

Б.З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ

**ПРОБЛЕМЫ
АППРОКСИМИРУЕМОСТИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО
ПОЛЯ**



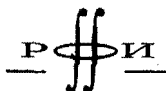
Б.З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ

ПРОБЛЕМЫ
АППРОКСИМИРУЕМОСТИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО
ПОЛЯ



МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1996

ББК 22.33
К30
УДК 537.87



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 96-02-30004

КАЦЕНЕЛЕНБАУМ Б.З. Проблема аппроксимируемости электромагнитного поля. — М.: Наука. Физматлит, 1996.—176с. — ISBN 5-02-015219-6.

Исследуется связь между формой поверхности, на которой распределены какие-либо токи, и полями этих токов. Для многих поверхностей эти поля обладают некоторым свойством, зависящим только от формы поверхности. Это наблюдение оказывается полезным в проблемах выбора формы антенн и минимизации амплитуды токов на них, в вопросе определения формы рассеивателя и в других задачах. Материал книги лежит на стыке физики и математики. Физические вопросы — свойства полей антенн и рассеивателей, токовый синтез, обратные задачи электродинамики. Математические вопросы — свойства пространства функций ортогонального дополнения некоторого класса операторов теории волновых процессов, аналитические свойства решений волнового уравнения и уравнений Максвелла.

Для научных работников — физиков и математиков, аспирантов и студентов старших курсов соответствующего профиля.

Рис. 14. Библиогр. 39 назв.

К 1604050000—022
053(02)—96 77—97. Наука, I полугодие

ISBN 5-02-015219-6

© Б.З.Каценеленбаум, 1996

Оглавление

Предисловие	4
Глава I. Введение	
§ 1. Введение	5
§ 2. Предмет и метод исследования	8
§ 3. Реализуемость, аппроксимируемость, амплитудная аппроксимируемость	11
§ 4. Содержание монографии	18
Глава II. Неаппроксимируемость диаграмм	
§ 5. Неаппроксимируемость и нулевые линии вещественного волнового поля	21
§ 6. Примеры особых линий. «Запрещенные» формы антенн	28
§ 7. Амплитудная неаппроксимируемость	36
§ 8. Об определении формы рассеивающего тела по диаграмме рассеяния	48
§ 9. Свойства особых линий	57
Глава III. Неаппроксимируемость ближних полей	
§ 10. Условия аппроксимируемости для ближних полей	62
§ 11. Построение решения волнового уравнения по его нулевой линии; дуга окружности	69
§ 12. Аналитическое продолжение поля собственного колебания за границу области	76
Глава IV. Норма тока	
§ 13. Минимальная норма тока при заданной точности аппроксимации	92
§ 14. Обобщенные функции двойной ортогональности. Неаппроксимируемость и существование неизлучающих токов	103
§ 15. Оптимальный токовый синтез; общий случай	120
§ 16. «Область влияния» особой линии	135
Глава V. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла	
§ 17. Тривиальные обобщения	147
§ 18. Свойства особых поверхностей	163
Список литературы	170

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал, изложенный в этой книге, принадлежит к нескольким разделам трех дисциплин — теории антенн, высокочастотной электродинамики и математической физики. Существует проблема, в которой эти три дисциплины органически связаны. Эта проблема—обратные задачи теории высокочастотного электромагнитного поля, точнее—вопрос о том, как связана форма области, в которой сосредоточены какие-либо монохроматические токи, с возможностью приблизиться полями этих токов к различным заданным полям. Связь эта порождает, как оказалось, ряд содержательных вопросов. Многие из них поставлены в этой книге, а некоторые даже решены.

Рассматриваются следующие проблемы:

1. *Антенный синтез.* Существуют поверхности, обладающие следующим дефектом—любые протекающие по ним токи создают поля (и, в частности, диаграммы), которыми нельзя даже приблизить многие поля (и диаграммы). Таких поверхностей очень много. Поверхность антенны не должна быть к ним близка.

2. *Оптимальный токовый синтез.* Если полями токов на заданной поверхности не может быть приближено заданное поле (диаграмма) или если для этого требуются очень большие токи, то нужно найти такое поле (диаграмму)—по возможности близкое к заданному, которое можно создать токами с возможно малой нормой.

3. *Разрешимость интегральных уравнений первого рода.* Исследуется, в частности, вопрос о том, как существование решения (при различных определениях этого термина), т.е. разрешимость обратных задач электродинамики, зависит от области интегрирования.

4. *Неполнота системы функций, порождаемых действием некоторого оператора на полную систему функций.* Если оператор, переводящий ток в поле, действует на токи, расположенные на упомянутых выше дефектных поверхностях, то ядро сопряженного ему оператора не пусто. Семейство функций ортогонального дополнения может быть довольно богатым, и от этого зависит фактическая степень дефектности поверхности.

5. *Построение вещественного решения уравнения Гельмгольца (системы уравнений Максвелла) по заданной линии (поверхности), на которой это решение обращается в нуль.* Дефектные линии являются нулевыми линиями вещественных полей; асимптотика этих полей на бесконечности содержит функции ортогонального дополнения.

Акценты в книге расставлены примерно в этом же порядке. Используется в основном тот же математический аппарат, что и в обычных проблемах теории дифракции. Большая часть промежуточных выкладок заменена их описанием. Методы функционального анализа и аналитической теории решений волнового уравнения использованы очень скупно.

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Введение

Проиллюстрируем рассматриваемые в книге проблемы и характер полученных результатов на двух прикладных задачах.

1. *Цилиндрическое зеркало*, направляющая которого есть дуга окружности, освещается полем с поляризацией, параллельной оси цилиндра, в результате чего возникает индуцированный ток, имеющий такое же направление. Для простоты формулировок предположим, что ток не зависит от координаты в этом направлении. Может ли этот ток, при соответствующем освещении, создать диаграмму $1 + \cos \varphi$ или диаграмму, близкую к ней? Ответ на этот вопрос зависит от того, чему равен радиус окружности a . Если он таков, что $J_0(ka) = 0$, где J_0 — функция Бесселя, а $k = \omega/c$ (ω — частота колебаний), то создать такую диаграмму или хотя бы близкую к ней ни при каком освещении нельзя. Наиболее близкой к требуемой в этом случае диаграмме будет диаграмма $\cos \varphi$. От ширины зеркала этот результат не зависит.

Из этого примера видно, что диаграмма может нести на себе печать той области, в которой расположен ток. Эта печать не может быть стерта никаким выбором величины и распределения тока. Условие $J_0(ka) = 0$ делает невозможным для диаграмм токов, распределенных на таком зеркале, даже *приблизительно* быть равной любой диаграмме, ряд Фурье которой содержит постоянное слагаемое. Если ka не равно корню функции J_0 , но близко к нему, то приблизиться к такой диаграмме (и, может быть, даже реализовать ее) можно, но токи должны быть очень большими.

2. *Металлический экран*, представляющий собой часть сферы, освещается электромагнитным импульсом. Можно ли по измеренной диаграмме рассеянного поля удостовериться, что экран — действительно часть сферы, и определить ее радиус? Пространственная и временная структуры импульса неизвестны, неизвестна также и форма контура экрана.

Ответ на этот вопрос — положительный. Векторную диаграмму, созданную токами на экране, надо умножить на соответствующую весовую функцию, проинтегрировать по всему телесному

углу 4π и разложить в интеграл Фурье по времени. Если экран — часть сферы, то на некоторых частотах преобразованная по Фурье функция обратится в нуль, и по этим частотам можно определить радиус сферы.

Приведенные примеры с частью цилиндрической и с частью сферической поверхностей не являются экзотическими. Таких поверхностей отнюдь не мало, и, кроме того, вблизи каждой из них расположено еще бесконечно много таких поверхностей. Именно это и делает целесообразным изучение этого круга вопросов.

Форма поверхности может оказаться решающей не только для аппроксимации диаграммой токов на ней некоторой заданной диаграммы. Еще в большей степени это относится к полям в ближней зоне.

В первом примере можно простым рассуждением объяснить невозможность аппроксимировать некоторый класс диаграмм. Проведем это рассуждение, но подчеркнем, что оно не имеет универсального характера; в общем случае физическое объяснение сложнее. Как и в большей части книги, мы ограничимся двумерной скалярной формулировкой — она короче и более наглядна. Трехмерные векторные задачи, по существу, не намного сложнее.

Покажем сначала, что никакой ток на полной окружности $r = a$ не может создать диаграмму, ряд Фурье которой содержит постоянное слагаемое, если $J_0(ka) = 0$. На этой частоте существует решение $\hat{u}(r, \varphi) = J_0(kr)$ однородного уравнения Гельмгольца, не имеющее особенностей внутри окружности и равное на ней нулю. Другими словами, такая окружность является резонансной.

Рассмотрим вспомогательную задачу о полом металлическом цилиндре радиуса $r = a$, внутри которого возможно собственное колебание с функцией $\hat{u}(r, \varphi)$. По стенкам резонатора течет ток, не зависящий от угла φ , который создает поле, равное нулю вне цилиндра. Из этой вспомогательной задачи нам понадобится только утверждение, что не зависящий от φ ток является неизлучающим.

Вернемся к нашей основной задаче о токе на окружности. Разложим выражение для тока в ряд Фурье. Каждый член ряда, пропорциональный, соответственно, $\cos(n\varphi)$ или $\sin(n\varphi)$ ($n = 0, 1, \dots$), создает поле с той же угловой зависимостью. Нулевой член ряда для тока не излучает, поэтому при $r > a$ в поле любого тока нет члена с нулевой зависимостью от угла; нет его и в диаграмме.

Это справедливо и для дуги окружности, хотя дуга — незамкнутая линия, и никакого неизлучающего тока на ней создать нельзя. Однако если бы какой либо ток на ней создал диаграмму, содержащую слагаемое с $n = 0$, то, дополнив этот ток нулевым током на дополнительной дуге, мы на полной окружности получили бы ток, создающий диаграмму с этим слагаемым, что, как мы убедились, невозможно. В диаграмме, создаваемой любым током на дуге такой окружности, постоянное слагаемое отсутст-

вует, что и приводит в этом примере к явлению неаппроксимиремости.

Для этого примера совершенно элементарно и прямое доказательство этого утверждения. Ядро $\mathcal{K}$ в уравнении для дуги окружности

$$f(\varphi) = \int_C \mathcal{K}(\varphi, s) j(s) ds \quad (1.1)$$

есть $\exp[ika \cos(\varphi - s)]$; умножив диаграмму (1.1) на $\cos(n\varphi)$ и проинтегрировав по φ от 0 до 2π , получим выражение, имеющее множителем $J_n(ka)$, т.е. равное нулю, если $J_n(ka) = 0$. При $n = 0$ нулевой коэффициент в ряде Фурье любой диаграммы равен нулю независимо от длины дуги и от величины и распределения тока на ней.

Дадим теперь постановку задачи в более специальных терминах, не стремясь, однако, здесь к точным формулировкам. На некоторой линии C распределен ток $j(s)$ (s — координата вдоль C), который создает диаграмму (1.1). Вид гладкого ядра $\mathcal{K}$ нам сейчас не существен. В трехмерных векторных задачах надо заменить C на поверхность, $\mathcal{K}$ — на матрицу, и так далее.

В теории токового синтеза уравнение (1.1) рассматривается как интегральное уравнение первого рода для $j(s)$. Нас интересует вопрос о существовании решения этого уравнения или уравнения, в котором функция $f(\varphi)$ заменена на близкую (в среднеквадратичной метрике) функцию. В такой же метрике $j(s)$ должно иметь конечную норму. В первую очередь исследуется *зависимость существования решения от линии C* .

Для справедливости большей части полученных ниже результатов требование конечности нормы тока не является необходимым. Ток может иметь особенности, при которых квадрат его модуля неинтегрируем; нужно лишь, чтобы существовал интеграл, стоящий в выражении (5.6) справа (см. ниже), а для этого достаточно, чтобы интегрируем был сам ток. Это условие выполняется и для тока вблизи границы полуплоскости (при любой поляризации), и для $j(s) \sim \delta(s - s_0)$, т.е. в приближении, обычно применяемом в теории антенных решеток. Мы примем требование интегрируемости с квадратом, чтобы не усложнять изложение, особенно в гл. IV.

Существуют такие линии C , для которых уравнение (1.1) для заданного $f(\varphi)$ не имеет решения, и нужно изменить $f(\varphi)$ на *конечную величину*, чтобы решение существовало. Полная система функции для $j(\varphi)$ создает неполную систему для диаграмм $f(\varphi)$. Оказывается, что для того чтобы линия C обладала этим свойством, должно существовать решение однородного волнового уравнения, обращающееся в нуль на C . В простом примере, приведенном выше, таким решением является функция $J_0(kr)$.

Исследование таких решений оказывается весьма эффективным

методом рассмотрения проблемы аппроксимируемости и связанных с нею задач.

Наиболее существенный результат состоит в том, что таких линий и поверхностей «очень много». «Очень много» также диаграмм $f(\varphi)$, для которых при этих C уравнение (1.1) не имеет решения, даже если заменить $f(\varphi)$ на близкую функцию. Поэтому эффект неаппроксимируемости и его следствия заслуживают подробного анализа.

§ 2. Предмет и метод исследования

1. Предметом книги являются некоторые свойства электромагнитных полей, т.е. трехмерные векторные задачи. Однако почти все интересующие нас вопросы решаются для таких полей примерно так же, как для скалярных полей, а вид формул, изложение материала и формулировка результатов в скалярном случае, естественно, несравненно проще. Поэтому почти все изложение ведется для скалярных полей, причем даже для двумерных. Перенесение на трехмерный случай почти всегда тривиально.

При перенесении результатов на трехмерные векторные поля нетривиальным является только одно обстоятельство, связанное с тем, что в произвольном векторном поле не существует поверхностей, ему ортогональных. Условием того, чтобы в некотором векторном поле $A(x, y, z)$ существовали поверхности, на которых тангенциальные компоненты A равны нулю, является выполнение равенства $A \cdot \text{rot} A = 0$. В скалярном поле для существования нулевых линий аналогичного условия нет. Методы, развитые в этой книге, содержат, в частности, процедуру построения нулевых линий, и при переходе от $u(x, y)$ к $A(x, y, z)$ это дополнительное требование надо учитывать.

Таким образом, почти весь материал книги относится к свойствам скалярной функции двух переменных. Мы будем ее обозначать через $u(x, y)$ или $u(r, \varphi)$ — в зависимости от того, в какой системе координат удобно излагать данный вопрос.

Всюду рассматриваются монохроматические поля с временной зависимостью

$$e^{i\omega t}. \quad (2.1)$$

Во все формулы будет входить не частота ω , а волновое число $k = \omega/c$ (c — скорость света), которое мы будем называть частотой. Нас в первую очередь будут интересовать поля, созданные поверхностным током. Аналогом такого тока в двумерной скалярной задаче является ток, распределенный вдоль линии — линейный ток. Его удобно вводить не в виде правой части волнового уравнения, а в виде разрыва функции u или разрыва ее нормальной производной на этой линии.

Таким образом, поле $u(x, y)$, основной объект нашего исследования, удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2.2)$$

и одному из двух условий на некоторой линии C :

$$[u] = 0, \quad [\partial u / \partial N] = j; \quad [u] = j, \quad [\partial u / \partial N] = 0. \quad (2.3a, б)$$

В уравнении (2.2) Δ — двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2}. \quad (2.4)$$

В (2.3) величина $[A]$ равна разности значений A с той стороны C , из которой направлена нормаль N к C , и значения A с противоположной стороны.

На бесконечности, т.е. при $r \rightarrow \infty$, $u(r, \varphi)$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда

$$u(r, \varphi) = f(\varphi) \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} + O[(kr)^{-3/2}]. \quad (2.5)$$

Здесь $f(\varphi)$ — диаграмма (диаграмма излучения). Поле $u(r, \varphi)$ определяется заданным током (2.3a) или (2.3б) и условием, что на бесконечности оно имеет вид (2.5); функция $f(\varphi)$ не задается, а определяется после нахождения поля $u(r, \varphi)$. Это поле — обязательно комплексное, вещественное поле не может иметь асимптотику (2.5); функция $f(\varphi)$, вообще говоря, тоже комплексная величина.

2. Поясним физический смысл токов в (2.3), имея в виду, что двумерные скалярные задачи в электродинамике возникают, если либо электрическое поле, либо магнитное имеют только одну компоненту, т.е. $E_z \neq 0, H_z \equiv 0$ или $E_z \equiv 0, H_z \neq 0$, и если поля не зависят от координаты z .

Мы будем пользоваться терминами «электрический ток» и «магнитный ток», которые возникают в двумерной задаче, если рассматривать ее как частный случай трехмерной векторной задачи, в которой $d/dz \equiv 0, H_z \equiv 0$, так что скалярная функция $u(x, y)$ есть E_z . Тогда $du/dN|_C$ есть тангенциальная к линии C компонента магнитного поля, а $[du/dN]$ есть разрыв этой компоненты, т.е. z -я компонента тока. Таким образом, в (2.3a) величина j — это электрический ток. Разрыв самой функции u на C есть s -я компонента (т.е. тангенциальная к C) магнитного тока $j(m)$. Поэтому условия на C (2.3) можно записать так

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N} \right] = j; \quad [u] = j^{(m)}. \quad (2.6a, б)$$

Мы не будем писать верхний индекс (e) у тока j и опустим лишние индексы у j_z и $j_s^{(m)}$.

Заметим, что возможна и другая терминология, которая естественным образом возникает, если считать двумерную задачу частным случаем такой трехмерной векторной задачи, в которой $E_z \equiv 0$, $d/dz \equiv 0$, а буквой u обозначена функция $H_z(x, y)$.

В (2.6) опущены несущественные множители, j и $j^{(m)}$ не равны, а только пропорциональны линейным токам, о чем мы далее упоминать не будем.

3. Задачи, рассмотренные в этой книге, не потребовали применения каких-либо специальных или очень сложных математических методов. Исследование различных свойств решений уравнения (2.2) производится с использованием обычных методов, применяемых в типичных задачах теории дифракции. Отметим, что ни одна задача дифракции в книге не рассматривается (см. §16, п.6).

Изучаются функции, которые могут иметь особенности—разрывы, полюсы. Даже возбуждающие токи задаются в виде разрыва самой функции или ее производной (2.6). Наличие или отсутствие у поля каких-либо особенностей в данной области или во всей плоскости является существенным фактором во всех построениях. Это связано с тем, что для двух решений уравнения (2.2) $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ широко используется формула Грина:

$$\int_{\mathcal{L}} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial N} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial N} \right) ds = 0, \quad (2.7)$$

а она справедлива только, если внутри замкнутой линии (контура) $\mathcal{L}$ обе функции не имеют особенностей.

Все линии, упоминаемые в работе, гладкие или могут иметь только конечное число угловых точек. Для всех контуров считаются выполненными условия, при которых на определенных частотах существуют во внутренней области решения либо с условием « u равно нулю на контуре», либо с условием « $\partial u / \partial N$ равно нулю на контуре», т.е. с условием Дирихле или Неймана.

Довольно широко используется аппарат вариационного исчисления. Чаще других применяются два метода: метод множителей Лагранжа, позволяющий сводить задачу об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме, и метод Ритца, сводящий задачу об экстремуме отношения двух билинейных функционалов к алгебраическому уравнению в виде равенства нулю некоторого детерминанта.

В некоторых параграфах применяются термины функционального анализа—операторы, полнота систем функций и так далее. По существу, использована только теорема о полноте системы собственных функций самосопряженных интегральных операторов и о том, что их собственные значения стремятся к нулю с ростом

номера. В задачах о поле токов, излучающих в свободном пространстве, основную роль играют несамосопряженные операторы. Некоторые простые свойства этих операторов, которые нам понадобятся, как правило, коротко формулируются.

Цель этого пункта—пояснить, что для нематематиков в этой книге все доступно. Тем более, что всюду, где для этого представляется хотя бы малейшая возможность, промежуточные выкладки опущены и заменены их описанием. Для математиков использованный аппарат, разумеется, тривиален. Нетривиальным для них может оказаться существование интересной области математической физики, в которой есть простые по постановке, но непростые по существу и нерешенные математические проблемы.

4. В тексте книги мало ссылок на литературу. Впервые общая постановка проблемы, сформулированная в названии книги, и некоторые основные результаты были приведены в статьях [1–15], опубликованных в 1988–1995 гг. В книге мы на эти работы не ссылаемся. Формулы и методы теории дифракции, использованные в книге, приведены, например, в [16, 17]. Немногие использованные понятия функционального анализа есть в [18]. Формулы для специальных функций взяты из справочников [19, 20].

§ 3. Реализуемость, аппроксимируемость, амплитудная аппроксимируемость

1. В этой книге рассматриваются некоторые свойства функций $f(\varphi)$, определяемых тем, что они связаны с функциями $j(s)$, заданными на линии C , интегральным преобразованием (1.1), или аналогичных функций, для которых в (1.1) стоят другие ядра. Функции $f(\varphi)$ — диаграммы токов, распределенных на линии C , и мы часто будем пользоваться сокращенным выражением «диаграммы, созданные линией C ». Токи $j(s)$ —любые функции координаты s на C , и, если не оговорено противное, предполагается лишь, что они имеют конечную норму N , т.е. что

$$N < \infty, \quad (3.1)$$

где

$$N^2 = \int_C |j(s)|^2 ds. \quad (3.2)$$

Координата s — безразмерная, она пронормирована условием

$$\int_C ds = 2\pi. \quad (3.3)$$

Типичная постановка задачи такова—задана некоторая комплексная функция $F(\varphi)$. Можно ли создать ее линией C или хотя бы приблизиться к ней, т.е. существует ли на C такой ток $j(s)$, что создаваемая им по (1.1) диаграмма $f(\varphi)$ будет равна $F(\varphi)$ или

хотя бы в некотором смысле близка к $F(\varphi)$? Норма функции $F(\varphi)$ считается конечной, и мы почти всегда будем нормировать $F(\varphi)$ на единицу условием

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi)|^2 d\varphi = 1. \quad (3.4)$$

Возможны четыре случая.

1. *Реализуемость.* Это означает, что существует такой ток $j(s)$, что соотношение (1.1), рассматриваемое как интегральное уравнение для $j(s)$, имеет решение в классе функций, удовлетворяющих условию (3.1).

2. *Аппроксимируемость.* Для любого $\delta > 0$ существует такой ток $j(s)$, что создаваемая им диаграмма $f(\varphi)$ и заданная функция $F(\varphi)$ связаны соотношением

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) - f(\varphi)|^2 d\varphi \leq \delta^2. \quad (3.5)$$

Реализуемость есть частный случай аппроксимируемости, когда это условие справедливо и при $\delta = 0$. Всякая реализуемая функция аппроксимируема; если функция неаппроксимируема, то она и нереализуема.

3. *Амплитудная аппроксимируемость.* Для любого $\delta > 0$ существует такой ток $j(s)$ и такая вещественная функция $\psi(\varphi)$ (фаза), что

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) e^{-i\psi(\varphi)} - f(\varphi)|^2 d\varphi \leq \delta^2. \quad (3.6)$$

Аппроксимируемость есть частный случай амплитудной аппроксимируемости, когда (3.6) справедливо при $\psi(\varphi) \equiv 0$.

4. *Амплитудная неаппроксимируемость.* Есть такое число δ ($\delta > 0$), для которого не существуют ток $j(s)$ и фаза $\psi(\varphi)$ такие, чтобы выполнялось условие (3.6). Разумеется, если $F(\varphi)$ амплитудно неаппроксимируема, то она неаппроксимируема и нереализуема.

Таким образом, неаппроксимируемость означает, что существует конечное «расстояние» между всеми диаграммами, создаваемыми линией C , и заданной функцией $F(\varphi)$. Амплитудная неаппроксимируемость означает, что существует конечное «расстояние» между всеми диаграммами, создаваемыми линией C , и функциями, имеющими ту же амплитуду $|F(\varphi)|$, что и заданная

функция $F(\varphi)$. Если имеет место реализуемость, то интегральное уравнение (1.1)

$$\int_C \mathcal{K}(\varphi, s) j(s) ds = F(\varphi) \quad (3.7)$$

имеет решение с конечной нормой (далее мы это оговаривать не будем). Если есть аппроксимируемость, то при любом $\delta > 0$ уравнение

$$\int_C \mathcal{K}(\varphi, s) j(s) = \tilde{F}(\varphi) \quad (3.8)$$

имеет решение при некоторой функции $\tilde{F}(\varphi)$, для которой

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) - \tilde{F}(\varphi)|^2 d\varphi \leq \delta^2. \quad (3.9)$$

Если есть амплитудная аппроксимируемость, то для любого δ , $\delta > 0$, существует такая фаза $\psi(\varphi)$, что уравнение (3.8) имеет решение для некоторой функции $\tilde{F}(\varphi)$, для которой

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) e^{-i\psi(\varphi)} - \tilde{F}(\varphi)|^2 d\varphi \leq \delta^2. \quad (3.10)$$

Далее мы будем пользоваться сокращенными выражениями: функция реализуема линией C , аппроксимируема линией C , амплитудно-аппроксимируема линией C , опуская слова «диаграммами токов с конечной нормой, распределенных на ...».

2. Проблема реализуемости не является предметом этой книги. Мы приведем только некоторые качественные результаты, полученные в этой проблеме. Мы будем исходить из аппарата [21], основанного на анализе скорости убывания с номером коэффициентов Фурье функции $F(\varphi)$, реализуемость которой исследуется

$$F(\varphi) = \sum A_n \cos(n\varphi) \quad (3.11)$$

(см. также ниже § 12, п. 7). Как и во многих других случаях, мы для простоты записи не выписали в (3.11) слагаемые, пропорциональные $\sin(n\varphi)$.

Реализуемость определяется существованием и величиной предела

$$a_0 = \frac{2}{ek} \lim_{n \rightarrow \infty} (n |A_n|^{1/n}), \quad e = 2, 7, \dots \quad (3.12)$$

т.е. тем, насколько быстро убывает A_n . Строго говоря, надо вместо $\lim$ писать $\overline{\lim}$. Так как для любого коэффициента $c \neq 0$

$\lim |c|^{1/n} = 1$, то величина a_0 не зависит от нормировки функции $F(\varphi)$.

Если предел (3.12) не существует, т.е. если $a_0 = \infty$, то функция $F(\varphi)$ не реализуема никакими токами, где бы они ни были распределены. Примером является П-образная функция, для которой A_n убывает медленно, лишь как $1/n$. Если ka_0 — конечное число, то реализуемость $F(\varphi)$ линией C зависит от взаимного расположения этой линии и окружности радиуса a_0 с центром в начале координат. Функция $F(\varphi)$ нереализуема линией, целиком лежащей внутри этой окружности, и реализуема любым нерезонансным замкнутым контуром, содержащим эту окружность внутри себя. Здесь имеется в виду нерезонансность для граничных условий Дирихле. Если $a_0 = 0$, то $F(\varphi)$ реализуемо любым замкнутым нерезонансным контуром, содержащим внутри себя начало координат, и нереализуемо никаким незамкнутым контуром, и так далее. Подробнее все возможные случаи взаимного расположения C и этой окружности и связанные с ними условия реализуемости—нереализуемости мы здесь приводить не будем. Заметим только, что замкнутые контуры могут реализовать более широкий класс диаграмм, чем незамкнутые. Как будет показано далее, это справедливо и в проблеме аппроксимируемости.

Например, для функции (ненормированной)

$$F(\varphi) = \exp \left[-A \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] \quad (3.13)$$

коэффициент Фурье убывает как $I_n(A/2)$, где I_n — модифицированная функция Бесселя; при $n \rightarrow \infty$ она асимптотически эквивалентна $(eA/2)^n n^{-n}$, так что (3.12) дает $a_0 = A/k$. Окружность большего радиуса или любой контур, ее охватывающий, реализует эту функцию, любая линия, лежащая внутри нее — не реализует.

Для соотношения между понятиями реализуемости и аппроксимируемости существенно, что реализуемость определяется, согласно (3.12), поведением A_n при больших n . Поэтому сколь угодно малым изменением функции $F(\varphi)$ можно любым образом изменить число ka_0 . Например, оборвав ряд (3.11) на большом номере, можно практически не возмутить функцию $F(\varphi)$, а число ka_0 станет нулем. Напротив, прибавив к $F(\varphi)$ функцию

$\sum_N^{\infty} (1/n^2) \cos(n\varphi)$, мы, при большом N , изменим ее сколь угодно

мало, а ряд Фурье станет сходиться настолько медленно, что предел (3.12) не будет существовать ($a_0 = \infty$), т.е. новая функция будет нереализуема любой линией. Реализуемость есть «тонкое»

свойство. Аппроксимируемость есть свойство «грубое». Нужно *конечным* образом изменить неаппроксимируемую функцию, чтобы сделать ее аппроксимируемой, и наоборот. Впрочем, это утверждение будет далее уточнено. Будет показано, что если это изменение, хотя и конечное (по определению аппроксимируемости) — мало, то невелико и различие между аппроксимируемостью и ее отсутствием — в согласии с тем, что подсказывает физическая интуиция.

3. Далее мы часто будем иметь дело со следующей ситуацией — все диаграммы $f(\varphi)$, реализуемые линией C , обладают свойством

$$I = 0, \quad (3.14)$$

где

$$I = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \hat{F}^*(\varphi) d\varphi. \quad (3.15)$$

Здесь $\hat{F}(\varphi)$ — некоторая функция, *определяемая линией C* . Она обладает конечной нормой, и если не оговорено противоположное, то пронормирована условием

$$\int_0^{2\pi} |\hat{F}(\varphi)|^2 d\varphi = 1. \quad (3.16)$$

Приведем элементарное доказательство известного результата: при условии (3.14) существуют функции $F(\varphi)$, неаппроксимируемые линией C . Мы далее часто будем пользоваться этой связью между свойством линии, даваемым (3.14), и неаппроксимируемостью.

Пусть для некоторой функции $F(\varphi)$ интеграл

$$b = \int_0^{2\pi} F(\varphi) \hat{F}^*(\varphi) d\varphi \quad (3.17)$$

не равен нулю. Здесь $\hat{F}(\varphi)$ — функция, участвующая в (3.15). Интеграл

$$\int_0^{2\pi} [F(\varphi) - f(\varphi)] \hat{F}^*(\varphi) d\varphi, \quad (3.18)$$

согласно (3.14), равен b (см. (3.17)). Но по неравенству Коши квадрат его модуля не больше произведения

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) - f(\varphi)|^2 d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} |\hat{F}(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (3.19)$$

Второй множитель здесь согласно (3.16) равен единице, так что

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) - f(\varphi)|^2 d\varphi \geq |b|^2. \quad (3.20a)$$

Это и есть условие неаппроксимируемости функции $F(\varphi)$ линией C (подробнее, неаппроксимируемость $F(\varphi)$ диаграммами $f(\varphi)$ любых токов, расположенных на линии C).

Справедливо и обратное. Если для любой функции $F(\varphi)$ и для всех диаграмм $f(\varphi)$ справедливо неравенство (3.20a), т.е.

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) - f(\varphi)|^2 d\varphi \geq \left| \int_0^{2\pi} F(\varphi) \hat{F}^*(\varphi) d\varphi \right|^2, \quad (3.20b)$$

то положив в нем $F(\varphi) = f(\varphi)$, получим для всех $f(\varphi)$ условие (3.14).

4. Иногда, для сокращения записи, будем пользоваться терминами функционального анализа; собственно же его аппарат нам почти не понадобится. В этих терминах условие (3.14) означает, что система функций $f(\varphi)$ не полна, хотя она и создается действием оператора (1.1) на полную систему токов. Существует так называемое ортогональное дополнение, элемент которого обозначен выше $\hat{F}(\varphi)$ ($\hat{F}(\varphi)$ — функция, ортогональная всем функциям $f(\varphi)$). Ортогональность означает равенство нулю интеграла (3.15), т.е. произведения функций $f(\varphi)$ и $\hat{F}(\varphi)$. Под произведением двух функций $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ и расстоянием между ними понимаются величины

$$(A, B) \equiv \int_0^{2\pi} A(\varphi) B^*(\varphi) d\varphi, \quad \left\{ \int_0^{2\pi} |A(\varphi) - B(\varphi)|^2 d\varphi \right\}^{1/2}. \quad (3.21a, б)$$

В частности квадратом нормы функции $A(\varphi)$ является число (A, A) .

Согласно (3.20) при условии (3.14) неаппроксимируема любая функция, неортогональная $\hat{F}(\varphi)$, и, в частности, сама эта функция. Необходимым условием аппроксимируемости какой-либо функции $F(\varphi)$ является ее ортогональность функции $\hat{F}(\varphi)$. Разумеется, для случайно выбранной функции $F(\varphi)$ это условие не выполняется. Если существует только одна функция ортогонального дополнения для данной линии C , то это условие является и достаточным.

Напомним наглядную геометрическую иллюстрацию, возникающую, если моделировать пространство функций пространством трехмерных векторов. Тогда (3.21a) — обычное скалярное произведение двух векторов A и B , а (3.21б) — длина прямой, соединяющей концы этих векторов, если их начала совпадают.

Условие (3.14) означает, что все векторы $f(\varphi)$ лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\hat{F}(\varphi)$. И аппроксимируемы

только векторы, лежащие в этой плоскости. Если вектор $F(\varphi)$ не лежит в ней, то расстояние от конца этого вектора до плоскости, т.е. до ближайшего к нему вектора $f(\varphi)$ (ненормированного), равно $|b|$, что следует из сопоставления (3.20а) с (3.21б). Утверждение «при условии (3.14) почти все функции неаппроксимируемы», в этой иллюстрации всего лишь означает, что размерность плоскости меньше размерности трехмерного пространства. Ближайшая к $F(\varphi)$ функция $f(\varphi)$, т.е. функция, лежащая в плоскости, перпендикулярной $\hat{F}(\varphi)$, есть проекция $F(\varphi)$ на эту плоскость, т.е. равна $F(\varphi) - b\hat{F}(\varphi)$. В гл. IV мы получим эту элементарную формулу без ссылки на трехмерную иллюстрацию.

5. Ортогональное дополнение пространства функций $f(\varphi)$, соответствующих данной линии C , может содержать не одну функцию $\hat{F}(\varphi)$, а ряд линейно независимых функций $\hat{F}_p(\varphi)$. При этом, разумеется, трехмерная иллюстрация не может быть использована. Как мы увидим в § 6, число функций $\hat{F}_p(\varphi)$ может быть даже бесконечным. Приведем очевидное обобщение основной формулы (3.20) на этот случай.

Пусть все диаграммы $f(\varphi)$ удовлетворяют условиям

$$I_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, P, \quad (3.22a)$$

где

$$I_p = (f, \hat{F}_p). \quad (3.22b)$$

Линейно независимые функции $\hat{F}_p(\varphi)$ мы пронормируем на единицу и ортогонализируем, т.е. будем считать, что в качестве $\hat{F}_p(\varphi)$ выбраны функции, для которых

$$(\hat{F}_p, \hat{F}_q) = \delta_{pq}, \quad (3.23)$$

где δ_{pq} — символ Кронекера ($\delta_{pq} = 0$ при $p \neq q$, $\delta_{pp} = 1$).

Составим выражение, аналогичное (3.18):

$$(F - f, \sum_p b_p \hat{F}_p), \quad (3.24)$$

где через b_p обозначены величины

$$b_p = (F, \hat{F}_p). \quad (3.25)$$

Согласно (3.22) выражение (3.24) равно $(F, \sum_p b_p \hat{F}_p)$, а подставляя обозначения (3.25), получим, что (3.24) равно $\sum_p |b_p|^2$. С другой

стороны, по неравенству Коши квадрат модуля величины (3.24) не больше произведения квадратов норм его сомножителей. Квадрат нормы первого сомножителя в (3.24) есть $(F - f, F - f)$. Квадрат нормы второго сомножителя есть

$(\sum_p b_p \hat{F}_p, \sum_q b_q \hat{F}_q)$, что, согласно (3.23), равно однократной сумме $\sum_p |b_p|^2$. Таким образом, неравенство Коши, примененное к выражению (3.24), согласно свойству (3.22), а также выбору системы функций $\hat{F}_p(\varphi)$ по (3.23) и обозначению (3.25), дает

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) - f(\varphi)|^2 d\varphi \geq \sum_p |b_p|^2. \quad (3.26)$$

Если нет других функций ортогонального дополнения, кроме участвующих в сумме в правой части (3.26), т.е. если нет других функций, которым ортогональны все диаграммы, создаваемые токами на C , то выполнение равенств

$$b_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, P, \quad (3.27)$$

является не только необходимым, но и достаточным условием аппроксимируемости функции $F(\varphi)$ линией C .

§ 4. Содержание монографии

1. Основное содержание монографии состоит в исследовании некоторых свойств *полей, созданных поверхностными токами*. Простейшая модель, на которой, в основном, и рассматривается это свойство, есть двумерное скалярное волновое уравнение, в котором источники расположены на линии. Свойство это состоит в том, что существует «очень много» таких линий, что полями любых токов, расположенных на них, нельзя приблизить (аппроксимировать) «очень много» функций и, одновременно, разумеется, любую близкую к ним.

Оказывается, что все такие («особые») линии являются нулевыми линиями какого-либо вещественного решения волнового уравнения. Этот факт—по существу совершенно элементарный—позволяет эффективно находить такие линии (поверхности) и исследовать их. Даже только близость линии, на которой расположены токи, к особой линии приводит к тому, что для аппроксимации почти любого поля нужны очень большие токи. Поверхность антенны не должна быть близка к особой.

2. В гл. II свойство аппроксимируемости анализируется для диаграмм, т.е. для полей на бесконечности. Исследуются различные вещественные поля, их нулевые линии и связанные с ними запреты на аппроксимацию. Для некоторых линий эти запреты настолько сильны, что полями токов на этих линиях нельзя аппроксимировать многие функции, заданные даже только по амплитуде, при любой их фазе.

Существование запретов на аппроксимацию может быть использовано для того, чтобы по диаграмме рассеяния какого-либо тела, не зная освещающего его поля, высказать некоторые

суждения о форме поверхности этого тела. В частности следует учесть, что если измеренная диаграмма принадлежит к тем, которые не могут быть приближены диаграммами токов, расположенных на некоторой особой поверхности, то поверхность рассеивателя не может быть близка к этой особой поверхности.

3. В гл. III исследуется вопрос о запрете на аппроксимируемость не только диаграмм, но и полей на конечном расстоянии (ближних полей). Эти запреты в ближней области оказываются, вообще говоря, сильнее, чем в дальней, т.е. они ослабляются при удалении от источников. Задача вновь сводится к построению вещественных полей и их нулевых линий. Оказывается, что если существует решение волнового уравнения, равное нулю на данной линии, то запрет на аппроксимацию относится к полям лишь в той области, в которой это решение не имеет особенностей. В частности, если оно аналитично во всей плоскости, то запрет относится как к ближним полям, так и к диаграммам. В этой связи возникает проблема, даже в двумерной скалярной формулировке нерешенная в той общности и с той эффективностью, которые требует практика — проблема *аналитического продолжения* собственного колебания резонансной области за границу этой области. Надо установить условия, когда такое продолжение вообще возможно и когда оно не имеет особенностей, и при этом локализовать особенности, если они существуют. Простые примеры показывают, что они могут возникать в конечной части плоскости, в бесконечности, а также не возникать вовсе.

4. Обобщением понятия аппроксимируемости является понятие оптимального токового синтеза — так же, как аппроксимируемость есть обобщение понятия реализуемости. Даже если токами на данной линии некоторая диаграмма аппроксимируема, то эта аппроксимация может потребовать очень большого тока. И может оказаться, что конечное, но не очень большое возмущение диаграммы позволяет создать ее током с существенно меньшей нормой. В гл. IV рассмотрена задача о нахождении этой возмущенной диаграммы, одновременно и близкой к заданной и созданной током с малой нормой. Решение ее в общем случае потребовало привлечения известного аппарата «обобщенных функций двойной ортогональности». Они образуют две ортонормированные системы функций—токов и диаграмм, обладающих тем свойством, что ток, описываемый одной функцией первой системы, создает диаграмму, описываемую одной функцией второй системы.

Использование этой функции позволило, в частности, определить соотношение между двумя свойствами линии—быть особой (существуют неаппроксимируемые диаграммы) и свойством, состоящим в том, что на линии (замкнутой) существуют токи, не создающие поля во внешней области. Оказалось, что свойства эти независимы, но в некотором отношении симметричны друг относительно друга.

В последнем параграфе этой главы установлено выражение для нижней границы нормы тока, аппроксимирующего заданную диаграмму. Для нахождения этой границы не нужно предварительно вычислять сам ток. В некотором предельном переходе это выражение дает не оценку снизу, а точное значение нормы.

Эта оценка используется для определения того влияния, которое имеет на норму тока, расположенного на какой-либо неособой линии, близость этой линии к особой. Эта норма обратно пропорциональна некоторой величине, имеющей характер расстояния между данной линией и ближайшей к ней особой. Вблизи каждой особой линии не только существуют другие особые линии, но существует такая область, что распределенные в ней токи должны иметь большую норму, чтобы аппроксимировать почти любую диаграмму. В еще большей степени, это относится к аппроксимации ближних полей.

5. В гл. V результаты первых глав переносятся на трехмерные векторные задачи о полях, удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Почти всюду это перенесение производится автоматически. Надо только вместо формулы Грина применять лемму Лоренца, вместо задач Дирихле или Неймана упоминать первую или вторую задачи электродинамики, и так далее. Параграф 17, в котором реализована эта программа, написан подчеркнуто конспективно. Подробное выписывание в векторной форме всех результатов, не говоря уже о промежуточных выкладках, заняло бы очень много места, ничего, в сущности, не прибавив к пониманию явления неаппроксимируемости и связанных с ним ограничений.

Иной смысл имеет материал § 18. В нем обсуждаются следствия единственного существенного отличия между трехмерной векторной задачей и скалярной (двухмерной или трехмерной) задачей. Это отличие состоит в том, что в первой задаче вспомогательное поле, связанное с особой поверхностью, подчиняется некоторым условиям, а для вспомогательного скалярного поля аналогичных условий нет. Это отличие приводит, во-первых, к тому, что некоторые результаты, очевидные или легко доказываемые в скалярном случае, для векторных задач формулируются лишь как вероятные гипотезы. Во-вторых, использование некоторых практических результатов развитой теории оказывается ограниченным в задачах, в которых векторный характер поля существен. Однако общий характер явления неаппроксимируемости и связанной с ним проблемы оптимального токового синтеза мало отличается в скалярных и в векторных задачах.

Г л а в а II. НЕАППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ДИАГРАММ

§ 5. Неаппроксимируемость и нулевые линии вещественного волнового поля

1. Функция $f(\varphi)$ — диаграмма, созданная током $j(s)$, распределенным на линии C — определяется, согласно (2.4), как коэффициент при множителе $\exp(-ikr)/\sqrt{kr}$ в асимптотике при $r \rightarrow \infty$ поля $u(r, \varphi)$. Это поле удовлетворяет однородному волновому уравнению (2.2) и условию на линии C , которое мы введем по (2.3а), т.е. как разрыв нормальной производной $u(r, \varphi)$ на C ; само поле на C непрерывно

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N} \right] = j(s), \quad [u] = 0. \quad (5.1a, б)$$

Введем *вспомогательное поле* $\hat{u}(r, \varphi)$, которое будет играть существенную роль в дальнейших построениях. Это поле по определению удовлетворяет на всей плоскости тому же однородному волновому уравнению (2.2):

$$\Delta \hat{u} + k^2 \hat{u} = 0, \quad (5.2)$$

с тем же значением k и не имеет никаких особенностей на всей плоскости. На бесконечности $\hat{u}(r, \varphi)$ содержит, разумеется, не только слагаемое, пропорциональное $\exp(-ikr)/\sqrt{kr}$, но и слагаемое, пропорциональное $\exp(ikr)/\sqrt{kr}$ — иначе это поле должно было бы быть тождественно равным нулю. Асимптотика при $r \rightarrow \infty$ поля $\hat{u}(r, \varphi)$ имеет вид

$$\hat{u}(r, \varphi) = \hat{F}^*(\varphi) e^{i kr / \sqrt{kr}} + \Phi(\varphi) e^{-i kr / \sqrt{kr}}, \quad (5.3)$$

где отброшены члены порядка $(kr)^{-3/2}$. Поле $\hat{u}(r, \varphi)$ содержит при $r \rightarrow \infty$ «незоммерфельдовское» слагаемое — первое слагаемое в (5.3). Это поле как бы создано *приходящей из бесконечности цилиндрической волной*. Амплитуда этой волны пропорциональна функции $\hat{F}^*(\varphi)$, введенной условием (5.3). Если поле $\hat{u}(r, \varphi)$ вещественно, как мы обычно будем предполагать, то и ее асимптотика вещественна, и тогда $\Phi(\varphi) = F(\varphi)$; но в любом случае функция $\Phi(\varphi)$ выпадает из дальнейших выкладок. Мы потребуем

еще, чтобы функция $\hat{F}(\varphi)$ имела конечную норму и будем ее нормировать условием (3.16), т.е.

$$\int_0^{2\pi} |\hat{F}(\varphi)|^2 d\varphi = 1. \quad (5.4)$$

Этим определяется и нормировка поля $\hat{u}(r, \varphi)$.

2. Применим к полю $u(r, \varphi)$, созданному токами $j(s)$, и к вспомогательному полю $\hat{u}(r, \varphi)$, удовлетворяющим одному и тому же волновому уравнению, вторую формулу Грина в области, ограниченной бесконечно удаленной окружностью. При этом, согласно (5.1a), надо дополнительным контуром исключить линию C , на которой поле $u(r, \varphi)$ неаналитично. Возникает дополнительный контурный интеграл по обеим сторонам линии C (независимо от того, замкнута ли эта линия или нет), т.е. интеграл по C от разности значений $\partial u / \partial N$ с обеих сторон C , умноженной на значение $\hat{u}(r, \varphi)$ на этой линии. Формула Грина примет вид

$$\iint (\hat{u} \Delta u - u \Delta \hat{u}) dS = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\hat{u} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \right) r d\varphi + \int_C \left[\frac{\partial u}{\partial N} \right] \hat{u} ds. \quad (5.5)$$

Левая часть равна нулю, так как уравнения (2.2) и (5.2) совпадают. Первое слагаемое справа в (5.5) вычисляется по асимптотикам (2.4) и (5.3), второе — по (5.1a). В результате получаем формулу:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) \hat{F}^*(\varphi) d\varphi = \frac{i}{2} \int_C j(s) \hat{u}(r, \varphi) ds. \quad (5.6)$$

Это есть теорема взаимности (или, точнее, лемма Лоренца) для двух полей — поля $u(r, \varphi)$ (слева стоит его асимптотическое значение $f(\varphi)$), созданного током $j(s)$, и поля $\hat{u}(r, \varphi)$, созданного приходящей волной с амплитудой $\hat{F}^*(\varphi)$.

Введем термин «особая линия». Назовем линию C особой и будем обозначать ее через $\hat{C}$, если существует поле $\hat{u}(r, \varphi)$, всюду удовлетворяющее волновому уравнению (5.2) и не имеющее особенностей на всей плоскости, для которой функция $\hat{F}(\varphi)$, связанная с $\hat{u}(r, \varphi)$ условием (5.3), имеет конечную норму — и такая, что она равна нулю на $\hat{C}$. Таким образом, по определению особой линии, на ней

$$\hat{u}(r, \varphi) |_{\hat{C}} = 0, \quad (5.7)$$

где $\hat{u}(r, \varphi)$ обладает упомянутыми свойствами. Поле $\hat{u}(r, \varphi)$ и его нормальная производная непрерывны на $\hat{C}$.

Из (5.6) и (5.7) следует, что диаграмма любого тока, распределенного на $\hat{C}$, удовлетворяет условию (3.14), в котором

$\hat{F}(\varphi)$ — функция, связанная с асимптотикой поля $\hat{u}(r, \varphi)$ условием (5.3), т.е. $\hat{F}^*(\varphi)$ пропорционально «незоммерфельдовскому» слагаемому в асимптотике поля, равного нулю на $\hat{C}$.

Существование поля $\hat{u}(r, \varphi)$, удовлетворяющего требованию (5.7), есть достаточное условие для того, чтобы диаграмма любого тока на $\hat{C}$ удовлетворяла уравнению (3.14) с функцией $\hat{F}(\varphi)$, связанной с полем $\hat{u}(r, \varphi)$, согласно уравнению (5.3). Это условие и необходимо. Если диаграмма $f(\varphi)$ любого тока, распределенного на некоторой линии, удовлетворяет условию (3.14) с некоторой функцией $\hat{F}(\varphi)$, то существует поле $\hat{u}(r, \varphi)$, нигде не имеющее особенностей и удовлетворяющее волновому уравнению, которое равно нулю на этой линии и связано с $\hat{F}(\varphi)$ условием (5.3).

Доказательство совершенно элементарно. Функция $\hat{F}(\varphi)$ однозначно определяет поле $\hat{u}(r, \varphi)$; подробно мы эту связь рассмотрим в следующем пункте. Формула (5.6) есть следствие этой связи. Зададим какую-либо полную систему функций $j_n(s)$ ($n = 1, 2, \dots$) на $\hat{C}$; пример такой системы для произвольной линии приведен в § 14. По условию, все диаграммы, создаваемые токами $j_n(s)$, ортогональны функции $\hat{F}(\varphi)$, т.е. для всех n левая — а потому и правая — часть формулы (5.6) равна нулю. Следовательно, функция $\hat{u}[r(\varphi), \varphi]$, где $r = r(\varphi)$ есть уравнение линии $\hat{C}$, ортогональна полной системе функций $j_n(s)$, т.е. равна нулю.

Как уже отмечалось в § 3, из (3.14) следует неаппроксимлируемость линией $\hat{C}$ любой функции $F(\varphi)$, не ортогональной $\hat{F}(\varphi)$, т.е. не удовлетворяющей условию $b = 0$ (3.17). Именно это свойство линии $\hat{C}$ и имеет практическое значение. Однако непосредственная проверка того, что свойство (3.14) выполняется для любых токов на $\hat{C}$, обычно невозможно. А существование поля $\hat{u}(r, \varphi)$ со свойством (5.7) на $\hat{C}$ часто удается доказать, причем иногда простейшим способом — нахождением явного вида этого поля. Именно в этом и состоит значение доказанной эквивалентности (3.14) и (5.7).

Заметим, что построение линии $\hat{C}$ по известной функции $\hat{F}(\varphi)$ можно рассматривать как определение некоторого параметра оператора (1.1) по его функции ортогонального дополнения.

3. Рассмотрим подробнее связь поля $\hat{u}(r, \varphi)$ и функции $\hat{F}(\varphi)$, которую дает формула (5.3). Поле $\hat{u}(r, \varphi)$, удовлетворяющее волновому уравнению (5.2) и не имеющее особенностей, можно представить в виде

$$\hat{u}(r, \varphi) = \sum C_n J_n(kr) \cos(n\varphi), \quad (5.8)$$

где коэффициенты C_n предполагаются такими, что ряд всюду сходится. Для сокращения записи мы ограничились в (5.8) косинусными членами, хотя рассмотрение, разумеется, не ограничивается четными по φ полями. Так как нас будут интересовать поля, имеющие нулевые линии, то, если не учитывать возможность вырождения (когда два вещественных поля имеют общую нулевую линию), поле $u(r, \varphi)$ должно быть вещественно. Точнее, как поле $\hat{u}(r, \varphi)$, так и коэффициенты C_n могут отличаться от вещественных величин множителем $\exp(i\alpha)$ (при любом α). Мы ниже учтем это несущественное обобщение.

Асимптотика при $r \rightarrow \infty$ поля (5.8) будет, согласно асимптотике функций Бесселя, содержать слагаемые с $\exp(ikr)/\sqrt{kr}$ и с $\exp(-ikr)/\sqrt{kr}$. Функция $\hat{F}^*(\varphi)$, согласно уравнению (5.3), выражается рядом Фурье с теми же коэффициентами C_n :

$$\hat{F}^*(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \sum C_n (-i)^n \cos(n\varphi). \quad (5.9)$$

Условие нормировки (5.4) для $\hat{F}(\varphi)$ дает

$$\pi \sum' |C_n|^2 = 1, \quad (5.10)$$

где штрих над знаком суммы означает, что в слагаемом с $n = 0$ подразумевается коэффициент 2.

Поле, удовлетворяющее волновому уравнению и нигде не имеющее особенностей, можно представить не в цилиндрической системе координат, как в (5.8), а в декартовой:

$$\hat{u}(x, y) = \int_0^{2\pi} D(\alpha) \exp(ikx \cos \alpha + iky \sin \alpha) d\alpha, \quad (5.11)$$

т.е. в виде интеграла по плоским волнам. При этом можно ограничиться однородными плоскими волнами ($|\cos \alpha| \leq 1$, $|\sin \alpha| \leq 1$), так как его асимптотика при $r \rightarrow \infty$ содержит значения $D(\alpha)$ только для аргумента α от 0 до 2π (см. также замечание после (5.15)).

Подставив в (5.11) $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим

$$\hat{u}(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} D(\alpha) \exp[ikr \cos(\alpha - \varphi)] d\alpha. \quad (5.12)$$

Вычислив этот интеграл методом стационарной фазы, найдем при $r \rightarrow \infty$:

$$\hat{u}(r, \varphi) = \sqrt{2\pi i} D(\varphi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} + \sqrt{-2\pi i} D(\varphi + \pi) \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (5.13)$$

Сопоставляя с (5.3), получим

$$\hat{F}^*(\varphi) = \sqrt{2\pi i} D(\varphi). \quad (5.14)$$

И формула (5.9), и формула (5.14) дают простые способы построения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ по функции $\hat{F}(\varphi)$. Из (5.9) определяются коэффициенты C_n , и поле $\hat{u}(r, \varphi)$ находится в виде ряда (5.8); из (5.14) определяется функция $D(\alpha)$, и поле $\hat{u}(x, y)$ находится в виде интеграла (5.11).

Формулы (5.11), (5.14) и формулы (5.9), (5.8) эквивалентны. Например, разложив $D(\alpha)$ в ряд Фурье и воспользовавшись табличным интегралом

$$\int_0^{2\pi} \exp(ikr \cos \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = 2\pi i^n J_n(kr), \quad (5.15)$$

получим из (5.12), согласно (5.14), тот же ряд (5.8) для $\hat{u}(r, \varphi)$.

4. Требование вещественности $\hat{u}(r, \varphi)$ (с точностью до постоянного множителя) накладывает определенное требование на функцию $\hat{F}(\varphi)$. Из (5.9) следует, что

$$\hat{F}(\varphi + \pi) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i}} \sum C_n^* (-i)^n \cos(n\varphi). \quad (5.16)$$

Если $C_n = |C_n| e^{i\alpha}$ (α — вещественно), то $C_n^* = C_n e^{-2i\alpha}$, и сопоставляя (5.9) и (5.16), получим

$$\hat{F}(\varphi + \pi) = \exp[-2i(\alpha + \pi/4)] \hat{F}^*(\varphi). \quad (5.17)$$

Так как α может быть любым числом, то (5.17) означает, что $\hat{F}(\varphi + \pi)$ и $\hat{F}^*(\varphi)$ могут отличаться только постоянным множителем, модуль которого равен единице.

Этот результат может быть получен и непосредственно из (5.2), (5.3) в предположении, что $\hat{u}(r, \varphi)$ нигде не имеет особенностей, которое было использовано при представлении $\hat{u}(r, \varphi)$ в виде ряда (5.8). Согласно формуле Грина, интеграл, стоящий первым слагаемым в правой части формулы (5.5), для $\hat{u}(r, \varphi)$ и любого поля, тоже удовлетворяющего уравнению (5.2) и не имеющего особенностей, равен нулю. Примем в качестве этого поля плоскую волну, приходящую из направления φ' , $\exp[ikr \cos(\varphi - \varphi')]$. Подставим в этот интеграл асимптотику (5.3) и эту функцию и вычислим его методом стационарной фазы. Получим, что $\Phi(\varphi') = i\hat{F}^*(\varphi' + \pi)$. Если потребовать, чтобы $\hat{u}(r, \varphi)$ было вещественно (так что в (5.17) $\alpha = 0$), то в (5.3) $\Phi(\varphi') = \hat{F}(\varphi)$, и мы вновь получим условие (5.17) — без обращения к асимптотике функций Бесселя.

Справедливо и обратное утверждение: если функция $\hat{F}(\varphi)$ обладает свойством (5.17), то поле $\hat{u}(r, \varphi)$ вещественно (с упомянутым обобщением). Это следует, например, из (5.9). Тождество (5.17) в применении к (5.9) означает, что все

коэффициенты C_n имеют вид $|C_n| e^{i\alpha}$, и тогда из (5.8) следует, что $\hat{u}(r, \varphi) = |\hat{u}(r, \varphi)| e^{i\alpha}$.

Поле $\hat{u}(r, \varphi)$ с асимптотикой (5.3) имеет нулевые линии. Для простоты записи примем $\hat{u}(r, \varphi)$ вещественным. Тогда $\Phi(\varphi) = \hat{F}(\varphi)$, т.е.

$$\hat{u}(r, \varphi) = |\hat{F}(\varphi)| \frac{1}{\sqrt{kr}} \cos [kr - \beta(\varphi)] + O[(kr)^{-3/2}],$$

где $\beta(\varphi)$ — фаза функции $\hat{F}(\varphi)$. Следовательно, во всяком случае при больших kr , поле $\hat{u}(r, \varphi)$ имеет нулевые линии, асимптотически близкие к контурам $r = [\pi/2 + \pi n + \beta(\varphi)]/k$ ($n \gg 1$), т.е. близкие к окружностям $r = \pi n/k$.

Легко проверить, что (5.17) будет выполняться для функции $\hat{F}(\varphi)$ также и в том случае, когда $\hat{u}(r, \varphi)$ и $\hat{F}(\varphi)$ не являются четными функциями от φ , т.е. когда в ряды (5.8) и (5.9) входят также слагаемые с $\sin(n\varphi)$.

5. Выше мы рассматривали поля, созданные распределенным на некоторой линии током, понимая под током разрыв нормальной производной функции u , т.е. $j = [\partial u / \partial N]$ (см. (2.3а)). Можно, как в (2.3б), понимать под j разрыв самой функции u ($j = [u]$). В терминах, соответствующих двумерному варианту векторной электромагнитной задачи, в которой $u \equiv E_z$, согласно (2.4), $[\partial u / \partial N] = j_z$, а $[u] = j_s^{(m)}$, т.е. разрыв нормальной производной есть осевой электрический ток, а разрыв самой функции u есть тангенциальный магнитный ток. Мы будем придерживаться именно этой терминологии, а не другой, которая следует из формулы (2.5), когда $u \equiv H_z$. Задачу, состоящую в определении поля по уравнению (2.2), условию излучения и условию на линии C

$$[u^{(m)}] = j_s^{(m)}, \quad [\partial u^{(m)} / \partial N] = 0, \quad (5.18)$$

мы будем называть задачей о возбуждении поля магнитным током, а само поле будем обозначать через $u^{(m)}(r, \varphi)$.

Введем, аналогично $\hat{u}(r, \varphi)$, вспомогательное поле $u^{(m)}(r, \varphi)$ как поле, удовлетворяющее уравнению (2.2), нигде не имеющее особенностей и на некоторой линии $\hat{C}^{(m)}$ удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial \hat{u}^{(m)}}{\partial N} \Big|_{\hat{C}^{(m)}} = 0. \quad (5.19)$$

На бесконечности $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ имеет асимптотику (5.3), где вместо $\hat{F}(\varphi)$ стоит некоторая функция $\hat{F}^{(m)}(\varphi)$. Линии $\hat{C}^{(m)}$, для которых

существует поле $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ с этими свойствами, мы назовем особыми линиями магнитного типа.

Применяя к $u^{(m)}(r, \varphi)$ и $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ формулу Грина, мы получим формулу, отличающуюся от (5.5) последним слагаемым. Оно будет равно

$$-\int_{\hat{C}^{(m)}} [u^{(m)}] \frac{\partial \hat{u}^{(m)}}{\partial N} ds. \quad (5.20)$$

По определению линии $\hat{C}^{(m)}$ эта величина при любых $f^{(m)}$ равна нулю. Так мы получим для диаграмм, созданных линией $\hat{C}^{(m)}$ (т.е. любыми магнитными токами на особой линии магнитного типа), формулу, аналогичную (3.14),

$$\int_0^{2\pi} f^{(m)}(\varphi) \hat{F}^{(m)*}(\varphi) d\varphi = 0. \quad (5.21)$$

Все результаты этого параграфа, полученные для $f(\varphi)$ и $\hat{C}$, переносятся на $f^{(m)}(\varphi)$ и $\hat{C}^{(m)}$ с заменой $\hat{F}(\varphi)$ на $\hat{F}^{(m)}(\varphi)$ и заменой определения (5.7) на (5.19). Функцию $\hat{F}^{(m)}(\varphi)$ мы будем предполагать также имеющей конечную норму и нормировать ее по (5.4).

6. Ниже (в § 11) будет показано, что существуют такие незамкнутые линии, которые одновременно удовлетворяют условию (5.7) с некоторым полем $\hat{u}(r, \varphi)$ и условию (5.19) с некоторым другим полем $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$. Это означает, что только электрическими или только магнитными токами на таких линиях нельзя создать систему диаграмм, которая может аппроксимировать любую функцию, т.е. что система диаграмм, создаваемых токами одного типа на такой линии, неполна. Однако если на них можно размещать токи обоих типов, то создается полная система диаграмм—при условии, что функции $F(\varphi)$ и $\hat{F}^{(m)}(\varphi)$ линейно независимы.

Для доказательства достаточно показать, что любая функция $F(\varphi)$ может быть представлена в виде

$$F(\varphi) = f(\varphi) + f^{(m)}(\varphi), \quad (5.22)$$

где f и $f^{(m)}$ удовлетворяют соответственно условиям (3.14) и (5.21) и потому аппроксимируемы диаграммами токов $j(s)$ и $j^{(m)}(s)$. Уравнение (5.22) является тождеством, если

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}F(\varphi) + \alpha \hat{F}(\varphi) + \beta \hat{F}^{(m)}(\varphi), \quad (5.23)$$

$$f^{(m)}(\varphi) = \frac{1}{2}F(\varphi) - \alpha \hat{F}(\varphi) - \beta \hat{F}^{(m)}(\varphi).$$

Если принять

$$\alpha = \frac{I + JI^{(m)}}{2(J^2 - 1)}, \quad \beta = -\frac{I^{(m)} + JI}{2(J^2 - 1)}, \quad (5.24)$$

где

$$I = (F, \hat{F}), \quad I^{(m)} = (F, \hat{F}^{(m)}), \quad J = (\hat{F}, \hat{F}^{(m)}),$$

то $(f, \hat{F}) = 0$, $(f^{(m)}, \hat{F}^{(m)}) = 0$, т.е. условия (3.14) и (5.21) будут выполнены. Условие, что нормированные на единицу функции $\hat{F}$ и $\hat{F}^{(m)}$ линейно независимы, означает, что $J^2 - 1 \neq 0$.

В трехмерной векторной иллюстрации (см. § 3) формула (5.22) означает, что любой вектор $F(\varphi)$ может быть представлен суммой двух векторов, лежащих в двух плоскостях, перпендикулярных, соответственно, двум некомпланарным векторам $\hat{F}(\varphi)$ и $\hat{F}^{(m)}(\varphi)$.

Таким образом, любая линия, независимо от того, является ли она или нет особой линией или особой линией магнитного типа, или даже одновременно обладает обоими этими свойствами, может диаграммами токов обоих типов аппроксимировать любую функцию.

§ 6. Примеры особых линий. «Запрещенные» формы антенн

В этом параграфе приведены простые примеры особых линий $\hat{C}$ и соответствующие им функции ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$. Они связаны между собой условиями (5.7) и (5.3) на вспомогательное поле $\hat{u}(r, \varphi)$. Примеры этого параграфа получены элементарным способом — поле $\hat{u}(r, \varphi)$ выбирается в простой форме в какой-либо системе координат, в которой волновое уравнение распадается на два обыкновенных уравнения, а затем рассматриваются нулевые линии решения.

1. Примем

$$\hat{u}(r, \varphi) = J_n(kr) \cos(n\varphi), \quad (6.1)$$

где n — нуль или целое число. При других значениях n функция (6.1) будет иметь разрыв при $\varphi = 0$, т.е. не будет удовлетворять сформулированным выше требованиям на $\hat{u}(r, \varphi)$.

Линия $\hat{C}$, на которой функция (6.1) равна нулю, состоит из счетного числа окружностей

$$r = \mu_{nm}/r, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6.2)$$

где μ_{nm} m -й корень n -й функции Бесселя ($J_n(\mu_{nm}) = 0$), и из $2n$ полупрямых (при $n \geq 1$)

$$\varphi = \frac{\pi}{2n} + m\frac{\pi}{n}, \quad m = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (6.3)$$

Всем этим окружностям и лучам и любой их комбинации соответствует одна и та же функция ортогонального дополнения

$$\hat{F}(\varphi) = \cos(n\varphi), \quad (6.4)$$

где опущен нормировочный коэффициент, получающийся из (3.4).

Из (6.2) и (6.4) следует, например, что зеркальная цилиндрическая антенна с направляющей в виде любой дуги окружности с радиусом (6.2) не сможет аппроксимировать диаграмму, ряд Фурье которой содержит слагаемое $\cos(n\varphi)$. Для любой функции $F(\varphi)$ ближайшей диаграммой (ненормированной), аппроксимируемой токами на таком зеркале, будет диаграмма, получающаяся отбрасыванием в ее ряде Фурье слагаемого $\cos(n\varphi)$. Это, разумеется, согласуется с общей формулой, приведенной в § 3, п. 4. Для $n = 0$ функция $\hat{F}(\varphi) = \text{const}$, и, например, для диаграммы $F(\varphi) = 1 + \cos \varphi$ ближайшей аппроксимируемой диаграммой будет $\cos \varphi$ (см. § 1, п. 1).

Отметим уже сейчас, что если форма зеркала только близка к (6.2), то хотя аппроксимация диаграммы, не ортогональной $\hat{F}(\varphi)$, возможна, но для этого нужны большие токи (см. ниже § 16).

Если на зеркале наводятся не осевые, а азимутальные токи («Н—поляризация»), то на дуге окружности (направляющая цилиндра) испытывает разрыв не $\partial u / \partial N$, а само поле $u = H_z$. По терминологии § 5, п.3, это означает, что диаграммы создаются магнитными токами (см. замечание в конце § 3, п. 2). Особыми линиями, согласно (5.19), будут окружности $r = v_{nm}/k$, $m = 1, 2, \dots$, где $J_n'(v_{nm}) = 0$, и прямые, на которых $\sin(n\varphi) = 0$, т.е. лучи $\varphi = m\pi/n$, $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

Невозможность электрическими токами на любом из лучей (6.3) приблизить диаграмму $\cos(n\varphi)$ ($n \geq 1$) является следствием очевидного обстоятельства — всякая диаграмма, созданная электрическим током на отрезке прямой, симметрична относительно этой прямой. Поэтому диаграммами токов на прямой могут быть аппроксимированы только диаграммы, симметричные относительно нее. Для прямой линии всякая несимметричная функция есть ортогональное дополнение к системе ее диаграмм. Формула (6.4) есть просто запись этого факта. Для того чтобы это показать, достаточно ввести угол $\psi = \varphi - (\frac{\pi}{2n} + m \frac{\pi}{n})$, т.е. угол, отсчитываемый от прямой (6.3). Функция $\cos(n\varphi)$, с точностью до знака, равна $\sin(n\psi)$, т.е. есть нечетная функция угла ψ .

Вообще соотношение между особой линией и функцией ортогонального дополнения можно рассматривать как обобщение основанного на тривиальном *соображении о симметрии* соотношения между отрезком прямой линии и любой нечетной функцией. Нетривиально, по существу,

лишь то, что особых линий «очень много» — в § 9 мы поясним, что здесь имеется в виду.

2. Две прямые из системы (6.3), соответствующие различным значениям m (m' и m''), образуют угол

$$\alpha = \pi \frac{t}{n}, \quad (6.5)$$

где $t = m' - m''$. Будем рассматривать пересечение прямых, а не лучей, так что достаточно считать $\alpha \leq \pi$, а t придавать $n - 1$ значений ($t = 1, 2, \dots, n - 1$). Согласно предыдущему, ортогональное дополнение (6.4) для этой линии $\hat{C}$ можно записать в виде $\sin(n\psi)$, где угол ψ отсчитывается от одной из сторон угла. Разумеется, эта функция может быть записана и в виде $\sin(n\bar{\psi})$, где угол $\bar{\psi}$ отсчитывается от второй стороны угла. Так как $\psi = \bar{\psi} + \alpha$, то обе функции, согласно (6.5), равны (с точностью до знака).

Если две прямые пересекаются под углом, который не удовлетворяет условию (6.5), т.е. не является рациональной частью π , то эта линия не является особой. Полная система токов на обеих сторонах такого угла создает полную систему диаграмм. Этот результат (принципиальное различие между углом типа (6.5) и углом, не являющимся рациональной частью π) выглядит нефизичным, так как рациональные числа образуют плотное множество, любое число может быть с произвольной точностью представлено рациональной дробью.

Парадокс этот кажущийся. Чем больше число n в (6.4), тем меньше, вообще говоря, произведение $b = (F, \hat{F})$ (см. (3.17)) и тем меньше $|b|^2$ — квадрат расстояния в метрике L_2 (см. (3.20a)) между любой функцией $F(\varphi)$ и ближайшей аппроксимируемой. При большом n в (6.4) только очень изрезанные функции $F(\varphi)$ (точнее — функции, в ряде Фурье которых велик коэффициент при $\cos(n\varphi)$ или $\sin(n\varphi)$, $n \gg 1$) будут практически неаппроксимируемы диаграммами токов на сторонах угла, имеющего вид (6.4). Угол, для которого отношение α/π иррационально, и угол, для которого α/π рационально, т.е. имеет вид t/n , но с большим n , в проблеме аппроксимируемости практически не различаются. Для первого любая диаграмма аппроксимируема, для второго — количественная характеристика неаппроксимируемости (величина $|b|^2$) очень мала. В § 16 мы увидим, что, кроме того, если α/π иррационально, но близко к рациональному с малым n , то аппроксимируемость достигается лишь при очень большом токе.

Однако для небольших n ($n = 1, 2, 3, 4$) из предыдущих рассуждений следуют некоторые ограничения для рупорных антенн. Эти ограничения имеют такой же характер, как и для антенн в форме части кругового цилиндра. Если стенки рупора образуют особую линию, для которой функция ортогонального

дополнения имеет вид (6.4) при небольшом n , то токами на рупоре нельзя аппроксимировать многие диаграммы. Поэтому при конструировании секториального рупора надо избегать углов раскрыва, равных или близких к α , удовлетворяющим (6.5) при небольших n . Нежелательны следующие углы:

$$\alpha = 90^\circ (n = 2); \alpha = 60^\circ, 120^\circ (n = 3); \alpha = 45^\circ, 135^\circ (n = 4). \quad (6.6)$$

Двум пересекающимся под углом α (см. (6.5)) прямым соответствует не только функция $F(\psi) = \sin(n\psi)/\sqrt{\pi}$, но и весь бесконечный ряд функций

$$\hat{F}_p(\psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(pn\psi), \quad p = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Действительно, при любом p (а не только при $p = 1$) эти функции нечетны как относительно первой прямой ($\psi = 0$), так и относительно второй прямой $\psi = \alpha$. Это опять легко проверить, введя угол $\bar{\psi} = \psi - \alpha$, отсчитываемый от этой второй прямой. Впрочем, можно по общему методу ввести вспомогательное поле:

$$\hat{u}_p(r, \psi) = J_{pn}(kr) \sin(pn\psi) \quad (6.8)$$

и убедиться, что на линии, состоящей из прямых $\psi = 0$ и $\psi = \alpha$, где α дано в (6.5), это поле равно нулю, т.е. эта совокупность двух прямых действительно является особой линией. Существование бесконечного числа функций ортогонального дополнения (6.8) будет нами использовано в следующем параграфе.

3. В эллиптической системе координат

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cdot \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \cdot \sin \eta \quad (6.9)$$

линии $\xi = \text{const}$ — эллипсы с полуосями $c \operatorname{ch} \xi$ и $c \operatorname{sh} \xi$ ($2c$ — расстояние между фокусами) и эксцентриситетом $e = 1/\operatorname{ch} \xi$; линии $\eta = \text{const}$ — гиперболы с теми же фокусами и углом между асимптотами $\alpha = 2\eta$. При $(x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ η переходит в цилиндрический угол φ , а $c \operatorname{sh} \xi \approx c \operatorname{sh} \xi$ — в цилиндрический радиус r .

Функцию $\hat{u}$ в координатах ξ, η выберем в таком же простейшем виде, как в (6.1), т.е. как произведение функций от ξ и η

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \Psi_n(\xi) \Phi_n(\eta), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.10)$$

где $\Phi_n(\eta)$ — «азимутальная» функция Матье, а $\Psi_n(\xi)$ — «радиальная» функция Матье. Функция $\Phi_n(\eta)$ — аналог функций $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$, а функция $\Psi_n(\xi)$ — аналог функции Бесселя $J_n(kr)$ и переходит в нее при $\xi \rightarrow \infty$.

Эллипс $\xi = \text{const}$ будет особой линией $\hat{C}$, если для какого-либо n ($n = 0, 1, \dots$) имеет место равенство $\Psi_n(\xi) = 0$, и ей соответствует

функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi) = \Phi_n(\varphi)$. Гипербола $\eta = \text{const}$ будет особой линией, если $\Phi_n(\eta) = 0$, ей соответствует та же функция $\Phi_n(\varphi)$.

Обе функции Матье зависят от параметра $q = (kc/2)^2$, содержащего частоту. Аналог функции $\Psi_n(\xi)$ (функция Бесселя) также зависит от частоты, но аналог функции $\Phi_n(\eta)$ (тригонометрическая функция) от частоты не зависит. Поэтому гипербола, как и эллипс (и окружность, в частности) может быть особой линией только для дискретных частот, хотя она не замкнутый контур и не может быть резонансной. В этом ее принципиальное отличие от двух пересекающихся прямых. Свойства линии из двух пересекающихся прямых зависят только от угла между ними—это есть очевидное следствие того, что в этой линии нет элемента размерности длины.

«Нежелательные» параметры эллиптической или гиперболической антенны (т.е. цилиндра с направляющей в виде эллипса или гиперболы) зависят, таким образом, от частоты. Или, в другой формулировке—для каждой такой антенны существуют «нежелательные» частоты, на которых поверхность антенны является особой. Приведем несколько численных примеров.

Пусть параметр q равен 3,75. При этом значении q первый корень «радиальной» функции Матье для $n = 0$ есть $\xi = 0,46$ [19]. Этому значению соответствует эксцентриситет $e = 0,91$. Эллиптическое зеркало с таким эксцентриситетом будет на длине волны, равной 0,82 расстояния между фокусами (что и соответствует $q = 3,75$, т.е. $kc = 3,86$), особой поверхностью, а функцией ортогонального дополнения будет «азимутальная» функция Матье с $n = 0$ и с этим же значением q . Если принять $q = 0,75$ ($kc = 1,73$), то первый корень (для $n = 0$) будет $\xi = 1,04$, чему соответствует эксцентриситет $e = 0,63$. Эллиптическое зеркало с таким эксцентриситетом становится особой поверхностью на длине волны, равной 1,8 расстояния между фокусами.

Гиперболический рупор удобно характеризовать углом α между асимптотами. Уравнение гиперболы есть $\eta = \alpha/2$. Гипербола будет особой, если $\alpha/2$ будет корнем «азимутальной» функции Матье. Эти «нежелательные» значения α зависят от параметра q , т.е. от частоты. Например, при $q = 1$ ($kc = 2$) и $q = 10$ ($kc = 6,3$) этими значениями α будут

$$\alpha = 106^\circ, 66^\circ, 124^\circ, 94^\circ, \dots (q = 1),$$

$$\alpha = 144^\circ, 116^\circ, 146^\circ, 118^\circ, \dots (q = 10). \quad (6.11)$$

Четырем приведенным значениям α соответствуют четыре различные функции $\hat{F}(\varphi)$, равные «азимутальной» функции Матье с соответствующими значениями q , нескольким первым значениям n и двум возможным четностям. В обычных обозначениях (см.,

например, [19, с. 536]) этими функциями (ненормированными) являются $se_2(q, \varphi)$, $se_3(q, \varphi)$, $se_3(q, \varphi)$ и $se_4(q, \varphi)$.

4. Запишем теперь $\hat{u}$ в декартовой системе координат. Мы начнем с простейшего случая, когда волновое уравнение решено методом разделения переменных, так что

$$\hat{u}(x, y) = \cos(kx \cos \beta) \cos(ky \sin \beta), \quad (6.12)$$

где β — некоторый фиксированный параметр; при любом β функция (6.12) удовлетворяет волновому уравнению.

Линиями, на которых $\hat{u}(x, y)$ обращается в нуль, является совокупность прямых — прямоугольная сетка

$$x = (\pi/2 + n\pi)/(k \cos \beta), \quad y = (\pi/2 + m\pi)/(k \sin \beta), \quad (6.13)$$

где m и n принимают все целые значения от $-\infty$ до ∞ и значение нуль. Каждая ячейка сетки есть прямоугольник со сторонами

$$a = \pi/(k \cos \beta), \quad b = \pi/(k \sin \beta). \quad (6.14)$$

Для того чтобы найти $\hat{F}(\varphi)$, надо вычислить по (5.3) асимптотику при $r \rightarrow \infty$ функции $\hat{u}$, которая является суммой четырех плоских волн типа $\exp[ik(x \cos \beta + y \sin \beta)]$. В цилиндрической системе координат эта волна имеет вид $\exp[ikr \cos(\varphi - \beta)]$. При умножении на любую функцию $F(\varphi)$ и интегрировании по φ , после перехода к пределу $r \rightarrow \infty$, вычисляя интеграл методом стационарной фазы, получим, как известно [ср. (5.13)], следующее выражение:

$$\begin{aligned} \lim_{kr \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \exp[ikr \cos(\varphi - \beta)] d\varphi = \\ = \sqrt{2\pi i} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} F(\beta) + \sqrt{-2\pi i} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} F(\beta + \pi). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Эту формулу можно записать в следующем символическом виде

$$\begin{aligned} \lim_{kr \rightarrow \infty} \exp[ikr \cos(\varphi - \beta)] = \\ = \sqrt{2\pi i} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \delta(\varphi - \beta) + \sqrt{-2\pi i} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \delta(\varphi - \beta - \pi). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Из (6.15) следует, что «незоммерфельдовское» слагаемое в асимптотике поля $\exp[ikr \cos(\varphi - \beta)]$ есть $\sqrt{2\pi i} \delta(\varphi - \beta) e^{ikr}/\sqrt{kr}$, т.е. что слагаемое в $F(\varphi)$, соответствующее этому полю (плоской волне, приходящей из направления $\varphi = \beta$), пропорционально обобщенной функции $\delta(\varphi - \beta)$. Так как (6.12) есть поле, получающееся интерференцией четырех плоских волн, прихо-

дящих из направлений $\varphi = \pm\beta$, $\varphi = \pm\beta + \pi$, то полю (6.12) соответствует «функция ортогонального дополнения»

$$\hat{F}(\varphi) = \delta(\varphi - \beta) + \delta(\varphi + \beta) + \delta(\varphi - \beta + \pi) + \delta(\varphi + \beta - \pi). \quad (6.17)$$

Мы поставили кавычки, так как функция (6.17) не интегрируема с квадратом, так что $\hat{u}(x, y)$ не удовлетворяет одному из условий, которому должно удовлетворять вспомогательное поле, чтобы ее нулевые линии были особыми линиями.

Резонансный прямоугольник, т.е. прямоугольник, стороны которого могут быть представлены в форме (6.14), при любом значении параметра β не является особой линией. Токами на нем может быть создана диаграмма, сколь угодно близкая к любой нормируемой функции $\hat{F}(\varphi)$ (см. замечание в конце параграфа).

То же относится к двум параллельным прямым, находящимся друг от друга на расстоянии b (т.е. к совокупности двух линий $y = b/2$ и $y = -b/2$), если b больше половины длины волны ($kb > \pi$). Тогда эти линии могут рассматриваться как нулевые линии поля (6.12) при $\sin \beta = \pi/kb$, точнее — как результат интерференции двух плоских волн, приходящих из направлений $\varphi = \beta$ и $\varphi = \beta + \pi$. Асимптотика этого поля содержит, согласно (6.16), δ -функции, так что соответствующая функция $\hat{F}(\varphi)$ не нормируема. Вновь возникает кажущийся парадокс, аналогичный тому, который мы рассматривали в связи с формулой (6.5). Две прямые, пересекающиеся под малым рациональным углом, образуют особую линию, а если этот угол — нулевой (параллельные прямые, не слишком близкие друг к другу), то они не образуют особой линии. Малая деформация линии может сделать ее неособой — но, как мы увидим в § 16, аппроксимация ею произвольной диаграммы потребует больших токов.

Если расстояние между прямыми меньше половины длины волны ($kb < \pi$), то не существует не возрастающего неограничено и всюду аналитического решения волнового уравнения, равного нулю при $y = \pm b/2$, т.е. две близкие параллельные прямые не образуют особую линию.

Хотя функция (6.17) не является функцией ортогонального дополнения, но любая диаграмма, создаваемая токами на резонансном прямоугольнике со сторонами (6.14), будет удовлетворять условию $(f, \hat{F}) = 0$, т.е. для любой диаграммы будет справедливо условие:

$$f(\beta) + f(\pi - \beta) + f(-\beta) + f(-\pi + \beta) = 0. \quad (6.18)$$

Из $(f, \hat{F}) = 0$ однако не следует неаппроксимируемость всякой функции, не удовлетворяющей требованию (6.18); в рассуждении, приведенном в § 3, нельзя перейти от (3.18) к (3.20a).

Как и для примера с двумя пересекающимися прямыми, условие (6.18) может быть получено без привлечения общей

теории, путем несложного специального построения, только из соображения о симметрии диаграмм, созданных токами на отрезке прямой. Покажем сначала, что условия (6.18) выполняются для диаграмм тока, текущего по одной стороне прямоугольника, например по стороне $y = b/2$. Обозначим эту диаграмму через $f_1(\varphi)$. Если этот ток перенести на линию $y = 0$, то он создаст

диаграмму $f_1(\varphi) \exp\left(-\frac{ikb}{2} \sin \varphi\right)$. Эта диаграмма должна быть симметрична относительно угла φ : $f_1(\varphi) \exp(-\frac{1}{2} ikb \sin(\varphi)) = = f_1(-\varphi) \exp(\frac{1}{2} ikb \sin(\varphi))$, или, согласно (6.14),

$$f_1(-\varphi) = f_1(\varphi) \exp\left(-i\pi \frac{\sin \varphi}{\sin \beta}\right). \quad (6.19)$$

Для функции $f_1(\varphi)$, подчиненной условию (6.19), равенство (6.18), как легко проверить, выполняется. Повторяя это рассуждение для диаграмм токов на сторонах $y = -b/2$ и $x = \pm a/2$, мы покажем, что оно выполняется для диаграмм, созданных токами на каждой из четырех сторон прямоугольника, а следовательно и для суммарной диаграммы, созданной любыми токами на всех сторонах резонансного прямоугольника.

5. Если поле собственного колебания внутри какого-либо резонансного контура выражается явной формулой, сохраняющей смысл всюду вне контура, то эта же формула описывает, очевидно, поле $\hat{u}(r, \varphi)$, в котором контур является нулевой линией. Эта простая мысль, которую мы используем для более сложных задач в § 12, позволяет в некоторых случаях найти особые линии и в форме сетки, состоящей из трех систем параллельных прямых (а не из двух взаимноперпендикулярных систем, как в п. 4). Мы воспользуемся сначала решением внутренней задачи Дирихле для равностороннего треугольника [22]. Простейшему решению этой задачи можно придать вид

$$\hat{u}(x, y) = \sin(kx) - \sin[k(x - y\sqrt{3})/2] \sin[k(x + y\sqrt{3})/2]. \quad (6.20)$$

Легко непосредственно проверить, что это поле удовлетворяет волновому уравнению и обращается в нуль на линиях $x = \pi n/k$, $x = y\sqrt{3} + 2\pi m/k$, $x = -y\sqrt{3} + 2\pi p/k$ ($n, m, p = 0, 1, 2, \dots$), т.е. на сторонах сетки, образованной равносторонними треугольниками со сторонами, равными $4\pi/(k\sqrt{3})$.

Однако, как и для прямоугольной сетки, эта система прямых не является особой линией. Токами на трех сторонах равностороннего треугольника можно создать диаграмму, аппроксимирующую любую функцию. Функция, играющая роль «функции ортогонального дополнения» для поля (6.20), содержит δ -функции, т.е. имеет бесконечную норму. Поле (6.20) пропорционально сумме шести плоских волн, приходящих, соответственно, из направлений $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \pm\pi/3$, $\varphi = \pm 4\pi/3$. Легко проверить, пользуясь

алгоритмом (6.16), что «незоммерфельдовская» часть асимптотики поля $\hat{u}(x, y)$ равна

$$\begin{aligned} \hat{F}(\varphi) = & \delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi) + \delta(\varphi - \pi/3) - \\ & - \delta(\varphi - 4\pi/3) + \delta(\varphi + \pi/3) - \delta(\varphi + 4\pi/3). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Для диаграммы $f(\varphi)$, созданной любыми токами на сторонах этой сетки, и, в частности, на сторонах равностороннего треугольника, должно выполняться условие $(\hat{f}, F) = 0$, т.е.

$$f(0) - f(\pi) + f(\pi/3) - f(4\pi/3) + f(-\pi/3) - f(-4\pi/3) = 0. \quad (6.22)$$

Вероятно, и это равенство, как и (6.18), может быть получено непосредственно из элементарного свойства симметрии диаграммы тока на отрезке прямой, а не из требования $(\hat{f}, F) = 0$.

В форме, похожей на (6.20), записывается поле $\hat{u}^{(m)}$, для которого на линиях той же сетки (и, в частности, на сторонах равностороннего треугольника) нормальная производная равна нулю. Это поле является решением задачи Неймана для треугольника. Для него тоже можно найти «функцию ортогонального дополнения», имеющую примерно такой же вид, как и (6.22). И диаграммы, созданные любыми магнитными токами на сторонах равностороннего треугольника, удовлетворяют условию типа (6.23).

Задачи Дирихле и Неймана решены для треугольников еще трех видов — с углами $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ и $(120^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$ [22]. Решения имеют вид, подобный (6.20). Для всех шести случаев (граничные условия Дирихле или Неймана, три формы треугольников) можно осуществить ту же программу, которую мы реализовали для решения (6.20), и, что более всего интересно, получить условия типа (6.22).

Ни один из этих треугольников не является линией $\hat{C}$ или $\hat{C}^{(m)}$ — так же, как равносторонний треугольник и прямоугольник. Однако в гл. III, исследуя ближние поля, мы естественно придём к расширению понятия особой линии. В этом расширенном смысле все эти резонансные контуры будут особыми.

§ 7. Амплитудная неаппроксимируемость

1. Запишем комплексную функцию $F(\varphi)$ в виде

$$F(\varphi) = \Phi(\varphi) \exp[-i\Psi(\varphi)], \quad (7.1)$$

где $\Phi(\varphi)$ — амплитуда, $\Psi(\varphi)$ — фаза функции $F(\varphi)$; $\Phi(\varphi) \geq 0$. Пусть в функции $F(\varphi)$ задана только ее амплитуда, а фаза может быть выбрана произвольно. Вопрос о возможности в этом случае аппроксимировать функцию $F(\varphi)$ токами на особой линии C мы назвали в § 3 проблемой амплитудной аппроксимируемости. Как мы убедимся, в этом вопросе основным является структура пространства функций ортогонального дополнения.

В этой связи надо сделать замечание, еще раз подчеркивающее различие между аппроксимируемостью диаграммы и ее реализуемостью. Реализуемость диаграммы определяется ее аналитическими свойствами; эти свойства можно сформулировать, например, как скорость убывания с ростом номера ее коэффициентов Фурье (см. (3.12)). Исходя из этих свойств, можно в принципе восстановить фазу диаграммы по ее амплитудной диаграмме. Поэтому в проблеме реализуемости не существует вопроса об амплитудной реализуемости. Напомним, что восстановление фазы—процесс некорректный: малое изменение амплитуды может привести к большому изменению фазы.

В проблеме аппроксимируемости ситуация иная. Аппроксимируемы, вообще говоря, любые диаграммы, даже с П-образной амплитудной диаграммой. Ограничение на аппроксимируемость полями токов, распределенных на особой линии (см. ниже (7.3)), носит «грубый» характер. Даже если задана очень гладкая амплитудная диаграмма (например, как ниже в (7.17)), приписывание к ней фазы, полученной из требования реализуемости, может привести к диаграмме, неаппроксимируемой данной особой линией, а выбор фазы по другому алгоритму может привести к диаграмме хотя и нереализуемой, но аппроксимируемой.

Если существует только одна функция ортогонального дополнения, то необходимым и достаточным условием аппроксимируемости $F(\varphi)$ линией $\hat{C}$ является, как указывалось, выполнение условия $b = 0$, где b дано в (3.17). Это условие при любой заданной амплитуде $\Phi(\varphi)$ может быть обеспечено выбором фазы $\Psi(\varphi)$.

Например, выбрав некоторую фазу $\Psi_0(\varphi)$, можно найти число φ_0 из равенства

$$\left| \int_0^{\varphi_0} F(\varphi) \hat{F}^*(\varphi) d\varphi \right| = \left| \int_{\varphi_0}^{2\pi} F(\varphi) \hat{F}^*(\varphi) d\varphi \right|, \quad (7.2)$$

а затем в интервале $0 < \varphi < \varphi_0$ заменить $\Psi_0(\varphi)$ на $\Psi_0(\varphi) - \alpha$, где α определено из условия, что $-e^{-i\alpha}$ равно отношению интеграла, стоящего в левой части равенства (7.2), к интегралу в правой части. Такое число φ_0 всегда есть при $b \neq 0$. Функция $F(\varphi)$ с такой разрывной фазой будет удовлетворять требованию (7.2), т.е. будет аппроксимируема линией $\hat{C}$. Разумеется, можно подобрать и такую фазу, чтобы она изменялась вблизи $\varphi = \varphi_0$ не скачкообразно, а непрерывно.

Если данной особой линией соответствует не одна, а несколько функций $\hat{F}_p(\varphi)$, $p = 1, 2, \dots, P$, то ситуация усложняется, но не

принципиально. Для аппроксимации какой-либо функции $F(\varphi)$ последняя должна удовлетворять условиям:

$$b_p = \int_0^{2\pi} F(\varphi) \hat{F}_p^*(\varphi) d\varphi = 0, \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad (7.3)$$

Как и при $P = 1$, можно подобрать фазу $\Psi(\varphi)$ таким образом, что будет выполняться условие (7.3). При этом чем больше P , тем более изрезанной становится фаза $\Psi(\varphi)$, а следовательно и функция $F(\varphi)$. Ряд Фурье функции $F(\varphi)$ будет убывать медленно, а это, как мы убедимся в § 14, приводит к тому, что аппроксимация ее возможна только большими токами. Однако формально неаппроксимируемости нет — при конечном P любая функция $F(\varphi)$ аппроксимируема.

Если число функций $F_p(\varphi)$, которым должна быть ортогональна функция $F(\varphi)$ при заданной ее амплитуде, бесконечно, то возможны два случая. Может оказаться, что и при этом некоторым выбором фазы $\Psi(\varphi)$ можно обеспечить аппроксимируемость функции $F(\varphi)$ диаграммами токов на особой линии $\hat{C}$. Это означает, что имеет место амплитудная аппроксимируемость. Но возможна и амплитудная неаппроксимируемость, когда никаким выбором фазы $\Psi(\varphi)$ нельзя сделать аппроксимируемой функцию с амплитудой $\Phi(\varphi)$. Мы убедимся в том, что в зависимости от заданной функции $\Phi(\varphi)$ возможны оба случая.

Если линия $\hat{C}$ состоит из одной прямой, то ситуация элементарна. Все реализуемые диаграммы являются четными функциями угла φ , отсчитываемого от этой прямой. Все функции, нечетные относительно φ , являются функциями ортогонального дополнения. Полная система линейно независимых функций $\hat{F}_p(\varphi)$ может быть выбрана, например, в виде $F_p(\varphi) = \sin(p\varphi)/\sqrt{\pi}$, $p = 1, 2, \dots$. Тогда b_p — коэффициенты при синусах в ряде Фурье функции $F(\varphi)$. Очевидно, что если $\Phi(\varphi)$ не есть четная функция, то никаким выбором фазы $\Psi(\varphi)$ нельзя сделать функцию $F(\varphi)$ четной, т.е. будет иметь место амплитудная неаппроксимируемость.

2. Для линии $\hat{C}$, состоящей из двух прямых, пересекающихся под углом α , для которого α/π — рациональная дробь, вопрос об амплитудной аппроксимируемости более содержателен. Мы покажем, что для такой особой линии амплитудная аппроксимируемость зависит от выполнения некоторого условия на функцию $\Phi(\varphi)$.

В этом параграфе мы расположим $\hat{C}$ несимметрично относительно оси $\varphi = 0$; прямые будут иметь уравнения $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$. Угол, обозначенный в § 6 через ψ , мы в этом параграфе

обозначим через φ . Полная система функций $\hat{F}_p(\varphi)$ будет иметь вид (6.7)

$$\hat{F}_p(\varphi) = \sin(pn\varphi)/\sqrt{\pi}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

Эта система (7.4) представляет собой счетное множество, как и функции ортогонального дополнения $\hat{F}_p(\varphi) = \sin(p\varphi)/\sqrt{\pi}$ для одной прямой $\varphi = 0$, но при $n > 1$ на любом конечном участке угловых частот функций (7.4) меньше (они расположены реже). Поэтому условие на $\Phi(\varphi)$, необходимое для амплитудной аппроксимации, для двух пересекающихся прямых оказывается мягче, чем для одной прямой, и притом тем мягче, чем больше число n в (6.5).

Условие аппроксимируемости состоит в выполнении бесконечной системы равенств

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi') \sin(pn\varphi') d\varphi' = 0, \quad p = 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

Покажем, что это условие эквивалентно некоторому функциональному соотношению для $F(\varphi)$. Умножим (7.5) на $\sin(pn\varphi)$ и просуммируем по всем p . Переставив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi') \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sin(pn\varphi) \sin(pn\varphi') \right] d\varphi' = 0. \quad (7.6)$$

Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(pn\varphi) \sin(pn\varphi') &= \\ &= \frac{\pi}{2n} \sum_{s=0}^{n-1} [\delta(\varphi - \varphi' + 2s\alpha) - \delta(\varphi + \varphi' - 2s\alpha)], \end{aligned} \quad (7.7)$$

где α и n связаны формулой (6.5), так что $2\alpha n$ пропорционально 2π ; предполагается, что δ -функции будут действовать на 2π -периодические функции. Эту формулу мы докажем в конце пункта. Подставляя (7.7) в (7.6), получим из (7.5) искомое функциональное соотношение

$$\sum_{s=0}^{n-1} [F(\varphi - 2s\alpha) - F(2s\alpha - \varphi)] \equiv 0. \quad (7.8)$$

Из (7.8), в свою очередь, следует (7.5). Для доказательства достаточно умножить (7.8) на $\sin(pn\varphi)$ и проинтегрировать по

φ от 0 до 2π . Учитывая вновь, что величина $2\alpha n$ пропорциональна 2π и что и $\sin(pn\varphi)$, и $F(\varphi)$ 2π -периодические функции, мы получим, что результат интегрирования равен $2n \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin(pn\varphi) d\varphi$, т.е. получим условие (7.5)

для всех p .

Легко и непосредственно показать, что для любой диаграммы $f(\varphi)$, созданной токами на сторонах угла, условие (7.8) выполняется, т.е. что

$$\sum_{s=0}^{n-1} [f(\varphi - 2s\alpha) - f(2s\alpha - \varphi)] = 0. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) может рассматриваться как обобщение свойства симметрии диаграмм, создаваемых токами на прямой, и она может быть получена из этого свойства. Применим для этого прием, уже использованный нами при непосредственном выводе формулы (6.18). Введем диаграммы $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$, созданные токами на прямых $\varphi = 0, \pi$ и $\varphi = \alpha, \alpha + \pi$. Эти диаграммы симметричны, соответственно, относительно этих прямых, т.е.

$$f_1(\varphi) - f_1(-\varphi) = 0, \quad f_2(\varphi) - f_2(2\alpha - \varphi) = 0. \quad (7.10)$$

Подставим в (7.10) вместо φ углы $\varphi - 2s\alpha$, $s = 0, 1, \dots, n-1$, и сложим $2n$ получившихся уравнения. Полученная сумма будет отличаться от левой части (7.9) для $f(\varphi) = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)$ отсутствием слагаемого $f_2(-\varphi)$ и лишним слагаемым $f_2(2n\alpha - \varphi)$. Но так как аргументы в них отличаются на целое число 2π , то эти слагаемые совпадают, и мы действительно получим (7.9) как следствие (7.10).

Так как из (7.9) следует $(f, \hat{F}_p) = 0$ для всех p (так же, как из (7.8) следует (7.5)), то (7.10) имеет тот же смысл, что и свойство диаграмм $(f, F_p) = 0$.

Заметим, что так же, как из (7.5) следует (7.6), так же из (7.3) следует, что необходимым и достаточным условием аппроксимируемости какой-либо функции $F(\varphi)$ диаграммами токов на особой линии, которой соответствуют P функций ортогонального дополнения, является удовлетворение функции $F(\varphi)$ функциональному тождеству

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi') \mathcal{F}(\varphi, \varphi') d\varphi' \equiv 0, \quad (7.11)$$

где

$$\mathcal{F}(\varphi, \varphi') = \sum_{p=1}^P \hat{F}_p(\varphi) \hat{F}_p^*(\varphi'). \quad (7.12)$$

Только если $P = \infty$, то $\mathcal{F}(\varphi, \varphi')$ имеет вид, аналогичный (7.7), и тождество (7.11) может принять форму связи между значениями $F(\varphi)$ для нескольких φ , как в (7.8).

Докажем тождество (7.7), справедливое в предположениях, сформулированных после (7.7). Обе стороны — нечетные периодические функции от φ , их ряды Фурье не содержат косинусов, и достаточно показать, что при разложении их в ряды Фурье коэффициенты при $\sin(l\varphi)$ ($l = 1, 2, \dots$) с обеих сторон совпадают. Коэффициент Фурье левой функции равен нулю, если l не имеет вида: $l = pn$ ($p = 1, 2, \dots$), и равен $\pi \sin(lp')$, если l может быть представлен в таком виде. Коэффициент при $\sin(l\varphi)$ в ряде Фурье

правой части (7.7) равен $\frac{\pi}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \sin[l(\varphi' - 2s\alpha)]$. Если $l = pn$, то

величина $2s\alpha$ пропорциональна 2π , и сумма равна $\pi \sin(lp')$, т.е. коэффициенты Фурье обеих сторон с такими номерами ($l = pn$) равны. Если $l \neq pn$ ни для какого p , то $\sin(l\alpha) \neq 0$, и тогда эта сумма равна $\sin[l\varphi' - (n-1)\alpha] \sin(n\alpha) / \sin(\alpha)$, согласно формуле для суммы синусов [20; 1.341.1]. Так как при всех l $\sin(n\alpha) = 0$, то и при $l \neq pn$ коэффициенты Фурье обеих сторон тождества (7.7) совпадают.

3. Условие аппроксимируемости функции $F(\varphi)$ в форме (7.8) позволяет сформулировать условие амплитудной аппроксимируемости, т.е. условие на функцию $\Phi(\varphi)$. Условие (7.8) означает, что $2n$ комплексных чисел $F(\varphi - 2s\alpha)$, $F(2s\alpha - \varphi)$, $s = 0, 1, \dots, n-1$ должны в сумме давать нуль для всех φ . Представим себе эти числа в виде векторов на комплексной плоскости. Длины всех этих векторов равны $2n$ неотрицательным числам:

$$\Phi(\varphi - 2s\alpha), \Phi(2s\alpha - \varphi), s = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.13a)$$

Эти длины заданы, а углы, которые эти векторы составляют с какой-либо линией $\Psi = 0$ на комплексной плоскости, т.е. фазы величин $F(\varphi - 2s\alpha)$, $F(2s\alpha - \varphi)$ — произвольны. Эти векторы можно располагать для каждого φ произвольным образом, но так чтобы из них можно было составить замкнутый многоугольник. Задача эта, разумеется, не однозначна, такой «шарнирный» $2n$ -угольник можно деформировать, так что значение фазы Ψ в (7.1) от аргументов $\varphi - 2s\alpha$, $2s\alpha - \varphi$ можно выбирать многими способами. При этом очевидным образом формулируется условие, необходимое и достаточное, для того чтобы из $2n$ векторов можно было составить замкнутую фигуру. Для этого, т.е. для амплитудной аппроксимируемости, функция $\Phi(\varphi)$ должна обладать следу-

ющим свойством: для всех φ наибольшее из чисел (7.13а) должно быть не больше суммы остальных $2n - 1$ чисел.

4. Прежде чем привести примеры функции $\Phi(\varphi)$, для которой замкнутый $2n$ -угольник построить можно (амплитудная аппроксимируемость), и функции, для которой этого сделать нельзя (амплитудная неаппроксимируемость), оценим качественно вероятность каждого из этих случаев. Разумеется, это весьма условная оценка, зависящая от выбранной вероятностной модели. Единственный общий вывод, который из нее можно сделать, состоит в том, что, как и следовало ожидать, амплитудная аппроксимируемость тем более вероятна, чем больше n в (6.5), и что эта вероятность очень быстро приближается к единице с ростом n .

Предлагается следующая модель: заданы $2n$ неотрицательных числа. Отношение $2n - 1$ этих чисел к наибольшему из них обозначим через x_i ($i = 1, 2, \dots, N$; $N = 2n - 1$); по определению, для всех i $0 \leq x_i \leq 1$. Предположим, что x_i — случайные числа, с равномерной плотностью распределения вероятности на интервале от нуля до единицы. Мы ищем вероятность неравенства $\sum_{i=1}^N x_i \leq 1$ (вероятность амплитудной неаппроксимируемости).

Представим себе N -мерный куб со стороной, равной единице, т.е. с единичным объемом. Вероятность этого неравенства равна объему «пирамиды»

$$V_N = \int \dots \int dx_1 \dots dx_N, \quad (7.14)$$

где N -кратный интеграл взят от $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots$, $x_N = 0$ до N -мерной плоскости $x_1 + x_2 + \dots + x_N = 1$. Интеграл (7.14) можно записать в виде

$$V_N = \int_0^1 dx_N \int \dots \int dx_1 \dots dx_{N-1}, \quad (7.15)$$

где внутренний интеграл взят от $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots$, $x_N = 0$ до $(N - 1)$ -мерной плоскости $x_1 + \dots + x_{N-1} = 1 - x_N$. Введем во внутреннем интеграле переменные $y_i = x_i / (1 - x_N)$. Тогда $dx_1 \dots dx_{N-1} = (1 - x_N)^{N-1} dy_1 \dots dy_{N-1}$; верхний предел в нем есть $N - 1$ -мерная плоскость $y_1 + \dots + y_{N-1} = 1$. Согласно (7.14) внутренний интеграл в (7.15) есть $(1 - x_N)^N V_{N-1}$. Подставляя это в (7.15) и вычисляя интеграл по x_N , получим $V_N = V_{N-1} / N$. Следовательно, $V_N = C / N!$ (C не зависит от N),

а так как $V_1 = 1$ (всякое положительное число не больше самого себя), то $V_N = 1/N!$

Таким образом, в этой модели вероятность амплитудной аппроксимируемости, т.е. вероятность того, что наибольшее из $2n$ неотрицательных чисел не больше суммы остальных, равна

$$1 - \frac{1}{(2n-1)!}. \quad (7.16)$$

Для $n = 2$ она равна 0,83, для $n = 3$ соответственно 0,92. При больших n различие между углами α типа (6.5) и углами, для которых α/π иррационально, для проблемы амплитудной аппроксимируемости стирается даже быстрее, чем для проблемы аппроксимируемости.

5. Приведем пример использования условия, сформулированного в конце п. 3. Пусть $\hat{C}$ состоит из двух взаимноперпендикулярных прямых, т.е. $\alpha = \pi/2$, $n = 2$. Амплитудную диаграмму зададим в виде функции

$$\Phi(\varphi) = \exp \left[-A \sin^2 \frac{\varphi - \pi/4}{2} \right]. \quad (7.17)$$

Это — колоколоподобная кривая с максимумом в направлении $\varphi = \pi/4$, т.е. биссектрисы угла между прямыми, на которых распределены токи. Функция (7.17) пронормирована на единицу в максимуме ($\Phi(\pi/4) = 1$). Чем больше параметр A , тем уже диаграмма. Ее полуширина, т.е. величина δ , определяемая условием $\Phi^2(\pi/4 \pm \delta) = 1/2$, связана с A очевидной формулой: $\sin^2 \delta/2 = 0,346/A$.

При $n = 2$ в ряде (7.13а) участвуют четыре функции:

$$\Phi(\varphi), \Phi(-\varphi), \Phi(\pi - \varphi), \Phi(\varphi - \pi). \quad (7.18)$$

В терминах «зеркальных отражений», т.е. при использовании соображений, основанных на формуле (7.10), вторая и третья величины в этом ряду описывают однократные отражения, последняя — двукратное отражение в прямых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

При $\varphi = \pi/4$ наибольшее значение имеет первая функция в (7.18). Она убывает при уходе φ от этого значения; три остальных при этом возрастают. Поэтому для амплитудной аппроксимируемости необходимо и достаточно, чтобы сумма $\Phi(-\pi/4) + \Phi(3\pi/4) + \Phi(-3\pi/4)$ была больше единицы. Например, при $A = 1$ ($\delta = 72^\circ$) эти три числа равны 0,60; 0,60; 0,37, и их сумма больше единицы. Диаграмму с такой большой шириной можно аппроксимировать токами на этой особой линии. При $A = 2$ ($\delta = 49^\circ$) сумма этих трех чисел равна 0,87; такую диаграмму аппроксимировать нельзя.

Критическое значение $A = A_0$ определяется условием, что в той точке ($\varphi = \pi/4$), где первая функция в (7.18) максимальна,

(равна единице), а сумма остальных минимальна—эта сумма равна первой функции, т.е.

$$2\exp(-A_0/2) + \exp(-A_0) = 1. \quad (7.19)$$

Решением этого уравнения является $A_0 = 1,76$, что соответствует полуширине $\delta_0 = 53^\circ$. Более узкие амплитудные диаграммы вида (7.17) неаппроксимируемы, более широкие — аппроксимируемы токами на двух перпендикулярных прямых.

Аналогичные результаты получаются для П-образной диаграммы, тоже ориентированной в направлении $\varphi = \pi/4$:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= 1 \quad \text{при} \quad |\varphi - \pi/4| < \delta/2, \\ \Phi(\varphi) &= 0 \quad \text{при} \quad |\varphi - \pi/4| > \delta/2. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Если ее полуширина δ настолько мала, что при $\varphi = -\pi/4$ и $\varphi = 3\pi/4$ диаграмма равна нулю, то в ряде (7.18) при $\varphi = \pi/4$ отличен от нуля только первый член, и, следовательно, диаграмма неаппроксимируема. Если же $\delta > \pi/2$, то два последних члена ряда (7.18) отличны от нуля (равны единице) при всех тех φ , при которых отличен от нуля первый член, и аппроксимация возможна. В рассматриваемой проблеме амплитудной аппроксимации аналогия между диаграммами (7.17) и (7.20) не нарушается тем обстоятельством, что первая из них при соответствующем выборе фазы реализуема, а вторая — нереализуема при любой фазе.

6. Проблема амплитудной аппроксимируемости может быть поставлена более общим образом. Пусть аппроксимируемость диаграммы $F(\varphi)$ (см. (7.1)) надо обеспечить совместным действием токов на особой линии и токов еще некоторого источника, который в отсутствии других токов создает диаграмму $F_0(\varphi)$. При этом условия, налагаемые на $\Phi(\varphi)$, при которых аппроксимация возможна, оказываются, вообще говоря, более мягкими, чем при $F_0(\varphi) \equiv 0$.

Аппроксимировать токами на особой линии надо функцию $F(\varphi) - F_0(\varphi)$ и для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество (7.8), в котором вместо $F(\varphi)$ стоит $F(\varphi) - F_0(\varphi)$, т.е. тождество

$$\sum_{s=0}^{n-1} [F(\varphi - 2s\alpha) - F(2s\alpha - \varphi)] + G_0(\varphi) = 0, \quad (7.21)$$

где через $G_0(\varphi)$ обозначена заданная (вместе с $F_0(\varphi)$) функция

$$G_0(\varphi) = -\sum_{s=0}^{n-1} [F_0(\varphi - 2s\alpha) - F_0(2s\alpha - \varphi)]. \quad (7.22)$$

Повторяя соображения п.3, можно утверждать, что (7.21) выполнимо выбором фазы в (7.1) тогда и только тогда, когда $2n + 1$ неотрицательные числа

$$\Phi(\varphi - 2s\alpha), \Phi(2s\alpha - \varphi) \quad (s = 0, 1, \dots, n-1), |G_0(\varphi)| \quad (7.136)$$

обладают свойством, сформулированным в конце п. 3 относительно $2n$ чисел ряда (7.13а), т.е. относительно первых $2n$ чисел ряда (7.13б).

При этом возникает дополнительное требование — сумма первых $2n$ членов ряда (7.13б) при всех φ должна быть больше $|G_0(\varphi)|$. Если норма $\Phi(\varphi)$ была задана, а упомянутое условие не выполнено, то диаграмма с амплитудой $\Phi(\varphi)$ не аппроксимируема. Это просто означает, что на фоне очень большой «засветки» нельзя создать требуемую диаграмму. Заметим, что масштабом этой «засветки» является величина функции $G_0(\varphi)$, а не функции $F_0(\varphi)$ — поле дополнительного источника с учетом «переотражений» (фиктивных — никаких зеркал нет) в линиях $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$.

Если норма функции $F(\varphi)$, которую надо аппроксимировать, не задана, то это дополнительное требование всегда можно выполнить, сделав ее настолько большой, чтобы разность между суммой первых $2n$ членов ряда (7.13б) и последним членом ряда была при всех φ неотрицательна. Имея в виду нижеследующее замечание, надо эту норму сделать такой, чтобы минимум (по всему φ) этой разности был равен нулю. При таком выборе нормы $F(\varphi)$ основное требование на $\Phi(\varphi)$ будет наиболее мягким. Это основное требование состоит в том, что сумма $2n - 1$ членов ряда (7.13б), кроме наибольшего из первых $2n$ членов, должна быть больше модуля разности между этим наибольшим членом и $|G_0(\varphi)|$. Это требование менее жесткое, чем сформулированное в п. 3 требование на $\Phi(\varphi)$ при $G_0(\varphi) \equiv 0$.

7. Пусть теперь сформулированное в п. 3 условие аппроксимируемости диаграммы (7.1) при заданной амплитуде $\Phi(\varphi)$ и свободной фазе не выполняется. Решим задачу об определении той аппроксимируемой функции $\tilde{F}(\varphi)$, которая *менее всего отличается* (в среднеквадратичной норме (3.21б)) от диаграммы с заданной амплитудой, и найдем это отличие. Эта задача относится к проблеме оптимального токового синтеза, которую мы будем рассматривать в §13 и §15. Однако для особой линии,

которой соответствует много функций $\hat{F}_p(\varphi)$, ее целесообразно рассмотреть здесь.

Расстояние между $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$, которое мы должны минимизировать, выбирая и функцию $\tilde{F}(\varphi)$, и фазу функции $F(\varphi)$, равно

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |F(\varphi) - \tilde{F}(\varphi)|^2 d\varphi \right\}^{1/2}. \quad (7.23)$$

Норма функции $\tilde{F}(\varphi)$ не задана. Разложим $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$ в ряды Фурье. В ряде Фурье функций $\tilde{F}(\varphi)$ отсутствуют члены $\sin(pn\varphi)$ ($p = 1, 2, \dots$). Остальные коэффициенты этого ряда надо (для минимизации (7.23)) выбрать равными соответствующим коэффициентам в ряде Фурье функции $F(\varphi)$. После этого под интегралом в (7.23) останется квадрат модуля того отрезка ряда Фурье функции $F(\varphi)$, который содержит только эти слагаемые. Этот отрезок равен левой части равенства (7.6), т.е. равен

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi') \mathcal{F}(\varphi, \varphi') d\varphi',$$

где $\mathcal{F}(\varphi, \varphi')$ есть, с точностью до $1/\pi$, внутренняя сумма в (7.6) (ср. (7.12)). Таким образом, выбором $\tilde{F}(\varphi)$ при данной функции $F(\varphi)$ можно уменьшить (7.23) до величины

$$\Delta = \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} F(\varphi') \mathcal{F}(\varphi, \varphi') d\varphi' \right|^2 d\varphi \right\}^{1/2}. \quad (7.24)$$

Согласно (7.12) и (7.7), квадрат этой величины равен

$$\Delta^2 = \frac{1}{4n^2} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{s=0}^{n-1} [F(\varphi - 2s\alpha) - F(2s\alpha - \varphi)] \right|^2 d\varphi. \quad (7.25)$$

Его надо минимизировать выбором фазы $\Psi(\varphi)$. Согласно условию, сформулированному в начале этого пункта, функция $\Phi(\varphi)$ такова, что подынтегральное выражение (7.25) нельзя выбором фазы $\Psi(\varphi)$ сделать равным нулю при всех φ .

Под знаком модуля в (7.25) стоит сумма $2n$ комплексных чисел с модулями (7.13а), и в некотором интервале углов наибольший из этих модулей больше суммы всех остальных. Выбором фаз всех слагаемых модуль суммы будет минимизирован, если в этом интервале все слагаемые будут сделаны синфазными

(с точностью до π) и под интегралом будет стоять разность между наибольшим числом ряда (7.13а) и суммой остальных. Ломанная $2n$ -звеньевая линия в комплексной плоскости, образованная $2n$ векторами, участвующими в (7.25) (незамкнутая линия) должна быть сплюснута в прямую.

Найдем минимальное значение Δ для примера п. 5. Особая линия состоит из двух перпендикулярных прямых ($n = 2$). Амплитудная диаграмма имеет тот же вид, что и в (7.17), но мы проноормируем ее на единицу по норме, ибо по норме проноормирована невязка (7.23). Возникающий нормировочный коэффициент приведен ниже в (15.28) (см. табличный интеграл [20; 8.432.2]). Полуширина диаграммы δ меньше критического значения $\delta_0 = 53^\circ$ (см. (7.19)), так что $A > A_0 = 1,76$.

Минимальное значение Δ^2 , которое достигается при описанном выше выборе фазы, равно сумме интегралов, взятых по участкам, где подынтегральное выражение в (7.25) не может обратиться в нуль. Таких участков — четыре, около направлений $\varphi = \pm\pi/4$, $\varphi = \pm 3\pi/4$. Все четыре интеграла равны между собой. Первый из них есть

$$\frac{1}{16} \int \{ \Phi(\varphi) - \Phi(\varphi - \pi) - \Phi(-\varphi) - \Phi(\pi - \varphi) \}^2 d\varphi, \quad (7.26)$$

где интеграция производится по области, в которой выражение в скобках положительно. Это выражение равно, с точностью до множителя, $4 \left\{ \operatorname{sh} \left[\frac{A}{2} \cos(\varphi - \frac{\pi}{4}) \right] - \operatorname{ch} \left[\frac{A}{2} \sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) \right] \right\}$. Если полуширина диаграммы δ равна δ_0 , то интервал интегрирования в (7.26) равен нулю, амплитудная аппроксимация возможна. При $\delta \rightarrow 0$ (очень узкая диаграмма) интеграл в (7.26) берется по всему квадранту (от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi/2$).

Таким образом, получаем искомое выражение

$$\Delta^2 = \frac{1}{\pi I_0(A)} \int_0^{\bar{\gamma}} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{A}{2} \cos \gamma \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{A}{2} \sin \gamma \right) \right]^2 d\gamma, \quad (7.27)$$

где $\bar{\gamma}$ — корень подынтегрального выражения, а I_0 — модифицированная функция Бесселя.

На рис. 7.1 сплошной кривой представлена величина квадрата минимальной невязки Δ^2 в функции отношения полуширины δ амплитудной диаграммы к критической полуширине δ_0 . Если δ лишь немного меньше δ_0 , то практически диаграмму аппроксимировать можно, так как Δ^2 хотя и не равно нулю, но очень мало по сравнению с нормой $\Phi(\varphi)$, равной единице. Условие

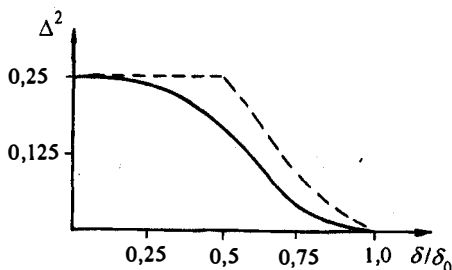


Рис. 7.1

Для $\delta > \delta_0$ не является пороговым, во всяком случае для колоколообразной диаграммы $\Phi(\varphi)$. Аналогичный результат получается и для П-образной диаграммы, тоже нормированной условием единичной нормы. Для нее тоже Δ^2 равно сумме четырех интегралов, взятых около биссектрис $\varphi = \pm\pi/4$ и $\varphi = \pm 3\pi/4$. При полуширине $\delta > \delta_0$ ($\delta_0 = 90^\circ$) $\Delta^2 = 0$. С уменьшением δ от 90° до 45° область интегрирования в каждом из этих четырех интегралов растет по закону $(\pi - 2\delta)$. При $\delta < 45^\circ$ область интегрирования равна 2δ . Для Δ^2 получаем

$$\Delta^2 = 0 \text{ при } \delta > \delta_0,$$

$$\Delta^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\delta_0}{\delta} - 1 \right) \text{ при } \frac{\delta_0}{2} < \delta < \delta_0, \quad (7.28)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \text{ при } \delta < \delta_0/2.$$

Соответствующий график изображен на рис. 7.1 штриховой линией. Для более крутой, по сравнению с (7.17), П-образной диаграммы ее сужение далее критического значения $\delta = \delta_0$ вызывает более сильный рост минимальной невязки.

§ 8. Об определении формы рассеивающего тела по диаграмме рассеяния

1. Если заданы и диаграмма рассеяния каким-либо телом, и поле, освещающее тело, то, как известно, при некоторых дополнительных условиях можно найти форму поверхности этого тела. Свойства особых линий позволяют в некоторых случаях высказать соображения о форме рассеивающего тела, почти *ничего не зная об освещающем его поле* (см., впрочем, замечание в последнем пункте). Эти соображения носят нестандартный характер типа «тело похоже на ...» и «тело не похоже на ...» и являются иногда только *вероятными*. Достоверность их возрастает, если известно несколько диаграмм рассеяния одного и того же тела в различных его положениях, при различных освещениях и на различных частотах.

Нам понадобятся только следующие свойства особых контуров $\hat{C}$ (см. § 5) — любой распределенный на $\hat{C}$ ток создает диаграммы, для которых

$$I \equiv (f, \hat{F}) = 0, \quad (8.1)$$

где $\hat{F}(\varphi)$ — функция, связанная с контуром $\hat{C}$. Она удовлетворяет условию (фактически эквивалентному условию (5.17))

$$\hat{F}^*(\varphi) = \hat{F}(\varphi + \pi), \quad (8.2)$$

или, что тождественно, ее ряд Фурье имеет вид

$$\hat{F}^*(\varphi) = \sum \left[C_n^{(c)} i^n \cos(n\varphi) + C_n^{(s)} i^n \sin(n\varphi) \right] \quad (8.3)$$

(мы добавили синусные слагаемые к ряду (5.9) и упростили нормировку по сравнению с нормировкой (5.9)) с вещественными коэффициентами $C_n^{(c)}$, $C_n^{(s)}$. Контур $\hat{C}$ есть нулевая линия вещественного поля

$$\hat{u}(r, \varphi) = \sum \left[C_n^{(c)} \cos(n\varphi) + C_n^{(s)} \sin(n\varphi) \right] J_n(kr). \quad (8.4)$$

Из соображений непрерывности следует, что если контур C не есть особая линия, но вблизи нее есть особая линия $\hat{C}$, то произведение диаграммы, созданной любым током на C , на функцию $\hat{F}(\varphi)$, соответствующую контуру $\hat{C}$, будет мало по сравнению с единицей

$$|I| \ll 1. \quad (8.5)$$

При этом предположено, что $f(\varphi)$ и $\hat{F}(\varphi)$ пронормированы условиями

$$(f, f) = 1; \quad (\hat{F}, \hat{F}) = 1. \quad (8.6a, б)$$

Если для какой-либо диаграммы рассеяния не выполняется условие (8.5) с данной функцией $\hat{F}(\varphi)$, то линия, на которой расположены токи (т.е. поверхность тела) не близка к особой линии, которой соответствует эта функция $\hat{F}(\varphi)$.

2. Именно это последнее соображение используется в построениях этого пункта. Пусть мы хотим проверить гипотезу: «Контур тела близок к данной особой линии». Предполагается при этом, что контур C может быть как угодно расположен и повернут. Линии $\hat{C}$ при некотором ее положении соответствует функция $\hat{F}(\varphi)$. При повороте линии $\hat{C}$ на какой-либо угол γ этой повернутой линии будет соответствовать функция $\hat{F}(\varphi - \gamma)$, а при смещении на расстояние b в направлении, определяемом углом δ — функция

$\hat{F}(\varphi - \gamma) \exp[ikb \cos(\varphi - \delta)]$. Составим функцию трех переменных γ, b, δ :

$$|I| = \left| \int_0^{2\pi} f(\varphi) \hat{F}^*(\varphi - \gamma) \exp[-ikb \cos(\varphi - \delta)] d\varphi \right|, \quad (8.7)$$

и найдем ее минимум по всем трем переменным. Если этот минимум не удовлетворяет условию (8.5), то C не близко к $\hat{C}$ ни при каком своем положении. Это утверждение не является вероятностным. Однако если минимум функции $|I|$ (8.7) мал, то можно только прийти к заключению, что контур C при определенном его положении может быть близок к $\hat{C}$. Этот результат приобретет более информативную форму, если измерено несколько диаграмм рассеяния одного и того же тела, соответствующих различным освещениям, или различным положениям тела относительно освещающего поля, и для всех этих диаграмм минимум интеграла I будет мал. Если хотя бы для одной из них этот минимум не мал, то контур C не близок к $\hat{C}$.

Напомним, что свойство (8.1), на котором только и основаны приведенные в этом пункте соображения, справедливо и тогда, когда $\hat{C}$ есть незамкнутая линия. Контур тела можно рассматривать как незамкнутую линию, если это тело является тонким экраном. Например, если $\hat{C}$ — эллипс (тогда $\hat{F}(\varphi)$ есть азимутальная функция Матье), то I мало не только для диаграмм, рассеянных цилиндром с направляющей, близкой к $\hat{C}$, но и для диаграммы, рассеянной экраном в форме любой части такого цилиндра.

Хотя из (8.1) не следует неаппроксимируемость, если $\hat{F}(\varphi)$ имеет бесконечную норму, но все построения этого пункта сохраняются, если заменить (8.1) на тождества типа (6.18) или (6.22).

Замкнутый контур может быть особым, только если он резонансный, т.е. если на данной частоте имеет решение внутренняя задача Дирихле. Обратное, вообще говоря, несправедливо — не всякий резонансный контур является особым (см. ниже § 14). Однако для гладких линий типа эллипса эти два свойства — быть резонансным контуром и быть особой линией — обычно совпадают. Поэтому для проверки гипотезы, что C близко к данному особому контуру или его части, следует измерять диаграмму рассеяния на резонансных частотах этого контура.

Если тело освещается монохроматическим сигналом, то диаграмма рассеяния является функцией не только угла, но и времени, $f = f(\varphi, t)$. Ее преобразование Фурье по времени

$$f(\varphi, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi, t) e^{-ikt} dt \quad (8.8)$$

содержит, в принципе, всю информацию, которую содержат диаграммы рассеяния при освещении монохроматическими полями во всей полосе частот, в которой $f(\varphi, k)$ не мало. Обозначим резонансную частоту контура $\hat{C}$ через k_0 . Тогда

$$I(k_0) = \int_0^{2\pi} \hat{F}(\varphi) f(\varphi, k_0) d\varphi \quad (8.9)$$

позволяет судить о близости $\hat{C}$ к контуру рассеивающего тела. При этом не надо знать не только структуру поля, освещающего тело, но и его временную зависимость. Надо лишь, чтобы в этом поле была достаточно эффективно представлена частота k_0 .

Разумеется, интеграл (8.9) тоже надо вычислять для произвольного положения и поворота контура $\hat{C}$ и затем минимизировать его.

3. Второй метод использования информации, содержащейся в измеренной диаграмме $f(\varphi)$, состоит в том, чтобы найти такой особый контур C , который (в противоположность предыдущему) безусловно не был бы близок к контуру C рассеивающего тела. Для этого надо найти такую функцию, принадлежащую к классу функций $\hat{F}(\varphi)$, т.е. удовлетворяющую условию (8.2), произведение которой на $f(\varphi)$ не мало. Тогда особый контур, соответствующий этой функции $F(\varphi)$, не может быть близок к контуру рассеивающего тела. Для любой $f(\varphi)$ такой контур существует, и его легко найти.

Если сама измеренная диаграмма удовлетворяет условию (8.2), то ответ очевиден: $F(\varphi) = f(\varphi)$. Тогда значение $|I|$ равно единице, так что C не близко к соответствующему контуру $\hat{C}$. Если функция $f(\varphi)$ не обладает свойством (8.2), то нужно найти такую функцию $\hat{F}(\varphi)$, чтобы модуль ее произведения на $f(\varphi)$ был бы максимален. Как мы увидим, этот максимум всегда не мал, и утверждение « C не похоже на $\hat{C}$ » (где $\hat{C}$ построено по этой функции $F(\varphi)$), справедливо.

Решение элементарной задачи определения функции $\hat{F}(\varphi)$, максимизирующей $|I|$, и нахождение этого максимума основывается на том, что ряд Фурье для $\hat{F}(\varphi)$ имеет вид (8.4) с вещественными коэффициентами C_n . Разложим измеренную диаграмму $f(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \sum \left[d_n^{(c)} \cos(n\varphi) + d_n^{(s)} \sin(n\varphi) \right]. \quad (8.10)$$

Произведение $(f, \hat{F})$ можно представить в форме

$$(f, \hat{F}) = (\bar{f}_1, \bar{F}) + i(\bar{f}_2, \bar{F}), \quad (8.11)$$

где $\bar{F}$, $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ — три вещественные функции:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \sum C_n \cos(n\varphi), \\ \bar{f}_1 &= \sum \operatorname{Re} (d_n i^n) \cos(n\varphi), \\ \bar{f}_2 &= \sum \operatorname{Im} (d_n i^n) \cos(n\varphi),\end{aligned}\tag{8.12a,6}$$

для сокращения записи синусные слагаемые в рядах (8.5) и (8.10) отброшены. В (8.12) числа d_n известны, C_n — искомые. Квадрат модуля произведения $|f|^2$ равен

$$|(\hat{f}, \hat{F})|^2 = (\bar{f}_1, \bar{F})^2 + (\bar{f}_2, \bar{F})^2.\tag{8.13}$$

Нормировка (8.6б) для $\hat{F}(\varphi)$ дает такую же по форме нормировку для $\bar{F}(\varphi)$:

$$(\bar{F}, \bar{F}) = 1,\tag{8.14}$$

а нормировка (8.6а) для $f(\varphi)$ дает для функций $\bar{f}_1(\varphi)$ и $\bar{f}_2(\varphi)$:

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_1) + (\bar{f}_2, \bar{f}_2) = 1.\tag{8.15}$$

Таким образом задача состоит в том, чтобы найти вещественную функцию $\bar{F}(\varphi)$, максимизирующую функционал (8.13) при условии (8.14). Две вещественные функции $\bar{f}_1(\varphi)$, $\bar{f}_2(\varphi)$, найденные из измеренной функции $f(\varphi)$ по формулам (8.12б), связаны между собой соотношением (8.15). Максимум функционала не мал по сравнению с единицей, так что из любой измеренной диаграммы можно извлечь некоторую информацию. Для этого надо вычислить вещественные коэффициенты Фурье C_n функции $\bar{F}(\varphi)$, построить по ним поле $\hat{u}(r, \varphi)$ (см. (8.4)) и найти его нулевые линии. Контур тела, рассеявшего падающее поле и создавшего диаграмму $f(\varphi)$, не близок к этим линиям.

Простое и наглядное решение этой задачи можно получить, рассматривая две заданные и искомую вещественные функции $\bar{f}_1(\varphi)$, $\bar{f}_2(\varphi)$ и $\bar{F}(\varphi)$ как векторы в трехмерном пространстве. Максимизируется сумма квадратов проекций заданных векторов на направление искомого вектора $\bar{F}$. Очевидно, что он должен лежать в плоскости, заданной векторами $\bar{f}_1, \bar{f}_2$. Обозначим длины этих векторов через a и b , угол между ними через μ

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_1) = a^2, \quad (\bar{f}_2, \bar{f}_2) = b^2, \quad (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = ab \cos \mu.\tag{8.16}$$

Эти три числа считаются заданными из измерений. Искомый вектор образует с вектором длины a угол ν , который надо выбрать

таким образом, чтобы максимизировать упомянутый функционал. Угол между этим вектором и вектором длины b равен $\mu - \nu$. Сумма квадратов двух проекций равна

$$|I|^2 = a^2 \cos^2 \nu + b^2 \cos^2 (\mu - \nu). \quad (8.17)$$

Преобразуя и учитывая, что $a^2 + b^2 = 1$, получим

$$|I|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \cos^2 \mu} \cos(2\nu - \tau),$$

$$\operatorname{tg} \tau = b^2 / [a^2 + b^2 \cos(2\mu)]. \quad (8.18a, б)$$

Следовательно, искомое значение ν равно $\tau/2$, где τ дано в (8.18б), а максимальное значение

$$|I|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \cos^2 \mu}. \quad (8.19)$$

Так как $|I|^2 \geq 1/2$, то вещественный единичный вектор $\bar{F}$, образующий с вектором $\bar{f}_1$ угол $\tau/2$, порождает функцию $\bar{F}(\varphi)$ и, тем самым, линию $\hat{C}$, к которой не близок искомый контур.

Можно, разумеется, получить этот результат, и не пользуясь аналогией со свойствами треугольников на плоскости, а применяя стандартный аппарат определения условного экстремума с помощью множителя Лагранжа. Искомая функция $\bar{F}(\varphi)$ является линейной комбинацией функций $\bar{f}_1(\varphi)$ и $\bar{f}_2(\varphi)$:

$$\bar{F}(\varphi) = x \bar{f}_1(\varphi) + y \bar{f}_2(\varphi), \quad (8.20)$$

где x и y — переменные, выбором которых надо максимизировать функционал (8.13), т.е. билинейную форму $|I|^2$ от x и y . Эти переменные связаны условием нормировки (8.14) — условием равенства единице другого билинейного функционала N^2 . Формируем функционал $\mathcal{L} = |I|^2 - \Lambda N^2$, где Λ — множитель Лагранжа. Так как и функционал $|I|^2$, и условие связи — квадратичны по переменным, то искомое экстремальное значение равно этому множителю. Он находится из условия существования нетривиального решения двух линейных относительно x и y однородных уравнений, которые получаются приравниванием нулю производных от $\mathcal{L}$ по x и y . Это условие имеет форму квадратного уравнения относительно Λ , большим корнем которого и является выражение (8.19). Из упомянутых уравнений для x и y находится и их отношение, а тем самым — и $\bar{F}(\varphi)$ (см. (8.20)).

4. В этом пункте будет описан алгоритм построения контура, близкого к контуру рассеивающего тела. Этот алгоритм решает задачу, в некотором отношении противоположную той, которая рассматривалась в предыдущем пункте.

Надо найти функцию $\hat{F}(\varphi)$, представимую в форме (8.3) с вещественными коэффициентами C_n (мы вновь ограничились четными функциями, $C_n \equiv C_n^{(c)}$ в формуле (8.3)), такую, что для всех измеренных диаграмм $f_m(\varphi)$ ($m = 1, 2, \dots, N$) выполняются условия

$$I_m \equiv (f_m, \hat{F}) = 0. \quad (8.21)$$

Рассеиватель неподвижен, различные диаграммы соответствуют различным его освещениям.

Предположим вначале, что имеется бесконечный набор измеренных диаграмм $f_m(\varphi)$ ($N = \infty$). Будем минимизировать функционал

$$\sum_m p_m |I_m|^2 / (\hat{F}, \hat{F}). \quad (8.22)$$

Здесь $p_m > 0$ — весовые коэффициенты, с помощью которых можно регулировать вклад в функционал слагаемых от различных измерений; например, p_m можно выбирать обратно пропорционально энергии падающего поля. Если на некоторой частоте k минимум функционала окажется достаточно малым, а функция $\hat{F}(\varphi)$, на которой этот минимум достигается, достаточно гладкой, то k близко к k_0 , а контур, соответствующий этой функции $\hat{F}(\varphi)$, близок к контуру рассеивателя; здесь k_0 — резонансная частота.

Применим к этому функционалу метод Лагранжа и сведем задачу к минимизации функционала:

$$\mathcal{L}(\hat{F}) = \sum_m p_m |f_m, \hat{F}|^2 - \Lambda(\hat{F}, \hat{F}). \quad (8.23)$$

Подставляя в него выражение (8.3) и приравнявая нулю производные $\partial \mathcal{L} / \partial C_m$, получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений, которые удобнее записывать не относительно C_n , а относительно коэффициентов

$$C_n \sqrt{1 + \delta_{0n}};$$

$$\sum_n \alpha_{nq} \tilde{C}_n - \Lambda \tilde{C}_q = 0, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (8.24)$$

где

$$\alpha_{nq} = \pi i^{n-q} \sqrt{1 + \delta_{0n}} \sqrt{1 + \delta_{0q}} \sum_m d_{mn} d_{mq}^* p_m. \quad (8.25)$$

Все собственные значения Λ этой системы, разумеется, вещественны, так как $\alpha_{nq}^* = \alpha_{qn}$. Они неотрицательны, так как совпадают со значениями функционала (8.23) на соответствующих «собственных векторах» — функциях $\hat{F}(\varphi)$. На частоте k_0 одно собственное значение будет равно нулю — ему и соответствует функция $\hat{F}(\varphi)$, удовлетворяющая всем условиям (8.21), по которой можно построить искомый контур. Если частота не совпадает с k_0 , то нулевых собственных значений не будет. На частотах, близких к k_0 , интересующее нас собственное значение будет малым. Его надо выделить из множества сгущающихся около нуля собственных значений, соответствующих функциям $\hat{F}(\varphi)$, сильно изрезанным, используя требование, чтобы функция $\hat{F}(\varphi)$ была «гладкой».

При этом существенно, что фактически число измеренных функций невелико. В трех предыдущих формулах суммирование по индексу m производится до $m = N$. Система уравнений (8.24) остается при этом бесконечной, однако теперь она может иметь не больше, чем N отличных от нуля собственных значений. Функцию $\hat{F}(\varphi)$ следует искать в N -мерном функциональном пространстве, например, в виде ряда (8.3) из N слагаемых. Тем самым мы соответственно ограничиваем класс контуров, среди которых ищется контур C . Чем больше измерено диаграмм, тем, вообще говоря, более сложную форму (и с большей точностью) можно определить. Очевидно, что если заранее известно, что искомый контур C не очень сложен, то в функции $\hat{F}(\varphi)$ должны преобладать первые компоненты.

Минимальное собственное значение конечной системы (8.24) может оказаться отличным от нуля на резонансной частоте k_0 и в нуль обратится при частоте, близкой к k_0 . Если имеется возможность получить не менее шести — восьми диаграмм $f_m(\varphi)$ в диапазоне частот, содержащем частоту k_0 , то для упрощения процедуры поиска этой частоты (если она не была известна) и повышения эффективности метода удобно разделить имеющиеся при каждом значении k функции $f_m(\varphi)$ на две отдельные группы и искать контур C независимо для каждой группы. На правильной частоте оба контура совместятся — это позволит найти и резонансную частоту, и сам контур.

На рис. 8.1 приведены результаты применения этого алгоритма к модельным примерам: эллипс (а), овал (б) и прямоугольник (в). В этих примерах сначала на границе тела известной формы задавались различные распределения тока, по которым по формуле (1.1) (см. также ниже формулу (14.2)) при нескольких значениях частоты вычислялись диаграммы, создаваемые этими токами. Эти

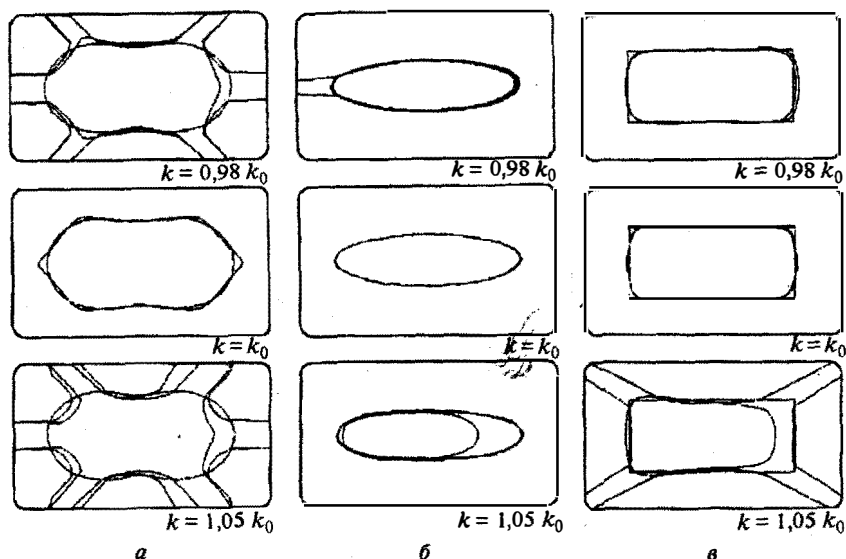


Рис. 8.1

диаграммы разделялись на две группы, каждая из которых обрабатывалась по описанному выше алгоритму. Только при частоте, близкой к k_0 , обработка каждой группы диаграмм приводит к двум, хотя и близким, но все же различным контурам. При $k = k_0$ эти контуры совмещаются с графической точностью.

По аналогичной схеме можно анализировать диаграммы, получающиеся при рассеянии телом, движущимся параллельно самому себе. В функционал (8.22) следует вместо $f_m(\varphi)$ подставлять $f_m \exp [ikb_m \cos \varphi]$, где b_m — координата, которую имела какая-либо фиксированная точка тела при создании диаграммы $f_m(\varphi)$, и минимизировать функционал, варьируя не только числа C_n , но и числа b_m .

Процесс минимизации можно производить итерационным методом, варьируя последовательно C_n при фиксированных b_m , а затем варьируя b_m при фиксированных C_n . Так как функционал ограничен снизу и на каждом этапе он не возрастает, то процесс сходится. Если тело может также поворачиваться, то минимизацию надо производить уже по трем совокупностям переменных — по C_n , b_m , γ_m (ср. (8.7)).

Как мы уже отмечали, при замене какого-либо контура его дугой диаграмма рассеяния будет удовлетворять тому же условию ортогональности (8.1), что и диаграмма рассеяния всего контура.

Это будет иметь место на частоте, резонансной для всего контура. Из этого, в частности, следует, что найдя по изложенному выше способу форму замкнутого контура, мы не сможем определить, происходит ли рассеяние на теле с этим контуром или на незамкнутом экране, совпадающем с частью поверхности этого тела. Для решения этого вопроса понадобятся еще дополнительные измерения на частотах, близких к k_0 .

5. Сделаем два дополнительных замечания.

1. Все заключения о форме тела делаются не по самой диаграмме, а по величине I , т.е. функционала от нее. Поэтому малая ошибка в измерении $f(\varphi)$ не скажется заметно на выводах.

Это обстоятельство может сделать допустимым использование методов восстановления диаграммы во всем интервале $(0, 2\pi)$ по ее измерению в части этого интервала—разумеется в той, в которой рассеяна большая часть энергии. Эти методы основаны на аналитических свойствах функций $f(\varphi)$, и потому некорректны. Однако функционал I — сглаживающий, и эти методы в нашей задаче могут оказаться применимыми. Кроме того, само свойство линии быть особой является «грубым», что проявляется, в частности, в том, что из двух формально различных результатов— $I = 0$ и $I \neq 0$, $|I| \ll 1$ — следуют практически совпадающие выводы.

Фаза диаграммы может быть восстановлена по ее амплитуде, хотя эта процедура неоднозначна и некорректна. Поэтому описанные методы в принципе применимы и тогда, когда при измерениях находится только амплитудная диаграмма $|f(\varphi)|$.

2. Диаграмма должна быть создана только токами на теле; при измерениях в приемник не должно попадать освещающее поле. Если это невозможно обеспечить, то надо измерить поле, падающее в приемник в отсутствии рассеивающего тела, и вычесть его из измеренной диаграммы. Если, как это часто бывает, освещающее поле представляет собой плоскую волну, то диаграмму нельзя непосредственно измерять в направлении распространения этой волны. Напомним, что даже если падающая волна сильно заэкранирована телом—все равно диаграмма в направлении ее распространения создана совместным действием токов, индуцированных ею на теле, и самой падающей волны.

§ 9. Свойства особых линий

В этом параграфе перечисляются некоторые элементарные свойства особых линий $\hat{C}$. По определению (5.7) $\hat{C}$ — нулевая линия какого-либо вещественного поля $\hat{u}(r, \varphi)$, т.е. не имеющего особенностей на всей плоскости решения однородного уравнения (5.2).

1. Замкнутая особая линия (особый контур) есть резонансный контур, т.е. в ее внутренней области существует не равное тождественно нулю поле $\hat{u}(r, \varphi)$. По определению, это поле равно

нулю на контуре. Оно не может быть тождественным нулем во всей внутренней области, ибо тогда оно было бы нулем на всей плоскости. Обратное, вообще говоря, не имеет места, так как не всякий резонансный контур есть особая линия — может оказаться, что поле без особенностей вне него не существует.

2. Особая линия не может закончиться в какой-либо точке, она должна быть замкнутой или уходить на бесконечность. Доказательство можно построить примерно так же, как доказывается принцип максимума для уравнения Лапласа.

Пусть $\hat{C}$ заканчивается в точке нуль, т.е. около нуля можно описать окружность радиуса R настолько малого, что на ней и внутри нее функция $\hat{u}(r, \varphi)$ сохраняет знак, например, $\hat{u}(r, \varphi) \geq 0$. Тождественно быть равной нулю в конечном круге функция $\hat{u}(r, \varphi)$ не может. Введем функцию Грина уравнения Лапласа $G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$, где r — цилиндрический радиус в локальной системе координат с центром в точке нуль. При $r < R$ функция $G < 0$, при $r = R$ $G = 0$, и $\Delta G = \delta(r)$. Применим формулу Грина в этой окружности к G и $\hat{u}$. Получим

$$\hat{u}(0) = -k^2 \int \hat{u} G dS + \int \left(\hat{u} \frac{\partial G}{\partial N} - G \frac{\partial \hat{u}}{\partial N} \right) ds, \quad (9.1)$$

где первый интеграл взят по кругу $r \leq R$, второй — по окружности $r = R$. В контурном интеграле второе слагаемое равно нулю, в первом $\partial G / \partial N = 1 / (2\pi R)$. Так как нуль лежит на линии $\hat{C}$, то $\hat{u}(0) = 0$; однако оба слагаемых справа положительны. Предположение, что $\hat{u}(r, \varphi)$ сохраняет знак во всей окрестности какой-либо точки, лежащей на $\hat{C}$, привело к противоречию.

3. Через любые M точек на плоскости проходит особая линия. Рассмотрим поле $\hat{u}(r, \varphi)$, представленное в виде конечной суммы из $M + 1$ слагаемых с вещественными коэффициентами (ср. (5.8)):

$$\hat{u}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^M C_n J_n(kr) \cos(n\varphi). \quad (9.2)$$

Определим M коэффициентов C_n ($n = 1, 2, \dots, M$) из системы M вещественных линейных уравнений:

$$\sum_{n=1}^M C_n J_n(kr_m) \cos(n\varphi_m) = -C_0 J_0(kr_m), \quad m = 1, \dots, M, \quad (9.3)$$

где r_m, φ_m — координаты m -й точки, через которую должна пройти линия $\hat{C}$. Если детерминант этой системы окажется равным нулю, то будем находить не C_n / C_0 , а C_n / C_1 , и так далее. Функция (9.2) с этими коэффициентами удовлетворяет всем требованиям

на функцию $\hat{u}(r, \varphi)$, и ее нулевая линия проходит через выбранные точки.

Отсюда, разумеется, не следует, что ряд (9.2) с полученными таким образом коэффициентами будет при $M \rightarrow \infty$ сходиться в точках, отличных от выбранных M точек. С ростом числа M , вообще говоря, не будут стремиться к каким-либо пределам и коэффициенты C_n . Иначе мы столкнулись бы с противоречием, если бы все M точек были бы выбраны, например, на нерезонансном контуре. Даже при $M \rightarrow \infty$ нулевая линия, полученная таким образом, не совпадает с этим контуром, который, разумеется, не есть $\hat{C}$.

Два следующих свойства менее очевидны, хотя доказываются так же элементарно.

4. Если известны две особые линии $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$, являющиеся нулевыми линиями двух различных полей $\hat{u}_1(r, \varphi)$ и $\hat{u}_2(r, \varphi)$, то можно построить еще целую последовательность особых линий, непрерывно зависящих от одного параметра. Такой последовательностью являются, например, нулевые линии C_α ($1 \leq \alpha \leq 2$) поля

$$\hat{u}_\alpha(r, \varphi) = (2 - \alpha) \hat{u}_1(r, \varphi) + (\alpha - 1) \hat{u}_2(r, \varphi). \quad (9.4)$$

При $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ эти линии переходят, соответственно, в $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$. Таких последовательностей можно построить бесконечно много, добавив, например, к $\hat{u}_\alpha(r, \varphi)$ (см. (9.4)) еще слагаемое $(\alpha - 1)(\alpha - 2) \hat{u}(r, \varphi)$, где $\hat{u}(r, \varphi)$ — любое вещественное решение волнового уравнения без особенностей. Каждой последовательности особых линий соответствует последовательность функций ортогонального дополнения $\hat{F}_\alpha(\varphi)$.

5. В окрестности любой особой линии расположена другая особая линия, с другой функцией ортогонального дополнения. Наметим доказательство этого утверждения. Не будем рассматривать тривиальный способ получения соседней особой линии, когда поле $\hat{u}(r, \varphi)$ смещается и поворачивается как целое. При этом $\hat{F}(\varphi)$ лишь умножается на несущественный фазовый множитель и поворачивается ось системы координат.

Пусть, для простоты записи, уравнение особой линии $\hat{C}_1$ может быть записано в виде $r = r_1(\varphi)$, где $r_1(\varphi)$ — однозначная функция. Эта линия — нулевая линия поля $\hat{u}_1(r, \varphi)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое поле $\hat{u}_2(r, \varphi)$, не равное тождественно $\hat{u}_1(r, \varphi)$, что его нулевая линия $\hat{C}_2$ будет иметь

уравнение $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi) \neq r_2(\varphi)$, и для любого φ $|r_1(\varphi) - r_2(\varphi)| \leq \varepsilon$.

Построим вспомогательное поле $\hat{v}(r, \varphi)$ — вещественное решение волнового уравнения без особенностей, которое не равно тождественно нулю на $\hat{C}_1$ и обращается на ней в нуль в тех точках, в которых $\partial \hat{u}_1(r, \varphi) / \partial N = 0$; N — нормаль к $\hat{C}_1$. Построить такое поле можно, например, в форме ряда (9.2), потребовав, чтобы он обращался в нуль в упомянутых точках на $\hat{C}_1$ и был равен единице в какой-либо другой точке на $\hat{C}_1$.

Построим затем искомое поле $\hat{u}_2(r, \varphi)$ по формуле

$$\hat{u}_2(r, \varphi) = \hat{u}_1(r, \varphi) + \mu \hat{v}(r, \varphi), \quad (9.5)$$

где число μ мы выберем далее. Пусть $r = r_2(\varphi)$ есть его нулевая линия. Надо показать, что можно выбрать такое μ , что при всех φ $|r_2(\varphi) - r_1(\varphi)| \leq \varepsilon$.

По определению линий $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$

$$\hat{u}_1[r_1(\varphi), \varphi] \equiv 0, \quad \hat{u}_2[r_2(\varphi), \varphi] \equiv 0.$$

Поэтому

$$\hat{u}_1[r_2(\varphi), \varphi] - \hat{u}_1[r_1(\varphi), \varphi] + \mu \hat{v}[r_2(\varphi), \varphi] = 0. \quad (9.6)$$

Так как функция $\hat{u}_1(r, \varphi)$ непрерывна, то $\hat{u}_1[r_2(\varphi), \varphi] - \hat{u}_1[r_1(\varphi), \varphi] = \alpha(\varphi) [r_2(\varphi) - r_1(\varphi)]$, где $\alpha(\varphi)$ — конечная функция, равная нулю только в точках, в которых $\partial \hat{u}_1 / \partial N = 0$. С точностью до членов второго порядка можно в (9.6) заменить $\mu \hat{v}[r_2(\varphi), \varphi]$ на $\mu \hat{v}[r_1(\varphi), \varphi]$. Тогда (9.6) примет вид

$$r_2(\varphi) - r_1(\varphi) + \mu \frac{\hat{v}[r_1(\varphi), \varphi]}{\alpha(\varphi)} = 0. \quad (9.7)$$

Коэффициент при μ конечен и отличен от тождественного нуля, так была построена функция $\hat{v}(r, \varphi)$. Обозначим его наибольшее значение буквой A , и выберем $\mu = \varepsilon / A$. Тогда из (9.7) следует искомый результат.

Справедливо и более простое утверждение: в окрестности (в метрике L_2) любой функции ортогонального дополнения существует другая функция ортогонального дополнения. Напомним, что функция $\hat{F}(\varphi)$ должна подчиняться единственному условию (5.17). Любая функция, близкая к данной $\hat{F}(\varphi)$ в интервале $(0, \pi)$, может быть дополнена в интервале $(\pi, 2\pi)$ таким образом, чтобы

выполнялось условие (5.17). Тогда она будет близка к $\hat{F}(\varphi)$ в полном интервале. Заметим, что из этого обстоятельства и из непрерывности полей $\hat{u}(r, \varphi)$ также можно доказать утверждение, сформулированное в начале этого пункта.

Выражение «особых линий очень много», которое мы неоднократно употребляли, подразумевает сформулированные в последних двух пунктах свойства этих линий. По существу, эти свойства являются следствиями лишь того, что поля $\hat{u}(r, \varphi)$ — непрерывны, а $\hat{C}$ — их нулевые линии.

6. Упомянем еще одно свойство, относящееся, строго говоря, не к особым линиям, а к самим полям $\hat{u}(r, \varphi)$. Для любой линии C можно построить такую бесконечную последовательность вещественных полей $u_m(r, \varphi)$ ($m = 1, 2, \dots$), каждая из которых есть решение волнового уравнения, не имеет особенностей и пронормирована на единицу условиями (5.3) и (5.4), что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_C |u_m|^2 ds = 0. \quad (9.8)$$

Доказательство этого утверждения будет приведено в § 14, п. 6. Из (9.8), разумеется не следует, что существует функция, к которой стремятся $u_m(r, \varphi)$ при $m \rightarrow \infty$, и что, если такая функция все же существует, то C (любая линия!) есть ее нулевая линия.

7. Свойства магнитных особых линий $\hat{C}^{(m)}$ (см. (5.19)) аналогичны свойствам особых линий $\hat{C}$. Разумеется, замкнутые линии $\hat{C}^{(m)}$ должны быть резонансными контурами не для условий Дирихле, а для условий Неймана.

Отметим только удобное для вычислений свойство, следующее из того, что условие (5.19) равносильно условию, что $\hat{C}^{(m)}$ в каждой точке касается вектора $\text{grad } \hat{u}^{(m)}(x, y)$. Если уравнение линии $\hat{C}^{(m)}$ записано в форме $y = y(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \hat{u}^{(m)}(x, y) / \partial y}{\partial \hat{u}^{(m)}(x, y) / \partial x}. \quad (9.9)$$

Линии $\hat{C}^{(m)}$ являются интегральными кривыми уравнения (9.9). В частности отсюда следует, что при заданном поле $\hat{u}^{(m)}(x, y)$ почти через каждую точку плоскости можно провести линию $\hat{C}^{(m)}$.

Глава III. НЕАППРОКСИМИРУЕМОСТЬ БЛИЖНИХ ПОЛЕЙ

§ 10. Условия аппроксимируемости для ближних полей

1. Выше мы обсуждали ограничения, которым поля токов, расположенных на особых линиях, подчиняются на бесконечно большом расстоянии от этой линии, т.е. ограничения (3.15) для диаграмм $f(\varphi)$. Однако поля таких токов подчинены аналогичным— и даже более сильным—ограничениям также и на конечном расстоянии от $\hat{C}$. Эти ограничения имеют такой же вид, как и (3.15), но относятся к самому полю $u(r, \varphi)$, а не к его асимптотике $f(\varphi)$.

Найдем эти условия. Построим замкнутый контур Σ , окружающий особую линию $\hat{C}$. Контур должен быть достаточно гладким, чтобы вне Σ существовали решения задач Дирихле и Неймана с условиями излучения, а в остальном он может быть произвольным. Построим на Σ функцию, играющую такую же роль, как и $\hat{F}(\varphi)$ в (3.15).

Так как линия $\hat{C}$ особая, то существует вещественное поле $\hat{u}(r, \varphi)$, равное на ней нулю и не имеющее нигде особенностей. Мы здесь используем отсутствие особенностей у $u(r, \varphi)$ не во всей плоскости, а только в области внутри Σ —это обстоятельство будет существенным для построения следующих двух параграфов. Обозначим значение $\hat{u}(r, \varphi)$ на Σ через $\hat{u}(\sigma)$, где σ —координата на контуре Σ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$). Решим следующую задачу Дирихле в области, внешней по отношению к Σ — найдем поле, удовлетворяющее однородному волновому уравнению, на Σ равное $\hat{u}(\sigma)$, а на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$) удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда. Это поле будет комплексным, так как оно комплексно при $r \rightarrow \infty$. Эта внешняя задача Дирихле всегда имеет решение, так как частота—величина вещественная.

Обозначим через $\hat{v}(r, \varphi)$ вспомогательное поле, равное внутри контура Σ полю $\hat{u}(r, \varphi)$, а вне Σ —построенному решению задачи Дирихле. Поле $\hat{v}(r, \varphi)$ всюду удовлетворяет волновому уравнению, удовлетворяет условию излучения; оно непрерывно, и его единственная особенность — разрыв нормальной производной на

Σ . Обозначим этот разрыв через $\hat{V}^*(\sigma)$ ($V^*(\sigma) = [\partial v / \partial N]$, где N — нормаль к Σ). Он является тем «током», который создает поле $\hat{v}(r, \varphi)$.

Можно обойтись без решения упомянутой внешней задачи Дирихле и находить $\hat{V}(\sigma)$ непосредственно по известному значению поля $\hat{v}$ на Σ , не продлевая предварительно это поле во внешнюю область. В терминах теории потенциала функция $V(\sigma)$ есть плотность простого слоя, распределенного на Σ . Двойного слоя на Σ нет, так как само поле $\hat{v}$ непрерывно. Поле, созданное простым слоем с плотностью $\hat{V}(\sigma)$ и удовлетворяющее условию излучения, есть

$$\hat{v}(r, \varphi) = \frac{1}{4i} \int_{\Sigma} \hat{V}(\sigma) H_0^{(2)}(k|r - r_0|) d\sigma, \quad (10.1)$$

где r имеет координаты (r, φ) , а r_0 — точка на Σ (ср., например, [23, (3.51) и (3.53)]). Когда r тоже лежит на Σ , слева в (10.1) стоит известная функция $u(\sigma)$, и уравнение (10.1) становится интегральным для $V(\sigma)$. Это уравнение только свободным членом отличается от уравнения для тока, который возник бы при дифракции на металлическом теле с той же поверхностью Σ (см., например, [17, (12.23)]). Уравнение это — уравнение первого рода, т.е. некорректное, однако наличие особенности (хотя и слабой — логарифмической) в ядре позволяет решать его относительно простыми методами и находить «ток» $V(\sigma)$.

Этот «ток» и участвует в условиях, которым подчиняются на Σ все поля, созданные любыми токами $j(s)$ (см. (2.6a)) на $\hat{C}$. Доказательство столь же элементарно, как и соответствующее доказательство в § 5, п. 2. Применим к функциям $u(r, \varphi)$ и $\hat{v}(r, \varphi)$ формулу Грина во всей бесконечной плоскости. Обе функции удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению и одинаковым условиям при $r \rightarrow \infty$. Поле $u(r, \varphi)$ имеет разрыв производной на $\hat{C}$, равный $j(s)$. Поле $\hat{v}(r, \varphi)$ имеет разрыв производной на Σ , равный $\hat{V}^*(\sigma)$. Формула Грина дает

$$\int_{\Sigma} u(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) d\sigma = \int_{\hat{C}} \hat{v}(s) j(s) ds, \quad (10.2)$$

где $u(\sigma)$ — значение функции $u(r, \varphi)$ на Σ , $\hat{v}(s)$ — значение функции $\hat{v}(r, \varphi)$ на $\hat{C}$. Так как на $\hat{C}$ функция $\hat{v}(r, \varphi)$ совпадает с $\hat{u}(r, \varphi)$, т.е. согласно (5.7) равна нулю, то при любых токах $j(s)$ правая часть (10.2) тоже равна нулю, и, следовательно,

$$\int_{\Sigma} u(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) d\sigma = 0. \quad (10.3)$$

Из (10.3) вытекают те же свойства системы полей $u(\sigma)$, которые следуют из (3.15) для системы диаграмм $f(\varphi)$. Полная система токов $j(s)$ на $\hat{C}$ создает на любом контуре Σ , окружающем $\hat{C}$, неполную систему полей $u(\sigma)$, функцией ортогонального дополнения этой системы является функция $\hat{V}(\sigma)$ (см. (10.1)). Функциями $u(\sigma)$ можно аппроксимировать только такие функции $U(\sigma)$, заданные на Σ , которые удовлетворяют условиям

$$b_{\Sigma} \equiv \int_{\Sigma} U(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) d\sigma = 0. \quad (10.4)$$

Повторяя соображения § 3, п. 5, заметим, что если на $\hat{C}$ обращается в нуль несколько функций $\hat{u}(r, \varphi)$, то на одном и том же контуре Σ будет существовать не одна функция ортогонального дополнения $\hat{V}(\sigma)$, а несколько. Тогда для аппроксимируемости какой-либо функции $U(\sigma)$ необходимо, чтобы она была ортогональна всем этим функциям. Ортогональность всем линейно независимым функциям ортогонального дополнения является достаточным условием аппроксимируемости $U(\sigma)$.

Если нормировать функции ортогонального дополнения $\hat{V}(\sigma)$ условием

$$\int_{\Sigma} |\hat{V}(\sigma)|^2 d\sigma = 1 \quad (10.5)$$

(отличным от нормировки, которая получается из (10.1) при нормировке $\hat{u}(r, \varphi)$ по (5.4)), то минимум невязки, т.е. квадрата расстояния (аналогичного (3.21б)) между какой-либо заданной функцией $U(\sigma)$ и полем, созданным любым током на $\hat{C}$, будет величина $|b_{\Sigma}|^2$ [ср. (3.20а)], т.е.

$$\int_{\Sigma} |U(\sigma) - u(\sigma)|^2 d\sigma \geq |b_{\Sigma}|^2. \quad (10.6)$$

Например, если ток расположен на дуге окружности (ток, индуцированный на цилиндрическом зеркале), и для некоторого n имеем $J_n(ka) = 0$ (a —радиус окружности), то на любой окружности, концентрической с данной и большей, чем она, отраженное поле может аппроксимировать какую-либо функцию с точностью не большей, чем квадрат модуля ее n -го коэффициента Фурье.

2. Если в качестве контура Σ , окружающего особую линию $\hat{C}$, выбрана окружность, то можно решить упомянутую задачу Дирихле аналитически и получить явное выражение для $V(\sigma)$ через коэффициенты Фурье поля $\hat{u}(r, \varphi)$, аналогичное выражению (5.9) для функции $\hat{F}(\sigma)$.

Обозначим радиус окружности Σ через R . Поле $\hat{u}(r, \varphi)$ задано в виде ряда (5.8), так что на Σ

$$\hat{u}(\varphi) = \sum C_n J_n(kR) \cos(n\varphi), \quad (10.7)$$

где вместо σ введен угол φ . Задача Дирихле при $r \geq R$ имеет очевидное решение

$$\hat{v}(r, \varphi) = \sum C_n J_n(kR) \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)}(kR)} \cos(n\varphi), \quad (10.8)$$

в котором обеспечены выполнение условия излучения и непрерывность при $r = R$. Учитывая выражение для вронскиана цилиндрических функций, найдем для $\hat{V}(\varphi)$ (см. (10.1)), т.е. для разности нормальных производных поля (5.8) при $r \leq R$ и поля $\hat{v}(r, \varphi)$ (см. (10.8)) при $r \geq R$, выражение

$$\hat{V}(\varphi) = -\frac{2i}{\pi R} \sum C_n \frac{1}{H_n^{(2)}(kR)} \cos(n\varphi). \quad (10.9)$$

Это и есть искомое явное выражение для $\hat{V}(\varphi)$.

При $R \rightarrow \infty$, т.е. когда окружность Σ уходит на бесконечность, $\hat{V}(\varphi)$ только множителем k отличается от $\hat{F}^*(\varphi) e^{ikR/\sqrt{kR}}$, как это и следует из сопоставления (10.3) и (3.14). При любом конечном R множитель $1/H_n^{(2)}(kR)$ убывает с ростом n при $n \gg kR$. Поэтому коэффициенты ряда Фурье $C_n/H_n^{(2)}(kR)$ (см. (10.9)) с высокими номерами меньше, чем соответствующий тому же n коэффициент Фурье $C_n(-i)^n$ ряда (5.9) для $\hat{F}^*(\varphi)$. Это означает, что функция $\hat{V}(\varphi)$ более гладкая, чем функция $\hat{F}(\varphi)$. Чем меньше kR , тем при меньших n начинается убывание коэффициентов Фурье в (10.9) по сравнению с коэффициентами Фурье в (5.9). Чем меньше kR , тем функция $\hat{V}(\varphi)$ более гладкая, чем ее асимптотическая (при $R \rightarrow \infty$) форма $F(\varphi)$.

Если данная функция $U(\sigma)$ не очень изрезана, то чем более гладкой будет функция $\hat{V}(\sigma)$ в (10.4), тем больше $|b_2|$ и тем более существенным является ограничение (10.6).

В этом смысле ограничение на аппроксимируемость полей на контуре Σ тем слабее, чем на большем расстоянии от $\hat{C}$ находится этот контур. Эти ограничения убывают при удалении от токов, создающих поле $u(r, \varphi)$; менее всего они проявляются для диаграмм. В следующем параграфе мы столкнемся с ситуацией, когда эти ограничения существуют только до некоторого конечного расстояния от токов, а на больших расстояниях они не просто ослабевают, а пропадают.

Проиллюстрируем это убывание на примере резонансного прямоугольника (§ 6, п. 4). Он не является особой линией в смысле, которому этот термин был придан в § 6, так как интеграл (5.4) для соответствующей ему функции $F(\varphi)$ не существует. Однако для любого конечного контура Σ интеграл в (10.5) существует, токи на нем создают неполную систему полей на Σ .

Рассмотрим для простоты записи квадрат; для него

$$\hat{u}(x, y) = \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{a}, \quad (10.10)$$

где a —сторона квадрата, а центр системы координат—в центре квадрата. Контур Σ —окружность $r = R$. На Σ поле (10.9) имеет вид

$$\hat{u}(R, \varphi) = \cos \left(\frac{kR}{\sqrt{2}} \cos \varphi \right) \cos \left(\frac{kR}{\sqrt{2}} \sin \varphi \right), \quad (10.11)$$

где $k = \pi\sqrt{2}/a$ —резонансная частота. Разлагая эту функцию в ряд Фурье, получим для нее, разумеется, ряд типа (10.7). Коэффициенты C_n отличны от нуля только для $n = 4m$ ($m = 0, 1, \dots$) и не зависят от m . С точностью до не существенного множителя, для $\hat{V}(\varphi)$ (см. (10.9)) будет

$$\hat{V}(\varphi) = \frac{1}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{H_{4m}^{(2)}(kR)} \cos(4m\varphi). \quad (10.12)$$

Этот ряд сходится и интегрируем с квадратом при любых R , так что поля токов, расположенных на сторонах резонансного квадрата (и, вообще, резонансного прямоугольника), образуют неполную систему на любой окружности—и, вообще, на любом контуре, заключающем токи. Однако убывание членов ряда (10.12) начинается лишь при $4m > kR$. При $kR \gg 1$ ряд (10.12) содержит много высоких гармоник, и $\hat{V}(\varphi)$ представляет собой быстро меняющуюся функцию.

3. Неполную на контуре Σ систему функций образуют не только поля $u(\sigma)$, созданные токами на $\hat{C}$, но и их нормальные производные $\partial u(r, \varphi) / \partial N|_{\Sigma}$, где N — нормаль к Σ .

Симметрия этих свойств функций $u(r, \varphi)|_{\Sigma}$ и $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$ есть очевидное проявление симметрии между электрическим и магнитным полями. Напомним (см. § 2, п. 2), что двумерная скалярная задача возникает из трехмерной векторной, если в последней $H_z \equiv 0$ и $\partial / \partial z \equiv 0$. Тогда $u(r, \varphi)$ есть E_z , а производная $\partial u / \partial N$ есть H_s , где s направлено вдоль той линии, нормалью к которой является N . Неполнота системы функций $u(r, \varphi)$ означает, что произвольно выбранная функция не может быть в общем случае аппроксимирована полями E_z , созданными токами, если они

расположены на цилиндре, направляющая которого есть $\hat{C}$. Неполнота системы функций $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$ означает, что произвольно выбранную функцию нельзя также аппроксимировать полями H_s , созданными такими же токами.

Для получения условий типа (10.3) для $\partial u / \partial N$ надо при построении поля $\hat{u}(r, \varphi)$ во всей плоскости решать не внешнюю по отношению к Σ задачу Дирихле, а внешнюю задачу Неймана. Внутри Σ известно поле $u(r, \varphi)$; вычислим по нему функцию $\partial u / \partial N$. Затем найдем вне Σ поле, удовлетворяющее условию излучения и имеющее на Σ то же значение нормальной производной. Назовем $\hat{w}(r, \varphi)$ поле, внутри Σ равное $\hat{u}(r, \varphi)$, а вне — решению этой задачи Неймана. Единственной особенностью поля $\hat{w}(r, \varphi)$ является его разрыв на Σ . Обозначим его через $\hat{W}(\sigma)$,

$$\hat{W}(\sigma) = [\hat{w}(r, \varphi)]. \quad (10.13)$$

Применим к полю $u(r, \varphi)$, созданному током $j(s)$ на $\hat{C}$, и к полю $\hat{w}(r, \varphi)$, созданному «магнитным током» $\hat{W}(\sigma)$ на Σ , формулу Грина. Получим, аналогично формуле (10.2),

$$-\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial N} \hat{W}(\sigma) d\sigma = \int_{\hat{C}} \hat{w}(s) j(s) ds, \quad (10.14)$$

где $\hat{w}(s)$ — значение поля $\hat{w}(r, \varphi)$ на $\hat{C}$. На $\hat{C}$ поле $\hat{w}(r, \varphi)$ совпадает с $\hat{u}(r, \varphi)$, т.е. равно нулю, и для $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$, где $u(r, \varphi)$ создано любыми токами на $\hat{C}$, будет

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial N} \hat{W}(\sigma) d\sigma = 0. \quad (10.15)$$

Как и выше, из этого следует, что функциями $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$ можно аппроксимировать только такие заданные на Σ функции, произведение (10.15) которых на $\hat{W}^*(\sigma)$ равно нулю, и что, при соответствующей нормировке $\hat{W}(\sigma)$, невязка при аппроксимации любой функции функциями $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$ не меньше квадрата модуля произведения этой функции на $\hat{W}^*(\varphi)$, аналогично (10.6) и (10.4).

Если Σ — окружность, и $\hat{u}(r, \varphi)$ при $r \leq R$ (R — радиус окружности Σ) дано рядом (5.8), то решением задачи Неймана при $r > R$ для $\hat{w}(r, \varphi)$ будет, аналогично (10.8), ряд

$$\hat{w}(r, \varphi) = \sum C_n J_n'(kR) \frac{H_n^{(2)}(kR)}{H_n^{(2)'}(kR)} \cos(n\varphi). \quad (10.16)$$

Его нормальная производная при $r = R + 0$ равна нормальной производной $\hat{u}(r, \varphi)$ при $r = R - 0$, а разрыв самой функции на Σ , т.е. функция $W(\sigma)$ (см. (10.13)), равна, аналогично (10.9),

$$\hat{W}(\sigma) = \frac{2i}{\pi k R} \sum C_n \frac{1}{H_n^{(2)'}(kR)} \cos(n\varphi). \quad (10.17)$$

Асимптотика для $H_n^{(2)'}(kR)$ при $n \gg kR$ примерно такая же, как и для $H_n^{(2)}(kR)$, т.е. множитель $1/H_n^{(2)'}(kR)$ быстро убывает с ростом n при $n \gg kR$, и коэффициенты Фурье ряда (10.17) с большими номерами меньше, чем коэффициенты Фурье ряда (5.9) для $\hat{F}(\varphi)$. Для (10.17) сохраняются соображения, которые выше были сформулированы по поводу $\hat{V}(\varphi)$ (см. (10.9)); с удалением от токов запрет на аппроксимацию ослабляется.

Так как при $kR \gg n$ асимптотика для $H_n^{(2)} \text{up} 30 \text{prime}(kR)(kR)$ близка к асимптотике для $H_n^{(2)}(kR)$, то ряд (10.17), как и ряд (10.9), при $kR \rightarrow \infty$ только множителем $e^{ikR}/\sqrt{kR}$ отличается от ряда (5.9) для $\hat{F}^*(\varphi)$. Это, разумеется, согласуется с тем, что в дальней зоне для полей, удовлетворяющих условию излучения, нормальная производная (т.е. $\partial/\partial r$) любого поля только множителем отличается от самого поля.

4. Построения первых трех пунктов этого параграфа почти автоматически переносятся на поля, созданные магнитными токами (2.6б), расположенными на особых линиях магнитного типа $\hat{C}^{(m)}$, определенных условием (5.19). Мы не будем выписывать все формулы для этого случая. На любом контуре Σ , окружающем $\hat{C}^{(m)}$, можно построить функции, аналогичные $\hat{V}(\sigma)$ и $\hat{W}(\sigma)$. Они входят в условия, которым на Σ удовлетворяют поля $u^{(m)}(r, \varphi)$, созданные магнитными токами, и их нормальные производные $\partial u^{(m)}/\partial N$. Формулы эти аналогичны формуле (5.21) для диаграмм $f^{(m)}(\varphi)$ таких токов.

Функция $\hat{V}^{(m)}(\sigma)$ получается продлением вспомогательного поля $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, введенного в §5, п.3, в область вне Σ с сохранением непрерывности на Σ ; $\hat{V}^{(m)}(\sigma)$ есть разрыв нормальной производной полученного этим продлением вспомогательного поля $\hat{v}^{(m)}(r, \varphi)$. Функция $\hat{W}^{(m)}(\sigma)$ получается продлением того же поля $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, сохраняющим непрерывность нормальной производной; $\hat{W}^{(m)}(\sigma)$ есть разрыв на Σ построенного таким образом поля $\hat{w}^{(m)}(r, \varphi)$.

Упомянутые в предыдущем абзаце условия имеют вид

$$\int_{\Sigma} u^{(m)}(\sigma) \hat{V}^{(m)*}(\sigma) d\sigma = 0; \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial N} \hat{W}^{(m)}(\sigma) d\sigma = 0. \quad (10.18)$$

Они полностью аналогичны условиям (10.3) и (10.15). Из них следуют условия, аналогичные (10.4) и условию, сформулированному после формулы (10.5). Условия эти—условия равенства нулю произведения заданной функции на соответствующую функцию ортогонального дополнения—являются необходимыми для аппроксимируемости заданной функции. Если для данной линии $\hat{C}^{(m)}$ существует более чем одна функция $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, то функций ортогонального дополнения как для системы функций $u^{(m)}(r, \varphi)|_{\Sigma}$, так и для системы функций $\partial u^{(m)}/\partial N|_{\Sigma}$ будет более, чем одна. Достаточным условием аппроксимируемости будет ортогональность заданной функции ко всем функциям ортогонального дополнения систем функций $u^{(m)}|_{\Sigma}$ или $\partial u^{(m)}/\partial N|_{\Sigma}$.

§ 11. Построение решения волнового уравнения по его нулевой линии; дуга окружности

1. Нахождение нулевой линии $\hat{C}$ заданного вещественного поля $\hat{u}(r, \varphi)$ представляет собой несложную задачу. Если поле $\hat{u}(r, \varphi)$ имеет простой вид, то она решается аналитически, и, во всяком случае, легко решается на ЭВМ. Это относится и к особой линии магнитного типа $\hat{C}^{(m)}$, определяемой по полю $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ согласно (5.18); их построение на ЭВМ может производиться по уравнению (9.9). Далее мы в основном будем рассматривать поля $u(r, \varphi)$ и линии C .

Насколько нам известно, обратная задача — определение решения волнового уравнения $u(r, \varphi)$ по его нулевой линии — в общем виде не решена. Неизвестны и достаточные условия, при которых данная линия является нулевой линией некоторого поля $u(r, \varphi)$. Во всей проблеме аппроксимируемости эта задача (и аналогичная трехмерная векторная задача)—одна из центральных. В этом и следующем параграфах будут приведены примеры решения этой обратной задачи в нескольких простых случаях.

В предыдущем параграфе мы установили, что если линия C —особая, т.е. диаграммами, создаваемыми распределенными на ней токами, нельзя аппроксимировать произвольную диаграмму, то полями этих токов нельзя аппроксимировать и произвольное ближнее поле, т.е. поле, заданное на любом контуре Σ , окружающим $\hat{C}$ и находящимся от $\hat{C}$ на конечном расстоянии. При этом по определению, данному в § 5, поле $u(r, \varphi)$ не имело особенностей на всей плоскости. Однако далее мы будем рассматривать более общий случай, когда линия $\hat{C}$ есть нулевая

линия поля $\hat{u}(r, \varphi)$, не имеющего особенностей только в части плоскости. И в этом случае мы сохраним за такой линией название особой, тем самым расширив понятие особой линии, и сохраним обозначения $\hat{C}$ и $\hat{u}(r, \varphi)$, и, аналогично, обозначения $\hat{C}^{(m)}$ и $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$.

Для любого контура Σ , целиком лежащего в области аналитичности поля $\hat{u}(r, \varphi)$, даже если вне этого контура $\hat{u}(r, \varphi)$ имеет какие-либо особенности, остается справедливым результат § 10—поля $u(r, \varphi)$ полной системы токов, расположенных на $\hat{C}$, на Σ образуют неполную систему $u(\sigma)$. Это следует из построений предыдущего параграфа, в которых свойства поля $\hat{u}(r, \varphi)$ вне Σ не играли никакой роли. Сохранится и предложенный там метод построения на Σ функций ортогонального дополнения к системе функций $u(\sigma)$ (или к системе функций $\partial u(\tau)/\partial N$), основанный на решении в области вне Σ задачи Дирихле (или задачи Неймана) с условием излучения Зоммерфельда или на решении уравнений теории потенциала.

2. В этом параграфе мы рассмотрим задачу определения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ по ее нулевой линии $\hat{C}$, когда $\hat{C}$ —дуга окружности. Так как при этом $\hat{C}$ —координатная линия системы координат, в которой волновое уравнение разделяется, то решение получается, разумеется, элементарно. Если мы ограничились бы поиском полей $\hat{u}(r, \varphi)$, не имеющих особенностей на всей плоскости, то задача была бы решена, по существу, уже в § 6. Нас будет интересовать более широкий класс особых линий, так как он определен в предпоследнем абзаце предыдущего пункта. В проблеме аппроксимируемости ближних полей существен именно этот класс. В этом смысле дуга любой окружности (не только резонансной) есть особая линия.

Пусть $\hat{C}$ —дуга окружности радиуса a . Если для какого-нибудь n ($n = 0, 1, \dots$) $J_n(ka) = 0$, то $\hat{C}$ —дуга резонансной окружности, и ей соответствует поле $\hat{u}(r, \varphi)$, даваемое формулой (6.1). Это поле не имеет особенностей на всей плоскости. Поле это—единственное, с точностью до «поляризационного» вырождения, т.е. замены $\cos(n\varphi)$ на $\cos[n(\varphi - \varphi_0)]$ с произвольным φ_0 ; далее мы об этом вырождении упоминать не будем.

Пусть при всех n $J_n(ka) \neq 0$, т.е. $\hat{C}$ —дуга нерезонансной окружности. Этой линии $\hat{C}$ соответствует, в частности, поле

$$\hat{u}(r, \varphi) = J_\nu(kr) \sin(\nu\varphi), \quad (11.1)$$

если ν есть корень уравнения

$$J_\nu(ka) = 0, \quad (11.2)$$

рассматриваемого как уравнение относительно индекса ν .

Зависимость ν от ka , т.е. зависимость индекса функции Бесселя от величины его корня, иллюстрируется графиками рис. 11.1. Кривая $m=1$ на нем соответствует первому корню функции Бесселя, $m=2$ —второму. При ka , меньшем 2,40, уравнение (11.2) не имеет решения, при $2,40 < ka < 5,52$ —существует одно решение, меняющееся от $\nu=0$ при $ka=2,40$ до $\nu=2,2$ при $ka=5,52$. Этому решению соответствует кривая $m=1$. При $ka > 5,52$ появляется второе решение для ν , соответствующее кривой $m=2$, и так далее. Например, при $ka=5,0$ будет одно решение $\nu=1,9$ ($m=1$).

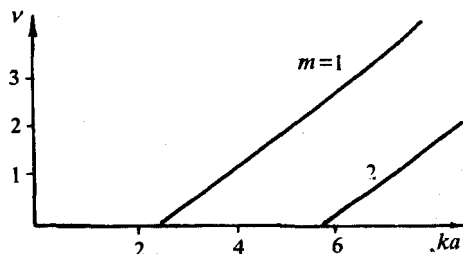


Рис. 11.1

С ростом ka число значений ν , при которых выполняется (11.2), растет и примерно равно целой части отношения ka/π . Действительно, при небольших ν и $m \gg \nu$ корень функции Бесселя асимптотически равен, с точностью до величин порядка $1/m$,

$$ka = \pi (m + \nu/2 - 1/4). \quad (11.3a)$$

Например, при $\nu = 1/2$ $J_\nu(ka)$ пропорционально $\sin(ka)$, и последняя формула принимает точный вид $ka = \pi m$. Количество корней ν уравнения (11.2) при данном ka равно количеству корней ka уравнения (11.2), меньших этого ka , при $\nu=0$ (см. рис. 11.1), т.е. при больших ka равно асимптотически $ka/\pi + 1/4$.

Так как по условию $\hat{C}$ есть дуга нерезонансной окружности, то ν , удовлетворяющее уравнению (11.2), не есть целое число. Этим определяется область аналитичности поля (11.1). При $\varphi = +0$ и при $\varphi = 2\pi - 0$ это поле имеет различные значения, т.е. на полупрямой $\varphi = 0$, $r > 0$ аналитичность нарушается. Она нарушается и в центре окружности, при $r = 0$, так как при $kr \ll 1$ $\hat{u}(r, \varphi) \sim r^\nu$, а $\nu \neq n$. Поэтому область аналитичности поля (11.2) состоит из всей плоскости, из которой исключена эта полупрямая. Так как в (11.1) множитель $\sin(\nu\varphi)$ можно заменить на $\sin[u(\varphi - \varphi_0)]$ при любом φ_0 , то можно построить функцию $\hat{u}(r, \varphi)$, равную нулю на любой дуге окружности $r = a$ и аналитичную в любой области, не содержащей полупрямую

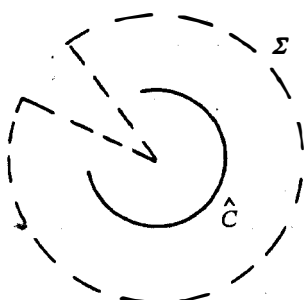


Рис. 11.2

$\varphi = \varphi_0$, $r \geq 0$. Контур Σ , на котором неполна система полей, создаваемых токами на дуге нерезонансной окружности, не должен содержать центр этой окружности и какую-либо исходящую из нее полупрямую (рис. 11.2). Напомним, что это показано только для описанного элементарного способа построения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ по особой линии $\hat{C}$. Даже и при таком способе, как мы увидим далее, можно построить другие поля $\hat{u}(r, \varphi)$ с другими областями аналитичности.

Область аналитичности любого поля, равного нулю на дуге нерезонансной окружности, не содержит всю эту окружность. Действительно, если бы вся окружность лежала бы в области аналитичности некоторого поля, а дуга этой окружности была бы нулевой линией этого поля, то и вся окружность была бы нулевой линией. Это следует из того, что и нулевая линия аналитического поля, и окружность—аналитические линии, а две аналитические линии, имеющие общую часть, совпадают полностью. Однако окружность—нерезонансная, т.е. не существует решения волнового уравнения, не имеющего внутри нее особенностей, равного на ней нулю и не равного нулю тождественно. Поэтому область аналитичности поля, равного нулю на дуге нерезонансной окружности, не может быть вся плоскость. И, в частности, диаграммами токов, расположенных на такой дуге, может быть аппроксимирована любая функция.

3. Поле $\hat{u}(r, \varphi)$, равное нулю на дуге окружности, можно искать не только в виде (11.1), но, например, также в виде

$$\hat{u}(r, \varphi) = N_\nu(kr) \sin(\nu\varphi), \quad (11.4)$$

где ν есть корень уравнения

$$N_\nu(ka) = 0. \quad (11.5)$$

Здесь N_ν —функция Неймана.

Зависимость ν от ka , т.е. зависимость индекса функции Неймана от ее корня, даваемая уравнением (11.5), имеет качественно тот же вид, что и зависимость ν от ka по (11.2). Графики этой зависимости для трех первых корней ($m = 1, 2, 3$) функции Неймана представлены на рис. 11.3. Эти графики подобны графикам рис. 11.1, только смещены вправо примерно на $\pi/2$. Уравнение (11.5) не имеет корней при $ka < 0,89$; оно имеет один корень при $0 < ka < 3,96$, два корня при $3,96 < ka < 7,09$ и так далее. Например, при $ka = 5,0$ уравнение (11.5) имеет два корня: $\nu = 0,71$ ($m = 2$) и $\nu = 3,42$ ($m = 1$).

При $m \gg \nu$ корень уравнения (11.5), рассматриваемого как уравнение относительно ka , с той же точностью, что и (11.3а), равен

$$ka = \pi(m + \nu/2 - 3/4). \quad (11.36)$$

Например, при $\nu = 1/2$ $N_\nu(ka)$ пропорционально $\cos(ka)$, и (11.36) переходит в точную формулу: $ka = \pi(m - 1/2)$. При $ka \gg 1$ число корней функции $N_\nu(ka)$ асимптотически равно $ka/\pi + 3/4$.

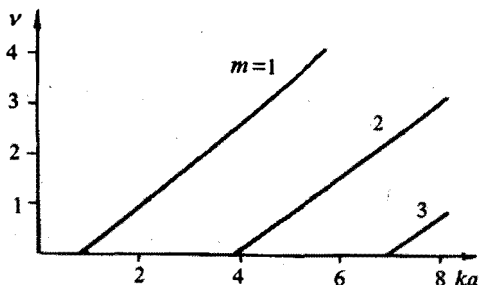


Рис. 11.3

При нецелых ν область аналитичности поля (11.4)—та же, что и поля (11.1). Однако условие, что $\hat{C}$ — дуга нерезонансной окружности, не нарушается, если ka будет таким, что решением уравнения (11.5) будет целое число ($\nu = n$), так как поле (11.4) и при этом будет иметь особенность в центре круга O . Поэтому внутри контура Σ не должна содержаться только точка O . Контур Σ может быть таким же, как на рис. 11.2, причем два луча могут быть заменены любыми кривыми, либо состоять из двух замкнутых контуров, внутренний из которых окружает точку O .

Более общим, чем (11.1) и (11.4), полем, равным нулю на дуге окружности радиуса a , является следующая линейная комбинация этих полей:

$$\hat{u}(r, \varphi) = [N_\nu(ka)J_\nu(ka) - J_\nu(ka)N_\nu(ka)]\cos(\nu\varphi). \quad (11.6)$$

Это поле равно нулю на $\hat{C}$ при любом значении индекса ν . В частности, может быть и $\nu = 0$; поэтому в (11.6) мы заменили $\sin$ на $\cos$. Радиус a может быть сколь угодно мал.

При комплексных ν поле (11.6) комплексно. Так как волновое уравнение не содержит комплексных параметров, и $u(r, \varphi)$ не подчинено никаким условиям типа условия излучения, то вещественная и мнимая части поля, определяемого формулой (11.6) при комплексных ν , тоже являются решением волнового уравнения, т.е. эта формула определяет два вещественных поля, равных нулю на $\hat{C}$. Область аналитичности поля (11.6) та же, что полей (11.4) и (11.1).

4. Ортогональное дополнение $\hat{V}(\sigma)$ на контуре Σ , находящемся в общей области аналитичности нескольких функций $\hat{u}(r, \varphi)$, различны для различных функций. Для полей (11.1) и (11.4) их конечное число (как и корней уравнений (11.2) и (11.5)), примерно равное $2ka/\pi$, для поля (11.6) они зависят от свободного параметра ν .

Хотя этот параметр и может принимать любое значение, множество соответствующих функций ортогонального дополнения по существу не очень богато. При $ka \gg 1$, $|\nu| \ll ka$ поля (11.6) асимптотически пропорциональны $\sin k(r - a)$, т.е. с ростом ka эти поля перестают зависеть от ν , а все функции ортогонального дополнения будут близки друг к другу. При больших значениях $|\nu|$, в области дебаевской асимптотики цилиндрических функций, эти поля пропорциональны выражению $[(a/r)^\nu - (r/a)^\nu]$. Как при $r < a$, так и при $r > a$ они на Σ очень быстро меняются. Как мы уже отмечали, для таких «экзотических» функций $\hat{V}(\sigma)$ требование $b_\Sigma = 0$ (см. (10.4)), необходимое для аппроксимируемости какой-либо заданной на Σ функции $U(\sigma)$, не имеет практического значения; оно может явиться существенным ограничением только если сама функция $U(\sigma)$ тоже быстро меняется. Это означает, что если даже какая-либо функция $U(\sigma)$ неаппроксимируема, ибо отличен от нуля интеграл (10.4), но $|b_\Sigma| \ll 1$, то существует близкая к ней аппроксимируемая функция. Разумеется, не сколь угодно близкая—тогда была бы аппроксимируема и сама функция $U(\sigma)$, но такая, что невязка (10.6) мала.

Заметим уже здесь, что этим замечанием мы ослабляем различие между аппроксимируемостью ($b = 0$) и неаппроксимируемостью ($b \neq 0$) подобно тому, как само понятие аппроксимируемости ослабляет различие между реализуемостью и нереализуемостью (см. §3). Мы вернемся к этому вопросу (по существу методическому) в § 16.

Таким образом, рассмотренные выше поля (11.1) и (11.4), в которых ν может принимать только конечный ряд значений, дают довольно полную картину полей $\hat{u}(r, \varphi)$, для которых нулевой линией является дуга нерезонансной окружности.

5. Чем больше радиус a окружности, тем больше существует таких полей и связанных с ними функций $\hat{V}(\sigma)$. При $ka \rightarrow \infty$ число таких функций неограниченно растет, даже если учитывать только функции существенно различные и притом не меняющиеся на Σ очень быстро. При $a \rightarrow \infty$ особые точки полей $\hat{u}(r, \varphi)$ —центр окружности и исходящий из него луч—отодвигаются от дуги C на бесконечность, так что эти поля становятся аналитическими внутри очень больших контуров Σ , охватывающих $\hat{C}$. Все это согласуется с тем, что при $a \rightarrow \infty$ дуга переходит в отрезок

прямой, т.е. в такую особую линию, для которой полями $\hat{u}(r, \varphi)$ являются все решения волнового уравнения, несимметричные относительно нее и аналитичные во всей плоскости.

Напомним, что увеличение числа функций ортогонального дополнения и расширение области аналитичности полей $\hat{u}(r, \varphi)$ означает, что усиливаются ограничения на поля, которые могут аппроксимировать токи, распределенные на $\hat{C}$. Эти ограничения, как мы видим на этом примере, могут усиливаться, несмотря на удлинение линии $\hat{C}$. Существенным здесь оказывается не ее длина, а близость ее к особой линии с очень большими ограничениями (богатым набором функций $\hat{V}(\sigma)$). Мы обсудим этот эффект в следующей главе.

Метод фактического построения функций $\hat{V}(\sigma)$ на контуре Σ описан в § 10. Если Σ представляет собой окружность, а поле $\hat{u}(r, \varphi)$ задано в виде ряда (5.8), так что его ряд Фурье на Σ дается формулой (10.8), то для функций $\hat{V}(\sigma)$ получается явный вид ряда Фурье (10.9). Однако в формулах § 10 начало координат совпадало с центром окружности Σ , а в формулах (11.1), (11.4) и (11.6) начало координат лежит в центре окружности, дугой которой является линия $\hat{C}$. Для применения результатов § 10 надо перенести начало координат, т.е. представить эти поля в виде ряда Фурье по углу, отсчитываемому в цилиндрической системе координат с центром в центре окружности Σ . Этот пересчет легко произвести по формуле сложения для цилиндрических функций [19; 9.1.79].

6. Для простого примера этого параграфа легко построить в явном виде также и функции $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, для которых, по определению, нормальная производная обращается в нуль на этой дуге. Дуга окружности является одновременно и особой линией магнитного типа.

Очевидно, что полями $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ будут являться те же поля (11.1) и (11.4), в которых, однако, числа ν должны удовлетворять не уравнениям (11.2) или (11.5), а одному из следующих уравнений:

$$J_{\nu}'(ka) = 0, \quad N_{\nu}'(ka) = 0. \quad (11.7a, b)$$

Зависимость ν от ka , даваемая каждым из этих уравнений, изображается графиками того же вида, что представлены на рисунках 11.1 и 11.3. Графики, соответствующие уравнению (11.7a), подобны графикам рис. 11.1, соответствующим уравнению (11.2), но только смещены влево; кривая $m = 1$ начинается в точке $ka = 0$, $\nu = 0$. Например, при $ka = 5,0$ уравнение (11.7a) имеет два решения: $\nu = 3,7$ ($m = 1$) и $\nu = 0,78$ ($m = 2$). Уравнению (11.7b) соответствуют графики, аналогичные графикам рис. 11.3, но смещенные вправо, так что кривая $m = 0$ начинается в точке

$ka = 2,19$, $\nu = 0$. При $ka = 5,0$ уравнение (11.76) имеет один корень $\nu = 2,0$.

Аналогом поля $\hat{u}(r, \varphi)$ (см. (11.6)) является, очевидно, поле

$$\hat{u}^{(m)}(r, \varphi) = [N_\nu'(ka)J_\nu(kr) - J_\nu'(ka)N_\nu(kr)] \sin(\nu\varphi). \quad (11.8)$$

Оно тоже при любом ν удовлетворяет условию (5.19) на дуге $r = a$. К нему относятся все те замечания, которые выше были сделаны по поводу поля (11.6), только дебаевская асимптотика его отличается от асимптотики поля (11.6) знаком перед вторым слагаемым.

Таким образом, дуга окружности одновременно является и особой линией $\hat{C}$, и особой линией магнитного типа $\hat{C}^{(m)}$ в том, более широком понимании, которое приведено в начале этого параграфа. Области аналитичности соответствующих полей $\hat{u}$ и $\hat{u}^{(m)}$ совпадают. Для любого замкнутого контура Σ , содержащего эту дугу и не содержащего центра окружности, будет реализовываться ситуация, описанная в § 5. Поля, созданные полной системой электрических токов на дуге, а также поля, созданные полной системой магнитных токов на ней, в отдельности не образуют полных систем полей на Σ , но вместе они образуют такую систему.

§ 12. Аналитическое продолжение поля собственного колебания за границу области

В этом параграфе мы опишем метод построения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ по заданной его нулевой линии $\hat{C}$, основанный на дополнении $\hat{C}$ до резонансного контура с последующим продолжением поля собственного колебания в область, внешнюю по отношению к этому контуру. Некоторые соображения об общем решении задачи о таком продлении будут высказаны в трех последних пунктах параграфа; в начале будут приведены примеры, аналогичные примерам § 6.

1. Пусть сначала $\hat{C}$ — незамкнутая линия. Дополним ее линией $C_{\text{доп}}$ до замкнутой линии (контура) C_0 таким образом, чтобы C_0 было резонансным (для условий Дирихле) контуром. Собственное колебание описывается некоторым полем, равным нулю на C_0 ; вычислим значение его нормальной производной на C_0 . Аналитическое продолжение есть поле (т.е. решение однородного волнового уравнения), равное нулю на C_0 и имеющее на C_0 то же значение нормальной производной, что и поле собственного колебания. Поле $\hat{u}(r, \varphi)$, равное нулю на $\hat{C}$, внутри C_0 есть поле собственного колебания, а вне — поле его аналитического продолжения. Если не учитывать возможность вырождения, то $\hat{u}(r, \varphi)$

вещественно. Оно, разумеется, не удовлетворяет условию излучения.

Задача аналитического продолжения может рассматриваться как *задача Коши*—на C_0 задано поле и его нормальная производная, надо найти поле вне C_0 . В нашем случае задача Коши ставится специальным образом—значение функции и ее производной не независимы друг от друга. Они связаны условием, что та же задача Коши для области внутри C_0 имеет решение, аналитическое во всей этой области.

Возможность любую незамкнутую линию $\hat{C}$ дополнить до контура C_0 , резонансного на заданной частоте, следует из теоремы Куранта о том, что расширение области монотонно понижает частоту ее собственного колебания. Если линия $C_{\text{доп}}$ очень близка к $\hat{C}$, так что площадь области внутри C_0 мала, то эта частота высока. При непрерывной деформации $C_{\text{доп}}$, при которой каждый следующий контур C_0 охватывает предыдущий (и совпадает с ним на $\hat{C}$), собственная частота непрерывно убывает и при какой-то форме контура C_0 будет равна заданной частоте.

Из этого рассуждения следует, в частности, что одна и та же незамкнутая линия $\hat{C}$ может быть особой линией не на одной частоте, а в целой полосе частот. Так, в примере предыдущего параграфа, когда $\hat{C}$ было дугой окружности радиуса a , решение уравнения (11.2) для ν существовало при всех $k > 2,40/a$. Область аналитичности для разных частот будет, вообще говоря, различной, однако вполне возможно (и в этом примере это имеет место), что некоторый контур Σ лежит в общей области аналитичности, и тогда неаппроксимируемость заданных на Σ функций будет иметь место для широкой полосы частот.

Заметим, что это позволяет расширить изложенный в § 8 метод определения формы рассеивающего тела, если тело это—экран (т.е. незамкнутая линия), а измерения можно производить в ближней зоне. Если форма экрана близка к дуге аналитической кривой, то описанные в § 8 методы применимы не только на одной частоте. Это позволяет, измеряя поле в ближней зоне на нескольких частотах, повысить вероятность какой-либо гипотезы о форме рассеивающего экрана или достоверность определения этой формы.

2. Этот прием построения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ очевидным образом переносится на построение поля $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ по заданной незамкнутой особой линии магнитного типа $\hat{C}^{(m)}$. Линия $\hat{C}^{(m)}$ тоже должна быть дугой аналитической кривой или состоять из нескольких таких дуг. Контур $C_0^{(m)}$, частью которого является данная линия

$\hat{C}^{(m)}$, должен быть резонансным на заданной частоте, но для граничного условия Неймана. Значение на $C_0^{(m)}$ поля собственного колебания входит в задачу Коши вне $C_0^{(m)}$, решение которой дает искомое аналитическое продолжение.

Несколько иначе, чем выше, должна быть сформулирована ссылка на теорему Куранта. При граничном условии Неймана собственная частота низшего колебания в области с малой площадью может не быть большой, может иметь порядок обратного периметра контура $C_0^{(m)}$. Однако и тогда существуют колебания высоких номеров, собственные частоты которых велики. Одна из них обязательно будет выше заданной частоты. Удаляя $C_{\text{доп}}^{(m)}$ от $\hat{C}^{(m)}$, мы будем понижать эту собственную частоту, и найдем контур, резонансный на заданной частоте.

Возможно обобщение этого метода, применимое и к построению $\hat{u}(r, \varphi)$ по $\hat{C}$ и к построению $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ по $\hat{C}^{(m)}$. Например, при построении $\hat{u}(r, \varphi)$ можно на $C_{\text{доп}}$ ставить не условие Дирихле, а условие Неймана. Тогда на контуре C_0 будут поставлены смешанные граничные условия. И для таких условий существуют резонансные частоты и поля собственных колебаний, как собственные элементы соответственных самосопряженных задач. Можно поставить на $C_{\text{доп}}$ и граничное условие третьего рода с вещественным коэффициентом (вообще говоря, переменным на $C_{\text{доп}}$), и так далее. Мы далее не будем упоминать об этих возможностях.

В предыдущем параграфе на примере было показано, что дуга окружности, вообще говоря, одновременно является и линией $\hat{C}$, и линией $\hat{C}^{(m)}$. Описанное выше построение показывает, что такая ситуация является типичной, во всяком случае, если речь идет о ближних полях. Незамкнутая линия C может быть дополнена и до контура C_0 , и до контура $C_0^{(m)}$. Если оба поля собственных колебаний можно аналитически продолжить и если можно построить контур Σ , лежащий в общей области аналитичности двух полученных полей $\hat{u}(r, \varphi)$ и $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, то на Σ неполны как система полей, созданных электрическими токами на C , так и система полей, созданных магнитными токами, расположенными на этой линии. Как и для диаграмм (ср. (5.22)) легко показать, что полями токов обоих типов вместе можно аппроксимировать любое поле на Σ .

3. Может оказаться, что область аналитичности поля $\hat{u}(r, \varphi)$, получающегося аналитическим продолжением поля собственного колебания из области, лежащей внутри C_0 , за линию C_0 , не

содержит всего контура C_0 . В нашей задаче нужно только, чтобы эта область содержала всю линию $\hat{C}$. Если особые точки этого поля лежат на $C_{\text{доп}}$, то, очевидно, с этим полем не может быть связана функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$ в пространстве диаграмм, создаваемых токами на $\hat{C}$; однако это может быть вызвано неудачным выбором линии $C_{\text{доп}}$. Может существовать другое поле $\hat{u}(r, \varphi)$, связанное с той же особой линией $\hat{C}$, но с другим контуром C_0 , не имеющее особенностей во всей плоскости. Напомним, что существование хотя бы одного такого поля уже означает, что система диаграмм неполна.

Однако если на самой линии C есть точки, в любой окрестности которых не существует аналитического поля, т.е. точки, в которых любое решение волнового уравнения, равное нулю на C , имеет особенность, то C не является особой линией. Такой точкой, в частности, может быть угловая точка, в которой встречаются два отрезка различных аналитических кривых, составляющих линию C . Если угол α между двумя касательными в этой точке не является рациональной частью π , то в ней любое решение волнового уравнения имеет особенность. Доказательство, по существу, повторяет аналогичное рассуждение, приведенное в §6, п.2, где оно относилось к линии, составленной из двух пересекающихся прямых. В локальной полярной системе координат (ρ, ψ) с центром в вершине угла и осью, направленной вдоль одной из касательных, поле равно $\rho^\nu \sin(\nu\psi) + O(\rho^{\nu+1})$ ($k\rho \ll 1$).

Так как $\sin(\nu\alpha) = 0$, то ν должно иметь вид $\nu = t\pi/\alpha$ ($t = 1, 2, \dots$). Та же функция должна описывать поле и при $\psi > \alpha$, иначе не будет аналитичности. Следовательно, должно быть $\sin(2\pi t) = 0$, т.е. ν должно быть целым числом (впрочем, это следует и из того, что поле $\sim \rho^\nu$), тогда α/π — отношение двух целых чисел. В противном случае упомянутая задача Коши вблизи угловой точки не имеет решения даже в малом (как однозначная функция).

4. Некоторые примеры § 11 можно рассматривать и как реализацию этой техники — дополнение $\hat{C}$ до C_0 и аналитическое продолжение. Вернемся, например, к полю (11.1), нулевой линией которого является дуга окружности; например, при $ka = 5,0$ $\nu = 1,9$. Построим криволинейный треугольник, состоящий из дуги $r = a$ и двух лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \beta$, где угол β находится из условия $\sin(\nu\beta) = 0$; такой треугольник будет контуром C_0 . При $\nu = 1,9$ угол β может

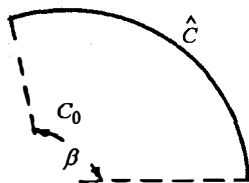


Рис. 12.1

принимать одно из трех значений: $\beta = 0,53\pi$, $\beta = 1,06\pi$ и $\beta = 1,6\pi$. Первый из треугольников представлен на рис. 12.1.

Весь он не может быть линией $\hat{C}$, так как угол между его сторонами есть иррациональная часть π . Центр окружности не может находиться внутри Σ ; $r=0$ есть особая точка поля $\hat{u}(r, \varphi)$ (см. (11.1)). Однако отрезки обоих радиусов при $r > 0$ могут быть включены в $\hat{C}$. Если центральный угол дуги нерезонансной окружности при $ka = 5,0$ меньше $0,53\pi$, то резонансный треугольник может быть таким, как на рис. 12.1. Если этот угол больше $1,6\pi$, то такой резонансный контур C_0 построить нельзя. Сама дуга при этом продолжает быть особой линией, как нулевая линия поля (11.1) при $\nu \neq 1,9$; однако добавление двух лучей лишает ее этого свойства.

Поле $\hat{u}(r, \varphi)$, описываемое формулой (11.6), тоже может рассматриваться как поле собственного колебания некоего контура C_0 и аналитическое продолжение этого поля. Контур C_0 содержит, кроме линии $\hat{C}$ (дуга нерезонансной окружности), еще дугу большего (рис. 12.2а) или меньшего (рис. 12.2б) радиуса с тем же центром и два отрезка лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \beta$, где β связано с выбранным значением ν тем же условием $\sin(\nu\beta) = 0$. Радиус s второй дуги находится из очевидного условия, следующего из (11.6):

$$N_\nu(ka) J_\nu(kc) - J_\nu(ka) N_\nu(kc) = 0. \quad (12.1)$$

Например, если выбрано $\nu = 0$, то для $\hat{C}$ в виде дуги окружности $ka = 5,0$ для kc получатся значения $kc = 8,17$ (рис. 12.2а) и $kc = 1,19$ (рис. 12.2б). Если в (12.1) заданы оба радиуса, т.е. C состоит из дуг двух концентрических нерезонансных окружностей, то (12.1) есть уравнение для ν . К этим двум дугам можно прибавить еще два луча (при $r > 0$), сохранив свойство составной линии C_0 (криволинейного четырехугольника) быть особой.

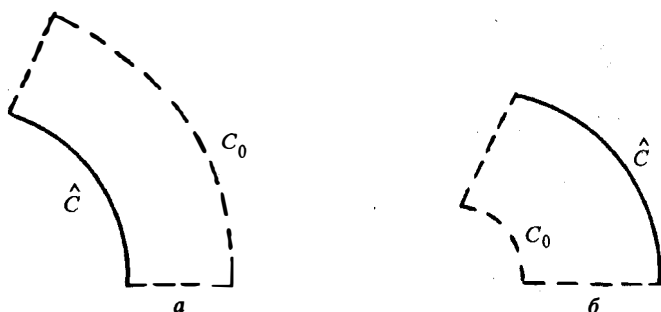


Рис. 12.2

Связь между построениями § 11 и соображениями, изложенными в этом пункте, совершенно тривиальна. Она состоит в том, что в поле $\hat{u}(r, \varphi)$, нулевой линией которого является $\hat{C}$, могут быть еще и другие нулевые линии. Их можно добавить к $\hat{C}$, и если из них и из данной линии $\hat{C}$ можно составить контур C_0 , то он будет резонансным, и поле $\hat{u}(r, \varphi)$ внутри C_0 будет полем собственного колебания, а вне C_0 — аналитическим продолжением этого поля.

Сопоставим условия, существующие для замкнутых и незамкнутых особых линий. Замкнутая особая линия — обязательно резонансный контур; напомним, что это условие недостаточно, чтобы контур был особым. Такая линия может быть особой только на счетном множестве частот. Незамкнутая особая линия является частью бесконечного (континуального) множества резонансных контуров. Она может оказаться особой в *непрерывной полосе частот*.

Другими словами, ограничения на аппроксимацию произвольных полей и диаграмм для незамкнутой линии сильнее, чем для замкнутой.

Напомним, что и в проблеме реализуемости ситуация аналогична — класс диаграмм (полей), которые могут быть созданы токами, распределенными на замкнутых линиях, шире, чем класс полей, которые могут создать незамкнутые линии.

1. Простейший способ *формального построения аналитического продолжения* поля $\hat{u}(r, \varphi)$ собственного колебания, существующего внутри резонансного контура C_0 , состоит, вероятно, в следующем.

Построим некоторую нерезонансную окружность с центром в начале координат, целиком лежащую внутри C_0 . Разложим поле $\hat{u}(r, \varphi)$ на ней в ряд Фурье:

$$\hat{u}(a, \varphi) = \sum B_n \cos(n\varphi). \quad (12.2)$$

Коэффициенты B_n очевидным образом связаны с коэффициентами C_n в разложении (5.8), $B_n = C_n J_n(ka)$, где a — радиус окружности. Разложение (5.8) — единственное, поэтому при любом r поле и его аналитическое продолжение в точках, в которых оно существует, представимо в виде

$$\hat{u}(r, \varphi) = \sum B_n \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} \cos(n\varphi). \quad (12.3)$$

Вопрос об аналитическом продолжении и его особенностях сводится к вопросу о *сходимости ряда* (12.3), т.е. о скорости убывания с номером n коэффициентов B_n в (12.2).

Установим сначала в этих терминах условие, при котором ряд (12.3) сходится на бесконечности, т.е. при $r \rightarrow \infty$. Тогда он представляет собой функцию, асимптотика которой при $r \rightarrow \infty$ имеет вид (5.9). Выражая коэффициенты C_n в (5.8), (5.9) через B_n в (12.2), получим

$$\hat{F}(\varphi) = \sum (i)^n \frac{B_n}{J_n(ka)} \cos(n\varphi) \quad (12.4)$$

и квадрат нормы функции $\hat{F}(\varphi)$ равен, с точностью до множителя,

$$\int_0^{2\pi} |\hat{F}(\varphi)|^2 d\varphi = \sum \frac{(B_n)^2}{J_n^2(ka)} \quad (12.5)$$

(слагаемое $n = 0$ имеет еще коэффициент 2).

Дебаевская асимптотика цилиндрических функций ($n \gg ka$, $n \gg 1$) есть

$$J_n(ka) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{eka}{2n} \right)^n; \quad H_n^{(2)}(ka) = i \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{2n}{eka} \right)^n. \quad (12.6a, б)$$

Вторая из этих формул нам понадобится далее. Асимптотика коэффициента $B_n/J_n(ka)$, согласно (12.6a), есть n -я степень отношения a_0/a , где

$$a_0 = \frac{2}{ek} \lim_{n \rightarrow \infty} (n |B_n|^{1/n}). \quad (12.7)$$

Эта величина выражается через B_n такой же формулой, которой в (3.12) так же обозначенная величина выражалась через коэффициенты Фурье некоторой функции, вопрос о реализуемости которой исследовался в § 3.

Таким образом, зная асимптотику (при $n \rightarrow \infty$) коэффициентов B_n в (12.2), надо вычислить a_0 по (12.7). Если $a_0 > a$, то ряд (12.4) не существует, т.е. аналитическое продолжение функции (12.2) при $r \rightarrow \infty$ без особенностей невозможно. Если $a_0 < a$, то ряд (12.4) сходится, функция $\hat{F}(\varphi)$ имеет конечную норму, и поле $\hat{u}(r, \varphi)$ (см. (12.3)) не имеет особенностей при всех r , включая $r \rightarrow \infty$, контур C_0 и любая его часть являются особой линией. И,

наконец, если $a_0 = a$, то функция $\hat{F}(\varphi)$ существует, но содержит δ -функции, норма ее бесконечна, так что система диаграмм, создаваемых токами на C_0 , полна.

Рассмотрим подробнее ситуацию, когда $a_0 > a$ (в частности $a_0 = \infty$), т.е. $|B_n|$ при $n \rightarrow \infty$ недостаточно быстро стремится к нулю, чтобы существовала функция (12.4). На любом конечном расстоянии $r = R$ ($R > a$) асимптотика при $n \rightarrow \infty$ коэффициента Фурье функции $\hat{u}(R, \varphi)$ (см. (12.3)) есть, согласно (12.6a), $B_n(R/a)^n$. Определим число

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} |B_n|^{1/n}. \quad (12.8)$$

В отличие от выражения для a_0 (см. (12.7)), в (12.8) под знаком предела нет множителя n . Если $l > 0$, то $a_0 = \infty$, а если $a_0 < \infty$, то $l = 0$. Величина l , разумеется, меньше единицы, в противном случае ряд (12.2) не сходил бы (если $l > 1$, то $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$) или сходил бы к обобщенной функции (при $l = 1$ $B_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$), а по условию окружность $r = a$ целиком лежит в области, в которой $\hat{u}(r, \varphi)$ не имеет особенностей. С обозначением (12.8) коэффициент Фурье функции $\hat{u}(R, \varphi)$ имеет при $n \rightarrow \infty$ асимптотическую оценку $(Rl/a)^n$. При $R < a/l$ ряд сходится, т.е. внутри окружности $r = a/l$ аналитическое продолжение не имеет особенностей. При $R > a/l$ ряд расходится. Ближайшая к началу координат особенность аналитического продолжения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ находится на окружности $r = a/l$.

Разумеется, величина a/l не зависит от выбора радиуса окружности a до тех пор, пока окружность находится в области аналитичности поля $\hat{u}(r, \varphi)$. Это следует непосредственно из (12.3). При переходе от окружности $r = a$ к окружности $r = b$ коэффициенты B_n умножаются на $J_n(kb)/J_n(ka)$. Асимптотически это отношение равно $(b/a)^n$, и число l , определенное по (12.8) по коэффициентам Фурье на окружности $r = b$, больше, чем число l , вычисленное по коэффициентам для $r = a$, в b/a раз, так что отношение радиуса окружности к l не зависит от этого радиуса.

Если $R < a/l$, то внутри окружности $r = R$ поле $\hat{u}(r, \varphi)$ не имеет особенностей, и на этой окружности, которая при этом может играть роль контура Σ (см. § 10), можно ввести функцию $\hat{V}(\sigma)$ —функцию ортогонального дополнения для полей на Σ , созданных токами на $\hat{C}$. Квадрат нормы этой функции, согласно

(10.9) и соотношению между B_n и C_n , равен (с точностью до множителя)

$$\int_0^{2\pi} |\hat{V}(\varphi)|^2 d\varphi = \sum \frac{(B_n)^2}{J_n^2(ka) |H_n^{(2)}(kR)|^2}. \quad (12.9)$$

Согласно обеим формулам (12.6), асимптотика n -го члена этого ряда есть $(Rl/a)^{2n}$. Мы вновь получаем тот же результат, что и выше, с небольшим уточнением—на самой окружности $r = a/l$ функция $\hat{V}(\sigma)$ содержит δ -функции. При $r < a/l$ $V(\sigma)$ существует, а за границей этой окружности система полей, созданных токами на $\hat{C}$, полна.

Особая ситуация возникает, если $|B_n|$ убывает таким образом, что

$$l = 0, \quad a_0 = \infty, \quad (12.10)$$

например, при $B_n = O(n^{-n/2})$. Радиус сходимости ряда (12.9) равен бесконечности, а ряд (12.5) расходится. Какими свойствами при этом обладает ряд (12.3)? Вопрос этот принадлежит не проблеме аппроксимируемости, а происходит от известной кажущейся противоречивости дебаевской асимптотики (см. (12.6a)), справедливой при $n \gg ka$, и ханкелевской асимптотики, справедливой при $ka \gg n$. Чем больше kR , тем при больших номерах n начинается убывание функции $J_n(kR)$. Ряд (12.3) при условиях (12.10) сходится неравномерно, т.е. он сходится при любом R (так как $l = 0$), но с ростом kR растет число слагаемых в нем, после которых они начинают убывать, и при $kR \rightarrow \infty$ это число становится бесконечным, т.е. ряд не сходится (так как $a_0 = \infty$).

В конце этого пункта мы приведем несколько примеров. Они совершенно элементарны и, по существу, иллюстрируют лишь свойства формул, описывающих поле внутри C_0 , если эти формулы применять к точкам вне C_0 .

Для резонансного прямоугольника со сторонами $\pi/(k \cos \beta)$ и $\pi/(k \sin \beta)$ (см. (6.14)) поле собственного колебания внутри C_0 описывается формулой (6.12). Коэффициент B_n пропорционален интегралу

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \cos(ka \cos \beta \cdot \cos \varphi) \cos(ka \sin \beta \cdot \sin \varphi) d\varphi, \quad (12.11)$$

здесь a —радиус окружности в (12.2), а не сторона прямоугольника, как в §6, п.4. Этот интеграл сводится к функции $J_n(ka)$, так что для этого случая $a_0 = a$. Аналитическое продолжение, описываемое рядом (12.3), сходится при всех r (так как $l = 0$), но функция $F(\varphi)$ имеет бесконечную норму; этот результат в (6.17) был получен непосредственно.

Для криволинейных четырехугольников рис. 12.2 поле собственного колебания внутри C_0 дано в (11.6). Для того чтобы продолжить это поле вне C_0 по методу этого пункта, надо перенести начало координат в какую-либо точку O' , лежащую внутри C_0 , например, в точку с координатами $r = b$, $\varphi = 0$. Функции $J_\nu(kr) \cos(\nu\varphi)$ и $N_\nu(kr) \cos(\nu\varphi)$, входящие в поле собственного колебания (11.6), надо выразить в новых координатах ρ, ψ , с центром в точке O' . По теореме сложения

$$Z_\nu(kr) \cos(\nu\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_{\nu+n}(kb) J_n(k\rho) \cos(n\psi), \quad (12.12)$$

где Z_ν —любая цилиндрическая функция. Для N_ν формула (12.12) справедлива только при $\rho < b$. Коэффициент B_n состоит из слагаемых, пропорциональных произведениям $J_{\nu+n}(kb) J_n(ka)$ и $N_{\nu+n}(kb) J_n(ka)$. При $n \rightarrow \infty$ первое из них очень мало, второе имеет порядок $(a/b)^n$ согласно (12.6). Следовательно, $a_0 = \infty$ (см. (12.7)), $l = a/b$ (см. (12.8)). Ближайшая к O' особая точка аналитического продолжения лежит на окружности радиуса a/l , т.е. на окружности $\rho = b$, в центре кривизны обеих концентрических дуг. И этот пример—проверка того, что в элементарных задачах предложенный аппарат приводит к правильным результатам.

6. Изложенный в предыдущем пункте метод аналитического продолжения поля, заданного на окружности, во внешнюю область по существу повторяет метод аналитического продолжения поля, заданного на бесконечности, во внутреннюю область. Именно этот последний метод привел к условию реализуемости диаграммы, сформулированному в §3, п.2 и состоящему в том, что особенности поля, т.е. создающие его токи, должны находиться внутри и на окружности радиуса (3.12), где A_n —коэффициенты фурье-диаграммы $F(\varphi)$ (см. (3.11)). Это условие можно получить исследованием области сходимости ряда

$$u(r, \varphi) = \sum A_n (-i)^n H_n^{(2)}(kr) \cos(n\varphi), \quad (12.13)$$

асимптотика которого при $r \rightarrow \infty$ равна $e^{-ikr} F(\varphi) / \sqrt{kr}$. Подставляя асимптотику при $n \rightarrow \infty$ $A_n = (a_0 e k / 2n)^n$, следующую из определения a_0 (см. (3.12)), и дебаевскую асимптотику (12.6б) для $H_n^{(r)}(kr)$, получим, что коэффициент в ряде Фурье (12.13) имеет порядок (при $n \rightarrow \infty$) $(a_0/r)^n$, так что ряд сходится для $r > a_0$ и расходится для $r \leq a_0$.

Задача о локализации особенностей поля, имеющего данную асимптотику при $r \rightarrow \infty$, т.е. данную диаграмму, исследовалась и многими другими методами. В частности, методами, основанными на изучении поведения диаграммы $F(\varphi)$ в функции комплексного угла $\varphi = \varphi' + i\varphi''$ [24]. При этом получались условия на $F(\varphi)$, которые тождественны сформулированным требованиям о скорости убывания коэффициентов Фурье.

Задача о продлении поля из области внутри C_0 во внешнюю область исследовалась в ряде математических работ, в которых применялись методы аналитической теории решения $u(x, y)$ волнового уравнения как функции комплексных переменных $x = x' + ix''$; $y = y' + iy''$ [25, 26]. При этом используется тот известный факт, что оператор Лапласа (2.4) в области комплексных (x, y) имеет комплексные характеристики, так что эллиптическое волновое уравнение (2.2) приобретает некоторые свойства гиперболических уравнений. В частности, вдоль таких комплексных характеристик переносятся особые точки поля. Особые точки с вещественными координатами при таком рассмотрении представляют собой «след» этих комплексных характеристик.

Как и более элементарный метод, изложенный в предыдущем пункте, метод, основанный на теории функций нескольких комплексных переменных, является, как и всякий метод аналитического продолжения, некорректным. Имеется в виду, что малое изменение формы контура может привести к очень сильному изменению свойств аналитического продолжения, например, к появлению или к исчезновению особенностей; корректность имеет место только в классе аналитических деформаций. Это—не дефект метода, а свойство самой техники построения $\hat{u}(r, \varphi)$ вне C_0 как аналитического продолжения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ в области внутри C_0 . Мы с этим столкнулись уже, например, при рассмотрении угловых точек, в которых возможность аналитического продолжения зависит от вопроса—бессодержательного с точки зрения физика—о том, является ли угол α рациональной или иррациональной частью π .

В следующей главе, особенно в §16, мы увидим, что между двумя случаями: «линия—особая» и «линия—неособая, но близкая к особой»—практически нет различия. Аппроксимруемость полями токов на C в первом случае требует токов с бесконечно большой

нормой, во втором—с очень большой нормой. Поэтому и представляют интерес такие методы построения $\hat{u}(r, \varphi)$ по его нулевой линии, которые обладают достаточной «грубостью», чтобы не замечать различия между этими двумя случаями. Метод, изложенный в следующем пункте, этим свойством «грубости» обладает в полной мере.

7. Эффективный численный метод нахождения аналитического продолжения поля собственного колебания за границу резонансной области может быть развит на основе *метода вспомогательных источников*—того его варианта, который использует идею *коллации* [27, 28]. В применении к проблеме собственных колебаний метод состоит в том, что на некоторой линии, окружающей резонансный контур (на вспомогательном контуре) располагаются «достаточно часто» вспомогательные источники, каждый из которых создает поле $a_n H_0^{(2)}(k\rho_n)$, где ρ_n —расстояние от точки, в которой расположен n -й вспомогательный источник. Амплитуды a_n источников определяются из системы линейных уравнений, которые получаются из требования, чтобы суммарное поле всех источников было равно нулю в некоторых точках—точках коллации—выбранных «достаточно часто» на резонансном контуре. На резонансных частотах эта однородная система имеет нетривиальное решение.

Внутри резонансного контура поле этих источников с найденными коэффициентами a_n является полем собственного колебания. В кольцевой области, лежащей между вспомогательным и резонансным контурами, это поле является аналитическим продолжением собственного колебания за границу резонансного контура.

Вспомогательный контур должен быть выбран таким образом, чтобы в этой области не было особенностей аналитического продолжения. Если вспомогательный контур выбран слишком далеко от резонансного, так что какая-либо особенность оказывается внутри кольцевой области, то метод, разумеется, не может быть реализован, ибо поля точечных источников нигде (кроме точек, где расположены источники) не имеют особенностей. Это проявится в том, что процесс определения собственной частоты и амплитуд a_n не будет сходиться с увеличением числа источников и числа точек коллации. Это свойство позволяет в принципе, выбирая все более широкий вспомогательный контур, находить особые точки аналитического продолжения. Метод особенно хорошо сходится, если вспомогательный контур проходит через ближайшую к резонансному контуру особую точку. Разумеется, так можно найти только особые точки, не очень далекие от резонансного контура. Этот метод применим к сколь угодно сложным резонансным контурам, даже если для них невозможно поле собственного колебания записать в виде явной формулы.

Как показали численные эксперименты, если резонансный контур имеет криволинейные участки, центр кривизны которых лежит вне резонансной области, то они являются особыми точками аналитического продолжения. Простым примером являются контуры рис. 12.2. Напомним, что существование особых точек аналитического продолжения означает, что поля полной системы токов на таком резонансном контуре создают полную систему диаграмм, т.е. что такими полями можно аппроксимировать любую диаграмму. Отсутствие особых точек означает, что контур—особый, и почти любую диаграмму нельзя аппроксимировать токами на нем. Для выпуклых резонансных контуров простые примеры не позволили обнаружить особые точки. Таким образом, если два изогнутых зеркала расположены «параллельно» друг другу, то токами на них можно аппроксимировать любые диаграммы, если зеркала изогнуты в одном направлении (на контуре есть вогнутые участки), и нельзя аппроксимировать почти любые диаграммы, если зеркала изогнуты в противоположных направлениях (весь контур выпуклый). Подчеркнем, что это—не четко сформулированное утверждение и не математически доказанный результат, а лишь качественный вывод из нескольких численных экспериментов [27].

Опишем возможную модификацию описанного метода, которая позволит, может быть, применять его в тех случаях, когда аналитическое продолжение нигде не имеет особенностей, и находить это продолжение на всей плоскости. Тогда существует функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$, и предлагаемая модификация позволит приближенно определить ее. Идея модификации состоит в том, чтобы отнести вспомогательный контур на бесконечность.

Возьмем в качестве вспомогательных полей не цилиндрические, а плоские волны, приходящие из направлений $\varphi = \varphi_n$, где φ_n ($n = 1, 2, \dots, N$) принимает «достаточно частые» значения в интервале $0, 2\pi$. Вспомогательное поле будем искать в виде суммы таких волн:

$$\hat{u}(r, \varphi) = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^N a_n \exp[ikr \cos(\varphi - \varphi_n)]. \quad (12.14)$$

Это поле должно обращаться в нуль в N точках на резонансном контуре. Упомянутая выше кольцевая область распространяется при этом на всю область, внешнюю по отношению к резонансному контуру. Если в этой области нет особых точек, то процесс определения резонансной частоты и амплитуд a_n должен при $N \rightarrow \infty$ сходиться.

Асимптотика при $r \rightarrow \infty$ поля $\hat{u}(r, \varphi)$ содержит незоммерфельдовское (нарушающее условие излучения) слагаемое, которое есть сумма δ -функций от аргументов $\varphi - \varphi_n$, умноженная на

$\exp(ikr)/\sqrt{kr}$ (см. (6.16)). Обозначив угловую зависимость этого слагаемого через $\hat{F}_N(\varphi)$, получим, с точностью до несущественного множителя

$$\hat{F}_N(\varphi) = \frac{2\pi}{N} \sum^N a_n \delta(\varphi - \varphi_n). \quad (12.15)$$

Функция $\hat{F}_N(\varphi)$ имеет бесконечную норму. Можно построить функцию $\hat{F}(\varphi)$ с конечной нормой, которая при $N \gg 1$ будет близка к $\hat{F}_N(\varphi)$ в том смысле, что для любой функции $f(\varphi)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \hat{F}_N(\varphi) f^*(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \hat{F}(\varphi) f^*(\varphi) d\varphi. \quad (12.16)$$

Расположим точки φ_n на интервале $0, 2\pi$ равномерно, так что расстояние между соседними точками равно $2\pi/N$. Определим функцию $\hat{F}(\varphi)$ так, чтобы в точках $\varphi = \varphi_n$ $\hat{F}(\varphi) = a_n$, а в промежуточных точках она менялась «достаточно гладко». Левая часть равенства (12.16) есть, согласно (12.15), предел суммы $\frac{2\pi}{N} \sum^N a_n f^*(\varphi_n)$, и по определению функции $\hat{F}(\varphi)$ эту сумму можно

записать в виде $\frac{2\pi}{N} \sum^N \hat{F}(\varphi_n) f^*(\varphi_n)$. Она равна интегральной сумме для интеграла, стоящего в правой части равенства (12.16), т.е. ее предел равен этому интегралу, что и утверждается в (12.16).

Примем, что N —четное число. Тогда для любого угла φ_n можно указать такой угол φ_m , что $\varphi_m - \varphi_n = \pm\pi$. Коэффициенты однородной линейной системы, из которой определяются числа a_n , т.е. значения экспонент в (12.14), меняются на комплексно сопряженные, если заменить в них угол φ_n на φ_m , где углы связаны этим условием. Поэтому, если n и m связаны этим условием, то $a_n = a_m^*$. Следовательно функция $\hat{F}(\varphi)$ обладает свойством $\hat{F}(\varphi + \pi) = \hat{F}^*(\varphi)$, необходимым и достаточным (см. (5.17)) для того, чтобы $\hat{F}(\varphi)$ могла быть ортогональным дополнением.

Значение функции $\hat{F}(\varphi)$ при $\varphi \neq \varphi_n$ не существенно, так как эта функция участвует всюду лишь в качестве сомножителя под интегралом типа (12.16). Чтобы не превышать допустимую

уравнение $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi) \neq r_2(\varphi)$, и для любого φ $|r_1(\varphi) - r_2(\varphi)| \leq \varepsilon$.

Построим вспомогательное поле $\hat{v}(r, \varphi)$ — вещественное решение волнового уравнения без особенностей, которое не равно тождественно нулю на $\hat{C}_1$ и обращается на ней в нуль в тех точках, в которых $\partial \hat{u}_1(r, \varphi) / \partial N = 0$; N — нормаль к $\hat{C}_1$. Построить такое поле можно, например, в форме ряда (9.2), потребовав, чтобы он обращался в нуль в упомянутых точках на $\hat{C}_1$ и был равен единице в какой-либо другой точке на $\hat{C}_1$.

Построим затем искомое поле $\hat{u}_2(r, \varphi)$ по формуле

$$\hat{u}_2(r, \varphi) = \hat{u}_1(r, \varphi) + \mu \hat{v}(r, \varphi), \quad (9.5)$$

где число μ мы выберем далее. Пусть $r = r_2(\varphi)$ есть его нулевая линия. Надо показать, что можно выбрать такое μ , что при всех φ $|r_2(\varphi) - r_1(\varphi)| \leq \varepsilon$.

По определению линий $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$

$$\hat{u}_1[r_1(\varphi), \varphi] \equiv 0, \quad \hat{u}_2[r_2(\varphi), \varphi] \equiv 0.$$

Поэтому

$$\hat{u}_1[r_2(\varphi), \varphi] - \hat{u}_1[r_1(\varphi), \varphi] + \mu \hat{v}[r_2(\varphi), \varphi] = 0. \quad (9.6)$$

Так как функция $\hat{u}_1(r, \varphi)$ непрерывна, то $\hat{u}_1[r_2(\varphi), \varphi] - \hat{u}_1[r_1(\varphi), \varphi] = \alpha(\varphi) [r_2(\varphi) - r_1(\varphi)]$, где $\alpha(\varphi)$ — конечная функция, равная нулю только в точках, в которых $\partial \hat{u}_1 / \partial N = 0$. С точностью до членов второго порядка можно в (9.6) заменить $\mu \hat{v}[r_2(\varphi), \varphi]$ на $\mu \hat{v}[r_1(\varphi), \varphi]$. Тогда (9.6) примет вид

$$r_2(\varphi) - r_1(\varphi) + \mu \frac{\hat{v}[r_1(\varphi), \varphi]}{\alpha(\varphi)} = 0. \quad (9.7)$$

Коэффициент при μ конечен и отличен от тождественного нуля, так была построена функция $\hat{v}(r, \varphi)$. Обозначим его наибольшее значение буквой A , и выберем $\mu = \varepsilon / A$. Тогда из (9.7) следует искомый результат.

Справедливо и более простое утверждение: в окрестности (в метрике L_2) любой функции ортогонального дополнения существует другая функция ортогонального дополнения. Напомним, что функция $\hat{F}(\varphi)$ должна подчиняться единственному условию (5.17). Любая функция, близкая к данной $\hat{F}(\varphi)$ в интервале $(0, \pi)$, может быть дополнена в интервале $(\pi, 2\pi)$ таким образом, чтобы

выполнялось условие (5.17). Тогда она будет близка к $\hat{F}(\varphi)$ в полном интервале. Заметим, что из этого обстоятельства и из непрерывности полей $\hat{u}(r, \varphi)$ также можно доказать утверждение, сформулированное в начале этого пункта.

Выражение «особых линий очень много», которое мы неоднократно употребляли, подразумевает сформулированные в последних двух пунктах свойства этих линий. По существу, эти свойства являются следствиями лишь того, что поля $\hat{u}(r, \varphi)$ — непрерывны, а $\hat{C}$ — их нулевые линии.

6. Упомянем еще одно свойство, относящееся, строго говоря, не к особым линиям, а к самим полям $\hat{u}(r, \varphi)$. Для любой линии C можно построить такую бесконечную последовательность вещественных полей $u_m(r, \varphi)$ ($m = 1, 2, \dots$), каждая из которых есть решение волнового уравнения, не имеет особенностей и нормирована на единицу условиями (5.3) и (5.4), что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_C |u_m|^2 ds = 0. \quad (9.8)$$

Доказательство этого утверждения будет приведено в § 14, п. 6. Из (9.8), разумеется не следует, что существует функция, к которой стремятся $u_m(r, \varphi)$ при $m \rightarrow \infty$, и что, если такая функция все же существует, то C (любая линия!) есть ее нулевая линия.

7. Свойства магнитных особых линий $\hat{C}^{(m)}$ (см. (5.19)) аналогичны свойствам особых линий $\hat{C}$. Разумеется, замкнутые линии $\hat{C}^{(m)}$ должны быть резонансными контурами не для условий Дирихле, а для условий Неймана.

Отметим только удобное для вычислений свойство, следующее из того, что условие (5.19) равносильно условию, что $\hat{C}^{(m)}$ в каждой точке касается вектора $\text{grad } \hat{u}^{(m)}(x, y)$. Если уравнение линии $\hat{C}^{(m)}$ записано в форме $y = y(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \hat{u}^{(m)}(x, y) / \partial y}{\partial \hat{u}^{(m)}(x, y) / \partial x}. \quad (9.9)$$

Линии $\hat{C}^{(m)}$ являются интегральными кривыми уравнения (9.9). В частности отсюда следует, что при заданном поле $\hat{u}^{(m)}(x, y)$ почти через каждую точку плоскости можно провести линию $\hat{C}^{(m)}$.

Глава III. НЕАППРОКСИМИРУЕМОСТЬ БЛИЖНИХ ПОЛЕЙ

§ 10. Условия аппроксимируемости для ближних полей

1. Выше мы обсуждали ограничения, которым поля токов, расположенных на особых линиях, подчиняются на бесконечно большом расстоянии от этой линии, т.е. ограничения (3.15) для диаграмм $f(\varphi)$. Однако поля таких токов подчинены аналогичным—и даже более сильным—ограничениям также и на конечном расстоянии от $\hat{C}$. Эти ограничения имеют такой же вид, как и (3.15), но относятся к самому полю $u(r, \varphi)$, а не к его асимптотике $f(\varphi)$.

Найдем эти условия. Построим замкнутый контур Σ , окружающий особую линию $\hat{C}$. Контур должен быть достаточно гладким, чтобы вне Σ существовали решения задач Дирихле и Неймана с условиями излучения, а в остальном он может быть произвольным. Построим на Σ функцию, играющую такую же роль, как и $\hat{F}(\varphi)$ в (3.15).

Так как линия $\hat{C}$ особая, то существует вещественное поле $\hat{u}(r, \varphi)$, равное на ней нулю и не имеющее нигде особенностей. Мы здесь используем отсутствие особенностей у $\hat{u}(r, \varphi)$ не во всей плоскости, а только в области внутри Σ —это обстоятельство будет существенным для построения следующих двух параграфов. Обозначим значение $\hat{u}(r, \varphi)$ на Σ через $\hat{u}(\sigma)$, где σ —координата на контуре Σ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$). Решим следующую задачу Дирихле в области, внешней по отношению к Σ —найдем поле, удовлетворяющее однородному волновому уравнению, на Σ равное $\hat{u}(\sigma)$, а на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$) удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда. Это поле будет комплексным, так как оно комплексно при $r \rightarrow \infty$. Эта внешняя задача Дирихле всегда имеет решение, так как частота—величина вещественная.

Обозначим через $\hat{v}(r, \varphi)$ вспомогательное поле, равное внутри контура Σ полю $\hat{u}(r, \varphi)$, а вне Σ —построенному решению задачи Дирихле. Поле $\hat{v}(r, \varphi)$ всюду удовлетворяет волновому уравнению, удовлетворяет условию излучения; оно непрерывно, и его единственная особенность—разрыв нормальной производной на

Σ . Обозначим этот разрыв через $\hat{V}^*(\sigma)$ ($V^*(\sigma) = [\partial v / \partial N]$, где N — нормаль к Σ). Он является тем «током», который создает поле $\hat{v}(r, \varphi)$.

Можно обойтись без решения упомянутой внешней задачи Дирихле и находить $\hat{V}(\sigma)$ непосредственно по известному значению поля $\hat{v}$ на Σ , не продлевая предварительно это поле во внешнюю область. В терминах теории потенциала функция $V(\sigma)$ есть плотность простого слоя, распределенного на Σ . Двойного слоя на Σ нет, так как само поле $\hat{v}$ непрерывно. Поле, созданное простым слоем с плотностью $\hat{V}(\sigma)$ и удовлетворяющее условию излучения, есть

$$\hat{v}(r, \varphi) = \frac{1}{4i} \int_{\Sigma} \hat{V}(\sigma) H_0^{(2)}(k |r - r_0|) d\sigma, \quad (10.1)$$

где r имеет координаты (r, φ) , а r_0 — точка на Σ (ср., например, [23, (3.51) и (3.53)]). Когда r тоже лежит на Σ , слева в (10.1) стоит известная функция $u(\sigma)$, и уравнение (10.1) становится интегральным для $V(\sigma)$. Это уравнение только свободным членом отличается от уравнения для тока, который возник бы при дифракции на металлическом теле с той же поверхностью Σ (см., например, [17, (12.23)]). Уравнение это — уравнение первого рода, т.е. некорректное, однако наличие особенности (хотя и слабой — логарифмической) в ядре позволяет решать его относительно простыми методами и находить «ток» $V(\sigma)$.

Этот «ток» и участвует в условиях, которым подчиняются на Σ все поля, созданные любыми токами $j(s)$ (см. (2.6a)) на $\hat{C}$. Доказательство столь же элементарно, как и соответствующее доказательство в § 5, п. 2. Применим к функциям $u(r, \varphi)$ и $\hat{v}(r, \varphi)$ формулу Грина во всей бесконечной плоскости. Обе функции удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению и одинаковым условиям при $r \rightarrow \infty$. Поле $u(r, \varphi)$ имеет разрыв производной на $\hat{C}$, равный $j(s)$. Поле $\hat{v}(r, \varphi)$ имеет разрыв производной на Σ , равный $\hat{V}^*(\sigma)$. Формула Грина дает

$$\int_{\Sigma} u(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) d\sigma = \int_{\hat{C}} \hat{v}(s) j(s) ds, \quad (10.2)$$

где $u(\sigma)$ — значение функции $u(r, \varphi)$ на Σ , $\hat{v}(s)$ — значение функции $\hat{v}(r, \varphi)$ на $\hat{C}$. Так как на $\hat{C}$ функция $\hat{v}(r, \varphi)$ совпадает с $u(r, \varphi)$, т.е. согласно (5.7) равна нулю, то при любых токах $j(s)$ правая часть (10.2) тоже равна нулю, и, следовательно,

$$\int_{\Sigma} u(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) d\sigma = 0. \quad (10.3)$$

Из (10.3) вытекают те же свойства системы полей $u(\sigma)$, которые следуют из (3.15) для системы диаграмм $f(\varphi)$. Полная система токов $j(s)$ на $\hat{C}$ создает на любом контуре Σ , окружающем $\hat{C}$, *неполную систему полей* $u(\sigma)$, функцией ортогонального дополнения этой системы является функция $\hat{V}(\sigma)$ (см. (10.1)). Функциями $u(\sigma)$ можно аппроксимировать только такие функции $U(\sigma)$, заданные на Σ , которые удовлетворяют условиям

$$b_{\Sigma} \equiv \int_{\Sigma} U(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) d\sigma = 0. \quad (10.4)$$

Повторяя соображения § 3, п. 5, заметим, что если на $\hat{C}$ обращается в нуль несколько функций $\hat{u}(r, \varphi)$, то на одном и том же контуре Σ будет существовать не одна функция ортогонального дополнения $\hat{V}(\sigma)$, а несколько. Тогда для аппроксимируемости какой-либо функции $U(\sigma)$ необходимо, чтобы она была ортогональна всем этим функциям. Ортогональность всем линейно независимым функциям ортогонального дополнения является достаточным условием аппроксимируемости $U(\sigma)$.

Если нормировать функции ортогонального дополнения $\hat{V}(\sigma)$ условием

$$\int_{\Sigma} |\hat{V}(\sigma)|^2 d\sigma = 1 \quad (10.5)$$

(отличным от нормировки, которая получается из (10.1) при нормировке $\hat{u}(r, \varphi)$ по (5.4)), то минимум невязки, т.е. квадрата расстояния (аналогичного (3.21б)) между какой-либо заданной функцией $U(\sigma)$ и полем, созданным любым током на $\hat{C}$, будет величина $|b_{\Sigma}|^2$ [ср. (3.20а)], т.е.

$$\int_{\Sigma} |U(\sigma) - u(\sigma)|^2 d\sigma \geq |b_{\Sigma}|^2. \quad (10.6)$$

Например, если ток расположен на дуге окружности (ток, индуцированный на цилиндрическом зеркале), и для некоторого n имеем $J_n(ka) = 0$ (a — радиус окружности), то на любой окружности, концентрической с данной и большей, чем она, отраженное поле может аппроксимировать какую-либо функцию с точностью не большей, чем квадрат модуля ее n -го коэффициента Фурье.

2. Если в качестве контура Σ , окружающего особую линию $\hat{C}$, выбрана окружность, то можно решить упомянутую задачу Дирихле аналитически и получить явное выражение для $\hat{V}(\sigma)$ через коэффициенты Фурье поля $\hat{u}(r, \varphi)$, аналогичное выражению (5.9) для функции $F(\sigma)$.

Обозначим радиус окружности Σ через R . Поле $\hat{u}(r, \varphi)$ задано в виде ряда (5.8), так что на Σ

$$\hat{u}(\varphi) = \sum C_n J_n(kR) \cos(n\varphi), \quad (10.7)$$

где вместо σ введен угол φ . Задача Дирихле при $r \geq R$ имеет очевидное решение

$$\hat{v}(r, \varphi) = \sum C_n J_n(kR) \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)}(kR)} \cos(n\varphi), \quad (10.8)$$

в котором обеспечены выполнение условия излучения и непрерывность при $r = R$. Учитывая выражение для вронскиана цилиндрических функций, найдем для $\hat{V}(\varphi)$ (см. (10.1)), т.е. для разности нормальных производных поля (5.8) при $r \leq R$ и поля $\hat{v}(r, \varphi)$ (см. (10.8)) при $r \geq R$, выражение

$$\hat{V}(\varphi) = -\frac{2i}{\pi R} \sum C_n \frac{1}{H_n^{(2)}(kR)} \cos(n\varphi). \quad (10.9)$$

Это и есть искомое явное выражение для $\hat{V}(\varphi)$.

При $R \rightarrow \infty$, т.е. когда окружность Σ уходит на бесконечность, $\hat{V}(\varphi)$ только множителем k отличается от $\hat{F}^*(\varphi) e^{ikR}/\sqrt{kR}$, как это и следует из сопоставления (10.3) и (3.14). При любом конечном R множитель $1/H_n^{(2)}(kR)$ убывает с ростом n при $n \gg kR$. Поэтому коэффициенты ряда Фурье $C_n/H_n^{(2)}(kR)$ (см. (10.9)) с высокими номерами меньше, чем соответствующий тому же n коэффициент Фурье $C_n(-i)^n$ ряда (5.9) для $\hat{F}^*(\varphi)$. Это означает, что функция $\hat{V}(\varphi)$ более гладкая, чем функция $\hat{F}(\varphi)$. Чем меньше kR , тем при меньших n начинается убывание коэффициентов Фурье в (10.9) по сравнению с коэффициентами Фурье в (5.9). Чем меньше kR , тем функция $\hat{V}(\varphi)$ более гладкая, чем ее асимптотическая (при $R \rightarrow \infty$) форма $F(\varphi)$.

Если данная функция $U(\sigma)$ не очень изрезана, то чем более гладкой будет функция $\hat{V}(\sigma)$ в (10.4), тем больше $|b_\Sigma|$ и тем более существенным является ограничение (10.6).

В этом смысле ограничение на аппроксимируемость полей на контуре Σ тем слабее, чем на большем расстоянии от $\hat{C}$ находится этот контур. Эти ограничения убывают при удалении от токов, создающих поле $u(r, \varphi)$; менее всего они проявляются для диаграмм. В следующем параграфе мы столкнемся с ситуацией, когда эти ограничения существуют только до некоторого конечного расстояния от токов, а на больших расстояниях они не просто ослабевают, а пропадают.

Проиллюстрируем это убывание на примере резонансного прямоугольника (§ 6, п. 4). Он не является особой линией в смысле, которому этот термин был придан в § 6, так как интеграл (5.4) для соответствующей ему функции $F(\varphi)$ не существует. Однако для любого конечного контура Σ интеграл в (10.5) существует, токи на нем создают неполную систему полей на Σ .

Рассмотрим для простоты записи квадрат; для него

$$\hat{u}(x, y) = \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi y}{a}, \quad (10.10)$$

где a —сторона квадрата, а центр системы координат—в центре квадрата. Контур Σ —окружность $r = R$. На Σ поле (10.9) имеет вид

$$\hat{u}(R, \varphi) = \cos \left(\frac{kR}{\sqrt{2}} \cos \varphi \right) \cos \left(\frac{kR}{\sqrt{2}} \sin \varphi \right), \quad (10.11)$$

где $k = \pi\sqrt{2}/a$ —резонансная частота. Разлагая эту функцию в ряд Фурье, получим для нее, разумеется, ряд типа (10.7). Коэффициенты C_n отличны от нуля только для $n = 4m$ ($m = 0, 1, \dots$) и не зависят от m . С точностью до несущественного множителя, для $\hat{V}(\varphi)$ (см. (10.9)) будет

$$\hat{V}(\varphi) = \frac{1}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{H_{4m}^{(2)}(kR)} \cos(4m\varphi). \quad (10.12)$$

Этот ряд сходится и интегрируем с квадратом при любых R , так что поля токов, расположенных на сторонах резонансного квадрата (и, вообще, резонансного прямоугольника), образуют неполную систему на любой окружности—и, вообще, на любом контуре, заключающем токи. Однако убывание членов ряда (10.12) начинается лишь при $4m > kR$. При $kR \gg 1$ ряд (10.12) содержит много высоких гармоник, и $\hat{V}(\varphi)$ представляет собой быстро меняющуюся функцию.

3. Неполную на контуре Σ систему функций образуют не только поля $u(\sigma)$, созданные токами на $\hat{C}$, но и их нормальные производные $\partial u(r, \varphi) / \partial N|_{\Sigma}$, где N — нормаль к Σ .

Симметрия этих свойств функций $u(r, \varphi)|_{\Sigma}$ и $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$ есть очевидное проявление симметрии между электрическим и магнитным полями. Напомним (см. § 2, п. 2), что двумерная скалярная задача возникает из трехмерной векторной, если в последней $H_z \equiv 0$ и $\partial/\partial z \equiv 0$. Тогда $u(r, \varphi)$ есть E_z , а производная $\partial u / \partial N$ есть H_s , где s направлено вдоль той линии, нормалью к которой является N . Неполнота системы функций $u(r, \varphi)$ означает, что произвольно выбранная функция не может быть в общем случае аппроксимирована полями E_z , созданными токами, если они

расположены на цилиндре, направляющая которого есть $\hat{C}$. Неполнота системы функций $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$ означает, что произвольно выбранную функцию нельзя также аппроксимировать полями H_s , созданными такими же токами.

Для получения условий типа (10.3) для $\partial u / \partial N$ надо при построении поля $\hat{u}(r, \varphi)$ во всей плоскости решать не внешнюю по отношению к Σ задачу Дирихле, а внешнюю задачу Неймана. Внутри Σ известно поле $\hat{u}(r, \varphi)$; вычислим по нему функцию $\partial \hat{u} / \partial N$. Затем найдем вне Σ поле, удовлетворяющее условию излучения и имеющее на Σ то же значение нормальной производной. Назовем $\hat{w}(r, \varphi)$ поле, внутри Σ равное $\hat{u}(r, \varphi)$, а вне — решению этой задачи Неймана. Единственной особенностью поля $\hat{w}(r, \varphi)$ является его разрыв на Σ . Обозначим его через $\hat{W}(\sigma)$,

$$\hat{W}(\sigma) = [\hat{w}(r, \varphi)]. \quad (10.13)$$

Применим к полю $u(r, \varphi)$, созданному током $j(s)$ на $\hat{C}$, и к полю $\hat{w}(r, \varphi)$, созданному «магнитным током» $\hat{W}(\sigma)$ на Σ , формулу Грина. Получим, аналогично формуле (10.2),

$$-\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial N} \hat{W}(\sigma) d\sigma = \int_{\hat{C}} \hat{w}(s) j(s) ds, \quad (10.14)$$

где $\hat{w}(s)$ — значение поля $\hat{w}(r, \varphi)$ на $\hat{C}$. На $\hat{C}$ поле $\hat{w}(r, \varphi)$ совпадает с $\hat{u}(r, \varphi)$, т.е. равно нулю, и для $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$, где $u(r, \varphi)$ создано любыми токами на $\hat{C}$, будет

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial N} \hat{W}(\sigma) d\sigma = 0. \quad (10.15)$$

Как и выше, из этого следует, что функциями $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$ можно аппроксимировать только такие заданные на Σ функции, произведение (10.15) которых на $\hat{W}^*(\sigma)$ равно нулю, и что, при соответствующей нормировке $\hat{W}(\sigma)$, невязка при аппроксимации любой функции функциями $\partial u / \partial N|_{\Sigma}$ не меньше квадрата модуля произведения этой функции на $\hat{W}^*(\varphi)$, аналогично (10.6) и (10.4).

Если Σ — окружность, и $u(r, \varphi)$ при $r \leq R$ (R — радиус окружности Σ) дано рядом (5.8), то решением задачи Неймана при $r > R$ для $\hat{w}(r, \varphi)$ будет, аналогично (10.8), ряд

$$\hat{w}(r, \varphi) = \sum C_n J_n'(kR) \frac{H_n^{(2)}(kR)}{H_n^{(2)'}(kR)} \cos(n\varphi). \quad (10.16)$$

Его нормальная производная при $r = R + 0$ равна нормальной производной $\hat{u}(r, \varphi)$ при $r = R - 0$, а разрыв самой функции на Σ , т.е. функция $W(\sigma)$ (см. (10.13)), равна, аналогично (10.9),

$$\hat{W}(\sigma) = \frac{2i}{\pi k R} \sum_n C_n \frac{1}{H_n^{(2)'}(kR)} \cos(n\varphi). \quad (10.17)$$

Асимптотика для $H_n^{(2)'}(kR)$ при $n \gg kR$ примерно такая же, как и для $H_n^{(2)}(kR)$, т.е. множитель $1/H_n^{(2)'}(kR)$ быстро убывает с ростом n при $n \gg kR$, и коэффициенты Фурье ряда (10.17) с большими номерами меньше, чем коэффициенты Фурье ряда (5.9) для $\hat{F}(\varphi)$. Для (10.17) сохраняются соображения, которые выше были сформулированы по поводу $\hat{V}(\varphi)$ (см. (10.9)); с удалением от токов запрет на аппроксимацию ослабляется.

Так как при $kR \gg n$ асимптотика для $H_n^{(2)} \text{ up } 30 \text{ prime}(kR)(kR)$ близка к асимптотике для $H_n^{(2)}(kR)$, то ряд (10.17), как и ряд (10.9), при $kR \rightarrow \infty$ только множителем $e^{ikR}/\sqrt{kR}$ отличается от ряда (5.9) для $\hat{F}^*(\varphi)$. Это, разумеется, согласуется с тем, что в дальней зоне для полей, удовлетворяющих условию излучения, нормальная производная (т.е. $\partial/\partial r$) любого поля только множителем отличается от самого поля.

4. Построения первых трех пунктов этого параграфа почти автоматически переносятся на поля, созданные магнитными токами (2.6б), расположенными на особых линиях магнитного типа $\hat{C}^{(m)}$, определенных условием (5.19). Мы не будем выписывать все формулы для этого случая. На любом контуре Σ , окружающем $\hat{C}^{(m)}$, можно построить функции, аналогичные $\hat{V}(\sigma)$ и $\hat{W}(\sigma)$. Они входят в условия, которым на Σ удовлетворяют поля $u^{(m)}(r, \varphi)$, созданные магнитными токами, и их нормальные производные $\partial u^{(m)}/\partial N$. Формулы эти аналогичны формуле (5.21) для диаграмм $f^{(m)}(\varphi)$ таких токов.

Функция $\hat{V}^{(m)}(\sigma)$ получается продлением вспомогательного поля $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, введенного в §5, п.3, в область вне Σ с сохранением непрерывности на Σ ; $\hat{V}^{(m)}(\sigma)$ есть разрыв нормальной производной полученного этим продлением вспомогательного поля $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$. Функция $\hat{W}^{(m)}(\sigma)$ получается продлением того же поля $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, сохраняющим непрерывность нормальной производной; $\hat{W}^{(m)}(\sigma)$ есть разрыв на Σ построенного таким образом поля $\hat{w}^{(m)}(r, \varphi)$.

Упомянутые в предыдущем абзаце условия имеют вид

$$\int_{\Sigma} u^{(m)}(\sigma) \hat{V}^{(m)*}(\sigma) d\sigma = 0; \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial N} \hat{W}^{(m)}(\sigma) d\sigma = 0. \quad (10.18)$$

Они полностью аналогичны условиям (10.3) и (10.15). Из них следуют условия, аналогичные (10.4) и условию, сформулированному после формулы (10.5). Условия эти—условия равенства нулю произведения заданной функции на соответствующую функцию ортогонального дополнения—являются необходимыми для аппроксимируемости заданной функции. Если для данной линии $\hat{C}^{(m)}$ существует более чем одна функция $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, то функций ортогонального дополнения как для системы функций $u^{(m)}(r, \varphi)|_{\Sigma}$, так и для системы функций $\partial u^{(m)}/\partial N|_{\Sigma}$ будет более, чем одна. Достаточным условием аппроксимируемости будет ортогональность заданной функции ко всем функциям ортогонального дополнения систем функций $u^{(m)}|_{\Sigma}$ или $\partial u^{(m)}/\partial N|_{\Sigma}$.

§ 11. Построение решения волнового уравнения по его нулевой линии; дуга окружности

1. Нахождение нулевой линии $\hat{C}$ заданного вещественного поля $\hat{u}(r, \varphi)$ представляет собой несложную задачу. Если поле $\hat{u}(r, \varphi)$ имеет простой вид, то она решается аналитически, и, во всяком случае, легко решается на ЭВМ. Это относится и к особой линии магнитного типа $\hat{C}^{(m)}$, определяемой по полю $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ согласно (5.18); их построение на ЭВМ может производиться по уравнению (9.9). Далее мы в основном будем рассматривать поля $u(r, \varphi)$ и линии C .

Насколько нам известно, обратная задача — определение решения волнового уравнения $u(r, \varphi)$ по его нулевой линии — в общем виде не решена. Неизвестны и достаточные условия, при которых данная линия является нулевой линией некоторого поля $u(r, \varphi)$. Во всей проблеме аппроксимируемости эта задача (и аналогичная трехмерная векторная задача)—одна из центральных. В этом и следующем параграфах будут приведены примеры решения этой обратной задачи в нескольких простых случаях.

В предыдущем параграфе мы установили, что если линия C —особая, т.е. диаграммами, создаваемыми распределенными на ней токами, нельзя аппроксимировать произвольную диаграмму, то полями этих токов нельзя аппроксимировать и произвольное ближнее поле, т.е. поле, заданное на любом контуре Σ , окружающим $\hat{C}$ и находящимся от $\hat{C}$ на конечном расстоянии. При этом по определению, данному в § 5, поле $\hat{u}(r, \varphi)$ не имело особенностей на всей плоскости. Однако далее мы будем рассматривать более общий случай, когда линия $\hat{C}$ есть нулевая

линия поля $\hat{u}(r, \varphi)$, не имеющего особенностей только в части плоскости. И в этом случае мы сохраним за такой линией название особой, тем самым расширив понятие особой линии, и сохраним обозначения $\hat{C}$ и $\hat{u}(r, \varphi)$, и, аналогично, обозначения $\hat{C}^{(m)}$ и $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$.

Для любого контура Σ , целиком лежащего в области аналитичности поля $\hat{u}(r, \varphi)$, даже если вне этого контура $\hat{u}(r, \varphi)$ имеет какие-либо особенности, остается справедливым результат § 10—поля $u(r, \varphi)$ полной системы токов, расположенных на $\hat{C}$, на Σ образуют неполную систему $u(\sigma)$. Это следует из построений предыдущего параграфа, в которых свойства поля $\hat{u}(r, \varphi)$ вне Σ не играли никакой роли. Сохранится и предложенный там метод построения на Σ функций ортогонального дополнения к системе функций $u(\sigma)$ (или к системе функций $\partial u(\tau)/\partial N$), основанный на решении в области вне Σ задачи Дирихле (или задачи Неймана) с условием излучения Зоммерфельда или на решении уравнений теории потенциала.

2. В этом параграфе мы рассмотрим задачу определения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ по ее нулевой линии $\hat{C}$, когда $\hat{C}$ —дуга окружности. Так как при этом $\hat{C}$ —координатная линия системы координат, в которой волновое уравнение разделяется, то решение получается, разумеется, элементарно. Если мы ограничились бы поиском полей $\hat{u}(r, \varphi)$, не имеющих особенностей на всей плоскости, то задача была бы решена, по существу, уже в § 6. Нас будет интересовать более широкий класс особых линий, так как он определен в предпоследнем абзаце предыдущего пункта. В проблеме аппроксимируемости ближних полей существен именно этот класс. В этом смысле дуга любой окружности (не только резонансной) есть особая линия.

Пусть $\hat{C}$ —дуга окружности радиуса a . Если для какого-нибудь n ($n = 0, 1, \dots$) $J_n(ka) = 0$, то $\hat{C}$ —дуга резонансной окружности, и ей соответствует поле $\hat{u}(r, \varphi)$, даваемое формулой (6.1). Это поле не имеет особенностей на всей плоскости. Поле это—единственное, с точностью до «поляризационного» вырождения, т.е. замены $\cos(n\varphi)$ на $\cos[n(\varphi - \varphi_0)]$ с произвольным φ_0 ; далее мы об этом вырождении упоминать не будем.

Пусть при всех n $J_n(ka) \neq 0$, т.е. $\hat{C}$ —дуга нерезонансной окружности. Этой линии $\hat{C}$ соответствует, в частности, поле

$$\hat{u}(r, \varphi) = J_\nu(kr) \sin(\nu\varphi), \quad (11.1)$$

если ν есть корень уравнения

$$J_\nu(ka) = 0, \quad (11.2)$$

рассматриваемого как уравнение относительно индекса ν .

Зависимость ν от ka , т.е. зависимость индекса функции Бесселя от величины его корня, иллюстрируется графиками рис. 11.1. Кривая $m=1$ на нем соответствует первому корню функции Бесселя, $m=2$ —второму. При ka , меньшем 2,40, уравнение (11.2) не имеет решения, при $2,40 < ka < 5,52$ —существует одно решение, меняющееся от $\nu=0$ при $ka=2,40$ до $\nu=2,2$ при $ka=5,52$. Этому решению соответствует кривая $m=1$. При $ka > 5,52$ появляется второе решение для ν , соответствующее кривой $m=2$, и так далее. Например, при $ka=5,0$ будет одно решение $\nu=1,9$ ($m=1$).

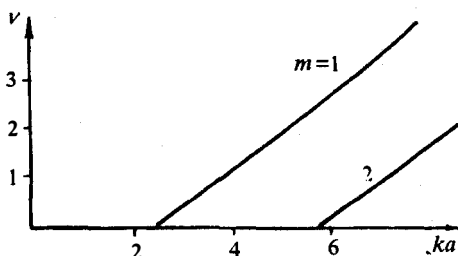


Рис. 11.1

С ростом ka число значений ν , при которых выполняется (11.2), растет и примерно равно целой части отношения ka/π . Действительно, при небольших ν и $m \gg \nu$ корень функции Бесселя асимптотически равен, с точностью до величин порядка $1/m$,

$$ka = \pi (m + \nu/2 - 1/4). \quad (11.3a)$$

Например, при $\nu = 1/2$ $J_\nu(ka)$ пропорционально $\sin(ka)$, и последняя формула принимает точный вид $ka = \pi m$. Количество корней ν уравнения (11.2) при данном ka равно количеству корней ka уравнения (11.2), меньших этого ka , при $\nu=0$ (см. рис. 11.1), т.е. при больших ka равно асимптотически $ka/\pi + 1/4$.

Так как по условию $\hat{C}$ есть дуга нерезонансной окружности, то ν , удовлетворяющее уравнению (11.2), не есть целое число. Этим определяется область аналитичности поля (11.1). При $\varphi = +0$ и при $\varphi = 2\pi - 0$ это поле имеет различные значения, т.е. на полупрямой $\varphi = 0$, $r > 0$ аналитичность нарушается. Она нарушается и в центре окружности, при $r = 0$, так как при $kr \ll 1$ $\hat{u}(r, \varphi) \sim r^\nu$, а $\nu \neq n$. Поэтому область аналитичности поля (11.2) состоит из всей плоскости, из которой исключена эта полупрямая. Так как в (11.1) множитель $\sin(\nu\varphi)$ можно заменить на $\sin[u(\varphi - \varphi_0)]$ при любом φ_0 , то можно построить функцию $\hat{u}(r, \varphi)$, равную нулю на любой дуге окружности $r = a$ и аналитичную в любой области, не содержащей полупрямую

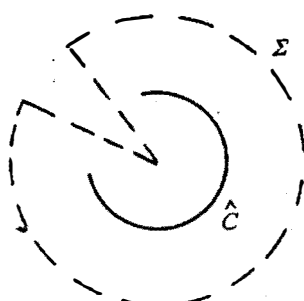


Рис. 11.2

$\varphi = \varphi_0$, $r \geq 0$. Контур Σ , на котором неполна система полей, создаваемых токами на дуге нерезонансной окружности, не должен содержать центр этой окружности и какую-либо исходящую из нее полупрямую (рис. 11.2). Напомним, что это показано только для описанного элементарного способа построения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ по особой линии $\hat{C}$. Даже и при таком способе, как мы увидим далее, можно построить другие поля $\hat{u}(r, \varphi)$ с другими областями аналитичности.

Область аналитичности любого поля, равного нулю на дуге нерезонансной окружности, не содержит всю эту окружность. Действительно, если бы вся окружность лежала бы в области аналитичности некоторого поля, а дуга этой окружности была бы нулевой линией этого поля, то и вся окружность была бы нулевой линией. Это следует из того, что и нулевая линия аналитического поля, и окружность—аналитические линии, а две аналитические линии, имеющие общую часть, совпадают полностью. Однако окружность—нерезонансная, т.е. не существует решения волнового уравнения, не имеющего внутри нее особенностей, равного на ней нулю и не равного нулю тождественно. Поэтому областью аналитичности поля, равного нулю на дуге нерезонансной окружности, не может быть вся плоскость. И, в частности, диаграммами токов, расположенных на такой дуге, может быть аппроксимирована любая функция.

3. Поле $u(r, \varphi)$, равное нулю на дуге окружности, можно искать не только в виде (11.1), но, например, также в виде

$$\hat{u}(r, \varphi) = N_\nu(kr) \sin(\nu\varphi), \quad (11.4)$$

где ν есть корень уравнения

$$N_\nu(ka) = 0. \quad (11.5)$$

Здесь N_ν —функция Неймана.

Зависимость ν от ka , т.е. зависимость индекса функции Неймана от ее корня, даваемая уравнением (11.5), имеет качественно тот же вид, что и зависимость ν от ka по (11.2). Графики этой зависимости для трех первых корней ($m = 1, 2, 3$) функции Неймана представлены на рис. 11.3. Эти графики подобны графикам рис. 11.1, только смещены вправо примерно на $\pi/2$. Уравнение (11.5) не имеет корней при $ka < 0,89$; оно имеет один корень при $0 < ka < 3,96$, два корня при $3,96 < ka < 7,09$ и так далее. Например, при $ka = 5,0$ уравнение (11.5) имеет два корня: $\nu = 0,71$ ($m = 2$) и $\nu = 3,42$ ($m = 1$).

При $m \gg \nu$ корень уравнения (11.5), рассматриваемого как уравнение относительно ka , с той же точностью, что и (11.3а), равен

$$ka = \pi(m + \nu/2 - 3/4). \quad (11.36)$$

Например, при $\nu = 1/2$ $N_\nu(ka)$ пропорционально $\cos(ka)$, и (11.36) переходит в точную формулу: $ka = \pi(m - 1/2)$. При $ka \gg 1$ число корней функции $N_\nu(ka)$ асимптотически равно $ka/\pi + 3/4$.

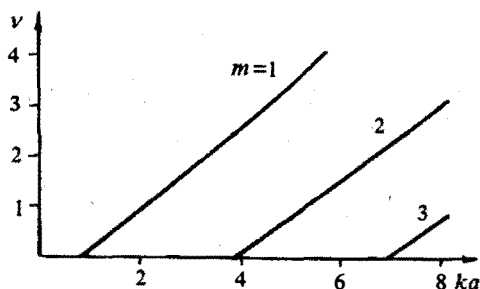


Рис. 11.3

При нецелых ν область аналитичности поля (11.4)—та же, что и поля (11.1). Однако условие, что $\hat{C}$ — дуга нерезонансной окружности, не нарушается, если ka будет таким, что решением уравнения (11.5) будет целое число ($\nu = n$), так как поле (11.4) и при этом будет иметь особенность в центре круга O . Поэтому внутри контура Σ не должна содержаться только точка O . Контур Σ может быть таким же, как на рис. 11.2, причем два луча могут быть заменены любыми кривыми, либо состоять из двух замкнутых контуров, внутренний из которых окружает точку O .

Более общим, чем (11.1) и (11.4), полем, равным нулю на дуге окружности радиуса a , является следующая линейная комбинация этих полей:

$$\hat{u}(r, \varphi) = [N_\nu(ka)J_\nu(ka) - J_\nu(ka)N_\nu(ka)]\cos(\nu\varphi). \quad (11.6)$$

Это поле равно нулю на $\hat{C}$ при любом значении индекса ν . В частности, может быть и $\nu = 0$; поэтому в (11.6) мы заменили $\sin$ на $\cos$. Радиус a может быть сколь угодно мал.

При комплексных ν поле (11.6) комплексно. Так как волновое уравнение не содержит комплексных параметров, и $u(r, \varphi)$ не подчинено никаким условиям типа условия излучения, то вещественная и мнимая части поля, определяемого формулой (11.6) при комплексных ν , тоже являются решением волнового уравнения, т.е. эта формула определяет два вещественных поля, равных нулю на $\hat{C}$. Область аналитичности поля (11.6) та же, что полей (11.4) и (11.1).

4. Ортогональное дополнение $\hat{V}(\sigma)$ на контуре Σ , находящемся в общей области аналитичности нескольких функций $\hat{u}(r, \varphi)$, различны для различных функций. Для полей (11.1) и (11.4) их конечное число (как и корней уравнений (11.2) и (11.5)), примерно равное $2ka/\pi$, для поля (11.6) они зависят от свободного параметра ν .

Хотя этот параметр и может принимать любое значение, множество соответствующих функций ортогонального дополнения по существу не очень богато. При $ka \gg 1$, $|\nu| \ll ka$ поля (11.6) асимптотически пропорциональны $\sin k(r - a)$, т.е. с ростом ka эти поля перестают зависеть от ν , а все функции ортогонального дополнения будут близки друг к другу. При больших значениях $|\nu|$, в области дебаевской асимптотики цилиндрических функций, эти поля пропорциональны выражению $\{(a/r)^\nu - (r/a)^\nu\}$. Как при $r < a$, так и при $r > a$ они на Σ очень быстро меняются. Как мы уже отмечали, для таких «экзотических» функций $\hat{V}(\sigma)$ требование $b_\Sigma = 0$ (см. (10.4)), необходимое для аппроксимируемости какой-либо заданной на Σ функции $U(\sigma)$, не имеет практического значения; оно может явиться существенным ограничением только если сама функция $U(\sigma)$ тоже быстро меняется. Это означает, что если даже какая-либо функция $U(\sigma)$ неаппроксимируема, ибо отличен от нуля интеграл (10.4), но $|b_\Sigma| \ll 1$, то существует близкая к ней аппроксимируемая функция. Разумеется, не сколь угодно близкая—тогда была бы аппроксимируема и сама функция $U(\sigma)$, но такая, что невязка (10.6) мала.

Заметим уже здесь, что этим замечанием мы ослабляем различие между аппроксимируемостью ($b = 0$) и неаппроксимируемостью ($b \neq 0$) подобно тому, как само понятие аппроксимируемости ослабляет различие между реализуемостью и нереализуемостью (см. §3). Мы вернемся к этому вопросу (по существу методическому) в § 16.

Таким образом, рассмотренные выше поля (11.1) и (11.4), в которых ν может принимать только конечный ряд значений, дают довольно полную картину полей $\hat{u}(r, \varphi)$, для которых нулевой линией является дуга нерезонансной окружности.

5. Чем больше радиус a окружности, тем больше существует таких полей и связанных с ними функций $\hat{V}(\sigma)$. При $ka \rightarrow \infty$ число таких функций неограниченно растет, даже если учитывать только функции существенно различные и притом не меняющиеся на Σ очень быстро. При $a \rightarrow \infty$ особые точки полей $\hat{u}(r, \varphi)$ —центр окружности и исходящий из него луч—отодвигаются от дуги Σ на бесконечность, так что эти поля становятся аналитическими внутри очень больших контуров Σ , охватывающих $\hat{\Sigma}$. Все это согласуется с тем, что при $a \rightarrow \infty$ дуга переходит в отрезок

прямой, т.е. в такую особую линию, для которой полями $\hat{u}(r, \varphi)$ являются все решения волнового уравнения, несимметричные относительно нее и аналитичные во всей плоскости.

Напомним, что увеличение числа функций ортогонального дополнения и расширение области аналитичности полей $\hat{u}(r, \varphi)$ означает, что усиливаются ограничения на поля, которые могут аппроксимировать токи, распределенные на $\hat{C}$. Эти ограничения, как мы видим на этом примере, могут усиливаться, несмотря на удлинение линии $\hat{C}$. Существенным здесь оказывается не ее длина, а близость ее к особой линии с очень большими ограничениями (богатым набором функций $\hat{V}(\sigma)$). Мы обсудим этот эффект в следующей главе.

Метод фактического построения функций $\hat{V}(\sigma)$ на контуре Σ описан в § 10. Если Σ представляет собой окружность, а поле $\hat{u}(r, \varphi)$ задано в виде ряда (5.8), так что его ряд Фурье на Σ дается формулой (10.8), то для функций $\hat{V}(\sigma)$ получается явный вид ряда Фурье (10.9). Однако в формулах § 10 начало координат совпадало с центром окружности Σ , а в формулах (11.1), (11.4) и (11.6) начало координат лежит в центре окружности, дугой которой является линия $\hat{C}$. Для применения результатов § 10 надо перенести начало координат, т.е. представить эти поля в виде ряда Фурье по углу, отсчитываемому в цилиндрической системе координат с центром в центре окружности Σ . Этот пересчет легко произвести по формуле сложения для цилиндрических функций [19; 9.1.79].

6. Для простого примера этого параграфа легко построить в явном виде также и функции $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, для которых, по определению, нормальная производная обращается в нуль на этой дуге. Дуга окружности является одновременно и особой линией магнитного типа.

Очевидно, что полями $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ будут являться те же поля (11.1) и (11.4), в которых, однако, числа ν должны удовлетворять не уравнениям (11.2) или (11.5), а одному из следующих уравнений:

$$J_{\nu}'(ka) = 0, \quad N_{\nu}'(ka) = 0. \quad (11.7a, b)$$

Зависимость ν от ka , даваемая каждым из этих уравнений, изображается графиками того же вида, что представлены на рисунках 11.1 и 11.3. Графики, соответствующие уравнению (11.7a), подобны графикам рис. 11.1, соответствующим уравнению (11.2), но только смещены влево; кривая $m = 1$ начинается в точке $ka = 0$, $\nu = 0$. Например, при $ka = 5,0$ уравнение (11.7a) имеет два решения: $\nu = 3,7$ ($m = 1$) и $\nu = 0,78$ ($m = 2$). Уравнению (11.7b) соответствуют графики, аналогичные графикам рис. 11.3, но смещенные вправо, так что кривая $m = 0$ начинается в точке

$ka = 2,19$, $\nu = 0$. При $ka = 5,0$ уравнение (11.76) имеет один корень $\nu = 2,0$.

Аналогом поля $\hat{u}(r, \varphi)$ (см. (11.6)) является, очевидно, поле

$$\hat{u}^{(m)}(r, \varphi) = [N_\nu'(ka)J_\nu(kr) - J_\nu'(ka)N_\nu(kr)] \sin(\nu\varphi). \quad (11.8)$$

Оно тоже при любом ν удовлетворяет условию (5.19) на дуге $r = a$. К нему относятся все те замечания, которые выше были сделаны по поводу поля (11.6), только дебаевская асимптотика его отличается от асимптотики поля (11.6) знаком перед вторым слагаемым.

Таким образом, дуга окружности одновременно является и особой линией $\hat{C}$, и особой линией магнитного типа $\hat{C}^{(m)}$ в том, более широком понимании, которое приведено в начале этого параграфа. Области аналитичности соответствующих полей $\hat{u}$ и $\hat{u}^{(m)}$ совпадают. Для любого замкнутого контура Σ , содержащего эту дугу и не содержащего центра окружности, будет реализовываться ситуация, описанная в § 5. Поля, созданные полной системой электрических токов на дуге, а также поля, созданные полной системой магнитных токов на ней, в отдельности не образуют полных систем полей на Σ , но вместе они образуют такую систему.

§ 12. Аналитическое продолжение поля собственного колебания за границу области

В этом параграфе мы опишем метод построения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ по заданной его нулевой линии $\hat{C}$, основанный на дополнении $\hat{C}$ до резонансного контура с последующим *продлением поля* собственного колебания в область, внешнюю по отношению к этому контуру. Некоторые соображения об общем решении задачи о таком продлении будут высказаны в трех последних пунктах параграфа; в начале будут приведены примеры, аналогичные примерам § 6.

1. Пусть сначала $\hat{C}$ — незамкнутая линия. Дополним ее линией $C_{\text{доп}}$ до замкнутой линии (контура) C_0 таким образом, чтобы C_0 было резонансным (для условий Дирихле) контуром. Собственное колебание описывается некоторым полем, равным нулю на C_0 ; вычислим значение его нормальной производной на C_0 . Аналитическое продолжение есть поле (т.е. решение однородного волнового уравнения), равное нулю на C_0 и имеющее на C_0 то же значение нормальной производной, что и поле собственного колебания. Поле $\hat{u}(r, \varphi)$, равное нулю на $\hat{C}$, внутри C_0 есть поле собственного колебания, а вне — поле его аналитического продолжения. Если не учитывать возможность вырождения, то $\hat{u}(r, \varphi)$

вещественно. Оно, разумеется, не удовлетворяет условию излучения.

Задача аналитического продолжения может рассматриваться как *задача Коши*—на C_0 задано поле и его нормальная производная, надо найти поле вне C_0 . В нашем случае задача Коши ставится специальным образом—значение функции и ее производной не независимы друг от друга. Они связаны условием, что та же задача Коши для области внутри C_0 имеет решение, аналитическое во всей этой области.

Возможность любую незамкнутую линию $\hat{C}$ дополнить до контура C_0 , резонансного на заданной частоте, следует из теоремы Куранта о том, что расширение области монотонно понижает частоту ее собственного колебания. Если линия $C_{\text{доп}}$ очень близка к $\hat{C}$, так что площадь области внутри C_0 мала, то эта частота высока. При непрерывной деформации $C_{\text{доп}}$, при которой каждый следующий контур C_0 охватывает предыдущий (и совпадает с ним на $\hat{C}$), собственная частота непрерывно убывает и при какой-то форме контура C_0 будет равна заданной частоте.

Из этого рассуждения следует, в частности, что одна и та же незамкнутая линия $\hat{C}$ может быть особой линией не на одной частоте, а в целой полосе частот. Так, в примере предыдущего параграфа, когда $\hat{C}$ было дугой окружности радиуса a , решение уравнения (11.2) для ν существовало при всех $k > 2,40/a$. Область аналитичности для разных частот будет, вообще говоря, различной, однако вполне возможно (и в этом примере это имеет место), что некоторый контур Σ лежит в общей области аналитичности, и тогда неаппроксимируемость заданных на Σ функций будет иметь место для широкой полосы частот.

Заметим, что это позволяет расширить изложенный в § 8 метод определения формы рассеивающего тела, если тело это—экран (т.е. незамкнутая линия), а измерения можно производить в ближней зоне. Если форма экрана близка к дуге аналитической кривой, то описанные в § 8 методы применимы не только на одной частоте. Это позволяет, измеряя поле в ближней зоне на нескольких частотах, повысить вероятность какой-либо гипотезы о форме рассеивающего экрана или достоверность определения этой формы.

2. Этот прием построения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ очевидным образом переносится на построение поля $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ по заданной незамкнутой особой линии магнитного типа $\hat{C}^{(m)}$. Линия $\hat{C}^{(m)}$ тоже должна быть дугой аналитической кривой или состоять из нескольких таких дуг. Контур $C_0^{(m)}$, частью которого является данная линия

$\hat{C}^{(m)}$, должен быть резонансным на заданной частоте, но для граничного условия Неймана. Значение на $C_0^{(m)}$ поля собственного колебания входит в задачу Коши вне $C_0^{(m)}$, решение которой дает искомое аналитическое продолжение.

Несколько иначе, чем выше, должна быть сформулирована ссылка на теорему Куранта. При граничном условии Неймана собственная частота низшего колебания в области с малой площадью может не быть большой, может иметь порядок обратного периметра контура $C_0^{(m)}$. Однако и тогда существуют колебания высоких номеров, собственные частоты которых велики. Одна из них обязательно будет выше заданной частоты. Удаляя $C_{\text{доп}}^{(m)}$ от $\hat{C}^{(m)}$, мы будем понижать эту собственную частоту, и найдем контур, резонансный на заданной частоте.

Возможно обобщение этого метода, применимое и к построению $\hat{u}(r, \varphi)$ по $\hat{C}$ и к построению $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$ по $\hat{C}^{(m)}$. Например, при построении $\hat{u}(r, \varphi)$ можно на $C_{\text{доп}}$ ставить не условие Дирихле, а условие Неймана. Тогда на контуре C_0 будут поставлены смешанные граничные условия. И для таких условий существуют резонансные частоты и поля собственных колебаний, как собственные элементы соответственных самосопряженных задач. Можно поставить на $C_{\text{доп}}$ и граничное условие третьего рода с вещественным коэффициентом (вообще говоря, переменным на $C_{\text{доп}}$), и так далее. Мы далее не будем упоминать об этих возможностях.

В предыдущем параграфе на примере было показано, что дуга окружности, вообще говоря, одновременно является и линией $\hat{C}$, и линией $\hat{C}^{(m)}$. Описанное выше построение показывает, что такая ситуация является типичной, во всяком случае, если речь идет о ближних полях. Незамкнутая линия C может быть дополнена и до контура C_0 , и до контура $C_0^{(m)}$. Если оба поля собственных колебаний можно аналитически продолжить и если можно построить контур Σ , лежащий в общей области аналитичности двух полученных полей $\hat{u}(r, \varphi)$ и $\hat{u}^{(m)}(r, \varphi)$, то на Σ неполны как система полей, созданных электрическими токами на C , так и система полей, созданных магнитными токами, расположенными на этой линии. Как и для диаграмм (ср. (5.22)) легко показать, что полями токов обоих типов вместе можно аппроксимировать любое поле на Σ .

3. Может оказаться, что область аналитичности поля $\hat{u}(r, \varphi)$, получающегося аналитическим продолжением поля собственного колебания из области, лежащей внутри C_0 , за линию C_0 , не

содержит всего контура C_0 . В нашей задаче нужно только, чтобы эта область содержала всю линию $\hat{C}$. Если особые точки этого поля лежат на $C_{\text{доп}}$, то, очевидно, с этим полем не может быть связана функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$ в пространстве диаграмм, создаваемых токами на $\hat{C}$; однако это может быть вызвано неудачным выбором линии $C_{\text{доп}}$. Может существовать другое поле $\hat{u}(r, \varphi)$, связанное с той же особой линией $\hat{C}$, но с другим контуром C_0 , не имеющее особенностей во всей плоскости. Напомним, что существование хотя бы одного такого поля уже означает, что система диаграмм неполна.

Однако если на самой линии C есть точки, в любой окрестности которых не существует аналитического поля, т.е. точки, в которых любое решение волнового уравнения, равное нулю на C , имеет особенность, то C не является особой линией. Такой точкой, в частности, может быть угловая точка, в которой встречаются два отрезка различных аналитических кривых, составляющих линию C . Если угол α между двумя касательными в этой точке не является рациональной частью π , то в ней любое решение волнового уравнения имеет особенность. Доказательство, по существу, повторяет аналогичное рассуждение, приведенное в §6, п.2, где оно относилось к линии, составленной из двух пересекающихся прямых. В локальной полярной системе координат (ρ, ψ) с центром в вершине угла и осью, направленной вдоль одной из касательных, поле равно $\rho^\nu \sin(\nu\psi) + O(\rho^{\nu+1})$ ($k\rho \ll 1$).

Так как $\sin(\nu\alpha) = 0$, то ν должно иметь вид $\nu = t\pi/\alpha$ ($t = 1, 2, \dots$). Та же функция должна описывать поле и при $\psi > \alpha$, иначе не будет аналитичности. Следовательно, должно быть $\sin(2t\pi) = 0$, т.е. ν должно быть целым числом (впрочем, это следует и из того, что поле $\sim \rho^\nu$), тогда α/π — отношение двух целых чисел. В противном случае упомянутая задача Коши вблизи угловой точки не имеет решения даже в малом (как однозначная функция).

4. Некоторые примеры § 11 можно рассматривать и как реализацию этой техники — дополнение $\hat{C}$ до C_0 и аналитическое продолжение. Вернемся, например, к полю (11.1), нулевой линией которого является дуга окружности; например, при $ka = 5,0$ $\nu = 1,9$. Построим криволинейный треугольник, состоящий из дуги $r = a$ и двух лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \beta$, где угол β находится из условия $\sin(\nu\beta) = 0$; такой треугольник будет контуром C_0 . При $\nu = 1,9$ угол β может

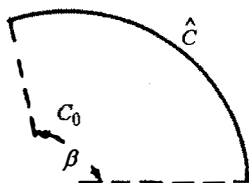


Рис. 12.1

принимать одно из трех значений: $\beta = 0,53\pi$, $\beta = 1,06\pi$ и $\beta = 1,6\pi$. Первый из треугольников представлен на рис. 12.1.

Весь он не может быть линией $\hat{C}$, так как угол между его сторонами есть иррациональная часть π . Центр окружности не может находиться внутри Σ ; $r = 0$ есть особая точка поля $\hat{u}(r, \varphi)$ (см. (11.1)). Однако отрезки обоих радиусов при $r > 0$ могут быть включены в $\hat{C}$. Если центральный угол дуги нерезонансной окружности при $ka = 5,0$ меньше $0,53\pi$, то резонансный треугольник может быть таким, как на рис. 12.1. Если этот угол больше $1,6\pi$, то такой резонансный контур C_0 построить нельзя. Сама дуга при этом продолжает быть особой линией, как нулевая линия поля (11.1) при $\nu = 1,9$; однако добавление двух лучей лишает ее этого свойства.

Поле $\hat{u}(r, \varphi)$, описываемое формулой (11.6), тоже может рассматриваться как поле собственного колебания некоего контура C_0 и аналитическое продолжение этого поля. Контур C_0 содержит, кроме линии $\hat{C}$ (дуга нерезонансной окружности), еще дугу большего (рис. 12.2a) или меньшего (рис. 12.2б) радиуса с тем же центром и два отрезка лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \beta$, где β связано с выбранным значением ν тем же условием $\sin(\nu\beta) = 0$. Радиус с второй дуги находится из очевидного условия, следующего из (11.6):

$$N_\nu(ka) J_\nu(kc) - J_\nu(ka) N_\nu(kc) = 0. \quad (12.1)$$

Например, если выбрано $\nu = 0$, то для $\hat{C}$ в виде дуги окружности $ka = 5,0$ для kc получатся значения $kc = 8,17$ (рис. 12.2a) и, $kc = 1,19$ (рис. 12.2б). Если в (12.1) заданы оба радиуса, т.е. $\hat{C}$ состоит из дуг двух концентрических нерезонансных окружностей, то (12.1) есть уравнение для ν . К этим двум дугам можно прибавить еще два луча (при $r > 0$), сохранив свойство составной линии C_0 (криволинейного четырехугольника) быть особой.

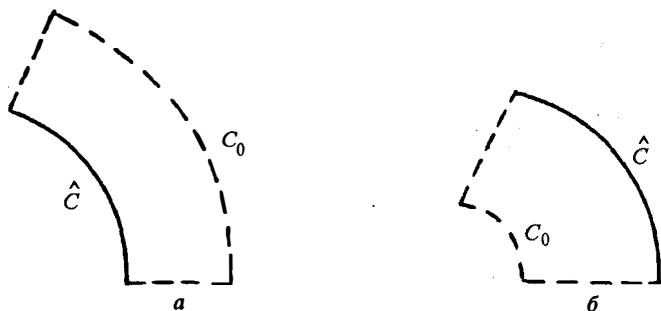


Рис. 12.2

Связь между построениями § 11 и соображениями, изложенными в этом пункте, совершенно тривиальна. Она состоит в том, что в поле $\hat{u}(r, \varphi)$, нулевой линией которого является $\hat{C}$, могут быть еще и другие нулевые линии. Их можно добавить к $\hat{C}$, и если из них и из данной линии $\hat{C}$ можно составить контур C_0 , то он будет резонансным, и поле $\hat{u}(r, \varphi)$ внутри C_0 будет полем собственного колебания, а вне C_0 — аналитическим продолжением этого поля.

Сопоставим условия, существующие для замкнутых и незамкнутых особых линий. Замкнутая особая линия — обязательно резонансный контур; напомним, что это условие недостаточно, чтобы контур был особым. Такая линия может быть особой только на счетном множестве частот. Незамкнутая особая линия является частью бесконечного (континуального) множества резонансных контуров. Она может оказаться особой в непрерывной полосе частот.

Другими словами, ограничения на аппроксимацию произвольных полей и диаграмм для незамкнутой линии сильнее, чем для замкнутой.

Напомним, что и в проблеме реализуемости ситуация аналогична — класс диаграмм (полей), которые могут быть созданы токами, распределенными на замкнутых линиях, шире, чем класс полей, которые могут создать незамкнутые линии.

1. Простейший способ формального построения аналитического продолжения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ собственного колебания, существующего внутри резонансного контура C_0 , состоит, вероятно, в следующем.

Построим некоторую нерезонансную окружность с центром в начале координат, целиком лежащую внутри C_0 . Разложим поле $\hat{u}(r, \varphi)$ на ней в ряд Фурье:

$$\hat{u}(a, \varphi) = \sum B_n \cos(n\varphi). \quad (12.2)$$

Коэффициенты B_n очевидным образом связаны с коэффициентами C_n в разложении (5.8), $B_n = C_n J_n(ka)$, где a — радиус окружности. Разложение (5.8) — единственное, поэтому при любом r поле и его аналитическое продолжение в точках, в которых оно существует, представимо в виде

$$\hat{u}(r, \varphi) = \sum B_n \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} \cos(n\varphi). \quad (12.3)$$

Вопрос об аналитическом продолжении и его особенностях сводится к вопросу о *сходимости ряда* (12.3), т.е. о скорости убывания с номером n коэффициентов B_n в (12.2).

Установим сначала в этих терминах условие, при котором ряд (12.3) сходится на бесконечности, т.е. при $r \rightarrow \infty$. Тогда он представляет собой функцию, асимптотика которой при $r \rightarrow \infty$ имеет вид (5.9). Выражая коэффициенты C_n в (5.8), (5.9) через B_n в (12.2), получим

$$\hat{F}(\varphi) = \sum (i)^n \frac{B_n}{J_n(ka)} \cos(n\varphi) \quad (12.4)$$

и квадрат нормы функции $\hat{F}(\varphi)$ равен, с точностью до множителя,

$$\int_0^{2\pi} |\hat{F}(\varphi)|^2 d\varphi = \sum \frac{(B_n)^2}{J_n^2(ka)} \quad (12.5)$$

(слагаемое $n = 0$ имеет еще коэффициент 2).

Дебаевская асимптотика цилиндрических функций ($n \gg ka$, $n \gg 1$) есть

$$J_n(ka) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{eka}{2n} \right)^n; \quad H_n^{(2)}(ka) = i \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{2n}{eka} \right)^n. \quad (12.6a, б)$$

Вторая из этих формул нам понадобится далее. Асимптотика коэффициента $B_n/J_n(ka)$, согласно (12.6a), есть n -я степень отношения a_0/a , где

$$a_0 = \frac{2}{ek} \lim_{n \rightarrow \infty} (n |B_n|^{1/n}). \quad (12.7)$$

Эта величина выражается через B_n такой же формулой, которой в (3.12) так же обозначенная величина выражалась через коэффициенты Фурье некоторой функции, вопрос о реализуемости которой исследовался в § 3.

Таким образом, зная асимптотику (при $n \rightarrow \infty$) коэффициентов B_n в (12.2), надо вычислить a_0 по (12.7). Если $a_0 > a$, то ряд (12.4) не существует, т.е. аналитическое продолжение функции (12.2) при $r \rightarrow \infty$ без особенностей невозможно. Если $a_0 < a$, то ряд (12.4) сходится, функция $\hat{F}(\varphi)$ имеет конечную норму, и поле $\hat{u}(r, \varphi)$ (см. (12.3)) не имеет особенностей при всех r , включая $r \rightarrow \infty$, контур C_0 и любая его часть являются особой линией. И,

наконец, если $a_0 = a$, то функция $\hat{F}(\varphi)$ существует, но содержит δ -функции, норма ее бесконечна, так что система диаграмм, создаваемых токами на C_0 , полна.

Рассмотрим подробнее ситуацию, когда $a_0 > a$ (в частности $a_0 = \infty$), т.е. $|B_n|$ при $n \rightarrow \infty$ недостаточно быстро стремится к нулю, чтобы существовала функция (12.4). На любом конечном расстоянии $r = R$ ($R > a$) асимптотика при $n \rightarrow \infty$ коэффициента Фурье функции $\hat{u}(R, \varphi)$ (см. (12.3)) есть, согласно (12.6a), $B_n(R/a)^n$. Определим число

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} |B_n|^{1/n}. \quad (12.8)$$

В отличие от выражения для a_0 (см. (12.7)), в (12.8) под знаком предела нет множителя n . Если $l > 0$, то $a_0 = \infty$, а если $a_0 < \infty$, то $l = 0$. Величина l , разумеется, меньше единицы, в противном случае ряд (12.2) не сходил бы (если $l > 1$, то $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$) или сходил бы к обобщенной функции (при $l = 1$ $B_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$), а по условию окружность $r = a$ целиком лежит в области, в которой $\hat{u}(r, \varphi)$ не имеет особенностей. С обозначением (12.8) коэффициент Фурье функции $\hat{u}(R, \varphi)$ имеет при $n \rightarrow \infty$ асимптотическую оценку $(Rl/a)^n$. При $R < a/l$ ряд сходится, т.е. внутри окружности $r = a/l$ аналитическое продолжение не имеет особенностей. При $R > a/l$ ряд расходится. Ближайшая к началу координат особенность аналитического продолжения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ находится на окружности $r = a/l$.

Разумеется, величина a/l не зависит от выбора радиуса окружности a до тех пор, пока окружность находится в области аналитичности поля $\hat{u}(r, \varphi)$. Это следует непосредственно из (12.3). При переходе от окружности $r = a$ к окружности $r = b$ коэффициенты B_n умножаются на $J_n(kb)/J_n(ka)$. Асимптотически это отношение равно $(b/a)^n$, и число l , определенное по (12.8) по коэффициентам Фурье на окружности $r = b$, больше, чем число l , вычисленное по коэффициентам для $r = a$, в b/a раз, так что отношение радиуса окружности к l не зависит от этого радиуса.

Если $R < a/l$, то внутри окружности $r = R$ поле $\hat{u}(r, \varphi)$ не имеет особенностей, и на этой окружности, которая при этом может играть роль контура Σ (см. § 10), можно ввести функцию $\hat{V}(\sigma)$ —функцию ортогонального дополнения для полей на Σ , созданных токами на $\hat{C}$. Квадрат нормы этой функции, согласно

(10.9) и соотношению между B_n и C_n , равен (с точностью до множителя)

$$\int_0^{2\pi} |\hat{V}(\varphi)|^2 d\varphi = \sum \frac{(B_n)^2}{J_n^2(ka) |H_n^{(2)}(kR)|^2}. \quad (12.9)$$

Согласно обеим формулам (12.6), асимптотика n -го члена этого ряда есть $(Rl/a)^{2n}$. Мы вновь получаем тот же результат, что и выше, с небольшим уточнением—на самой окружности $r = a/l$ функция $\hat{V}(\sigma)$ содержит δ -функции. При $r < a/l$ $\hat{V}(\sigma)$ существует, а за границей этой окружности система полей, созданных токами на $\hat{C}$, полна.

Особая ситуация возникает, если $|B_n|$ убывает таким образом, что

$$l = 0, \quad a_0 = \infty, \quad (12.10)$$

например, при $B_n = O(n^{-n/2})$. Радиус сходимости ряда (12.9) равен бесконечности, а ряд (12.5) расходится. Какими свойствами при этом обладает ряд (12.3)? Вопрос этот принадлежит не проблеме аппроксимируемости, а происходит от известной кажущейся противоречивости дебаевской асимптотики (см. (12.6а)), справедливой при $n \gg ka$, и ханкелевской асимптотики, справедливой при $ka \gg n$. Чем больше kR , тем при больших номерах n начинается убывание функции $J_n(kR)$. Ряд (12.3) при условиях (12.10) сходится неравномерно, т.е. он сходится при любом R (так как $l = 0$), но с ростом kR растет число слагаемых в нем, после которых они начинают убывать, и при $kR \rightarrow \infty$ это число становится бесконечным, т.е. ряд не сходится (так как $a_0 = \infty$).

В конце этого пункта мы приведем несколько примеров. Они совершенно элементарны и, по существу, иллюстрируют лишь свойства формул, описывающих поле внутри C_0 , если эти формулы применять к точкам вне C_0 .

Для резонансного прямоугольника со сторонами $\pi/(k \cos \beta)$ и $\pi/(k \sin \beta)$ (см. (6.14)) поле собственного колебания внутри C_0 описывается формулой (6.12). Коэффициент B_n пропорционален интегралу

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \cos(ka \cos \beta \cdot \cos \varphi) \cos(ka \sin \beta \cdot \sin \varphi) d\varphi, \quad (12.11)$$

здесь a —радиус окружности в (12.2), а не сторона прямоугольника, как в §6, п.4. Этот интеграл сводится к функции $J_n(ka)$, так что для этого случая $a_0 = a$. Аналитическое продолжение, описываемое рядом (12.3), сходится при всех r (так как $l = 0$), но функция $F(\varphi)$ имеет бесконечную норму; этот результат в (6.17) был получен непосредственно.

Для криволинейных четырехугольников рис. 12.2 поле собственного колебания внутри C_0 дано в (11.6). Для того чтобы продолжить это поле вне C_0 по методу этого пункта, надо перенести начало координат в какую-либо точку O' , лежащую внутри C_0 , например, в точку с координатами $r = b$, $\varphi = 0$. Функции $J_\nu(kr) \cos(\nu\varphi)$ и $N_\nu(kr) \cos(\nu\varphi)$, входящие в поле собственного колебания (11.6), надо выразить в новых координатах ρ, ψ , с центром в точке O' . По теореме сложения

$$Z_\nu(kr) \cos(\nu\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_{\nu+n}(kb) J_n(k\rho) \cos(n\psi), \quad (12.12)$$

где Z_ν —любая цилиндрическая функция. Для N_ν формула (12.12) справедлива только при $\rho < b$. Коэффициент B_n состоит из слагаемых, пропорциональных произведениям $J_{\nu+n}(kb) J_n(ka)$ и $N_{\nu+n}(kb) J_n(ka)$. При $n \rightarrow \infty$ первое из них очень мало, второе имеет порядок $(a/b)^n$ согласно (12.6). Следовательно, $a_0 = \infty$ (см. (12.7)), $l = a/b$ (см. (12.8)). Ближайшая к O' особая точка аналитического продолжения лежит на окружности радиуса a/l , т.е. на окружности $\rho = b$, в центре кривизны обеих концентрических дуг. И этот пример—проверка того, что в элементарных задачах предложенный аппарат приводит к правильным результатам.

6. Изложенный в предыдущем пункте метод аналитического продолжения поля, заданного на окружности, во внешнюю область по существу повторяет метод аналитического продолжения поля, заданного на бесконечности, во внутреннюю область. Именно этот последний метод привел к условию реализуемости диаграммы, сформулированному в §3, п.2 и состоящему в том, что особенности поля, т.е. создающие его токи, должны находиться внутри и на окружности радиуса (3.12), где A_n —коэффициенты фурье-диаграммы $F(\varphi)$ (см. (3.11)). Это условие можно получить исследованием области сходимости ряда

$$u(r, \varphi) = \sum A_n (-i)^n H_n^{(2)}(kr) \cos(n\varphi), \quad (12.13)$$

асимптотика которого при $r \rightarrow \infty$ равна $e^{-ikr} F(\varphi) / \sqrt{kr}$. Подставляя асимптотику при $n \rightarrow \infty$ $A_n = (a_0 e k / 2n)^n$, следующую из определения a_0 (см. (3.12)), и дебаевскую асимптотику (12.66) для $H_n^{(r)}(kr)$, получим, что коэффициент в ряде Фурье (12.13) имеет порядок (при $n \rightarrow \infty$) $(a_0/r)^n$, так что ряд сходится для $r > a_0$ и расходится для $r \leq a_0$.

Задача о локализации особенностей поля, имеющего данную асимптотику при $r \rightarrow \infty$, т.е. данную диаграмму, исследовалась и многими другими методами. В частности, методами, основанными на изучении поведения диаграммы $F(\varphi)$ в функции комплексного угла $\varphi = \varphi' + i\varphi''$ [24]. При этом получались условия на $F(\varphi)$, которые тождественны сформулированным требованиям о скорости убывания коэффициентов Фурье.

Задача о продлении поля из области внутри C_0 во внешнюю область исследовалась в ряде математических работ, в которых применялись методы аналитической теории решения $u(x, y)$ волнового уравнения как функции комплексных переменных $x = x' + ix''$; $y = y' + iy''$ [25, 26]. При этом используется тот известный факт, что оператор Лапласа (2.4) в области комплексных (x, y) имеет комплексные характеристики, так что эллиптическое волновое уравнение (2.2) приобретает некоторые свойства гиперболических уравнений. В частности, вдоль таких комплексных характеристик переносятся особые точки поля. Особые точки с вещественными координатами при таком рассмотрении представляют собой «след» этих комплексных характеристик.

Как и более элементарный метод, изложенный в предыдущем пункте, метод, основанный на теории функций нескольких комплексных переменных, является, как и всякий метод аналитического продолжения, некорректным. Имеется в виду, что малое изменение формы контура может привести к очень сильному изменению свойств аналитического продолжения, например, к появлению или к исчезновению особенностей; корректность имеет место только в классе аналитических деформаций. Это—не дефект метода, а свойство самой техники построения $\hat{u}(r, \varphi)$ вне C_0 как аналитического продолжения поля $\hat{u}(r, \varphi)$ в области внутри C_0 . Мы с этим столкнулись уже, например, при рассмотрении угловых точек, в которых возможность аналитического продолжения зависит от вопроса—бессодержательного с точки зрения физика—о том, является ли угол α рациональной или иррациональной частью π .

В следующей главе, особенно в §16, мы увидим, что между двумя случаями: «линия—особая» и «линия—неособая, но близкая к особой»—практически нет различия. Аппроксимруемость полями токов на C в первом случае требует токов с бесконечно большой

нормой, во втором—с очень большой нормой. Поэтому и представляют интерес такие методы построения $\hat{u}(r, \varphi)$ по его нулевой линии, которые обладают достаточной «грубостью», чтобы не замечать различия между этими двумя случаями. Метод, изложенный в следующем пункте, этим свойством «грубости» обладает в полной мере.

7. Эффективный численный метод нахождения аналитического продолжения поля собственного колебания за границу резонансной области может быть развит на основе метода вспомогательных источников—того его варианта, который использует идею коллакации [27, 28]. В применении к проблеме собственных колебаний метод состоит в том, что на некоторой линии, окружающей резонансный контур (на вспомогательном контуре) располагаются «достаточно часто» вспомогательные источники, каждый из которых создает поле $a_n H_0^{(2)}(k\rho_n)$, где ρ_n —расстояние от точки, в которой расположен n -й вспомогательный источник. Амплитуды a_n источников определяются из системы линейных уравнений, которые получаются из требования, чтобы суммарное поле всех источников было равно нулю в некоторых точках—точках коллакации—выбранных «достаточно часто» на резонансном контуре. На резонансных частотах эта однородная система имеет нетривиальное решение.

Внутри резонансного контура поле этих источников с найденными коэффициентами a_n является полем собственного колебания. В кольцевой области, лежащей между вспомогательным и резонансным контурами, это поле является аналитическим продолжением собственного колебания за границу резонансного контура.

Вспомогательный контур должен быть выбран таким образом, чтобы в этой области не было особенностей аналитического продолжения. Если вспомогательный контур выбран слишком далеко от резонансного, так что какая-либо особенность оказывается внутри кольцевой области, то метод, разумеется, не может быть реализован, ибо поля точечных источников нигде (кроме точек, где расположены источники) не имеют особенностей. Это проявится в том, что процесс определения собственной частоты и амплитуд a_n не будет сходиться с увеличением числа источников и числа точек коллакации. Это свойство позволяет в принципе, выбирая все более широкий вспомогательный контур, находить особые точки аналитического продолжения. Метод особенно хорошо сходится, если вспомогательный контур проходит через ближайшую к резонансному контуру особую точку. Разумеется, так можно найти только особые точки, не очень далекие от резонансного контура. Этот метод применим к сколь угодно сложным резонансным контурам, даже если для них невозможно поле собственного колебания записать в виде явной формулы.

Как показали численные эксперименты, если резонансный контур имеет криволинейные участки, центр кривизны которых лежит вне резонансной области, то они являются особыми точками аналитического продолжения. Простым примером являются контуры рис. 12.2. Напомним, что существование особых точек аналитического продолжения означает, что поля полной системы токов на таком резонансном контуре создают полную систему диаграмм, т.е. что такими полями можно аппроксимировать любую диаграмму. Отсутствие особых точек означает, что контур—особый, и почти любую диаграмму нельзя аппроксимировать токами на нем. Для выпуклых резонансных контуров простые примеры не позволили обнаружить особые точки. Таким образом, если два изогнутых зеркала расположены «параллельно» друг другу, то токами на них можно аппроксимировать любые диаграммы, если зеркала изогнуты в одном направлении (на контуре есть вогнутые участки), и нельзя аппроксимировать почти любые диаграммы, если зеркала изогнуты в противоположных направлениях (весь контур выпуклый). Подчеркнем, что это—не четко сформулированное утверждение и не математически доказанный результат, а лишь качественный вывод из нескольких численных экспериментов [27].

Опишем возможную модификацию описанного метода, которая позволит, может быть, применять его в тех случаях, когда аналитическое продолжение нигде не имеет особенностей, и находить это продолжение на всей плоскости. Тогда существует функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$, и предлагаемая модификация позволит приближенно определить ее. Идея модификации состоит в том, чтобы *отнести вспомогательный контур на бесконечность*.

Возьмем в качестве вспомогательных полей не цилиндрические, а плоские волны, приходящие из направлений $\varphi = \varphi_n$, где φ_n ($n = 1, 2, \dots, N$) принимает «достаточно частые» значения в интервале $0, 2\pi$. Вспомогательное поле будем искать в виде суммы таких волн:

$$\hat{u}(r, \varphi) = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^N a_n \exp[ikr \cos(\varphi - \varphi_n)]. \quad (12.14)$$

Это поле должно обращаться в нуль в N точках на резонансном контуре. Упомянутая выше кольцевая область распространяется при этом на всю область, внешнюю по отношению к резонансному контуру. Если в этой области нет особых точек, то процесс определения резонансной частоты и амплитуд a_n должен при $N \rightarrow \infty$ сходиться.

Асимптотика при $r \rightarrow \infty$ поля $\hat{u}(r, \varphi)$ содержит незоммерфельдовское (нарушающее условие излучения) слагаемое, которое есть сумма δ -функций от аргументов $\varphi - \varphi_n$, умноженная на

$\exp(ikr)/\sqrt{kr}$ (см. (6.16)). Обозначив угловую зависимость этого слагаемого через $F_N(\varphi)$, получим, с точностью до несущественного множителя

$$\hat{F}_N(\varphi) = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^N a_n \delta(\varphi - \varphi_n). \quad (12.15)$$

Функция $\hat{F}_N(\varphi)$ имеет бесконечную норму. Можно построить функцию $\hat{F}(\varphi)$ с конечной нормой, которая при $N \gg 1$ будет близка к $\hat{F}_N(\varphi)$ в том смысле, что для любой функции $f(\varphi)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \hat{F}_N(\varphi) f^*(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \hat{F}(\varphi) f^*(\varphi) d\varphi. \quad (12.16)$$

Расположим точки φ_n на интервале $0, 2\pi$ равномерно, так что расстояние между соседними точками равно $2\pi/N$. Определим функцию $\hat{F}(\varphi)$ так, чтобы в точках $\varphi = \varphi_n$ $\hat{F}(\varphi) = a_n$, а в промежуточных точках она менялась «достаточно гладко». Левая часть равенства (12.16) есть, согласно (12.15), предел суммы $\frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^N a_n f^*(\varphi_n)$, и по определению функции $\hat{F}(\varphi)$ эту сумму можно

записать в виде $\frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^N \hat{F}(\varphi_n) f^*(\varphi_n)$. Она равна интегральной сумме для интеграла, стоящего в правой части равенства (12.16), т.е. ее предел равен этому интегралу, что и утверждается в (12.16).

Примем, что N —четное число. Тогда для любого угла φ_n можно указать такой угол φ_m , что $\varphi_m - \varphi_n = \pm\pi$. Коэффициенты однородной линейной системы, из которой определяются числа a_n , т.е. значения экспонент в (12.14), меняются на комплексно сопряженные, если заменить в них угол φ_n на φ_m , где углы связаны этим условием. Поэтому, если n и m связаны этим условием, то $a_n = a_m^*$. Следовательно функция $\hat{F}(\varphi)$ обладает свойством $\hat{F}(\varphi + \pi) = \hat{F}^*(\varphi)$, необходимым и достаточным (см. (5.17)) для того, чтобы $\hat{F}(\varphi)$ могла быть ортогональным дополнением.

Значение функции $\hat{F}(\varphi)$ при $\varphi \neq \varphi_n$ не существенно, так как эта функция участвует всюду лишь в качестве множителя под интегралом типа (12.16). Чтобы не превышать допустимую

точность, такие интегралы надо вычислять только по значениям a_n , т.е. по формуле

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \sum^N a_n f^*(\varphi_n).$$

В частности, квадрат нормы функции $\hat{F}(\varphi)$ равен

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \sum^N |a_n|^2.$$

В этом варианте метода вспомогательных источников вспомогательное поле можно рассматривать как приходящую из бесконечности цилиндрическую волну с угловой зависимостью $\hat{F}_N(\varphi)$ (ср. (12.14) с (5.12), (5.14)). Функция $\hat{F}(\varphi)$ есть предел в смысле формулы (12.16) функции $\hat{F}_N(\varphi)$ при $N \rightarrow \infty$. По существу, формула (12.14) вместе с условием $\hat{F}(\varphi_n) = a_n$ является дискретной записью определения вспомогательного поля $\hat{u}(r, \varphi)$, как оно дано, например, в §5, п.1.

Различные варианты метода вспомогательных источников могут быть использованы не только для продления поля собственного колебания, но и для решения самой общей задачи—для нахождения поля по его нулевой линии, не обязательно замкнутой. И в этой задаче, постепенно расширяя вспомогательный контур, охватывающий $\hat{C}$, вплоть до бесконечной окружности, можно по устойчивости системы однородных уравнений для a_n установить положение ближайшей к $\hat{C}$ особой точки поля $\hat{u}(r, \varphi)$, а если это поле не имеет особых точек, то приближенно вычислить функцию $\hat{F}(\varphi)$.

Этот метод применим также для приближенного нахождения функции $\hat{V}(\sigma)$ на контуре Σ , окружающем $\hat{C}$; эта функция является функцией ортогонального дополнения для полей $u(r, \varphi)$ в ближней зоне, созданных токами на $\hat{C}$ (см. (10.3)). Расположим вспомогательные источники на Σ . Амплитуду каждого источника обозначим через $l_\Sigma a_n / N$; l_Σ —длина контура Σ . Расположим их эквидистантно в точках $\sigma = \sigma_n$. Вспомогательный «ток»

$$\hat{V}(\sigma) = \frac{l_\Sigma}{N} \sum^N a_n \delta(\sigma - \sigma_n) \quad (12.17)$$

создает поле $\hat{v}(r, \varphi)$, удовлетворяющее условию излучения и не имеющее особенностей нигде, кроме точек контура Σ . Мы приравняем его нулю в N точках на особой линии $\hat{C}$ (замкнутой

или незамкнутой). Согласно (10.3), если процесс определения a_n из системы однородных уравнений при $N \rightarrow \infty$ сходится, то

$$\sum u(\sigma_n) a_n = 0. \quad (12.18)$$

Повторяя рассуждение, основанное на равенстве (12.16), можно утверждать, что искомая функция ортогонального дополнения $V(\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{V}_N(\sigma)$ определяется своими значениями в N точках $\hat{V}(\sigma_n) = a_n$. Если система однородных уравнений будет иметь только нулевое решение, то на данной частоте линия $\hat{C}$ не является особой. Формула (12.15) может рассматриваться как частный случай формулы (12.17); ею можно пользоваться, если неполнота системы полей, создаваемых токами на $\hat{C}$, сохраняется на всей плоскости.

Глава IV. НОРМА ТОКА

§ 13. Минимальная норма тока при заданной точности аппроксимации

1. В этой главе мы рассмотрим еще одну величину—норму тока. Для электрических токов, которые мы здесь только и будем рассматривать, она определена формулой (5.2). Аналогичным образом можно определить и норму магнитных токов. Далее мы рассмотрим и другие нормы, включающие не только модуль тока, но и модуль его производной $dj(s)/ds$.

Большая норма тока (по сравнению с нормой диаграммы, создаваемой этим током) является серьезным дефектом излучающего устройства. Она означает, что ток должен быть либо очень велик, либо очень сильно изрезан, либо обладать обоими этими нежелательными свойствами. Большой ток означает большие омические потери, т.е. низкий коэффициент полезного действия антенны и большие шумы в ней. Создание тока, быстро меняющегося по заданному закону вдоль антенны, представляет собой трудную техническую задачу.

Вопрос о высокой норме тока подробно исследован в задачах, связанных с проблемой сверхнаправленности. Эта проблема, как известно, состоит в том, что надо создать узкую диаграмму направленности токами, расположенными в малой области. Если произведение ширины диаграммы на ka , где a —порядка линейных размеров этой области, мало по сравнению с единицей, то реализовать или хотя бы аппроксимировать такую диаграмму можно только большими и сильно изрезанными токами. Для того чтобы можно было ограничиться небольшими и гладкими токами, расположенными в этой маленькой области, надо изменить диаграмму, существенно увеличив ее ширину. Вопрос, которым мы будем заниматься в этой главе, не связан с этой проблемой.

Необходимость иметь ток с высокой нормой для аппроксимации заданной диаграммы может быть связана с тем, что линия, на которой распределен ток, близка к особой. И тогда может оказаться, что замена заданной диаграммы другой, находящейся от нее на расстоянии (в метрике L_2) хотя и конечном, но не очень большом, позволяет реализовать эту диаграмму током с существенно меньшей нормой. Задача при этом состоит в том,

чтобы найти эту относительно близкую диаграмму, реализующий ее ток и его норму. Общее решение этой задачи мы дадим в § 15. Здесь же мы ограничимся качественным рассмотрением возможных вариантов ее решения, иллюстрируя их простыми примерами.

Итак, даны линия C , диаграмма $F(\varphi)$ и число δ ($0 \leq \delta \leq 2$). Если диаграмма реализуема, то реализующий ее ток имеет норму N ; для нереализуемых диаграмм мы будем считать, что $N = \infty$. Нужно заменить $F(\varphi)$ на такую диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$, чтобы $\tilde{F}(\varphi)$ была реализуема, отстояла от $F(\varphi)$ на расстояние Δ , не большее δ , и чтобы ток, создающий $\tilde{F}(\varphi)$, имел норму, наименьшую среди норм всех токов, создающих диаграммы, также отстоящие от $F(\varphi)$ на расстояние, не большее δ .

Расстояние между двумя диаграммами равно (см. (3.5))

$$\Delta = \left\{ \int_0^{2\pi} |F(\varphi) - \tilde{F}(\varphi)|^2 d\varphi \right\}^{1/2}. \quad (13.1)$$

Обе диаграммы $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$, а также все упомянутые далее в этом параграфе диаграммы, пронормированы на единицу

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi)|^2 d\varphi = 1, \quad \int_0^{2\pi} |\tilde{F}(\varphi)|^2 d\varphi = 1. \quad (13a,6)$$

Наибольшее значение Δ равно при этом двум, т.е. максимальному расстоянию между двумя точками на единичной сфере. Практический интерес представляют небольшие значения Δ , примерно $\Delta \leq 0,5$.

Диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$ создает ток, который мы обозначим через $\tilde{j}(s)$. Его норма, согласно (3.2), есть

$$N = \left\{ \int_C |\tilde{j}(s)|^2 ds \right\}^{1/2}. \quad (13.3)$$

Надо определить наименьшую норму тока среди всех норм токов на C , создающих диаграммы, для которых

$$\Delta \leq \delta. \quad (13.4)$$

Мы обозначим эту норму через $N(\delta)$. Она является функционалом от $F(\varphi)$.

Таким же образом можно было бы сформулировать и задачу об оптимальном токовом синтезе не диаграмм, а ближних полей. Она состояла бы в определении тока с наименьшей нормой, создающего на замкнутом контуре Σ , окружающем линию C , поле, расстояние (по (10.6)) которого от заданного на Σ поля было бы не больше δ . В п. 7 следующего параграфа будет намечен

способ построения систем базовых функций, позволяющих в общем случае решить и эту задачу. Мы не будем выписывать соответствующего решения: оно находится по той же схеме, что и для диаграмм, и приводит к подобным результатам. Заметим только, что при одной и той же точности приближения δ к заданному ближнему полю и к заданной диаграмме норма тока, необходимого для создания ближнего поля, вообще говоря, больше, чем для создания диаграммы. Это аналогично результату, полученному в § 10 для более простой задачи об аппроксимации. Там было показано, что возможна ситуация, когда аппроксимация произвольного ближнего поля токами на данной линии невозможна, а аппроксимация любой диаграммы—возможна. Задача об оптимальном токовом синтезе может рассматриваться как обобщение задачи об аппроксимации, в которую она переходит при $\delta \rightarrow 0$.

2. Установим сначала качественный вид функции $N(\delta)$. Она, очевидно, убывающая (не возрастающая), так как чем больше допустимое отличие функции $\tilde{F}(\varphi)$ от заданной функции $F(\varphi)$, тем богаче множество функций $\tilde{F}(\varphi)$ и тем, вообще говоря, меньше минимальное на этом множестве значение функционала $N(\delta)$.

Вид зависимости N от δ определяется, во-первых, тем, является ли данная функция $F(\varphi)$ диаграммой, реализуемой или хотя бы аппроксимируемой данной линией C . Во-вторых, существенно, на каком расстоянии от $F(\varphi)$ находится та реализуемая диаграмма—назовем ее $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, которой соответствует наименьшая норма токов из всех норм токов, распределенных на C и создающих диаграмму с единичной нормой (13.26). Эту норму тока обозначим через $N_{\min}$. Если существует несколько реализуемых диаграмм, для которых нормы создающих их токов равны между собой и меньше всех других норм токов, то выберем из них ту, для которой расстояние от $F(\varphi)$ наименьшее, и будем понимать под $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$ именно эту диаграмму. Расстояние от $F(\varphi)$ до $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$ обозначим через η :

$$\eta = \left\{ \int_0^{2\pi} |F(\varphi) - \tilde{F}_{\min}(\varphi)|^2 d\varphi \right\}^{1/2}. \quad (13.5)$$

Если $\delta \geq \eta$, т.е. множество диаграмм, определенных неравенством (13.4), среди которых мы ищем диаграмму с наименьшей нормой тока, содержит и $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, то именно эта функция и будет искомой диаграммой. Поэтому при $\delta \geq \eta$ $N(\delta)$ не будет уменьшаться с ростом δ и будет равна $N_{\min}$. При $\delta \leq \eta$ норма тока, рассматриваемая как функционал от $\tilde{F}(\varphi)$, будет выпуклым

функционалом, минимальное ее значение будет достигаться на некотором $\tilde{F}(\varphi)$, для которого

$$\Delta = \delta. \quad (13.6)$$

Если $\eta = 0$, т.е. если заданная диаграмма $F(\varphi)$ есть $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, соответствующая этому контуру, то $N(\delta)$ не меняется с ростом δ . График $N(\delta)$ при этом представляет собой для всех δ прямую линию $N(\delta) = N_{\min}$ (рис. 13.1а, кривая 1). Если $\eta \neq 0$, то соответствующий график описывает функцию, убывающую с ростом δ до $\delta = \eta$, а при $\delta = \eta$ переходящим в горизонтальную прямую $N(\delta) = N_{\min}$.

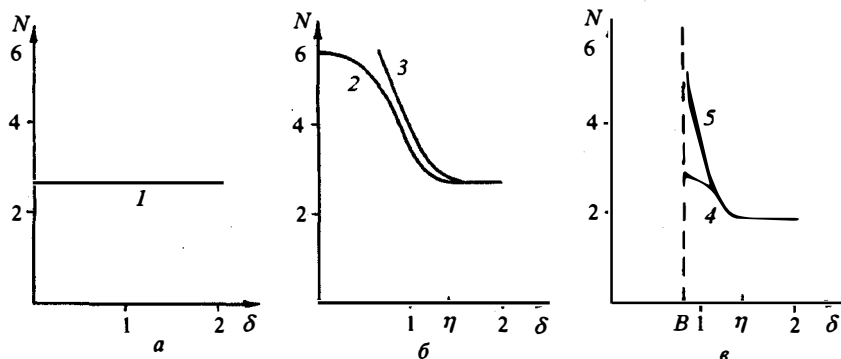


Рис. 13.1.

Пусть $\eta > 0$, и диаграмма $F(\varphi)$ реализуема, т.е. $N(0) < \infty$. Тогда $N(\delta)$ монотонно убывает с ростом δ от $N(0)$ при $\delta = 0$ до $N_{\min}$ при $\delta = \eta$ (рис. 13.1б, кривая 2). Если $F(\varphi)$ нереализуема, но аппроксимируема (т.е. $N(0) = \infty$, но при любом $\delta > 0$ $N(\delta) < \infty$), то функция $N(\delta)$ представляется кривой, имеющей вертикальную асимптоту $\delta = 0$, т.е. имеет вид кривой 3 на рис. 13.1б.

Пусть теперь $F(\varphi)$ неаппроксимируема. Обозначим, как в (3.10), через B ($B > 0$) расстояние между $F(\varphi)$ и множеством реализуемых функций $\tilde{F}(\varphi)$. В отличие от $f(\varphi)$ в (3.20а), функции $\tilde{F}(\varphi)$ нормированы, поэтому $B \geq b$. Так как $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$ принадлежит к этому множеству, то $\eta \geq B$. При $\delta < B$ нет реализуемых функций, удовлетворяющих требованию (см. (13.4)). Далее существуют две возможности. Может оказаться, что нижняя граница норм токов, реализующих диаграммы $\tilde{F}(\varphi)$, которые отстоят от $F(\varphi)$ на расстояние, не меньшее B , достижима, т.е. что $N(B) < \infty$ (рис. 13.1в, кривая 4). Если диаграмм, для которых

$\Delta = B$, несколько, то $N(B)$ есть наименьшая из соответствующих им норм тока.

Наконец, последний вид кривой $N(\delta)$ будет иметь место, если диаграмма $F(\varphi)$ неаппроксимируема, и все диаграммы, для которых $\Delta = B$, нереализуемы. Тогда кривая имеет вертикальную асимптоту $\delta = B$, т.е. $N(B) = \infty$, но при любом ε ($\varepsilon > 0$) $N(B + \varepsilon) < \infty$ (рис. 13.1в, кривая 5).

3. Приведем теперь элементарные примеры для всех пяти случаев, изображенных на рис. 13.1, приняв, что C —окружность. Введем обозначения, которыми мы будем пользоваться и далее. Обозначим через $\psi_m(\varphi)$ ($m = 0, 1, \dots$) ортонормированную систему диаграмм

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(m\varphi), \quad m = 1, 2, \dots \quad (13.7)$$

Как и раньше, мы для простоты записи ограничились четными по φ функциями. Ортонормированную систему токов на C обозначим через $j_n(\vartheta)$ ($n = 0, 1, \dots$). Для окружности (и только для нее) эта система совпадает с (13.7):

$$j_0(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad j_n(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\vartheta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.8)$$

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} \psi_m(\varphi) \psi_q(\varphi) d\varphi = \delta_{mq}, \quad \int_0^{2\pi} j_n(\vartheta) j_p(\vartheta) d\vartheta = \delta_{np}. \quad (13.9)$$

Разложим в ряд Фурье по функциям $\psi_m(\varphi)$ как заданную функцию $F(\varphi)$, так и реализуемую функцию $\tilde{F}(\varphi)$:

$$F(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \psi_m(\varphi), \quad \tilde{F}(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m \psi_m(\varphi), \quad (13.10a, б)$$

где мы несколько изменили обозначения по сравнению с (3.11).

В этом пункте мы для простоты записи примем $F(\varphi)$ вещественной, так что A_m —вещественные числа. Тогда и коэффициенты Фурье $\tilde{A}_m$ функции $\tilde{F}(\varphi)$, обеспечивающей минимум N , будут вещественны (см. ниже (15.9)), и мы можем для окружности (функции $\psi_m(\varphi)$ —вещественны) полагать и $\tilde{F}(\varphi)$ вещественной функцией. Условия нормировки (13.2) дают

$$\sum A_m^2 = 1, \quad \sum \tilde{A}_m^2 = 1. \quad (13.11a, б)$$

Ток $\tilde{j}(\vartheta)$, создающий диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$, разложим в ряд по функциям (13.8):

$$\tilde{j}(\vartheta) = \sum_{n=0} \tilde{B}_n j_n(\vartheta). \quad (13.12)$$

Коэффициенты $\tilde{B}_n$ легко выразить через $\tilde{A}_n$. Это можно сделать, пользуясь общим соотношением (3.8), в котором ядро $\mathcal{K}$ для окружности имеет вид $\exp[ika \cos(\vartheta - \varphi)]$, и вычислить соответствующий интеграл с помощью формулы (12.4). С точностью до несущественного множителя получим известную формулу

$$\tilde{B}_n = \tilde{A}_n / J_n(ka), \quad (13.13)$$

где a — радиус окружности S . Норма тока есть

$$N = \left\{ \sum \tilde{A}_n^2 / J_n^2(ka) \right\}^{1/2}. \quad (13.14)$$

Здесь вновь опущен множитель, о чем мы не будем напоминать, приводя численные примеры к формуле (13.14).

Начнем с нахождения функции $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$; для этого надо найти наибольший из знаменателей в (13.14). Первые три примера (см. рис. 13.1а, б) мы приведем для нерезонансной окружности $ka = 5,0$. Для этого значения ka наибольшим среди всех чисел $|J_n(ka)|$ ($n = 0, 1, \dots$) будет $J_4(ka)$, равное 0,39. Поэтому $\tilde{F}_{\min}(\varphi) = \psi_4(\varphi)$, а минимальное значение N (см. (13.14)), совместимое с (13.11б), будет при $\tilde{A}_n = 0$ ($n \neq 4$), $\tilde{A}_4 = 1$. Это минимальное значение есть $N_{\min} = 2,6$. Никакой ток на этой окружности, создающий диаграмму, нормированную по (13.2), не может иметь норму, меньшую, чем 2,6. Расстояние η между любой функцией $F(\varphi)$ с коэффициентами Фурье A_n и $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, согласно (13.5) и (13.11), равно $\eta = \{2 - 2A_4\}^{1/2}$.

Кривая 1 (см. рис. 13.1а) соответствует случаю, когда заданная функция $F(\varphi)$ равна $\psi_4(\varphi)$; тогда для всех δ $\tilde{F}(\varphi) \equiv \tilde{F}_{\min}(\varphi)$, а $N(\delta) = N_{\min}$.

Кривую 2 (см. рис. 13.1б) мы получим, приняв, например, $F(\varphi) = \psi_0(\varphi)$. Тогда $\eta = \sqrt{2}$; согласно (13.5) η всегда равно $\sqrt{2}$, если $F(\varphi)$ ортогонально $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, соответствующей данной линии S . При этом $N(0) = 1/|J_0(ka)|$, что для выбранного ka равно 5,6.

При любом δ ($\delta \leq \eta$) функция $\tilde{F}(\varphi)$, которой соответствует минимум N , будет линейной комбинацией $F(\varphi)$ и $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, т.е. в нашем примере ($A_0 = 1$) будет иметь вид

$\tilde{F}(\varphi) = \tilde{A}_0 \psi_0(\varphi) + A_4 \psi_4(\varphi)$. Действительно, пусть $\tilde{F}(\varphi)$ содержит еще слагаемое $A_m \psi_m(\varphi)$ ($m \neq 0, m \neq 4$). Из условия $\Delta = \delta$ и условия нормировки (13.11б) следует, что величина $\tilde{A}_0$ и сумма $\tilde{A}_4^2 + \tilde{A}_m^2$ не зависят от $\tilde{A}_m$; они зависят только от δ . Чем больше коэффициент $\tilde{A}_m$, тем меньше коэффициент $\tilde{A}_4$. В выражении для N , которое будет состоять из трех слагаемых, от $\tilde{A}_m$ зависит только сумма двух последних слагаемых $\tilde{A}_4^2/J_4^2(ka) + \tilde{A}_m^2/J_m^2(ka)$. Так как $|J_4(ka)| > |J_m(ka)|$, то при постоянной (не зависящей от $\tilde{A}_m$) величине $\tilde{A}_4^2 + \tilde{A}_m^2$ эта сумма будет наименьшей, если $\tilde{A}_m = 0$.

Легко найти явный вид зависимости N от δ . Уравнение кривой 2 рис. 13.16 при $\delta \leq \eta$ будет

$$N(\delta) = \left\{ N^2(\eta) + \left(\frac{\eta^2 - \delta^2}{\eta^2} \right)^2 [N^2(0) - N^2(\eta)] \right\}^{1/2} \quad (13.15)$$

(см. ниже формулу (13.17), частным случаем которой является (13.15)). При $\delta > \eta$ $N(\delta) = N(\eta)$.

Кривая 3 рис. 13.16 получается, если $F(\varphi)$ отличается, например, от $\psi_0(\varphi)$ на слагаемое, представляющее собой нереализуемую, но аппроксимируемую функцию. Напомним, что нереализуемость функции означает, что ее коэффициенты Фурье A_m убывают с ростом m настолько медленно, что $\lim(m|A_m|^{1/m})$ равен бесконечности. При этом, разумеется, ряд (13.10а) должен сходиться. Если расстояние между $F(\varphi)$ и реализуемой функцией (в нашем примере—функцией $\psi_0(\varphi)$) мало, имеет порядок ϵ ($\epsilon \ll 1$), т.е. норма нереализуемого слагаемого равна ϵ , то уже при $\delta \gg \epsilon$ кривая 3 рис. 13.16 близка к кривой 2. Соответствующее значение η отличается от $\sqrt{2}$ тоже на величину порядка ϵ .

Кривые рис. 13.1в описывают зависимость $N(\delta)$, когда C —резонансная окружность (и, вообще, особая линия). Пусть, например, $ka = 2,405$, т.е. равно первому корню функции $J_0(ka)$. Соответствующее ортогональное дополнение есть $\varphi_0(\varphi)$. Если в ряде Фурье для $F(\varphi)$ $A_0 \neq 0$, то диаграмма $F(\varphi)$ неаппроксимируема. В ряде чисел $|J_n(ka)|$ $n = 0, 1, \dots$ для этого значения ka наибольшим будет $J_1(ka) = 0,52$. Поэтому $\tilde{F}_{\min}(\varphi) \equiv \psi_1(\varphi)$, и, согласно (13.14), $N_{\min} = 1,9$.

Кривая 4 рис. 13.1в соответствует, например, функции $F(\varphi) = A_0\psi_0(\varphi) + A_2\psi_2(\varphi)$. Кривая начерчена для $A_0 = A_2 = 1/\sqrt{2}$. Ближайшая к $F(\varphi)$ реализуемая функция $\tilde{F}(\varphi)$ (нормированная) существует и равна $\psi_2(\varphi)$. Расстояние между этой функцией и $F(\varphi)$ легко выразить через A_0 , используя (13.1а); оно равно

$$B = \left\{ 2 - 2\sqrt{1 - A_0^2} \right\}^{1/2}. \quad (13.16)$$

Здесь B — ширина «щели», т.е. расстояние между асимптотой рис. 13.1в и осью ординат. При нашем выборе A_0 величина $B = 0,77$, а норма тока, создающего диаграмму $\psi_2(\varphi)$, т.е. $N(B)$, равна $1/|J_2(ka)|$, что при $ka = 2,405$ равно 2,3. Если бы мы не требовали, чтобы норма диаграммы $\tilde{F}(\varphi)$ была равна норме диаграммы $F(\varphi)$, то ближайшая к $F(\varphi)$ реализуемая диаграмма была бы $A_2\psi_2(\varphi)$, и расстояние между этими диаграммами было бы равно $A_0 = 0,71$, т.е. было бы несколько меньше, чем по формуле (13.16).

Расстояние между $F(\varphi)$ и $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, т.е. η , равно $\sqrt{2}$, как и в примере с нерезонансной окружностью. Совпадают (с очевидным смещением на B) и кривые 2 рис. 13.1б и 4 рис. 13.1в. Точнее, при $B \leq \delta \leq \eta$

$$N(\delta) = \left\{ N^2(\eta) + \left(\frac{\eta^2 - \delta^2}{\eta^2 - B^2} \right)^2 [N^2(B) - N^2(\eta)] \right\}^{1/2}. \quad (13.17)$$

При $B = 0$ эта формула переходит в (13.16).

Получим формулу (13.17). Для этого надо сначала доказать, что функцию $\tilde{F}(\varphi)$, обеспечивающую минимум N , следует искать в виде

$$\tilde{F}(\varphi) = \tilde{A}_1\psi_1(\varphi) + \tilde{A}_2\psi_2(\varphi). \quad (13.18)$$

Первое слагаемое в (13.18) пропорционально $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, второе — отличается от $\tilde{F}(\varphi)$ только отсутствием слагаемого с $\psi_0(\varphi)$, пропорционального $\hat{F}(\varphi)$. В общем случае это второе слагаемое пропорционально разности

$$F(\varphi) - \hat{F}(\varphi) \int_0^{2\pi} F(\varphi) \hat{F}^*(\varphi) d\varphi,$$

такая функция ортогональна $\hat{F}(\varphi)$. Доказательство формулы (13.18) строится таким же образом, как выше для $B = 0$. К сумме

(13.18) добавляется слагаемое $\tilde{A}_m \psi_m(\varphi)$ ($m \neq 1$, $m \neq 2$) и показывается, что норма (13.14) будет минимальна (при заданном δ) при $A_m = 0$.

Таким образом, $\tilde{F}(\varphi)$ имеет вид (см. (13.18)), так что

$$N(\delta) = \left\{ \tilde{A}_1^2 N^2(\eta) + \tilde{A}_2^2 N^2(B) \right\}^{1/2}. \quad (13.19)$$

Коэффициенты $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ выражаются через A_2 , так как $\delta^2 = 2 - 2A_2 \tilde{A}_2$ и $\tilde{A}_1^2 + \tilde{A}_2^2 = 1$. В свою очередь, используя условие $A_0^2 + A_2^2 = 1$ и формулу (13.16), можно A_2 выразить через B . После элементарных, но громоздких выкладок получается формула (13.17).

Кривая 4 рис. 13.1а будет иметь несколько иной вид, если $F(\varphi)$ содержит, кроме члена с $\tilde{F}(\varphi)$, еще член, пропорциональный $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$, например, если $F(\varphi)$ будет иметь вид $F(\varphi) = A_0 \psi_0(\varphi) + A_1 \psi_1(\varphi)$. Тогда при $\delta < B$ решения не будет, а при всех $\delta \geq B$ функция $\tilde{F}(\varphi)$, минимизирующая N , будет совпадать с $\tilde{F}_{\min}(\varphi) = \psi_1(\varphi)$. Зависимость $N(\delta)$ будет описываться такой же прямой, как линия 1 рис. 13.1а, только начинающейся не при $\delta = 0$, а после щели, т.е. при $\delta = B$. Этот случай описывается той же формулой (13.17) при $N(B) = N(\eta)$.

И, наконец, кривая 5 рис. 13.1а получается, если $F(\varphi)$ содержит, кроме слагаемого $A_0 \psi_0(\varphi)$, еще слагаемое, ряд Фурье которого сходится медленно и представляет собой нереализуемую функцию. Если норма ε этого слагаемого мала, то при $\delta - B \gg \varepsilon$ влияние его мало, и кривая 5 приближается к кривой 4.

4. Как уже отмечалось, практический интерес представляют и другие, кроме (13.3), нормы тока, т.е. другие функционалы от реализуемых диаграмм $\tilde{F}(\varphi)$. Минимальные значения этих норм являются функционалами от заданных диаграмм $F(\varphi)$ и зависят от δ . Наибольший интерес, наряду с (13.3), представляют величины

$$N_1(\delta) = \left\{ \int_C [| \tilde{j}(s) |^2 ds + | d\tilde{j}(s)/ds |^2] ds \right\}^{1/2},$$

$$N_2(\delta) = \left\{ \int_C | d\tilde{j}(s)/ds |^2 ds \right\}^{1/2}. \quad (13.20а,б)$$

Как и выше, минимум берется по всем $\tilde{F}(\varphi)$, лежащим в области (13.4). Величина N_2 , разумеется, не является нормой в математическом смысле, так как она может быть равна нулю и при

$\tilde{j}(s) \neq 0$. Норма N характеризует только величину тока, норма N_2 —только скорость изменения тока на C , а норма N_1 объединяет оба критерия. В конкретной технической задаче оба слагаемых в N_1 могут быть введены с различными весами, характеризующими относительную значимость обоих возможных недостатков антенны—большой ток и быстропеременный ток.

Разумеется, $N_1^2(\delta)$ (см. (13.20а)) не равна сумме квадратов норм $N^2(\delta)$ (см. (13.4)) и $N_2^2(\delta)$ (см. (13.20в)), так как минимум соответствующих норм достигается на различных функциях $\tilde{F}(\varphi)$. Оба слагаемых в $N_1^2(\delta)$ не меньше своих минимальных при данном δ значений, и

$$N_1^2(\delta) \geq N^2(\delta) + N_2^2(\delta). \quad (13.21)$$

Качественно характер зависимости $N_1(\delta)$ и $N_2(\delta)$ от δ —такой же, как $N(\delta)$, с тем очевидным различием, что для $N_2(\delta)$ $\tilde{F}_{\min}(\varphi) = \text{const}$, а минимальное значение $N_2(\delta)$ для всех линий C равно нулю.

5. Закончим этот параграф кратким анализом другой возможной формулировки задачи об оптимальном токовом синтезе. В § 7 мы рассматривали дополнительные возможности, возникающие в задаче аппроксимации, если задана не полная (комплексная) диаграмма $F(\varphi)$, а только ее амплитуда $\Phi(\varphi)$ (см. (7.1)). Эти возможности, разумеется, шире, чем при аппроксимации полной диаграммы. В частности, даже для особых линий аппроксимируемы многие амплитудные диаграммы.

Подобно этому, можно сформулировать и задачу оптимального токового синтеза, считая заданной только функцию $\Phi(\varphi)$ —амплитуду той диаграммы $F(\varphi)$, к которой надо приблизиться со сколь возможно малой нормой тока. Задача в этой формулировке состоит в том, что надо найти такую комплексную реализуемую диаграмму $\tilde{F}(\varphi) = \Phi(\varphi) \exp[-i\tilde{\Psi}(\varphi)]$ и такую фазу $\tilde{\Psi}(\varphi)$, чтобы расстояние Δ (см. (12.1)) между $F(\varphi)$ (см. (7.1)) и $\tilde{F}(\varphi)$ было не больше заданного числа δ (условие (13.4)), а норма тока, реализующего диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$, была наименьшей среди норм всех токов, удовлетворяющих условию (13.4). Отличие этой формулировки от той, которая принята выше в этом параграфе, состоит в том, что варьируется также и фаза $\tilde{\Psi}(\varphi)$. Найденная при этом норма будет не больше, чем в задаче, в которой $\tilde{\Psi}(\varphi)$ является заданной функцией.

Непосредственное решение этой задачи значительно сложнее, чем задачи в формулировке, принятой в начале параграфа. Взятие амплитуды и фазы комплексной функции является нелинейной операцией, поэтому неприменима стандартная процедура определения экстремума функционала, использованная в общем виде

ниже в § 15. Можно, однако, предложить простую итерационную процедуру, позволяющую сравнительно просто приближенно решить эту нелинейную задачу. В конце пункта мы выскажем некоторые соображения, объясняющие, почему мы не стали реализовывать эту процедуру.

Задана функция $\Phi(\varphi)$. Припишем к ней произвольную фазу $\Psi_0(\varphi)$ и решим для комплексной функции $F(\varphi)$ с амплитудой $\Phi(\varphi)$ и этой фазой задачу оптимального токового синтеза, т.е. найдем функцию $\tilde{F}_0(\varphi) = \tilde{\Phi}_0(\varphi) \exp[-i\tilde{\Psi}_0(\varphi)]$, отстоящую от $F_0(\varphi)$ на некоторое расстояние Δ , которой соответствует минимальная норма тока. Это будет первый шаг итерационного процесса. Затем будем минимизировать Δ , сохраняя найденную на первом шаге функцию $\tilde{F}_0(\varphi)$ — искать такую фазу $\Psi_1(\varphi)$, чтобы расстояние от $\tilde{F}_0(\varphi)$ до функции $F_1(\varphi)$ с этой фазой $\Psi_1(\varphi)$ было минимальным. Так как расстояние между $F_1(\varphi)$ и $\tilde{F}_0(\varphi)$ равно

$$\Delta = \left\{ 2 - 2 \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) \tilde{\Phi}_0(\varphi) \cos [\tilde{\Psi}_0(\varphi) - \Psi_1(\varphi)] d\varphi \right\}^{1/2}, \quad (13.22)$$

а $\Phi(\varphi) \tilde{\Phi}_0(\varphi) \geq 0$, то наименьшим оно будет при $\cos [...] = 1$. Второй шаг итерационного процесса состоит поэтому в замене первоначально выбранной фазы $\Psi_0(\varphi)$ на $\Psi_1(\varphi) \equiv \tilde{\Psi}_0(\varphi)$. В этом шаге функция $\tilde{F}_0(\varphi)$ не изменится, не изменится и норма

тока. В конце шага расстояние $\Delta = \left\{ 2 - 2 \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) \tilde{\Phi}_0(\varphi) d\varphi \right\}^{1/2}$.

На следующем шаге надо вновь решать задачу оптимального токового синтеза, т.е. искать реализуемую диаграмму $\tilde{F}_1(\varphi)$, находящуюся на расстоянии Δ от функции $F_1(\varphi)$, имеющей заданную амплитуду $\Phi(\varphi)$ и фазу $\Psi_1(\varphi)$, найденную, как и число Δ , на втором шаге, и так далее.

На каждом шаге либо будет не увеличиваться N (при постоянном Δ), либо будет не увеличиваться Δ (при постоянном N). Так как обе эти величины ограничены снизу (они неотрицательны), то процесс сходится. При этом будет получена кривая $N(\delta)$, лежащая, вообще говоря, левее кривых рис. 13.1, соответствующих диаграммам с амплитудой $\Phi(\varphi)$ и какой-либо случайно выбранной фазой.

Однако в задачах с узконаправленными диаграммами использование дополнительной степени свободы — возможность выбрать оптимальным образом фазу диаграммы — не даст, повидимому, существенного выигрыша, если только в первоначально заданной

комплексной диаграмме фаза не была быстро меняющейся функцией от φ . Уменьшение δ , которое может быть достигнуто, будет значительным только при очень больших N . Хотя кривые рис. 13.1 даже для особых линий будут существовать при всех δ , но приближение их к вертикальной асимптоте $\delta = 0$ будет происходить лишь при $N \gg 1$.

Норма тока, реализующего диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$, тем больше, чем медленнее убывают коэффициенты Фурье в разложении $F(\varphi)$. Это следует в частном случае (C —окружность) из (13.14); в общем случае это будет доказано ниже (см. (14.23)). Ортогональность $F(\varphi)$ к $\hat{F}(\varphi)$, т.е. условие аппроксимируемости, при котором только и происходит смещение кривых рис. 13.1 к асимптоте $\delta = 0$, может быть достигнуто лишь таким выбором фазы $\Psi(\varphi)$, чтобы произведение $F(\varphi) \hat{F}^*(\varphi)$ меняло знак в области, где $\Phi(\varphi)$ велико (см. § 7). Это область главного лепестка диаграммы $\Phi(\varphi)$; для узконаправленных диаграмм эта область мала. Фаза $\Psi(\varphi)$ должна на малом интервале углов измениться на π . Быстрое изменение $F(\varphi)$ означает, что в ряде Фурье этой функции сильно подчеркнуты высокие гармоники. Поэтому норма тока, реализующая такую или близкую к ней диаграмму, велика.

И для аппроксимируемых диаграмм, т.е. если для первоначальной диаграммы было $B = 0$ или если C — не особая линия, и для неаппроксимируемых диаграмм при $\delta > B$ уменьшение δ за счет оптимального выбора фазы $\Psi(\varphi)$ мало, во всяком случае для наиболее интересной области небольших значений δ . Действительно, для малых δ получающаяся при оптимальном синтезе диаграмма $\tilde{F}(\varphi)$ по определению величины δ близка к заданной функции $F(\varphi)$ с фиксированной фазой. Следовательно, и получающаяся фаза $\tilde{\Psi}(\varphi)$ близка к заданной фазе $\Psi(\varphi)$. В выражении (13.22) для расстояния между $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$ интеграл, как отмечено, берется фактически только по области главного лепестка диаграммы $F(\varphi)$. Замена в небольшой области выражения $\cos(\tilde{\Psi} - \Psi)$ на единицу (т.е. замена заданной фазы на «лучшую») приведет при близких $\tilde{\Psi}(\varphi)$ и $\Psi(\varphi)$ лишь к очень малому уменьшению Δ , т.е. к малому смещению влево кривых рис. 13.1.

§ 14. Обобщенные функции двойной ортогональности.

Неаппроксимируемость и существование неизлучающих токов

1. При решении задачи, сформулированной в предыдущем параграфе, центральным моментом было вычисление тока $\tilde{j}(s)$ на C , создающего данную диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$. Элементарные примеры, на которых в § 13 иллюстрировалась идея метода оптимального токового синтеза, относились к окружности. При этом использо-

вались две системы функций (13.7) и (13.8), полные и ортонормированные соответственно на C и на интервале $(0, 2\pi)$, обладающие следующим свойством: каждый ток, равный одной из функций $j_n(s)$ из системы (13.7), создает диаграмму, пропорциональную одной функции $\psi_n(\varphi)$ из системы (13.8). Поэтому коэффициенты Фурье разложения тока в ряд по $j_n(s)$ (см. (13.12)) выражались через коэффициенты Фурье разложения диаграммы в ряд по $\psi_n(\varphi)$ (см. (13.106)) простыми одночленными формулами (13.15). Как мы увидим в § 15, именно существование таких же простых соотношений для произвольной линии C позволит и в общем случае решить задачу оптимального токового синтеза. В этом параграфе мы для произвольной линии C построим соответствующие системы токов $j_n(s)$ и диаграмм $\psi_n(\varphi)$, обладающих теми же свойствами, что и тригонометрические функции (13.7) и (13.8) для окружности.

Использование таких систем функций является одним из способов решения интегрального уравнения первого рода (ср. (3.8))

$$\int_C \mathcal{K}(s, \varphi) j(s) ds = F(\varphi) \quad (14.1)$$

относительно $j(s)$ при данном $F(\varphi)$. При условиях, сформулированных в § 3, при которых (14.1) имеет решение $j(s)$ с конечной нормой, т.е. когда диаграмма $F(\varphi)$ реализуема контуром C , интегральное уравнение можно решать, разложив $j(s)$ и $F(\varphi)$ в ряды соответственно по функциям $j_n(s)$ и $\psi_n(\varphi)$; решение оказывается элементарным. Этот известный метод был уже давно перенесен в теорию антенн. Для численного решения уравнения (14.1) он, повидимому, не очень эффективен, так как нахождение функций $j_n(s)$ и $\psi_n(\varphi)$ само представляет собой сложный в вычислительном отношении процесс. Однако в общих построениях применение этого метода целесообразно.

Функции $j_n(s)$ и $\psi_n(\varphi)$ определяются только линией C и ядром $\mathcal{K}(s, \varphi)$; от правой части уравнения (14.1) они не зависят. Мы назовем эти функции обобщенными функциями двойной ортогональности, имея в виду, что более простой термин—функции двойной ортогональности—установился для систем функций, являющихся частным случаем рассматриваемых здесь систем, а именно, для функций, получающихся, когда C —отрезок прямой. Разумеется, эти функции не являются обобщенными функциями в обычном понимании.

Ядро интегрального уравнения $\mathcal{K}(s, \varphi)$ в (14.1), как известно, равно

$$\mathcal{K}(s, \varphi) = C \exp[ikr(\vartheta) \cos(\vartheta - \varphi)], \quad C = -\frac{i\sqrt{2i}}{4\sqrt{\pi}}. \quad (14.2)$$

Здесь s —безразмерная длина дуги, нормированная условием (3.3), $\vartheta = \vartheta(s)$ —полярный угол, соответствующий данному значению s , и $r(\vartheta)$ —правая часть уравнения $r = r(\vartheta)$ линии C . Для простоты мы предполагаем, что функция $r(\vartheta)$ —однозначная. Если C — незамкнутая кривая, то эта функция определена только на части интервала $(0, 2\pi)$.

2. В этом параграфе мы воспользуемся некоторыми простейшими терминами функционального анализа и несколькими элементарными его результатами. Всюду, где это возможно, мы будем давать физические пояснения как промежуточных, так и окончательных результатов.

Существует оператор K —интегральный оператор (14.1) с ядром (14.2)—переводящий любую функцию $j(s)$, определенную на C , для которой интеграл (14.1) существует, в функцию $F(\varphi)$, определенную на $(0, 2\pi)$:

$$K_j = F. \quad (14.3)$$

Не существует, как известно, обратного оператора, который, действуя на F , давал бы j , т.е. такого оператора, определенного для всех функций в интервале $(0, 2\pi)$, чтобы последовательное применение K и этого оператора давало бы тождественное преобразование. Если бы он существовал, то все диаграммы были бы реализуемы, т.е. операторное уравнение (14.3) имело бы решение при всех $F(\varphi)$.

Введем в пространстве функций $j(s)$ скалярное произведение (см. (3.18))

$$(j_1, j_2) = \int_C j_1(s) j_2^*(s) ds, \quad (14.4)$$

и скалярное произведение в пространстве функций $F(\varphi)$

$$(F_1, F_2) = \int_0^{2\pi} F_1(\varphi) F_2^*(\varphi) d\varphi. \quad (14.5)$$

При этом (j, j) есть квадрат нормы $j(s)$ (см. (13.3)), а (F, F) —квадрат нормы $F(\varphi)$, т.е. неотрицательные числа. Мы далее будем иметь дело только с функциями $j(s)$ и $F(\varphi)$ с конечными нормами.

Определим сопряженный к оператору K оператор K^c условием, что для любых функций $j(s)$ и $F(\varphi)$ справедливо тождество

$$(K^c F, j) = (F, K j). \quad (14.6)$$

Этот оператор является интегральным оператором с ядром $\mathcal{K}^*(s, \varphi)$, т.е.

$$K^c F = C^* \int_0^{2\pi} \exp[-ikr(\vartheta) \cos(\vartheta - \varphi)] F(\varphi) d\varphi. \quad (14.7)$$

Действительно, для такого оператора левая сторона равенства (14.6) есть

$$C^* \int_C \left[\int_0^{2\pi} \exp[-ikr(\vartheta) \cos(\vartheta - \varphi)] F(\varphi) d\varphi \right] j^*(s) ds, \quad (14.8)$$

а правая сторона (14.6), согласно (14.3) и (14.2), есть

$$C^* \int_0^{2\pi} F(\varphi) \left[\int_C \exp[-ikr(\vartheta) \cos(\vartheta - \varphi)] j^*(s) ds \right] d\varphi. \quad (14.9)$$

Эти два двойных интеграла равны друг другу, что и доказывает (14.6) при введении K^c по (14.7).

Перейдем к построению систем функций $j_n(s)$ и $\psi_m(\varphi)$, следуя [29]. Введем два «итерированных» оператора $K^c K$ и KK^c . Первый из них действует на функции, определенные на C , и переводит их в другие функции, тоже определенные на C . Второй действует на функции, определенные на интервале $(0, 2\pi)$, и переводит их в функции на том же интервале. Оба оператора — самосопряженные, т.е. для любых двух функций $j_1(s)$ и $j_2(s)$ справедливо тождество

$$(K^c K j_1, j_2) = (j_1, K^c K j_2) \quad (14.10a)$$

и для любых двух функций $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ справедливо тождество

$$(KK^c F_1, F_2) = (F_1, KK^c F_2). \quad (14.10б)$$

Эти тождества легко проверить, дважды последовательно применяя определение (14.6).

Оба оператора $K^c K$ и KK^c — интегральные. Для первого из них ядро интеграла можно написать в явном виде. Это ядро в свою очередь является интегралом и равно

$$|C|^2 \int_0^{2\pi} \exp\{ik[r(\vartheta) \cos(\vartheta - \varphi) - r(\vartheta') \cos(\vartheta' - \varphi)]\} d\varphi. \quad (14.11)$$

Этот интеграл — табличный (см. (5.15)), он выражается через функцию Бесселя от аргумента $kR(\vartheta, \vartheta')$, где $R(\vartheta, \vartheta')$ — расстояние между двумя точками на C , соответствующим полярным углам ϑ и ϑ' , т.е.

$$R^2(\vartheta, \vartheta') = r^2(\vartheta) + r^2(\vartheta') - 2r(\vartheta)r(\vartheta') \cos(\vartheta - \vartheta'). \quad (14.12)$$

Таким образом,

$$K^c K j(\vartheta') = 2\pi |C|^2 \int_C J_0[kR(\vartheta, \vartheta')] j(\vartheta) ds. \quad (14.13a)$$

Ядро аналогичного интегрального оператора KK^c

$$|C|^2 \int_C \exp \left[2ikr(\vartheta) \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \sin \left(\vartheta - \frac{\varphi' + \varphi}{2} \right) \right] ds \quad (14.136)$$

для произвольной линии C нельзя привести к такому же простому виду. В отличие от ядра в (14.13a) оно, вообще говоря, не вещественно (см. замечание в конце этого пункта). Если C — окружность, то ядро (14.136) вещественно и пропорционально $J_0 \left(2ka \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right)$.

Систему функций $j_n(s)$ мы выберем как систему собственных функций оператора $K^c K$, а систему функций $\psi_m(\varphi)$ — как систему собственных функций оператора KK^c . Рассмотрим два однородных уравнения

$$K^c K j_n(s) = \lambda_n j_n(s), \quad KK^c \psi_m(\varphi) = \mu_m \psi_m(\varphi). \quad (14.14a, б)$$

Здесь λ_n ($n = 0, 1, \dots$) и μ_m ($m = 0, 1, \dots$) — собственные значения. Собственные значения самосопряженных операторов вещественны; $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\mu_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Собственные функции самосопряженных операторов образуют полные ортогональные системы. Если есть вырождение, т.е. например, какому-либо собственному значению λ_n соответствуют несколько линейно независимых собственных функций $j_n(s)$, то эти функции всегда можно ортогонализировать линейным преобразованием; далее мы это оговаривать не будем. Обе системы мы пронормируем на единицу, так что

$$(j_n, j_p) = \delta_{np}, \quad (\psi_m, \psi_q) = \delta_{mq}. \quad (14.15a, б)$$

Этим мы одновременно пронормируем и функции Kj_n и функции $K^c \psi_m$. Действительно, умножив (14.14a) скалярно на $j_n(s)$ и воспользовавшись определением (14.6), получим, согласно (14.15a)

$$(Kj_n, Kj_n) = \lambda_n. \quad (14.16a)$$

Таким же образом из (14.14б) и (14.15б) следует

$$(K^c \psi_m, K^c \psi_m) = \mu_m. \quad (14.16б)$$

Отсюда в частности следует, что числа λ_n и μ_m неотрицательны.

Между системами $j_n(s)$ и $\psi_m(\varphi)$ существует связь, обязанная симметрии в структуре обоих операторов в (14.14). Подействуем сначала на обе стороны равенства (14.14а) оператором K . Полученное операторное соотношение можно записать в форме

$$K\mathcal{K}^c(Kj_n) = \lambda_n(Kj_n). \quad (14.17a)$$

Сопоставим это уравнение для Kj_n с (14.14б). Если функция Kj_n не равна тождественно нулю, то она является одной из собственных функций ψ_m оператора KK^c , а именно, той функцией, для которой $\mu_m = \lambda_n$.

Точно так же, действуя на (14.14б) оператором K^c , получим

$$K^c K(K^c \psi_m) = \mu_m(K^c \psi_m). \quad (14.17б)$$

Если функция $K^c \psi_m$ не равна тождественно нулю, то она является одной из собственных функций j_n оператора $K^c K$ —функцией, относящейся к тому собственному значению λ_n , для которого $\lambda_n = \mu_m$.

Обозначим номер m , для которого $\mu_m = \lambda_n$, через $m(n)$, а обратную функцию через $n(m)$, так что, по определению

$$\lambda_{n(m)} = \mu_m, \quad \mu_{m(n)} = \lambda_n. \quad (14.18)$$

Очевидно, что когда m принимает все значения, соответствующие всем μ_m , то $n(m)$ принимает все значения, соответствующие всем λ_n , и наоборот.

Определяя коэффициенты пропорциональности между $Kj_{n(m)}$ и ψ_m из (14.16а) и (14.15б), получим

$$Kj_{n(m)} = \sqrt{\mu_m} \psi_m. \quad (14.19a)$$

Аналогично, из (14.16б) и (14.15а) следует, что

$$K^c \psi_{m(n)} = \sqrt{\lambda_n} j_n. \quad (14.19б)$$

Таким образом, построены две полные системы ортонормированных функций. При условии, что все собственные значения λ_n и μ_m отличны от нуля, они связаны между собой соотношениями (14.19), где K —тот же оператор, который участвует в уравнении (14.1).

Для окружности функции j_n и ψ_m — тригонометрические функции (13.7) и (13.8). Собственные значения легко вычислить, например, из (14.166), подставив явный вид ядра (14.7) интегрального оператора K^c . Вновь используя табличный интеграл для функций Бесселя, получим

$$\mu_m = |C|^2 J_m^2(ka). \quad (14.20)$$

Из вещественности ядра однородного интегрального уравнения (14.13) следует, что его собственные функции $j_n(\vartheta)$ вещественны (с точностью до множителя $\exp(i\alpha)$, $\alpha = \text{const}$). Отсюда, в частности, следует, что функции $\psi_m(\varphi)$ удовлетворяют тому же условию (5.17), что и функции ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$. Это легко получить из (14.19а) и из вида ядра интегрального оператора K (14.2). Из (14.19а) и вещественности $j_n(s)$ следует, что $\sqrt{\mu_m} \psi_m^*(\varphi) = K^* j_n(s)$, а ядро (14.2) обладает очевидным свойством $\mathcal{K}^*(s, \varphi) = \mathcal{K}(s, \varphi + \pi)$, так что $\psi_m^*(\varphi) = \psi_m(\varphi + \pi)$. Разумеется, это согласуется с (14.19б). Мы воспользуемся этим свойством функций $\psi_m(\varphi)$ в п. 4.

Если линия C имеет центр симметрии, т.е. $r(\vartheta + \pi) = r(\vartheta)$, то и функций $\psi_m(\varphi)$, зависящие только от C , должны удовлетворять такому же условию $\psi_m(\varphi) = \psi_m(\varphi + \pi)$ с точностью до постоянного множителя с модулем единица. Совместно с (5.17) это означает, что $\psi_m(\varphi)$ тоже вещественно. Этот результат может быть получен, разумеется, и непосредственно из приведенных выше формул. Например, из вида ядра (14.136) интегрального уравнения для $\psi_m(\varphi)$ видно, что при $r(\vartheta + \pi) = r(\vartheta)$ оно вещественно, а из этого следует вещественность $\psi_m(\varphi)$. Окружность является линией с центральной симметрией, и для нее функции $\psi_m(\varphi)$ (13.7) вещественны.

3. Для решения уравнения (14.3) разложим заданную функцию $F(\varphi)$ и искомый ток в ряды по системам $\psi_m(\varphi)$ и $j_n(s)$. Запишем эти ряды в форме

$$F(\varphi) = \sum_m A_m \psi_m(\varphi), \quad j(s) = \sum_m B_m j_{n(m)}(s). \quad (14.21a, б)$$

Подставив эти ряды в (14.3), получим, сравнивая коэффициенты при $\psi_m(\varphi)$ с обеих сторон,

$$B_m = A_m / \sqrt{\mu_m}. \quad (14.22)$$

Квадрат нормы тока, согласно (14.21б) и (14.22), будет

$$N^2 = \sum_m |A_m|^2 / \mu_m. \quad (14.23)$$

Решение в форме (14.21б) с коэффициентами (14.22) справедливо, если ряд (14.23) сходится. Рассмотрим сначала линии C , для которых при всех m $\mu_m \neq 0$. Тогда для сходимости этого ряда необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $A_m = (F, \psi_m)$ разложения заданной диаграммы $F(\varphi)$ убывали с ростом m достаточно быстро по сравнению с $\sqrt{\mu_m}$.

Это—формулировка условий реализуемости данной диаграммы данным контуром, приведенная в терминах обобщенных функций двойной ортогональности. Она объединяет сформулированные в § 3 условия реализуемости диаграммы $F(\varphi)$ каким бы то ни было током, локализованным в конечной области—это условие (существование предела (3.11)) зависит только от $F(\varphi)$ —и условие реализуемости током, локализованным на C , определяемое взаимным расположением C и окружности с радиусом a_0 (см. (3.11)). Несмотря на свою лаконичность, условие реализуемости в форме требования сходимости ряда (14.22) практически менее удобно, чем условие в форме, приведенной в § 3, так как для его применения надо знать поведение собственных элементов уравнения (14.14б) при больших номерах. И эта форма условия реализуемости подтверждает, разумеется, известный результат, сформулированный в § 3—так как различие между нереализуемой (но аппроксимируемой) и реализуемыми диаграммами зависит от дальних коэффициентов разложения (14.21а), то переход между такими диаграммами может быть достигнут сколь угодно малым их возмущением.

Из формулы (14.23) следуют также и условия, при которых линия C будет особой. Очевидно, что это будет иметь место, если для какого-либо m ($m = q$) будет

$$\mu_q = 0. \quad (14.24a)$$

При этом аппроксимируемы те и только те диаграммы $F(\varphi)$, для которых равно нулю $A_q = (F, \psi_q)$, т.е. которые ортогональны $\psi_q(\varphi)$. Таким образом, при условии (14.24а) существует функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi) = \psi_q(\varphi)$. Если $A_q \neq 0$, то ближайшая к $F(\varphi)$ аппроксимируемая функция $\tilde{F}(\varphi)$ (ненормированная) получается из $F(\varphi)$ удалением из ряда (14.21а) слагаемого $A_q \psi_q(\varphi)$. Расстояние между $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$ равно $|A_q|$, т.е. равно $|\int F(\varphi) \hat{F}^*(\varphi) d\varphi|$, как то и было получено в § 13 (см. текст после (13.16)).

4. Введение обобщенных функций двойной ортогональности позволяет, в частности, дать качественный анализ явлений,

происходящих при каком-либо предельном переходе, при котором линия C приобретает свойство неаппроксимируемости, т.е. становится особой. Кроме того, при использовании этих функций естественно подчеркивается связь, которая иногда существует между этим свойством и свойством «на C возможен неизлучающий ток». Эта связь сложнее, чем можно было предположить из примера, приведенного в § 1, п. 2. Оказывается, кроме того, что между этими свойствами существует довольно высокая степень симметрий.

Если на C возможен неизлучающий ток $\hat{j}(s)$, то, по определению

$$K\hat{j} = 0. \quad (14.25)$$

Следовательно, $\hat{j}(s)$ является одной из собственных функций оператора (14.14a), а именно той, для которой

$$\lambda_p = 0. \quad (14.246)$$

На линии C возможен неизлучающий ток тогда и только тогда, когда для некоторого номера $n = p$ выполняется (14.246).

Этими двумя свойствами — неаппроксимируемостью (см. (14.24a)) и существованием неизлучающего тока (см. (14.246)) — линия может обладать *независимо*. Это проще всего проиллюстрировать на трех примерах, которые уже были рассмотрены выше. Для резонансной окружности ($J_p(ka) = 0$) имеют место оба эти свойства—диаграмма $\cos(q\varphi)$ есть ортогональное дополнение $\hat{F}(\varphi)$, так что окружность—особая линия, а ток $\cos(q\varphi)$ на ней не излучает. Совпадение этих функций от φ и от ϑ (т.е. от s) является свойством именно окружности, и не с этим совпадением связано одновременное наличие обоих свойств. Контуров, одновременно обладающих обоими свойствами, «континуально много». Примером линии, для которой существует $\hat{F}(\varphi)$, но нет $\hat{j}(s)$, является дуга такой окружности—особая незамкнутая линия; незамкнутый ток всегда излучает. Примером линии, для которой есть неизлучающий ток $\hat{j}(s)$, но которой не соответствует никакая функция $F(\varphi)$ ортогонального дополнения в пространстве диаграмм, является *любой* неособый замкнутый резонансный контур, например криволинейный четырехугольник (см. рис. 12.2), для которого было доказано, что соответствующее ему поле $\hat{u}(r, \varphi)$ без особенностей во всей плоскости не существует.

Для того чтобы пояснить, как независимость свойств (14.24a) и (14.246) согласуется с (14.18), расположим функции $j_n(s)$ и $\psi_m(\varphi)$ в порядке их усложнения, например, по скорости их изменения с s и φ . Можно располагать функции $j_n(s)$ в порядке возрастания отношения двух норм N_1/N , где N дано в (13.3), а N_1 —в (13.20a). При условии (14.15a) это означает, что функции

$j_n(s)$ расположены в порядке возрастания нормы N_1 . Точно так же $\psi_m(\varphi)$ расположим в порядке возрастания величины $\int_0^{2\pi} \{ |\psi_m(\varphi)|^2 + |d\psi_m/d\varphi|^2 \} d\varphi$. Тогда большим n соответствуют быстро меняющиеся вдоль S функции $j_n(s)$, а большим m — функции $\psi_m(\varphi)$, быстро меняющиеся с φ . Обычно применяемое расположение собственных функций в порядке убывания собственных значений, оставило бы функции, которым соответствуют нулевые собственные значения (14.26), «без номера», т.е. их следовало бы располагать за любой другой функцией. В нашей проблеме именно такие функции ($\hat{j}(s)$ и $F(s)$) представляют особый интерес.

На рис. 14.1 представлены зависимости $\mu_m(m)$ и $\lambda_n(n)$; для наглядности они изображены непрерывными кривыми, хотя смысл имеют только целочисленные значения номеров. Кривая 1 рисунка 14.1а относится к линии C , которая не является особой и не

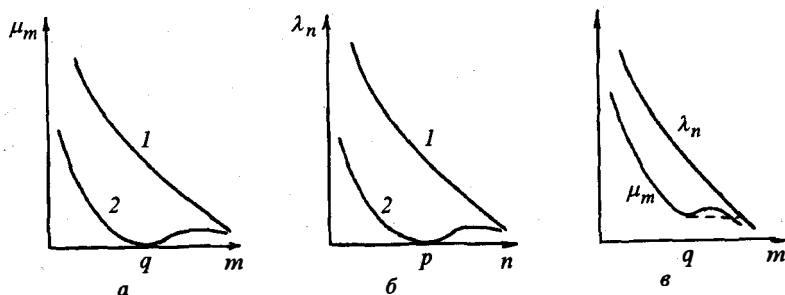


Рис. 14.1

близка к особой линии, кривая 2 — к особой линии, т.е. к линии, для которой справедливо условие (14.24а). Рисунок 14.1б тоже содержит две кривые. Кривая 1 относится к линии, для которой нет неизлучающих токов, кривая 2 — к линии, у которой ток $j_p(s)$ — неизлучающий, $j_p(s) = \hat{j}(s)$.

Рассмотрим, основываясь на (14.18), что происходит, если частота задачи меняется таким образом, что линия C становится особой или что она становится такой, что существует неизлучающий ток, т.е. если частота k меняется так, что либо $k \rightarrow k_q$, где для $k = k_q$ $\mu_q = 0$, либо $k \rightarrow k_p$, где для $k = k_p$ $\lambda_p = 0$. Для кривой типа окружности p и q при этом равны друг другу, окружность одновременно становится и резонансным контуром, и особой линией. Свойство неаппроксимируемости, как уже отме-

чалось, есть при этом очевидное следствие существования неизлучающего тока.

Пусть при $k \rightarrow k_q$ величина $\mu_q \rightarrow 0$, т.е. линия становится особой, но (как во втором примере) линия — незамкнутая, на ней невозможен неизлучающий ток, для нее $\lambda_n \neq 0$ при всех n . На рис. 14.1в объединены «кривые» μ_m и λ_n для такой линии. Горизонтальная прямая соответствует условию (14.18); при $\mu_q \rightarrow 0$ $n(q) \rightarrow \infty$. Неаппроксимируемость в этой ситуации тоже можно трактовать как следствие существования неизлучающего тока, однако этот «ток» бесконечно быстро меняется вдоль C . Такой «ток», разумеется, не излучает, поля, создаваемые соседними его участками, полностью гасят друг друга. Напомним, что норма тока $j_n(s)$ не зависит от частоты, и она равна единице при всех n .

Аналогичная ситуация имеет место, если, как в третьем примере, замкнутый контур C в предельном переходе $k \rightarrow k_p$ становится резонансным, т.е. на нем может быть создан неизлучающий ток $\hat{j}(s) = j_p(s)$, но особой линией он не становится. Тогда при $\lambda_p \rightarrow 0$ $m(p) \rightarrow \infty$ (кривая 1 рис. 14.1а и кривая 2 рис. 14.1б). «Диаграмма» $\psi_{m(p)}(\varphi)$, соответствующая току $j_p(s)$, становится в пределе бесконечно быстро меняющейся. Столь же условно, как в предыдущем абзаце, можно сказать, что функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$, соответствующая неизлучающему току, существует и для этой (неособой) линии, но «функция» эта бесконечно быстро меняется с углом φ . Разумеется, любая функция $f(\varphi)$ будет ортогональна такой «функции» $\hat{F}(\varphi)$ — в том смысле, что для любой $f(\varphi)$ условие (3.14) будет выполнено.

Только если считать бесконечно быстро меняющиеся «функции» $\hat{j}(s)$ и $\hat{F}(\varphi)$ обычными функциями, то можно утверждать, что всегда неаппроксимируемость есть следствие существования неизлучающего тока.

Предыдущие соображения имеют не только методическую значимость. Они подсказывают следующий способ численного решения вопроса о том, является ли данный резонансный контур C особой линией, а при положительном ответе позволяют приближенно найти $\hat{F}(\varphi)$. Во-первых, надо найти собственное колебание, собственную частоту k_p и ток $\hat{j}(s)$ (см. ниже (14.25)). Затем надо при $k \neq k_p$, но $|k - k_p| \ll k_p$ найти собственную функцию $j_p(s)$ уравнения (14.14а), близкую к $\hat{j}(s)$. Ей соответствуют малые значения как функции Kj_p , так и числа λ_p . Если существует предел отношения $Kj_p/\sqrt{\lambda_p}$ при $k \rightarrow k_p$, то согласно

формуле (14.19а), которую можно записать в виде $Kj_n(s) = \sqrt{\lambda_n} \psi_{m(n)}(\varphi)$, этот предел равен $\psi_{m(p)}(\varphi)$, т.е. линия становится особой, и $\hat{F}(\varphi) = \psi_{m(p)}(\varphi)$. Если предел этого отношения не существует, то, хотя этот контур при $k = k_p$ становится резонансным, особым он не становится, токами на нем можно аппроксимировать любую диаграмму.

Фактически этот предел вычислять не надо. Если при $k \rightarrow k_p$ вычисления перестанут быть устойчивыми, а $\psi_{m(p)}(\varphi)$ будет очень изрезанной функцией, то предел не существует, т.е. контур не особый. Если $\psi_{m(p)}(\varphi)$ будет гладкой функцией, то проще остановиться на некоторой частоте k ($k \neq k^p$) и получившуюся для нее функцию $\psi_{m(p)}(\varphi)$ рассматривать как $\hat{F}(\varphi)$ для этой частоты. Согласно замечанию в конце п. 3, функции $\psi_m(\varphi)$ удовлетворяют необходимому для этого условию (5.17). По $\hat{F}(\varphi)$ легко построить соответствующее ей поле $\hat{u}(r, \varphi)$. Это поле будет иметь нулевую линию, близкую к C . Найдя ее, мы решим задачу об определении функции $\hat{F}(\varphi)$ для контура, близкого к заданному, и для соответствующей этому контуру резонансной частоты.

5. Если C —резонансный контур, то решение уравнения (14.3) неоднозначно. Прибавление к решению $j(s)$ слагаемого $B_p \hat{j}(s)$ с любым коэффициентом B_p не нарушает уравнения. Эта неоднозначность аналогична неоднозначности, которую кажущимся образом приобретает задача дифракции на металлическом теле с той же границей C , если эту задачу сводить к интегральному уравнению для тока на поверхности тела. Это интегральное уравнение имеет тот же вид (14.3) с правой частью, определяемой падающим полем. Хотя ядро этого уравнения отлично от (14.2), но соответствующий интегральный оператор, действуя на неизлучающий ток, дает, как и оператор K , нуль. Поэтому прибавление к любому решению этого интегрального уравнения слагаемого, пропорционального $\hat{j}$, не нарушает это уравнение. В задаче дифракции никакой неоднозначности нет. Если C —резонансный контур, то интегральное уравнение не эквивалентно этой задаче. В задаче о токе, создающем заданное внешнее поле, *неоднозначность для таких контуров C действительно существует.*

С такой же ситуацией мы столкнулись бы, если бы решали не уравнение (14.3) для тока, а задачу о нахождении такой функции $F(\varphi)$, чтобы приходящая цилиндрическая волна с угловой зависимостью $F^*(\varphi)$ создавала бы на C заданное поле, которое мы обозначим через $J(s)$. Эта задача сводится к уравнению $K^c F = J$. Если на C существует функция $\hat{j}$, для которой $K\hat{j} = 0$, то $\hat{j}$ будет ортогональным дополнением для системы токов $K^c \psi_m$.

Так как $(K^c F, \hat{j}) = 0$ для любой функции F , то задача будет иметь решение (аппроксимационное) для таких и только таких J , для которых $(J, \hat{j}) = 0$. Если же C —особая линия, то задача эта неоднозначна, решение ее сохраняется, если к нему добавить слагаемое $A_q \hat{F}(\varphi)$ при любом A_q . Если функций $\hat{F}$ несколько, то, разумеется, можно добавить и любую их линейную комбинацию. Заметим, что задача о нахождении $F(\varphi)$ из уравнения $K^c F = J$ при известном J имеет простой физический смысл в теории приемных антенн.

Симметричная роль функций $\hat{F}(\varphi)$ и $\hat{j}(s)$ может быть подчеркнута и в том методе анализа, которым мы раньше пользовались и который основан на изучении функций $\hat{u}(r, \varphi)$. По определению, линия является особой, если на ней равно нулю некоторое поле $\hat{u}(r, \varphi)$, удовлетворяющее волновому уравнению, нигде не имеющее особенностей и не равное тождественно нулю на бесконечности. Асимптотика этого поля (5.3) содержит функцию $\hat{F}(\varphi)$. С другой стороны, неизлучающий ток существует на резонансном контуре, т.е. на линии, на которой равно нулю поле (его тоже можно обозначить через $\hat{u}(r, \varphi)$), удовлетворяющее волновому уравнению, не равное тождественно нулю и не имеющее особенностей в области внутри C . Ток $\hat{j}(s)$ связан с $\hat{u}(r, \varphi)$ очевидной формулой

$$\hat{j}(s) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial N} \Big|_C,$$

т.е. он равен току, протекающему в некотором резонаторе, стенки которого совпадают с C , на его собственном колебании. Такой ток не создает поля вне C .

Итак, выше показано, что любая линия C соответствует одному из четырех типов; их можно характеризовать условиями (14.24). Если они оба не выполняются, то не существует ни тока $\hat{j}$, ни диаграммы $\hat{F}$. Если выполняется лишь условие (14.24б), то C —неособый резонансный контур. Если выполняется условие (14.24а), то линия особая, но на ней не существует ток $\hat{j}$. При выполнении обоих условий (14.24) C есть особый резонансный контур. В любой геометрической окрестности каждой из этих линий существуют другие линии того же типа.

6. Обобщенные функции двойной ортогональности можно связать с введенным выше вспомогательным полем $\hat{u}(r, \varphi)$, которое создается приходящей из бесконечности цилиндрической волной с угловой зависимостью $\hat{F}^*(\varphi)$, и с полем $u(r, \varphi)$, которое создает ток на C .

Рассмотрим для этого сначала оператор, который получается из оператора K^c , если в нем величина $r(\vartheta)$ —правая часть уравнения $r = r(\vartheta)$ линии C —заменена свободной переменной r .

Такой расширенный оператор уже не связан с линией C . Опустив несущественный множитель C^* , запишем его в виде

$$(K^C)_{\text{расш}} F = \int_0^{2\pi} \exp[-ikr \cos(\vartheta - \varphi)] F(\varphi) d\varphi. \quad (14.26)$$

Этот оператор переводит функцию $F(\varphi)$ в функцию точки (r, ϑ) на плоскости. Если эта точка лежит на C , то оператор (14.26) совпадает с K^C (см. (14.7)).

Левая часть выражения (14.26) есть функция от r, ϑ . Она не имеет особенностей во всей плоскости, удовлетворяет однородному волновому уравнению (5.2), в чем проще всего убедиться, записав ядро в виде $\exp[-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)]$, где $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$. По форме функция (14.26) совпадает с функцией, приведенной в (5.12), и ее асимптотика при $r \rightarrow \infty$ имеет, согласно (5.13), вид

$$\frac{1}{\sqrt{kr}} \left[e^{ikr} F(\varphi + \pi) + e^{-ikr} F(\varphi) \right], \quad (14.27)$$

где опять опущены несущественные множители.

Подчиним $F(\varphi)$ условию, при котором поле (14.26) вещественно. Согласно (14.27) для этого нужно, чтобы

$$F(\varphi + \pi) = F^*(\varphi). \quad (14.28)$$

Подставляя (14.28) в (14.26), убедимся, что при этом (14.26) — вещественная функция, так что (14.28) — необходимое и достаточное условие вещественности поля (14.26). Условие (14.28) фактически совпадает с условием (5.16), которому удовлетворяют функции ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$. Отличие в коэффициентах вызвано отбрасыванием постоянных множителей в последних формулах, и оно не существенно.

Таким образом, если $F(\varphi)$ удовлетворяет условию (14.28), то поле (14.26) есть вещественное решение волнового уравнения. Если оно равно нулю на C , то это есть поле $\hat{u}(r, \vartheta)$, C — особая линия $\hat{C}$ и $K^C F = 0$, т.е. оператор KK^C имеет нулевое собственное значение μ_q .

Расширение оператора K^C до $(K^C)_{\text{расш}}$ (см. (14.26)) связывает формализм этого параграфа с аппаратом, основанным на исследовании поля $\hat{u}(r, \varphi)$. Формула (5.6), которую мы рассматривали как вариант теоремы взаимности, эквивалентна формуле (14.6). Доказательство формулы (5.6), основанное на формуле Грина, по существу содержится в доказательстве тождественности интегралов (14.8) и (14.9). В некоторых отношениях методы § 5 и § 14 являются дополнительными, каждый из них имеет свою область применимости. Ограничившись только оператором K^C , без введения

$(K^c)_{\text{расш}}$, вероятно, трудно было бы доказать, что для криволинейного четырехугольника рис. 12.2 уравнение (14.146) не имеет нулевого собственного значения, а для двух прямых, пересекающихся под углом (6.6), это уравнение имеет нулевое собственное значение бесконечной кратности.

Аналогично (14.26), можно ввести действующий на $j(s)$ оператор $(K)_{\text{расш}}$, определив его уравнением

$$(K)_{\text{расш}} j = \frac{i}{2} \int_C H_0^{(2)}(k\rho) j(s) ds, \quad (14.29)$$

где ρ —расстояние между точкой интегрирования на C и точкой плоскости с координатами r, ϑ . Этот оператор переводит ток $j(s)$ в поле $u(r, \vartheta)$, создаваемое этим током в произвольной точке. Если точка (r, ϑ) лежит в бесконечности ($r \rightarrow \infty$), то оператор $(K)_{\text{расш}}$ отличается от K лишь множителем $e^{-ikr}/\sqrt{kr}$. Именно это и позволяло нам утверждать, что для любого резонансного контура оператор $K^c K$ имеет нулевое собственное значение $\lambda_p = 0$ ($j_p = \hat{j}$), причем если есть вырождение, то только конечной кратности, так как собственные значения задачи Дирихле (т.е. числа k_p) могут иметь не более чем конечнократное вырождение.

Отметим отличие, несколько нарушающее симметрию операторов K и K^c и соответственно функций $\hat{j}(s)$ и $\hat{F}(\varphi)$. Из $K\hat{j} \equiv 0$ следует, что во всей бесконечной области $(K)_{\text{расш}} \hat{j} \equiv 0$, тогда как из $K^c \hat{F} \equiv 0$ отнюдь не следует, что $(K^c)_{\text{расш}} \hat{F} \equiv 0$. Отличие это связано с аналитическими свойствами решений волнового уравнения, т.е. полей $u(r, \varphi)$ и $\hat{u}(r, \varphi)$. Первое из них является комплексным бегущим полем, оно удовлетворяет условию излучения. По теореме Реллиха [30], если оно равно нулю на бесконечности, т.е. если $Kj \equiv 0$ (а это означает, что $j = \hat{j}$), то оно равно нулю всюду, кроме, может быть, внутренней области, заключенной в C . Оно не может иметь нулевых линий и быть отличным от нуля вне этих линий. В отличие от поля $u(r, \varphi)$, поле $\hat{u}(r, \varphi) = (K^c)_{\text{расш}} \hat{F}$ создано приходящей из бесконечности сходящейся цилиндрической волной. Это—стоячее вещественное поле, в нем могут быть нулевые линии C —особые линии ($F = \hat{F}$). Несколько условно можно считать, что вся плоскость есть внутренняя область по отношению к той линии, на которой распределены источники поля $u(r, \varphi)$. По существу, все построения гл. III основаны на этой трактовке.

Закончим этот пункт замечанием по поводу формулы (9.8), означающей, что для любой линии C можно указать такую последовательность $u_m(r, \varphi)$ решений волнового уравнения, что

интеграл по C от $|u_m|^2$ будет при $m \rightarrow \infty$ стремиться к нулю. Примером такой последовательности являются поля $(K^c)_{\text{расш}} \psi_m$. Функции $K^c \psi_m$ представляют собой значения этих полей на C , а интеграл в (9.8) есть норма этих функций. Согласно (14.166), этот интеграл равен μ_m и потому он стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Напомним, что функции ψ_m нормированы на единицу, т.е. эти поля $\hat{u}_m$ не становятся малыми при $m \rightarrow \infty$. Повторим в терминах этого параграфа замечание, сделанное после (9.8)—из того, что $\mu_m \rightarrow 0$, не следует, разумеется, что существует предельная функция, к которой при $m \rightarrow \infty$ стремятся функции $\psi_m(\varphi)$, и что у оператора (14.146) существует нулевое собственное значение.

7. Система токов $j_n(s)$ на C и диаграмм $\psi_m(\varphi)$ на интервале $(0, 2\pi)$ были выше построены при помощи оператора K , переводящего ток в диаграмму. Такие же связанные между собой уравнениями (14.18) полные ортонормированные системы функций можно построить на C и на любом окружающем ее контуре Σ , используя вместо K оператор K_Σ , переводящий $j(s)$ на C в поле $u(\sigma)$ на Σ [31]. Оператор K_Σ получается из интегрального оператора в правой части (14.29), если в нем под ρ понимать расстояние между точкой s на линии C и точкой σ на контуре Σ ($\rho = \rho(s, \sigma)$). Скалярное произведение на C определяется формулой (14.4); вместо скалярного произведения (14.5) в пространстве диаграмм введем скалярное произведение в пространстве полей на Σ :

$$(u_1, u_2) = \int_{\Sigma} u_1(\sigma) u_2^*(\sigma) d\sigma. \quad (14.30)$$

Сопряженный оператор K_Σ^c определяется условием

$$(K_\Sigma^c u, j) = (u, K_\Sigma j) \quad (14.31)$$

и, как легко проверить, имеет вид

$$K_\Sigma^c u = -\frac{i}{2} \int_{\Sigma} H_0^{(1)}[k\rho(s, \sigma)] u(\sigma) d\sigma. \quad (14.32)$$

Все дальнейшие построения с операторами K_Σ и K_Σ^c производятся так же, как с операторами K и K^c . Две системы обобщенных функций двойной ортогональности получаются как собственные функции уравнений типа (14.14). Так же, как и выше, решается задача об определении тока, создающего на Σ заданное поле

$U(\sigma)$. Эти две системы, вообще говоря, отличны от систем функций, порождаемых операторами (14.14).

При этом возникают те же особые ситуации, когда оператор $K_{\Sigma}^C K_{\Sigma}^C$ или (и) оператор $K_{\Sigma}^C K_{\Sigma}$ имеют нулевые собственные значения. Первый из них имеет нулевое собственное значение $\mu_q = 0$, если его имеет оператор KK^C ; кратность его может быть выше, чем кратность нулевого собственного значения оператора KK^C . Если контур Σ достаточно близок к линии C , то оператор $K_{\Sigma}^C K_{\Sigma}^C$ может иметь нулевое собственное значение, даже если у оператора KK^C его нет. Две последние фразы формулируют в терминах операторов результаты, полученные в гл. III при изучении полей $u(r, \vartheta)$ — многие линии C являются нулевыми линиями полей, не имеющих особенностей только в конечной части плоскости, близкой к C . На таких линиях можно создать токи, аппроксимирующие любые диаграммы, но никакими токами нельзя аппроксимировать некоторые поля на достаточно близких к C контурах Σ .

Оператор $K_{\Sigma}^C K_{\Sigma}$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда его имеет оператор $K^C K$. Кратность этих собственных значений одинакова, и им соответствуют те же неизлучающие токи (14.25). Это следует из того, что если какой либо ток на C не создает поля на Σ , то он не создает и диаграмму, и наоборот.

8. Упомянем, наконец, о возможности построить системы обобщенных функций двойной ортогональности, используя операторы, переводящие не электрические, а магнитные токи $j^{(m)}$, расположенные на C , в диаграммы или поля на Σ . Мы обозначим первый из этих операторов через $K^{(m)}$, а оператор, переводящий $j^{(m)}$ в поле в любой точке (r, ϑ) , через $(K^{(m)})_{\text{расш}}$. Магнитный ток мы введем, как разрыв поля u на линии C , т.е. положим $j^{(m)} = [u]$ (ср. (2.36)). Оператор $(K^{(m)})_{\text{расш}}$ — тоже интегральный, аналогичный (14.29):

$$(K^{(m)})_{\text{расш}} j^{(m)} = \frac{i}{2} \int_C j^{(m)}(s) \frac{\partial}{\partial N} H_0^{(r)}(k\rho) ds, \quad (14.33)$$

где $\partial/\partial N$ означает взятие нормальной к C производной. Если точка (r, ϑ) лежит на контуре Σ , то (14.33) имеет смысл $K_{\Sigma}^{(m)}$ (в очевидных обозначениях); при $r \rightarrow \infty$ (14.33) отличается от $K^{(m)}$ множителем $\exp(-ikr)/\sqrt{kr}$.

Все построения, произведенные для K и других операторов, получающихся из него, полностью переносятся на $K^{(m)}$ и соответствующие операторы $K_{\Sigma}^{(m)}$ и так далее. Изменится только понятие резонансного контура—внутри такого контура должно существовать ненулевое решение волнового уравнения с нулевым значением нормальной производной на C . Неизлучающий ток $\hat{j}^{(m)}$ будет равен значению этого поля на C . Если C —окружность, то $j_n^{(m)}(\vartheta)$ и $\psi_m^{(m)}(\varphi)$ —те же тригонометрические функции, что и $j_n(\vartheta)$ и $\psi_m(\varphi)$, а собственные значения пропорциональны не $J_n^2(ka)$, как в (14.20), а $[J_n'(ka)]^2$.

§ 15. Оптимальный токовый синтез; общий случай

1. В этом параграфе будет дано общее формальное решение задачи, сформулированной в § 13, п. 1, и приведено несколько простых численных примеров. Задача состоит в том, чтобы найти реализуемую диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$, находящуюся от заданной диаграммы $F(\varphi)$ на заданном расстоянии δ и созданную током с наименьшей возможной при этом нормой. Обе диаграммы пронормированы на единицу согласно условию (13.2). Под нормой понимается величина (13.3); далее будут рассмотрены и другие нормы (13.20).

Решение основано на разложении тока и диаграмм по обобщенным функциям двойной ортогональности, введенным в § 14. Затем применен метод множителей Лагранжа и использован прямой метод Ритца, в котором варьируемыми переменными являются коэффициенты разложения функции $\tilde{F}(\varphi)$. Таким образом, нам понадобятся только разложения функций $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$ в ряды Фурье по полной ортонормированной системе $\psi_m(\varphi)$ [ср. (14.21a)]:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \sum A_m \psi_m(\varphi), \\ \tilde{F}(\varphi) &= \sum \tilde{A}_m \psi_m(\varphi); \end{aligned} \quad (15.1a, б)$$

формула (14.23) для нормы тока, реализующего диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$, выраженной через $\tilde{A}_m$:

$$N = \left\{ \sum |\tilde{A}_m|^2 / \mu_m \right\}^{1/2}; \quad (15.2)$$

условие нормировки для диаграмм

$$\sum |A_m|^2 = 1, \quad \sum |\tilde{A}_m|^2 = 1 \quad (15.3a, б)$$

и выражение для квадрата расстояния между функциями $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$:

$$\Delta^2 = \sum |A_m - \tilde{A}_m|^2. \quad (15.4)$$

Здесь μ_m — вещественные неотрицательные числа, и $\mu_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Формула (15.2) позволяет ответить на общий вопрос о минимальном значении нормы тока, т.е. о наименьшей норме тока, распределенного на данной линии C и создающего какую-либо диаграмму с единичной нормой. Если μ_t — наибольшее из всех μ_m , то наименьшее значение суммы (15.2) при условии (15.3б) будет $N_{\min} = 1/\sqrt{\mu_t}$, и оно будет достигаться при $\tilde{A}_m = 0$ ($m \neq t$), $|A_t| = 1$. Действительно, если еще какие-либо коэффициенты $\tilde{A}_m$ ($m \neq t$) будут отличны от нуля, то N^2 можно записать в виде

$$N_2 = N_{\min}^2 + \sum |\tilde{A}_m|^2 \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_t} \right). \quad (15.5)$$

Так как $\mu_t \geq \mu_m$, то все члены суммы положительны (не отрицательны) и $N \geq N_{\min}$.

Расстояние η между $F(\varphi)$ и $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$ зависит от фазы единственного отличного от нуля коэффициента $\tilde{A}_t$. Наименьшим это расстояние будет, если эта фаза равна фазе коэффициента A_t в разложении (15.1а), тогда (ср. § 13, п. 3)

$$\eta = \left\{ 2 - 2 |A_t| \right\}^{1/2}. \quad (15.6)$$

Под $\tilde{F}_{\min}(\varphi)$ мы будем понимать именно эту функцию $\tilde{F}_{\min}(\varphi) = \tilde{A}_t \psi_t(\varphi)$, $|\tilde{A}_t| = 1$. При $\delta \geq \eta$ проблема оптимального токового синтеза имеет, как показано в § 13, очевидное решение

$$\tilde{F}(\varphi) \equiv \tilde{F}_{\min}(\varphi), \quad N(\sigma) = N_{\min}.$$

Далее будем решать эту задачу для $\delta < \eta$. При этом минимум реализуется на функции $\tilde{F}(\varphi)$, для которой выполняется равенство (15.4) с заменой Δ^2 на δ^2 . Напомним, что минимальное значение N при заданном δ мы обозначили через $N(\delta)$; это число есть функционал от $F(\varphi)$.

2. Задача на условный экстремум функционала (15.2), в котором переменные $\tilde{A}_m$ подчинены равенствам (15.3б) и (15.4),

введением множителей Лагранжа l_1 и l_2 сводится к поиску безусловного экстремума функционала:

$$L(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots) = \sum |\tilde{A}_m|^2 / \mu_m + l_1 \sum |\tilde{A}_m|^2 + l_2 \sum |\tilde{A}_m - A_m|^2. \quad (15.7)$$

Из уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{A}_m} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \tilde{A}_m^*} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (15.8)$$

получим

$$\tilde{A}_m = A_m \frac{\alpha}{1 + \beta / \mu_m}, \quad \tilde{A}_m^* = A_m^* \frac{\alpha}{1 + \beta / \mu_m}, \quad (15.9)$$

где введены обозначения

$$\alpha = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad \beta = \frac{1}{l_1 + l_2}. \quad (15.10)$$

Согласно (15.9) величины $\alpha(1 + \beta / \mu_m)^{-1}$ вещественны для всех m , что возможно только, если α и β вещественны. Вещественны и множители Лагранжа l_1 и l_2 .

Согласно (15.9) изменение коэффициентов A_m при переходе от $F(\varphi)$ к $\tilde{F}(\varphi)$ тем меньше, чем больше μ_m . Меньше всего изменяется слагаемое с $m = l$, соответствующее наибольшему значению μ_m . Более всего изменяются члены ряда с малыми значениями μ_m , в частности—далекие члены ряда. Если среди чисел μ_m есть $\mu_q = 0$ (см. (14.20а)), то и $\tilde{A}_q = 0$. Так как $\tilde{A}_m$ при малых μ_m пропорционально μ_m , то если в каком-либо предельном переходе $\mu_q \rightarrow 0$, то и $A_q \rightarrow 0$, и соответствующее слагаемое в норме N (см. (15.2)) тоже будет обращаться в нуль (см. ниже формулу (15.15)). Результат этот очевиден, так как $\tilde{F}(\varphi)$ — реализуемая диаграмма, и $\tilde{F}(\varphi)$ должно быть ортогонально функции ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi) = \psi_q(\varphi)$, т.е. коэффициент $\tilde{A}_q$, который, согласно (15.16), равен $(\tilde{F}, \psi_q)$, должен быть равен нулю.

Систему (15.9) надо решать совместно с (15.3б) и (15.4). Формула (15.4), согласно (15.3), может быть записана в виде

$$\sum (A_m^* \tilde{A}_m + A_m \tilde{A}_m^*) = 2 - \delta^2. \quad (15.11)$$

После подстановки (15.9) получим

$$\alpha \sum \frac{|A_m|^2}{1 + \beta/\mu_m} = 1 - \frac{\delta^2}{2}. \quad (15.12)$$

Формула (15.36) дает

$$\alpha^2 \sum \frac{|A_m|^2}{(1 + \beta/\mu_m)^2} = 1. \quad (15.13)$$

Так как коэффициенты A_m являются заданными и зависящими только от функции $F(\varphi)$, то две последние формулы являются уравнениями для α и β . Исключив из них α , получим уравнение, содержащее только β :

$$\left\{ \sum \frac{|A_m|^2}{1 + \beta/\mu_m} \right\}^2 \left(\sum \frac{|A_m|^2}{(1 + \beta/\mu_m)^2} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right)^2. \quad (15.14)$$

Найдя из последних трех формул α и β , можно по (15.9) определить коэффициенты $\tilde{A}_m$, т.е. найти функцию $\tilde{F}(\varphi)$. Норму $N(\delta)$ можно вычислять либо по формулам (15.2), (15.9), т.е. как сумму

$$N^2(\delta) = \alpha^2 \sum |A_m|^2 \frac{\mu_m}{(\mu_m + \beta)^2}, \quad (15.15)$$

либо по формуле, содержащей только α и β ,

$$N^2(\delta) = \frac{\alpha - 1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{\delta^2}{2}. \quad (15.16)$$

Для того чтобы ее получить, надо разделить обе стороны равенства (15.13) на α^2 , обе стороны равенства (15.12) на α , и вычесть вторую дробь из первой. Разница обеих сумм, как следует из (15.2) и (15.9), равна $-\beta N^2(\delta)/\alpha$, откуда и получается (15.16). В п. 4 мы получим формулу, совпадающую с (15.16), менее искусственным путем.

3. Полученные выше формулы, решающие задачу об оптимальном токовом синтезе при заданной полной диаграмме, позволяют в одном частном случае продвинуть также рассмотрение аналогичной проблемы, в которой задана не полная, а только амплитудная диаграмма. Соответствующая постановка задачи дана в § 13, п.5. При этом варьируется не только реализуемая диаг-

рамма $\tilde{F}(\varphi)$, но и фаза той функции $F(\varphi)$ (см. (3.22)), к которой надо приблизить $\tilde{F}(\varphi)$ на заданное расстояние δ с наименьшей нормой тока $N(\delta)$.

Согласно (15.12) и (15.13) коэффициенты α и β зависят только от квадратов модулей коэффициентов Фурье функции $F(\varphi)$, т.е. от чисел $|A_m|^2$. Как следует из (15.15), и норма $N(\delta)$ тоже зависит только от $|A_m|^2$, фазы A_m в нее не входят. Числа

$$|A_m|^2 = \left| \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) \psi_m^*(\varphi) \exp[-i\Psi(\varphi)] d\varphi \right|^2 \quad (15.17)$$

можно рассматривать как функционалы от фазы $\Psi(\varphi)$. Если функции $\psi_m(\varphi)$ вещественны, то эти функционалы стационарны при $\Psi(\varphi) = 0$. Действительно, при $\Psi(\varphi) = \varepsilon\gamma(\varphi)$, где $\gamma(\varphi)$ —какая-либо функция, а $\varepsilon \ll 1$, $|A_m|^2$ будет отличаться от этого же коэффициента, вычисленного для $\varepsilon = 0$, на члены порядка ε^2 . Поэтому и $N(\delta)$ тоже будет при $\Psi(\varphi) \equiv 0$ стационарно относительно изменения фазы $\Psi(\varphi)$.

При этом все A_m будут вещественны. В § 14, п. 2 было показано, что все функции $\psi_m(\varphi)$ вещественны, если линия C обладает центральной симметрией. Таким образом, если уравнение $r = r(\vartheta)$ обладает свойством $r(\vartheta + \pi) = r(\vartheta)$, то со стационарной (относительно малого изменения фазы $\Psi(\varphi)$) нормой тока можно приблизиться к диаграмме $F(\varphi)$ с заданной амплитудой $\Phi(\varphi)$, если $F(\varphi)$ вещественно ($\Psi(\varphi) \equiv 0$). При этом согласно (15.9) будут вещественны и коэффициенты Фурье $\tilde{A}_m$ функции $\tilde{F}(\varphi)$, на которой стационарна норма тока, а потому будет вещественна и сама функция $\tilde{F}(\varphi)$.

Напомним, что доказана не минимальность, а лишь стационарность нормы тока при варьировании фазы $\Psi(\varphi)$ около нуля. Как подсказывает сравнение с аналогичными задачами, подробно исследованными для C в виде отрезка прямой [32], при больших длинах линии C стационарность может не означать минимума.

Если бы все функции $\psi_m(\varphi)$ не были вещественными, но имели бы одну и ту же фазу, то и тогда легко указать ту фазу $\Psi(\varphi)$ диаграммы $F(\varphi)$, на которой $N(\delta)$ стационарна относительно малого возмущения $\Psi(\varphi)$. Согласно (15.17) все коэффициенты A_m вещественны—это и есть условие стационарности $N(\delta)$ —если $F(\varphi)$ имеет ту же фазу, что и все $\psi_m(\varphi)$. Такую же фазу имела бы при этом и диаграмма $\tilde{F}(\varphi)$.

4. Формулы п.2 можно получить, не пользуясь с самого начала разложением (15.1). Выразим искомую норму тока $N(\delta)$ и дополнительные условия (15.36), (15.4) непосредственно через ток $\tilde{j}(s)$, создающий диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$:

$$N^2(\delta) = (\tilde{j}, \tilde{j}), \quad (K\tilde{j}, K\tilde{j}) = 1, \quad (K\tilde{j} - F, K\tilde{j} - F) = \delta^2. \quad (15.18a, б, в)$$

Функционал (15.7), выраженный через $\tilde{j}(s)$, имеет вид

$$L(\tilde{j}) = (\tilde{j}, \tilde{j}) + l_1(K\tilde{j}, K\tilde{j}) + l_2(K\tilde{j} - F, K\tilde{j} - F). \quad (15.19)$$

Ток $\tilde{j}(s)$, на котором этот функционал стационарен, удовлетворяет уравнению Эйлера. Это уравнение, как известно, получается из требования, чтобы при замене $\tilde{j}(s)$ на $\tilde{j}(s) + \varepsilon \gamma(s)$, где $\gamma(s)$ —любая функция, первая вариация, т.е. член, пропорциональный ε , должна быть равна нулю. Эта вариация пропорциональна выражению

$$(\gamma, \tilde{j}) + l_1(K\gamma, K\tilde{j}) + l_2(K\gamma, K\tilde{j} - F). \quad (15.20)$$

Для того чтобы представить это выражение в виде произведения $\gamma(s)$ на некоторую функцию от s , надо использовать сопряженный оператор K^c , введенный в (14.6). Тогда (15.20) приобретет вид произведения $\gamma(s)$ на некоторую функцию от s ; условие стационарности состоит в равенстве этой функции нулю. Эта функция и есть левая часть уравнения Эйлера, которое, таким образом, для функционала (15.19) имеет вид [33, 34]:

$$\tilde{j} + l_1 K^c K\tilde{j} + l_2 (K^c K\tilde{j} - K^c F) = 0. \quad (15.21)$$

Если для его решения воспользоваться рядами (13.12) и (15.1a) и использовать уравнение (14.14a), то получим

$$B_n = \alpha A_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{1}{1 + \beta/\lambda_n}, \quad (15.22)$$

где α и β выражаются через l_1 и l_2 по (15.10). Таким способом для нормы тока (15.18a) мы получим ту же сумму (15.15), а для дополнительных условий (15.36) и (15.4)—те же уравнения (15.12) и (15.13).

Легко получить и формулу (15.16) для нормы тока, выраженной непосредственно через α и β , т.е. согласно (15.10) через множители Лагранжа. Для этого надо умножить уравнение Эйлера (15.21) на $\tilde{j}(s)$ и проинтегрировать по S . Первое слагаемое будет $N^2(\delta)$ (см. (15.18a)), второе, согласно (14.6) и условию нормировки (15.18в), равно l_1 , третье равно $l_2[1 - (\tilde{F}_1, F)]$. Так как из условий

нормировки для $\tilde{F}(\varphi)$ и $F(\varphi)$ и из (15.18а) следует, что $(F, \tilde{F}) = 1 - \delta^2/2$ (ср. (15.11)), то для $N^2(\delta)$ получится выражение

$$N^2(\delta) = -l_1 - l_2 \frac{\delta^2}{2}, \quad (15.23)$$

совпадающее, согласно (15.10), с (15.16).

Некоторым недостатком вывода основных формул с помощью уравнения Эйлера является отсутствие явной формулы (15.9) для коэффициентов Фурье функции $\tilde{F}(\varphi)$, обеспечивающей экстремум функционала L . Впрочем, эту формулу легко получить из (15.21) и (14.19), из которых следует, что $\tilde{A}_n = \tilde{B}_n / \sqrt{\lambda_n}$, откуда с учетом формулы (15.22) легко получается формула (15.9). Однако применение аппарата, основанного на (15.19) и (15.20), показывает, как естественно в теорию оптимального токового синтеза входят операторы K^c и $K^c K$. Разумеется, уравнение Эйлера (15.21) совместно с условиями (15.18б,в) можно решать не только разложением $\tilde{j}(s)$ в ряд по собственным функциям оператора $K^c K$, но и каким-либо другим методом.

В §13, п.4, мы ввели, наравне с $N(\delta)$, и другие нормы тока $N_1(\delta)$ и $N_2(\delta)$ (см. (13.20а,б), содержащие квадраты модуля производной $d\tilde{j}/ds$. Соответствующие функционалы будут аналогичны L (см. (15.19)). Например, для нормы N_1 (см. (13.20а)) будет

$$L_1 = (\tilde{j}, \tilde{j}) + (d\tilde{j}/ds, d\tilde{j}/ds) + l_1(K\tilde{j}, K\tilde{j}) + l_2(K\tilde{j} - F, K\tilde{j} - F). \quad (15.24)$$

Уравнение Эйлера для тока $\tilde{j}(s)$, обеспечивающего стационарность L_1 , получается таким же образом, как для функционала (15.19) получается уравнение (15.21). Слагаемое $\int_C (d\tilde{j}/ds)(d\gamma/ds)ds$, получающееся после подстановки $\tilde{j} \rightarrow \tilde{j} + \epsilon\gamma$, интегрированием по частям приводится к виду $-\int_C \gamma(d^2\tilde{j}/ds^2)ds$. Для сокращения записи мы

приняли, что C —замкнутый контур, так что концевые слагаемые, получающиеся от интегрирования слагаемого $d(\gamma d\tilde{j}/ds)/ds$, выпадают. Таким образом, уравнение Эйлера для функционала (15.24) имеет вид

$$\tilde{j} - d^2\tilde{j}/ds^2 + l_1 K^c K\tilde{j} + l_2 (K^c K\tilde{j} - K^c F) = 0. \quad (15.25)$$

Решать его надо совместно с условиями (15.18б,в).

Численное решение задачи оптимального токового синтеза для норм $N_1(\delta)$ и $N_2(\delta)$ разложением $\tilde{j}(s)$ в ряд по $j_n(s)$ весьма

трудоемко, так как требует дифференцирования функций $j_n(s)$. В приведенных ниже примерах мы для этих норм ограничимся случаем окружности, когда $j_n(s)$ —простые функции (13.8). Здесь только отметим, что формула (15.23) остается в силе и для нормы $N_1(\delta)$ и для соответствующего этой норме уравнения Эйлера (15.25). Действительно, умножая (15.25) на $\tilde{j}(s)$, интегрируя по C и вновь преобразуя второе слагаемое интегрированием по частям, мы из двух первых слагаемых получим $N_1(\delta)$, и, тем самым, для $N_1(\delta)$ получим формулу (15.23). Очевидно, что она будет справедлива и для $N_2(\delta)$ (см. (13.206)) и, вообще, для любой нормы, в которую $|\tilde{j}|^2$ и $|d\tilde{j}/ds|^2$ входят под интеграл с любыми весами. Однако множители Лагранжа будут, разумеется, зависеть от выбранного вида нормы тока.

5. Формула (15.14) дает зависимость β от δ . Структура этой формулы такова, что по ней проще определять зависимость δ от β . Напомним, что β вещественно. И параметр α удобно рассматривать, например по (15.13), как функцию от β .

Примем сначала, что все собственные значения $\mu_m \neq 0$, т.е. что линия C не является особой. Тогда при $\beta = 0$ как числитель, так и знаменатель дроби (15.14), согласно (15.3а), равны единице, т.е. $\delta = 0$. Сумма в (15.13) тоже равна единице при $\beta = 0$, так что $\alpha = 1$. Вычислять $N(\delta)$ непосредственно по формуле (15.15) при $\delta = 0$ нельзя. Для того чтобы раскрыть возникшую в ней неопределенность, надо было бы использовать уравнения (15.14) и (15.13) при $\beta > 0$, $\beta \rightarrow 0$. Фактически этого делать не надо, проще пользоваться формулой (14.23), т.е. рядом (15.15) при $\beta = 0$. Значение $N(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ определяется, как показано в § 3, скоростью убывания $|A_m|$ при $m \rightarrow \infty$. Если это убывание происходит достаточно быстро, то $N(0) < \infty$, диаграмма $F(\varphi)$ реализуема. Если $|A_m|$ убывают недостаточно быстро, то $N(0) = \infty$. С ростом δ числа β и $\alpha - 1$ растут, и можно применять как формулу (15.15), так и формулу (15.16).

Существуют такие функции $F(\varphi)$, что для них параметр β при некоторых δ принимает отрицательные значения. Пусть, например, в ряде (15.1а) для $F(\varphi)$ нет слагаемого, пропорционального $\psi_t(\varphi)$, т.е. $A_t = 0$, где t —номер, соответствующий наибольшему значению μ_m ($\mu_t \geq \mu_m$, $m \neq t$). Как мы убедились в § 13 (см. текст, связанный с рис. 13.1б), в выражение для $\tilde{F}(\varphi)$ должно входить слагаемое с $\psi_t(\varphi)$, т.е. должно быть $\tilde{A}_t \neq 0$. А это, согласно (15.9), возможно только, если $\beta = -\mu_t$. Существуют и другие случаи, когда β отрицательно. Вероятно, в каждом из этих случаев

проще применять какой-либо более простой метод, аналогичный методам, использованным в § 13.

Для того чтобы проанализировать уравнение (15.14) для особой линии, т.е. когда $\mu_q = 0$, примем сначала, что $\mu_q \neq 0$, но $\mu_q \ll \mu_m$ ($m \neq q$), и найдем величину δ для значений β , малых по сравнению с μ_m ($m \neq q$), но больших по сравнению с μ_q . При $\beta \ll \mu_m$, $\beta \gg \mu_q$ в обеих суммах, входящих в (15.14), можно во всех слагаемых, кроме $m = q$, отбросить в знаменателе слагаемое β/μ_m , и опустить в суммах член $m = q$. Учитывая при этом еще условие (15.3а), получим, что (15.14) примет вид $1 - |A_q|^2 = (1 - \delta^2/2)^2$, откуда $\delta = B$, где

$$B = \left\{ 2 - 2\sqrt{1 - |A_q|^2} \right\}^{1/2}. \quad (15.26)$$

Следовательно, кривая $\delta(\beta)$ имеет вид, изображенный на рис. 15.1а—она начинается в точке $\beta = 0$, $\delta = 0$ и при $\beta \gg \mu_q$ выходит на горизонтальную линию $\delta = B$. Далее она начинает подниматься, когда β становится сравнимым с другими собственными значениями μ_m .

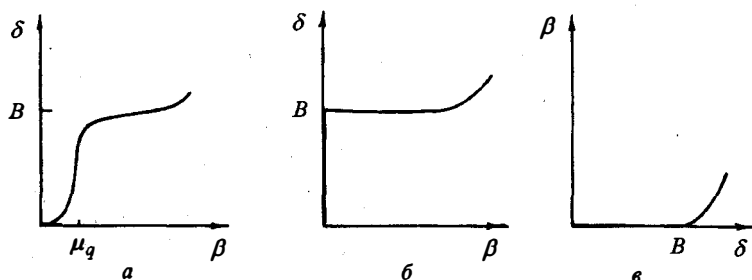


Рис. 15.1

Очевидно, что при $\mu_q = 0$, т.е. когда C —особая линия, кривая $\delta(\beta)$ имеет вид, представленный на рис. 15.1б. Обратная функция $\beta(\delta)$ представлена на рис. 15.1в. В интервале $0 \leq \delta \leq B$ величина $\beta(\delta)$ остается равной нулю. При этом, как легко убедиться из (15.13), величина $\alpha(\delta)$ отлична от единицы, $\alpha = (1 - |A_q|^2)^{-1/2}$. Во всем этом интервале изменения δ норма тока $N(\delta)$, согласно (15.16), остается бесконечной.

Этот результат, получающийся из анализа формул (15.13), (15.14) и (15.16), повторяет уже неоднократно сформулированное раньше свойство особых линий—диаграммы, не ортогональные

функциям ортогонального дополнения, т.е. представленные рядами (15.1а), в которых $A_q \neq 0$, неаппроксимируемы, т.е. нереализуемы не только они, но и все близкие диаграммы. Существует отличная от нуля нижняя граница B расстояния между $F(\varphi)$ и реализуемыми диаграммами $\tilde{F}(\varphi)$. Эта граница может быть достижима (рис. 13.1в, кривая 4) или недостижима (рис. 13.1в, кривая 5) — это зависит от скорости убывания членов ряда (15.1а).

Формулу (15.26) для ширины щели B легко получить независимо от способа, примененного в этом параграфе. Ее частный случай был дан в (13.16). Величина B^2 равна минимуму квадрата расстояния между $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$, взятому по всем функциям $\tilde{F}(\varphi)$, для которых $\tilde{A}_q = 0$, пронормированным на единицу по (15.36). Коэффициенты $\tilde{A}_m$ находятся из требования безусловного минимума функционала

$$L = \sum_m |\tilde{A}_m - A_m|^2 + |A_q|^2 + l \sum_{m \neq q} |\tilde{A}_m|^2.$$

Уравнения (15.9) дают для $m \neq q$ $\tilde{A}_m = A_m / (1 + l)$, т.е. $\tilde{F}(\varphi)$ действительно отличается от $F(\varphi)$ только отсутствием члена с $m = q$ и пропорциональным изменением других коэффициентов $\tilde{A}_m$, связанных условием нормировки. Подставив $\tilde{A}_m$ в (15.36) и учитывая, что $\sum_{m \neq q} |A_m|^2 = 1 - |A_q|^2$, можно вычислить l , а затем

найти B^2 как сумму первых двух слагаемых в L . В обозначении (3.17) $B^2 = 2 - 2\sqrt{1 - |b|^2}$, и эта величина больше, чем $|b|^2$, так как диаграммы $f(\varphi)$, в отличие от $\tilde{F}(\varphi)$, ненормированы.

6. В этом пункте приведены результаты численных расчетов [1, 6, 35] зависимости норм токов от δ . Рассмотрены примеры для Π -образной, гауссовой и косекансной диаграмм $F(\varphi)$. Все диаграммы приняты естественными. Почти все расчеты проделаны для линии C в виде окружности или дуги окружности. Для нерезонансной окружности принято $ka = 1$ (рис. 15.2 и рис. 15.3) или $ka = 6$ (рис. 15.4, кривая 1, и рис. 15.5). Для резонансной окружности (рис. 15.6) $ka = 3,83$, т.е. ka есть корень функции $J_1(x)$, так что функцией ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$ является $\psi_1(\varphi) = \cos \varphi / \sqrt{\pi}$. На рис. 15.7 C — дуга окружности; угловой размер ее равен 229° (4 радиана); для дуги нерезонансной окружности (рис. 15.7а) принято $ka = 1,0$; для дуги резонансной окружности (рис. 15.7б) $ka = 3,83$. На всех рисунках (кроме, разумеется, рис. 15.5) на оси абсцисс отложена величина δ^2 , а не δ , как на рис. 13.1.

На рис. 15.2 представлена норма тока на нерезонансной окружности ($ka = 1,0$), создающего диаграмму, близкую к П-образной диаграмме шириной 2γ радиан:

$$F(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \quad \text{при } |\varphi| < \gamma, \quad F(\varphi) = 0 \quad \text{при } |\varphi| > \gamma. \quad (15.27)$$

Кривые изображают $N^2(\delta)$ (см. (13.3)) на рис. 15.2а, $N_1^2(\delta)$ (см. (13.20а)) на рис. 15.2б и $N_2^2(\delta)$ (см. (13.20б)) на рис. 15.2в. Разумеется, П-образная диаграмма нереализуема ($N(0) = \infty$), но линия С не является особой, конечной щели между $F(\varphi)$ и $\tilde{F}(\varphi)$ не существует, т.е. $N(\delta) < \infty$ при любом $\delta > 0$. Чем шире диаграмма, т.е. чем больше γ , тем с меньшей нормой можно к ней приблизиться. К широкой диаграмме ($\gamma = 1,5$) можно приблизиться при небольших нормах тока.

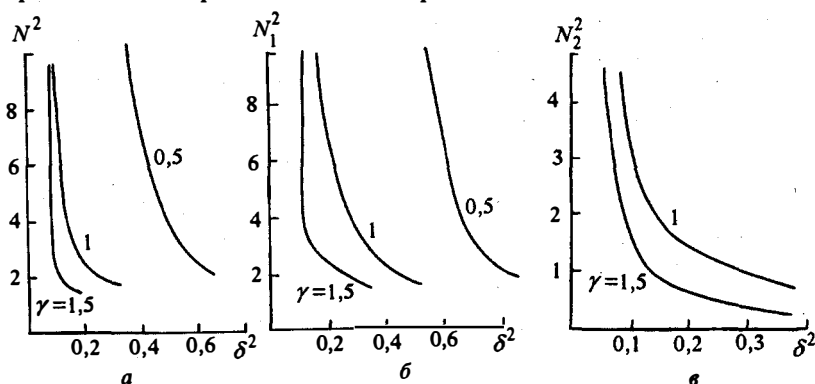


Рис. 15.2

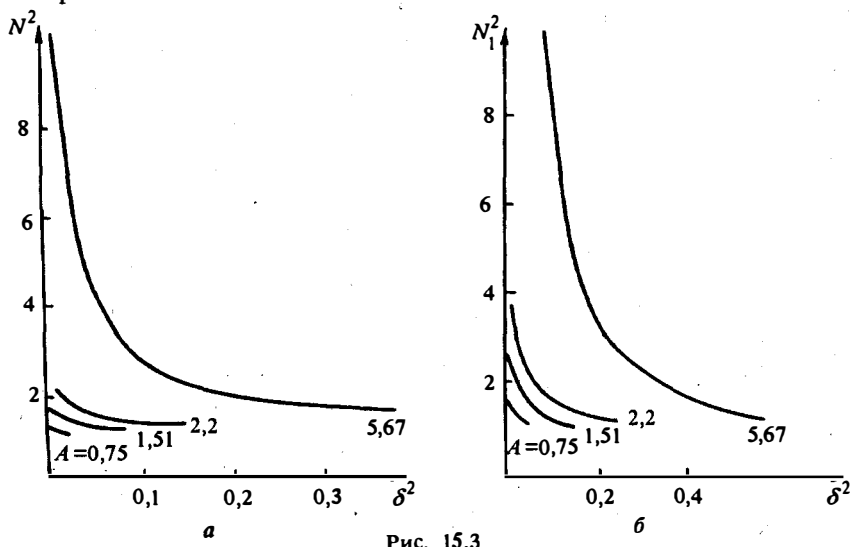
Сопоставление этих норм показывает, что при этой степени аппроксимации ток осциллирует довольно сильно. К более узким диаграммам ($\gamma = 1,0$ и, тем более, $\gamma = 0,5$) приблизиться без больших и сильно изрезанных токов на расстояние, меньшее, чем $\delta^2 \sim 0,3 + 0,4$, практически невозможно; при меньших δ^2 нормы становятся очень большими.

На рис. 15.3а,б представлены квадраты норм тока $N^2(\delta)$ и $N_1^2(\delta)$ для той же окружности с $ka = 1,0$, создающего диаграмму, приближающуюся к гауссовой (3.13):

$$F(\varphi) = \frac{e^{A/2}}{\sqrt{2\pi}I_0(A)} \exp(-A \sin^2 \frac{\varphi}{2}). \quad (15.28)$$

Здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя, а коэффициент определен из условия нормировки (13.2а).

Параметр A определяет ширину диаграммы; чем больше A , тем диаграмма уже. Полуширина ее равна (см. § 7) $2 \arcsin(\ln 2/A)^{1/2}$. Три из четырех значений A , для которых построены кривые рис. 15.3, выбраны таким образом, чтобы полуширина диаграммы (15.28) совпала с параметром γ одной из рассмотренных П-образных диаграмм (см. 15.27)). При этом значениям γ , равным 1,5; 1,0; 0,5 соответствуют значения A , равные 0,75; 1,51 и 5,67. Кроме того, приведены кривые $N^2(\delta)$ и $N_1^2(\delta)$ для $A = 2,2$, которые мы прокомментируем ниже.



Гауссова диаграмма (15.28) реализуема токами на окружности с $ka = 1$ при $A < 2$ и нереализуема при $A > 2$. Это следует из результата, приведенного в § 3, согласно которому токами на окружности радиуса a реализуемы диаграммы, для которых $a_0 < a$, где $a_0 = A/2k$, т.е. гауссовы диаграммы с $A < 2ka$.

Таким образом, для широких диаграмм, при $A < 2$, нормы $N(\delta)$ и $N_1(\delta)$ конечны уже при $\delta = 0$. Возможность заменить $F(\varphi)$ на близкую диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$ с меньшей нормой уменьшает норму лишь незначительно. Кривые на рис. 15.3, соответствующие $A = 1,51$ и $A = 0,75$, очень медленно понижаются с ростом δ^2 . Для нереализуемой (слишком узкой) диаграммы с $A = 5,67$ надо допустить отклонение $\delta^2 > 0,1$, чтобы получить не очень большие нормы. Например, при $\delta^2 = 0,1$ $N_2 = 2,7$, $N_1^2 = 7,5$.

Кривые для $A = 2,2$ на рис. 15.3 приведены для того, чтобы сравнить результат оптимального токового синтеза для близких друг к другу диаграмм, из которых одна реализуема ($A = 1,51$), а другая нереализуема ($A = 2,2$). Кривые для этих двух значений A иллюстрируют высказанное ранее соображение о том, что само по себе различие между реализуемыми и нереализуемыми диаграммами не имеет особого практического значения. Для задачи о точной реализации эти диаграммы действительно принципиально различны, так как при $A = 1,51$ $N(0) < \infty$, $N_1(0) < \infty$, а при $A = 2,2$ $N(0) = \infty$, $N_4(0) = \infty$. Однако это отличие быстро сглаживается с ростом δ . Уже при $\delta^2 = 0,05$ значения $N^2(\delta)$ для обеих диаграмм очень близки, а при $\delta^2 = 0,2$ близки и значения $N_1^2(\delta)$.

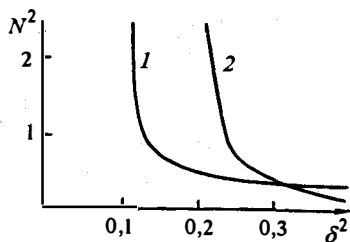


Рис. 15.4

На рис. 15.4 кривая 1 дает зависимость квадрата нормы $N^2(\delta)$ от δ^2 для косекансной диаграммы:

$$F(\varphi) = \frac{1}{\cos} \varphi \text{ при } 105^\circ < \varphi < 165^\circ,$$

$$F(\varphi) = 0 \text{ при } |\varphi| < 105^\circ \text{ и } |\varphi| > 165^\circ, \quad (15.29)$$

где опущен нормировочный множитель. Ток распределен на окружности с $ka = 5,0$. Такая диаграмма, разумеется, нереализуема, однако уже при $\delta^2 = 0,1$ оптимальная аппроксимация достигается при не очень большой норме тока; еще лучшие результаты получаются, если разрешена среднеквадратичная ошибка $\delta^2 = 0,2$. На рис. 15.5 сопоставлены заданная диаграмма $F(\varphi)$ (см. (15.29)) (штриховые линии) и получающиеся в результате оптимального токового синтеза реализуемые диаграммы $\tilde{F}(\varphi)$ (сплошные линии) для $\delta^2 = 0,2$ (рис. 15.5а) и $\delta^2 = 0,1$ (рис. 15.5б). Если допустима большая невязка δ^2 , то $\tilde{F}(\varphi)$ менее похожа на $F(\varphi)$, но создается током с нормой существенно меньшей, чем если задана меньшая невязка.

Кривая 2 рис. 15.4 [35] дает $N^2(\delta)$ для тока, распределенного на прямолинейном отрезке длиной, равной длине окружности с $ka = 6,0$, при аппроксимации той же диаграммы (15.29). При не очень больших δ (примерно при $\delta^2 < 0,3$) токами на окружности можно аппроксимировать косекансную диаграмму с меньшей

нормой, чем на прямолинейном отрезке, равном диаметру окружности.

Все изображенные выше в этом пункте кривые $N^2(\delta)$ (а также и кривые $N_1^2(\delta)$) соответствуют кривым рис. 13.16. При аппроксимации реализуемых диаграмм (гауссовы диаграммы с $A < 2$), получаются кривые того же типа, что кривая 2 рис. 13.16. Если $F(\varphi)$ —нереализуемая диаграмма (гауссова диаграмма с $A > 2$, нереализуемая током на окружности с $ka = 1,0$, или нереализуемые никакими токами диаграммы (15.27) и (15.29)), то получаются кривые типа кривой 3 рис. 13.16, т.е. кривые с вертикальной асимптотой $\delta = 0$.

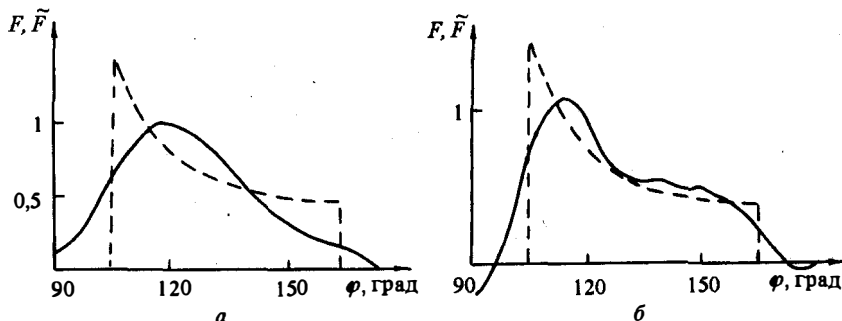


Рис. 15.5

Рассмотрим теперь токи, расположенные на окружности с $ka = 3,83$. На рис. 15.6 дана зависимость N^2 от δ^2 для П-образной диаграммы (15.27). Так как такая окружность—особая линия, и, кроме того, диаграмма (15.27)—нереализуемая, то кривые аналогичны кривой 5 на рис. 13.1а, т.е. имеют вертикальные асимптоты $\delta^2 = B^2$, $B > 0$ (штриховые прямые на рис. 15.6).

В отличие от рис. 15.2а, относящегося к неособой линии, в этом случае уширение заданной диаграммы может привести

не к уменьшению, а к увеличению нормы тока, необходимого для ее аппроксимации с заданной точностью. Кривая для $\gamma = 0,5$ на рис. 15.6, т.е. кривая, относящаяся к самой узкой из рассмотренных П-образных диаграмм, лежит левее кривых для $\gamma = 1,5$ и $\gamma = 1,0$. Напомним, что на рис. 15.2а (нерезонансная окружность) она лежит правее этих двух кривых. Это

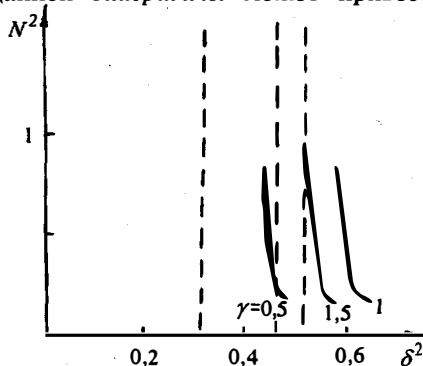


Рис. 15.6

кажущееся парадоксальным нарушение в расположении кривых связано с тем, что в разложении (15.1) коэффициент A_1 , с которым в диаграмму $F(\varphi)$ входит функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi) = \cos \varphi / \sqrt{\pi}$, имеет для $\gamma = 0,5$ самое малое значение ($A_1 = 0,54$). Коэффициент этот, как легко получить из (15.27), равен $\sqrt{2/\pi} \sin \gamma / \sqrt{\gamma}$, т.е. при небольших γ растет с ростом γ . При $\gamma = 1,0$ $A_1 = 0,67$, при $\gamma = 1,5$ $A_1 = 0,65$, т.е. больше, чем при $\gamma = 0,5$. От ширины и формы диаграммы $F(\varphi)$ зависит скорость убывания $N^2(\delta)$ с ростом δ ($\delta > B$), но само положение асимптоты $\delta^2 = B^2$ зависит, согласно (15.26), только от A_q (в нашем случае $q = 1$). Для диаграммы (15.27) коэффициент A_1 меньше для более узкой диаграммы. Значения B^2 для трех описанных диаграмм, согласно приведенным значениям A_1 , равны: $B^2 = 0,32$ для $\gamma = 0,5$; $B^2 = 0,52$ для $\gamma = 1,0$ и $B^2 = 0,48$ для $\gamma = 1,5$. При $\gamma \ll 1$ $B^2 = 2\gamma/\pi$, т.е. неаппроксимируемости практически нет.

Рассмотрим теперь результаты численного решения задачи оптимального токового синтеза П-образной диаграммы для случая, когда C не полная окружность, а дуга окружности. Начнем с нерезонансной окружности ($ka = 1,0$); угловой размер дуги—4 радиана. Кривые N^2 для трех значений параметра γ приведены на рис. 15.7а. Кривые имеют тот же характер, что и на рис. 15.2а, где они приведены для тех же трех диаграмм, но ток распределен на всей окружности. Как видно из сравнения рисунков, норма тока, необходимая для заданной точности аппроксимации какой-либо диаграммы, для дуги, как и следовало ожидать, больше, чем для всей окружности. Так как мы ищем ток, обеспечивающий

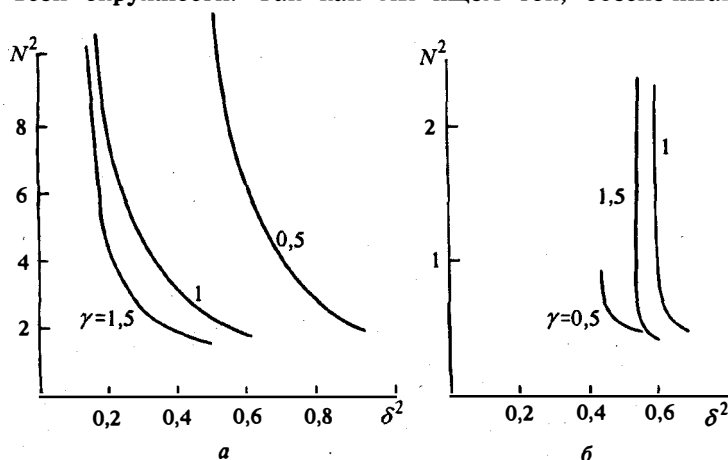


Рис. 15.7

минимальность нормы, то удлинение линии, на которой разрешено распределять ток, может эту норму только уменьшить. В принципе возможен даже случай, когда при увеличении длины линии C оптимальный ток на дополнительном отрезке будет равен нулю, но и тогда норма тока не увеличится, а лишь не уменьшится.

На рис. 15.76 представлена норма тока для тех же трех П-образных диаграмм, но ток расположен на дуге резонансной окружности ($ka = 3,53$), т.е. на особой линии. Поэтому кривые рис. 15.76 также имеют вертикальные асимптоты, подобные асимптотам на рис. 15.6. И для трех диаграмм имеет место та же *инверсия*—более узкая диаграмма ($\gamma = 0,5$) требует при заданной точности аппроксимации меньшей нормы тока, чем более широкие. И, как и для полной окружности, к более узкой диаграмме можно приблизиться (в среднеквадратичном смысле) на меньшее расстояние, чем к более широкой, так как для нее модуль произведения $(F, \hat{F})$ меньше. Повторяя соображения, изложенные в конце предыдущего абзаца, можно показать, что величина B для одной и той же диаграммы будет для дуги окружности больше (не меньше), чем для полной окружности.

§ 16. «Область влияния» особой линии

1. Если C не является особой линией, то любая функция может быть аппроксимирована диаграммами токов с конечной нормой N , расположенных на C , т.е. как мы условились писать, может быть аппроксимирована линией C . В этой формулировке все неособые линии равноправны, для них $N < \infty$. Даже малое отличие C от $\hat{C}$ делает любую диаграмму аппроксимируемой токами на C . Очевидно, что близость C к какой-либо линии $\hat{C}$ приводит к тому, что функцию, неаппроксимируемую линией $\hat{C}$, линия C аппроксимирует токами с большой нормой, тем большей, чем меньше расстояние между C и $\hat{C}$. Далее нам надо будет уточнить, что в этом контексте надо понимать под расстоянием между двумя близкими линиями.

В элементарных примерах ответ очевиден. Например, ток на окружности радиуса a , реализующий диаграмму $F(\varphi) = 1/\sqrt{2\pi}$, имеет норму $N = \sqrt{1/2} |J_0(ka)|$ (см. (13.14)). Для особой линии $r = \hat{a}$ $J_0(k\hat{a}) = 0$, так что, если окружность близка к особой, т.е. $|ka - \hat{a}| \ll 1$, то $N \approx \{ |J'_0(k\hat{a})| \cdot k |a - \hat{a}| \}^{-1}$.

В общем случае решение вопроса о том, насколько далеко от особой линии еще заметно ее влияние, точнее, как далеко это влияние проявляется на норме тока, может основываться на формуле (14.23).

Для особой линии $\mu_q = 0$, где μ_q —одно из собственных значений оператора KK^c (см. (14.146)). Ядро этого оператора (14.136) содержит интеграл по C , и этим определяется зависимость

μ_q от C . Однако практически использовать эту зависимость трудно; кроме того, при изменении C меняется и система функций $\psi_m(\varphi)$, а потому и коэффициенты $A_m = (F_1 \psi_m)$, участвующие в (14.23).

Прежде чем описать другой способ оценки зависимости N от C , сделаем одно общее замечание. Сопоставим два свойства: нереализуемость аппроксимируемой диаграммы и неаппроксимируемость диаграммы. Первое из них только в особых случаях может быть снято малым возмущением линии C — например, если диаграмма, вообще реализуемая, нереализуема линией C , а эта линия близка к окружности радиуса a_0 (см. (3.12)). Однако всегда существует сколь угодно малое возмущение диаграммы, делающее ее реализуемой. Во втором случае малое возмущение диаграммы не может сделать ее аппроксимируемой, однако существуют малые возмущения линии, делающие диаграмму аппроксимируемой. В первом случае норма тока, реализующего возмущенную диаграмму, вообще говоря, невелика. Во втором — норма тока, аппроксимирующего диаграмму с возмущенного контура, вообще говоря, велика. Это следует, например, из (14.23). Только в исключительных случаях, для диаграмм, для которых $|A_q| \ll 1$, малое возмущение $\hat{C}$ может привести к тому, что μ_q , оставаясь малым по сравнению с единицей, будет большим по сравнению с $|A_q|^2$, так что норма (14.23) будет невелика.

Поэтому между этими двумя свойствами — нереализуемость и неаппроксимируемость — нет глубокой аналогии. Неаппроксимируемость, хотя и снимается, как и нереализуемость, малым возмущением (соответственно, линии и диаграммы), но является свойством более «грубым», т.е. по существу *устойчивым к возмущениям*.

2. Опишем метод, позволяющий оценить норму тока, удовлетворяющего уравнению (14.1), не решая самого уравнения, т.е. не находя тока $j(s)$. Предположим, что это уравнение имеет решение. Умножим уравнение, комплексно сопряженное с (14.1),

$$\int_C \mathcal{K}^*(s, \varphi) j^*(s) ds = F^*(\varphi) \quad (16.1)$$

на некоторую функцию $\Phi(\varphi)$, которую мы выберем ниже, и проинтегрируем по φ от 0 до 2π . Переставим слева порядок интегрирования. Согласно (14.7) внутренний интеграл есть $K^c \Phi$, так что

$$\int_C K^c \Phi \cdot j^*(s) ds = \int_0^{2\pi} F^*(\varphi) \Phi(\varphi) d\varphi \quad (16.2)$$

По неравенству Коши и определению N^2

$$\int_C |K^c \Phi|^2 ds \cdot N^2 \geq \left| \int_C K^c \Phi \cdot j^*(s) ds \right|^2, \quad (16.3)$$

так что

$$N^2 \geq \frac{\left| \int_0^{2\pi} F^*(\varphi) \Phi(\varphi) d\varphi \right|^2}{\int_C |K^c \Phi|^2 ds}. \quad (16.4)$$

Напомним, что два последних неравенства становятся равенствами, если функция Φ выбрана таким образом, что $K^c \Phi$ и $j(s)$ отличаются лишь постоянным множителем.

Покажем, что если функция Φ выбрана в достаточно широком классе функций из требования, чтобы правая сторона неравенства (16.4) достигала наибольшего возможного значения, то это неравенство превратится в равенство. Для того чтобы это показать, воспользуемся вновь обобщенными функциями двойной ортогональности $\psi_m(\varphi)$. Выберем $\Phi(\varphi)$ в виде конечного ряда по $\psi_m(\varphi)$:

$$\Phi(\varphi) = \sum_m^M C_m \psi_m(\varphi). \quad (16.5)$$

Тогда согласно (14.196)

$$K^c \Phi = \sum_m^M C_m \sqrt{\mu_m} j_m(s) \quad (16.6)$$

и неравенство (16.4) примет вид

$$N_2 \geq \frac{\sum_n^M \sum_m^M A_n A_m^* C_n C_m^*}{\sum_m^M \mu_m |C_m|^2}. \quad (16.7)$$

Напомним, что A_m — коэффициенты разложения $F(\varphi)$ в ряд (15.1a) по тем же функциям $\psi_m(\varphi)$.

Выберем M коэффициентов C_m из требования, чтобы правая часть неравенства (16.7) имела наибольшее возможное при данном M значение. Как известно, отношение двух билинейных функционалов принимает экстремальное значение, когда переменные C_m удовлетворяют системе M линейных однородных урав-

нений. Условие нетривиальности решения этих уравнений имеет для функционала (16.7) форму уравнения для некоторой величины X

$$\det | A_m A_n^* - \delta_{nm} \mu_m X |_M = 0, \quad (16.8)$$

где индекс показывает порядок детерминанта. Значения X , удовлетворяющие этому уравнению, являются экстремальными значениями правой части неравенства (16.7). Обозначив наибольший из корней уравнения (16.8) через $X^{(M)}$, придадим неравенству (16.7) вид

$$N_2 \geq X^{(M)}. \quad (16.9)$$

Ортогональность как функций $\psi_m(\varphi)$, так и функций $j_n(s)$ приводит к тому, что уравнение (16.8) имеет очень простой вид. Легко проверить, что одно из его решений есть

$$X^{(M)} = \sum \left(|A_m|^2 / \mu_m \right). \quad (16.10)$$

Для этого достаточно умножить каждый n -й столбец детерминанта на A_n / μ_n и прибавить все столбцы к первому. Тогда m -й элемент первого столбца будет равен

$$A_m \left\{ \sum \left(|A_m|^2 / \mu_m \right) - X \right\},$$

и если X имеет значение (16.10), то все элементы этого столбца будут равны нулю.

С увеличением M расширяется класс функций $\Phi(\varphi)$, и $X^{(M)}$ может только расти ($X^{(M+1)} \geq X^{(M)}$). Так как $X^{(M)}$ меньше квадрата нормы решения уравнения (14.1), то оно ограничено. Следовательно, существует предел $\lim_{M \rightarrow \infty} X^{(M)}$. Обозначив его через

$X^{(\infty)}$, получим $N^2 \geq X^{(\infty)}$, а сравнивая (16.10) и (14.23), получим искомый результат

$$N^2 = X^{(\infty)}. \quad (16.11)$$

Отсюда, между прочим, следует, что (16.10) дает действительно наибольший корень уравнения (16.8). Таким образом, при расширении класса функций, к которому принадлежит Φ , и приближении его к полной системе, максимум правой части неравенства (16.4) не просто растет — оно становится более информативным, и в пределе оно превращается в равенство.

3. Как было показано в § 14, линия C является особой, если (и только если) среди чисел μ_m есть равные нулю ($\mu_q = 0$). Это, разумеется, следует и из (16.8), и, что то же самое, из (16.10).

Если $\mu_q = 0$, то при $M \geq q$ уравнение (16.8) имеет корень $X^{(M)} = \infty$ (если $A_q \neq 0$).

Легко найти аналог условия $\mu_q = 0$ при $q \leq M$, применимый также, если пользоваться не системой функций двойной ортогональности, а какой-либо другой ортонормированной системой $\psi_m(\varphi)$, для которой функции $K^c \psi_m$ не образуют ортогональной системы. Тогда знаменатель дроби в (16.4) будет двойной суммой

$$\sum_n \sum_m C_n C_m^* \beta_{nm}, \quad \beta_{nm} = \int_C K^c \psi_m (K^c \psi_n)^* ds. \quad (16.12)$$

Величина X будет входить в детерминант (16.8) не только в диагональные члены. Уравнение (16.8) будет иметь вид

$$\det | A_m A_n^* - X \beta_{nm} |_M = 0. \quad (16.13)$$

При одном и том же M корни уравнений (16.13) и (16.8) вообще говоря, различны. Классы функций Φ , представимых линейными комбинациями первых M функций какой-либо системы функций, зависят от этой системы, а потому от нее зависит и максимум функционала (16.4), достигаемый на этом классе. Только в пределе (при $M \rightarrow \infty$) корни обоих уравнений совпадают, так как максимум функционала, достигаемый на любой полной системе функций, не зависит от того, какая это система. Так как при определенном выборе этой системы максимум равен N^2 (см. (16.11)), то он равен N^2 при любом выборе, т.е. при $M \rightarrow \infty$ наибольший корень уравнения (16.13) есть N^2 .

Если уравнение (16.13) имеет корень $X^{(M)} = \infty$, т.е. если C —особая линия, то

$$\det | \beta_{mn} |_M = 0. \quad (16.14)$$

Если $\psi_m(\varphi)$ —обобщенные функции двойной ортогональности, то $\beta_{nm} = \mu_m \delta_{nm}$ и левая часть (16.14) есть произведение первых M собственных чисел μ_m . Условие (16.14) и является формальным обобщением условия, что среди первых M чисел μ_m есть нулевое ($\mu_q = 0$, $q \leq M$).

При $M \rightarrow \infty$ условие (16.14) выполняется для любой системы функций, так как β_{nm} (см. (16.12)) быстро стремятся к нулю с ростом номеров, из-за того, что $K^c \psi_m$ становятся быстро меняющимися вдоль C функциями. Например, для тригонометрической системы (13.7) β_{nm} убывает (см. ниже (16.15)) по дебаевской асимптотике функций Бесселя (12.6а). Из этого,

разумеется, не следует, что любая линия есть особая (см. соответствующие замечания в §14, п.4). Только если вычисление детерминанта в левой части (16.14) остается устойчивым с ростом M и при этом детерминант близок к нулю, то можно утверждать, что линия C близка к какой-либо особой линии $\hat{C}$. Коэффициенты Фурье функции $\Phi(\varphi)$, максимизирующей дробь в (16.4), будут при этом определяться из хорошо обусловленной системы линейных уравнений, и будет существовать их предел при $M \rightarrow \infty$. Эти предельные значения и будут коэффициентами Фурье функции ортогонального дополнения $\tilde{F}(\varphi)$. Этот численный метод, позволяющий установить, является ли линия C особой, может оказаться более простым, чем методы, предложенные в § 12 и §14.

Если использовать тригонометрическую систему функций $\psi_m(\varphi)$ (см. (13.7)), то

$$\beta_{nm} = 4\pi |C|^2 \int_C J_n(kr) J_m(kr) \cos(n\varphi) \cos(m\varphi) ds, \quad (16.15)$$

где $r = r(\varphi)$ есть уравнение линии C , коэффициент C приведен в (14.2), и число 4π надо уменьшить в $\sqrt{2}$ или в 2 раза, если один или оба номера (n, m) равны нулю.

Если C — не особая линия, то из (16.12) следует

$$\det |\beta_{mn}|_M > 0. \quad (16.16)$$

Это следует из того, что при любых не равных одновременно нулю числах C_n двойная сумма $\sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \beta_{nm} C_n C_m^*$ положительна, ибо она равна интегралу $\int_C |K^C \sum_{n=1}^M C_n \psi_n|^2 ds$ (см. (16.4)). Этот интеграл

мог бы быть равен нулю, только если функция $K^C \sum_{n=1}^M C_n \psi_n$ была бы тождественно равна нулю на C , что невозможно, так как тогда C была бы особой линией. А из положительной определенности этой двойной суммы следует, как известно, неравенство (16.16). Заметим, что при $M = 2$ условие (16.16) есть неравенство Коши для функций $K^C \psi_m$, при больших M оно может рассматриваться как его обобщение.

Так как при вещественном X левая часть уравнения (16.13) вещественна, а при $X = \infty$ она, согласно (16.16), положительна, то для нахождения наибольшего корня этого уравнения достаточно вычислять его левую часть при убывающих значениях X . Первое значение X , при котором она становится отрицательной, есть искомый корень, т.е. нижняя граница для N^2 (см. (16.9)). Чем

больше M , тем информативнее эта оценка, и, одновременно, более трудоемки вычисления.

4. Неравенство (16.4) есть необходимое условие на норму тока, распределенного на линии C и создающего диаграмму $F(\varphi)$. Преобразуем его и найдем другое условие, хотя и менее точное, но не зависящее от конкретного вида той функции $F(\varphi)$, которую мы хотим аппроксимировать. Увеличим правую сторону неравенства (16.4), используя неравенство Коши в форме

$$\left| \int_0^{2\pi} F^*(\varphi) \Phi(\varphi) d\varphi \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2 d\varphi.$$

Здесь уже принято, что диаграмма $F(\varphi)$ пронормирована на единицу по (3.4). Неравенство

$$N^2 \geq \frac{(\Phi, \Phi)}{(K^c \Phi, K^c \Phi)} \quad (16.17)$$

является усилением неравенства (16.4), т.е. если норма тока удовлетворяет условию (16.17), то она, тем самым, удовлетворяет и условию (16.4). Неравенство (16.17) уже не содержит функцию $F(\varphi)$, оно характеризует только линию C и функцию $\Phi(\varphi)$. Если не ограничивать скорость изменения $\Phi(\varphi)$ с углом φ , то (16.17) не содержит никакой информации, так как тогда можно принять $\Phi(\varphi) = \psi_m(\varphi)$, и при достаточно большом m правая сторона (16.17), равная при таком выборе $1/\mu_m$, сколь угодно велика.

Однако если известна скорость изменения функции $F(\varphi)$ с φ (например, наибольший номер среди значимых членов его ряда Фурье), то можно и функцию $\Phi(\varphi)$ выбирать примерно с той же (не большей) скоростью изменения, и тогда (16.17) дает разумную оценку нормы тока, необходимого для аппроксимации любой диаграммы с единичной нормой и с этой степенью изрезанности. И эта оценка зависит уже только от C .

Дальнейшее рассмотрение в этом пункте повторяет для (16.17) в упрощенной форме построения предыдущего пункта для (16.4). Если известна система чисел μ_m , соответствующих данной линии C , то минимум правой части (16.17) легко находится; он равен $1/\mu_q$, где теперь μ_q — наименьший из первых M собственных чисел, что и дает оценку N^2 ($N^2 \geq 1/\mu_q$). Впрочем, этот результат следует просто из точной формулы (14.23). Найдем, как и в предыдущем пункте, аналог этого результата, не содержащий числа μ_q .

Пусть $\Phi(\varphi)$ представима в виде конечного ряда (16.5) по ортонормированным функциям $\psi_m(\varphi)$, которые не предполагаются, вообще говоря, обобщенными функциями двойной ортогональности, например, по тригонометрическим функциям (13.7). Знаменатель

дроби в (16.17) есть двойная сумма $\sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M C_n C_m^* \beta_{nm}$ (см. (16.12)), где β_{nm} даны в (16.15). Неравенство (16.17) примет вид

$$N^2 \geq \frac{\sum_{m=1}^M |C_m|^2}{\sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M C_n C_m^* \beta_{nm}}. \quad (16.18)$$

Правая сторона при любых C_n не больше наибольшего корня $Y^{(M)}$ уравнения

$$\det |\delta_{nm} - Y^{(M)} \beta_{nm}|_M = 0, \quad (16.19)$$

аналогичного уравнению (16.13), но не содержащего коэффициентов A_m . Число M в (16.19) надо выбирать таким образом, чтобы ряд Фурье по функциям (13.7) для тех диаграмм $F(\varphi)$, которые представляют интерес в данной конкретной задаче, можно было без большой ошибки оборвать на M -м члене. Чем шире в этом смысле класс диаграмм $F(\varphi)$, тем больше M и тем выше оценка $Y^{(M)}$ для квадрата нормы токов, аппроксимирующих диаграммы этого класса.

Зафиксировав M , мы тем самым получим из (16.19) и оценку близости линии C к ближайшей особой линии $\hat{C}$. Эта оценка несколько точнее, чем оценка, которую дает правая сторона неравенства (16.16), т.е. величина $\det |\beta_{nm}|_M$. Оценки совпадают, если C —особая линия, т.е. если для какого-либо конечного M $\det |\beta_{nm}|_M = 0$; тогда $Y^{(M)} = \infty$. Если линия C близка к особой, т.е. если $Y^{(M)} \gg 1$, то (16.19) удобнее записать в виде

$$\det |\beta_{nm} - \delta_{nm} y^{(M)}|_M = 0, \quad (16.20)$$

где $y^{(M)} = 1/Y^{(M)}$. При $y^{(M)} \ll 1$ этот корень можно найти в явном виде, сохраняя в уравнении M -го порядка (16.20) только его нулевую и первую степени. Согласно предыдущему, для диаграмм, представимых конечным рядом Фурье из M членов, $N^2 \geq 1/y^{(M)}$. Как и для $X^{(M)}$, это число зависит от того, из какой системы функций выбраны те M функций, линейной комбинацией которых могут быть аппроксимированы интересующие нас функции $F(\varphi)$. Число $y^{(M)}$ и является искомым обобщением числа μ_q для произвольной системы функций $\psi_m(\varphi)$.

Физический смысл результатов последних двух пунктов совершенно очевиден. Чем более изрезаны функции $F(\varphi)$, тем больше должны быть нормы токов на C , диаграммы которых

близки к $F(\varphi)$. И тем шире «область влияния» ближайшей к C особой линии. Это элементарное соображение может быть проиллюстрировано на примере, аналогичном примеру в конце первого абзаца этого параграфа. Пусть током на окружности радиуса a надо аппроксимировать диаграмму $\cos(n\varphi)/\sqrt{\pi}$. Ток будет иметь норму $N = 1/|J_n(ka)|$, примерно равную

$$\left| a - \hat{a} \cdot |J'_n(k\hat{a})|^{-1} \right|, \text{ где } J_n(k\hat{a}) = 0, \text{ т.е. } \hat{a} \text{ — радиус ближайшей}$$

особой окружности. При заданном N величина $|a - \hat{a}|$, т.е. ширина области влияния, будет пропорциональна $1/|J'_n(k\hat{a})|$. Она быстро растет с ростом n , т.е. с усложнением функции $F(\varphi)$.

В общем случае $N^2 \leq 1/y^{(M)}$, и область влияния особой линии (для нее $y^{(M)} = 0$) определяется условием, что для линий, находящихся в этой области, $y^{(M)} \approx 1/N^2$, где N — «допустимая» норма тока.

5. Неравенство (16.4) может быть использовано не только для нахождения нижней границы N^2 , но и для очень грубой оценки N^2 . Особенно простую форму оно принимает, если в качестве функции $\Phi(\varphi)$ принять $F(\varphi)$. При этом $F(\varphi)$ можно не нормировать. Тогда неравенству (16.4) можно придать вид

$$\mathcal{R} \leq \int_C |K^c F|^2 ds, \quad (16.21)$$

где $\mathcal{R}$ есть величина, имеющая характер *сопротивления излучения*:

$$\mathcal{R} = \frac{\int_0^{2\pi} |F(\varphi)|^2 d\varphi}{\int_C |j(s)|^2 ds}, \quad (16.22)$$

т.е. равная отношению излученной энергии к норме тока. Для хорошей антенны $\mathcal{R}$ должно быть велико. Если C — особая линия, а функция $F(\varphi)$ неаппроксимируема, то $\mathcal{R} = 0$.

Рассмотрим элементарный пример, дающий некоторое представление о том, насколько в разных условиях правая часть (16.21) больше $\mathcal{R}$. Пусть ток расположен на окружности радиуса a , а диаграмма есть $F(\varphi) = A_0 + A_1 \cos \varphi$. Уравнение (14.1) легко решается, и легко вычислить истинное значение $\mathcal{R}$ (см. (16.22)).

Отношение этого значения $\mathcal{R}$ к значению правой части (16.21) есть

$$\frac{\mathcal{R}}{\int_C |K^C F|^2 ds} = \frac{(|A_0|^2 + |A_1|^2)p}{(|A_0|^2 p + |A_1|^2)(|A_0|^2 + |A_1|^2 p)}; \quad (16.23)$$

$$p = \frac{J_1^2(ka)}{J_0^2(ka)}.$$

Разумеется, это значение всегда не меньше единицы. При $A_0 = 0$ или $A_1 = 0$, а также при $p = 1$ оно равно единице, т.е. правая часть (16.21) дает точное значение для $\mathcal{R}$. При $J_0(ka) = 0$ или $J_1(ka) = 0$ ($p = \infty$ или $p = 0$), т.е. если C есть особая линия, для которой данная диаграмма неаппроксимируема, оценка (16.21) совершенно бесполезна, так как $\mathcal{R} = 0$, а правая часть (16.21) конечна. При промежуточных ka , когда окружность $r = a$ не близка к какой-либо особой линии, правая часть (16.21) дает—в этом примере—неплохое приближение к $\mathcal{R}$. Пусть $A_0 = A_1 = 1$. Расчет показывает, что когда вспомогательный параметр p лежит в интервале $0,36 < p < 2,76$, то отношение, даваемое (16.23), больше 0,8, т.е. что относительная ошибка при вычислении $\mathcal{R}$ по правой части неравенства (16.21) меньше 20%. Точность в 10% обеспечивается в меньшем интервале значений ka при $0,5 < p < 2,0$. Первый (с ростом ka) интервал значений ka , в котором p лежит в этих пределах, для 20%-ной точности есть $1,0 < ka < 1,8$, а при 10%-ной точности интервал радиусов уже— $1,2 < ka < 1,7$. Точное значение $\mathcal{R}$ правая часть (16.21) дает при $ka = 1,4$ ($p = 1$).

Наибольшее значение сопротивления излучению $\mathcal{R}$ в этом примере имеет при $ka = 1,1$ —такая окружность более всего удалена от особых линий ($ka = 2,4$ и $ka = 3,83$), для которых $\mathcal{R} = 0$.

Другой элементарный пример, характеризующий влияние, которое оказывает особая линия на соседнюю с ней область, представляет следующая задача. Ток должен быть распределен с поверхностной плотностью $i(r)$ в кольце $a < r < b$ таким образом, чтобы при наименьшей норме создать диаграмму $F(\varphi) = 1$; надо

найти $i(r)$. Это задача о минимуме интеграла $N^2 = \int_a^b [i(r)]^2 r dr$

при заданном интеграле $\int_a^b i(r) J_0(kr) r dr$. Легко показать, что

оптимум будет достигнут при $i(r)$, пропорциональном $J_0(kr)$. Плотность тока, обеспечивающая минимум N^2 , должна быть равна нулю на особой линии $r = \hat{a}$, где $J_0(k\hat{a}) = 0$, вблизи этой линии она мала и возрастает примерно линейно с расстоянием до нее.

6. В этом пункте мы дадим еще более грубую оценку того влияния, которое оказывает близость к дуге C какого-либо особого контура $\hat{C}$. Мы несколько изменим формулировку проблемы и будем искать не норму тока, создающего заданное поле, а *интенсивность того поля*, которое, падая на металлическое зеркало C , *индуцирует* этот ток [36]. Связь падающего и отраженного полей рассматриваются только в этом пункте, который, тем самым, несколько выпадает из стиля всей книги, не рассматривающей задачи дифракции.

Будем исходить не из формул (14.1) и (16.4), на которых основано изложение всего параграфа, а непосредственно из формулы

$$\int_{\Sigma} u(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) d\sigma = \int_C \hat{u}(s) j(s) ds, \quad (16.24)$$

аналогичной (10.2). Так как по условию C не есть особая линия, то правая часть этой формулы не равна нулю. Дадим ее грубую оценку.

Ток на зеркале $j(s)$ мы примем равным удвоенному магнитному полю падающей волны. Электрическое поле падающей волны обозначим через u^0 , так что $j \approx 2\partial u^0/\partial N \approx 2ku^0$. Поле $\hat{u}$ равно нулю на $\hat{C}$, на дуге C $\hat{u}(s) \approx \delta \cdot \partial \hat{u}/\partial N$, где δ —расстояние между линиями C и $\hat{C}$. При столь грубой оценке можно не уточнять определение этого расстояния. Обозначим через $\bar{u}^0$, $\overline{\partial \hat{u}/\partial N}$, $\bar{\delta}$ средние по зеркалу значения падающего поля u^0 , производной вспомогательного поля $\hat{u}$ и модуля расстояния δ между линиями; L_C —длина линии C (размер зеркала). Так как функция $\hat{V}(\sigma)$ нормирована по (10.5), то можно принять $\partial \hat{u}/\partial N \approx 1/2\sqrt{L_{\Sigma}}$, где L_{Σ} —длина контура Σ . Таким образом, правая часть формулы (16.24) имеет порядок $\bar{u}^0 k \bar{\delta} L_C / \sqrt{L_{\Sigma}}$. Существенно, что $\bar{u}^0$ входит с малым множителем $k\bar{\delta}$.

Левая часть формулы (16.24) примерно равна интегралу $\int_{\Sigma} U(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) d\sigma$, где $U(\sigma)$ —то поле на Σ , к которому должно быть близко поле $u(\sigma)$, отраженное от зеркала. Это—тот же интеграл,

который входит в неравенство (10.6). Таким образом, получаем искомую оценку для амплитуды падающего поля

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{k\delta} \frac{L_\Sigma}{L_c} \int U(\sigma) \hat{V}^*(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{L_\Sigma}}. \quad (16.25)$$

Разумеется, эта оценка менее информативна, чем предыдущие оценки для нормы тока. Из (16.25) можно лишь определить, насколько велико должно быть падающее на зеркало поле, чтобы на контуре Σ отраженное поле было близко к какому-либо полю $U(\sigma)$, которое было бы неаппроксимируемо, если бы C совпадало с $\hat{C}$. При таком совпадении было бы $\bar{\delta} = 0$, и из (16.25) следовало бы, что только бесконечно большое падающее поле могло бы создать неаппроксимируемое отраженное поле. Это—всего лишь другая формулировка многократно упоминавшегося факта—только ток с бесконечной нормой может создать неаппроксимируемое поле.

Проиллюстрируем оценку (16.25) на численном примере. Зеркало C есть дуга нерезонансной окружности радиуса R , и $kR = 10,0$. К C близка линия $\hat{C}$ —резонансный эллипс с полуосями a, b , ($ka = 4,14$; $kb = 1,73$), который в конце малой полуоси имеет с C касание четвертого порядка. Для небольшого зеркала ($L_c \ll a$) элементарный расчет дает $k\bar{\delta} \approx (0,7L_c/\lambda)^4$. Согласно (16.25), если поле $U(\sigma)$ не аппроксимируется токами на $\hat{C}$, т.е. интеграл в (16.25) не равен нулю, то хотя это поле и можно аппроксимировать токами, индуцированными на зеркале C , но для этого падающее на зеркало поле должно быть велико, примерно в $(1,5\lambda/L_c)^4$ раз больше, чем если бы радиус зеркала был другим. Зеркало с таким радиусом хотя и не является дугой особой линии, все же настолько к ней близко, что фактически имеет «запрещенную» форму. Этим дефектом обладают только небольшие зеркала, меньшие или равные длине волны.

Глава V. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 17. Тривиальные обобщения

1. Содержание предыдущих глав книги сформулировано в первом абзаце § 4. В этом параграфе основные результаты, полученные выше для двумерной скалярной модели, перенесены на трехмерные векторные задачи.

Единственное принципиальное отличие обеих задач, с которыми мы встретимся при этом обобщении, рассмотрено в следующем параграфе. В этом параграфе все построения являются простой переформулировкой прежних результатов. Нетривиальным при этом является только автоматизм такого перенесения. По существу, он означает, что эти результаты имеют весьма широкую область применимости. Если источники какого-либо поля расположены в области, *размерность* которой ниже размерности пространства, в котором формируется это поле (см. замечание после (17.7)), то оно может обладать свойством неаппроксимиремости, и эта ситуация отнюдь не является исключительной. Это утверждение основано только на линейности уравнений, точнее—на справедливости какого-либо варианта теоремы взаимности, и потому применимо и к акустическим, и к сейсмическим и другим полям, в которых имеет смысл понятие *поверхностных источников*.

2. Уравнения Максвелла при гармонической зависимости от времени (см. (2.1)) мы запишем для комплексных амплитуд $E(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ (для поля (E, H)) в однородной форме

$$\operatorname{rot} H - ikE = 0, \quad \operatorname{rot} E + ikH = 0, \quad (17.1)$$

аналогичной однородному волновому уравнению Гельмгольца (2.2). Возбуждающие токи расположены на некоторой поверхности S , и мы зададим их не в виде правой части уравнений Максвелла, а в виде разрыва на S тангенциальной компоненты магнитного поля, т.е. в виде двумерного вектора

$$[H_t]_C = j_t. \quad (17.2)$$

Здесь t_1, t_2 —два взаимно перпендикулярных и тангенциальных к C направления, векторы t_1, t_2 и N (нормаль к C) образуют правую тройку. Магнитные токи мы вводить не будем, так что поле E не имеет разрывов (см., впрочем, замечание в конце п. 3).

Условия на бесконечности записываются в сферической системе координат $(\rho, \vartheta, \varphi)$. Они имеют вид

$$E_{\vartheta} = \frac{e^{-ik\rho}}{k\rho} f_1(\vartheta, \varphi), \quad E_{\varphi} = \frac{e^{-ik\rho}}{k\rho} f_2(\vartheta, \varphi); \quad (17.3a)$$

$$H_{\vartheta} = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \rho}, \quad H_{\varphi} = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_{\vartheta}}{\partial \rho}. \quad (17.3b)$$

Как и в (2.5), функции f_1 и f_2 не задаются, определен лишь характер зависимости от ρ старшего члена разложения по $1/k\rho$ при $k\rho \rightarrow \infty$. В (17.3b) дифференцировать надо только экспоненту. Совокупность двух функций f_1 и f_2 мы будем далее обозначать через (f) .

Поле (E, H) , как и выше поле $u(x, y)$, создано только токами j , а не есть полное поле, существующее в пространстве. Поэтому векторы E, H не должны подчиняться никаким дополнительным (к (17.2)) условиям на поверхностях C , по которым протекают эти токи. Поле, индуцирующее токи j , в свою очередь созданное какими-либо другими токами («падающее поле», по терминологии теории дифракции), не включено в (E, H) (в «дифракционное поле»). Например, условие равенства нулю на металле тангенциальной компоненты электрического поля не относится к E , участвующему в (17.1), (17.3).

Мы не стали вводить в уравнения Максвелла проницаемости ϵ и μ . Если эти величины постоянны во всем пространстве, то их введение эквивалентно изменению частоты. Если в поле присутствуют, например, диэлектрические тела, то поле (E, H) должно удовлетворять уравнениям Максвелла с $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$. Тогда и введенное ниже вспомогательное поле $(\hat{E}, \hat{H})$ должно удовлетворять таким же уравнениям, т.е. должно быть результатом решения задачи о дифракции приходящей из бесконечности сферической волны на диэлектрических телах. Во всех дальнейших построениях и, в первую очередь, в формуле (17.4) (см. ниже), на которой эти построения основаны, при этом ничего не изменится. Мы ограничимся этим замечанием и будем применять уравнения Максвелла в виде (17.1), т.е. при $\epsilon \equiv 1, \mu \equiv 1$. И описывая далее вспомогательное поле $(\hat{E}, \hat{H})$, мы тоже будем считать его полем в пустоте.

Аналогом формулы Грина (2.7) является формула (упрощенный вариант леммы Лоренца), следующая из уравнений (17.1), написанных для двух полей (E_1, H_1) и (E_2, H_2) :

$$\int_{\mathcal{Q}} \{[E_1 H_2]_N - [E_2 H_1]_N\} ds = 0. \quad (17.4)$$

Здесь интеграл взят по некоторой замкнутой поверхности $\mathcal{Q}$, N —нормаль к ней, так что в (17.4) участвуют только тангенциальные к $\mathcal{Q}$ компоненты полей.

Формула (17.4) справедлива только, если в объеме, заключенном внутри $\mathcal{Q}$, оба поля не имеют разрывов или каких-либо других особенностей. Если поле H_1 имеет разрыв (17.2) на поверхности C , то справа в (17.4) возникнет взятый по C интеграл от нормальной компоненты векторного произведения этого разрыва, равного току, на E_2 , т.е. интеграл

$$\int_C j E_2 ds. \quad (17.5)$$

Так как ток тангенциален к поверхности C , то в (17.5) участвуют только тангенциальные компоненты поля E_2 .

3. Вспомогательное поле $(\hat{E}, \hat{H})$ мы определили как поле, удовлетворяющее однородным уравнениям Максвелла и удовлетворяющее на бесконечности условиям:

$$\hat{E}_\vartheta = \hat{F}_1^*(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ik\rho}}{k\rho} + \hat{F}_1(\vartheta, \varphi) \frac{e^{-ik\rho}}{k\rho}, \quad (17.6a)$$

$$\hat{E}_\varphi = \hat{F}_2^*(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ik\rho}}{k\rho} + \hat{F}_2(\vartheta, \varphi) \frac{e^{-ik\rho}}{k\rho}. \quad (17.6b)$$

Компоненты магнитного поля $\hat{H}_\vartheta$ и $\hat{H}_\varphi$ в старшем по $1/(k\rho)$ порядке при $k\rho \rightarrow \infty$ получаются из $\hat{E}_\vartheta$ и $\hat{E}_\varphi$ по формулам (17.36). Первые слагаемые в суммах (17.6) и в аналогичных формулах для H_ϑ , H_φ —незоммерфельдовские слагаемые, описывающие ту приходящую из бесконечности сферическую волну, которая создает во всем объеме поле $(\hat{E}, \hat{H})$. В отличие от (5.3), в (17.6) мы приняли, что поле $\hat{E}$ во всем пространстве вещественно. Из (17.1), а также из (17.6), (17.36) из этого следует, что поле $\hat{H}$ во всем пространстве мнимо. В следующем параграфе мы будем рассматривать также и комплексные вспомогательные поля $(\hat{E}, \hat{H})$, тогда оба угловых множителя и в (17.6a) и в (17.6b) будут независимы, как, например, в (5.3).

Если некоторая поверхность $\hat{C}$ обладает тем свойством, что существует поле $\hat{E}$ такое, что на $\hat{C}$ выполняются условия

$$\hat{E}_t|_{\hat{C}} = 0, \quad (17.7)$$

то такую поверхность мы называем особой. Формула (17.7) содержит два условия для любых двух тангенциальных к $\hat{S}$ направлений.

Заметим в этой связи, что поле, не равное тождественно нулю во всем объеме, может быть равно нулю только на поверхности (т.е. в пространстве меньшей размерности), подобно тому, как поле $\hat{u}(r, \varphi)$, не равное тождественно нулю на плоскости, могло быть равно нулю только на линии. Если ток расположен в конечном объеме, то неаппроксимируемости (которая есть следствие (17.7)) быть не может. Впрочем, если все точки этого объема близки к особой поверхности, то аппроксимируемость будет возможна только при большой норме тока (см. § 16).

Примем сначала, что поле $(\hat{E}, \hat{H})$ не имеет особенностей во всем пространстве. Применим (17.4) к полям (E, H) и $(\hat{E}, \hat{H})$, приняв (E, H) за (E_1, H_1) , а $(\hat{E}, \hat{H})$ —за (E_2, H_2) . Слагаемое (17.5), обязанное разрыву поля H , согласно (17.7), выпадет при любых расположенных на $\hat{S}$ токах j . Поэтому из (17.4) будет следовать, что интеграл, взятый по бесконечно удаленной сфере, на которой поля описываются формулами (17.3) и (17.6), (17.36), равен нулю. Как обычно в таких построениях, те слагаемые в подынтегральном выражении, которые получаются из волн, идущих в одном направлении (расходящиеся сферические волны), выпадают. Подставляя тангенциальные (т.е. ϑ, φ -е) компоненты полей, которые только и входят в (17.4), и сохраняя в (17.6) только первые (незоммерфельдовские) слагаемые, получим

$$\int \{f_1(\vartheta, \varphi) \hat{F}_1^*(\vartheta, \varphi) + f_2(\vartheta, \varphi) \hat{F}_2^*(\vartheta, \varphi)\} d\Omega = 0, \quad (17.8)$$

где $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ —элемент телесного угла; интеграция производится по всему углу 4π .

Формула (17.8)—аналог формулы (3.14). Введем обозначение для произведения двух пар функций в пространстве пар функций

$$(F^{(1)}, F^{(2)}) = \int \{F_1^{(1)}(\vartheta, \varphi) F_1^{(2)*}(\vartheta, \varphi) + F_2^{(1)}(\vartheta, \varphi) F_2^{(2)*}(\vartheta, \varphi)\} d\Omega. \quad (17.9)$$

Тогда формула (17.8) означает, что любая диаграмма f , созданная токами, расположенными на особой поверхности $\hat{S}$, ортогональна диаграмме $\hat{F}$, т.е. что $(f, \hat{F}) = 0$. Элемент $\hat{F}$ пространства пар функций является ортогональным дополнением в пространстве диаграмм. Отсюда следует, что любая пара функций F может быть аппроксимирована диаграммами f не точнее, чем согласно неравенству

$$(F - f, F - f) \geq |b|^2, \quad b = (F, \hat{F}). \quad (17.10a, б)$$

В этой формуле предположено, что $\hat{F}$ пронормировано на единицу

$$(\hat{F}, \hat{F}) = 1. \quad (17.11)$$

Если данной особой поверхности $\hat{C}$ соответствует несколько полей $(\hat{E}_p, \hat{H}_p)$ ($p = 1, 2, \dots, P$), для которых выполняются условия (17.7), то существует P пар функций $\hat{F}_p$, ортогональных любой диаграмме, созданной токами на $\hat{C}$. Тогда в неравенстве (17.10а) справа стоит сумма P слагаемых $|b_p|^2$, где $b_p = (F, \hat{F}_p)$. Необходимыми условиями аппроксимируемости являются условия (3.27), а если других элементов пространства ортогонального дополнения нет, то эти условия и достаточны.

Каждая особая поверхность $\hat{C}$, т.е. поверхность, на которой равны нулю тангенциальные компоненты $\hat{E}_t$ поля $(\hat{E}, \hat{H})$, удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла, одновременно является и поверхностью, на которой равны нулю тангенциальные компоненты $\hat{H}_t$ некоторого другого поля $(\hat{E}, \hat{H})$, удовлетворяющего тем же уравнениям. Это следует из инвариантности этих уравнений относительно подстановки $E \rightarrow H, H \rightarrow -E$. Функции ортогонального дополнения для этих двух полей взаимно ортогональны, что следует из (17.6) и (17.36).

Пусть, например, $\hat{C}$ есть цилиндрическая поверхность, параллельная оси z , и все поля не зависят от z . Эти поля выражаются через две скалярные функции— z -е компоненты электрического и магнитного полей. Из того что на $\hat{C}$ $\hat{E}_t = 0$, т.е. $\hat{E}_z = 0$ и $\hat{E}_s = 0$, следует, что существуют две функции $\hat{E}_z$ и $\hat{H}_z$, удовлетворяющие на $\hat{C}$ условиям $\hat{E}_z = 0, \partial \hat{H}_z / \partial N = 0$. И тогда существуют две другие функции $\hat{E}_z$ и $\hat{H}_z$, для которых на $\hat{C}$ $\partial \hat{E}_z / \partial N = 0$ и $\hat{H}_z = 0$, т.е. на этой поверхности равны нулю также тангенциальные компоненты $\hat{H}_t$ поля $(\hat{E}, \hat{H})$, выражающегося через эти две другие скалярные функции. Поверхность $\hat{C}$ одновременно есть и особая поверхность магнитного типа.

Таким образом, если некоторая поверхность $\hat{C}$ обладает тем свойством, что любые токи на ней создают неполную систему диаграмм, то и любые магнитные токи на ней тоже создают неполную систему диаграмм. Функции ортогонального дополнения обеих систем диаграмм не совпадают. Повторяя соображения, изложенные в § 5, п. 6 (в обозначениях (5.25) $J = 0$), можно утверждать, что если на какой-либо поверхности можно располагать как электрические, так и магнитные токи, то диаграммами всех этих токов можно аппроксимировать любую функцию.

4. Расширим понятие особой поверхности $\hat{C}$, потребовав, как в гл. III, чтобы существовало вещественное поле $\hat{E}$, удовлетворяющее уравнениям (17.1) и условию (17.7) и не имеющее особенностей хотя бы в конечной части пространства, т.е. внутри некоторой замкнутой поверхности Σ , содержащей $\hat{C}$. Построим на этой поверхности Σ функцию, играющую роль функции ортогонального дополнения к тангенциальным компонентам на Σ полей E , созданных любым током j на $\hat{C}$.

Решим вне Σ первую граничную задачу, т.е. найдем поле, удовлетворяющее условию излучения и имеющее на Σ те же значения тангенциальных компонент электрического поля, что и $\hat{E}$. Поле, равное внутри Σ вспомогательному полю $(\hat{E}, \hat{H})$, а вне Σ — построенному этим способом комплексному продолжению этого поля, будет иметь во всем пространстве лишь одну особенность — разрыв тангенциальной компоненты магнитного поля на Σ . Точнее, разрыв будет испытывать на Σ также и нормальная компонента электрического поля, но она не входит в дальнейшие формулы, и мы об этом далее упоминать не будем. Обозначим скачок тангенциальной компоненты магнитного поля (двумерный вектор, определенный на Σ) через $\hat{V}(\sigma)$, где σ — точка на поверхности Σ . Это обозначение повторяет обозначение, введенное в (10.1) для аналогичной скалярной функции.

Применим тождество (17.4) к полю (E, H) и к полю, равному внутри Σ полю $(\hat{E}, \hat{H})$, а вне — полю, полученному описанным продлением по значению $\hat{E}_t|_{\Sigma}$. Оба поля удовлетворяют одному и тому же условию излучения, поэтому интеграл по бесконечно удаленной сфере равен нулю. Слагаемое (17.5) тоже не возникнет, так как на $\hat{C}$ это поле совпадает с полем $\hat{E}$, т.е. равно нулю. Поэтому будет равен нулю единственный член, который останется от (17.4), обязанный разрыву магнитного поля, обозначенного в (17.4) через H_2 :

$$\int_{\Sigma} E(\sigma) \hat{V}(\sigma) d\sigma = 0. \quad (17.12)$$

Таким образом, двумерный вектор $\hat{V}(\sigma)$ играет роль функции ортогонального дополнения для тангенциальных к Σ компонент полей E , созданных токами на особой поверхности Σ . Ограничения на аппроксимируемость электрического поля в ближней зоне сильнее, чем для диаграмм. Во-первых, может оказаться, что поле $(\hat{E}, \hat{H})$ для данной особой поверхности не имеет особенностей только в части пространства, близкой к $\hat{C}$. Во-вторых, вектор $\hat{V}(\sigma)$, вообще говоря, более гладкий, чем функция $(\hat{F})$. Мы не будем доказывать это второе утверждение, повторяя для этого соображения, приведенные в § 10 после (10.9). Для этого надо

было бы принять за Σ сферическую поверхность, представить $(\hat{E}, \hat{H})$ внутри Σ через потенциалы Дебая, выразив их в виде ряда Фурье по сферическим гармоникам $P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi)$ и по полуцелым функциям Бесселя (см. ниже (17.15) и (17.16)), явно решить упомянутую внешнюю первую граничную задачу в виде ряда, содержащего полуцелые функции Ханкеля, и, вновь используя выражение для вронскиана цилиндрических функций, получить явный вид коэффициентов Фурье ряда для $\hat{V}(\sigma)$. Сравнивая его с таким же рядом для $\hat{F}$, мы, как и в § 10, показали бы, что в $\hat{V}(\sigma)$ высокие гармоники относительно меньше, чем в $(\hat{F})$, т.е. что $\hat{V}(\sigma)$ более гладкая функция, чем $\hat{F}$, а это и означает, что условия аппроксимации для полей в ближней зоне жестче, чем для диаграмм. Мы опустим эти громоздкие, но совершенно элементарные по существу выкладки, дублирующие аналогичные выкладки, сделанные для скалярного случая в § 10, п. 2.

Аналогично (17.12) можно показать, что если $\hat{C}$ —особая поверхность, то существует определенный на Σ тангенциальный к ней вектор $\hat{W}(\sigma)$, обладающий тем свойством, что поле H любого тока, распределенного на $\hat{C}$, ортогонально к $\hat{W}(\sigma)$ в том смысле, что

$$\int_{\Sigma} H(\sigma) \hat{W}(\sigma) d\sigma = 0. \quad (17.13)$$

Вектор $\hat{W}(\sigma)$ строится примерно так же, как $\hat{V}(\sigma)$. Поле, служащее продолжением поля $(\hat{E}, \hat{H})$ в область, внешнюю по отношению к Σ , строится как решение второй граничной задачи таким образом, чтобы сохранить непрерывность тангенциальных компонент магнитного поля, т.е. по заданному значению $\hat{H}_t|_{\Sigma}$. Тогда поле, внутри Σ равное $(\hat{E}, \hat{H})$, а вне—этому продленному полю, будет иметь единственную особенность—разрыв тангенциальной компоненты электрического поля на Σ (и нормальной компоненты магнитного, что несущественно). Разрыв этой тангенциальной компоненты мы и обозначили через $\hat{W}(\sigma)$. Формула (17.13) непосредственно следует из (17.4).

5. Поверхность антенны не должна быть особой поверхностью (или близкой к ней). Для секториального рупора из этого следовало, что угол раскрыва рупора не должен быть равен углом, указанным в (6.6), или близок к ним. Получим аналогичные результаты для конического рупора.

Ось конуса направим по оси сферической системы координат. Половину угла раскрыва обозначим через α , так что уравнение поверхности антенны есть $\vartheta = \alpha$. Эта поверхность будет особой, если существует такое поле $(\hat{E}, \hat{H})$, что

$$\hat{E}_\rho \Big|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \hat{E}_\varphi \Big|_{\vartheta=\alpha} = 0. \quad (17.14a, б)$$

Компоненты полей в сферической системе координат удобно выражать через две скалярные функции—электрический $U(\rho, \vartheta, \varphi)$ и магнитный $V(\rho, \vartheta, \varphi)$ потенциалы Дебая. Нам понадобятся только две из шести соответствующих формул:

$$E_\vartheta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2(\rho U)}{\partial \rho \partial \vartheta} - \frac{ik}{\sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad E_\varphi = \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial^2(\rho U)}{\partial \rho \partial \varphi} + ik \frac{\partial V}{\partial \vartheta}. \quad (17.15a, б)$$

Компонента E_ρ выражается через один потенциал U , компонента H_ρ —через один потенциал V . Эти потенциалы удовлетворяют волновому уравнению—трехмерному аналогу уравнения (2.2).

Если представить эти потенциалы для поля $(\hat{E}, \hat{H})$ в виде произведения соответствующих специальных функций от ρ , ϑ и φ , т.е. в виде

$$\hat{U}, \hat{V} = \frac{1}{\sqrt{k\rho}} J_{n+1/2}(k\rho) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \quad (17.16)$$

то условия (17.14) могут быть выполнены для полей, представимых через один из этих потенциалов. Опишем два варианта такого построения.

Поле $(\hat{E}, \hat{H})$ можно построить, приняв $\hat{U} \equiv 0$ и потребовав выполнения условия

$$P_n^m(\cos \alpha) = 0. \quad (17.17)$$

Действительно, компоненты $\hat{E}_\rho$ и $\hat{E}_\varphi$ получаются из $\hat{U}$ дифференцированием только по ρ и по φ , так что из условия (17.17), если $U(\rho, \vartheta, \varphi)$ принято в форме (17.16), следует (17.14). В (17.16) цилиндрическая функция должна быть именно функцией Бесселя, иначе поле будет иметь особенность при $\rho = 0$.

Асимптотика при $k\rho \rightarrow \infty$ поля $(\hat{E}, \hat{H})$ будет содержать приходящую сферическую волну (первые слагаемые в (17.6)) с угловой зависимостью:

$$\begin{aligned} \hat{F}_1^*(\vartheta, \varphi) &= \frac{d}{d\vartheta} P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \\ \hat{F}_2^*(\vartheta, \varphi) &= P_n^m(\cos \vartheta) [-m \sin(m\varphi)], \end{aligned} \quad (17.18)$$

где опущен множитель $(-i)^n$, получающийся из асимптотики функции Бесселя в (17.16) (ср. (5.8) и (5.9)).

Для того чтобы функция $P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi)$ не имела особенностей, n и m должны быть целыми числами, и $n \geq m$. Для каждой пары (n, m) уравнение (17.17) определяет значение α , при котором конус—особая поверхность. Фактически ограничения на аппроксимируемость диаграмм существенны, только если $\hat{F}$ (см. (17.18))—гладкие функции, т.е. если n и m —небольшие числа. Например, для полей, не зависящих от φ , конус будет особой поверхностью при значениях α , удовлетворяющих (17.17) при $m = 0$ для нескольких первых n : $\alpha = 55^\circ$ ($n = 2$), $\alpha = 39^\circ$ ($n = 3$), $\alpha = 31^\circ$ ($n = 4$). Для аппроксимируемости диаграмм, пропорциональных $\cos \varphi$, надо избегать углов, удовлетворяющих (17.17) при $m = 1$, а именно углов $\alpha = 63^\circ$ ($n = 3$) и $\alpha = 49^\circ$ ($n = 4$).

Поле $(\hat{E}, \hat{H})$ можно также построить, приняв $\hat{U} \equiv 0$ и выражая все компоненты $\hat{E}$ через $\hat{V}(\rho, \vartheta, \varphi)$ (см. (17.16)). Тогда (17.14а) выполняется автоматически, так как $E_\rho \equiv 0$ во всем пространстве, а второе условие (17.14б) приводит к уравнению для α :

$$\left. \frac{d}{d\vartheta} P_n^m(\cos \vartheta) \right|_{\vartheta=\alpha} = 0. \quad (17.19)$$

Для этого поля функции ортогонального дополнения получаются из (17.18) заменой $\hat{F}_1$ на $\hat{F}_2$ и $\hat{F}_2$ на $-\hat{F}_1$. Для $m = 0$ уравнение (17.19) дает $\alpha = 63^\circ$ ($n = 3$), $\alpha = 49^\circ$ ($n = 4$). Для $m = 1$ соответственно, $\alpha = 31^\circ$ ($n = 3$) и $\alpha = 24^\circ$ и 69° ($n = 4$).

Если поверхностный ток расположен на любой конической поверхности (не обязательно кругового конуса), но содержит только радиальную составляющую тока j_ρ , то создаваемая им диаграмма f (см. (17.3)), ортогональна функции $\hat{F}$, соответствующей любому полю $(\hat{E}, \hat{H})$, не содержащему компоненту $\hat{E}_\rho$, т.е. любому полю, представимому через один потенциал $\hat{V}$. Это следует из (17.5)—в таком поле $\hat{E}_\rho \equiv 0$, интеграл (17.5) равен нулю для любого радиального тока, а именно из этого и следует равенство нулю произведения $(f, \hat{F})$. Для простейшего случая, когда радиальный ток лежит на оси системы координат, это получается и из соображения о том, что такой ток создает только ϑ -ю составляющую электрического поля, притом не зависящую от φ , т.е. в (17.3а) $f_2 \equiv 0$, $f_1 = f_1(\vartheta)$. В произведении $(f, \hat{F})$ войдет интеграл только от $f_1(\vartheta) \partial \hat{V} / \partial \varphi$ (см. (17.15а)) по φ , а так как $\hat{V}$ —периодическая функция от φ , то этот интеграл равен нулю. В общем случае, когда радиальный ток не лежит на одной прямой, доказательство более громоздко, и мы его приводить не будем. Все это рассуждение вновь иллюстрирует то обстоятельство, что теория аппроксимируемости может рассматриваться как обобщение

элементарных свойств симметрии поля, созданного токами на прямой линии или на плоскости (ср. § 6, п. 4, или § 7, п. 2).

Основываясь на формулах этого пункта, легко показать, что функции ортогонального дополнения, введенные равенствами (17.6) (т.е. в предположении, что поле $\hat{E}$ вещественно), удовлетворяют условиям

$$\hat{F}_1(\pi - \vartheta, \varphi - \pi) = \hat{F}_1^*(\vartheta, \varphi), \quad \hat{F}_2(\pi - \vartheta, \varphi - \pi) = \hat{F}_2^*(\vartheta, \varphi), \quad (17.20)$$

аналогичным условию (5.17), которому удовлетворяет функция $\hat{F}(\varphi)$ в двумерной задаче. Представим потенциалы $\hat{U}$ и $\hat{V}$ в виде рядов по вещественным функциям (17.16). Эта система функций полна в пространстве функций без особенностей, удовлетворяющих волновому уравнению. Согласно (17.15), для того, чтобы поле $\hat{E}$ было вещественным, коэффициенты в разложении $\hat{U}$ должны быть вещественными, а в разложении $\hat{V}$ — мнимыми. Функции $\hat{F}_1(\vartheta, \varphi)$ и $\hat{F}_2(\vartheta, \varphi)$, т.е. асимптотики функций (17.16) при $k\rho \rightarrow \infty$, будут рядами по функциям (17.18), и, согласно замечанию после формулы (17.18), коэффициенты в этих рядах будут иметь вид $C_{nm}(-i)^n$, где C_{nm} — вещественны. При замене углов ϑ, φ на $\pi - \vartheta, \varphi - \pi$ функции (17.18) не изменяются, но получают множитель $(-1)^n$. Поэтому такая замена меняет ряды для $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ так же, как и взятие комплексного сопряжения, что и утверждается в (17.20).

Как и в двумерном случае (см. замечание после формулы (5.17)), этот результат можно получить и непосредственно из (17.6), применив тождество (17.4) к полю $(\hat{E}, \hat{H})$ и к полю плоской волны, приходящей из направления ϑ, φ . Однако формулы асимптотического интегрирования в двумерных интегралах более громоздки, чем, например, (5.13) или (6.16), и такое доказательство формулы (17.20) оказывается технически более сложным, чем намеченное выше.

6. Если особой поверхности $\hat{C}$ соответствует бесконечно много функций ортогонального дополнения $\hat{F}_p$ ($p = 1, 2, \dots$), то возможна амплитудная неаппроксимируемость некоторых диаграмм, т.е. могут существовать функции

$$F_1(\vartheta, \varphi) = \Phi_1(\vartheta, \varphi) \exp[-i\Psi_1(\vartheta, \varphi)], \\ F_2(\vartheta, \varphi) = \Phi_2(\vartheta, \varphi) \exp[-i\Psi_2(\vartheta, \varphi)] \quad (17.21)$$

($\Phi_1 \geq 0, \Phi_2 \geq 0$) с заданной амплитудной диаграммой (Φ), которые неаппроксимируемы данной поверхностью при любых фазах (Ψ). Примером такой поверхности $\hat{C}$ является совокупность трех

пересекающихся плоскостей, если углы между ними удовлетворяют определенным условиям. Ситуация примерно такая же, как в двумерной задаче, если в ней линия $\hat{C}$ состоит из двух пересекающихся прямых (см. § 7). Чтобы не усложнять формулы, в трехмерном векторном случае и без того громоздкие, мы ограничимся частным случаем—особая поверхность состоит из *трех взаимно перпендикулярных плоскостей*. В декартовой системе их уравнения имеют вид: $y = 0$, $x = 0$ и $z = 0$. В сферической системе координат, ось которой совпадает с осью z и в которой угол φ отсчитывается от плоскости $y = 0$, уравнения этих трех плоскостей имеют вид: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ и $\vartheta = \pi/2$.

Будем искать поля $(\hat{E}, \hat{H})$, удовлетворяющие на этих трех плоскостях условию (17.7). Выразим эти поля через потенциалы Дебая $\hat{U}(\rho, \vartheta, \varphi)$ и $\hat{V}(\rho, \vartheta, \varphi)$ по формулам (17.15), а эти потенциалы будем искать, согласно (17.16), в виде

$$\hat{U} = R_n(\rho) P_n^m(\cos \vartheta) \sin(m\varphi), \quad \hat{V} = R_\nu(\rho) P_\nu^\mu(\cos \vartheta) \cos(\mu\varphi), \quad (17.22a, б)$$

где функции $R_n(\rho) = J_{n+1/2}(k\rho)/\sqrt{k\rho}$ нам далее не понадобятся. Числа n , m , ν и μ должны быть целыми, и $n \geq m$, $\nu \geq \mu$, чтобы функции (17.22) не имели особенностей при всех ϑ и φ .

Тангенциальными к $\hat{C}$ компонентами поля $\hat{E}$ на плоскостях $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ будут компоненты $\hat{E}_\rho$, $\hat{E}_\vartheta$, а на плоскости $\vartheta = \pi/2$ —компоненты $\hat{E}_\rho$, $\hat{E}_\varphi$. Требование равенства нулю этих компонент (см. (17.7)) накладывает на потенциалы Дебая, согласно (17.15), следующие условия: при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ $\hat{U} \equiv 0$, $\partial \hat{U} / \partial \vartheta \equiv 0$, $\partial \hat{V} / \partial \rho \equiv 0$; при $\vartheta = \pi/2$ $\hat{U} \equiv 0$, $\partial \hat{U} / \partial \varphi \equiv 0$, $\partial \hat{V} / \partial \vartheta \equiv 0$. Условия при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ будут выполнены потенциалами (17.22), если m и μ будут четными числами. Условие на плоскости $\vartheta = \pi/2$ требует, чтобы $P_n^m(0) = 0$, $dP_\nu^\mu(\cos \vartheta)/d\vartheta|_{\vartheta=\pi/2} = 0$. Как легко проверить [20; 8.756.1 и 8.731.1], первое из этих уравнений при четных m будет выполнено, если n —нечетно ($n > m$), а второе при четных μ будет выполнено, если ν —четно ($\nu \geq \mu$). Так как при $\mu = 0$, $\nu = 0$ потенциал $\hat{V}$ (см. (17.22б)) не зависит от углов, то ему соответствует поле, равное нулю, так что μ и m должны быть четными числами, не равными нулю.

Таким образом, каждый из двух потенциалов (17.22), независимо друг от друга, описывает вспомогательное поле $(\hat{E}, \hat{H})$ для любых четных значений m и μ ($m, \mu = 2, 4, \dots$) и любых нечетных n ($n > m$) и любых четных ν ($\nu \geq \mu$).

Каждому потенциалу соответствует функция ортогонального дополнения в пространстве диаграмм:

$$\hat{F}_1(\vartheta, \varphi) = P_n^{m'}(\cos \vartheta) \sin(m\varphi),$$

$$\hat{F}_2(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sin \vartheta} P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi),$$

$$\hat{F}_1(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sin \vartheta} P_\nu^\mu(\cos \vartheta) \sin(\mu\varphi), \quad (17.23a, б)$$

$$\hat{F}_2(\vartheta, \varphi) = P_\nu^\mu(\cos \vartheta) \cos(\mu\varphi).$$

Диаграммы (17.23а) порождены потенциалом $\hat{U}$ (см. (17.22а)), диаграммы (17.23б) порождены потенциалом $\hat{V}$ (см. (17.22б)). Таким образом, особой поверхности $\hat{S}$ в виде трех взаимно перпендикулярных плоскостей соответствует бесконечное (счетное) множество функций $(\hat{F}_\rho)$ ортогонального дополнения (17.23).

Диаграмма (F) аппроксимируема тогда и только тогда, когда она ортогональна всем этим функциям $(\hat{F}_\rho)$, т.е. когда равны нулю все интегралы типа (17.8), $(F, \hat{F}_\rho) = 0$. Умножив каждое из этих равенств на $\hat{F}_\rho(\vartheta', \varphi')$ с соответствующей нормой, просуммировав по всем ρ и переставив порядок суммирования и интегрирования, получим эквивалентное необходимое и достаточное условие аппроксимируемости функции (F) в виде

$$(F, \mathcal{F}) \equiv 0, \quad (17.24)$$

которое должно быть справедливо для всех ϑ' ($0 \leq \vartheta' \leq \pi$) и φ' ($0 \leq \varphi' \leq 2\pi$). Мы не будем выписывать двухкомпонентную функцию $\mathcal{F}((\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi'))$, которая равна сумме произведений всех функций типа (17.23б) по всем допустимым значениям индексов (ср. (7.12)).

Далее можно было бы преобразовать эту сумму и показать, что $\mathcal{F}$ равно конечной сумме δ -функций, аналогичных сумме в правой части формулы (7.7). И тогда условие $(F, \mathcal{F}) \equiv 0$ примет форму связи между значениями (F) для некоторых углов, как в (7.8). Однако такой способ получения этой связи, которая является основой дальнейшего рассмотрения вопроса об амплитудной аппроксимируемости, очень громоздок. Проще, основываясь на доказанном существовании такой связи, непосредственно установить ее для любой диаграммы (f) , используя соображения о симметрии, очевидные в этой конкретной задаче о трех плоскостях, т.е. реализовать программу, осуществленную в скалярной задаче на основании формулы (7.10).

Рассмотрим для этого сначала потенциал Дебая $V(\rho, \vartheta, \varphi)$ поля, созданного любым током на $\hat{S}$. Его можно представить в виде

суммы трех потенциалов, созданных токами, протекающими, соответственно по плоскостям $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ и $\vartheta = \pi/2$ (зависимость от ρ не указываем):

$$V(\vartheta, \varphi) = V_1(\vartheta, \varphi) + V_2(\vartheta, \varphi) + V_3(\vartheta, \varphi). \quad (17.25)$$

Симметрия полей, созданных токами на плоскости, относительно этой плоскости, приводит к тому, что потенциал V относительно нее симметричен:

$$V_1(\vartheta, \varphi) = V_1(\vartheta, -\varphi), \quad V_2(\vartheta, \varphi) = V_2(\vartheta, \pi - \varphi), \\ V_3(\vartheta, \varphi) = V_3(\pi - \vartheta, \varphi). \quad (17.26)$$

Подставим в (17.25) последовательно вместо ϑ, φ , углы

$$(\vartheta, -\varphi), (\vartheta, \pi - \varphi), (\pi - \vartheta, \varphi), (\pi - \vartheta, -\varphi), (\pi - \vartheta, \pi - \varphi), \\ (\vartheta, \varphi - \pi)(\pi - \vartheta, \varphi - \pi),$$

получающиеся однократным, двукратным и трехкратным «отражением» точки с углами ϑ, φ . При этих отражениях значение ρ не меняется. Сложим эти восемь равенств. Согласно (17.26), слева все слагаемые сократятся. Таким образом,

$$V(\vartheta, \varphi) - \{V(\vartheta, -\varphi) + V(\vartheta, \pi - \varphi) + V(\pi - \vartheta, \varphi)\} + \\ + \{V(\pi - \vartheta, -\varphi) + V(\pi - \vartheta, \pi - \varphi) + \\ + V(\vartheta, \varphi - \pi)\} - V(\pi - \vartheta, \varphi - \pi) = 0. \quad (17.27)$$

В первую скобку сведены значения V от точек, получающихся при однократном отражении, во вторую—при двукратном отражении, последний член соответствует трехкратному отражению. Аналогичный результат справедлив и для потенциала U . В отличие от V , потенциал U антисимметричен относительно плоскости, по которой протекают токи, так что вместо, например, первой формулы (17.26) будет $U(\vartheta, \varphi) = -U(\vartheta, -\varphi)$. От (17.27) формула для U будет отличаться только знаками, что для дальнейшего не существенно.

Переходя от потенциалов к диаграммам (f), мы получим такой же результат—алгебраическая сумма значений диаграмм от восьми углов, участвующих в (17.27), равна нулю для любых диаграмм, созданных токами на $\hat{C}$. Это означает, что функция $\mathcal{F}$ содержит восемь слагаемых, каждая из которых есть произведение двух δ -функций от аргументов типа $(\vartheta - \vartheta' + \vartheta_s)$ и $(\varphi - \varphi' + \varphi_s)$ ($s = 1, 2, \dots, 8$), где ϑ_s, φ_s —некоторые углы (ср. (7.7)). Поэтому требование—значение алгебраической суммы комплексных функций (F) от восьми точек равно нулю—есть искомая форма необходимого и достаточного условия аппроксимируемости диаграммы (F). А отсюда, повторяя соответствующее рассуждение § 7, мы получим условие амплитудной аппроксимируемости диаграмм—

мы, в которой задана только амплитуда (Φ). Условие это состоит в том, что в ряду восьми неотрицательных чисел $\Phi(\vartheta, \psi)$, $\Phi(\vartheta, -\varphi)$, ... и так далее—подразумеваются те же углы, которые участвуют в (17.27)—при всех ϑ и φ большее число не должно быть больше суммы семи остальных. Точнее, надо упоминать о двух рядах чисел $\Phi_1(\vartheta, \varphi)$ и $\Phi_2(\vartheta, \varphi)$, и в каждом ряду должно выполняться такое же требование.

Рассмотрим в качестве примера такую же гауссову диаграмму, как в (7.17). Пусть ее максимум находится в первом квадранте под направлением, составляющим равные углы со всеми тремя осями, т.е. с тремя линиями пересечения плоскостей. Несложное геометрическое построение показывает, что этому направлению соответствуют углы $\vartheta_0 = \arcsin \sqrt{2/3} \approx 55^\circ$, $\varphi_0 = \pi/4$. В системе координат ϑ', φ' с полярной осью, направленной под углами ϑ_0, φ_0 , амплитудную диаграмму зададим, как в (7.17), в виде

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = \exp \left(-A \sin^2 \frac{\vartheta'}{2} \right). \quad (17.28)$$

Поле направлено по меридианам этой системы координат, т.е. диаграмма имеет только ϑ' -компоненту электрического поля или магнитного поля.

В направлении максимума ($\vartheta' = 0$) диаграмма (17.28) равна единице ($\Phi(\vartheta_0, \varphi_0) = 1$). Для любого направления ϑ, φ значение диаграммы зависит только от угла ϑ' между направлением ϑ_0, φ_0 и направлением ϑ, φ , определяемым формулой

$$\cos \vartheta' = \cos \vartheta_0 \cdot \cos \vartheta + \sin \vartheta_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos (\varphi - \varphi_0). \quad (17.29)$$

Условие—сумма семи членов ряда больше восьмого—будет выполнено для всех углов, если оно будет выполнено для угла ϑ_0, φ_0 , где большее из этих восьми чисел имеет наибольшее значение, а отношение суммы остальных семи к этому большему минимально. Если же это условие нарушено хотя бы в одной точке, например, при $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = \varphi_0$, то нарушено и условие амплитудной аппроксимируемости.

Для углов, получающихся из ϑ_0, φ_0 однократным отражением, т.е. для углов $(\vartheta_0, -\varphi_0)$, $(\vartheta_0, \pi - \varphi_0)$, $(\pi - \vartheta_0, \varphi_0)$ (см. аргументы в первой скобке в формуле (17.27)), $\cos \vartheta' = 1/3$ ($\vartheta' \approx 70^\circ$), что легко найти из (17.29), учитывая, что $\sin^2 \vartheta_0 = 2/3$. Для углов, получающихся двукратным отражением, $\cos \vartheta' = -1/3$ ($\vartheta' \approx 110^\circ$). Для угла $(\pi - \vartheta_0, \varphi_0 - \pi)$ $\cos \vartheta' = -1$ ($\vartheta' = 180^\circ$). Таким образом, подставляя в (17.28) соответственно, $\sin^2 (\vartheta'/2) = 1/2$, $\sin^2 (\vartheta'/2) = 2/3$ и $\sin^2 (\vartheta'/2) = 1$, получим уравнение, аналогичное (7.19):

$$3 \exp(-A_0/3) + 3 \exp(-2A_0/3) + \exp(-A_0) = 1. \quad (17.30)$$

Здесь A_0 —наибольшее значение параметра A , входящего в (17.28), при котором амплитудная аппроксимируемость еще возможна. Решением (17.30) есть $A_0 = 4,0$, чему соответствует полуширина амплитудной диаграммы, равная 34° . Более широкие однонаправленные амплитудные диаграммы (см. (17.28)) аппроксимируемы, более узкие—неаппроксимируемы токами, протекающими по трем взаимно перпендикулярным плоскостям. В аналогичной двумерной задаче ($\hat{C}$ —две перпендикулярные прямые) полуширина диаграммы должна быть больше 53° . В трехмерном случае ограничения оказались мягче.

7. Мы не будем выписывать формулы, получающиеся при обобщении на трехмерные векторные задачи всех результатов, полученных в гл. IV для скалярных полей. Разумеется, определение скалярного произведения токов (14.4) надо заменить на скалярное произведение, содержащее двумерные векторы, подобно тому, как скалярное произведение диаграмм (14.5) заменяется на (17.9). Ядро интегрального оператора (14.4) будет не функцией (14.2), а матрицей. В простых примерах вместо окружности надо будет брать сферу, вместо тригонометрических функций (13.7), (13.8)—функции (17.18), соответствующим образом пронормированные. Однако основные элементы всех построений гл. IV—понятие обобщенных функций (пар функций) двойной ортогональности, определение сопряженного по (14.6) оператора K^c , определение расширенных операторов $(K)_{расш}$ и $(K^c)_{расш}$ и их тождественность полям (E, H) или $(\hat{E}, \hat{H})$ —сохраняются. Сохраняются и результаты § 15 по оптимальному токовому синтезу, в том числе и несколько парадоксальный результат п. 6, относящийся к токам на особой линии (поверхности) и справедливый для поверхности, только близкой к особой. Для трехмерной задачи тоже может оказаться, что приблизиться на конечное, но небольшое расстояние к какой-либо относительно узкой диаграмме можно с меньшим током, чем к аналогичной диаграмме, более широкой.

Приведем лишь, притом не делая ссылок на предыдущие построения этого параграфа, краткую формулировку для трехмерных векторных полей того—основного—результата, который для двумерных скалярных полей был получен в § 5 и § 10. По существу, именно эта эквивалентность двух свойств особых поверхностей является основой всего построения этой книги.

Если некоторая поверхность $\hat{C}$ обладает одним из двух сформулированных ниже свойств, то она обладает и другим.

1. Любые токи, распределенные на $\hat{C}$, создают на замкнутой поверхности Σ , окружающей $\hat{C}$, электрическое поле e , которым

всякую заданную на Σ пару функций $E_1(\sigma)$, $E_2(\sigma)$ (σ —координата точки на Σ) можно приблизить не точнее, чем согласно неравенству

$$\int_{\Sigma} \left\{ \left| E_1 - e_{t_1} \right|^2 + \left| E_2 - e_{t_2} \right|^2 \right\} d\sigma \geq \left| \int_{\Sigma} \{ E_1 \hat{F}_1^* + E_2 \hat{F}_2^* \} d\sigma \right|^2, \quad (17.31)$$

где t_1 и t_2 —два тангенциальных к Σ направления, а функции $\hat{F}_1(\sigma)$ и $\hat{F}_2(\sigma)$ определены на Σ , не зависят от токов и нормированы условием, что интеграл, получающийся при замене справа в (17.31) E_1 и E_2 на $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$, равен единице.

2. Существует решение $\hat{E}$, $\hat{H}$ однородного уравнения Максвелла, не имеющее особенностей внутри Σ , такое, что на $\hat{C}$ обе тангенциальные компоненты поля E равны нулю

$$\hat{E}|_{\hat{C}} = 0. \quad (17.32)$$

Функции $\hat{F}_1(\sigma)$ и $\hat{F}_2(\sigma)$ в (17.31) и поле $\hat{E}$ в (17.32) однозначно связаны между собой. Эти функции равны разности значений на Σ тангенциальных компонент двух магнитных полей—поля $\hat{H}$ (внутри Σ), и другого, получающегося вне Σ из задачи об электромагнитном поле, удовлетворяющем условию излучения и имеющему на Σ то же значение тангенциальной компоненты электрического поля, что и $\hat{E}$. А поле $\hat{E}$ внутри Σ равно полю, создаваемому распределенными на Σ токами с компонентами $-\hat{F}_2(\sigma)$ и $\hat{F}_1(\sigma)$.

Если поле $\hat{E}$, $\hat{H}$ со свойством (17.32) не имеет особенностей во всем пространстве, то (17.31) применимо не только для поля e на конечном от $\hat{C}$ расстоянии, но и для диаграмм, и тогда в (17.31) σ переходит в (ϑ, φ) ; $E_1(\vartheta, \varphi)$ и $E_2(\vartheta, \varphi)$ —заданная диаграмма (ϑ и φ ее компоненты), а $\hat{F}_1(\vartheta, \varphi)$, $\hat{F}_2(\vartheta, \varphi)$ —угловые зависимости тех слагаемых в асимптотике при $r \rightarrow \infty$ поля $\hat{E}$, которые соответствуют сходящейся сферической волне.

Для многих поверхностей можно доказать существование поля, удовлетворяющего условиям (17.32). Эквивалентность (17.32) и (17.31) означает, что для таких поверхностей имеет место также и неаппроксимируемость.

Сохранятся также, с очевидными оговорками и переформулировками, и основные результаты § 12. Разумеется, в рассуждениях п. 6 надо круг заменить на сферу, а ряды (12.2)—на ряды для $\hat{U}$ и $\hat{V}$ по функциям (17.16). В § 8 поле $\hat{E}$, $\hat{H}$ надо создавать совокупностью плоских волн двух поляризаций, прихо-

дящих из направлений, образующих равномерную сетку на сфере, и т.д.

Во всех этих и многих других, не упомянутых в этом параграфе случаях обобщение не требует новых идей и не вызывает никаких кардинальных усложнений. Те несколько ситуаций, когда такие усложнения появляются, выделены в следующий параграф.

§ 18. Свойства особых поверхностей

1. Для скалярного поля, двумерного или трехмерного, справедливо следующее очевидное свойство: совокупность точек, в которых оно обращается в нуль, образует линию (поверхность)—нулевую линию (поверхность) этого поля. Для поля $u(x, y)$ эти нулевые линии были особыми линиями.

Аналогичное утверждение для трехмерного векторного поля, вообще говоря, не справедливо. На особой поверхности, по ее определению, должны быть равны нулю две тангенциальные компоненты поля $\hat{E}$ (см. (17.7)), т.е. эта поверхность должна в каждой точке быть перпендикулярна вектору E . Для произвольного векторного поля A такие поверхности не существуют. Их существование связано с выполнением условия

$$A \operatorname{rot} A = 0. \quad (18.1)$$

Так как нас интересует поле $\hat{E}$, удовлетворяющее однородным уравнениям Максвелла, то это условие имеет вид

$$\hat{E} \hat{H} = 0. \quad (18.2)$$

Соотношение между условием (18.2) и условиями (17.7) зависит от того, выполняется ли условие (18.2) в объеме или только на самой поверхности S . Возможны два случая:

1. Если (18.2) выполняется в некотором объеме, то поле представимо в виде

$$\hat{E} = \alpha \operatorname{grad} \beta, \quad \alpha = \alpha(x, y, z), \quad \beta = \beta(x, y, z), \quad (18.3)$$

и, наоборот, если поле $\hat{E}$ представимо в виде (18.3), то выполняется условие (18.2) [37, § 79 и § 122]. Поля с этим свойством подробно исследованы в [38], там, в частности, выписаны и исследованы уравнения, которым должны удовлетворять функции α и β , чтобы поле (18.3) удовлетворяло уравнениям Максвелла (точнее, волновому уравнению и требованию $\operatorname{div} E = 0$).

Из (18.3) следует, что поверхность $\beta(x, y, z) = C$ при любом значении постоянной C является особой, т.е. на ней выполняются условия (17.7). Одно и то же вспомогательное поле $(\hat{E}, \hat{H})$ —и потому одна функция ортогонального дополнения ($\hat{F}$) в пространстве диаграмм—соответствует системе особых поверхностей, зави-

сящих от непрерывного параметра C . При этом поле $\hat{E}$ может быть комплексным. Эта ситуация не имеет аналога в скалярном случае.

Простейший пример—поле $\hat{E}$, выражающееся по формуле (18.3), где $\beta = x$, $\alpha = f(y)$. Тогда $E_x = f(y)$, $E_y \equiv 0$, $E_z \equiv 0$, и если $f'' + k^2 f = 0$, то это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла (см. уточнение выше). Любая плоскость $x = C$ является особой; $f(y)$ может быть бегущей волной, $f(y) = e^{-iky}$. Разумеется, равенство (18.2) для этого поля удовлетворяется во всем пространстве, так как единственная отличная от нуля компонента магнитного поля есть $\hat{H}_z$, а электрического—компонента $\hat{E}_x$.

Если $f(y)$ вещественно, например, $f(y) = \sin(ky)$, то в этом поле существует система дискретных особых поверхностей—плоскости $y = \pi n/k$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), аналогичная системе особых поверхностей в скалярной задаче с $\hat{u} = \sin(ky)$.

2. Если условие (18.2) выполняется не в объеме, а лишь на какой-либо поверхности C , то оно является только необходимым, но не достаточным условием выполнения условия (17.7) на C . Необходимость доказывается тем, что из (17.7) следует, что на C выполняется (18.2). Действительно, по теореме Стокса нормальная к C компонента $\text{rot } \hat{E}$ (а именно $\hat{H}_N$) есть интеграл от $\hat{E}_r$, т.е. согласно (17.7), она равна нулю, так что $\hat{H}$ лежит в тангенциальной к C плоскости. А так как $\hat{E}$ нормально к C , то $\hat{E}$ и $\hat{H}$ перпендикулярны друг к другу.

Недостаточность одного условия (18.2) для выполнения двух условий (17.7) доказывается следующим примером, в котором (18.2) выполнено, а (17.7)—не выполнено. Пусть $E_x = f(z)$, $E_y = F(x, z)$, $E_z = 0$, где f и F —удовлетворяют волновым уравнениям. Вычислив H по уравнениям Максвелла, найдем, что левая часть (18.2) для этого поля пропорциональна выражению $f \partial F / \partial z + F \partial f / \partial z$. Приравнявая его нулю, получим уравнение типа $\Phi(x, z) = 0$, т.е. уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси y . Условие (18.2) на ней выполняется, но тангенциальные к ней компоненты вектора $\hat{E}$ не будут равны нулю.

Таким образом, условие (18.2) для некоторого поля в любом случае является необходимым условием существования в этом поле особых поверхностей. Если это условие не выполняется нигде, то в поле заведомо нет особых поверхностей. Примером является поле $E_x = \cos(kz)$, $E_y = \sin(kz)$, $H_x = -i \cos(kz)$, $H_y = -c \sin(kz)$. В нем левая часть (18.2) равна $-ik$, т.е. (18.2) нигде не выполняется, и, как непосредственно видно, в нем нет поверхностей, на которых выполняются условия (17.7).

С условием (18.2) приходится считаться также в другом круге проблем—при конструктивном синтезе резонаторных антенн с полупрозрачными поверхностями по заданной диаграмме излучения [39, § 21]. В этой проблеме также возникает задача о построении поверхности (там это замкнутая поверхность антенны), в каждой точке перпендикулярной некоторому вещественному полю. Эта задача в некотором смысле дополнительна к задаче о построении особых поверхностей. На поверхности резонаторной антенны, построенной по полю, имеющему асимптотикой заданную диаграмму, должны протекать большие токи, чтобы создать эту диаграмму, тем большие, чем меньше прозрачность поверхности антенны, т.е. чем больше ее заданная добротность. По особой поверхности $\hat{S}$, которую мы здесь рассматриваем, токи не протекают, магнитное поле на ней не испытывает разрывов; вспомогательное поле $\hat{E}, \hat{H}$ создается приходящей сферической волной.

2. Замкнутая особая поверхность является резонансной, т.е. в ее внутренней области на заданной частоте существует собственное колебание—решение однородных уравнений Максвелла, удовлетворяющее на поверхности условию (17.7), а потому и условию (18.2). Однако не всякое резонансное поле может быть аналитически продолжено за границу резонатора, т.е. оно не обязательно является значением некоторого вспомогательного поля $(\hat{E}, \hat{H})$ внутри области. И, соответственно, не всякая замкнутая резонансная поверхность является особой—ситуация в этом отношении повторяет ту, которую мы обсуждали в скалярном случае. Проблема опять может быть переформулирована в терминах задачи Коши, на этот раз для векторных полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Аналитическое продление возможно в том и только в том случае, если разрешима внешняя задача Коши, т.е. если существует поле, не имеющее особенностей во всем пространстве (или хотя бы в части его), которое на поверхности $\hat{S}$ имеет нулевое тангенциальное электрическое поле и то же значение тангенциального магнитного поля, что и внутреннее резонансное поле. Эти тангенциальные компоненты полей не независимы, а связаны условием, что внутренняя задача Коши с этими граничными значениями имеет решение (собственное колебание).

Если поле собственного колебания описывается формулами, сохраняющими смысл и вне поверхности, то эти формулы описывают поле $(\hat{E}, \hat{H})$ во всем объеме, и, в частности, функцию (F) . Поверхность при этом, разумеется, будет особой.

Напомним, что аналитическое решение однородной внутренней задачи может быть легко найдено также и для многих поверхностей, для которых решение внешней задачи дифракции представляет собой сложную задачу и возможно только численными методами. Это соображение справедливо как для векторных, так и для двумерных скалярных задач. Например, для прямоу-

гольного параллелепипеда поле $(\hat{E}, \hat{H})$ выражается в виде произведения тригонометрических функций, и это выражение справедливо и вне поверхности,—с той оговоркой, что соответствующая ему функция ортогонального дополнения $(\hat{F})$ будет содержать δ -функции, т.е. будет ненормируема (ср. § 6). Внутри любой резонансной поверхности вращения поле собственного колебания выражается через две скалярные функции $(\hat{E}_z$ и $\hat{H}_z$, в очевидных обозначениях), и если образующая—достаточно гладкая кривая, то эти выражения сохраняются и вне поверхности. Поля, не зависящие от азимутального угла, выражаются, как известно, через одну скалярную функцию.

Поле $(\hat{E}, \hat{H})$ можно рассматривать как решение задачи дифракции на металлическом теле с поверхностью $\hat{C}$ для специального вида падающего поля.

Формулировка задачи аналитического продолжения в терминах задачи Коши, вероятно, может быть использована и для доказательства утверждения, что в окрестности особой поверхности находится другая особая поверхность—имеется в виду существенно другая, которой соответствует другая функция (F) . Однако существующие результаты теории аналитического продолжения полей и задачи Коши, особенно в трехмерном векторном случае, повидимому, недостаточны для установления необходимых и достаточных условий, при которых заданная поверхность является особой, т.е. существует поле $(\hat{E}, \hat{H})$, удовлетворяющее уравнениям (17.1) и условию (17.7).

3. В скалярном случае всякая функция, удовлетворяющая условию (5.17), может рассматриваться как функция ортогонального дополнения $\hat{F}(\varphi)$ какого-либо вещественного поля $\hat{u}(r, \varphi)$. Поле это строится по схеме § 5 (или по какой-либо другой схеме, см. [39]), а его нулевые линии являются особыми линиями $\hat{C}$, соответствующими функции $\hat{F}(\varphi)$. В трехмерном векторном случае аналогичное утверждение несправедливо. Не всякой паре функций $F_1(\vartheta, \varphi)$, $F_2(\vartheta, \varphi)$, даже удовлетворяющих условиям (17.20)—аналогам условия (5.17)—соответствует поле $(\hat{E}, \hat{H})$, на некоторой поверхности $\hat{C}$ удовлетворяющее условиям (17.7).

Будем считать, что функции F_1 и F_2 подчинены условиям (17.20), необходимым и достаточным, чтобы восстановленное по ним во всем объеме поле E было вещественно, а поле H —мнимо, хотя вещественность поля E и не является необходимым условием существования особой поверхности. Как мы уже отмечали, в любом поле, представимом в форме (18.3), такие поверхности существуют, даже если функции α и β комплексны. Однако класс полей, представимых в виде (18.3), т.е. для которых условие (18.2) выполняется во всем объеме, значительно уже, чем класс

полей, в которых существует дискретная система особых поверхностей (или даже только одна такая поверхность).

В общем виде не удается найти явный вид связи между двумя функциями $F_1(\vartheta, \varphi)$ и $F_2(\vartheta, \varphi)$, удовлетворяющими условиям (17.20), при которой восстановленное по ним поле E на некоторой поверхности будет удовлетворять условиям (17.7), т.е. той связи, при которой эти функции являются функциями ортогонального дополнения. Можно только указать те операции, которые следует произвести, чтобы выяснить, являются ли или нет две данные функции F_1 и F_2 ортогональным дополнением.

Для этого надо, во-первых, восстановить вещественное поле E , асимптотика которого (17.8) содержит эти функции, затем решить уравнение (18.2), т.е. найти те поверхности, на которых это уравнение выполняется, а затем проверить, выполняются ли хотя бы на части одной из них условия (17.7).

Существует несколько методов восстановления вещественного поля по его асимптотике. Они повторяют известные приемы восстановления расходящегося поля по его диаграмме, изложенные, например, в [39, п. 3.5]. Искомое вещественное поле есть вещественная часть найденных расходящихся полей. Определение поверхностей, на которых произведение полей E и H равно нулю, представляет собой несложную вычислительную задачу. В общем случае такие поверхности существуют для любых функций F_1 и F_2 , хотя возможны и случаи, когда их нет, как в примере, приведенном в п. 1, когда EH есть постоянное число.

Однако условия (17.7) на этих поверхностях будут выполняться только в том случае, если функции F_1 и F_2 выбраны не независимо друг от друга. Это не означает, что особых поверхностей $\hat{C}$ «меньше», чем особых линий $\hat{C}$ в двумерных задачах. Это лишь значит, что для построения особой поверхности произвольно (лишь с учетом требования (17.20)) можно выбирать только одну функцию (F_1 или F_2).

Отметим очевидный частный случай, когда задача сводится к однопотенциальной, т.е. к скалярной, и решается поэтому так же элементарно, как в § 5. Пусть $\hat{F}_1 \equiv 0$, $\hat{F}_2 = \hat{F}_2(\vartheta)$, т.е. электрическое поле $\hat{E}$ имеет только азимутальную компоненту, притом не зависящую от φ . Согласно (17.15), если принять $\hat{U} \equiv 0$, $\hat{V} = \hat{V}(\vartheta)$, то $\hat{E}_\vartheta \equiv 0$, $\hat{E}_\rho \equiv 0$, а $\hat{E}_\varphi = ik\partial\hat{V}/\partial\vartheta$. Представим $\hat{V}(\vartheta)$ в виде ряда по функциям (17.16) при $m = 0$, тогда

$$E_\varphi = ik\Sigma C_n \frac{1}{\sqrt{k\rho}} J_{n+1/2}(k\rho) P'_n(\cos \vartheta), \quad (18.4)$$

где вещественные числа C_n являются коэффициентами в разложении заданной функции $\hat{F}(\vartheta)$ в ряд по $P'_n(\cos \vartheta)$. Разложение это находится согласно (17.6) из (18.4) при переходе к $k\rho \rightarrow \infty$ и с точностью до множителя имеет вид

$$\hat{F}_2(\vartheta) = \sum C_n P'_n(\cos \vartheta) (i)^n. \quad (18.5)$$

Коэффициенты C_n в этом ряду выражаются через $\hat{F}$ по формуле (см. [38, формула (3.18)])

$$C_n = \frac{2n+1}{n!(n+1)} \int_0^\pi P_n(\cos \vartheta) \frac{d}{d\vartheta} [\sin \vartheta \cdot \hat{F}_2(\vartheta)] d\vartheta, \quad (18.6)$$

для вывода которой надо воспользоваться ортогональностью полиномов Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$ и тем, что они удовлетворяют уравнению $(\sin \vartheta \cdot P'_n)' = -n(n+1)P_n$. Найдя C_n , можно затем найти особую поверхность $\hat{C}$ как поверхность $\rho = \rho(\vartheta)$, на которой равна нулю сумма (18.4). Поверхность $\hat{C}$ будет поверхностью вращения.

В этом случае условие аппроксимируемости $(F, \hat{F}) = 0$ является ограничительным только для диаграмм (F) , созданных азимутальными токами на $\hat{C}$, причем только для нулевых членов разложения этих токов по φ . Для диаграмм, созданных другими токами, это условие при такой функции $(\hat{F})$ будет выполняться автоматически.

4. Различие между случаями, сводящимися к скалярным, и существенно векторными ситуациями вероятно сильнее всего проявляется в проблеме определения формы рассеивающего тела по диаграмме рассеяния. В § 8 были намечены три метода решения этой задачи. Первый состоял в том, что измеренную диаграмму рассеяния f надо сравнить с функцией ортогонального дополнения $\hat{F}$, связанной с некоторой заранее предложенной поверхностью $\hat{C}$. Если эти две функции близки (т.е. их произведение не мало), то рассеивающая поверхность не похожа на $\hat{C}$. Этот метод переносится на векторные задачи хотя и с очевидными осложнениями в формулировках, но без принципиальных изменений, ибо, как было показано, для простых особых поверхностей функции $(\hat{F})$ строятся примерно так же, как в скалярном случае.

Совершенно другая ситуация возникнет при попытке перенести на векторный случай методы, описанные в пп. 3, 4 § 8. В этих методах предлагается по измеренной диаграмме рассеяния (f) найти функцию ортогонального дополнения $(\hat{F})$, к ней либо близкую, либо, наоборот, далекую, а затем по этой функции $(\hat{F})$ построить поверхность $\hat{C}$. Однако отсутствие просто сформулированных условий на (F) , при которых пара функций может

рассматриваться как ортогональное дополнение, делает этот второй метод очень трудоемким. Вся вычислительная процедура становится качественно более сложной, чем в скалярном случае.

В конце п. 3 § 2 мы заметили, что некоторые физические проблемы, обсуждаемые в книге, приводят к математическим задачам, хотя и простым по постановке, но, возможно, весьма сложным по существу. Одна из таких задач сформулирована в конце п. 2. С другой мы столкнулись в этом пункте. Решение этих и нескольких других задач, упомянутых в книге, придало бы теории аппроксимируемости электромагнитных полей полями поверхностных токов некоторую законченность.

Список литературы

1. Каценеленбаум Б.З., Шалухин М.Ю. Оптимальный токовый синтез на окружности // Радиотехн. и электрон.—1988.—Т. 33, № 9—С. 1878–1887.
2. Каценеленбаум Б.З., Шалухин М.Ю. Свойство полей токов, распределенных на незамкнутых поверхностях // Письма в ЖТФ.—1988.—Т. 14, вып. 21.—С. 2012–2015.
3. Каценеленбаум Б.З., Шалухин М.Ю. О невозможности аппроксимировать произвольное поле полем тока, расположенного на незамкнутой поверхности или кривой // Радиотехн. и электрон.—1989.—Т. 39, № 2.—С. 225–233.
4. Каценеленбаум Б.З. Свойства диаграмм, создаваемых рупорами (неаппроксимируемость). // Радиотехн. и электрон.—1989.—Т. 34, № 7.—С. 1370–1375.
5. Каценеленбаум Б.З. Неаппроксимируемость амплитудных диаграмм излучения диаграммами токов, распределенных вдоль двух пересекающихся прямых. // Письма в ЖТФ.—1989.—Т. 15, вып. 11.—С. 17.
6. Шалухин М.Ю. Оптимальный токовый синтез на дуге окружности. // Радиотехн. и электрон.—1990.—Т. 35, № 2.—С. 313–320.
7. Шалухин М.Ю. Свойства полей токов, распределенных на некоторых незамкнутых кривых. // Радиотехн. и электрон.—1990.—Т. 35, № 3.—С. 493–499.
8. Каценеленбаум Б.З., Шалухин М.Ю. К вопросу об определении формы тела по диаграмме рассеяния. // Письма в ЖТФ.—1990.—Т. 16, вып. 5.—С. 60–63.
9. Каценеленбаум Б.З. Условие на плотность тока, локализованного в заданной области, необходимое для того, чтобы создаваемые им диаграммы могли аппроксимировать заданную функцию. // Радиотехн. и электрон.—1990.—Т. 35, № 11.—С. 2427–2431.
10. Katzenelenbaum B.Z., Shalukhin M.Yu. Properties of Surface Currents and Solvability of Inverse Electrodynamics Problems (Current Synthesis) // IEICE Trans. (Japan).—1991.—V. E74, № 9.—P. 2910–2914.
11. Katzenelenbaum B.Z., Shalukhin M.Yu. Approximate Current Synthesis, its Limitations and Possibilities // IV Intern. Seminar «Mathematical Methods in Electromagnetic Theory», 1991, Alushta.—P. 306.
12. Каценеленбаум Б.З. О норме тока, создающего заданную диаграмму. // Радиотехн. и электрон.—1992.—Т. 37, № 1. С. 71–77.
13. Каценеленбаум Б.З. Неаппроксимируемые диаграммы и неизлучающие токи. // Радиотехн. и электрон.—1993.—Т. 38, № 6.—С. 990–1006.
14. Каценеленбаум Б.З. Проблема аппроксимируемости электромагнитного поля // УФН.—1994.—Т. 164, № 9.—С. 983–993.
15. Katzenelenbaum B.Z., Matviyiv G.M., Voitovich N.N. How to find the Shape of the Body, when its Several Scattering Patterns are known. // Proc. 1995 URSI Int. Symp. on Electromagn. Theory. St. Petersburg, 1995.—P. 133–135.
16. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны.—М.: Радио и связь, 1988.—438с.
17. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б.З. Основы теории дифракции.—М.: Наука, 1982.—272с.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1981.—496с.

19. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовича М., Стиган И.—М.: Наука, 1979.—830с.
20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Физматгиз, 1962.—1100с.
21. Каценеленбаум Б.З., Полищук И.М. О диаграммах направленности токов, распределенных на замкнутых и незамкнутых кривых и поверхностях. // Радиотехн. и электроника.—1990.—Т. 35, № 11.—С. 2363-2367.
22. Overfelt P.L., White D.J. The TE- and TM-Modes of Some Triangular Cross-Section Waveguides Using Superposition of Plane Waves // IEEE Trans. MTT-34, 1964, № 1.—Р. 161-167.
23. Линейные уравнения математической физики / Под редакцией Михлина С.Г.—М.: Наука, 1964.—360с.
24. Апелъцин В.Ф., Кюркчан А.Г. Аналитические свойства волновых полей.—М.: Изд. Моск. ун-та, 1990.—208с.
25. Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Особенности продолжения решений уравнений Максвелла // Радиотехн. и электрон.—1992.—Т. 37, № 5.—С. 777-796.
26. Савина Т.В., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. О формуле отражения для уравнения Гельмгольца. // Радиотехн. и электрон.—1993.—Т. 38, № 2.—С. 229-240.
27. Заридзе Р.С., Каркашадзе Д.Д. Решение задачи дифракции в окрестности резонансной частоты. // Волны и дифракция. IX Всесоюз. симп. по дифракции и распространению волн, 1985. Тбилиси, Т. 2.—С. 287-290.
28. Поповиди-Заридзе Р.С., Каркашадзе Д.Д., Ахвледиани Г.З., Хатиашвили Д.Ш. Исследование возможностей метода вспомогательных источников при решении двумерных задач электродинамики. // Радиотехн. и электр.—1981.—Т. 26, № 2.—С. 254-262.
29. Inagaki N., Garbacz R. Eigenfunction of Composite Hermitian Operators with Application to Discrete and Continues Radiating System // IEEE Trans., AP-30, 1982, № 4.—Р. 571.
30. Хенль Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.—М.: Мир, 1964.—428с.
31. Lin D., Garbacz R., Posar D. Antenna Synthesis and Optimization Using Generalized Characteristic Modes // IEEE Trans.—1990.—AP-38, N 6.—Р. 860-868.
32. Андрийчук М.И., Войтович Н.Н., Савенко П.А., Ткачук В.П. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности.—Киев: Наукова думка, 1993.—255с.
33. Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д. Синтез излучающих систем; теория и методы расчета.—М.: Сов. радио, 1974.
34. Андрийчук М.М., Войтович Н.Н. Синтез замкнутой плоской антенны по заданной амплитудной диаграмме направленности. // Радиотехн. и электр.—1985.—Т. 30, № 2.—С. 276.
35. Posar D. Antenna Synthesis and Optimization Using Weidhted Inagaki Modes // IEEE Trans.—1984.—AP-32, № 2.—Р. 159-165.
36. Каценеленбаум Б.З. Свойства ближних полей, рассеянных неплоскими зеркалами. // Радиотехн. и электр.—1996.—Т. 41, № 11.—(в печати).
37. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Ч. II.—М.: Наука, 1974.
38. Худак Ю.Н. О локальной структуре одного класса решений однородной системы уравнений Максвелла. // Радиотехн. и электр.—1987.—Т. 32, № 2.—С. 225.
39. Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями. Методы конструктивного синтеза / Под ред. Каценеленбаума Б.З., Сивова А.Н.—М.: Наука, 1989.—174 с.

Издательская фирма
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА
Российской Академии наук

УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред, 1994, Пер.448, Б/о
- БИНДЕР К., ХЕЕРМАН Д.В. Моделирование методом Монте-Карло в статистической физике: Пер. с англ., 1995, Обл.144, 89-96.И
- БОГОЛЮБОВ Н.Н., ШИРКОВ Д.В. Квантовые поля.—2-е изд., 1993, Пер.336, Б/о
- БОРИСОВИЧ Ю.Г., БЛИЗНЯКОВ Н.М., ИЗРАИЛЕВИЧ Я.А., ФОМЕНКО Т.Н. Введение в топологию.—2-е изд., 1995, Пер.416, 81-96.И
- ВЕНТЦЕЛЬ А.Д. Курс теории случайных процессов.—2-е изд., 1996, Пер.400, Б/о
- ВАРЧЕНКО А.Н., ЭТИНГОФ П.И. Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса (Соврем. мат. для студентов), 1995, Обл.80, Б/о
- ГОППА В.Д. Введение в алгебраическую теорию информации, 1995, Обл.112, Б/о
- ГРИБОВ Л.А., ПРОКОФЬЕВА Н.И. Основы физики.—2-е изд., 1995, Пер.560, Б/о
- ИВАНОВ Ю.Н., ТОКАРЕВ В.В., УЗДЕМИР А.П. Математическое описание элементов экономики, 1994, Пер.416, Б/о
- КОСТРИКИН А.И. Введение в алгебру: Основы алгебры, 1994, Пер.320, Б/о
- КУДРЯВЦЕВ Л.Д., КУТАСОВ А.Д., ЧЕХЛОВ В.И., ШАБУНИН М.И. Сборник задач по математическому анализу: Функции нескольких переменных /Под ред. Л.Д. Кудрявцева, 1995, Пер.496, 126-95.И
- ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М. Статистическая физика. Часть 1.—4-е изд. (Теор. физ.; Т. V), 1995, Пер.608, 93-96.1
- ЛИННИК Ю.В. Лекции о задачах аналитической статистики, 1994, Обл.112, Б/о
- МАКАРОВ Б.М., ГЛУЗИНА М.Г., ЛОДКИН А.А., ПОКРЫТОВ А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу, 1992, Пер.432, Б/о
- МЕЛЕДИН Г.В. Физика в задачах: Экзаменационные задачи с решениями.—3-е изд., 1994, Обл.256, Б/о
- МЫШКИС А.Д. Элементы теории математических моделей, 1994, Обл.192, Б/о
- ПРАСОЛОВ В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры, 1996, Пер.304, 73-96.И
- ПРУСАКОВ Г.М. Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ, 1993, Обл.144, Б/о
- ПЯТНИЦКИЙ Е.С., ТРУХАН Н.М., ХАНУКАЕВ Ю.И., ЯКОВЕНКО Г.Н. Сборник задач по аналитической механике.—2-е изд., 1996, Пер.432, 134-95.И
- САВЕЛЬЕВ И.В. Основы теоретической физики: В 2 т. Т. 2. Квантовая механика.—2-е изд., 1996, Пер.432, Б/о
- Сборник задач по математике для втузов: В 4 ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.—3-е изд., 1993, Пер.480, Б/о
- Сборник задач по методам вычислений /Под ред. П.И.Монастырного.—2-е изд., 1994, Пер.320, Б/о
- СВЕТОЗАРОВА Г.И., КОЗЛОВСКИЙ А.В., СИГИТОВ Е.В. Современные методы программирования в примерах и задачах, 1995, Пер.432, Б/о
- СИВУХИН Д.В. Электричество: В 2 ч.—3-е изд. (Общий курс физики; Т. 3), 1996: Часть 1. Пер.320, Б/о; Часть 2. Пер.320, Б/о
- СТРУКОВ Б.А., ЛЕВАНЮК А.П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах.—2-е изд., 1995, Пер.304, 94-96.1

ФАДДЕЕВ Д.К., НИКУЛИН М.С., СОКОЛОВСКИЙ И.Ф. Алгебра для школьников, 1995, Пер.464, 120-95.П

ФЕОДОСЬЕВ В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов.—5-е изд., 1996, Пер.368, 212-95.П

СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

ВЫГОДСКИЙ М.Я. Справочник по высшей математике:— 13-е изд., 1995, Пер.880, 110-95.П

ДЬЯКОНОВ В.П. Справочник по применению системы DERIVE, 1996, Обл.144, 32, Б/о

СЕМАШКО Г.Л., САЛТЫКОВ А.И. Программирование на языке Паскаль, 1993, Обл.208, Б/о

Фундаментальные экологические проблемы в разработках Российской академии наук: Справочное руководство /Сост. А.А.Веденяпин, И.К.Козлова, Л.В.Шаумян, 1995, Обл.96, Б/о

ЯВОРСКИЙ Б.М., ДЕГЛАФ А.А. Справочник по физике.—4-е изд., 1996, Пер.624, 144-95.П

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ ЛИТЕРАТУРА

АНТРОПОВ Д.М. Как завязывать узлы, 1995, Обл.32, Б/о

ГАМОВ Дж. Моя мировая линия: Неформальная автобиография: Пер. с англ., 1994, Обл.320, Б/о

ИГОШИН В.И. Михаил Яковлевич Суслин (1894—1919), 1996, Обл.160, 208-96.П

КОЛМОГОРОВ А.Н., ЖУРБЕНКО И.Г., ПРОХОРОВ А.В. Введение в теорию вероятностей.—2-е изд. (Б-чка «Квант»), 1995, Обл.176, Б/о

КОЧИНА П.Я. Николай Евграфович Кочин.—2-е изд., 1994, Обл.240, Б/о

МЕРКИН Д.Р. Краткая история классической механики Галилея—Ньютона, 1995, Обл.160, Б/о

СОНИН А.С. «Физический идеализм»: История одной идеологической кампании, 1995, Обл.224, Б/о

СОНИН А.С., ФРЕНКЕЛЬ В.Я. Всеволод Константинович Фредерикс (1885—1944), 1995, Обл.176, 207-96.П

ХОДЖ П. Галактики: Пер. с англ. /Под ред. Ю.Н.Ефремова, 1992, Обл.192, Б/о

ЩЕГЛОВ П.В. Отраженные в небе мифы Земли.—2-е изд., 1996, Обл.144, Б/о

НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

АРУТЮНЯН Г.В. Термогидродинамическая теория гетерогенных систем, 1994, Пер.272, Б/о

Астрофизические исследования на космической станции «Астрон» /Под ред. А.А. Боярчука, 1994, Пер.416, Б/о

БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ С.М., ГИНЕВСКИЙ А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей, 1995, Пер.368, 137-95.П

БЕСОВ О.В., ИЛЬИН В.П., НИКОЛЬСКИЙ С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.—2-е изд., 1996, Пер.480, 63-97.П

БЛЕХМАН И.И. Вибрационная механика, 1994, Пер.400, Б/о

Взаимодействие лазерного излучения сверхвысокой интенсивности с плазмой (Тр. ИОФАН; Т. 50), 1995, Обл.184, 107-95.П

ВОЛЕВИЧ Л.Р., ГИНДИКИН С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках, 1994, Пер.336, Б/о

Воспоминания об академике М.А.Леонтовиче.—2-е изд. /Сост. В.И.Коган, В.Д.Новиков, 1996, Пер.448, 140-95.П

ГАЛАНИН М.П., ПОПОВ Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование, 1995, Пер.320, 87-96.П

ГОЛОВАЧЕВ Ю.П. Численное моделирование вязкого газа в ударном слое, 1996, Пер.376, 82-96.П

ГОРИНЕВСКИЙ Д.М., ФОРМАЛЬСКИЙ А.М., ШНЕЙДЕР А.Ю. Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях, 1995, Пер.368, Б/о

ГОРШКОВ А.Г., ТАРЛАКОВСКИЙ Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами, 1995, Пер.352, 89-96.1

ГРИГОЛЮК Э.И., ФИЛЬШТИНСКИЙ Л.А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами, 1995, Пер.336, Б/о

ДАВЫДОВ Ю.А., ЛИФИЩ М.А., СМОРОДИНА Н.В. Локальные свойства распределения стохастических функционалов, 1995, Обл.256, 78-96.11

ЖАКОД Ж., ШИРЯЕВ А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. Т. 1, 1994, Пер.544, Б/о

ЖАКОД Ж., ШИРЯЕВ А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. Т. 2, 1994, Пер.368, Б/о

ЗАЙЦЕВ А.А. Теория несущей поверхности: Математическая модель, численный метод, расчет машущего полета, 1995, Обл.160, 92-96.1

ИВАНОВ В.К., МЕЛЬНИКОВА И.В., ФИЛИНКОВ А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи, 1995, Обл.176, Б/о

ИВАНОВ П.М. Алгебраическое моделирование сложных систем, 1996, Пер.272, Б/о

ИЗЮМОВ Ю.А., КАЦЕНЬСОН М.И., СКРЯБИН Ю.Н. Магнетизм коллективизированных электронов, 1994, Пер.368, Б/о

ИЛЬИН В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем, 1995, Пер.288, 133-95.11

КАРГАПОЛОВ М.И., МЕРЗЛЯКОВ Ю.И. Основы теории групп.—4-е изд., 1996, Обл.288, 80-96.1

КАЦЕНЕЛЕНБАУМ Б.З. Проблемы аппроксимируемости электромагнитного поля, 1996, Обл.208, 77-97.1

КОЧИНА П.Я., КОЧИНА Н.Н. Гидромеханика подземных вод и вопросы орошения, 1994, Обл.240, Б/о

КУЗЬМИН В.П., ЯРОШЕВСКИЙ В.А. Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных возмущениях, 1995, Пер.304, 61-96.1

КЫЧКИН М.С. Основы релятивистской теории многоэлектронных атомов, 1994, Обл.272, Б/о

ЛАРИЧЕВ О.И., МОШКОВИЧ Е.М. Качественные методы принятия решений, 1996, Пер.224, 63-96.11

Магнитное пересоединение в двумерных и трехмерных конфигурациях (Тр. ИОФАН; Т. 51), 1996, Обл.208, 98-96.1

МАСЛОВ В.П., КОЛОКОЛЬЦОВ В.Н. Идемпотентный анализ и его применения в оптимальном управлении, 1994, Обл.144, Б/о

Математические вопросы кибернетики: Вып. 5 /Под ред. С.В.Яблонского, 1994, Пер.304, Б/о

МЕЛЕНТЬЕВ Л.А. Избранные труды: Методология системных исследований в энергетике, 1995, Пер.304, 158-96.1

МИХЕЛЬСОН Н.Н. Оптика астрономических телескопов и методы ее расчета, 1995, Обл.384, 151-95.11

МИЩЕНКО Е.Ф., КОЛЕСОВ Ю.С., КОЛЕСОВ А.Ю., РОЗОВ Н.Х. ПерIODические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах, 1995, Пер.336, 124-95.11

НИКИТИН Я.Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев, 1995, Обл.240, 130-95.11

Оптимальное управление и дифференциальные уравнения: К семидесятилетию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко (Тр. МИРАН; Т. 211), 1995, Пер.526, 128-95.11

Особенности гладких отображений с дополнительными структурами /Под ред. В.И.Арнольда (Тр. МИРАН; Т. 209), 1995, Пер.272, 89-95.1

ПАКШИН В.П. Дискретные системы со случайными параметрами, 1994, Пер.304, Б/о

ПОПОВ А.Л., ЧЕРНЫШЕВ Г.Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек, 1994, Обл.208, Б/о

Проблемы субмикронной технологии (Тр. ФТИАН; Т.10), 1996, Обл.112, 154-96.П

РОЗАНОВ Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными, 1995, Обл.256, 131-95.П

РОЗЕНВАССЕР Е.Н. Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени, 1994, Пер.464, Б/о

РЫКОВ А.С. Поисковая оптимизация: Методы деформируемых конфигураций, 1994, Обл.216, Б/о

Системы и средства информатики: Вып. 7, 1995, Обл.278, 171-95.П

СМИРНОВ В.А. Спектры кратковременных атмосферных явлений: Метеоры, 1995, Обл.208, 154-95.П

СТЕПАНЯНЦ Ю.А., ФАБРИКАНТ А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках (Пробл. соврем. физики), 1996, Обл.240, 90-96.П

Структурные исследования кристаллов: К семидесятилетию академика Б.К.Вайнштейна (Пробл. соврем. кристаллографии), 1996, Пер.496, 94-96.П

СТУЛОВ В.П., МИРСКИЙ В.Н., ВИСЛЫЙ А.И. Аэродинамика болидов, 1995, Обл.240, 100-96.П

Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия: К семидесятилетию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича (Тр. МИРАН; Т. 208), 1995, Пер.368, 86-95.П

Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций /Ю.В.Соколкин, А.М. Вотинов, А.А. Ташкинов и др., 1996, Пер.240, Б/о

ТОВСТИК П.Е. Устойчивость тонких оболочек: Асимптотические методы, 1995, Пер.320, Б/о

УЗДЕМИР А.П. Динамические целочисленные задачи оптимизации в экономике, 1995, Пер.288, 102-95.П

ФЕЙГИН М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями, 1994, Пер.288, Б/о

ЦЫПКИН Я.З. Информационная теория идентификации, 1995, Пер.336, 62-96.П

ЧЕРНЫХ К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин, 1996, Обл.288, 90-96.П

ЧЕРНЫШЕВ Г.Н., ПОПОВ А.Л., КОЗИНЦЕВ В.М., ПОНОМАРЕВ И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах, 1996, Пер.240, 71-97.П

ШЕВЧЕНКО В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования, 1995, Обл.192, 86-96.П

Планируемые к выпуску издания Физматлит объявляются в полугодовых аннотированных тематических планах Издательства «Наука» (Наука. Физматлит).

Приобретайте перечисленные выше издания в магазинах Торговой фирмы «Академкнига» и книготоргов, распространяющих литературу данной тематики (номера объявленных в тематических планах 1995–1997 гг. позиций указаны).

Поставки литературы Физматлита в регионы осуществляются при 100%-ной предоплате и самовывозе книжной продукции Покупателем. Наложным платежом книги не высылаются. Заказы принимаются по телефону: (095) 955-03-30.

БАНКОВСКИЕ РЕКВИЗИТЫ:

Издательская фирма «ФИЗМАТЛИТ» РАН. ИНН 772503156.

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Расч.счет 362505 в Октябрьском филиале МИБ г.Москвы, БИК 044583416.

Кор.счет 416161400 в РКЦ ГУ ЦБ РФ г.Москвы, БИК 044583001.

Научное издание

КАЦЕНЕЛЕНБАУМ Борис Захарович

**ПРОБЛЕМА АППРОКСИМИРУЕМОСТИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Редактор *Д.А. Миртова*

Корректор *О.Ф. Алексеева*

Операторы: *Е.В. Титова, Л.Т. Варьяш*

ИБ № 41829

ЛР № 020297 от 27.11.91.

Подписано к печати 17.10.96. Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 11. Уч.-изд. л. 11,83. Тираж 1000 экз.

Заказ № 591. С-022

Издательская фирма «Физико-математическая литература» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский просп., 15

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6