 имеет нечто особенное, так же как и 1, но, в сущности, это имеет силу для любого целого числа; только чем больше число, тем всё меньше это бросается в глаза. Проводить здесь видовые различия дело совершенно произвольное. То, что не проходит с 0 или 1, для понятия числа существенным быть не может.

Наконец, при предположении данного способа возникновения числа затруднение, на которое мы наталкиваемся при рассмотрении обозначения

$$1^{/} + 1^{//} + 1^{///} + 1^{////} + 1^{/////}$$

для 5, вовсе не уничтожается. Эта запись вполне согласуется с тем, что *Джевонс* говорит об образовании чисел посредством абстракции; штрихи вверху обозначают как раз то, что различие есть, но не указывают его вид. Однако простое существование различия, как мы видели, уже достаточно для того, чтобы, согласно пониманию *Джевонса*, породить различные однёрки, двойки, тройки, что совершенно несовместимо со структурой арифметики.

РЕШЕНИЕ ЗАТРУДНЕНИЯ

§45. Теперь нам следует составить обзор прежних констатаций и вопросов, всё ещё остающихся без ответа!

Число не абстрагируется от вещей по типу цвета, веса, твёрдости и не является свойством вещей в том смысле, как эти последние. Всё ещё остаётся вопрос, к чему относится то, что высказывается посредством указания на число.

Число - не физично, но также и не субъективно, оно не является представлением.

Число не возникает прибавлением вещи к вещи. Также ничего в этом отношении не меняет и придание имени соответственно каждому прибавлению.

Выражения «многое», «множество», «множественность» из-за их неопределённости не годятся для объяснения числа.

При ссылке на один и единицу остаётся вопрос, каким образом ограничить произвол понимания, который, по-видимому, стирает всякое различие между одним и многим.

Отграниченность, нераздельность, неразложимость – бесполезные признаки для того, что мы выражаем словом «один».

Если единицами называют подлежащие счёту вещи, то утверждение о равенстве единиц безусловно ложно. То, что они в определённом отношении, являются равными, хотя и верно, но не имеет никакой ценности. Если должны быть числа больше 1, то различие подлежащих счёту вещей даже необходимо.

Таким образом, кажется, что мы должны придать единицам два противоречащих свойства: равенство и различимость.

Между один и единицей нужно проводить различие. Слово «однёрка» как собственное имя предмета математического исследования неспособно к множественному числу. Стало быть, образовывать число объединением единиц бессмысленно. Знак плюса в 1 + 1 = 2 не может обозначать такого объединения.

§46. Чтобы пролить свет на предмет, было бы хорошо рассмотреть число в контексте суждения, где проявляется его изначальный способ применения. Если при рассмотрении одного и того же внешнего явления я с одинаковой истинностью могу сказать: «Это - группа деревьев» и «Это - пять деревьев» или «Здесь находится четыре группы людей» и «Здесь находится 500 человек», то при этом изменяется не отдельное и не целое, не агломерат, а моё название. Но последнее есть лишь знак замены одного понятия другим. Вследствие этого как ответ на первый вопрос предыдущего параграфа нам больше подходит то, что указание на число содержит высказывание о понятии. Более всего это, пожалуй, ясно относительно числа 0. Если я говорю: «Венера имеет 0 лун», то здесь вовсе нет луны или агломерата лун, о которых можно было бы нечто высказать; однако благодаря этому *понятию* «луна Венеры» прилагается свойство, а именно, под него ничего не подпадает. Если я говорю: «Карету кайзера везут четыре лошади», то понятию «лошадь, везущая карету кайзера» я прилагаю число четыре.

Можно возразить, что понятие, как, например, «граждане германского государства», хотя его признаки и остаются неизменными, если бы указание на число высказывало о нём такое свойство, имело бы год от года изменяющееся свойство. На это можно ответить, что и предметы изменяют свои свойства, но последнее не препятствует тому, чтобы опознавать их как одни и те же. Однако здесь можно указать более точное основание. А именно, понятие «граждане германского государства» содержит время как изменяющуюся составную часть или, выражаясь математически, является функцией времени. Вместо «а есть гражданин германского государства» можно сказать: «а принадлежит германскому государству», а это как раз и указывает на текущий момент времени. Таким образом, нечто текучее содержится уже в самом понятии. С другой стороны, понятию «гражданин германского государства на начало 1883 года по берлинскому времени» навеки соответствует одно и то же число.

§47. То, что указание на число выражает нечто фактически независимое от нашего понимания, может вызвать удивление лишь у того, кто считает понятие чем-то субъективным, равным представлению. Но этот взгляд ложен. Если, к примеру, мы подчиняем понятие тела понятию тяжести или понятие кита понятию млекопитающего, то этим мы утверждаем нечто объективное. Если бы понятие было субъективным, то подчинение одного понятия другому, как отношение между ними, так же было бы чем-то субъективным, наподобие отношения между представлениями. Конечно, на первый взгляд кажется, что в предложении

«Все киты - млекопитающие»

речь идёт о животных, а не о понятиях; однако, если спросить, о каком животным тогда идёт речь, то какого-то отдельного предъявить нельзя. Если предположить, что кит имеется в наличие, то наше предложение о нём все-таки не утверждает ничего. Из него нельзя вывести, что имеющееся в наличие животное является млекопитающим, без добавочного предложения, что это животное – кит, которого наше предложение не содержит. Говорить о предмете без того, чтобы его как-то обозначить или назвать, вообще невозможно. Однако слово «кит» не обозначает отдельного существа. Если ответить, что оно говорит, конечно, не об одном отдельном, определённом предмете, но, пожалуй, о неопределённом предмете, то я считаю «неопределённый предмет» лишь другим выражением для «понятие», хотя и худшим, более исполненным противоречий. Даже если наше предложение и можно оправдать наблюдением за отдельным животным, это ничего не доказывает относительно его содержания. Для вопроса, о чём оно, безразлично, истинно оно или нет, или на каком основании мы принимаем его за истинное. Итак, если понятие есть нечто объективное, то и высказывание о нём может содержать нечто фактическое.

§48. Возникающая прежде при некоторых примерах видимость того, что одному и тому же соответствуют различные числа, объясняется тем, что носителем числа при этом считаются предметы. Как только мы восстановим в своих правах истинного носителя, понятие, обнаруживается, что числа столь же взаимоисключающи, как и цвета в своей области.

Теперь мы также видим, каким образом приходят к тому, что число хотят получить, абстрагируясь от вещей. То, что получается вследствие этого, является понятием, в котором тогда обнаруживается число. Таким образом, абстракция действительно часто предшествует образованию суждения о числе. Смешение здесь точно такое же, как если бы хотели сказать, что понятие пожароопасности образуется тогда, когда из блоков с дощатыми фронтонами строится жилой дом с соломенной крышей и дырявой печной трубой.

Собирательная сила понятия далеко превосходит объединяющую силу синтетической апперцепции. Посредством последней невозможно связать в единое целое граждан германского государства; но зато их можно подвести под понятие «гражданин германского государства» и сосчитать.

Теперь объяснима также и обширная применимость числа. Действительно загадано, как одно и то же может одновременно высказываться о внешнем и о внутреннем явлении, о пространственном и временном и о непространственном и невременном. Но в указании на число это совершенно не имеет места. Число приложимо только к понятию, под которое подводится внешнее и внутреннее, пространственное и временное, непространственное и невременное.

§49. Подтверждение нашей точки зрения мы находим у *Спинозы*, который говорит[1]: «Я отвечаю, что вещь может называться единой или единственной лишь по отношению к своему существованию, а не по отношению к своей сущности, ибо мы мыслим вещи под [категорией] числа только после того, как они подведены под некоторый общий род. Так, например, человек, держащий в руке сестерцию и империал, не подумает о числе «два», если он не имеет возможности назвать их одним и тем же именем, а именно: «монетами» или «деньгами», ибо в этом случае он может утверждать, что имеет две монеты, так как этим именем он обозначает как сестерцию, так и империал». Когда же он продолжает: «Отсюда явствует, что вещь может называться единой или единственной лишь тогда, когда мы можем представить себе другую вещь, которая (как сказано) сходна с нею», и когда он полагает, что Бога нельзя в собственном смысле назвать одним или единственным, поскольку о его сущности мы не можем образовать абстрактное понятие, то он ошибается в мнении, что понятие можно получить лишь непосредственно через абстракцию от большего числа предметов. Напротив, чтобы перейти к понятию, может быть достаточно и признака; а тогда возможно, чтобы под него не подпадала вещь. Если бы этого не случалось, никогда нельзя было бы отрицать существование, а с этим и утверждение существования утрачивало бы своё содержание.

§50. *Э.Шрёдер*[2] подчёркивает, что, если можно было бы говорить только о частотности вещей, именем этих вещей всегда должно было бы быть *родовое имя*, общее понятийное слово (notio communis): «А именно, как только предмет учтён полностью - во всех его свойствах и отношениях - то в мире он, таковой, имеется в единственном числе, и более нет ничего ему равного. Имя предмета тогда носит характер *собственного имени* (notio proprium) и предмет не может мыслиться как встречающийся повторно. Однако это имеет силу не только для *конкретных* предметов. Это имеет силу вообще для каждой вещи; её представление посредством абстракций также может прийтись к месту, если только это представление заключает в себе такой элемент, который достаточен для того, чтобы соответствующую вещь сделать полностью определённой ...». Стать объектом счёта «для вещи возможно только постольку, поскольку при этом отказываются или *абстрагируются* от некоторых её собственных признаков и отношений, посредством которых она отличается от всех других вещей; тогда благодаря этому, то что прежде было именем вещи, становится понятием применимым к большему числу вещей».

§51. То, что в этом пояснении истинно, облечено в такие корявые и вводящие в заблуждение выражения, что их требуется просматривать и распутывать. Прежде всего, неуместно общее понятийное слово называть именем вещи. Вследствие этого возникает видимость, как если бы число было свойством вещи. Общее понятийное слово обозначает как раз понятие. Оно действует как собственное имя только с определённым артиклем или указательным местоимением. Предмет не встречается повторно, но скорее большее число предметов подпадает под понятие. То, что понятие получается не только абстракцией от подпадающих под него вещей, указано уже *Спинозой*. Здесь я добавлю, что понятие не перестаёт быть понятием вследствие того, что под него подпадает единственная вещь, которая сообразно этому полностью им определена. Такому понятию (например, спутник Земли) как раз и соответствует число 1, являющееся числом в том же самом смысле, как 2 и 3. Относительно понятия всегда спрашивается, подпадает ли под него нечто, и что именно подпадает. Относительно собственного имени такой вопрос бессмысленен. Нельзя обманываться тем, что язык применяет собственное имя (например, Луна) как понятийное слово, и наоборот; несмотря на это различие сохраняется. Как только слово употребляется с неопределённым артиклем или во множественном числе, оно является понятийным словом.

§52. Дальнейшее подтверждение точки зрения, что число прилагается понятиям, можно найти в немецком словоупотреблении. Так говорят zehn Mann, vier Mark, drei Fass. Здесь единственное число может указывать на то, что подразумевается понятие, а не вещь. Преимущество этого способа выражения особо проявляется при числе 0. Кроме того, язык, конечно, прилагает число

---

[1] Baumann, Op.cit., Bd..I, S.169. [*Спиноза Б.* Избранные произведения в двух томах, т.2.– М.: ГИПЛ, 1957.– С.567.]

[2] Op.cit., S.6.

предметам, а не понятиям: «число бочек» говорится так же, как «вес бочек». Таким образом, речь на первый взгляд идёт о предметах, тогда как на самом деле нечто хотят высказать о понятии. Такое словоупотребление запутано. Выражение «четыре породистых коня» вызывает видимость, как если бы «четыре» ближе определяло понятие «породистый конь» подобно тому, как «породистый» ближе определяет понятие «конь». Однако «породистый» есть только некоторый признак; словом же «четыре» мы нечто высказываем о понятии.

§53. Под свойствами, которые высказываются о понятии, я понимаю не признаки, составляющие понятие. Последние суть свойства вещей, подпадающих под понятие, а не понятия. Так, «прямоугольность» не является свойством понятия «прямоугольный треугольник»; однако предложение, что не существует прямоугольного, прямолинейного, равностороннего треугольника, высказывает свойство понятия «прямоугольный, прямолинейный, равносторонний треугольник»; последнему прилагается число 0.

В этом отношении существование имеет сходство с числом. Ведь утверждение существования есть ничто иное, как отрицание числа ноль. Поскольку существование есть свойство понятия, онтологическое доказательство существования Бога не достигает своей цели. Однако единственность является признаком понятия «Бог» в столь же малой степени, как и существование. Единственность не может использоваться в определении данного понятия, так же как прочность, вместительность, удобства дома не могут применяться при его строительстве наряду с камнями, строительным раствором и брёвнами. Однако отсюда не следует делать общий вывод, что из понятия, т.е. из его признаков нельзя вывести, что нечто является свойством понятия. При определённых обстоятельствах это возможно, как по виду строительного камня иногда можно сделать вывод о долговечности постройки. Стало быть, утверждение, что от признаков понятия никогда нельзя заключить к единственности или существованию, было бы слишком сильным; только это никогда не может происходить так же непосредственно, как приписывание в качестве свойства предмету, подпадающему под понятия, признака этого понятия.

Ложным было бы также отрицать, что существование и единственность когда-либо могут быть признаками понятий. Они лишь не являются признаками *тех* понятий, которым их можно приписать, следуя языку. Если, например, все понятия, под которые подпадает только один предмет, собрать под одним понятием, то единственность была бы признаком этого понятия. Под него, например, подпадало бы понятие «луна Земли», но не называемое так небесное тело. Таким образом, понятие можно подвести под более высокое, так сказать, понятие второго порядка. Однако это отношение нельзя смешивать с отношением подчинения.

§54. Теперь становится возможным удовлетворительное объяснение единицы. *Э.Шрёдер* на стр.7 своего уже упоминавшегося учебника говорит: «Такое родовое имя или понятие будет называться наименованием числа, образованного заданным способом, и составлять сущность его единицы».

Действительно, разве не самым подходящим было бы при ссылке на число, соответствующее понятию, называть последнее единицей? Тогда мы сможем придать смысл высказыванию о единице, что она обособлена от окружения и является нераздельной. Тогда понятие, которому прилагается число, определённым способом в общем отграничивает то, что под него подпадает. Понятие «буква слова Zahl» отграничивает Z от a, a от h и т.д. Понятие «слог слова Zahl» понимает это слово как целое и нераздельное в том смысле, что более нет никаких частей, подпадающих под понятие «слог слова Zahl». Не со всеми понятиями дело обстоит так. Например, мы можем то, что подпадает под понятие красного, разделить разнообразными способами, без того чтобы получившееся части перестали под него подпадать. Такому понятию не соответствует конечное число. Предложение об отграниченности и нераздельности единицы можно, следовательно, выразить так:

Единица при ссылке на конечное число может быть лишь таким понятием, которое определённо отграничивает то, что под него подпадает, и не допускает никакого разделения.

Видно, однако, что нераздельность имеет здесь особое значение.

Теперь мы легко ответим на вопрос, каким образом равенство единиц примеримо с их различимостью. Слово «единица» используется здесь в двояком смысле. Равными единицы являются в объяснённом выше значении данного слова. В предложении: «Юпитер имеет четыре луны» единицей является «луна Юпитера». Под это понятие подпадает как I, так и II, так и III, так и IV. Стало быть, можно сказать, что единица, относящаяся к I, равно единице, относящейся к II и т.д. Здесь у нас есть равенство. Если, однако, утверждается различимость единиц, то под этим понимается различимость пересчитываемых вещей.

VI. ПОНЯТИЕ ЧИСЛА

КАЖДОЕ ОТДЕЛЬНОЕ ЧИСЛО ЯВЛЯЕТСЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ ПРЕДМЕТОМ.

§55. После того, как мы узнали, что указание на число содержит высказывание о понятии, мы можем попытаться дополнить лейбницевские определения отдельных чисел определением 0 и 1.

В первую очередь попытаемся объяснить следующее: Понятию соответствует число 0, когда под него не подпадает ни один предмет. Но здесь, как кажется, на место 0 можно подставить равнозначное «не»; поэтому предпочтительнее выглядит следующая формулировка: понятию соответствует число 0, если при любом а, предложение, что а не подпадает под это понятие, имеет всеобщее значение.

Сходным образом можно сказать: Понятию F соответствует число 1, если при любом а, предложение, что а не подпадает под F, не имеет всеобщего значения, и если из предложений

«а подпадает под F» и «b подпадает под F»

всегда следует, что а и b суть одно и то же.

Остаётся ещё дать общее объяснение переходу от некоторого числа к последующему. Испробуем следующую формулировку: Понятию F соответствует число (n + 1), если существует предмет а, подпадающий под F, причём понятию «подпадающий под F, но не а» соответствует число n.

§56. После наших предшествующих результатов эти объяснения представляются столь естественными, что потребуется изложить, почему их нам может недоставать.

Прежде всего сомнение вызывает последнее определение; ибо взятый в точном значении смысл выражения «понятию G соответствует число n» нам также не известен, как и смысл выражения «понятию F соответствует число (n + 1)». Конечно, мы можем при помощи данного и предпоследнего объяснения сказать, что означает

«Понятию F соответствует число 1 + 1»,

и затем, используя это, задать смысл выражения

«Понятию F соответствует число 1 + 1 + 1»

и т.д.; но мы никогда не сможем, – если взять грубый пример – посредством наших определений решить, соответствует ли понятию число *Юлий Цезарь* или является числом этот знаменитый покоритель галлов или же нет. Кроме того, мы не можем с помощью наших предварительных объяснений доказать, что если понятию F соответствует число а, и этому же понятию соответствует число b, то должно быть а = b. Стало быть, выражение «число, соответствующее понятию F» оправдать нельзя и, как следствие, равенство чисел доказать невозможно, поскольку мы вовсе не смогли схватить какого-то определённого числа. Только кажется, что мы объяснили 0 и 1; на самом же деле мы лишь зафиксировали смысл речевых оборотов

«число 0 соответствует»,

«число 1 соответствует»;

но это не позволяет различить в них 0 и 1 как самостоятельные, отождествляемые предметы.

§57. Здесь как раз уместно уделить более тщательное внимание нашему выражению, что указание на число содержит высказывание о понятии. В предложении «Понятию F соответствует число 0», если мы рассматриваем понятие F как реальный субъект, 0 является только частью предиката. Поэтому я избегаю называть числа, типа 0,1,2, свойствами понятия. Отдельное число выглядит именно как самостоятельный предмет благодаря тому, что оно образует только часть высказывания. Выше я уже уделял внимание тому, что говорят «(die) 1» и благодаря определённому артиклю 1 изображает собой предмет. Эта самостоятельность повсеместно обнаруживается в арифметике, например, в равенстве 1 + 1 = 2. Поскольку здесь мы стремимся схватить понятие числа так, чтобы оно было пригодно в науке, нас не должно беспокоить, что в обычном языке жизни число также проявляется атрибутивно. Последнего всегда можно избежать. Например, предложение «Юпитер имеет четыре луны» может быть преобразовано в «Число лун Юпитера есть четыре». Здесь «есть» не должно рассматриваться в качестве простой связки, как в предположении «Небо есть голубое». Последнее обнаруживается в том, что можно сказать: «Число лун Юпитера есть четыре» или «есть число 4». Здесь «есть» имеет смысл «есть равное», «есть то же самое, как и». Стало быть, у нас есть равенство, утверждающее, что выражение «число лун Юпитера» обозначает тот же самый предмет, как и слово «четыре». В арифметике форма равенства является господствующей. Это соображение не оспоришь тем, что в слове «четыре» не содержится ничего о Юпитере или о луне. И в имени «Колумб» нет ничего об открытии или об Америке, и всё же и Колумбом, и открывателем Америки называют одного и того же человека.

§58. Могут возразить, что о предмете, который мы называем четыре или числом лун Юпитера, как о чём-то самостоятельном, мы вовсе не можем составить представления[1]. Но в этом неповинна самостоятельность, приданная нами числу. Правда легко поверить, что в представление о четырёх глазках на игральной кости входит нечто соответствующее слову «четыре»; но это заблуждение. Помыслите (eine) зелёный луг и попробуйте, изменится ли представление, если неопределённый артикль заменить числительным «один». Ничего сверх того не происходит, в то время как слову «зелёный» в представлении всё-таки нечто соответствует. Если представляют напечатанное слово «медь», при этом никакого числа непосредственно не мыслят. Если же задаются вопросом, из скольких букв оно состоит, то получается число 4; но представление благодаря этому не становится чем-то более определённым, а может оставаться совершенно неизменным. Понятие «буквы слова медь», добавленное сверх того, и есть как раз то, где мы обнаружили число. У глазков на игральной кости дело несколько скрыто, так как понятие удостоверяет себя нам сходством глазков столь непосредственно, что мы едва замечаем его вмешательство. Число нельзя представить ни как самостоятельный предмет, ни как свойство внешней вещи, так как оно не является ни чем-то чувственным, ни свойством внешней вещи. С числом 0 дело наиболее ясно. Тщетно пытаться представить себе 0 видимых звёзд. Можно, правда, представить небо совершенно затянутым облаками; но здесь нет ничего, что соответствовало бы слову «звезда» или 0. Представляют только ситуацию, которой может способствовать суждение: сейчас не видно ни одной звезды.

§59. Каждое слово может быть и вызывает в нас какое-нибудь представление, даже такое как «только»; но оно не обязательно соответствует содержанию слова; у разных людей представление может быть совершенно различным. И потом, представляется, пожалуй, вся ситуация, вызванная предложением, в которое входит это слово; или случается, что произнесённое слово вызывает в памяти написанное.

Последнее относится не только к отдельным частям речи. Пожалуй, не подлежит никакому сомнению, что у нас нет никакого представления о нашем расстоянии до Солнца. Так как, даже если нам известно правило, как часто мы должны умножать масштаб, то нам всё равно не удаётся никакой попытки согласно этому правилу сконструировать образ, который тоже лишь до некоторой степени приближался бы к желаемому. Однако это не основание сомневаться в правильности расчётов, посредством которых устанавливается расстояние, и ни коим образом не препятствует нам на существовании этого расстояния основывать дальнейшие выводы.

§60. Даже такую конкретную вещь, как Земля, мы не в состоянии представить такой, какой, как мы знаем, она является; вместо этого, мы довольствуемся шаром среднего размера, который считается нами знаком Земли; однако нам известно, что одно весьма отлично от другого. Итак, хотя наше представление часто совершенно не отвечает желаемому, мы всё-таки судим с большой уверенностью о таком предмете, как Земля, даже когда рассматривается её размер.

Очень часто мышление выводит нас за рамки представимого, и при этом не утрачивается основание наших выводов. Даже если, как кажется, человеческое мышление невозможно без представлений, то его связь с тем, что имеется в виду, всё-таки может быть совершенно внешней, произвольной, конвенциальной.

Стало быть, непредставимость содержания слова не является основанием лишить его всякого значения или исключить из обихода. Противоположный взгляд, вероятно, возникает вследствие того, что мы рассматриваем слова изолированно, а потом, спрашиваем об их значении, за которое затем принимаем представление. Таким образом, кажется, что слово, которому недостаёт соответствующего внутреннего образа, не имеет содержания. Необходимо, однако, всегда учитывать полное предложение. Только в нём слова обладают подлинным значением. Внутренний образ, который при этом как бы витает, не обязательно соответствует логически составной части суждения. Достаточно, если предложение имеет смысл как целое; благодаря этому своё содержание получают также и его части.

Мне кажется, это замечание пригодится для того, чтобы пролить свет и на иные трудные понятия, типа понятия бесконечно малых[2], и его радиус действия, пожалуй, не ограничивается

---

[1] «Представления» в смысле чего-то такого, что понимается как образ.

[2] Дело в том, чтобы определить смысл равенства, типа

математикой.

Самостоятельность, которой я воспользовался для числа, не должна означать, что числительное что-то обозначает вне контекста предложения, но этим я хотел только исключить его употребление в качестве предиката или атрибута, благодаря чему, несколько изменяется его значение.

§61. Однако быть может, на это возразят, что даже если Земля и на самом деле непредставима, она всё-таки является внешней вещью, занимающей определённое место; но где находится число 4? Его нет ни вне нас, ни в нас. В пространственном смысле последнее понимается правильно. Определение местонахождения числа 4 не имеет смысла; но отсюда вытекает только то, что оно не является пространственным предметом, а не то, что его вообще нет. Не каждый предмет находится где-то. Так же и наши представления[1] в этом смысле находятся не в нас (под кожей). Там находятся нервные узлы, кровяные тельца и тому подобное, но не представления. К ним не применимы пространственные предикаты: одно представление не находится ни справа, ни слева от другого; в миллиметрах нельзя указать расстояния, отделяющие представления друг от друга. Если мы все-таки говорим, что они в нас, то этим хотим обозначить их как субъективные.

Но хотя субъективное и не обладает местом, как возможно, чтобы объективное число 4 нигде не находилось? Итак, я утверждаю, что в этом вовсе нет противоречия. Оно действительно в точности одно и то же для каждого, кто имеет с ним дело; но это не связано с пространственностью. Не каждый объективный предмет обладает местом.

ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ ПОНЯТИЕ ЧИСЛА, НЕОБХОДИМО УСТАНОВИТЬ СМЫСЛ РАВЕНСТВА ЧИСЕЛ.

§62. Каким образом нам может быть дано число, если мы не в состоянии обладать его представлением или созерцанием? Слова обозначают нечто только в контексте предложения. Стало быть, всё идёт к тому, чтобы объяснить смысл предложения, в которое входит числительное. Прежде всего, в этом всё ещё остаётся много произвольного. Но мы уже установили, что под числительными следует понимать самостоятельные предметы. С этим нам дана разновидность предложений, которые должны обладать смыслом, предложений, которые выражают отождествление. Если знак должен обозначать для нас предмет, то мы должны обладать критерием, который всюду решал бы, является ли b тем же самым, что и a, даже если не всегда в наших силах установить, применим ли этот критерий. В нашем случае мы должны объяснить смысл предложения:

«Число, соответствующее понятию F, является тем же самым, как и то, что соответствует понятию G»;

т.е. мы должны воспроизвести содержание этого предложения другим способом, не используя выражения

«число, соответствующее понятию F».

Этим мы зададим общий критерий равенства чисел. После того, как таким образом мы приобретём средство схватывать определённое число и отождествлять его, как одно и то же, мы можем придать ему числительное в качестве собственного имени.

§63.Такое средство называл уже Юм: «Когда два числа составлены таким образом, что каждая единица в одном из них всегда отвечает каждой единице в другом, мы признаём их равными»[2]. В новейшее время среди математиков[3], кажется, многократный отклик встретило мнение, что равенство чисел должно определяться с помощью однозначного соотнесения. Но сразу же возникают логические сомнения и затруднения, мимо которых мы не имеем права пройти без проверки.

Отношение равенства встречается не только среди чисел. Отсюда, по-видимому, следует, что оно должно быть определено не только для данного случая. Можно было бы подумать, что понятие равенства установлено уже заранее, и что затем из него и понятия числа должно

$$df(x) = g(x)dx,$$

а не в том, чтобы указать расстояние, ограниченное двумя различными точками, длина которого dx.

[1] Это слово понимается сугубо психологически, а не психофизически.

[2] Baumann, Op.cit., Bd.II, S.565. [*Юм Д.* Сочинения в 2-х томах, т.1.– М.: Мысль, 1996.– С.128.]

[3] Cp. E.Schroeder, Op.cit., S.7-8; E.Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Program des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums. Berlin, 1872, S.16; G.Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883.

получаться то, когда одно число равно другому, без того, чтобы сверх этого иметь надобность ещё в особом определении.

В противовес этому нужно заметить, что для нас понятие числа ещё не установлено, но прежде должно быть определено при помощи нашего объяснения. Наше намерение - образовать содержание суждения, которое могло бы пониматься как равенство, так, чтобы каждая сторона этого равенства являлась числом. Мы, стало быть, хотим объяснить равенство не для данного случая, но при помощи уже известного понятия равенства, получить то, что рассматривается как равное. Конечно, это кажется весьма необычным видом определения, которому логики ещё не уделяли достаточного внимания; но то, что он не так уж и не слыхан, можно показать на нескольких примерах.

§64. Суждение: «Прямая a параллельна прямой b», в знаках:

$$a \,//\, b$$

также может пониматься как равенство. Если мы так поступаем, то получаем понятие направления и говорим: «Направление прямой a равно направлению прямой b». Таким образом, мы заменили знак // на более общий =, тем, что распределили особое содержание первого между a и b. Мы расчленили содержание иначе, нежели изначальный способ и, благодаря этому, получили новое понятие. Конечно, часто дело воспринимается наоборот, и многие руководства определяют: Параллельные прямые суть те, что имеют равное направление. Предложение: «Когда две прямые параллельны третей, то они параллельны друг другу» можно тогда очень удобно доказать ссылкой на предложение о равенстве, гласящем нечто подобное. Жаль только, что при этом истинное положение дел ставиться на голову! Так, всё геометрическое, пожалуй, всё же должно первоначально созерцаться. Теперь я спрашиваю, каждый ли обладает созерцанием направления прямой. Что касается прямой, пожалуй! Но различают ли в созерцании этой прямой ещё и её направление? Вряд ли! Это понятие прежде открывается посредством умственной деятельности, привязанной к созерцанию. Зато представлением параллельных прямых обладают. Упомянутое доказательство проходит только благодаря предвосхищению основания, тем что, употребляя слово «направление» предполагают доказываемое; ибо, если предположение: «Когда две прямые параллельны третьей, то они параллельны друг другу» было бы неверным, то a // b нельзя было бы превратить в равенство.

Подобным образом из параллелизма плоскостей можно получить понятие, соответствующее понятию направления у прямых. Для этого я подобрал имя «положение». Из геометрического сходства образуется понятие контуров, так что, например, вместо «Оба треугольника сходны» говорят: «Оба треугольника имеют равные контуры», или «Контуры одного треугольника равны контурам другого». Также и из коллинеарного сродства можно таким же образом получить понятие, для которого, пожалуй, всё ещё не достаёт названия.

§65. Теперь, чтобы, например, от параллелизма[1] перейти к понятию направления, мы испробуем следующее определение:

Предложение

«Прямая a параллельна прямой b»

равнозначно с

«Направление прямой a равно направлению прямой b».

Это объяснение откланяется от привычного, поскольку оно, как кажется, устанавливает уже известное отношение равенства, тогда как на самом деле оно должно вводить выражение «направление прямой a», которое выглядит второстепенным. Отсюда вытекает второе сомнение, не впутают ли нас такие установления в противоречие с известными законами равенства. Каковы же эти законы? Как аналитические истины они могут развиваться из самого понятия. Так Лейбниц определяет:

«Eadem sunt, quorum unum potest substiti alteri salva veritate»[2].

Данное объяснение для равенства я принимаю. Говорят ли «равные» или, как Лейбниц, «одни и те же» значения не имеет. «Одни и те же» на самом деле кажется совершенно совпадающим с «равные», только выражающим то или иное отношение; но можно принять такую манеру речи, где это различие пропадёт (например, если вместо «Расстояния равны по длине» говорить: «Длина

[1] Я говорю здесь о параллелизме, чтобы мне удобнее было выражаться и легче быть понятым. Существенное этого обсуждения может быть легко перенесено на случай равенства чисел.

[2] Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis, Erdm., S.94. [«Тождественные суть те, один из которых может быть поставлен вместо другого с сохранением истинности». Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х томах, т.3…, С.632.]

расстояний является равной» или «одной и той же», а вместо «Поверхности равны по цвету» говорить: «Цвет поверхностей является равным»). Таким образом, мы и употребляли это слово в вышеприведённых примерах. На самом же деле в общей заменимости содержаться вообще все законы равенства.

Для оправдания нашей попытки определить направление прямой, мы должны, стало быть, указать, что

направление a

всюду можно заменить на

направление b,

если прямая a и прямая b параллельны. Последнее упрощается, прежде всего, благодаря тому, что о направлении прямой не известно никакого другого высказывания, кроме совпадения с направлением некой другой прямой. Стало быть, нам нужно в таком равенстве или содержании, включающем такие равенства в качестве составных частей[1], лишь указать на заменимость. Все другие высказывания о направлениях должны быть прежде объяснены и для этих определений мы можем установить правило, что заменимость направления одной прямой на направление прямой, ей параллельной, должна сохраняться.

§66. Но относительно нашей попытки определения возникает ещё и третье сомнение. В предложении

«(die) Направление a равно направлению b»

направление a выглядит как предмет[2], и наши определения дают нам средство отождествления этого предмета, если бы он выступал в другом одеянии, скажем, как направление b. Но этого средства не достаточно для всех случаев. Сообразно с ним нельзя, к примеру, решить, являются ли Англия и направление оси Земли одним и тем же. Да простят нам этот кажущийся бессмысленным пример! Естественно, никто не смешивает Англию с направлением оси Земли; но это - не заслуга нашего объяснения. Последнее ничего не говорит о том, подтверждается предложение

«Направление a равно q»

или же отрицается, если само q не дано в форме «направление b». Нам недостаёт понятия направления; если бы оно у нас имелось, мы могли бы это установить; если q – не направление, то наше предложение должно отрицаться; если q – направление, то решает прежнее объяснение. Итак, в первую очередь следует объяснить:

q является направлением, если существует прямая b, направлением которой является q.

Однако теперь ясно, что мы вращаемся по кругу. Чтобы это объяснение можно было применить в каждом случае, мы уже должны знать, подтверждается или отрицается предложение

«q равно направлению b».

§67. Если хотят сказать, что q является направлением, когда оно вводится посредством определения, о котором говорилось выше, то способ, которым вводится предмет q, должен трактоваться как его свойство, чем он не является. Определение предмета как таковое собственно ничего о нём не утверждает, но устанавливает значение знака. После того, как это случилось, оно преобразуется в суждение, в котором речь идёт о предмете, но теперь оно уже более его не вводит и находится на одном уровне с другими высказываниями о нём. Если избирается этот ход, необходимо предполагать, что предмет можно задать лишь единственным способом; ибо, в противном случае, из того, что q не вводится посредством нашего определения, не следовало бы, что оно не может быть таким образом введено. Все равенства получались бы тогда из того, что то, что задано одним и тем же способом, должно признаваться за одно и то же. Но это так очевидно и так неплодотворно, что об этом не стоит и говорить. Отсюда в самом деле нельзя извлечь никакого следствия, которое отличалось бы от каждой посылки. Разносторонние и важные применения равенств, напротив, основываются на том, что нечто можно отождествить, несмотря на то, что это нечто задаётся различными способами.

§68. Поскольку таким образом мы не можем получить точно ограниченного понятия

---

[1] В гипотетическом суждении равенство направлений может, например, встречаться как условие или следствие.

[2] На это указывает определённый артикль. Для меня понятие является возможным предикатом сингулярного, выразимого суждением содержания, а предмет - его возможным субъектом. Если в предложении

«Направление оси телескопа равно направлению оси Земли»

мы рассматриваем направление оси телескопа как субъект, то предикатом является «равно направлению оси Земли». Последнее является понятием. Но направление оси Земли является только частью предиката; оно также является предметом, так как может быть преобразована в субъект.

направления и на том же самом основании точно ограниченного понятия числа, мы испробуем другой путь. Если прямая a параллельна прямой b, то объём понятия «прямая, параллельная прямой a» равен объёму понятия «прямая, параллельная прямой b»; и наоборот, если объём названных понятий равен, то a параллельна b. Стало быть, мы попробуем объяснить следующее:

> Направление прямой a есть объём понятия «параллельна прямой a»;
>
> Контуры треугольника d есть объём понятия «подобен треугольнику d».

Если мы хотим применить это к нашему случаю, то должны на место прямой или треугольника подставить понятие, а на место параллелизма или подобия – возможность взаимнооднозначного соотнесения предметов, подпадающих под одно и под другое понятие. Краткости ради, если имеется эта возможность, я буду называть понятие F и понятие G *равночисленными*, но должен просить, чтобы данное слово рассматривалось как произвольно выбранный способ обозначения, чьё значение заимствовано не языковым подбором, но данным установлением.

Итак, я определяю:

> Число, соответствующее понятию F, есть объём[1] понятия «равночисленно понятию F».

§69. То, что это объяснение подходит, поначалу, пожалуй, едва ли очевидно. Разве под объёмом понятий не мыслится нечто иное? То, что под этим понимается, становится ясным из изначальных высказываний, которые можно сделать об объёмах понятий. Они следующие:

1. равенство;
2. что один шире, чем другой.

Итак, предложение:

> Объём понятия «равночисленно понятию F» равен объёму понятия «равночисленно понятию G»

всегда истинно тогда и только тогда, когда и предложение

> «Понятию F соответствует то же самое число, как и понятию G»

является истинным. Стало быть, здесь имеется полное согласие. Правда, не говорят, что одно число шире другого, в том смысле, в котором объём одного понятия шире, чем объём другого; однако не случается также и то, чтобы

> объём понятия «равночисленно понятию F»

был шире, чем

> объём понятия «равночисленно понятию G»;

но все понятия, равночисленные G, также равночисленны и F, таким же образом и наоборот, все понятия, равночисленные F, равночисленны G. Данное «шире» естественно не совпадает с «больше», которое встречается у чисел.

Разумеется, все ещё допустим случай, когда объём понятия «равночисленно понятию F» более или менее широк, чем объём другого понятия, который тогда, согласно нашему объяснению, не может быть числом; и не принято называть число более или менее широким, чем объём понятия; но и тому, чтобы принять такую манеру речи - если бы подобное когда-нибудь произошло - также ничего не препятствует.

ДОПОЛНЕНИЕ И ПРОВЕРКА НАШЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

§70. Определения оказываются пригодными благодаря их плодотворности. Те из них, которые с таким же успехом могут отсутствовать без того, чтобы в процедуре доказательства открывались пробелы, должны отбрасываться как совершенно ничего не стоящие.

Мы, стало быть, следует попробовать, допустимо ли произвести из нашего объяснения числа, соответствующего понятию F, известное свойство чисел! Здесь мы довольствуемся самым

---

[1] Я полагаю, что вместо «объём понятия» можно было бы сказать просто «понятие». Однако возможно двоякое возражение:

1. Это находится в противоречии с моим прежним утверждением, что отдельное число является предметом, на что указывает определённый артикль в выражениях, типа «(die) два» и невозможность говорить об однёрках, двойках и т.п. во множественном числе, а также благодаря тому, что число составляет только часть предиката указания на число;
2. Могут быть понятия равного объёма, без того, чтобы совпадать.

Правда, теперь я держусь мнения, что оба эти возражения возможно было бы устранить; но здесь это может далеко увести. Я полагаю известным, что представляет собой объём понятия.

простым.

Для этого необходимо всё ещё как-то точнее схватить равночисленность. Мы объяснили её с помощью взаимнооднозначного соотнесения, и сейчас нужно изложить то, как я хочу понимать данное выражение, так как в этом легко можно предположить нечто созерцаемое.

Рассмотрим следующий пример! Если официант хочет быть уверен, что он положил на стол ножей столько же, сколько тарелок, ему нет надобности считать каждый из них; если только он справа от каждой тарелки рядом положил нож, тогда каждый нож на столе находится рядом справа от тарелки. Тарелки и ножи взаимнооднозначно соотнесены друг с другом, и притом, в равном соотношении местоположений. Если мы в предложении

«а находится рядом справа от А»

для а и А мыслим подставленными всё новые и новые предметы, остающаяся при этом неизменной часть содержания составляет сущность отношения. Это следует обобщить!

Обособив а и b в выразимом суждением содержании, в котором речь идёт о предмете а и предмете b, мы, таким образом, сохранили оставшееся понятие отношения, которое согласно этому двояким способом нуждается в дополнении. Если в предложении

«Земля по массе больше, чем Луна»

мы обособим «Земля», то сохраним понятие «по массе больше, чем Луна». Если мы, напротив, обособим предмет «Луна», то получим понятие «по массе меньше, чем Земля». Но если мы одновременно обособим и то, и другое, то обратно останемся с понятием отношения, которое само по себе одно имеет столь же мало смысла, как и обыкновенное понятие: оно всегда требует дополнения для выразимого суждением содержания. Но это может произойти различными способами; вместо Земля и Луна я могу, например, поставить Солнце и Земля и способствовать обособлению как раз благодаря этому.

Отдельная пара соотнесённых предметов относится – можно сказать как субъекты – к понятию отношения, подобно тому, как отдельный предмет относится к понятию, под которое он подпадает. Субъект здесь является составным. Иногда, когда отношение обратимо, это к тому же выражается в языке, как в предложении «Пелей и Фетис были родителями Ахилла»[1]. В сравнении с последним содержание предложения «Земля больше, чем Луна» так преобразовать возможно не вполне, потому что «и» всегда указывает на определённую уравненность. Но это к делу не относится.

Понятие отношения как простое, стало быть, принадлежит чистой логике. Здесь учитывается не особое содержание отношения, но только логическая форма. И чтобы о ней не утверждалось, истинность этого является аналитической и известной a priori. Для понятий отношения это имеет силу, как и для других.

Подобно тому, как

«а подпадает под понятие F»

является общей формой выражаемого суждением содержания, имеющего дело с предметом а, так и

«а находится в отношении ϕ к b»

можно считать общей формой выражаемого суждением содержания, имеющего дело с предметом а и предметом b.

§71. Теперь, если каждый предмет, подпадающий под понятие F, находится в отношении ϕ к предмету, подпадающему под понятие G, и если к каждому предмету, подпадающему под G, в отношении ϕ находится предмет, подпадающий под F, то предметы, подпадающие под F и G, соотнесены друг с другом посредством отношения ϕ.

Всё ещё можно спросить, что означает выражение

> «Каждый предмет, подпадающий под F, находится в отношении ϕ к предмету, подпадающему под G»,

если предмет вовсе не подпадает под F. Под этим я понимаю:

Оба предложения

«а подпадает под F»

и

«а не находится в отношении ϕ к предмету, подпадающему под G»,

не могут сосуществовать друг с другом, при любом значении а; тогда или первое, или второе, или

[1] Данный случай нельзя путать с тем, где «и» только кажется субъектом, а на самом деле связывает два предложения.

оба являются ложными. Отсюда получается, что «каждый предмет, подпадающий под F, находится в отношении ϕ к предмету, подпадающему под G», потому как, если нет предмета подпадающего под F, тогда первое предложение

«а подпадает под F»

должно всегда отрицаться, при любом a.

Также

«К каждому предмету, подпадающему под G, в отношении ϕ находится предмет, подпадающий под F»

означает, что оба предложения

«а подпадает под G»

и

«Предмет, подпадающий под F, не находится в отношении ϕ к a»

не могут сосуществовать друг с другом, при любом a.

§72. Итак, мы видели, когда предметы, подпадающие под понятия F и G, соотнесены друг с другом посредством отношения ϕ. Здесь это соотнесение должно быть взаимнооднозначным. Под этим я понимаю, что имеют силу оба следующих предложения:

1. Если d находится в отношении ϕ к a, и если d находится в отношении ϕ к e, тогда a всегда есть одно и то же с e, при любых d, a и e;
2. Если d находится в отношении ϕ к a, и если b находится в отношении ϕ к a, тогда d всегда есть одно и то же с b, при любых d, b и a.

Этим мы свели взаимнооднозначное соотнесение к чисто логическим обстоятельствам и теперь можем дать следующее определение:

Выражение

«Понятие F равночисленно понятию G»

равнозначно выражению

«Существует отношение ϕ, которое взаимнооднозначно соотносит предметы, подпадающие под понятие F, с предметами, подпадающими под понятие G».

Я повторю:

Число, соответствующее понятию F, есть объём понятия «равночисленно понятию F»,

и добавлю:

Выражение

«n есть число»

равнозначно выражению

«Существует понятие такое, что n есть соответствующее ему число».

Понятие числа, таким образом, объяснено; но, по-видимому, само через себя, однако всё-таки без изъяна, поскольку уже объяснено «число, соответствующее понятию F».

§73. Теперь мы хотим сразу же показать, что число, соответствующее понятию F, равно числу, соответствующему понятию G, если понятие F и понятие G равночисленны. Конечно, последнее звучит тавтологично, но это не так, ведь значение слова «равночисленно» получено не подбором, но из объяснения, данного выше.

Согласно нашему определению необходимо показать, что если понятие F равночисленно понятию G, то объём понятия «равночисленно понятию F» такой же, как объём понятия «равночисленно понятию G». Другими словами, нужно доказать, что согласно этому предположению значение всеобщности имеют предложения:

Если понятие H равночисленно понятию F, то оно также равночисленно понятию G;

и

Если понятие H равночисленно понятию G, то оно также равночисленно понятию F.

Из первого предложения вытекает, что существует отношение, которое взаимнооднозначно соотносит предмет, подпадающий под понятие H, с предметом, подпадающим под понятие G, если существует отношение ϕ, которое взаимнооднозначно соотносит предмет, подпадающий под понятие F, с предметом, подпадающим под понятие G, и если существует отношение ψ, которое взаимнооднозначно соотносит предмет, подпадающий под понятие H, с предметом, подпадающим под понятие F. Следующее расположение букв сделало бы это наглядным:

H ψ F ϕ G.

Фактически, такое отношение может быть задано; оно присутствует в содержании

«Существует предмет, к которому в отношении ψ находится c и который находится в отношении ϕ к b»,

если мы обособим в нём c и b (рассматривая их как пункты отношения). Можно показать, что это отношение является взаимнооднозначным, и что оно соотносит предметы, подпадающие под понятие H, с предметами, подпадающими под понятие G.

Сходным образом может быть доказано и другое предложение[1]. Это указание, надеюсь, в достаточной степени позволило объяснить, что здесь мы не нуждались в том, чтобы заимствовать основание доказательства у созерцания, и что с нашими определениями можно что-то делать.

§74. Теперь мы можем перейти к объяснению отдельных чисел.

Поскольку под понятие «неравное себе» ничего не подпадает, я объясняю:

0 - это число, соответствующее понятию «не равное себе».

Быть может, то, что я говорю здесь о понятии, сочтут шокирующим. Быть может, возразят, что в этом содержится противоречие, и упомянут старых знакомых, деревянное железо и круглый квадрат. Ныне я полагаю, что они вовсе не так плохи, как их подают. Правда от них нет никакой пользы; но они также не могут принести и вреда, если только не предполагать, что под них нечто подпадает; а при голом употреблении понятий этого всё же не происходит. То, что понятие содержит противоречие, не всегда очевидно до такой степени, что исследования не требуется; для исследования же понятие необходимо прежде иметь и трактовать логически так же, как и всё другое. Всё, что со стороны логики и для строгости доказательства можно требовать от понятия, это его точные границы, чтобы для каждого предмета было определено, подпадает он под него или нет. Этому требованию всецело удовлетворяют понятия, содержащие противоречия, типа «не равное себе»; ибо для каждого предмета известно, что он под таковое не подпадает[2].

Я использую слово «понятие» таким способом, чтобы

«a подпадает под понятие»

представляло собой общую форму выразимого суждением содержания, в котором речь идёт о предмете a, и которое сохраняло бы выразимость суждением, независимо от того, что подставляется вместо a. И в этом смысле

«a подпадает под понятие «не равное себе»»

равнозначно с

«a не равно себе»

или

«a не равно a».

Я могу принять за определение 0 любое другое понятие, под которое ничего не подпадает. Но дело в том, что мне нужно выбрать такое понятие, которое может быть доказано чисто логически; и для этого «не равное себе» представляется удобным. Причём для «равное» я признаю приведённое выше объяснение Лейбница, являющееся чисто логическим.

§75. Теперь с помощью прежних установлений должно быть возможным доказательство того, что каждое понятие, под которое ничего не подпадает, равночисленно с каждым понятием, под которое не подпадает ничего, и только с такими понятиями; отсюда следует, что 0 - это число, соответствующее такому понятию, и что предметы не подпадают под понятие, если соответствующее ему число есть 0.

Если мы предполагаем, что ни один предмет не подпадает ни под понятие F, ни под понятие G, то нам, чтобы доказать равночисленность, необходимо отношение ϕ, для которого имеют силу предложения:

---

[1] А равно и обратное ему: Если число, соответствующее понятию F, является тем же самым, что и число, соответствующее понятию G, то понятие F и понятие G равночисленны.

[2] С точки зрения понятия, под которое подпадает предмет, весьма различается то, что представляет собой определение этого предмета. К примеру, выражение «(der) самая большая дробь» не имеет содержания, поскольку определённый артикль заявляет претензию на указание определённого предмета. Напротив, понятие «дробь меньше 1, причём такая, что нет дроби меньше 1, превосходящей её по величине» вовсе не вызывает сомнений, и для возможности доказательства того, что такой дроби нет, это понятие даже нужно, хотя оно и содержит противоречие. Но если посредством этого понятия хотят определить предмет, под него подпадающий, конечно необходимо прежде показать две вещи:

1. что под это понятие подпадает некий предмет;
2. что под него подпадает лишь единственный предмет.

Поскольку здесь уже первое из этих предложений является ложным, то выражение «самая большая дробь» бессмысленно.

Каждый предмет, подпадающий под F, находится в отношении ϕ к каждому предмету, подпадающему под G; к каждому предмету, подпадающему под G, в отношении ϕ находится предмет, подпадающий под F.

После того, что прежде говорилось о значении этих выражений, каждое отношение, по нашему предположению выполняет эти условия, а, стало быть, также и равенство, которое сверх того является взаимнооднозначным; поскольку для него действительны оба требуемых выше для этого предложения.

Если, напротив, под G подпадает предмет, например, a, в то время как под F не подпадает ни один, то друг с другом сосуществуют два предложения

«a подпадает под G»

и

«не подпадающий под F предмет находится к a в отношении ϕ»

для любого отношения ϕ, так как первое оправдывается первым предположением, а второе - вторым. Т.е., если предмет, подпадающий под F, не существует, то не существует также и такого предмета, который находится к a в каком-нибудь отношении. Стало быть, не существует отношения, которое согласно нашему объяснению соотносит предметы, подпадающие под F, с предметами, подпадающими под G, и согласно этому, понятия F и G неравночисленны.

§76. Теперь я хочу объяснить отношение, в котором находятся друг к другу по два смежных члена натурального ряда чисел. Предложение:

«Понятие F и подпадающий под него предмет x существуют таким способом, что n – это число, соответствующее понятию F, и что m – это число, соответствующее понятию «подпадающий под F, но не равный x»»

равнозначно с

« В натуральном ряду чисел n следует непосредственно за m».

Я избегаю выражения «n – это (die) число, идущее следом за m», поскольку для оправдания определённого артикля прежде должны быть доказаны два предложения[1]. На том же самом основании я ещё не говорю здесь «n = m + 1»; так как благодаря знаку равенства (m + 1) также характеризуется как предмет.

§77. Чтобы теперь перейти к числу 1, мы должны сразу же показать, что существует нечто такое, что в натуральном ряду чисел следует непосредственно за 0.

Мы рассмотрим понятие – или, если угодно, предикат – «равно 0»! Под него подпадает 0. Напротив, под понятие «равно 0, но не равно 0» не подпадает никакой предмет, так что 0 – это число, которое принадлежит данному понятию. Таким образом, у нас есть понятие «равно 0» и некий предмет 0, под него подпадающий; отсюда имеет силу следующее:

Число, соответствующее понятию «равно 0», равно числу, соответствующему понятию «равно 0»;

0 – это число, соответствующее понятию «равно 0, но не равно 0».

Стало быть, согласно нашему объяснению, число, соответствующее понятию «равно 0», в натуральном ряду чисел непосредственно следует за 0.

Если теперь мы определяем:

1 - это число, соответствующее понятию «равное 0»,

то данное предложение можно выразить так:

В натуральном ряду чисел 1 следует непосредственно за 0.

Пожалуй, нелишне заметить, что определение 1, к его объективному оправданию, предполагалось вне наблюдаемого факта[2]; ибо в возможность определения легко впутать необходимость выполнения известных субъективных условий, а кроме них и то, что возбуждают в нас чувственные восприятия[3]. Оно всё равно может соответствовать, без того, чтобы производные предложения оставались бы априорными. К таковым условиям относится, например, то, чтобы кровь, – по крайней мере, насколько мы знаем, – в достаточном изобилии и подходящего качества циркулировала в мозге, но истинность нашего последнего предложения от этого не зависит; оно имеет место быть, даже если циркуляция прекращается; и даже если все разумные существа когда-нибудь одновременно впадут в зимнюю спячку, оно не будет упразднено на столь же долгое

---

[1] См. примечание к § 74.

[2] Предложения без общности.

[3] Ср. *B.Erdman*, die Axiome der Geometrie, S.164.

время, но останется совершенно незатронутым. Быть истинным для предложения как раз не означает быть мыслимым.

§75. Здесь я предлагаю последовать нескольким предложениям, которые доказываются при помощи наших определений. Читатель легко увидит, как это можно осуществить.

1. Если в натуральном ряду чисел a следует непосредственно за 0, то a = 1.
2. Если 1 - это число, соответствующее понятию, то существует предмет, подпадающий под это понятие.
3. Если 1 - это число, соответствующее понятию F, тогда, если предмет x подпадает под понятие F и если y подпадает под понятие F, то x = y; т.е. x есть одно и то же, что и y.
4. Если под понятие F подпадает предмет, и если с тем, что x подпадает под понятие F и y подпадает под понятие F, всегда объединено x = y, то 1 - это число, соответствующее понятию F.
5. Отношение m к n, устанавливаемое посредством предложения:

   «В натуральном ряду чисел n следует непосредственно за m»,

   является взаимнооднозначным.

   Здесь ещё ничто не говорит о том, что для каждого числа существует другое число, которое следует непосредственно за ним или за которым оно непосредственно следует в ряду чисел.
6. В натуральном ряду чисел, каждое число, кроме 0, непосредственно следует за неким числом.

§79. Для доказательства того, что в натуральном ряду чисел за каждым числом (n) непосредственно следует число, необходимо предъявить понятие, которому соответствует предыдущее число. В качестве такового мы выбираем:

« принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n»,

что сразу требует объяснения.

Прежде я воспроизведу другими словами определение последовательности в ряду, данное мной в «Шрифте понятий».

Предложение

«Если каждый предмет, к которому в отношении ϕ находится x, подпадает под понятие F, и если из того, что d подпадает под понятие F, при любом d, всегда следует, что каждый предмет, к которому d находится в отношении ϕ, подпадает под понятие F, то y подпадает под понятие F, каким бы ни было понятие F»

равнозначно с

«y следует в ϕ-ряду за x»

и с

«x идёт в ϕ-ряду за y».

§80. К этому не лишними были бы несколько замечаний. Так как отношение ϕ остаётся неопределённым, то ряд необязательно мыслить в форме пространственного или временного расположения, хотя этот случай не исключается.

Пожалуй, для большей естественности можно принять другое объяснение, к примеру: если, отправляясь от x, мы всегда переносим внимание с одного предмета на другой, к которому он находится в отношении ϕ, и если таким образом можно, наконец, достичь y, то говорят, что y следует за x в ϕ-ряду.

Последнее помогает понять суть дела, а не определение. Достигнем ли мы y при смещении нашего внимания, может зависеть от разных сопутствующих субъективных обстоятельств, например, от находящегося в нашем распоряжении времени или от нашего знания вещей. Следует ли y за x в ϕ-ряду, не имеет ничего общего с нашим вниманием и с условиями его поступательного движения, но представляет собой нечто объективное; так же и зелёный лист отражает определённые световые лучи независимо от того, попадают они мне в глаза, вызывая ощущения, или же нет; так же крупицы соли растворимы в воде, независимо от того, бросаю я их в воду, наблюдая за этим процессом, или же нет, они растворимы даже в том случае, когда я вообще не имею возможности провести данный опыт.

Благодаря моему объяснению суть дела переводится из области субъективных возможностей в область объективной определённости. В самом деле, то, что из одних предложений следует другое, есть нечто объективное, независящее от законов движения нашего внимания, и безразлично, осуществляем ли мы вывод на самом деле. Здесь у нас есть признак, который всегда разрешает данный вопрос там, где он может быть поставлен; и если этот признак наличествует, мы можем вынести суждение, даже если в отдельных случаях нам мешают внешние затруднения. Для сути дела это собственно безразлично.

Для уверенности, что предмет следует за неким членом, нам не всегда нужно просматривать все промежуточные члены от начального до данного предмета. Если, например, дано, что в ϕ-ряду b следует за a, а c следует за b, то мы можем согласно нашему объяснению заключить, что c следует за a, без того, чтобы знать промежуточные члены.

Благодаря этому только и возможно определение следования в ряду, а способ вывода от n к (n + 1), который кажется свойственным математике, приводится к всеобщим логическим законам.

§81. Если теперь как отношение ϕ у нас есть отношение, в котором m установлено к n предложением

«В натуральном ряду чисел n непосредственно следует за m»,

то вместо «ϕ-ряд» мы говорим «натуральный ряд чисел».

Далее я определяю:

предложение

«y следует за x в ϕ-ряду, или же y есть то же самое, что и x»

равнозначно с

«y принадлежит ϕ-ряду, начинающемуся с x»

и с

«x принадлежит ϕ-ряду, оканчивающемуся на y».

Согласно этому, a принадлежит натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n, если в натуральном ряду чисел n следует за a или равно a[1].

§82. Теперь следует показать, что – при уже заданном условии – число, соответствующее понятию

«принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n»,

следует непосредственно за n в натуральном ряду чисел. Благодаря этому тогда доказывается, что существует число, которое в натуральном ряду чисел следует непосредственно за n, и что не существует конечного члена данного ряда. Очевидно, что данное предложение нельзя установить эмпирическим способом или посредством индукции.

Демонстрация здесь самого доказательства увела бы нас далеко. Можно только кратко указать его ход. Следует доказать:

1. Если в ряду натуральных чисел a непосредственно следует за d, и если для d имеет силу то, что:

   число, соответствующее понятию

   «принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на d»,

   непосредственно следует за d в натуральном ряду чисел,

то для a также имеет силу:

   число, соответствующее понятию

   «принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на a»,

   непосредственно следует за a в натуральном ряду чисел.

Во-вторых, следует доказать, что для 0 имеет силу то, что в только что приведённых предложениях говорилось о d и a, и затем вывести, что это также имеет силу и для n, если n принадлежит натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0. Данный способ вывода есть такое применение определения, переданное мной выражением

«y следует за x в натуральном ряду чисел»,

что общие выражения о d и a следует принимать в качестве понятия F о 0 и n.

§83. Чтобы доказать предложение (1) предыдущего §, мы должны показать, что a - это число, соответствующее понятию «принадлежащий натуральному ряду чисел, заканчивающемуся на a, но не равное a». А для этого вновь следует доказать, что данное понятие имеет объём, равный объёму понятия «принадлежащий натуральному ряду чисел, заканчивающемуся на d». Для этого требуется предложение о том, что предмет, принадлежащий натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0, не может в натуральном ряду чисел следовать за самим собой. Это также должно доказываться с помощью нашего определения последовательности в ряду, как указано

---

[1] Если n не является числом, само n только принадлежит натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n. Пусть вас не шокирует это выражение!

выше[1].

Таким образом, это вынуждает нас к предложению, что число, соответствующее понятию

«принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n»,

непосредственно следует за n в натуральном ряду чисел, добавить условие, что n принадлежит натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0. Для этого употребителен более краткий способ выражения, который я теперь и объясняю:

Предложение

«n принадлежит натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0»

равнозначно с

«n есть конечное число».

Тогда указанное предложение мы можем выразить так: конечное число в натуральном ряду чисел не следует за самим собой.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛА

§84. Конечным противостоят бесконечные числа. Число, соответствующее понятию «конечное число», является бесконечным. Обозначим его, скажем, так ∞_1! Если бы оно было конечным, то оно не могло бы следовать за самим собой в натуральном ряду чисел. Но можно показать, что с ∞_1 это происходит.

В числе ∞_1, объяснённом таким образом, нет ничего сколько-нибудь таинственного или чудесного. «Число, соответствующее понятию F, есть ∞_1» означает не более и не менее чем: существует отношение, которое взаимнооднозначно соотносит предметы, подпадающие под понятие F, с конечными числами. После наших объяснений это имеет совершенно ясный и однозначный смысл; этого достаточно, чтобы оправдать употребление знака ∞_1 и обеспечить ему значение. То, что мы не можем образовать для себя никакого представления о бесконечном числе, совершенно не важно, это же относится и к конечным числам. Наше число ∞_1 обладает, таким образом, чем-то столь же определённым, как и любое конечное число: оно отождествляемо в качестве одного и того же, и, несомненно, отличается от любого другого.

§85. Бесконечные числа не так давно ввёл *Г.Кантор* в своей замечательной работе[2]. Я всецело поддерживаю его в оценке мнения, которое за действительные вообще желает признавать только конечные числа. Чувственно воспринимаемыми и пространственными не являются ни они, ни дроби, ни отрицательные, ни иррациональные, ни комплексные числа; и если действительным называют то, что воздействует на чувства, или то, что как минимум имеет такое влияние, которое может иметь чувственное восприятие на приближённые или отдалённые последствия, то, конечно, эти числа не являются действительными. Но мы также вовсе не нуждаемся в таких восприятиях как основаниях доказательства наших теорем. Имя или знак, для введения которого нет логических возражений, мы можем безбоязненно использовать в наших исследованиях; таким образом, наше число ∞_1 столь же обоснованно, как два или три.

Правда, утверждая о согласии с *Кантором*, я всё же несколько отступаю от него в терминологии. Моё число он называет «мощность», в то время как его понятие[3] числа учитывает ссылку на упорядочивание. Конечные числа, разумеется, независимы от следования в ряду, иное дело бесконечно большие. Использование слова «число» и вопрос «сколько?» не содержат указания на определённое упорядочивание. Число у *Кантора* скорее отвечает на вопрос: «Какой член последовательности является крайним?» Поэтому, мне кажется, что моё название лучше согласуется со словоупотреблением. Если расширять значение слова, то следовало бы обратить внимание на то, чтобы возможно большее количество общих предложений сохраняло его значение и особенно таких основополагающих, которые устанавливают для чисел независимость от следования в ряду. Нам совершенно не было надобности в расширении, поскольку наше понятие

[1] Э.Шрёдер (Op.cit., S.63), по-видимому, рассматривает это предложение как следствие иначе мыслимого способа обозначения. Здесь также даёт о себе знать недостаток, причиняющий вред всему его изображению сути дела. Этот недостаток связан с тем, что по-настоящему не известно, является ли число знаком и чем тогда является его значение, или же оно как раз и есть это значение. Из того, что устанавливаются различные знаки, так чтобы один и тот же никогда не повторялся, всё же не следует, что эти знаки также обозначают различное.

[2] G.Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.

[3] Данное выражение, по-видимому, может противоречить подчёркнутой ранее объективности понятия; но субъективным здесь является только название.

числа сразу объемлет также и бесконечные числа.

§86. Чтобы получить своё бесконечное число, *Кантор* вводит понятие отношения следования в последовательности, которое отклоняется от моего «следования в ряду». Согласно ему, например, последовательность возникает, если конечные, положительные целые числа располагаются таким образом, чтобы нечётные числа сами по себе в своей естественной очерёдности, а также чётные числа в своём следовании друг за другом, в дальнейшем устанавливались так, что каждое чётное число должно следовать за каждым нечётным. В этой последовательности, например, 0 следовал бы за 13. Но числа, непосредственно предшествующего 0, нет. Это как раз тот случай, который не может возникнуть при моём определении следования в ряду. Можно строго доказать без аксиомы, использующей созерцание, что если y следует за x в ϕ-ряду, существует предмет, который в этом ряду непосредственно предшествует y. Итак, мне кажется, что следованию в последовательности и числу у *Кантора* всё-таки недостаёт точных определений. Так, *Кантор* ссылается на какое-то таинственное «внутреннее созерцание», когда стремится добыть доказательство из определений, что, пожалуй, возможно. Ибо, я думаю, предвидимо, как можно было бы определить указанные понятия. Во всяком случае, посредством этих замечаний я совершенно не хочу подвергнуть нападкам их правомочность и плодотворность. Напротив, я приветствую в его исследованиях расширение науки, особенно потому, поскольку, благодаря им, всё более торным становится чисто арифметический путь к бесконечно большим числам (мощностям).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§87. Надеюсь, в данном сочинении я сделал правдоподобным то, что арифметические законы являются аналитическими, а, следовательно, априорными суждениями. Сообразно этому, арифметика была бы лишь дальнейшим развитием логики, а каждое арифметическое предложение было бы логическим законом, хотя и производным. Применение арифметики к объяснению природы было бы логической обработкой наблюдаемых фактов[1]; счёт был бы выведением следствий. Законы чисел, чтобы быть применимыми к внешнему миру, не нуждаются, как полагает *Бауман*[2], испытания практикой; ибо во внешнем мире, в совокупности пространственного нет понятий, нет свойств понятий, нет чисел. Стало быть, законы чисел собственно не применимы к внешним вещам; они не являются законами природы. Они не утверждают связь между естественными явлениями, но утверждают таковую между суждениями; а к последним принадлежат и законы природы.

§88. *Кант*[3] (вероятно, в результате более узкого определения понятия) недооценивал значение аналитических суждений, хотя, как кажется, ему чудилось более широкое понятие, которое используется здесь[4]. Если положить в основание его определение, деление суждений на аналитические и синтетические не является исчерпывающим. В данном случае он мыслит общеутвердительное суждение. Тогда, согласно определению, относительно понятия субъекта можно вести речь и спрашивать о том, содержится ли в нём понятие предиката. Но как быть, если субъект представляет собой единственный предмет, или если имеют дело с суждением о существовании? Тогда, в этом смысле и речи быть не может о понятии субъекта. *Кант*, по-видимому, думает определить понятие посредством заданных признаков; но такое образование понятий наименее продуктивно. Если мы окинем взглядом данные выше определения, то едва ли найдём образование понятий по этому способу. То же самое имеет силу и для действительно продуктивных определений в математике, например, непрерывности функции. Ведь у нас есть не ряд заданных признаков, но, я бы сказал, более интимная, более органичная связь определений. Различие можно сделать наглядным, используя геометрический образ. Если понятия (или их объёмы) изобразить на поверхности ограниченными областями, то понятиям, определённым посредством заданных признаков, соответствует область, для которой общими являются признаки всех областей; она окружена частями их границ. При таком определении, если говорить об образе, речь также идёт о том, чтобы уже заданные линии применить новым способом для ограничения области[5]. Но при этом не появляется ничего существенно нового. Более продуктивные определения понятий в том, чтобы указать линии границ, которые ещё совсем не были заданы. То, что из них можно вывести, обозревается не с самого начала; при этом не просто из сундука снова извлекается то, что там схоронилось. Такие выводы расширяют наше знание, а поэтому, их, следуя *Канту*, нужно считать синтетическими; и всё-таки их можно доказать чисто логически, и они к тому же аналитические. Действительно, они содержаться в определениях, но не как брёвна в доме, а как растения в семенах. Часто несколько определений используется для доказательства предложения, которое, таким образом, не содержится в них по отдельности и всё же вытекает из них всех в совокупности.

§89. Я должен также возразить на общее утверждение *Канта*, что без чувственности нам не были бы даны предметы. Ноль, один суть предметы, которые не могут быть даны нам чувственно. Даже те, кто малые числа считает наглядными, всё же должны согласится, что наглядно нам не могут быть даны числа большие, чем $(1000^{1000})^{1000}$, и что всё-таки мы о них кое-что знаем. Вероятно, *Кант* использует слово «предмет» в каком-то другом смысле; но тогда ноль, один, наше ∞_1 совершенно выпадают из его рассмотрения, поскольку они также не являются понятиями, и к тому же от понятий *Кант* требует[6], чтобы им в созерцании прилагался предмет.

Для того чтобы меня не упрекнули в мелочных придирках к гению, которому нам следует

---

[1] Уже само наблюдение включает логическую деятельность.
[2] Op.cit., Bd.II, S.670.
[3] Op.cit., III. S.39 u.ff. [*Кант И.* Собрание сочинений в восьми томах, т.3…, С.46]
[4] На S.43 он говорит, что согласно закону противоречия синтетическое предложение можно осознать лишь тогда, когда предполагается другое синтетическое предложение. [*Кант И.* Собрание сочинений в восьми томах, т.3…, С.49.]
[5] Так же, если признаки связываются посредством «или».
[6] Op.cit., III, S.82. [*Кант И.* Собрание сочинений в восьми томах, т.3…, С.90.]

лишь внимать с благодарным восхищением, я думаю, необходимо также подчеркнуть согласие, которое во многом преобладает. Если затрагивать только непосредственно лежащее на поверхности, я вижу большую заслугу *Канта* в том, что он провёл различие между синтетическими и аналитическими суждениями. Называя геометрические истины синтетическими и априорными, он раскрыл их подлинную сущность. И даже сейчас это заслуживает повторения, поскольку зачастую всё ещё не признаётся. Если *Кант* и заблуждался относительно арифметики, то для его заслуг, я думаю, это не существенный ущерб. Дело в том, что существуют синтетические суждения a priori; а встречаются ли они только в геометрии или также и в арифметике менее значимо.

§90. Я не притязаю на то, чтобы сделать аналитическую природу арифметических предложений более чем вероятной, поскольку всё равно всегда остаётся сомнение, можно ли вывести их доказательство совершенно из чисто логических законов, не вмешивается ли где-нибудь незаметно основание доказательства иного вида. Это сомнение полностью не устраняется даже указаниями, которые я добавил при доказательстве отдельных предложений; оно может быть снято лишь посредством лишённой пробелов цепи выводов, так чтобы не совершался шаг, который не согласуется с одним из немногих способов вывода, признанных за чисто логические. До сего времени таким образом едва ли было выведено хоть одно доказательство, поскольку математики довольствуются тем, чтобы каждый переход к новому суждению был очевидно правильным, не задаваясь вопросом о том, какова природа этой очевидности, является она логической или же относится к созерцанию. Такой шаг часто является весьма сложным и равноценен большему числу простых выводов, наряду с которыми может присутствовать нечто, вытекающее из созерцания. В математике продвигаются скачками, и отсюда возникает кажущееся исключительным богатство способов вывода; поскольку, чем значительнее скачок, тем более многочисленные комбинации могут заменять простые выводы и аксиомы созерцания. Тем не менее, такой переход нам часто непосредственно очевиден, без того, чтобы осознавались промежуточные ступени; и поскольку он не изображается как опознанный логический способ вывода, мы готовы тотчас же принять очевидность за созерцаемую, а открываемую истину за синтетическую, даже тогда, когда сфера значимости, очевидно, выходит за рамки созерцаемого.

На этом пути невозможно, основываясь на созерцании, чисто развести синтетическое и аналитическое. Не удаётся также полностью сопоставить аксиомы созерцания с уверенностью, что каждое математическое доказательство можно выводить из этих аксиом согласно логическим законам.

§91. Следовательно, требование избежать скачка в выведении следствий, неопровержимо. То, что его так трудно удовлетворить, связано с продолжительностью пошагового выполнения этой процедуры. Каждое сколько-нибудь усложнённое доказательство угрожает принять чудовищные размеры. К этому нужно добавить, что чрезмерно большое многообразие логических форм, выраженных в языке, затрудняет ограничение круга способов вывода, достаточных во всех случаях и легко обозримых.

Чтобы уменьшить этот недостаток, я придумал свой шрифт понятий. Он должен добиваться большей краткости и наглядности выражений и обходиться согласно способу вычисления меньшим числом твёрдо установленных форм, так чтобы не допускать перехода, который не согласуется с правилом, установленным раз и навсегда[1]. Тогда основание доказательства не может вкрасться незамеченным. Так без заимствования аксиомы у созерцания я доказал предложение[2], которое на первый взгляд может быть принято за синтетическое и которое я хочу здесь выразить следующим образом:

Если отношение каждого члена ряда к последующему является однозначным, и если m и y в этом ряду следуют за x, то y в этом ряду либо предшествует m, либо совпадает с m, либо следует за m.

Из этого доказательства можно усмотреть, что предложения, расширяющие наше знание, могут включать аналитические суждения[3].

---

[1] Однако он должен выражать не только логическую форму, по типу способа обозначения, принятого Булем, содержание также было бы уместно.

[2] Begriffsschrift, Halle a/S., 1879, S.86, формула 133.

[3] Это доказательство всегда находят слишком пространным. Данный недостаток, по-видимому, более чем уравновешивает почти безусловная уверенность в отсутствии ошибки или пробела. Тогда моей целью было всё свести к наименее возможному числу по возможности наиболее простых логических законов. Следуя этому, я

ДРУГИЕ ЧИСЛА

§92. До сих пор мы ограничивали наше рассмотрение кардинальными числами. Теперь нам всё-таки следует обратить внимание на другие виды чисел и попытаться использовать для более широкой области то, что мы узнали относительно более узкой!

Проясняя смысл вопроса о возможности некоторых чисел, *Ханкель* говорит[1]:

«Сегодня число более не является вещью, субстанцией, самостоятельно существующей вне мыслящего субъекта и афицирующих его объектов, самостоятельным принципом, по типу того, как это было у пифагорейцев. Поэтому, вопрос о существовании может указывать только на познающего субъекта или познаваемые объекты, отношения которых изображают числа. В математике за невозможное в строгом смысле считается только то, что невозможно логически, т.е. то, что самопротиворечиво. То, что нельзя допускать числа, невозможные в этом смысле, в доказательстве не нуждается. Но если соответствующие числа логически возможны, их понятие определяется ясно и точно, а, стало быть, без противоречия, то этот вопрос зависит только от того, существует ли в области реального или в созерцании действительного, актуального их субстрат, существуют ли объекты, которые приводят к явлению числа, а, стало быть, интеллигибельные отношения определённого вида».

§93. Относительно первого предложения можно сомневаться, существуют ли числа, согласно *Ханкелю*, в мыслящем субъекте, в афицирущих последнего объектах или же и в тех, и в других. Во всяком случае в пространственном смысле они не находятся ни вне, ни внутри ни субъекта, ни объекта. Однако они, пожалуй, вне субъекта в том смысле, что они не являются субъективными. Тогда как, каждый чувствует лишь свою боль, своё желание, свой голод, может иметь своё впечатление звука и цвета, число для многих может быть общим предметом, а именно, у всех оно в точности одно и то же, а не более или менее сходное внутреннее состояние у разных людей. Когда *Ханкель* хочет отнести вопрос о существовании к мыслящему субъекту, этим он, по-видимому, сводит его к психологическому вопросу, каковым тот никоим образом не является. Математика не занимается природой нашей души, и ответ, на какой угодно психологический вопрос должен быть для неё совершенно безразличным.

§94. Необходимо оспорить также и то, что математики считают за невозможное только самопротиворечивое. Понятие допустимо, даже если его признаки содержат противоречие; нельзя лишь допускать, что под него нечто подпадает. Но из того, что понятие не содержит противоречие, ещё нельзя вывести, что под него нечто подпадает. Как вообще можно доказать, что понятие не содержит противоречие? Это ясно отнюдь не всегда; из того, что противоречия не видно, не следует, что его здесь нет, и ясность определения не даёт на это гарантий. *Ханкель* доказывает[2], что поле комплексных чисел более высокого порядка, чем обычное, содержит противоречие, если подчиняется всем законам сложения и умножения. Этого не видно тотчас же, а как раз должно быть доказано. До того, как это произойдёт, кто-то всё же может, используя такое поле чисел, достичь замечательных результатов, обоснование которых было бы не хуже чем то, которое *Ханкель* даёт теории детерминант с помощью изменяемых чисел; ибо кто поручится за то, что в этом понятии также не содержится скрытое противоречие? И даже если таковое вообще можно исключить для сколь угодно многих изменяемых единиц, отсюда всё-таки не следует, что такие единицы существуют. А как раз это нам и нужно. В качестве примере возьмём теорему 18 из первой книги *Элементов Евклида*:

В любом треугольнике большей стороне противолежит больший угол.

Чтобы доказать это, на большей стороне AC *Евклид* откладывает сегмент AD, равный меньшей стороне AB, и при этом ссылается на прежнюю конструкцию. Доказательство разрушилось бы само собой, если бы такой точки не было, но этого не достаточно, чтобы в понятии «точка на AC, расстояние которой от A равно расстоянию от B» не обнаруживалось противоречие. Теперь B соединяется с D. То, что такая прямая существует, – предложение, на

применял лишь единственный способ вывода. Однако уже тогда в предисловии (S.VII) я указывал, что при дальнейшем применении рекомендуется допускать большее число способов вывода. Последнее может произойти без того, чтобы обязательно была нарушена цепь выводов, и таким образом может быть достигнуто значительное сокращение.

[1] Op.cit., S.6-7.

[2] Op.cit., S.106-107.

которое также опирается доказательство.

§95. Отсутствие противоречия в понятии можно, пожалуй, объяснить лишь доказательством того, что под него нечто подпадает. Обратное было бы ошибкой. В эту ошибку впадает *Ханкель*, когда, ссылаясь на равенство $x + b = c$, говорит[1]:

«Очевидно, что, если $b > c$, то в ряду 1, 2, 3, ... не существует числа x, решающего данную задачу; вычитание тогда *невозможно*. Однако в этом случае ничто не мешает нам рассматривать разность $(c – b)$ как знак, который решает задачу и с которым нужно оперировать точно так же, как если бы он был кардинальным числом из ряда 1, 2, 3, ...»

Правда, что-то мешает нам безоговорочно рассматривать (2 – 3) как знак, решающий задачу; поскольку пустой знак задачу как раз и не решает; без содержания он есть лишь чернила или типографская краска на бумаге; как таковой он обладает физическими свойствами, но не свойствами, которые даёт умножение 3 на 2. Собственно, он вовсе не знак, и использование его как таковового было бы логической ошибкой. Также и в случае, когда $c < b$, задачу решает не знак («c – b»), но его содержание.

§96. С таким же успехом можно сказать, что среди известных до сих пор чисел нет таких, которые одновременно удовлетворяли бы равенствам

$$x + 1 = 2 \text{ и } x + 2 = 1;$$

однако ничто не мешает нам ввести знак, решающий эту задачу. Скажут: но задача содержит противоречие. Конечно, если в качестве решения требуют действительного или обычного комплексного числа; но нам следует расширить нашу систему чисел и создать числа, которые удовлетворяют требованию! Подождём, докажет ли нам кто-нибудь противоречие! Кто знает, что возможно относительно этого нового числа? Тогда мы, конечно, не могли бы считать вычитание однозначным; однако, если мы хотим ввести отрицательные числа, мы должны отказаться также от однозначности знака извлечения корня; благодаря комплексным числам многозначными становятся логарифмы.

Почему бы не создать также числа, которые позволяли бы складывать расходящиеся ряды? Нет, математик в состоянии создать что угодно, в столь же малой степени, как и географ; он также может лишь обнаружить то, что есть, и дать этому название.

Этой ошибкой страдает формальная теория дробей, отрицательных и комплексных чисел[2]. Устанавливается требование, чтобы известные правила счёта по возможности сохранялись для вновь введённых чисел, а отсюда выводятся общие свойства и отношения. Если нигде не сталкиваются с противоречием, то введение новых чисел считается оправданным, как будто бы противоречие не может всё-таки где-то скрываться, и как будто бы отсутствие противоречия уже имеет место.

§97. То, что эту ошибку так легко совершить, пожалуй, покоится на недостаточном различение понятий и предметов. Ничто не мешает нам использовать понятие «квадратный корень из –1»; но мы не вправе безоговорочно помещать перед ним определённый артикль и рассматривать выражение «(die) квадратный корень из –1» как осмысленное. Предполагая, что $i^2 = -1$, мы можем доказать формулу, посредством которой выражается синус угла кратного углу α через синус и косинус самого α; но мы не должны забывать, что тогда это предложение вводит с собой условие $i^2 = -1$, которое мы не должны опускать безоговорочно. Если вовсе не существует того, чей квадрат был бы –1, то использовать это равенство в нашем доказательстве не оправданно[3], поскольку условие $i^2 = -1$, от которого, как кажется, зависит его значимость, никогда бы не выполнялось. Всё было бы так, как если бы в геометрическом доказательстве мы использовали вспомогательную линию, которую нельзя задать вовсе.

§98. *Ханкель*[4] вводит два вида операций, называемых им литическими и тетическими, и определяемых посредством некоторых свойств, которые эти операции должны иметь. На это нечего возразить, но лишь пока не предполагается, что такие операции и предметы, которые могут быть их результатом, существуют[5]. Позднее[6], он обозначает некую тетическую, совершенно

---

[1] Op.cit., S.5. Аналогично в E.Kossak, Op.cit., S.17 внизу.

[2] То же самое относится к бесконечным числам Кантора.

[3] Оно всегда может быть строго доказано другим путём.

[4] Op.cit., S.18.

[5] Используя уравнение $\Theta(c,b)=a$ Ханкель, собственно, уже делает это.

[6] Op.cit., S.29.

однозначную, ассоциативную операцию посредством (a + b) и соответствующую ей, также совершенно однозначную, литическую операцию посредством (a – b). *Некую* операцию? Но какую? Какую угодно? Но тогда, это не является определением (a + b). Ну а если её не существует? Если слово «сложение» ещё не имеет значения, то логически допустимо сказать, что такую операцию мы хотим назвать сложением; но нельзя сказать, что (eine) такая операция должна означать (die) сложение и обозначаться посредством (a + b), прежде чем установлено, что существует одна и только одна такая операция. Нельзя с одной стороны равенства по определению использовать неопределённый артикль, а с другой определённый. Кроме того, без добавлений *Ханкель* говорит: «(der) модуль операции», не доказывая того, что существует один и только один модуль.

§99. Короче говоря, эта чисто формальная теория недостаточна. Её ценность заключается только в следующем. Доказывают, что если операция обладает некоторыми свойствами, типа ассоциативности и коммутативности, то для неё имеют силу определённые предложения. Затем показывают, что сложение и умножение, которые уже известны, обладают этими свойствами, и теперь о них без пространного, повторного в каждом отдельном случае доказательства можно сразу же высказать каждое из этих предложений. Известные предложения арифметики получают, сперва применяя эту формальную теорию к операции, заданной в другом месте. Однако никоим образом нельзя полагать, что этим способом можно ввести сложение и умножение. Задаётся только руководство для определения, а не оно само. Говорится, что имя «сложение» должно быть придано только тетической, совершенно однозначной, ассоциативной операции, но последняя, которая должна теперь так называться, этим вовсе не задаётся. Сообразно с этим ничто не противостоит тому, чтобы умножение назвать сложением и обозначить посредством (a + b), и никто не смог бы с определённостью сказать, равно ли 2 + 3 5 или же 6.

§100. Если мы задаём этот чисто формальный способ рассмотрения, то, как кажется согласно обстоятельствам, может представиться способ, одновременно с введением новых чисел расширить значение слов «сумма» и «произведение». Возьмём предмет, скажем Луну, и объясним, что Луна, умноженная на саму себя, даёт –1. Тогда в Луне мы имеем квадратный корень из –1. По-видимому, это объяснение допустимо, поскольку из прежнего значения умножения вовсе не вытекает смысл такого произведения и, стало быть, при расширении это значение может устанавливаться как угодно. Однако мы также используем произведение действительного числа с квадратным корнем из –1. По этой причине в качестве квадратного корня из –1 лучше выберем временной интервал в одну секунду и обозначим её посредством i! Тогда под 3i мы будем понимать 3 секунды и т.д.[1] Какой тогда предмет мы обозначаем, скажем, посредством 2 + 3i? Какое значение в этом случае придаётся знаку плюс? Теперь это должно устанавливаться в общем, что, конечно же, не легко. Пусть мы всё же принимаем, что все знаки формы a + bi обеспечены смыслом, а именно таким, чтобы имели силу известные предложения арифметики! Тогда в дальнейшем нам необходимо было бы установить, что в общем должно иметь место

$$(a + bi)\ (c + di) = ac - bd + i(ad + cd),$$

и в результате мы шире определили бы умножение.

§101. Теперь, если бы нам было известно, что из равенства комплексных чисел вытекает равенство действительных частей, мы могли бы доказать формулу для Cos(nα). Это должно вытекать из смысла a + bi, который здесь мы принимаем как имеющийся в наличие. Теперь доказательство имело бы силу для установленного нами смысла комплексных чисел, их сумм и произведений. Поскольку для всякого действительного n и действительного α теперь i более вовсе не входит в равенство, то пытаются сделать вывод: Следовательно, совершенно безразлично обозначает ли i секунду, миллиметр или что-то ещё, если только имеют силу наши предложения о сложении и умножении; всё зависит от этого, а остальное мы используем не заботясь. Вероятно, можно установить значение a + bi, суммы и произведения различными способами так, чтобы сохранялось каждое предложение; но вовсе не безразлично, можно ли вообще найти такой смысл для этих выражений.

§102. Часто поступают так, как если бы голое требование, было возможно уже самим своим

[1] С тем же правом в качестве квадратного корня из –1 мы также могли бы избрать определённое количество электричества, определённую поверхность и т.д.; само собой разумеется, что тогда эти различные корни обозначались бы также различно. Тогда, по-видимому, можно было бы создать сколь угодно много квадратных корней из –1. Это не так удивительно, если подумать, что значение квадратного корня этими установлениями ещё не заданно неизменным, но определяется посредством и вместе с ними.

наличием. Требуют, чтобы вычитание[1], деление, извлечение корня было всегда выполнимо, и думают, что этим сделано достаточно. Почему не потребуют также, чтобы через любые три точки проводилась прямая? Почему не потребуют, чтобы для трёхмерной системы комплексных чисел все предложения сложения и умножения имели силу так же, как для системы действительных чисел? Потому что эти требования содержат противоречие. Тогда прежде следовало бы доказать, что и те, другие требования не содержат противоречия! Пока этого не сделано, вся строгость, претендующая на многое, есть ни что иное, как пустая видимость и дым.

Указанная вспомогательная линия в геометрической теореме не встречается в доказательстве. Вероятно, может быть больше линий, если, к примеру, точку можно выбирать произвольно. Но даже если излишней может оказаться каждая из них в отдельности, то доказательство всё-таки зависит от того, чтобы можно было указать линию с требуемыми свойствами. Одного требования недостаточно. Таким образом, и в нашем случае также не безразлично для доказательной силы, имеет ли «a + bi» смысл или является просто типографской краской. Кроме того, не достаточно требовать, что она должна иметь смысл, или сказать «(der) смысл суммы a и bi», если прежде не объяснить, что в данном случае означает «сумма», и если использование определённого артикля не оправданно.

§103. Против испробованного нами установления смысла «i» можно, конечно, многое возразить. Благодаря ему мы привносим в арифметику нечто совершенно чуждое, время. Секунда не находится ни в каком внутреннем отношении к действительным числам. Если бы не было другого вида доказательства или если бы нельзя было найти для i другой смысл, то предложения, доказываемые посредством комплексных чисел, были бы суждениями *a* posteriori или синтетическими. Во всяком случае, прежде всего необходимо сделать попытку доказать все предложения арифметики как аналитические.

Когда *Коссак*, ссылаясь на комплексные числа, говорит[2]: «Они являются составными представлениями разнообразных групп при равных друг другу элементах[3]«, то по видимости этим он уменьшает вмешательство чуждого; но эта видимость также возникает лишь вследствие неопределённости выражения. Совершенно не получен ответ на то, что же собственно означает 1 + i: представление яблока и груши или зубной боли и подагры? Всё-таки оно не обозначает и то, и другое одновременно, поскольку тогда 1 + i не всегда равнялось бы 1 + i. Говорилось бы, что всё зависит от особого установления. Ну а тогда в предложении *Коссака* мы имели бы вовсе не определение комплексного числа, но лишь общее руководство к этому. Однако мы нуждаемся в большем; мы должны определённо знать, что обозначает «i», и если теперь, следуя этому руководству, мы захотели бы сказать: представление груши, то снова ввели бы в арифметику нечто чуждое.

То, что имеют обыкновение называть геометрическим изображением комплексных чисел, имеет перед рассмотренными до этого попытками то преимущество, что 1 и i при этом не выглядят совершенно несвязанными и неоднородными, но что отрезок, который рассматривается как изображение i, находится в закономерном отношении к отрезку, посредством которого изображается 1. Впрочем, в точном смысле неправильно принимать, что при этом 1 означает некоторый отрезок, а i - перпендикулярный ему отрезок, равной длины; но «1» везде означает одно и то же. Комплексное число задаёт здесь то, как отрезок, который считают его изображением, вытекает из данного отрезка (единичного отрезка) посредством тиражирования, деления и вращения[4]. Однако соответственно этому каждая теорема, чьё доказательство должно основываться на существовании комплексного числа, по-видимому, также зависит от геометрического созерцания и, стало быть, синтетична.

§104. Тогда каким образом нам должны быть даны дроби, иррациональные и комплексные числа? Если мы призываем на помощь созерцание, то вводим в арифметику нечто чуждое; однако, если мы лишь определяем понятие такого числа посредством признаков, если мы лишь требуем, чтобы число обладало некоторыми свойствами, то мы не ручаемся за то, что нечто также подпадает под это понятие и отвечает нашим требованиям, и всё-таки доказательство должно опираться как раз на это.

---

[1] Сравни, Kossak, Op.cit., S.17.
[2] Op.cit., S.17.
[3] Для выражения «представление» сравни то, что говорится в §27; для «группа» - то, что говорится относительно «агломерат» в §23 и §25; для равенства элементов - то, что говорится в §34-39.
[4] Для простоты я отказываюсь здесь от несоизмеримости.

Ну а как тогда быть с натуральным числом? Действительно ли мы не можем вести речь о $(1000^{1000})^{1000}$, пока столько предметов не будет дано в созерцании? Нет! Оно имеет вполне определённый смысл, хотя уже принимая во внимание краткость нашей жизни для нас невозможно привести к сознанию столько предметов[1]; но, не смотря на это $(1000^{1000})^{1000}$ является предметом, свойства которого мы можем познать, хотя он и не созерцаем. В этом убеждаются тем, что при введении знака a^n для возведения в степень показывают, что посредством него всегда выражается одно и только одно положительное целое число, если a и n являются положительными целыми числами. Изложение в деталях того, как это может произойти, увело бы далеко. В общих чертах путь можно узнать из способа, которым мы объяснили ноль в §74, единицу в §77, бесконечное число ∞_1 в §84, и из наброска доказательства того, что за каждым конечным числом в натуральном ряду чисел непосредственно следует некое число (§82 и 83).

При определении дробей, комплексных чисел и т.д. в конце концов, всё также зависит от поисков выражаемого суждением содержания, которое можно превратить в равенство, где на сторонах последнего были бы как раз эти новые числа. Другими словами, мы должны установить для таких чисел смысл суждения отождествления. При этом нужно принять во внимание соображение, которое мы обсуждали (§§63-68) относительно такого преобразования. Если мы будем поступать так же как там, то новые числа будут даны нам как объёмы понятий.

§105. Как мне кажется, при таком понимании чисел[2] легче объяснить очарование, которое оказывает занятие арифметикой и анализом. Видоизменив, можно, пожалуй, высказать известное предложение: Собственным предметом разума является разум. В арифметике мы занимаемся предметами, которые не как нечто чуждое известны нам извне через посредничество чувств, но которые даны непосредственно разуму, который может рассматривать их в совершенстве как то, что ему наиболее свойственно[3].

И всё-таки, или скорее как раз поэтому, эти предметы не являются субъективными фантазиями. Нет ничего более объективного, чем арифметические законы.

§106. Бросим ещё один краткий ретроспективный взгляд на ход нашего исследования! После того, как мы установили, что число не является ни грудой вещей, ни свойством последних, что оно, однако, также не является субъективным продуктом душевных процессов, но что указание на число высказывает нечто объективное о понятии, мы, прежде всего, попытались определить отдельные числа 0, 1 и т.д. и прогресс в числовом ряду. Первая попытка не удалась, поскольку мы определили только высказывание о понятии, но не обособили 0 и 1, которые являются лишь его частями. Последнее имеет следствием то, что мы не можем доказать равенство чисел. Обнаруживается, что число, которым занимается арифметика, должно пониматься не как несамостоятельный атрибут, но субстантивно[4]. Таким образом, число проявляется как отождествляемый предмет, хотя и не как физический или даже пространственный, не как предмет, образ которого мы можем спроектировать посредством силы воображения. Мы устанавливаем теперь принцип, что значение слова нужно объяснять не в его обособленности, но в контексте предложения; следуя одному этому, как я думаю, можно избежать физического понимания числа без того, чтобы впасть в психологизм. Существует только один вид предложений, которые должны иметь смысл для каждого предмета, предложения отождествления, называемые в случае чисел равенствами. Мы видели, что и указание на число также понимается как равенство. Стало быть, всё зависит от того, чтобы установить смысл равенства чисел и выразить его без использования числительных или слова «число». Как содержание суждения отождествляющего числа мы осознаём возможность взаимно однозначного соотнесения предметов, подпадающих под понятие F, с предметами, подпадающими под понятие G. Стало быть, наше определение должно представить эту возможность, как равнозначную с равенством чисел. Мы напомнили сходный случай: определение направленности при параллелизме, контуров при подобие и т.д.

§107. Тогда возникает вопрос: когда считать, что содержание понимается как суждение

[1] Простой расчёт показывает, что для этого было бы недостаточно миллионов лет.

[2] Его можно также назвать формальным. Однако оно совершенно отличается от понимания, обсуждаемого под этим названием выше.

[3] Этим я вовсе не хочу отрицать, что без чувственного впечатления мы были бы глупы как доска и ничего бы не знали ни о числах, ни о чём-то ещё; но такое психологическое предложение здесь не затрагивается вовсе. Я подчёркиваю это ещё раз из-за имеющейся налицо опасности смешения двух в корне различных вопросов.

[4] Различие соответствует различию между «голубой» и «цвет неба».

отождествления? Для этого должно выполняться условие, чтобы в каждом суждении без ущерба для его истинности левую сторону уравнения, рассматриваемого в качестве примера, можно было заменить на правую. Теперь, прежде всего, без установления дальнейших определений о левой и правой стороне такого уравнения нам не известно более никакого суждения, кроме именно их равенства. Стало быть, в уравнении нужно только указать на заменимость.

Но всё ещё остаётся сомнение. А именно, предложение отождествления всегда должно иметь смысл. Если мы под равенством понимаем лишь возможность взаимно однозначного соотнесения предметов, подпадающих под понятие F, с предметами, подпадающими под понятие G, говоря при этом: «Число, которое соответствует понятию F, равно числу, которое соответствует понятию G», и вводя этим выражение «Число, которое соответствует понятию F», то у нас есть смысл для равенства только тогда, когда обе стороны имеют как раз упомянутые формы. Согласно данному определению, если только одна сторона имеет такую форму, мы не можем утверждать, является ли уравнение истинным или ложным. Это побуждает нас к определению:

Число, соответствующее понятию F, есть объём понятия «понятие, равночисленное понятию F», где понятие F мы называем равночисленным понятию G, если имеет место возможность взаимно однозначного соответствия.

При этом смысл выражения «объём понятия» мы предполагаем известным. Этот способ преодоления затруднения, пожалуй, не всюду найдёт одобрение, и многие предпочтут устранять эти сомнения другими способами. Также и я не придаю решающего значения привлечению объёмов понятий.

§108. В остальном, остаётся лишь объяснить взаимно однозначное соответствие; последнее мы сводим к чисто логическим обстоятельствам. Теперь, после того как мы указали доказательство предложения: «Число, соответствующее понятию F, равно числу, соответствующему понятию G, если понятие F равночисленно понятию G», мы определили 0, выражение «n следует в натуральном ряду чисел непосредственно за m», число 1 и показали, что 1 следует в натуральном ряду чисел непосредственно за 0. Мы привели отдельные предложения, которые в этом месте легко могут быть доказаны, и тогда подошли несколько ближе к следующему предложению, которое позволило бы узнать о бесконечности числового ряда:

В натуральном ряду чисел за каждым числом следует число.

Это привело нас к понятию «принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на n», о котором мы хотели показать, что соответствующее ему число в натуральном ряду чисел непосредственно следует за n. Мы определили его, прежде всего, с помощью следования предмета y за предметом x в общем ϕ-ряду. Смысл этого выражения также был сведён к чисто логическим обстоятельствам. Посредством этого удалось доказать, что способ вывода от n к (n+1), который обычно принимался за собственно математический, покоится на общих логических способах вывода.

Теперь для доказательства бесконечности числового ряда нам нужно предложение, что никакое конечное число в натуральном ряду чисел не следует за самим собой. Так мы пришли к понятиям конечного и бесконечного числа. Мы показали, что последнее в сущности логически оправданно не менее, чем первое. Для сравнения были привлечены бесконечные числа *Кантора* и их «следование в последовательности», причём было указано на различия в выражениях.

§109. Теперь из всего предыдущего с большой вероятностью получалось, что природа арифметических истин является аналитической и априорной; и нам удалось исправить точку зрения *Канта*. Далее мы увидели, что чего-то всё ещё недостаёт, чтобы привести эту вероятность к очевидности, и указали путь, который должен к этому привести.

Наконец, мы использовали наши результаты для критики формальной теории отрицательных, дробных, иррациональных и комплексных чисел, посредством которой стала очевидной её недостаточность. Её ошибку мы увидели в том, что она предполагает, что отсутствие противоречия в понятии доказано, если противоречие не обнаружено, и что отсутствие противоречия в понятии уже достаточно гарантирует его наполненность. Эта теория воображает, что нужно лишь установить требования; их выполнение подразумевается само собой. Она ведёт себя как Бог, который посредством голого слова может сотворить то, что ему нужно. Достойно порицания также и то, когда руководство к определению принимается за само определение, руководство, следуя которому, в арифметику вводится нечто чуждое; правда, само оно свободно от претензий на выражение, но лишь постольку, поскольку остаётся простым руководством.

Таким образом, эта формальная теория оказывается в опасности возвратиться к апостериорному или же синтетическому, сколько бы она не создавала видимости того, что витает в вышине абстракций.

Наше прежнее рассмотрение положительных целых чисел демонстрирует теперь возможность избежать вмешательства внешних вещей и геометрического созерцания, без того чтобы впасть в ошибку данной формальной теории. Всё зависит от того, как здесь установить суждение отождествления. Если это вообще произойдёт, как думаем мы, то отрицательные, дробные, иррациональные и комплексные числа окажутся не более таинственными, чем положительные целые числа, которые реальны, действительны и явны не в большей степени, чем те.

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Для уточнения характера работы переводчика приведём несколько соображений в пользу особенностей перевода отдельных ключевых терминов.

Во-первых: Для передачи понятия числа Г.Фреге использует два термина *Zahl* и *Anzahl*. *Anzahl* мы переводим как ‘число’ и, за редким исключением, не отличаем от *Zahl* по двум причинам: 1) термин *Anzahl* обычно употребляется для обозначения кардинального числа, тогда как *Zahl* – для числа вообще, но у Фреге речь в основном идёт о кардинальных числах; 2) на протяжении всего текста эти два термина практически не различаются и используются как синонимы. Там, где в особых случаях такое различие всё же обнаруживается, мы переводим *Anzahl* как ‘кардинальное число’.

Во-вторых: Устанавливая природу математических предложений, Г. Фреге использует термин *Gleichung* (‘уравнение’), но понимает его в том смысле, который в большей степени соответствует русскому слову ‘равенство’, поскольку под уравнением в отечественной математической терминологии понимается выражение с неизвестными. Поэтому в нашем переводе этот термин, за редким исключением, передаётся как равенство.

В-третьих: В некоторых случаях, для того чтобы отличить числительное от существительного там, где не исключена возможность эквивокаций, мы переводим *der Eins* несколько непривычным, но всё же допустимым в русском языке субстантивом ‘однёрка’. Слово ‘единица’ зарезервировано как наиболее соответсвующее по смыслу, для передачи термина *Einheit*.

В-четвёртых: Соотношение числа и понятия Фреге передаёт термином *zukommen*. Мы переводим его как ‘соответствовать’, а не как ‘принадлежать’ или ‘быть присущим’, что принято в некоторых интерпретациях творчества немецкого логика на русском языке. Терминами ‘принадлежать’ и ‘быть присущим’ в отечественной логической литературе принято обозначать отношения между объемом понятия и предметом, подпадающим под это понятие (при переводе данные термины как раз и используются в этом смысле). Поскольку Фреге имеет в виду отношение иного рода, мы выбрали указанный вариант, чтобы избежать смешения.

В-пятых: Одна из специфических черт аргументации Г.Фреге – это апелляция к способам употребления артиклей. Поскольку для немецкого логика доводы такого рода имеют определяющее значение, мы не стали заменять артикли оборотами, так как в некоторых случаях это привело бы к искажению смысла. Поэтому там, где необходимо, мы указываем их в скобках.