

Б. З. КАЩЕНЕЛЕНБАУМ



ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА



Б. З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АППАРАТА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой введение в теоретические методы высокочастотной электродинамики. Рассмотрены методы, наиболее употребительные в современных работах по теоретическому анализу электромагнитных волн.

Книга предназначена прежде всего для студентов старших курсов соответствующих специальностей. Может быть полезной аспирантам и научным сотрудникам, специализирующимся по электродинамике, высокочастотной радиотехнике, электронике и смежным областям.

Борис Захарович Каценеленбаум

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
Основы математического аппарата

М., 1966 г., 240 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Вирко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 4/XI 1965 г. Подписано к печати 23/II 1966 г. Бумага 84 × 108¹/₃₂.
Физ. печ. л. 7,5. Условн. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 12,08.
Тираж 17 000 экз. Т-01594. Цена книги 57 к. Заказ № 44.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Гатчинская, 26.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Уравнения Максвелла	7
§ 1. Уравнения Максвелла	7
§ 2. Комплексные амплитуды	10
§ 3. Волновое уравнение	19
Глава II. Плоские волиы	22
§ 4. Плоские волны в однородной безгранич- ной среде	22
§ 5. Нормальное падение плоской волны на плоскую границу диэлектрика	25
§ 6. Переходный слой	27
§ 7. Теория скин-эффекта. Граничное условие Леонтовича	34
Глава III. Волноводы	43
§ 8. Цилиндрические волны	43
§ 9. Волноводы	48
§ 10. Прямоугольные и круглые сечения	55
§ 11. Двухсвязные сечения. Кабельные волны	65
§ 12. Потери в волноводах	71
Глава IV. Медленные волиы	77
§ 13. Диэлектрический стержень	77
§ 14. Металлический цилиндр	86
§ 15. Гофра	93
§ 16. Решетка, спираль	98
Глава V. Сферические волиы	104
§ 17. Элементарный электрический диполь в пустоте	104
§ 18. Излучение системы токов в пустоте	107
§ 19. Основы теории антенн	112
§ 20. Лемма Лоренца. Теоремы взаимности	117
Глава VI. Граничные задачи	123
§ 21. Магнитные токи	123
§ 22. Поле на отверстии	128
§ 23. Возбуждение волноводов	131

Глава VII. Объемные резонаторы	137
§ 24. Резонаторы простейшего типа	137
§ 25. Общая теория резонаторов. Возбуждение	145
Глава VIII. Квазиоптические линии и резонаторы	153
§ 26. Открытые линзовые линии	153
§ 27. Собственные волны линзовой линии	163
§ 28. Зеркальные линии	173
§ 29. Открытые резонаторы	181
§ 30. Методы решения задач квазиоптики	187
Глава IX. Интегрирование в плоскости комплексного переменного в задачах дифракции	197
§ 31. Возбуждение круглого волновода элементарным диполем, расположенным на его оси	197
§ 32. Возбуждение диэлектрического цилиндра элементарным диполем, расположенным на его оси	210
§ 33. Поле диполя, расположенного вблизи плоской границы раздела двух сред	222
Литература	238
Предметный указатель	239

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие техники дециметровых, сантиметровых и миллиметровых электромагнитных волн поставило множество задач по теоретическому определению электромагнитных полей, и за последние десятилетия были развиты многочисленные методы решения этих задач. Высокочастотные электромагнитные процессы всегда носят волновой характер; основным объектом теории являются электромагнитные волны. В предлагаемой книге высокочастотная электродинамика рассматривается как раздел математической физики. Книга представляет собой введение в теоретические методы исследования электромагнитных волн.

Полное изложение всего аппарата современной высокочастотной электродинамики возможно только в рамках многолетнего курса. Эта книга содержит изложение тех методов, которые либо чаще всего употребляются в современной литературе, либо представляются автору наиболее перспективными. Многие интересные, но сложные методы в ней не рассматриваются. Обсуждается главным образом не расчетная сторона различных методов, а их основная идея, подчеркивается взаимосвязь этих идей. Книга должна ввести читателя в математический аппарат большей части публикуемой в настоящее время литературы по высокочастотной электродинамике. Этим определяется и выбор материала, и характер изложения.

В конце приведен список литературы по общим вопросам высокочастотной электродинамики. Дано также несколько подстрочных ссылок на литературу. Подробная библиография

журнальных статей очень быстро устаревает. Литературу по любому вопросу, затронутому в книге, можно найти, просмотрев последний годовой комплект нескольких ведущих радиофизических журналов («Радиотехника и электроника», «Известия вузов», серия «Радиофизика», РИЭЕЕ и др.).

Книга составлена на основе лекций, которые автор читал в МФТИ и в других вузах. Ее содержание соответствует курсу «Электродинамика СВЧ», как он читается в МФТИ последние несколько лет.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 1. Уравнения Максвелла

1. Основой электродинамики сверхвысоких частот являются *уравнения Максвелла*:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{S} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathfrak{j} + \mathfrak{j}^{\text{ст}}), \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad (1.16)$$

связывающие между собой пространственные и временные производные электрического поля $\mathfrak{E}$, магнитного поля $\mathfrak{S}$, электрической индукции $\mathfrak{D}$, магнитной индукции $\mathfrak{B}$ и плотности токов $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{j}^{\text{ст}}$. Уравнения Максвелла — это система шести дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Большая часть материала книги — это исследование интегрируемых случаев этой системы.

Мы применяем гауссову систему единиц: в уравнениях участвует коэффициент $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, скорость света в пустоте. В этой системе все четыре величины $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{B}$ имеют одну и ту же размерность, их отношения безразмерны. В подавляющем числе задач и расчетов участвуют именно эти отношения. Применение любой другой системы единиц обычно сопровождается усложнением формул.

Материальные уравнения имеют вид

$$\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}, \quad (1.2a)$$

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{S}, \quad (1.26)$$

$$\mathfrak{j} = \sigma \mathfrak{E}. \quad (1.2в)$$

Диэлектрическая проницаемость ϵ и магнитная проницаемость μ безразмерны; в пустоте они равны единице. Проводимость σ , согласно (1.1a) и (1.2в) имеет размерность сек^{-1} ; в пустоте $\sigma = 0$.

Существуют среды, в которых материальные уравнения носят более сложный характер, а индукции зависят не только от полей, но и от их пространственных и временных производных. Такая ситуация существует, например, в средах с так называемой пространственной дисперсией*). Для этих сред многие электродинамические вопросы излагаются иначе, чем при выполнении уравнений (1.2). Мы будем считать, что имеют место уравнения (1.2).

В большинстве сред ϵ , μ и σ — скалярные величины; такие среды называются *изотропными*. Однако в сверхвысоко-частотной технике широкое применение получили также специальные материалы, в которых магнитные свойства различны в различных направлениях. Формально такие *анизотропные* материалы — наибольшее значение из них приобрели ферриты — тоже описываются уравнениями (1.1) и (1.2), но в (1.2б) следует при этом под μ понимать не скаляр, а тензор**). Встречаются также материалы, в которых тензорами являются ϵ или σ . Под $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ в (1.1а) понимаются заданные сторонние токи; например, при определении поля вибратора $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ — плотность тока в нем. Однако выделение $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ часто представляет собой неоднозначную процедуру, зависящую от характера поставленной задачи. Поле, создаваемое вибратором, можно также искать, задавая не ток в нем, а поле, возбуждающее этот ток — тогда ток в вибраторе войдет в уравнения не как $\mathbf{j}^{\text{ст}}$, а как $\mathbf{j}$, связанное с $\mathbf{E}$ вблизи вибратора соотношением (1.2в).

Мы не вводим явно в уравнения плотность заряда ρ , которая в электростатике является основной величиной. В теории переменных полей можно считать ρ сокращенной записью для выражения $\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}$, а уравнение непрерывности $\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div} (\mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{ст}})$ рассматривать как математическое следствие уравнения (1.1а). Для того чтобы его получить, надо к (1.1а) применить операцию div и учесть, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$. Точно так же для полей, зависящих от времени, уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

является следствием (1.1б).

*) В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, Изд-во «Наука», 1965.

**) А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, 1960.

2. Если ϵ , μ и σ — непрерывные функции координат, то это же имеет место и для полей, иначе в точках разрыва, согласно (1.1), поля должны были бы обращаться в бесконечность или мгновенно меняться. Однако разумной идеализацией является понятие *границы раздела* двух сред, т. е. поверхности, на которой ϵ , μ или σ меняются скачком. Вообще говоря, на такой поверхности терпят разрыв также и поля. Из уравнений (1.1), записанных в интегральной форме, следует, что касательные к поверхности раздела (тангенциальные) компоненты полей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ должны оставаться непрерывными. Непрерывной должна быть также перпендикулярная к поверхности раздела (нормальная) компонента вектора $\mathcal{B}$. Это следует из формулы (1.3), записанной в интегральной форме. Поэтому, если при решении какой-либо задачи обеспечена непрерывность тангенциальных компонент $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ на границе раздела ($\mathcal{E}_t$ и $\mathcal{H}_t$), а также выполняются уравнения (1.1) по обе стороны границы раздела, то непрерывной окажется и $\mathcal{B}_N$.

Правило — $\mathcal{E}_t$ непрерывна на границе раздела — выполняется всегда. Из такого же правила для $\mathcal{H}_t$ есть одно важное исключение. Оно связано с понятием идеального проводника, т. е. тела, в котором поля и токи равны нулю. Формально такое тело описывается уравнениями (1.1) и (1.2), если положить $\sigma \rightarrow \infty$. Условия на границе идеального проводника получаются из рассмотрения двух предельных переходов — к разрывному распределению параметров среды и к $\sigma \rightarrow \infty$. Компонента $\mathcal{E}_t$ непрерывна, а так как внутри проводника $\mathcal{E} = 0$, то на поверхности

$$\mathcal{E}_t = 0. \quad (1.4)$$

Одновременно и $\mathcal{B}_N = 0$. Непрерывность $\mathcal{H}_t$ нарушается потому, что плотность тока $\mathbf{j}$ в (1.1а) становится бесконечной. Возникающие при этом условия мы рассмотрим при изучении поля на границе проводника с очень большим значением σ (теория скин-эффекта).

Напомним, наконец, выражения для потока и плотности энергии. Вектор Пойнтинга

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathcal{E} \mathcal{H}] \quad (1.5)$$

дает плотность потока электромагнитной энергии, т. е. количество энергии, протекающей в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к $\mathbf{S}$. Объемные плотности электромагнитной энергии равны

$$\omega_E = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2 \quad \text{и} \quad \omega_H = \frac{\mu}{8\pi} \mathbf{H}^2. \quad (1.6)$$

§ 2. Комплексные амплитуды

1. Поля и токи зависят от координат (x, y, z) и времени t , т. е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$, и т. д. В теории волновых полей, которой мы будем заниматься, наибольший интерес представляет специальный случай зависимости от времени, так называемая *гармоническая зависимость*, при которой

$$\mathbf{E}_x(x, y, z, t) = \mathbf{E}_x(x, y, z) \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{H}_x(x, y, z, t) = \mathbf{H}_x(x, y, z) \cos(\omega t + \beta); \quad (2.1b)$$

аналогичным образом (с другими значениями углов вместо α и β) записываются остальные компоненты электрического и магнитного полей и все компоненты $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$. Интерес именно к такой зависимости связан с тремя факторами. Во-первых, большинство излучающих устройств создает поля, зависимость которых от t близка к гармонической, что в свою очередь определяется свойствами колебательных контуров, применяемых в радиотехнике. Во-вторых, почти любой процесс, с произвольной зависимостью от времени, может быть представлен в виде интеграла или ряда Фурье, т. е. как наложение гармонических колебаний. В-третьих, существует удобный вспомогательный *математический прием*, позволяющий при анализе гармонических колебаний исключить из уравнений время и тем существенно их упростить.

Изложим этот прием, состоящий во введении так называемых комплексных амплитуд. Запишем величину $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ (2.1a) в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} [\mathbf{E}(x, y, z) e^{i\omega t}], \quad (2.2a)$$

т. е. введем величину $\mathbf{E}(x, y, z)$, не зависящую от времени, таким образом, чтобы было справедливо уравнение (2.2a), являющееся определением $\mathbf{E}$. Согласно (2.1a) и (2.2a)

$$\mathbf{E}_x(x, y, z) = \mathbf{E}_x(x, y, z) e^{i\alpha}, \quad (2.3a)$$

аналогичная формула справедлива и для E_y , E_z . Величину E с компонентами E_x , E_y , E_z называют *комплексной амплитудой*. Она является комплексным вектором, и его компоненты имеют, вообще говоря, разные фазы. Найдя E в результате решения какой-либо задачи, для получения, например, x -й компоненты поля надо умножить E_x на $e^{i\omega t}$ и взять вещественную часть произведения, и т. д.

Таким же образом любую величину, зависящую от времени по гармоническому закону, можно представить как вещественную часть произведения комплексной амплитуды на $e^{i\omega t}$. Например,

$$\mathfrak{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} [H(x, y, z) e^{i\omega t}], \quad (2.26)$$

и компонента комплексной амплитуды $H_x(x, y, z)$ выражается через компоненту амплитуды поля $\mathfrak{E}_x(x, y, z)$ по формуле

$$H_x(x, y, z) = \mathfrak{E}_x(x, y, z) e^{i\beta}. \quad (2.36)$$

Точно так же

$$\mathfrak{B} = \operatorname{Re} [B e^{i\omega t}], \quad \mathfrak{D} = \operatorname{Re} [D e^{i\omega t}], \quad \mathfrak{I} = \operatorname{Re} [j e^{i\omega t}]. \quad (2.2в)$$

Фаза комплексной амплитуды какой-либо величины равна начальной фазе (α или β) колебания этой величины. В конкретных задачах обычно существенна не сама фаза, а разность фаз двух величин. Эта разность фаз, очевидно, не зависит от начала отсчета времени; она характеризует взаимное смещение во времени двух колебательных процессов. Для синфазных колебаний комплексные амплитуды обеих величин имеют одинаковую фазу (например, обе вещественны). Если $E_x(x, y, z)$ вещественно, а $H_x(x, y, z)$ чисто мнимо, причем $H_x = i |H_x|$, то согласно (2.3) магнитное поле опережает электрическое на четверть периода, и т. д.

2. Любая *линейная связь* между полями приводит, по очень простой схеме, к линейной связи между комплексными амплитудами. Действительно, пусть, например,

$$\hat{L} [\mathfrak{E}(x, y, z, t), \mathfrak{B}(x, y, z, t)] = 0, \quad (2.4)$$

где $\hat{L}$ — какой-то линейный оператор. Подставляя в (2.4) выражения (2.2) и переставляя знак двух линейных операций $\hat{L}$ и Re , получим

$$\operatorname{Re} \hat{L} [E(x, y, z) e^{i\omega t}, H(x, y, z) e^{i\omega t}] = 0. \quad (2.5)$$

Произведя операции дифференцирования и интегрирования по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega, \quad \int dt = \frac{1}{i\omega}, \quad (2.6)$$

можно затем сократить $e^{i\omega t}$. Таким образом, любое линейное соотношение (2.4) между полями приводит к линейному соотношению

$$\hat{L}[E(x, y, z), H(x, y, z)] = 0 \quad (2.7)$$

между комплексными амплитудами. В $\hat{L}$ следует при этом производить замену (2.6) и, в отличие от (2.4), (2.7) уже не содержит времени.

Таким образом, все преобразования, содержащие линейные операции, можно производить непосредственно с комплексными амплитудами. Почти во всем дальнейшем изложении мы и будем это делать. При этом подразумевается, что на любом этапе можно перейти к полям по схеме (2.2).

3. Можно еще несколько иначе, менее формально, подойти к введению комплексных амплитуд. Колеблющиеся по гармоническому закону величины содержат два слагаемых, пропорциональных $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ (2.1). При дифференцировании и интегрировании по времени эти слагаемые оказываются связанными друг с другом, поэтому нельзя ограничиться одним из них и положить, что, например, все величины пропорциональны $\cos \omega t$. Предполагая, что колебания происходят по гармоническому закону, мы уменьшаем, разумеется, на единицу число независимых переменных, однако для того, чтобы исключить время из уравнений, следовало бы вместо функции $\mathcal{E}(x, y, z, t)$ ввести две функции, $\mathcal{E}^c(x, y, z)$ и $\mathcal{E}^s(x, y, z)$ — коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ в (2.1):

$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \mathcal{E}^c(x, y, z) \cos \omega t + \mathcal{E}^s(x, y, z) \sin \omega t. \quad (2.1в)$$

Комплексная амплитуда $E(x, y, z)$ согласно (2.2а) равна $\mathcal{E}^c - i\mathcal{E}^s$, так что, оперируя с E , мы сохраняем требуемую и наиболее общую зависимость от t (2.1). Однако комплексность E не вызывает почти никаких усложнений во всех формальных преобразованиях. Эти преобразования значительно проще, чем при представлении всех величин в форме (2.1в) с последующим приравниванием во всех равенствах членов, содержащих $\cos \omega t$, и членов, содержащих $\sin \omega t$.

4. *Нелинейные* операций нельзя, вообще говоря, производить непосредственно с комплексными амплитудами. Например, произведение двух величин $\mathfrak{E}_x(x, y, z, t)$ и $\mathfrak{H}_x(x, y, z, t)$ нельзя даже представить в виде (2.2), так как оно иначе зависит от времени. Есть, однако, одно исключение, относящееся притом к наиболее важной в приложении нелинейной величине. Возьмем *среднее по периоду от произведения двух гармонических величин*, например, от произведения полей $\mathfrak{E}_x(x, y, z, t)$ и $\mathfrak{H}_x(x, y, z, t)$ (2.1). Это произведение равно

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x(x, y, z, t) \mathfrak{H}_x(x, y, z, t) = \\ = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_x(x, y, z) \mathfrak{H}_x(x, y, z) \{ \cos(\alpha - \beta) + \\ + \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оно состоит из двух слагаемых — постоянного (не зависящего от t) и колеблющегося с удвоенной частотой. Среднее по времени (по периоду) от второго слагаемого равно нулю, и

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}_x(x, y, z, t) \mathfrak{H}_x(x, y, z, t)} = \\ = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_x(x, y, z) \mathfrak{H}_x(x, y, z) \cos(\alpha - \beta), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где черта означает усреднение. Стоящую справа величину можно, согласно (2.3), выразить через комплексные амплитуды:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}_x(x, y, z, t) \mathfrak{H}_x(x, y, z, t)} = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ E_x(x, y, z) H_x^*(x, y, z) \}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где звездочка означает взятие комплексно сопряженной величины.

Таким образом, зная комплексные амплитуды двух колеблющихся по гармоническому закону (с одной и той же частотой) величин, можно непосредственно вычислить среднее от произведения этих величин. Для нахождения любой другой нелинейной комбинации надо сначала перейти по (2.2) от комплексных амплитуд к физическим величинам.

Формула (2.10) относится к произведению любых скалярных величин; она очевидным образом обобщается и на произведение (скалярное или векторное) двух векторов. Например,

среднее значение вектора Пойнтинга равно

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]. \quad (2.11)$$

Среднее значение плотности энергии в пустоте согласно (1.6) есть (ср. (2.32))

$$\overline{\mathcal{W}}_E = \frac{1}{16\pi} |\mathbf{E}|^2; \quad \overline{\mathcal{W}}_H = \frac{1}{16\pi} |\mathbf{H}|^2, \quad (2.12)$$

где, например, $|\mathbf{E}|^2$ означает $E_x E_x^* + E_y E_y^* + E_z E_z^*$.

Б. Уравнения Максвелла, записанные для комплексных амплитуд, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= ik\mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{ст}}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -ik\mathbf{B}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Здесь

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (2.14)$$

— так называемое *волновое число*; оно имеет размерность см^{-1} . Мы будем обычно характеризовать частоту не величиной ω , а величиной k , пропорциональной ω .

Между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ существует такая же связь, как в (1.2). Подставим эти соотношения в (2.13). Получим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= ik \left(\tilde{\epsilon} - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -ik\mu\mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Множитель, стоящий в скобках, обозначим буквой ϵ :

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (2.16)$$

Введение этой величины (она называется *комплексной диэлектрической проницаемостью*) позволяет явно не выписывать в уравнениях Максвелла токи проводимости. Проницаемость ϵ — комплексная величина:

$$\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''. \quad (2.17a)$$

Ее вещественная часть $\epsilon' = \tilde{\epsilon}$ обязана токам смещения, мнимая часть $\epsilon'' = 4\pi\sigma / \omega$ — токам проводимости. Относительное значение обоих этих слагаемых зависит от проводимости и ча-

стоты. Чем выше проводимость и ниже частота, тем больше ϵ'' , т. е. тем большую роль играют токи проводимости.

Уравнения Максвелла теперь примут вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = ik\epsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.18a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -ik\mu \mathbf{H}, \quad (2.18б)$$

причем мы убрали значок «ст» у сторонних токов.

Комплексность величины ϵ может оказаться связанной не только с токами проводимости, но и с какими-либо другими физическими причинами. Как мы сейчас увидим, величине ϵ'' пропорциональны потери энергии поля в веществе, и все явления, приводящие к электрическим потерям (т. е. к потерям, пропорциональным квадрату электрического поля), могут быть формально описаны уравнениями (2.18), если включить соответствующие слагаемые в ϵ'' . Точно так же, хотя не существует магнитной проводимости, но во многих средах имеют место потери энергии, пропорциональные квадрату магнитного поля, и для того, чтобы эти среды также описывались уравнениями (2.18), следует и μ считать комплексной величиной

$$\mu = \mu' - i\mu''. \quad (2.17б)$$

6. Найдем выражения для *средних потерь энергии* в среде. Простейшее выражение для электрических потерь в единице времени и в единице объема есть $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, а среднее по периоду равно $p_E = \frac{1}{2} \sigma |\mathbf{E}|^2$. Если выразить σ через ϵ'' ($\sigma = \omega \epsilon'' / 4\pi$), то

$$p_E = \frac{\omega}{8\pi} \epsilon'' |\mathbf{E}|^2. \quad (2.19a)$$

Покажем, что это — общее выражение для p_E , справедливое при любом значении ϵ'' , не обязательно связанном с токами проводимости. Одновременно из тех же формальных преобразований мы найдем и выражение для магнитных потерь, т. е. потерь, пропорциональных $|\mathbf{H}|^2$.

Образует для этого выражение $\frac{c}{8\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}^*]$, имея в виду, что согласно (2.11) вещественная часть этой величины дает дивергенцию потока энергии, а эта дивергенция равна в

отсутствии сторонних токов потерям энергии в веществе. Согласно известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{div} [AB] = B \operatorname{rot} A - A \operatorname{rot} B, \quad (2.20)$$

$\operatorname{div} [EH^*]$ содержит $\operatorname{rot} E$ и $\operatorname{rot} H^*$. Подставляя $\operatorname{rot} E$ из (2.18б) и $\operatorname{rot} H^*$ из уравнения $\operatorname{rot} H^* = -ik\epsilon^* E^*$ (при $j=0$), комплексно сопряженного с (2.18а), получим

$$\operatorname{div} \frac{c}{8\pi} [EH^*] = \frac{i\omega\epsilon^*}{8\pi} |E|^2 - \frac{i\omega\mu}{8\pi} |H|^2. \quad (2.21)$$

Взяв вещественные части, получим слева $\operatorname{div} \overline{\mathfrak{S}}$; справа будут стоять (по энергетическому смыслу вектора $\mathfrak{S}$) суммарные потери, т. е. $-p_E - p_H$. Таким образом и получается в общем случае выражение (2.19а) для p_E и аналогичное выражение для

$$p_H = \frac{\omega\mu''}{8\pi} |H|^2. \quad (2.19б)$$

Вычисление потерь по формулам (2.19) обычно значительно удобнее, чем по формуле

$$p_E + p_H = -\operatorname{div} \overline{\mathfrak{S}}, \quad (2.22)$$

из которой формулы (2.19) и были получены. Существование формул (2.19) иногда позволяет, как мы уже отмечали, описывать, вводя ϵ'' или μ'' , такие свойства материала, которые в основном характеризуются вызываемыми ими потерями.

7. Формулы (2.19) относятся лишь к таким условиям, когда не происходит изменения среднего поля во времени, т. е. к строго монохроматическим процессам. Например, в поле бегущей волны поглощение приводит к ослаблению поля только в пространстве, а не во времени, и (2.19), (2.22) позволяют вычислить уменьшение амплитуды вдоль волны. Значительно более сложный вид имеют энергетические соотношения в том случае, когда средние поля меняются во времени, т. е. производные $\frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathfrak{S}}$ и $\frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathfrak{S}}$ отличны от нуля. Анализ показывает, что характеризуя среду только величинами ϵ и μ , нельзя разделить тепловые потери и изменение средней энергии; такое разделение становится однозначным только при введении каких-либо модельных схем среды. Однознач-

ным понятие средней плотности энергии будет только в среде, в которой нет потерь (2.19); тогда $\overline{w}_E$ и $\overline{w}_H$ можно определять уравнением

$$\operatorname{div} \overline{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overline{w}_E + \overline{w}_H). \quad (2.23)$$

Для того чтобы вычислить, например, $\overline{w}_E$, надо рассматривать не строго монохроматический процесс, так как при (2.1) и $\epsilon'' = 0$, $\mu'' = 0$ обе стороны в (2.23) равны нулю. Продолжаем коротко это вычисление; в нем окажется существенным явление дисперсии, т. е. зависимость ϵ от ω^* .

Из (1.1) при отсутствии токов получается известное выражение для дивергенции вектора Пойнтинга (1.5)

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathcal{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{E} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \right). \quad (2.24)$$

Задача состоит, таким образом, в вычислении величины $\overline{\mathcal{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}}$ и аналогичной величины для магнитного поля. Мы покажем сейчас, что для квазимонохроматического колебания эта величина пропорциональна временной производной от $\overline{\mathcal{E}^2}$.

Подставим $\mathcal{E}(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$\mathcal{E}(t) = \int \mathcal{E}(\gamma) \cos(\omega t + \gamma t) d\gamma, \quad (2.25)$$

где мы для простоты не выписываем слагаемое с синусом; близость колебания к гармоническому проявляется в том, что $\mathcal{E}(\gamma)$ отлично от нуля только при $|\gamma| \ll \omega$. Для $\mathfrak{D}(t)$ будет

$$\mathfrak{D}(t) = \int \mathcal{E}(\delta) \epsilon(\omega + \delta) \cos(\omega t + \delta t) d\delta, \quad (2.26)$$

и здесь явно подчеркнуто, что ϵ различно для различных частот. Выражение $\mathcal{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ представится в виде двойного интеграла, и при взятии среднего по высокой частоте ω мы будем считать γt и δt постоянными, т. е. положим

$$\overline{\cos(\omega t + \gamma t) \cdot \sin(\omega t + \delta t)} = -\frac{1}{2} \sin(\gamma - \delta) t, \quad (2.27)$$

*) См. также Л. Ландау и Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957, или В. Гинзбург, Радиофизика 4, № 1, 1964, или [2], где доказательство приведено для частного случая изменения среднего поля.

что и является, строго говоря, определением квазимонохроматического колебания. При (2.27)

$$\overline{\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}} = \frac{1}{2} \int \int \mathfrak{E}(\gamma) \mathfrak{E}(\delta) (\omega + \delta) \varepsilon(\omega + \delta) \sin(\gamma - \delta) t d\gamma d\delta. \quad (2.28a)$$

Если бы множитель $(\omega + \delta) \varepsilon(\omega + \delta)$ не зависел бы от δ , то этот интеграл был бы равен нулю. Легко показать, например, разлагая $(\omega + \delta) \varepsilon(\omega + \delta)$ в ряд по δ , что интеграл (2.28a) пропорционален $\frac{\partial [\omega \varepsilon(\omega)]}{\partial \omega}$. Взяв полусумму интеграла (2.28a) и выражения, получающегося при перестановке δ и γ , получим

$$\overline{\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}} = -\frac{1}{4} \frac{\partial [\varepsilon(\omega) \cdot \omega]}{\partial \omega} \int \int \mathfrak{E}(\gamma) \mathfrak{E}(\delta) (\gamma - \delta) \sin(\gamma - \delta) t d\gamma d\delta. \quad (2.28b)$$

Эту величину надо сравнить с $\overline{\mathfrak{E}^2}$. При образовании $\overline{\mathfrak{E}^2}$ по (2.25) мы произведем в двойном интеграле для $\mathfrak{E}^2$ усреднение по типу (2.27), т. е. считая величины γt и δt постоянными. Простые выкладки дают

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{1}{2} \int \int \mathfrak{E}(\gamma) \mathfrak{E}(\delta) \cos(\gamma - \delta) t d\gamma d\delta. \quad (2.29)$$

Сопоставляя это с (2.28b), получим искомое соотношение

$$\overline{\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial [\varepsilon(\omega) \cdot \omega]}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathfrak{E}^2}. \quad (2.30)$$

Из формул (2.23), (2.24) и (2.30) мы найдем искомое выражение для $\overline{w}_E$:

$$\overline{w}_E = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial (\varepsilon \omega)}{\partial \omega} \overline{\mathfrak{E}^2}. \quad (2.31)$$

Здесь мы можем перейти к комплексной записи, так как все особенности, связанные с принципиальной немонахроматичностью процесса, для которого только и имеет смысл понятие $\overline{w}_E$, уже учтены в выводе. Таким образом, если $\varepsilon'' = 0$, $\mu'' = 0$, то $\overline{w}_E$ и $\overline{w}_H$, определенные равенством (2.23), равны

$$\overline{w}_E = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial (\omega \varepsilon)}{\partial \omega} |E|^2, \quad \overline{w}_H = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial (\omega \mu)}{\partial \omega} |H|^2, \quad (2.32)$$

где вторая формула написана по аналогии.

Для пустоты вновь получаются формулы (2.12), прямой вывод которых из (1.6), строго говоря, не имеет физического смысла. Если в данной области частот дисперсии нет, то

$$\omega_E = \frac{1}{16\pi} \epsilon |E|^2, \quad \omega_H = \frac{1}{16\pi} \mu |H|^2, \quad (2.33)$$

где ϵ и μ — вещественные числа.

Сделаем, наконец, замечание по поводу знака, с которым во все формулы входит мнимая единица i . Комплексность введена в формализм теории определениями (2.2). Если в (2.2) взять временную зависимость в виде $e^{-i\omega t}$, то во всех содержащих i формулах изменится знак перед i . Это нужно иметь в виду при чтении всей литературы по высокочастотной электродинамике, так как не существует единого условия о выборе знака во временной зависимости.

§ 3. Волновое уравнение

1. Уравнения Максвелла (2.18) содержат шесть функций координат — шесть компонент полей E и H . Решение этих уравнений почти всегда требует сведения их к другим уравнениям, содержащим меньшее число неизвестных функций. Для этого, вообще говоря, приходится вводить какие-либо потенциалы, т. е. вспомогательные функции, через которые выражаются E и H . Однако в некоторых случаях целесообразно просто исключить из (2.18) одно из полей и перейти к уравнению *второго порядка*, содержащему либо E , либо H .

Проще всего это сделать для однородной среды, в которой $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Для того чтобы исключить из (2.18) вектор E , применим к (2.18a) операцию rot . Положим еще для сокращения записи, что нас интересует область, в которой нет сторонних токов. Для любого вектора A

$$\text{rot rot } A = \text{grad div } A - \Delta A, \quad (3.1)$$

где, по определению, ΔA есть вектор, декартовы компоненты которого равны ΔA_x , ΔA_y , ΔA_z , а Δ — трехмерный оператор Лапласа. Так как при $\epsilon = \text{const}$ и $j = 0$ $\text{div } E = 0$, то, исключая $\text{rot } E$ из (2.18), получим

$$\Delta H + k^2 \epsilon \mu H = 0. \quad (3.2a)$$

Таким же образом получим, исключая из (2.18) вектор $\mathbf{H}$, уравнение второго порядка для $\mathbf{E}$:

$$\Delta \mathbf{E} - k^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = 0. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26), как и (3.2a), записано для декартовых компонент.

Если в той области пространства, для которой записаны уравнения (3.2), есть отличные от нуля сторонние токи, то справа в (3.2) будут соответствующие слагаемые, содержащие производные от токов. Мы их не выписываем, так как неоднородные волновые уравнения для полей обычно не употребляются, а для определения поля, созданного заданными токами, либо исходят непосредственно из (2.18), либо пишут более простые волновые уравнения для потенциалов.

2. Если среда не однородная, но, например, $\mu = \text{const}$ (а ϵ различно в различных точках), то по-прежнему нетрудно исключить из уравнений Максвелла (2.18) поле $\mathbf{H}$ и получить волновое уравнение для $\mathbf{E}$ в форме

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - k^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = 0. \quad (3.3a)$$

Однако придать ему форму (3.26) нельзя, так как из $\text{div } \epsilon \mathbf{E} = 0$ в этом случае, вообще говоря, уже не следует $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Таким же образом запишется волновое уравнение для $\mathbf{H}$ при $\epsilon = \text{const}$.

Волновое уравнение, но значительно более сложное, можно получить и в общем случае, т. е. когда и ϵ , и μ зависят от координат. Разделив, например, (2.18б) на μ и взяв rot , получим

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E} - k^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = 0 \quad (3.36)$$

и аналогичное уравнение для $\mathbf{H}$. Последними двумя уравнениями пользуются очень редко.

При использовании волновых уравнений, например (3.2), надо иметь в виду, что решения уравнения для $\mathbf{E}$ и уравнения для $\mathbf{H}$ не независимы, а связаны между собой уравнениями (2.18). Другими словами, (3.2) не эквивалентно (2.18). Это видно хотя бы из того, что (3.2) может иметь решение $\mathbf{H} \equiv 0$, $\mathbf{E} \neq 0$, а (2.18) такого решения не имеет. Практически приходится пользоваться одним из волновых уравнений, например, уравнением (3.26) для $\mathbf{E}$, а $\mathbf{H}$ определять затем по уравнению (2.18б).

3. Волновое уравнение (3.2) встречается еще во многих главах математической физики. Отметим здесь, что оно описывает также распространение *акустических волн*. Характеристики акустического поля являются давление p и скорость $\mathbf{v}$. Комплексные амплитуды этих величин связаны уравнениями

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{-i\omega}{\rho c^2} p, \quad (3.4a)$$

$$\operatorname{grad} p = -i\omega \rho \mathbf{v}, \quad (3.4b)$$

имеющими тот же характер, что и уравнения (2.18). В отличие от (2.18), одна из величин, входящая в (3.4), — давление, является скаляром. В уравнениях (3.4) c — скорость звука в данной среде, ρ — плотность. Если плотность не зависит от координат, то из (3.4) легко исключить скорость $\mathbf{v}$ и получить для давления волновое уравнение

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (3.5)$$

Найдя из (3.5) p , легко по (3.4b) найти скорость $\mathbf{v}$.

Существует очень много явлений, в которых векторный характер электромагнитного поля практически не проявляется. Часто эти явления для акустических и электромагнитных волн протекают одинаково. Иногда основные свойства таких процессов удобно анализировать на примере акустических колебаний, для которых математический аппарат сохраняет и передает почти все особенности электромагнитных колебаний, будучи при этом значительно проще, чем аппарат, описывающий векторные поля.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 4. Плоские волны в однородной безграничной среде

1. Простейшее решение волновых уравнений при $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ мы получим, полагая, что поле зависит только от одной координаты; пусть это будет координата z . Предположим, далее, что существует решение, при котором во всем пространстве отлична от нуля только одна компонента поля E , перпендикулярная к оси z ; назовем ее E_x . Оба эти предположения окажутся законными, точнее, действительно существует решение уравнений (2.18), для которого

$$E_y = 0, \quad E_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (4.1a)$$

Тогда волновое уравнение примет вид

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 \varepsilon \mu E_x = 0. \quad (4.2)$$

Решение его мы запишем в виде

$$E_x = A e^{-ik\sqrt{\varepsilon\mu} z} + B e^{ik\sqrt{\varepsilon\mu} z}. \quad (4.3a)$$

Этот вид окажется более удобным, чем запись, содержащая тригонометрические функции.

При условиях (4.1a) два из шести уравнений Максвелла дают

$$H_x = 0, \quad H_z = 0, \quad (4.1b)$$

два сводятся к тождеству, а два приводят к уравнениям для $H_y(z)$:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = ik\varepsilon E_x, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -ik\mu H_y. \quad (4.4b)$$

Из них можно было бы исключить E_x и получить для H_y такое же уравнение (4.2). Однако целесообразно просто из (4.4б) найти H_y , выразив эту величину через те же произвольные постоянные A и B :

$$H_y = A \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{-ik\sqrt{\epsilon\mu}z} - B \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{ik\sqrt{\epsilon\mu}z}. \quad (4.3б)$$

Разумеется, это одновременно есть и решение волнового уравнения для H_y .

Таким образом, мы нашли решение по следующей схеме: сделав какие-то предположения (4.1а) о структуре поля, написали общее решение (4.3а) волнового уравнения, подставили это решение в уравнения Максвелла (2.18) и убедились, что существует решение для всех шести компонент полей. По существу, именно эта схема применяется в большинстве задач электродинамики, хотя, разумеется, ее выполнение не всегда столь просто.

2. Решение (4.3) представляет собой наложение двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси z в направлении возрастающей (первое слагаемое) и убывающей (второе слагаемое) координаты z . Для того чтобы в этом убедиться, умножим (4.3) на множитель $e^{i\omega t}$. Первое слагаемое тогда будет функцией от комбинации

$$-k\sqrt{\epsilon\mu}z + \omega t. \quad (4.5а)$$

Если эта комбинация постоянна, то все первое слагаемое — постоянно; следовательно, оно представляет собой процесс, движущийся так, что при перемещении точки, в которой измеряется поле, на dz за время dt поле не меняется, если

$$-k\sqrt{\epsilon\mu}dz + \omega dt = 0. \quad (4.5б)$$

Иными словами, это — волна, скорость которой $v = dz/dt$ равна

$$v = \frac{\omega}{k\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \text{или} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4.6а)$$

Второе слагаемое в (4.3) описывает волну, с той же скоростью движущуюся в обратном направлении.

Фазовая скорость (4.6а) представляет собой, по существу, чисто геометрическое понятие, зависящее, в частности,

от того, в каком направлении она отсчитывается. Предположим, что точка движется не в направлении нормали к волновому фронту, т. е. не в направлении оси z , а под некоторым углом β к этому направлению. Тогда расстояние, на которое она должна будет переместиться за время dt , чтобы величина (4.5а) сохраняла в ней фиксированное значение, будет в $1/\cos \beta$ раз больше, чем по формуле (4.6а) (рис. 1), и фазовая скорость будет равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \frac{1}{\cos \beta}. \quad (4.6б)$$

3. Рассмотрим несколько подробнее плоскую волну

$$E_x = A e^{-ik\sqrt{\epsilon\mu} z}, \quad H_y = A \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{-ik\sqrt{\epsilon\mu} z}. \quad (4.3в)$$

Это — поперечная волна, так как компоненты поля в направлении ее распространения, т. е. E_z и H_z , равны нулю. Отношение электрического поля к магнитному во всей волне одно и то же

$$E_x = \omega H_y \quad (4.7а)$$

и равно

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (4.7б)$$

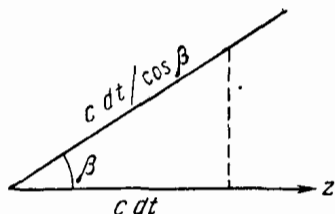


Рис. 1. Фазовая скорость в данном направлении.

Это — характеристика среды; величина ω называется *волновым сопротивлением среды*. В принятой нами системе единиц ω — безразмерно. В пустоте ($\mu = 1$, $\epsilon = 1$) и вообще при $\mu = \epsilon$ $\omega = 1$. Если ϵ и μ вещественны, то E и H — синфазны.

Для вещественных ϵ и μ поля не изменяются по амплитуде вдоль оси z ; фаза полей повторяется при изменении z на величину λ , где

$$k \sqrt{\epsilon\mu} \lambda = 2\pi, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4.8а)$$

Это есть определение длины волны в однородной среде; она обратно пропорциональна частоте. В пустоте

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.8б)$$

Если ϵ или μ комплексно, то $\sqrt{\epsilon\mu}$ представляет собой комплексную величину, которую всегда можно записать в виде $\sqrt{\epsilon\mu} = (\sqrt{\epsilon\mu})' - i(\sqrt{\epsilon\mu})''$.

Длина волны такого колебания равна $2\pi/k(\sqrt{\epsilon\mu})'$, т. е.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} \sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4.8\text{в})$$

Амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону

$$|E|, |H| \sim e^{-k(\sqrt{\epsilon\mu})'' z}. \quad (4.9)$$

§ 5. Нормальное падение плоской волны на плоскую границу диэлектрика

1. Плоская волна в однородном диэлектрике (4.3в) представляет собой простейшее решение уравнений Максвелла; в то же время это наиболее простой тип электромагнитной волны.

Простейшая задача теории дифракции — теории, изучающей поля, которые возникают при падении каких-либо волн (плоских или более сложных) на какие-либо тела, состоит в следующем. Полупространство при $z > 0$ занято однородным телом с некоторыми значениями ϵ и μ ; полупространство при $z < 0$ — пустота ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$). Слева на границу раздела падает волна единичной амплитуды

$$E_x^{\text{пад}} = e^{-ikz}, \quad H_y^{\text{пад}} = e^{-ikz}. \quad (5.1\text{а})$$

Других волн, идущих к границе раздела, нет. Надо найти поле во всем пространстве.

Решение задачи начинается с того, что надо на основании физической интуиции, по аналогии с другими задачами или из каких-либо математических соображений угадать характер поля. В данном случае это тривиально — при $z < 0$ поле содержит, кроме падающей волны, отраженную волну

$$E_x = Re^{ikz}, \quad H_y = -Re^{ikz}, \quad (5.1\text{б})$$

а при $z > 0$ оно состоит из прошедшей волны

$$E_x = De^{-ik\sqrt{\epsilon\mu}z}, \quad H_y = \frac{1}{w} De^{-ik\sqrt{\epsilon\mu}z}. \quad (5.1\text{в})$$

Эти решения удовлетворяют уравнениям Максвелла и представляют собой уходящие от границы раздела волны. Затем следует убедиться в том, что решение (5.1) содержит достаточно неопределенных элементов (в данном случае два коэффициента R и D), чтобы удовлетворить *граничным условиям*. Это — обязательный элемент всякой дифракционной задачи о телах с границами раздела, т. е. с поверхностями, на которых уравнения Максвелла не выполняются. Граничные условия — непрерывность E_x и H_y (обе эти компоненты — тангенциальные к границе раздела) — приводят к двум уравнениям с двумя неизвестными,

$$1 + R = D, \quad 1 - R = \frac{1}{w} D, \quad (5.2)$$

т. е. к разрешимой системе. Следовательно, предположения (5.1б, в) были правильными; в частности, при отражении не возникает компонент поля, которых не было в падающей волне (5.1а).

2. Проанализируем решение системы (5.2):

$$R = \frac{w-1}{w+1}, \quad (5.3a)$$

$$D = \frac{2w}{w+1}. \quad (5.3б)$$

Если бы среда слева была не пустой, то в (5.3) вместо w участвовало бы отношение волновых сопротивлений обеих сред. Отметим, во-первых, что при $w=1$ $R=0$, $D=1$ — при нормальном падении волна полностью проходит в среду, у которой $\varepsilon=\mu$. Это обстоятельство лежит в основе всех работ по созданию так называемых *неотражающих покрытий*. Идеальным было бы покрытие, у которого выполнялось бы условие $w=1$, а ε и μ имели бы достаточно большие мнимые части, чтобы обеспечить затухание волны в относительно малой толщине материала.

Если $w \rightarrow 0$ или $|w| \rightarrow \infty$, то $|R| \rightarrow 1$, т. е. вся энергия полностью отражается от материала, в котором $|\varepsilon| \gg |\mu|$ или $|\varepsilon| \ll |\mu|$. Наиболее интересен случай $|\varepsilon| \gg |\mu|$, т. е. $|w| \ll 1$. При этом $|R|$ стремится к единице, точнее, $R \approx -1 + 2w + O(|w|^2)$, а $D \approx 2w + O(|w|^2)$. Следовательно, при отражении от тела с малым волновым сопротивлением магнитное поле внутри тела, вблизи его поверхности, равное

D/ω , примерно в два раза больше магнитного поля в падающей волне. Электрическое поле при этом в $1/\omega$ раз меньше магнитного. Этот последний результат, полученный для нормального падения плоской волны на плоскую границу раздела, имеет, как мы увидим в § 7, весьма общий характер.

§ 6. Переходный слой

1. В плоской волне зависимость полей от координаты z определяется множителем $\exp(-ik\sqrt{\epsilon\mu}z)$ или $\exp(ik\sqrt{\epsilon\mu}z)$. Такое решение существует только в однородной среде, в которой ϵ и μ не зависят от координат. Задача о полях в неоднородных средах, т. е. в средах, для которых $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$ и $\mu = \mu(x, y, z)$, очень сложна и не имеет общего решения. Однако для простейшей задачи — о плоской волне в среде, параметры которой зависят только от одной координаты, существует простой математический аппарат, в некоторых случаях позволяющий получить точное или приближенное явное решение.

Пусть $\epsilon = \epsilon(z)$, $\mu = \mu(z)$, и мы ищем решение, зависящее только от координаты z . Такое поле возникает при нормальном падении плоской волны на переходный слой, т. е. на слой, параметры которого являются промежуточными между $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ (среда при $z < 0$) и $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ (среда при $z > l$, l — толщина слоя). Если в падающей волне отличны от нуля только компоненты E_x и H_y и поля не зависят от x и y (5.1а), то и во всем пространстве будут только эти компоненты $E_x(z)$ и $H_y(z)$, связанные, как легко проверить, уравнениями (4.4).

Проще всего решается задача о переходном слое, представляющем собой *пластинку* с постоянными значениями $\epsilon = \epsilon_1$ и $\mu = \mu_1$. Поля внутри слоя ($0 \leq z \leq l$) имеют вид

$$\begin{aligned} E_x &= Ae^{-ik\sqrt{\epsilon_1\mu_1}z} + Be^{ik\sqrt{\epsilon_1\mu_1}z}, \\ H_y &= \frac{1}{\omega_1} Ae^{-ik\sqrt{\epsilon_1\mu_1}z} - \frac{1}{\omega_1} Be^{ik\sqrt{\epsilon_1\mu_1}z} \quad \left(\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}\right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Коэффициенты A и B находятся из четырех линейных уравнений типа (5.2), содержащих еще неизвестные коэффициенты отражения (при $z < 0$) и прохождения (при $z > l$). Эти уравнения получаются из условия непрерывности E_x и H_y на

двух границах раздела, при $z=0$ и $z=l$. Не проводя очевидных и громоздких алгебраических выкладок, отметим только один результат — коэффициент отражения будет равен нулю, если одновременно выполнены два условия

$$kl \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = \frac{\pi}{2}, \quad (6.2a)$$

$$\frac{\mu_1}{\epsilon_1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (6.2б)$$

Первое из этих равенств означает, что толщина такого *просветляющего покрытия* должна быть равна четверти длины волны в материале этого покрытия, второе — что его волновое сопротивление есть среднее геометрическое между значениями w сред, расположенных по обе стороны.

Условие (6.2a) выполняется только на какой-либо определенной частоте; покрытие обеспечивает хорошее согласование, т. е. малый коэффициент отражения, только в узкой полосе частот. Большая *широкополосность* может быть достигнута, если используются две, три и т. д. пластинки с промежуточными значениями ϵ и μ . Поле в каждой пластинке записывается в виде (6.2) с разными коэффициентами A и B . Эти коэффициенты и коэффициенты R и D определяются из системы линейных уравнений.

2. В высокочастотной технике часто возникает необходимость в *согласовании* двух сред с разными параметрами. Такое согласование обеспечивается использованием промежуточной среды, и чем более плавно меняются свойства этой среды, тем, как правило, более широкополосным оказывается согласование. Чем больше параметр kl и чем меньше перепад волновых сопротивлений, тем шире тот диапазон частот, в котором можно обеспечить эффективное согласование, т. е. можно получить $|R|$, заметно меньшее, чем по (5.3a).

В общем случае, когда $\epsilon(z)$ и $\mu(z)$ на интервале $0 < z < l$ не являются кусочно-постоянными функциями, общего решения системы (4.4) дать нельзя. Однако существует метод, позволяющий в наиболее интересном случае — для хорошо согласующей промежуточной среды — написать приближенное решение. Дадим краткое изложение этого метода, имея в виду, что сформулированная задача одновременно описывает простейшие случаи распространения радиоволн в неоднородных

естественных средах — тропосфере, ионосфере, распространение акустических волн в неоднородной водной среде и т. д.

Исключим из (4.4) магнитное поле; положим еще $\mu = 1$, хотя при $\mu = \mu(z)$ аппарат усложняется лишь незначительно. Надо найти решение уравнения

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 \epsilon(z) E = 0, \quad (6.3)$$

где у $E(z)$ опущен индекс x . Волновое уравнение оказалось таким простым (хотя ϵ и не постоянно) потому, что при выбранном нами направлении поля E выполняется условие $\text{grad } \epsilon \cdot E = 0$, и из $\text{div } \epsilon E = 0$ следует $\text{div } E = 0$.

Для некоторых простых функций $\epsilon(z)$ существует явное решение (6.3) в специальных функциях, но нас будет интересовать случай, когда можно дать хотя и *приближенное*, но *общее* решение этого уравнения, т. е. решение, содержащее функцию $\epsilon(z)$. Такое решение существует, если $\epsilon(z)$ *медленно меняется*, точнее, если относительное изменение ϵ на расстоянии порядка длины волны мало.

Простейшее решение получается, если положить

$$E(z) = \Psi(z) e^{i\varphi(z)} \quad (6.4)$$

и принять, что $\Psi(z)$ — медленно меняющаяся функция, т. е. что *масштаб* L изменения Ψ велик по сравнению с $1/k$. Подставляя (6.4) в (6.3), получим

$$\Psi'' + 2i\varphi'\Psi' + i\varphi''\Psi + [k^2\epsilon - (\varphi')^2]\Psi = 0. \quad (6.5)$$

Член Ψ'' имеет порядок $1/L^2$, а два следующих слагаемых имеют порядок k/L , если принять, что $\varphi' \sim k$, а $\varphi'' \sim k/L$ (эти предположения надо будет проверить). Последнее слагаемое имеет порядок k^2 . Приравнявая это слагаемое нулю, получим, выбирая для определенности один знак,

$$\varphi = k \int^z \sqrt{\epsilon} dz. \quad (6.6)$$

Это равенство можно рассматривать и как определение $\varphi(z)$; тогда (6.4) означает просто, что вместо искомой функции $E(z)$ введена новая функция $\Psi(z)$. При (6.6) требования, наложенные на порядок величин производных от φ , выполняются. Левая часть (6.5) состоит при этом только из трех слагаемых.

Приближенный характер расчета состоит в том, что в (6.5) отбрасывается член Ψ'' на том основании, что отношение его к двум следующим имеет малый порядок $1/kL$. Тогда для Ψ получается простое уравнение первого порядка

$$2i\varphi'\Psi' + i\varphi''\Psi = 0. \quad (6.7)$$

Это уравнение легко интегрируется, $\Psi(z) = 1/\sqrt[4]{\epsilon(z)}$. Имея в виду второй возможный знак в экспоненте, получим общий вид простейшего приближенного решения уравнения (6.3):

$$E(z) = \frac{A}{\sqrt[4]{\epsilon(z)}} e^{-ik \int^z \sqrt{\epsilon(z)} dz} + \frac{B}{\sqrt[4]{\epsilon(z)}} e^{ik \int^z \sqrt{\epsilon(z)} dz}. \quad (6.8)$$

Это — так называемое решение Венцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ), широко используемое в квантовомеханических расчетах. Оно имеет простой физический смысл, и его можно получить, если представить себе непрерывную среду, как состоящую из *большого числа слоев* с близкими значениями ϵ . Прохождение каждого слоя вызывает набег фазы, равный $k\sqrt{\epsilon}\Delta z$, где Δz — толщина слоя, откуда и получается (6.6). Амплитуда электрического поля при прохождении через границу двух слоев с параметрами ϵ и $\epsilon + \Delta\epsilon$ умножается, как легко получить из (5.3), на $1 - \frac{\Delta\epsilon}{4\epsilon}$; это с точностью до $(\Delta\epsilon)^2$ равно $\left(\frac{\epsilon + \Delta\epsilon}{\epsilon}\right)^{-1/4}$, что соответствует виду предэкспоненциального множителя в (6.8).

Решение (6.8) теряет смысл, если при каком-либо $z = z_0$ ϵ обращается в нуль, $\epsilon(z_0) = 0$ — случай, часто встречающийся в ионосферных задачах. Объясняется это тем, что вблизи этой точки изменение ϵ уже не будет малым по сравнению с значением ϵ . В этой области применяется вспомогательный прием — функция $\epsilon(z)$ заменяется первым членом ряда Тейлора: $\epsilon(z) = \epsilon'(z_0)(z - z_0)$. Уравнение (6.3) решается при этом в специальных функциях, так называемых *функциях Эйри*. Вблизи точки $z = z_0$ $E(z)$ является линейной комбинацией двух функций Эйри. С ростом $|z - z_0|$ каждая из этих функций асимптотически переходит в одно из слагаемых формулы (6.8). Таким образом, по разные стороны от $z = z_0$, кроме ближайшей окрестности этой точки, $E(z)$ имеет вид (6.8), с разными коэффициентами A и B , а непрерывный переход

через точку $z = z_0$ обеспечивается представлением решения в этой области через функции Эйри.

3. Первое слагаемое в (6.8) описывает прямую волну, второе — обратную. В (6.8) эти волны независимы друг от друга, например, возможно решение с $A \neq 0$, $B = 0$. Таким образом, это решение оказалось недостаточно точным для того, чтобы описать образование отраженной волны.

Формулу (6.8) можно уточнить таким образом, чтобы найти также и отраженную волну. Введем для этого вместо одной переменной $E(z)$ две переменные $A(z)$ и $B(z)$ по формуле

$$E = \frac{A}{\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-i\varphi} + \frac{B}{\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{i\varphi} \quad (6.9a)$$

и свяжем эти две новые функции $A(z)$ и $B(z)$ *дополнительным условием*

$$E' = -ik \sqrt[4]{\varepsilon} A e^{-i\varphi} + ik \sqrt[4]{\varepsilon} B e^{i\varphi}, \quad (6.9b)$$

где φ определено в (6.6). Формула (6.9b) не получена, разумеется, дифференцированием (6.9a); устанавливаемое ею соотношение между $A(z)$ и $B(z)$ выбрано из условия, чтобы для этих функций получились наиболее простые уравнения. Подставив (6.9a) в (6.9b), а (6.9) — в основное уравнение (6.3), мы получим два уравнения для A' и B' :

$$A' = \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} B e^{2i\varphi}, \quad (6.10a)$$

$$B' = \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} A e^{-2i\varphi}. \quad (6.10b)$$

Довольно условно можно $A(z)$ и $B(z)$ в (6.9) назвать переменными амплитудами прямой и обратной волн.

Уравнения (6.10) — точные, они эквивалентны (6.3). Форма их такова, что легко позволяет написать приближенное решение, так как A' и B' пропорциональны малым величинам ε' . Если, например, на переходный слой падает волна с единичной амплитудой и на границах слоя нет скачка ε и ε' , то в первом порядке $A(z) = 1$, и для $B(z)$ из (6.10b) получается

$$B(z) = \int_z^{\infty} \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} e^{-2ik \int_0^z \sqrt[4]{\varepsilon} dz} dz. \quad (6.11)$$

В этой формуле учтено, что $B(l) = 0$, т. е. что нет приходящей слева волны. Для коэффициента отражения $R = B(0)$ будет

$$R = - \int_0^l \frac{\epsilon'}{4\epsilon} e^{-2ik \int_0^z \sqrt{\epsilon} dz} dz. \quad (6.12)$$

Можно найти и следующее приближение — изменение коэффициента прохождения

$$A(z) - 1 = \int_0^z \frac{\epsilon'}{4\epsilon} B(z) e^{2ik \int_0^z \sqrt{\epsilon} dz} dz, \quad (6.13)$$

где $B(z)$ дано в (6.11). Этот *итерационный процесс* можно продолжить и дальше. Легко обобщить его и для случая, когда в начале или конце слоя ϵ или ϵ' терпят разрыв.

Формула (6.12) также может быть получена из представления о переходном слое с непрерывным $\epsilon(z)$ как о совокупности тонких пластин. Согласно (5.3а), при падении на границу раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ϵ и $\epsilon + \Delta\epsilon$ отраженная волна будет иметь амплитуду $-\Delta\epsilon/4\epsilon$; этому соответствует множитель $-\epsilon'/4\epsilon$ в (6.12). Экспонента учитывает разность фаз, с которой при $z=0$ складываются отраженные волны, возникающие при различных z . С этой точки зрения правая часть (6.13) представляет собой результат сложения волн, возникших после двукратного отражения, и т. д.

Выше были описаны два приближенных способа решения уравнения (6.3). Оба они содержат идеи, развитие которых для более сложных задач привело к созданию специальных методов. В (6.4) — (6.8) основная идея состоит в том, чтобы выделить в решении быстро меняющийся множитель $\exp(l\varphi)$, а в уравнении для медленно меняющегося множителя Ψ отбросить старшую производную. В применении к волновому уравнению в частных производных это приводит к тому, что отбрасывается одна из производных второго порядка, так что задача сводится к интегрированию уравнения уже не эллиптического, а параболического типа. Такие параболические уравнения правильно описывают поведение амплитудных функций, т. е. функций типа Ψ в (6.4) (см. § 30, п. 2).

В формулах (6.9) — (6.13) введены две функции, имеющие характер коэффициентов при быстро меняющихся множителях; между ними установлена дополнительная связь (6.9б), которая формально получается, если в основном соотношении дифференцировать только быстро меняющиеся множители. Таким образом, получается система дифференциальных уравнений (6.10), особенность которой состоит в том, что малый параметр ϵ' оказывается общим множителем в выражениях для производных от этих функций. Это позволяет осуществить решение итерационным процессом и, в частности, написать в первом порядке явное выражение для амплитуд волн, покидающих нерегулярный участок. В такой общей формулировке этот аппарат оказался эффективным в теории нерегулярных линий, т. е. линий (волноводы, открытые линии), свойства которых меняются вдоль длины. Он может быть обобщен и для дифференциальных уравнений в частных производных.

4. Отметим еще один математический прием, который логически весьма близок к (6.9), но отличается от него по форме. Введем вместо $E(z)$ новую переменную

$$R(z) = \frac{ik \sqrt{\epsilon} E + E'}{ik \sqrt{\epsilon} E - E'}. \quad (6.14)$$

Выразив из (6.14) E' через E и R и подставив в (6.3), получим для $R(z)$ нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, так называемое *уравнение Риккати*

$$R' - 2ik \sqrt{\epsilon} R - \frac{\epsilon'}{4\epsilon} (1 - R^2) = 0. \quad (6.15)$$

Функция $R(z)$ в обозначениях (6.9) равна $Be^{2i\varphi}/A$, и ее можно рассматривать как коэффициент отражения в точке z . Если на всем переходном участке отражение мало, то в (6.15) можно отбросить квадратичный член. Тогда для $R(z)$ получится линейное уравнение первого порядка; его решение при условии $R(l) = 0$ имеет вид

$$R(z) = -e^{2i\varphi} \int_z^l \frac{\epsilon'}{4\epsilon} e^{-2i\varphi} dz, \quad (6.16)$$

и для $R(0)$ вновь получаем (6.12). Этот метод несколько менее эффективен, чем (6.9), так как не приводит к столь же

простому итерационному процессу, но результаты для первого приближения тождественны, а уравнение (6.15) получается несколько проще, чем система (6.10).

Заметим, что недавно на многочисленных примерах было показано, что выражение $\text{th}|R|$, где R дано в (6.12), дает очень хорошее приближение для коэффициента отражения практически для любой зависимости $\epsilon(z)$.

§ 7. Теория скин-эффекта. Граничное условие Леонтовича

1. Вернемся к задаче о нормальном падении плоской волны на границу раздела двух диэлектриков. Рассмотрим подробнее структуру поля волны (5.1в), прошедшей в диэлектрик, для того случая, когда диэлектрическая проницаемость представляет собой большую мнимую величину

$$\epsilon = -i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (7.1)$$

Такое выражение справедливо в первую очередь для *металлов*, где проводимость настолько велика, что токами смещения можно пренебречь, т. е. $\epsilon' \ll \epsilon''$. Экспоненциальный множитель $\exp(-ik\sqrt{\epsilon}z)$ при условии (7.1) можно записать в виде

$$e^{-(1+i)\frac{z}{d}}, \quad (7.2)$$

где величина d , имеющая размерность длины, равна

$$d = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c\lambda}{\mu\sigma}}. \quad (7.3)$$

Эта величина согласно (7.2) характеризует скорость убывания амплитуды в среде в направлении, перпендикулярном к границе раздела. Она называется *толщиной скин-слоя* и является существенной характеристикой хорошо проводящего материала, помещенного в поле высокой частоты. Для идеального проводника ($\sigma = \infty$) $d = 0$; d пропорционально корню из длины волны в пустоте, т. е. убывает с ростом частоты обратно пропорционально корню из частоты ($d \sim k^{-1/2}$). Например, для меди ($\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{ сек}^{-1}$) при $\lambda = 1 \text{ см}$ $d = 0,4 \text{ мк}$.

Можно было бы определить d иначе, связав ее с длиной волны в материале. Согласно (7.2) длина волны в материале

равна $2\pi d$. Однако при (7.1) более существенным является уменьшение амплитуды, а не волновой характер процесса. Скин-слой — тонкий слой на поверхности хорошо проводящего тела, глубже которого высокочастотное поле почти не проникает.

Внутри скин-слоя существует вполне определенное отношение между тангенциальными компонентами полей E и H ; согласно (4.7)

$$E_x = \omega H_y. \quad (7.4)$$

Это соотношение справедливо, в частности, на самой границе раздела. Так как обе участвующие в (7.4) компоненты непрерывны при переходе через границу раздела, то (7.4) дает также связь между компонентами полей на *внешней границе* раздела. Волновое сопротивление материала ω (4.76) для среды с преобладанием токов проводимости (7.1) выражается через толщину скин-слоя по формуле

$$\omega = \frac{1+i}{2} \mu k d. \quad (7.5)$$

Для идеально проводящего материала ($\sigma = \infty$) $d = 0$, т. е. $\omega = 0$, электрическое поле на поверхности равно нулю (см. (1.4)).

2. Формулы (7.2) и (7.4), дающие структуру поля вблизи поверхности тела и отношение между тангенциальными компонентами на поверхности тела, получены для весьма частного случая — для нормального падения плоской волны на плоскую границу раздела. Однако они имеют значительно более общий характер.

Докажем сначала, что они справедливы (приблизительно справедливы) и при *наклонном падении* плоской волны на плоскую границу раздела двух сред. Пусть, как в § 5, при $z < 0$ $\epsilon = 1$, при $z > 0$ $\epsilon \neq 1$. Слева падает волна, нормаль к ней лежит в плоскости yz (так что $\partial/\partial x = 0$) и составляет угол β с осью z . Положим, что волна содержит только одну компоненту электрического поля E_x и две компоненты магнитного поля H_y и H_z . Существует еще один, столь же простой случай, когда волна содержит E_y , E_z и H_x . Наиболее общий случай, когда ни E , ни H не лежат в плоскости падения, сводится к этим двум частным случаям; нам будет достаточно рассмотреть первый из них.

Падающая волна содержит компоненты

$$\begin{aligned} E_x &= e^{-ik(z \cos \beta + y \sin \beta)}, & H_y &= \cos \beta e^{-ik(z \cos \beta + y \sin \beta)}, \\ H_z &= -\sin \beta e^{-ik(z \cos \beta + y \sin \beta)}. \end{aligned} \quad (7.6a)$$

Других компонент не возникает также ни в отраженной волне

$$\left. \begin{aligned} E_x &= R e^{-ik(-z \cos \beta + y \sin \beta)}, \\ H_y &= -R \cos \beta e^{-ik(-z \cos \beta + y \sin \beta)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.6б)$$

ни в прошедшей волне

$$\left. \begin{aligned} E_x &= D e^{-ik \sqrt{\epsilon \mu} (z \cos \gamma + y \sin \gamma)}, \\ H_y &= \frac{1}{w} D \cos \gamma e^{-ik \sqrt{\epsilon \mu} (z \cos \gamma + y \sin \gamma)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.6в)$$

где γ — угол преломления. Компоненту H_z , нормальную к поверхности раздела, мы не выписываем.

Уже сам факт существования линейных граничных условий при $z=0$ означает, что зависимость от y полей по обе стороны от границы раздела одинакова. Это приводит к известному закону преломления

$$\sin \gamma = \frac{\sin \beta}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (7.7)$$

Условие непрерывности E_x и H_y при $z=0$ дает два уравнения для R и D :

$$1 + R = D, \quad \cos \beta (1 - R) = \frac{1}{w} D \cos \gamma. \quad (7.8)$$

Решение этих уравнений дает явное выражение для R и D , так называемые формулы Френеля, которые мы тут не выписываем.

Предположим, что

$$|\epsilon \mu| \gg 1. \quad (7.9)$$

Это будет основным условием применимости последующих приближенных соотношений. Тогда угол преломления γ , вообще говоря, комплексный, будет очень мал, и

$$\cos \gamma \approx 1 - \frac{\sin^2 \beta}{2\epsilon \mu}. \quad (7.10)$$

Структура поля в материале (7.6в) будет очень близка к структуре поля волны, распространяющейся по нормали к поверх-

ности. Точнее, экспоненциальный множитель в (7.6в), описывающий зависимость поля от z , согласно (7.10) практически совпадает с (7.2). Отношение E_x к H_y равно w , и это справедливо и для полей с внешней стороны границы раздела, так как E_x и H_y непрерывны. Таким образом, при условии (7.9) структура поля в материале не зависит от угла падения β , а отношение тангенциальных компонент на поверхности дается выражением (7.4), также независимо от угла падения.

Условие (7.4) может рассматриваться как *граничное условие на поверхности материала с высоким значением $|\epsilon_r|$* . Оно строго справедливо при нормальном падении плоской волны на плоскую границу раздела. Оно приближенно выполняется при наклонном падении плоской волны. Для второй возможной поляризации оно отличается знаком, так что при наличии обеих поляризаций, т. е. всех четырех тангенциальных компонент полей, это условие, так называемое *условие Леонтовича*, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} E_x &= w H_y, \\ E_y &= -w H_x \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

(ось z направлена в материал).

Независимость (7.11) от угла падения позволяет ожидать, что условие Леонтовича приближенно справедливо не только при падении плоской волны на плоскую границу раздела, но что оно имеет значительно более общую применимость, точнее, что оно имеет место при любой структуре внешнего поля для любой (не обязательно плоской) поверхности материала, для которого выполняется условие (7.9). Это действительно справедливо. Доказательство, которое мы опускаем*), сводится, по существу, к доказательству того, что в теле, для которого верно (7.9), поле вблизи границы всегда изменяется в направлении нормали к границе по закону (7.2). Отсюда легко установить и *условия применимости* для (7.11). Очевидно, что (7.11) справедливо в том случае, если толщина скин-слоя меньше всех линейных размеров, участвующих в задаче — меньше радиуса кривизны поверхности, радиуса кривизны фронта падающей волны, расстояния, на котором свойства среды заметно меняются, и т. д.

*) С. Рытов, ЖЭТФ 10, 180 (1940).

Существуют уточнения условия (7.11) для неплоской поверхности, в которых справа стоят еще члены, пропорциональные отношению толщины скин-слоя к радиусу кривизны поверхности.

Заметим, что условие применимости (7.9) не требует, вообще говоря, чтобы $|\omega| \ll 1$. При больших $|\mu|$ значение электрического поля на границе тела может быть не мало, поле может заметно проникать в среду. Однако для применения (7.11) всегда необходимо, чтобы затухание в среде было достаточно большим, точнее, чтобы толщина скин-слоя была мала.

Далее мы много раз будем применять (7.11) — это позволит нам *ограничиться рассмотрением поля вне* хорошо проводящего *тела*; на границе его поля должны удовлетворять условию (7.11). Систематическое введение этого метода позволило дать эффективное решение ряда задач дифракции, в которых трудно или даже невозможно написать явно точное выражение для поля в проводящей среде.

Проиллюстрируем метод на уже решенной задаче о наклонном падении плоской волны на плоскую границу раздела. Падающая и отраженная волны записаны в виде (7.6а, б); выражение для прошедшей волны, т. е. для поля внутри тела, нам не нужно. Условие (7.11) сразу дает

$$1 + R = \omega(1 - R) \cos \beta, \quad (7.12)$$

что и решает задачу определения коэффициента отражения R . Отличие от точного решения (7.8) — в замене $\cos \gamma$ на единицу, что соответствует, разумеется, тому, что граничное условие (7.11) строго справедливо, если в материале поле представляет собой волну, идущую по нормали к поверхности. Ошибка, к которой приводит применение (7.11), согласно (7.10) тем меньше, чем больше $|\epsilon\mu|$ и чем более внешнее поле напоминает нормально падающую плоскую волну.

3. Вернемся теперь к вопросу об *условии для магнитного поля на границе идеального проводника*. На границе любого хорошего проводника, пока σ конечно, тангенциальные компоненты магнитного поля непрерывны, т. е. H_t имеет одно и то же значение на внешней стороне поверхности и на внутренней стороне. При этом точка на внутренней стороне должна быть взята на расстоянии от поверхности, малом по сравнению с масштабом изменения поля, т. е. с d . Однако при малых d имеет смысл сравнивать внешнее магнитное поле

с магнитным полем внутри тела на расстояниях от поверхности, больших по сравнению с d , т. е. глубже скин-слоя. Между этими двумя точками (внешняя поверхность и точка за скин-слоем) протекает конечный ток, и потому значения H_t различны. Конечность тока, протекающего по всему скин-слою даже при $\sigma \rightarrow \infty$, следует также из такого рассуждения: электрическое поле в скин-слое пропорционально ω , т. е. с ростом σ убывает как $\sigma^{-1/2}$, плотность тока $j = \sigma E$ неограниченно растет как $\sigma^{1/2}$, толщина скин-слоя d пропорциональна $\sigma^{-1/2}$, а суммарный ток по всему скин-слою имеет порядок $dj \sim \sigma^{-1/2} \cdot \sigma^{1/2}$, т. е. остается конечной при $\sigma \rightarrow \infty$. Этот суммарный ток I является, таким образом, при $\sigma \rightarrow \infty$ поверхностной (а не объемной, как j) плотностью тока.

Таким образом, если сравнивать значения H_t по обе стороны скин-слоя, а при $\sigma \rightarrow \infty$, когда $d \rightarrow 0$, только такое сравнение и имеет смысл, то H_t изменяется на конечную величину, не непрерывно. Внутри идеального металла $H = 0$, значение H_t на поверхности пропорционально I . Точнее, интегрируя уравнение (2.18а) по бесконечно малому контуру, охватывающему скин-слой, и обозначая $\int j dz$, где интеграл взят по всей толщине скин-слоя, через I , получим для значения H на поверхности

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{4\pi}{c} I_y, \\ H_y &= -\frac{4\pi}{c} I_x. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Здесь ось z , как обычно, направлена в металл. Эти формулы имеют смысл всегда, когда d мало и целесообразно пользоваться понятием поверхностной плотности тока. Их можно было получить, разумеется, и прямым вычислением, не обращаясь к интегральной форме уравнения Максвелла и связав $j = \sigma E$ с H внутри скин-слоя по (5.1в) и (7.2), а затем сравнив $I = \int j dz$ со значением H при $z = 0$.

Заметим, что из непрерывности тангенциальных компонент E и H на границе двух диэлектриков и из уравнений Максвелла следует непрерывность компонент μH_N и ϵE_N . В частности, из равенства E_t нулю на поверхности идеального металла следует, что на ней $H_N = 0$. Выполнение этого условия служит дополнительной проверкой правильности решения.

Так как H_t терпит разрыв на поверхности металла, то не будет непрерывно и εE_N . В глубине металла, за скин-слоем, E_N равно нулю, причем и $\varepsilon E_N \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$. На поверхности металла образуется поверхностный заряд, пропорциональный поверхностной дивергенции тока I .

4. Формулы (7.11) позволяют написать удобное выражение для *потока энергии в металл*. Если $\sigma \rightarrow \infty$, то поле E_t на поверхности равно нулю, равен нулю и поток вектора Пойнтинга в металл. Если же справедливо (7.11), то для среднего по времени потока через единичную площадку

$$\overline{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [EH^*]_z \quad (7.14)$$

получим согласно (7.5), для простоты записи считая μ вещественным,

$$\overline{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{16\pi} k d \mu (H_x H_x^* + H_y H_y^*). \quad (7.15)$$

Этот поток можно выразить и через плотность тока I

$$\overline{\mathfrak{S}}_z = \frac{\pi}{c} k d \mu |I|^2. \quad (7.16)$$

В практических приложениях очень часто имеет место следующее обстоятельство: поле, возникающее в присутствии хорошего проводника, близко к тому полю, которое было бы при той же конфигурации проводников и источников, если бы проводники были идеальными. Другими словами, переход от идеальных к хорошим проводникам вызывает лишь *малое возмущение* полей. Тогда в нулевом приближении по $|\omega|$ на поверхности проводников $H = H^0$, $E = 0$, а в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \omega H_y^0, \\ E_y &= -\omega H_x^0 \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Здесь H^0 — поле на поверхности проводников в предположении, что они — идеально проводящие. При этом граничное условие Леонтовича дает явное выражение для значения E_t на поверхности хорошего проводника. Существенно, что при этом в (7.15) справа будут стоять поля H_t^0 , а в (7.16) — токи I^0 . Таким образом, при выполнении (7.17), зная поле на поверхности идеального проводника, можно сразу вы-

числить средний поток энергии, уходящий внутрь хорошего проводника:

$$\overline{\mathcal{E}}_z = \frac{\omega}{16\pi} \mu d (H_x^0 H_x^{0*} + H_y^0 H_y^{0*}), \quad (7.18a)$$

$$\overline{\mathcal{E}}_z = \frac{k\pi}{c} \mu d (I_x^0 I_x^{0*} + I_y^0 I_y^{0*}). \quad (7.18b)$$

При переходе от идеально проводящих стенок к стенкам с конечной проводимостью обычно наибольший интерес представляет именно вычисление этого потока.

Для выполнения (7.17) недостаточно, чтобы выполнялось условие $|\varepsilon\mu| \gg 1$ и требование малости kd . Надо еще, чтобы малое изменение граничных условий вызывало малое возмущение поля; обычно это имеет место, однако общего условия для этого нет.

5. Проиллюстрируем эти формулы на задаче о падении плоской волны на плоскую границу раздела; в этом случае R мало меняется при изменении ω от нуля до малого значения, и формулы (7.17) и (7.18) применимы. При $\omega = 0$ согласно (7.8) $R = -1$, и тангенциальная к металлу компонента H в два раза больше, чем в падающей волне:

$$H_y^0 = 2 \cos \beta. \quad (7.19)$$

Поток энергии в металле равен, согласно (7.18a),

$$\overline{\mathcal{E}}_z = \frac{\omega}{16\pi} \mu d \cdot 4 \cos^2 \beta. \quad (7.20)$$

Если это разделить на поток энергии в падающей волне (7.6a)

$$\overline{\mathcal{E}}_z^{\text{пад}} = \frac{c}{8\pi} \cos \beta, \quad (7.21)$$

то получим потерю энергии при отражении от хорошего металла

$$1 - |R|^2 = 2\mu kd \cos \beta. \quad (7.22)$$

Даже в такой простой задаче эту величину проще найти по (7.18), чем определять R из (7.8) и вычислять левую часть, сохраняя в расчете лишь первую степень d .

6. Заметим в заключение этого параграфа, что граничные условия типа (7.11) можно написать также и в акустической задаче. На границе абсолютно жесткого тела давление p

удовлетворяет условию

$$\frac{\partial p}{\partial N} = 0. \quad (7.23a)$$

На границе очень жесткого тела будет

$$\frac{\partial p}{\partial N} = -i \frac{\omega}{c\rho} p; \quad (7.23b)$$

при $|c\rho| \rightarrow \infty$ (7.23b) переходит в (7.23a). На границе абсолютно мягкого тела $p=0$; на границе тела с малой жесткостью (т. е. с малой скоростью звука c)

$$p = -\frac{ic}{\omega} \frac{\partial p}{\partial N}, \quad (7.24)$$

и это переходит в $p=0$ при $c \rightarrow 0$. Формулы (7.23b) и (7.24) можно применять так же, как (7.11) и (7.17).

ВОЛНОВОДЫ

§ 8. Цилиндрические волны

1. Плоская волна представляет собой простейшее решение уравнений Максвелла. В такой волне поверхность равных фаз — плоская, и амплитуды полей на всей этой плоскости одинаковы.

Поверхности равных фаз в цилиндрической волне также представляют собой плоскости, однако амплитуды полей, вообще говоря, различны в разных точках каждой плоскости. Точнее, если выбрать ось z перпендикулярно к плоскостям равных фаз, то, по определению цилиндрической волны,

$$E(x, y, z) = E(x, y) e^{-ihz}, \quad (8.1a)$$

$$H(x, y, z) = H(x, y) e^{-ihz}. \quad (8.1b)$$

Иногда волны такого типа называют *неоднородными плоскими* волнами.

Величина h , имеющая размерность $см^{-1}$, называется волновым числом; она является основной характеристикой волны (8.1). Вообще говоря, h комплексно,

$$h = h' - ih'', \quad h' \geq 0, \quad h'' \geq 0. \quad (8.2)$$

Волна (8.1) распространяется в сторону положительной оси z с фазовой скоростью

$$v = \frac{\omega}{h'} = c \frac{k}{h'}, \quad (8.3a)$$

длиной волны

$$\Lambda = \frac{2\pi}{h'} = \lambda \frac{k}{h'} \quad (8.3b)$$

и с затуханием, пропорциональным h'' . Для волны, распространяющейся в сторону отрицательных значений z , в (8.1) вместо $\exp(-ihz)$ стоит $\exp(ihz)$.

Если $h > k$ (или, для комплексных h , если $h' > k$), то согласно (8.3) $v < c$; такие волны называются *медленными*. Если $h' < k$, то $v > c$, это — *быстрые волны*.

Решение, имеющее структуру цилиндрической волны (8.1), возможно в любой среде, в которой ϵ и μ не зависят от z , а металлические поверхности, если они есть, представляют собой цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси z .

Теория цилиндрических волн представляет интерес в первую очередь как основа расчета различных направляющих систем, предназначенных для передачи энергии или сигналов. Однако и в других устройствах — в антеннах, во многих электронных приборах, — поле имеет структуру, близкую к цилиндрической волне или к суперпозиции нескольких волн типа (8.1).

2. В цилиндрической волне всегда можно выразить все компоненты полей через *две скалярные функции*; другими словами, расчет полей всегда сводится к определению двух потенциальных функций. Действительно, подставим (8.1) в уравнения Максвелла (2.18). При этом дифференцирование по z может быть фактически произведено ($\partial/\partial z = -ih$). Продольные (E_z, H_z) и поперечные (E_x, E_y, H_x, H_y) компоненты полей войдут в полученную систему различным образом. Четыре из этих уравнений не содержат производных от поперечных компонент. Из них можно выразить E_x и т. д. через E_z и H_z . Одна из соответствующих формул имеет вид

$$E_x = \frac{1}{k^2 \epsilon \mu - h^2} \left(-ih \frac{\partial E_z}{\partial x} + ik \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \quad (8.4)$$

Остальные мы не выписываем, так как обычно этим уравнениям придают другой вид. Подставляя E_x и остальные поперечные компоненты в два оставшихся уравнения Максвелла, мы получим два уравнения второго порядка в частных производных для двух функций, т. е. для $E_z(x, y)$ и $H_z(x, y)$. Эти функции и играют при таком подходе роль потенциальных функций. В этих волновых уравнениях величина h имеет характер *собственного значения*. Только при определенных значениях h эти уравнения имеют ненулевые решения для E_z, H_z . Иными словами, в каждой среде возможны цилиндрические волны только с некоторыми значениями волнового

числа h . Как мы увидим ниже, в различных системах число таких значений h и соответствующих им типов волн может быть конечным (диэлектрический стержень) или бесконечным (волновод).

Волновые уравнения, содержащие одновременно E_z и H_z , очень сложны. Поэтому практически эти уравнения применяются только в том случае, когда каждое из них содержит только одну функцию, т. е. либо E_z , либо H_z . Это имеет место, в частности, в тех областях пространства, где ϵ и μ — *постоянные*, т. е. не зависят от x и y . Именно для таких случаев и будут действительны приведенные ниже уравнения. Для более сложных систем типа диэлектрического стержня (см. § 13), в которых ϵ или μ — кусочно-постоянные, в разных областях пространства вводятся различные потенциальные функции.

В качестве потенциальных функций обычно выбираются не компоненты E_z и H_z , а пропорциональные им функции $\chi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, и коэффициент пропорциональности принимается равным знаменателю в (8.4), т. е. E_z и H_z выражаются через эти потенциальные функции χ и ψ по формулам

$$\left. \begin{aligned} E_z &= (k^2 \epsilon \mu - h^2) \chi(x, y) e^{-ihz}, \\ H_z &= (k^2 \epsilon \mu - h^2) \psi(x, y) e^{-ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (8.5a)$$

Функции χ и ψ удовлетворяют волновому уравнению, которое получается из уравнений (3.2), записанных для декартовых компонент $H_z(x, y) \exp(-ihz)$ и $E_z(x, y) \exp(-ihz)$. Волновое уравнение для χ и ψ — одинаковое:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \chi + (k^2 \epsilon \mu - h^2) \chi &= 0, \\ \nabla^2 \psi + (k^2 \epsilon \mu - h^2) \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Здесь, как и всюду ниже, ∇^2 — двумерный оператор Лапласа, так что, например, в декартовых координатах (x, y)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (8.7)$$

в полярных координатах (r, φ)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (8.8)$$

Поперечные компоненты выражаются через ψ и χ по формулам [ср. (8.4)]

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \left(-ih \frac{\partial \chi}{\partial x} - lk\mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) e^{-ihz}, \\ E_y &= \left(-ih \frac{\partial \chi}{\partial y} + lk\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) e^{-ihz}, \\ H_x &= \left(lk\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial y} - ih \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) e^{-ihz}, \\ H_y &= \left(-lk\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial x} - ih \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) e^{-ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (8.5б)$$

Легко проверить прямой подстановкой (8.5) в (2.18), что, как и следует из предыдущего рассмотрения, поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ (8.5) удовлетворяют уравнениям Максвелла, если потенциальные функции удовлетворяют уравнениям (8.6). Формулы (8.5) и (8.6) образуют основу математического аппарата теории цилиндрических волн (§ 9—16).

3. Выбор потенциальных функций ψ и χ вместо полей H_z и E_z связан с двумя обстоятельствами. Во-первых, есть случай, когда и H_z , и E_z равны нулю, а поперечные компоненты отличны от нуля, и выражения типа (8.4) становятся неопределенными. Примером такой поперечной волны (т. е. волны, в которой векторы полей перпендикулярны к направлению распространения) является плоская волна, в ней $h = k\sqrt{\varepsilon\mu}$, $E_z = H_z = 0$. Например, поле (4.3в) получается из (8.5б) при $\psi = 0$, $\chi = l \frac{A}{k\sqrt{\varepsilon\mu}} x$. Есть и другие типы поперечных волн (§ 11). Во-вторых, эти потенциальные функции связаны с аппаратом так называемых *векторов Герца*, который мы сейчас кратко рассмотрим и который позволит нам другим способом получить основные формулы (8.5) и (8.6).

Как известно из общих курсов электродинамики, в однородной среде поле может быть выражено через векторный потенциал $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал φ . Можно связать $\text{div } \mathbf{A}$ с временной производной скалярного потенциала так называемым условием Лоренца, и для принятой у нас временной зависимости φ можно исключить. Тогда $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выразятся через комплексную амплитуду векторного потенциала $\mathbf{A}$ по формулам:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -lk\mathbf{A} - \frac{i}{k\varepsilon\mu} \text{grad div } \mathbf{A}, \quad (8.9)$$

где A удовлетворяет такому же волновому уравнению (3.2), как E и H . Если ввести так называемый *электрический вектор Герца* $\Pi^{(e)}$, пропорциональный A , условием $A = ik\epsilon\mu\Pi^{(e)}$, то уравнения (8.9) принимают несколько более удобный вид

$$H = ik\epsilon \operatorname{rot} \Pi^{(e)}, \quad E = k^2\epsilon\mu\Pi^{(e)} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi^{(e)}. \quad (8.10a)$$

Вектор Герца должен при этом удовлетворять тому же волновому уравнению (3.2).

В уравнения Максвелла поля E и H входят симметрично (с точностью до замены ϵ на μ и i на $-i$), а в (8.10a) E и H выражаются через $\Pi^{(e)}$ несимметричными формулами. Очевидно, что если ввести вектор $\Pi^{(m)}$, также удовлетворяющий волновому уравнению (3.2), и выразить E и H через него по формулам, получающимся из (8.10a) той же заменой,

$$H = k^2\epsilon\mu\Pi^{(m)} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi^{(m)}, \quad E = -ik\mu \operatorname{rot} \Pi^{(m)}, \quad (8.10b)$$

то E , H также будут удовлетворять уравнениям Максвелла; это легко проверить подстановкой. Вектор $\Pi^{(m)}$ называется *магнитным вектором Герца*.

Можно одновременно ввести оба вектора Герца, $\Pi^{(e)}$ и $\Pi^{(m)}$, и выразить E и H через них по формулам, получающимся при сложении правых частей (8.10a) и (8.10b). Вообще говоря, это будет «избыточная» запись, так как она эквивалентна введению шести потенциальных функций ($\Pi_x^{(e)}, \dots$). Однако для цилиндрических волн эта запись позволяет просто ввести две потенциальные функции — в качестве них следует брать $\Pi_z^{(e)}$ и $\Pi_z^{(m)}$. Если сравнить выражение E и H через $\Pi^{(e)}$, $\Pi^{(m)}$ и через χ , ψ , то окажется, что $\Pi_z^{(e)}$ пропорционально введенной выше потенциальной функции χ , а $\Pi_z^{(m)}$ — функции ψ :

$$\begin{aligned} \Pi_z^{(e)}(x, y, z) &= \chi(x, y) e^{-ihz}, \\ \Pi_z^{(m)}(x, y, z) &= \psi(x, y) e^{-ihz}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Из волновых уравнений для $\Pi_z^{(e)}(x, y, z)$ и $\Pi_z^{(m)}(x, y, z)$ легко вновь получить уравнение (8.6) для $\chi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

§ 9. Волноводы

1. Металлические волноводы, к рассмотрению которых мы переходим, представляют собой цилиндрические металлические поверхности с любой замкнутой формой контура поперечного сечения. Если не сделано специальных оговорок, то ϵ и μ внутри волноводов считаются постоянными. В этом параграфе мы будем считать, что металлические стенки — идеально проводящие, т. е. что на них $E_t = 0$. Теорию таких волноводов можно продвинуть довольно далеко, не уточняя, какова именно форма поперечного сечения. Обычно применяются волноводы прямоугольного сечения, несколько реже — круглого, но используются и волноводы весьма сложного поперечного сечения.

Установим граничные условия для функций χ и ψ на границе металла. Введем на контуре поперечного сечения C направления s и n ; оба орта лежат в плоскости сечения, n направлено по нормали в металл, s — вдоль контура; n , s и ось z образуют правую тройку. Тангенциальные к поверхности металла компоненты будут согласно (8.5)

$$\begin{aligned} E_s &= \left(-ih \frac{\partial \chi}{\partial s} + ik\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) e^{-ihz}, \\ E_z &= (k^2 \epsilon \mu - h^2) \chi e^{-ihz}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Следовательно, если ψ и χ будут удовлетворять на C условиям

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_C = 0, \quad (9.2a)$$

$$\chi \Big|_C = 0 \quad (9.2b)$$

и внутри контура волновым уравнениям (8.6), то поля (8.5) будут удовлетворять уравнениям Максвелла и граничному условию (1.4).

Заметим, что есть еще одна возможность — вместо условия (9.2b) χ может удовлетворять более слабому условию

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} \Big|_C = 0, \quad (9.3a)$$

и если одновременно окажется, что

$$h = k \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (9.3b)$$

то граничные условия для E будут выполнены. Мы вернемся к этой возможности в § 11.

Из (9.2) и (8.6) следует, что функции ψ и χ независимы друг от друга. Это значит, что существует деление всех цилиндрических волн в волноводах на волны двух типов. В первом типе волн $\chi = 0$, и поля выражаются через один потенциал ψ . Такие волны называются *волнами магнитного типа*; их обязательным свойством является отсутствие в поле этих волн компонент E_z (см. (8.5a)). Второй тип волн — *волны электрического типа*. Поля этих волн выражаются через χ , в них $\psi = 0$, и потому всюду равна нулю компонента H_z . Волны магнитного типа называют H -волнами (магнитными волнами), иногда TE -волнами (поперечными электрическими), волны электрического типа — E -волнами (или TM -волнами).

Рассмотрим подробнее уравнения, описывающие H -волны. Сравним уравнения (8.6) и граничное условие (9.2a) с системой

$$\nabla^2 \psi + \alpha^2 \psi = 0, \quad (9.4a)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_C = 0. \quad (9.4б)$$

Задача об отыскании ненулевых решений системы (9.4) подробно исследована. Известно, что она имеет решение только при некоторых значениях параметра α^2 ; эти значения — так называемые *собственные значения* задачи (9.4) — образуют счетную возрастающую последовательность вещественных чисел

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2, \dots \quad (9.5)$$

Функция ψ , удовлетворяющая задаче (9.4) при $\alpha = \alpha_n$, называется *собственной функцией* этой задачи; ее обозначают ψ_n . Собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям α_n и α_m ($\alpha_n \neq \alpha_m$), ортогональны между собой, для них справедливо условие

$$\int \psi_n \psi_m dS = 0, \quad (9.6)$$

где $\int dS$ означает интеграл по поперечному сечению, т. е. по части плоскости, ограниченной контуром C .

Простота и общность теории волноводов основаны на тождественности условий для функций ψ (и χ , как мы ниже

увидим) с условиями задачи о собственных значениях. Очевидно, что функция ψ , удовлетворяющая условиям (8.6) и (9.2а), отлична от нуля, только если h будет таким, что выражение $k^2\epsilon\mu - h^2$ равно одному из чисел ряда (9.5):

$$k^2\epsilon\mu - h^2 = \alpha_n^2. \quad (9.7)$$

Таким образом, вопрос о том, какими волновыми числами могут обладать H -волны в волноводе, решен равенством (9.7), точнее, сведен к нахождению ряда собственных значений задачи (9.4). Потенциальные функции, описывающие H -волны, являются собственными функциями задачи (9.4). Фактическое определение чисел α_n и функций ψ_n для волноводов различных сечений производится ниже; однако уже сейчас, на основе только формулы (9.7), можно выяснить почти все основные свойства волноводных волн.

Заметим предварительно, что для E -волн также существует задача о собственных значениях, тождественная с задачей определения возможных значений волновых чисел и структуры полей волн в волноводе. Как следует из (8.6) и (9.2б), эта задача имеет вид

$$\nabla^2\chi + \alpha^2\chi = 0, \quad \chi|_C = 0. \quad (9.8)$$

Она также дает ряд собственных значений α_n^2 (вообще говоря, отличных от собственных значений (9.5) задачи (9.4)) и собственных функций χ_n , соответствующих этим собственным значениям. Собственные функции χ_n и χ_m , относящиеся к разным собственным значениям ($\alpha_n \neq \alpha_m$), ортогональны между собой в смысле (9.6).

2. Поперечные компоненты всей совокупности электрических и магнитных волн образуют полную систему векторных полей — поперечные компоненты любого поля, удовлетворяющего условию $E_t|_C = 0$, могут быть разложены в ряд по полям этой совокупности. Полнота этой системы следует из полноты системы собственных функций задач (9.4) и (9.8). Эти векторные функции ортогональны друг другу в том смысле, что интеграл

$$\int [E^n H^m]_z dS, \quad (9.9)$$

взятый по поперечному сечению волновода, равен нулю, если E^n и H^m — поля двух различных волн. Действительно,

выражая поля E_x^n , E_y^n , H_x^m и H_y^m , входящие в (9.9), через потенциальные функции ψ и χ (их часто называют *мембранными функциями*), мы получим одно из трех выражений:

$$\begin{aligned} -kh_n \int \nabla \chi^n \nabla \chi^m dS, & -kh_m \int \nabla \psi^n \nabla \psi^m dS, \\ & -h_n h_m \int \text{rot}_z [\nabla \chi^n \nabla \psi^m] dS. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Первое из них получится, если первая и вторая волны — электрического типа, второе — если они обе магнитного типа, третье — если первая волна электрическая, вторая — магнитная. Последний интеграл всегда равен нулю, а два первых равны нулю, если обе участвующие в (9.9) волны — разных номеров; это легко получить, преобразуя выражения $\int \text{div}(\psi^n \psi^m) dS$ и $\int \text{div}(\chi^n \chi^m) dS$ и используя (9.4), (9.6) и аналогичные уравнения для χ^n .

Примем для мембранных функций *нормировку*

$$\int (\nabla \chi^n)^2 dS = 1, \quad \int (\nabla \psi^n)^2 dS = 1. \quad (9.11)$$

Тем самым установлена нормировка и для полей

$$\int [E^n H^n]_z dS = -kh_n \delta_{nm}, \quad (9.12)$$

где $\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$, $\delta_{nn} = 1$.

Введя определенную нормировку, мы сможем в дальнейшем говорить об амплитудах возникающих волн. Можно было принять и любую другую нормировку; в задаче о возбуждении каким-либо источником это изменило бы амплитуды различных волн, но не изменило бы значения самих полей.

Заметим, что полнота системы волноводных волн имеет место только для поперечных компонент. Если найдены коэффициенты разложения поперечных компонент какого-либо сложного поля по поперечным компонентам волноводных волн, то выражения для E_z , H_z надо затем найти из уравнений Максвелла, и они, вообще говоря, не будут равны сумме продольных компонент волноводных волн, взятых с теми же коэффициентами. С такой ситуацией мы встретимся в задаче о возбуждении волноводов.

3. Итак, согласно (9.7), в волноводе возможны волны, для которых волновые числа удовлетворяют условию

$$h_n^2 = k^2 \epsilon \mu - \alpha_n^2. \quad (9.13)$$

Напомним, что здесь k — волновое число в пустоте, и ϵ , μ — параметры среды, заполняющей волновод. Величины α_n зависят только от типа и номера волны и от величины и формы сечения. Например, для волновода круглого сечения α_n обратно пропорционально радиусу волновода, и т. д.

Приступая к анализу формулы (9.13), примем для простоты записи, что волновод ничем не заполнен ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$). Напоминаем, что при частичном заполнении волновода формулы и результаты этого параграфа неприменимы.⁴ Заполнение всего волновода однородной средой эквивалентно увеличению его размеров в $\sqrt{\epsilon\mu}$ раз и легко может быть учтено заменой всюду k на $k\sqrt{\epsilon\mu}$.

В бесконечном ряду (9.5) (будем считать, что в него включены теперь также собственные значения задачи (9.8)) есть несколько членов, меньших, чем k^2 . Число этих членов — конечное; в частности, их может не быть, если k^2 меньше первого члена ряда (9.5). Для этих волн $h_n^2 > 0$, т. е. h_n — вещественно. Для всех α_n , больших k , т. е. для бесконечного числа членов, $h_n^2 < 0$, h_n — чисто мнимо. Это значит, что множитель $\exp(-ih_n z)$ для этих волн — убывающий; поля таких волн экспоненциально убывают. Таким образом, из (9.9) и (9.5) следует, что в волноводах при любой частоте могут существовать несколько волн, распространяющихся без затухания, и бесконечно много нераспространяющихся волн.

Проследим за тем, как эта ситуация изменяется с *ростом частоты*. При очень низких частотах, когда $k < \alpha_1$, ни одна волна не распространяется, все они затухают. Правда, как мы увидим, существуют сечения волноводов, для которых первое собственное значение равно нулю ($\alpha_1 = 0$): о такой возможности мы упоминали в связи с (9.3). В таких волноводах одна волна существует всегда, при сколь угодно низких частотах.

С ростом частоты, когда k достигает значения $k = \alpha_1$, первая волна становится незатухающей. Каждый раз затем, когда k становится равным одному из значений α_n , волна n -го номера становится незатухающей. Частоты, при которых это происходит, называются критическими для волны данного номера. Мы будем называть *критической частотой* соответствующие значения k

$$k_n = \alpha_n. \quad (9.14)$$

Критическая частота — такая же геометрическая величина, как и α_n . (Напомним, что фактически частота отличается от k множителем c .)

С этим обозначением основная формула (9.13) примет вид

$$h_n^2 = k^2 - k_n^2. \quad (9.15)$$

Чем больше частота k , тем больше волн, для которых критическая частота k_n меньше k , т. е. тем больше различных волн может распространяться без затухания.

Опишем теперь, что происходит при росте частоты k с какой-либо волной *фиксированного номера*; сделаем это в терминах длины волны. Кроме обычной длины волны $\lambda = 2\pi/k$ и длины волны в волновом $\Lambda_n = 2\pi/h_n$, введем еще *критическую длину волны* $\lambda_n = 2\pi/k_n$, которая является естественным масштабом длин волн; λ_n имеет порядок поперечного сечения волновода. Для длинных волн, пока $\lambda > \lambda_n$, волна экспоненциально затухает. При $\lambda < \lambda_n$ волна распространяется без затухания, и согласно (9.15)

$$\frac{1}{\Lambda_n^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_n^2}, \quad (9.16a)$$

т. е.

$$\Lambda_n = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_n)^2}}. \quad (9.16b)$$

Всегда $\Lambda_n > \lambda$; при $\lambda \rightarrow \lambda_n$ $\Lambda_n \rightarrow \infty$, т. е. вблизи критической частоты поле как бы теряет волновой характер. При коротких волнах, т. е. при $\lambda \ll \lambda_n$, $\Lambda_n \approx \lambda$, волноводная длина волны лишь немного больше длины волны в свободном пространстве.

Явное выражение k_n или λ_n зависит от номера волны и сечения волновода; формулы (9.15) и (9.16) носят общий характер. Из (9.15) легко найти также выражение для групповой скорости волны. Так как h_n не пропорционально k , то фазовая скорость $v_n = ck/h_n$ зависит от частоты и не равна c :

$$v_n = c \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_n}{k}\right)^2}}. \quad (9.17)$$

Следовательно, для групповой скорости u_n , равной, как известно, $u_n = \frac{c}{dh_n/dk}$, легко получить прямым вычислением из (9.15) выражение

$$u_n = c \sqrt{1 - \left(\frac{k_n}{k}\right)^2}. \quad (9.18)$$

Между u_n и v_n существует удобная для запоминания связь

$$u_n \cdot v_n = c^2, \quad (9.19)$$

и, разумеется, всегда $u_n < c$.

С фазовой скоростью распространяется фаза волны, поэтому, например, v_n участвует в расчетах, где надо сложить поля нескольких волн, прошедших разные пути. С групповой скоростью распространяется любое возмущение волны; например, импульс в волноводе идет со скоростью u_n . Как и в любой другой среде, передний фронт идет всегда со скоростью c .

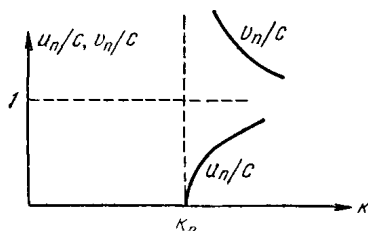


Рис. 2. Фазовая и групповая скорости в волноводе.

Рис. 2 дает зависимость u_n и v_n от частоты (от k). Единственным параметром является

критическая частота k_n , в остальном этот рисунок, как и формулы (9.17) и (9.18), универсален, т. е. относится к волноводам любого сечения и ко всем волнам. Вблизи критической частоты (в области $k - k_n \ll k_n$) волна имеет очень своеобразные характеристики — групповая скорость ее очень мала ($u_n \ll c$), длина волны очень велика ($\Lambda_n \gg \lambda$), и т. д. Кроме того, как мы увидим, в этих условиях волна при неидеальных стенках сильно затухает, ее трудно возбудить, и обычно стараются не применять волну какого-либо типа в частотной области, близкой к ее критической частоте.

При $k \gg k_n$ и фазовая, и групповая скорости близки к c , как в волне в безграничном пространстве. При этом и поля близки к полю плоской волны, рассмотренной во второй главе. Действительно, так как $h_n \approx k$, то, по (8.56), $E_x \approx H_y$, $E_y \approx -H_x$, а по (8.5а) эти поперечные компо-

менты значительно (по порядку величины в k/k_n раз) больше продольных, т. е. возникают примерно те же соотношения, что и в плоской волне, в которой согласно § 4 $E_x = H_y$, $E_y = -H_x$, $E_z = 0$, $H_z = 0$.

§ 10. Прямоугольные и круглые сечения

1. Рассмотрим коротко волноводы *прямоугольного сечения*; именно такие волноводы чаще всего применяются в практике сантиметровых волн. Мы должны будем решить задачи (9.4) и (9.8) и найти явный вид функций ψ_n и χ_n и значение чисел α_n .

Систему координат, разумеется, следует выбирать таким образом, чтобы контур S , т. е. прямоугольник, состоял из отрезков координатных линий.

Пусть большая сторона прямоугольника равна a , меньшая равна b , и система координат расположена так, как указано на рис. 3. Для *магнитных* волн уравнение (9.4) имеет вид

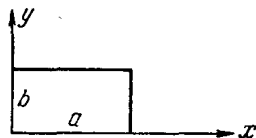


Рис. 3. Сечение прямоугольного волновода.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \alpha^2 \psi = 0. \quad (10.1)$$

Решение ищется по методу Фурье, т. е. в виде $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$; тогда (10.1) дает

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \cdot \frac{1}{X} + \frac{d^2 Y}{dy^2} \cdot \frac{1}{Y} = -\alpha^2. \quad (10.2)$$

Каждое слагаемое слева должно быть постоянным числом, иначе равенство (10.2) не может выполняться. Обозначим эти постоянные числа через $-\alpha_x^2$ и $-\alpha_y^2$. Тогда

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_y^2 Y = 0, \quad \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \alpha^2. \quad (10.3)$$

Функцию $X(x)$ удобно представить в виде суперпозиций слагаемого, содержащего $\cos \alpha_x x$, и слагаемого, пропорционального $\sin \alpha_x x$. Граничное условие (9.2a) на левой вертикальной стенке ($x=0$) означает $\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0$; этим условием член с $\sin \alpha_x x$ исключается. Таким же образом не может

содержать слагаемого $\sin \alpha_y y$ и функция $Y(y)$. Поэтому

$$\psi(x, y) \sim \cos \alpha_x x \cdot \cos \alpha_y y. \quad (10.4)$$

Числа α_x и α_y найдутся из требования выполнения граничного условия (9.2) при $x=a$ и $y=b$:

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{dy} \right|_{y=b} = 0. \quad (10.5)$$

Отсюда

$$\alpha_x = \frac{\pi m}{a}, \quad \alpha_y = \frac{\pi q}{b}. \quad (10.6)$$

Следовательно, функция ψ для магнитных волн имеет вид

$$\psi_{mq}(x, y) = A \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi q}{b} y, \quad (10.7)$$

$$A^2 = \frac{4}{\alpha_n^2} \cdot \frac{1}{ab(1 + \delta_{0m})(1 + \delta_{0q})} \quad (m, q = 0, 1, 2, \dots),$$

где учтено еще принятое условие нормировки (9.11).

Легко показать, что любое решение уравнения (10.1) имеет вид $\psi = XY$, так что (10.7) дает общее решение (10.1). Собственные значения зависят от двух чисел m и q :

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 q^2}{b^2}}. \quad (10.8)$$

Каждое из этих целых чисел m и q может принимать значение нуль, однако решению $m=0$, $q=0$ не соответствует никакая волна. Волна с потенциальной функцией (10.7) и собственным значением (10.8) обозначается H_{mq} (или TE_{mq}).

В технике наибольшее значение имеет простейшая из этих волн — волна H_{10} ($m=1$, $q=0$). Ее поле не зависит от координаты y ; компоненты ее, вычисляемые по (8.5) и (10.7), равны

$$E_y = Aik \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad H_x = Aih \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad H_z = A \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \quad (10.9)$$

и $\alpha_{10} = \frac{\pi}{a}$. Эта волна содержит только одну компоненту электрического поля, имеющую наибольшую величину в центре и убывающую к вертикальным стенкам.

Волна H_{10} — *основная* в прямоугольном волноводе. Это значит, что ее критическая длина волны ($\lambda_n = 2a$) имеет са-

мую большую величину среди значений λ_n для всех волн прямоугольного волновода. Существует большой диапазон длин волн λ , меньших $2a$, для которых прямоугольный волновод может пропускать только эту волну. Следующей волной будет либо волна H_{01} ($\psi_n = A \cos \frac{\pi y}{a}$, $\lambda_n = 2b$), электрическое поле которой параллельно большей стороне прямоугольника, либо волна H_{20} ($\psi_n = A \cos \frac{2\pi x}{a}$, $\lambda_n = a$), поле которой содержит те же компоненты (10.9), что и поле волны H_{10} , но в которой E_y обращается в нуль не только на стенках, но и на средней линии. Если $a > 2b$, то $\lambda_{20} > \lambda_{01}$, т. е. следующей за основной волной будет волна H_{20} , и диапазон одноволновости для прямоугольного волновода будет $a < \lambda < 2a$. Если $a < 2b$, то следующей за основной будет волна H_{01} , и волновод будет пропускать только основную волну в диапазоне $2b < \lambda < 2a$.

В настоящее время теория прямоугольного волновода с волной H_{10} развилась в самостоятельную дисциплину. Волноводный тракт содержит, кроме регулярных участков, также целый ряд нерегулярностей — диафрагмы, фильтры, аттенюаторы, ответвители, возбуждающие и измерительные устройства и т. д. При падении волны H_{10} на эти волноводные элементы возникают волны высших номеров H_{mq} и волны электрического типа E_{mq} , которые мы сейчас коротко рассмотрим. В обычных условиях, т. е. в том диапазоне частот, в котором тракт является одноволновым, все эти волны оказываются затухающими. Они сосредоточены вблизи нерегулярных участков; иногда их называют *местными* волнами. Типичная задача теории прямоугольных волноводов состоит в определении амплитуд прошедшей, отраженной и, если она есть, ответвленной основной волны, но при решении этой задачи неизбежно надо учитывать также местные волны. Образование этих волн и определяет собой сложность и специфику теории волноводных элементов. С такой же ситуацией сталкивается и теория элементов волноводов круглого сечения.

В настоящее время появились прямоугольные волноводы, работающие на волне H_{10} , но с поперечными сечениями, настолько большими, что без затухания в них могут распространяться еще несколько волн. Применение таких волноводов

вызвано необходимостью, во-первых, уменьшить тепловые потери, которые мы рассмотрим далее, и, во-вторых, избежать пробоя в воздухе при передаче большой мощности. В этих волноводах нерегулярные участки вызывают появление волн высшего типа, распространяющихся без затухания, т. е. уносящих энергию. Переход на нерегулярном участке части энергии основной (рабочей) волны в энергию волн другого типа называется *преобразованием типов волн*. В волноводах, поперечные размеры которых настолько велики, что в них может распространяться несколько волн различных типов, явления преобразования играют существенную роль.

Вернемся к прямоугольным волноводам постоянного сечения и рассмотрим систему *электрических волн* в них. Она описывается уравнением и граничным условием (9.8), и, аналогично (10.7), потенциальная функция $\chi(x, y)$ волны E_{mq} имеет вид

$$\chi_{mq} = A \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi q}{b} y \quad (10.10)$$

с тем же значением A , что и в (10.7). Очевидно, что это решение удовлетворяет (9.8). Собственные значения α_n даются той же формулой (10.8). Отличие от собственных значений волн H_{mq} состоит только в том, что не существует E -волн с нулевым индексом (это видно из (10.10)), т. е. возможны только волны E_{11} , E_{12} , ..., E_{21} , ... Поля этих волн находятся по формулам (10.10) и (8.5).

В прямоугольных волноводах (и только в них) возможна также классификация волн, отличная от той, которую мы применяли и будем применять во всей теории цилиндрических волн. В них возможны волны, в которых отсутствует одна из поперечных компонент E или H , например, E_x или H_x — так называемые *продольные волны*. Волны H_{m0} и H_{0q} являются продольными. Так как две волны — H_{mq} и E_{mq} с одинаковой парой индексов (m, q) обладают равными фазовыми скоростями, то любая их линейная комбинация также является волной, так как в ней все компоненты полей зависят от z по закону $\exp(-ih_n z)$. Из них можно составить такую *линейную комбинацию*, в которой тождественно будет, например, $E_x = 0$ — эта *линейная комбинация* будет *продольной волной*. Система *продольных волн* в прямоугольном волноводе — полная, т. е. любое поле может быть представ-

лено в виде суммы продольных волн двух типов — волн, в которых $E_x \equiv 0$, и волн, в которых $H_x \equiv 0$. Поля продольных волн с $H_x \equiv 0$ могут быть выражены через одну потенциальную функцию $\Pi_x^{(e)}$ по формуле (8.10а), если в ней положить $\Pi_y^{(e)} = \Pi_z^{(e)} = 0$, а поля продольных волн с $E_x \equiv 0$ — через функцию $\Pi_x^{(m)}$ по (8.10б), если положить $\Pi_y^{(m)} = \Pi_z^{(m)} = 0$. Применение таких потенциальных функций удобно для описания поля в изогнутых или изломанных волноводах. В таких волноводах поле не может быть описано одним потенциалом ϕ или χ , или, что то же, падение H -волны на изгиб (излом) вызывает появление E -волн, и наоборот. Если же на изгиб (излом) в плоскости, перпендикулярной к оси x , падает волна, в которой, например, $E_x \equiv 0$, то и в полном поле будет $E_x \equiv 0$, т. е. продольные волны двух различных типов ($E_x \equiv 0$ и $H_x \equiv 0$) на такой нерегулярности не преобразуются друг в друга. Введение продольных волн позволяет поэтому в задаче об изгибе (изломе) прямоугольного волновода обойтись одной скалярной функцией $\Pi_x^{(e)}$ или $\Pi_x^{(m)}$.

2. Существует любопытная *связь между однородными плоскими волнами и волнами в прямоугольном волноводе*, указанная Бриллюэном. Рассмотрение этой связи позволяет несколько менее формально подойти к изучению волноводов и в ряде сложных задач подсказывает методы их решения.

Начнем с несложных алгебраических преобразований выражений (10.9) для компонент полей простейшей волны H_{10} . Дописав опущенный в (10.9) множитель $\exp(-ihz)$ и придав нормировочному коэффициенту A наиболее удобное для дальнейшего значение, запишем (10.9) в виде

$$\begin{aligned} E_y &= e^{-ihz+iax} - e^{-ihz-iax}, \\ H_x &= \cos \beta_n [e^{-ihz+iax} - e^{-ihz-iax}], \\ H_z &= \sin \beta_n [e^{-ihz+iax} + e^{-ihz-iax}]. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Здесь введено обозначение

$$\cos \beta_n = \frac{h_n}{k}, \quad (10.12)$$

так что $\sin \beta_n = \alpha_n/k$.

Первое слагаемое в каждой из трех формул представляет собой компоненту поля плоской волны, идущей в направлении,

которое составляет угол $-\beta_n$ с осью z , второе — компоненту поля такой же волны, нормаль к которой составляет с осью z угол β_n . Действительно, три первых слагаемых удовлетворяют уравнениям Максвелла, амплитуды полей постоянны, фазовый множитель имеет вид $ik(-z \cos \beta_n + x \sin \beta_n)$, так что плоскость $-z \cos \beta_n + x \sin \beta_n = \text{const}$, в которой, как легко проверить, лежат векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, совпадает с поверхностью равных фаз и волна является поперечной. Таким образом, волна H_{01} состоит из двух плоских волн (волн Бриллюэна), идущих под направлением $\pm \beta_n$ к оси z . Интерференция этих плоских волн образует узловые плоскости, т. е. плоскости, на которых $E_y = 0$. Каждую из этих волн можно представлять себе как образованную отражением другой волны в боковой стенке волновода.

Такое же преобразование возможно и для более сложных полей волн H_{mq} и E_{mq} . Оно тоже состоит в замене тригонометрических функций суммой двух экспонент по формулам Эйлера; все компоненты полей представляются в виде суммы четырех слагаемых, и все поле записывается в виде суммы полей четырех плоских волн. Существенно, что выражение (10.12) для угла β_n , составляемого с осью z нормальями к плоскостям равных фаз каждой из этих волн, при этом сохраняется. Оно имеет универсальный характер. Можно показать, что и в волноводах круглого сечения, рассматриваемых ниже, поле любой волны представимо в виде суперпозиции плоских волн (на этот раз — бесконечного множества), и что нормали к этим волнам образуют с осью волновода угол β_n , связанный с постоянной распространения волноводной волны h_n тем же соотношением (10.12).

Представление поля в волноводе в виде суммы наклонных плоских волн позволяет, например, просто объяснить физический смысл выражения для фазовой скорости $v_n = ck/h_n$. В обозначениях (10.12) эта формула имеет вид

$$v_n = \frac{c}{\cos \beta_n}. \quad (10.13)$$

Она совпадает, разумеется, с формулой (4.66) для фазовой скорости плоской волны, если эту скорость измерять в направлении, составляющем угол β_n с направлением распространения. Именно этот угол составляет ось z , вдоль которой измеряется фазовая скорость волноводной волны, с направле-

нием распространения плоских волн, из которых эта волна складывается. Соотношения между путями, которые проходятся в разных направлениях за время dt , представлены на рис. 4. На этом рисунке ось z , в отличие от рис. 1, не совпадает с направлением распространения плоской волны; на обоих рисунках пунктирная линия дает поверхность равных фаз плоской волны.

Выражение для групповой скорости в волноводном режиме согласно (9.19) и (10.13) может быть записано в виде

$$v_n = c \cdot \cos \beta_n. \quad (10.14)$$

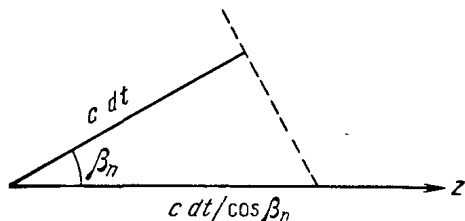


Рис. 4. Фазовая скорость и волны Бриллюэна.

Его также можно объяснить тем, что волноводная

волна есть сумма плоских волн. Проще всего при этом мысленно следить за движением короткого импульса. Он переносится плоской волной со скоростью c ; вдоль направления z он будет идти со скоростью в $\cos \beta_n$ раз меньшей (рис. 5), как и следует из (10.14).

Проследим, как с изменением частоты меняется характер волн Бриллюэна для какой-либо волны. При очень высоких

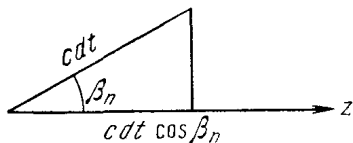


Рис. 5. Групповая скорость и волны Бриллюэна.

частотах ($k \gg \alpha_n$, $\lambda \ll \lambda_n$) угол β_n мал, волны Бриллюэна распространяются почти в направлении оси z , и, действительно, продольные компоненты весьма малы, скорость v_n близка к c — волноводная волна обладает свойствами, близкими к свойствам плоской волны. С умень-

шением частоты угол β_n растет. При приближении к критической частоте ($k \rightarrow \alpha_n$) угол β_n приближается к $\pi/2$, волны Бриллюэна распространяются почти перпендикулярно к оси z . Групповая скорость стремится к нулю, энергия почти не распространяется в направлении оси волновода. При $k = \alpha_n$ возникает своеобразный поперечный резонанс, волновой процесс в направлении оси z прекращается. Формально и для нераспространяющихся волн ($k < \alpha_n$, $h_n^2 < 0$) сохраняется, например,

разложение (10.11), но мнимый угол β_n не имеет уже простого физического смысла.

Концепция Бриллюэна имеет не только методическую ценность. Она может быть положена, например, в основу вычисления затухания волн в волноводах с неидеальными стенками. Распространение волны в волноводе представляет собой процесс многократного отражения нескольких плоских волн от стенок. Каждое отражение от неидеального металла сопровождается тепловыми потерями (7.22). Если в этой формуле положить угол падения β равным $\pi/2 - \beta_n$ и вычислить еще из очевидных геометрических соображений число отражений на единицу длины волновода, то получится правильное выражение для потерь на единицу длины; впервые потери были вычислены именно таким способом.

3. Волноводы *кругового поперечного сечения* надо исследовать в цилиндрической системе координат r, φ, z . Уравнение (9.4а) для *магнитных* волн имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 \psi = 0, \quad (10.15)$$

и решение его методом Фурье приводит к функциям

$$\psi(r, \varphi) = Z_m(\alpha r) \cos m\varphi, \quad (10.16)$$

где $Z_m(\alpha r)$ — цилиндрическая функция, т. е. одна из функций, удовлетворяющая уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 Z_m(\alpha r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ_m(\alpha r)}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) Z_m(\alpha r) = 0. \quad (10.17)$$

Выбор функции Z_m и чисел m и α , при которых (10.16) является решением задачи (9.4), производится иным способом, чем в прямоугольном волноводе; граничное условие (9.4б) было бы для этого недостаточно. Используются два дополнительных соображения, связанных с особенностью цилиндрической системы координат. Перемещение по замкнутой кривой, охватывающей начало координат (например, по окружности $r = \text{const}$), возвращает в ту же точку и одновременно изменяет значение φ на $2\pi, 4\pi$ и т. д. Следовательно, (10.16) должно быть инвариантно относительно такого изменения φ . Поэтому число m должно быть целым ($m = 0, 1, 2, \dots$). Начало координат входит в область определения φ , поэтому функция Z_m должна оставаться конечной при $r = 0$. Так как

$r=0$ есть особая точка уравнения (10.17), то этим выделяется определенная цилиндрическая функция, так называемая функция Бесселя $J_m(\alpha r)$ — единственное решение (10.17), не имеющее особенности при $r=0$. Наконец, значение α определяется из граничного условия на контуре C , т. е. при $r=a$, где a — радиус волновода. Оно приводит к тому, что $J'_m(\alpha a)=0$, откуда и получается дискретный ряд собственных значений задачи (9.4):

$$\alpha_{mq} = \frac{\mu_{mq}}{a}. \quad (10.18a)$$

Числа μ_{mq} — корни производной функций Бесселя — приводятся в любой таблице этих функций. Чаше всего в практике из этих чисел встречаются

$$\mu_{11}=1,84; \quad \mu_{01}=3,83. \quad (10.19)$$

Таким образом, потенциальная функция магнитных волн в круглом волноводе имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_n &= A J_m \left(\frac{\mu_{mq}}{a} r \right) \cos m\varphi, \\ A &= \sqrt{\frac{2}{\pi(1+\delta_{0m})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_{mq}^2 - m^2} J_m(\mu_{mq})} \quad (10.20) \\ (m &= 0, 1 \dots; q = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Множитель $\cos m\varphi$ может быть заменен множителем $\cos m(\varphi + \varphi_0)$, где φ_0 — любой угол; такая замена означает лишь изменение начала отсчета углов. Для любого $m \neq 0$ существует два независимых решения, отличающихся значениями φ_0 , например, решения с множителями $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$; решение с любым другим φ_0 может рассматриваться как комбинация этих двух решений.

Волна с потенциальной функцией (10.20) называется волной H_{mq} . Наибольший интерес среди всех волн круглого волновода представляет волна H_{11} ($m=1, q=1, \alpha_n=1,84/a$). Она имеет *наименьшее* значение α_n — не только среди H -волн (10.19), но и по сравнению с E -волнами, которые мы рассмотрим ниже. Как уже отмечалось, это означает, что в некотором диапазоне длин волн эта волна — единственная, распространяющаяся без затухания. Ее критическая длина волны $\lambda_n = 2\pi/\alpha_n$ равна $3,4a$. Ближайшей к ней по критической

длине волны оказывается одна из волн E -типа, волна E_{01} , для которой $\alpha_n = 2,4/a$ и $\lambda_n = 2,6a$. Таким образом, для круглого волновода условия одноволновости выполняются для длин волн, лежащих в диапазоне

$$2,6a < \lambda < 3,4a. \quad (10.21)$$

Компоненты полей волн с потенциальной функцией (10.20) находятся дифференцированием этой функции по r и φ . Соответствующие формулы могут быть получены либо из (8.56), либо непосредственно при подстановке (8.5a) в уравнения Максвелла, записанные в цилиндрических координатах. Мы запишем эти формулы в общем виде, включив также потенциальную функцию $\chi(r, \varphi)$, описывающую электрические волны. Имея в виду их применение в теории диэлектрических цилиндров, мы приведем их в форме, справедливой и при $\varepsilon \neq 1$, $\mu \neq 1$:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \left(-ik\mu \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - ih \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) e^{-ihz}, \\ E_\varphi &= \left(ik\mu \frac{\partial \psi}{\partial r} - ih \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) e^{-ihz}, \\ E_z &= \alpha^2 \chi e^{-ihz}, \\ H_r &= \left(-ih \frac{\partial \psi}{\partial r} + ik\varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) e^{-ihz}, \\ H_\varphi &= \left(-ih \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - ik\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) e^{-ihz}, \\ H_z &= \alpha^2 \psi e^{-ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

Первые слагаемые дают поля H -волн ($\chi \equiv 0$), вторые — поля E -волн ($\psi \equiv 0$).

Поля несимметричных ($m \neq 0$) H -волн, в частности, поле основной волны H_{11} , содержат пять компонент. В особом положении находятся симметричные волны H_{0q} ; их поля содержат только три компоненты E_φ, E_r, H_z . Своеобразие волн H_{0q} состоит в том, что при их распространении на стенках не образуется зарядов (ибо нормальная компонента E , т. е. E_r , равна нулю), а ток содержит только азимутальную составляющую (так как $H_\varphi \equiv 0$). Распространение энергии в осевом направлении не сопровождается протеканием осевого тока. Отсутствие осевого тока делает эти волны мало чувстви-

ными к азимутальным щелям; для волн всех других типов азимутальные (и вообще, для волноводов любого сечения — поперечные) щели перерезают линии тока и потому вызывают значительное искажение поля. Поэтому во вращающихся сочленениях волноводов оказывается весьма удобным применять волны H_{0q} , в первую очередь волну H_{01} .

Теория волн *электрического* типа, которые описываются потенциалом χ (9.8), отличается от развитой теории H -волн только граничным условием для потенциала $\chi(r, \varphi)$ при $r=0$. Значения α_n определяются теперь условием, что $J_m(\alpha_n a)=0$, так что

$$\alpha_{mq} = \frac{\gamma_{mq}}{a}, \quad J_m(\gamma_{mq}) = 0. \quad (10.186)$$

Простейшую, симметричную E -волну (E_{01}) мы уже упоминали; $\gamma_{01}=2,40$. Она содержит три компоненты полей E_z , E_r , H_φ и интересна тем, что это — единственная волна (вместе, впрочем, с другими E_{0q} -волнами), для которой продольная компонента E_z отлична от нуля на оси (при $r=0$). Поэтому волна E_{01} , или ее аналог в более сложных симметричных системах, применяется в электронных приборах, где надо обеспечить эффективное взаимодействие электромагнитного поля с осевым потоком электронов. Следующей (в последовательности критических частот) за волной E_{01} является волна E_{11} . Интерес к ней связан с тем, что она имеет то же значение α_n , т. е. ту же критическую частоту, а потому и ту же фазовую скорость, что и волна H_{01} ($\gamma_{11}=\gamma_{01}=3,83$, так как $J_1(x) \equiv -J'_0(x)$). Это вырождение (совпадение критических частот) волн H_{01} и E_{11} оказывается существенным в проблеме передачи волны H_{01} на большие расстояния. Точно так же, разумеется, вырождены все пары волн E_{1q} и H_{0q} .

§ 11. Двухсвязные сечения. Кабельные волны

1. Теория волноводов более сложных сечений (эллиптических, составленных из нескольких прямоугольных областей и т. д.), применяемых в технике сантиметровых волн, сводится к решению тех же двумерных задач (9.4) и (9.8) и нами не рассматривается. Существует, однако, широкий класс сечений — двухсвязные и, вообще, многосвязные сечения, для

которых теория строится несколько иначе. Примерами таких линий являются *коаксиальный кабель* или *двухпроводная линия*. Для них осуществляется возможность, отмеченная в (9.3).

Как известно, $\alpha=0$ не может быть собственным значением задач (9.4) или (9.8), так как при $\alpha=0$ уравнение для потенциальных функций становится уравнением Лапласа, а это уравнение при граничных условиях $\chi|_C = \text{const}$ или $\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_C = 0$ имеет только тривиальное решение $\chi = \text{const}$ или $\psi = \text{const}$. Однако для многосвязной области граничное условие (9.3а) означает лишь, что χ не может быть различным в различных точках одного и того же контура. Для многосвязных контуров существует решение уравнения Лапласа, при котором χ постоянно на каждом контуре, но на разных контурах имеет разное значение. Следовательно, в волноводах, сечение которых состоит из нескольких контуров, возможны волны, для которых потенциальная функция удовлетворяет условиям

$$\nabla^2\chi=0, \quad \chi|_{C_j}=\chi_j \quad (11.1)$$

(j — номер контура), где χ_j постоянные, и

$$h=k, \quad (11.2)$$

г. е. $\alpha=0$.

Структура полей этих волн значительно проще структуры действительно волноводных волн. Согласно (8.5а) в них отсутствуют продольные компоненты, $E_z=0$, $H_z=0$, а поперечные компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны между собой так же, как в плоской волне,

$$E_x = H_y = -ik \frac{\partial\chi}{\partial x} e^{-ikz}, \quad E_y = -H_x = -ik \frac{\partial\chi}{\partial y} e^{-ikz}. \quad (11.3)$$

Однако, в отличие от плоских волн, эти компоненты в сечении непостоянны, т. е. зависят от x и y . Эти волны могут распространяться при любых частотах ($\lambda_{\text{крит}} = \infty$) и не обладают дисперсией, $v=c$, $u=c$. Если линия заполнена однородным диэлектриком, то $v=u=\frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$. Имея в виду их поперечность, их называют *ТЕМ-волнами* или *кабельными волнами*. Согласно (11.1) и (10.3) электрическое поле в по-

перечном сечении совпадает с *электростатическим* полем, которое образуется между проводами, заряженными до потенциалов $V_j = ik\chi_j$. Электростатический потенциал этого поля равен $ik\chi$. Например, для коаксиального кабеля с радиусами внутреннего и наружного цилиндров b и a ($a > b$)

$$\chi = (\chi_1 - \chi_2) \frac{1}{\ln a/b} \ln r + \text{const.} \quad (11.4)$$

Для более сложных форм сечения определение $\chi(x, y)$ производится методами двумерной теории потенциалов, в первую очередь методом конформных отображений.

Для *ТЕМ*-волн можно естественным путем определить обычные в теории цепей понятия напряжения и тока. Под *напряжением* следует понимать интеграл от электрического поля, взятый между проводами вдоль любой линии, расположенной в плоскости сечения. Так, для линии из двух отдельных проводов (коаксиал, двухпроводная линия) разность потенциалов (напряжение) равна $ik(\chi_2 - \chi_1)$. Ток течет только в продольном направлении, и *полным током* называется интеграл от плотности тока, взятый вдоль контура сечения любого проводника. Согласно (7.13) и (11.4) поверхностная плотность тока равна $\frac{c}{4\pi} ik \frac{\partial \chi}{\partial n}$; полный ток равен $\frac{ikc}{4\pi} \oint \frac{\partial \chi}{\partial n} ds$. Отношение напряжения между проводами к току в каждом из них равно

$$W = \frac{1}{c} \cdot \frac{\chi_1 - \chi_2}{\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \chi}{\partial n} ds}. \quad (11.5)$$

Эта величина называется *волновым сопротивлением линии*; она имеет существенное значение при согласовании различных линий или линии с оконечными устройствами. Множитель при $1/c$ в (11.5) имеет простое электростатическое значение. Он равен $1/C_0$, где C_0 — так называемая *погонная емкость* линии, т. е. отношение емкости между двумя проводами очень длинной линии к ее длине. Действительно, заряд на каждом проводнике равен деленной на 4π нормальной компоненте поля, так что знаменатель в (11.5) только множителем ik отличается от полного заряда на единицу длины в электростатической задаче. Числитель отличается этим же множителем

от разности потенциалов, откуда и следует указанное соотношение

$$W = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{C_0} \quad (11.6a)$$

между волновым сопротивлением и погонной емкостью.

Формула (11.6a) принадлежит к тем нескольким формулам в теории электродинамики сверхвысоких частот, для которых применяемая нами гауссова система единиц неудобна. Единица сопротивления в этой системе в $9 \cdot 10^{11}$ раз больше ома, погонная емкость — безразмерна. Подставляя численное значение c , получим

$$W = 30 \cdot \frac{1}{C_0} \text{ ом.} \quad (11.6б)$$

Например, для коаксиального кабеля, подставляя (11.4), получим

$$W = 60 \ln a/b \text{ ом.} \quad (11.6в)$$

2. Кабельные волны (11.2) — (11.3) были изучены на основе методов, заимствованных из теории квазистатических цепей, значительно раньше, чем была создана теория волноводов. Применялся аппарат так называемых *телеграфных уравнений* — двух дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных для тока и напряжения как функции времени и координаты z . Мы не приводим этих уравнений и их вывода, так как основной результат этой теории состоял именно в доказательстве существования волны со свойствами (11.1), (11.2) и (11.6).

Можно отметить два круга вопросов, в которых использование телеграфных уравнений позволяет проще получить результаты, чем электродинамические методы. Во-первых, в этих уравнениях несколько легче учесть конечную проводимость металла и проводимость среды, заполняющих пространство между проводниками. Во-вторых, они позволяют приближенно определить отражение кабельной волны от нерегулярных участков линии, включенных неоднородностей и т. д. Следует при этом иметь в виду, что телеграфные уравнения не описывают сложного поля, возникающего в нерегулярных линиях, и их применимость ограничена условием, что это поле

малѡ. Это условие во всяком случае требует, чтобы поперечный размер линии был мал по сравнению с длиной волны.

3. Различие между *ТЕМ*-волнами коаксиального кабеля и двухпроводной линии невелико и почти полностью описывается различием численного значения погонной емкости. Однако электродинамические свойства этих линий существенно различны.

Двухпроводная линия является *открытой* системой. Никакие волноводные волны, отличные от *ТЕМ*-волны, в ней распространяться не могут. В частности, в нерегулярных участках происходит излучение, т. е. формируются сферические волны, уносящие часть энергии в бесконечность.

Коаксиальный кабель представляет собой замкнутую, экранированную линию. Наряду с *ТЕМ*-волной вдоль нее могут распространяться и волноводные волны, обладающие отличным от нуля значением критической частоты ($\alpha_n \neq 0$). При достаточно высокой частоте эти волноводные волны распространяются без затухания, линия перестает быть одноволновой, что приводит к серьезным нарушениям в передаваемом сигнале. Рассмотрим коротко *H-волны коаксиального кабеля* (*E*-волны исследуются таким же образом). Уравнение (10.15) вновь решается в функциях (10.16), и m должно быть целым числом. Однако, в отличие от круглого волновода, точка $r=0$ не расположена в поле, поэтому $Z_m(ar)$ должно содержать не только $J_m(ar)$, но и функцию Неймана $N_m(ar)$ — второе линейно независимое решение уравнения (10.17), обращающееся в бесконечность при $r=0$,

$$Z_m(ar) = AJ_m(ar) + BN_m(ar). \quad (11.7)$$

Функция $\psi(r, \varphi)$ (10.16) должна удовлетворять условию $\partial\psi/\partial r = 0$ при двух значениях r — при $r=a$ и $r=b$. Второе условие заменяет для кольца требование конечности поля при $r=0$, которое должно было выполняться для круга. Условия $Z'_m(aa)=0$ и $Z'_m(ab)=0$ представляют собой два уравнения для двух неизвестных — для a и отношения A/B . Исключая из этих условий это отношение, или, что то же, записывая условия совместности двух линейных уравнений для A и B , получим искомое уравнение для a :

$$J'_m(aa) N'_m(ab) - J'_m(ab) N'_m(aa) = 0. \quad (11.8)$$

При $b=0$ оно, разумеется, переходит в уравнение $J'_m(aa)=0$ для собственных частот *H*-волн в круглом волноводе.

Численный анализ уравнения (11.8) показывает, что, как и в круглом волноводе, наименьшее значение α соответствует первой из волн с $m=1$, т. е. волне H_{11} . Оказывается, что $\alpha_{H_{11}}$ меньше также всех значений α для E -волн, так что с ростом частоты первой становится незатухающей волна H_{11} . Ее критическая длина волны $\lambda_n = 2\pi/\alpha_n$ в хорошем приближении дается простой формулой $\lambda_n = \pi(a + b)$. Наименее точна эта формула при $b=0$, когда по ней $\lambda_n = \pi a$ вместо точного $\lambda_n = \frac{2\pi}{1,84}a$, т. е. она дает ошибку менее 10%. Таким образом, коаксиальный кабель является одноволновой линией для всех волн длиннее $\pi(a + b)$.

4. В последние годы для волн дециметрового диапазона начали применять новый тип открытых двухпроводных линий — так называемые *несимметричные полосковые линии*. В простейшем варианте — это металлическая полоса, расположенная параллельно металлической плоскости и отделенная от нее слоем диэлектрика. Полоса и плоскость представляют собой два проводника, вдоль которых идет кабельная волна. Такая система проста в изготовлении и, главное, может быть получена по методу печатных схем.

Развитая выше теория недостаточна для описания волн в такой полосковой линии, так как в ней диэлектрик неоднороден по поперечному сечению. Строгая теория такой линии очень сложна*). Поле кабельной волны не является чисто поперечным, в нем отличны от нуля все шесть компонент. Фазовая скорость не равна c , как для кабельной линии в пустоте, и не равна $c/\sqrt{\epsilon}$, как было бы, если бы все поле было сосредоточено в диэлектрике. Фазовая скорость зависит от частоты, хотя и не так сильно, как для волноводных волн. Кабельные волны в несимметричной полосковой линии обладают некоторыми свойствами описанных в следующей главе поверхностных волн, распространяющихся вдоль диэлектрических пластинок или стержней, но более похожи они на TEM -волны в двухпроводной линии в пустоте, так как основным фактором, обеспечивающим концентрацию поля, является наличие двух проводников, а не существование ограниченной в поперечном сечении диэлектрической пластинки. Элементар-

*) Полосковые системы сверхвысоких частот. Сборник под редакцией В. Сушкевича, ИЛ, 1959.

ная теория, пренебрегающая существованием границы раздела диэлектрика и предполагающая, что продольные компоненты E_z и H_z и поперечная компонента тока отсутствуют, дает удовлетворительные результаты.

Упомянем еще о так называемой *симметричной полосковой линии*, состоящей из металлической ленты, расположенной между двумя параллельными ей металлическими плоскостями. Диэлектрик заполняет все пространство между этими плоскостями. Основная волна в ней является *ТЕМ*-волной, и вся система аналогична коаксиальному кабелю, в котором внешний цилиндр заменен двумя плоскостями.

§ 12. Потери в волноводах

1. Если волновод заполнен диэлектриком, неоднородным в поперечном сечении, так что $\epsilon = \epsilon(x, y)$ или $\mu = \mu(x, y)$, то распространяющиеся по нему волны обладают значительно более сложными свойствами. Нарушается деление на *E*- и *H*-волны; поля, вообще говоря, содержат все шесть компонент. Зависимость фазовой скорости от частоты не дается более универсальной формулой (9.17) и для ее определения вообще не существует общего метода.

Конечная проводимость стенок представляет собой, строго говоря, пример такой поперечной неоднородности, так как поле проникает в металл, диэлектрическая проницаемость (комплексная) которого отлична от проницаемости среды, заполняющей волновод. Однако для металлов с хорошей проводимостью, если применимо граничное условие Леонтовича, можно не вводить в рассмотрение это внутреннее поле. Волны в волноводе с такими стенками близки к волнам в волноводе того же сечения с идеальными стенками. Конечная проводимость является малым возмущением. Оно приводит к тому, что в поле *H*-волн возникают относительно малые компоненты *E*-волн в частности, малая компонента E_z , а в поле *E*-волн — малая компонента H_z . Общая формула (9.13), выражающая h через собственное значение α краевой задачи, сохраняется. Однако эта краевая задача становится несколько более сложной. Волновые уравнения (9.4), (9.8) для функций ϕ и χ остаются прежними, но краевые условия *связывают* эти функции друг с другом, и α определяется из условия, что уравнения (9.4) и (9.8) с этими краевыми условиями имеют

нетривиальные решения. Краевые условия, которые мы здесь не выписываем, получаются из граничных условий Леонтовича,

$$E_s = \mathcal{W} H_z; \quad E_z = -\mathcal{W} H_s, \quad (12.1)$$

если участвующие в них компоненты полей (s — тангенциальное направление, лежащее в плоскости сечения) выразить согласно (8.5) через потенциальные функции ϕ и χ . Эти краевые условия содержат малый множитель $\mathcal{W}$, так что возникающая краевая задача отличается от краевой задачи для волноводов с бесконечно проводящими стенками возмущением в краевых условиях. Применяя методы теории возмущения, можно найти поправку к α^2 ; она, разумеется, будет порядка $|\mathcal{W}|$. Таким образом, и h^2 отличается от h_0^2 на член, пропорциональный $|\mathcal{W}|$; как и всюду в этом параграфе, индекс «нуль» будет относиться к невозмущенной задаче о волноводе с идеальными стенками.

Фазовая скорость $v = c / \text{Re } h$ отличается от v_0 на малую величину, пропорциональную толщине скин-слоя. Конечная проводимость приводит к проникновению поля в металл, она как бы эквивалентна некоторому расширению волновода, и поэтому $v < v_0$. Так как $\mathcal{W}$ комплексно, то и α^2 , и h — комплексны. Понятие критической частоты в волноводах с неидеальными стенками теряет свой абсолютный характер. При $k > \alpha_0$ существует некоторое затухание, h приобретает небольшую мнимую часть. При $k < \alpha_0$ наряду с очень большим экспоненциальным затуханием остается и некоторый волновой процесс, так как в h сохраняется небольшая вещественная часть. Вблизи критической частоты происходит быстрое изменение свойств волноводной волны.

Из всех описанных выше эффектов, вызываемых конечной проводимостью, наибольший интерес представляет *затухание* волны при $k > \alpha_0$. Действительно, изменение фазовой скорости существенно только в некоторых очень точных измерительных приборах. Использование волноводов вблизи критической частоты неудобно по многим причинам, в частности, из-за того, что, как мы увидим, в этой области частот затухание велико даже при $k > \alpha_0$.

2. Вычисление затухания при частоте, заметно большей критической, мы произведем не с двумя волновыми уравнениями для χ и ϕ , а по более простой схеме, с использованием формул (7.18). Напомним, что в этой формуле z направ-

лено в металл, так что в наших обозначениях (7.18) выражает средний за период на единицу площади *поток энергии в металл*, вычисленный через значение тангенциальных к металлу компонент магнитного поля, т. е. H_z и H_s . Магнитное поле надо при этом вычислять для волновода с идеальными стенками, т. е. не нужно учитывать его возмущение конечной проводимостью стенок. В этом, как мы отмечали, и состоит достоинство формулы (7.18) — малый параметр (толщина скин-слоя d) в ней является общим множителем, а поэтому остальные величины в ней можно вычислять в нулевом порядке.

Поток энергии в металл на единицу длины равен $\oint \bar{\mathcal{E}}_n ds$, где интеграл взят по контуру поперечного сечения. Поток энергии, переносимый в направлении оси z , равен $\int \bar{\mathcal{E}}_z dS$, где интеграл взят по площади поперечного сечения. Зная эти две величины, легко найти искомый коэффициент затухания h'' — мнимую часть волнового числа $h = h' - ih''$. Действительно, все компоненты полей убывают по модулю как $\exp(-h''z)$, поток энергии $\int \bar{\mathcal{E}}_z dS$ убывает как $\exp(-2h''z)$. Рассмотрим участок волновода, ограниченный двумя поперечными сечениями — при z и при $z + dz$. Разность потоков энергии в направлении оси z через оба сечения равна $2h''dz \int \bar{\mathcal{E}}_z dS$. Эта энергия уходит в стенки и равна $dz \oint \bar{\mathcal{E}}_n dS$. Таким образом,

$$h'' = \frac{\oint \bar{\mathcal{E}}_n ds}{2 \int \bar{\mathcal{E}}_z dS}. \quad (12.2)$$

Выражая потоки через поля, получаем (для сокращения записи принимаем, что в металле $\mu = 1$)

$$h'' = \frac{kd}{4} \frac{\oint \{|H_s|^2 + |H_z|^2\} ds}{\operatorname{Re} \int (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dS}. \quad (12.3)$$

Так как в этой формуле малый параметр kd стоит множителем, то как в числителе, так и в знаменателе формулы можно под E и H понимать невозмущенные поля, т. е. поля волн в волноводе с идеально проводящими стенками,

Оба интеграла, участвующие в (12.3), легко выражаются по формулам (8.5) через потенциальные функции ψ (для H -волн) и χ (для E -волн). Поток энергии пропорционален $\int (\nabla \psi)^2 dS$ или $\int (\nabla \chi)^2 dS$ и с учетом принятой нами нормировки (9.11) равен

$$\int \tilde{\mathcal{E}}_z dS = \frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Re} h_0. \quad (12.4)$$

В рассматриваемой сейчас задаче h_0 — волновое число в волновомод с идеальными стенками — вещественно, и в (12.4) можно опустить знак Re . Формула (12.4) иллюстрирует очевидное обстоятельство — при частоте ниже критической, когда $h_0^2 < 0$, в волновомод с идеальными стенками волна не переносит в среднем энергию в направлении z .

Выражения для h'' для магнитных и электрических волн, полученные по (12.3), имеют вид для H -волн

$$h'' = \frac{d}{4h_0} \left\{ h_0^2 \oint \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial s} \right)^2 ds + \alpha_0^4 \oint \psi_0^2 ds \right\}, \quad (12.5a)$$

для E -волн

$$h'' = \frac{k^2 d}{4h_0} \oint \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial n} \right)^2 ds. \quad (12.5b)$$

3. Коэффициент затухания h'' имеет порядок $k \cdot kd$, т. е. он очень мал, пропорционален отношению d/λ . Он пропорционален также отношению длины контура поперечного сечения к площади сечения. Как всякий *поверхностный эффект*, затухание тем больше, чем больше отношение объема, примыкающего к поверхности, ко всей поверхности. При прочих равных условиях затухание для малых волноводов больше, чем для больших.

Довольно сложно зависит h'' от частоты. При $h_0 = 0$ по формулам (12.5) затухание бесконечно. В этой области формулы (12.5) неверны, так как принятое при их выводе предположение, что неидеальность стенок представляет собой малое возмущение, при $k \approx \alpha_0$ нарушается.

Более подробный анализ, основывающийся на решении граничной задачи с условием (12.1), показывает, что при $k = \alpha_0$ h''/k остается конечным, но будет не порядка kd , а много больше — порядка $(kd)^{1/2}$. Уже при $(k - \alpha_0)/k \gg kd$ формулы (12.5) справедливы, так что *при приближении к критической частоте h'' действительно сильно растет*. Это

связано с тем, что вблизи критической частоты даже большие поля обеспечивают передачу лишь малого потока в направлении z (множитель h_0 в (12.4)). С ростом частоты h'' сначала убывает, а затем вновь растет, как $k^{1/2}$ (рис. 6). Действительно, толщина скин-слоя d пропорциональна $\sqrt{\lambda}$, т. е. $d \sim k^{-1/2}$, при высоких частотах h растет, как k , откуда и следует, что, согласно (12.5), $h'' \sim k^{1/2}$. Эти оценки справедливы при постоянных размерах волновода. Если же учесть, что с ростом частоты уменьшается размер сечения применяемых волноводов, то h'' возрастает еще более круто, $h'' \sim k^{3/2}$.

4. Из правила, что при высоких частотах затухание возрастает с частотой, есть одно исключение. Это возрастание связано с компонентой H_z , т. е. с продольными токами, которые при высоких частотах, когда волна приближается по своим свойствам к плоской волне, становятся преобладающими. В E -волнах поперечных токов вообще нет ($H_z \equiv 0$),

в H -волнах первое слагаемое в (12.5а) при высоких частотах много больше второго, связанного с H_z . Однако существует одно семейство волн — волны H_{0q} в круглом волноводе, для которых вообще нет продольных токов ($H_z \equiv 0$, или, что то же самое, $\partial\psi/\partial s \equiv 0$). Для них формула (12.5а) дает при высоких частотах $h'' \sim k^{-3/2}$, т. е. неограниченное убывание потерь с ростом частоты. Правда, если и теперь принять, что с уменьшением длины волны надо пропорционально уменьшать радиус волновода, то вновь получим $h'' \sim k^{3/2}$. Следовательно, действительно малое затухание, $h'' \sim k^{-3/2}$, может быть достигнуто только в широких по сравнению с длиной волны в круглых волноводах. Опыты показали, что, действительно, при $\alpha \approx 30$ мм и $\lambda \approx 8$ мм удается обеспечить чрезвычайно малые потери волны H_{01} — порядка нескольких децибел на километр. Создание трактов для передачи сигналов на сверхдальние расстояния на волне H_{01} в круглом волноводе является, по-видимому, осуществимой задачей. Главная трудность в ней состоит в том, чтобы уменьшить преобразование волны H_{01} в волны других типов

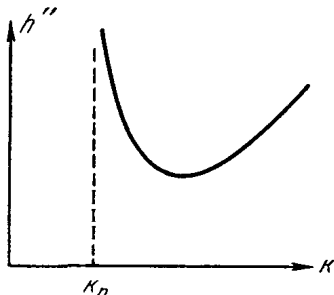


Рис. 6. Затухание в волноводе.

на нерегулярностях тракта. Тракт является многоволновым, т. е. в нем может распространяться множество волн.

Уменьшение затухания волн H_{0q} с частотой в круглом волноводе можно объяснить независимо от предыдущих рассуждений, если основываться на концепции Бриллюэна. Волна H_{0q} может быть представлена как совокупность плоских волн, падающих на стенки волновода под углом скольжения β (10.12) и поляризованных таким образом, что E перпендикулярно к плоскости падения. Волны H_{0q} — единственные, для которых соответствующие плоские волны не содержат второй компоненты. Согласно формуле (7.22), в которой β надо заменить на $\pi/2 - \beta$, для плоских волн этой поляризации потери при отражении пропорциональны $\sin \beta$. С ростом частоты угол Бриллюэна β стремится к нулю, каждое отражение сопровождается очень малыми потерями. Для второй поляризации потери не убывают с углом скольжения, и если разложение волноводной волны на плоские волны Бриллюэна содержит также волны второй поляризации, то волноводные волны на высоких частотах будут сильно затухать.

Приведем в заключение формулы для затухания основных волн в волноводах прямоугольного сечения (12.6), круглого сечения (12.7) и TEM -волны в коаксиальном кабеле (12.8)

$$H_{10}, \quad h'' = \frac{d}{h_0 a} \left(k^2 \frac{a}{2b} + \frac{\pi^2}{a^2} \right); \quad (12.6)$$

$$H_{11}, \quad h'' = \frac{d}{2(\mu^2 - 1) a h_0} \left[k^2 + \frac{\mu^2 (\mu^2 - 1)}{a^2} \right]; \mu = \mu_{11} = 1,84; \quad (12.7)$$

$$TEM, \quad h'' = kd \frac{1/a + 1/b}{2 \ln a/b}. \quad (12.8)$$

Эти формулы получены из (12.5) по формулам (10.7), (10.20), (11.4) для потенциальных функций. Порядок величины затухания в дециметровой области для наиболее употребительного прямоугольного волновода — сотые децибела на метр. Например, при $a = 7,2$ см, $b = 3,4$ см, $\lambda = 10$ см и $d = 1$ мм (медь), затухание $h'' = 1,8 \cdot 10^{-3}$ см⁻¹, т. е. равно 0,015 дб/м. В коротковолновой области затухание становится значительно больше, и одноволновые прямоугольные волноводы для $\lambda \approx 2$ мм имеют затухание порядка 5 дб/м. Значительное затухание — одна из основных причин, ограничивающих применение волноводов на длинах волн порядка 1—2 мм и меньше.

МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ

§ 13. Диэлектрический стержень

1. Вдоль диэлектрического стержня любой формы сечения могут распространяться цилиндрические волны. В отличие от волн в волноводах, поля этих волн отличны от нуля во всем пространстве. Диэлектрические стержни представляют собой пример *неэкранированных линий*, аналогичных, в этом смысле, двухпроводному кабелю. Однако при удалении от стержня поля волн убывают, как мы увидим, экспоненциально, т. е. значительно быстрее, чем поле волн двухпроводного кабеля. Поля сосредоточены внутри и вблизи диэлектрика.

Полная теория цилиндрических волн существует только для круглых стержней, круглых труб и для идеализированной двумерной модели — плоской пластинки. Для других сечений построить эффективную теорию, позволяющую найти поля, скорость и другие свойства волн, либо очень трудно (эллиптическое сечение), либо практически невозможно (прямоугольное сечение). В отличие от волноводных волн, не существует общей теории, сводящей задачу о полях любых волн к двумерному уравнению Гельмгольца. Теорию волн в диэлектрических стержнях надо начинать с явных выражений для полей через специальные функции — цилиндрические для круглых стержней, тригонометрические и экспоненциальные — для пластин.

Мы начнем с симметричных волн электрического типа, распространяющихся вдоль круглого диэлектрического стержня. Поля симметричных (т. е. не зависящих от угла φ) волн в круглом стержне выражаются, как мы сейчас увидим, через одну потенциальную функцию. Основой теории являются формулы (10.22)

$$E_z = (k^2 \varepsilon - h^2) \chi e^{-ihz}, E_r = -ih \frac{\partial \chi}{\partial r} e^{-ihz}, H_\varphi = -ik\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial r} e^{-ihz}. \quad (13.1)$$

Остальные компоненты равны нулю. Потенциальная функция удовлетворяет уравнению (8.66)

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} + (k^2\varepsilon - h^2)\chi = 0. \quad (13.2)$$

Вне стержня $\varepsilon = 1$. Из предыдущих рассуждений следует, что если выполняется (13.2), то поля (13.1) удовлетворяют уравнениям Максвелла в любой области, в которой ε постоянно. Предположив, что существует решение (13.1), мы установим сейчас, что могут быть удовлетворены и граничные условия — этим и будет доказано утверждение о существовании симметричных E -волн.

Внутри стержня, при $r < a$, где a — радиус стержня, решением уравнения (13.2) является функция Бесселя — единственное решение этого уравнения, остающееся конечным при $r = 0$. Таким образом,

$$\chi(r) = AJ_0(\tau r), \quad \tau = \sqrt{k^2\varepsilon - h^2}. \quad (13.3)$$

Потенциальная функция вне стержня должна удовлетворять такому же уравнению (13.2) при $\varepsilon = 1$, т. е. должна выражаться цилиндрической функцией от аргумента αr , $\alpha^2 = k^2 - h^2$. Выбор этой цилиндрической функции следует производить из так называемых *условий на бесконечности*, т. е. из требования, чтобы поле при $r \rightarrow \infty$ имело определенный характер. В рассматриваемой сейчас задаче о свободных колебаниях, т. е. о волнах вдоль стержня, поле при $r \rightarrow \infty$ должно стремиться к нулю, причем достаточно быстро, быстрее, чем $r^{-1/2}$, чтобы поток энергии через любое сечение $z = \text{const}$ был конечным. Это требование будет удовлетворено, если мы положим

$$\chi(r) = BH_0^{(2)}(\alpha r), \quad \alpha = \sqrt{k^2 - h^2} \quad (13.4)$$

и примем определенный ниже знак $\text{Im } \alpha$. Функция Ханкеля $H_0^{(2)}(\alpha r)$ при больших значениях аргумента имеет вид

$$H_0^{(2)}(\alpha r) = A \frac{1}{\sqrt{\alpha r}} e^{-i\alpha r}, \quad A = \sqrt{\frac{2i}{\pi}}, \quad (13.5)$$

и для того, чтобы $\varphi(r)$ исчезал при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем $r^{-1/2}$, должно быть $\text{Im } \alpha < 0$. Прибавление к (13.4) еще одной цилиндрической функции, например, $H_0^{(1)}(\alpha r)$, привело бы к тому, что $\chi(r)$ либо возрастало бы при $r \rightarrow \infty$ (при $\text{Im } \alpha \neq 0$),

либо убывало бы только как $r^{-1/2}$ (при $\text{Im } \alpha = 0$), поэтому условие на бесконечности приводит к однозначному выбору определенной цилиндрической функции в (13.4).

Граничные условия при $r = a$ требуют непрерывности двух отличных от нуля в поле (13.1) тангенциальных компонент E_z и H_φ , так что должны выполняться уравнения

$$\tau^2 A J_0(\tau a) = \alpha^2 B H_0(\alpha a), \quad \epsilon \tau A J_1(\tau a) = \alpha B H_1(\alpha a). \quad (13.6)$$

При записи второго уравнения в (13.6) учтено, что $Z'_0(x) = Z_1(x)$.

Уравнения (13.6) представляют собой систему двух линейных уравнений для A и B . Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов при A и B , т. е. равенство

$$\frac{\tau a J_0(\tau a)}{\epsilon J_1(\tau a)} = \frac{\alpha a H_0^{(2)}(\alpha a)}{H_1^{(2)}(\alpha a)}. \quad (13.7)$$

Полученное дисперсионное уравнение содержит одну неизвестную величину — постоянную распространения h , которая входит неявно, через α и τ . Разумеется, таким же образом можно было бы найти и дисперсионное уравнение $J(\sqrt{k^2 - h^2} a) = 0$ для симметричных E -волн в волноводе круглого сечения, потребовав выполнения единственного граничного условия на металле $E_z(r=a) = 0$.

Характер построений (13.1) — (13.7) является типичным в задачах о свободных колебаниях. Решение начинается с предположения о структуре поля (13.1), затем ищется явный вид поля (13.3) и (13.4) с неопределенными коэффициентами и из граничных условий устанавливается система линейных уравнений (13.6) для этих коэффициентов. Для свободных колебаний исключение этих неизвестных приводит к характеристическому (дисперсионному) уравнению (13.7), из которого можно найти фазовую постоянную h , а затем и отношение коэффициентов A/B . Для вынужденных колебаний, которые будут рассмотрены в § 32, из такой системы уравнений находится отношение всех коэффициентов, описывающих вторичные поля, к амплитуде возбуждающей волны, которая считается известной.

2. Уравнение (13.7) определяет h как функцию частоты k и параметров стержня a и ϵ . Если ϵ вещественно, то h тоже

вещественно. Это можно было бы доказать, основываясь на самом уравнении (13.7), однако проще исходить из следующего рассуждения. Поля зависят от z по закону $\exp(-ihz)$, и если h было бы комплексно ($h = h' - ih''$), то поток энергии через поперечное сечение $z = \text{const}$ был бы пропорционален $\exp(-2h''z)$, т. е. содержал бы множитель, различный при различных z . Радиального потока энергии через цилиндр бесконечного радиуса при условии $\text{Im } \alpha < 0$ быть не может, и при $h'' \neq 0$ из закона сохранения энергии следовало бы, что поток энергии в осевом направлении равен нулю. Для волн (13.1), (13.3) — (13.5) это привело бы к тому, что поле всюду равно нулю; следовательно, при $\epsilon'' = 0$ и $h'' = 0$. Заметим, что для более сложных систем это рассуждение может оказаться ошибочным — существуют структуры, в которых нет потерь энергии, но h комплексно, а поток энергии равен нулю. Поле при этом содержит две встречные волны, несущие одинаковые потоки энергии в противоположных направлениях.

Можно показать, что уравнение (13.7) имеет решение, только если τ вещественно, а α — чисто мнимо, т. е. если h лежит в интервале

$$k < h < k\sqrt{\epsilon}. \quad (13.8)$$

Для того чтобы из (13.7) найти $h(k)$, удобно рассматривать это уравнение как функциональную связь двух вспомогательных вещественных переменных τa и $i\alpha a$, связанных, кроме того, еще соотношением $\tau^2 - \alpha^2 = h^2(\epsilon - 1)$. При любом k (13.7) и это последнее равенство позволяют найти τ и α , а затем и h , так как $h^2 = (\tau^2 - \epsilon\alpha^2)/(\epsilon - 1)$. В координатах τa и $i\alpha a$ второе равенство представляет собой уравнение окружности

$$(\tau a)^2 + (i\alpha a)^2 = k^2 a^2 (\epsilon - 1). \quad (13.9)$$

Характер кривых, которые в этих координатах представляет уравнение (13.7), следует из того, что правая часть — всегда отрицательная величина, равная нулю при $i\alpha a = 0$ и стремящаяся к $-\infty$ при $i\alpha a \rightarrow \infty$. Поэтому значения τa должны лежать в интервалах между корнями функции $J_0(\tau a)$ и $J_1(\tau a)$; первый из этих интервалов есть $2,40 < \tau a < 3,83$, второй интервал есть $5,52 < \tau a < 7,02$, и т. д. Кривая $i\alpha a = f(\tau a)$ состоит из ряда ветвей. Например, в первой из

этих ветвей $iaa = 0$ при $\tau a = 2,40$ и $iaa \rightarrow \infty$ при $\tau a \rightarrow 3,83$ (рис. 7).

Значения τa и iaa , удовлетворяющие (13.7) и рассматриваемые как функции от k , лежат на пересечении этих кривых и окружности (13.9), радиус которой равен $ka\sqrt{\epsilon-1}$. Как следует из рис. 7, при любом значении этого параметра существует только конечное число волн, именно столько, сколько имеется корней уравнения $J_0(\tau a) = 0$, меньших, чем $ka\sqrt{\epsilon-1}$. При

$$ka\sqrt{\epsilon-1} < 2,40 \quad (13.10)$$

вообще не существует симметричных E -волн, при

$$ka\sqrt{\epsilon-1} < 5,52$$

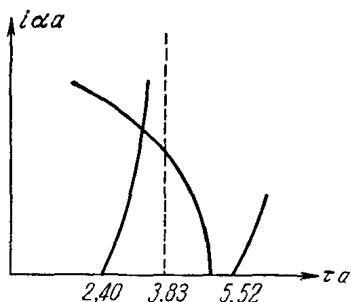


Рис. 7. К решению уравнения (13.7).

может распространяться одна волна, и т. д. Зависимость h для каждой волны от частоты прослеживается по рис. 7. При $k = v_{0q}/a\sqrt{\epsilon-1}$ (эти частоты называются критическими частотами для волн E_{0q} ($q=1, 2, \dots$)) величина iaa равна нулю, т. е. $h=k$. С ростом частоты точка пересечения

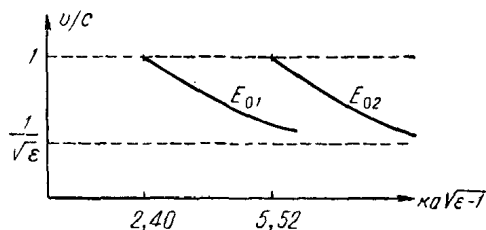


Рис. 8. Фазовые скорости волн в диэлектрическом цилиндре.

данной ветви с окружностью смещается вверх, так что $iaa \rightarrow \infty$, а τa стремится к постоянной величине, поэтому с ростом частоты отношение h/k стремится к значению $\sqrt{\epsilon}$.

На рис. 8 представлены графики зависимости фазовой скорости от параметра $ka\sqrt{\epsilon-1}$ для волн E_{01} и E_{02} .

Каждый раз, когда с ростом частоты k проходит через критическую частоту, становится возможным существование еще одной волны.

Быстрота убывания поля в радиальном направлении согласно (13.5) определяется величиной ia . При частоте, близкой к критической частоте какой-либо волны, поле этой волны очень медленно убывает с r ; эффективный радиус поля, который можно определить как $1/|\alpha|$, значительно больше a . Волна почти полностью распространяется вне стержня, и фазовая скорость ее близка к скорости света в пустоте. С ростом частоты эффективный радиус поля волны определенного номера убывает, поле все более концентрируется внутри материала стержня, а фазовая скорость приближается к скорости света в безграничном диэлектрике $c/\sqrt{\epsilon}$.

Волны вдоль диэлектрического стержня — медленные, а поле этих волн примерно экспоненциально убывает в направлении, перпендикулярном к направлению распространения. Два этих свойства не независимы, каждое из них следует из другого. Действительно, изменения поля в перпендикулярном направлении вне стержня определяются оператором $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, который, согласно волновому уравнению, равен $h^2 - k^2$. Для медленных волн $h > k$, правая часть положительна, и зависимость от x и y должна быть экспоненциальной с вещественной, а не с мнимой, экспонентой. Медленные волны всегда являются *волнами поверхностными*, «поджатыми» к поверхности тем больше, чем больше замедление. Изменение полей быстрых волн ($h < k$) в перпендикулярном направлении носит, наоборот, колебательный характер.

Есть еще одно серьезное отличие рассматриваемых волн от волноводных. В волноводе при любой частоте существует бесконечно много волн, хотя лишь конечное число их распространяется без затухания. Вдоль стержня вообще может распространяться только *конечное число волн*, никакого бесконечного числа распространяющихся с экспоненциальным затуханием волн для стержня не существует. Например, при $ka\sqrt{\epsilon - 1} = 5$ существует одна волна E_{01} . Качественно ничего не меняется, как мы сейчас увидим, и для более сложных волн.

Это различие между замкнутыми и незамкнутыми (экранированными и неэкранированными) линиями особенно существенно в задачах о возбуждении волн, о влиянии различных неоднородностей в линиях и т. д. Сложное поле, возникающее в волноводе вблизи неоднородного участка или при возбуждении, всегда может быть представлено как совокупность волноводных волн. Эта совокупность является полной, и никаких других волн, кроме цилиндрических, распространяющихся и нераспространяющихся, в волноводе не формируется. Несколько цилиндрических волн, могущих распространяться вдоль стержня, разумеется, не образуют полной системы, и при возбуждении стержня или нарушении его однородности возникают более сложные поля, в частности, сферические волны.

Изучение *симметричных магнитных* волн производится по той же схеме. Три отличные от нуля компоненты поля выражаются через потенциальную функцию $\psi(r)$ по формулам

$$H_z = (k^2 \epsilon - h^2) \psi e^{-ihz}, \quad H_r = -ih \frac{\partial \psi}{\partial r} e^{-ihz}, \quad E_\varphi = ik \frac{\partial \psi}{\partial r} e^{-ihz}, \quad (13.11)$$

а $\psi(r)$ удовлетворяет тому же уравнению (13.2). Характеристическое уравнение для H_{0q} -волн отличается от (13.7) отсутствием явно входящего ϵ . Исследование его приводит к графикам, качественно совпадающим с рис. 7 и 8; в частности, волны H_{0q} и E_{0q} имеют одни и те же критические частоты.

3. Сложнее описывается поле *несимметричных волн*. Если предположить, что для них, как и в волноводах, существует деление на E - и H -волны, то возникнет противоречие. Действительно, в несимметричных E -волнах, например, должны были бы отличаться от нуля три тангенциальные компоненты: E_z , E_φ , H_φ . Между тем в выражениях для функций $\chi(r, \varphi)$ в стержне и вне его входят только две произвольные постоянные

$$\left. \begin{aligned} \chi(r, \varphi) &= A J_m(\tau r) \cos m\varphi, & r < a, \\ \chi(r, \varphi) &= B H_m^{(2)}(ar) \cos m\varphi, & r > a, \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

и граничные условия при $r = a$ приведут к трем уравнениям для этих двух постоянных, т. е. к неразрешимой системе.

Таким образом, несимметричные волны должны содержать все шесть компонент; они являются *гибридными*, т. е. для них не существует деления на E -волны и H -волны. Все компоненты выражаются через две одновременно отличные от нуля функции $\chi(r, \varphi)$ и $\psi(r, \varphi)$. Возникают четыре произвольные постоянные, две — в выражениях (13.12) для $\chi(r, \varphi)$ и две в таких же выражениях для $\psi(r, \varphi)$. Граничных условий тоже четыре — непрерывность при $r=a$ компонент E_z , E_φ , H_z , H_φ . Эти граничные условия приводят к четырем однородным линейным уравнениям для произвольных постоянных. Условие существования нетривиального решения этих уравнений есть искомое характеристическое уравнение для $h=h(k)$. При $m=0$, т. е. для симметричных волн, оно, разумеется, распадается на два уравнения — (13.7) и аналогичное уравнение для H_{0q} волн.

Характеристическое уравнение для $m \neq 0$ также дает для h значения в интервале (13.8). Фазовая скорость всех волн вдоль диэлектрического стержня лежит между c и $c/\sqrt{\epsilon}$. Кривые, дающие зависимость ka от $i\alpha a$, имеют тот же вид, что и на рис. 7. Сохраняется и общий характер изменения поля при возрастании частоты от критической ($\alpha=0$, $v=c$) до высокой ($i\alpha a \rightarrow \infty$, $v \rightarrow c/\sqrt{\epsilon}$). В одном отношении, однако, несимметричные волны заметно отличаются от симметричных. Среди несимметричных волн имеется одна волна — первая из волн с индексом $m=1$, — для которой критическая частота равна нулю; эта волна существует при любой частоте. Вдали от стержня структура этой волны близка к структуре плоской волны.

Существование этой волны (ее называют *дипольной волной*) можно качественно объяснить следующим нестрогим рассуждением. Представим себе, что в поле плоской волны, распространяющейся в направлении оси z , внесен бесконечный диэлектрический цилиндр, параллельный этой оси. Поле проникнет в цилиндр, скорость волны несколько уменьшится, а для медленных волн вне стержня поле будет экспоненциально убывать в радиальном направлении. Таким образом, возникнет цилиндрическая волна, симметрия которой — такая же, как у плоской волны, т. е. соответствует значению азимутального индекса $m=1$. В этом рассуждении нигде не используется условие, что сечение стержня — круг. И дей-

ствительно, можно строго доказать, что цилиндрическая волна может распространяться при низких частотах вдоль стержня любого сечения. В этом доказательстве нельзя было бы уже, разумеется, пользоваться явным выражением для полей через специальные функции.

4. *Канал в безграничном диэлектрике* не является направляющей линией для цилиндрической волны. Формально это следует из того, что, как легко показать, дисперсионные уравнения не имеют решений, если внутри стержня $\epsilon < 1$. Например, если в (13.7) принять $\epsilon < 1$, то $\tau^2 < \alpha^2$, и при $\tau^2 > 0$ справа стоит комплексная величина, а слева — вещественная, а при $\alpha^2 < 0$ выражение справа будет отрицательным, а слева — положительным. Это же рассуждение остается справедливым, если при $r < a$ $\epsilon = 1$, а при $r > a$ $\epsilon > 1$.

Различие в условиях распространения вдоль стержня и вдоль канала легко объяснить, привлекая аналогию с явлением *многого внутреннего отражения*. Это явление, как известно, состоит в том, что при падении плоской волны на плоскую границу диэлектрика, если волна идет из среды с $\epsilon > 1$ и синус угла падения больше $1/\sqrt{\epsilon}$, волна полностью отражается, а поле в пустоте экспоненциально убывает при удалении от границы. В диэлектрическом стержне имеют место аналогичные условия. Как и в круглом волноводе, цилиндрические волны можно представить в виде суперпозиции плоских волн, нормали которых образуют с осью z одинаковые углы β . Легко показать, что $\cos \beta = h/k\sqrt{\epsilon}$, и этой же величине равны синусы углов падения этих волн на границу раздела. Так как $h > k$, то $\cos \beta > 1/\sqrt{\epsilon}$, т. е. выполняется условие полного внутреннего отражения. Кроме того, так как h лежит в интервале (13.8), то $\cos \beta < 1$, т. е. β есть вещественный угол. Вблизи критической частоты $h \approx k$, $\cos \beta \approx 1/\sqrt{\epsilon}$; с ростом частоты $\cos \beta$ растет, и при очень высоких частотах (правая сторона интервала (13.8)) волны падают под очень малым углом скольжения. Повторяя рассуждения § 10, мы получим для фазовой скорости v выражение $\frac{c}{\sqrt{\epsilon} \cos \beta}$, что дает правильную величину $v = ck/h$.

Распространение цилиндрической волны в направлении оси z с этой точки зрения представляет собой последовательный процесс падения системы интерферирующих волн на границу

диэлектрика под углом скольжения β и, при условии (13.8), полного внутреннего отражения. В канале такой процесс невозможен и, как мы уже отмечали, волны действительно не существуют. Это значит, например, что диполь, расположенный внутри или вблизи канала, возбудит только сферическую волну.

§ 14. Металлический цилиндр

1. Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль цилиндра при комплексном ϵ ($\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$). Если ϵ'' невелико, то качественно структура поля не изменится по сравнению со случаем $\epsilon'' = 0$. Однако наличие диэлектрических потерь приводит к затуханию волн, волновое число h становится комплексным. При малых ϵ'' величина h'' также мала и пропорциональна ϵ'' . Найти h'' можно либо из дисперсионного уравнения методом возмущения, либо из энергетических соображений. В первом методе, полагая известным решение h дисперсионного уравнения для вещественного ϵ , приравнивают друг к другу полный дифференциал обеих частей уравнения, считая, что ϵ , τ и α получили малые приращения $\Delta\epsilon$, $\Delta\tau$ и $\Delta\alpha$, а затем из формул $\tau^2 = k^2\epsilon - h^2$ и $\alpha^2 = k^2 - h^2$ выражают $\Delta\tau$ и $\Delta\alpha$ через $\Delta\epsilon$ и Δh . Таким образом находят изменение Δh при изменении $\Delta\epsilon$, $\Delta h \sim \Delta\epsilon$, где коэффициент пропорциональности выражается через известное значение h , и полагая $\Delta\epsilon = \epsilon''$, находят $h'' = \Delta h$. Второй метод, приводящий, разумеется, к тем же результатам, состоит в том, что по формуле (2.19а) подсчитываются потери энергии в проходящей волне, а так как в этой формуле малая величина ϵ'' является общим множителем, то поле E в диэлектрике можно считать невозмущенным. Зная потери на интервале dz и поток энергии через полное сечение $z = \text{const}$ (тоже вычисляемое для невозмущенных полей), можно, как и в теории волноводов с неидеальными стенками, найти h'' .

Второй метод более нагляден и легче позволяет понять основной результат — при данном ϵ'' потери тем больше, чем больше поле сосредоточено внутри диэлектрика. Поэтому для уменьшения тепловых потерь целесообразно выбирать условия таким образом, чтобы в требуемом диапазоне частот параметр $1/\alpha a$ был невелик, т. е. чтобы эффективный радиус $1/|\alpha|$ был большим. Однако при этом возникает другой

источник потерь — рассеяние волн на различных предметах, расположенных недалеко от стержня и попадающих в поле волны. Чем меньше поле сосредоточено вблизи стержня, тем труднее избежать этих потерь, а также потерь на излучение сферических волн, возникающих вследствие неоднородности самой линии, например, ее изгиба. Применение диэлектрических стержней в качестве передающей линии определяется тем, насколько в разных условиях удастся примирить два противоречивых требования — большая концентрация поля вблизи стержня и малые диэлектрические потери.

2. При выводе уравнения (13.7) не было наложено никаких ограничений на значения диэлектрической проницаемости. Применим его к задаче о волнах вдоль металлического провода с большой, но конечной проводимостью металла, т. е. положим, что $\epsilon = -i4\pi\sigma/\omega$ — большая мнимая величина. Можно показать, что волны E_{01} — единственные, представляющие при этом интерес; волны всех остальных типов распространяются с очень большим затуханием. При $|\epsilon| \gg 1$ h остается для волн типа E_{01} порядка k , так что в выражении для τ можно пренебречь членом h^2 по сравнению с $k^2\epsilon$ и полагать $\tau = k\sqrt{\epsilon}$. При этом аргумент τr функции Бесселя, описывающей поле в цилиндре (13.3), может быть записан в виде $\tau r = (1-i)\frac{r}{d}$, где d — толщина скин-слоя (7.3), связанная с ϵ уравнением $d = \frac{1-i}{k} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.

Характер поля в цилиндре зависит от параметра a/d . Пока $a \ll d$, т. е. радиус стержня мал по сравнению с толщиной скин-слоя, который, по определению, равен глубине проникновения поля для плоской поверхности, аргумент функции Бесселя в (13.3) мал и $J_0(k\sqrt{\epsilon}r) \approx 1$. Поле почти не меняется внутри стержня, осуществляются те же условия, что и для постоянного тока; скин-эффект не проявляется. С ростом частоты, когда d убывает, поле внутри стержня становится неоднородным. При большом комплексном аргументе функция $J_0(k\sqrt{\epsilon}r)$ достигает максимума при $r=a$ и экспоненциально убывает вглубь стержня по закону

$$J_0\left[\left(1-i\right)\frac{r}{d}\right] \sim e^{-(1+i)\frac{a-r}{d}}. \quad (14.1)$$

Этот закон совпадает с общим законом (7.2) убывания поля при удалении вглубь хорошего проводника. Результат этот естествен; он означает, что при $a \gg d$ применима общая теория сильного скин-эффекта; как мы отмечали, теория эта правильно описывает поле, если d значительно меньше радиуса кривизны поверхности.

3. Наибольший практический интерес задача о распространении волн вдоль металлического цилиндра имеет для таких высоких частот, для которых $d \ll a$. Тогда согласно (14.1) отношение функций Бесселя в левой части (13.7) равно $-l$, и, подставляя $\tau a = ka \sqrt{\varepsilon}$ и $1/\sqrt{\varepsilon} = \omega$, где ω — волновое сопротивление металла, приведем дисперсионные уравнения к виду

$$-lka\omega = \frac{\alpha H_0^{(2)}(\alpha a)}{H_1^{(2)}(\alpha a)}. \quad (14.2)$$

Разумеется, это уравнение можно было бы получить сразу из граничного условия Леонтовича, не вводя вообще в рассмотрение внутреннего поля. Уравнение (14.2) описывает распространение волн вдоль металлического стержня при $d \ll a$, когда структура поля в металле не зависит от кривизны, и потому внешние поля связаны на границе локальным условием $E_z = -\omega H_\varphi$. Выражая E_z и H_φ через потенциальную функцию (13.4) по формулам (10.22), получим вновь уравнение (14.2).

Левая сторона (14.2) имеет порядок $k^2 ad$ и при обычных условиях много меньше единицы. При этом $|\alpha a| \ll 1$, и функции Ханкеля надо заменить первыми членами разложений

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(\alpha a) &\approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{i\alpha a \gamma} \quad (\gamma = 1,78\dots), \\ H_1^{(2)}(\alpha a) &\approx \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha a}. \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

Таким образом, дисперсионное уравнение для волны, распространяющейся вдоль металлического стержня, имеет вид

$$\alpha^2 a^2 \ln \frac{2}{i\alpha a \gamma} = -lka\omega. \quad (14.4)$$

Корень этого уравнения — комплексный. Как и следовало ожидать, распространение волн вблизи неидеального металла сопровождается не только замедлением ($h' > k$), но и затух-

ханием ($h'' > 0$). Для численного решения трансцендентного уравнения (14.4) разработан несложный итерационный процесс. Однако порядок величины $(h - k)/k$ можно найти из (14.4) в явном виде, если учесть, что логарифм даже очень больших величин всегда не очень велик и мало зависит от аргумента. Тогда из (14.4) следует, что

$$\frac{h - k}{k} = \frac{1 - i}{k \ln(\dots)} \cdot \frac{d}{a}, \quad (14.5)$$

где $\ln(\dots)$ имеет в реальных условиях значение порядка 10—15. Например, для $\lambda = 30$ см и $a = 1$ мм Зоммерфельд, который впервые рассмотрел волны вдоль металлического стержня и получил уравнение (14.4), нашел для $(h - k)/k$ значение $(6 - i \cdot 6,4) \cdot 10^{-8}$, а простая оценка (14.5) дает

$$(h - k)/k = 3(1 - i) \cdot 10^{-8} \text{ при } \ln(\dots) = 10.$$

Эффективный радиус поля $1/|\alpha|$, определяющий расстояние от провода, на котором поле заметно (примерно в e раз) убывает, довольно велик; согласно (14.5) он имеет порядок $\frac{1}{k} \sqrt{\frac{a}{d}}$. Затухание имеет порядок $h'' \sim kd/a$. Заметим, что в $1/|\alpha|$ малая величина d входит слабее, чем в h'' ; при уменьшении d затухание быстрее убывает, чем возрастает эффективный радиус, что весьма существенно для практики.

Провод с конечной проводимостью является, таким образом, направляющей линией, т. е. он обладает способностью концентрировать вблизи себя поле волны. Концентрация эта тем меньше, чем меньше d , т. е. чем выше проводимость. Провод из идеально проводящего металла не может поддерживать цилиндрическую волну — при $d = 0$ единственным решением уравнения (14.2) является $\alpha = 0$, а при этом поток энергии через поперечное сечение $z = \text{const}$ становится бесконечным, цилиндрическая волна не существует.

4. Аналогом рассмотренной в предыдущем пункте волны Зоммерфельда является волна вдоль *металлического провода, покрытого диэлектрической оболочкой*. Такая линия, наряду со сплошным диэлектрическим цилиндром, применяется в дециметровой области для передачи сигналов, в частности, телевизионных, на большие расстояния.

Теория такой линии строится так же, как теория диэлектрического стержня. Для симметричных электрических волн

поле в слое и вне его выражается через одну потенциальную функцию $\chi(r)$. Вне оболочки справедливо выражение (13.4), в стержне надо вместо (13.3) взять линейную комбинацию двух цилиндрических функций, проще всего — вещественных при вещественном τ функций Бесселя и Неймана

$$\chi(r) = AJ_0(\tau r) + CN_0(\tau r). \quad (14.6)$$

Поля (13.1) должны удовлетворять трем граничным условиям — на металле ($r=b$) должно быть равно нулю E_z , на внешней границе ($r=a$) слоя должны быть непрерывны E_z и H_φ . Это приводит к трем линейным уравнениям для A, B, C , и условие существования нетривиального решения дает искомое дисперсионное уравнение

$$\frac{\tau a J_0(\tau a) N_0(\tau b) - J_0(\tau b) N_0(\tau a)}{\varepsilon J_1(\tau a) N_0(\tau b) - J_0(\tau b) N_1(\tau a)} = \frac{\alpha a H_0^{(2)}(\alpha a)}{H_1^{(2)}(\alpha a)}. \quad (14.7)$$

Исследование его проводится по тому же методу, что и исследование уравнения (13.7). Уравнение для магнитных волн имеет такой же характер. Уравнение для несимметричных волн значительно сложнее. Несимметричные волны — гибридные, поля их содержат шесть коэффициентов, дисперсионное уравнение получается приравниванием нулю детерминанта шестого порядка. Характер волн для такой сложной линии — примерно такой же, как для диэлектрического цилиндра. Дипольная (первая из несимметричных) волна существует при любой частоте, остальные волны — при частоте выше критической частоты для этого типа. Наибольшее значение имеют, как и для цилиндра, волны E_{01} и дипольная волна.

5. Интересно сравнить провод из идеального металла, покрытого диэлектрическим слоем, с проводом из металла с конечной проводимостью, рассмотренным выше. Если толщина слоя $\delta = a - b$ много меньше радиуса кривизны, $\delta \ll b$, то уравнение (14.7) может быть упрощено. Если при этом δ сравнимо с длиной волны, то в (14.7) $\tau a \gg 1$, $\tau b \gg 1$, и слева можно заменить цилиндрические функции их асимптотическими выражениями. При этом левая часть будет содержать только тригонометрические функции от $\tau \delta$. Такие же функции возникают в теории *плоской пластинки*; в ней поля выражаются не в виде (14.6), а через потенциальную функцию

$$\chi = A \sin \tau x + C \cos \tau x, \quad (14.8)$$

где x — координата, перпендикулярная к поверхности пластинки. Этот результат можно было предвидеть из физических соображений — при $\delta \ll b$ кривизна слоя не имеет существенного значения для поля в нем. Исследование получающегося при этом дисперсионного уравнения, разумеется, проще, чем исследование уравнения (14.7), содержащего функции Бесселя и Неймана.

Особенно простую форму принимает уравнение (14.7), если $\delta \ll b$ и при этом $k\sqrt{\epsilon\delta} \ll 1$, т. е. толщина слоя мала также и по сравнению с длиной волны в нем. Этот случай и представляет наибольший интерес в дециметровой и сантиметровой областях. Тогда в (14.7) можно разлагать функции от τb в ряд по $\tau\delta$ ($\tau b = \tau a - \tau\delta$, $\tau\delta \ll 1$), и левая сторона примет вид $-\tau^2 a\delta/\epsilon$. Так как это — малая величина, то aa будет также малой величиной, и слева в τ можно заменить h на k , т. е. принять $\tau^2 = k^2(\epsilon - 1)$. Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$-k^2\delta a\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) = \frac{aaH_0^{(2)}(aa)}{H_1^{(2)}(aa)}. \quad (14.9)$$

Оно имеет такой же характер, что и уравнение (14.2) для волны Зоммерфельда, только для этой последней волны слева стоят $\frac{1-i}{2} k^2 da$. Между этими двумя линиями существует весьма глубокая аналогия. Роль толщины скин-слоя d в составной линии играет толщина диэлектрика δ . Так как δ может быть сделана значительно больше, чем d , то эффективный радиус поля (приблизительно пропорциональный, как и для волны Зоммерфельда, $1/\sqrt{\delta}$), будет значительно меньше; такая линия может обеспечить заметную концентрацию поля. При вещественном ϵ и в пренебрежении потерями в металле распространение волны, разумеется, не сопровождается затуханием. В реальных условиях затухание определяется в основном диэлектрическими потерями и рассеянием на неоднородностях линии.

6. Аналогия между тонким диэлектрическим слоем на поверхности металла и скин-слоем на границе неидеального металла имеет общий характер и не связана с теорией цилиндрических волн. В обоих случаях поле существует только в узком слое вблизи поверхности. На поверхности тонкого диэлектрического слоя можно установить *приближенное граничное условие*,

в некотором отношении подобное (7.11). Проще всего его найти, применяя интегральную форму уравнения (2.18а) к контуру, указанному на рис. 9. Обозначим направление, вдоль которого вытянут контур, через z , перпендикулярное к нему направление (тангенциальное к металлу) через s , и направление нормали к металлу через n . Имея в виду, что на металле $E_z = 0$, и считая длину контура dz малой, получим для искомого значения E_z на границе диэлектрик — воздух

$$E_z = ik \int H_s^{\text{внутр}} dn - \frac{\partial}{\partial z} \int E_n^{\text{внутр}} dn. \quad (14.10)$$

Интеграл взят по толщине слоя, и справа в (14.10) стоят поля в диэлектрике. Они мало меняются внутри диэлектрика

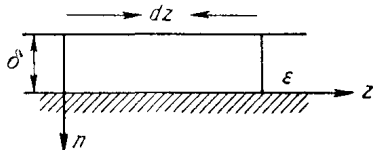


Рис. 9. Диэлектрическая пленка на металле

(так как $k\delta \sqrt{\epsilon} \ll 1$), на границе $E_n^{\text{внутр}} = \frac{1}{\epsilon} E_n$, $H_s^{\text{внутр}} = H_s$,

где E_n , H_s — поля в воздухе. В старшем по δ порядке эти соотношения справедливы и внутри слоя, и под E_n , H_s можно понимать поля на металле в отсутствие слоя. Так

получаем справедливое с точностью до первой степени δ граничное условие

$$E_z = ik\delta H_s - \frac{\delta}{\epsilon} \frac{\partial E_n}{\partial z}. \quad (14.11)$$

Это условие, так же как и (7.11), является локальным — оно содержит только значения полей, относящихся к точкам, расположенным вблизи той точки, для которой вычисляется E_z . Однако, в отличие от (7.11), оно содержит не только поля, но и их производные. Объясняется это отличие тем, что, например, при падении плоской волны структура поля в слое зависит при конечном ϵ от направления ее падения. При $\epsilon \gg 1$ (14.11) приобретает форму (7.11); некоторое отличие в коэффициенте объясняется тем, что в скин-слое поля не однородны.

Применяя (14.11) к полю вне цилиндра ($n = -r$, $s = \varphi$), легко получить уравнение (14.9), не вводя в рассмотрение поле в слое и записывая поля только вне его по формулам (10.22) и (13.4), аналогично тому, как это можно сделать для волны Зоммерфельда. Этот метод приводит к заметному упро-

щению расчетов в сложных задачах, например, в теории несимметричных волн вдоль покрытого диэлектриком стержня, в теории волноводов, стенки которых изнутри покрыты слоем диэлектрика, и т. д.

§ 15. Гофра

1. Вдоль цилиндрического провода из идеально проводящего металла цилиндрическая волна распространяться не может. Слой диэлектрика, нанесенный на поверхность, превращает провод в направляющую линию. Он делает волну замедленной и одновременно поверхностной, т. е. «поджатой» к проводу. Существуют также и другие поверхности, вдоль которых могут распространяться поверхностные (т. е. медленные) волны. Один тип таких поверхностей — гребенчатую, или гофрированную, структуру — мы рассмотрим в этом параграфе. Начнем с плоских поверхностей, на которых проще исследовать основные черты формирования медленных волн.

Простейшая гофра изображена на рис. 10. Ширина гофры L , т. е. расстояние между двумя соседними металлическими стенками, мала по сравнению с длиной волны. При некоторых соотношениях между глубиной гофры δ и k гофра, как мы сейчас покажем, является замедляющей системой.

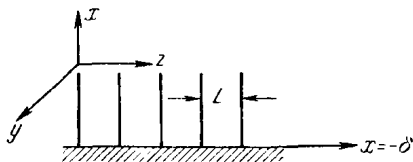


Рис. 10. Простая гофра.

На поверхности $x=0$ в такой системе существуют *импедансные граничные условия* типа (7.11), т. е. $E_z(x=0)$ пропорционально $H_y(x=0)$ с коэффициентом пропорциональности, не зависящим при $\frac{\partial}{\partial y}=0$ от структуры внешнего поля.

Независимость структуры поля при $x < 0$ от структуры поля при $x > 0$ проще всего объяснить, если принять, что в каждом узком волноводе, образованном двумя соседними плоскостями $z = \text{const}$, $x < 0$, образуется только одна волна, именно кабельная волна, поле которой внутри каждого волновода не зависит от z и которая распространяется в направлении x без затухания.

В поле кабельной волны $\partial/\partial z = 0$, компонента E_z удовлетворяет волновому уравнению $(d^2/dx^2 + k^2)E_z = 0$, и образуется стоячая волна $E_z = A \sin k(x + \delta)$. В этой записи уже учтено, что при $x = -\delta$ $E_z = 0$. Магнитное поле H_y связано (при $\partial/\partial z = 0$, $\partial/\partial y = 0$) с E_z соотношением $H_y = \frac{1}{ik} \partial E_z / \partial x$, так что $H_y = -iA \cos k(x + \delta)$. Коэффициент A зависит от амплитуды и характера внешнего поля и различен для различных волноводов; то же относится и к полям E_x и H_x , однако их отношение не содержит A . Таким образом, получаем иско-мое *импедансное условие*

$$E_z = l \operatorname{tg} k\delta H_y. \quad (15.1)$$

Применяя его, можно найти характеристики медленной волны, распространяющейся *вне гофры*, т. е. при $x > 0$, вдоль оси z с множителем $\exp(-ihz)$. В этой волне потенциальная функция равна $\chi(x) = B \exp(-i\alpha x)$, $\alpha^2 = k^2 - h^2$, и для полей имеем по (8.56):

$$E_z = B\alpha^2 e^{-i\alpha x} \cdot e^{-ihz}, \quad H_y = -\alpha k B e^{-i\alpha x} \cdot e^{-ihz}. \quad (15.2)$$

Приравнявая отношение E_z/H_y при $x=0$ импедансу (15.1), получаем

$$\alpha = -lk \operatorname{tg} k\delta. \quad (15.3)$$

Условием существования поверхностной волны (15.2) является, как и для цилиндрических волн, требование $\operatorname{Im} \alpha < 0$. Следовательно, при $\operatorname{tg} k\delta > 0$ вдоль гофры может распространяться замедленная волна. Эффективная ее высота, которую можно определить как $1/|\alpha|$, равна $\frac{1}{k} |\operatorname{ctg} k\delta|$, фазовая скорость $v = ck/h$ согласно (15.3) равна $v = c |\cos k\delta|$, и $h = k/|\cos k\delta|$.

2. Этот расчет дает верные результаты, хотя он почти не учитывает того факта, что гофра представляет собой *периодическую* структуру и поле над ней тоже должно сохранять периодичность. Можно показать, что оно должно быть произведением множителя $\exp(-ihz)$ на периодическую функцию от z , т. е. при $x > 0$

$$E_z = e^{-ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x) e^{i \frac{2n\pi z}{L}}. \quad (15.4)$$

Вид функций $A_n(x)$ легко найти из волнового уравнения. При $kL \ll 1$ все A_n , кроме A_0 , быстро убывают при удалении от поверхности гофры, т. е. становятся малыми уже при $x \gg L$; $A_0 \sim e^{-i\alpha x}$, т. е. A_0 убывает лишь при $x \gg \lambda$. Периодичность *сглаживается*, и поле приобретает простой характер (15.2) при $x \gg L$. Той же формулой (15.2) описывается *усредненное* по периоду L значение поля, так как при таком усреднении все члены в сумме (15.4), кроме нулевого, выпадают. Таким образом, (15.2) представляет собой выражение для среднего поля и одновременно — для поля на некотором расстоянии от гофры. Только такое усредненное поле и его характеристики h и α и представляют практический интерес почти во всех задачах.

Эти качественные соображения поясняют, почему при выводе (15.1) можно не учитывать затухающие волны в волноводах. Эти волны передают мелкомасштабную (с масштабом порядка L) структуру внешнего поля, а (15.1) написано для среднего поля, из которого мелкомасштабная часть выпадает.

Существует область значений параметра $k\delta$, при которых это рассуждение теряет смысл, а поля волн высших типов участвуют в образовании среднего поля при $x > 0$. Это имеет место при $k\delta \sim \pi/2, 3\pi/2$ и т. д., когда $|\cos k\delta| \ll 1$. По полученным формулам при $\cos k\delta \rightarrow \pm 0$ $\alpha \rightarrow -i\infty$, и фазовая скорость волны стремится к нулю. При этом и длина волны $\Lambda = 2\pi/h$ стремится к нулю, так что период внешнего поля Λ перестает быть большим по сравнению с L . Решение $E_z = A \sin k(x + \delta)$, $x < 0$ перестает быть правильным, нарушаются импедансное условие (15.1) и решение (15.2), (15.3).

Таким образом, при $k\delta < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\delta < \frac{\lambda}{4}$, вдоль гофры может распространяться медленная волна. При приближении величины $k\delta$ к $\pi/2$ волна становится все более медленной и теснее поджимается к поверхности гофры. Вблизи $k\delta = \pi/2$ распространение волны становится невозможным. Невозможно распространение волны и при $\text{tg } k\delta < 0$ — согласно (15.3) поле волны должно было бы расти при удалении от поверхности. При $\delta > 3\lambda/4$ знак поверхностного импеданса вновь становится таким ($\text{Im } E_z/H_y > 0$), что возможна медленная волна, и т. д.

Эти рассуждения легко обобщаются для гофры, изображенной на рис. 11. Электрическое поле на поверхности

$x = -0$ будет равно $A \sin k\delta$ в волноводах и будет равно нулю на металле. Магнитное поле при $x = -0$ в волноводах будет $-iA \cos k\delta$; примерно таким же оно будет и на металле. Отношение средних значений E_z и H_y будет отличаться от (15.1) множителем q , равным отношению ширины волновода к периоду гофры. Для гофры на рис. 10 $q = 1$. Для гофры на рис. 11 импедансное условие и выражение для α примут вид

$$E_z = iq \operatorname{tg} k\delta \cdot H_y, \quad (15.5a)$$

$$\alpha = -iqk \operatorname{tg} k\delta. \quad (15.5b)$$

Условие поддержания поверхностной волны ($\operatorname{tg} k\delta > 0$) сохраняется.

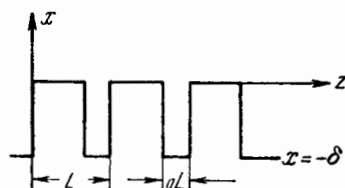


Рис. 11. Гофра.

Гофра представляет собой пример *анизотропной импедансной поверхности*. Усредненная по периоду L компонента E_y (ось y — вдоль гофры) равна нулю. Это объясняется тем, что в волноводах при $L \ll \lambda$ не существует незатухающей волны с электрическим полем, параллельным стенкам, а амплитуды затухающих волн малы, так как во внешнем поле отсутствуют гармоники высоких номеров. Поэтому распространяться вдоль гофры может только такая поверхностная волна, в которой $E_z \neq 0$.

3. Эти результаты легко переносятся на симметричные волны вдоль *гофрированного цилиндра* (рис. 12). Если глубина гофры δ мала по сравнению с радиусом цилиндра, то поле внутри гофры описывается такой же кабельной волной, как и в плоской задаче, и на поверхности

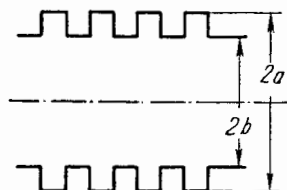


Рис. 12. Гофрированный цилиндр.

$$E_z = iq \operatorname{tg} k\delta H_\varphi, \quad E_\varphi = 0. \quad (15.6)$$

Симметричные электрические волны распространяются примерно так же, как вдоль провода с диэлектрическим покрытием. Для написания дисперсионного уравнения надо выразить внешнее поле по (13.4) и потребовать для него выполнения при $r = a$ граничного условия (15.1) с заменой H_y на H_φ . Как и для плоской поверхности, медленная волна существует

в области параметров $k\delta$, в которой $\operatorname{tg} k\delta > 0$, а при $k\delta \sim \pi/2$ импедансное граничное условие теряет силу.

Симметричные магнитные волны невозможны, так как в них $E_z \equiv 0$, и гофрированный цилиндр для них эквивалентен цилиндру из идеального металла.

Если δ не мало по сравнению с a , то поле в волноводах рис. 12 не совсем такое, как для плоской гофры. Основной результат, полученный для плоской гофры (импеданс гофры определяется кабельной волной в волноводах), сохраняется, но выражение для поля этой волны становится несколько более сложным. Компонента E_z должна удовлетворять волновому уравнению в цилиндрических координатах (причем $\partial/\partial z \equiv 0$) и обращаться в нуль при $r = b$. Для симметричных волн, очевидно, требуемой комбинацией цилиндрических функций нулевого порядка будет

$$E_z = A \{ J_0(kr) N_0(kb) - N_0(kr) J_0(kb) \} \quad (15.7)$$

и для $H_\varphi = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial r}$ получим соответственно

$$H_\varphi = iA \{ J_1(kr) N_0(kb) - N_1(kr) J_0(kb) \}. \quad (15.8)$$

Положив $r = a$ и разделив первое равенство на второе, получим, приписав еще множитель заполнения q из тех же соображений, что и в (15.5а), импедансное соотношение, справедливое для симметричных волн на поверхности гофрированного стержня

$$E_z = -iq \frac{J_0(ka) N_0(kb) - N_0(ka) J_0(kb)}{J_1(ka) N_0(kb) - N_1(ka) J_0(kb)} \cdot H_\varphi. \quad (15.9)$$

Волны распространяются вдоль стержня, если дробь в (15.9) отрицательна. При $a - b \ll a$ (15.9) переходит в (15.6).

Несколько сложнее условия для несимметричных волн и соответственно в плоской задаче — для волн, поля которых зависят от y . Гофра не изменяет эту зависимость, которая остается такой же, как в возбуждающих источниках или в падающем поле. Характер этой зависимости, однако, войдет в выражение для импеданса, ибо поле кабельной волны в волноводе должно удовлетворять уравнению $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0$. Точно так же решением для поля в радиальных волноводах гофры рис. 12 будет такая же, как в (15.7),

комбинация цилиндрических функций. Однако порядок этих функций будет отличен от нуля и их надо будет еще умножить на тригонометрическую функцию угла, которая сократится при образовании импеданса. Все расчеты производятся по той же схеме, что и выше. Импедансные условия для гофры, таким образом, не являются, строго говоря, локальными, так как зависят от того, как внешнее поле изменяется с координатой, направленной вдоль гофры.

Медленные волны вдоль гофрированной поверхности применяются главным образом в электронике и в антенной технике. Существуют также устройства (волноводы, резонаторы), внутренние стенки которых делаются гофрированными. Так, например, в круглом волноводе гофрировка стенок позволяет снять нежелательное вырождение (совпадение фазовых скоростей) волн H_{01} и E_{11} . Теория таких систем также основывается на импедансных условиях (15.1) или (15.5a). Аналогичным способом достигается замедление электромагнитных волн в волноводах, необходимое для обеспечения их взаимодействия с электронным потоком.

§ 16. Решетка, спираль

1. Второй периодической системой, получившей широкое применение в электронных устройствах типа лампы бегущей волны, является спираль — провод, расположенный на цилиндрической поверхности и образующий винтовую линию. Вдоль такой линии может распространяться медленная волна. Элементарный расчет такой линии основывается на представлении о том, что *вдоль провода* распространяется волна со скоростью c . Скорость ее в направлении оси z равна

$$v = c \sin \gamma, \quad (16.1)$$

где γ — угол, составляемый витками с плоскостью, перпендикулярной к оси z . В обычных условиях $\gamma \ll 1$, фазовая скорость мала, и поле волны может эффективно взаимодействовать с осевым электронным потоком. Согласно (16.1) фазовая скорость не зависит от частоты, что позволяет использовать спираль в широкополосных электронных приборах.

Более строгая теория, позволяющая уточнить и найти условия применимости (16.1), основывается на некоторых *усредненных граничных условиях*, справедливых для полей

на частопериодической решетке, период которой мал по сравнению с длиной волны. Эти граничные условия частично носят импедансный характер (первые два условия в (16.2)), а частично связывают между собой тангенциальные компоненты полей *по обе стороны решетки* (третье и четвертое условия (16.2)). Если обозначить через s направление вдоль проводов решетки, через t — направление, к ним перпендикулярное, но также лежащее в плоскости решетки, то эти граничные условия (первые предложенные В. Владимирским) запишутся в виде

$$E_s^{(1)} = 0, \quad E_s^{(2)} = 0, \quad E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad H_s^{(1)} = H_s^{(2)}. \quad (16.2)$$

Здесь индексами (1) и (2) обозначены поля по обе стороны решетки.

Формулы (16.2) имеют примерно тот же смысл, что и импедансное условие на гофре. Вблизи решетки, на расстояниях порядка периода решетки L , на крупномасштабные изменения поля накладываются мелкомасштабные, периода L . Вдали от решетки мелкомасштабные изменения сглаживаются, и для этого медленно меняющегося поля оказывается применимыми формулы (16.2). Таким образом, например, третье равенство не означает, что на самой решетке E_t с обеих сторон совпадает. Совпадают значения, к которым стремятся поля при удалении от решетки в разные стороны на расстояния, большие по сравнению с L и малые по сравнению с λ . Мелкомасштабные изменения исчезают также и при усреднении по периоду, поэтому формулы (16.2) можно рассматривать также и как соотношения между средними значениями полей.

Формулы (16.2) можно получить из следующего рассуждения, применимого и для других задач о частопериодических структурах. Рассмотрим область, *примыкающую к решетке*, размеры которой малы по сравнению с длиной волны. Производные по координатам в этой области имеют порядок $1/L$, а так как $1/L \gg k$, то в волновом уравнении можно отбросить слагаемое, пропорциональное k^2 . Поэтому в этой области поля приближенно удовлетворяют уравнению Лапласа и обычным граничным условиям на металле. Граничные условия (16.2) получаются из решения этого уравнения; они связывают между собой значения, к которым это решение стремится при удалении от решетки в разные стороны.

Компонента E_s (не усредненная) удовлетворяет на металле условию $E_s|_S=0$, где S — поверхность металла. Одним из решений уравнения $\Delta E_s=0$ при таком граничном условии является $E_s=0$, и усредненные поля удовлетворяют такому же условию. Условие $E_s=0$ для неусредненных полей строго справедливо только на металле, между проводами E_s , разумеется, отлично от нуля, но большого значения E_s принимать не может. Более точное решение, зависящее от формы проводов и расстояния между ними, в котором E_s не равно нулю всюду, может быть получено из уравнения $\Delta E_s=0$, например, методом конформных преобразований. Это решение дает для усредненных полей граничные условия, уточняющие первые два уравнения (16.2).

Последнее граничное условие в (16.2) получается из простейшего решения уравнения Лапласа для неусредненной компоненты H_s , $\Delta H_s=0$, с граничным условием $\partial H_s/\partial n=0$, где n — нормаль к поверхности провода. Это простейшее решение есть $H_s=\text{const}$, откуда и следует непрерывность усредненных значений H_s при переходе через решетку. Так же получается и третье условие в (16.2). Последние условия тоже могут быть уточнены, если точнее решить граничную задачу для уравнения Лапласа и установить связь между значениями H_s на больших (по сравнению с L) расстояниях от решетки по обе стороны от нее, или, что то же самое, связь между средними значениями H_s .

2. Условия (16.2) означают, что в плоскости решетки токи могут течь только в направлении проводов, а в перпендикулярном направлении t токи не текут, так что компонента H_s не испытывает скачка. Решетка, таким образом, заменяется поверхностью с *анизотропной проводимостью*.

В применении к задаче о падении плоской волны (16.2) приводит к полной прозрачности для волны, электрический вектор которой перпендикулярен к проводам, и полному отражению для волны, электрический вектор которой параллелен проводам. Действительно, пусть $s \equiv x$, т. е. провода параллельны оси x , и решетка лежит в плоскости xy . Если со стороны отрицательных z падает волна $E_y=e^{-ikz}$, $H_x=e^{-ikz}$, то полное решение будет при $z < 0$ $E_y=e^{-ikz} + Re^{ikz}$, $H_x=e^{-ikz} - Re^{ikz}$, при $z > 0$ $E_y=De^{-ikz}$, $H_x=De^{-ikz}$, и два последних условия (16.2) дают $1+R=D$, $1-R=D$. Следовательно, $R=0$, $D=1$ — волна совершенно не заме-

чает решетку. Разумеется, при сближении проводов это перестает быть верным. Возникает емкостная связь между соседними проводами, волна в какой-то степени отражается; этот эффект не передается условиями (16.2). Точно так же, если падает волна с компонентами E_x , H_y , то по первым двум условиям (16.2) она полностью отразится; между тем ясно, что какое-то просачивание будет иметь место, тем большее, чем тоньше провода. Уточненные граничные условия позволяют проследить и этот эффект.

В большей части работ по теории спирали используют формулы (16.2); уточненные граничные условия, учитывающие форму проводов и дающие соответственно неполное прохождение и неполное отражение в задаче о плоской волне, применяются редко, ибо приводят к более громоздким выкладкам.

3. Применим (16.2) к определению поля медленной волны, распространяющейся *вдоль спиральной линии*. Условия анизотропной проводимости (16.2) означают, что на цилиндре ($r = a$, a — радиус спирали) должны быть равны нулю компоненты E_s с обеих сторон спирали и непрерывна компонента H_s :

$$E_s = E_\varphi \cos \gamma + E_z \sin \gamma, \quad H_s = H_\varphi \cos \gamma + H_z \sin \gamma. \quad (16.3)$$

Кроме того, все тангенциальное к цилиндру электрическое поле должно быть непрерывно; для этого достаточно, кроме первых двух условий (16.2), непрерывности любой отличной от E_s компоненты, например, непрерывности E_z .

Ограничимся симметричными волнами, в которых поля не зависят от φ . Так как условия анизотропной проводимости не обладают цилиндрической симметрией, то, в отличие от полей вдоль диэлектрического цилиндра, поля даже симметричной волны оказываются гибридными. Их надо записать через четыре потенциальные функции:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= AJ_0(ar), & \psi &= BJ_0(ar), & r &< a, \\ \chi &= CH_0^{(2)}(ar), & \psi &= DH_0^{(2)}(ar), & r &> a. \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

Здесь аргумент цилиндрических функций во всем пространстве одинаков. Далее, надо выразить участвующие в (16.4) поля по формулам (10.22) через χ и ψ (например, $E_\varphi = ik \partial \psi / \partial r$) и записать четыре граничных условия (16.2), причем вместо третьего из них проще потребовать условия $E_z(r=a+0) =$

$= E_z(r=a=0)$. Возникнет четыре уравнения для A, B, C, D . Условие существования нетривиального решения дает иско-
мое дисперсионное уравнение симметричных волн в спиральной
линии

$$\alpha^2 = -k^2 \cdot \frac{H_1^{(2)}(\alpha a) J_1(\alpha a)}{H_0^{(2)}(\alpha a) J_0(\alpha a)} \operatorname{ctg}^2 \gamma. \quad (16.5)$$

Это уравнение проще, чем уравнение для волн вдоль
диэлектрического стержня, так как волновое число h входит
в него только через α ($\alpha^2 = k^2 - h^2$). Как и для всех линий
с медленными волнами, $\alpha^2 < 0$.

Анализируя (16.5), примем сначала, что $|\alpha a| \gg 1$ и уста-
новим условия, при которых это неравенство выполняется.
При $|\alpha a| \gg 1$ и $\operatorname{Im} \alpha < 0$ дробь в (16.5) равна единице, и
 $\alpha = -ik \operatorname{ctg} \gamma$. При этом $|\alpha a| = ka \operatorname{ctg} \gamma$. Таким образом, при

$$ka \gg \operatorname{tg} \gamma \quad (16.6)$$

из (16.5) получается

$$\alpha = -ik \operatorname{ctg} \gamma, \quad h = k/\sin \gamma. \quad (16.7)$$

Следовательно, при *высоких частотах*, точнее, при выполнении
неравенства (16.6), оказывается справедливым элементарное
решение (16.1).

Однако область частот, при которых справедливы соот-
ношения (16.7), ограничена также и сверху. Как мы уже от-
мечали при исследовании волн вдоль гофры, усредненные
граничные условия для периодических структур справедливы
только в том случае, если длина волны велика по сравне-
нию с периодом. В спиральной линии период L равен
 $2\pi a \sin \gamma$, и эта величина должна быть мала по сравнению
с $\Lambda = 2\pi/h$. Согласно (16.7) $\Lambda = \frac{2\pi}{k} \sin \gamma$, так что условие
 $L \ll \Lambda$ требует $ka \ll 1$. Таким образом, область частот, в ко-
торой замедление описывается уравнением (16.1) и не зависит
от частоты, лежит в границах

$$\operatorname{tg} \gamma \ll ka \ll 1. \quad (16.8)$$

Обычно $\gamma \ll 1$, так что (16.1) справедливо в значительной
полосе частот.

При частотах меньших, чем установлено левым неравен-
ством (16.8), т. е. при нарушении (16.6), фазовая скорость

растет и приближается к c . Проще всего установить это, положив в (16.5) $|aa| \ll 1$. Тогда дробь в (16.5) будет малой величиной, порядка $1/\ln|aa|$, и из (16.5) следует, что $|aa| \ll ka \operatorname{ctg} \gamma$. При достаточно *малом* ka $|aa|$ будет тоже мало, волна будет распространяться со скоростью, весьма близкой к c . При уменьшении ka до значений, меньших или сравнимых с γ , возникает дисперсия, и фазовая скорость возрастает, приближаясь к c .

Таким же образом строится теория более сложных устройств, содержащих спираль. До тех пор пока выполняется условие $\Lambda \gg L$, применимы граничные условия (16.2) или их уточнения, т. е. граничные условия для усредненных полей, и теория сводится к исследованию дисперсионных уравнений типа (16.5). При нарушении этого условия возникают сложные резонансные явления, исследование которых в рамках усредненных граничных условий невозможно.

СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

§ 17. Элементарный электрический диполь в пустоте

1. Изучая выше плоские и цилиндрические волны, мы отвлекались от вопроса о том, какими токами они возбуждаются. Такой подход был оправдан тем, что поля этих волн нигде не имеют особенностей, т. е. всюду конечны. Все участки оси z , вдоль которой распространяется волна, равноправны, и всегда можно полагать, что источник расположен за границами данного участка. Сферические волны значительно теснее связаны с источниками. Поля этих волн имеют *особенности* в точках, где расположены источники, и изучать структуру этих полей надо одновременно с задачей о возбуждении.

Простейшей сферической волной является волна, возбуждаемая в пустоте (т. е. в отсутствие других тел) *элементарным диполем*. Мы определим его как ток, сосредоточенный в объеме, размер которого меньше всех линейных размеров, участвующих в задаче, и пронормируем его так, чтобы плотность стороннего тока (комплексной амплитуды) была равна

$$j^{ct} = \delta(r - r_0) a. \quad (17.1)$$

Здесь r_0 — радиус-вектор точки, в которой расположен диполь, a — единичный вектор, δ -функция, определенная таким образом, что объемный интеграл от произведения ее на любую функцию равен значению этой функции в точке r_0 , если эта точка лежит в области интегрирования, и равен нулю, если r_0 лежит вне этой области.

Поле создаваемое заданным током, в частности, током (17.1), легче всего найти, выражая его по формуле (8.10а) через вектор Герца $\Pi = \Pi^{(e)}$. Подставляя (8.10а) в уравнения (2.18), получим (при $\epsilon = 1$, $\mu = 1$)

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = i \frac{4\pi}{\omega} j^{ct}. \quad (17.2)$$

Формула эта записана для *декартовых компонент* Π и j^{ct} . Компоненты по различным осям оказываются не связанными друг с другом, т. е., например, j_y^{ct} не вызывает появления Π_x . Именно поэтому по заданному j^{ct} удобнее сначала находить Π , а затем, дифференцированием, поля, а не определять непосредственно поля из (2.18).

Поле элементарного диполя находится из вектора Π , являющегося решением (17.2) при (17.1). Поместим начало координат в r_0 и направим ось z по направлению диполя ($a_z=1$). Тогда Π содержит одну компоненту Π_z , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta \Pi_z + k^2 \Pi_z = i \frac{4\pi}{\omega} \delta(0). \quad (17.3)$$

Так как правая часть в *сферической системе координат* (ρ, ϑ, φ) не зависит от углов, и всюду, кроме начала координат, решение должно удовлетворять однородному уравнению, то решением (17.3) должна быть линейная комбинация двух функций, удовлетворяющих однородному уравнению, не зависящих от ϑ, φ и имеющих при $\rho \rightarrow 0$ правильную особенность. Такими функциями являются

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{e^{ik\rho}}{\rho}. \quad (17.4a)$$

Однако вторую из них надо исключить, так как она не удовлетворяет еще одному требованию — распространение волны должно происходить в направлении от начала координат, т. е. от источника. Умножив второе решение на $e^{i\omega t}$, мы увидим, что во второй волне поверхность равных фаз имеет уравнение $k\rho + \omega t = \text{const}$, т. е. движется в направлении убывающих ρ . Второе решение соответствует волне, идущей из бесконечности и сходящейся в центре, а не волне, излученной током, расположенным в начале координат. Таким образом, требуемое решение имеет вид

$$A \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}. \quad (17.4b)$$

Коэффициент A легко найти, проинтегрировав (17.3) по объему сферы малого радиуса b ($kb \ll 1$) с центром в начале координат. Внутри и на поверхности этой сферы $\Pi_z = A/\rho$. Интеграл от первого слагаемого преобразуется в поверхностный

интеграл от $\partial \Pi_z / \partial \rho$, так как $\Delta = \text{div grad}$, и равен $-4\pi A$, интеграл от второго слагаемого имеет порядок $k^2 b^2$ и исчезает при $kb \rightarrow 0$. Для A получаем значение $A = -l/\omega$, так что окончательно искомое решение (17.3) имеет вид

$$\Pi_z = -\frac{i}{\omega} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}. \quad (17.4в)$$

2. Из (17.4в) легко получить компоненты полей, дифференцируя (17.4в) по формулам (8.10а). При этом удобно вычислять *сферические компоненты полей*. Отличными от нуля будут три компоненты, H_φ , E_ϑ , E_ρ . От азимутального угла φ поля не зависят, зависимость от ϑ дается множителем $\sin \vartheta$ для H_φ и E_ϑ и $\cos \vartheta$ — для E_ρ . На больших расстояниях, при $kr \gg 1$, в так называемой *дальней зоне*, компонента E_ρ становится малой по сравнению с остальными компонентами, так как она убывает как $1/\rho^2$, а E_ϑ и H_φ убывают медленнее, как $1/\rho$. При $kr \gg 1$ старшие по $1/\rho$ члены в выражениях для полей можно получить, дифференцируя в (17.4в) только показательную функцию; при этом возникает множитель k , который велик по сравнению с множителем $1/\rho$, получающимся при дифференцировании знаменателя. В дальней зоне для поля элементарного диполя получаем

$$E_\vartheta = -H_\varphi = -l \frac{k}{c} \sin \vartheta \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}. \quad (17.5)$$

Очевидно, что точность этой формулы — в ней опущены множители типа $\left[1 + O\left(\frac{1}{kr}\right)\right]$ — достаточна, например, для того, чтобы вычислить излученную мощность $S_{\text{изл}}$, т. е. *полный поток энергии*, уносимой этой волной. Поток этот одинаков для сферы любого радиуса, поэтому достаточно вычислить его для сферы большого радиуса. Вектор $\mathfrak{S}$ (1.5) имеет при $kr \gg 1$, согласно (17.5), только одну компоненту $\mathfrak{S}_\rho$, равную $\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{k^2}{c} \cdot \sin^2 \theta \frac{1}{\rho^2}$. Интегрируя по поверхности сферы, получим

$$S_{\text{изл}} = \oint \mathfrak{S}_\rho dS = \frac{1}{3} \frac{k^2}{c}, \quad (17.6)$$

где dS — элемент поверхности сферы ($dS = \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi$). Если диполь образован током I_0 , протекающим по прямолинейному отрезку длиной l , где I_0 — линейная плотность тока,

а $kl \ll 1$, то этот ток создает такое же поле, как диполь с плотностью $j^{\text{ст}} = I_0 \delta(0)$. Поля такого диполя отличаются от полей (17.5) множителем $I_0 l$, излученная мощность будет согласно (17.6) $\frac{1}{3c} k^2 l^2 I_0^2$. Для характеристики этой величины удобно ввести не зависящий от тока I_0 коэффициент $\mathfrak{R}$, называемый *сопротивлением излучения*. Он определяется условием

$$S_{\text{изл}} = \frac{1}{2} \mathfrak{R} I_0^2, \quad (17.7)$$

и для диполя согласно предыдущему равен

$$\mathfrak{R} = \frac{2}{3} (kl)^2 \frac{1}{c}. \quad (17.8a)$$

Для перевода величин, имеющих размерность сопротивления, в практическую систему единиц надо, как и в (11.6), заменить $1/c$ множителем 30. Таким образом, для диполя

$$\mathfrak{R} = 20 (kl)^2 \text{ ом}. \quad (17.8b)$$

Рассмотренная в этом параграфе волна не содержит компоненты H_φ . По аналогии с теми цилиндрическими волнами, поля которых не содержат H_z , ее можно назвать сферической волной типа *ТМ*. Поля любой сферической *ТМ*-волны могут быть выражены через одну скалярную потенциальную функцию. Точно так же через одну функцию выражаются поля любой сферической *ТЕ*-волны, т. е. волны, не содержащей E_φ .

§ 18. Излучение системы токов в пустоте

1. Уравнения (17.2) и (8.10a) позволяют вычислить вектор Герца и поля, создаваемые любыми токами $j^{\text{ст}}$. Определение полей сводится в первую очередь к нахождению вектора Π из (17.2) при заданной правой части. Из вида уравнения следует, что каждая декартова компонента Π удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + k^2 u = f. \quad (18.1a)$$

Проще всего находить u из (18.1a), используя *функцию Грина* этого уравнения, т. е. функцию g , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta g + k^2 g = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (18.2a)$$

Согласно (17.3) и (17.4в) решением его, представляющим собой расходящуюся волну, является функция

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (18.3)$$

Для любых двух функций $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, удовлетворяющих уравнению (18.1а) с правыми частями $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$, справедливо очевидное равенство:

$$\operatorname{div}(u^{(1)} \operatorname{grad} u^{(2)} - u^{(2)} \operatorname{grad} u^{(1)}) = u^{(1)} f^{(2)} - u^{(2)} f^{(1)}. \quad (18.4а)$$

Его легко получить, умножив уравнение для $u^{(2)}$ на $u^{(1)}$ и уравнение для $u^{(1)}$ на $-u^{(2)}$, либо проверить, раскрыв левую сторону и подставив $\Delta u^{(1)}$ и $\Delta u^{(2)}$ из уравнений (18.1). Проинтегрировав (18.4а) по любому объему, получим

$$\oint \left(u^{(1)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial N} - u^{(2)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial N} \right) dS = \int (u^{(1)} f^{(2)} - u^{(2)} f^{(1)}) dV, \quad (18.5а)$$

где N — внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей объем.

Применим (18.5а) к определению u из (18.1а), приняв в качестве $u^{(1)}$ и $f^{(1)}$ функции u и f , а в качестве $u^{(2)}$ и $f^{(2)}$ — функцию Грина g и δ -функцию. Имея в виду свойство δ -функции, получим

$$u(\mathbf{r}_0) = \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV_{\mathbf{r}} + \oint \left(u \frac{\partial g}{\partial N} - g \frac{\partial u}{\partial N} \right) dS. \quad (18.6а)$$

В этом параграфе мы применим соотношение (18.6а) только к бесконечной области. Ток, расположенный в ограниченной области, образует на больших расстояниях расходящиеся сферические волны той же структуры, что и (18.3). Оценка показывает, что на больших расстояниях от начала координат подинтегральное выражение в поверхностном интеграле убывает быстрее, чем квадрат расстояния, т. е. чем площадь поверхности. Для достаточно большой поверхности этот интеграл может быть сделан сколь угодно малым, а следовательно, он равен нулю, если внутри поверхности расположены все токи. Таким образом, получаем известную формулу для Π в виде интеграла от $j^{\text{ст}}$:

$$\Pi(\mathbf{r}_0) = -\frac{i}{\omega} \int j^{\text{ст}}(\mathbf{r}) \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV_{\mathbf{r}}. \quad (18.7а)$$

Основным в этом методе решения уравнения (17.2) является применение функции Грина (18.3) и использование формулы (18.4а).

2. Ниже изложен другой способ решения задачи о поле заданных токов. Методически он очень близок к тому способу, которым мы решали скалярное неоднородное уравнение (18.1а), однако применяется непосредственно к уравнениям Максвелла. Развитие этого аппарата позволит далее получить ряд результатов, относящихся к уравнениям Максвелла, в частности, построить решение так называемых граничных задач.

Будем решать уравнения Максвелла с заданными токами:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= ik E + \frac{4\pi}{c} j^{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} E &= -ik H, \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

не вводя промежуточной функции — вектора Герца Π . При этом аналогом функции Грина будет служить решение уравнений Максвелла с правой частью в виде δ -функции:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H^{(e)} &= ik E^{(e)} + \frac{4\pi}{c} \delta(r - r_0) a, \\ \operatorname{rot} E^{(e)} &= ik H^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (18.26)$$

Роль *векторной функции Грина* играют, таким образом, два вектора $E^{(e)}(r, r_0)$, $H^{(e)}(r, r_0)$ — *поля элементарного диполя*, расположенного в точке r_0 и направленного вдоль некоторого единичного вектора a . Они были найдены нами в предыдущем параграфе.

Между двумя решениями уравнений Максвелла, т. е. полями $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ и $E^{(2)}$, $H^{(2)}$, возбуждаемыми соответственно токами $j^{\text{ст}(1)}$ и $j^{\text{ст}(2)}$, существует соотношение, являющееся аналогом (18.4а). Это соотношение имеет вид

$$\operatorname{div} \{[E^{(1)} H^{(2)}] - [E^{(2)} H^{(1)}]\} = \frac{4\pi}{c} (j^{\text{ст}(1)} E^{(2)} - j^{\text{ст}(2)} E^{(1)}). \quad (18.46)$$

Его легко получить, умножив первое из уравнений Максвелла для полей с индексом «1» на $E^{(2)}$, второе — на $H^{(2)}$, затем умножив первое из уравнений для полей с индексом «1» на $-E^{(1)}$, второе на $-H^{(1)}$, сложив все четыре равенства

и воспользовавшись формулой (2.20). Можно также проверить (18.46), раскрыв по этой формуле левую часть и подставив $\text{rot } \mathbf{E}^{(1)}$ и т. д. из уравнений Максвелла.

В интегральной форме уравнение (18.46) дает

$$\oint \{[\mathbf{E}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)}]_N - [\mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(1)}]_N\} dS = \\ = \frac{4\pi}{c} \int (\mathbf{j}^{\text{ст } (1)} \mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{j}^{\text{ст } (2)} \mathbf{E}^{(1)}) dV. \quad (18.56)$$

Две последние формулы называются *леммой Лоренца*. Мы далее дадим их обобщение и рассмотрим некоторые следствия из них.

Применим (18.56) к задаче об интегрировании (18.16). В качестве $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{j}^{\text{ст } (1)}$ примем поля и токи из (18.16), в качестве полей с индексом «2» — векторную функцию Грина $\mathbf{E}^{(e)}$, $\mathbf{H}^{(e)}$. Тогда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \mathbf{a} = \int \mathbf{j}^{\text{ст}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV_r + \\ + \frac{c}{4\pi} \oint \{[\mathbf{E} \mathbf{H}^{(e)}]_N - [\mathbf{E}^{(e)} \mathbf{H}]_N\} dS. \quad (18.66)$$

Если все токи расположены в конечной части пространства и интеграл взят по области, содержащей все токи, то, так же как для (18.6а), поверхностный интеграл равен нулю, и мы получаем явное выражение для проекции искомого электрического поля на выбранный ранее вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \mathbf{a} = \int \mathbf{j}^{\text{ст}}(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV_r. \quad (18.76)$$

Таким образом, для того чтобы найти любую компоненту поля $\mathbf{E}$ в любой точке, надо в эту точку мысленно поместить ориентированный в направлении этой компоненты элементарный диполь, вычислить поле этого диполя в точке, где расположены возбуждающие токи, и найти интеграл (18.76).

3. При таком способе расчета электрическое поле находится одной квадратурой, но для определения $\mathbf{H}$ надо вычислять, согласно второй формуле (18.16), $\text{rot } \mathbf{E}$. Опишем искусственный прием, позволяющий непосредственно находить также и $\mathbf{H}$. Особенностью этого приема является введение так называемых магнитных токов, которые мы подробнее рассмотрим в § 21.

Получение явного и простого выражения (18.76) для $E(r_0)$ основывается на том, что источником функции Грина $E^{(e)} H^{(e)}$ был электрический диполь, т. е. дельта-функция, стоящая в правой части *первого* уравнения Максвелла. Возьмем теперь в качестве функции Грина поле, удовлетворяющее системе уравнений Максвелла, в которой дельта-функция введена в правую часть *второго* уравнения. Точнее, определим поля $E^{(m)}(r, r_0)$, $H^{(m)}(r, r_0)$ как решение системы

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H^{(m)} &= ik E^{(m)}, \\ \operatorname{rot} E^{(m)} &= -ik H^{(m)} - \frac{4\pi}{c} \delta(r - r_0) a, \end{aligned} \right\} \quad (18.2в)$$

представляющее собой уходящую волну. Второе слагаемое справа во втором уравнении системы (18.2в) мы назовем *магнитным диполем*, имея в виду аналогию с электрическим диполем, участвующим в (18.26). Фактическое нахождение полей $E^{(m)}$, $H^{(m)}$ не составляет труда, если использовать найденные выше выражения для полей $E^{(e)}$, $H^{(e)}$. Очевидно, что простая замена в (18.26)

$$H^{(e)} \rightarrow -E^{(m)}, \quad E^{(e)} \rightarrow H^{(m)} \quad (18.8)$$

приводит к уравнениям (18.2в). Так как решения обеих систем удовлетворяют одним и тем же условиям на бесконечности, то поле магнитного диполя получается из поля электрического диполя подстановкой (18.8).

Зная решение системы (18.2в), легко найти явное выражение для магнитного поля заданной системы токов. Для этого надо умножить уравнения (18.16) на $E^{(m)}$, $H^{(m)}$ уравнения (18.2в) — на $-E$, $-H$, сложить и проделать те же преобразования, что и при выводе (18.76). Так получится явное выражение для $H(r_0)$, аналогичное (18.76):

$$H(r_0) a = - \int j^{\text{ст}}(r) E^{(m)}(r, r_0) dV_r. \quad (18.7в)$$

Три формулы (18.7) представляют собой разные формы решения одной и той же задачи. Они являются основой теории антенн, точнее, наиболее простой ее главы, занимающейся исследованием полей, которые создают заданные токи,

§ 19. Основы теории антенн

Согласно предыдущему поле любых токов, расположенных в конечной области пространства, т. е. любой антенны, является наложением полей совокупности электрических диполей. Наибольший интерес представляет вопрос о структуре поля в дальней зоне; в общем случае понятие дальней зоны оказывается более сложным, чем для элементарного диполя.

Наложение нескольких сферических волн в дальней зоне оказывается также сферической волной. Покажем это, исходя из (18.7а). Расшифруем входящее в эту формулу расстояние между точкой наблюдения $\mathbf{r}_0$ и точкой интеграции $\mathbf{r}$. Введем сферическую систему координат с центром где-либо в области, занятой токами, и обозначим координаты точки наблюдения $\mathbf{r}_0$ через $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$, а координаты точки интеграции $\mathbf{r}$ через (ρ, θ, φ) . Тогда

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \rho_0 \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_0} \cos \gamma + \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right)^{1/2}, \quad (19.1a)$$

где γ есть угол между направлениями $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0). \quad (19.1b)$$

Обозначим через D размер антенны; для всех точек, в которых расположены токи, $\rho \leq D$. Если $\rho_0 \gg D$, т. е. если расстояние до точки наблюдения велико по сравнению с размерами антенны, то в знаменателе (18.7а) можно заменить $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ на ρ_0 . В показателе

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = k\rho_0 - k\rho \cos \gamma + O\left(\frac{k\rho^2}{\rho_0}\right) \quad (19.2)$$

третье слагаемое можно отбросить, если

$$\rho_0 \gg kD^2, \quad (19.3)$$

— это и есть, одновременно с $\rho_0 \gg D$, условие, определяющее *дальнюю зону*. Если размер антенны велик по сравнению с длиной волны ($kD \gg 1$), то согласно (19.3) дальняя зона начинается значительно дальше от антенны, чем по простому условию $\rho_0 \gg D$. В дальнейшей зоне

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = k\rho_0 - k\rho \cos \gamma. \quad (19.4)$$

Тогда (18.7а) примет вид

$$\Pi = -\frac{i}{\omega} \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0} N, \quad (19.5)$$

где вектор N определяется равенством

$$N(\vartheta_0, \varphi_0) = \int j(r) e^{ikr \cos \gamma} dV_r. \quad (19.6)$$

Формула (19.4) имеет простой геометрический смысл — прямые, проведенные из разных точек антенны в какую-либо точку дальней зоны, можно считать параллельными друг другу. Определение поля совокупности источников сводится, согласно (19.6), к сложению полей элементарных источников. При этом сложении надо учитывать, во-первых, направление токов в элементарных источниках и, во-вторых, разность фаз сферических волн, приходящих из разных источников. Прямые, по которым считаются фазы, для дальней зоны параллельны между собой.

В дальней зоне, как и для элементарного диполя, можно при образовании полей E , H из Π по формулам (8.10а) сохранять только члены типа $1/\rho_0$, отбрасывая $1/\rho_0^2$ и т. д., а потому дифференцировать только множитель $e^{-ik\rho_0}$ и не учитывать производных по θ_0 , φ_0 . В сферической системе координат компоненты E_r , H_r малы (пропорциональны $1/\rho_0^2$), а остальные компоненты выражаются через сферические компоненты вектора N :

$$E_\theta = -H_\varphi = i \frac{k}{c} N_\theta \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0}, \quad E_\varphi = H_\theta = -i \frac{k}{c} N_\varphi \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0}. \quad (19.7)$$

Таким образом, при любом распределении токов их поле в дальней зоне представляет собой действительно сферическую волну, характер которой определяется вектором N (19.6), (19.16). Очевидно, что выбор начала координат не сказывается на зависимости полей от углов; перенос начала координат приводит лишь к появлению экспоненциального множителя, компенсирующего соответствующее изменение множителя $\exp(-ik\rho_0)$.

Поле элементарного диполя (17.5) представляет собой частный случай (19.7); для элементарного диполя $N = N_z = 1$ и поэтому $N_\theta = -\sin \theta_0$. Для произвольной антенны N_θ и N_φ — некоторые, вообще говоря, комплексные функции углов

θ_0 , φ , определяющие собой *диаграмму направленности*, поляризацию сферической волны и суммарную излучаемую мощность

$$S_{\text{изл}} = \frac{k^2}{c} \frac{1}{8\pi} \int |N|^2 d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (19.8)$$

2. Полученные формулы позволяют, в частности, показать, что *малое плоское кольцо тока излучает как магнитный диполь*. Действительно, если кольцо тока радиуса a лежит в плоскости xy , то $j_x = -\cos \varphi$, $j_y = \sin \varphi$, $\cos \gamma = \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0)$. Подставляя это в формулу (19.6), записанную для N_x и N_y , и приняв, что $ka \ll 1$, получим

$$N_x = -ik\pi a^2 \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \quad N_y = ik\pi a^2 \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad (19.9a)$$

так что отличной от нуля оказывается только одна сферическая компонента вектора N :

$$N_\varphi = ik\pi a^2 \sin \theta_0. \quad (19.9b)$$

Согласно (19.7) сферическая волна, создаваемая малым кольцом, совпадает с волной, создаваемым магнитным диполем, при условии, что магнитный ток равен $ik\pi a^2$. Эквивалентность кольца и диполя при $ka \ll 1$ следует уже из известного в теории постоянных токов совпадения магнитного поля малого кольца и магнитного листка. Таким образом, возможно приближенное фактическое осуществление магнитного диполя. Заметим, что поле кольца представляет собой пример частичной компенсации волн, создаваемых разными участками тока. В кольце такая компенсация имеет место для элементов, расположенных на противоположном конце каждого диаметра. Компенсация является неполной из-за различия в фазах этих волн. Например, на оси z разности фаз нет, и поле при $\theta_0 = 0$ оказывается, по (19.9), равным нулю.

Другим примером является типичный элемент антенны дециметровых и более длинных волн — *полуволновой вибратор*. Линейный ток I на нем симметричен относительно центра ($z = 0$), исчезает на концах и распределен по закону

$$I(z) = I_0 \cos kz. \quad (19.10)$$

Согласно (19.6) вектор N для этого тока имеет только одну компоненту N_z , равную, как легко вычислить,

$$N_z = I_0 \frac{2}{k} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta_0 \right)}{\sin^2 \theta_0}, \quad (19.11)$$

Поля полуволнового вибратора, как и вообще любого линейного тока, поляризованы так же, как поля элементарного диполя. Они равны

$$E_\theta = -H_\varphi = \frac{i}{c} 2I_0 \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta_0\right)}{\sin\theta_0} \cdot \frac{e^{-ik\rho_0}}{\rho_0}. \quad (19.12)$$

Диаграмма направленности близка к диаграмме направленности элементарного диполя (17.5). Легко по формуле (19.8) найти также и сопротивление излучения, введенное формулой (17.7). Оно оказывается равным $\Re = 2,42/c$, или, после перехода к практическим единицам, $\Re = 73,1 \text{ ом}$ — величина, характеризующая излучательную способность полуволнового вибратора.

Диаграмма направленности нескольких вибраторов находится по формулам (19.6) и (19.7). Комбинируя положение и токи в различных вибраторах, можно создавать различные диаграммы. Расчет диаграммы направленности и сопротивления излучения может быть произведен, если известны токи в каждом вибраторе.

Определение этих токов представляет собой весьма сложную электродинамическую задачу. В строгой подстановке задача состоит в том, чтобы найти ток, возникающий в тонком проводнике, если на него действует некоторое внешнее поле $E^{\text{внеш}}$. При этом роль сторонней силы играет уже не ток $I(z)$, а это внешнее поле, и именно оно считается заданным. Ток же должен быть найден из условия, что тангенциальная компонента полного поля, т. е. суммы $E^{\text{внеш}}$, и поля, созданного этим искомым током, на поверхности металла обращается в нуль. Это условие приводит к интегро-дифференциальному уравнению для $I(z)$. Исследование и решение его сложны. Однако для полуволнового вибратора результат оказывается простым. Если длина вибратора близка к $\lambda/2$, то форма тока практически не зависит от вида внешнего поля и определяется формулой (19.10), а амплитуда тока I_0 равна

$$I_0 = \frac{\int E_z^{\text{внеш}} \cos kz \, dz}{\Re + iY}. \quad (19.13)$$

Интеграл в этой формуле берется по длине вибратора, $\Re$ равно сопротивлению излучения ($2,42/c$), а Y зависит от

формы вибратора и его точной длины. Для провода в виде вытянутого эллипсоида вращения $Y=0$, если длина вибратора в точности равна $\lambda/2$. Для тонкого цилиндра условие $Y=0$ обеспечивается при некотором небольшом уменьшении длины по сравнению с $\lambda/2$, так что настроенный вибратор, т. е. вибратор, в котором знаменатель в (19.13) имеет наименьшее значение и тем самым ток I_0 — максимален при заданном $E^{\text{внеш}}$, должен быть несколько короче $\lambda/2$.

3. Этот простой результат строгой теории одиночного вибратора достаточен, чтобы построить также теорию антенны, содержащей *несколько вибраторов*. Пусть имеется M вибраторов. Обозначим амплитуду тока в m -м вибраторе через I_m ($m=1, 2, \dots, M$). Поле, действующее на m -й вибратор и играющее для него роль $E^{\text{внеш}}$, складывается из суммы полей, действующих на него со стороны всех остальных вибраторов, и поля $E_m^{\text{внеш}}$, которое действовало бы на него в отсутствие остальных вибраторов. Для приемной антенны $E_m^{\text{внеш}}$ есть падающее поле, которое было бы в месте m -го вибратора в отсутствие антенны, для передающей антенны $E_m^{\text{внеш}}$ — поле, создаваемое питающим фидером. Поле, действующее на m -й вибратор со стороны n -го, пропорционально току n -го вибратора, т. е. может быть записано в виде $I_n E_{nm}$, где E_{nm} зависит только от взаимного расположения n -го и m -го вибраторов. Таким образом,

$$I_m = \frac{\int \left(\sum_{n \neq m} I_n E_{nm,z}(z) + E_{m,z}^{\text{внеш}} \right) \cos kz \, dz}{\Re + iY_m}. \quad (19.14)$$

Обозначив

$$-\int E_{nm,z}(z) \cos kz \, dz = T_{nm} \quad (n \neq m);$$

$$\Re + iY_m = T_{mm}, \quad \int E_{m,z}^{\text{внеш}} \cos kz \, dz = e_m,$$

получим

$$\sum_{n=1}^M I_n T_{nm} = e_m, \quad m=1, 2, \dots, M. \quad (19.15)$$

Коэффициенты T_{nm} определяются только геометрическими факторами (взаимной ориентацией вибраторов и расстоянием между ними); они вычислены и протабулированы. Заметим, что их определение требует нахождения поля вибратора в

ближней зоне. Коэффициенты T_{mt} зависят от формы и длины m -го вибратора. Величины e_m определяются величиной и характером возбуждающих полей; они имеют смысл электродвижущих сил, действующих на вибраторы.

Таким образом, определение токов в вибраторах много-вибраторной антенны сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Найдя токи, можно затем определить диаграмму излучения и излучаемую мощность.

Теория антенн, содержащих вибраторы конечной толщины либо неполовволновые вибраторы, значительно сложнее и является одной из глав общей теории дифракции. Существует много типов антенн, в которых основным излучающим элементом являются не вибраторы; некоторые из них будут коротко рассмотрены в следующей главе.

§ 20. Лемма Лоренца. Теоремы взаимности

1. Для того чтобы получить явное выражение для (18.7в), мы ввели так называемый магнитный диполь (18.2в). Оказалось, что поля $E^{(m)}$, $H^{(m)}$, создаваемые магнитным диполем, являются одной из удобных функций Грина уравнений Максвелла. Можно приближенно реализовать магнитный диполь в виде тока, протекающего по малому кольцу. Существует, однако, целый класс задач, так называемые граничные задачи, в которых целесообразно рассматривать *магнитные токи* в общем виде. Точнее, окажется, что введение таких токов в уравнения Максвелла позволит свести эти задачи (они рассматриваются в следующей главе) к более простым задачам, рассмотренным в предыдущей главе.

Запишем поэтому уравнения Максвелла в форме

$$\operatorname{rot} H = ik\epsilon E + \frac{4\pi}{c} j^{(e)}, \quad (20.1a)$$

$$\operatorname{rot} E = -ik\mu H - \frac{4\pi}{c} j^{(m)}. \quad (20.16)$$

Мы опустили индекс «ст» (сторонний) у токов и записали уравнения для произвольной среды, так как полученные в этом параграфе результаты будут справедливы и в неоднородной среде, т. е. при $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$ и $\mu = \mu(x, y, z)$. В этом параграфе мы установим общие соотношения для двух решений уравнений (20.1), т. е. для полей $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ и $E^{(2)}$, $H^{(2)}$,

созданных двумя наборами токов $j^{(e,1)}, j^{(m,1)}$ и $j^{(e,2)}, j^{(m,2)}$. Для этого запишем уравнения (20.1) для первых полей и токов, затем — для вторых полей и токов, потом умножим первую систему уравнений на $E^{(2)}, H^{(2)}$, вторую — на $-E^{(1)}, -H^{(1)}$ и сложим все четыре уравнения. Получим соотношение, обобщающее (18.46):

$$\operatorname{div} \{[E^{(1)}H^{(2)}] - [E^{(2)}H^{(1)}]\} = \\ = \frac{4\pi}{c} (j^{(e,1)}E^{(2)} - j^{(e,2)}E^{(1)} - j^{(m,1)}H^{(2)} + j^{(m,2)}H^{(1)}). \quad (20.2)$$

В интегральной форме это уравнение дает

$$\oint \{[E^{(1)}H^{(2)}]_N - [E^{(2)}H^{(1)}]_N\} dS = \\ = \frac{4\pi}{c} \int (j^{(e,1)}E^{(2)} - j^{(e,2)}E^{(1)} - j^{(m,1)}H^{(2)} + j^{(m,2)}H^{(1)}) dV, \quad (20.3)$$

где интеграл слева взят по поверхности, окружающей объем V , и N — нормаль к поверхности. Формулы (20.2) и (20.3) называются *леммой Лоренца* соответственно в дифференциальной и интегральной формах. Они лежат в основе теорем взаимности, которые мы сейчас установим, и, кроме того, как в § 18, позволяют использовать функции Грина для нахождения явного решения задачи о возбуждении.

Найдем сначала условия применимости леммы Лоренца. При ее выводе существенным было исчезновение членов

$$E^{(1)}\epsilon E^{(2)} - E^{(2)}\epsilon E^{(1)}, \quad H^{(1)}\mu H^{(2)} - H^{(2)}\mu H^{(1)}. \quad (20.4)$$

Для того чтобы эти слагаемые исчезли, надо, во-первых, чтобы ϵ и μ не зависели от полей. Если, например, $\epsilon = \epsilon(E)$ (нелинейная среда), то первая разность в (20.4) $E^{(1)}E^{(2)}\{\epsilon(E^{(1)}) - \epsilon(E^{(2)})\}$ не равна нулю. Второе условие состоит в том, чтобы ϵ и μ были скалярами или симметричными тензорами. Существует много сред, в которых это условие не выполняется. Наибольшее практическое значение имеют ферриты — в намагниченных ферритах μ является тензором, содержащим антисимметричную часть, т. е. $\mu_{ik} \neq \mu_{ki}$. Поэтому теоремы взаимности в написанной ниже форме не будут справедливы в ферритах; технические устройства, использующие это обстоятельство, называют иногда «невзаимными».

2. Пусть все источники находятся в конечной области, т. е. нет приходящих из бесконечности волн; применим уравне-

ние (20.3) ко всему пространству. Поверхностный интеграл исчезнет, так как на больших расстояниях поля $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ и $E^{(2)}$, $H^{(2)}$ представляют собой уходящие волны одинаковой структуры. Исчезает он также на металлических поверхностях, так как $[EH]_N$ содержит только тангенциальные к поверхности компоненты E . Таким образом,

$$\int (j^{(e,1)} E^{(2)} - j^{(e,2)} E^{(1)} - j^{(m,1)} H^{(2)} + j^{(m,2)} H^{(1)}) dV = 0, \quad (20.5)$$

где интегралы охватывают все токи.

Пусть теперь

$$\begin{aligned} j^{(e,1)} &= a^{(1)} \delta(r - r_1), & j^{(e,2)} &= a^{(2)} \delta(r - r_2), \\ j^{(m,1)} &= 0, & j^{(m,2)} &= 0 \end{aligned} \quad (20.6a)$$

так что сравниваются поля, созданные двумя элементарными электрическими диполями, расположенными соответственно в точках r_1 и r_2 и ориентированными по ортам $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$. Тогда

$$E^{(2)}(r_1) a^{(1)} = E^{(1)}(r_2) a^{(2)}. \quad (20.7a)$$

Это и есть *теорема взаимности* для двух электрических диполей. Она сопоставляет *результаты двух опытов* в одной среде. В первом опыте диполь помещается в точку r_1 , а в некоторой точке r_2 измеряется поле. Во втором опыте диполь помещается в точку r_2 , поле измеряется в r_1 . Утверждается, что соответствующие компоненты полей в обоих опытах одинаковы. Таким образом, в отсутствие невзаимных элементов невозможно, например, передать энергию по тракту в одном направлении и обеспечить отсутствие передачи по нему в обратном направлении.

Формула (20.5) позволяет таким же образом утверждать, что между полями, созданными двумя магнитными диполями,

$$\begin{aligned} j^{(m,1)} &= a^{(1)} \delta(r - r_1), & j^{(m,2)} &= a^{(2)} \delta(r - r_2), \\ j^{(e,1)} &= 0, & j^{(e,2)} &= 0 \end{aligned} \quad (20.6b)$$

существует соотношение

$$H^{(2)}(r_1) a^{(1)} = H^{(1)}(r_2) a^{(2)}, \quad (20.7b)$$

а между полями, созданными электрическими магнитным диполями,

$$\begin{aligned} j^{(e,1)} &= a^{(1)} \delta(r - r_1), & j^{(m,2)} &= a^{(2)} \delta(r - r_2), \\ j^{(e,2)} &= 0, & j^{(m,1)} &= 0 \end{aligned} \quad (20.6b)$$

существует соотношение

$$E^{(2)}(r_1) a^{(1)} = -H^{(1)}(r_2) a^{(2)}, \quad (20.7b)$$

Аналогичная теорема взаимности существует, разумеется, и в скалярной задаче. Между двумя решениями уравнения (18.1а), созданными соответственно двумя δ -источниками [$f^{(1)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, $f^{(2)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$], согласно (18.5а) существует соотношение $u^{(1)}(\mathbf{r}_2) = u^{(2)}(\mathbf{r}_1)$.

Лемму Лоренца и теоремы взаимности можно переформулировать таким образом, что они будут выполняться и в невязимных средах. Для этого надо сравнивать результаты двух опытов, произведенных не в одной и той же среде, а в двух *различных* средах, в которых тензоры μ не одинаковы, а получаются друг из друга *транспонированием*, т. е. связаны условием $\mu_{ik}^{(1)} = \mu_{ki}^{(2)}$. Такое же обобщение леммы Лоренца возможно, если $\epsilon_{ik} \neq \epsilon_{ki}$.

Для уравнений Максвелла теоремы взаимности связывают между собой определенные компоненты векторов. Если, например, решена задача о вертикальном электрическом диполе ($\mathbf{a}^{(1)}$ направлено вертикально), расположенном в $\mathbf{r}_1$, и оказалось, что этот диполь не создает в какой-либо точке $\mathbf{r}_2$ магнитного поля с ориентацией $\mathbf{a}^{(2)}$, т. е. $\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}_2)\mathbf{a}^{(2)} = 0$, то согласно (20.7в) электрическое поле магнитного диполя, расположенного в $\mathbf{r}_2$ и ориентированного по $\mathbf{a}^{(2)}$, не содержит в $\mathbf{r}_1$ вертикальной компоненты электрического поля [$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}_1)\mathbf{a}^{(1)} = 0$].

3. Теоремы взаимности часто позволяют свести решения одной задачи дифракции к другой, более простой или уже решенной. Приведем два *примера* такого применения теорем взаимности и леммы Лоренца.

Приходящую из бесконечности плоскую волну иногда удобно представить как поле диполя, расположенного настолько далеко, что создаваемая им сферическая волна совпадает с падающей плоской. Пусть, например, решена задача о дифракции плоской волны $E = E_x = e^{-ikz}$ на каком-либо сложном теле и найдена какая-либо, например, y -я компонента этого поля в начале координат, т. е. величина $E_y^{(1)}(0)$. Этого достаточно, чтобы вычислить амплитуду сферической волны, которую в присутствии того же тела излучит в направлении $-z$ элементарный электрический диполь, расположенный в начале координат и ориентированный по оси y . Действительно, диполь с амплитудой A , расположенный на оси z в точке z_0 ($z_0 < 0$), создает при достаточно больших $|z_0|$ согласно (17.5) поле $-\frac{ik}{c} A \frac{e^{ikhz}}{-z_0} e^{-ikhz}$. Если $A = \frac{c}{ik} z_0 e^{-ikhz_0}$,

то это поле вблизи тела совпадает с падающим. Полагая $j^{(e,1)} = A\delta(z - z_0)x$, $j^{(e,2)} = \delta(0)y$, получим из (20.7а) для искомого поля

$$E_x^{(2)}(z_0) = \frac{ik}{c} E_y^{(1)}(0) \frac{e^{-ikz_0}}{z_0}. \quad (20.8)$$

Если первая задача была решена для любого направления прихода плоской волны и любой ее поляризации, то вторая задача — о дальнем поле диполя, расположенного в начале координат, также решена полностью.

В этом примере неявно делаются два предельных перехода — расстояние до диполя, создающего плоскую волну, должно быть больше размеров тела, а размер области, по поверхности которой производится интеграция в (20.3), много больше расстояния до диполя. Однако в некоторых случаях для того, чтобы установить соотношения между решениями двух задач, удобнее не включать в область интегрирования бесконечно удаленных источников; тогда в (20.3) сохранится интеграл по поверхности интегрирования. Пусть, например, имеются два полубесконечных волновода, каким-нибудь образом электродинамически связанные друг с другом через свободное пространство, нерегулярный участок волновода и т. д. Пусть задача о поле, возникающем при падении из первого волновода какой-либо (n -й) волны единичной амплитуды, решена и, в частности, известна амплитуда A некоторой (m -й) волны, уходящей во второй волновод. Покажем, что при этом одновременно решена задача об амплитуде (B) n -й волны, уходящей в первый волновод при падении из второго волновода m -й волны единичной амплитуды. Можно было бы и здесь использовать тот же прием, что и в предыдущем примере, однако проще применить (20.3) к области, ограниченной двумя поперечными сечениями обоих волноводов и замыкающейся либо на поверхности металла, либо на бесконечности. В этой области токов нет, правая часть (20.3) равна нулю, а слева останутся только интегралы по обоим сечениям.

Рассмотрим интеграл по поперечному сечению первого волновода. Поле $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ состоит из поля идущей к устью n -й волны и суперпозиции волн, идущих от устья. Поле $E^{(2)}$, $H^{(2)}$ состоит только из волн, идущих от устья. Интеграл, стоящий в (20.3) слева, является, таким образом, двойной

суммой таких же интегралов, где под $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ и $E^{(2)}$, $H^{(2)}$ надо понимать собственные волны первого волновода. Для двух волн разных номеров этот интеграл, согласно (9.12), равен нулю. Он равен нулю и для двух волн одинаковых номеров, идущих в одном и том же направлении, так как состоит из двух слагаемых типа (9.12), взаимно компенсирующихся. Таким образом, в интеграле по поперечному сечению первого волновода в $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ надо сохранить только поле падающей волны, а в $E^{(2)}$, $H^{(2)}$ — только поле волны того же номера n , идущей от устья. Амплитуда падающей волны равна единице, амплитуда уходящей в первый волновод волны есть искомая амплитуда B . Интеграл равен $-2kh_n B$. В таком же интеграле (20.3) по сечению второго волновода также надо сохранить только *поля встречных волн одинаковых номеров*. Так как $E^{(2)}$, $H^{(2)}$ содержит только одну (m -ю) волну, идущую к устью, то этот интеграл будет равен $2kh_m A$, где A — известная из первой задачи амплитуда m -й волны, уходящая во второй волновод. Так как интегралы в сумме дают нуль, то искомая амплитуда во второй задаче (B) выражается через известную амплитуду первой задачи (A) следующим образом:

$$B = Ah_m/h_n. \quad (20.9)$$

В этой формуле h_n и h_m относятся, вообще говоря, к разным волноводам.

Заметим в заключение этого параграфа, что соотношение (20.7а) позволяет дать более простую трактовку формулы (18.7б) для поля заданных токов. Поле это равно интегралу от полей диполей, распределенных в направлениях и с амплитудами заданных токов $j^{\text{ст}}$. Такую же физически наглядную форму можно, согласно (20.7в), придать и выражению (18.7в).

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 21. Магнитные токи

1. В предыдущей главе был описан математический аппарат, позволяющий найти поле, если известны токи, которые это поле создают. Однако этот способ определения поля часто противоречит физической картине и потому фактически очень неудобен или даже неосуществим, а значительно более естественным оказывается определение поля *в некоторой области* по значению полей *на границе* этой области. Пусть, например, нужно определить излучение, возникающее при прорезании щели в стенке волновода. В отсутствие щели поле токов, протекающих по волноводу, во внешнем пространстве взаимно полностью компенсируется. Щель изменяет токи, возникает излучение. Чтобы определить его по токам, надо их знать очень точно, как всегда при вычислении величины, являющейся разностью двух почти равных больших величин. Между тем, для того чтобы определить внешнее поле по полю на щели, достаточно это последнее знать лишь с той точностью, с которой нам надо определить внешнее поле.

Излагаемая ниже теория была развита, главным образом, в связи с появлением дифракционных антенн, где излучающим элементом является не тонкий проводник с током, а щель. Однако эта теория применяется и во многих других электродинамических расчетах, например, в теории параболических антенн, рупоров, и в ряде задач, не связанных с антеннами.

Формальное решение задачи об определении поля в некоторой области по токам в этой области и значению полей на границе области сразу получается из формулы (20.3). Будем, для определенности, искать электрическое поле; все полученные ниже результаты оказались бы такими же, если

бы мы искали магнитное поле. Примем в (20.3), что $E^{(2)}$, $H^{(2)}$ созданы электрическим диполем, расположенным в пустоте в точке r_0 , так что $E^{(2)} = E^{(e)}(r, r_0)$, $H^{(2)} = H^{(e)}(r, r_0)$. Поля $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ — искомые, мы не будем писать у них индексы. Таким образом,

$$j^{(e, 2)} = a\delta(r - r_0), \quad j^{(m, 2)} = 0,$$

и аналогично (18.6) получим

$$E(r_0)a = \int \{j^{(e)}(r)E^{(e)}(r, r_0) - j^{(m)}(r)H^{(e)}(r, r_0)\} dV + \\ + \frac{c}{4\pi} \int \{[HE^{(e)}]_N + [EH^{(e)}]_N\} dS. \quad (21.1)$$

Основой дальнейших рассуждений является следующая особенность этой формулы — одни и те же функции Грина $E^{(e)}$, $H^{(e)}$ в первой строчке умножаются на $j^{(e)}$, $j^{(m)}$, а во второй — на тангенциальные к поверхности интегрирования значения искомых полей H_t , E_t . Следовательно, поле в любой точке r_0 будет одинаковым в двух задачах — в одной, в которой на границе касательные составляющие полей равны заданным значениям H_t , E_t , и в другой, где на границе $H_t = 0$, $E_t = 0$, но на ней распределены поверхностные токи с плотностями

$$I^{(e)} = \frac{4\pi}{c} [NH], \quad (21.2a)$$

$$I^{(m)} = -\frac{4\pi}{c} [NE]. \quad (21.2b)$$

При этом N есть нормаль к поверхности, направленная из объема, в котором определяется поле.

В скалярной задаче существуют такие же соотношения между полями, созданными граничными значениями, и полями, созданными поверхностными источниками. Согласно (18.6a), если на границе задано значение $\partial u / \partial N \neq 0$, то такое же поле будет создано, если на границе положить $\partial u / \partial N = 0$ и распределить на ней поверхностный заряд с плотностью $f = -\partial u / \partial N$. Если на границе отлично от нуля также и u , то такое же поле создает двойной слой с мощностью — u . Чтобы это показать, надо в первом слагаемом (18.6a) принять, что f равно нормальной к поверхности области интегрирования производной δ -функции, и произвести в объем-

ном интеграле одно интегрирование по частям. Отсутствие обычного в теории потенциала коэффициента $1/4\pi$ объясняется тем, что мы не ввели этот коэффициент в (18.1a).

2. Формула (21.2a) представляет собой обычную связь плотности тока с магнитным полем на поверхности идеального проводника. На ней удобно проиллюстрировать физический смысл (21.2). Вычисляя по (21.1) поле в области, в которой присутствуют металлические проводники, можно по-разному выбирать поверхность интегрирования. Если провести ее внутри металла, то в области интегрирования будут присутствовать токи $j^{(e)}$, а на поверхности интегрирования $H_t = 0$. Если же провести поверхность интегрирования по внешней поверхности металла, так что $j^{(e)}$ не войдет в объемный интеграл в (21.1), то поле будет выражено через значение H_t на поверхности. Формула (21.2a) и дает связь между H_t и $j^{(e)}$, при которой выполняется очевидное требование о том, чтобы $E(r_0)$ не зависело от способа проведения поверхности интегрирования.

Существование такого же соответствия между полем, создаваемым граничным значением E_r , и полем, создаваемым магнитным током с поверхностной плотностью $j^{(m)} = -\frac{4\pi}{c} E_t$

(21.2b), представляет собой основную причину, по которой в теорию было введено понятие магнитного тока. Граничная задача может быть по схеме (21.2) всегда заменена задачей об определении поля, создаваемого токами. При этом само определение полей $E(r_0)$, $H(r_0)$ по эквивалентным токам не обязательно должно производиться по формулам типа (21.1), иногда удобнее по $j^{(e)}$ и $j^{(m)}$ определять соответственно электрический и магнитный векторы Герца $\Pi^{(e)}$ и $\Pi^{(m)}$, а по ним уже определять поля. Возможность замены (21.2) иногда называют *принципом эквивалентности*.

Связь поверхностных токов с граничными значениями E и H можно получить и непосредственно из уравнений Максвелла (20.1), а не из их явного решения (21.1). Начнем с более привычного соотношения (21.2a). Конечная поверхностная плотность электрического тока в (20.1) означает, что при переходе через эту поверхность тангенциальное магнитное поле испытывает скачок, даваемый формулой (21.2a); это происходит, например, на поверхности идеального проводника и доказывается тем же рассмотрением интегральной

формы уравнения (20.1a), которое применяется при выводе условий для полей на границе раздела двух сред. Аналогично этому поверхностная плотность магнитных токов отлична от нуля на поверхности, на которой испытывает скачок тангенциальное электрическое поле. С этой точки зрения возможна следующая трактовка формулы (21.26). На поверхности (щели) существует поле E_t ; по нему вычисляется поле в области, расположенной с какой-либо одной стороны — положительной, — этой поверхности. Примем, что с отрицательной стороны этой поверхности $E_t = 0$; это не изменит поля в области, так как отрицательная сторона поверхности лежит за границей этой области. Расширим теперь область так, чтобы ее граница прошла по этой отрицательной стороне. Поле в области не изменится от этого небольшого изменения ее объема, и на границе области $E_t = 0$. Однако в этой новой области есть поверхность, на которой E_t испытывает скачок, а это значит, что на этой поверхности распределены магнитные токи (21.26). Они создают поле, тождественное полю, создаваемому граничным значением $E_t \neq 0$.

3. В определении функции Грина $E^{(e)}$, $H^{(e)}$, использованной в (21.1), существует определенный произвол. Для справедливости формулы (21.1) нужно лишь, чтобы поля $E^{(e)}$, $H^{(e)}$ удовлетворяли уравнениям (18.26), а условия для $E^{(e)}$, $H^{(e)}$ на границе области можно устанавливать произвольным образом. Проще всего полагать, как мы и делали выше, что на бесконечности $E^{(e)}$, $H^{(e)}$ представляют собой поля уходящих волн; тогда фактическое определение этих функций представит наименьшие трудности — они будут просто полями электрического диполя в пустоте. Однако можно выбрать их иначе и притом таким образом, что поверхностный интеграл в (21.1) будет содержать только одно слагаемое. Действительно, если определить $E^{(e)}$, $H^{(e)}$ как решение системы (18.26), удовлетворяющее на поверхности S , на которой заданы граничные значения полей, условию

$$E_t^{(e)}|_S = 0, \quad (21.3a)$$

то первый поверхностный интеграл в (21.1) выпадает, и поле во всем объеме будет определено лишь через граничное значение электрического поля $E_t|_S$. Если выбрать функцию Грина удовлетворяющей на некоторой поверхности условию

$$H_t^{(e)}|_S = 0, \quad (21.36)$$

то поле в объеме определяется заданием на этой поверхности тангенциальной компоненты только лишь магнитного поля $H_t|_S$, так как (21.1) будет содержать только первый поверхностный интеграл. При этом по-прежнему можно пользоваться заменой (21.2), однако при вычислении поля по поверхностным токам надо, разумеется, пользоваться именно этими, выбранными согласно (21.3) функциями Грина. Граничное условие (21.3а) выполняется для идеального металла, так что функция Грина в этом случае есть поле элементарного диполя в присутствии металлической поверхности, совпадающей с S . Можно показать, что граничное условие (21.3б) можно рассматривать как условие на идеальном магнетике, т. е. на материале, в котором мнимая часть μ есть бесконечно большая величина.

Разумеется, фактическое определение функций Грина, удовлетворяющих условию (21.3а) или (21.3б), представляет собой, вообще говоря, задачу значительно более трудную, чем нахождение поля элементарного диполя в свободном пространстве. Однако для простых поверхностей эти функции находятся относительно легко. Например, если поверхность есть *плоскость*, то функция Грина представляет собой сумму или разность полей двух элементарных диполей — одного, расположенного в точке r_0 , в которой ищется поле $E(r_0)$, и другого, расположенного в зеркальной относительно плоскости точке. На плоскости, по которой производится интегрирование в (21.1), поле $H_t^{(e)}$ функции, удовлетворяющей (21.3а), будет вдвое больше поля H_t^e диполя в свободном пространстве. Аналогично этому поле $E_t^{(e)}$ функции Грина, удовлетворяющей (21.3б), будет в два раза больше, чем в свободном пространстве. Несложно найти также обобщенную функцию Грина, удовлетворяющую условию (21.3а) на стенках волновода; это будет поле волны какого-либо номера в волноводе. Этим мы воспользуемся в § 23 в задаче о возбуждении волновода; мы уточним там, какое обобщение имеется в виду.

Таким образом, граничную задачу можно решать как по заданным обеим компонентам E_r , H_r , так и по одной из них. Например, поле, создаваемое рупором, можно вычислять, считая известным на раскрыве рупора как E_r , так и H_r , и определяя поля эквивалентных токов в *свободном пространстве*,

а можно эти поля находить только по E_t или только по H_t , пользуясь в качестве функций Грина полем диполя в *полупространстве* с условием (21.3а) или (21.3б).

Поле в области, во всяком случае в любой открытой области, полностью определяется, как можно доказать, заданием токов и тангенциальной компоненты *одного* поля (E или H). Поэтому, задав, например, поле $E_t|_S$, можно затем найти H всюду и, в частности, $H_t|_S$. Одновременное задание и $E_t|_S$ и $H_t|_S$ непротиворечиво только в том случае, если оба поля известны точно. В следующем параграфе, говоря о способах *приближенного* задания полей на отверстии (или тока на металлическом теле), мы будем иметь в виду, что этими приближенными граничными значениями можно пользоваться для определения полей *лишь* в точках, не примыкающих к поверхности.

§ 22. Поле на отверстии

1. Определение поля на отверстии — щели, открытом конце волновода или рупора и т. д. — представляет собой самостоятельную задачу, примерно той же сложности, что и нахождение тока на проводнике, возбуждаемом сторонней э. д. с. Вообще говоря, эта задача сводится к интегральному уравнению для $E_t|_S$. Общій метод составления его состоит в том, что по неизвестной искомой функции — значению E_t на отверстии — определяется H с обеих сторон отверстия и затем записывается условие, что значения H_t , получающиеся при стремлении точки наблюдения к точке на отверстии, одинаковы при приближении к отверстию с разных сторон. Можно таким же образом получать интегральное уравнение и для $H_t|_S$.

Существует специальный класс задач, в которых может быть использован универсальный приближенный метод определения поля на отверстии. Он применим к задачам о дифракции известного, и достаточно простого, поля на отверстии, все размеры которого *велики по сравнению с длиной волны*. Тогда с хорошей степенью точности можно принять, что поле на отверстии близко к полю падающей волны. Например, при падении плоской волны на большое отверстие в металлическом экране поля E и H на отверстии заметно отличны от полей в падающей волне только вблизи кромки

экрана, т. е. в относительно малой части той поверхности, по которой производится интегрирование при определении полей. Точно так же при излучении из рупора поле на устье можно принимать равным полю в сечении бесконечного конуса, а при излучении из волновода поле на открытом конце близко к полю волны того же номера в бесконечном волноводе. Зная поле на отверстии, можно по одной из трех описанных схем, т. е. с разными функциями Грина, определять затем поле всюду. Этот приближенный метод задания полей на больших отверстиях называется *принципом Гюйгенса*. Если вычисляется поле по значению $H_t|_S$ на отверстии в экране, то принцип Гюйгенса содержит еще предположение, что можно пренебречь токами, затекающими на внешнюю сторону экрана, т. е. что H_t отлично от нуля только на отверстии. Определяя поле рупора или, например, параболической антенны, следует принимать, что поля на плоскости раскрыва вне антенны, рупора или волновода равны нулю.

Принципом Гюйгенса называют также приближение, относящееся к другой, но во многом аналогичной электродинамической задаче о токе, возникающем на большом металлическом теле при падении на него какой-либо волны. Известно (§ 5), что при падении плоской волны на металлическую плоскость тангенциальная компонента H на металле вдвое больше, чем в падающей волне. Если все размеры тела и, в частности, радиус кривизны его поверхности велики по сравнению с длиной волны, и поле падающей волны близко к плоскому, то с высокой точностью можно считать, что на освещенной части поверхности сохраняется эта связь магнитных полей на металле и в падающей волне, а на неосвещенной — токи равны нулю. Это приближение позволяет свести задачу о дифракции на большом теле к определению полей известных токов.

Для выпуклых металлических поверхностей с большой кривизной это приближение может быть еще значительно улучшено. Отношение магнитного поля на металле к магнитному полю падающей волны описывается универсальной функцией, которая обеспечивает плавный переход от освещенной области к тени. Вдали от границы геометрической тени в освещенной области эта функция равна двум, в глубокой тени она равна нулю. Аргументом этой функции

является отношение расстояния от границы геометрической тени к параметру $\sqrt[3]{a^3\lambda}$, характеризующему ширину области *полутени*; здесь a — радиус кривизны тела. Этот результат позволяет существенно повысить точность расчетов поля по сравнению с расчетами, сделанными в предположении о разрывном характере тока вблизи границы геометрической тени, т. е. на основании обычного принципа Гюйгенса.

2. Другим классом задач, для которых разработаны эффективные приближенные методы определения полей на отверстиях, являются задачи об электрическом поле на *узких щелях*, т. е. на щелях, поперечный размер которых мал по сравнению с их длиной и с длиной волны. Компонента электрического поля на щели, перпендикулярная к ее кромке, значительно больше продольной компоненты, и только ее и следует учитывать. Зависимость этой компоненты от координаты, перпендикулярной к щели, универсальна, т. е. одинакова для всех щелей. Удобно ввести напряжение V на щели, т. е. интеграл от поля, взятый от одного края щели до другого. Определение поля на щели сводится к одномерной скалярной задаче определения напряжения V как функции продольной координаты щели s .

Теория щели развивается примерно так же, как теория тонкого вибратора, и приводит к аналогичным результатам. Роль сторонней э. д. с., возбуждающей вибратор, для щели играет ток, который протекал бы поперек щели, если бы она была металлизирована. Точнее, в формулах участвует разность магнитных полей ΔH , параллельных щели, которые при ее металлизации возникали бы по обеим сторонам щели под действием тех же полей, которые возбуждают щель. Для того чтобы на щели возникло значительное напряжение, она должна перерезать токи, протекающие по той стенке волновода или экрана, в которой щель расположена.

Если длина щели заметно отличается от половины длины волны, то напряжение на ней невелико, а форма его, т. е. зависимость V от координаты s , определяется видом функции $\Delta H(s)$. Наибольший практический интерес представляют *полуволновые щели*. В них функция $V(s)$ при всех $\Delta H(s)$ имеет вид

$$V(s) = V_0 \cos ks, \quad (22.1)$$

где s отсчитывается от середины щели. Амплитуда V_0 пропорциональна интегралу $\int \Delta H(s) \cos ks \, ds$, взятому вдоль щели. Коэффициент пропорциональности (обратная его величина называется *входной проводимостью* щели) зависит от того, какую область ограничивает экран, в котором прорезана щель. Как и для вибратора, мнимая часть входной проводимости щели может быть изменена небольшим изменением ее длины. Щель всегда можно настроить, обратив эту мнимую часть в нуль; при этом возбуждается наибольшее напряжение V_0 . Теория многощелевой антенны строится аналогично теории антенны, состоящей из ряда вибраторов.

Согласно предыдущему узкая щель эквивалентна магнитному вибратору. Поверхностная плотность магнитного тока имеет только одну компоненту, направленную вдоль щели. На ширине щели все вспомогательные поля можно считать постоянными; при интегрировании в формулах типа (21.1) войдет интеграл от поля поперек щели, т. е. напряжение. Напряжение на щели играет роль линейной плотности магнитного тока.

3. Если *все размеры отверстия малы* по сравнению с длиной волны, то определение поля на нем производится методами электростатики и магнитостатики. Так как эквивалентные токи в этом случае сосредоточены в малой области, то влияние малого отверстия всегда равносильно действию электрического и магнитного диполей. Электродинамической характеристикой малого отверстия поэтому могут служить два коэффициента — электрической и магнитной поляризуемости, которые показывают, как величина этих диполей связана с полями, в которых помещено отверстие.

Введение магнитных токов позволяет для задач о возбуждении развить единый аппарат, применимый к электрическим вибраторам, к малым петлям (магнитный диполь), к щелям и к большим отверстиям.

§ 23. Возбуждение волноводов

1. Задача о возбуждении волноводов представляет собой пример применения описанного в § 21 специального выбора функции Грина. В качестве функции Грина принимается одна из волн, могущих существовать в волноводе. Компонента E_z поля этой волны равна нулю на поверхности волновода, т. е.

поле является функцией Грина, удовлетворяющей условию (21.3 а); поэтому в выражения для полей не входят токи, протекающие по стенкам, или, что то же самое, магнитное поле на стенках. Применение любой другой функции Грина практически невозможно, так как оно потребовало бы предварительного определения тока на стенках.

Строго говоря, поле волны в волноводе не является функцией Грина, как мы ее определили выше, так как оно удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, а не уравнениям с δ -функцией в правой части. Его можно рассматривать, как некоторую обобщенную функцию Грина, а именно, как поле, созданное бесконечно удаленным источником; однако проще не вводить в рассмотрение его источников, а применять аппарат, аналогичный тому, который был использован в конце § 20.

Рассмотрим какое-либо сечение волновода $z = 0$. Токи $j^{(e)}$ и $j^{(m)}$, расположенные левее этого сечения, создают волны, распространяющиеся направо; токи, расположенные при $z > 0$, создают волны, распространяющиеся налево в направлении отрицательных z . Поперечные компоненты полного поля можно разложить в ряд по полям волноводных волн обоих направлений; если слева или справа от выбранного сечения токов нет, то участвовать в этом разложении будут волны только одного направления. Коэффициенты этого разложения и являются искомыми амплитудами возникающих волн.

Для определения, например, амплитуды волны, идущей направо, применим (20.3) к объему, ограниченному выбранным сечением, стенками волновода и вторым сечением, расположенным настолько далеко налево, что левее него уже нет источников. Поле $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ в (20.3) — это искомое поле. В качестве полей $E^{(2)}$, $H^{(2)}$, т. е. функций Грина, возьмем волну номера n единичной амплитуды, идущей справа налево, т. е. навстречу той волне, амплитуду которой мы ищем. Обозначим эти поля $E^{(-n)}$, $H^{(-n)}$, подчеркивая знаком индекса, что это — встречные волны. Тогда (20.3) даст амплитуду искомой n -й волны.

Действительно, поверхностный интеграл в (20.3) содержит, очевидно, интеграл только по обоим поперечным сечениям, так как тангенциальная компонента и искомого, и вспомогательного электрических полей на стенках волновода исчезает. Интеграл по левому сечению равен нулю, так как

оно расположено левее всех источников, поле $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ в нем является суперпозицией волн того же направления, что и $E^{(-n)}$, $H^{(-n)}$, а для волн одного направления интеграл по сечению от разности векторных произведений, стоящей слева в (20.3), равен нулю. В интеграле по правому сечению $z=0$ отличным от нуля будет только одно слагаемое, соответствующее волне n -го номера, идущей направо, т. е. навстречу полю $E^{(-n)}$, $H^{(-n)}$. Это слагаемое согласно (9.12) будет равно $-2kh_n A_n$, где A_n — искомая амплитуда. Таким образом,

$$A_n = -\frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{h_n} \int_{z < 0} \{j^{(e)} E^{(-n)} - j^{(m)} H^{(-n)}\} dV. \quad (23.1)$$

Интеграл в (23.1) взят по всем токам, создающим эту волну, т. е. по всем токам, расположенным левее данного сечения.

Таким образом, амплитуда любой волны зависит от того сечения, в котором вычисляется поле, так что зависимость полей от z определяется не только множителем $\exp(-ih_n z)$, но и тем, что $A_n = A_n(z)$. Эта зависимость сохраняется до тех пор, пока сечение не выйдет из области, занятой токами. В сечениях, расположенных правее всех токов, амплитуда данной волны, идущей направо, постоянна и равна интегралу (23.1), взятому по всем источникам, расположенным в волноводе.

Очевидно, что амплитуда волны номера n , идущей налево, дается таким же выражением (23.1), в котором токи умножаются на поля $E^{(n)}$, $H^{(n)}$, т. е. вспомогательным полем является поле волны, идущей направо.

2. Как мы уже говорили, только *поперечные* компоненты поля разлагаются по поперечным компонентам полей волноводных волн пустого волновода; A_n в (23.1) являются коэффициентами этого разложения.

Продольные компоненты должны быть найдены независимо из уравнений Максвелла (20.1). Например, для E_z имеем (полагая для простоты $\epsilon=1$):

$$E_z = \frac{1}{ik} [\text{rot } H]_z - \frac{4\pi}{i\omega} j_z^{(e)}. \quad (23.2 \text{ а})$$

Первое слагаемое справа содержит только поперечные компоненты и их производные по x , y . Поэтому оно состоит из суммы продольных компонент тех же волн, которые входят в сумму поперечных компонент E_x , E_y , и притом с теми

же коэффициентами A_n (23.1). Зависимость A_n от z не нарушает этого результата, так как $[\text{rot } \mathbf{H}]_z$ не содержит производных по z . Второе слагаемое существует только в тех точках, где есть токи. Оно особенно существенно в теории электронных приборов волноводного типа, в которых надо учитывать взаимодействие поля с зарядами, возбуждающими это поле.

Таким же образом получаем, что H_z содержит, кроме суммы продольных компонент магнитного поля волноводных волн, входящих с коэффициентами A_n , еще слагаемое

$$-\frac{4\pi}{i\omega} j_z^{(m)}. \quad (23.26)$$

3. Рассмотрим несколько подробнее коэффициенты A_n (23.1). Они содержат в знаменателе волновое число h_n . Вблизи критической частоты какой-либо волны, для которой числитель A_n отличен от нуля, $A_n \rightarrow \infty$. Хотя при $h_n \rightarrow 0$ поперечные компоненты электрического или магнитного поля согласно (8.5б) также стремятся к нулю, как h_n , однако поток энергии, переносимый этой волной и пропорциональный $|A_n|^2 \text{Re} \int [\mathbf{E}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)*}]_z dS$, при $h_n \rightarrow 0$ стремится к бесконечности, как $1/h_n$. Это означает, что в этих условиях, чтобы поддержать конечное значение возбуждающего тока, надо воздействовать бесконечной э.д.с. Волновое сопротивление любой антенны, помещенной в волновод, будет бесконечно большим при частоте, близкой к критической частоте возбужденной ею волны. Вблизи критической частоты принятая нами постановка задачи — определение поля по заданным токам — становится нефизичной. Разумеется, если решать более трудную задачу о полях, возбуждаемых заданной э.д.с., т. е. принимать в расчет обратное действие возбуждаемого поля на ток, то никаких бесконечностей в теории не возникает.

Вблизи критической частоты волноводы обычно не используются, в частности, из-за трудности с возбуждением; вдали от критической частоты множитель $1/h_n$ правильно передает зависимость амплитуд возникающих волн от частоты.

Согласно (23.1), для того чтобы с заметной амплитудой возбудить какую-либо волну, надо располагать электрические токи *вдоль силовых линий* электрического поля волны этого номера, а магнитные токи — *вдоль силовых линий* магнитного поля этой волны. Так как обычно магнитные токи представляют собой щели в стенках, то эти щели должны быть

расположены так, чтобы перерезать токи тех волн, которые надо возбудить. *Продольные электрические токи не возбуждают H -волн*, так как в H -волнах $E_z = 0$; *продольные щели не возбуждают E -волн*. Электрический ток, расположенный в плоскости поперечного сечения прямоугольного волновода параллельно узкой стенке, возбудит основную волну H_{10} , и притом с тем большей амплитудой, чем ближе он к середине сечения, где поле этой волны максимально.

Если токи расположены не в одном поперечном сечении, то возбуждаемая ими волна является результатом сложения с соответствующим *набегом фазы* волн, возникающих в разных сечениях. Набег фаз описывается в (23.1) множителем $\exp(ih_n z)$, входящим в выражения для $E^{(-n)}$, $H^{(-n)}$. Например, поля двух источников, расположенных при $z = 0$ и $z = -l$, войдут в A_n с множителями 1 и $\exp(-ih_n l)$. Разность фаз этих множителей равна электрической длине пути, проходимой второй волной до плоскости $z = 0$, где она складывается с первой волной.

Формула (23.1) описывает также возбуждение волновода, *закороченного* с одной стороны. При этом вспомогательные поля — функции Грина $E^{(-n)}$, $H^{(-n)}$ — надо, очевидно, выбирать таким образом, чтобы они удовлетворяли граничному условию $E_t = 0$ не только на боковых стенках, но и на закорачивающем поршне. Тогда все рассуждения, приводящие к (23.1), сохранятся, с тем лишь незначительным отличием, что интеграл от разности векторных произведений в (20.3) по одному из сечений будет равен нулю просто вследствие граничных условий для E как искомой, так и вспомогательной волны. Таким образом, в формуле (23.1) для закороченного волновода $E^{(-n)}$, $H^{(-n)}$ — поля стоячей волны, возникающей при падении волны единичной амплитуды на закорачивающий поршень. Это, разумеется, равносильно замене поршня на дополнительные «отраженные» источники, расположенные за ним. Пользоваться несколько более сложным видом поля $E^{(-n)}$, $H^{(-n)}$, вероятно, проще, чем решать задачу о волноводе без поршня, но с отраженными токами, так как при этом автоматически решаются вопросы о знаках, с которыми участвуют эти отраженные токи.

4. Теория возбуждения волноводов существенно опирается на *полноту* системы волноводных волн. При любом возбуждении в волноводе ничего, кроме цилиндрических волн, распро-

страняющихся и затухающих, вполне определенной структуры, образоваться не может. Это же имеет место при любой нерегулярности — изгибе, изменении сечения и т. д. В любом сечении поле может быть представлено в виде суперпозиции полей волн обоих направлений, существующих в регулярном волноводе этого сечения. Нерегулярность, например, изгиб, вызывает только перераспределение энергии между различными волнами. Это перераспределение описывается для плавных нерегулярностей системой обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд волн. Коэффициенты этих уравнений характеризуют связь между различными волнами, обусловленную нерегулярностью. Если нерегулярность мала, т. е. изменение свойств волновода происходит медленно, то можно дать явное решение этой системы уравнений, используя аппарат, описанный для более простой задачи в § 6*).

Для *открытых систем* ситуация значительно сложнее. Вдоль них может распространяться только конечное число цилиндрических волн. Поле, возникающее при возбуждении открытой линии или при падении волны на нерегулярный участок, содержит, кроме цилиндрических, и сферическую волну. Теория открытых линий поэтому значительно сложнее. Некоторые простые задачи этой теории мы рассмотрим в гл. IX. Заметим, однако, что и для открытой линии можно ввести полную систему некоторых цилиндрических псевдоволн, все же не исчезающих на больших расстояниях от линии. Роль номера n в этой системе занимает индекс, который может принимать любые вещественные значения. Теорию возбуждения открытых линий можно при этом строить аналогично теории возбуждения волноводов, только вместо бесконечных сумм по всем типам волн возникнут интегралы по этому индексу. Задачи о нерегулярных открытых линиях сводятся при этом к интегро-дифференциальному уравнению для амплитуд этих псевдоволн. Можно найти явное решение этого интегро-дифференциального уравнения для изгибов с малой кривизной, для медленного изменения параметров линий и т. д.

*) Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, Изд-во АН СССР, 1961.

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

§ 24. Резонаторы простейшего типа

1. В дециметровой и сантиметровой технике оказались неприменимыми колебательные контуры, состоящие из конденсаторов и катушек самоиндукции. Эти контуры излучают сферические волны, и на высоких частотах потери энергии становятся очень большими. Для этой области частот основным резонансным элементом оказались полые объемы — *закрытые объемные резонаторы*. В таких объемах существуют собственные колебания, частота которых определяется размерами резонатора.

Простейший объемный резонатор получается, если в двух сечениях перегородить волновод металлическими плоскостями. Существование собственных колебаний в таком резонаторе легко понять из следующего мысленного эксперимента. Пусть на перпендикулярную к сечению стенку закороченного полубесконечного волновода падает волна. Отразившись, она образует стоячую волну — суперпозицию прямой и отраженной волн. Зависимость компонент полей стоячей волны от z дается множителем $\exp(-ihz) \pm \exp(ihz)$. При некоторых z появляются узловые плоскости компонент E_x и E_y . Металлизация какой-либо из этих плоскостей не изменит поля между нею и первой стенкой. В возникшем объемном резонаторе будет существовать колебание, не требующее наличия источников — собственное колебание. При таком подходе становится очевидным, что только при вполне определенных размерах резонатора в нем могут существовать собственные колебания заданной частоты.

В таких *волноводных резонаторах* колебания делятся, как и в волноводах, на колебания магнитного и электрического типа, и для их описания удобно пользоваться тем же аппаратом мембранных функций $\psi(x, y)$ и $\chi(x, y)$, что и для

описания волноводных волн. Зависимость продольных компонент векторов Герца $\Pi_z^{(m)}(x, y, z)$ и $\Pi_z^{(e)}(x, y, z)$ определяется, однако, не множителем $\exp(-ihz)$, как в (8.11), характеризующим бегущие волны, а множителями $\cos hz$ или $\sin hz$.

2. Поля *магнитных волн* выражаются через $\Pi_z^{(m)}(x, y, z)$ по формулам, получающимся из (8.10б), в предположении, что Π^m содержит только одну компоненту $\Pi_z^{(m)}$:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= ik \frac{\partial \Pi_z^{(m)}}{\partial y}, & H_x &= \frac{\partial^2 \Pi_z^{(m)}}{\partial x \partial z}; \\ E_y &= -ik \frac{\partial \Pi_z^{(m)}}{\partial x}, & H_y &= \frac{\partial^2 \Pi_z^{(m)}}{\partial y \partial z}; \\ E_z &= 0, & H_z &= k^2 \Pi_z^{(m)} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{(m)}}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (24.1a)$$

Из этих формул (и аналогичных формул для электрических волн) получаются, в частности, формулы (8.5) для цилиндрических волн. Функция $\Pi_z^{(m)}(x, y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению (3.2). Ее можно искать в виде

$$\Pi_z^{(m)} = (A \cos hz + B \sin hz) \psi(x, y). \quad (24.2)$$

Если $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию (9.4б), то поля (24.1a) на боковой поверхности цилиндра будут удовлетворять условию $E_t = 0$, а для того, чтобы $\Pi_z^{(m)}$ удовлетворяло волновому уравнению, ψ должно удовлетворять (9.4а), и между h , α и k должно существовать соотношение

$$k^2 = \alpha^2 + h^2. \quad (24.3)$$

Пусть основания цилиндра расположены при $z = 0$ и $z = L$, так что длина резонатора равна L . Зависящий от z множитель в (24.2a) должен обращаться в нуль при $z = 0$ и $z = L$, иначе не будет выполнено граничное условие $E_t = 0$ на основаниях. Поэтому $A = 0$, а h может принимать только вполне определенные значения:

$$h_l = \frac{\pi l}{L}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (24.4)$$

Таким образом, если

$$\Pi_z^{(m)} = \sin \frac{\pi l z}{L} \psi(x, y), \quad (24.5a)$$

то (24.1а) удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям на всей поверхности резонатора.

Величины α^2 являются собственными значениями задачи (9.4) и так же, как и h , принимают ряд дискретных значений α_{mq}^2 (9.5), где (m, q) — номер соответствующей волноводной волны.

Поля (24.1а), в которых $\Pi_z^{(m)}$ имеет вид (24.5 а), по структуре близки к полям волноводной волны H_{mq} , но не совпадают с ними, так как $\Pi_z^{(m)}$ имеет другую зависимость от z .

Формула (24.3) имеет совершенно иное значение, чем похожая на нее формула (9.7) теории волноводов. Формула (24.3) означает, что при определенной геометрии резонатора существует счетная последовательность *собственных частот*

$$k_{mqi} = \sqrt{\alpha_{mq}^2 + h_i^2}, \quad (24.6)$$

для которых только и возможны свободные колебания. Волновое число h в теории резонаторов волноводного типа не является функцией частоты, как в (9.13), а определяется по (24.4).

Таким же образом строится и теория колебаний *электрического типа* в волноводных резонаторах. Поля выражаются через $\Pi_z^{(e)}$ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \Pi_z^{(e)}}{\partial x \partial z}, & H_x &= -ik \frac{\partial \Pi_z^{(e)}}{\partial y}; \\ E_y &= \frac{\partial^2 \Pi_z^{(e)}}{\partial y \partial z}, & H_y &= ik \frac{\partial \Pi_z^{(e)}}{\partial x}; \\ E_z &= k^2 \Pi_z^{(e)} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{(e)}}{\partial z^2}, & H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.16)$$

Для того чтобы на основаниях было $E_t = 0$, на них, очевидно, должно выполняться условие $\partial \Pi_z^{(e)} / \partial z = 0$. Если одно из оснований расположено при $z = 0$, то

$$\Pi_z^{(e)} = \cos \frac{\pi l z}{L} \chi(x, y), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (24.56)$$

где $\chi(x, y)$ есть решение задачи (9.8). Сохраняется и основная формула (24.6) для собственных частот; величина h_l в ней определяется тем же выражением (24.4), в котором, однако, число l может принимать также и нулевое значение.

Если $l=0$, то поле не зависит от z и, кроме того, содержит только одну компоненту электрического поля E_z . Структура простейших волн электрического типа в резонаторе проще, чем в соответствующем волноводе. Собственная частота такого колебания согласно (24.6) равна критической частоте соответствующей волноводной волны.

3. Наибольший интерес обычно представляют так называемые *основные* собственные колебания, соответствующие наинизшей собственной частоте k_{mq1} или, что то же самое, наибольшей собственной длине волны $\lambda_{mq1}=2\pi/k_{mq1}$. Здесь λ_{mq1} — длина волны в свободном пространстве, соответствующая собственной частоте k_{mq1} . Резонаторы в большинстве случаев используются вблизи своей наинизшей (собственной) частоты.

Для H -волн наинизшим, очевидно, будет колебание с $l=1$, для E -волн — колебания с $l=0$. Наименьшие значения k_{mq1} соответствуют колебаниям с наименьшим α_{mq} .

В волноводном резонаторе *круглого* сечения основным колебанием магнитного типа будет колебание H_{111} , для которого $\psi(x, y)=J_1(\alpha r)\cos\varphi$, $\alpha=1,84/a$, где a — радиус цилиндра, и $l=1$. Его собственная частота равна

$$k_{111}=\sqrt{(1,84/a)^2+(\pi/L)^2}. \quad (24.7)$$

Проще поле волны H_{011} , симметричное относительно оси и содержащее только три отличные от нуля компоненты — H_z , H_r и E_φ . Для него $\chi(x, y)=J_0(\alpha r)$, $\alpha=3,83/a$, $l=1$ и

$$k_{011}=\sqrt{(3,83/a)^2+(\pi/L)^2}. \quad (24.8)$$

Хотя эта волна не является основной — ее собственная частота выше, чем у волны H_{111} , — но она часто применяется, так как обладает, как мы увидим, малыми потерями.

Простейшей E -волной резонатора этого сечения является E_{010} , для которой $\chi=J_0(\alpha r)$, $\alpha=2,40/a$ и $l=0$. Поле этой волны не зависит от координаты z , ее собственная частота $k=\alpha$. В зависимости от соотношения длины и радиуса основной волной может оказаться либо E_{010} , либо H_{111} . Для длинных резонаторов (точнее, при $L>2,04a$) градиент поля волны H_{111} в направлении оси z невелик, и наинизшей оказывается собственная частота этой волны, так как для нее меньше значение α . При $L<2,04a$ основной является волна

E_{010} . Из E -волн существенным оказывается еще колебание E_{111} , главным образом потому, что оно имеет ту же собственную частоту, что и колебание H_{011} . Это затрудняет использование колебания H_{011} , так как нелегко обеспечить его возбуждение и одновременно не возбудить волну E_{111} , а эта последняя обладает значительно большими потерями и вызывает быстрое затухание всего колебания. Как и в аналогичной ситуации в волноводах круглого сечения, для снятия вырождения надо несколько отойти от точной геометрической формы кругового цилиндра. Эффективным способом оказалось также внесение в резонатор поглощающего диэлектрика в область, где электрическое поле колебания H_{011} мало, а колебания E_{111} — велико; это вызывает очень сильное поглощение колебания E_{111} , эквивалентное заметному изменению ее частоты.

В волноводных резонаторах *прямоугольного* сечения деление на E - и H -колебания оказывается несколько условным, так как в них любая из трех осей может быть принята за ось z . Поэтому, например, колебание E_{110} , т. е. колебание, в котором $\chi(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ и $l = 0$ и поле которого содержит H_x , H_y и E_z , можно одновременно рассматривать и как колебание H_{010} , если выделить ось x , а не z , т. е. принять, что $\Pi^{(m)}$ содержит единственную компоненту $\Pi_x^{(m)}$, а $\Pi^{(e)} = 0$. В этой записи потенциальная функция такого колебания будет $\psi(y, z) = \cos \pi y/b$, а индекс l равен единице, т. е. $\Pi_x^{(m)} = \cos \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi x}{a}$.

4. Объемный резонатор с одной подвижной стенкой используется в измерительной технике для измерения частоты; при этом, очевидно, нельзя применять колебание типа E_{mq0} , так как собственная частота такого колебания не зависит от L . Резонаторы волноводного типа часто применяются и для измерения диэлектрической проницаемости материала. Для этого часть объема, примыкающая к одной стенке, заполняется материалом в виде цилиндра того же сечения, но меньшей длины, а затем определяется перемещение поршня, необходимое для того, чтобы собственная частота резонатора стала такой же, как до внесения диэлектрика. Теория такого резонатора с частичным заполнением оказывается элементарной, так как граница объемов, заполненных средами с раз-

ными ϵ , совпадает с поперечным сечением. Легко проверить прямым расчетом, что в волноводе такое же частичное заполнение не вызывает при падении какой-либо волны появления волн других номеров, а приводит только к отражению. Таким же образом и для резонаторов этого типа поле по сравнению с полем в незаполненном резонаторе лишь несколько более сложным образом зависит от z , а зависимость от x, y не изменяется.

Расчет резонатора с двумя *разными диэлектрическими материалами* основывается на очевидном обобщении формул (8.5), в которых надо — ih заменить на $\partial/\partial z$, или (24.1), в которые надо ввести множители ϵ и μ , как в (8.5). Поля записываются через те же потенциальные функции $\chi(x, y)$ для колебаний типа E или $\psi(x, y)$ для колебаний типа H , в виде, аналогичном (24.2), с различными амплитудами в обеих областях и с различными значениями h , равными соответственно $h_1 = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$ и $h_2 = (k^2 \epsilon - \alpha^2)^{1/2}$. Затем накладывается требование, чтобы E_x, E_y исчезали на основаниях цилиндра, а E_x, E_y, H_x и H_y были непрерывны на границе раздела. Например, для магнитных колебаний выбор компонент векторов Герца в виде

$$\begin{aligned} \Pi_z^{(m)}(x, y, z) &= B_1 \sin h_1 z \cdot \psi(x, y), & z < L_0, \\ \Pi_z^{(m)}(x, y, z) &= B_2 \sin h_2 (L - z) \cdot \psi(x, y), & z > L_0, \end{aligned} \quad (24.9)$$

где L_0 — координата границы раздела, обеспечивает выполнение граничных условий на всех стенках. Непрерывность тангенциальных компонент полей при $z = L_0$ приводит к двум уравнениям для B_1 и B_2 , условие совместности которых дает искомое уравнение для собственной частоты

$$\frac{\operatorname{tg} h_1 L_0}{h_1} + \frac{\operatorname{tg} h_2 (L - L_0)}{h_2} = 0. \quad (24.10)$$

При $\epsilon = 1$ это уравнение переходит, разумеется, в (24.4). Таким же образом производится расчет и для колебаний типа E ; для таких измерений также нельзя использовать колебания E_{mq0} .

Если граница, разделяющая два диэлектрика, не является столь простой, то аналитическое определение k или нахождение простого уравнения для k обычно оказывается невозможным, и задача об определении собственной частоты такого резонатора решается сложными численными методами.

5. Простые колебания описываются вещественными мембранными функциями типа $J_m(ar) \cos m\varphi$ для кругового сечения и произведениями тригонометрических функций — для прямоугольных. Для таких колебаний из (24.1) следует, что все компоненты электрического поля *синфазны* между собой; все компоненты магнитного поля также *синфазны*, а поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ отличаются множителем i , т. е. *смещены во времени* друг относительно друга на четверть периода. Колебательный процесс в этом отношении напоминает колебания в простом LC-контуре, каждые четверть периода энергия полностью переходит из магнитного поля в электрическое и обратно. Средняя энергия магнитного и средняя энергия электрического полей (2.12) равны друг другу:

$$\int \overline{w}_E dV = \int \overline{w}_H dV, \quad (24.11)$$

что легко проверить по (24.1), приняв во внимание (24.3).

Равенство (24.11), как мы покажем в § 25, справедливо для всех типов колебаний. Условие же синфазности $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$ во всем объеме может не иметь места для колебаний, носящих циклический характер. Например, если в резонаторе кругового сечения $\chi = J_m(ar) e^{im\varphi}$, то при разных φ поля имеют разные фазы, и в азимутальном направлении бежит замкнутая сама на себя волна. Еще отчетливее такой волновой характер колебаний может проявиться в тороидальном резонаторе.

Циклические колебания в резонаторах всегда вырождены, так как той же частоте соответствует встречная волна; в нашем примере — волна с $\chi = J_m(ar) e^{-im\varphi}$. Всегда можно образовать линейные комбинации, имеющие действительно характер стоячих колебаний.

Основное отличие объемных резонаторов от LC-контур состоит в том, что в резонаторе поле занимает объем, не малый по сравнению с длиной волны. Тем не менее, для некоторых простых колебаний можно ввести несколько условно понятие *емкости* и *самоиндукции* и получить правильное выражение для собственной частоты по *формуле Томсона* для контура с сосредоточенными параметрами

$$k_T = \frac{1}{c \sqrt{LC}}. \quad (24.12)$$

Параметры L и C можно ввести во всех тех случаях, когда из физических соображений выделяются некоторый заряд q , как в конденсаторе, и ток J , как в катушке самоиндукции; затем надо связать средние электрическую и магнитную энергии в объеме с q и J обычными соотношениями:

$$\int \bar{w}_E dV = \frac{1}{4C} |q|^2; \quad \int \bar{w}_H dV = \frac{1}{4} L |J|^2. \quad (24.13)$$

Эти формулы содержат дополнительный множитель $1/2$ по сравнению с обычными формулами статики и теории стационарных токов, так как связывают средние значения энергии с комплексными амплитудами тока и заряда.

Для колебания E_{010} в цилиндрическом резонаторе круглого сечения и E_{110} в резонаторе прямоугольного сечения введение q и J физически оправдано; такое усредненное определение C и L согласно (24.13) дает по (24.12) правильное значение собственной частоты. Заряд сосредоточен только на основаниях и равен

$$q = \frac{1}{4\pi} \int E_z dS = \frac{k^2}{4\pi} \int \chi dS. \quad (24.14a)$$

Ток протекает по боковой стороне и равен

$$J = \frac{c}{4\pi} \oint H_s ds = \frac{kc}{4\pi} \oint \frac{\partial \chi}{\partial n} ds. \quad (24.14b)$$

Подставляя (24.14) в (24.13) и учитывая (24.11), получим из (24.12): $k_T = |J|/c|q|$, т. е.

$$\frac{k_T}{k} = \frac{\left| \oint \frac{\partial \chi}{\partial n} ds \right|}{\alpha^2 \int \chi dS}. \quad (24.15)$$

Правая часть равна, как легко проверить, единице, так что между этими колебаниями и колебаниями в LC -контуре действительно существует большая аналогия.

Эта аналогия оказывается еще более полной для некоторых сложных резонаторов, в которых понятие q и J вводится совершенно естественно. Примером такого резонатора является резонатор клистрона, состоящий из двух больших круглых параллельных пластин, края которых соединены с тороидом. Электрическое поле почти полностью сосредоточено между пластинами, образующими конденсатор; ток

протекает в основном по внутренней стенке тороидальной части, и эта область подобна катушке самоиндукции, в ней сосредоточена большая часть магнитного поля. Для такой системы также можно ввести C и L , и расчет по формуле (24.12) дает очень хорошее приближение к значению собственной частоты. Более строгий электродинамический расчет, учитывающий отклонение электрического поля от поля конденсатора и магнитного поля — от поля в цилиндре — дает только небольшую поправку к этому значению k .

§ 25. Общая теория резонаторов. Возбуждение

1. Для волноводных резонаторов легко написать явное выражение для полей собственных колебаний через мембранные функции ψ и χ . Существует много типов резонаторов сложной формы, для которых определение полей собственных колебаний и собственных частот не сводится к скалярной двумерной задаче и является, как правило, сложной трехмерной векторной задачей. Мы рассмотрим ниже некоторые общие свойства собственных колебаний, не вдаваясь в вопрос о том, как фактически находятся поля и собственные частоты; этот вопрос образует предмет самостоятельной и глубоко развитой главы математической физики.

Собственные колебания и собственные частоты объемного резонатора могут рассматриваться как собственные функции и собственные значения однородной векторной задачи:

$$\operatorname{rot} H^{(n)} = ik_n E^{(n)}, \quad \operatorname{rot} E^{(n)} = -ik_n H^{(n)}. \quad (25.1)$$

При граничном условии

$$E_t|_S = 0 \quad (25.2)$$

собственные значения (25.1) вещественны. Чтобы это показать, образуем величину $\operatorname{div} [EH^*]$, как в (2.21), и, исключая из нее E , согласно (25.1) получим

$$k_n^2 |H^{(n)}|^2 = |\operatorname{rot} H^{(n)}|^2 + ik_n \operatorname{div} [E^{(n)} H^{(n)*}]. \quad (25.3)$$

Проинтегрируем это равенство по всему объему резонатора. Тогда

$$k_n^2 = \frac{\int |\operatorname{rot} H^{(n)}|^2 dV + ik_n \oint [E^{(n)} H^{(n)*}]_N dS}{\int |H^{(n)}|^2 dV}. \quad (25.4)$$

При условии (25.2) поверхностный интеграл равен нулю и для k_n^2 получается положительная величина. Вещественность k_n имеет простой физический смысл. Временная зависимость собственных колебаний дается множителем $\exp(ik_n ct)$; в этом предположении из уравнений Максвелла (11.1) и получено (25.1) для комплексных амплитуд — и вещественность k_n означает, что колебания являются *незатухающими*. Этого и следовало ожидать при условии (25.2), так как оно гарантирует отсутствие потока энергии сквозь стенки резонатора.

Легко показать, что при этом выполняется и равенство (24.11). Из (25.1) следует, что

$$\operatorname{div} [E^{(n)} H^{(n)*}] = -ik_n |H^{(n)}|^2 + ik_n^* |E^{(n)}|^2, \quad (25.5)$$

и интегрируя по объему с учетом (25.2) и вещественности k_n , получим (24.11). Если таким же образом проинтегрировать выражение $\operatorname{div} [E^{(n)} H^{(n)}]$, то получим

$$\int (H^{(n)})^2 dV + \int (E^{(n)})^2 dV = 0. \quad (25.6)$$

Для колебаний, в которых все компоненты E — так же, как и все компоненты H — синфазны во всем объеме, это равенство обобщает полученный из (24.1) результат о смещении электрического и магнитного полей на четверть периода. Для колебаний чисто циркулярного типа, представляющих собой замкнутую саму на себя бегущую волну, оба участвующих в (25.6) интеграла равны нулю.

Поля различных колебаний *ортогональны* между собой в том смысле, что при $k_n \neq k_m$

$$\int E^{(n)} E^{(m)} dV = 0, \quad \int H^{(n)} H^{(m)} dV = 0. \quad (25.7)$$

Эти равенства легко доказать, интегрируя два выражения $\operatorname{div} [E^{(n)} H^{(m)}]$ и $\operatorname{div} [E^{(m)} H^{(n)}]$ по объему и вновь используя (25.1) и (25.2). Условиями ортогональности (25.7) мы воспользуемся в задаче о возбуждении резонаторов. Если резонатор заполнен неоднородным материалом ($\epsilon = \epsilon(x, y, z)$, $\mu = \mu(x, y, z)$), то выполняются аналогичные условия, только под знаком интегралов в (25.7) стоят еще соответственно множители ϵ и μ .

2. Формула (25.4) позволяет определить небольшую минимальную слагающую собственного значения, которая появляется, если на границе объема $E_t \neq 0$ и существует поток энергии

из объема. Эта ситуация возникает для резонаторов с неидеальными стенками или при наличии небольших отверстий. Из (25.4) следует, что если мнимая часть k_n мала ($k_n = k'_n + ik''_n$, $k''_n \ll k'_n$), то

$$k''_n = \frac{\operatorname{Re} \oint [E^{(n)} H^{(n)*}]_N dS}{2 \int |H^{(n)}|^2 dV}. \quad (25.8)$$

Имея в виду (24.11) и выражение (2.11) для среднего потока энергии через поверхность $\bar{\mathfrak{E}}_N$, получим

$$k''_n = \frac{k_n}{2} \frac{\bar{\mathfrak{E}}_N}{\omega \int \bar{w} dV}, \quad (25.9)$$

где $\bar{w} = \bar{w}_E + \bar{w}_H$ есть суммарная средняя плотность запасенной энергии.

Возникшая в этом расчете величина

$$Q = \frac{\omega \int \bar{w} dV}{\bar{\mathfrak{E}}_N} \quad (25.10)$$

имеет смысл обычной в теории колебательных контуров *добротности*. Действительно, величина $2\pi\bar{\mathfrak{E}}_N/\omega$ равна потерям энергии за один период, и Q в (25.10), как обычно, есть умноженное на 2π отношение запасенной энергии к потерям за один период. Таким образом,

$$k_n = k'_n + i \frac{k''_n}{2Q}. \quad (25.11)$$

Временная зависимость $\exp(ik_n ct)$ примет вид

$$e^{-i\omega t} e^{-\frac{\omega}{2Q} t}. \quad (25.12)$$

Как и должно быть, энергия поля убывает по закону $\exp(-\omega t/Q)$, что еще раз подчеркивает физический смысл величины Q .

Во всем этом рассуждении наиболее существенной является связь мнимой части собственной частоты резонатора с его добротностью, т. е. формулы (25.11) и (25.10). Эту связь, разумеется, можно было бы также получить не из формальных преобразований по (25.4), а из физически очевидного

соотношения между потерями энергии и затуханием во времени для свободных колебаний.

Если эти потери вызваны конечностью проводимости материала стенок и на границе справедливы условия Леонтовича (7.11), то согласно (7.15) или (7.18а)

$$Q = \frac{2 \int |H^{(n)}|^2 dV}{d \oint |H_t|^2 dS}, \quad (25.13)$$

где d — толщина скин-слоя. Вычисление стоящих в (25.13) интегралов не представляет труда, если известно поле во всем объеме и, в частности, протекающие по стенкам токи.

Добротности различных колебаний одного и того же резонатора различны. Например, для резонатора волноводного типа круглого сечения для волны E_{010} по (24.1), (24.5) и 25.13)

$$Q = \frac{1}{d} \frac{aL}{a+L}. \quad (25.14a)$$

Для волны H_{011} добротность получается заметно больше:

$$Q = \frac{1}{d} \frac{aL}{a \frac{\pi^2}{k^2 L^2} + L \frac{\mu^2}{k^2 a^2}}, \quad \mu = 3,83. \quad (25.14b)$$

Это связано с тем, что по боковым стенкам этого резонатора протекают только азимутальные, и притом относительно небольшие токи, как и в волне H_{01} в круглом волноводе.

По порядку величины $Q = V/Sd$, где V и S — объем и поверхность резонатора. С уменьшением размеров резонатора Q падает. Это одна из причин, по которой объемные резонаторы оказываются неприменимыми на волнах короче нескольких миллиметров. Действительно, зависимость Q от λ определяется тем, что $d \sim \lambda^{1/2}$, $V \sim \lambda^3$, $S \sim \lambda^2$, так что $Q \sim \lambda^{1/2}$. При очень коротких волнах добротность становится небольшой, и резонаторы этого типа оказываются неудобными. Применение резонаторов, размеры которых велики по сравнению с рабочей длиной волны, аналогичных многоволновым волноводам, также вызывает ряд усложнений в связи с существованием в таких резонаторах большого числа колебаний с близкими значениями добротности.

3. Задача о возбуждении резонаторов заданными токами проще, чем аналогичная задача для волноводов. Грубо

говоря, это объясняется тем, что система собственных колебаний резонатора является в некотором смысле более полной, чем система собственных волн волновода. В волноводе произвольное поле не является суммой волноводных волн с постоянными амплитудами. Такое разложение существует только в сечениях, в которых нет источников. В волноводном резонаторе каждой волноводной волне соответствует бесконечное множество типов колебаний ($l=1, 2, \dots$); в любом резонаторе типы колебаний нумеруются тремя индексами, а не двумя, как в волноводах. Полнота как бы обеспечивается при этом во всех трех измерениях. Теория возбуждения резонатора строится по общей схеме теории возбуждения системы с конечным числом степеней свободы.

Искомое поле, которое должно удовлетворять системе уравнений Максвелла (20.1), представляется в виде бесконечной суммы по полям собственных колебаний. Так как, однако, поля собственных колебаний удовлетворяют условиям $\operatorname{div} \mathbf{E}^{(n)} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H}^{(n)} = 0$, которым может не удовлетворять полное поле, то к этим суммам надо еще добавить *градиентные слагаемые*

$$\mathbf{E} = \sum A_n \mathbf{E}^{(n)} - \operatorname{grad} \eta^{(e)}, \quad \mathbf{H} = \sum B_n \mathbf{H}^{(n)} - \operatorname{grad} \eta^{(m)}. \quad (25.15)$$

Из граничных условий для $\mathbf{E}$ следует, что на поверхности резонатора должно быть $\eta^{(e)}|_S = 0$, $\frac{\partial \eta^{(m)}}{\partial N}|_S = 0$. Интегрируя выражения $\operatorname{div} [\mathbf{H}^{(n)} \operatorname{grad} \eta^{(e)}]$ и $\operatorname{div} [\mathbf{E}^{(e)} \operatorname{grad} \eta^{(m)}]$ и учитывая граничные условия для $\mathbf{E}^{(n)}$ и $\eta^{(e)}$, легко получить, что, аналогично (25.7),

$$\int \mathbf{E}^{(n)} \operatorname{grad} \eta^{(e)} dV = 0, \quad \int \mathbf{H}^{(n)} \operatorname{grad} \eta^{(m)} dV = 0. \quad (25.16)$$

Для того чтобы найти уравнения для $\eta^{(e)}$ и $\eta^{(m)}$ и явные выражения для коэффициентов Фурье A_n и B_n , надо подставить (25.15) в (20.1), произвести почленное дифференцирование и учесть, что $\mathbf{E}^{(n)}$, $\mathbf{H}^{(n)}$ удовлетворяют однородным уравнениям (25.1). Получатся разложения

$$\sum (kA_n - k_n B_n) \mathbf{E}^{(n)} = \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}^{(e)} + k \operatorname{grad} \eta^{(e)}, \quad (25.17a)$$

$$\sum (k_n A_n - kB_n) \mathbf{H}^{(n)} = -\frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}^{(m)} - k \operatorname{grad} \eta^{(m)}. \quad (25.17b)$$

Взяв от обеих частей дивергенцию, получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \Delta \eta^{(e)} &= -\frac{4\pi i}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(e)}, \\ \Delta \eta^{(m)} &= -\frac{4\pi i}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (25.18)$$

Таким образом, $\eta^{(e)}$ и $\eta^{(m)}$ являются *статическими потенциалами*, созданными зарядами (электрическими и магнитными). Статические поля не играют большой роли, так как резонатор используется обычно в резонансных условиях, когда какая-либо одна пара коэффициентов A_n , B_n становится большой и сильно зависит от частоты. Поля соответствующего собственного колебания всегда велики по сравнению с потенциальными полями $\operatorname{grad} \eta^{(e)}$ и $\operatorname{grad} \eta^{(m)}$.

Умножив (25.17а) на $E^{(m)}$, (25.17б) — на $H^{(m)}$ и проинтегрировав по всему объему, мы получим, учитывая (25.7) и (25.16), два уравнения для A_m , B_m , из которых найдем

$$A_n = \frac{1}{k^2 - k_n^2} \frac{4\pi i}{c} \frac{1}{\int (H^{(n)})^2 dV} \cdot \left\{ k_n \int \mathbf{j}^{(m)} H^{(n)} dV - \right. \\ \left. - k \int \mathbf{j}^{(e)} E^{(n)} dV \right\}, \quad (25.19a)$$

$$B_n = \frac{1}{k^2 - k_n^2} \frac{4\pi i}{c} \frac{1}{\int (H^{(n)})^2 dV} \cdot \left\{ k \int \mathbf{j}^{(m)} H^{(n)} dV - \right. \\ \left. - k_n \int \mathbf{j}^{(e)} E^{(n)} dV \right\}. \quad (25.19б)$$

Здесь принято во внимание (25.6); для колебаний циркулярного типа, для которых стоящий в знаменателе интеграл исчезает, надо несколько изменить формальный аппарат, вводя условия ортогональности для комплексно сопряженных полей.

4. Входящие в (25.19) величины k и k_n имеют совершенно различное значение; k_n — чисто геометрический параметр, связанный с размерами резонатора (и типом колебаний), k — пропорционально частоте возбуждающих источников. Вблизи резонанса $k \approx k_n$, и числители в (25.19) одинаковы и имеют ту же структуру, что и в волноводах. Соображения, которые были изложены в § 23 о возбуждении волн различного типа

различными источниками, сохраняют свое значение и в резонаторах с естественными изменениями, вызванными тем, что $E^{(n)}$ и $H^{(n)}$ в (25.15) — поля стоячих, а не бегущих волн. Характер множителей в (25.19) и (23.1) соответствует виду общей формулы (21.1) и выбору функций Грина.

Знаменатель $k^2 - k_n^2$ типичен для всех колебательных систем. Если k_n вещественно, то при $k = k_n$ формулы (25.19) теряют смысл. При принятом нами условии, что заданы токи, а не э.д.с., амплитуды вынужденных колебаний становятся бесконечными на частоте, на которой возможны незатухающие собственные колебания, и поля остаются ограниченными только в том случае, если возбуждающие токи ортогональны собственным колебаниям, как всегда в теории колебательных систем без потерь.

Наибольший интерес представляет частотная зависимость A_n и B_n при небольших потерях, т. е. когда k_n комплексно. Согласно (25.11) мнимая часть k_n^2 связана с добротностью простой зависимостью:

$$k_n^2 = k_n'^2 + i \frac{k_n'^2}{Q}. \quad (25.20)$$

При переходе от резонатора с идеальными стенками к резонаторам с той же границей, но с потерями, не только возникает мнимая часть k_n (25.11), но кроме того, изменяется в том же порядке и вещественная часть k_n . Это означает, что максимум резонансной кривой несколько сдвигается по сравнению с положением его для идеального резонатора, но практическое значение этого смещения невелико. Оно аналогично изменению фазовой скорости в волноводе при переходе от идеальных проводящих стенок к реальным стенкам. Таким образом, резонансный знаменатель имеет для объемного резонатора тот же вид

$$\frac{1}{k^2 - k_n^2 - i \frac{k_n'^2}{Q}}, \quad (25.21)$$

что и для обычного резонансного LC-контура. Объемный резонатор по своей реакции на заданный возбуждающий ток эквивалентен *бесконечному набору контуров*, и если разность собственных частот соседних колебаний велика по сравнению с шириной резонансной кривой k_n/Q , то каждый резонанс

происходит таким образом, как если бы других собственных колебаний не существовало.

Строго говоря, приведенный вывод формулы (25.19) справедлив только для граничного условия (25.2), при котором только и имеют место условия ортогональности в форме (25.7). Однако эти условия можно, как было указано, обобщить на резонатор с неоднородным заполнением $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$. Несколько увеличив размер области интегрирования, включив в него заполненный током поверхностный слой металла, можно показать, что формулы (25.19) остаются справедливыми и для резонатора с малыми потерями. Этим путем можно строго доказать справедливость полученных результатов; основными из них являются независимость разных типов колебаний в резонансных условиях, вид (25.21) резонансного знаменателя и характер числителя в формулах (25.19).

КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И РЕЗОНАТОРЫ *)

§ 26. Открытые линзовые линии

1. На волнах короче 1 — 2 мм волноводы, описанные в гл. III, становятся практически неприменимыми. Омические потери на этих частотах достигают столь больших значений, что волна почти полностью затухает на расстоянии нескольких десятков сантиметров. Само изготовление волноводов и волноводных узлов становится также весьма сложной технической задачей.

В последние годы для волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов были предложены новые передающие тракты, так называемые открытые линии — линзовые и зеркальные. Их действие основано на совсем других принципах, чем действие волноводов или диэлектрических цилиндров.

Линзовая линия состоит из ряда расположенных на общей оси на большом расстоянии друг от друга *длиннофокусных* диэлектрических линз. Каждая линза фокусирует падающий на нее пучок электромагнитных волн и направляет их сходящимся пучком к следующей линзе. Однако сходящийся пучок не формирует конуса, ограниченного прямолинейными образующими, как было бы в отсутствии волновых эффектов. Поперечный размер области, занятой полем, вблизи линзы меньше или равен ее апертуре; при удалении от линзы он сначала уменьшается, а затем вновь растет. На следующую линзу попадает расходящийся пучок; линза вновь собирает (фокусирует) его, и картина повторяется. Часть энергии проходит мимо каждой линзы, так что распространение волны

*) См., например, «Электроника больших мощностей», сб. 4, Изд-во «Наука», 1965; Б. Каценеленбаум, УФН 83, № 1, 81 (1964); «Лазеры», сб. статей под редакцией М. Жаботинского и Т. Шмаонова, ИЛ, 1963.

сопровождается потерями энергии на излучение — радиационными потерями. Кроме того, энергия поглощается в материале линз, возникают диэлектрические потери.

Уже в этом качественном описании линзовой линии видны два главных фактора, определяющих ее действие, — во-первых, типичное для геометрической оптики явление *фокусировки* и, во-вторых, явление *дифракции*, приводящее к расширению пучка. Линзовая линия — пример квазиоптической системы, т. е. системы, действующей на геометрооптических принципах, которые, однако, существенно модифицированы волновой природой электромагнитного поля.

Далее в этой главе мы рассмотрим еще две квазиоптические системы — зеркальные линии и открытые резонаторы. Математический аппарат, который будет развит в этом и следующем параграфах, с небольшими изменениями описывает и эти системы.

Во всех открытых квазиоптических системах поле формирует *длинные пучки*, ширина которых много меньше длины пучка и много больше длины волны. Обозначим через a поперечный размер системы, через L — длину пучка; например, для линзовой линии a — радиус линзы, L — расстояние между линзами. Для квазиоптических систем два параметра

$$ka \gg 1, \quad \frac{L}{a} \gg 1 \quad (26.1)$$

являются большими числами. Отношение этих параметров

$$c = \frac{ka^2}{L} \quad (26.2)$$

может принимать любые значения: оно является, как мы увидим, существенной характеристикой системы.

Волна в линзовой линии не является цилиндрической волной в смысле (8.1), так как линия неоднородна в направлении своей оси. Строго говоря, линия представляет собой периодическую систему, но так как ее период очень велик по сравнению с длиной волны, а отражением от линз обычно можно пренебречь, то типичные для периодической системы резонансные явления в ней не проявляются.

2. Математический аппарат, описывающий волны линзовой линии, строится иначе, чем для цилиндрических волн. Уравнение для поля находится по следующей схеме: по неизвестному

полю на выходе какой-либо линзы определяется поле на входе следующей линзы, затем по нему — поле на выходе этой линзы, а затем записывается условие, что на выходе второй линзы поле только постоянным множителем отличается от поля на выходе первой линзы. Так получается уравнение для поля волн, идущих вдоль линии.

Современная теория открытых линий содержит несколько приближений, приводящих, в частности, к независимости решений, в которых $H_x \neq 0$, $E_y \neq 0$, $H_y = 0$, $E_x = 0$, и решений, в которых $H_x = 0$, $E_y = 0$, $H_y \neq 0$, $E_x \neq 0$; здесь x ,

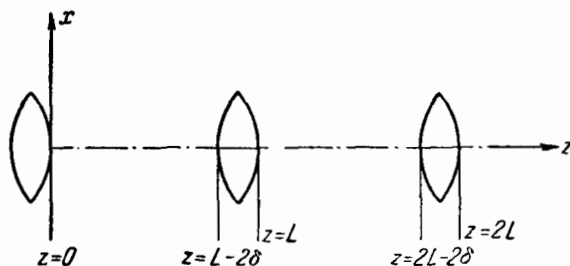


Рис. 13. Линзовая линия.

y — координаты в поперечном сечении, ось z совпадает с осью системы. Эти решения оказываются независимыми при любой форме контура линз, в частности, и для наиболее практически интересных круглых линз. Поэтому все расчеты можно производить со скалярными величинами. Мы будем искать поперечную компоненту магнитного поля H_x . Для линзовой линии теорию можно было строить и для E_x или E_y , но для зеркальной линии и резонатора удобнее писать уравнение для H_x или H_y .

Таким образом, ищется функция $u(x, y, z) = H_x$, удовлетворяющая в пространстве между линзами уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (26.3)$$

Условия на самих линзах мы сформулируем ниже, сейчас определим *связь между полями на двух соседних линзах*.

Пусть линзы расположены так, как показано на рис. 13. Поле на выходе одной из линз, которую мы назовем первой, есть $u(x, y, 0)$. Определение поля в любой точке справа от плоскости $z=0$ представляет собой *граничную задачу*.

В скалярном случае ее решение дается формулой (18.6а), и если выбрать функцию Грина $g(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)$ так, чтобы она удовлетворяла при $z=0$ условию $g=0$, то

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \int_{z=0} u(x, y, 0) \frac{\partial g}{\partial N} dx dy. \quad (26.4)$$

Здесь N — нормаль к плоскости $z=0$, $\partial/\partial N = -\partial/\partial z$. Функция Грина должна иметь особенность в точке (ξ, η, ζ) и при $z=0$ представлять, как и искомое решение $u(\xi, \eta, \zeta)$, уходящую волну. Согласно (18.3) для трехмерного уравнения (26.3) функция g равна

$$g = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR'}}{R'} \right\}, \quad (26.5)$$

где R — расстояние от точки (x, y, z) до точки (ξ, η, ζ) , в которой ищется поле, а R' — расстояние от точки (x, y, z) до точки $(\xi, \eta, -\zeta)$, т. е. до зеркального отражения точки (ξ, η, ζ) в плоскости $z=0$. Точка $(\xi, \eta, -\zeta)$, в которой g также имеет особенность, лежит вне области определения функции u .

На плоскости $z=0$

$$R = R' = R_0, \quad \frac{\partial R}{\partial N} = -\frac{\partial R'}{\partial N} = \frac{\zeta}{R_0},$$

$$R_0 = \sqrt{\zeta^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (26.6)$$

В выражении $\partial g/\partial N$ мы опустим слагаемое, получающееся при дифференцировании знаменателя, так как оно в kR_0 раз меньше, чем слагаемое, пропорциональное k . Тем самым мы получаем формулу, справедливую лишь на расстояниях от плоскости $z=0$, больших по сравнению с длиной волны — ограничение, не существенное для дальнейших рассуждений:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{ik}{2\pi} \int \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \frac{\zeta}{R_0} u(x, y, 0) dx dy. \quad (26.7)$$

Далее в этой формуле мы произведем еще два упрощения. Во-первых, в знаменателе заменим R_0 на ζ , т. е. заменим расстояние от точки (ξ, η, ζ) до точки интегрирования $(x, y, 0)$ расстоянием от точки (ξ, η, ζ) до плоскости $z=0$. Это допустимо, если $\zeta \gg |x|, |y|, |\xi|, |\eta|$, т. е. если расстояния от первой линзы больше, чем поперечный размер пучка. Во-вто-

рых, в экспоненте мы разложим R_0 по обратным степеням отношений ξ/ζ и т. д. и сохраним в этом разложении лишь два члена:

$$R_0 = \zeta + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2\zeta}. \quad (26.8)$$

Такое приближение справедливо, если отброшенный член, умноженный на k , мал по сравнению с единицей:

$$\frac{k|\xi|^3}{\zeta^2} \ll 1, \quad \frac{k|x|^3}{\zeta^2} \ll 1, \dots, \quad (26.9)$$

и это должно быть справедливо для всех точек пучка, кроме относительно малой области вблизи первой линзы. Во всяком случае, для дальнейшего существенно, что членами (26.9) можно пренебречь при $\zeta = L$, т. е. что расстояние между линзами достаточно велико.

Однако второй член в (26.8), умноженный на k , отнюдь не мал. Другими словами, вторая линза расположена не в дальней зоне (19.3) первой линзы, рассматриваемой как антенна, а ближе — в некоторой промежуточной зоне, которую иногда называют *зоной Френеля*.

Интеграцию в (26.7) мы будем производить не по всей плоскости $z = 0$, а только по апертуре линзы, считая тем самым, что в этой плоскости вне апертуры $u \equiv 0$. Это означает, что линзы помещены в отверстиях *непрозрачных экранов*, расположенных в плоскостях $z = -\delta$, $z = L - \delta$, $z = 2L - \delta$ и т. д.; 2δ — толщина линзы. Так как в нашем расчете u — компонента магнитного, а не электрического поля, то нужно еще применить принцип Гюйгенса, согласно которому можно не учитывать затекания тока за края больших отверстий.

Таким образом, при выполнении условий (26.1) и (26.9) поле в области за первой линзой выражается через поле $u(x, y, 0)$ на ее выходе формулой

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{ik}{2\pi\zeta} e^{-ik\zeta} \int_S u(x, y, 0) e^{-\frac{ik}{2\zeta} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]} dx dy, \quad (26.10)$$

где S — апертура линзы.

Эта формула лежит также в основе *дифракционной теории оптического изображения* и применяется в оптике при

определении интенсивности в изображении светящегося предмета или точки, создаваемого линзой. Как известно, при падении, например, параллельного пучка лучей на фокусирующую линзу поле не концентрируется в одной точке в фокусе, а распределяется по области, поперечный размер которой пропорционален длине волны. Это распределение легко получается из (26.10). В оптических задачах обычно распределение энергии по линзе является равномерным, а фаза определяется фокусирующими свойствами линзы. Для линзы с фокусным расстоянием f

$$u(x, y, 0) = e^{\frac{ikr^2}{2f}}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (26.11)$$

(см. ниже формулу (26.136)). Поверхность равных фаз за линзой является частью сферической поверхности с центром в фокусе, и в геометрикооптическом приближении все лучи, т. е. нормали к этой поверхности, пересекаются в фокусе. Дифракционная теория, основывающаяся на (26.10), дает более точный результат. При $\zeta = f$, т. е. в фокальной плоскости, как можно показать, основываясь на (26.10) и (26.11), образуется пятно, размер которого будет равен f/kx_s . Здесь x_s имеет порядок линейного размера освещенной части линзы, которая, в частности, может быть и меньше размера линзы a . Мы не будем проводить этого вычисления, так как в линзовой линии амплитуда по сечению пучка распределена неравномерно, т. е. формула (26.11) неприменима. Однако порядок размера светового пятна будет таким же. Как мы увидим, в линзовой линии это световое пятно заполняет весь пучок. Именно поэтому понятие фокуса — и вообще точечного изображения точки — в линзовой линии теряет смысл, действие ее не может быть описано в геометрикооптических терминах.

Поле перед второй линзой в линии получается из (26.10) при $\zeta = L - 2\delta$; при δ , достаточно малых по сравнению с L , можно просто подставлять в формулу $\zeta = L$.

3. Поле на выходе и на входе линзы мы свяжем соотношением

$$u(\xi, \eta, L) = u(\xi, \eta, L - 2\delta) e^{-i\psi(\xi, \eta)}. \quad (26.12a)$$

Функция $\psi(\xi, \eta)$ является при этом единственной характеристикой линзы.

Формула (26.12а) описывает линзу как *фазовый корректор*. Согласно этой формуле поле в любой точке за линзой зависит только от поля в точке плоскости перед линзой, имеющей те же координаты ξ, η ; обе эти точки лежат на одной прямой, параллельной оси. Функция $\psi(\xi, \eta)$ равна *оптической длине* этой прямой между плоскостями $\zeta = L - 2b$ и $\zeta = L$, т. е.

$$\psi(\xi, \eta) = k \int_{L-2b}^L \sqrt{\epsilon(\xi, \eta, \zeta)} d\zeta. \quad (26.126)$$

В этой формуле диэлектрическая проницаемость линзы рассматривается как произвольная функция координат. Для однородной ($\epsilon = \text{const}$) двояковыпуклой линзы со сферическими поверхностями радиуса кривизны b из (26.126) следует

$$\psi(\xi, \eta) = C - \frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{b} (\sqrt{\epsilon} - 1). \quad (26.13a)$$

Значение C — постоянной, не зависящей от ξ, η , мы не выписываем, так как внесение постоянной по сечению коррекции не оказывает влияния на формирование поля; такая коррекция описывает внесение тонкой диэлектрической пластинки, перпендикулярной к оси.

Формулы (26.12) представляют собой обычные геометрикооптические законы прохождения параксиального пучка лучей через тонкую линзу, однако записанные несколько необычным образом, в терминах поля. Для того чтобы найти ход лучей через линзу, можно не выписывать явно закона преломления на границе диэлектрика. Достаточно найти поверхность равных фаз вблизи линзы, а затем строить лучи, как нормали к этой поверхности. Например, при падении плоской волны (т. е. системы параллельных лучей) на линзу, осуществляющую фазовую коррекцию (26.13а), распределение фаз на выходной плоскости будет даваться согласно (26.12а) и (26.13а) формулой $\exp \left[\frac{ik(\xi^2 + \eta^2)}{b} (\sqrt{\epsilon} - 1) \right]$. Сферическая поверхность $\tilde{z} = \frac{\sqrt{\epsilon} - 1}{b} (\xi^2 + \eta^2)$ ($\tilde{z}$ отсчитывается от вершины линзы) является поверхностью равных фаз; нормали к ней пересекаются на расстоянии $f = \frac{b}{2(\sqrt{\epsilon} - 1)}$, что дает правильное выражение для фокусного расстояния. И вообще, при геометрикооптическом расчете тонкой линзы можно не

учитывать изменения направления лучей на толщине линзы и характеризовать линзу осуществляемой ею согласно (29.12а) фазовой коррекцией

$$\psi(\xi, \eta) = C - \frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{2f}. \quad (26.13б)$$

В излагаемой ниже теории мы не будем, вообще говоря, ограничиваться линзами, осуществляющими фазовую коррекцию (26.13б), т. е. линзами со сферическими поверхностями, хотя теория линии из таких линз разработана наиболее подробно.

Таким образом, в рассматриваемой теории линзовой линии сама линза рассматривается как фазовый корректор, т. е. в геометрикооптическом, лучевом приближении, а поле между линзами рассчитывается не по законам геометрической оптики, а по (26.10).

4. Формулы (26.10) и (26.12а) позволяют построить полную теорию открытой линзовой линии. Пренебрегая обратным действием второй линзы на первую и считая, что поле, прошедшее мимо апертуры второй линзы, больше не возвращается в линию, мы можем связать поле на выходе второй линзы с полем на выходе первой линзы соотношением

$$u(\xi, \eta, L) = \frac{ik}{2\pi L} e^{-ikL} e^{-i\psi(\xi, \eta)} \times \\ \times \int_S u(x, y, 0) e^{-\frac{ik}{2L}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} dx dy. \quad (26.14)$$

Потребуем теперь выполнения условия

$$u(\xi, \eta, L) = \chi u(\xi, \eta, 0), \quad (26.15)$$

где χ — постоянное число, т. е. не зависит от ξ, η . Другими словами, будем искать такие решения волнового уравнения, которые удовлетворяют условию *повторяемости* поля на апертурах последовательных линз с точностью до постоянного множителя. Эти решения мы назовем *собственными волнами* нашей системы. Они удовлетворяют однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\frac{ik}{2\pi L} e^{-ikL} \cdot e^{-i\psi(\xi, \eta)} \int_S u(x, y, 0) e^{-\frac{ik}{2L}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} dx dy = \\ = \chi u(\xi, \eta, 0). \quad (26.16)$$

Уравнение (26.16) является основой излагаемой ниже теории линзовой линии.

Согласно этому уравнению линия характеризуется расстоянием L между линзами, апертурой линз S и фазовой коррекцией $\psi(\xi, \eta)$. Уравнение (26.16) имеет счетную бесконечную последовательность собственных значений χ_n и соответствующую им совокупность собственных функций $u_n(x, y, 0)$. Собственная функция u_n дает структуру поля n -й волны на выходе каждой линзы; поле волны между линзами определяется по (26.10). Модуль собственного значения χ_n связан с потерями энергии на каждой линзе, обязанными прохождению части волны мимо линзы — эти потери, по определению величины χ , равны $1 - |\chi_n|^2$. Фаза χ_n равна согласно (26.15) набегу фаз при прохождении одного звена линии; разделив ее на L , мы получим некоторую среднюю фазовую скорость данной волны.

5. В приложениях большое значение имеет *двумерный* вариант формулы (26.16), который описывает линию из длинных цилиндрических линз, образующие которых параллельны оси y , так что фазовая коррекция зависит только от ξ , а поле тоже не зависит от y . Тогда в (26.16) можно произвести фактическое интегрирование по y , и интегральное уравнение примет следующий вид:

$$\sqrt{\frac{ik}{2\pi L}} e^{-ikL} \cdot e^{-i\psi(\xi)} \int u(x, 0) e^{-\frac{ik}{2L}(x-\xi)^2} dx = \chi u(\xi, 0). \quad (26.17)$$

Интегрирование здесь производится от $-a$ до $+a$, где $2a$ — ширина полосы, занимаемой в диафрагме цилиндрической линзой.

Заметим, что (26.17) можно было бы получить, минуя решение трехмерной задачи. Функция Грина двумерной задачи, аналогичная (26.5), имеет вид

$$g = \frac{i}{4} \{H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR')\}. \quad (26.18)$$

Действительно, в области, где $R \neq 0$, $H_0^{(2)}(kR)$ представляет собой решение однородного волнового уравнения с требуемым поведением на бесконечности, и легко показать, основываясь на (14.3), что оно обладает именно той особенностью при $R \rightarrow 0$, при которой в волновом уравнении справа стоит δ -функция. В формуле (26.4) надо затем заменить функцию

Ханкеля ее асимптотическим значением при $kR_0 \gg 1$ согласно (13.5), а потом произвести те же упрощения, что и в формуле (26.7).

6. Вместо функции $u(x, y, 0)$ удобно ввести другую функцию:

$$w(x, y) = u(x, y, 0) e^{\frac{i}{2} \psi(x, y)}. \quad (26.19)$$

Согласно (26.12) для симметричных линз $w(x, y)$ имеет простой физический смысл — это есть поле в средней плоскости линзы. Обозначим через $\tilde{\chi}$ величину, отличающуюся от χ множителями, модуль которых равен единице, так что потери энергии на участке от $z=0$ до $z=L$ будут через $\tilde{\chi}$ выражаться той же формулой $1 - |\tilde{\chi}|^2$, что и через χ . Функция w в трехмерной и двумерной задачах соответственно удовлетворяет интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} \int_S w(x, y) e^{-\frac{ik}{2L} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] - \frac{i}{2} [\psi(x, y) + \psi(\xi, \eta)]} dx dy = \\ = \frac{2\pi L}{k} \tilde{\chi} w(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (26.20a)$$

$$\int_{-a}^{+a} w(x) e^{-\frac{ik}{2L} (x-\xi)^2 - \frac{i}{2} [\psi(x) + \psi(\xi)]} dx = \sqrt{\frac{2\pi L}{k}} \tilde{\chi} w(\xi). \quad (26.20b)$$

Ядра этих интегральных уравнений — симметричные, поэтому собственные функции w_n и w_t ортогональны; если $\tilde{\chi}_n \neq \tilde{\chi}_t$, то интегралы $\int_S w_n(x, y) w_t(x, y) dx dy$ или

$$\int_{-a}^{+a} w_n(x) w_t(x) dx$$

равны нулю. Отсюда следует, что если на какой-либо линзе задано поле $w(x, y)$, то коэффициенты C_n разложения его по полям собственных волн

$$w(x, y) = \sum_n C_n w_n(x, y) \quad (26.21)$$

равны

$$C_n = \frac{\int w(x, y) w_n(x, y) dx dy}{\int w_n^2(x, y) dx dy}. \quad (26.22)$$

Зная эти коэффициенты, можно найти поле на любой следующей линзе — оно будет представляться таким же рядом, в котором, однако, каждый коэффициент C_n получит еще множитель $(\tilde{\chi}_n)^p$, где p — число пройденных пучком линз.

Однако ядра интегральных уравнений (26.20) не являются эрмитовыми, поэтому интегралы $\int w_n(x, y) w_l^*(x, y) dx dy$ не равны, вообще говоря, нулю при $n \neq l$. Из этого следует *неаддитивность потока энергии*, переносимой различными волнами, так как

$$\int |w(x, y)|^2 dx dy \neq \sum_n |C_n|^2 \int |w_n(x, y)|^2 dx dy. \quad (26.23)$$

Эта неаддитивность вызывается, по существу, наличием потерь, и не является специфической особенностью открытых линий. В волноводах с потерями энергия, переносимая различными волнами, также неаддитивна, т. е. тоже имеет место неравенство (26.23).

§ 27. Собственные волны линзовой линии

1. Если фокусирующая сила достаточно велика, точнее, лежит в определенных пределах, которые мы найдем ниже, то ширина пучка собственной волны может быть много меньше размера линз. При этом имеет смысл рассматривать *бесконечные линзы*, т. е. полагать в (26.20), что интегрирование происходит по всей плоскости $z=0$. При этом в принятых выше оценках (26.9) и в условии $|\xi|, |\eta| \ll L$ надо, очевидно, считать, что $|\xi|, |x|, \dots$ имеют порядок ширины пучка.

Исследование уравнений (26.20) мы начнем с *бесконечных двумерных квадратичных корректоров*, т. е. положим в (26.20б) $a = \infty$ и

$$\psi(x) = -\sqrt{\frac{k}{L}} x^2. \quad (27.1)$$

Выделение множителя k/L подсказывается видом ядра интегрального уравнения. В этой формуле безразмерное число ν , характеризующее свойства линзы, равно, согласно (26.13б), отношению расстояния между линзами к удвоенному фокусному расстоянию.

Уравнение (26.20б) при бесконечных пределах интегрирования имеет убывающие при $|x| \rightarrow \infty$ — так, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |w|^2 dx$

существует — решения (собственные функции) не при всех значениях ν , а только при ν , лежащих в интервале:

$$0 < \nu < 2, \quad \nu = L/2f. \quad (27.2)$$

При этом, как легко проверить прямой подстановкой, простейшая собственная функция равна:

$$\omega_1(x) = \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2\nu - \nu^2}}{2} \frac{k}{L} x^2 \right\}. \quad (27.3a)$$

Полуширина области, в которой поле имеет тот же порядок, что и в центре, равна

$$x_s = \sqrt{\frac{L}{k}} \frac{1}{\sqrt[4]{2\nu - \nu^2}}. \quad (27.4)$$

С этим обозначением собственная функция имеет вид

$$\omega_1(x) = e^{-x^2/2x_s^2}. \quad (27.3б)$$

Величина x_s (27.4), рассматривая как функция от ν , имеет минимум при $\nu = 1$, т. е. когда $f = L/2$; при этом $x_s = \sqrt{L/k}$. Такая система линз называется *конфокальной*, ибо фокусы двух соседних линз совпадают. Таким образом, при данном расстоянии между линзами конфокальные линии обеспечивают максимальную концентрацию поля на линзах — это одна из причин, по которой конфокальные линии получили наибольшее распространение и подробнее всего изучены. При уходе от конфокальности в сторону уменьшения или увеличения фокусного расстояния f ширина пучка $2x_s$ растет. Так как выражение $2\nu - \nu^2$, входящее в (27.4), инвариантно относительно подстановки $\nu' = 2 - \nu$, то основные волны двух линз с фокусными расстояниями f и f' , связанными соотношением

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{4}{L}, \quad (27.5)$$

будут иметь на линзах одинаковую ширину пучка.

Когда $\nu \leq 0$ или $\nu \geq 2$, интегральное уравнение при $a = \infty$ не имеет убывающих при $|x| \rightarrow \infty$ решений. Первое условие физически совершенно очевидно. Равенство $\nu = 0$ означает, что линз нет, линия представляет собой при этом просто совокупность последовательно расположенных диа-

фрагм. Такая линия также формирует собственную волну, однако ширина пучка в линии, как мы ниже увидим, всегда имеет порядок a и не может быть меньше размера диафрагм. Отрицательные значения ν соответствуют рассеивающим линзам; очевидно, что и в них пучок не будет уже линз. Несколько неожиданным является то, что при фокусном расстоянии, меньшем одной четверти расстояния между линзами ($\nu > 2$), такие линзы в линии действуют так же, как рассеивающие.

Поле волны (27.3) между линзами можно определить из двумерного аналога формулы (26.10):

$$u(\xi, \zeta) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}} \frac{e^{-ik\zeta}}{\sqrt{\zeta}} \int u(x, 0) e^{-\frac{ik}{2\zeta}(x-\xi)^2} dx. \quad (27.6)$$

Эта формула получается из (26.10) интегрированием по y ; из нее легко можно было бы вывести уравнение (26.17). Подставляя (27.3), (26.19) и (26.13) в (27.6), получим после элементарных вычислений явное выражение для поля во всем пространстве, которое мы здесь не выписываем. Отметим только, что при $\zeta = L/2$, т. е. посередине между линзами, где поле более всего поджато, эффективная его ширина в $\sqrt{2/(2-\nu)}$ раз меньше, чем по (27.4) на линзах. Например, в конфокальной системе полуширина пучка меняется вдоль линии в пределах от $\sqrt{L/k}$ до $\sqrt{L/2k}$.

Интегральное уравнение (26.20б) имеет бесчисленное множество собственных функций; волна (27.3) является первой из них в том смысле, что поле ее более всего «поджато» к осевой плоскости. Например, для конфокальной системы m -я собственная функция имеет вид

$$w_m(x) = e^{-\frac{kx^2}{2L}} H_m\left(\sqrt{\frac{k}{L}} x\right), \quad (27.7)$$

где H_m — полиномы Эрмита ($H_0 = 1$, $H_1 = x$ и т. д.). Это легко проверить, подставляя (27.7) в (26.20б). Чем больше номер функции m , тем выше степень полинома H_m и тем больше значения x , при которых поле начинает заметно убывать, так что *ширина пучка растет с номером волны*.

Собственные значения интегрального уравнения с интегралом в неограниченных пределах по модулю равны единице, если, разумеется, существует интегрируемая собственная

функция, что, например, для квадратичных корректоров имеет место при выполнении (27.2).

2. Между линзовой линией и *диэлектрическими стержнями* или пластинками существует некоторая аналогия. В линзовой линии фазовая коррекция осуществляется периодически; представим себе, что мы эту коррекцию «размазали» по всей длине — сначала заменили линзы с заданным $\psi(x)$ другими, в которых ψ в N раз меньше, но которые стоят в N раз чаще, а затем перешли к пределу $N \rightarrow \infty$. При этом получается система, эквивалентная диэлектрической пластинке, в которой, однако, ϵ неоднородно по сечению, т. е. зависит от x . Уравнение, описывающее поле собственной волны такой пластинки, можно получить предельным переходом $N \rightarrow \infty$ из интегрального уравнения. Оно имеет вид

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \left[k^2 - h^2 + \frac{2k}{L} \psi(x) \right] w(x) = 0, \quad (27.8)$$

где h есть волновое число цилиндрической волны (8.1) в пластинке. Легко показать, что такое же уравнение получится, если принять, что

$$\epsilon(x) = 1 + \frac{2}{kL} \psi(x). \quad (27.9)$$

Эта формула имеет простой физический смысл. Она может быть получена из требования, чтобы при любом значении x оптическая длина отрезка прямой, параллельной оси и лежащей между плоскостями $z=0$ и $z=L$, была для линзовой линии и для пластинки одинаковой.

Поперечное распределение поля в цилиндрической волне, распространяющейся в среде с (27.9), близко к поперечному распределению поля в линзовой линии, хотя между этими линиями имеется существенное различие — в пластинке распределение поля не зависит от z , в линзовой линии оно периодически, с периодом L , изменяется. Например, для квадратичной коррекции (27.1) решение уравнения (27.8) также имеет форму (27.3), но полуширина не равна (27.4), а равна $\sqrt{\frac{L}{k}} / \sqrt[4]{2\gamma}$. При γ , близком к правому концу интервала (27.2), эта величина существенно отлична от (27.4), но при $\gamma \lesssim 1$ структура поля в пластинке близка к структуре поля в линзовой линии. Оказывается, что при любом γ из интервала (27.2) ширина пучка в пластинке равна корню квадрат-

ному из произведения наибольшей и наименьшей ширины пучка в линзовой линии.

Таким образом, собственная функция уравнения (27.8) близка к первой собственной функции значительно более сложного уравнения (26.20б). Для других форм коррекции, отличных от (27.1), для которых не существует явного решения (26.20б), решение уравнения (27.8) позволяет дать качественное описание структуры собственной волны линзовой линии. Для трехмерной задачи также можно написать дифференциальное уравнение, подобное (27.9), собственная функция которого близка к собственной функции интегрального уравнения (26.20а).

3. Если $x_s \ll a$, то собственные функции интегрального уравнения (26.20б) с бесконечными пределами близки к собственным функциям этого уравнения с конечным значением a . Рассмотрим коротко условия, которые возникают в противоположном случае, когда *размер линз не велик* по сравнению с шириной пучка, формирующегося в линии из таких же, но бесконечных корректоров.

Поле $w(x)$, или $u(x)$, на первой линзе создает в плоскости второй линзы поле, которое имеет заметное значение на части плоскости, большей, чем апертура второй линзы. На этой апертуре поле повторяет поле на первой апертуре; так как часть энергии проходит мимо второй линзы, то χ в (26.15) по модулю меньше единицы. *Радиационные потери*, очевидно, тем больше, чем меньше отношение a/x_s . Так как x_s имеет порядок $\sqrt{L/k}$, то радиационные потери зависят при данной форме коррекции от параметра c (26.2), так как $\sqrt{c} = \frac{a}{\sqrt{L/k}}$. При $c \gg 2\pi$, как оказывается, потерь для низших типов волн практически нет; только волны с большим n , т. е. с большой по сравнению с $\sqrt{L/k}$ шириной пучка, обладают радиационными потерями. При $c \approx 2\pi$ возникают заметные потери основной волны. При $c \ll 2\pi$, т. е. когда корректоры расположены друг относительно друга в дальней зоне (19.3), потери очень велики, и понятие собственной волны в такой линии теряет физический смысл. Решение уравнений (26.20) и определение χ_n и w_n в аналитической форме удается только для конфокальных корректоров, но и для них решение содержит сложные трансцендентные функции. Для всех

других функций $\psi(x)$ вычисление потерь в зависимости от c производится либо непосредственно численным интегрированием уравнений (26.20), либо разложением неизвестной собственной функции уравнения для таких же бесконечных корректоров. Для коэффициентов разложения получается система однородных линейных алгебраических уравнений, и

χ_n находятся из условия, что эта система имеет нетривиальные решения.

На рис. 14 потери $1 - |\chi_n|^2$ представлены для двумерных конфокальных корректоров в функции c для первых трех типов волн ($n=0, 1, 2$); линия, помеченная $\psi=0$, будет объяснена ниже.

Из физических соображений можно ожидать, что потери определяются в основном только отношением a к x_s , а форма коррекции влияет лишь на величину x_s при данных k и L . Расчет качественно подтвердил это предположение. С довольно высокой точностью кривые рис. 14 позволяют определять потери и для *квадратичных неконфокальных корректоров*, если для них под c понимать не параметр (26.2), а квадрат отношения ширины корректора $2a$ к ширине пучка на линзах (27.7). Иными словами, рис. 14 дает потери для любых квадратичных корректоров (при $0 < \nu < 2$), если считать, что по оси абсцисс отложено некоторое *эффективное* значение параметра c , т. е. величина

$$c_{\text{эфф}} = \frac{ka^2}{L} (2\nu - \nu^2)^{1/2}, \quad \nu = L/2f. \quad (27.10)$$

Аналогичным образом зависят от параметра $c = ka^2/L$ потери для неквадратичных корректоров, например, при $\psi(x) =$

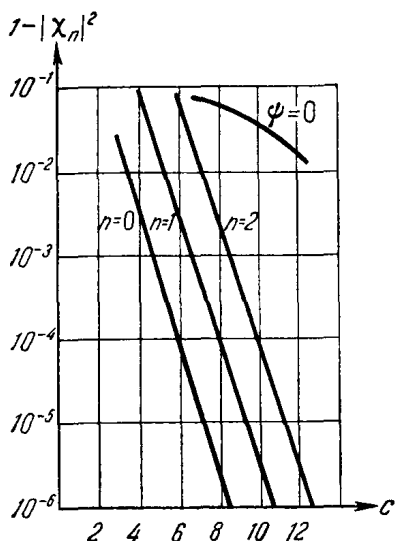


Рис. 14. Радиационные потери в конфокальной и диафрагменной ($\psi=0$) ленточной линиях.

$\equiv \alpha |x|$ (линзы с коническими поверхностями) и т. д. Такие корректоры интересны в том отношении, что, в отличие от квадратичных корректоров, т. е. от линз со сферическими или, точнее, параболическими поверхностями, они с геометрической точки зрения вообще не создают оптического изображения, так как обладают очень большими aberrациями. Однако собственные волны в линии из таких линз ничем принципиально не отличаются, например, от волн в конфокальной линии. Образование повторяющегося поля не представляет собой процесса последовательной точечной передачи изображения; величина поля в любой точке линзы определяется не значением поля в одной какой-либо точке апертуры предыдущей линзы, а распределением поля на всей апертуре.

Собственные функции конечных корректоров отличны, вообще говоря, от собственных функций бесконечных корректоров с той же коррекцией, они возмущены влиянием краев. Это возмущение, разумеется, тем больше, чем меньше отношение a/x_s . Особенно существенно влияние краев в таких линиях, в которых бесконечные корректоры вообще не формируют волн, т. е. для таких ψ , для которых интегральные уравнения с бесконечными пределами не имеют интегрируемых

$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |w|^2 dx < \infty \right)$ собственных функций. Наиболее интерес-

ным и практически важным случаем является отсутствие коррекции, $\psi \equiv 0$. Такая система осуществима в виде *диафрагменной линии*, т. е. ряда параллельных экранов с одинаковыми отверстиями, края которых лежат на одной цилиндрической поверхности. В линзовых линиях передач такие системы мало исследованы, но их аналоги в зеркальных линиях и открытых резонаторах, которые рассмотрены в следующих параграфах, весьма существенны. Кривая $\psi = 0$ на рис. 14 дает потери основной волны в диафрагменной линии в зави-

симости от c . На рис. 15 представлена функция $\left| \frac{w(x)}{w(0)} \right|$, т. е. нормированное распределение амплитуды этой волны на отверстиях. Радиационные потери, разумеется, значительно больше, чем при том же c у конфокальной линии, однако они меньше, чем они были бы при равномерном распределении поля по апертуре. Убывание поля собственной волны

к краям приводит к значительному уменьшению потерь, т. е. к большей концентрации поля на следующей апертуре.

4. В *трехмерном* случае, когда ψ и w зависят от x и y , собственные волны находятся из интегрального уравнения (26.20а). Вид решения должен соответствовать форме контура корректора. Если корректор ограничен *прямоугольным* контуром, а функция $\exp[-i\psi(x, y)]$ может быть представлена как произведение функции от x на функцию от y , то в таком же

виде следует искать и $w(x, y)$. Например, для квадратичного корректора, т. е. при

$$\psi(x, y) = -\sqrt{\frac{k}{L}}(x^2 + y^2) \quad (27.11)$$

решение $w(x, y)$ имеет вид $w = X(x)Y(y)$, и для каждой из двух функций $X(x)$ и $Y(y)$ получается уравнение (26.20б) с функцией ψ , приведенной в (27.1). Особый интерес представляют прямоугольные конечные корректоры пред-

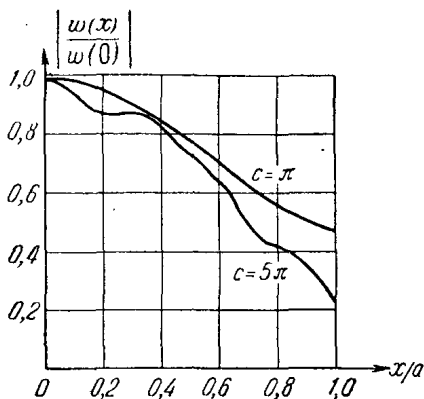


Рис. 15. Поле в диафрагменной линзочной линии.

ставляют в теории зеркальных линий. Собственные функции таких корректоров являются произведением собственных функций двух двумерных корректоров; ширина каждого такого корректора равна одной из сторон прямоугольника. Собственное значение χ равно произведению собственных значений χ_x и χ_y , соответствующих каждому из этих корректоров. Если радиационные потери малы, т. е. $1 - |\chi_x|^2 \ll 1$, $1 - |\chi_y|^2 \ll 1$, то потери на прямоугольном корректоре $1 - |\chi_x \cdot \chi_y|^2$ практически равны сумме потерь обоих двумерных корректоров.

Для линзовой линии наибольший интерес представляет случай корректора, ограниченного *окружностью*. Если функция $\psi(x, y)$ симметрична относительно оси, $\psi(x, y) = \psi(r)$, то решение уравнения (26.20а) имеет вид $w_n(r, \varphi) = R(r) \cos m\varphi$. Функция $R(r)$ удовлетворяет интегральному уравнению, которое получается из (26.20а), если в нем про-

известн фактическое интегрирование по углу, используя известное соотношение

$$\int_0^{2\pi} e^{-it \cos \alpha} \cos m\alpha \, d\alpha = 2\pi \cdot i^{-m} J_m(t). \quad (27.12)$$

Получившееся уравнение для $R(r)$

$$\begin{aligned} \int_0^a R(r) J_m\left(\frac{kr r'}{L}\right) e^{-\frac{ik}{2L}(r'^2 + r^2) - \frac{i}{2}[\psi(r) + \psi(r')]} r \, dr = \\ = i^m \tilde{\chi} \frac{L}{k} R(r'), \end{aligned} \quad (27.13)$$

отличается от (26.20б) тем, что его ядро содержит произведение rr' в аргументе функции Бесселя, а ядро уравнения (26.20б) содержит произведение $x\xi$ в экспоненте.

Поля в линии из корректоров, ограниченных окружностями, близки к тем полям в линии из бесконечных корректоров, которые также имеют форму $w = R(r) \cos m\theta$, т. е. описываются уравнением (27.13) при $a = \infty$. Для квадратичных бесконечных корректоров (27.11) основное симметричное колебание имеет форму, аналогичную (27.3):

$$w_1(r) = \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2v-v^2}}{2} \frac{k}{L} r^2 \right\} = \exp \left\{ -r^2/2r_s^2 \right\}, \quad (27.14)$$

так что радиус пучка r_s дается той же формулой (27.4), в которой надо заменить x_s на r_s . Лучшее всего формируют поле конфокальные линзы ($v=1$, $f=L/2$). Для них радиус пучка основной волны на линзе равен $r_s = \sqrt{L/k}$; в средней плоскости между линзами он в $\sqrt{2}$ раз меньше.

Полная система собственных функций конфокальной линии с бесконечными корректорами имеет вид

$$w_{m,q}(r, \varphi) = \left(\frac{r}{r_s}\right)^m e^{-\frac{r^2}{2r_s^2}} L_q^m\left(\frac{r^2}{r_s^2}\right) \cos m\varphi. \quad (27.15)$$

Здесь L_q^m — присоединенные полиномы Лагерра, заменяющие в цилиндрической системе полиномы Эрмита (27.7); $L_0^m = 1$,

$L_1^m = 1 + m - x$, степень полинома равна радиальному номеру волны q .

Поле основной симметричной волны (27.14) в большей степени, чем поле любой другой волны, сконцентрировано у оси. В системе с конечными линзами эта волна обладает наименьшими потерями. На рис. 16 эти потери, т. е. величина $1 - |\chi|^2$, представлены в функции параметра c (26.2). Как и для двумерной задачи, потери становятся весьма малыми для больших c при $c \gtrsim 2\pi$. Для того чтобы каждая следующая линза могла эффективно перехватывать волну, уходящую из предыдущей линзы, надо, чтобы радиус линз был не меньше

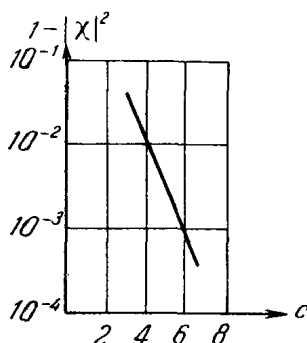


Рис. 16. Радиационные потери основной волны в конфокальной линии.

первой зоны Френеля, равной $\sqrt{2\pi L/k}$; требование $a \gtrsim \sqrt{2\pi L/k}$ и дает условие малых потерь, $c \gtrsim 2\pi$.

Заметим, что для конфокальных корректоров, несмотря на наличие потерь, потоки энергий, переносимые различными волнами, аддитивны, т. е. в формуле (26.23) стоит знак равенства. Связано это с особым свойством конфокальной коррекции — собственными функциями $w_n(x, y)$ вещественны, поэтому интегралы $\int_S w_n(x, y) w_t^*(x, y) dx dy$ равны нулю при $n \neq t$.

Как и для двумерных квадратичных корректоров, кривая рис. 16 позволяет приближенно найти потери основной волны линии из неконфокальных квадратичных корректоров, если принять, что на оси абсцисс отложен квадрат отношения радиуса линз к радиусу пучка r_s , т. е. величина (27.10). Для конфокальной линии ($f = L/2$) эта величина равна c .

Напомним, что w есть декартова поперечная компонента поля. Поэтому, например в волне (27.14), поле всюду имеет одно и то же направление; в более сложных волнах (27.15) H_x меняет знак, но компонента H_y не возникает. Это, разумеется, справедливо только приближенно; более точная теория линз, не ограничивающаяся их описанием по (26.12а), привела бы к связи различных компонент в полях собственных волн.

§ 28. Зеркальные линии

1. Аналогом линзовой линии является так называемая зеркальная линия. В простейшем варианте она состоит из ряда изогнутых зеркал (рис. 17), последовательно отражающих и фокусирующих пучок электромагнитных волн. Каждое зеркало является фазовым корректором, обеспечивающим исправление фронта приходящей волны. Если на входной апертуре зеркала поле приходящей волны равно u , то поле отраженной волны на этой же плоскости равно $u \exp(-i\psi)$.

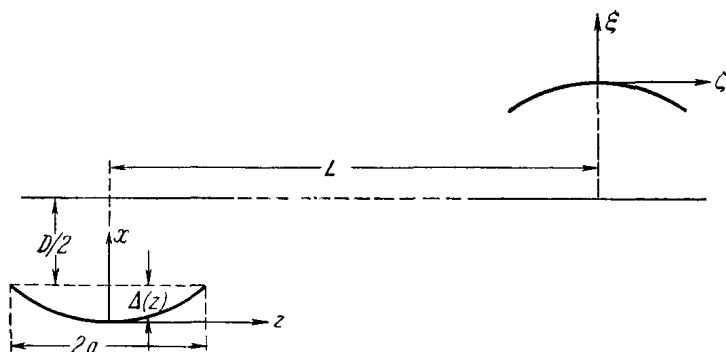


Рис. 17. Зеркальная линия.

Как и для линзы, определение фазовой коррекции, осуществляемой изогнутым зеркалом, т. е. функции ψ , может быть произведено геометрическим методом. При этом также достаточно вычислять оптический путь луча, приходящего в какую-либо точку зеркала, и не нужно учитывать изменение в направлении распространения этого луча, связанное с наклоном поверхности зеркала в различных точках падения.

Начнем с двумерной задачи, т. е. с системы зеркал в виде лент. Обозначим через $\Delta(z)$ функцию, описывающую поверхность зеркала; $\Delta(z)$ равно расстоянию между апертурой зеркала и его поверхностью. Например, если зеркало представляет собой поверхность с радиусом кривизны b_z , то $\Delta(z) = C - z^2/2b_z$, где несущественная для дальнейшего постоянная C равна наибольшему значению прогиба $\Delta(0)$. Если зеркала плоские, то они не производят фазовой коррекции

($\psi \equiv 0$), их действие состоит только в изменении направления пучка и в его периодическом ограничении.

На зеркало падает пучок лучей под углом скольжения β . При расчете функции $\psi(z)$ можно не учитывать расхождения лучей в пучке, подобно тому как при определении $\psi(x, y)$ для линзы достаточно было вычислять оптическую длину пути для лучей, параллельных оси.

Из элементарных геометрических соображений (рис. 18) следует известная формула

$$2\Delta \sin \beta \quad (28.1)$$

для разности хода двух лучей, отразившихся от двух параллельных плоскостей, расстояние между которыми равно Δ . На рис. 18 пунктирные линии дают поверхность равных фаз, и (28.1) равно разности длин путей AB_1C_1 и ABC . По смыслу

функции ψ она только множителем k отличается от (28.1), так что

$$\psi(z) = 2k \Delta(z) \sin \beta. \quad (28.2)$$

Например, для поверхности с радиусом кривизны b_z $\psi(z)$, с точностью до несущественного слагаемого, равна

$$\psi(z) = -\frac{kz^2}{b_z} \sin \beta. \quad (28.3a)$$

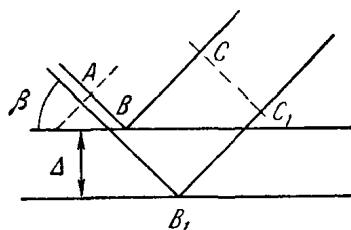


Рис. 18. Разность хода лучей, отразившихся в двух точках изогнутого зеркала.

Поле падающей волны на апертуре второго зеркала находится из того же уравнения (26.4), которое мы применяли в теории линзовых линий, с функцией Грина g , обращающейся в нуль на всей плоскости, в которой лежит апертура первого зеркала.

2. Поле на апертуре первого зеркала состоит из полей падающей и отраженной волн. При установлении связи между полями на апертурах двух соседних зеркал надо в интеграл (26.4) подставлять поле только отраженной волны. Из физических соображений это очевидно, так как только отраженное поле падает на второе зеркало. Формально это следует из того, что для поля падающей волны не выполняется требование об отсутствии проходящих волн, и для него в решение граничной задачи вошло бы еще одно слагаемое — ин-

теграл, взятый по бесконечной полусфере. Очевидно, что этот интеграл должен скомпенсировать интеграл, взятый по апертуре зеркала, так как поле, которое падающая волна создавала бы в верхнем полупространстве в отсутствии зеркала, должно быть равно нулю.

Интеграл (26.4) дает только поле волны, падающей на второе зеркало, т. е. поле, которое было бы вблизи него в его отсутствии. При составлении интегрального уравнения мы потребуем повторяемости полей, отраженных от двух последовательных зеркал.

Заметим, что можно было бы рассуждать несколько иначе взяв в качестве неизвестной функции *полное магнитное поле w на самом зеркале*. Оно, очевидно, получается из u по формуле, аналогичной (26.19):

$$w = 2ue^{\frac{i}{2}\psi}. \quad (28.4)$$

Коэффициент 2 появляется потому, что в рамках принципа Гюйгенса магнитное поле, параллельное металлу, на металле вдвое больше, чем в уходящей волне. В выражении для поля w на втором зеркале надо было бы перед интегралом типа (26.4) также поставить коэффициент 2, учитывающий влияние второго зеркала. Потребовав затем повторяемость полных полей на зеркалах, мы для w получили бы то же уравнение, которое мы ниже получим из уравнения для поля отраженной волны u . При таком методе расчета по-другому вводилась бы фазовая коррекция. Вместо приведенного ниже расстояния R_0 между точками на двух апертурах (28.6) вошло бы расстояние между двумя точками на зеркалах. Это расстояние отличается от R_0 (28.6) слагаемыми, пропорциональными прогибу обоих зеркал $\Delta(z)$ и $\Delta(\zeta)$ (рис. 17). Это дало бы в ядре интегрального уравнения (26.20б) тот же множитель $\exp\left\{-\frac{i}{2}[\psi(z) + \psi(\zeta)]\right\}$, который при нашем методе, т. е. для w , определяемого уравнением (28.4), появляется из-за связи между полями отраженной и падающей волн, $u^{\text{отр}} = u^{\text{пад}} \exp(-i\psi)$.

Уравнение для полей собственных волн зеркальной линии мы будем составлять по той же схеме, что и для линзовой линии. Обозначим координаты вдоль апертуры первого и второго зеркал через z и ζ (причем каждая из них отсчиты-

вается от середины своего зеркала), а перпендикулярные к апертуре координаты через x и ξ ; в двумерной задаче о ленточных зеркалах поля не зависят от y . Повторяя вывод интегрального уравнения линзовой линии, мы должны будем учесть, что R выражается несколько более сложной формулой, чем для того случая, когда обе плоскости были расположены друг против друга. Согласно рис. 17

$$R^2 = (z - \zeta + L)^2 + (x - \xi)^2. \quad (28.5)$$

Поэтому, во-первых, производная $\partial R / \partial N = -\partial R / \partial x$ не будет близка к единице, как в (26.6), а будет равна D/R_0 , где D — расстояние между плоскостями, в которых лежат апертуры, а R_0 — расстояние между двумя точками на апертурах

$$R_0^2 = D^2 + (z - \zeta + L)^2. \quad (28.6)$$

Имея в виду, что размер апертур мал по сравнению с L , можно D/R_0 заменить на некоторое среднее значение $D/\bar{L}$, где $\bar{L} = \sqrt{L^2 + D^2}$ есть расстояние между центрами апертур. Вводя средний угол скольжения β , $\sin \beta = D/\bar{L}$, получим перед интегралом для поля дополнительный множитель $\sin \beta$.

Второе отличие состоит в том, что разложение R_0 по обратным степеням $\bar{L}$ содержит, кроме квадратичного, еще линейный член, а квадратичный член имеет множитель $\sin^2 \beta$:

$$R_0 = \bar{L} + \cos \beta (\zeta - z) + \sin^2 \beta \frac{(\zeta - z)^2}{2\bar{L}}. \quad (28.7a)$$

Таким образом, «зеркальным» аналогом интегрального уравнения (26.17) двумерной линзовой линии является уравнение для поля отраженных волн на апертуре:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ik}{2\pi\bar{L}}} e^{-ik\bar{L}} e^{-i\psi(\zeta)} \sin \beta \int_{-a}^a u(z) e^{-i\frac{k}{2\bar{L}}(z-\zeta)^2 \sin^2 \beta - ik(\zeta-z) \cos \beta} dz = \\ = \chi u(\zeta). \end{aligned} \quad (28.8)$$

Присутствие линейного члена в экспоненте ядра имеет простой физический смысл. Функция $u(z)$ не является медленной функцией, масштаб изменения которой определяется размером зеркала a или шириной пятна $\sqrt{\bar{L}/k}$, как это имеет место в линзовой линии. Вдоль направления распространения

поле пучка изменяется очень быстро, с периодом $2\pi/k$. В плоскости апертуры, т. е. вдоль оси z , составляющей угол β с направлением распространения, это быстрое изменение описывается множителем $\exp(-lkz \cos \beta)$ с медленно меняющейся амплитудой. Это соображение о характере изменения поля в пучках квазиоптических систем будет развито в § 30; сейчас мы формально введем функцию $\bar{u}(z)$ условием

$$\bar{u}(z) = u(z) e^{ikz \cos \beta}. \quad (28.9)$$

Тогда для медленной функции $\bar{u}(z)$ получится то же уравнение (28.8), но без линейного члена в экспоненте.

Наконец, введем вместо z и ζ переменные $\bar{z} = z \sin \beta$ и $\bar{\zeta} = \zeta \sin \beta$ — это, очевидно, *координаты, отсчитываемые в поперечном сечении пучка*. В этих координатах уравнение (28.8) приведет для функции $\bar{u}$ к уравнению, полностью тождественному с уравнением двумерной линзовой линии, ширина которой равна $2\bar{a}$, $\bar{a} = a \sin \beta$. Результат этот означает, что независимо от того, производится ли фазовая коррекция пучка в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, как в линзовой линии, или в какой-либо другой плоскости, форма собственного колебания полностью определяется шириной пучка $2\bar{a}$, расстоянием между корректорами $\bar{L}$ и фазовой коррекцией ψ . При этом ψ должна быть записана как функция от $\bar{z}$, и для собственных функций $\bar{u}(\bar{z})$ и собственных значений χ окажутся справедливыми все результаты, полученные для двумерных линзовых систем для $u(x)$ и χ . Точно так же $\bar{w}(\bar{z})$, т. е. медленно меняющаяся амплитуда поля на металле, определяемая равенством $\bar{w}(\bar{z}) = 2\bar{u}(\bar{z}) \exp\left\{\frac{i}{2}\psi(\bar{z})\right\}$, удовлетворяет тому же уравнению (26.20б), что и поле на средней плоскости линз.

3. Если зеркало имеет форму цилиндрической поверхности с радиусом кривизны b_z , то согласно (28.3а)

$$\psi(\bar{z}) = -\frac{k\bar{z}^2}{b_z \sin \beta}. \quad (28.3б)$$

Все результаты анализа линзовой линии с цилиндрическими поверхностями переносятся на такие зеркальные линии, если согласно (27.1) и (28.3б) принять

$$\nu = \frac{\bar{L}}{b_z \sin \beta}. \quad (28.10)$$

Для того чтобы система была, например, *конфокальной*, должно быть $\nu = 1$, т. е. $\bar{L} = b_z \sin \beta$. Эта формула позволяет простым геометрическим построением получить взаимное расположение зеркал в конфокальной линии. Именно, если центры двух зеркал, соседних с данным (рис. 19), рассматривать как фокусы некоторого эллипса, то радиус кривизны этого зеркала будет совпадать с радиусом кривизны эллипса в вершине малой оси, т. е. каждое зеркало совпадает с дугой эллипса, фокусы которого лежат на соседних зеркалах. Действительно, расстояние между фокусами этого эллипса равно $2L$, малая

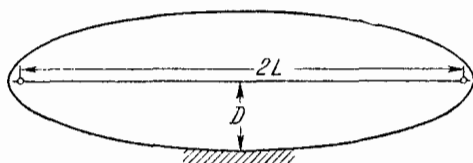


Рис. 19. Эллиптическое зеркало.

полуось равна D , поэтому радиус кривизны в вершине малой оси, по известной формуле аналитической геометрии, равен $(L^2 + D^2)/D$. Подставляя $L = \bar{L} \cos \beta$; $D = \bar{L} \sin \beta$, получим для этой величины значение $\bar{L}/\sin \beta$; и согласно (28.10) при $\nu = 1$, это действительно равно b_z . Конфокальная система обладает, таким образом, простым геометрооптическим свойством — все лучи, выходящие из центра одного зеркала, собираются вторым зеркалом в центре третьего. Это следует из основного свойства эллипса и из того, что все лучи, формирующие изображение точки, имеют одинаковую оптическую длину. Заметим, что линзовая конфокальная система также обладает этим свойством.

4. Трехмерная задача о зеркалах имеет свои особенности, связанные с тем, что координаты z и y в плоскости апертуры зеркала не равноправны относительно направления распространения пучка. Расстояние R_0 между точками двух апертур с координатами $(z, 0, y)$ и (ζ, D, η) имеет вид

$$R_0 = \bar{L} + \cos \beta (\zeta - z) + \sin^2 \beta \frac{(\zeta - z)^2}{2\bar{L}} + \frac{(\eta - y)^2}{2\bar{L}}. \quad (28.76)$$

Координаты (ζ, z) и (η, y) входят в него несимметрично, так как направление распространения пучка образует с осью z

угол β , а с осью y — прямой угол; в плоскости перпендикулярного сечения пучка ось $\bar{y}$ совпадает с осью y . Поэтому фазовая коррекция, осуществляемая в направлении оси y , равна просто $2k\Delta(y) \sin \beta$, и ее не нужно еще пересчитывать на координату в перпендикулярной плоскости, как для коррекции в направлении оси z . Например, если радиус кривизны сечения зеркала, параллельного оси y , равен b_y , то

$$\psi(y) = -\frac{ky^2}{b_y} \sin \beta. \quad (23.3в)$$

Из сопоставления с (28.3б) следует, что для того, чтобы в обоих направлениях (z , y) осуществлялась одинаковая коррекция, т. е. чтобы параметр γ для обоих направлений был одинаков, радиусы кривизны обоих сечений зеркал должны быть не одинаковыми и должно выполняться условие

$$b_y = b_z \sin^2 \beta. \quad (28.11)$$

Например, если b_z выбрано таким образом, чтобы обеспечить конфокальность в отношении координаты z , то для того, чтобы система была конфокальной также в отношении координаты y , b_y должно быть равно малой полуоси D упомянутого в предыдущем пункте эллипса — это следует из (28.11) и формул $b_z = \bar{L}/\sin \beta$, $D = \bar{L} \sin \beta$. Поверхность зеркал в *конфокальной* линии должна являться частью поверхности *эллипсоида*, получающегося при вращении этого эллипса около большой оси.

Осуществление линии из зеркал в форме поверхностей эллипсоида может вызвать значительные технические трудности. Можно изготавливать зеркала более простой формы, например, в виде поверхностей сфер, т. е. с $b_y = b_z$. Нарушение условия (28.11) приведет к тому, что коррекция в направлениях осей z и y будет различной, однако никаких принципиальных усложнений это за собой не повлечет. Если сечение пучка — прямоугольник, то задача сведется к решению двух одномерных уравнений (26.20б). При любой другой форме сечения пучка надо будет решать двумерное уравнение. Существенной при этом является не форма контура зеркал, а форма проекции этого контура на перпендикулярное сечение пучка.

Так как функция $(2v - v^2)^{1/2}$, определяющая согласно (27.10) зависимость потерь при заданных a , k и $\bar{L}$ от кривизны зеркал,

очень медленно меняется вблизи $\nu = 1$, то уход от конфокальных условий (28.11), вызванный выполнением требования $b_y = b_z$, приводит, как показывает расчет, лишь к незначительному повышению радиационных потерь.

Б. Для открытых линий, как, впрочем, и для большинства других трактов, большое значение имеют вопросы *устойчивости*, т. е. влияние малых отклонений формы и положения корректоров. Всякое возмущение положения или формы линзы или зеркала вызывает искажение поля, которое можно рассматривать как частичное перерождение основной волны, на которой происходит передача сигнала, в волны других типов.

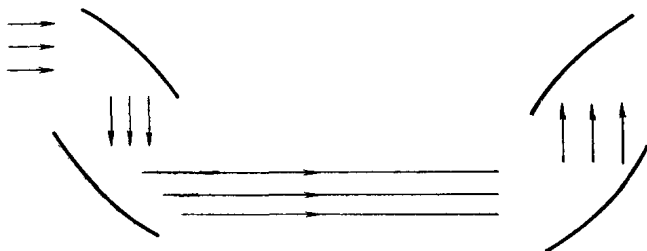


Рис. 20. Перископическая зеркальная линия.

В открытых линиях миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов все эти волны затухают значительно быстрее, чем основная волна. Это свойство открытых систем иллюстрируется графиками рис. 14. Энергия, уносимая волнами высших номеров, пропадает для передачи или даже вызывает искажения сигнала. Поэтому устройство корректоров должно быть таким, чтобы малое их смещение не вызывало большого перерождения. Простые зеркала не удовлетворяют этому требованию — перекося одно зеркало уведет пучок в сторону, т. е. приводит к большим потерям. *Перископические* зеркальные линии (рис. 20), в которых два зеркала, составляющие один корректор, жестко скреплены друг с другом, значительно устойчивее. Их теория строится таким же образом, как теория простых зеркальных или линзовых линий, и сводится к тем же интегральным уравнениям. При этом существенно, что если два зеркала расположены настолько близко друг от друга, что вычисленный для них параметр s велик, то распространение пучка между ними происходит по простым законам геометрической оптики, не возмущенным дифрак-

ционными явлениями, и, в частности, фазовые коррекции двух близких зеркал складываются по простому закону $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Вариантом зеркальных линий являются линии из плоских, неизогнутых зеркал, для которых $\psi = 0$. Их аналогом являются, очевидно, диафрагменные линии, упомянутые в предыдущем параграфе. Пучок в таких системах ограничивается не фокусирующим действием корректора, а только их конечностью. Особенно большое значение этот тип коррекции имеет в теории открытых резонаторов.

§ 29. Открытые резонаторы

1. Открытые резонаторы представляют собой систему из двух параллельных друг другу плоских зеркал или двух зеркал, изогнутых в противоположных направлениях (рис. 21), причем апертуры этих зеркал параллельны друг другу и сами зеркала расположены друг против друга. Собственное колебание имеет форму *пучка стоячих волн*, формируемого либо фокусирующим действием зеркал, либо ограничивающим действием их краев.



Рис. 21. Открытые резонаторы.

Особый интерес открытые резонаторы приобрели в связи с тем, что они являются резонансными системами оптических генераторов света — лазеров. Однако их широко применяют и в субмиллиметровой, и в миллиметровой областях, где они заменили закрытые объемные резонаторы, подобно тому как эти последние в сантиметровой области заменили контуры с сосредоточенными постоянными, являвшимися резонансными системами для метровых и более длинных волн.

Колебательный процесс в открытом резонаторе во многом аналогичен процессу распространения пучка в открытой линии, подобно тому как колебания в объемном резонаторе волноводного типа аналогичны распространению волны в волноводе. В линии пучок после каждого корректора попадает на следующий, в резонаторе возвращается к первому зеркалу,

затем вновь падает на второе, и т. д. Поле состоит из двух встречных пучков. Если поперечный размер пучков мал по сравнению с размерами зеркал, т. е. применимо приближение бесконечных корректоров, то каждый пучок симметричен относительно средней линии. Если фокусирующее действие зеркал недостаточно или вообще отсутствует, то каждый из двух пучков несимметричен и захватывает площадь большую, чем апертура зеркала, на которое он падает. В этом случае колебания сопровождаются излучением, т. е. затухают, подобно тому как затухают свободные колебания в объемном резонаторе с неидеальными стенками.

Математически процесс описывается теми же однородными интегральными уравнениями Фредгольма второго рода, что и распространение волн в квазиоптической линии. Фазовая коррекция, осуществляемая зеркалом, определяется формой зеркала, т. е. его прогибом $\Delta(x, y)$. Очевидно, что согласно (28.2)

$$\psi(x, y) = 2k\Delta(x, y). \quad (29.1)$$

Для сферических поверхностей с радиусом кривизны b

$$\Delta(x, y) = -\frac{r^2}{2b}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (29.2)$$

и величина ν , характеризующая согласно (27.1) фокусирующие свойства зеркал, равна

$$\nu = \frac{L}{b}. \quad (29.3a)$$

Так как в геометрической трактовке фокусное расстояние f сферического зеркала равно половине его радиуса ($f = b/2$), то, как и в линзовой линии (27.2),

$$\nu = \frac{L}{2f}. \quad (29.3b)$$

В частности, *конфокальным* ($\nu = 1$) будет резонатор, у которого фокусы зеркал расположены в одной точке ($f = L/2$), а *центр кривизны каждого зеркала лежит на втором зеркале* ($b = L$). Для плоских зеркал $\nu = 0$, для зеркал вдвое большей кривизны, чем конфокальные, $\nu = 2$, т. е. $f = L/4$, $b = L/2$; такая система называется *концентрической*, так как центры кривизны обоих зеркал совпадают. Согласно (27.2) бесконечные зеркала фокусируют только в том случае, если

$$\frac{L}{2} < b < \infty. \quad (29.4)$$

Все формулы и графики для собственных функций и собственных значений, полученные в § 28 для открытых линий, полностью переносятся на открытые резонаторы. В частности, если зеркала ограничены прямоугольными контурами, то поля описываются произведением двух функций от x и от y и, например, для конфокального резонатора эти функции близки к (27.7). Для круглых зеркал система функций, описывающих поля собственных колебаний конфокальных резонаторов, близка к системе функций для бесконечных корректоров, приведенных в (27.15). Для квадратичных корректоров (29.2) размер светового пятна на зеркалах дается формулой (27.4), если этот размер мал по сравнению с размером зеркал; радиационные потери за время одного пробега определяются по графикам рис. 14 или 16 со значением $c_{\text{эфф}}$ по (27.10).

2. Модуль собственного значения χ_n интегрального уравнения определяет радиационные потери, которые вместе с потерями, вызванными неидеальностью зеркал и диэлектрическими потерями в среде, характеризуют добротность резонатора. В теории резонаторов большое значение имеет также вопрос о фазе χ_n ; в теории линий эта величина определяет фазовую скорость волн, всегда близкую к скорости света. В открытом резонаторе, как в любой резонансной системе, резонанс имеет место только при определенных частотах k_n . Частоты должны быть такими, чтобы фаза волны, уходящей, например, от первого зеркала, после каждого двукратного пробега повторялась с точностью до целого числа длин волн, т. е. чтобы все волны, которые, интерферируя, образуют стоячую волну, не только повторяли друг друга, но еще и складывались бы в фазе.

Собственные частоты определяются из условия, чтобы фаза собственного значения величины χ_n^2 была равна целому числу l , умноженному на 2π . Согласно (26.16) фаза χ_n^2 равна большому числу $2kL$ плюс удвоенная фаза собственного значения $\bar{\chi}_n$ уравнений (26.20) и плюс π . Последнее слагаемое возникает из-за множителя l в начале формулы (20.16). Фаза собственного значения $\bar{\chi}_n$ зависит от фазовой коррекции в (26.20) и от поперечных индексов (m, q) , т. е. от номера решения интегрального уравнения. Например, для конфокального резонатора, если пользоваться записью полей в декартовых координатах, фаза $\bar{\chi}_n$ равна $\frac{\pi}{2} (m + q)$, где m и q —

номера волн ($m, q=0, 1, \dots$). Поэтому выражение для собственной частоты, с точностью до несущественного слагаемого (не зависящего от m, q и l), равно

$$k_n = \frac{\pi}{L} \left(l + \frac{m+q}{2} \right). \quad (29.5)$$

Аналогичная формула справедлива и при классификации волн в цилиндрической системе. Для неконфокального резонатора формула для собственных частот в зависимости от L и номеров волны будет иметь тот же вид, но слагаемое $(m+q)/2$ войдет с некоторым множителем, зависящим от формы коррекции (для квадратичной коррекции — от параметра ν).

Формула (29.5) подобна формуле (24.6) для собственной частоты волноводного объемного резонатора. Число l в (29.5) очень велико; оно имеет порядок числа полуволн, укладываемых на длине L ; например, в газовых лазерах $l \sim 10^6$.

Если бы l было единственным индексом волны, то расстояние в шкале волновых чисел между двумя соседними резонансами было бы равно $\Delta k = \pi/L$, как в одномерной резонансной системе. Однако открытый резонатор представляет собой не одномерную, а трехмерную резонансную систему. Каждому значению l соответствует еще бесконечное множество колебаний со значениями двух других индексов m и q .

Существеннейшей особенностью открытых резонаторов является большая *разность затуханий* между старшими (соответствующими малым значениям $m, q=0, 1, \dots$) и следующими колебаниями. С ростом поперечных номеров волны (m, q) увеличивается размер x_s или r_s и быстро растут радиационные потери. Поэтому при правильном выборе параметров резонатора в нем возбуждаются только несколько колебаний, относящихся к одному и тому же значению l ; им соответствуют и несколько первых значений m и q . Низкая добротность высших (по m и q) типов колебаний приводит к эффективному *разрежению спектра* открытого резонатора. Если бы этого разрежения не было, то из-за того, что размеры резонатора много больше длины волны, спектр был бы очень частым и возбудить отдельные колебания было бы невозможно. Именно по этой причине в качестве резонансных систем не могут служить обычные (т. е. замкнутые) объемные резонаторы с линейными размерами, большими по

сравнению с длиной волны; в таких системах нет достаточно сильной дискриминации высших (по m и q) типов колебаний и невозможно обеспечить устойчивость колебания.

Это же соображение делает затруднительным применение в субмиллиметровом диапазоне волноводов большого по сравнению с длиной волны сечения; в них не происходит самодиффракции высших типов волн, которая в открытых линиях обеспечивается сильным увеличением радиационных потерь с ростом номера волны.

В практике применения открытых резонаторов большое значение имеет вопрос о *селекции колебаний*, т. е. о дополнительном, усиленном подавлении всех типов колебаний, кроме основного ($m=0$, $q=0$). Это достигается, например, созданием зеркал с переменным по апертуре коэффициентом отражения, установкой за одним из зеркал (которое делается полупрозрачным) дополнительного резонатора, использованием сильной зависимости коэффициента отражения от угла вблизи угла полного внутреннего отражения и т. д. Одним из эффективных методов оказался переход к резонаторам со значением χ , лишь немного меньшим двух, т. е. к почти концентрическим резонаторам. При этом на зеркалах поперечный размер пятна основного колебания растет согласно (27.4), растут также и его потери согласно (27.10), но потери высших типов колебаний растут, как оказалось, значительно быстрее.

3. Колебания в *конфокальном* резонаторе *неустойчивы* по отношению к такому изменению поверхности зеркал, при котором радиус кривизны одного зеркала увеличивается, а другого — уменьшается. Эта неустойчивость связана с *вырождением типов колебаний* в конфокальном резонаторе. Согласно (29.5), все колебания с такими l , m и q , для которых сумма $2l + m + q$ имеет одно и то же значение, обладают одинаковыми собственными частотами. Поэтому при некоторых типах деформации основное колебание ($m=0$, $q=0$) оказывается сильно связанным с колебаниями высших номеров, имеющими ту же частоту, и поле не концентрируется в виде узкого пучка.

В реальных системах с конечными корректорами вырождение снимается тем, что высшие (по m , q) колебания обладают большими радиационными потерями, и наряду с вещественной частью волнового числа (29.5) возникает еще и мнимая часть, различная для различных колебаний. Для

неконфокальных резонаторов, из-за наличия не равного единице множителя при $(m+q)/2$ в (29.5), вырождение ослабляется; колебания с различными значениями l имеют всегда разные частоты.

Проще всего доказать неустойчивость конфокального резонатора с бесконечными корректорами, исходя не из этих соображений, а исследуя в общем виде резонатор, составленный двумя зеркалами с не равными друг другу радиусами кривизны b_1 и b_2 ($b_1 \neq b_2$). Достаточно ограничиться двумерной задачей. Фазовые коррекции ψ_1 и ψ_2 , осуществляемые этими зеркалами, будут различны:

$$\psi_1 = -\nu_1 \frac{k}{L} x^2, \quad \psi_2 = -\nu_2 \frac{k}{L} \xi^2, \quad (29.6)$$

где $\nu_1 = L/b_1$, $\nu_2 = L/b_2$. Поле $w_1(x)$ на первом зеркале создает на втором зеркале поле

$$w_2(\xi) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi L}} e^{-ikL} e^{-\frac{i}{2}\psi_2(\xi)} \int w_1(x) e^{-\frac{ik}{2L}(x-\xi)^2 - \frac{i}{2}\psi_1(x)} dx. \quad (29.7)$$

Это поле в свою очередь создает на первом зеркале поле, получающееся из w_2 таким же преобразованием, с заменой ψ_2 на ψ_1 , и это последнее поле должно только постоянным множителем χ^2 отличаться от $w_1(x)$. Так получается интегральное уравнение для $w_1(x)$ с собственными значениями χ^2 . Для того чтобы его исследовать, мы сразу положим

$$w_1(x) \sim e^{-\mu_1 \frac{kx^2}{L}}, \quad w_2 \sim e^{-\mu_2 \frac{k\xi^2}{L}}. \quad (29.8)$$

Подстановка (29.8) в (29.7) и во второе соотношение того же типа приводит к явному выражению для μ_1 и μ_2 . Если $\nu_1 = \nu_2$, то, разумеется, получается $\mu_1 = \mu_2$ и, согласно (27.3а), $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}(2\nu - \nu^2)^{1/2}$. Если $\nu_1 \neq \nu_2$, то простые расчеты дают

$$\mu_1 = \frac{|\nu_1 - 1|}{2} \sqrt{\frac{1}{(\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1)} - 1},$$

$$\mu_2 = \frac{|\nu_2 - 1|}{2} \sqrt{\frac{1}{(\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1)} - 1}. \quad (29.9)$$

При $(\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1) < 0$ или $(\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1) > 1$ для μ_1 и μ_2 получаются чисто мнимые значения, так что $|w_1|$ и $|w_2|$

в (29.8) не будут убывать при удалении от центра пучка. Ограничение пучка будет осуществляться только из-за конечности зеркал; поперечный размер пучка будет равен размеру зеркал, на краю зеркал будут относительно большие токи — создадутся условия, типичные для нефокусирующих систем типа двух плоских или двух концентрических зеркал, и радиационные потери будут большими.

Таким образом, в плоскости параметров ν_1, ν_2 (рис. 22) существует область фокусирующих зеркал (заштрихованная область)

$$1 > (\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1) > 0, \quad (29.10)$$

и область нефокусирующих зеркал, в которых (29.10) нарушается. Точка, соответствующая конфокальным зеркалам, лежит на границе этих областей, и даже малое отклонение в радиусах кривизны, такое, что $b_1 > L, b_2 < L$ или $b_1 < L, b_2 > L$, приводит к очень большим потерям, иногда даже к срыву колебаний.

Отметим одно из технических решений, позволяющих избежать этого эффекта или ослабить его — применение так называемых *полуконфокальных резонаторов*, состоящих из сферического зеркала и плоского зеркала, расположенного в фокальной плоскости сферического. Если плоское зеркало заметно больше размера пучка, то эта система эквивалентна сферическому зеркалу и его отражению в плоском, т. е. конфокальному резонатору. В нем автоматически будет выполнено условие $b_1 = b_2$, если только плоское зеркало будет изготовлено с достаточной точностью. В то же время такой резонатор сохраняет ряд достоинств конфокальных резонаторов, в частности, относительную простоту юстировки.

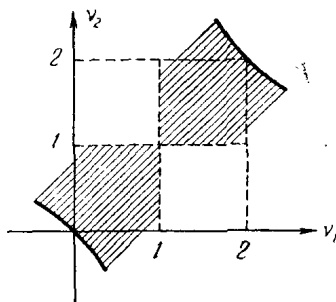


Рис. 22. Устойчивые (заштрихованные) и неустойчивые области параметров резонатора.

§ 30. Методы решения задач квазиоптики

Теорию открытых линий и резонаторов мы строили по следующей схеме — решение граничной задачи для волнового уравнения, составление интегрального уравнения для поля на корректорах, определение его собственных функций и

собственных значений. Большой интерес, вызванный квазиоптическими системами, привел к появлению ряда других методов их исследования. В этом параграфе будут изложены основные идеи некоторых из этих методов.

1. Поле в квазиоптических системах представляет собой длинный узкий пучок, во многом аналогичный плоской волне. Это поле, как мы сейчас покажем, можно представить в виде совокупности плоских волн близких направлений. Мы ограничимся двухмерной задачей; расчеты в трехмерном случае производятся таким же образом.

Граничную задачу об определении решения $u(x, z)$ волнового уравнения при $z > 0$ по значению поля $u(x, 0)$ на плоскости $z = 0$ можно решать не методом функции Грина, а применяя аппарат интеграла Фурье. Разложим заданное поле в интеграл Фурье:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (30.1)$$

Каждую компоненту этого поля легко продлить в полупространство $z > 0$ так, чтобы поле удовлетворяло волновому уравнению; для этого надо умножить ее на

$$\exp \{ -i \sqrt{k^2 - \alpha^2} z \}.$$

Действительно, при любой $f(\alpha)$ функция

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-i\alpha x - i \sqrt{k^2 - \alpha^2} z} d\alpha \quad (30.2)$$

удовлетворяет волновому уравнению и не содержит приходящих из $z = \infty$ волн; при $z = 0$ (30.2) переходит в заданную функцию (30.1). Мы сейчас не будем уточнять, как надо понимать радикал $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ при $|\alpha| > k$ — с аналогичным вопросом мы встретимся в § 33 при разложении сферической волны на плоские волны и там его исследуем.

При $|\alpha| < k$ можно ввести угол β условием $\sin \beta = \alpha/k$. Тогда подынтегральное выражение в (30.2) будет представлять собой функцию

$$e^{ik(x \sin \beta - z \cos \beta)}, \quad (30.3)$$

т. е. плоскую волну, направление распространения которой составляет угол $-\beta$ с осью z ; амплитуда этой волны дается множителем $f(\alpha)$. Суперпозиция таких волн образует пучок, идущий в направлении оси z ; это возможно только в том случае, если все нормали к волнам (30.3) лежат в узком конусе около оси z . Предположим, таким образом, что $f(\alpha)$ отлично от нуля только при $|\alpha| \ll k$, а при больших $|\alpha|$ быстро стремится к нулю, так что для всех α , действительно участвующих в (30.2), справедливо разложение

$$\sqrt{k^2 - \alpha^2} = k - \frac{\alpha^2}{2k}. \quad (30.4)$$

Тогда поле $u(x, z)$ будет

$$u(x, z) = e^{-ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{i\alpha x + i \frac{\alpha^2}{2k} z} d\alpha. \quad (30.5)$$

Легко показать, что формулы (30.5) и (30.1) равносильны формуле (27.6), которую мы получили, производя упрощения в точном решении граничной задачи для волнового уравнения. Действительно, подставив в (30.5) выражение $f(\alpha)$ через $u(x, 0)$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, 0) e^{-i\alpha\xi} d\xi$$

и переменив порядок интегрирования, можно фактически произвести интегрирование по α

$$u(x, z) = e^{-ikz} \int u(\xi, 0) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(x-\xi) + i \frac{\alpha^2}{2k} z} d\alpha \right\} d\xi. \quad (30.6)$$

Внутренний интеграл легко вычисляется, и это приводит к формуле (27.6). Мы показали, что приближение (30.4) равносильно тем приближениям, которые были сделаны при выводе (27.6) и (26.10). В частности, эквивалентными оказываются две трактовки понятия «узкий пучок» — пучок составлен из плоских волн, направления распространения которых лежат в узком конусе (30.4), и расстояния всех точек пучка от его оси малы по сравнению с его длиной (26.8).

Теорию открытых линий и резонаторов можно строить, взяв в качестве неизвестной функции не поле $u(x, 0)$, а его

фурье-сопряженную функцию $f(\alpha)$. Каждой собственной волне открытой линии или собственному колебанию открытого резонатора соответствует некоторая собственная функция $f_n(\alpha)$. В простейших задачах о бесконечных квадратичных корректорах $f_n(\alpha)$ имеет такую же структуру, как и $u_n(x)$, т. е. является произведением экспоненты $\exp(-\alpha^2/2\alpha_s^2)$ на полиномы Эрмита или Лагерра.

2. Согласно (30.5) поле $u(x, z)$ может быть представлено в виде произведения

$$u(x, z) = A(x, z) e^{-ikz}, \quad (30.7)$$

где функция

$$A(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{i\alpha x + i \frac{\alpha^2}{2k} z} d\alpha \quad (30.8)$$

медленно меняется с изменением x и z . Действительно, в интеграле (30.5) α принимает только малые по сравнению с k значения ($|\alpha| \ll k$), поэтому какое-либо изменение x или z вызывает очень малое изменение $A(x, z)$, значительно меньшее, чем изменение множителя $\exp(-ikz)$. Изменение A с z происходит особенно медленно, так как $\alpha^2/2k \ll |\alpha|$. Таким образом, в (30.7) $u(x, z)$ записано в виде произведения *быстро меняющегося множителя на множитель, меняющийся медленно*.

Такое разбиение решения волнового уравнения на два множителя с разными характерами изменения может быть произведено не только в квазиоптике, но и во многих других задачах асимптотической теории дифракции; оно лежит в основе так называемого *метода параболического уравнения*, с которым мы сейчас коротко ознакомимся. В § 33 мы применим этот метод к другой задаче.

Функция $A(x, z)$ в (30.7) удовлетворяет не эллиптическому уравнению, как $u(x, z)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad (30.9)$$

а параболическому дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0; \quad (30.10)$$

это легко проверить, подставив (30.8) в (30.10) и дифференцируя под знаком интеграла. Отсутствие в дифференциальном уравнении для $A(x, z)$ второй производной $\partial^2 A / \partial z^2$ связано с приближением узкого пучка (30.4) — строгое решение (30.2) удовлетворяет волновому, т. е. эллиптическому уравнению (30.9), содержащему вторые производные и по x , и по z . Из (30.10) можно было бы сразу получить решение (27.6), имея в виду, что функция

$$g(x, z, \xi, \zeta) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi(z-\zeta)}} e^{-i \frac{k(x-\xi)^2}{2(z-\zeta)}} \quad (30.11)$$

является функцией Грина уравнения (30.10).

Параболическое уравнение (30.10) проще волнового уравнения (30.9), его легче исследовать. Оно может быть получено, как мы сейчас покажем, из довольно общих соображений о характере изменения искомых функций в зависимости от координат.

Введем вместо неизвестной функции $u(x, z)$ новую функцию $A(x, z)$ уравнением (30.7). Подставляя $u(x, z)$ в волновое уравнение (30.9), мы получим для $A(x, z)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (30.12a)$$

Сделаем теперь предположение, что масштабы изменения функции $A(x, z)$ по координатам x и z велики по сравнению с $1/k$ и различны. Обозначим эти масштабы через L_x и L_z . Тогда порядки величин трех слагаемых в (30.12a) будут $1/L_x^2$, $1/L_z^2$, k/L_z . Предположим, далее, что эти масштабы связаны соотношением

$$L_z = kL_x^2, \quad (30.13)$$

так что $L_z \gg L_x \gg 1/k$. Тогда первый и третий члены будут одного порядка, а второй будет иметь порядок меньший. Отбрасывая этот второй член, мы вместо эллиптического уравнения (30.12a) получим параболическое уравнение (30.10).

Несколько более формальный путь получения параболического уравнения состоит во введении безразмерных координат $x' = \frac{x}{L_x}$, $z' = \frac{z}{L_z}$. В них уравнение (30.12a) принимает вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} + \left(\frac{L_x}{L_z}\right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z'^2} - 2l \frac{kL_x^2}{L_z} \frac{\partial A}{\partial z'} = 0. \quad (30.126)$$

Предположение о том, что L_x и L_z — масштабы изменения функций $A(x, z)$ по координатам x и z , означает, что все производные в (30.126) по x' и z' имеют один и тот же порядок величины. Приняв (30.13), мы найдем, что перед вторым членом стоит малый множитель $(1/kL_x)^2$; отбрасывая этот член, мы получим (30.10), записанное для x' и z' . Это уравнение не содержит больших параметров, в частности, коэффициент при $\partial A/\partial z'$ имеет согласно (30.13) порядок единицы. Поэтому его решение $A(x', z')$ вместе со своими производными всюду имеет порядок единицы; это и доказывает правильность предположения (30.13).

Таким образом, если можно выделить *направление наиболее быстрого изменения поля* и описать это изменение множителем типа $\exp(-ikz)$, то предэкспоненциальный множитель в полном решении медленно меняется в направлении, перпендикулярном к выделенному, еще медленнее меняется в выделенном направлении и удовлетворяет параболическому уравнению, в котором отсутствует вторая производная по выделенному направлению. В узких пучках квазиоптических систем имеет место именно такая ситуация. Поле пучка в грубом приближении есть поле волны, распространяющейся в направлении оси z , или поле двух таких встречных волн. Масштаб изменения множителя $A(x, z)$ в направлении оси z есть L ($L_z = L$), в перпендикулярном направлении он есть a для нефокусирующих корректоров и x_s — для фокусирующих ($L_x = a$ или $L_x = x_s$), и выполняются условия $kL_x \gg 1$, $L_z \gg L_x$ и (30.13), при которых справедливо параболическое приближение (30.10).

Все эти рассуждения, разумеется, полностью переносятся на трехмерные задачи, в которых параболическое уравнение, очевидно, будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (30.14)$$

Этому уравнению, как легко проверить, удовлетворяет множитель при e^{-ikz} в (26.10) с очевидной заменой обозначения координат.

Особенно плодотворным оказалось применение параболического уравнения в тех задачах дифракции, где направление наиболее быстрого изменения поля не прямолинейно. В этих случаях следует вводить координаты, одна из которых направ-

лена *вдоль лучей*, получаемых при геометрикооптическом решении этой задачи, две другие лежат на поверхности фазовых фронтов. Выделяя множитель $\exp(-iks)$, где координата s отсчитывается вдоль лучей, мы для предэкспоненциального множителя A получим параболическое уравнение типа (30.14), не содержащее второй производной по s . Исследование этого уравнения значительно проще, чем исходного волнового уравнения.

Так как явление *диффузии* также описывается параболическим уравнением, содержащим вторые производные от координат и первую производную по времени, то изменение A на поверхностях волновых фронтов можно трактовать как диффузию амплитуды, происходящую, разумеется, не во времени, а с изменением координаты s . Эта диффузия приводит к тому, что при продвижении вдоль системы лучей различие в амплитудах лучей уменьшается. Асимптотическая теория дифракции, использующая идею выделения быстро меняющегося множителя, трактует дифракцию как процесс диффузии амплитуды вдоль волновых фронтов. С этой точки зрения распыление пучка в открытой линии при продвижении от одного корректора к следующему также является диффузией амплитуды в плоскостях $\zeta = \text{const}$; эта диффузия описывается множителем при $\exp(-ik\zeta)$ в решениях (26.10) и (27.6).

Заметим в заключение этого пункта, что одномерным аналогом всего этого аппарата является метод ВКБ в применении к волновому уравнению (6.3). Выделение быстро меняющегося множителя (6.4), (6.6) и наличие большого параметра kL ($L = L_z$) позволило в (6.5) отбросить старшую производную Ψ'' . В одномерном случае это привело к понижению порядка уравнения для Ψ , так как других производных второго порядка в нем нет, и можно было дать его явное решение. Для двух и большего числа переменных возникает параболическое уравнение.

3. Существует аналогия между резонатором с плоскими зеркалами (см. рис. 21) и плоским волноводом, в котором волны идут в направлении оси x . Аналогия эта основывается на представлении волноводной волны в виде совокупности двух плоских волн, направление распространения которых составляет с осью x угол β , даваемый формулой (10.12). Если частота k близка к собственной частоте $\alpha_l = \pi l/L$

волноводной волны номера l , то $\cos \beta_l = \pi l / kL$ близок к единице, β_l близко к $\pi/2$. При этом поле в волноводе напоминает стоячую волну, образованную двумя плоскими волнами, распространяющимися в направлениях $\pm z$. Таким образом, на частоте, лишь немного превышающей критическую частоту волноводной волны, поле в волноводе действительно похоже на поле в открытом резонаторе.

Строгая теория излучения волноводной волны из открытого конца волновода приводит к следующему результату: если k лишь немного превышает π/L , то волна номера l почти полностью отражается от открытого конца. С этой точки зрения открытый резонатор представляет собой отрезок волновода, и он будет обладать малыми радиационными потерями на таких частотах, на которых каждое отражение от открытого конца происходит с коэффициентом отражения, по модулю близким к единице. Таким образом, резонанс будет происходить на частотах k , близких к $\alpha_l = \pi l / L$, где l — целое число, что соответствует обычному представлению о том, что на длине резонатора L должно приблизительно укладываться целое число полуволн.

Зная коэффициент отражения волноводной волны, распространяющейся в направлении x (от открытого конца — плоскости $x=a$), и коэффициент отражения волны, распространяющейся в направлении $-x$ (от открытого конца — плоскости $x=-a$), можно найти форму поля и комплексные частоты собственного колебания открытого резонатора, рассматриваемого как отрезок волновода *).

Для поля m -го четного собственного колебания на зеркале получается формула

$$\omega_m = \cos \frac{\pi m \sqrt{c} \frac{x}{a}}{2 \sqrt{c} + 0,82(1+i)} \quad (30.15)$$

для затухания — явное выражение, согласно которому потери убывают с ростом c , как $c^{-3/2}$, и растут с номером волны, как m^2 . Аналогичные результаты получаются для плоских зеркал, ограниченных окружностями. Строго говоря, эти результаты справедливы только при $c \gg 1$ — условие, при котором отражение каждой волноводной волны происходит как

*) Л. Вайнштейн, ЖЭТФ 44, № 3, 1050 (1963).

в полубесконечном волноводе. Однако сравнение с результатами численного решения интегрального уравнения (26.20) при $\phi \equiv 0$, представленными на рис. 14 и 15, показывает, что эта теория дает хорошие результаты уже при $s \approx 2\pi$.

4. Мы несколько раз подчеркивали в этой главе, что законы геометрической оптики недостаточны для того, чтобы описать распространение пучков между корректорами. Действительно, эти законы не позволяют дать полную теорию открытых линий и резонаторов, в частности, найти радиационные потери. Однако для квазиоптических устройств, в которых ограничение пучка производится фокусирующим действием линз или зеркал, а не конечностью корректоров, т. е. в которых $x_s \ll a$, привлечение лучевой картины оказывается возможным и целесообразным. Основным при этом является понятие *каустики* — поверхности, которой касаются все лучи данной системы. Так как лучи не пересекают каустику, то по одну ее сторону лучей нет, т. е. она ограничивает освещенную область, отделяет ее от неосвещенной. Волновая теория вносит в эту картину уточнение, состоящее в том, что интенсивность поля не меняется скачком при переходе через каустику, и в теневой области интенсивность плавно убывает до нуля.

Поле пучка собственной волны, описываемое, например, формулой (26.10), можно приближенно трактовать как поле совокупности лучей, ограниченных каустической поверхностью. Эта поверхность является вытянутой поверхностью вращения и проходит через те точки пространства, где убывание экспоненциального множителя с ростом координаты r начинает эффективно подавлять возрастание полиномов Лагерра. Вблизи каустики для описания поля необходимо привлекать решение волнового или параболического уравнений, вдали от нее можно пользоваться картиной системы лучей.

Наиболее интересным при таком подходе является возможность, исходя из этой картины, установить структуру собственных колебаний открытого резонатора и найти их собственные частоты, и, соответственно, структуру собственных волн открытой линии и их фазовые скорости.

Идею метода расчета мы коротко проиллюстрируем на двумерной задаче *). Два зеркала (рис. 23) можно рассматривать

*) В. Быков, Л. Вайнштейн, ЖЭТФ 47, № 8, 508 (1964).

как часть дуги некоторого эллипса. Известно (это теорема геометрической оптики), что все лучи, последовательно отражающиеся от эллипса, касаются двух дуг гиперболы, софокусной данному эллипсу, и заполняют всю область, ограниченную этой гиперболой и зеркалами. Гипербола и является каустической поверхностью, ограничивающей пучок. Однако не любая гипербола может быть каустикой, т. е. не могут существовать пучки произвольной ширины. Должны выполняться еще некоторые условия, состоящие, грубо говоря, в том, что

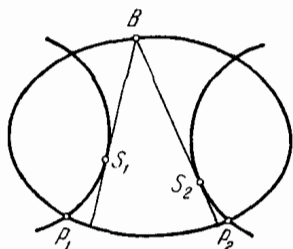


Рис. 23. Каустики и ход лучей в открытом резонаторе.

разные лучи, приходящие в одну точку, должны быть синфазны. Так как все лучи касаются каустик и, следовательно, вдоль каустик фаза меняется со скоростью света, то длина каждой каустики должна быть равной целому числу полувольт, и также целому числу полувольт должна быть равна длина $P_1S_1BS_2P_2$ (рис. 23).

Эти требования вводят в теорию два «квантовых» условия и соответственно два квантовых числа, и позволяют найти возможные для дан-

ного расположения зеркал значения собственной частоты и размеров пучка.

Этот метод довольно прост и приводит к правильным результатам, если ширина пучка заметно больше длины волны. Он не ограничен требованиями параксиальности пучка. Можно дать его строгое обоснование, исходя из волнового уравнения и решая его методом ВКБ для высоких частот. При этом оказывается, что указанные выше длины каустик и $P_1 \dots P_2$ должны быть равны не целому, а полуцелому числу полувольт. Соотношения между геометрикооптическим решением и результатом асимптотического решения волнового уравнения примерно такие же, как между моделью водородного ядра по Бору и решением уравнения Шредингера.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

§ 31. Возбуждение круглого волновода элементарным диполем, расположенным на его оси

1. Задачей теории дифракции является определение поля, возникшего при падении волны, обычно плоской или сферической, на какое-либо тело. В этой главе будут изложены некоторые простейшие методы решения задач дифракции, в которых используется аппарат *интегралов типа Фурье* в плоскости комплексного переменного.

Одна из возможных общих схем решения задач дифракции состоит в следующем: полное поле ищется в виде суммы падающего и дифрагированного полей. Дифрагированное поле должно удовлетворять уравнению Максвелла, не содержать приходящих из бесконечности волн, не иметь особых точек, и в его записи должно быть достаточно неопределенных коэффициентов или функций, чтобы для суммарного поля можно было обеспечить выполнение граничных условий на поверхности тела. Простейшими оказываются задачи, в которых падающее поле имеет ту же геометрическую структуру, что и поверхность тела. В этом случае дифрагированное поле содержит одну волну той же геометрической природы, и этого оказывается достаточно, чтобы удовлетворить граничным условиям. Примером такой ситуации является падение плоской волны на плоскую границу раздела (§ 5). Вторым примером может служить падение сходящейся к началу координат цилиндрической волны

$$u^{\text{пад}} = H_0^{(1)}(kr) \quad (31.1)$$

на цилиндр $r=a$ с тем же центром. Если на поверхности цилиндра выполняется условие

$$u(r, \varphi)|_{r=a} = 0, \quad (31.2a)$$

то дифрагированное поле можно искать в виде одной расходящейся цилиндрической волны

$$u^{\text{диф}} = AH_0^{(2)}(kr), \quad (31.3)$$

и единственного коэффициента A достаточно, чтобы для полного поля $u = u^{\text{пад}} + u^{\text{диф}}$ было обеспечено выполнение условия (31.2a). Получим для A

$$A = - \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}, \quad (31.4)$$

так что полное поле будет равно

$$u = H_0^{(1)}(kr) - \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} \cdot H_0^{(2)}(kr). \quad (31.5a)$$

В этом рассуждении было существенно, что поля (31.1) и (31.3) удовлетворяют волновому уравнению, не имеют особенностей в области $r \geq a$, где определяется поле, и что (31.1) представляет проходящую, а (31.3) — уходящую волны; это следует, при нашем выборе временной зависимости $\exp(i\omega t)$, из асимптотического поведения функций $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$ при большом значении аргументов:

$$H_n^{(1)}(x) \sim \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}, \quad H_n^{(2)}(x) \sim \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}. \quad (31.6)$$

Формула (31.5a) решает электродинамическую задачу для металлического цилиндра и падающего поля, содержащего только одну компоненту электрического поля E_z . В полном поле других компонент не возникает, и задача сводится к скалярной задаче для функции $u = E_z$. Если в падающем поле отлична от нуля только одна z -я компонента H , то для функции $u = H_z$ возникает тоже скалярная задача, однако из выражения для единственной тангенциальной компоненты электрического поля $E_\varphi = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial r}$ следует, что u должно удовлетворять граничному условию

$$\left. \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (31.26)$$

Решение строится таким же образом, и вместо (31.5a) будет

$$u = H_0^{(1)}(kr) - \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)} H_0^{(2)}(kr). \quad (31.56)$$

Если цилиндр, на который падает волна, — не металлический, а диэлектрический, то нужно обеспечить непрерывность тангенциальных компонент полей на границе раздела. Внешнее ($r \geq a$) поле по-прежнему записывается в виде (31.3), но вводится также внутреннее поле,

$$u^{\text{диф}} = B J_0(k \sqrt{\varepsilon} r). \quad (31.7)$$

Функция Бесселя выбрана потому, что это — единственное решение волнового уравнения, не имеющее особенностей при $r = 0$. Двух коэффициентов A и B оказывается достаточно, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Если падающее поле зависит от угла φ

$$u^{\text{пад}} = H_m^{(2)}(kr) e^{im\varphi}, \quad (31.8)$$

то и полные поля будут иметь ту же зависимость, и решения будут содержать цилиндрические функции не нулевого, а m -го порядка.

Наконец, если падающее поле зависит от координаты z вдоль оси цилиндра, $u^{\text{пад}} \sim e^{-ihz}$, то так как декартова координата падающего поля удовлетворяет волновому уравнению, она будет иметь вид

$$u^{\text{пад}} = H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - h^2} \cdot r) e^{-ihz}. \quad (31.9)$$

Полное поле будет иметь ту же зависимость от z , определяемую множителем $\exp(-ihz)$, что и падающее поле, и в решение всюду войдет, вместо волнового числа k , комбинация $\sqrt{k^2 - h^2}$.

2. Примеры предыдущего пункта относились к задачам, в которых падающее поле имело такую структуру, что для выполнения граничного условия на всей поверхности, т. е. для всех φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, дифрагированное поле должно было состоять из одного слагаемого. В задаче о падении плоской волны на металлический цилиндр нужно предварительно представить падающее поле

$$u^{\text{пад}} = e^{-ikx}, \quad x = r \cos \varphi \quad (31.10)$$

в виде суммы членов, каждый из которых вызывает появление в дифрагированном поле только одного слагаемого. Разлагая (31.10) в ряд Фурье, имеем по известной формуле

$$u^{\text{пад}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(kr) e^{im\varphi}. \quad (31.11)$$

Ее легко получить, определяя коэффициенты Фурье функции $\exp(-lkr \cos \varphi)$ и используя интегральное представление функции Бесселя (27.12).

Дифрагированное поле следует, согласно (31.11), искать в виде

$$u^{\text{диф}} = \sum_m A_m H_m^{(2)}(kr) e^{im\varphi}. \quad (31.12)$$

Это решение удовлетворяет волновому уравнению и представляет собой совокупность уходящих волн. Для граничного условия (31.2а) (волна, содержащая единственную компоненту E , $E_z = u$, падает на металлический цилиндр) будет

$$\sum_m [A_m H_m^{(2)}(ka) + (-i)^m J_m(ka)] e^{im\varphi} = 0, \quad (31.13)$$

и из полноты системы функций $\exp(im\varphi)$ следует

$$A_m = -(-i)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}. \quad (31.14)$$

Таким образом, полное поле в этой задаче будет

$$u = \sum_m (-i)^m \left[J_m(kr) - \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(kr) \right] e^{im\varphi}. \quad (31.15a)$$

Для второй поляризации, когда $u = H_z$ и должно выполняться условие (31.2б), полное поле будет

$$u = \sum_m (-i)^m \left[J_m(kr) - \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)} H_m^{(2)}(kr) \right] e^{im\varphi}. \quad (31.15b)$$

Прямая проверка решений (31.15) состоит в том, что поля u удовлетворяют волновым уравнениям и граничным условиям и что после вычитания из них падающего поля (31.11) остаются выражения, представляющие собой совокупность расходящихся волн.

Таким образом, в задачах о дифракции плоской волны на цилиндре падающее поле, а потому и полное поле, записывается в виде бесконечных сумм. Появление сумм, а не интегралов, которые возникают в задаче следующего пункта, связано, по существу, с тем, что из требования об однозначности поля следует, что u должно быть периодической функцией φ , а потому u разлагается в ряд, а не в интеграл Фурье.

Разложение же по φ необходимо потому, что граничное условие (31.2) должно выполняться при всех φ , и при таком разложении оно может выполняться почленно.

3. Задачи предыдущих пунктов имеют самостоятельный интерес, однако мы будем их рассматривать как введение в основной вопрос этого параграфа — задачу о *возбуждении круглого волновода электрическим диполем*, расположенным на его оси z и ориентированным вдоль этой оси. Это, вероятно, одна из простейших задач, на которой можно проиллюстрировать аппарат интегрирования в плоскости комплексного переменного. Эта задача проще решается применением общего метода § 23, и в конце этого параграфа мы сравним оба решения.

Сформулированная задача легко сводится к скалярной задаче о функции $u(r, z)$, если выражать поля через z -ю компоненту электрического вектора Герца $\Pi_z^{(e)}$ по формулам (8.10а). При симметричном возбуждении поля будут симметричными, т. е. не будут зависеть от φ , и три отличные от нуля компоненты поля выразятся через $u(r, z) = \Pi_z^{(e)}$ по формулам, аналогичным (24.1б),

$$E_z = k^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad E_r = -\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z}, \quad H_\varphi = -ik \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (31.16)$$

На металле, при $r=a$, должно быть $E_z=0$; это условие должно выполняться при всех z , поэтому если при всех z

$$u(r, z)|_{r=a} = 0, \quad (31.17)$$

то будут равны нулю и производные от u по z , т. е. будет выполнено требование $E_z|_{r=a} = 0$.

Диполь, расположенный в точке $z=0$, $r=0$, должен создавать поле, вектор Герца которого имеет особенность (17.4в). Опуская множитель $-i/\omega$, т. е. приняв в качестве источника диполь с амплитудой $-\omega/l$, мы получим для первичного поля выражение

$$u^{\text{пад}} = \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}, \quad (31.18)$$

где ρ — радиус в сферической системе координат (ρ, θ, φ) , $\rho^2 = r^2 + z^2$.

Таким образом, задача сводится к определению решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad (31.19)$$

имеющего в начале координат особенность (31.18), удовлетворяющего граничному условию (31.17) и не содержащему приходящих к началу координат волн. Подчеркнем, что речь идет о внутренней задаче, поле определяется при $r \leq a$.

Если бы возбуждение производилось магнитным диполем, то через u следовало бы обозначить $\Pi_z^{(m)}$, и граничное условие $E_\varphi = 0$ при $r = a$ потребовало бы исчезновения на поверхности цилиндра радиальной производной от u .

Соображения, приведенные в конце предыдущего пункта, подсказывают следующий метод решения этой задачи — первичное поле (31.18) следует разложить в интеграл Фурье по координате z , и в таком же виде надо искать дифрагированное поле. При такой записи легко обеспечить выполнение граничного условия (31.17) на всем цилиндре, т. е. при всех z .

Положим

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(r, h) e^{-ihz} dh. \quad (31.20)$$

Тем самым мы вводим переменную h , играющую основную роль в дальнейших расчетах.

Найдем функцию $f_0(r, h)$, равную согласно формуле обращения интеграла Фурье выражению

$$f_0(r, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} e^{ihz} dz. \quad (31.21a)$$

Этот интеграл, как мы сейчас покажем, выражается через функцию Ханкеля. Для его вычисления заменим подстановкой $z = r \operatorname{sh} \gamma$ переменную интегрирования z переменной γ ; тогда $\rho = r \operatorname{ch} \gamma$, и

$$f_0(r, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ir(k \operatorname{ch} \gamma - h \operatorname{sh} \gamma)} d\gamma. \quad (31.21b)$$

Введем затем вместо величины h (которая в интегралах (31.21) является параметром) величину δ по формуле $h = a \operatorname{ch} \delta$, где

существенная в дальнейшем анализе величина α определена формулой

$$\alpha^2 = k^2 - h^2. \quad (31.22)$$

Тогда $k = \alpha \operatorname{sh} \delta$, и интеграл (31.21б) примет вид

$$f_0(r, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha r \operatorname{ch}(\gamma + \delta)} d\gamma, \quad (31.21в)$$

т. е. будет пропорционален функции Ханкеля от аргумента αr :

$$f_0(r, h) = \frac{i}{2} H_0^{(2)}(\alpha r). \quad (31.23)$$

Таким образом, искомое разложение сферической волны в интеграл Фурье по цилиндрическим волнам имеет вид

$$\frac{e^{-ikh\rho}}{\rho} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(\alpha r) e^{-ihz} dh. \quad (31.24)$$

4. Прежде чем строить решение поставленной задачи, проанализируем формулу (31.24), обратив внимание на особенности подынтегрального выражения в точках $h = k$ и $h = -k$, т. е. в точках, в которых $\alpha = 0$. Имея в виду асимптотическое поведение функции $H_0^{(2)}(\alpha r)$ при большом значении аргумента (31.6), следует принять, что

$$\text{при } \alpha^2 > 0 \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (31.25a)$$

$$\text{при } \alpha^2 < 0 \quad \operatorname{Im} \alpha < 0. \quad (31.25б)$$

Тогда подынтегральная функция в (31.24) при всех h в интервале $-k < h < k$ будет представлять уходящую волну, а при h в интервалах $h < -k$ и $h > k$ — убывающую волну, что соответствует тому, что весь интеграл (31.24) представляет уходящую волну. Условие (31.25б) обеспечивает сходимость интеграла (31.24).

Точки $h = -k$ и $h = k$ являются *точками ветвления* функции $H_0^{(2)}(\alpha r)$. Функцию Ханкеля, как известно, можно представить в виде

$$H_0^{(2)}(\alpha r) = -\frac{2i}{\pi} J_0(\alpha r) \ln \alpha r + K(\alpha r), \quad (31.26)$$

где $K(\alpha r)$ — некоторая однозначная функция аргумента; $H_0^{(2)}(\alpha r)$ имеет при малых значениях αr тот же характер, что и $\ln \alpha r$,

Для того чтобы сделать $H_0^{(2)}(\alpha r)$ однозначной функцией, надо из точек $h = -k$ и $h = k$ провести *разрезы* и выбрать определенный *лист поверхности Римана* в соответствии с поведением α на вещественной оси. Мы примем, что $\ln \alpha r$ в (31.26) вещественен при вещественном α .

Покажем, что для того чтобы было одновременно справедливо и (31.25а) и (31.25б), разрезы должны быть направлены именно так, как указано на рис. 24, в верхнюю полуплоскость от точки $h = -k$ и в нижнюю полуплоскость от точки $h = k$. Рассмотрим, например, окрестность точки $h = k$, т. е. положим $h = k + R \exp(i\varphi)$, $R \ll k$, где R , φ — местная

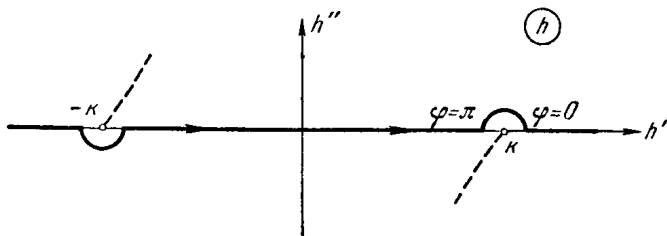


Рис. 24. Плоскость комплексного переменного для формулы (31.24).

цилиндрическая система координат на плоскости комплексного переменного. Тогда $\alpha^2 = -2kR \exp(i\varphi) + O(R^2)$, т. е. либо $\alpha = |\alpha| \exp\left[i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$, либо $\alpha = -|\alpha| \exp\left[i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Согласно (31.25б) при $\varphi = 0$ должно быть $\operatorname{Im} \alpha < 0$, т. е., приняв условие (31.25б), мы выбрали ветвь $\alpha = -|\alpha| \exp\left[i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Для того чтобы при вещественных α было $\operatorname{Re} \alpha > 0$ (31.25а), вещественным α должно соответствовать $\varphi = \pi$, а не $\varphi = -\pi$. А это и означает, что для того, чтобы перейти на выбранном листе поверхности Римана от мнимых α к вещественным α вблизи точки $h = k$ (т. е. от $h > k$ к $h < k$), надо выйти в верхнюю полуплоскость, т. е. разрез должен быть в нижней полуплоскости.

Структура комплексной плоскости (рис. 24) позволяет получить из (31.24) *другое интегральное представление* функции $\frac{\exp(-ik\rho)}{\rho}$, с которым мы встретимся также в § 33. Для этого надо *деформировать контур интегрирования* в по-

луокружность бесконечного радиуса. Направление деформации зависит от того, вычисляется ли поле при $z > 0$ или при $z < 0$. Примем $z > 0$; тогда интеграл по бесконечной полуокружности в нижней полуплоскости будет равен нулю, так как на этом контуре равен нулю множитель $\exp(-ihz)$. Так как подынтегральная функция не имеет полюсов, то весь интеграл (31.24) будет равен интегралу по петле, окружающей разрез (рис. 25), т. е. интегралу, взятому вдоль разреза

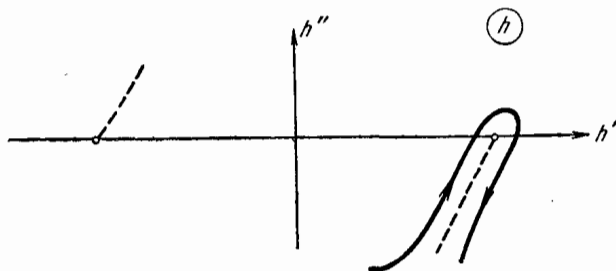


Рис. 25. Интеграл вдоль разреза.

от разности подынтегральной функции по обе стороны разреза. Если обозначить значения α с правой и левой стороны разреза через α^+ и α^- , то это преобразование контура дает

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = \frac{i}{2} \int_k^{-i\infty} [H_0^{(2)}(\alpha^+ r) - H_0^{(2)}(\alpha^- r)] e^{-ihz} dh. \quad (31.27)$$

Скачок функции $H_0^{(2)}$ при переходе аргумента через разрез обязан согласно (31.26) скачку $\ln \alpha r$. Подставляя (31.26) в (31.27), получим

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = \frac{1}{\pi} \int_k^{-i\infty} \ln \frac{\alpha^+}{\alpha^-} J_0(\alpha r) e^{-ihz} dh. \quad (31.28)$$

Связь между значениями α по обе стороны разреза легко получить из формулы $\alpha = -|\alpha| \exp \left[i \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$, которая справедлива вблизи точки ветвления. Фазы φ комплексного числа h на обоих берегах разреза связаны согласно рис. 24 соотношением $\varphi^- = \varphi^+ + 2\pi$, так что $\alpha^- = \alpha^+ \exp(i\pi)$, и эта же связь должна сохраниться на всем разрезе. Заметим, что

простого соотношения $\alpha^- = -\alpha^+$ было бы недостаточно, чтобы вычислить участвующий в (31.28) множитель $\ln \frac{\alpha^+}{\alpha^-}$. Таким образом,

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(\alpha r) e^{-ihz} dh. \quad (31.29)$$

Эта формула удобнее, чем (31.24), в задачах, в которых граничное условие надо ставить при $z = \text{const}$.

5. Вернемся к поставленной задаче (31.17) — (31.19). Полное поле мы будем искать в виде

$$u(r, z) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(\alpha r) e^{-ihz} dh + \int_{-\infty}^{+\infty} f(h) J_0(\alpha r) e^{-ihz} dh. \quad (31.30)$$

Второе слагаемое есть дифрагированное поле; оно не имеет особенностей и удовлетворяет согласно (31.22) при любом $f(h)$ волновому уравнению (31.19). Функция $f(h)$ определяется из требования, чтобы поле u удовлетворяло условию (31.17). Так как это условие должно выполняться *при всех* z , то должен быть равен нулю коэффициент при e^{-ihz} в разложении Фурье полного поля $u(\alpha, z)$, т. е. должно выполняться соотношение

$$\frac{i}{2} H_0^{(2)}(\alpha a) + f(h) J_0(\alpha a) = 0. \quad (31.31)$$

Найдя отсюда $f(h)$ и подставив в (31.30), получим формальное решение поставленной задачи:

$$u(r, z) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_0^{(2)}(\alpha r) - \frac{H_0^{(2)}(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} J_0(\alpha r) \right] e^{-ihz} dh. \quad (31.32)$$

Подынтегральная функция полного поля, в отличие от подынтегральной функции в (31.24), имеет одинаковое значение на обоих берегах разрезом. Другими словами, скачок второго слагаемого при переходе от α^+ к α^- компенсирует скачок (31.27) первого слагаемого, что легко проверить, используя (31.26). Подынтегральная функция имеет *только полюсы*, и полное поле может быть представлено в виде *суммы*

вычетов в этих полюсах. Полюсами являются все значения h , для которых

$$J_0(\alpha a) = 0. \quad (31.33)$$

Это уравнение совпадает с уравнением для волновых чисел собственных волн в круглом волноводе, причем именно для симметричных электрических волн E_{0q} , которые, согласно результатам § 29, только и возникнут при выбранном способе возбуждения.

Уравнение (31.33) имеет счетную последовательность вещественных корней α_n (10.186), и полюсы в (31.32) будут расположены в точках $h_n (h_n^2 = k^2 - \alpha_n^2)$. Несколько корней h_n лежат на вещественной оси между точками $h = -k$ и $h = k$ симметрично относительно точки $h = 0$. Число корней в интервале $0 < h < k$ равно числу волн $E_{01}, E_{02}, \dots$, которые могут при данных частотах и радиусе волновода распространяться без затухания; остальные корни h_n лежат на мнимой оси.

Для того чтобы представить поле (31.32) в виде суммы волн, деформируем контур интегрирования в бесконечную полуокружность. Для точек пространства с $z > 0$ нужно сместить контур в нижнюю полуплоскость. Имея в виду, что первое слагаемое в (31.32) не имеет полюсов и что каждый полюс обходится по часовой стрелке, получим при такой деформации

$$u(r, z) = -\pi \sum_n \frac{H_0^{(2)}(\alpha_n a)}{\frac{d}{dh} J_0(\alpha a) \Big|_{h=h_n}} J_0(\alpha_n r) e^{-i h_n z}. \quad (31.34)$$

Сумма взята по всем полюсам, расположенным ниже первоначального контура интегрирования.

Эта формула позволяет также выяснить вопрос о том, как в (31.32) следует проводить контур интегрирования относительно полюсов, расположенных на вещественной оси. При этом надо привлечь еще не использованное условие, без выполнения которого задача не имеет однозначного решения — полное поле не должно содержать волн, приходящих к началу координат из $z = +\infty$ и из $z = -\infty$. Из этого условия следует, что контур надо проводить так, как это указано на рис. 26. Действительно, если, например, один из

отрицательных корней будет лежать под контуром интегрирования, то в (31.34), т. е. для $z > 0$, будет присутствовать слагаемое, пропорциональное $\exp(-ih_n z)$ при отрицательном h_n , т. е. волна, идущая налево, к источнику. Точно так же, если контур интегрирования будет проведен ниже одного из корней на положительной части вещественной оси, то при $z < 0$ возникнет слагаемое, представляющее волну, идущую направо, что также нарушает это условие.

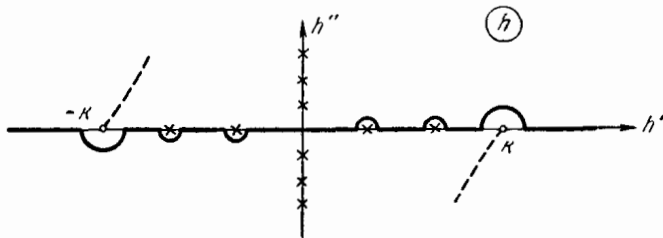


Рис. 26. Расположение полюсов, точек ветвления, разрывов и контура интегрирования.

Таким образом, полное поле при $z > 0$ представимо в виде ряда

$$u(r, z) = \sum_n A_n J_0(\alpha_n r) e^{-ih_n z}, \quad z > 0, \quad (31.35)$$

где, как легко получить из (31.34), (31.33) и (31.32), используя еще выражение для вронскиана функций $J_0(x)$ и $H_0^{(2)}(x)$,

$$J_0(x) H_0^{(2)'}(x) - J_0'(x) H_0^{(2)}(x) = -\frac{2i}{\pi x}, \quad (31.36)$$

коэффициенты A_n равны

$$A_n = \frac{2i}{a^2 h_n} \cdot \frac{1}{J_1^2(\alpha_n a)}. \quad (31.37)$$

Результат (31.35) является, по существу, следствием известного свойства полноты системы волноводных волн (§ 23): любое поле в волноводе, в области, свободной от источников, может быть представлено в виде ряда типа (31.35). При том методе расчета, которым мы пользовались в этом параграфе, этот результат оказался связанным с характером подынтегрального выражения в (31.32) — оно не имеет во всей плоскости комплексного переменного h никаких осо-

бенностей, кроме полюсов. В задаче следующего параграфа возникнет другая ситуация — система цилиндрических волн будет не полной, а подынтегральное выражение в интеграле Фурье для поля будет однозначным только в плоскости с разрезом, и поэтому полное поле нельзя будет представить в виде суммы вычетов.

6. Используем с самого начала свойство полноты системы функций $J_0(\alpha_n r)$ и решим задачу о поле в волноводе по методу § 23, не прибегая к интегрированию в плоскости комплексного переменного. При простой форме возбуждающего тока можно не пользоваться векторной записью § 23, а решать задачу о возбуждении непосредственно для потенциальной функции, обозначенной в этой главе через u .

В скалярной формулировке надо найти решение уравнения

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi\delta(\rho), \quad (31.38)$$

удовлетворяющее граничному условию (31.17).

Введение δ -функции в правую часть позволяет не производить разделения на $u^{\text{пад}}$ и $u^{\text{хф}}$; (31.38) написано для полного поля u . Доказательство того, что именно при такой правой части решение имеет заданную особенность (31.18), легко получить из сопоставления с (17.3) и (17.4в). Так как поле должно представлять собой совокупность волн, уходящих от начала координат, то при $z > 0$ оно записывается в виде ряда (31.35), при $z < 0$ — в виде такого же ряда с противоположным знаком h_n .

Для определения какого-либо коэффициента A_m надо применить формулу Грина (18.5а) — скалярный аналог леммы Лоренца (18.5б), примененной в § 23 — к искомому полю u и *вспомогательному полю* — полю встречной волны, которое мы обозначим $u^{-m} = J_0(\alpha_m r) e^{ih_m z}$. Интегрирование надо произвести по области, ограниченной поверхностью цилиндра и двумя сечениями $z = z_1$ и $z = z_2$, где $z_1 < 0$ и $z_2 > 0$. Поверхностный интеграл в (18.5а), взятый по боковой поверхности цилиндра, исчезнет, так как $u(a, z) = 0$ и $u^{-m}(a, z) = 0$. Будет равен нулю и интеграл по левому сечению $z = z_1$. Действительно, он равен сумме таких же интегралов, взятых по всем волнам, идущим налево, и все слагаемые, кроме члена с $\exp(ih_m z)$, равны нулю из-за ортогональности при $n \neq m$ функций $J_0(\alpha_n r)$ и $J_0(\alpha_m r)$ на сечении, а m -й член равен нулю тождественно. В интеграле по правому сечению $z = z_2$ члены

с $n \neq m$ тоже дадут нуль, а m -й член останется, так как соответствующее слагаемое в (31.35) содержит h_m со знаком, противоположным знаку вспомогательного поля. Таким образом, левая часть (18.5а) будет равна коэффициенту A_m , умноженному на $2ih_m \int J_1^2(\alpha_m r) dS$; при условии (31.33) этот интеграл равен $\frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_m a)$. Правая часть (18.5а) согласно (31.38) равна -4π . Таким образом получаем выражение (31.37) для A_m .

Этот аппарат, разумеется, проще интегрирования в плоскости комплексного переменного, однако он применим только в том случае, если существует и известна полная система собственных волн.

§ 32. Возбуждение диэлектрического цилиндра элементарным диполем, расположенным на его оси

1. Поле, создаваемое диполем, выражается через z -ю компоненту электрического вектора Герца. При симметричном возбуждении эта функция не зависит от азимутального угла φ , $\Pi_z^{(e)} = u(r, z)$, и удовлетворяет внутри цилиндра волновому уравнению

$$\Delta u + k^2 \epsilon u = 0, \quad r < a, \quad (32.1a)$$

и вне цилиндра — уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad r > a, \quad (32.1b)$$

где a — радиус цилиндра. Ток элементарного диполя мы пронормируем, как и в предыдущем параграфе, таким образом, чтобы в начале координат функции $u(r, z)$ имела особенность $1/\rho$. Положим

$$u_{\text{пад}} = \frac{e^{-ik\sqrt{\epsilon}\rho}}{\rho}; \quad (32.2)$$

тогда $u_{\text{пад}}$ будет удовлетворять уравнению (32.1а), и $u_{\text{лнф}}$ тоже должно будет удовлетворять этому уравнению.

Тангенциальные к поверхности цилиндра компоненты полей E_z и H_φ выражаются через u по формулам

$$E_z = k^2 \epsilon u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad H_\varphi = -ik\epsilon \frac{\partial u}{\partial r}, \quad r < a \quad (32.3)$$

и таким же формулам с $\epsilon=1$ при $r>a$. Эти формулы являются естественным обобщением формул (13.1) для полей, зависимость которых от z не определяется (8.1); их можно проверить прямой подстановкой в уравнения Максвелла.

При $r=a$ u должно удовлетворять граничным условиям

$$k^2 \epsilon u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{r=a-0} = k^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{r=a+0}, \quad (32.4a)$$

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a-0} = \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a+0}. \quad (32.4б)$$

Решение поставленной задачи производится по той же схеме, что и задачи о возбуждении волновода. Поле сферической волны $u^{\text{пад}}$ представим в виде интеграла Фурье по цилиндрическим волнам

$$u^{\text{пад}} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(\tau r) e^{-ihz} dh, \quad \tau^2 = k^2 \epsilon - h^2. \quad (32.5)$$

На плоскости комплексного переменного h проведены разрезы

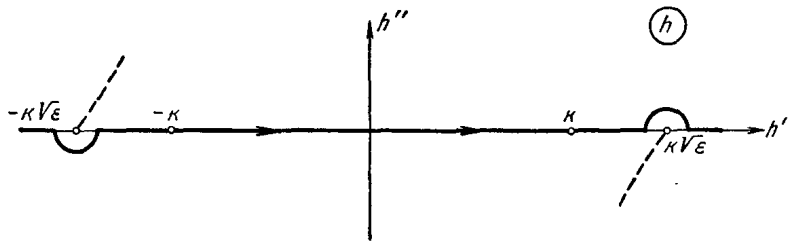


Рис. 27. Плоскость комплексного переменного для формулы (32.5).

от точек $h = \pm k\sqrt{\epsilon}$, как показано на рис. 27; величина τ играет при этом такую же роль, как α в (31.24).

Полное поле мы будем искать в виде

$$u(r, z) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(\tau r) e^{-ihz} dh + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(h) J_0(\tau r) e^{-ihz} dh, \quad r < a, \quad (32.6a)$$

$$u(r, z) = \int f_2(h) H_0^{(2)}(\alpha r) e^{-ihz} dh, \quad r > a. \quad (32.6б)$$

При такой записи волновые уравнения будут выполняться при любых функциях $f_1(h)$ и $f_2(h)$, как для $r < a$, так и для $r > a$. Будут выполнены также условия конечности дифракционного поля при $r=0$ и отсутствия во внешнем поле волн, приходящих из $r=\infty$ к $r=0$. Плоскость комплексного переменного для $u(r, z)$ при $r > a$ имеет, очевидно, разрезы, начинающиеся с точек ветвления $\alpha=0$.

Граничные условия (32.4) должны выполняться при всех z ; повторяя соображение, позволившее нам получить (31.31), и производя дифференцирование по z под знаком интеграла, получим два уравнения для функций $f_1(h)$ и $f_2(h)$:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \tau^3 H_0^{(2)}(\tau a) + \tau^3 f_1(h) J_0(\tau a) &= \alpha^3 f_2(h) H_0^{(2)}(\alpha a), \\ \frac{i}{2} \varepsilon \tau H_0^{(2)'}(\tau a) + \varepsilon \tau f_1(h) J_0'(\tau a) &= \alpha f_2(h) H_0^{(2)'}(\alpha a). \end{aligned} \quad (32.7)$$

Мы не будем выписывать в явном виде решения для $f_1(h)$ и $f_2(h)$, а запишем их в виде

$$f_1(h) = \frac{D_1(h)}{D_0(h)}, \quad f_2(h) = \frac{D_2(h)}{D_0(h)}. \quad (32.8)$$

Знаменатель $D_0(h)$ равен, очевидно, детерминанту, получающемуся, если отбросить в (32.7) свободные члены, т. е. первые слагаемые, не содержащие $f_1(h)$ и $f_2(h)$. Уравнение

$$D_0(h) = 0 \quad (32.9)$$

только несущественными множителями отличается от дисперсионного уравнения (13.7) для собственных симметричных электрических волн, которые могут распространяться вдоль диэлектрического цилиндра. В этом отношении подынтегральные функции в (32.6) аналогичны подынтегральной функции в (31.30); они имеют полюсы при тех значениях параметра h , которые являются корнями соответствующих характеристических уравнений для собственных волн. Это является общим правилом в задачах такого типа, так как определение неизвестных амплитудных функций $f(h)$ всегда сводится к решению неоднородных линейных алгебраических уравнений типа (31.31) или (32.7), а эти решения обращаются в бесконечность для тех значений коэффициентов, для которых однородные уравнения имеют нетривиальные решения.

Уравнение (32.9) имеет конечное количество корней h_n — число их зависит согласно § 13 от величины $ka\sqrt{\varepsilon-1}$, и все они лежат в интервале (13.8) и в симметричном интервале

$$-k\sqrt{\varepsilon} < h_n < -k, \quad k < h_n < k\sqrt{\varepsilon}. \quad (32.10)$$

Контур интегрирования надо проводить, как и в задаче о волноводе, таким образом, чтобы положительные корни лежали под контуром, а отрицательные — над ним. Это следует из требования об отсутствии приходящих из $z = +\infty$ и $z = -\infty$ волн и из того, что вблизи цилиндра,

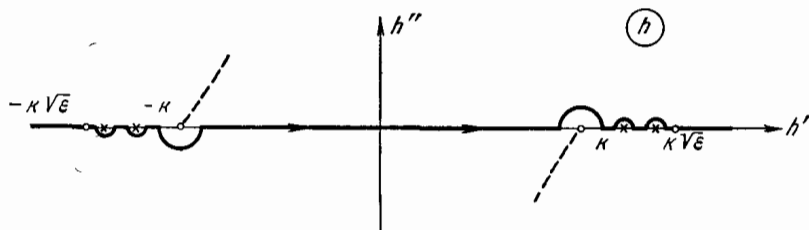


Рис. 28. Плоскость комплексного переменного для формулы (32.6).

как мы сейчас покажем, поле выражается в виде ряда по собственным волнам.

Заметим, наконец, что подынтегральные функции в интегралах Фурье (32.6) для полных полей не испытывают скачка при переходе через разрезы, идущие от точек $\tau=0$; это можно проверить прямым вычислением, используя для $H_0^{(2)}(\tau r)$ представление, аналогичное (31.26). Поэтому для полного поля плоскость комплексного переменного h имеет вид, представленный на рис. 28 — два разреза, идущие из точек $\alpha=0$, т. е. $h=\pm k$, и несколько полюсов, лежащих в интервалах (32.10).

2. В предыдущем пункте было построено формальное решение поставленной задачи. Оно представлено в виде интеграла в бесконечных пределах.

Простые аналитические выражения для u можно получить только для точек, далеких от источника; как мы сейчас увидим, для этих точек удастся преобразовать интегралы (32.6) таким образом, что существенной оказывается только *малая часть всего контура интегрирования*. Преобразования,

которые нужно производить, будут различными для различных областей пространства. В этом пункте мы получим приближенные выражения для поля в цилиндре и в области, примыкающей к цилиндру.

Примем $z > 0$ и деформируем контур в полуокружность бесконечного радиуса, расположенную в нижнем полупространстве. Будем, для определенности, исследовать поле вне цилиндра, при $r > a$. Интеграл будет равен сумме вычетов в корнях уравнения (32.9) и интегралу по разрезу, который мы обозначим буквой I :

$$u(r, z) = \sum_n A_n H_0^{(2)}(\alpha_n r) e^{-i h_n z} + I. \quad (32.11)$$

Сумма содержит несколько членов — столько, сколько корней лежит в правом интервале (32.10). При низких частотах, точнее, при выполнении неравенства (13.10), в (32.11) сумма вообще отсутствует. Коэффициенты A_n равны вычетам подынтегрального выражения в полюсах

$$A_n = -2\pi i \frac{D_2(h_n)}{\left. \frac{d}{dh} D_0(h) \right|_{h=h_n}}. \quad (32.12)$$

Явное выражение для коэффициентов можно было бы найти, определяя $D_0(h)$ и $D_2(h)$ из (32.7). Для поля внутри цилиндра можно получить аналогичное выражение, также содержащее интеграл по разрезу и сумму вычетов

$$u(r, z) = \sum_n B_n J_0(\tau_n r) e^{-i h_n z} + \tilde{I}. \quad (32.13)$$

Разложение (32.11) может быть использовано для описания поля только при условии, что существует оценка или простое выражение для интеграла I . Этот интеграл имеет вид

$$I = \int_k^{-i\infty} P(\alpha r) e^{-i h z} dh, \quad (32.14)$$

где через P обозначена разность значений функции $f_2(h) H_0^{(2)}(\alpha r)$ по обе стороны разреза; очевидно, что при $\alpha = 0$, т. е. в самой точке ветвления $h = k$, $P = 0$.

Если разрез вблизи точки ветвления провести вертикально вниз, то экспоненциальный множитель примет вид

$$e^{-i h z} = e^{-i k z} \cdot e^{-t z}, \quad (32.15)$$

где t — новая переменная интегрирования, $h = k - it$, меняющаяся вдоль разреза от нуля при $h = k$ до бесконечности. В интеграле (32.14) возникнет *быстро убывающий множитель* $\exp(-tz)$, и существенный вклад в интеграл внесет только та часть его, на которой $t \lesssim 1/z$, т. е. только область, примыкающая к точке ветвления. Примем теперь, что при $t \lesssim 1/z$ выполняется также условие

$$|ar| \ll 1. \quad (32.16)$$

Легко найти *область пространства*, для которой это имеет место. Так как $kz \gg 1$, то для $t \lesssim 1/z$ будет $t \ll k$, поэтому $\alpha^2 \approx 2ikt$, и условие (32.16) дает $ktr^2 \ll 1$. Это требование выполняется на всей существенной части контура интегрирования, если

$$kr^2 \ll z. \quad (32.17)$$

Таким образом, для точек пространства, для которых одновременно с $kz \gg 1$ выполняется условие (32.17), в интеграле (32.14) можно заменить $P(ar)$ значением этой функции при $|ar| \ll 1$.

Алгебраические выкладки, которые мы опускаем, дают для $P(ar)$ при (32.16) оценку $P(ar) \approx a^2 r^2$. Поэтому зависимость интеграла (32.14) от z определяется множителем

$$I \approx e^{-ikz} \int_0^{\infty} t e^{-tz} dt = \frac{1}{z^2} e^{-ikz}. \quad (32.18)$$

При достаточно больших z этот интеграл мал. Такая же оценка оказывается справедливой для интеграла $\tilde{I}$ в (32.13).

Таким образом, в цилиндре и вблизи него, внутри области, ограниченной параболоидом вращения $kr^2 = z$, полное поле представляет собой *совокупность цилиндрических волн и дополнительного поля, быстро убывающего* при удалении от источника.

3. Выражение (32.11) не позволяет произвести фактическое вычисление поля вне области (32.17). В этой области пространства поле, как мы сейчас увидим, представляет собой не совокупности цилиндрических волн, а *сферическую волну*.

Предположим, что в интеграле (32.66) основной вклад дает участок контура интегрирования, на котором

$$|ar| \gg 1; \quad (32.19)$$

мы затем определим ту область пространства, для которого это предположение и полученные из него формулы оказываются справедливыми.

Подставляя асимптотическое выражение функции Ханкеля (13.5) и вводя сферическую систему координат ρ , θ , φ

$$z = \rho \cos \theta, \quad r = \rho \sin \theta, \quad (32.20)$$

придадим интегралу (32.66) вид

$$u(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(h) e^{-ik\rho\psi(h)} dh. \quad (32.21)$$

Здесь предэкспоненциальная функция $F(h)$ равна согласно (13.5) и (32.19)

$$F(h) = \frac{A}{\sqrt{\alpha\rho \sin \theta}} f_2(h), \quad (32.22)$$

а фаза $\psi(h)$, играющая основную роль в дальнейшем рассмотрении, имеет вид

$$\psi(h) = \frac{\alpha}{k} \sin \theta + \frac{h}{k} \cos \theta. \quad (32.23)$$

Выделив в экспоненте (32.21) множитель k , мы получили перед безразмерной фазой $\psi(h)$, имеющей всюду порядок единицы, множитель $k\rho$. Мы будем считать этот множитель большим, т. е. будем исследовать точки, далекие от источника.

Множитель $\exp[-ik\rho\psi(h)]$ в (32.21) при $k\rho \gg 1$ очень быстро меняет знак с изменением h , тем быстрее, чем больше параметр $k\rho$. Соседние участки интеграла входят поэтому с противоположными знаками и *частично компенсируют друг друга*. Компенсация будет тем более полной, чем больше параметр $k\rho$ и чем быстрее меняется фаза $\psi(h)$ с изменением h . Если на какой-либо части контура интегрирования $\psi(h)$ меняется медленнее, чем на остальном контуре, то в этой части взаимная компенсация различных элементов интеграла ослабляется, и вклад этого участка оказывается основным во всем интеграле. Интервалом, где $\psi(h)$ меняется особенно медленно, будет, очевидно, окрестность точки $h = h_s$, являющейся корнем уравнения

$$\psi'(h) = 0. \quad (32.24)$$

Таким образом, наличие перед $\psi(h)$ в экспоненте большого

множителя $k\rho$ приводит к тому, что существенной оказывается лишь *малая окрестность* корня уравнения (32.24). Корни этого уравнения называются *точками стационарной фазы*. Как показывает строгий анализ, чтобы получить старший член разложения интеграла (32.21) по обратным степеням большого параметра $k\rho$, можно заменить $\psi(h)$ двумя первыми членами ряда Тейлора около точки h_s :

$$\psi(h) = \psi(h_s) + \frac{1}{2} \psi''(h_s) (h - h_s)^2 \quad (32.25)$$

и заменить предэкспоненциальный множитель $F(h)$ его значением при $h = h_s$. Тогда (32.21) дает

$$u(\rho, \theta) = F(h_s) e^{-ik\rho\psi(h_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-i\frac{k\rho}{2} \psi''(h_s) (h - h_s)^2\right] dh. \quad (32.26)$$

Эта процедура законна, если $F(h)$ мало меняется на существенном участке интегрирования, имеющем порядок $|h - h_s| \sim \sqrt{\frac{1}{k\rho\psi''(h_s)}}$. При достаточно большом значении параметра $k\rho$ это справедливо — при $\psi''(h_s) > 0$ — для любой достаточно гладкой функции $F(h)$, в частности для (32.22).

Вычисляя интеграл в (32.26) подстановкой

$$\frac{1}{2} k\rho \psi''(h_s) (h - h_s)^2 = p^2,$$

получим искомое асимптотическое выражение для интеграла (32.21):

$$u(\rho, \theta) = \sqrt{\frac{2\pi i}{k\rho}} \frac{F(h_s)}{\sqrt{\psi''(h_s)}} e^{-ik\rho\psi(h_s)}. \quad (32.27)$$

Следующий член асимптотического разложения содержит производную от $F(h)$ в точке $h = h_s$; он будет порядка $(k\rho)^{-3/2}$.

Заметим, что если бы на всем контуре интегрирования $\psi'(h)$ не обращалось бы в нуль, то в (32.21) можно было бы произвести интегрирование по частям, и интеграл был бы порядка $1/k\rho$ или меньше. В этом случае взаимная компенсация соседних участков контура интегрирования нигде не была бы ослаблена стационарностью $\psi(h)$, и интеграл был бы много меньше, чем по (32.27).

Применим формулу (32.27) к нашей задаче, т. е. к функциям $F(h)$ и $\phi(h)$, приведенным в (32.22) и (32.23). Уравнение (32.24) для точки стационарной фазы с учетом (31.23) имеет вид

$$-\frac{h_s}{\alpha_s} \sin \theta + \cos \theta = 0. \quad (32.28)$$

Таким образом, в точке стационарной фазы

$$h_s = k \cos \theta, \quad \alpha_s = k \sin \theta. \quad (32.29)$$

Положение точки стационарной фазы на комплексной плоскости зависит от того, для какой точки пространства определяется поле.

Несколько иначе формулу (32.27) можно было бы получить, применяя не метод стационарной фазы, а так называемый *метод перевала*, и деформируя контур интегрирования вблизи точки $h = h_s$ так, как это указано пунктиром на рис. 29. Идея применения метода перевала к интегралам типа (32.21) состоит в том, чтобы, деформируя контур интегрирования, перейти к контуру, проходящему через корень уравнения (32.24) и расположенному таким образом, чтобы

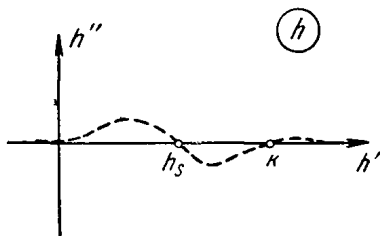


Рис. 29. Перевальный контур для формулы (32.21).

множитель $\exp[-ikr\phi(h)]$ *быстро убывал* при удалении вдоль контура в обе стороны от точки $h = h_s$. Тогда выделение этой точки и ее окрестности в интеграле будет объясняться не ослаблением компенсации близких участков интеграла, а несколько более наглядным образом — наличием множителя, очень быстро убывающего при уходе от точки $h = h_s$. В нашей задаче точка $h = h_s$ (точка перевала, или точка стационарной фазы) лежит на вещественной оси. Направление перевального контура рис. 29, образующего с вещественной осью угол $-\pi/4$, получено из требования, чтобы вдоль него величина $-i(h - h_s)^2$ была отрицательна. Введя вещественную вдоль этого контура переменную σ условием $-i(h - h_s)^2 = -\sigma^2$ и подставляя вблизи $h = h_s$ разложение (32.25), мы получим под интегралом множитель

$\exp\left[-\frac{kr\psi''(h_s)}{2}\sigma^2\right]$, который при $kr \gg 1$ и $\psi''(h_s) > 0$ имеет δ -образный характер. Метод перевала и метод стационарной фазы, таким образом, отличаются только направлением контура — в методе перевала выбирается контур, на котором вблизи h_s $\psi(h) - \psi(h_s)$ чисто мнимо, а в методе стационарной фазы эта величина должна быть вещественной.

Прежде чем вычислять входящие в (32.27) величины, установим, для каких точек пространства выполняется (32.19). Напомним, что все преобразования этого пункта справедливы только при условии, что (32.19) имеет место для основного участка контура интегрирования. Основным участком является окрестность точки стационарной фазы, и, согласно (32.29), должно выполняться условие

$$|kr \sin \theta| \gg 1. \quad (32.30)$$

Таким образом, формула (32.27) справедлива вне того же параболоида $kr^2 = z$, который мы получили в предыдущем пункте. Отметим, что область (32.30) обладает следующим свойством — прямая, выходящая из источника под любым углом $\theta \neq 0$ к оси, на достаточно большом расстоянии пересекает этот параболоид и приходит в область (32.30).

Фактическое вычисление величин $\psi(h_s)$, $\psi''(h_s)$ и $F(h_s)$ по (32.23), (32.22) и (32.29) производится элементарным образом. Прodelав несложные выкладки, мы получим явное выражение для z -й компоненты вектора Герца в дальней зоне, вдали от цилиндра:

$$u(\rho, \theta) = B \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} f_2(k \cos \theta), \quad (32.31)$$

где постоянную B легко определить. Сферические компоненты полей E_θ и H_φ получаются из u , как в (17.5) или (19.7), умножением на $k^2 \sin \theta$.

Таким образом, вдали от цилиндра образуется сферическая волна с диаграммой направленности $\sin \theta f_2(k \cos \theta)$, где $f_2(h)$ — подынтегральная функция в разложении u в интеграл Фурье. Влияние цилиндра в этой области состоит не в том, что он формирует цилиндрические волны, как в области (32.17), а в том, что он искажает диаграмму направленности диполя. В отсутствие цилиндра функция u не зависела бы от θ , как в (17.4в); зависимость от угла в диаграмме

для полей E и H определялась бы, как в (17.5), множителем $\sin \theta$. В присутствии диэлектрического цилиндра максимум излучения в сферической волне смещается в направлении к оси цилиндра. Энергия, излучаемая диполем, частично уносится сферической волной, частично — цилиндрическими волнами; распределение энергии между этими волнами определяется конкретными параметрами задачи, т. е. величинами ϵ и ka .

4. Картина поля, возникающего в различных областях пространства при возбуждении диэлектрического цилиндра симметричным электрическим диполем, сохраняется в широком классе задач о возбуждении цилиндров. В этом пункте мы коротко опишем эти задачи.

При симметричном возбуждении диэлектрического цилиндра осевым магнитным диполем $\Pi_z^{(m)} \sim \frac{e^{-ik\sqrt{\epsilon}r}}{r}$ первое граничное условие для $u = \Pi_z^{(m)}$ совпадает с (32.4а), а второе граничное условие будет отличаться от (32.4б) отсутствием ϵ . Знаменатель функций $f_1(h)$ и $f_2(h)$ (32.8) будет равен нулю при значениях h_n , удовлетворяющих характеристическому уравнению для волн H_{0q} , и в области (32.17) поле будет представлено рядом волн этого типа и убывающим дополнительным полем, аналогичным I или $\tilde{I}$.

При несимметричном возбуждении, например, при возбуждении радиальным диполем или диполем, расположенным не на оси — поля будут зависеть от азимутального угла φ и будут поэтому выражаться через две потенциальные функции, $\Pi_z^{(e)}$ и $\Pi_z^{(m)}$. Однако общая структура решения сохранится — функции $\Pi_z^{(e)}$ и $\Pi_z^{(m)}$ будут представлены (например, для $r > a$) рядами по интегралам Фурье типа

$$\sum_m e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} c_m(h) H_m^{(2)}(ar) e^{-ihz} dh, \quad (32.32)$$

и коэффициенты $c_m(h)$ будут иметь полюсы в точках, соответствующих собственным волнам с данной азимутальной зависимостью. Вновь сохранится общее деление пространства на область, где поле представляет собой сферическую волну, и область, где оно является суперпозицией цилиндрических волн и убывающего дополнительного поля. Измениться может

только скорость убывания этого дополнительного поля при удалении от источника. В формуле типа (32.18) может вместо $1/z^2$ появиться другой убывающий множитель при $\exp(-ikz)$, так как при малом $|ar|$ функция $P(ar)$ в (32.14) может иначе, не так, как в задаче этого параграфа, стремиться к нулю. Существенно, что если несимметрия возбуждения такова, что в первичном, а потому и в дифракционном, поле присутствует член с $m=1$, то подынтегральное выражение всегда, т. е. при всех частотах, имеет хотя бы один полюс; как было выяснено в § 13, при $m=1$ всегда существует так называемая дипольная волна.

Ничего принципиально нового не вносится в задачу и в том случае, если возбуждение производится не элементарным диполем, а каким-либо иным электрическим или магнитным током. Как и в антенных задачах, поле в этом случае может быть получено из полей, создаваемых элементарными диполями, интегрированием по всем источникам.

Результаты, полученные для диэлектрического цилиндра, справедливы и для задачи о возбуждении однопроводной линии. Разумеется, при этом возбуждающий ток всегда расположен вне цилиндра.

Если линия обладает таким поверхностным импедансом, что вдоль нее может распространяться поверхностная волна, то подынтегральное выражение будет иметь один полюс, совпадающий с корнем соответствующего дисперсионного уравнения, например, уравнения (14.4), если речь идет о возбуждении металлического цилиндра с конечной проводимостью. Ряд по вычетам в (32.11) состоит при этом из одного члена.

Если проводимость провода стремится к бесконечности и он теряет способность поддерживать цилиндрическую волну, то деление на область сферических и цилиндрических волн теряет смысл, поле во всей области имеет структуру сферической волны, диаграмма направленности которой обладает вытянутым вдоль цилиндра лепестком. Примененный выше математический аппарат несколько усложняется. Действительно, оказывается, что дополнительное поле I очень медленно убывает с удалением от источника, поэтому неэффективным оказывается преобразование, произведенное в п. 2. Усложняется также исследование сферической волны, так как при высокой проводимости металла полюс расположен вблизи точки $h=k$, и потому при малых θ точка стационарной

фазы $h_s = k \cos \theta$ приближается к полюсу, предэкспоненциальный множитель в (32.21) перестает быть медленно меняющейся функцией h , и применение метода стационарной фазы в форме (32.26) может оказаться незаконным. Заметим, что аналогичная ситуация возникает и в рассмотренной выше задаче о возбуждении диэлектрического стержня, если частота очень близка к критической частоте одной из возникающих волн или совпадает с ней. Мы не будем здесь останавливаться на этих специальных случаях.

§ 33. Поле диполя, расположенного вблизи плоской границы раздела двух сред

1. В задачах предыдущих двух параграфов граничные условия ставились на поверхности цилиндра, и исходным выражением было разложение сферической волны в интеграл по цилиндрическим волнам (31.24). В этой главе мы опишем несколько методов решения задачи о падении сферической волны на плоскую границу раздела двух сред. Эта задача имеет большое значение в теории распространения радиоволн и в теории возбуждения поверхностных антенн.

В этом пункте исходным будет интегральное представление сферической волны в форме (31.29) или другое выражение

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = i \int_0^{\infty} J_0(\alpha r) e^{-i\sqrt{k^2 - \alpha^2} z} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}, \quad (33.1)$$

которое получается из (31.29) переходом от переменного h к переменному α . Выделенное направление z в задачах с плоскими границами раздела в этом параграфе выбирается нормальным к границе раздела.

Если возбуждение производится *электрическим вертикальным диполем*, то поле во всем пространстве выражается через единственную отличную от нуля z -ю компоненту электрического вектора Герца $u = \Pi_z^{(e)}$ по формулам, которые легко получить из (8.10а). В частности, из выражения для тангенциальных компонент полей E_r и H_φ следует, что на границе раздела $z = \bar{z}$ двух сред, в которых диэлектри-

ческая проницаемость равна соответственно единице ($z > \bar{z}$, воздух) и ε ($z < \bar{z}$, земля), должны выполняться условия

$$\varepsilon u \Big|_{z=\bar{z}-0} = u \Big|_{z=\bar{z}+0}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\bar{z}-0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\bar{z}+0}. \quad (33.2)$$

Таким образом, задача состоит в определении функции $u(r, z)$, удовлетворяющей в обоих полупространствах волновому уравнению, представляющей собой на бесконечности совокупность уходящих волн, удовлетворяющей на плоской границе условиям (33.2) и имеющей в начале координат особенность (33.1).

Решение ищется в виде интегралов такого же типа, что и (33.1). Например, если диполь расположен на границе раздела, $\bar{z}=0$, то дифракционное поле $u^{\text{диф}}$, которое вместе с (33.1) образует полное поле, при $z > 0$, т. е. в воздухе, выражается интегралом

$$u^{\text{диф}} = \int_0^{\infty} f_1(\alpha) J_0(\alpha r) e^{-i\sqrt{k^2 - \alpha^2} z} d\alpha. \quad (33.3)$$

Подынтегральная функция при любом виде $f_1(\alpha)$ удовлетворяет волновому уравнению. При $z < 0$ поле выражается таким же интегралом, в котором только вместо k^2 стоит $k^2\varepsilon$ и изменен знак в экспоненте. Уравнения для функции $f_1(\alpha)$ и функции $f_2(\alpha)$, стоящей под интегралом для поля при $z < 0$, находятся из (33.2). Эти граничные условия приводят к соотношениям типа $\int \Phi(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = 0$. Так как они должны выполняться на всей границе раздела, т. е. при всех r , то из них следует $\Phi(\alpha) = 0$. Это будут два линейных алгебраических уравнения для $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$, аналогичных (32.7). Таким образом, метод получения формального решения в виде контурного интеграла отличается от метода первого пункта предыдущего параграфа только тем, что используется полнота системы $J_0(\alpha r)$, а не системы $\exp(-ihz)$.

Плоскость комплексного переменного α содержит четыре точки ветвления $\alpha = \pm k$, $\alpha = \pm k\sqrt{\varepsilon}$ и четыре разреза, проведенных из этих точек; кроме того, подынтегральные выражения, вообще говоря, могут иметь полюсы. Чтобы найти полюсы, достаточно, согласно предыдущему, написать диспер-

сионное уравнение для свободных, т. е. не связанных с источниками, поверхностных волн, причем можно даже рассматривать не цилиндрические волны, как в (33.3), а более простые, плоские,

$$u = Ae^{-i\sqrt{k^2 - \alpha^2}z} e^{-i\alpha x}, \quad z > 0; \quad u = Be^{i\sqrt{k^2 \epsilon - \alpha^2}z} e^{-i\alpha x}, \quad z < 0. \quad (33.4)$$

Здесь x — декартова координата вдоль поверхности, постоянная распространения обозначена буквой α , а волновые числа, описывающие изменение поля в перпендикулярном направлении, равны соответственно $(k^2 - \alpha^2)^{1/2}$ при $z > 0$ и $(k^2 \epsilon - \alpha^2)^{1/2}$ при $z < 0$.

Подставляя (33.4) в (33.2), получим

$$\alpha^2 = k^2 \frac{\epsilon}{\epsilon + 1}, \quad k^2 - \alpha^2 = \frac{k^2}{\epsilon + 1}, \quad k^2 \epsilon - \alpha^2 = \frac{k^2 \epsilon^2}{\epsilon + 1}. \quad (33.5)$$

Согласно двум последним формулам, при вещественном ϵ поверхностных волн не существует, так как поля (33.4) не убывают при удалении от границы. Поэтому полюс (33.5) будет лежать не на основном листе поверхности Римана. Заметим, что существование медленных волн вдоль диэлектрической пластинки (§ 14) обязано тому, что пластинка ограничена двумя поверхностями раздела; при одной границе не может происходить процесс последовательных полных внутренних отражений волн Бриллюэна.

Для земной поверхности ϵ — комплексная величина, и вдоль такой поверхности распространение поверхностной волны, вообще говоря, возможно, так как убывание поля с ростом $|z|$ будет обеспечено комплексностью α (33.5). Однако для земли $|\epsilon| \gg 1$, а при этом, как оказывается, *поверхностная волна диполем фактически не будет возбуждаться*. Формально это следует из того, что при $|\epsilon| \gg 1$ полюс (33.5) $\alpha \approx k(1 - 1/2\epsilon)$ очень близок к точке ветвления $\alpha = k$, и возникает примерно такая же ситуация, как и при возбуждении металлического цилиндра — выделение в полном поле вычета, т. е. поверхностной волны, не имеет смысла, так как интеграл по разрезу не мал. Физически отсутствие в полном поле поверхностной волны связано с тем, что в ней величина $(k^2 - \alpha^2)^{1/2}$ очень мала (порядка $k/\sqrt{|\epsilon|}$), так что поле поверхностной волны (33.4) очень медленно убывает с удалением от границы. Для возбуждения такой волны с заметной

амплитудой надо распределить источники таким образом, чтобы они заполняли всю ту часть плоскости $x = \text{const}$ или оси $r = 0$, на которой поле этой волны не мало, т. е. чтобы они были распределены до очень большой высоты над земной поверхностью (порядка $\sqrt{|\epsilon|}/k$). Элементарный диполь возбудит только сферическую волну, искаженную присутствием земли. В последнем пункте этого параграфа мы найдем поле этой волны вблизи земной поверхности, исходя не из формального решения в виде интеграла в плоскости комплексного переменного, а другим методом.

Весь материал этого пункта может быть перенесен на задачи о возбуждении плоской импедансной поверхности. Вместо граничного условия типа (33.2) на таких поверхностях ставятся граничные условия, связывающие поля и их производные с *одной стороны* поверхности. Аппарат оказывается значительно более простым, так как приходится рассматривать одну область пространства ($z > \bar{z}$) и соответственно одну подынтегральную функцию $f_1(\alpha)$. Если импедансная поверхность может поддерживать поверхностную волну, то эта функция имеет полюс, и вычет в нем дает амплитуду этой поверхностной волны. Как и для цилиндра, она существует только вблизи поверхности, а если импеданс мал, как, например, для земной поверхности, которую при $|\epsilon| \gg 1$ можно характеризовать поверхностным импедансом $w = \sqrt{1/\epsilon}$, $|w| \ll 1$, то эта поверхностная волна фактически не формируется. Поле в дальней зоне находится методом стационарной фазы или методом перевала.

2. Вариантом описанного выше метода является аппарат, основанный на *разложении сферической волны* $\frac{\exp(-ik\rho)}{\rho}$ на *плоские волны*. Падение каждой плоской волны на плоскую границу раздела приводит к появлению плоских отраженной и преломленной волн, и полное поле складывается из всех этих волн. Точно так же очень простой является задача о падении плоской волны на импедансную плоскость. Разложение на плоские волны является примером общей идеи, изложенной в § 31: падающее поле представляется в виде наложения волн, геометрическая структура которых соответствует геометрической структуре тела, на котором происходит дифракция.

Разложение функции $\frac{\exp(-ik\rho)}{\rho}$ в тройной интеграл Фурье

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k_x, k_y, k_z) \exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)] dk_x dk_y dk_z \end{aligned} \quad (33.6)$$

представляет собой, по существу, искомое представление, так как функция $\exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)]$ описывает плоскую волну с направляющими косинусами нормали k_x/k , k_y/k , k_z/k . Однако определение $B(k_x, k_y, k_z)$ из обращения (33.6) связано с некоторыми трудностями. Более простой оказывается следующая схема — в ряд Фурье разлагается функция $\frac{\exp(-ikr)}{r}$, где $r^2 = x^2 + y^2$, т. е. функция двух переменных, получающаяся из (33.6) при $z=0$, а затем поле во всем пространстве находится по полю на плоскости $z=0$. Разложение

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (33.7)$$

легко обращается, так как интеграл

$$A(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (33.8)$$

вычисляется элементарным образом. Введем в плоскости $z=0$ цилиндрическую систему координат $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$; тогда

$$A(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ir(k - k_x \cos \varphi - k_y \sin \varphi)} dr d\varphi. \quad (33.9)$$

Для обеспечения сходимости интеграла по r при $r=\infty$ надо принять, что k имеет малую мнимую часть. Тогда ин-

тегрирование в (33.9) легко произвести, сначала по r , затем по φ и, подставляя $A(k_x, k_y)$ в (33.7), получим

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(k_x x + k_y y)}}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y. \quad (33.10)$$

Для продления этого разложения в область вне плоскости $z=0$ примем во внимание, что стоящая в (33.6) функция удовлетворяет волновому уравнению, так что задача состоит в решении граничной задачи: нужно найти решение волнового уравнения по его значению на плоскости. Мы решим ее так же, как в § 30, приписав каждой компоненте Фурье в (33.10) множитель $\exp(-ihz)$, где, по определению,

$$h^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2. \quad (33.11)$$

При условии (33.11) функция

$$e^{-i(k_x x + k_y y + hz)} \quad (33.12)$$

удовлетворяет волновому уравнению. Таким образом, получается искомого разложение

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} e^{-i(k_x x + k_y y + hz)} dk_x dk_y, \quad (33.13)$$

справедливость которого следует из того, что обе стороны этого равенства удовлетворяют волновому уравнению и при $z=0$, согласно (33.10), совпадают. Формула (33.13) написана для $z > 0$, при $z < 0$ перед h в экспоненте надо изменить знак.

Сферическая волна представляется двойным, а не тройным интегралом Фурье, как было предположено в (33.7). Уменьшение кратности интеграла в (33.7) связано с тем, что функция $B(k_x, k_y, k_z)$ обращается в бесконечность при $k_z = h$, где h определено в (33.11), т. е. при $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$, и в ней можно выделить множитель типа δ -функции от разности $k_z - h$ и произвести фактическое интегрирование по k_z . Формулу (33.13) можно было бы получить и этим прямым путем.

В разложении (33.13) интегрирование по k_x и k_y производится по всей бесконечной плоскости k_x, k_y . В круге $k_x^2 + k_y^2 < k^2$ величина h вещественна, и функция (33.12)

представляет собой плоскую волну, направление распространения которой составляет с выделенной осью z угол β , определяемый равенством

$$h = k \cos \beta. \quad (33.14a)$$

Обозначим угол, составляемый проекцией нормали этой волны на плоскость x, y с осями x и y , через μ , так что

$$k_x = \alpha \cos \mu, \quad k_y = \alpha \sin \mu, \quad (33.14b)$$

где $\alpha = k \sin \beta$.

При $h^2 > 0$ (33.12) — обычная плоская волна, направление распространения которой в сферической системе координат определяется вещественными углами β и μ .

При k_x, k_y , лежащих на плоскости k_x, k_y вне окружности $k_x^2 + k_y^2 = k^2$, величина h — мнимая; (33.12) представляет при этом *неоднородную*, т. е. *затухающую* в направлении z плоскую волну. Если и при таких k_x, k_y ввести углы β и μ , как новые переменные вместо k_x и k_y , то угол β будет *комплексным*.

Таким образом, сферическую волну действительно можно представить как наложение плоских волн, однако среди них будут присутствовать также затухающие плоские волны, которые формально описываются формулами (33.12) и (33.11) при $h^2 < 0$ и которые можно трактовать как волны, направление распространения которых образует комплексные углы с осями координат. Без источника такие волны невозможны, так как поле каждой из них в каком-либо одном направлении ($+z$ или $-z$) стремится к бесконечности. При наличии источника их совокупность должна иметь особенность в точке, где он расположен.

Местные, или затухающие, неоднородные волны встречаются не только при описании поля сферической волны. По существу, мы получили такие волны уже при решении граничной задачи по методу § 30. В (30.2) интегрирование происходит по всем α , включая $|\alpha| > k$, и поле $u(x, z)$ было представлено в виде суперпозиции плоских волн, включающей и затухающие волны. Для квазиоптических пучков $f(\alpha)$ отлично от нуля только при $|\alpha| \ll k$, и таких волн фактически нет. Однако они создаются около любой антенны, если поле на апертуре $u(x, 0)$ (30.1) содержит высокие, порядка k и выше, компоненты Фурье. Другими словами,

если поле быстро меняется вдоль апертуры, с масштабом, меньшим длины волны, то вблизи апертуры возникнут нераспространяющиеся, местные волны. Формально это следует из того, что при этом фурье-ображение поля $u(x, 0)$, т. е. функция $f(\alpha)$, будет отлично от нуля для $|\alpha| > k$. Такие волны имеют большое значение в теории антенн.

Вернемся к задаче о сферической волне. Заметим, что из (33.13) легко получить формулы (31.29) и (33.1). Перейдем для этого от интегрирования по вещественным переменным k_x, k_y к интегрированию по переменным α и μ . Подставим для координат x и y их выражения через радиус r и цилиндрический угол φ , т. е. положим $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Напомним, что (r, φ) — цилиндрическая система координат в обычном пространстве, а (α, μ) — цилиндрическая система координат в пространстве волновых векторов и что в (33.13) интегрирование происходит в плоскости k_x, k_y , лежащей в этом последнем пространстве. Так как $dk_x dk_y = \alpha d\alpha d\mu$, то при $z > 0$

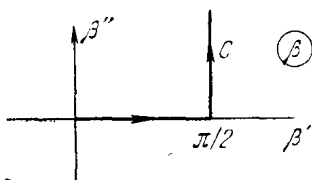


Рис. 30. Плоскость комплексного переменного β .

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-ihz} e^{-iar \cos(\mu - \varphi)} \frac{\alpha d\alpha}{h} d\mu. \quad (33.15a)$$

Интеграл по μ можно взять, и тогда, согласно (27.12) получим

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = i \int_0^\infty J_0(\alpha r) e^{-ihz} \frac{\alpha d\alpha}{h}, \quad (33.15b)$$

что совпадает с (33.1). Можно было бы, разумеется, получить (33.13) из (33.1), а не из двойного интеграла Фурье, как в этом пункте.

В (33.15) интегрирование производится по α от $\alpha = 0$ до $\alpha = \infty$. Часто производят интегрирование по углу β , введенному формулами (33.14). При этом надо вводить *плоскость комплексного переменного β* , и уже первоначальный контур проходит не по вещественной оси в этой плоскости, а по ломаной линии (рис. 30), начинающейся в точке $\beta = 0$,

проходящей отрезок вещественной оси до $\beta = \pi/2$ и затем уходящей вертикально вверх в верхнюю полуплоскость. Горизонтальный участок интеграла по β соответствует участку интеграла по α от $\alpha = 0$ до $\alpha = k$. На вертикальном участке $\beta = \pi/2 + it$, где t меняется от $t = 0$ до $t = \infty$. На этом участке, как легко получить из формул Эйлера, $\alpha = k \operatorname{ch} t$ и меняется от $\alpha = k$ до $\alpha = \infty$, а $h = -ik \operatorname{sh} t$ и меняется от $h = 0$ до $h = -i\infty$.

Переходя в (33.15) от переменной α к переменной β и обозначая через C описанный выше контур в плоскости переменного β , получим два других эквивалентных представления сферической волны:

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = \frac{ik}{2\pi} \int_C \int_0^{2\pi} e^{-ikr \sin \beta \cos \mu - ikz \cos \beta \sin \beta} d\beta d\mu, \quad (33.16a)$$

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = ik \int_C J_0(kr \sin \beta) e^{-ikz \cos \beta \sin \beta} d\beta. \quad (33.16b)$$

3. Переход от разложения (33.1) к разложениям предыдущего пункта позволяет общим и очень простым методом находить формальное решение ряда задач о падении сферической волны на плоские границы раздела, в частности, на слоистые среды, содержащие несколько границ раздела. Существенным при этом является понятие *коэффициентов отражения и прохождения Френеля для комплексных углов падения*.

Простейшей задачей этого типа будет задача о поле сферической волны, падающей на импедансную поверхность. Пусть уравнение поверхности будет $z = \bar{z}$, $\bar{z} < 0$. Каждая плоская волна, падающая под углом падения β , отражается под тем же углом с некоторым коэффициентом отражения $R(\beta)$. Для определения функции $R(\beta)$ надо решить простую задачу о нахождении такой суперпозиции двух плоских волн, которая обеспечит выполнение граничного условия. Формально решение этой задачи не зависит от того, является ли β вещественной или комплексной величиной, т. е. будет ли $\sin \beta$ меньше или больше единицы.

Падающие на поверхность волны приобретают множитель $\exp(ik\bar{z} \cos \beta)$, отраженные — дополнительный множитель $R(\beta)$,

и полное поле будет

$$u = \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} + \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_C e^{-ikr \sin \beta \cos \mu - ikz \cos \beta + ik\bar{z} \cos \beta} R(\beta) \sin \beta d\beta d\mu. \quad (33.17)$$

Для изотропной поверхности $R(\beta)$ не зависит от азимутального угла μ , и в этой формуле, как и в (33.166), можно произвести интегрирование по μ и перейти к однократному интегралу по β . Если $R(\beta)$ — постоянное число, как для металлической поверхности, то его можно вынести из-под знака интеграла, и второе слагаемое в (33.17) будет представлять собой просто поле зеркально отраженного источника.

Гибкость изложенного метода основана на том, что функция $R(\beta)$ может быть найдена, точно или приближенно, для весьма сложных слоистых сред. Определение этой функции представляет собой независимую задачу для плоской волны, и формальное решение для сферической волны затем сразу получается по указанной выше схеме. Таким же образом суммируются и поля преломленных волн.

Исследование интегралов типа (33.17) производится по тому же методу, что и в предыдущем параграфе, только не в плоскости комплексного h , а в плоскости комплексного угла β . Полюсы подынтегральной функции соответствуют поверхностным волнам. Следовательно, существует простая связь между коэффициентом отражения Френеля и поверхностными волнами — если $k \sin \beta_0$ есть фазовая постоянная поверхностной волны, то для $\beta = \beta_0$ коэффициент отражения Френеля обращается в бесконечность, $1/R(\beta_0) = 0$. Так как фазовая постоянная медленных волн всегда больше k , то полюсы могут быть только при комплексных значениях β_0 . Амплитуда поверхностной волны, т. е. вычет подынтегральной функции в (33.17), тем меньше, чем выше поднят источник над поверхностью — это следует из того, что вычет содержит согласно (33.17) множитель $\exp(ik\bar{z} \cos \beta_0)$, который экспоненциально убывает с ростом $|z|$.

Для импедансной поверхности с малым импедансом w , $|w| \ll 1$ исследование интегралов в плоскости β приводит к таким же трудностям, как и исследование интегралов в

плоскостях h и a . Как мы уже указывали, задача о возбуждении диполем импедансной поверхности с $|\omega| \ll 1$ представляет большой интерес в теории распространения радиоволн вдоль земной поверхности. В следующем пункте мы опишем, как производится решение этой задачи по методу параболического уравнения, который в этом случае значительно проще, чем интегрирование в плоскости комплексного переменного.

Заметим, что сам метод параболического уравнения впервые был предложен именно для этой задачи *).

4. Поле *вертикального электрического диполя*, расположенного на *импедансной границе с малым импедансом*, близко к полю диполя на идеальном металле. Поле диполя, расположенного на границе металла, очевидно только постоянным множителем отличается от поля диполя в пустоте. Будем искать поле диполя над импедансной поверхностью в виде

$$u = 2A(r, z) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}. \quad (33.18)$$

Здесь в качестве u удобно принять вертикальную, z -ю компоненту электрического поля, $u = E_z$. Функция $A(r, z)$ есть так называемый *множитель ослабления*, который показывает, к какому возмущению поля приводит конечная проводимость земной поверхности. Задача состоит в определении функции A .

Отметим, во-первых, что граничное условие Леонтовича (7.11), связывающее тангенциальные компоненты E и H , приводит к простому граничному условию третьего рода для u . Действительно, подставляя в формулу $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ значения E_x и E_y по (7.11) и считая ω величиной постоянной либо мало меняющейся на расстоянии порядка длины волны, получим

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\omega \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (33.19)$$

Здесь H и E — поля в воздухе; для них согласно уравнению Максвелла $\operatorname{rot} H = ikE$, стоящая в скобках величина равна ikE_z , так что граничное условие для $u = E_z$, практически

*) М. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ. 8, 16 (1944).

эквивалентное граничному условию Леонтовича, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -i \frac{k}{\sqrt{\epsilon}} u. \quad (33.20)$$

Так как для земли всегда $\mu = 1$, то можно вместо w писать просто $1/\sqrt{\epsilon}$.

Таким образом, $A(r, z)$ должно быть найдено из требования, чтобы u , определенное в (33.18), удовлетворяло волновому уравнению, имело требуемую особенность при $\rho \rightarrow 0$, при $z = 0$ удовлетворяло граничному условию (33.20) и не содержало приходящих волн.

Граничное условие (33.20) означает, что вблизи плоскости $z = 0$ поле по вертикали изменяется медленно. Следовательно, вдоль границы оно изменяется примерно так же, как в однородной плоской волне в свободном пространстве. Поэтому экспоненциальный множитель в (33.18) правильно передает быстрые изменения поля, и (33.18) представляет собой типичное в методе параболического уравнения разбиение решения на два множителя — быстро и медленно меняющиеся. Это соображение оказывается достаточным для определения *масштабов изменения* медленно меняющегося множителя в направлениях r и z .

Обозначим масштабы изменения $A(r, z)$ в направлениях r и z через L_r и L_z . Вблизи поверхности земли (а мы будем интересоваться именно этой областью) множитель $\exp(-ik\rho)$ в (33.18) близок к $\exp(-ikr)$, поэтому r является тем выделенным направлением, вдоль которого $A(r, z)$ должно меняться особенно медленно, так что должно быть $L_r \gg L_z \gg 1/k$. В обозначениях этого пункта формула (30.13) дает

$$L_r = kL_z^2. \quad (33.21a)$$

Напомним, что существование такой связи между масштабами доказывается тем, что в безразмерных переменных

$$r' = \frac{r}{L_r}, \quad z' = \frac{z}{L_z} \quad (33.22)$$

член $\partial^2 A / \partial r'^2$ имеет малый множитель $(L_z/L_r)^2$, и после отбрасывания этого слагаемого уравнение не содержит никаких, больших или малых, параметров.

Однако малый параметр содержится в граничном условии (33.20), и второе уравнение для масштабов мы найдем из

требования, чтобы граничное условие в безразмерных переменных тоже не содержало никаких больших или малых параметров. Записав (33.20) в переменных r' , z' , получим

$$\frac{\partial u}{\partial z'} = -\frac{ikL_z}{\sqrt{\epsilon}} u. \quad (33.23)$$

Примем теперь

$$\frac{kL_z}{\sqrt{\epsilon}} = 1. \quad (33.216)$$

Тогда

$$L_r = \frac{\epsilon}{k}, \quad L_z = \frac{\sqrt{\epsilon}}{k}. \quad (33.21в)$$

Можно было бы избежать введения комплексных масштабов, заменив в (33.216) ϵ на $|\epsilon|$, но это несколько усложнило бы форму граничного условия (33.25).

Таким образом, множитель ослабления является функцией двух безразмерных переменных

$$r' = \frac{kr}{\epsilon}, \quad z' = \frac{kz}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (33.24)$$

Он удовлетворяет при $z' = 0$ граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial z'} = -iu \quad (33.25)$$

и является решением параболического уравнения, получающегося при подстановке (33.18) в волновое уравнение и отбрасывании в полученном эллиптическом уравнении для A второй производной $\partial^2 A / \partial r'^2$. Существенная особенность этого рассуждения состоит в том, что характер решения находится без вычислений, только из анализа условий задачи.

Определение самой функции $A(r', z')$ представляет собой относительно несложную задачу. Параболическое уравнение, которому оно удовлетворяет всюду, кроме непосредственной близости к диполю, имеет вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z'^2} - 2i \left(\frac{\partial A}{\partial r'} + \frac{z'}{r'} \frac{\partial A}{\partial z'} \right) = 0. \quad (33.26)$$

Как обычно при решении параболических уравнений, ищутся сначала его частные решения, для чего надо произвести подстановку $A(r', z') = B(r', z') \exp(iz'^2/2r')$; в урав-

нении для B переменные разделяются. Частные решения содержат так называемый параметр разделения. Полное решение ищется в виде интеграла по этому параметру от произведения частного решения на некоторую функцию параметра. Эта функция и контур интегрирования определяются затем из (33.25) и условия вблизи источника, состоящего в том, чтобы разность $|A(r', z') - 1|$ достаточно быстро убывала. В результате получается известная формула для множителя ослабления, которую мы приведем для точек на земной поверхности:

$$A(\bar{r}, 0) = 1 - 2e^{-\bar{r}} \sqrt{\bar{r}} \int_{-i\infty}^{\sqrt{\bar{r}}} e^{t^2} dt. \quad (33.27)$$

В этой формуле введена вместо r' величина $\bar{r} = -ir'/2$, равная $-ikr/2\varepsilon$ — так называемое *численное расстояние*, которое при $\varepsilon = -i\varepsilon''$ чисто вещественно. При $|\bar{r}| \rightarrow 0$ $A(\bar{r}, 0) \rightarrow 1$, как и следует из смысла формулы (33.18). При $|\bar{r}| \gg 1$ A убывает как $-1/2\bar{r}$ — с такой скоростью убывает амплитуда сферической волны $\frac{\exp(-ik\rho)}{\rho}$ вследствие конечной проводимости земной поверхности. Согласно (33.24) изменение функции ослабления в вертикальном направлении происходит в $\sqrt{|\varepsilon|}$ раз быстрее, чем в горизонтальном.

Заметим в заключение, что метод параболического уравнения был применен и для определения *поля диполя над сферической неидеальной землей*. В этой задаче имеется два больших параметра — $|\varepsilon|$ и ka , где a — радиус земли. Чтобы получить параболическое уравнение для медленно меняющегося множителя A в (33.18), надо связать масштабы изменения множителя A в вертикальном L_R и горизонтальном L_θ (вдоль поверхности земли) направлениях таким соотношением, чтобы из уравнения, записанного в безразмерных переменных, выпал параметр ka . Для этого достаточно выбрать L_θ и L_R таким образом, чтобы уравнение горизонта, т. е. связь между координатами точек, лежащих на горизонте, не содержало ka . В сферических координатах (R, θ) (рис. 31) уравнение горизонта имеет вид $R \cos \theta = a$. Обозначим безразмерные координаты, отсчитываемые вдоль поверхности земли и по вертикали, через R' и θ' , определив их так, что

$$R = a + L_R R', \quad a\theta = L_\theta \theta'. \quad (33.28)$$

Тогда уравнение горизонта при $\theta \ll 1$, $R - a \ll a$ будет

$$R' = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{aL_R} \theta^2. \quad (33.29)$$

Масштаб изменения A с высотой и расстоянием определяется, таким образом, из двух условий:

$$\frac{L_0^2}{aL_R} = 1, \quad (33.30a)$$

$$L_0 = kL_R. \quad (33.30b)$$

Второе из них эквивалентно (33.21a); оно учитывает то обстоятельство, что вблизи земли быстрое изменение происходит в направлении θ и правильно описывается множителем $\exp(-ik\rho)$.

Таким образом, кривизна Земли приводит к тому, что предэкспоненциальный множитель в поле диполя вдоль земли изменяется с масштабом $L_0 = (a^2/k)^{1/3}$, а в вертикальном направлении — значительно быстрее, с масштабом

$$L_R = (a/k^2)^{1/3}, \quad L_R \ll L_0 \ll 1/k.$$

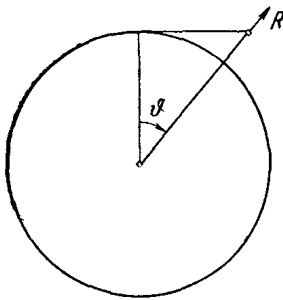


Рис. 31. Сферическая Земля.

В частности, переход от освещенной части к неосвещенной, который в приближении геометрической оптики ($k \rightarrow \infty$) происходит скачком на границе тени, занимает область полутени, имеющей ширину L_0 . В § 22 мы указывали, что этот результат, а также и само решение, описывающее переход от тени к свету, имеет универсальный характер, т. е. справедлив для любого выпуклого тела с большим радиусом кривизны a .

Параболическое уравнение и его решения имеют для сферической земли довольно сложный вид, и мы не будем их приводить. Сделаем только одно замечание о граничном условии. Оно содержит ε и k примерно в той же форме, что и (33.20), и после перехода к безразмерной координате R' в него, очевидно, войдет параметр $kL_R/\sqrt{\varepsilon}$, равный отношению двух больших параметров задачи:

$$q = \frac{(ka)^{1/3}}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (33.31)$$

Получить граничное условие, не содержащее параметров, подобно тому как это удается для плоской земли, в данном случае невозможно, так как масштабы изменения поля определяются не граничным условием, а кривизной земли. Величина параметра $|q|$ показывает, в какой степени влияет ее конечная проводимость. Если $|q| \ll 1$, т. е. $V|\varepsilon| \gg (ka)^{1/3}$, то влияние конечной проводимости невелико, изменение поля происходит примерно так же, как для идеально проводящей земли и определяется кривизной земли, как это и было предположено в (33.30). При $|q| \approx 1$ оба фактора имеют примерно одинаковое значение. Если $|q| \gg 1$, т. е. граничное условие содержит большой параметр, то функция A не будет, вместе со своими производными, иметь порядок единицы. Другими словами, масштаб изменения A с θ и R не определяется в этом случае (33.30a). Условие $|q| \gg 1$ означает, что из двух причин, вызывающих изменение A , большую роль играет конечная проводимость земли, т. е. имеют место примерно те же условия, что и для плоской земной поверхности ($a = \infty$). Тогда и масштаб всего процесса будет определяться значением $|\varepsilon|$, т. е. будет даваться формулами (33.21в), а кривизна земли лишь несколько изменит вид медленно меняющегося множителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд-во АН СССР, 1957.
 2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд-во «Сов. радио», 1957.
 3. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Изд-во ВКАС, 1949.
 4. В. В. Никольский, Теория электромагнитного поля, Изд-во «Высшая школа», 1961.
 5. А. А. Семенов, Теория электромагнитных волн, Изд-во МГУ, 1962.
 6. Дж. Страттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
 7. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, Изд-во АН СССР, 1961.
 8. Н. Н. Федоров, Основы электродинамики, Изд-во «Высшая школа», 1965.
 9. Х. Хенл, А. Мауэр, К. Вестфаль, Теория дифракции, Изд-во «Мир», 1964.
 10. Я. Д. Ширман, Радиоволноводы и объемные резонаторы, Связьиздат, 1959.
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Акустические волны 21
- Анизотропная импедансная поверхность 96
- Анизотропные среды 8

- Бесконечные двумерные квадратичные корректоры 163
- линзы 163
- Быстрые волны 44

- Векторная функция Грина 109
- Векторы Герца 46
- Волна Зоммерфельда 89
- Волноводы круглого сечения 62
- прямоугольного сечения 55
- Волновое сопротивление среды 24
- уравнение 19
- число 14, 43
- Волны Бриллюэна 59
- магнитного типа (см. магнитные волны)
- электрического типа (см. электрические волны)
- Входящая проводимость щели 131
- Вырождение типов колебаний в конфокальном резонаторе 185

- Гофра 93
- Гофрированный цилиндр 96
- Граница раздела двух сред 9
- Граничное условие Леонтовича 37, 40, 72
- — —, условия применимости 37
- Граничные условия 26
- Групповая скорость 54, 61

- Дальняя зона 106, 112
- Двухпроводная линия 66
- Диаграмма направленности 114
- Диафрагменная линия 169
- Дипольная волна 84, 90
- Диэлектрическая проницаемость металлов 34
- Диэлектрический стержень 77, 166
- —, условия на бесконечности 78
- Добротность 147

- Закрытые объемные резонаторы 137
- Затухание волноводных волн 72
- Зеркальная линия 173

- Изотропные среды 8
- Импедансные граничные условия 93

- Кабельные волны 66, 92
- Канал в безграничном диэлектрике 85
- Квадратичные неконфокальные корректоры 168
- Коаксиальный кабель (см. двухпроводная линия)
- Комплексная амплитуда 11
- диэлектрическая проницаемость 14
- Конфокальная система линз 164
- Концентрическая система зеркал 182
- Коэффициент затухания волноводных волн 74
- Критическая длина волны 53
- частота 52

Лемма Лоренца 110, 117
— —, условия применимости 118
Линзовая линия 153

Магнитные волны 49, 55, 69, 138
— токи 117, 123
Магнитный диполь 111
— вектор Герца 47
Материальные уравнения 7
Медленные волны 44, 82, 94
Мембранные функции 51
Местные волны 57, 228
Металлический цилиндр 86
Метод параболического уравнения 190
Множитель ослабления 232, 235

Неоднородные плоские волны 43
Неотражающие покрытия 26
Несимметричные полосковые линии 71
Нормировка мембранных функций 51

Основная магнитная волна 56

Падение плоской волны на металлический цилиндр 199
Переходный слой 27
Перископическая зеркальная линия 180
Пластика 27, 90
Поверхностные волны 82, 94
Погонная емкость 67
Поле диполя над сферической идеальной землей 235
— на узких щелях 130
Полное внутреннее отражение 85
Полуволновой вибратор 114
Полуволновые щели 130
Полуконфокальный резонатор 187
Потери в волноводе 71

УКАЗАТЕЛЬ

Поток энергии в металл 40, 73
Преобразование типов волн 58
Принцип эквивалентности 125
Продольные волны 58
Просветляющее покрытие 28

Решение ВКБ 30

Селекция колебаний открытых резонаторов 185
Симметричные полосковые линии 71
Скин-эффект 34
Собственные волны 160
— значения 44, 49
— функции 49
Согласование сред 28
Сопротивление излучения 107
Спираль, усредненные граничные условия 98
Средние потери энергии в среде 15

Телеграфные уравнения 68
Теорема взаимности 119
Толщина скин-слоя 34
Точки стационарной фазы 217

Уравнение Риккати 33
Уравнения Максвелла 7, 15, 46
и далее

Фазовая скорость 23, 43, 61
Фазовый корректор 159
Функция Грина 107, 126

Цилиндрические волны 43

Электрические волны 49, 58, 65, 139
Электрический вектор Герца 47
Элементарный диполь 104