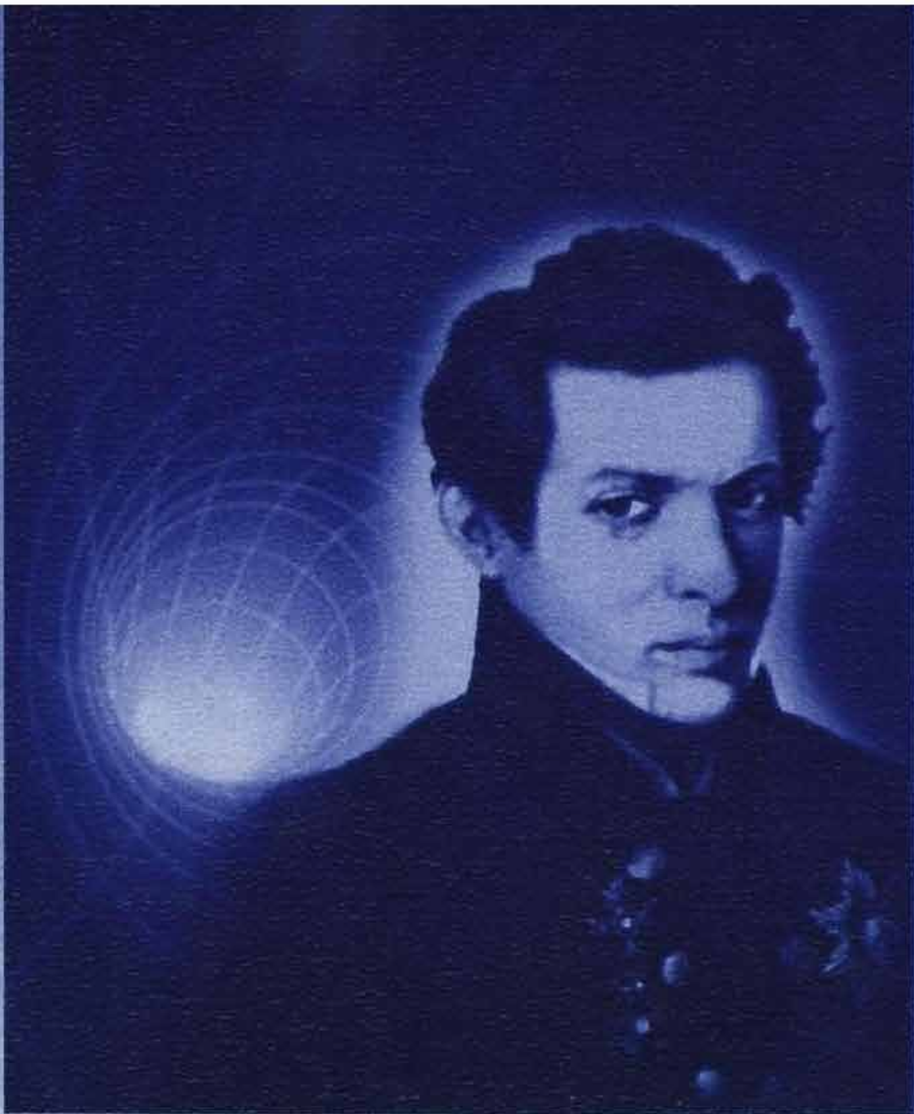
С. Б. Кадомцев



Геометрия Лобачевского и физика

URSS

С. Б. Кадомцев

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И ФИЗИКА

Издание второе, исправленное

URSS
МОСКВА

ББК 22.151.4 22.1о 22.3о

Кадомцев Сергей Борисович

Геометрия Лобачевского и физика. Изд. 2-е, испр. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 72 с.

Геометрия Лобачевского, предложенная им в 1826 г., была настолько необычна для его современников, что ее признание затянулось на десятилетия после смерти автора — Н. И. Лобачевского. Сегодня просто немыслимо представить себе современные математику и физику без геометрии неевклидовых пространств, в которую частным случаем входит и геометрия Лобачевского.

В настоящей книге рассказывается об истории создания геометрии Лобачевского, ее основных положениях и роли в современной геометрии. Рассматриваются непосредственные ее приложения к некоторым разделам физики: специальной теории относительности, общей теории относительности, космологии, теории нелинейных волновых процессов.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — исследователей, работающих в области физики и математики, преподавателей и студентов естественных вузов, историков и методологов науки и всех, кто интересуется затронутыми в книге проблемами.

Рецензент:

д-р физ.-мат. наук Е. В. Шикин

Издательство ЛКИ. 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 4,5. Зак. № 1169.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-00360-3

© Издательство ЛКИ, 2007

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (495) 135-42-16
URSS Тел./факс: 7 (495) 135-42-46

4981 ID 55658

9 785382 003603

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

ГЛАВА I. История создания геометрии Лобачевского

§ 1. Пятый постулат Евклида

Возникновение геометрии относится к глубокой древности и связано в первую очередь с практической деятельностью человека. Первые дошедшие до нас сочинения по геометрии, появившиеся в Древнем Египте во втором тысячелетии до нашей эры, содержат правила вычисления площадей и объемов некоторых простейших фигур и тел. Правила эти были получены практическим путем, без какого-либо доказательства их справедливости. С VII по I век до нашей эры центр развития геометрии перемещается в Грецию. Здесь накапливаются сведения о соотношениях между сторонами и углами треугольника, возникает учение о площадях и объемах, о пропорциях и подобии, о решении задач на построение и т. д. Появляются уже сравнительно строгие логические доказательства ряда утверждений. Геометрические исследования этого периода связаны с именами Фалеса (VI в. до н. э.), Пифагора (V в. до н. э.), Демокрита (V в. до н. э.), Эвдокса (IV в. до н. э.) и др.

Основные принципы дедуктивного построения науки впервые отчетливо были сформулированы Аристотелем (IV в. до н. э.). Он отмечал, что при доказательстве того или иного утверждения мы опираемся на ранее установленные факты. Поэтому те положения, с которых мы начинаем построение науки, не могут быть логически доказаны — они принимаются без доказательства и называются аксиомами. Воплощением этих идей Аристотеля явился знаменитый труд Евклида «Начала» (ок. 300 г. до н. э.). В нем сформулировано сравнительно небольшое число постулатов и аксиом геометрии*, из которых выведены почти все известные в то время теоремы (следует отметить, что в результате более поздних исследований этого круга вопросов выяснилось, что список аксиом Евклида не полон — некоторые аксиомы, необходимые для построения геометрии, Евклид не формулировал; полный список аксиом планиметрии приведен в приложении в конце брошюры).

Приведем постулаты и аксиомы Евклида.

Нужно потребовать:

1) чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию;

2) и чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой;

3) и чтобы вокруг любого центра любым радиусом можно было провести окружность;

4) и чтобы все прямые углы были равны друг другу;

5) и чтобы, когда прямая, пересекая две прямые, образует внутренние односторонние углы, составляющие в сумме меньше двух прямых углов, эти прямые при продолжении пересекались в точке, лежащей с той стороны, где расположены эти углы.

Аксиомы

1) равные одной и той же равны;

2) и если к равным придать равные, то получатся равные;

3) и если от равных отнять равные, то получатся равные;

4) совмещаемые друг с другом равны друг другу.

При рассмотрении аксиом Евклида сразу бросается в глаза, что 5-й постулат выделяется на фоне остальных: его формулировка отличается существенно меньшей простотой и наглядностью. Конечно, можно заменить 5-й постулат какой-нибудь другой аксиомой, более простой по формулировке. Например, можно потребовать, как это делается в большинстве школьных учебников, чтобы через точку, не лежащую на данной прямой, проходила только одна прямая, параллельная данной. Однако даже и в такой формулировке это утверждение, очевидно, менее наглядно, чем остальные аксиомы Евклида и даже некоторые простейшие теоремы (например, теорема о сумме смеж-

* Евклид различал аксиомы и постулаты; в современной математике такого различия не делается.

ных углов) – ведь в нем идет речь о поведении прямых сколь угодно далеко от указанной точки! В связи с этим возник вопрос: не является ли 5-й постулат теоремой, которую Евклид не сумел доказать и поэтому включил в число аксиом? На протяжении почти двух десятков веков усилия сотен геометров были направлены на решение этого вопроса. Однако все попытки доказать 5-й постулат оказались безуспешными: во всех предложенных доказательствах либо обнаруживались ошибки, либо 5-й постулат заменялся другой аксиомой, эквивалентной этому постулату. Приведем несколько примеров.

Древнегреческий ученый Посидоний (I в. до н.э.) в своем доказательстве 5-го постулата опирался на новую аксиому: множество всех точек, находящихся от данной прямой на данном расстоянии, есть прямая.

Древнегреческий ученый Прокл (V в. н. э.) исходил из того, что если две прямые параллельны, то расстояние между ними ограничено.

Персидский поэт и ученый Омар Хайям (XI—XII в. н. э.) в своих рассуждениях опирался на то, что две сближающиеся прямые не могут с некоторого момента начать расходиться. Но это, очевидно, есть новая аксиома.

Подобным примерам нет числа. К началу XIX века исследования вопроса о возможности доказать 5-й постулат Евклида составили весьма обширную библиотеку, однако сама проблема так и не была решена. Единственный результат этих исследований состоял в выявлении целого ряда утверждений, эквивалентных 5-му постулату. Приведем некоторые из них:

существует выпуклый четырехугольник, у которого все углы прямые (А. Клеро, XVIII в);

существует треугольник, подобный, но не равный другому треугольнику (Д. Саккери, XVIII в.);

существует треугольник, у которого сумма углов не меньше, чем 180° (А. Лежандр, XIX в.);

через точку, лежащую внутри острого угла, можно провести прямую, пересекающую обе его стороны (А. Лежандр, XIX в.).

К началу XIX века у большинства геометров сложился весьма пессимистический взгляд на проблему 5-го постулата Евклида. В 1823 году в письме к сыну венгерский математик Фаркаш Бойаи писал: «Эта беспросветная мгла может поглотить тысячу таких гигантов, как Ньютон, и никогда на земле не прояснится». Видимо, такой же точки зрения придерживалось и большинство его современников.

Между тем уже в XVIII веке у некоторых геометров возникает мысль о невозможности доказательства 5-го постулата. Так, немецкий ученый И. Ламберт, в течение многих лет пытавшийся доказать невозможность существования четырехугольника с суммой углов меньше 360°, высказал в конце концов предположение о том, что такой четырехугольник, возможно, и существует «на какой-то мнимой сфере». Окончательный ответ на вопрос о недоказуемости 5-го постулата Евклида был дан нашим соотечественником Н. И. Лобачевским.

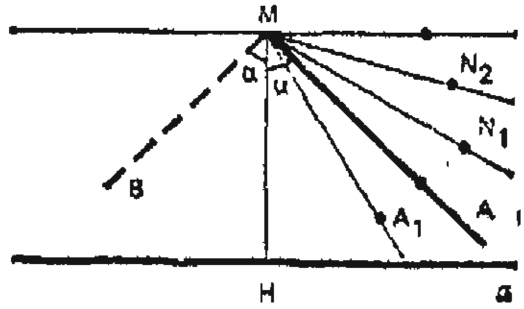


Рис.1.

§ 2. Открытие Лобачевским новой геометрии

Николай Иванович Лобачевский родился в 1793 году. Вся его творческая жизнь была связана с Казанским университетом, в котором он учился, затем был профессором, деканом физико-математического отделения, а с 1827 года — ректором университета. Его очень рано заинтересовала геометрия, и он, как и его предшественники, пытался доказать 5-й постулат Евклида. Лобачевский рассуждал примерно так: пусть a — данная прямая, M — точка, не лежащая на этой прямой, MH — перпендикуляр, проведенный из точки M к прямой a (рис. 1). Если MN — прямая, перпендикулярная к MH, то MN параллельна a (в самом деле, если допустить, что прямые MN и a пересекаются, то из точки их пересечения к прямой MH окажутся проведенными два перпендикуляра, что невозможно).

Если удастся доказать, что MN — единственная прямая, проходящая через точку M и параллельная прямой a, то тем самым будет доказан и 5-й постулат. Попробуем доказать это утверждение от противного. Допустим, что есть еще одна прямая MN_1, проходящая через точку M и не пересекающая прямой a, и попробуем прийти к противоречию. Из нашего допущения сразу следует, что и любая прямая MN_2, проходящая через произвольную точку N_2 внутри угла NMN_1, не пересекает прямой a (если допустить, что эти прямые пересекаются в некоторой точке P, то получится, что прямая MN_1, войдя в треугольник

MHP через вершину M, из него не выйдет, чего не может быть*). Таким образом, существует бесконечно много прямых, проходящих через точку M и не пересекающих прямую a.

Следуя Лобачевскому, несколько изменим определение параллельных прямых. Именно будем говорить, что прямая *MA параллельна a*, если она не пересекает a, и, кроме того, всякая прямая MA_1, проходящая через точку A_1 внутри угла AMH, пересекает a. Если 5-й постулат имеет место, то прямая MA, очевидно, совпадает с MN, а определение параллельности по Лобачевскому совпадает с обычным определением. Поскольку мы, желая доказать 5-й постулат от противного, исходим из противоположного допущения, то в нашем случае определение параллельности по Лобачевскому не совпадает с обычным определением.

Ясно, что через точку M «вправо от MH» проходит одна и только одна прямая MA, параллельная a по Лобачевскому. Угол α, который эта прямая составляет с прямой MH, называется углом параллельности для расстояния MH. Перегнув рис. 1 по прямой MH, мы установим, *что и «влево от MH» проходит одна и только одна прямая* MB, параллельная a по Лобачевскому причем $\angle BMH = \angle AMH = \alpha$.

Как видно из определения угла параллельности, он зависит от расстояния MH. Путем весьма глубоких рассуждений Лобачевский получил следующую формулу, описывающую эту зависимость: $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{-x/r}$. В этой формуле e — основание натурального логарифма, $x = MH$, r — длина некоторого фиксированного отрезка (ее теперь называют радиусом кривизны плоскости Лобачевского). Отметим, что формула Лобачевского справедлива не только для выбранной нами прямой a, но и для любой другой.

Из формулы Лобачевского следует, что по мере удаления точки M от прямой a угол параллельности уменьшается, стремясь в пределе к нулю (рис. 2). Если же точка M приближается к прямой a, то угол параллельности возрастает, стремясь в пределе к 90°. Из этой же формулы

---

* Последнее утверждение представляет собой аксиому, хотя и отсутствующую у Евклида, но необходимую для построения геометрии. Впервые эта аксиома была сформулирована в XIX веке немецким математиком М. Пашем.

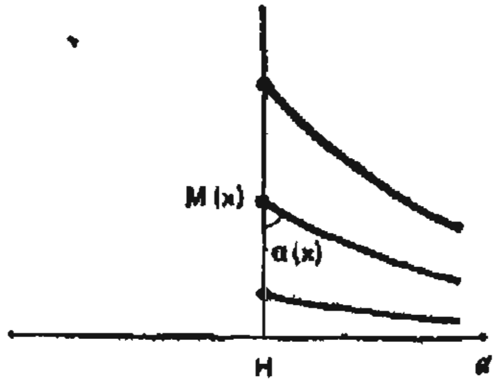


Рис.2

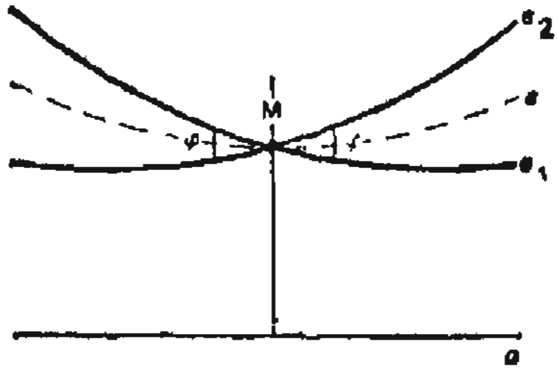


Рис.3.

усматривается и другой факт: при стремлении r к бесконечности угол параллельности α стремится к 90°. Иными словами, при $r \to \infty$ формула Лобачевского дает 5-й постулат Евклида.

Обсудим еще одно свойство параллельных по Лобачевскому прямых. Проведем через точку M прямые b_1 и b_2, параллельные a, в каждом из двух направлений (рис. 3). Тогда любая прямая b, проходящая через внутреннюю область угла φ, не пересекает a и не параллельна a. Так как прямые b и b_1 пересекаются, то по мере удаления от точки M расстояние между их точками неограниченно увеличивается (этот факт может быть установлен без использования 5-го постулата Евклида). Аналогично расстояние между точками прямых b и b_2 неограниченно увеличивается по мере удаления от точки M. Из этого следует, что неограниченно увеличивается и расстояние между точками прямых a и b по мере удаления от точки M в каждом из двух возможных направлений. Иными словами, две непересекающиеся и непараллельные прямые неограниченно расходятся в обе стороны. Поэтому непересекающиеся и непараллельные прямые естественно называть *расходящимися*.

Из сказанного следует также, что расстояние между точками параллельных прямых по мере удаления в направлении, противоположном направлению их параллельности, неограниченно увеличивается. Если же двигаться в направлении параллельности, то расстояние от точек одной прямой до другой прямой уменьшается и может быть сделано сколь угодно малым (попробуйте доказать это самостоятельно). Итак, *две параллельные прямые в направлении параллельности неограниченно сближаются, а в противоположном направлении неограниченно расходятся.*

Лобачевский уходил все глубже и глубже в своих исследованиях, но противоречия с аксиомами геометрии он так и не получил. Более того, им были высказаны весьма серьезные соображения в пользу того, что никакого противоречия нет вовсе! Из этого он сделал фундаментальный вывод: существует другая геометрия, отличная от геометрии Евклида. Эта геометрия им и была построена. В ней 5-й постулат Евклида заменен на противоположное утверждение: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую.* Тем самым доказанные Лобачевским теоремы, хотя и вступают в противоречие с нашей интуицией, являются истинными в этой геометрии.

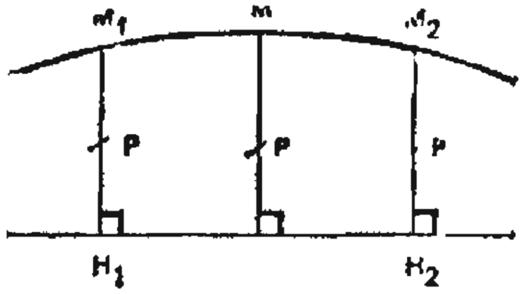


Рис.4.

Рассмотрим свойства некоторых простейших кривых на плоскости Лобачевского (т. е. на плоскости, описываемой планиметрией Лобачевского). Как и в геометрии Евклида, множество всех точек, равноудаленных от некоторой точки плоскости, называется *окружностью*. Свойства окружности на плоскости Лобачевского мало отличаются от свойств окружности на евклидовой плоскости. Так, окружность в геометрии Лобачевского — это замкнутая кривая, которая может скользить по самой себе (более точно, если вращать плоскость Лобачевского вокруг центра окружности, то точки этой окружности будут переходить в точки той же окружности). Различие проявляется лишь в формулах, по которым вычисляются длина окружности и площадь круга. Более интересным представляется появление двух новых, весьма простых кривых линий — эквидистанты и орицикла, не имеющих аналога в геометрии Евклида.

Эквидистанта представляет собой множество точек, равноудаленных от данной прямой a и лежащих по одну сторону от этой прямой (рис. 4). Прямая a называется *базой*, прямые MH, MH_1, MH_2 и т. д., проходящие через точки эквидистанты и перпендикулярные к a, — *осями*, и расстояние p от точек эквидистанты до прямой a — *параметром* эквидистанты. Если мы будем перемещать плоскость вдоль прямой a, то точки эквидистанты будут

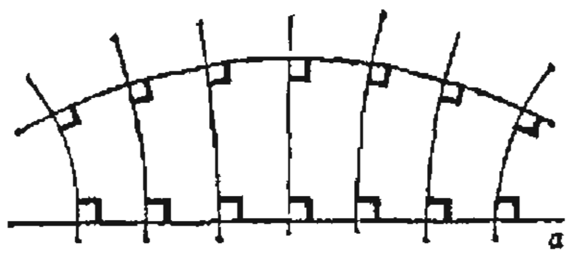


Рис.5.

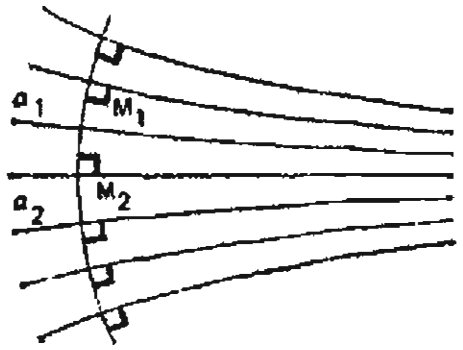


Рис.6.

переходить, очевидно, в точки той же эквидистанты, т. е. эквидистанта будет скользить по самой себе.

Указанное свойство эквидистанты придает ей сходство с прямой и окружностью. Однако ни окружностью, ни прямой эквидистанта не является. Прежде всего эквидистанта — незамкнутая линия. Это следует, например, из того, что любая ось пересекает ее только в одной точке (если бы эквидистанта была замкнутой кривой, то она ограничивала бы некоторую конечную часть плоскости; поэтому любая прямая, вошедшая в эту часть плоскости, должна была бы из нее выходить, т. е. еще раз пересечь эквидистанту). Следовательно, окружностью эквидистанта не является. Но и прямой эквидистанта быть не может, так как в противном случае она бы неограниченно удалялась от базы хотя бы в одном из двух направлений.

Отметим еще одно свойство эквидистанты: *эквидистанта симметрична относительно любой своей оси*. В самом деле, перегнем рис. 4 по оси MH. Тогда луч HH_1 наложится на луч HH_2. Значит, точки «левой» половины эквидистанты наложатся на точки ее «правой» половины. Но это и означает, что эквидистанта симметрична относительно оси MH. Из этого, в частности, следует, что *любая ось пересекает эквидистанту под прямым углом*.

Последнее свойство эквидистанты позволяет дать ей другое определение. Рассмотрим какую-нибудь прямую a и проведем всевозможные прямые, перпендикулярные к ней (рис. 5). В результате получим так называемый *пучок расходящихся прямых*. Если теперь провести какую-либо *ортогональную траекторию* к этому пучку, т. е. кривую, пересекающую все линии пучка под прямым углом, то эта ортогональная траектория будет, очевидно, эквидистантой.

Итак, *эквидистанту можно определить как ортого-*

нальную траекторию к пучку расходящихся прямых. А что представляет собой ортогональная траектория к *пучку параллельных прямых*, т. е. к множеству всех прямых, параллельных данной прямой в каком-нибудь направлении? Эта линия называется *орициклом* (рис. 6). Как и эквидистанта, орицикл может скользить сам по себе. В самом деле, переместим плоскость так, чтобы какая-нибудь прямая a_1 пучка перешла в прямую a_2 этого же пучка, а точка M_1 орицикла — в точку M_2 этого же орицикла. Тогда всякая прямая пучка перейдет в некоторую прямую того же пучка, а значит, всякая точка орицикла перейдет в точку того же орицикла. Нетрудно доказать, что орицикл есть незамкнутая кривая, симметричная относительно любой прямой пучка. Из этого, в частности, следует, что орицикл отличен от окружности. Из определения орицикла ясно также, что орицикл не является прямой.

Итак, *на плоскости Лобачевского есть четыре различных типа линий, каждая из которых может скользить по самой себе: прямая, окружность, эквидистанта и орицикл. Окружность — линия замкнутая, прямая, эквидистанта и орицикл — линии незамкнутые.* Напомним, что в евклидовой планиметрии линий, допускающих скольжение по самой себе, всего две — прямая и окружность.

Лобачевским были установлены также соотношения между сторонами и углами треугольника. Эти соотношения несколько сложнее, чем в евклидовой геометрии — кроме тригонометрических функций, они содержат еще и гиперболические:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{cth} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Для произвольного треугольника ABC со сторонами $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$ имеет место теорема косинусов

$$\operatorname{ch}\frac{c}{r} = \operatorname{ch}\frac{a}{r}\cdot\operatorname{ch}\frac{b}{r} - \operatorname{sh}\frac{a}{r}\cdot\operatorname{sh}\frac{b}{r}\cdot\cos C \tag{1}$$

и теорема синусов

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{r}}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{r}}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{r}}{\sin C}. \tag{2}$$

Приведем также формулу, связующую площадь S треугольника с суммой его углов:

$$S = r^2(\pi - A - B - C). \tag{3}$$

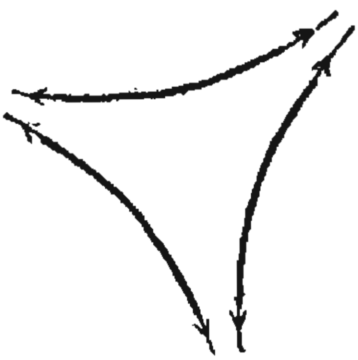


Рис.7.

Из этой формулы следует, что площадь треугольника максимальна, когда все его углы равны нулю. Такой треугольник называется *асимптотическим треугольником*. Все три его вершины бесконечно удалены друг от друга (рис. 7). Площадь любого «обычного» треугольника меньше πr^2, причем «обычного» треугольника, имеющего максимальную площадь, не существует.

Сообщение об открытии новой геометрии было сделано Лобачевским 7 (19) февраля 1826 года на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета. Три года спустя в журнале «Казанский вестник» он публикует первую в мировой истории работу по неевклидовой геометрии «О началах геометрии». Открытие Лобачевского встретило полное непонимание и даже негодование со стороны почти всех его современников. Приведем в качестве примера выдержку из журнала «Сын отечества» от 1834 года: «Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какой-нибудь серьезной целью книгу, которая не много бы принесла чести и последнему приходскому учителю. Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего».

Несмотря на враждебную реакцию со стороны научной общественности, Лобачевский до последнего дня своей жизни продолжает с исключительным упорством и бесстрашием отстаивать правоту своих идей. Одновременно он продолжает все глубже и глубже развивать новую геометрию. Лобачевский умер в 1856 году, так и оставшись непризнанным большинством своих коллег. Настоящая слава пришла к нему лишь после смерти.

§ 3. Непротиворечивость геометрии Лобачевского

Подведем итог наших построений. Мы предположили, что аксиома параллельных прямых Евклида заменена на соответствующую аксиому Лобачевского и получили в результате целый ряд логических следствий. При этом ни к каким противоречиям с другими аксиомами геометрии мы не пришли. Спрашивается: можно ли из этого сделать вывод о непротиворечивости геометрии Лобачевского? Иными словами, можно ли утверждать, что и при дальнейшем развитии геометрии Лобачевского мы не встретимся с какими-либо противоречиями? Очевидно, такого вывода мы пока сделать не можем.

Первая попытка доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского была предпринята самим Лобачевским. В своих рассуждениях он опирался на *сферическую геометрию* — геометрию, в которой роль плоскости играет сфера, а роль прямых — большие окружности на этой сфере. В сферической геометрии можно рассматривать треугольники — фигуры, составленные из трех дуг больших окружностей. Лобачевский обнаружил, что если в соотношениях между сторонами и углами таких треугольников заменить радиус сферы (он, естественно, действительный) на мнимое число, то эти соотношения совпадут с соответствующими формулами (1)—(3) его геометрии. Из этого можно сделать такой вывод: если бы формулы (1)—(3) геометрии Лобачевского содержали в себе какое-либо противоречие, то такое же противоречие содержала бы и сферическая геометрия. Но поскольку истинность сферической геометрии не подвергается сомнению, то следует признать и непротиворечивость формул (1)—(3) геометрии Лобачевского.

Приведенное рассуждение Лобачевского является, безусловно, серьезным аргументом в пользу непротиворечивости его геометрии, однако, строго говоря, в полной мере ее не доказывает. В самом деле, в этих рассуждениях речь идет не о всей геометрической системе в целом, а лишь о ее части — соотношениях между сторонами и углами треугольника. Как мы установили, в этой части нет внутренних противоречий. Но может быть, они есть в других частях геометрии Лобачевского? Вопрос был бы полностью решен, если бы удалось найти такие объекты в евклидовом пространстве, для которых выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского, подобно тому как для треугольников на сфере мнимого радиуса выполняются формулы (1)—(3). Впервые такой путь решения этой проблемы был указан итальянским математиком Э. Бельтрами. В основу своих рассуждений он положил понятие внутренней геометрии поверхности, введенное выдающимся не-

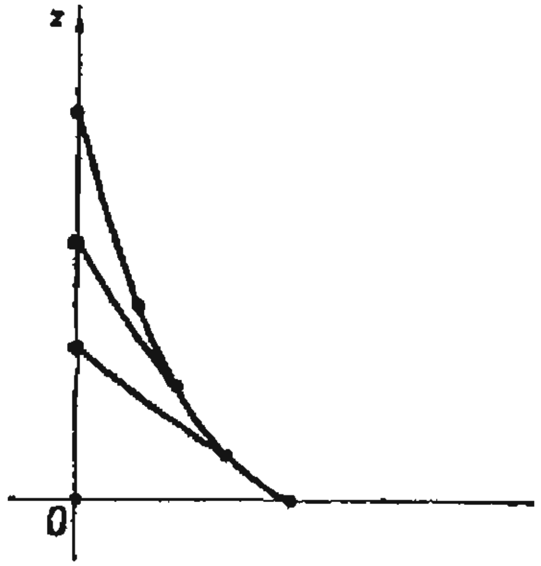


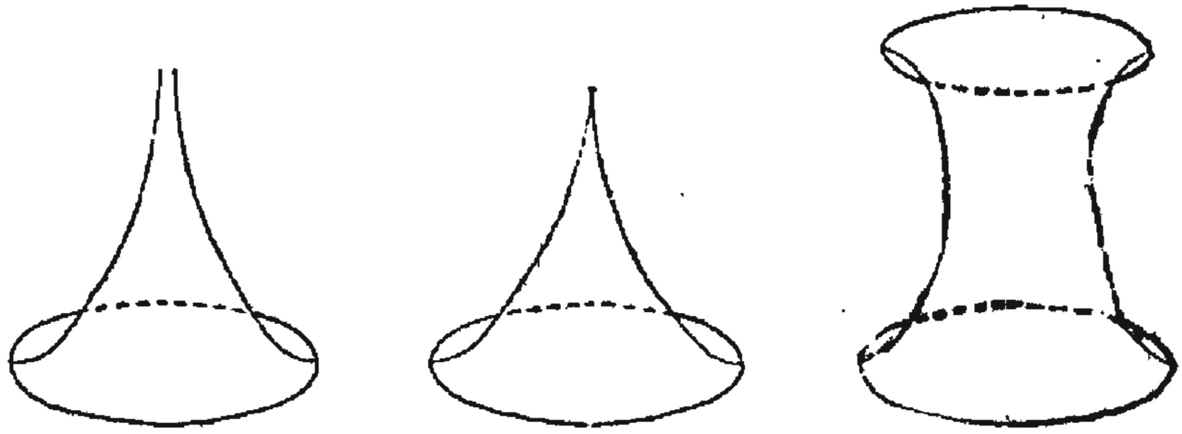
Рис. 8.

мецким математиком К. Ф. Гауссом. В этой геометрии роль плоскости играет произвольная поверхность, а прямых — кратчайшие линии на этой поверхности (каждая такая линия характеризуется тем, что любая не слишком большая ее дуга является кратчайшей среди всевозможных дуг, соединяющих две данные точки поверхности). Бельтрами интересовал вопрос: нет ли в евклидовом пространстве поверхности, внутренняя геометрия которой совпадает с геометрией Лобачевского? В 1868 году он обнаружил, что такими поверхностями являются так называемые поверхности постоянной отрицательной кривизны, изучавшиеся ранее немецким математиком Ф. Миндингом.

Приведем пример поверхности постоянной отрицательной кривизны. Для этого представим себе человека, который движется по оси Oz плоскости Oxz и тянет на веревке упирающегося осла (рис. 8). Кривая, по которой при этом движется осел, называется *трактриссой**. Геометрически трактрисса характеризуется тем, что отрезок касательной к ней, заключенный между точкой касания и осью Oz, сохраняет постоянную длину. Если вращать трактриссу вокруг оси Oz, то получится поверхность постоянной отрицательной кривизны, называемая *псевдосферой Бельтрами* (рис. 9, *а*). Псевдосфера — не единственная поверхность постоянной отрицательной кривизны. Два других примера таких поверхностей, указанные Миндингом, приведены на рис. 9, *б*, *в*.

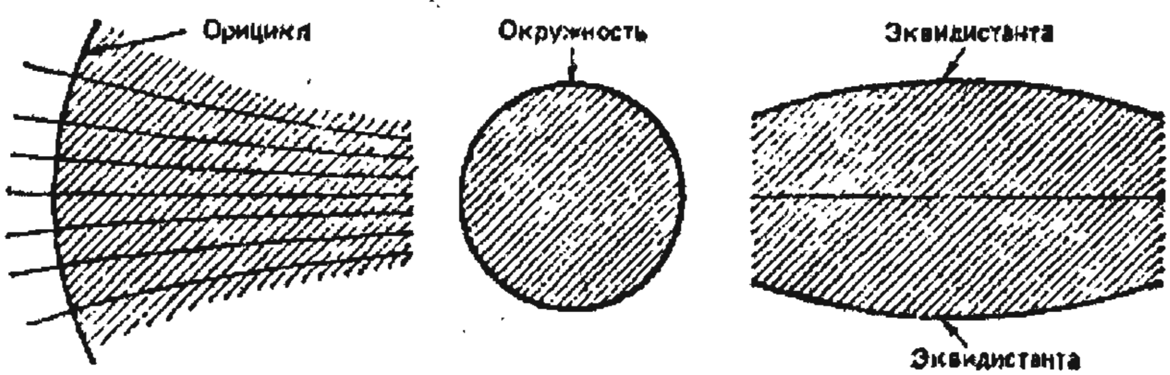
Исследуя известные к этому времени поверхности постоянной отрицательной кривизны, Бельтрами обнаружил, что все они имеют особые точки (острия) или особые линии (ребра). По этой причине на каждой из них реализуется геометрия лишь части плоскости Лобачевского. Так, на поверхностях, изображенных на рис. 9, *а*, *б*, *в*, реализуется геометрия частей плоскости Лобачевского, изображенных на рис. 10, *а*, *б*, *в* соответственно. Все по-

* Это название происходит от латинского слова *trahere*, что означает «тянуть, увлекать».



а) б) в)

Рис.9.



а) б) в)

Рис.10.

пытки Бельтрами найти такую поверхность, на которой бы реализовывалась геометрия всей плоскости Лобачевского, оказались безуспешными — такой поверхности он не нашел. Более того, в 1901 году немецкий математик Д. Гильберт доказал, что такой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве вообще нет*. Таким образом, путь, избранный Бельтрами, не привел его к полному решению вопроса о непротиворечивости геометрии Лобачевского.

Спустя три года, в 1871 году, немецкий математик

---

* Здесь следует сделать одну оговорку. В своих исследованиях Гильберт исходил из достаточно гладких поверхностей. Более поздние исследования, проведенные в 1954 году американским математиком Дж. Нэшем, показали, что поверхность, на которой реализуется геометрия всей плоскости Лобачевского, в трехмерном евклидовом пространстве все же есть. Однако эта поверхность столь сильно «измята», что наглядно представить себе ее почти невозможно.

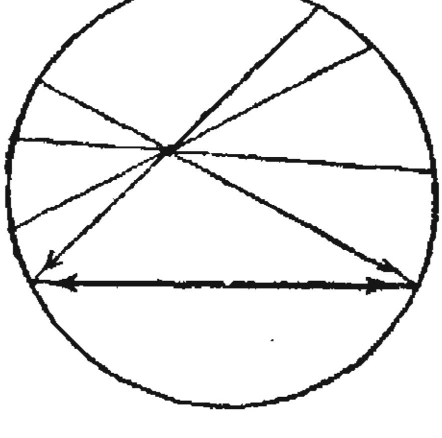


Рис.11.

Ф. Клейн, опираясь на результаты англичанина А. Кэли, полностью решил вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского. Он, как говорят, построил модель геометрии Лобачевского, т. е. указал такую совокупность объектов, для которой выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского. Эту модель принято называть теперь *моделью Кэли—Клейна*. В ней плоскость Лобачевского представляет собой внутренность круга, радиус которого равен радиусу кривизны плоскости Лобачевского, причем граница этого круга, называемая *абсолютом*, недостижима — она бесконечно удалена от любой внутренней точки круга. Прямой в модели Кэли — Клейна считается любая хорда абсолюта (концы этой хорды бесконечно удалены, т. е. не являются точками плоскости Лобачевского). Ясно, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесконечно много прямых, не имеющих с данной ни одной общей точки (рис. 11). Две из них, имеющие с данной прямой общий бесконечно удаленный конец на абсолюте, параллельны ей по Лобачевскому в каждом из двух возможных направлений. Эти прямые не имеют общих точек с данной прямой, но неограниченно к ней приближаются. Перемещением (т. е. отображением, с помощью которого решается вопрос о равенстве фигур на плоскости Лобачевского) в модели Кэли — Клейна считается любое отображение рассматриваемого круга на себя, при котором каждая точка абсолюта переходит в некоторую точку абсолюта, и, кроме того, каждая прямая переходит в некоторую прямую. Отсюда можно найти формулу для вычисления расстояния между двумя точками A и B (опираясь, в частности, на то, что при перемещениях расстояния между парами точек не меняются):

$$AB = \frac{r}{2} \ln\left(\frac{AB_1}{A_1A} : \frac{BB_1}{A_1B}\right). \qquad (1)$$

В этой формуле A_1 и B_1 — точки пересечения прямой AB с абсолютом, а r — радиус кривизны плоскости Лобачевского, равный радиусу круга.

Отметим, что модель, аналогичную рассмотренной, можно построить и для стереометрии Лобачевского. Для

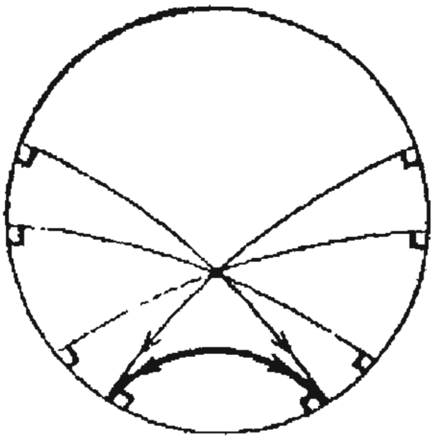


Рис.12.

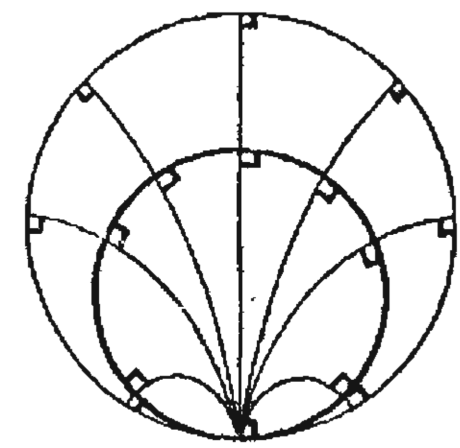


Рис.13.

этого в качестве абсолюта достаточно взять сферу, а прямыми считать хорды этой сферы.

Через 11 лет после работы Клейна, в 1882 году, французский математик А. Пуанкаре предложил еще одну модель геометрии Лобачевского. В *модели Пуанкаре*, как и в модели Кэли — Клейна, плоскость Лобачевского представляет собой внутренность круга с бесконечно удаленной границей, но прямыми считаются не хорды, а дуги окружностей, перпендикулярные к абсолюту. На рис. 12 изображена та же ситуация в модели Пуанкаре, что и на рис. 11 в модели Кэли — Клейна.

Замечательной особенностью модели Пуанкаре является тот факт, что угол между прямыми в этой модели равен обычному углу между дугами. Поэтому, например, орицикл в модели Пуанкаре — кривая, перпендикулярная ко всем прямым пучка параллельных прямых — есть просто окружность, касающаяся абсолюта изнутри (рис. 13). Подчеркнем, что при этом расстояние между точками плоскости Лобачевского, конечно же, не равно обычному расстоянию — оно измеряется по более сложному правилу (так, что точки абсолюта бесконечно удалены от внутренних точек круга).

Интересно, что указанная модель была найдена Пуанкаре в связи с его исследованиями в области теории так называемых автоморфных функций, широко применяющихся не только в математике, но и в теоретической физике. При разработке этой теории он столкнулся с очень большими трудностями, которые, однако, удалось легко преодолеть с помощью применения идей геометрии Лобачевского. Подводя итог, можно сказать, таким образом, что к концу XIX века геометрия Лобачевского не только получила всеобщее признание, но и органически вошла в аппарат математики.

§4. Историческое значение открытия

Открытие Н. И. Лобачевским новой геометрии явилось едва ли не самым значительным событием в истории математики XIX века, во многом определившим развитие всей науки. Представляется, что именно оно положило начало серьезному пересмотру отношения к математике и ее предмету, приведшему в результате к окончательному разграничению сфер исследований математики и физики, выделению той и другой в самостоятельные разделы науки. Дело в том, что физика всегда ставила целью изучение окружающего нас мира, поэтому и все собственно физические понятия имеют источником своего происхождения эксперимент. Иными словами, эти понятия реальны: величины можно измерять, связи между ними проверять опытным путем. В противоположность этому математика, начиная с XX века, сознательно и целенаправленно оперирует с воображаемыми объектами — объектами, которых в природе заведомо нет. Конечно, ретроспективный взгляд на математику позволяет увидеть, что именно такие объекты являлись предметом ее исследований едва ли ни с момента зарождения. Ведь в природе нельзя увидеть прямую или точку в том виде, как их описывал Евклид. Абстрактным является даже понятие числа: в окружающем нас мире можно увидеть пять яблок или пять человек, но нельзя увидеть число пять само по себе! Однако в XIX веке подобный взгляд на математику еще не сформировался. Именно это, по-видимому, и явилось основной причиной неприятия идей Лобачевского научной общественностью.

Часто говорят так: до Лобачевского евклидова геометрия казалась единственно мыслимой; Лобачевский же открыл еще одну геометрию, чем полностью опроверг этот веками устоявшийся взгляд. Такая оценка открытия Лобачевского, однако, не вполне точна хотя бы потому, что новая геометрия была не первой неевклидовой геометрией, а второй! Дело в том, что со времен эллинистической древности была хорошо известна другая неевклидова геометрия — геометрия на сфере. Степень ее развития уже тогда мало отличалась от степени развития евклидовой геометрии. Начало сферической геометрии положил, по-видимому, еще Евдокс (IV в. до н. э.), а систематическое изложение этой науки, принадлежащее Менелаю Александрийскому, относится к I веку. Однако, будучи неевклидовой, сферическая геометрия не вызывала у математиков чувства протеста, поскольку реализовывалась на обычной сфере в евклидовом пространстве. Иными словами, шокирующим в открытии Лобачевского было не то, что существует другая геометрия, а то, что ей не отвечает (как тогда казалось) никакой наглядный образ. Ведь геометрия, да и математика вообще, в XIX веке воспринималась еще как наука об объектах, взятых из реального мира. Так, точку воспринимали как что-то очень маленькое, прямую — как очень тонкую натянутую нить, продолженную в обе стороны неограниченно, и т. д. Тем самым, геометрия рассматривалась, по существу, как часть физики, оперирующая хоть и с идеализированными, но заимствованными из окружающего мира объектами. Геометрия Лобачевского же никак не укладывалась в такую концепцию. По-видимому, она явилась первым в истории науки абстрактным математическим объектом, осознанным как таковой. Ее открытие должно было неизбежно привести к полному пересмотру оснований математики и радикальному изменению взгляда на ее предмет. Едва ли не первым это осознал сам Лобачевский. Он пишет: «В природе нет ни прямых, ни кривых линий, нет плоскостей и кривых поверхностей, в ней находим одни тела, так что все прочее создано нашим воображением, существует только в теории».

Современники Лобачевского не были готовы к восприятию подобных идей. Потребовалось около 70 лет для того, чтобы такой взгляд на математику стал общепринятым. В значительной мере этому способствовал огромный научный авторитет Д. Гильберта. Его «Основания геометрии» (1899) начинаются словами: «Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем точками ... вещи второй системы мы называем прямыми, вещи третьей системы мы называем плоскостями». И далее: «Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как то: „лежать“, „между“, „конгруэнтный“, „параллельный“, „непрерывный“. Точное и для математических целей полное описание этих соотношений достигается аксиомами геометрии». Таким образом, точки, прямые и плоскости у Гильберта — это просто три системы вещей, не имеющих никаких наглядных атрибутов, а все, что про них достаточно знать, содержится в аксиомах. В своей знаменитой лекции о проблемах математики (1900) он идет еще дальше: если прежде считалось, что из непротиворечивости того или иного математического объекта следует лишь возможность его существования, то для Гильберта непротиворечивость эквивалентна факту существования! Таким образом, он вполне отчетливо проводит черту между математикой и физикой — отныне это два принципиально разных (хотя и находящихся в тесном контакте) раздела науки.

Открытие Лобачевского явилось беспрецедентным событием в математике XIX века, вызвавшим к жизни целый ряд проблем, ранее не возникавших. Первой из них является проблема непротиворечивости той или иной теории. Никогда прежде эта проблема не стояла: никому не приходило в голову усомниться в непротиворечивости геометрии Евклида или, скажем, механики Ньютона. До сих пор математика имела дело с, казалось бы, самоочевидными теориями. Геометрия Лобачевского же отнюдь не производила впечатления таковой. Доказательство непротиворечивости новой геометрии, данное Лобачевским, ввиду своей абстрактности вызывало у математиков двойственное чувство: оно было как бы убедительным и неубедительным одновременно. Поэтому в течении нескольких десятилетий они, по существу, игнорировали факт существования геометрии Лобачевского — ученые просто не знали, что с ней делать. Показательно, что отношение к этой геометрии кардинально изменилось сразу после опубликовании упомянутой в § 3 работы Э. Бельтрами. Эта работа, как мы помним, не позволила продвинуться в решении проблемы непротиворечивости новой геометрии, но затрагивала самый важный для математиков того времени аспект этой проблемы — психологический: она вносила элемент наглядности. Стоит отметить, что дальнейшее развитие комплекса идей, связанных с проблемой непротиворечивости той или иной теории, привело к появлению новых разделов математики, таких как теория множеств и метаматематика.

Идеи Лобачевского во многом определили и развитие самой геометрии. Прежде всего, благодаря им сформировалось представление о возможности и необходимости геометрических построений, не имеющих непосредственного отношения к окружающему нас пространству. Геометрия Лобачевского явилась поворотным пунктом от еще оперирующей наглядными образами геометрии Евклида к современной геометрии обобщенных пространств, вобравшей в себя идеи алгебры, анализа, топологии и других разделов математики. И хотя сам Лобачевский и указывал на необходимость экспериментальной проверки истинности той или иной геометрии, он отчетливо осознавал, что даже и в том случае, если геометрией реального пространства окажется геометрия Евклида, то это ни в коей мере не будет означать, что не следует развивать новую геометрию — она может иметь важные приложения как в математике, так и в других науках. Одно из таких приложений было найдено самим Лобачевским. Переходя в своем пространстве от одной системы координат к другой, он нашел значения около 200 определенных интегралов, вычислить которые другими методами не удавалось. Чуть позже А. Пуанкаре успешно применил аппарат геометрии Лобачевского к решению задач теории так называемых автоморфных функций. «Неевклидова геометрия есть ключ к решению всей задачи», — писал он.

Справедливости ради отметим, что Лобачевский не был единственным ученым, пришедшим к открытию новой геометрии. Венгерский математик Я. Бойяи независимо от Лобачевского открыл ту же геометрию. Первая публикация Бойяи, посвященная этому вопросу, датируется 1832 годом, т. е. тремя годами позже публикации Лобачевского и шестью годами позже его первого сообщения на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета. Как и Лобачевский, Бойяи столкнулся с полным непониманием своего открытия современниками и (в отличие от Лобачевского) вскоре прекратил свои исследования. После смерти одного из крупнейших немецких математиков, К. Ф. Гаусса, была опубликована его переписка с коллегами. Из этих документов стало известно, что первые формулы геометрии Лобачевского были выведены Гауссом задолго до Лобачевского. Однако дальше первых, самых элементарных теорем новой геометрии Гаусс не пошел, своих исследований не опубликовал и никогда о них публично не высказывался, опасаясь стать объектом критики. Таким образом, из трех ученых, стоящих у колыбели новой геометрии, Лобачевский первым опубликовал свои исследования. В отличие от остальных он не остановился на первых результатах, а последовательно, шаг за шагом, развивал свою теорию, игнорируя обрушившуюся на него волну критики. Несомненно и то, что Лобачевский глубже всех осознал значение своего открытия. Именно он указал на необходимость экспериментальной проверки истинности той или иной геометрии. По этому поводу он писал: «В самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотят доказать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения».

Открытие новой геометрии сыграло важную роль в эволюции философской мысли, находившейся в начале XIX века под сильным влиянием гения И. Канта. В своей знаменитой «Критике чистого разума» Кант рассматривал пространство и время как априорные формы сознания, а аксиомы геометрии — как истины необходимые и независимые от опыта. Такая концепция казалась философам убедительной, пока евклидова геометрия была единственно мыслимой и непосредственно очевидной. Появление же новой геометрии выявило несостоятельность этой точки зрения. Конечно, геометрия как раздел математики лежит в сфере чистого разума, однако пригодность той или иной геометрии для описания свойств реального пространства может быть установлена лишь экспериментальным путем.

Трудно переоценить влияние идей Лобачевского на теоретическую физику. Достаточно сказать, что гипотеза Лобачевского о возможной неевклидовости реального пространства нашла свое блестящее воплощение в созданной А. Эйнштейном общей теории относительности. Стоит отметить, что идеи, лежащие в основе этой теории, приходили в голову и самому Лобачевскому. В своих «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных» (1835–1838) он писал: «В нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие — своей особой геометрии ... Впрочем, пусть это — чистое предположение, только для подтверждения которого надобно поискать других убедительных доводов, но в том, однако, нельзя сомневаться, что силы все производят одни: движение, массу, даже расстояние и углы. С силами все находится в тесной связи».

Так или иначе, открытие новой геометрии затронуло все сферы мировоззрения. Без преувеличения его можно назвать революцией в науке. Этим замечательным достижением человеческой мысли мы обязаны, в первую очередь, Николаю Ивановичу Лобачевскому.

ГЛАВА II. Геометрия Лобачевского и современная геометрия

§ 1. Теория поверхностей

Наряду с основаниями геометрии в XIX веке бурно развиваются и другие разделы геометрии, из которых в первую очередь следует назвать теорию поверхностей. Возникновение теории поверхностей связано с именами Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, Г. Монжа и других, однако основную роль в развитии этой теории сыграла работа К. Ф. Гаусса «Общее исследование кривых поверхностей», опубликованная в 1827 году. Познакомимся с некоторыми понятиями и фактами теории поверхностей.

Пусть Ω — произвольная поверхность, M — некоторая ее точка. Проведем через точку M всевозможные кривые, лежащие на поверхности Ω, и для каждой из проведенных кривых построим касательную в точке M. Оказывается, что все построенные касательные лежат в одной плоскости T_M, называемой *касательной плоскостью* к поверхности Ω в точке M. Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости T_M и проходящая через точку M, называется *нормалью* к поверхности Ω в точке M. Например, нормалью к сфере является любая прямая, проходящая через ее центр, а нормалью к цилиндру — любая прямая, пересекающая ось цилиндра под прямым углом.

Каждая плоскость, проходящая через нормаль, пересекает поверхность по некоторой кривой, называемой *нормальным сечением* поверхности Ω в точке M. Ясно, что

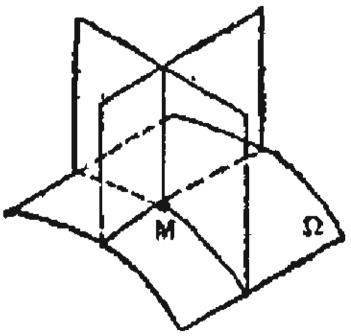


Рис.14.

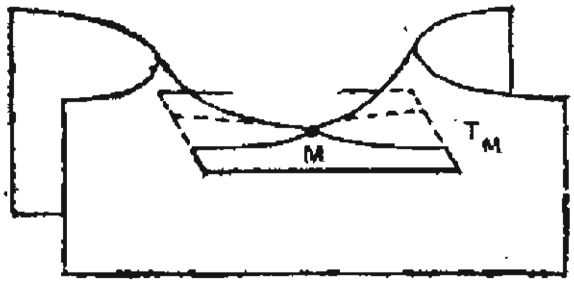


Рис.15.

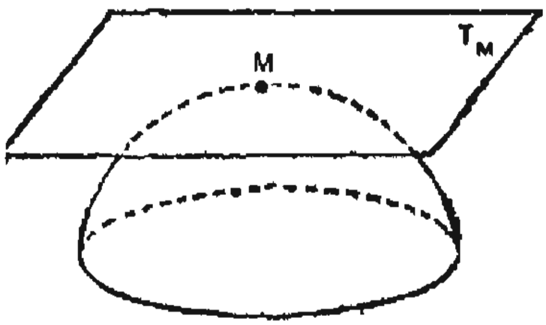


Рис.16.

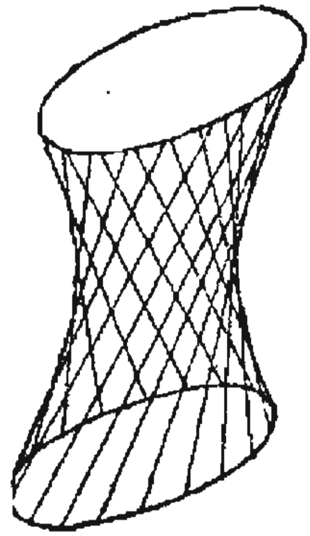


Рис.17.

нормальных сечений в точке M бесконечно много, причем их кривизны в точке M (кривизной кривой в данной точке называется величина, обратная радиусу кривизны кривой в этой точке), вообще говоря, различны. Минимальное и максимальное значения кривизны нормальных сечений в точке M называются *главными кривизнами* поверхности Ω в точке M (рис. 14). Таким образом, *кривизна любого нормального сечения в точке M заключена между главными кривизнами.* Подчеркнем, что главные кривизны могут иметь разный знак. Такая ситуация имеет место, если поверхность в окрестности точки M имеет форму седла (рис. 15).

Удобной характеристикой искривленности поверхности в данной точке является произведение главных кривизн в этой точке, называемое *гауссовой кривизной* (или просто *кривизной*) поверхности Ω в точке M. Ясно, что гауссова кривизна может быть как положительной, так и отрицательной. Если кривизна поверхности в точке M положительна, то окрестность точки M поверхности лежит по одну сторону от касательной плоскости T_M (рис. 16); если же кривизна поверхности в точке M отрицательна, то часть поверхности расположена по одну сторону от T_M, а часть — по другую (рис. 15). Если одна из главных кривизн в точке M равна нулю, то гауссова кривизна в этой точке равна нулю. Примерами поверхностей, кривизна которых в каждой точке равна нулю, являются плоскость и цилиндр.

Кривизны нормальных сечений в данной точке заключены между главными кривизнами в этой точке. Поэтому если гауссова кривизна в точке M отрицательна (главные кривизны имеют разные знаки), то есть два различных направления, в которых нормальные сечения имеют нулевую кривизну в точке M. Эти направления называются *асимптотическими направлениями*. Линии, которые в каждой точке поверхности направлены вдоль асимптотических направлений, называются *асимптотическими линиями*. Ясно, что поверхность отрицательной кривизны покрывается «сетью» из асимптотических линий (рис. 17).

Среди всех линий на поверхности особую роль играют так называемые геодезические (кратчайшие) линии. Поясним это понятие. Пусть A и B — две точки на данной поверхности. Через точки A и B можно провести бесконечно много дуг кривых, целиком лежащих на поверхности. Поставим своей целью найти среди них кратчайшую. Дугу AB, удовлетворяющую этому условию, называют *геодезической линией*. Задача о нахождении геодезических линий на данной поверхности была исторически первой задачей теории поверхностей. Ее поставил еще швейцарский математик И. Бернулли в 1697 году. Полностью она была решена в 70-х годах XVIII века Л. Эйлером и французским математиком Ж. Л. Лагранжем, которыми были найдены уравнения геодезических линий на произвольной поверхности. Мы не будем выписывать эти уравнения. Скажем лишь, что задача о нахождении геодезической линии, соединяющей две точки данной поверхности, имеет единственное решение при условии, что эти точки расположены не слишком далеко друг от друга. Таким образом, *через две не слишком удаленные друг от друга точки проходит одна и только одна геодезическая линия*.

Представим себе, что мы — «двумерные существа», живущие на некоторой поверхности и ничего не знающие о существовании окружающего эту поверхность пространства. Допустим, что на нашей поверхности имеются два населенных пункта A и B, и мы хотим измерить расстояние между ними. Естественно, за расстояние между A и B

мы примем кратчайшее расстояние, т. е. длину отрезка геодезической линии, соединяющей точки A и B. Отметим, что именно так поступают при измерении расстояния между двумя удаленными друг от друга городами (например, между Москвой и Владивостоком), так как с практической точки зрения представляет интерес именно расстояние, измеренное по поверхности Земли, а не длина соответствующей хорды земного шара.

Геодезические линии на поверхности играют роль прямых на плоскости. Действительно, именно прямая является кратчайшей из всех линий, соединяющих две данные точки. Через каждые две точки проходит одна и только одна прямая. То же свойство имеет место и для геодезических линий. Расстояние между точками на плоскости измеряется по отрезку прямой, их соединяющему. *Расстояние между точками на поверхности измеряется по отрезку геодезической линии, соединяющему эти точки*. Наконец, через каждую точку в любом направлении проходит одна и только одна прямая. Оказывается, что аналогичное свойство имеет место и для геодезических линий.

Как отмечалось выше, большую роль в формировании современного взгляда на теорию поверхностей сыграла работа К. Ф. Гаусса «Общее исследование кривых поверхностей». Идея нового подхода к теории поверхностей зародилась у Гаусса в 1820 году, когда ему было поручено произвести геодезическую съемку земли Ганновер. Следует отметить, что специфической особенностью геодезии является необходимость проведения измерений на поверхности Земли, т. е. на искривленной поверхности. Это навело Гаусса на мысль о выделении в самостоятельный класс тех свойств поверхности, которые могут быть обнаружены путем измерений, проводимых на самой поверхности (т. е. без обращения к окружающему эту поверхность пространству). Совокупность этих свойств называют *внутренней геометрией поверхности*. Можно сказать иначе: внутренняя геометрия поверхности — это совокупность таких ее свойств, которые не меняются при *изгибаниях*, т. е. деформациях поверхности, сохраняющих расстояния (измеренные по дугам геодезических линий между любыми парами ее точек). Каковы эти свойства? Чтобы ответить на вопрос, следует прежде всего отчетливо понять, как измеряется расстояние между двумя точками на поверхности. Заметим, что для этого достаточно знать, как вычисляется расстояние между двумя очень близкими точками поверхности. В самом деле, если бы соответствующие формулы были нам известны, мы бы могли поступить так: соединить две данные точки A и B какой-нибудь кривой линией, лежащей на поверхности, измерить длину дуги AB этой линии с помощью вписанных ломаных с очень малыми звеньями, а затем из всевозможных кривых линий выбрать ту, длина дуги которой минимальна*. Эта длина дуги и дает искомое расстояние.

Вопрос об измерении расстояния между двумя очень близкими точками поверхности существенно проще исходного, так как любая поверхность в малой окрестности может приближенно считаться плоскостью. Этот факт хорошо известен нам из опыта. Так, путешествуя по озеру, мы считаем его поверхность плоской и, выбирая маршрут, исходим из евклидовой геометрии. Совершенно иная ситуация наблюдается в океане: мореплаватель, пользующийся здесь формулами евклидовой геометрии, никогда не сможет привести свой корабль в нужное место.

Итак, стоящий перед нами вопрос сводится к следующему: как найти расстояние AB между двумя очень близкими точками A и B данной поверхности? К нему мы и переходим. Введем какую-нибудь «внутреннюю» систему координат на поверхности (для этого можно, например, накинуть на поверхность рыболовную сеть, а затем поступить так, как поступают, вводя прямоугольную систему координат на листе миллиметровой бумаги). Обозначим внутренние координаты точек A и B через (u, v) и $(u+du, v+dv)$ соответственно. По предположению, точки A и B очень близки, поэтому расстояние ds между ними, измеренное по поверхности, с большой точностью равно длине отрезка AB:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2, \tag{1}$$

где dx, dy и dz — разности координат точек A и B в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Обозначим через A_1 и B_1 точки поверхности с внутренними координатами $(u+du, v)$ и $(u, v+dv)$ соответственно. С большой точностью четырехугольник AB_1BA_1 можно считать параллелограммом. Поэтому величина dx равна сумме проекций отрезков AA_1 и AB_1 на ось Ox (с учетом знака). Кроме того, от-

* Задачи такого рода решаются методами так называемого вариационного исчисления. Популярное изложение этих вопросов можно найти, например, в книге: Люстерник Л. А. Кратчайшие линии. М., Гостехиздат, 1955.

резки AA_1 и AB_1 (приближенно) пропорциональны du и dv соответственно. Таким образом, $dx = Pdu + Qdv$, где P и Q — некоторые коэффициенты, зависящие от положения точки A на поверхности, т. е. функции внутренних координат (u, v) этой точки. Аналогичные равенства можно написать и для величин dy и dz. Подставляя эти выражения в (1), получим:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{2}$$

где E, F и G — некоторые функции переменных u, v. Выражение (2) называется *метрической формой поверхности*, так как с ее помощью можно ввести на поверхности метрику — правило вычисления расстояния между любыми двумя точками поверхности. Метрическая форма поверхности была впервые введена Гауссом. Он установил, что эта форма играет основную роль во внутренней геометрии поверхности. Действительно, если две поверхности имеют одинаковые метрические формы, то их внутренние геометрии, очевидно, совпадают. Оказывается, что верно и обратное: если у двух поверхностей внутренние геометрии совпадают, т. е. одна из них может быть получена изгибанием другой, то эти поверхности имеют одинаковые метрические формы (при специальном выборе внутренних координат на поверхностях). В самом деле, изогнем данную поверхность, не меняя внутренних координат на ней. Пусть $E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,dudv + G(u, v)\,dv^2$ — метрическая форма исходной поверхности, а $\tilde{E}(u, v)\,du^2 + 2\tilde{F}(u, v)\,dudv + \tilde{G}(u, v)\,dv^2$ — метрическая форма «изогнутой» поверхности. При изгибании расстояния между любыми парами точек не меняются. В частности, не меняются расстояния между любой парой очень близких точек A и B с координатами (u, v) и $(u+du, v+dv)$. Значит, равенство $E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,dudv + G(u, v)\,dv^2 = \tilde{E}(u, v)\,du^2 + 2\tilde{F}(u, v)\,dudv + \tilde{G}(u, v)\,dv^2$ должно иметь место при любых u, v, du, dv. Полагая в этом равенстве $dv = 0$, $du \neq 0$, находим: $E(u, v) = \tilde{E}(u, v)$; далее, полагая $du = 0$, $dv \neq 0$, получаем: $G(u, v) = \tilde{G}(u, v)$. Из полученных трех равенств следует, что и $F(u, v) = \tilde{F}(u, v)$. Итак, *две поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию тогда и только тогда, когда в соответствующих координатах их метрические формы совпадают*. Из этой теоремы следует, *что внутреннюю геометрию поверхности составляют те* *и только те ее свойства, которые могут быть установлены лишь на основе ее метрической формы.* Этот важный вывод и был сделан Гауссом.

Пользуясь полученным результатом, можно установить принадлежность целого ряда понятий и величин, таких, как гладкость линии, угол между пересекающимися линиями, площадь фигуры на поверхности, к внутренней геометрии поверхности. Докажем, например, что угол между двумя линиями на поверхности не меняется при изгибаниях поверхности. Точнее, выведем формулу для вычисления угла φ между линиями через метрическую форму. Пусть l_1 и l_2 — две линии на поверхности, пересекающиеся в точке A с внутренними координатами (u, v). Возьмем точки B и C на кривых l_1 и l_2, очень близкие к A. Обозначим их координаты через $(u+du, v+dv)$ и $(u+\delta u, v+\delta v)$ соответственно. Тогда согласно формуле (2) стороны «треугольника» ABC таковы:

$$AB=\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2};$$

$$AC=\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2};$$

$$BC=\sqrt{E(du-\delta u)^2+2F(du-\delta u)(dv-\delta v)+G(dv-\delta v)^2}.$$

Поскольку дуги AB, AC и BC очень малы, то «треугольник» ABC можно с очень большой точностью считать обычным треугольником и применить к нему теорему косинусов: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\varphi$. Подставляя в это равенство значения AB, AC и BC и производя соответствующие алгебраические преобразования, получим окончательно:

$$\cos\varphi=\frac{Edu\delta u+Fdu\delta v+F\delta udv+Gdv\delta v}{\sqrt{(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)(E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2)}}. \qquad (3)$$

Итак, угол между линиями на поверхности может быть вычислен только через метрическую форму поверхности, а значит, он не меняется при изгибаниях этой поверхности.

К числу наиболее замечательных достижений Гаусса следует отнести следующую, на первый взгляд совершенно неожиданную теорему: *гауссова кривизна поверхности может быть вычислена только через метрическую форму и, следовательно, является объектом внутренней геометрии поверхности.* Таким образом, при изгибаниях поверхности ее главные кривизны меняются, но их произведение остается неизменным! Гаусс справедливо считал эту теорему столь важной, что дал ей название «theorema egregium», что означает «великолепная, превосходная» теорема.

Theorema egregium имеет и чисто геометрическую интерпретацию, также найденную Гауссом. Опишем ее. Для этого рассмотрим на поверхности *геодезический треугольник*, т. е. треугольник, стороны которого представляют собой отрезки геодезических линий. С точки зрения внутренней геометрии поверхности такой треугольник является, очевидно, обычным треугольником, хотя сумма его углов $\alpha+\beta+\gamma$, вообще говоря, не равна π. Разобьем геодезический треугольник на n областей равной площади, в каждой области выберем произвольную точку M_i и вычислим в ней значение гауссовой кривизны k_i. Составив затем среднее арифметическое из найденных кривизн и умножив его на площадь S треугольника, получим величину $\Delta_n=\frac{k_1+k_2+\ldots+k_n}{n}S$. Гаусс доказал, что предел, к которому стремится величина Δ_n при $n\to\infty$, равен $\alpha+\beta+\gamma-\pi$. Таким образом, находя только суммы углов треугольников на поверхности, можно определить кривизну в различных точках этой поверхности, ничего не зная о расположении поверхности в пространстве.

Последний результат Гаусса выглядит совсем просто в том случае, когда гауссова кривизна k одинакова во всех точках поверхности. Действительно, в этом случае величина $\Delta_n=kS$, т. е. одинакова при всех значениях n. Следовательно, для суммы углов геодезического треугольника в этом случае мы получаем формулу:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+kS. \qquad (4)$$

При $k=0$ эта формула совпадает с обычной евклидовой формулой для суммы углов треугольника. Это и не удивительно: все поверхности нулевой кривизны могут быть получены изгибанием плоскости и, следовательно, имеют евклидову внутреннюю геометрию. Нетрудно проверить, что в случае $k>0$ формула (4) дает выражение для суммы углов геодезического треугольника на сфере радиуса $r=\frac{1}{\sqrt{k}}$. В случае же $k<0$ формула (4) дает выражение для суммы углов треугольника в геометрии Лобачевского с радиусом кривизны $r=\frac{1}{\sqrt{-k}}$ (сравните с формулой (3) § 2 гл. 1). Следовательно, внутренняя геометрия поверхностей постоянной отрицательной кривизны совпадает с геометрией плоскости Лобачевского (или, во всяком случае, ее части). Как отмечалось в главе I, этот замечательный вывод был сделан Е. Бельтрами в 1868 году.

Таким образом, ко второй половине XIX века удалось объединить общей идеей на первый взгляд совершенно не связанные между собой разделы геометрии: геометрию Евклида, сферическую геометрию и только что открытую геометрию Лобачевского.

§ 2. Риманова геометрия

В 1854 году выдающийся немецкий математик Бернгард Риман выступил перед гёттингенскими математиками с докладом «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии», в котором он дал совершенно новый подход к теории неевклидовых пространств. Основная идея Римана состояла в следующем. При рассмотрении теории поверхностей Гаусс нашел целый ряд свойств, которые могут быть обнаружены путем измерений на самой поверхности, без какого-либо привлечения окружающего пространства. Эти свойства составляют внутреннюю геометрию поверхности. Риман поставил вопрос: нельзя ли вообще отказаться от окружающего поверхность пространства? Иными словами, нельзя ли построить абстрактно такую геометрию, которая совпадала бы с внутренней геометрией произвольной поверхности? Такая геометрия им и была построена. В современной литературе она называется *римановой геометрией*.

Чтобы лучше понять идею Римана, представим себе, как это мы делали раньше, что мы — «двумерные существа», живущие на некоторой поверхности и ничего не знающие об окружающем пространстве. Попробуем построить на нашей поверхности геометрию (она, очевидно, и будет внутренней геометрией нашей поверхности). Для этого введем на ней координаты так, чтобы каждой точке соответствовала своя пара чисел (u, v). Далее, измеряя длины очень малых отрезков, найдем метрическую форму нашего двухмерного пространства:

$$ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2. \qquad (1)$$

С помощью этой метрической формы можно найти длину дуги любой линии, измеряя ее «малыми шагами», т. е. вписывая в нее ломаные с очень большим числом звеньев. Из всех кривых, соединяющих две (не слишком удаленные) точки, мы сможем тогда выбрать кратчайшую — геодезическую линию. Пользуясь формулой (3) предыдущего параграфа, можно определить угол между пересекающимися кривыми. Далее, по формуле, найденной Гауссом, мы можем вычислить кривизну нашего двухмерного пространства в каждой его точке. Для вычисления кривизны, впрочем, можно поступить и иначе — воспользоваться ее геометрической интерпретацией. В самом деле, данную точку можно «окружить» геодезическим треугольником очень малых размеров, вычесть из суммы его углов π и полученный результат поделить на площадь треугольника — это и будет приближенное значение кривизны в данной точке. Результат окажется тем точнее, чем меньше размеры геодезического треугольника. Иными словами, точное значение кривизны — это предел полученного значения при неограниченном уменьшении размеров геодезического треугольника.

Итак, мы приходим к следующему определению риманова пространства: римановым пространством называется множество точек, каждая из которых характеризуется своими координатами (u, v); при этом квадрат расстояния ds^2 между двумя очень близкими точками с координатами (u, v) и $(u+du, v+dv)$ определяется по формуле (1), где $E(u, v)$, $F(u, v)$ и $G(u, v)$ — данные функции.

Риманова геометрия включает в себя как частный случай сферическую геометрию (когда кривизна положительна и постоянна), планиметрию Евклида (когда кривизна равна нулю) и геометрию Лобачевского (когда кривизна отрицательна и постоянна). Подчеркнем, что в последнем случае можно получить геометрию всей плоскости Лобачевского, а не только ее части, как в модели Бельтрами!

Риман пошел еще дальше в своих построениях: он обобщил предложенную им геометрию на многомерный случай. Поясним конструкцию многомерного пространства. Для простоты начнем с евклидова пространства. Как известно, на плоскости положение точки определяется двумя координатами (x, y), а квадрат расстояния между двумя точками A и B вычисляется по формуле:

$$AB^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

где Δx и Δy — разности соответствующих координат этих точек. В пространстве (трехмерном) положение точки определяется тремя координатами (x, y, z), а квадрат расстояния между двумя точками A и B вычисляется по формуле:

$$AB^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

где Δx, Δy и Δz — разности соответствующих координат этих точек. Аналогично, в n-мерном евклидовом пространстве положение точки определяется n координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а квадрат расстояния между двумя точками A и B вычисляется по формуле:

$$AB^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2,$$

где Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n — разности соответствующих координат этих точек.

Положение точки в n-мерном римановом пространстве также определяется n координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а квадрат расстояния между двумя очень близкими точками с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, \ldots, x_n+$ $+dx_n)$ вычисляется по формуле:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i dx_j, \qquad (2)$$

где $g_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — данные функции переменных x_1, x_2, ..., x_n, причем $g_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_{ji}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При $n=2$ это определение, очевидно, в точности совпадает с определением, данным в начале параграфа (если положить $x_1 = u$, $x_2 = v$, $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$, то формула (2) совпадет с формулой (1)). Как и в двухмерном случае, формула (2) позволяет измерять «малыми шагами» длины дуг любых кривых. Поэтому с ее помощью могут быть найдены геодезические линии. Далее, применяя теорему косинусов так, как это делалось в § 1, можно найти формулу для вычисления угла между двумя линиями. Отметим также, что с помощью формулы (2) можно вычислять площади фигур, объемы тел и т. д.

Существенно сложнее определяется в n-мерном римановом пространстве кривизна. Очевидно, формулу Гаусса, выражающую кривизну двухмерной поверхности через ее метрическую форму, в случае $n>2$ применить нельзя. Поэтому для определения кривизны остается только один путь — воспользоваться ее геометрической интерпретаци ей. «Окружим» данную точку геодезическим треугольником, вычислим сумму $\alpha+\beta+\gamma$ его углов и составим отношение $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)/S$, где S — площадь треугольника. Поступим теперь так же, как и в двумерном случае: будем неограниченно уменьшать размеры геодезического треугольника и примем за точное значение кривизны в данной точке предел, к которому стремится составленное отношение. Казалось бы, здесь нет принципиального отличия от двумерного случая. Оказывается, отличие все-таки есть! Дело в том, что полученное предельное значение зависит не только от самой точки, но и от той «плоскости», в которой лежат рассматриваемые геодезические треугольники. В двумерном случае ничего подобного не возникало, и это не удивительно — там все треугольники лежали в одной «плоскости». При $n>2$ ситуация, очевидно, иная. Поэтому в этом случае говорят не просто о кривизне в данной точке, а о *кривизне в данной точке и в данном «двумерном направлении»*.

Мы видим, что в общем случае структура многомерных римановых пространств весьма сложна. Среди них, однако, есть относительно простой класс пространств — так называемые *пространства постоянной кривизны*. Эти пространства характеризуются тем, что в них кривизна одна и та же во всех точках и по всем «двумерным направлениям»*. В частности, при $n=3$, в зависимости от знака кривизны k, возможны три случая: $k=0$ — стереометрия Евклида, $k<0$ — стереометрия Лобачевского, $k>0$ — трехмерная сферическая геометрия. Отметим, что последняя геометрия может быть определена и непосредственно: это геометрия на трехмерной сфере в четырехмерном евклидовом пространстве. Уравнение такой сферы в прямоугольной системе координат $Oxyzw$ имеет вид: $x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$.

При $n>3$ пространства постоянной кривизны дают обобщения евклидовой, сферической и геометрии Лобачевского по числу измерений.

Таким образом, риманова геометрия является естественным и вместе с тем чрезвычайно глубоким обобщением теории поверхностей Гаусса. Как и геометрия Лобачевского, она обогнала свое время: доклад Римана не был в

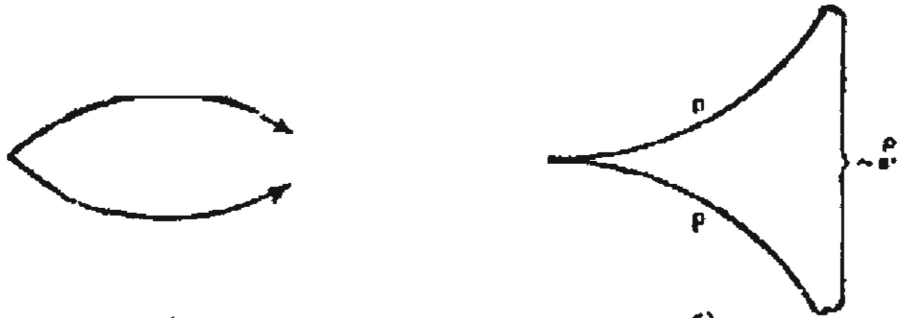
* В этой связи уместно упомянуть результат немецкого математика И. Шура, полученный им в 1903 году. Шур доказал, что если кривизна в каждой точке риманова пространства не зависит от «двумерных направлений», то она одинакова и во всех точках. Иными словами, такое пространство является пространством постоянной кривизны.

полной мере оценен гёттингенскими математиками. Из всех присутствующих на этом докладе лишь один Гаусс был вполне подготовлен к восприятию идей Римана (как отмечают очевидцы, Гаусс вышел после окончания доклада в глубокой задумчивости). Огромное значение римановой геометрии для естествознания было выявлено лишь в XX веке.

§ 3. Геометрия Лобачевского в наши дни

Вернемся теперь к геометрии Лобачевского. В главе I мы отмечали ту огромную мировоззренческую роль, которую она сыграла в науке XIX века. Явившись первой в истории неевклидовой геометрией, она существенно расширила и углубила представления о пространстве и положила начало бурному развитию самых разнообразных областей математики и физики. В настоящее время, однако, этот аспект отошел на второй план — сейчас никого не удивишь возможностью построения неевклидовой геометрии. Однако весь комплекс идей, связанных с геометрией Лобачевского и оперирующих ее понятиями, продолжает активно развиваться и в наши дни. Основное внимание в нем переместилось с изучения геометрии Лобачевского как замкнутой теории на ее исследование в связи с многочисленными смежными проблемами математики. Поэтому изменилась и та роль, которую играет сейчас геометрия Лобачевского в математике.

Место геометрии Лобачевского в современной математике во многом определилось развитием римановой геометрии. Напомним, что с точки зрения последней пространство Лобачевского есть пространство постоянной отрицательной кривизны. Оказывается, что свойства римановых пространств переменной отрицательной кривизны во многом сходны со свойствами пространств постоянной отрицательной кривизны. Геометрия Лобачевского тем самым является в этом круге вопросов типичным представителем пространств отрицательной кривизны. Геометрия пространств переменной кривизны весьма сложна. Геометрия же Лобачевского, напротив, относительно проста для изучения. Таким образом, геометрия Лобачевского дает аппарат для исследования пространств переменной отрицательной кривизны: усмотрев какой-либо факт в геометрии Лобачевского, мы можем рассчитывать на то, что в той или иной мере аналогичный факт будет иметь место и в геометрии про-



а) б)

Рис. 18.

странств переменной отрицательной кривизны. Аналогичная ситуация наблюдается и в геометрии пространств переменной положительной кривизны: роль пространства, с одной стороны моделирующего основные свойства таких пространств, с другой стороны достаточно простого для изучения, играет здесь сфера (соответствующего числа измерений). Подобный подход, при котором различные пространства исследуются в отношении их сходства с пространствами постоянной кривизны, занимает сейчас центральное место во многих разделах геометрии. Более того, в тех вопросах, в которых пространство постоянной кривизны не является типичным, каждое, даже небольшое продвижение дается с огромным трудом. Любопытно, что с этой точки зрения евклидово пространство (пространство нулевой кривизны) представляет меньший интерес, так как оно не моделирует свойств широкого класса пространств.

Поясним, в чем выражается упомянутый модельный характер пространств постоянной кривизны. Прежде всего он выражается в поведении геодезических линий. Все мы знаем, что геодезические линии на сфере (большие окружности), выпущенные из одной точки, вскоре начинают снова сходиться (рис. 18, *а*). Такая же ситуация имеет место и в пространствах переменной положительной кривизны. В геометрии Лобачевского, напротив, две геодезические, выпущенные из одной точки, начинают очень быстро расходиться. В самом деле, как следует из теоремы косинусов Лобачевского (гл. I, § 2), расхождение таких геодезических при достаточно большом удалении от исходной точки становится пропорциональным степенной функции от расстояния до этой точки (рис. 18, *б*). Оказывается, что аналогичная ситуация имеет место во всех пространствах отрицательной кривизны. Отметим, что исследование поведения геодезических линий в различных римановых пространствах представляет очень большой интерес не только для математиков, но и для физиков.

В этой связи уместно упомянуть задачу, поставленную и решенную русским математиком Д. Д. Соколовым: а как ведут себя две геодезические, выпущенные из одной точки, в римановом пространстве, кривизна которого является случайно заданной величиной (т.е. она случайным образом меняется от точки к точке, становясь то положительной, то отрицательной, то равной нулю)? Оказывается, что геодезические расходятся, причем приблизительно с такой же скоростью, как в римановом пространстве отрицательной кривизны. Теорема Соколова, тем самым, показывает, что в круге задач, связанных с поведением геодезических, геометрия Лобачевского оказывается типичным представителем не только пространств отрицательной кривизны, но и, в значительной мере, всех римановых пространств!

Вероятно, наиболее содержательна роль геометрии Лобачевского как модели геометрии отрицательной кривизны в теории погружений римановых пространств в евклидовы. Поясним, в чем состоит эта теория. Напомним, что при построении римановой геометрии мы ставили перед собой цель определить абстрактно такую геометрию, которая совпадала бы с внутренней геометрией некоторой произвольной поверхности. Теперь спросим себя: в какой мере мы достигли этой цели? Ясно, что для любой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве мы можем указать такое двумерное риманово пространство, на котором реализуется внутренняя геометрия этой поверхности. Однако верно ли обратное? Пусть нам дано двумерное риманово пространство с метрической формой

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)du dv + G(u, v)dv^2,$$

где $E(u, v)$, $F(u, v)$ и $G(u, v)$ — данные функции. Спрашивается: существует ли в трехмерном евклидовом пространстве поверхность, внутренняя геометрия которой совпадает с геометрией данного риманова пространства? Задача о нахождении такой поверхности называется *задачей о погружении данного двумерного риманова пространства в трехмерное евклидово пространство.*

Исторически первая задача о погружении римановых пространств была сформулирована Д. Гильбертом в 1900 году и решена им же в 1901 году. Это была задача о погружении в трехмерное евклидово пространство плоскости Лобачевского — полного * двумерного риманова про-

* Строгое определение понятия полноты риманова простанства ввиду своей сложности не может быть приведено в этой книге. Приблизительно это понятие можно описать так: в полном римановом пространстве любая геодезическая линия может быть неограниченно продолжена в обе стороны.

странства постоянной отрицательной кривизны. Гильберт доказал, что такое погружение невозможно. Иными словами, поверхности, внутренняя геометрия которой совпадает с геометрией Лобачевского, в трехмерном евклидовом пространстве нет. Подчеркнем, что речь идет о всей плоскости Лобачевского, а не о ее части. Как мы знаем, погружения частей плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство возможны (гл. I, § 3).

Теорема Гильберта порождает естественный вопрос: не погружается ли плоскость Лобачевского в целом в евклидово пространство какого-нибудь большего числа измерений? Прежде чем дать ответ на этот вопрос, поясним, что следует понимать под таким погружением. Точнее, поясним, что понимается под двумерной поверхностью в многомерном пространстве. Прежде всего уточним понятие поверхности в трехмерном пространстве. Для этого заметим, что если на поверхности заданы внутренние координаты (u, v), то положение каждой точки поверхности однозначно задается набором ее внутренних координат. Таким образом, каждой паре чисел (u, v) отвечает единственный набор чисел

$$\begin{aligned} x&=x(u, v), \\ y&=y(u, v), \\ z&=z(u, v) \end{aligned}$$

— координат точки поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Очевидно, эти формулы представляют собой уравнения нашей поверхности.

Построение уравнений двумерной поверхности в n-мерном пространстве совершенно аналогично: положение каждой точки поверхности, т. е. набор ее координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, однозначно определяется по ее внутренним координатам, т. е.

$$\begin{aligned} x_1&=x_1(u, v), \\ x_2&=x_2(u, v), \\ &\cdots\cdots \\ x_n&=x_n(u, v) \end{aligned}$$

Ясно, что эти формулы и дают уравнения двумерной поверхности в n-мерном пространстве.

Ответим теперь на вопрос о погружениях плоскости Лобачевского в многомерные евклидовы пространства. В 1955 году югославский математик Д. Блануша доказал, что вся плоскость Лобачевского может быть погружена

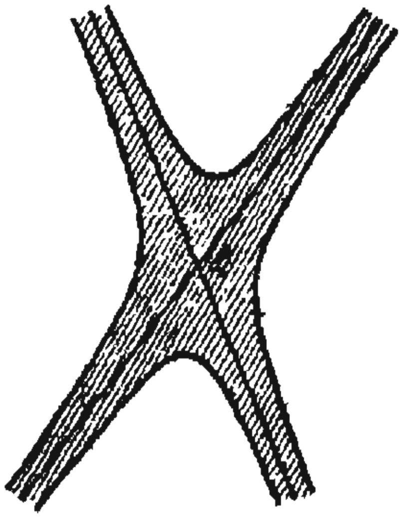


Рис.19.

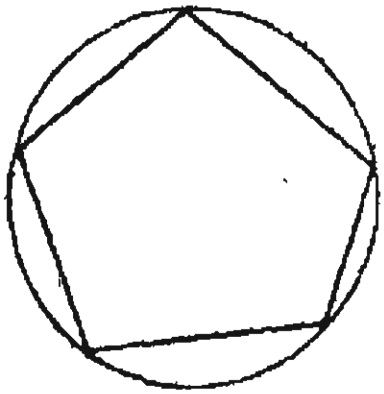


Рис.20

в шестимерное евклидово пространство. Несколько видоизменив методику Блануша, советский математик Э. Р. Розендорн в 1960 году доказал погружаемость плоскости Лобачевского в пятимерное пространство. Вопрос о возможности погружения всей плоскости Лобачевского в четырехмерное евклидово пространство до сих пор не решен.

Риманово пространство постоянной положительной кривизны погружается в трехмерное евклидово пространство в виде сферы — поверхности, которая может скользить по самой себе. Аналогичным свойством обладают плоскость и цилиндр — поверхности нулевой кривизны. Возникает вопрос: не погружается ли плоскость Лобачевского — пространство постоянной отрицательной кривизны — в какое-нибудь евклидово пространство (достаточно большого числа измерений) в виде поверхности, допускающей скольжение по самой себе? Оказывается, что такое погружение всей плоскости Лобачевского в евклидово пространство конечного числа измерений невозможно.

Отметим, что результат Гильберта порождает и другой вопрос: какие части плоскости Лобачевского могут быть погружены в трехмерное евклидово пространство? Как мы знаем, еще до Гильберта, в работах Ф. Миндинга (1838) и Э. Бельтрами (1872), были найдены поверхности постоянной отрицательной кривизны, являющиеся погружениями круга, «полосы» между двумя эквидистантами и области, ограниченной орициклом (см. рис. 9, 10). Нетрудно доказать, что любая конечная область плоскости Лобачевского также погружается в трехмерное пространство. В 1927 году итальянский геометр Л. Бьянки доказал погружаемость в трехмерное пространство некоторой области, содержащей две пересекающиеся прямые плоскости Лобачевского. Вид этой области был уточнен в 1955 году французским математиком М. Амслером. Схематично она изображена на рис. 19. Наконец, в 1976 году, к 150-летию геометрии Лобачевского, советский математик Э. Г. Позняк доказал погружаемость в трехмерное пространство любого асимптотического многоугольника плоскости Лобачевского с конечным числом вершин. Один из таких многоугольников изображен на рис. 20 (в модели Кэли — Клейна). Отметим также, что за год до этого результата Э. Г. Позняка советский математик Н. В. Ефимов доказал непогружаемость любого угла (т. е. области между двумя лучами, выходящими из одной точки) плоскости Лобачевского.

До сих пор мы рассматривали лишь вопрос о погружении плоскости Лобачевского и ее частей. Какова же общая ситуация в теории погружений римановых пространств в евклидовы? Отвечая на этот вопрос, ограничимся рассмотрением некоторых результатов, связанных с погружениями двумерных римановых пространств в трехмерное евклидово пространство. Оказывается, что определяющую роль здесь играет знак кривизны риманова пространства. Грубо говоря, римановы пространства положительной кривизны хорошо погружаются, а полные пространства отрицательной кривизны, как правило, вообще не погружаются. Особое место среди поверхностей положительной кривизны занимает сфера. Полные пространства, в определенном смысле близкие к пространству постоянной положительной кривизны, имеют и реализации, похожие на сферу. Например, любое пространство положительной кривизны погружается в виде выпуклой поверхности. Далее, если кривизна пространства во всех точках больше некоторой положительной постоянной, то оно реализуется в виде овалоида — поверхности, которую любая прямая пересекает не более чем в двух точках. Если кривизна такого пространства изменяется менее, чем в четыре раза, то поверхность, на которой реализуется геометрия этого пространства, может быть получена из сферы путем некоторой ее деформации (как следует из предыдущего, с сохранением выпуклости). В общем можно сказать, что поверхности положительной кривизны образуют естественный класс поверхностей, обобщающих свойства сферы. Этот класс поверхностей детально изучен советскими математиками А. Д. Александровым, А. В. Погореловым и их многочисленными учениками.

Совершенно иная картина наблюдается в теории погружений пространств отрицательной кривизны. Прежде всего в трехмерном евклидовом пространстве нет полной поверхности постоянной отрицательной кривизны, что, как мы помним, доказал в 1901 году Д. Гильберт. Оказывается, эта ситуация типична для поверхностей отрицательной кривизны. Именно, имеет место следующая теорема Н. В. Ефимова, доказанная им в 1963 году: полное риманово пространство, кривизна которого во всех точках меньше некоторой отрицательной постоянной, не может быть погружено в трехмерное евклидово пространство. Этот факт указывает на сходство пространств отрицательной кривизны с плоскостью Лобачевского. Наиболее близкими к плоскости Лобачевского оказываются пространства, кривизна которых во всех точках заключена между двумя отрицательными постоянными. В таких пространствах можно указать линии, аналогичные по своим свойствам эквидистанте и орициклу. Можно также ставить вопрос о погружении различных частей этих пространств, опираясь на аналогию с плоскостью Лобачевского. Такая аналогия действительно в ряде случаев правомерна. Так, Э. Г. Позняк доказал, что «полоса» между двумя эквидистантами в любом таком пространстве погружается в виде поверхности, похожей на «катушку» Миндинга (см. рис. 9, *в*), а его ученик Е. В. Шикин доказал погружаемость области, ограниченной орициклом, в виде поверхности, напоминающей псевдосферу Бельтрами (см. рис. 9, *а*).

Из теоремы Н. В. Ефимова можно сделать и другой вывод: кривизна всякой полной поверхности отрицательной кривизны обязательно стремится к нулю по мере удаления поверхности к бесконечности. В зависимости от поведения кривизны на бесконечности возможны различные типы таких поверхностей. Изучению этих типов посвящены работы ряда геометров, в частности, советского математика А. Л. Вернера и его учеников.

Таким образом, поверхности отрицательной кривизны в отличие от поверхностей положительной кривизны не образуют единого класса. Напротив, они распадаются на несколько классов, внутри которых обнаруживается значительное сходство, но поверхности разных классов мало похожи друг на друга. Это и не удивительно — ведь и поверхности постоянной отрицательной кривизны, реализующие различные части плоскости Лобачевского, мало похожи друг на друга.

Заканчивая этот краткий обзор, отметим, что вопрос о погружении двумерных римановых пространств переменной отрицательной кривизны в многомерные пространства до сих пор геометрами почти не рассматривался. Это связано, видимо, с тем, что вопрос не решен еще в полном объеме даже для плоскости Лобачевского.

Подводя итог, можно сказать, что геометрия Лобачевского и в наши дни продолжает находиться в центре внимания большого числа ученых, хотя роль ее в математике несколько изменилась: из замкнутой науки, исследующей вопрос о возможном устройстве параллельных прямых на плоскости, она превратилась в основной аппарат для исследования очень важных для всей науки пространств отрицательной кривизны. Можно с уверенностью сказать, что геометрия Лобачевского еще долгие годы будет оставаться объектом исследований многих поколений геометров.

ГЛАВА III. Геометрия Лобачевского и физика

§ 1. Пространство скоростей и геометрия Лобачевского

Основной постулат ньютоновой механики — принцип относительности Галилея — гласит: все законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета *. Иными словами, все инерциальные системы отсчета равноправны: не существует такого механического эксперимента, с помощью которого можно было бы установить, что какая-то система отсчета покоится, а остальные движутся. Возникает, однако, вопрос: нельзя ли найти такую абсолютно покоящуюся систему отсчета, используя какие-либо другие физические эффекты? В конце XIX века многим физикам казалось, что такую систему отсчета можно найти, производя опыты со светом. Дело в том, что к этому времени было экспериментально установлено, что скорость света не зависит от скорости движения его источника. Сам по себе этот факт не показался физикам удивительным.

* Напомним, что система отсчета называется инерциальной, если всякое тело в ней обладает свойством сохранять свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения при отсутствии действующих на него сил.

Действительно, свет — волновое движение, а все известные виды волнового движения (звук, волны на воде и т. д.) обладают указанным свойством. Но именно это свойство и позволяет определить скорость системы отсчета относительно той среды, в которой распространяются волны. Например, измеряя скорость звука в различных направлениях, можно установить, движемся мы относительно воздуха или нет, так как скорость звука в направлении нашего движения относительно воздуха должна быть меньше, чем в противоположном направлении. Свет, как предполагали физики того времени, также должен распространяться в некоторой неподвижной среде, которую называли эфиром (иначе как с точки зрения классической теории объяснить независимость скорости света от скорости его источника?). Поэтому, измеряя скорость света в различных направлениях, полагали физики, мы можем найти скорость, с которой Земля движется относительно неподвижного эфира. Такой эксперимент был проведен в 1887 году американскими физиками А. Майкельсоном и Е. *Морли*, однако результат его оказался самым неожиданным: несмотря на то что Земля вращается вокруг Солнца со скоростью 30 км/с, скорость света во всех направлениях одна и та же!

С 1887 года проводились самые разнообразные эксперименты по измерению скорости света, но результат их был один и тот же: *скорость света в пустоте всегда одна и та же независимо от того, в какой инерциальной системе отсчета ее измеряют.* Этот результат никак не может быть объяснен с точки зрения классической механики. Действительно, мы знаем, что свет от Солнца распространяется со скоростью 300 000 км/с. Представим себе ракету, удаляющуюся от Солнца со скоростью 150 000 км/с. Космонавт, летящий в ракете, измеряет скорость света, распространяющегося от Солнца. Каким будет значение этой скорости? С точки зрения классической механики эта скорость должна быть равна 150 000 км/с. В действительности же она по-прежнему равна 300 000 км/с. Какой вывод из этого можно сделать? Вывод очевиден: законы классической механики верны лишь приближенно, при малых скоростях относительного движения. При больших скоростях, близких к скорости света, они нарушаются. Каковы же законы механики при больших скоростях? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо тщательно проанализировать все исходные положения механики.

Начнем с принципа относительности Галилея. Очевидно, факт постоянства скорости света ни в коей мере ему не противоречит. Более того, скорость света является одной из постоянных, входящих в законы электродинамики. Поэтому можно сказать, что не только законы механики, но и законы электродинамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Следует отметить, что весь имеющийся на сегодняшний день экспериментальный материал свидетельствует в пользу того, что принцип Галилея может быть распространен вообще на все законы физики. Во всяком случае, несмотря на самые тщательные поиски, никто никогда не обнаруживал нарушений этого принципа. Поэтому можно считать экспериментально доказанным следующий закон природы: *все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*. Этот фундаментальный закон, впервые сформулированный А. Эйнштейном, составляет основу специальной теории относительности.

Итак, принцип относительности не только не опровергается, но и блестяще подтверждается всеми имеющимися экспериментами. Другим основным положением классической механики является утверждение о том, что промежуток времени между двумя событиями, измеренный в разных системах отсчета, одинаков. Не составляет труда убедиться в том, что если мы примем и этот постулат, то придем к противоречию с фактом постоянства скорости света. Следовательно, при больших скоростях он должен нарушаться. Но каков же должен быть истиный закон, верный как при малых, так и при больших скоростях? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим две инерциальные системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с некоторой постоянной скоростью. В каждой системе отсчета имеется своя прямоугольная система координат и свои часы. Факт постоянства скорости света позволяет ввести удобную единицу измерения времени в обеих системах — метр светового времени, т. е. тот промежуток времени, за который свет проходит расстояние в 1 метр. При таком выборе единицы измерения времени скорость света равна 1, а скорость любого тела — безразмерное число, меньшее единицы. Для простоты будем считать, что оси координат в обеих системах соответственно параллельны, а скорость второй системы относительно первой направлена вдоль оси Ox. Допустим, что два события (например, два взрыва) фиксируются в первой и во второй си-

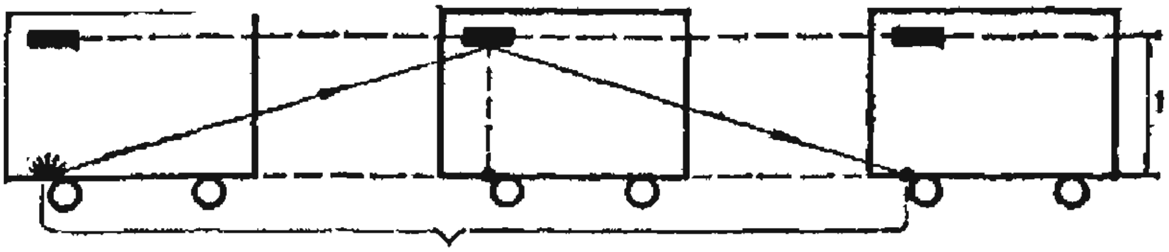


Рис.21.

стемах отсчета. Пусть, например, в первой системе отсчета разности координат этих событий — Δx, Δy, Δz, а во второй — $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$; промежуток времени между событиями в первой системе отсчета — Δt, во второй — $\Delta t'$. Как связаны между собой эти величины? Исходя из принципа относительности, мы сразу можем сказать, что $\Delta y = \Delta y'$ и $\Delta z = \Delta z'$, т. е. *длины в направлении, перпендикулярном относительной скорости систем, одинаковы*. В самом деле, представим себе, что мы стоим на железнодорожной насыпи рядом со столбом высотой 3 м. Мимо нас проходит поезд, крыша вагона которого находится как раз на уровне конца столба. Из этого мы делаем вывод, что высота вагона в нашей системе отсчета равна 3 м. Пассажир из окна поезда также видит, что крыша вагона находится на уровне конца столба. Поэтому он должен признать, что высота вагона в его системе отсчета также равна 3 м.

Итак, $\Delta y = \Delta y'$, $\Delta z = \Delta z'$. Осталось установить связь между Δx, $\Delta x'$, Δt, $\Delta t'$. Представим себе, что в вагоне движущегося поезда установлена лампа, а прямо над ней, на высоте 1 м, — зеркало (рис. 21). Рассмотрим два события. Событие 1 состоит в том, что лампа вспыхивает и тут же гаснет. Луч света доходит до зеркала, отражается от него и возвращается к лампе. Событие 2 состоит в том, что фотоэлемент, находящийся около лампы, фиксирует возвращение отраженного луча света. Найдем интервал времени между этими событиями в системе отсчета, связанной с вагоном, и в системе отсчета, связанной с Землей. В системе отсчета вагона события 1 и 2 произошли в одной и той же точке, поэтому $\Delta x = 0$. Между событиями 1 и 2 свет успел пройти расстояние 2 м, поэтому $\Delta t = 2$ м (в метрах светового времени). В системе отсчета Земли события 1 и 2 произошли в различных точках. Обозначим разность координат этих точек через $\Delta x'$. Между событиями 1 и 2 свет прошел расстояние $2\sqrt{1+\left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2}$ м, поэтому $\Delta t = 2\sqrt{1+\left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2}$ м (скорость света одинакова во всех системах отсчета!) Итак, интервал времени между двумя событиями, измеренный в разных системах отсчета, оказывается различным! На первый взгляд этот факт кажется совершенно неправдоподобным, но тем не менее это прямое следствие экспериментально доказанного принципа относительности. Отметим, что если скорость вагона мала, т. е. мало $\Delta x'$, то $\Delta t' \approx 2$ м $= \Delta t$, поэтому различие в интервалах времени проявляется лишь при больших скоростях.

Итак, в разных системах отсчета как пространственный, так и временной интервалы между событиями различны ($\Delta x \neq \Delta x'$, $\Delta t \neq \Delta t'$). Нет ли, однако, какой-нибудь комбинации этих величин, одинаковой для обеих систем отсчета? Достаточно взглянуть на рис. 21, чтобы сразу указать такую комбинацию: $\sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2} = \sqrt{(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2}$. Это выражение, называемое *интервалом между событиями*, равно удвоенной высоте изображенного на рисунке треугольника.

Мы исходили из специального выбора системы координат, при котором относительная скорость двух систем направлена вдоль оси Ox. Если же отказаться от этого ограничения, то роль Δx^2 будет играть сумма $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Поэтому для интервала между событиями в этом случае мы получим выражение:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}. \qquad (1)$$

Таким образом, *пространственный и временной промежутки между двумя событиями в различных системах отсчета различны; величина же интервала (1) между ними одинакова во всех системах отсчета.*

В классической механике обычно рассматривают пространственные координаты и время события в отдельности. В специальной теории относительности удобно рассматривать эти величины в совокупности, опираясь на понятие четырехмерного пространства. Каждое событие изображается в этом пространстве точкой: первые три координаты точки — это пространственные координаты события, а четвертая — момент времени, в который произошло событие (в данной системе отсчета). В четырехмерном пространстве — времени каждое тело движется по кривой, называемой *мировой линией* этого тела (даже в том случае, когда тело покоится в данной системе отсчета, в четырехмерном пространстве — времени оно все равно движется вдоль оси времени).

Перейдем от одной системы отсчета к другой. В четырехмерном пространстве — времени этому будет соответствовать переход от одной системы координат (x, y, z, t) к другой (x', y', z', t'). При этом для любой пары событий — точек пространства — времени — величина интервала (1) не изменится. Поэтому *величину интервала (1) естественно принять за расстояние между событиями.* Никакое тело не может двигаться со скоростью, большей скорости света. Поэтому расстояние между двумя событиями «в жизни» одного и того же тела выражается действительным числом. Два события «в жизни» двух разных тел считаются одновременными, если интервал между ними равен нулю (очевидно, факт одновременности событий не зависит от выбора системы отсчета). Если же расстояние между двумя событиями, найденное по формуле (1), выражается мнимым числом, то эти события не могут повлиять друг на друга, так как «добраться» от одного до другого нельзя (для этого пришлось бы двигаться со скоростью, большей скорости света). Для таких событий удобно ввести расстояние с помощью формулы

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2}. \qquad (2)$$

Очевидно, так определенное расстояние не зависит от выбора системы отсчета.

Наряду с четырехмерным пространством — временем удобно рассматривать трехмерное пространство скоростей. Поясним это понятие. Выберем какую-нибудь систему отсчета. Пусть V_x, V_y, V_z — координаты вектора скорости какого-нибудь тела в этой системе отсчета. Изобразим скорость тела точкой в трехмерном пространстве с координатами (V_x, V_y, V_z). Аналогичным образом поступим со всеми телами. Пространство, в котором по указанному правилу точки изображают скорость тел, и называется *пространством скоростей.*

В дальнейшем для простоты изложения мы ограничимся случаем движения тел в плоскости. Тогда пространство — время можно считать трехмерным, а пространство скоростей — двумерным. Внимательно проанализируем, как устроено пространство скоростей. Прежде всего всякое тело имеет скорость, меньшую скорости света (равной 1 в нашей системе единиц), поэтому пространство скоростей состоит лишь из точек, находящихся внутри круга радиуса 1. Сама система отсчета изображается центром этого круга — ее скорость относительно нее самой равна нулю. Далее, тела, движущиеся друг относительно друга в одном и том же направлении, изображаются точками, лежащими на одной хорде *. Если мы перейдем в другую систему отсчета, то при этом, очевидно, каждая точка внутри круга перейдет в какую-то точку внутри того же круга, а точки ограничивающей его окружности — в точки этой же окружности. Действительно, в новой системе отсчета скорости тел будут иными, однако они по-прежнему будут меньше скорости света; сама же скорость света останется прежней. Далее, тела, двигавшиеся друг относительно друга в одном и том же направлении, при замене системы отсчета останутся движущимися друг относительно друга в одном и том же направлении. Поэтому точки, лежавшие на одной хорде, перейдут в точки, также лежащие на одной хорде.

Таким образом, пространство скоростей — это внутренность круга радиуса 1. Центр круга соответствует системе отсчета. При замене системы отсчета точки круга переходят в точки этого же круга, причем точки, лежавшие на одной хорде, переходят в точки, лежащие на одной хорде. Теперь достаточно вспомнить модель Кэли — Клейна, чтобы сделать замечательный вывод: *пространство скоростей специальной теории относительности есть пространство Лобачевского*! При этом переходу от одной системы отсчета к другой соответствует некоторое перемещение в пространстве Лобачевского.

Мы помним, что при перемещении в плоскости Лобачевского сохраняется расстояние между точками, определяемое по формуле (1) § 3 главы I. Поэтому соответствующая величина, называемая *относительной быстротой двух тел*, сохраняется при переходе к новой системе отсчета. Легко посчитать, что расстояние s точки с координатами (V_x, V_y) от центра круга, равное быстроте тела относительно системы отсчета, связано со скоростью V этого тела соотношением $s = \frac{1}{2} \ln \frac{1+V}{1-V}$.

---

* Это следует из сохранения длин в направлении, перпендикулярном относительной скорости двух систем.

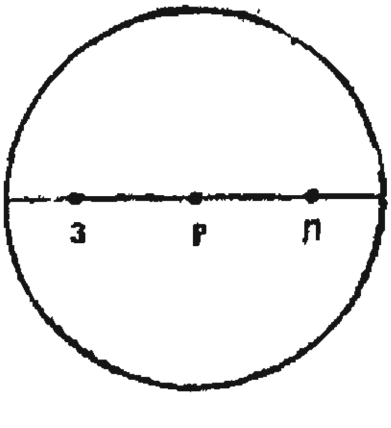


Рис.22

Найдем формулу для вычисления относительной скорости двух тел, движущихся в одном направлении. Для этого рассмотрим, например, такую задачу. Ракета вылетела с Земли со скоростью $V_р$ в направлении оси Ox. Космонавт, летящий в ракете, выстреливает из ружья в направлении движения ракеты. Пусть скорость пули относительно ракеты равна $V'_п$ и направлена вдоль оси Ox в системе отсчета ракеты. Требуется определить скорость пули относительно Земли. Изобразим скорость пули $V'_п$ и скорость Земли $V_р$ в системе отсчета ракеты точками в пространстве скоростей (рис. 22). При этом скорости ракеты соответствует центр круга. Быстрота пули $s_п$ относительно Земли равна сумме быстроты $s_р$ ракеты относительно Земли и быстроты пули $s'_п$ относительно ракеты, так как длина отрезка ЗП равна сумме длин отрезков ЗР и РП. Итак,

$$s_п = \frac{1}{2}\ln\frac{1+V_п}{1-V_п} = s_р + s'_п = \frac{1}{2}\ln\frac{1+V_р}{1-V_р} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+V'_п}{1-V'_п},$$

или $\frac{1+V_п}{1-V_п} = \frac{(1+V_р)(1+V'_п)}{(1-V_р)(1-V'_п)}$, откуда находим:

$$V_п = \frac{V_р + V'_п}{1 + V_р V'_п}. \qquad (3)$$

Нетрудно найти и связь между координатами x, t в системе отсчета Земли и x', t' в системе отсчета ракеты. Для простоты будем считать, что в момент выстрела $x = x' = 0$ и $t = t' = 0$. Тогда в системах отсчета Земли и ракеты уравнения движения пули имеют вид $x = V_п t$ и $x' = V'_п t'$ соответственно. Подставляя в первое уравнение значение $V_п$ из формулы (3), получаем:

$$x = \frac{V_р + V'_п}{1 + V_р V'_п} t;$$

$$x' = V'_п t'.$$

Вспомним, что во всех системах отсчета значение интервала должно быть одним и тем же, т. е. $t^2-x^2=(t')^2-(x')^2$. Исключая из этих уравнений $V'_п$ и выражая x, t через x', t', получаем:

$$x=\frac{x'+V_p t'}{\sqrt{1-V_p^2}};$$
$$t=\frac{t'+V_p x'}{\sqrt{1-V_p^2}}. \tag{4}$$

Полученные формулы (4) называются *преобразованиями Лоренца.* Если измерять время в секундах, а не в метрах, то в формулах (3), (4) следует заменить t и t' на ct и ct', а $V_п$, $V'_п$ и V_p — на $V_п/c$, $V'_п/c$ и V_p/c, где c — скорость света. Тогда эти формулы примут вид:

$$V_п=\frac{V_p+V'_п}{1+\frac{V_p V'_п}{c^2}}; \tag{3'}$$

$$x=\frac{x'+V_p t'}{\sqrt{1-\left(\frac{V_p}{c}\right)^2}}$$
$$t=\frac{t'+\frac{V_p}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{V_p}{c}\right)^2}}. \tag{4'}$$

В случае когда скорость ракеты много меньше скорости света, эти формулы превращаются в обычные формулы ньютоновой механики:

$$V_п=V_p+V'_п; \tag{3''}$$
$$x=x'+V_p t'; \tag{4''}$$
$$t=t'.$$

Если же, напротив, скорость ракеты близка к скорости света, то формулы (3), (4) сильно отличаются от ньютоновых.

Приведенный нами вывод формул (3), (4) показывает, что привлечение идей геометрии Лобачевского к построению специальной теории относительности оказывается весьма плодотворным. Объем настоящей брошюры не позволяет обсудить этот вопрос подробнее, поэтому интересующихся мы отсылаем к специальной литературе, список которой приведен в конце книги. Скажем лишь, что использование геометрии Лобачевского позволяет без большого труда описывать сложные физические процессы, например, производить кинематические расчеты ядерных реакций. При этом оказывается, что формула Эйнштейна — Пуанкаре для относитеьной скорости частиц

$$V = \frac{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos\varphi - \left(\frac{V_1 V_2 \sin\varphi}{c}\right)^2}}{1 - \frac{V_1 V_2}{c^2} \cos\varphi}$$

(здесь V_1 и V_2 — скорости частиц, φ — угол между направлениями движения этих частиц, V — относительная скорость частиц) есть прямое следствие теоремы косинусов Лобачевского, импульс и кинетическая энергия частицы являются по существу длиной окружности и площадью круга в пространстве Лобачевского, а знаменитая формула Эйнштейна для дефекта массы $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ эквивалентна формуле Лобачевского для суммы углов треугольника. Во всех этих формулах роль радиуса кривизны пространства Лобачевского играет скорость света. Поэтому с этой точки зрения различие между теорией относительности и классической механикой точно такое же, как между геометрией Лобачевского и геометрией Евклида. В заключение отметим, что подход к теории относительности с точки зрения геометрии Лобачевского использовался и используется в научных исследованиях целого ряда ученых, среди которых в первую очередь следует назвать немецкого физика А. Зоммерфельда и советских ученых А. П. Котельникова, В. А. Фока, Я. А. Смородинского и Н. А. Черникова.

§ 2. Фридмановская модель Вселенной

Среди всевозможных физических полей особое место занимает гравитационное поле. Действительно, заряженные тела взаимодействуют с электрическим полем, не заряженные — не взаимодействуют. Железный шарик притягивается магнитом, деревянный же или пластмассовый шарик магнитом не притягивается. Единственное поле, действию которого подвержены все материальные тела, — это гравитационное. Бросим два тела — мяч и гирю — с одинаковой скоростью в одном и том же направлении, и мы обнаружим, что они движутся совершенно одинаково. В этом явлении для нас нет ничего удивительного — подобное мы наблюдаем изо дня в день. Однако если серьезно задуматься над этим, то придется признать, что оно все же удивительно! Вспомним известную историю с Ньютоном и яблоком. Казалось бы, нет ничего удивительного в том, что яблоко падает вниз, а Луна вращается вокруг Земли, — к этому мы привыкли. Ньютон, однако, счел это совпадение удивительным и, размышляя над ним, открыл знаменитый закон всемирного тяготения. Точно так же размышления о природе явления, описанного в примере с мячом и гирей, привели А. Эйнштейна к открытию общей теории относительности. Отметим, что эта ситуация весьма типична: именно умению видеть удивительное в привычных для нас явлениях мы обязаны открытием самых фундаментальных законов природы.

Вернемся, однако, к примеру с мячом и гирей. Рассмотрим оба тела в четырехмерном пространстве — времени. То, что оба тела бросают из одной точки в одном направлении и с одинаковой скоростью, означает, что в четырехмерном пространстве — времени векторы, касательные к их мировым линиям в начальной точке совпадают. То, что они движутся при этом одинаково, означает, что и их мировые линии совпадают. Таким образом, если в данной точке пространства — времени задать какое-нибудь направление — вектор начальной скорости, то из этой точки в заданном направлении будет выходить ровно одна линия — мировая линия тела, брошенного с заданной начальной скоростью. При этом ни от массы тела, ни от вещества, из которого оно состоит, эта линия зависеть не будет. При отсутствии гравитационного поля все тела движутся по прямым линиям (как в трехмерном пространстве, так и в четырехмерном пространстве — времени). При наличии гравитационного поля мировые линии перестают быть прямыми, однако они одинаковы для тел любой природы. Почему это так? Да потому, что гравитационное поле «искривляет» пространство — время, и линии, по которым движутся тела, хотя и остаются геодезическими, перестают быть прямыми! Этот гениальный вывод был сделан А. Эйнштейном в 1916 году.

Таким образом, согласно Эйнштейну, *никакого гравитационного поля вообще нет, а отклонение тел от прямолинейных траекторий объясняется лишь наличием кривизны у нашего пространства — времени.* Сразу приходит в голову такое возражение. Человек держит в руках ведро с водой. Он, конечно же, ощущает вес ведра. Но как может показаться на первый взгляд, ведро покоится, и, следовательно, бессмысленно говорить, движется ли оно по геодезической или по какой-либо другой линии. В действительности это рассуждение неверно. В самом деле, ведро покоится лишь в пространстве (в системе отсчета Земли), в пространстве — времени же оно движется, так как непрерывно изменяется время. Человек не дает ведру двигаться по геодезической, поэтому он и ощущает противодействие ведра (подобно тому как человек, вращающий на веревке камень, ощущает противодействие камня, хотя камень при этом ни к чему не притягивается). Стоит человеку отпустить ведро, как оно сразу же начнет двигаться по геодезической линии в пространстве — времени, т. е. в данном случае упадет на землю (аналогично, вращавшийся камень, будучи отпущенным, полетит по касательной к той окружности, по которой он двигался).

Возникает и другой вопрос. Если наше пространство — время обладает кривизной, создаваемой телами большой массы, то и свет должен двигаться не по прямым линиям — линии распространения света должны искривляться вблизи больших масс. Наблюдается ли такой эффект? Оказывается, наблюдается. Целый ряд экспериментов, проведенных астрономами, указывает на то, что в окрестности больших масс искривление траекторий света действительно имеет место, причем количественно оно находится в полном соответствии с уравнениями общей теории относительности.

Общая теория относительности сыграла большую роль в формировании современной космологии, породив большое количество разнообразных моделей Вселенной. Первая из этих моделей была предложена самим Эйнштейном. Он рассуждал примерно так. Каждое тело большой массы создает около себя кривизну пространства. Предположим, что плотность материи в пространстве велика. Тогда эта материя может искривить пространство настолько, что оно замкнется, превратившись в нечто типа трехмерной сферы. Такое пространство, конечно же, не будет иметь никаких границ, однако оно будет конечным! Позже модель Эйнштейна была подвергнута серьезной критике со стороны ряда ученых, и он вынужден был от нее отказаться. Однако само указанное Эйнштейном направление в космологии стало активно развиваться. Итогом этого развития явилась модель Вселенной, созданная в 1922 году советским ученым А. А. Фридманом.

Основной гипотезой, лежащей в основе фридмановской модели Вселенной, является предположение о том, что Вселенная изотропна и однородна (т. е. устроена одинаково во всех точках и по всем направлениям). Конечно, имеется в виду однородность и изотропия в очень большом масштабе: в малом масштабе анизотропия пространства видна невооруженным глазом—полоса на небе, в которой сконцентрированы звезды (так называемый Млечный Путь). В те годы, когда Фридман создавал свою модель, еще не имелось достоверных экспериментальных данных, подтверждающих гипотезу однородности и изотропии. Первые такие данные были получены в 1929 году американским астрономом Э. Хabблом, изучавшим распределение галактик. Однако представить себе реальную исключительно высокую степень изотропии пространства удалось лишь после того, как в 60-х годах XX века американскими астрономами А.Пензиасом и Р.Уилсоном было открыто и исследовано так называемое реликтовое тепловое излучение. Степень изотропии этого излучения чрезвычайно высока (по современным оценкам, его температура по различным направлениям изменяется не более чем на 0,01 %). Таким образом, основное положение, на которое опирался Фридман, в настоящее время можно считать экспериментально обоснованным.

Фридманом был проведен детальный анализ уравнений Эйнштейна в предположении выполнения указанного условия. Оказалось, что в каждый данный момент времени кривизна пространства в этом случае постоянна. При этом если плотность вещества во Вселенной меньше некоторой постоянной величины, называемой критической плотностью, то кривизна отрицательная, если равна — то нулевая, а если больше — то положительная. Во всех трех случаях Вселенная должна непрерывно расширяться с течением времени. Это заключение Фридмана было также экспериментально подтверждено в 1929 году Хабблом, который действительно обнаружил расширение Вселенной. Таким образом, фридмановская модель, полученная чисто теоретическим путем, блестяще подтвердилась экспериментом.

Отметим, что Вселенная однородна и изотропна лишь приближенно, поэтому и кривизна реального пространства не постоянна. Однако, опираясь на экспериментальный материал, естественно считать, что кривизна в определенном смысле близка к постоянной, и, следовательно, фридмановская модель достаточно хорошо описывает реальное пространство в рамках общей теории относительности.

По современным оценкам, плотность вещества во Вселенной очень близка к критической, но все же меньше нее. Какой же вывод о топологической структуре Вселенной можно из этого сделать? Можно ли, например, утверждать, что наш мир незамкнут или, напротив, он замкнут, как в модели Эйнштейна? Этот вопрос очень сложен. Дело в том, что при одной и той же кривизне римановы пространства могут иметь весьма разнообразную структуру. В самом деле, в обычном трехмерном пространстве имеются две поверхности нулевой кривизны принципиально различного типа — плоскость и цилиндр. Плоскость бесконечна во всех направлениях. На цилиндре же можно указать такое направление, двигаясь вдоль которого мы в конце концов вернемся в исходную точку. В трехмерном пространстве нет замкнутой поверхности нулевой кривизны, однако такая поверхность появляется уже в четырехмерном пространстве. Это так называемый тор Клиффорда (по имени английского математика В. Клиффорда), уравнения которого записываются в таком виде:

$$x_1=\cos u;$$
$$x_2=\sin u;$$
$$x_3=\cos v;$$
$$x_4=\sin v.$$

Тор Клиффорда имеет форму бублика (в четырехмерном пространстве), поэтому его размеры конечны, хотя он и неограничен. Существуют поверхности нулевой кривизны и более сложной структуры. Аналогичная картина наблюдается и для пространств положительной и отрицательной кривизны. При этом уравнениям Эйнштейна (как и уравнениям ньютоновой механики) одинаково хорошо удовлетворяют всевозможные топологические типы таких пространств.

Впервые на возможность сложной топологической структуры реального мира обратили внимание В. Клиффорд и (несколько позже) Ф. Клейн в связи с предпринятой ими попыткой объяснить так называемый гравитационный парадокс. Этот парадокс состоит в том, что при рассмотрении в рамках ньютоновой теории тяготения пространства, равномерно заполненного веществом, потенциал гравитационного поля оказывается бесконечным. Исторически гравитационный парадокс был решен в рамках общей теории относительности, а затем стало ясно, что он разрешим и в ньютоновой теории, если вместо непосредственно ненаблюдаемого гравитационного потенциала рассматривать реально наблюдаемые величины. Клиффорд и Клейн, однако, пытались решить гравитационный парадокс совершенно иначе: они предположили, что реальное (ньютоново!) пространство имеет сложную топологическую структуру (например, структуру тора) и в нем просто нет бесконечности. Развитие физики не пошло этим путем, но работы Клиффорда и Клейна положили начало новому направлению математики, исследующему возможные топологические типы пространств постоянной кривизны.

К настоящему моменту имеется полная классификация возможных топологических типов трехмерных пространств положительной кривизны и не вполне законченная, но, как правило, достаточная для приложений классификация типов пространств нулевой кривизны. Поскольку есть основания считать, что реальное пространство имеет отрицательную кривизну, то наибольший интерес с точки зрения космологии представляет классификация топологических типов пространств отрицательной кривизны. Оказывается, однако, что задача о классификации таких пространств столь сложна, что, несмотря на огромные усилия большого числа ученых, до сих пор не решена. Отметим, что ближе всех к решению этой задачи подошел, по-видимому, русский математик В. С. Макаров, хотя и им пока окончательный результат не получен.

В связи с рассматриваемой проблемой возникает и другой вопрос: нельзя ли определить топологический тип Вселенной, опираясь на данные астрономии? В принципе.

можно. Например, если бы каждую звезду мы видели одновременно в двух противоположных направлениях, мы бы сразу сказали, что Вселенная представляет собой сферу. С помощью аналогичных наблюдений можно выявить и другие, более сложные топологические структуры пространства. Исследования такого рода интенсивно ведутся как астрономами-экспериментаторами, так и физиками-теоретиками, среди которых в первую очередь следует назвать группу русских ученых: Я. Б. Зельдовича, А. А. Рузмайкина, Д. Д. Соколова, А. А. Старобинского и В. Ф. Шварцмана. Однако окончательного ответа на вопрос пока не получено.

Таким образом, общая теория относительности и космология ставят целый ряд проблем геометрии Лобачевского в центр внимания большого числа ученых. Проблемы эти очень сложны, и, вероятно, их решение потребует многие годы. Однако интерес к ним не только не ослабевает, но и заметно возрастает.

§ 3. Уравнение синус-Гордона

В повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с разнообразными видами волнового движения. Не удивительно поэтому, что изучение всевозможных волновых процессов занимает одно из центральных мест в физике. Приближенное описание широкого класса волновых процессов дается так называемыми линейными дифференциальными уравнениями гиперболического типа. Поэтому и волны, которые хорошо описываются этими уравнениями, называются линейными.

В последние годы все больший интерес вызывают нелинейные волновые процессы. Интерес этот объясняется, в частности, бурным развитием таких разделов физики, как физика плазмы (развитая в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза), нелинейная оптика (появившаяся в результате открытия лазера), теория сверхпроводимости, теория поля и т. д., в которых приходится иметь дело с существенно нелинейными волновыми эффектами. Заметим, однако, что подобные эффекты рассматривались и ранее в гидродинамике. Так, в середине XX века английский инженер Дж. Рассел заметил, что при некоторых условиях на воде образуется уединенная волна, способная распространяться без изменения формы и потери энергии. Сейчас такие волны называют *солитонами*. Солитоны долгое время не привлекали особого внимания ученых. Интерес к ним начал резко возрастать лишь около 50 лет назад, так как было установлено, что наличие солитонов типично для многих нелинейных волновых процессов. Одновременно обнаружилось интересное свойство солитонов сохранять свою форму после взаимодействия с другими солитонами, что придает им сходство с частицами. Начиная с 69-х годов XX века наблюдается бурное развитие теории солитонов. К настоящему времени количество работ, посвященных этой тематике, исчисляется тысячами.

В процессе развития теории нелинейных волн выделилось несколько простейших нелинейных дифференциальных уравнений, решения которых моделируют основные свойства таких волн. Одним из них является уравнение синус-Гордона *

$$z_{xy}=\sin z \qquad (1)$$

(символом z_{xy} здесь обозначена смешанная производная второго порядка от функции $z(x, y)$). Как и другие «модельные» уравнения этого типа, уравнение (1) среди своих решений имеет солитоны. Оно описывает широкий класс самых разнообразных явлений. Не вникая в физическую сторону вопроса, скажем, что к таким явлениям относятся, например, распространение дислокаций в кристаллах, движение блоховских границ в ферромагнетиках, распространение импульсов по мембране живой клетки, распространение магнитного потока в сверхпроводящих джозефсоновских линиях, самоиндуцированная прозрачность в резонансной двухуровневой оптической среде, колебания в механических передаточных линиях, взаимодействие элементарных частиц.

Первоначально осталось незамеченным, что уравнение (1) давно и хорошо известно в геометрии. По существу, оно появилось еще в 1878 году в работе выдающегося русского математика П. Л. Чебышева «О кройке одежды». В этой работе Чебышев рассмотрел задачу об «одевании» поверхности. Поясним, о чем идет речь. Представим себе рыболовную сеть, узлы которой закреплены так, что при любых

---

* Происхождение этого несколько необычного названия таково. В релятивистской квантовой механике хорошо известно уравнение Клейна — Гордона $z_{xy}=m^2z$. По аналогии с названием этого уравнения и родилось название уравнения (1).

изгибаниях сети длины противоположных «сторон» любого «сетевого четырехугольника» одинаковы (эту сеть называют теперь чебышевской). Накинем такую сеть на какую-нибудь поверхность и введем с ее помощью внутренние координаты (x, y) на этой поверхности (подобно тому как с помощью сети на листе миллиметровой бумаги вводится прямоугольная система координат). Можно доказать, что в этом случае метрическая форма поверхности примет вид:

$$ds^2=dx^2+2\cos z(x, y)dxdy+dy^2,$$

где $z(x, y)$ — угол между линиями сети. Как показал Чебышев, гауссова кривизна $k(x, y)$ поверхности связана с углом $z(x, y)$ уравнением

$$z_{xy}=-k\sin z.$$

В случае поверхности постоянной отрицательной кривизны —1 (плоскости Лобачевского) это уравнение переходит в уравнение синус-Гордона.

Свойства решений уравнения синус-Гордона впервые исследовал Д. Гильберт для доказательства теоремы о непогружаемости плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство. Доказательство этой теоремы по существу состоит из двух частей. В первой части устанавливается, что асимптотические линии на поверхности постоянной отрицательной кривизны образуют чебышевскую сеть (этот факт, впрочем, был известен и ранее). Следовательно, угол между асимптотическими линиями должен удовлетворять уравнению (1). Но на гладкой поверхности постоянной отрицательной кривизны угол между асимптотическими линиями обязательно удовлетворяет условию

$$0<z(x, y)<\pi. \tag{2}$$

Гильберт же (во второй части доказательства) установил, что для любого решения уравнения (1) условие (2) обязательно нарушается, если только x и y меняются в достаточно больших пределах. Поскольку на плоскости Лобачевского x и y должны изменяться от $-\infty$ до ∞, то это и доказывает непогружаемость всей плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство.

На первый взгляд может показаться, что с точки зрения геометрии представляют интерес лишь те решения уравнения синус-Гордона, которые удовлетворяют условию (2) и, следовательно, заданы не на всей плоскости переменных

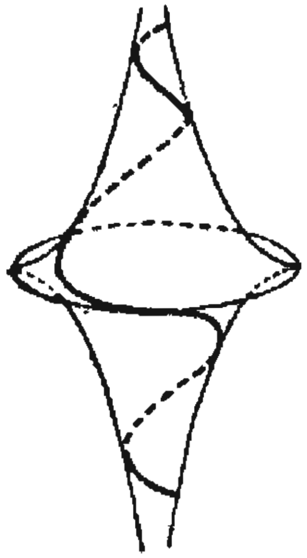


Рис.23.

x, y. Оказывается, что это не так. Рассмотрим поверхность, состоящую из двух склеенных по ребру псевдосфер Бельтрами, и какую-нибудь асимптотическую линию на ней (рис. 23). Как ведет себя эта линия при переходе через ребро? Оказывается, что она касается ребра так, что остается гладкой пространственной кривой. Иными словами, хотя она и переходит через «излом» поверхности, сама она никакого «излома» не имеет. На этот факт впервые обратил внимание ученик Н. В. Ефимова И. В. Грибков. Он установил, что хотя на ребре рассматриваемой поверхности угол z между асимптотическими линиями обращается в нуль (все асимптотические линии касаются ребра), он остается гладкой функцией переменных x, y:

$$z(x, y) = 4 \operatorname{arctg} e^{x+y}. \tag{3}$$

Отметим, что функция (3) задана на всей плоскости переменных x, y.

Рассмотренный пример показывает, что негладким поверхностям постоянной отрицательной кривизны могут отвечать гладкие на всей плоскости переменных x, y решения уравнения синус-Гордона. Оказывается, что верно и обратное. Именно, в 1979 году Э. Г. Позняк доказал, что любому решению уравнения синус-Гордона на всей плоскости переменных x, y отвечает некоторая (негладкая) поверхность постоянной отрицательной кривизны. При этом линиям $z(x, y) = n\pi$ отвечают особые точки этой поверхности (например, острия или ребра).

Результат Э. Г. Позняка позволяет дать геометрическую интерпретацию любому конкретному решению уравнения синус-Гордона. В частности, поверхность, изображенная на рис. 23, представляет собой реализацию так называемого односолитонного решения (3) уравнения (1). Учениками Э. Г. Позняка подробно исследовались и другие солитонные решения уравнения (1).

Еще больший интерес представляет задача о нахождении из геометрических соображений новых, ранее не известных решений уравнений синус-Гордона. Как отмечалось выше, эта задача эквивалентна задаче об «одевании» различных частей плоскости Лобачевского (т. е. построении чебышевской сети на частях плоскости Лобачевского), Заметим, однако, что этот круг вопросов пока недостаточно хорошо изучен.

В настоящее время известно несколько очень мощных методов нахождения и исследования решений уравнения синус-Гордона, среди которых в первую очередь следует назвать метод преобразования Бэклунда и метод обратной задачи теории рассеяния. Следует, однако, заметить, что применение этих методов для нахождения конкретных решений уравнения (1) связано зачастую с большими трудностями. Поэтому развитие указанного геометрического подхода к уравнению синус-Гордона представляется весьма перспективным. Подход этот интересен еще и тем, что он может быть распространен на целый ряд других уравнений математической физики, таких, как уравнения Бюргерса, Кортевега де Фриза и т. д.

Заключение

Открытие новой геометрии нашим выдающимся соотечественником, по праву носящей его имя, оказало огромное влияние на развитие всей науки. Наиболее ярко это выразилось в дальнейшем углублении наших представлений о понятии пространства. Можно вполне определенно сказать, что основные направления современной физики связаны с развитием этого понятия. Однако роль геометрии Лобачевского этим не исчерпывается. Последнее время она все шире и шире применяется в самых разнообразных разделах естествознания — в физике, химии, биологии — и, конечно же, в самой математике. Роль геометрии Лобачевского в наши дни определяется прежде всего тем, что она является простой (с точки зрения изучения) моделью римановых пространств отрицательной кривизны, на которой реализуются все основные свойства таких пространств. Благодаря этому интерес к ней не только не ослабевает, но и заметно возрастает.

Объем этой брошюры не позволяет нам рассмотреть все многочисленные приложения геометрии Лобачевского к физике. Мы остановились лишь на трех из них, как нам кажется, наиболее типичных. Во всяком случае, они позволяют представить себе общую ситуацию, в которой геометрия Лобачевского входит в контакт с современной физикой.

В заключение хотелось бы выразить глубокую благодарность сотрудникам физического факультета МГУ профессору Э. Г. Позняку и ассистенту Д. Д. Соколову за помощь, оказанную при подготовке рукописи настоящей брошюры.

Литература

Гильберт Д. Основания геометрии. М. — Л., ОГИЗ, 1948.

Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., Физматгиз, 1961.

Кадомцев С. Б., Позняк. Э. Г., Соколов Д. Д. Некоторые вопросы геометрии Лобачевского, связанные с физикой. — В сб.: Проблемы геометрии. Т. 13 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). М., 1982.

Лаптев Б. Л. Геометрия Лобачевского, ее историческое значение. М., Знание, 1976.

Матвиевская Г. П. Теория параллельных линий в древности и в средние века. Всес. науч. конф. по неевклид. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского». М., 1977.

«Начала» Евклида. Пер. с греч. Кн. 1—15. М. — Л., 1948—1950.

Норден А. П. Гаусс и Лобачевский. — Историко-математические исследования, вып. 9, 1956.

Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., Наука, 1955.

Черников Н. А. Лекции по геометрии Лобачевского и теории относительности. Новосибирск, Изд-во гос. ун-та, 1965.

Черников Н. А. Геометрия Лобачевского как физическая наука. Всес. науч. конф. по неевклид. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского». М., 1977.

Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М., Наука, 1983.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Как отмечалось выше, система аксиом Евклида неполна — ее недостаточно для того, чтобы без привлечения каких-либо других, хотя бы и наглядно очевидных, фактов логически построить всю геометрию. Впервые полная и достаточно простая система аксиом была предложена Д. Гильбертом. Наряду с аксиомами Гильберт выделил так называемые *основные понятия*, т. е. такие понятия, определение которых не дается, а их свойства выражаются в аксиомах. Можно поэтому сказать, что основные понятия как бы определяются аксиомами.

Для построения геометрии могут быть использованы различные системы аксиом, важно лишь, чтобы полученные из них выводы были одинаковыми. Мы приведем одну из возможных систем аксиом планиметрии, основными понятиями в которой являются «точка», «прямая», «лежать между» и «наложение». При этом прямая, как и всякая геометрическая фигура, представляет собой множество точек*.

Первые три аксиомы характеризуют взаимное расположение точек и прямых.

1. *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.*

2. *Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

3. *Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.*

Для точек, принадлежащих одной прямой, вводится понятие «лежать между». Свойства этого понятия выражены в следующих аксиомах.

4. *Если точка B лежит между A и C, то A, B, C — различные точки прямой, и точка B лежит также между C и A.*

5. *Из трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

Далее вводится понятие отрезка: отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из двух различных точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между

* Такие понятия, как «множество», «принадлежность» и т. д., относятся не только к геометрии, но и к другим разделам математики. Поэтому мы считаем их известными и не относим к числу основных понятий планиметрии.

A и B. Если отрезок AB не имеет общих точек с прямой a, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекается с прямой a в некоторой точке C, лежащей между A и B, то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

6. *Каждая прямая a разделяет плоскость на две части, называемые полуплоскостями, так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a.*

При этом точки прямой a не принадлежат ни одной из указанных полуплоскостей.

В качестве следствия из приведенных аксиом можно получить следующее утверждение: каждая точка O прямой разделяет ее на две части, называемые *лучами*, так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O (т. е. точка лежит между ними).

Следующая группа аксиом связана с понятиями наложения и равенства фигур. Как отмечалось выше, понятие наложения является основным. Понятие же равенства фигур не является основным, а определяется через наложение: фигура Φ называется равной фигуре Φ_1, если ее можно совместить наложением с Φ_1. Свойства наложения выражаются в следующих аксиомах.

7. *При наложении каждая точка плоскости переходит в одну определенную точку плоскости.*

8. *Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.*

9. *На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.*

Это означает, что если даны какой-то отрезок AB и какой-то луч h с началом в точке O, то на луче h существует, и притом только одна, точка C такая, что отрезок OC равен отрезку AB.

10. *От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.*

Это означает, что если даны какой-то луч OA и какой-то неразвернутый угол CDE, то в каждой из двух полуплоскостей с границей OA существует, и притом только один, луч OB такой, что угол CDE равен углу AOB.

11. *Любой угол hK можно совместить наложением с*

равным ему углом h_1K_1 двумя способами: 1) так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч K — с лучом K_1, 2) так, что луч h совместится с лучом K_1, а луч K — с лучом h_1.

12. *Любая фигура равна самой себе.*

13. *Если фигура Φ равна фигуре Φ_1, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ.*

14. *Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1, равна фигуре Φ_3.*

Перечисленные аксиомы дают возможность сравнивать отрезки и углы, а также строить отрезки, равные 2AB, 3AB, ... , где AB – данный отрезок.

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков.

15. *Для любых двух отрезков* AB *и* C*D*, AB < C*D*, *существует такое натуральное число* n, *что* $n\text{AB} \leqslant \text{C}D$, *а* $(n+1)\text{AB} > \text{C}D$ (аксиома Архимеда).

16. *Если все точки множества принадлежат отрезку, то существует наименьший отрезок, содержащий все эти точки.*

Систему аксиом планиметрии завершает аксиома параллельных прямых.

17. *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, не пересекающая данной.*

СОДЕРЖАНИЕ

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Представляем Вам наши лучшие книги:

URSS

Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии.
Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия.
Фиников С. П. Аналитическая геометрия.
Бюшгенс С. С. Дифференциальная геометрия.
Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство.
Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии.
Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными.
Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.
Рашевский П. К. Теория спиноров.
Смирнов Ю. М. Курс аналитической геометрии.
Дарбу Г. Принципы аналитической геометрии.
Ху Сы-Цзян. Теория гомотопий.
Стинрод Н. Топология косых произведений.
Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии.
Габриель П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий.
Харди Г. Г. Апология математика.
Харди Г. Г. Курс чистой математики.
Харди Г. Г. Расходящиеся ряды.
Харди Г. Г., Рогозинский В. В. Ряды Фурье.
Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства.
Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике.
Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.
Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной.
Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.
Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе.
Титчмарш Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье.
Бор Г. Почти периодические функции.
Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций.
Порошкин А. Г. Теория меры и интеграла.
Гельфонд А. О. Вычеты и их приложения.
Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей.
Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения.
Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление.
Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе.
Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры: Опыты математического мышления.
Лебег А. Об измерении величин.
Кранц П. Сферическая тригонометрия.
Крыжановский Д. А. Изопериметры. Свойства геометрических фигур.
Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей.
Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика.
Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем.
Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление.
Понтрягин Л. С. Принцип максимума в оптимальном управлении.
Малинецкий Г. Г. (ред.) Будущее прикладной математики.

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Представляем Вам наши лучшие книги:

Учебники и задачники по математике

Краснов М. Л. и др. **Вся высшая математика.** Т. 1–7.

Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. **Сборники задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.**

Боярчук А. К. и др. **Справочное пособие по высшей математике (Антидемидович).** Т. 1–5.

Босс В. **Интуиция и математика.**

Босс В. **Лекции по математике.** Т. 1: **Анализ;** Т. 2: **Дифференциальные уравнения;** Т. 3: **Линейная алгебра;** Т. 4: **Вероятность, информация, статистика;** Т. 5: **Функциональный анализ;** Т. 6: **От Диофанта до Тьюринга;** Т. 7: **Оптимизация;** Т. 8: **Теория групп;** Т. 9: **ТФКП.**

Алексеев В. М. (ред.) **Избранные задачи по математике из журнала "AMM".**

Жуков А. В. и др. **Элегантная математика. Задачи и решения.**

Арлазаров В. В. и др. **Сборник задач по математике для физико-математических школ.**

Медведев Г. Н. **Задачи вступительных экзаменов по математике на физфаке МГУ.**

Александров И. И. **Сборник геометрических задач на построение (с решениями).**

Золотаревская Д. И. **Сборник задач по линейной алгебре.**

Антоневич А. Б. и др. **Задачи и упражнения по функциональному анализу.**

Гамов Г., Стерн М. **Занимательные задачи.**

Яглом А. М., Яглом И. М. **Неэлементарные задачи в элементарном изложении.**

Теория групп и ее применения

Хамермеш М. **Теория групп и ее применение к физическим проблемам.**

Вейль Г. **Классические группы. Их инварианты и представления.**

Ляховский В. Д., Болохов А. А. **Группы симметрии и элементарные частицы.**

Эйзенхарт Л. П. **Непрерывные группы преобразований.**

Федоров Ф. И. **Группа Лоренца.**

Фробениус Ф. Г. **Теория характеров и представлений групп.**

Багавантам С., Венкатарайуду Т. **Теория групп и ее применение к физич. проблемам.**

Астрономия и астрофизика

Ефремов Ю. Н. **Вглубь Вселенной. Звезды, галактики и мироздание.**

Куликовский П. Г. **Справочник любителя астрономии.**

Сажин М. В. **Современная космология в популярном изложении.**

Чернин А. Д. **Звезды и физика.**

Архангельская И. Д., Розенталь И. Л., Чернин А. Д. **Космология и физический вакуум.**

Розенталь И. Л., Архангельская И. В. **Геометрия, динамика, Вселенная.**

Левитан Е. П. **Физика Вселенной: экскурс в проблему.**

Бааде В. **Эволюция звезд и галактик.**

Шварцшильд М. **Строение и эволюция звезд.**

Кинг А. Р. **Введение в классическую звездную динамику.**

Хлопов М. Ю. **Космомикрофизика.**

Хлопов М. Ю. **Основы космомикрофизики.**

Ипатов С. И. **Миграция небесных тел в Солнечной системе.**

Дорофеева В. А., Макалкин А. Б. **Эволюция ранней Солнечной системы.**

Тверской Б. А. **Основы теоретической космофизики.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Представляем Вам наши лучшие книги:

URSS

Механика

Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике.
Жуковский Н. Е. Аналитическая механика.
Жуковский Н. Е. Механика системы. Динамика твердого тела.
Жуковский Н. Е. Кинематика, статика, динамика точки: университетский курс.
Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем.
Арнольд В. И. Математические методы классической механики.
Арнольд В. И. и др. Математические аспекты классической и небесной механики.
Вебстер А. Г. Механика материальной точки и системы.
Вебстер А. Г. Механика сплошной среды.
Пфейффер П. Колебания упругих тел.
Геккелер И. В. Статика упругого тела.
Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.
Розенблат Г. М., Паншина А. В., Козлова З. П. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В.Мещерского. Кн. 1, 2.

Термодинамика и статистическая физика

Квасников И. А. Молекулярная физика.
Бриллюэн Л. Квантовая статистика.
Хинчин А. Я. Математические основания квантовой статистики.
Варикаш В. М., Болсун А. И., Аксенов В. В. Сборник задач по статистической физике.
Баранов А. А., Колпащиков В. Л. Релятивистская термомеханика сплошных сред.
Шапкин А. И., Сидоров Ю. И. Термодинамические модели в космохимии и планетологии.
Агеев Е. П. Неравновесная термодинамика в вопросах и ответах.
Дуров В. А., Агеев Е. П. Термодинамическая теория растворов.
Мюнстер А. Химическая термодинамика.
Базаров И. П. Заблуждения и ошибки в термодинамике.
Хайтун С. Д. История парадокса Гиббса.
Зайцев Р. О. Введение в современную статистическую физику. Курс лекций.
Зайцев Р. О. Введение в современную кинетическую теорию. Курс лекций.
Зайцев Р. О. Диаграммные методы в теории сверхпроводимости и ферромагнетизма.
Кубо Р. Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями.
Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики.
Поклонский Н. А., Вырко С. А., Поденок С. Л. Статистическая физика полупроводников.
Планк М. Теория теплового излучения.
Карно С., Клаузиус Р. и др. Второе начало термодинамики.

Серия «Классический университетский учебник»

Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. В 4 т.
Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии.
Ишханов Б. С., Капитонов И. М., Юдин Н. П. Частицы и атомные ядра.
Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.
Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика.

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Представляем Вам наши лучшие книги:

<u>Учебники, задачники, популярные книги по физике</u>

Воронов В. К., Подоплелов А. В. **Современная физика.**
Иванов Б. Н. **Законы физики.**
Капитонов И. М. **Введение в физику ядра и частиц.**
Кириллов В. М. и др. **Решение задач по физике.**
Колоколов И. В. и др. **Задачи по математическим методам физики.**
Жукарев А. С. и др. **Задачи повышенной сложности в курсе общей физики.**
Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В. **Теоретическая физика. Сб. задач с решениями.**
Шепелев А. В. **Оптика. Готовимся к экзаменам, зачетам, коллоквиумам.**
Гликлих Ю. Е. **Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики.**
Сурдин В. Г. **Астрономические задачи с решениями.**
Николаев О. С. **Физика и астрономия: Курс практических работ для средней школы.**
Попова А. П. **Занимательная астрономия.**
Гамов Г. **Мистер Томпкинс в Стране Чудес, или истории о c, G и h.**
Гамов Г. **Мистер Томпкинс исследует атом.**
Лебедев В. И. **Исторические опыты по физике.**
Вейль Г. **Симметрия.**
Гарднер М. **Этот правый, левый мир.**

<u>Колебания и волны</u>

Кабисов К. С., Камалов Т. Ф., Лурье В. А. **Колебания и волновые процессы.**
Кравченко И. Т. **Теория волновых процессов.**
Добролюбов А. И. **Бегущие волны деформации.**
Добролюбов А. И. **Скольжение, качение, волна.**
Добролюбов А. И. **Волновой перенос вещества.**
Старченко И. Б. **Динамический хаос в гидроакустике.**
Полников В. Г. **Нелинейная теория случайного поля волн на воде.**
Крендалл И. Б. **Акустика.**
Вуд А. **Звуковые волны и их применения.**
Кнудсен В. О. **Архитектурная акустика.**
Беляев С. В. **Акустика помещений.**
Вилля Г. **Теория вихрей.**
Абурджания Г. Д. **Самоорганизация нелинейных вихревых структур и вихревой турбулентности в диспергирующих средах.**
Шашков А. Г., Бубнов В. А., Янковский С. Ю. **Волновые явления теплопроводности.**
Стрэтт (Рэлей) Дж. В. **Волновая теория света.**
Гончаренко А. М., Карпенко В. А. **Основы теории оптических волноводов.**
Гончаренко А. М. **Гауссовы пучки света.**
Иванов Б. Н. **Мир физической гидродинамики.**
Бардзокас Д. И. и др. **Распространение волн в электромагнитоупругих средах.**
Астапенко В. А. **Поляризационные и интерференционные эффекты в излучательных процессах.**
Фок В. А. **Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.**
Харкевич А. А. **Спектры и анализ.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Представляем Вам наши лучшие книги:

URSS

Теория поля

Рубаков В. А. **Классические калибровочные поля. Бозонные теории.**
Рубаков В. А. **Классические калибровочные поля. Теории с фермионами. Некоммутативные теории.**
Сарданашвили Г. А. **Современные методы теории поля.** Т. 1–4.
Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. **Гравитация.**
Коноплева Н. П., Попов В. Н. **Калибровочные поля.**
Волобуев И. П., Кубышин Ю. А. **Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля.**
Богуш А. А. **Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий.**
Богуш А. А., Мороз Л. Г. **Ведение в теорию классических полей.**
Менский М. Б. **Группа путей: измерения, поля, частицы.**
Менский М. Б. **Метод индуцированных представлений.**
Визгин В. П. **Единые теории поля в квантово-релятивистской революции.**

Квантовая механика

Кемпфер Ф. **Основные положения квантовой механики.**
Мотт Н., Снеддон И. **Волновая механика и ее применения.**
Бройль Л. де. **Введение в волновую механику.**
Фок В. А. **Начала квантовой механики.**
Фок В. А. **Квантовая физика и строение материи.**
Фок В. А. **Работы по квантовой теории поля.**
Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. **Задачи по квантовой механике.** Ч. 1, 2.
Горбацевич А. К. **Квантовая механика в общей теории относительности.**
Килин С. Я. **Квантовая оптика: поля и их детектирование.**
Вильф Ф. Ж. **Логическая структура квантовой механики.**
Ван дер Варден Б. Л. **Метод теории групп в квантовой механике.**
Бауэр Э. **Введение в теорию групп и ее приложения к квантовой физике.**
Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. **Применение теории групп в квантовой механике.**
Стояновский А. В. **Введение в математические принципы квантовой теории поля.**

Физика элементарных частиц

Бояркин О. М. **Введение в физику элементарных частиц.**
Бояркин О. М. **Физика массивных нейтрино.**
Окунь Л. Б. **Физика элементарных частиц.**
Окунь Л. Б. **Лептоны и кварки.**
Борн М. **Лекции по атомной механике.**
Шевелев А. К. **Структура ядер, элементарных частиц, вакуума.**
Бранский В. П. **Теория элементарных частиц как объект методологического исследования.**
Бранский В. П. **Значение релятивистского метода Эйнштейна в формировании общей теории элементарных частиц.**
Богуш А. А. **Очерки по истории физики микромира.**
Абрамов А. И. **История ядерной физики.**

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Представляем Вам наши лучшие книги:

URSS

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

Пенроуз Р. **НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ. О компьютерах, мышлении и законах физики.** Пер. с англ.
Хакен Г. **Информация и самоорганизация.** Пер. с англ.
Арнольд В. И. **Теория катастроф.**
Климонтович Ю. Л. **Турбулентное движение и структура хаоса.**
Малинецкий Г. Г. **Математические основы синергетики.**
Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. **Нелинейная динамика и хаос: основные понятия.**
Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. **Нелинейная динамика.**
Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. **Синергетика и прогнозы будущего.**
Малинецкий Г. Г. (ред.) **Будущее России в зеркале синергетики.**
Безручко Б. П. и др. **Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях.**
Данилов Ю. А. **Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение.**
Трубецков Д. И. **Введение в синергетику.** В 2 кн.: **Колебания и волны; Хаос и структуры.**
Князева Е. Н., Курдюмов С. П. **Основания синергетики.** Кн. 1, 2.
Князева Е. Н., Курдюмов С. П. **Синергетика: нелинейность времени и ландшафты коэволюции.**
Редько В. Г. **Эволюция, нейронные сети, интеллект.**
Чернавский Д. С. **Синергетика и информация (динамическая теория информации).**
Баранцев Р. Г. **Синергетика в современном естествознании.**
Баранцев Р. Г. и др. **Асимптотическая математика и синергетика.**
Гуц А. К., Фролова Ю. В. **Математические методы в социологии.**
Турчин П. В. **Историческая динамика. На пути к теоретической истории.**
Котов Ю. Б. **Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики.**
Гельфанд И. М. и др. **Очерки о совместной работе математиков и врачей.**
Пригожин И. **Неравновесная статистическая механика.**
Пригожин И. **От существующего к возникающему.**
Пригожин И., Стенгерс И. **Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени.**
Пригожин И., Стенгерс И. **Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.**
Пригожин И., Николис Г. **Познание сложного. Введение.**
Пригожин И., Гленсдорф П. **Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.**
Суздалев И. П. **Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов.**

Тел./факс:
(495) 135-42-46,
(495) 135-42-16,
E-mail:
URSS@URSS.ru
http://URSS.ru

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (495) 625-2457)
«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)
«Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, 780-3370)
«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)
«Дом книги на Ладожской» (м. Бауманская, ул. Ладожская, 8, стр. 1. Тел. 267-0302)
«Гнозис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (495) 939-4713)
«У Кентавра» (РГГУ) (м. Новослободская, ул. Чаянова, 15. Тел. (499) 973-4301)
«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 311-3954)

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

URSS

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Вейль Г. **Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности.**
Фок В. А. **Теория пространства, времени и тяготения.**
Фок В. А. **Теория Эйнштейна и физическая относительность.**
Эддингтон А. **Теория относительности.**
Эддингтон А. **Пространство, время и тяготение.**
Эддингтон А. **Относительность и кванты.**
Фридман А. А. **Мир как пространство и время.**
Угаров В. А. **Специальная теория относительности.**
Сацункевич И. С. **Экспериментальные корни специальной теории относительности.**
Чернин А. Д. и др. **Александр Александрович Фридман. Жизнь и деятельность.**
Пименов Р. И. **Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка.**
Вильф Ф. Ж. **Логическая структура частной теории относительности.**
Вяльцев А. Н. **Дискретное пространство-время.**
Гаврюсев В. Г. **Измерение и свойства пространства-времени.**
Котельников А. П. **Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике.**
Александров П. С. **Что такое неэвклидова геометрия.**
Александров П. С. **Введение в теорию множеств и общую топологию.**
Александров П. С. **Введение в теорию групп.**
Хаусдорф Ф. **Теория множеств.**
Клейн Ф. **Неевклидова геометрия.**
Клейн Ф. **Высшая геометрия.**
Клейн Ф. **Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.**
Гильберт Д., Кон-Фоссен С. **Наглядная геометрия.**
Яглом И. М. **О комбинаторной геометрии.**
Яглом И. М. **Комплексные числа и их применение в геометрии.**
Яглом И. М. **Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.**
Гарднер М. **Этот правый, левый мир.**
Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. **Математика без формул.** Кн. 1, 2.
Босс В. **Интуиция и математика.**
Данфорд Н., Шварц Дж. Т. **Линейные операторы. Общая теория.**
Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. **Современная геометрия.** Т. 1–3.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс **(495) 135–42–16, 135–42–46**
или *электронной почтой* URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в *интернет-магазине:* http://URSS.ru

Научная и учебная литература

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru

Об авторе

Сергей Борисович КАДОМЦЕВ

Род. 1 ноября 1952 г. Доцент кафедры математики физического факультета МГУ, кандидат физико-математических наук. Имеет звание «Отличник народного просвещения». Специалист в области теории подмногообразий многомерных евклидовых пространств, автор более 100 печатных работ.

Основные труды: «Геометрия 7–9: Учебник для средней общеобразовательной школы» (совместно с Л. С. Атанасяном, В. Ф. Бутузовым, Э. Г. Позняком, И. И. Юдиной). М.: Просвещение, 1990 и последующие издания (учебник занял первое место на Всесоюзном конкурсе учебников в 1988 г.).

«Геометрия 10–11: Учебник для средней общеобразовательной школы» (совместно с Л. С. Атанасяном, В. Ф. Бутузовым, Л. С. Киселевой, Э. Г. Позняком). М.: Просвещение, 1992 и последующие издания (учебник занял первое место на Всесоюзном конкурсе учебников в 1988 году).

«Планиметрия: Пособие для углубленного изучения математики» (совместно с В. Ф. Бутузовым, Э. Г. Позняком, С. А. Шестаковым, И. И. Юдиной). М.: Физматлит, 2005.

«Аналитическая геометрия и линейная алгебра». М.: Физматлит, 2001 и последующие издания.

«Невозможность некоторых специальных изометрических погружений пространств Лобачевского» // М., Математический сборник, 107 (149), № 2 (10), 1978.

«О поверхностях с постоянной внешней геометрией отрицательной кривизны» // М., Математические заметки, вып. 4, т. 47, 1990.

Наше издательство предлагает следующие книги:

4981 ID 55658

9 785382 003603 >

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИ

.ru

15363474

Тел./факс: 7 (495) 1

Тел./факс: 7 (495) 135–42–46

ний

в Интернете:

URSS

http://URSS.ru