В.И.КАГАНОВ

РАДИОТЕХНИКА + КОМПЬЮТЕР + MATHCAD

МОСКВА
ГОРЯЧАЯ ЛИНИЯ – ТЕЛЕКОМ
2001

ББК 32.8
К 12

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор В.А. Левин
Доктор технических наук, профессор С.М. Смольский

Рекомендовано Ученым советом Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики – технического университета (МИРЭА) в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальности "Радиотехника"

Каганов В.И.
К12 Радиотехника + компьютер + Mathcad. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001. – 416 с.: ил.

ISBN 5-93517-054-X

Излагаются теоретические основы радиотехники и ее взаимодействие с компьютерными вычислениями. Решение разнообразных задач по теории радиосигналов, линейным и нелинейным радиотехническим устройствам, по проблемам оптимизации, методам генерирования, усиления, формирования, приема и обработки радиосигналов проводится с помощью математического пакета программ «Mathcad», работающих в среде операционной системы «Windows». В общей сложности приведено 50 программ. Рассмотрены принципы построения спутнико-космических и наземных систем радиосвязи и применение в них компьютеров.

Книга написана на основании педагогического опыта автора в МИРЭА.

Для специалистов в области радиоэлектроники и студентов вузов радиотехнического профиля.

ББК 32.8

Учебная литература

КАГАНОВ Вильям Ильич

РАДИОТЕХНИКА + КОМПЬЮТЕР + MATHCAD

ЛР № 071825 от 16 марта 1999 г.
Подписано в печать 26.05.01
Гарнитура Arial
Тираж 3 000 экз.

Формат 70x100/16
Печать офсетная
Изд. № 54

Бумага газетная
Уч.-изд. л. 31,2
Зак. № 4035.

ISBN 5-93517-054-X

© Каганов В.И., 2001

© Оформление издательства «Горячая линия–Телеком», 2001

Отпечатано в полном соответствии с качеством присланных диапозитивов в Тульской типографии.
300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.

Предисловие

Компьютер внес радикальные изменения в радиотехнику по трем направлениям: в управление сложными радиотехническими системами, по автоматизированному проектированию радиотехнических устройств и по исследованию протекающих в них процессов. Эти изменения, касающиеся, в первую очередь, третьего и частично первого направления, и нашли отражение в настоящей книге.

Автор старался охватить по возможности широкий круг вопросов, составляющих предмет современной радиотехники. Поэтому в книге излагается решение разнообразных задач по теории радиосигналов и проблеме оптимизации; по линейным и нелинейным, автономным и неавтономным радиотехническим устройствам; по генерированию колебаний и автоматической подстройке частоты; по высокочастотным и сверхвысокочастотным генераторам; по суммированию мощностей сигналов и их модуляции; по параметрическому синтезу фильтров и согласующих устройств; по оптимальным методам приема радиосигналов и их обработке.

По всем перечисленным разделам составлены программы на основе универсального математического пакета программ «Mathcad», выполняющих математические расчеты с помощью компьютера в среде операционной системы «Windows». В общей сложности приведено 50 программ.

В книге также рассмотрены принципы построения спутниково-космических систем радиосвязи и наземных радиотехнических, автоматизированных систем управления и контроля производствами рассредоточенного типа с применением в них компьютеров.

При использовании компьютера для решения и анализа радиотехнических задач надо правильно определить роль инженера-исследователя в этом процессе. Выполняемые им функции заключаются в составлении исходных уравнений, начальных условий, четкой формулировке конечной цели исследования, умению составлять программы согласно правилам графического интерфейса и трактовке полученных результатов. Роль компьютера сводится к проведению огромного объема рутинных вычислений, к поиску наиболее оптимальных решений и представлении полученного результата в виде таблиц и графиков, а в некоторых случаях и аналитическом виде.

Компьютер позволяет глубже понять и усвоить физическую сущность процессов, протекающих в радиотехнических устройствах; исследовать проблемы, особенно в области нелинейной радиотехники, недоступные аналитическим методам; найти оптимальные решения при решении разнообразных задач; провести необходимые расчеты быстро и с высокой точностью.

При этом следует иметь в виду, что и радиотехника оказывает сильнейшее влияние на развитие компьютеров по таким вопросам как повышение быстродействия, оптимальная обработка и кодирование сигналов.

Книга предназначена для специалистов в области радиоэлектроники и студентов вузов радиотехнического профиля.

Глава 1. РОЛЬ КОМПЬЮТЕРА В РАДИОТЕХНИКЕ

1.1. Области применения компьютера

Определим, в каких областях радиотехники находит применение компьютер. С этой целью кратко рассмотрим, что представляет собой современная радиотехника, как сформировавшаяся научно-техническая дисциплина из числа высоких технологий.

В техническом плане радиотехника объединяет разнообразные устройства, предназначенные для передачи и приема информации в рамках определенной системы посредством электромагнитных волн, распространяющихся в свободном пространстве. К числу таких систем относятся:

- системы звукового и телевизионного радиовещания;
- системы радиосвязи с помощью наземных средств, в частности сотовая радиосвязь;
- глобальные космические системы радиосвязи, телевизионного радиовещания и радионавигации;
- радиоуправления и радиотелеметрического контроля разнообразными объектами;
- радиолокационные, дальнего и ближнего радиуса действия, и ряд других.

В технологическом плане радиотехнические устройства представляют собой сборки из микросхем, транзисторов, диодов, конденсаторов и множества иных элементов, соединенных между собой согласно определенной электрической схеме. Наиболее совершенные конструкции полностью состоят из полупроводниковых гибридных и интегральных микросхем.

В научном плане радиотехника занимается исследованием распространения электромагнитных волн в свободном пространстве, расчетом и оптимизацией радиотехнических устройств и системы в целом, анализом протекающих в них процессов, т. е. всем комплексом вопросов, связанных с передачей и приемом информации по радиоканалу.

В математическом плане радиотехника опирается на такие разделы математики, как линейные и нелинейные дифференциальные уравнения, матричная алгебра, нелинейное программирование, теория случайных процессов, математический анализ и другие.

Во все перечисленные направления компьютер внес радикальные изменения.

Во-первых, компьютер является центральным звеном по управлению сложными радиотехническими системами, включающими порой десятки тысяч объектов. В таких системах компьютер используется также как средство для обработки, отображения и хранения всей переданной и принятой информации.

Во-вторых, с помощью компьютера осуществляется автоматизированное проектирование радиотехнических устройств и систем.

В-третьих, компьютер используется для моделирования радиотехнических устройств и исследования протекающих в них процессов, как во временной, так и частотных областях.

1.2. Классификация радиотехнических устройств

Иерархия построения радиотехнической системы может быть представлена в виде своеобразной пирамиды (рис. 1.1).



Рис. 1.1

Нижний уровень "пирамиды" составляет элементная база, включающая транзисторы, диоды, конденсаторы, микросхемы и десятки иных наименований. Из них составляются звенья, объединяемые в функционально законченные цепи – каскады, такие как автогенератор, преобразователь частоты, модулятор, усилитель мощности колебаний, демодулятор, усилители сверхвысокой, высокой, промежуточной и низкой частоты и т. д.

Следующий уровень – блоки, такие, например, как малошумящий СВЧ усилитель, модем-модулятор и демодулятор сигнала, блок обработки сигнала, блок усиления мощности ВЧ или СВЧ колебаний, линейный тракт радиоприемника, антенно-фидерный тракт и т. д.

Еще более высокий этаж "пирамиды" включает функционально законченные устройства – радиоприемники, радиопередатчики, радиостанции, радиолокаторы и т. д., которые работают самостоятельно в составе различных радиотехнических систем.

В случае применения в устройствах только интегральных микросхем три нижние уровня объединяются в один.

Физические процессы, связанные с преобразованием сигналов, протекают на всех уровнях "пирамиды". В настоящей книге с помощью компьютера изучаются процессы, протекающие в звеньях, каскадах и блоках. Исследование процессов проводится в частотной и временной областях.

Каскады и звенья, применяемые в радиотехнических устройствах, вне зависимости от их назначения, можно классифицировать по четырем основным признакам:

- влияния амплитуды сигнала на их параметры и характеристики, что приводит к делению всех объектов на линейные и нелинейные;

- отсутствия или наличия в них электронных приборов, что делит их на пассивные и активные;

- взаимодействия с внешними сигналами – автономного или неавтономного типа;

- диапазона частот и используемых в этой связи элементов – с сосредоточенными или распределенными постоянными.

Остановимся более подробно на отличительных признаках устройств различного типа согласно данной классификации.

Линейные и нелинейные устройства. Определяющим признаком при делении устройств на линейные и нелинейные является зависимость их параметров и характеристик от амплитуды сигнала. В линейных устройствах такая зависимость отсутствует, в нелинейных – имеет место. Практически всегда, в линейных устройствах амплитуда сигнала относительно невелика, что позволяет режим их работы называть режимом "малого" сигнала. Напротив, в нелинейных устройствах, как правило, амплитуда сигнала сравнительно велика и здесь имеет место так называемый режим "большого" сигнала. Нелинейным звеном в большинстве случаев является электронный прибор.

В радиоприемниках до демодулятора сигнала каскады работают обычно в режиме "малого" сигнала, что позволяет относить их к числу линейных устройств и объединить в общий линейный тракт. Мощные каскады в радиопередатчиках, работающие в режиме "большого" сигнала, относятся к числу нелинейных.

В математическом плане деление устройств на линейные и нелинейные прослеживается достаточно четко: работа первых описывается одним или системой линейных дифференциальных уравнений, вторых – нелинейными дифференциальными уравнениями.

Устройства пассивного и активного типа. В состав пассивных устройств входят такие элементы, как конденсаторы, индуктивности, резисторы, микрополосковые линии передачи, резонаторы и т. д. В состав активных линейных устройств помимо перечисленных обязательно входят и электронные приборы. Таким образом, отличительным признаком активного устройства является преобразование в нем энергии из одного вида в другой, например, энергии источника постоянного тока в энергию высокочастотных колебаний. В устройствах пассивного типа такого преобразования энергии не происходит, с чем и связано их название.

С помощью пассивных устройств осуществляется фильтрация сигналов, суммирование и деление их мощности, согласование и связь между собой различных каскадов и звеньев. Большинство устройств пассивного типа, за исключением тех, в которых применяются ферромагнетики, относятся к числу линейных.

С помощью активных устройств с электронными приборами осуществляется генерация колебаний, их усиление по мощности в различных диапазонах частот – от низких до сверхвысоких (СВЧ), преобразование частоты, модуляция и демодуляция, обработка сигнала и другие функции.

Устройства автономного или неавтономного типа. Два признака отличают устройства неавтономного типа: зависимость выходного сигнала

от входного и изменение параметров входного сигнала при его прохождении через устройство. Так, в усилителях увеличивается мощность сигнала, в преобразователях – меняется частота.

Признаком устройств автономного типа является отсутствие внешнего воздействия, в них выходной сигнал определяется исключительно свойствами самого устройства. Так, в автогенераторе – типичном устройстве автономного типа – частота автоколебаний зависит от параметров колебательной системы, а мощность сигнала – от электронного прибора и режима его работы.

Устройства с элементами сосредоточенного и распределенного типа. К элементам сосредоточенного типа относятся конденсаторы, резисторы и индуктивности. Элементы с распределенными постоянными представляют собой сборки из отрезков фидерных линий – коаксиальных, полосковых, микрополосковых. К ним также относятся волноводы и объемные резонаторы.

Из-за физического различия элементов с сосредоточенными и распределенными постоянными радикально меняется аппарат исследования устройств, собранных на их основе. При использовании элементов сосредоточенного типа составляются уравнения, в которые входят полные значения тока и напряжения в различных участках схемы. При применении элементов распределенного типа уравнения, описывающие работу устройств, составляются относительно токов и напряжений падающих и отраженных волн, распространяющихся в линиях передачи.

Анализ устройств с элементами сосредоточенного типа базируется на обыкновенных дифференциальных уравнениях, с распределенными постоянными – на дифференциальных уравнениях с частными производными. Комплексное сопротивление является важным параметром устройств первого типа, комплексный коэффициент отраженной волны – второго типа. Эти существенные различия приводят даже к делению радиотехники на два больших класса: высокочастотную (ВЧ) и сверхвысокочастотную (СВЧ).

1.3. Пять типов задач в радиотехнике

При всем разнообразии задач, решаемых в рамках научно-технической дисциплины «радиотехника», формально их можно свести к пяти основным типам: моделированию, расчету, анализу, оптимизации и синтезу. Остановимся на них более подробно и решим, в каких случаях наиболее целесообразно применение компьютера.

Моделирование. Может осуществляться на всех уровнях представленной выше "пирамиды" (рис. 1.1). Моделирование на ее нижних уровнях, включающих полупроводниковые приборы, звенья, каскады и т. д., сводится к описанию их работы с помощью матрицы, уравнения, формулы, графика или таблицы. Такая математическая модель должна, с одной стороны, с требуемой точностью отражать физические процессы в исследуемом объекте, а с другой – быть пригодной для использования в компьютере. В одних случаях математическая модель является результатом аналитического или численного анализа физической модели объекта, в других – экспериментальных исследований. Обработка, в том числе и статистиче-

ская, имеющегося массива данных, характеризующего работу каскада или элемента, также проводится с помощью компьютера. Работа объекта может быть определена и в виде его отклика или реакции на входное воздействие без проникновения в сущность физических процессов, протекающих внутри устройства. В таком случае с помощью математической модели описываются только внешние свойства исследуемого объекта и поэтому модель может быть названа феноменологической.

Приведем примеры.

1. Волновое сопротивление микрополосковой линии определяется путем численного решения электродинамической задачи. Обработка полученного цифрового массива данных позволяет найти аналитическую зависимость волнового сопротивления линии от ее геометрических размеров и материала подложки. Следовательно, в данном случае математическая модель объекта может быть представлена формулой.

2. Комплексные входное и выходное сопротивления мощного СВЧ транзистора в режиме "большого сигнала" определяются обычно экспериментальным путем. По результатам измерений составляется таблица значений активной и реактивной составляющих этих сопротивлений от частоты и мощности входного сигнала. Такая таблица, которую можно перенести в память компьютера, есть табличная модель транзистора.

3. Для расчета комбинационного спектра на выходе высокочастотного усилительного тракта – нелинейной динамической системе – при многочастотном входном сигнале необходимо знать его амплитудную и фазоамплитудную характеристики в одночастотном режиме работы. Совокупность этих двух характеристик, представленных в виде степенного ряда или в табличной форме, и есть математическая модель объекта, включающего несколько усилительных каскадов.

Расчет состоит в определении параметров или характеристик звена, каскада, группы каскадов или всего устройства с использованием их математических моделей. На основе определенных зависимостей составляется алгоритм, позволяющий найти отклик объекта при его неизменной структуре и фиксированных внутренних параметрах на внешнее воздействие. В результате составляются методики расчета параметров и характеристик самых разнообразных радиотехнических устройств.

Приведем примеры.

1. По определенной методике рассчитывается соотношение сигнал-шум на выходе блока обработки сигнала радиоприемника в зависимости от мощности и иных параметров принимаемого сигнала и помехи.

2. Рассчитывается выходная и потребляемая мощности, коэффициент усиления и другие параметры мощного высокочастотного усилителя с использованием модели выбранного типа транзистора.

3. Рассчитываются амплитудно- и фазочастотные характеристики полосового фильтра при его известной структуре и параметрах.

Анализ заключается в определении отклика объекта на изменение его внутренних параметров или внешнего воздействия, в исследовании переходного процесса и установившегося режима работы, условий устойчивости, прохождения сложных сигналов, помехоустойчивости и других вопросов. Возможны различные виды анализа:

- в частотной области с помощью амплитудно- и фазочастотной характеристик;

- во временной области с помощью переходной или импульсной характеристик, первая из которых определяется при входном воздействии в виде единичной функции (**1**(t)=1 при t≥0 и **1**(t)=0 при t<0), вторая – единичного импульса (δ-функция);

- электрической устойчивости, которую можно исследовать самостоятельно или в рамках двух первых видов анализа;

- допусковый, устанавливающий зависимость выходных параметров схемы от изменения параметров ее элементов (при детерминированном характере изменения параметров элементов допусковый анализ называется чувствительностью, при случайном характере – статистическим);

- температурный, устанавливающий зависимость выходных параметров схемы от изменения температуры окружающей среды.

Остановимся на анализе электронных схем. При первых двух видах анализа, т. е. в частотной и временной областях, возможны два метода.

Первый – основан на использовании некоторого обобщенного параметра (под последним можно понимать, например, для линейных схем передаточную функцию, полученную в результате преобразования Лапласа). Такой путь позволяет найти временные и частотные характеристики объекта для линейных схем с помощью операционного метода или интеграла Фурье (см. гл. 3), а для нелинейных – путем решения нелинейного дифференциального уравнения или гармонической линеаризации (см. гл. 4). Роль компьютера в этом случае сводится к проведению трудоемких рутинных расчетов с помощью универсального математического пакета программ «Mathcad» или иной специализированной программы. По результатам расчета на экран дисплея выводится таблица и графики.

Однако с возрастанием сложности схем реализация такого пути становится весьма затруднительной ввиду большой трудоемкости по составлению уравнений схемы и их совместном решении для определения обобщенного оператора или некоторого алгоритма, позволяющего выразить выходные характеристики через параметры схемы при заданном входном сигнале. Поэтому при сложной схеме, включающей много элементов и их соединений, более продуктивным является второй путь. Он основан на использовании матрично-топологических методов анализа электронных схем с помощью теории графов и матричной алгебры. Наиболее распространены из них методы узловых потенциалов, контурных токов и переменных состояния, положенные в основу универсальных программ анализа электронных схем. Одной из таких программ является «Electronics Workbench» [1], позволяющая с помощью графического интерфейса воспроизвести на экране дисплея электронную схему и подвергнуть ее всестороннему анализу.

Оптимизация состоит в определении такой оптимальной комбинации значений внутренних параметров устройства при его неизменной структуре, при которой одна или несколько внешних характеристик или параметров объекта имеют наилучшее значение согласно выбранному критерию. При этом составляется функция цели, в концентрированной форме отражающая конечный смысл решаемой задачи: поиск оптимальной характеристики объекта с учетом определенных ограничений.

Сам поиск глобального минимума или максимума функции цели, в зависимости от характера решаемой задачи, осуществляется по нескольким методам, составляющим предмет нелинейного программирования. Практическая реализация второго пути, требующая огромного объема вычислений, возможна только с применением компьютера. Эта проблема обсуждается ниже в гл. 10, 11 и 13 .

Приведем примеры.

1. Требуется получить максимальное отношение сигнал-шум при заданном спектре сигнала и помехи в рамках метода оптимальной фильтрации. Для этой цели необходимо найти параметры фильтра, обеспечивающего данное требование. Решение данной задачи возможно с помощью методов оптимизации.

2. Требуется при заданной структуре фильтра найти такие его параметры, при которых его характеристика наилучшим образом приближена к идеальной согласно выбранному критерию, например, минимаксному.

3. Требуется найти такую форму сигнала на выходе транзисторного ВЧ усилителя мощности, при котором обеспечивается максимальное значение колебательной мощности при заданном КПД.

Синтез состоит в определении структуры проектируемого объекта и значений параметров его элементов, при которых устройство наилучшим образом согласно выбранному критерию отвечает необходимым требованиям. Из сказанного следует, что оптимизацию можно рассматривать как частный случай синтеза. Более того, при оптимизации с перебором нескольких, наиболее подходящих для рассматриваемого случая структур объекта, она практически смыкается с синтезом. Поэтому оптимизацию называют также параметрическим синтезом.

1.4. Об универсальном математическом пакете программ «Mathcad»

Пакет программ «Mathcad» позволяет выполнять математические расчеты с помощью компьютера в среде операционной системы «Windows» [2–4].

«Mathcad» включает в свой состав три редактора – формульный, текстовый и графический. Благодаря им обеспечивается принятый в математике способ записи функций и выражений и получение результатов вычислений, произведенных компьютером, в виде таблиц и графиков. Взаимодействие пользователя с компьютером осуществляется с помощью удобного графического интерфейса, включающего пиктограммы, диалоговые окна, меню, опции и другие "инструменты", располагаемые на экране дисплея.

«Mathcad» включает множество операторов, встроенных функций и алгоритмов решения разнообразных математических задач, которые прямо приложимы ко всему комплексу вопросов, рассматриваемых в рамках такой научно-технической как «радиотехника». (Сказанное, естественно, относится и к другим техническим дисциплинам). «Mathcad» обладает повышенной точностью и быстродействием вычислений повышенной степени сложности, используя 32-разрядную память.

С помощью «Mathcad» можно решать следующие математические задачи, имеющие прямое отношение к радиотехнике:

- оперировать с действительными и комплексными величинами и числами;
- решать всевозможные алгебраические задачи;
- разлагать функции в ряд Тейлора и Фурье;
- выполнять действия с векторами и матрицами;
- осуществлять логические операции;
- производить дифференцирование и интегрирование функций;
- осуществлять преобразования Фурье и Лапласа;
- решать систему дифференциальных уравнений;
- проводить статистические вычисления и анализ;
- производить линейную и сплайновую аппроксимацию функций заданных по точкам;
- решать задачи, относящиеся к нелинейному программированию и связанные с поиском глобального экстремума функции цели.

Пакет математических программ «Mathcad» вносит радикальные изменения в изучение многих технических дисциплин, в том числе и радиотехнику. Эти изменения позволяют получить следующие преимущества:

Во-первых, освобождает исследователя от рутинных вычислений при существенном возрастании их точности;

Во-вторых, существенно расширяют область решаемых задач, особенно из числа нелинейных.

Например, процесс установления колебаний в автогенераторе с помощью аналитического метода можно рассчитать только при "малой" нелинейности. При использовании программ «Mathcad» все ограничения по виду нелинейности практически снимаются.

Другой пример. Рассчитать комбинационный спектр на выходе нелинейного усилителя аналитическим методом невозможно. «Mathcad» позволяет рассчитать этот спектр при любых видах нелинейных характеристик.

Третий пример. При использовании аналитических методов решение задачи прохождения сигнала с линейной частотной модуляцией через электрические цепи является исключительно трудоемкой, поскольку резонансная характеристика при быстром изменении частоты существенно отличается от статической [5]. С применением «Mathcad» эта задача относится к числу ординарных и легко решаемых.

В-третьих, появляется возможность глубокого изучения физических процессов, протекающих в системе. Ниже на конкретных примерах будет раскрыта такая возможность.

В приложении 2 приводятся сведения по некоторым встроенным операторам и функциям, используемым в приводимых ниже программах.

Глава 2. СИГНАЛЫ

2.1. Виды сигналов

В радиотехнике различают:

- электрические колебания;
- электромагнитные колебания;
- сигнал – электрическое или электромагнитное колебание, несущее информацию;
- радиосигнал – излученный сигнал, распространяющийся в свободном пространстве.

Для краткости под словом "сигнал" будем понимать не только собственно сам сигнал, но и электрические колебания.

Классификация сигналов возможна по нескольким признакам.

В зависимости от вида функции, описывающей сигнал: детерминированные и случайные. Детерминированный сигнал описывается функцией времени в форме аналитического выражения или графика, что позволяет определить его параметры в любой момент. Случайный сигнал относится к числу случайных процессов, его параметры в любой момент можно определить только с определенной степенью вероятности.

Детерминированные сигналы могут носить периодический характер с периодом повторения Т или быть представлены в форме одиночного, непериодического колебания.

Исходя из процесса модуляции, т. е. наложения исходной информации на несущие колебания, различают: модулирующий сигнал – исходное сообщение, модулированный сигнал – несущие колебания, на которые наложен модулирующий сигнал. При многоступенчатой модуляции сигнал может выступать в двоякой роли и как модулирующий, и как модулированный.

В зависимости от вида модуляции различают сигнал с амплитудной, частотной, фазовой, импульсной и другими видами модуляции. При модуляции спектр сигнала расширяется. При этом в зависимости от ширины спектра различают узкополосные и широкополосные сигналы.

Среди детерминированных выделяют ортогональные и тестовые сигналы. Ортогональными называют два сигнала, разнесенные во времени или имеющие неперекрывающиеся частотные спектры. Тестовые сигналы предназначены для анализа и проверки радиотехнических устройств. Например, в качестве тестового может использоваться синусоидальный сигнал или сигнал в виде единичного скачка напряжения. Сигналы, мешающие нормальному приему полезных сигналов, называются помехами.

Сигналы претерпевают различные преобразования в радиотехнических устройствах. К ним относятся: умножение, деление, увеличение или уменьшение частоты сигнала, модуляция и демодуляция сигнала, увеличение мощности сигнала, обработка сигнала, его выделение из смеси разных сигналов, фильтрация и излучение сигнала.

Теории сигналов в радиотехнике посвящена обширная литература, в том числе [5–9]. Ниже излагаются основные вопросы теории, лежащие в основе анализа сигналов с помощью пакета программ «Mathcad».

2.2. Периодические сигналы и ряд Фурье

Как было сказано выше, к числу детерминированных сигналов относятся периодические и одиночные. Первый из них описывается периодической функцией вида:

$$\phi(t) = \phi(t + nT), \tag{2.1}$$

где $T=2\pi/\omega$ – период колебаний; n – любое положительное или отрицательное целое число; ω – круговая частота.

Из (2.1) следует, что периодичность функции распространяется на интервал времени $-\infty \le t \le \infty$. Такая периодическая функция может быть представлена в виде суммы ряда других функций. Наиболее часто для этой цели используется ряд Фурье, составленный из ортогональных тригонометрических функций и имеющий следующий вид в вещественной форме:

$$\phi(\omega t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \tag{2.2}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\omega t) d\omega t;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\omega t) \cos k\omega t d\omega t;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\omega t) \sin k\omega t d\omega t;$$

$\omega=2\pi/T$ – круговая частота.

Функция $\Phi(\omega t)$, разлагаемая в ряд Фурье, должна отвечать условиям Дирихле: быть ограниченной, кусочно-непрерывной и имеющей на протяжении периода конечное число экстремумов. Практически эти условия всегда выполняются. Ряд Фурье может быть записан и в комплексной форме:

$$\phi(\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega kt}. \tag{2.3}$$

Комплексная амплитуда этого ряда есть:

$$C_k = |C_k| \exp(-j\varphi_k), \qquad (2.4)$$

$$\text{где } |C_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} - \text{амплитуда};$$

$$\varphi_k = arctg(b_k / a_k) - \text{фаза}.$$

Совокупность модулей C_k образуют амплитудно-частотный спектр периодической функции $\Phi(\omega t)$, а фаз φ_k – фазо-частотный. Амплитудный спектр является дискретным или линейчатым, в котором отдельные спектральные составляющие, определяемые значениям $\omega_k = k\omega$, следуют с интервалом равным $\omega = 2\pi/T$. Рассмотрим три примера по разложению в ряд Фурье периодической функции.

Пример 2.1. Периодическая функция состоит из импульсов косинусоидальной формы (рис. 2.1), описываемых функцией $\Phi(X)$, приведенной в программе на рис. 2.2. На интервале $|X| = |\omega t| \le U$ функция $\Phi(X) \ge 0$. Величина U при размерности в радианах и UG – в градусах называется нижним углом отсечки. При расчете примем $UG = 60^0$. Рассчитаем постоянную составляющую A_0 и амплитуды гармоник (параметр A_k) от 1 до N=10 и их значения, выраженные в децибелах относительно 1-й гармоники сигнала: $AD_k = 20\lg(A_k/A_1)$. Поскольку функция $\Phi(\omega t)$ четная, то синусные составляющие в разложении равны нулю. Сама программа и результаты расчета по ней приведены на рис. 2.2.

По данной программе, изменив начальные условия, можно рассчитать гармоники периодической последовательности импульсов косинусоидальной формы при любом значении нижнего угла отсечки UG.

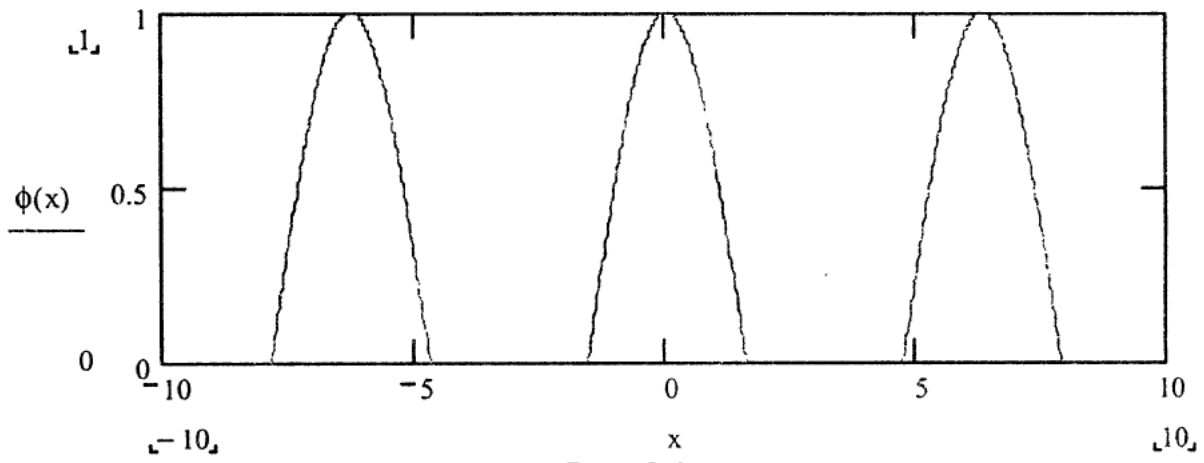


Рис. 2.1

$$UG := 60 \qquad U := UG \cdot \frac{\pi}{180} \qquad N := 10$$

$$\Phi(x) := \frac{(\cos(x) - \cos(U))}{1 - \cos(U)}$$

$$\Phi(x) := \begin{cases} \dfrac{(\cos(x) - \cos(U))}{1 - \cos(U)} & \text{if } |x| \le U \\ 0 \text{ if } U < |x| \le \pi \end{cases}$$

$$k := 0 .. N$$

$$A_k := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \Phi(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$$

$$A_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \Phi(x)\, dx$$

$$AD_k := 20 \cdot \log\left(\frac{|A_k|}{A_1} \right)$$

$A =$

	0
0	0.218
1	0.391
2	0.276
3	0.138
4	0.028
5	-0.028
6	-0.032
7	$-9.845 \cdot 10^{-3}$
8	$9.844 \cdot 10^{-3}$
9	0.014
10	$5.012 \cdot 10^{-3}$

$AD =$

	0
0	-5.075
1	0
2	-3.036
3	-9.057
4	-23.036
5	-23.036
6	-21.876
7	-31.979
8	-31.98
9	-29.057
10	-37.844

Рис. 2.2

Пример 2.2. Периодическая функция состоит из импульсов прямоугольной формы амплитудой AM, длительностью τ и периодом повторения T (рис. 2.3). Такой импульс описывается функцией Z(x), где X=ωt, приведенной в программе на рис. 2.4. В примере расчета принято значение α=τ/T=0,1 и число гармоник N=20. Сама программа и результаты расчета по ней приведены на рис. 2.4.

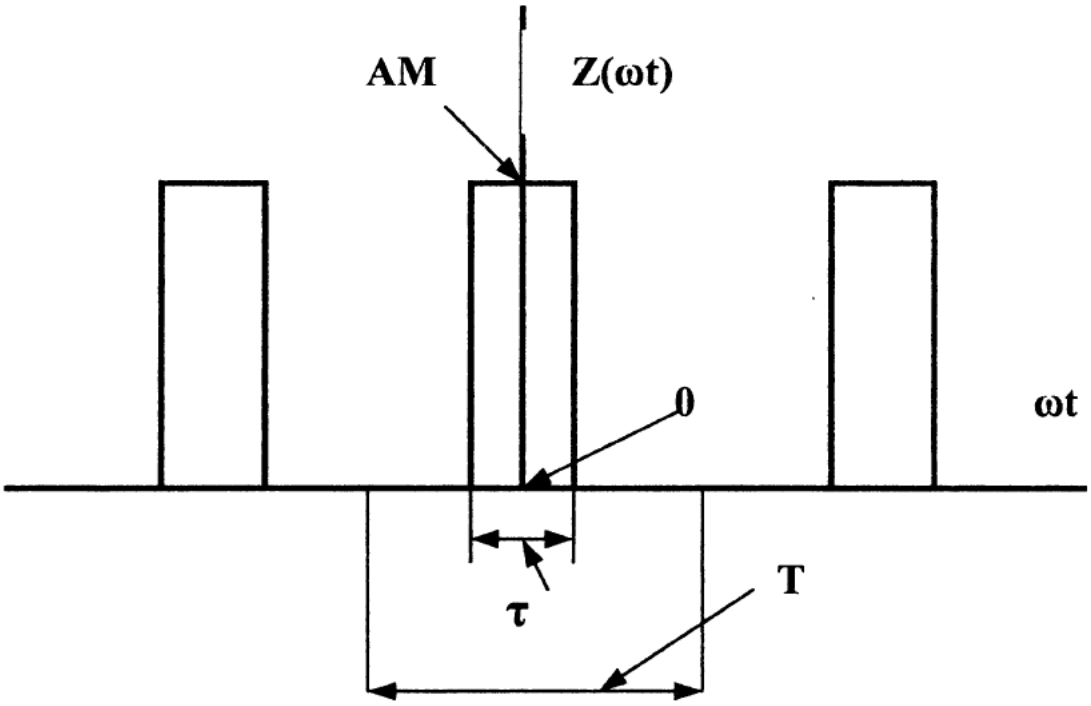


Рис. 2.3

Полученный спектр является линейчатым, спектральные составляющие следуют в нем с интервалом равным ω=2π/T или f=1/T. При значении круговой частоты ω=2πk/τ или f=k/τ=k/αT, где k – целое число, значение спектральной составляющей равно 0. Сами спектральные составляющие можно вычислить также по формуле:

$$A_k = \frac{2AM}{\pi k}\left|\sin\left(\pi k\tau / T\right)\right| = \frac{2AM}{\pi k}\left|\sin\left(0{,}5k\omega\tau\right)\right|. \qquad (2.5)$$

По программе (рис. 2.4) можно вычислить линейчатый спектр при любом значении α и сколь угодно большом значении числа гармоник N. Кроме того, программой можно воспользоваться и при иной другой форме симметричного импульса, изменив только соответствующим образом запись функции Z(x), разлагаемой в ряд Фурье.

$\alpha := 0.1 \quad N := 20 \quad AM := 1$

$$Z(x) := \begin{cases} AM & \text{if } |x| \le \alpha \cdot \pi \\ 0 & \text{if } \alpha \cdot \pi < |x| \le \pi \end{cases}$$

$k := 0..N$

$$A_k := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} Z(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$$

$$A_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} Z(x)\, dx$$

$$AD_k := 20 \cdot \log\left(\frac{|A_k|}{A_1} \right)$$

$A =$

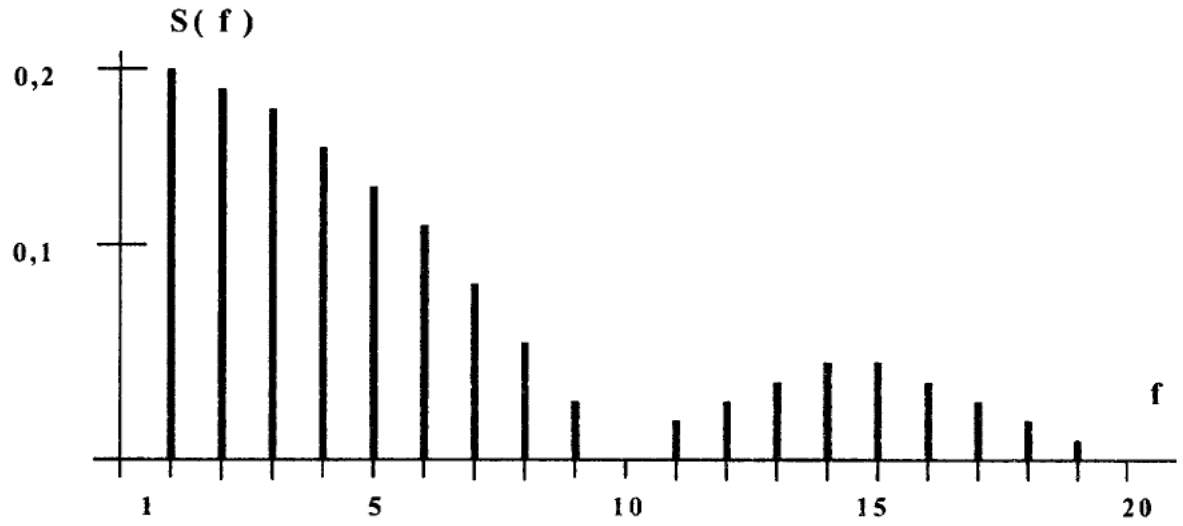
	0
0	0.1
1	0.197
2	0.187
3	0.172
4	0.151
5	0.127
6	0.109
7	0.074
8	0.047
9	0.022
10	$1.768 \cdot 10^{-8}$
11	-0.018
12	-0.031
13	-0.039
14	-0.043
15	-0.042
16	-0.038
17	-0.03
18	-0.021
19	-0.01
20	$-7.054 \cdot 10^{-8}$

$AD =$

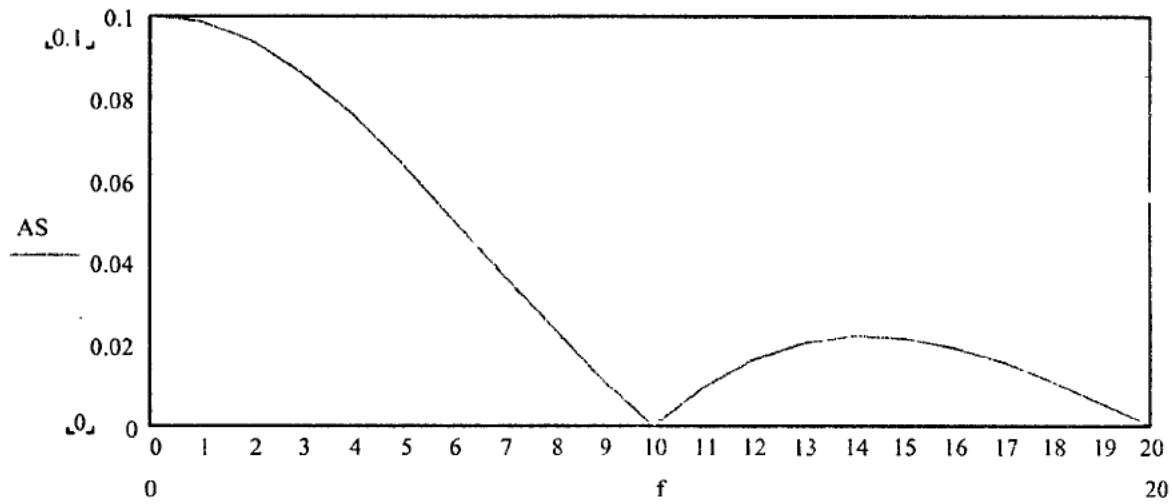
	0
0	-5.877
1	0
2	-0.435
3	-1.182
4	-2.278
5	-3.779
6	-5.154
7	-8.54
8	-12.475
9	-19.084
10	-140.926
11	-20.83
12	-16.006
13	-13.946
14	-13.161
15	-13.322
16	-14.315
17	-16.241
18	-19.516
19	-25.573
20	-128.908

Рис. 2.4

Согласно результатам, полученным по программе (рис. 2.4), на рис. 2.5,а построен линейчатый спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов.



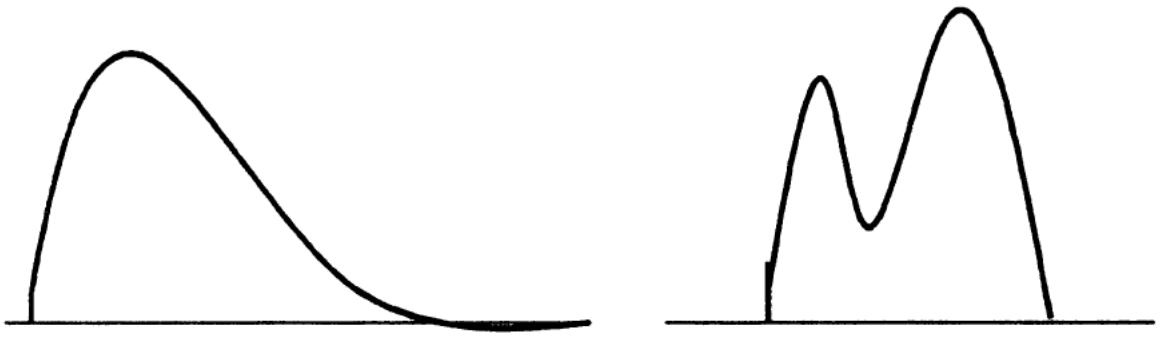
а)



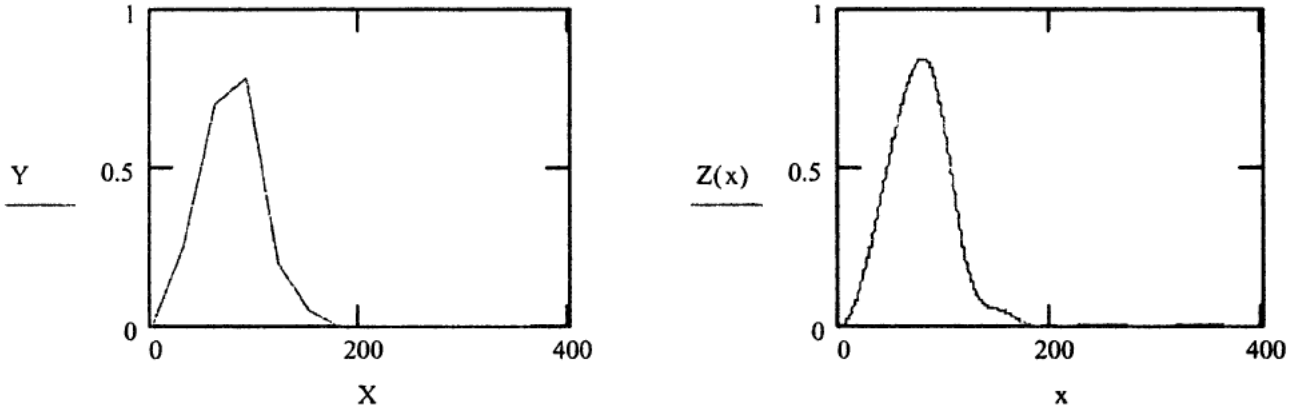
б)

Рис. 2.5

Пример 2.3. При решении многих практических задач в радиотехнике приходится иметь дело с импульсами, отличными от симметричной формы, описать которые аналитическим выражением затруднительно. Такая ситуация имеет место, например, при прохождении сигнала через нелинейные инерционные цепи или в мощных транзисторных генераторах, особенно при ключевом режиме их работы (см. гл. 7). Такой сложной формы импульс, полученной путем осциллографирования, можно задать в форме графика так, как это показано на рис. 2.6,а.



а)



б)

Рис. 2.6

В этом случае разложение периодической последовательности импульсов в ряд Фурье распадается на две части. В первой – производится аппроксимация функции, представленной в табличной форме. Программа «Mathcad» представляет два вида интерполяции функции заданной по точкам: кусочно-линейную и более точную, называемую сплайновой. Во второй части составляемой программы, после произведенной интерполяции, производится разложение периодической функции в ряд Фурье с определением синусной и косинусной составляющих, модуля амплитуды и фазы комплексного спектра. Такая программа по разложению в ряд Фурье периодической последовательности импульсов с использованием сплайн-интерполяции (функции ***cspline*** и ***interp***) представлена на рис. 2.7. График одного импульса, построенного на основании введенных данных, до и после интерполяции приведен на рис. 2.6,б.

По данной программе, введя с помощью матрицы исходные данные, можно разложить в ряд Фурье периодическую функцию с импульсами любой другой сложной формы и определить амплитуду и фазу требуемого числа гармоник N. В программе на рис. 2.7 в 1-й столбец матрицы исходных данных записывается значение аргумента $X=\omega t$ в градусах, а во 2-й – соответствующее ему значение ординаты, т. е. мгновенное значение импульса. В результате по программе рассчитываются амплитуды косинусной (A), синусной (B) и комплексной (C) составляющих и фазовый угол φ_k (в программе Ψ) при разложении в ряд Фурье периодической последовательности импульсов согласно (2.2)–(2.4).

$$IMP := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 0.25 \\ 60 & 0.7 \\ 90 & 0.78 \\ 120 & 0.2 \\ 150 & 0.05 \\ 180 & 0 \\ 225 & 0 \\ 270 & 0 \\ 315 & 0 \\ 360 & 0 \end{pmatrix} \qquad N := 5$$

$$X := IMP^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := IMP^{\langle 1 \rangle}$$

$$W := cspline(X, Y) \qquad Z(x) := interp(W, X, Y, x)$$

$$k := 0..N$$

$$A_k := \frac{1}{180} \cdot \int_0^{360} Z(x) \cdot \cos\left(k \cdot x \cdot \frac{\pi}{180}\right) dx$$

$$C_0 := \frac{1}{360} \cdot \int_0^{360} Z(x)\, dx$$

$$B_k := \frac{1}{180} \cdot \int_0^{360} Z(x) \cdot \sin\left(k \cdot x \cdot \frac{\pi}{180}\right) dx$$

$$C_k := \sqrt{\left[(A_k)^2 + (B_k)^2\right]}$$

$$\psi_k := \frac{180}{\pi} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.329 \\ 0.071 \\ -0.181 \\ -0.082 \\ 0.028 \\ 8.888 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.285 \\ 0.1 \\ -0.079 \\ -0.044 \\ 0.017 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0.329 \\ 0.293 \\ 0.206 \\ 0.114 \\ 0.052 \\ 0.019 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 75.996 \\ -28.858 \\ 44.111 \\ -57.654 \\ 62.508 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.7

2.3. Одиночный импульс и интеграл Фурье

Одиночный импульс является в определенном смысле абстракцией и почти не имеет практического применения. Но его изучение позволяет определить спектр реальных сигналов, что имеет исключительно важное значение в радиотехнике.

Перейти от периодической функции к одиночному импульсу можно путем увеличения периода $T \to \infty$. При этом промежутки межу отдельными спектральными составляющими $\omega = 2\pi/T \to 0$ и спектр сигнала из линейчатого становится сплошным. Соответственно и дискретные значения частоты ω_k заменяются при этом на непрерывную величину ω, а сумма ряда (2.3) – на интеграл. В результате ряд Фурье принимает вид интеграла:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega . \qquad (2.6)$$

Входящая в (2.6) функция есть спектральная плотность:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt . \qquad (2.7)$$

Интегралы (2.6) и (2.7) называются соответственно обратным и прямым преобразованием Фурье. Одним из условий применимости преобразования Фурье является абсолютная интегрируемость подынтегральной функции Ф(t), в (2.7). Комплексная функция (2.6):

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

Из четности модуля и нечетности фазы следует, что подынтегральная функция в 1-м интеграле – четная, во 2-м – нечетная. Следовательно, 2-й интеграл с учетом пределов интегрирования равен 0 и поэтому (2.6) привдится к более удобному для расчетов виду:

$$\phi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega . \qquad (2.8)$$

Комплексное выражение (2.7) для спектральной плотности:

$$S(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = |S(\omega)| e^{j\theta(\omega)}, \qquad (2.9)$$

где

$$A(\omega) = \int_{0}^{\infty} \phi(t) \cos \omega t dt ; \qquad (2.10)$$

$$B(\omega) = \int_{0}^{\infty} \phi(t) \sin \omega t dt . \qquad (2.11)$$

Амплитуда и фаза спектральной плотности:

$$S(\omega)=\sqrt{[A(\omega)]^2+[B(\omega)]^2}; \tag{2.12}$$

$$\varphi(\omega)=-arctg[B(\omega)/A(\omega)]. \tag{2.13}$$

Поясним физический смысл приведенных выражений прямого и обратного преобразований Фурье. Согласно (2.6) единичный импульс произвольной формы, описываемый вещественной функцией Ф(t), отвечающей условиям Дирихле (например, имеющий вид, приведенный на рис. 2.6), представляется бесконечной суммой синусоидальных колебаний. Сами эти колебания бесконечно малы по амплитуде и отличаются по частоте на бесконечно малую величину. Это отличие по частоте составляет dω, а амплитуда составляющей S(ω)dω, где S(ω) есть спектральная плотность размерностью В/Гц. С ее помощью можно определить мощность сигнала при нагрузке в 1 Ом в интервале частотного спектра, заключенного в пределах от ω_1 до ω_2:

$$\Delta P=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}|S(\omega)|^2 d\omega. \tag{2.14}$$

Рассмотрим примеры по определению спектральной плотности единичного импульса.

Все приводимые ниже программы по определению спектральной плотности единых импульсов, составленные с помощью пакета программ «Mathcad», имеют следующие общие черты.

- В их основе лежат выражения (2.9)–(2.13).
- Длительность единичного импульса Ф(t) конечна и занимает интервал времени от 0 до τ или от –T до +T, вне этого интервала Ф(t)=0. Поэтому бесконечные пределы интегрирования в (2.10)–(2.11) заменяются на указанные величины.
- Размерность величин при расчете. Если τ (или T) заданы в секундах, то значение частоты **f**–в Гц, при τ – в миллисекундах **f** – кГц, при τ в микросекундах **f** – в МГц.
- Значения спектральной плотности вычисляется в N точках частотной оси с шагом DF. Чем больше N и мельче шаг, тем выше точность, но и больше время счета. Обычно достаточно принять N=100.
- Спектр рассчитывается в пределах от **-fh** до **+fh** с центральным значением **f**=0 и **fh=k/τ**, где k=5–6. Если спектр не спадает существенно к краям, то следует увеличить k.
- Отличие в приводимых программах состоит только в разной записи исходной функции Ф(t), описывающей одиночный импульс.
- Программа состоит из двух частей. В 1-й части с помощью отдельного программного блока, вызываемого командой **Add Line** (при этом на экране дисплея появляется вертикальная черта), согласно (2.10)–(2.11) рассчитываются зависимости A(ω) и B(ω). Во 2-й части заполняется таблица

и строятся графики исходного импульса и рассчитанной спектральной плотности S(ω) по N точкам.

Обратимся к рассмотрению четырех примеров.

Пример 2.4. Единичный импульс прямоугольной формы (рис. 2.3). Программа по расчету спектральной плотности такого сигнала согласно (2.9)–(2.13) с фрагментом таблицы результатов расчета приведена на рис. 2.8. Графики спектральной плотности, рассчитанные по данной программе при τ =0,1 и 0,05, представлены на рис. 2.9,а,б.

Поскольку интеграл Фурье оперирует с непериодическими функциями, то с его помощью можно анализировать не только единичные, но и пачку импульсов. При двух прямоугольных импульсах (рис. 2.3) функция, описывающая сигнал, примет вид:

$$\begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad \tau < t < T \\ AM \quad \text{if} \quad T \le t \le TM \\ 0 \quad \text{if} \quad (t > TM), \end{cases} \qquad (2.15)$$

где TM=T+τ – конечное значение функции.

Сама программа при пачке, состоящей из двух прямоугольных импульсов, останется прежней (рис. 2.8) (За исключением замены в функции FS параметра τ на TM и пределов интегрирования). График спектральной функции, рассчитанный по данной программе при τ=0,1 и T=1 приведен на рис. 2.9,в.

Пример 2.5. Единичный импульс в форме трапеции (рис. 2.10,а). Фрагмент программы по расчету спектральной плотности такого сигнала приведен на рис. 2.10,б. (В остальном программа совпадает программой при прямоугольном импульсе – рис. 2.8.) График спектральной плотности, рассчитанный по программе для трапецидального импульса при a=0,02, b=0,08 и τ=0,1, представлен на рис. 2.10,в.

Пример 2.6. Единичный импульс описывается экспоненциальной функцией с показателем степени, возведенным в степень γ. Программа по расчету спектральной плотности такого сигнала приведен на рис. 2.11,а. График спектральной плотности, рассчитанный по программе для экспоненциального импульса при параметрах, указанных в исходных данных, построен на рис. 2.11,б.

При задании импульса виде графика его аппроксимация может быть произведена согласно методики, описанной в примере 2.3.

$fh := -50 \qquad \tau := 0.1 \qquad AM := 1$

$DF := 1 \qquad N := 100$

$$\phi(t) := \begin{cases} AM & \text{if } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{if } t > \tau \end{cases}$$

$$FS(\phi, fh, DF, \tau, N) := \begin{cases} \text{for } n \in 0..N \\ \quad G^{\langle n \rangle} \leftarrow \begin{bmatrix} \int_0^{\tau} \phi(t) \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot (fh + n \cdot DF) \cdot t]\, dt \\ \int_0^{\tau} \phi(t) \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot (fh + n \cdot DF) \cdot t]\, dt \end{bmatrix} \\ G^T \end{cases}$$

$C := FS(\phi, fh, DF, \tau, N)$

$A := C^{\langle 0 \rangle} \qquad B := C^{\langle 1 \rangle} \qquad AS := \sqrt{A^2 + B^2}$

$i := 0..N$

$f_i := fh + (i \cdot DF)$

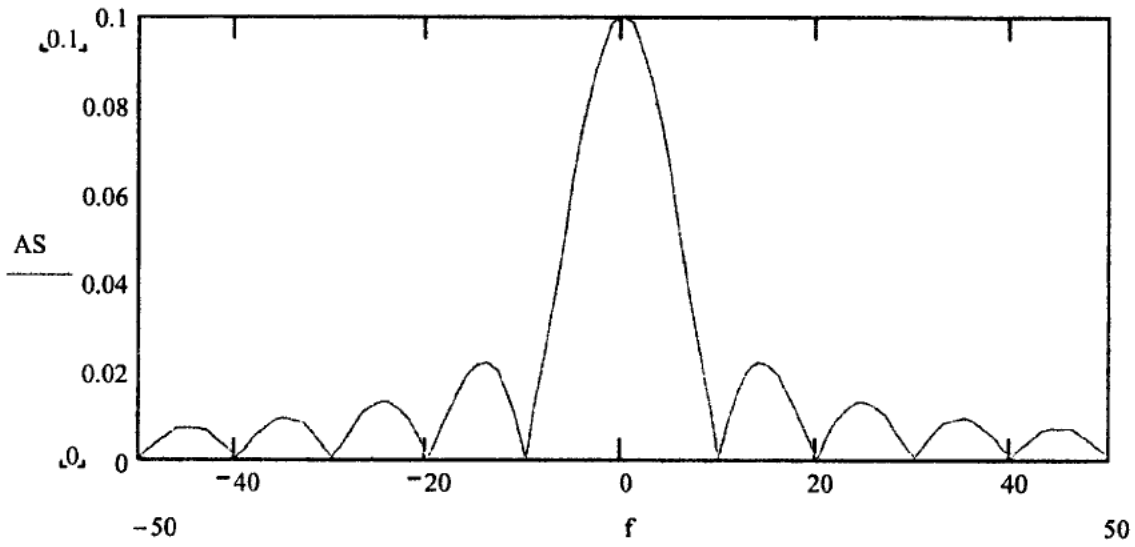
$f =$

	0
0	-50
1	-49
2	-48
3	-47
4	-46
5	-45
6	-44
7	-43
8	-42
9	-41
10	-40

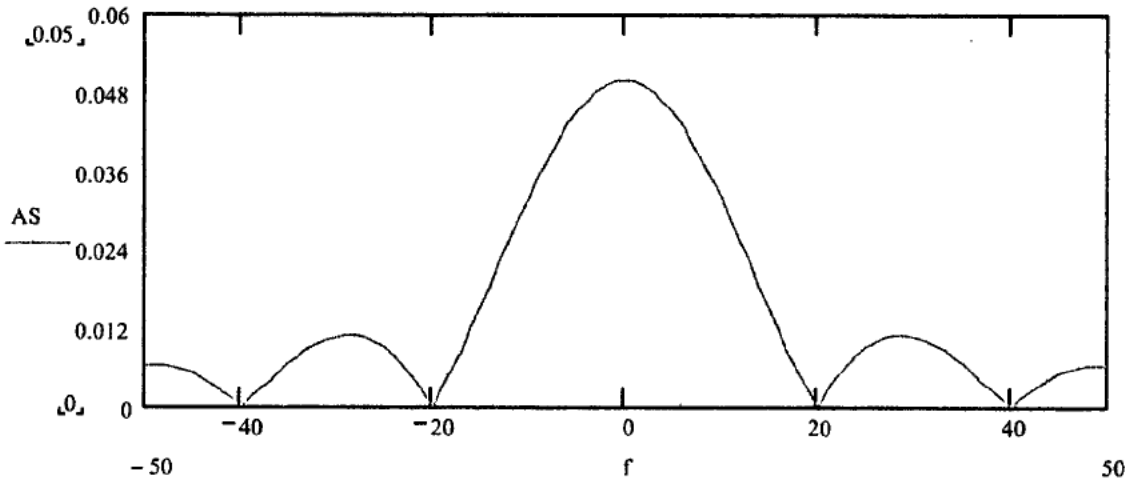
$AS =$

	0
0	0
1	$2.007 \cdot 10^{-3}$
2	$3.898 \cdot 10^{-3}$
3	$5.479 \cdot 10^{-3}$
4	$6.581 \cdot 10^{-3}$
5	$7.074 \cdot 10^{-3}$
6	$6.88 \cdot 10^{-3}$
7	$5.989 \cdot 10^{-3}$
8	$4.455 \cdot 10^{-3}$
9	$2.399 \cdot 10^{-3}$
10	0

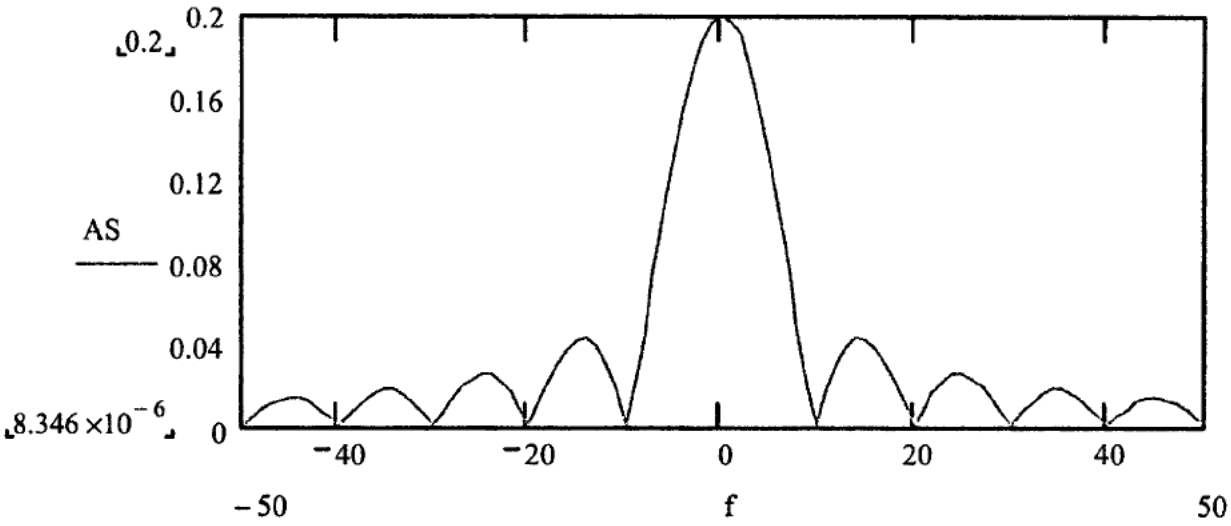
Рис. 2.8



а) один импульс τ=0,1

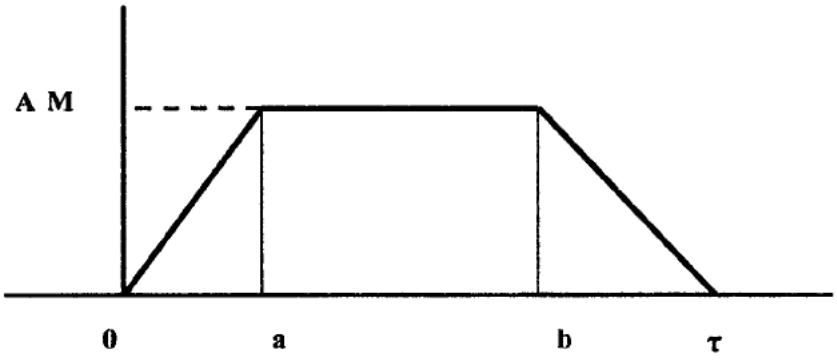


б) один импульс τ=0,05



в) два импульса τ=0,1

Рис. 2.9



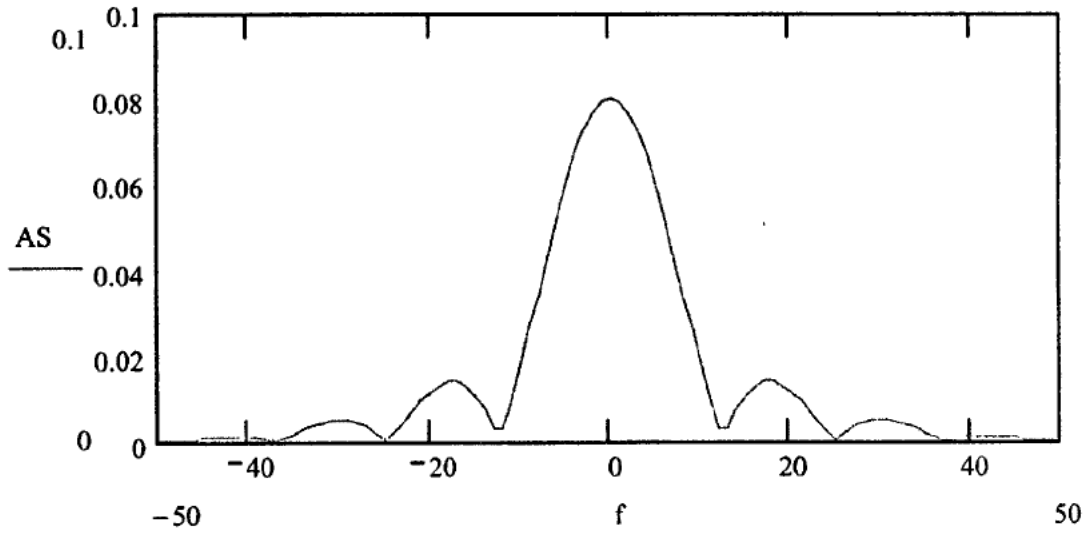
а)

$fh := -50 \quad \tau := 0.1 \quad a := 0.02 \quad b := 0.08$

$AM := 1 \quad DF := 1 \quad N := 100$

$$\phi(t) := \begin{cases} \left(\left(AM \cdot \frac{t}{a}\right)\right) & \text{if } 0 \le t \le a \\ AM & \text{if } a < t \le b \\ \left[\left[AM \cdot \left[1 - \frac{(t-b)}{(\tau - b)}\right]\right]\right] & \text{if } b < t \le \tau \\ 0 & \text{if } t > \tau \end{cases}$$

б)



в)

Рис. 2.10

$fh := -25 \qquad T := 1 \qquad \beta := 20 \qquad \gamma := 2$

$AM := 1 \qquad DF := 0.5 \qquad N := 100$

$$\phi(t) := \begin{cases} AM \cdot e^{-(\beta \cdot |t|)^{\gamma}} & \text{if } -T \le t \le T \\ 0 & \text{if } |t| > T \end{cases}$$

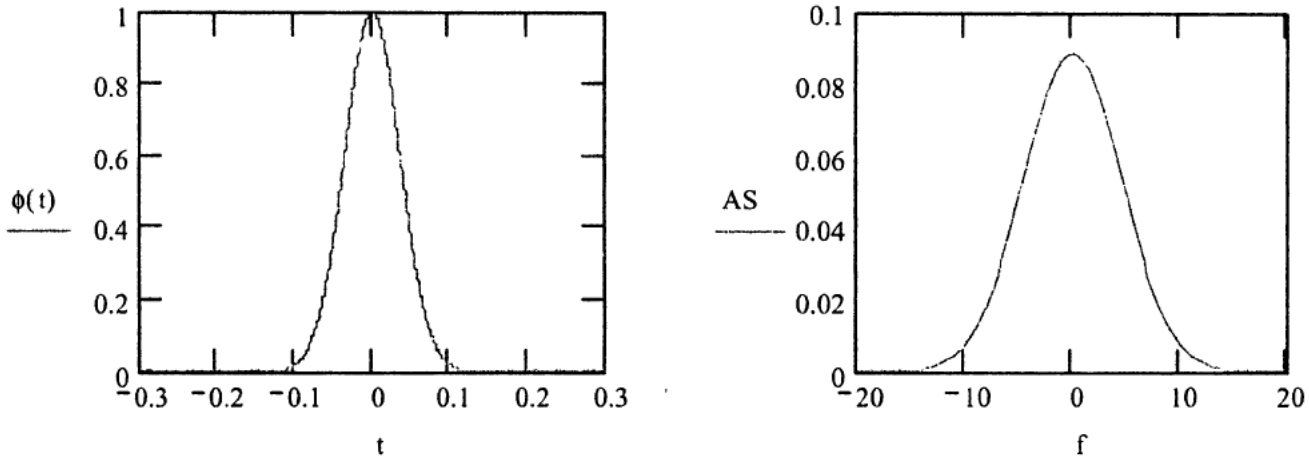
$$FS(\phi, fh, DF, T, N) := \left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..N \\ \quad G^{\langle n \rangle} \leftarrow \begin{bmatrix} \int_{-T}^{T} \phi(t) \cdot \sin\left[2 \cdot \pi \cdot (fh + n \cdot DF) \cdot t\right] dt \\ \int_{-T}^{T} \phi(t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (fh + n \cdot DF) \cdot t\right] dt \end{bmatrix} \\ G^{T} \end{array} \right.$$

$C := FS(\phi, fh, DF, T, N)$

$A := C^{\langle 0 \rangle} \qquad B := C^{\langle 1 \rangle} \qquad AS := \sqrt{A^2 + B^2}$

$i := 0..N \qquad f_i := fh + (i \cdot DF)$

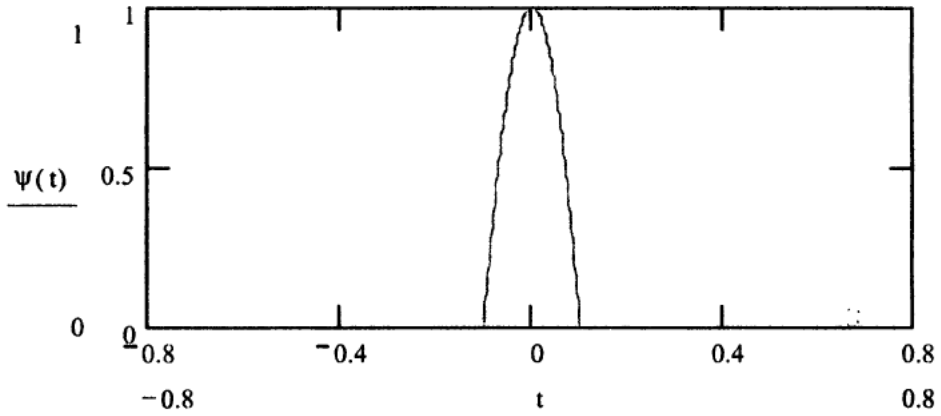
а)



б)

Рис. 2.11

Пример 2.7. Единичный импульс – часть косинусоиды (рис. 2.12,а). Фрагмент программы по расчету спектральной плотности такого сигнала приведен на рис. 2.12,б. (В остальном программа совпадает программой при прямоугольном импульсе – рис. 2.8, за исключением замены пределов интегрирования 0–τ на от –τ до +τ). График спектральной плотности, рассчитанный по программе для косинусоидального импульса при параметрах, указанных в исходных данных программы (рис. 2.12,б), приведен на рис. 2.12,в.



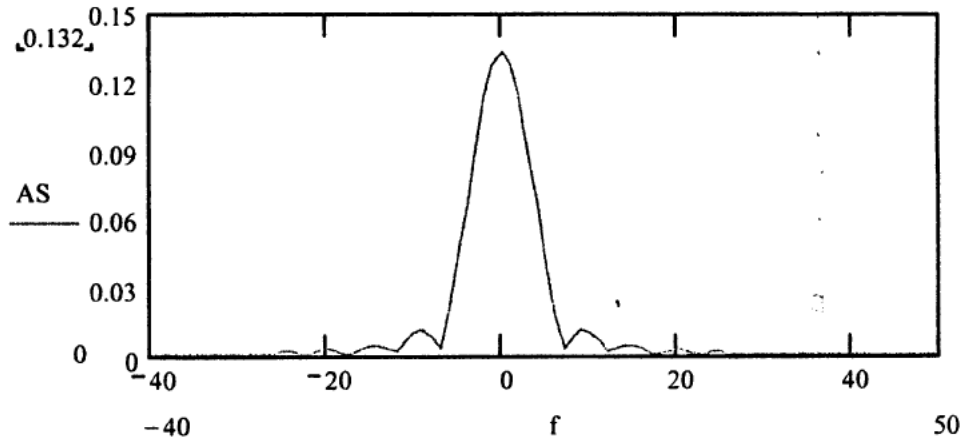
а)

$$fh := -50 \qquad T := 1 \qquad \tau := 0.1$$

$$AM := 1 \qquad DF := 1 \qquad N := 100 \qquad w := 2 \cdot \frac{\pi}{T}$$

$$\phi(t) := \begin{cases} \left[\left[AM \cdot \dfrac{\left(\cos(w \cdot t) - \cos(w \cdot \tau)\right)}{1 - \cos(w \cdot \tau)} \right]\right] & \text{if } -\tau \le t \le \tau \\ 0 \text{ if } t > \tau \end{cases}$$

б)



в)

Рис. 2.12

2.4. Связь между периодическим сигналом и одиночным импульсом

Проведенный компьютерный анализ периодического сигнала на основе ряда Фурье и одиночного импульса (возможна и пачка из конечного числа импульсов) на основе интеграла Фурье позволяет сделать следующие выводы, совпадающие с выводами аналитического анализа.

При периодическом сигнале – спектр линейчатый, при одиночном импульсе – сплошной. Но по форме оба спектра совпадают, причем огибающая линейчатого спектра с точностью до постоянного множителя повторяет сплошной спектр. Этот вывод следует как из аналитического анализа согласно [5–9], так и результатов проведенных расчетов и построенных на их основании графиков (рис. 2.5).

Обозначим по основанию ширину основного лепестка сплошного спектра, в котором сосредоточена большая часть энергии сигнала, через $2\Delta f$. Тогда для всех рассмотренных случае с определенной точностью справедливо следующее соотношение $\Delta f\,\tau=1$. Отсюда следует известный вывод о том, что чем короче по времени импульс (отдельный или периодически повторяющийся), чем больше ширина спектра. При $\tau\longrightarrow 0$ ширина спектра $\Delta f\longrightarrow\infty$.

Амплитуда основного лепестка спектра одиночного импульса определяется следующим примерным соотношением $S_0=AM^*\tau$, где AM – амплитуда импульса (рис. 2.3). При двух импульсах в сигнале это значение удваивается, поскольку в два раза возрастает энергия сигнала (рис. 2.9).

Размытость спектра, характеризуемая количеством "лепестков" и их амплитудой (см. рис. 2.9–2.12), зависит от формы импульса. При крутых фронтах импульса (прямоугольный импульс) эти "лепестки" значительны, при пологих фронтах (трапецидальный импульс) они уменьшаются, при гладких фронтах (экспоненциальный и косинусоидалный импульсы) – вообще пропадают. Из рассмотренных случаев наиболее сжатым спектром обладает косинусоидальный импульс.

Все сказанное следует учитывать при построении радиотехнической системы. Так, при близком расположении по частоте каналов радиосвязи из-за размытости спектра излучения радиосигнала происходит их взаимное влияние друг на друга: часть энергии из одного канала проникает в другой, что приводит к взаимным помехам и снижает качество приема. В таком случае следует выбирать такие формы сигнала, у которых спектр излучения по возможности сжат. Сужение ширины спектра излучения сигнала необходимо также в рамках проблемы электромагнитной совместимости работы радиоэлектронных средств.

В другом случае, например, в широкополосных системах радиосвязи, спектр сигнала должен быть наоборот по возможности "размыт" в широкой полосе частот и поэтому следует выбирать сигнал, имеющий расширенный спектр излучения (Ниже эта проблема будет рассмотрена подробнее.)

2.5. Случайные сигналы

В радиотехнике помимо детерминированных сигналов большую роль играют случайные сигналы, один или несколько параметров которого случайно зависят от времени, и потому относящиеся к классу случайных процессов. Особое место среди последних занимает стационарный случайный процесс, с которым наиболее часто приходится сталкиваться при решении разнообразных практических задач. Одним из свойств стационарного случайного процесса является отсутствие в нем тенденции к возрастанию или убыванию со временем, его однородность, совпадение характеристик различных реализаций. Пример случайного сигнала y(t), относящегося к классу стационарных, представлен на рис. 2.13,а.

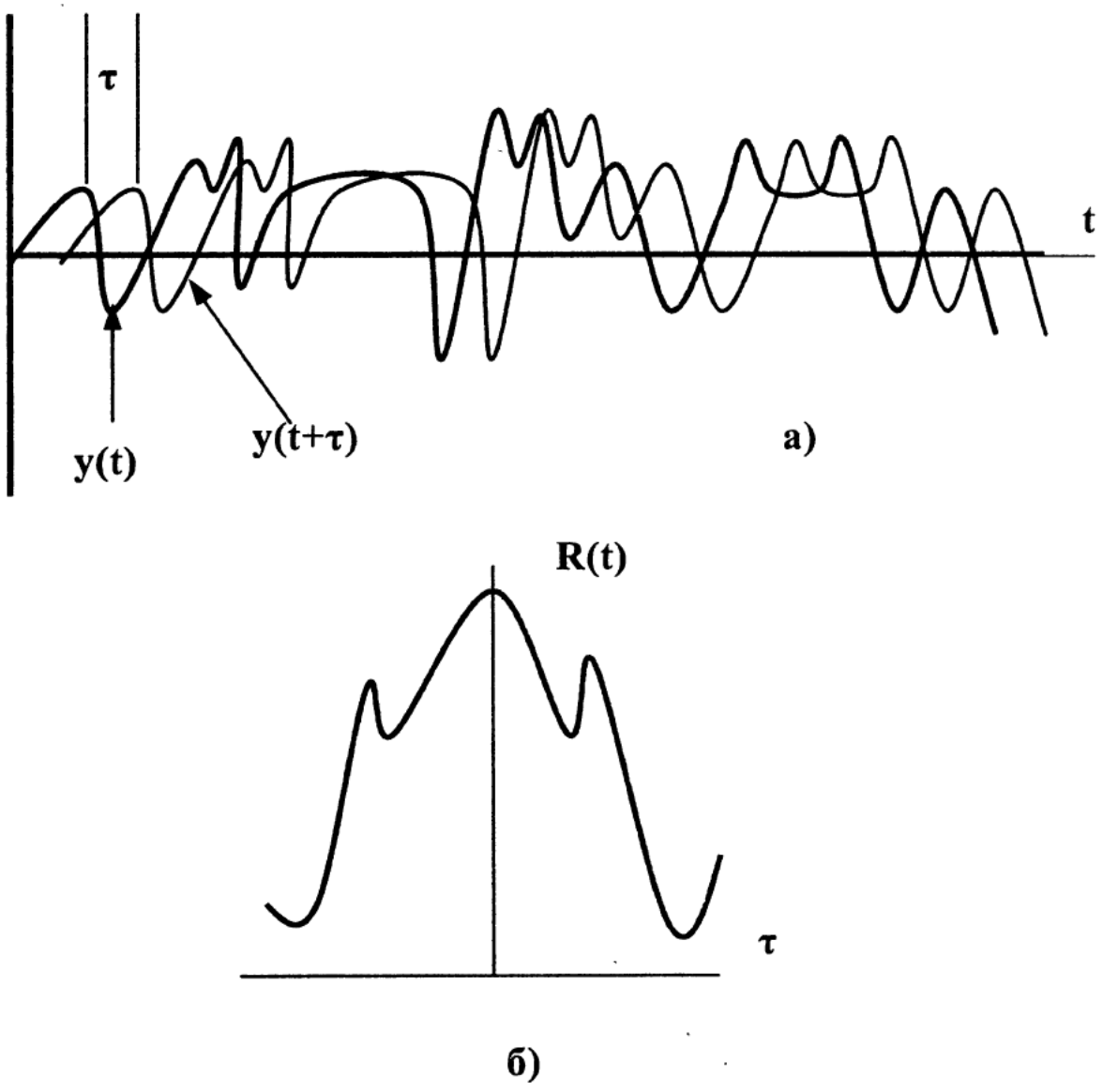


Рис. 2.13

Основные свойства стационарного случайного процесса могут быть описаны с помощью корреляционной функции и энергетического спектра.

Корреляционная функция есть среднее значение во времени произведения y(t)*y(t+τ), где τ – сдвиг во времени:

$$R(\tau)=\overline{y(t)\times y(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)\,y(t+\tau)dt \quad . \qquad (2.16)$$

Функция R(τ) дает меру зависимости значений случайной функции в моменты времени, отстоящие на τ. Вычислить функцию R(τ) согласно (2.16) при среднем значении функции $[y(t)]_{ср}=0$ можно следующим образом. Необходимо построить два графика–заданный y(t) и сдвинутый на τ: y(t+τ) (рис. 2.13,а). Далее следует перемножить ординаты этих двух кривых, соответствующих одним и тем же значениям времени t. В результате получим график, зависящий от t. Площадь, ограниченная этим графиком и осью абсцисс в пределах –T до +T, разделенная на длину интервала 2T, определит одну точку корреляционной функции при выбранном значении τ. Причем точность результата улучшается с увеличением T. Произведя аналогичные построения и вычисления при других значениях τ, можно по точкам построить корреляционную функцию R(τ) (рис. 2.13,б). Именно описанный алгоритм положен в основу приводимой ниже программы по расчету корреляционной функции (см. пример. 2.11).

К основным свойствам корреляционной функции относятся:

- четность относительно τ: R(τ)=R(–τ);

- равенство функции $R(0)=[y^2(t)]_{ср}$ при τ=0, т. е. среднему значению квадрата случайной функции y(t);

- максимум функции при τ=0 и справедливость неравенства R(τ)<R(0).

Другой важной характеристикой стационарного случайного процесса является энергетический спектр, определяемый выражением:

$$W(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{\overline{|S_T(jf)|^2}}{T}, \qquad (2.17)$$

где $S_T(jf)$ – комплексный спектр отрезка длительностью T некоторой реализации случайной функции y(t).

Корреляционная функция и энергетический спектр, связанные преобразованием интеграла Фурье, принимают следующую форму при проведении конкретных расчетов [7]:

$$W(f) = 4\int_0^{\infty} R(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau; \qquad (2.18)$$

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} W(f)\cos 2\pi f\tau df. \qquad (2.19)$$

При τ=0 из (2.19) для дисперсии случайного процесса имеем:

$$\sigma^2 = R(0) = \int_0^{\infty} W(f)df. \qquad (2.20)$$

Размерность корреляционной функции – $В^2$; энергетического спектра $В^2$/Гц при τ в секундах, $В^2$/кГц при τ в миллисекундах, $В^2$/МГц при τ в микросекундах.

С учетом размерности энергетического спектра $В^2$/Гц выражение (2.20) можно трактовать как среднюю мощность, выделяемую сигналом на сопротивлении в 1 Ом. Выбрав пределы интегрирования от f_1 до f_2, получим мощность, выделяемую сигналом за счет спектральных составляющих, лежащих в данном диапазоне.

Понятие о корреляционной функции распространяется и на детерминированные сигналы. Так для синусоидального сигнала с периодом $T=2\pi/\omega$ согласно (2.16) имеем (в силу периодичности меняются пределы интегрирования):

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t + \varphi)\times A\sin[\omega(t+\tau)+\varphi]dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T}\int_0^T [\cos\omega\tau - \cos(\omega t + 2\omega\tau + 2\varphi)]dt.$$

После взятия интеграла получим:

$$R(\tau) = 0{,}5A^2\cos\omega\tau. \qquad (2.21)$$

Корреляционная функция согласно (2.21) не зависит от начальной фазы и при τ=0 функция $R(0)=0{,}5A^2$, т. е. равна средней мощности гармонического колебания с амплитудой А.

Рассмотрим примеры по расчету энергетического спектра и корреляционной функции сигнала.

Пример 2.8. Вычислим по программе корреляционную функцию синусоидального сигнала, т. е. проверим справедливость формулы (2.21). Программа и результаты расчета по ней в виде графика представлены на рис. 2.14. Результаты в точности совпадают.

$$T := 10 \qquad A := 1 \qquad \theta := \frac{\pi}{2} \qquad f := \frac{1}{T}$$

$$N := 200 \qquad i := 0..N \qquad \tau_i := -20 + 0.2 \cdot i$$

$$R_i := \frac{A^2}{T} \cdot \int_0^T \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \theta\right) \cdot \sin\left[2 \cdot \pi \cdot f \cdot \left(t + \tau_i\right) + \theta\right] dt$$

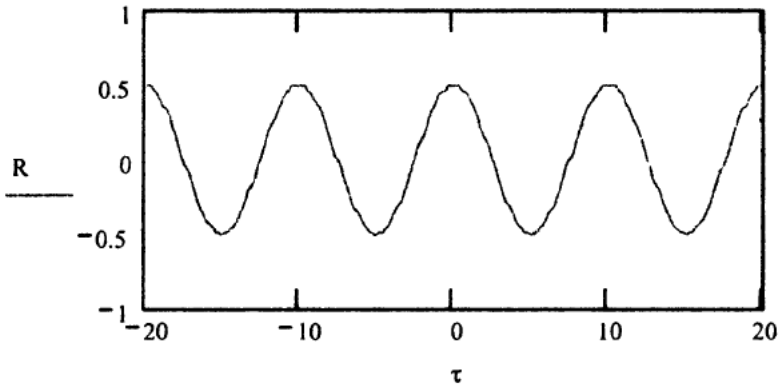


Рис. 2.14

Пример 2.9. Корреляционная функция описывается экспоненциальной функцией с показателем степени, возведенным в степень **γ**. Программа по расчету энергетического спектра согласно (2.18) с фрагментом таблицы с результатами приведена на рис.2.15, а графики при **γ**=2 и трех значениях параметра **b** – на рис. 2.16.

$$B := 1 \qquad b := 1 \qquad \gamma := 2 \qquad M := 5$$

$$R(\tau) := B \cdot e^{-b \cdot (|\tau|)^{\gamma}}$$

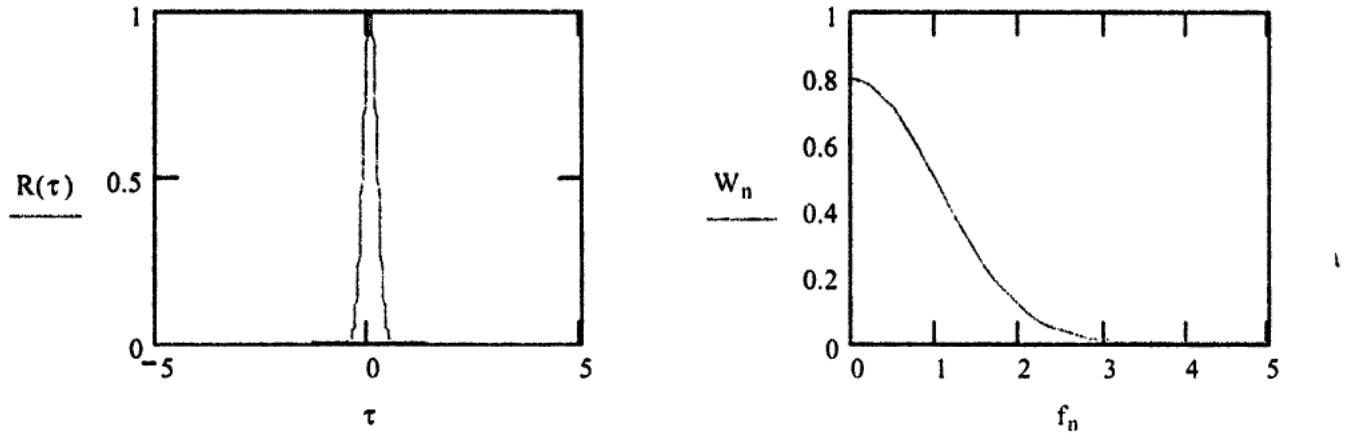
$$N := 200 \qquad n := 0..N \qquad f_n := 0.01 \cdot n$$

$$W_n := 4 \cdot \int_0^M R(\tau) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot \tau\right) d\tau$$

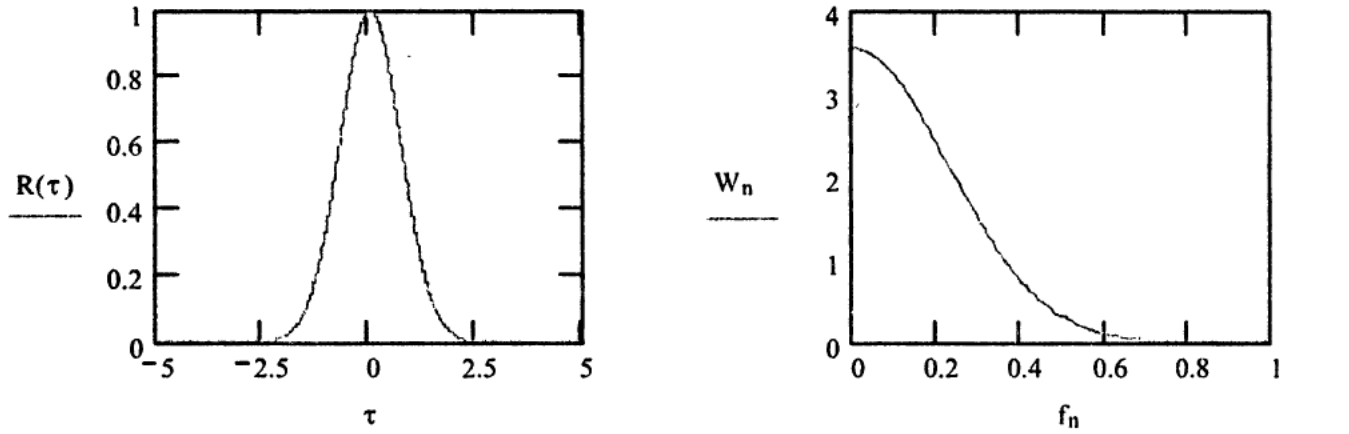
$W =$

	0
0	3.545
1	3.541
2	3.531
3	3.514
4	3.489
5	3.459

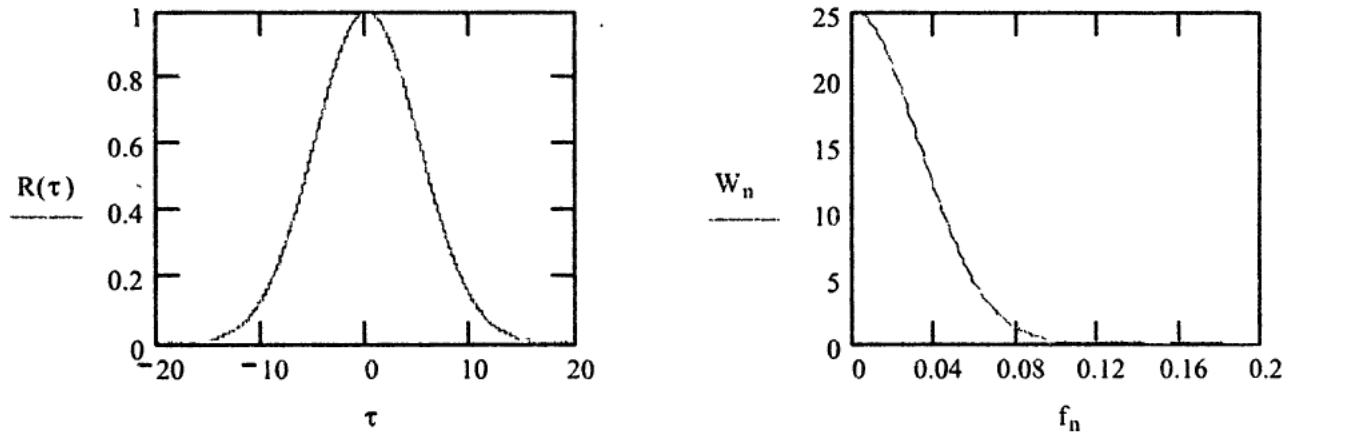
Рис. 2.15



а) при b=20



б) при b=1



в) при b=0,02

Рис. 2.16

Пример 2.10. Корреляционная функция имеет вид треугольника. Программа по расчету энергетического спектра с графиками спектра и корреляционной функции для двух случаев приведены на рис. 2.17.

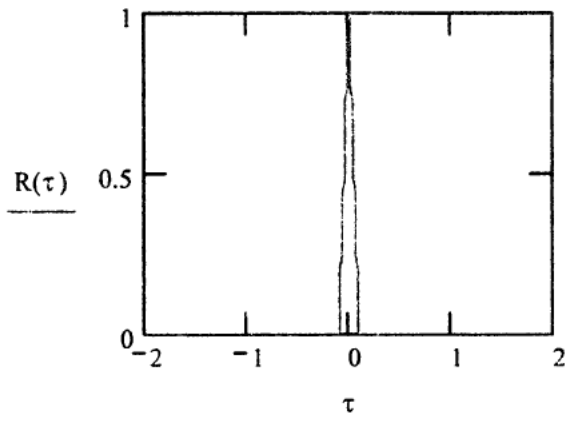
$$A := 1 \qquad x := 1 \qquad M := 2$$

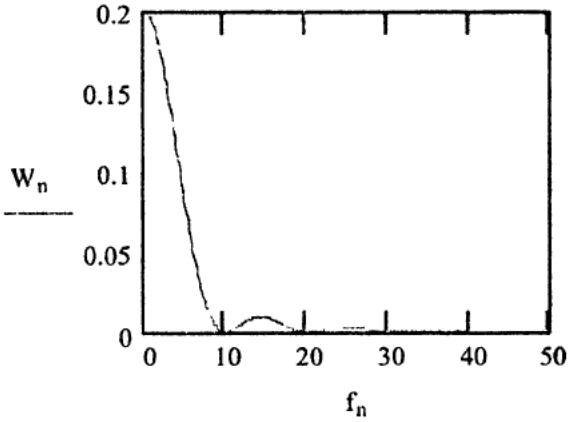
$$R(\tau) := \begin{cases} \left[A \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{x} \right) \right] & \text{if } |\tau| \le x \\ 0 & \text{if } |\tau| > x \end{cases}$$

$$N := 200 \qquad n := 0..N \qquad f_n := 0.02 \cdot n$$

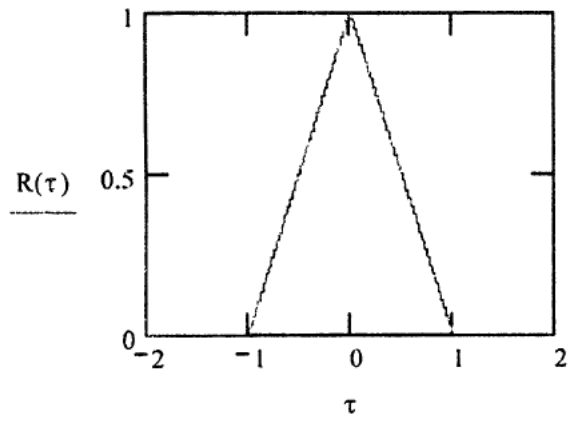
$$W_n := 4 \cdot \int_0^M R(\tau) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot \tau)\, d\tau$$

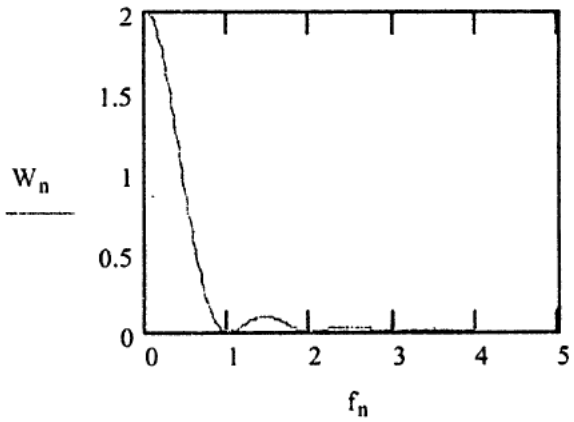
а)





б) при X=0,1





в) при X=1

Рис. 2.17

Пример 2.11. Рассмотрим теперь случай, когда корреляционная функция неизвестна, а в результате измерений получена осциллограмма случайного процесса **y(t)**. В этом случае программа включает три этапа: аппроксимацию исходной функции **y(t)**, заданной по точкам в табличной форме с помощью сплайн-интерполяции (такой случай рассмотрен в примере 2.3), расчет корреляционной функции согласно (2.16) и расчет энергетического спектра по формуле (2.18).

Исходная функция задается в виде матрицы **U**, ее первые шесть строк показаны на рис. 2.18. Графики функции (до аппроксимации – y(t), после – Z(t)) приведены на рис. 2.18

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 10 \\ 1 & 22 \\ 1.5 & 8 \\ 2 & -10 \\ .3 & 5 \end{pmatrix} \qquad X := U^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := U^{\langle 1 \rangle}$$

$$Q := \mathrm{cspline}(X, Y) \qquad Z(t) := \mathrm{interp}(Q, X, Y, t)$$

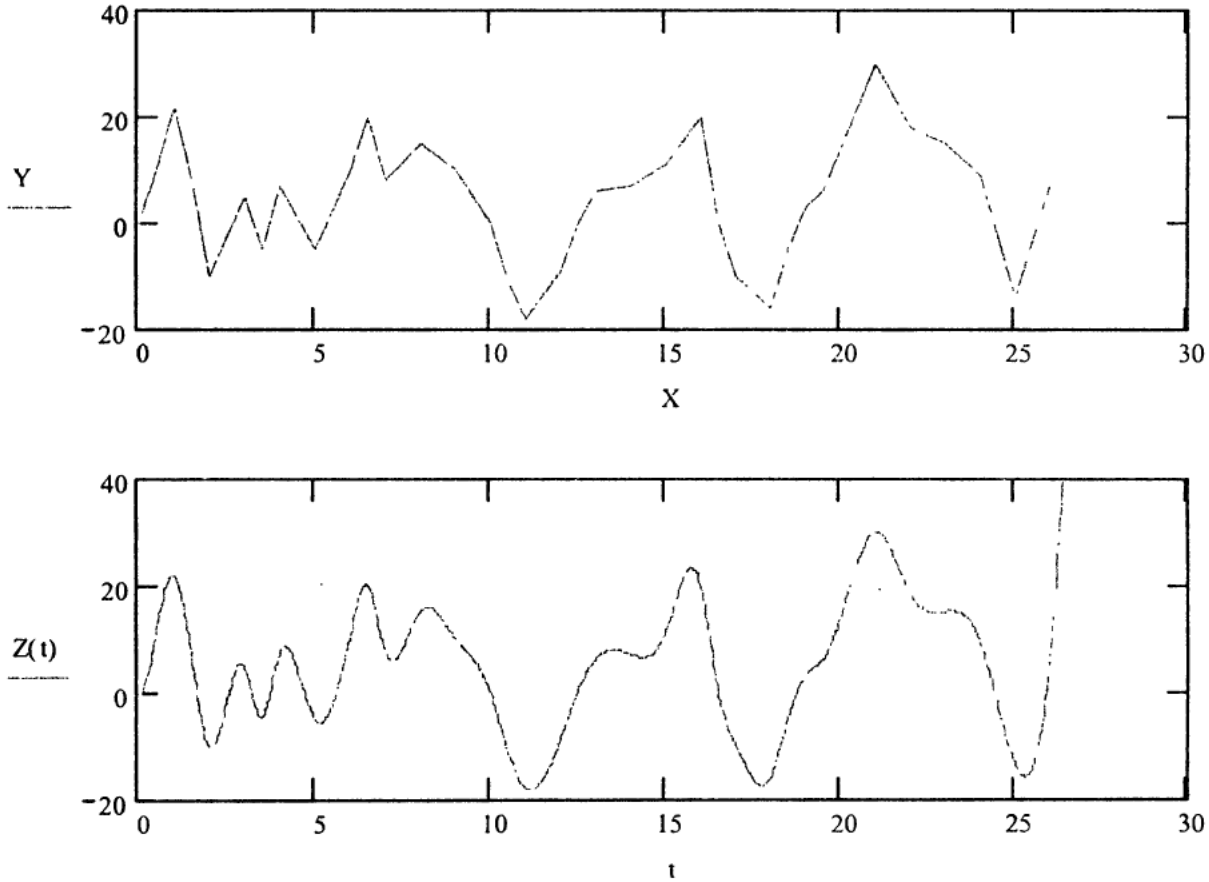


Рис. 2.18

В рамках 2-го этапа согласно (2.16) рассчитывается корреляционная функция $R(\tau)$ и строится ее график (рис. 2.19). Поскольку эта функция определяется по точкам, то необходима ее аппроксимация аналитическим выражением. В рассматриваемом примере эта есть функция S(x), в которой параметр τ заменен на X. (Заметим, что при $X \to \infty$ необходимо иметь $S(x) \to 0$.)

На 3-м этапе согласно (2.18) рассчитывается энергетический спектр W(f) и строится график данной функции (рис. 2.19).

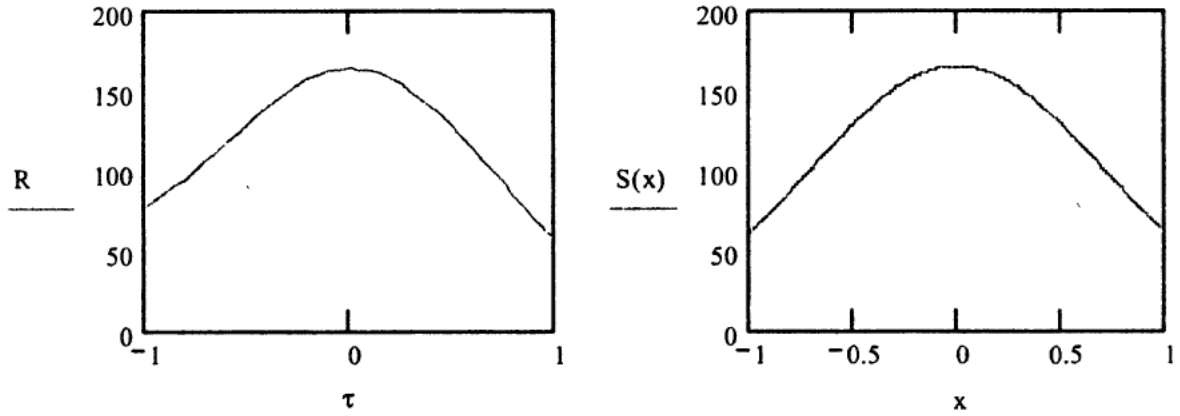
$$K := 40 \qquad k := 0..K \qquad \tau_k := -1 + 0.05 \cdot k \qquad T := 26$$

$$R_k := \left(\frac{1}{T}\right) \cdot \int_0^T Z(t) \cdot Z(t + \tau_k)\, dt$$

$$S(x) := 165 \cdot e^{-(|x|)^2}$$

$$N := 100 \qquad n := 0..N \qquad f_n := 0.1 \cdot n$$

$$W_n := 4 \cdot \int_0^5 S(x) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot x)\, dx$$



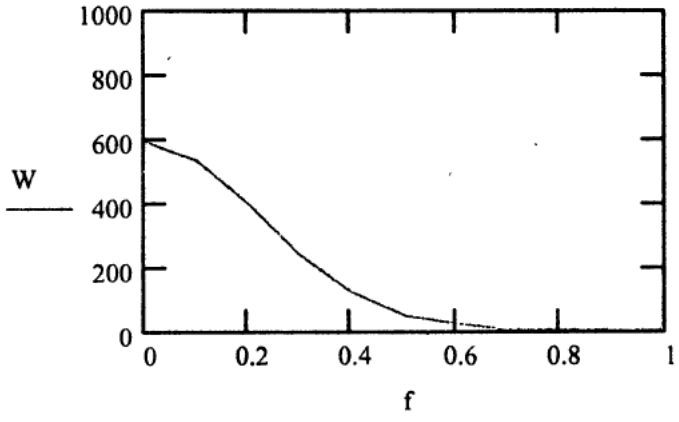


Рис. 2.19

Проведенный компьютерный анализ случайных сигналов, относящихся к классу стационарных случайных процессов, позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, вскрыть физическую сущность понятия "корреляционная функция". Предположим, что к сопротивлению 1 Ом подводится два напряжения $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Тогда для мощности суммарного колебания имеем:

$$P = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[u_1(t)+u_2(t)]^2\,dt =$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[u_1(t)]^2\,dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[u_2(t)]^2\,dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}2[u_1(t)\times u_2(t)]dt\,. \qquad (2.22)$$

Первое слагаемое в (2.22) есть мощность, выделяемая на сопротивлении за счет первого колебания, второе слагаемое – за счет второго, а третье слагаемое – за счет их совместного действия. Сравнивая третье слагаемое с выражением для корреляционной функции (2.16), видим их совпадение, если принять $u_2(t)=u_1(t+\tau)$. Таким образом, корреляционную функцию можно трактовать как половину дополнительной мощности, выделяемую на сопротивлении при совместном действии двух колебаний.

Во-вторых, связать ширину Δf энергетического спектра, в котором сосредоточена большая часть энергии колебания, с временем корреляции τ, при котором корреляционная функция $R(\tau)$ близка к 0. Для всех рассмотренных случаев, приведенных на рис. 2.16, 2.17 и 2.19, получаем следующее примерное соотношение: $\Delta f\tau=1$. Особенно близко это соотношение соблюдается при корреляционной функции, имеющей вид треугольника (рис. 2.17).

В-третьих, из последнего соотношения следует вывод о том, что чем уже корреляционная функция, тем шире спектр сигнала. Сказанное наглядно показано в примерах 2.9 (рис. 2.16) и 2.10 (рис. 2.17) путем расчета нескольких случаев. При расширении спектра его амплитуда пропорционально уменьшается.

В пределе – при значении функции $R(\tau)=0$, кроме $R(0)=\infty$, энергетический спектр становится равномерным во всей полосе частот $0\le f\le\infty$. Колебание с такими параметрами относится к классу стационарных случайных процессов и называется белым шумом, являющимся одним из основных видов помех в радиотехнике. Дисперсия белого шума при ее определении во всей полосе частот бесконечно велика.

При вырезании из белого шума с помощью фильтра относительно узкой полосы частот случайный процесс называется узкополосным. Каждая реализация такого узкополосного случайного процесса представляет собой квазигармоническое колебание с медленно меняющимися по сравнению с центральной частотой фильтра амплитудой и фазой. Свойства такого сигнала рассматриваются в § 13.4.

2.6. Сравнение детерминированного и случайного сигналов

На основании проведенного компьютерного анализа двух видов сигналов – детерминированного и случайного – можно провести их сравнительный анализ.

Во-первых, к обоим видам сигналов приложим временной и спектральный подходы.

Детерминированный сигнал во временной области характеризуется напряжением (или током) – функция y(t), размерность В, в частотной – спектральной плотностью S(f), размерность В/Гц.

Случайный сигнал во временной области характеризуется корреляционной функцией $R(\tau)$, размерность $В^2$, в частотной – энергетическим спектром W(f), размерность $В^2$/Гц.

Следовательно, если детерминированный сигнал описывается в координатах "напряжение-время" и "спектральная плотность – частота", то случайный сигнал – "мощность – время" и "энергетический спектр – частота". В этом заключается различие при описании двух видов сигналов.

Во-вторых, базовым соотношением для детерминированного сигнала, устанавливающим связь между временной и спектральной характеристиками, является прямое и обратное преобразования Фурье, определяемые интегралами (2.7) и (2.6).

Для случайного сигнала, относящегося к классу стационарных случайных процессов, таким базовым соотношением, устанавливающим связь между корреляционной функцией и энергетическим спектром, являются интегралы (2.18) и (2.19).

В-третьих, для обоих видов сигналов справедливо следующее примерное соотношение

$$\Delta f\,\tau = 1, \qquad (2.23)$$

где Δf – ширина спектра, в котором сосредоточена бо́льшая часть энергии сигнала; τ – длительность импульса при детерминированном сигнале или время корреляции, при котором функция $R(\tau)$ близка к 0, при случайном сигнале.

Из (2.23) следует, что чем короче импульс или уже корреляционная функция, тем шире спектр сигнала. При расширении спектра его амплитуда пропорционально уменьшается. В пределе при $\tau \to 0$ величина $\Delta f \to \infty$. Такой случай соответствует сигналу, называемому белым шумом.

В-четвертых, расчет спектральной плотности детерминированного сигнала можно провести с помощью программ, приведенных на рис. 2.8, 2.10, 2.11, 2.12; энергетического спектра случайного сигнала с помощью программ, представленных на рис. 2.15, 2.17, 2.18, 2.19.

Модулированные сигналы рассматриваются в гл. 12 "Модуляция".

Глава 3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ УСТРОЙСТВ

3.1. Назначение и классификация линейных устройств

Определяющим свойством линейных устройств является независимость их параметров, характеристик и свойств от амплитуды сигнала.

Нелинейные устройства при относительно "малой" амплитуде входного сигнала, не выходящей за пределы линейных участков характеристик нелинейных элементов, также могут рассматриваться как линейные (рис. 3.1). Поэтому при относительно "малом" сигнале нелинейные устройства исследуются во многих случаях с помощью линейных методов. В частности, в рамках линейной модели анализируется такая важная проблема, как устойчивость системы "в малом".

Математической основой анализа линейных устройств является система линейных дифференциальных уравнений, для которых при задании начальных условий всегда может быть найдено решение. Сам поиск этих решений базируется или на преобразовании Лапласа (временной подход), или Фурье (спектральный анализ).

Линейные устройства по составу входящих в них элементов делятся на две группы: пассивные и активные. В состав пассивных устройств входят такие элементы, как конденсаторы, индуктивности, резисторы. В состав активных линейных устройств помимо перечисленных обязательно входят и электронные приборы. Таким образом, отличительным признаком активного линейного устройства является преобразование в нем энергии из одного вида в другой, например, энергии источника постоянного тока в энергию высокочастотных колебаний. В устройствах пассивного типа такого преобразования энергии не происходит, с чем и связано их название.

С помощью пассивных линейных устройств осуществляется фильтрация сигналов, суммирование и деление их мощности, согласование и связь между собой различных каскадов и звеньев.

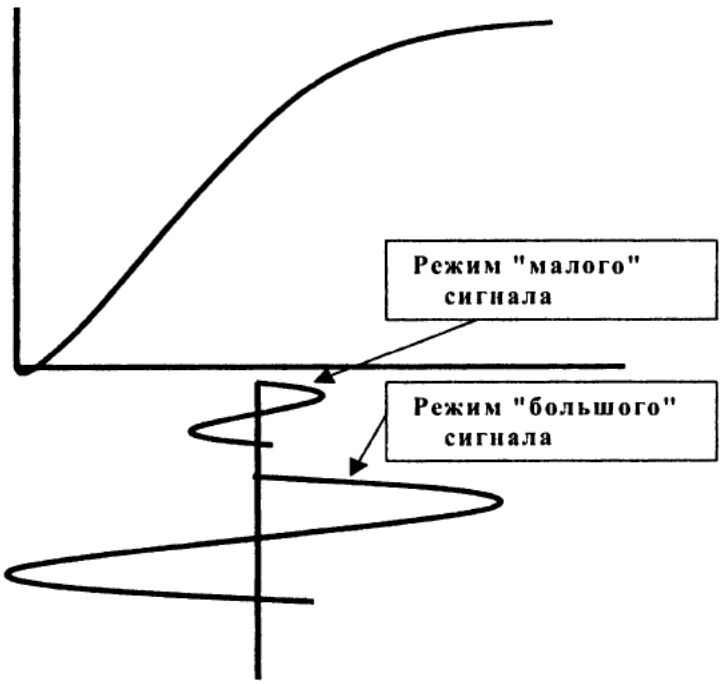


Рис. 3.1

С помощью активных линейных устройств осуществляется, в первую очередь, усиление сигнала по мощности в пределах линейных участков характеристик электронных приборов в различных диапазонах частот – от низких до СВЧ. В качестве примера укажем на малошумящий усилитель ВЧ или СВЧ, устанавливаемый на входе радиоприемных устройств.

3.2. Передаточная функция и коэффициент передачи, временные и частотные характеристики

Два вида анализа имеют место при исследовании линейных устройств – временной и спектральный (другое название – частотный). Соответственно и два вида характеристик определяют работу линейного устройства – временные и частотные.

Основой временного исследования является прямое и обратное преобразование Лапласа, спектрального – прямое и обратное преобразование Фурье. Согласно преобразованию Лапласа определяется передаточная функция (оператор) устройства **K(p)**, позволяющая найти временные характеристики; согласно преобразованию Фурье – коэффициент передачи **K(jω)**, определяющий частотные свойства объекта. Поскольку интегралы Фурье (2.6)–(2.7) являются частным случаем преобразования Лапласа (см. приложение 1), то между **K(p)** и **K(jω)** существует прямая связь, позволяющая от временных характеристик перейти к частотным и обратно. Обратимся к рассмотрению элементарного звена линейной системы – четырехполюсника (рис. 3.2) – и определим для него названные характеристики.



Рис. 3.2

Передаточная функция K(p). Свойства линейного четырехполюсника можно описать с помощью линейного дифференциального уравнения **n**-й степени:

$$b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ...b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \tag{3.1}$$

$$a_0 x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + ...a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n},$$

где y(t) – выходной сигнал; x(t) – входной.

Согласно преобразованию Лапласа-Карсона:

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty \exp(-pt)\Psi(t)dt\ , \tag{3.2}$$

где φ(p) – изображение оригинала Ψ(t) (значение Ψ(t)=0 при t<0), запишем уравнение (3.1) в операционной форме [10]:

$$(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ... + b_m p^m) y(p) = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_n p^n) x(p),$$

из которого получим для передаточной функции устройства, равной отношению изображения выходного сигнала к изображению входного:

$$K(p)=\frac{y(p)}{x(p)}=\frac{a_0+a_1p+a_2p^2+...a_np^n}{b_0+b_1p+b_2p^2+...b_mp^m} \tag{3.3}$$

или при разложении числителя и знаменателя на множители($n \le m$):

$$K(p)=\frac{a_n}{b_m}\bullet\frac{(p-p_{a1})(p-p_{a2})....(p-p_{an})}{(p-p_{b1})(p-p_{b2})....(p-p_{bm})}, \tag{3.4}$$

где p_{a1}, p_{a2},..., p_{an} – корни уравнения $A(p)=a_0+a_1p+a_2p^2+...+a_np^n=0$, называемые нулями передаточной функции (оператора) $K(p)$; p_{b1}, p_{b2},..., p_{bm} – корни уравнения $B(p)=b_0+b_1p+b_2p^2+...+b_mp^m=0$, называемые полюсами передаточной функции $K(p)$.

В устойчивой системе, т. е. не переходящей в режим автоколебаний, все полюсы оператора $K(p)$ располагаются в левой полуплоскости комплексного переменного $p=\sigma+j\omega$, т. е. действительные части всех полюсов $Re(p_{bk})<0$, где $k=0, 1, 2, ..., m$.

Коэффициент передачи $K(j\omega)$. Определим согласно прямому преобразованию Фурье (2.7) спектральную плотность входного сигнала $x(t)\rightarrow S_{BX}(j\omega)$ и выходного $y(t)\rightarrow S_{Вых}(j\omega)$. Отношение этих спектральных плотностей и есть коэффициент передачи объекта:

$$K(j\omega)=S_{ВЫХ}(j\omega)/S_{ВХ}(j\omega). \tag{3.5}$$

Определить $K(j\omega)$ можно и более простым путем, основываясь на положении о том, что интеграл Фурье есть частный случай преобразования Лапласа при $p=j\omega$ (см. приложение 1). Поэтому путем подстановки $p=j\omega$ из передаточной функции (3.5) получим для комплексного коэффициента передачи устройства:

$$K(j\omega)=\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{a_0+ja_1\omega-a_2\omega^2-ja_3\omega^3+...+a_n(j\omega)^n}{b_0+jb_1\omega-b_2\omega^2-jb_3\omega^3+...+b_m(j\omega)^m}, \tag{3.6}$$

Выражение (3.6) представим в виде:

$$K(j\omega)=\left|K(j\omega)\right|\exp[j\varphi(\omega)]=\mathrm{Re}(\omega)+j\,\mathrm{Im}(\omega), \tag{3.7}$$

где модуль и фазу коэффициента передачи можно выразить через действительную и мнимую части комплексного числа:

$$\left|K(j\omega)\right|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega)+\mathrm{Im}^2(\omega)}, \tag{3.8}$$

$$\varphi(j\omega)=arctg[\mathrm{Im}(\omega)/\mathrm{Re}(\omega)]. \tag{3.9}$$

С помощью полученных выражений можно определить частотные и временные характеристики линейного устройства. **Тестовыми сигналами** при определении этих характеристик являются:

- гармонический сигнал:

$$u=Usin(\omega t+\varphi_0), \tag{3.10}$$

- единичная функция – скачок напряжения:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{1}(t)=1 \ \ при \ \ t\geq 0, \\ \mathbf{1}(t)=0 \ \ при \ \ t\leq 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\delta}(t)=\frac{d\mathbf{1}(t)}{dt} \quad \text{– единичный импульс.} \tag{3.12}$$

Амплитуда единичного импульса A=∞, длительность Δt→0, площадь импульса S=A*Δt=1.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) есть зависимость амплитуды выходного сигнала от частоты входного сигнала при его постоянной амплитуде. АЧХ есть модуль комплексного коэффициента передачи, определяемый согласно (3.8). Экспериментальное определение АЧХ производится при гармоническом входном сигнале (3.10).

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) есть зависимость фазы выходного сигнала от частоты входного сигнала при его постоянной амплитуде. ФЧХ есть аргумент комплексного коэффициента передачи, определяемый согласно (3.9). Экспериментальное определение ФЧХ производится при гармоническом входном сигнале (3.10).

Переходная характеристика Ф(t) есть зависимость выходного сигнала **y(t)** от времени при входном сигнале в виде единичной функции (3.11). Найти зависимость для временной характеристики можно по изображению выходного сигнала: y(p)=x(p)K(p). Поскольку согласно преобразованию Лапласа-Карсона (3.2) изображение единичной функции (3.11) x(p)=1, то переходная характеристика есть оригинал передаточной функции: **Ф(t)**→K(p). Найти оригинал функции по ее изображению можно согласно правилам операционного исчисления по формуле разложения. Для этого необходимо определить полюсы передаточной функции, т. е. согласно (3.4) найти действительные и комплексные корни уравнения:

$$B(p)=\sum_{k=1}^{m} b_k p^k \tag{3.13}$$

Известно несколько численных методов определения действительных и комплексных корней полинома с действительными коэффициентами (3.13), в частности, способ Ньютона-Рафсона [10]. Подобные вычисления можно выполнить и с помощью математического пакета программ "Mathcad" [2–4]. (См. приложение 2.)

Другой способ расчета переходной характеристики исходит из выражения для коэффициента передачи (3.3) и не требует предварительного

определения корней полинома (3.13). Вновь основываясь на связи интеграла Фурье с преобразованием Лапласа, при выполнении условия устойчивости цепи ($Re(p_{bk})<0$) и при $K(0)\neq\infty$ можно поучить следующие формулы для переходной характеристики, выраженные через действительную Re(ω) и мнимую Im(ω) части коэффициента передачи K(ω) (3.7) того же объекта (доказательство см. в приложении 1):

$$\Phi(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega \qquad (3.14)$$

или

$$\Phi(t) = K(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\omega}\cos\omega t d\omega\,. \qquad (3.15)$$

Импульсная характеристика h(t) есть отклик объекта на входное воздействие в виде единичного импульса δ(t) (3.12), спектральная плотность которого $S_{вх}(j\omega)=1$ и потому согласно (3.5): $S_{вых}(j\omega)=K(j\omega)$. При этом импульсная характеристика согласно обратному преобразованию Фурье (2.6):

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(\omega)e^{j\omega t}d\omega; \qquad (3.16)$$

h(t) можно найти также только по действительной или мнимой части коэффициента передачи K(ω) (см. приложение 1):

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}(\omega)\cos\omega t d\omega; \qquad (3.17)$$

$$h(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}(\omega)\sin\omega t d\omega. \qquad (3.18)$$

На основании (3.12) импульсная характеристика h(t) есть производная от переходной характеристики Φ(t).

Рассмотрим два примера определения амплитудно- и фазо-частотной, переходной и импульсной характеристик с помощью пакета программ **Mathcad**.

Пример 3.1. Электрическая цепь 2-го порядка (рис. 3.3).

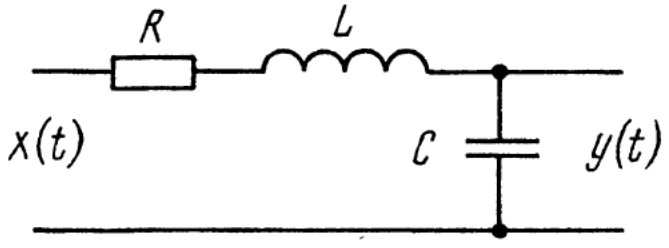


Рис 3.3

Для коэффициента передачи цепи, приведенной на рис. 3.3, получим следующее выражение:

$$K(j\omega) = \frac{(1/j\omega C)}{(1/j\omega C) + j\omega L + R} = \frac{a_0}{b_0 + j\omega b_1 + (j\omega)^2 b_2}, \qquad (3.19)$$

$$где\ \ a_0 = b_0 = \omega_p^2 = (2\pi)^2 f_p^2\ ,\ \ b_1 = 2\pi f_p / Q\ ,\ \ b_2 = 1,$$

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC}\ \ ,\ \ \ Q = L\omega_p / R\ .$$

Программа по расчету временных и частотных характеристик цепи с коэффициентом передачи (3.19) приведена на рис. 3.4. Там же построены четыре частотных и две временных характеристики, вычисленные согласно (3.6), (3.7), (3.9), (3.14), (3.17).

В программе приняты следующие обозначения:

Fp – резонансная частота f_P; t_k – время (при размерности частоты в Гц, кГц или МГц время соответственно в секундах, миллисекундах или микросекундах);

Q – добротность цепи Q;

K(f) – комплексный коэффициент передачи K(jω) (3.19);

A(f) – модуль комплексного коэффициента передачи – амплитудно-частотная характеристика;

Θ(f) – фаза комплексного коэффициента передачи (в градусах) – фазо-частотная характеристика;

D(f) – действительная часть комплексного коэффициент передачи;

M(f) – мнимая часть комплексного коэффициент передачи;

NT – число точек отсчета по оси времени;

TH – шаг этого отсчета;

Vb – верхний предел интегрирования по частоте в (3.14) и (3.16);

Vn – нижний предел интегрирования по частоте в (3.14) и (3.16);

$Ф_k$ – переходная характеристика Ф(t) (3.14);

H_k – импульсная характеристика H(t) (3.16).

Заметим, что в (3.14) и (3.16) нижний предел интегрирования взят равным не 0, а очень малому значению, равному 0,0001, чтобы избежать деления на 0 в (3.14). Такая замена практически не влияет на точность вычисления временных характеристик.

Пример 3.2. Электрическая цепь 4-го порядка. Программа по расчету временных и частотных характеристик цепи с коэффициентом передачи, содержащим частоту (jω) 1–4-й степени приведена на рис. 3.5. Там же построены четыре частотных и две временных характеристики, вычисленные согласно (3.6), (3.7), (3.9), (3.14), (3.17).

Все обозначения в программе совпадают с примером 3.1. В качестве исходных параметров подставляются значения коэффициентов a_0–a_4 , b_0–b_4 соответственно в вектор **a** и вектор **b**.

$$fp := 10 \qquad Q := 5$$

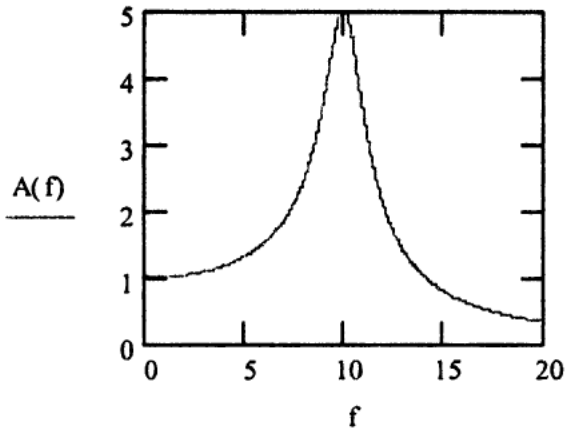
$$a_0 := (2 \cdot \pi)^2 \cdot fp^2 \qquad b_0 := a_0 \qquad b_1 := \frac{(2 \cdot \pi \cdot fp)}{Q} \qquad b_2 := 1$$

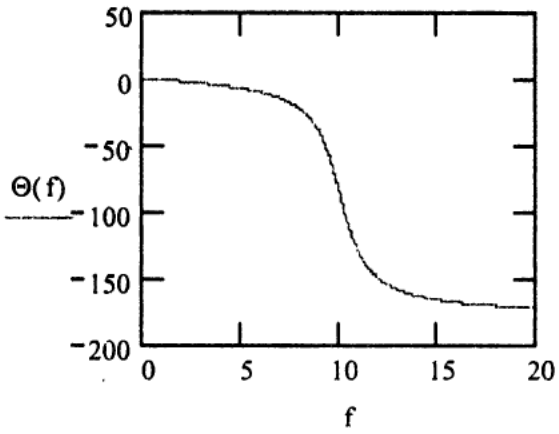
$$j := \sqrt{-1} \qquad p(f) := j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

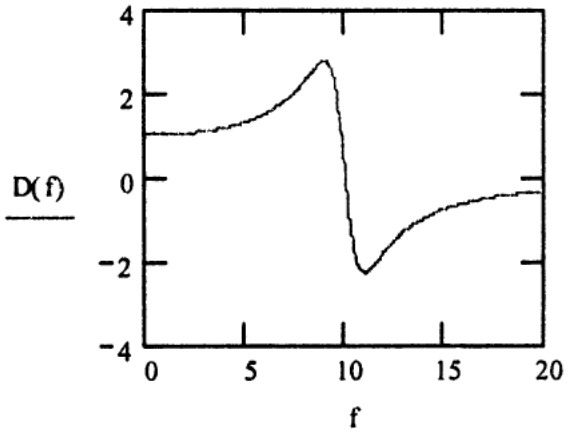
$$K(f) := \frac{a_0}{\left(b_0 + b_1 \cdot p(f) + b_2 \cdot p(f)^2\right)}$$

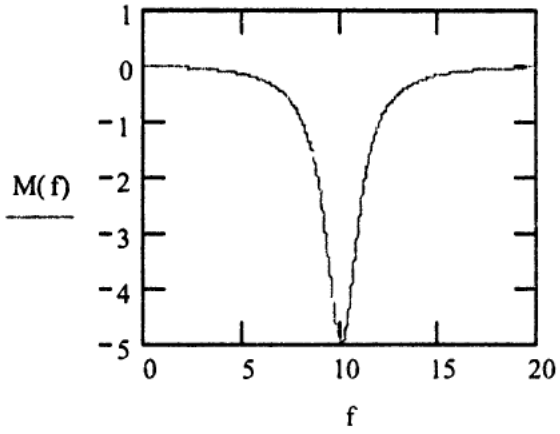
$$A(f) := |K(f)| \qquad D(f) := \mathrm{Re}(K(f)) \qquad M(f) := \mathrm{Im}(K(f))$$

$$\Theta(f) := \arg(K(f)) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)$$









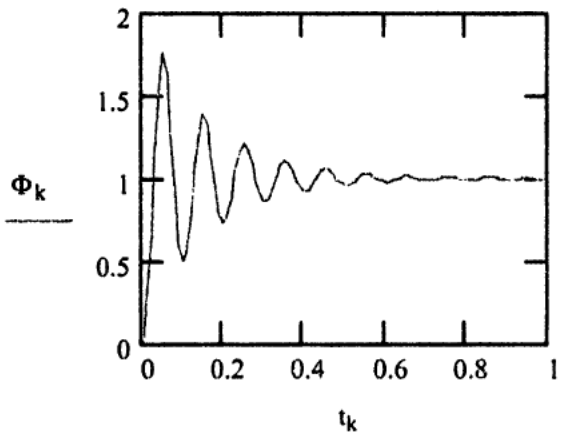
$NT := 200 \qquad TH := 0.01$

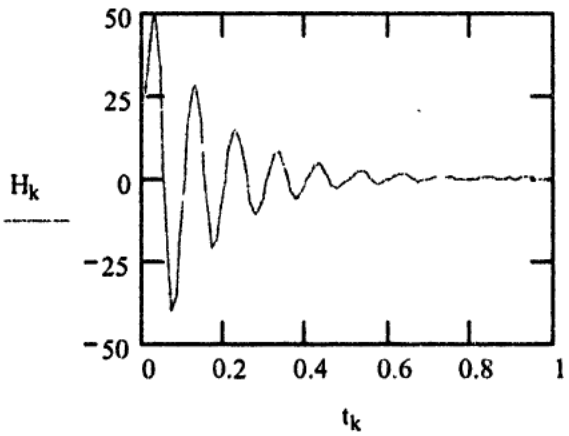
$k := 0 .. NT$

$t_k := k \cdot TH \qquad Vb := 20 \qquad Vn := 0.0001$

$$\Phi_k := \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \int_{Vn}^{Vb} \frac{D(f)}{f} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_k\right) df$$

$$H_k := 4 \cdot \int_{Vn}^{Vb} D(f) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_k\right) df$$





t_k =	H_k =	Φ_k =
0	21.861	0
0.01	30.171	0.247
0.02	45.99	0.63
0.03	50.724	1.129
0.04	33.799	1.57
0.05	1.955	1.754
0.06	-27.401	1.618

Рис. 3.4

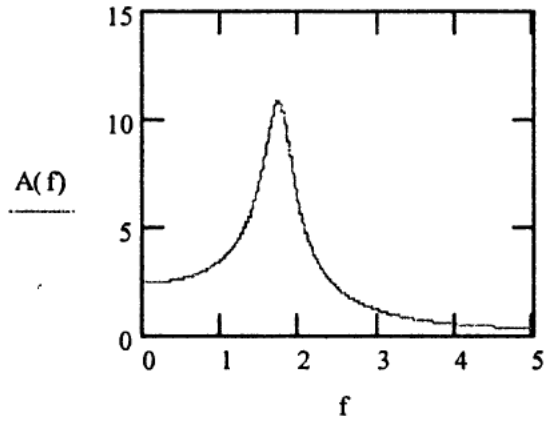
$$a := \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \\ 0.22 \\ 4.2 \cdot 10^{-3} \\ 4 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

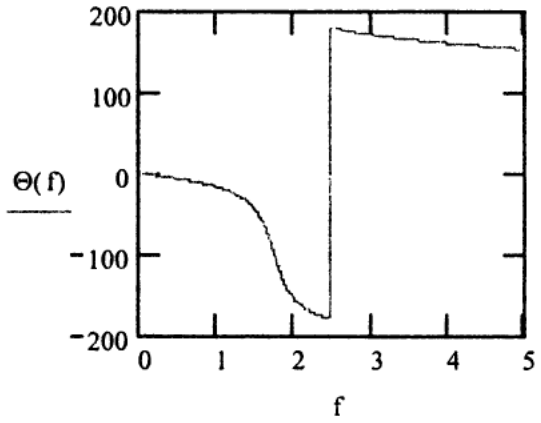
$$j := \sqrt{-1} \qquad p(f) := j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

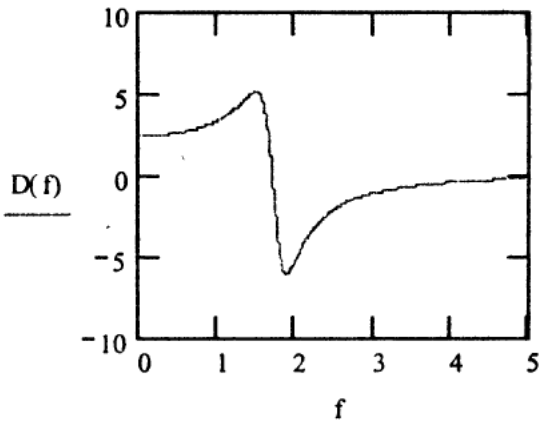
$$K(f) := \frac{\left(a_0 + a_1 \cdot p(f) + a_2 \cdot p(f)^2 + a_3 \cdot p(f)^3 + a_4 \cdot p(f)^4\right)}{\left(b_0 + b_1 \cdot p(f) + b_2 \cdot p(f)^2 + b_3 \cdot p(f)^3 + b_4 \cdot p(f)^4\right)}$$

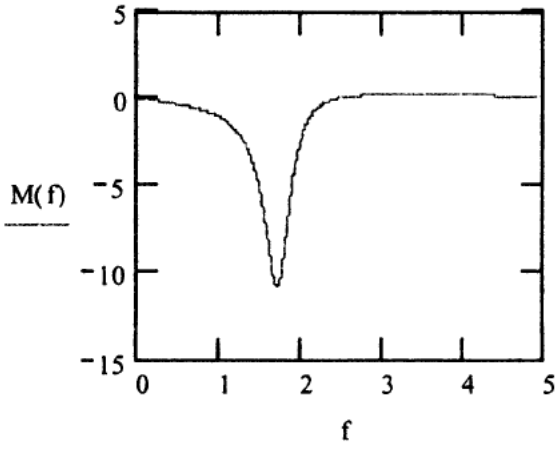
$$A(f) := |K(f)| \qquad D(f) := \mathrm{Re}(K(f)) \qquad M(f) := \mathrm{Im}(K(f))$$

$$\Theta(f) := \arg(K(f)) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)$$









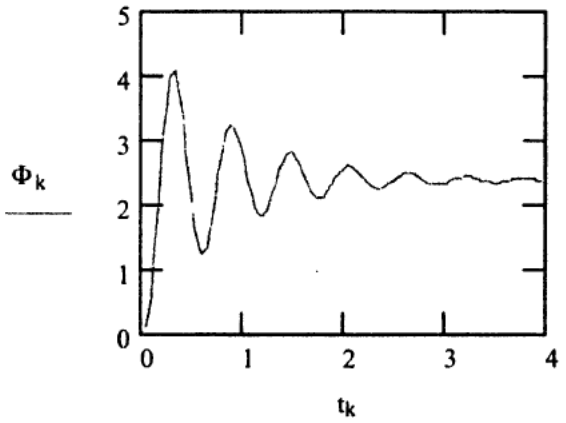
$NT := 100 \qquad TH := 0.04$

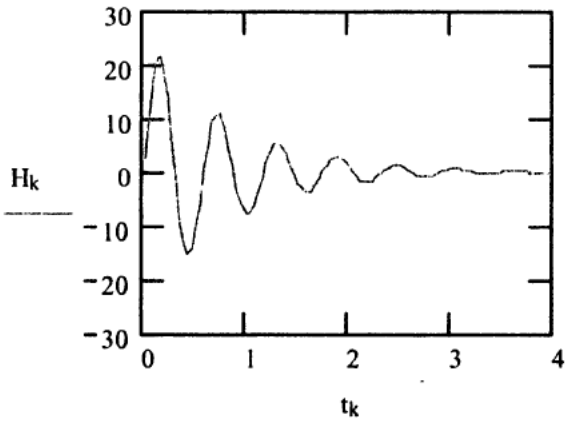
$k := 0..NT$

$t_k := k \cdot TH \qquad Vb := 10 \qquad Vn := 0.001$

$$\Phi_k := \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \int_{Vn}^{Vb} \frac{D(f)}{f} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_k)\, df$$

$$H_k := 4 \cdot \int_{Vn}^{Vb} D(f) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_k)\, df$$





$H_k =$

0.388
5.789
14.8
20.141
21.836
19.336
13.531
6.015

$\Phi_k =$

0
0.092
0.51
1.223
2.075
2.912
3.577
3.973

Рис. 3.5

Данную программу легко развить на анализ объекта, описываемого коэффициентом передачи более высокого порядка. Для этого необходимо увеличить число строк в векторах **a** и **b** и ввести дополнительные члены в выражение для коэффициента передачи K(f).

3.3. Анализ многокаскадных линейных устройств

Перейдем от анализа четырехполюсника к более сложным линейным устройствам, которые можно представить или в виде многополюсника, или соединения каскадов – четырехполюсников.

Работа линейного многополюсника (рис. 3.6) при анализе во временной области может быть описана с помощью системы из **n** линейных дифференциальных уравнений, имеющих следующий вид при их записи в матрично-векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{X}(t)\ , \tag{3.20}$$

где $\mathbf{X}(t) = \begin{vmatrix} X_1(t) \\ \dots\dots \\ X_n(t) \end{vmatrix}$, $\mathbf{Y}(t) = \begin{vmatrix} Y_1(t) \\ \dots\dots \\ Y_m(t) \end{vmatrix}$ –

вектор-стролбцы, описывающие совокупность входных (вектор входа) и выходных сигналов (вектор выхода) (рис. 3.6);

A, **B** – матрицы.



Рис. 3.6

Четыре наиболее распространенных вида соединения каскадов – четырехполюсников – последовательное (каскадное), параллельное, с двумя входами и с отрицательной обратной связью – представлены на рис. 3.7. Такие устройства в целом можно характеризовать с помощью общего оператора.

Общий оператор устройства из последовательно соединенных каскадов (рис. 3.7,а) есть произведение отдельных операторов:

$$\mathbf{K}(p) = \prod_{i=1}^{n} K_i(p). \tag{3.21}$$

Общий оператор устройства из параллельно соединенных каскадов (рис. 3.7,б) есть сумма отдельных операторов:

$$\mathbf{K}(p) = \sum_{i=1}^{n} K_i(p). \tag{3.22}$$

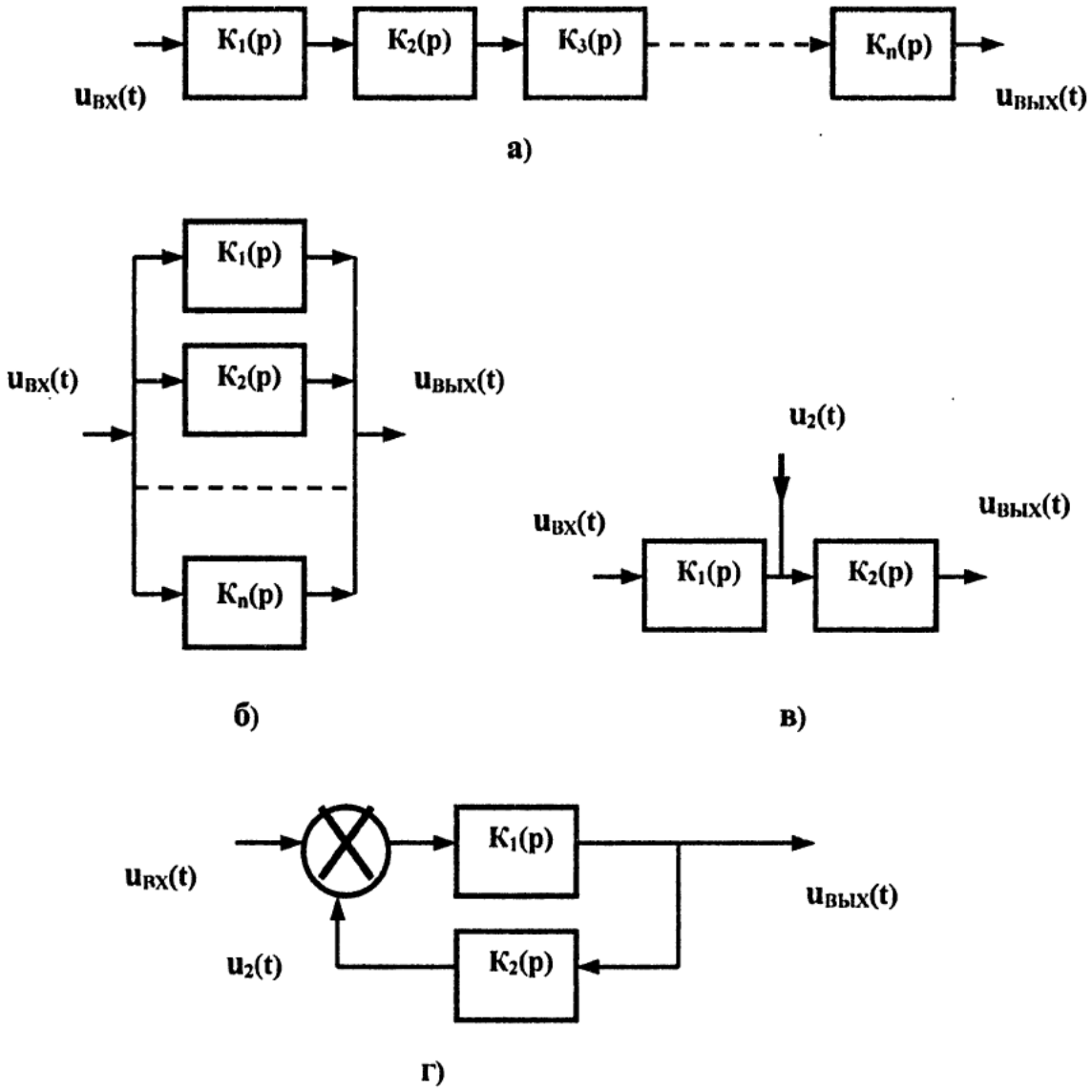


Рис. 3.7

Общий оператор устройства с двумя входами (рис. 3.7,в):

$$\mathbf{K}(p) = K_1(p)K_2(p) + K_2(p)K_U(p)\ , \qquad (3.23)$$

где $K_U(p) = u_2(p)/u_{BX}(p)$.

Для схемы с обратной связью (рис. 3.7,г) имеем:

$$u_{ВЫХ}(p) = K_1(p)(u_{BX}(p) - K_2(p)u_{BX}(p)),$$

откуда для общего оператора устройства с отрицательной обратной связью получим (рис. 3.7,в):

$$\mathbf{K}(p) = \frac{K_1(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)}. \qquad (3.24)$$

При известном общем операторе устройства по методике и программам, рассмотренным в § 3.2, можно рассчитать частотные и временные характеристики объекта в целом.

3.4. Матричный анализ линейных устройств

Анализ линейных устройств, рассмотренный в § 3.2–3.3, исходит из известной схемы и параметров объекта, что наглядно прослеживается на примере 3.1. Однако, в некоторых практических случаях, особенно в схемах с электронными приборами, боле удобным оказывается матричный метод анализа, при котором свойства объекта описываются через его внешние параметры, собранные в матрицу. Возможно несколько систем параметров при таком подходе к описанию свойств устройства.

Сначала вновь рассмотрим элементарную ячейку устройства– четырехполюсник – рис. 3.8, на котором показаны положительные направления токов и напряжений.

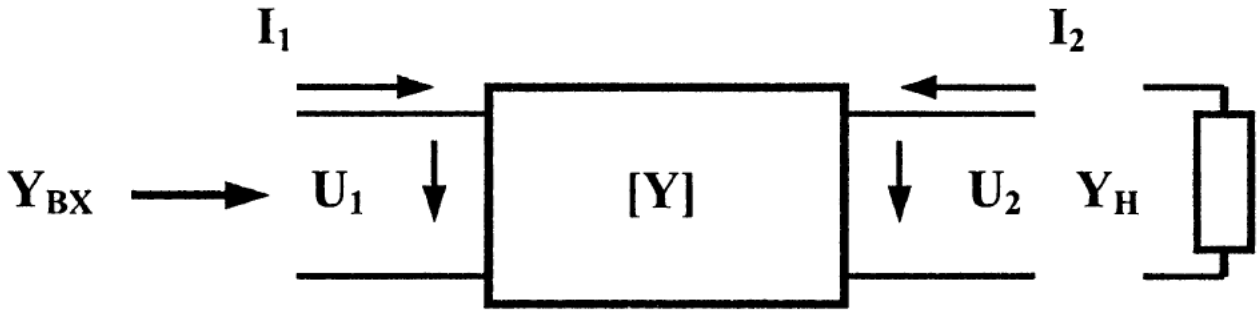


Рис. 3.8

Соотношения между комплексными амплитудами токов и напряжений на входе и выходе четырехполюсника в системе Y-параметров определяются следующими двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2; \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

где Y_{11} и Y_{21} – соответственно входная и взаимная проводимости, определяемые при коротком замыкании выходной цепи (U_2=0); Y_{22} и Y_{12} – соответственно выходная и взаимная проводимости, определяемые при коротком замыкании входной цепи (U_1=0).

При матричной записи (см. приложение 2) уравнения (3.25) примут вид:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.26)$$

При подключении к четырехполюснику нагрузки проводимостью $Y_н$ с учетом выбранных положительных направлений токов и напряжений запишем:

$$I_2 = -Y_{22}U_2. \qquad (3.27)$$

Совместное решение уравнений (3.25) и (3.27) позволяет найти выражения для входной проводимости четырехполюсника и коэффициентов усиления. Приведем данные выражения.

Входная проводимость четырехполюсника:

$$Y_{BX} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}. \qquad (3.28)$$

Коэффициент усиления по напряжению при подключенной нагрузке:

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}. \qquad (3.29)$$

При $|Y_{22}| << |Y_H| = 1/R_H$ и $|Y_{21}| = S$ – крутизне электронного прибора коэффициент $K_U = SR_H$.

Коэффициент усиления по току при подключенной нагрузке:

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Y_{21}Y_H}{Y_{11}(Y_{22} + Y_H)}. \qquad (3.30)$$

При $|Y_{22}| << |Y_H|$ коэффициент $K_i = Y_{21}/Y_{11}$.

Коэффициент усиления по мощности, как отношение активной мощности в нагрузке ко входной активной мощности:

$$K_P = \frac{P_{ВЫХ}}{P_{BX}} = \frac{|Y_{21}|^2 g_H}{\mathrm{Re}\, Y_{BX} |g_H + Y_{22}|^2}, \qquad (3.31)$$

где $P_{ВЫХ} = 0{,}5I_2^2/g_H$, $P_{BX} = 0{,}5U_1^2 \,\mathrm{Re}\, Y_{BX}$ –

соответственно выходная и входная мощности четырехполюсника, g_H – проводимость активной нагрузки.

Программа и пример расчета параметров четырехполюсника согласно (3.28)–(3.31) при заданных Y-параметрах приведены на рис. 3.9.

В программе приняты следующие обозначения:

GH – активная проводимость нагрузки;

KU – комплексный коэффициент усиления по напряжению;

KUM – модуль KU;

KI – комплексный коэффициент усиления по току;

KIM – модуль KI;

KP – коэффициент усиления по мощности.

$j := \sqrt{-1}$

$Y11 := 0.5 + j \cdot 0.7 \quad Y12 := 0.1 + j \cdot 0.2 \quad Y21 := 2.5 + j \cdot 0.6 \quad Y22 := 0.2 - j \cdot 0.7$

$GH := 0.8$

$$YBX := Y11 - \frac{(Y12 \cdot Y21)}{Y22 + GH} \qquad YBX = 0.676 + 0.263i$$

$$KU := \frac{-Y21}{(Y22 + GH)} \qquad KU = -1.396 - 1.577i$$

$$KUM := |KU| \qquad KUM = 2.106$$

$$KI := \frac{(Y21 \cdot GH)}{Y11 \cdot (GH + Y22)} \qquad KI = 1.948 - 0.204i$$

$$KIM := |KI| \qquad KIM = 1.959$$

$$KP := \frac{\left[(|Y21|)^2 \cdot GH\right]}{\left[Re(YBX) \cdot (|GH + Y22|)^2\right]} \qquad KP = 5.251$$

Рис. 3.8

Матричный анализ применим и к исследованию объектов, являющихся соединением группы четырехполюсников. Так при параллельном соединении четырехполюсников (рис. 3.7,б) их матрицы суммируются (см. приложение 2):

$$[\mathbf{Y}_{ОБЩ}] = \sum_{i=1}^{n} [Y_i] \tag{3.32}$$

При каскадном соединении четырехполюсников (рис. 3.7,а) анализ носит более сложный характер. Сначала следует от Y-параметров перейти к A-параметрам, новые матрицы перемножить, а затем вернуться к Y-параметрам. Приведем необходимые выражения, позволяющие реализовать данный алгоритм расчета каскадного соединения четырехполюсников.

Соотношения между комплексными амплитудами токов и напряжений на входе и выходе четырехполюсника в системе A-параметров определяются следующими двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= A_{11}U_2 + A_{12}I_2; \\ I_1 &= A_{21}U_2 + A_{22}I_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.34)$$

Путем алгебраических преобразований (3.25) и (3.33) получим следующие выражения, позволяющие от Y-параметров перейти к A-параметрам и обратно:

$$[\mathbf{Y}] \Rightarrow [\mathbf{A}] \qquad (3.35)$$

$$A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}},\ A_{12} = \frac{1}{Y_{21}},\ A_{21} = \frac{Y_0}{Y_{21}},\ A_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{21}},$$

где $Y_0 = Y_{12}Y_{21} - \dot{Y}_{11}Y_{22}$.

$$[\mathbf{A}] \Rightarrow [\mathbf{Y}] \qquad (3.36)$$

$$Y_{11} = \frac{A_{22}}{A_{12}},\ Y_{12} = \frac{A}{A_{12}},\ Y_{21} = \frac{1}{A_{12}},\ Y_{22} = \frac{A_{11}}{A_{12}},$$

где $A_0 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$.

Определив согласно (3.35) A-параметры отдельных четырехполюсников, найдем согласно правилу перемножения матриц (см. приложение 2) общую матрицу всего объекта:

$$[\mathbf{A}_{\text{общ}}] = \prod_{i=1}^{n} [\mathbf{A}_i] \qquad (3.37)$$

Далее согласно (3.36) можно перейти к Y-параметрам, а по ним согласно (3.28)–(3.31) и по программе рис. 3.9 рассчитать характеристики всего объекта.

В том случае, когда для анализа свойств объекта достаточно ограничиться только его входной проводимостью $Y_{вх}$, например при расчете устойчивости (см. § 3.5), можно воспользоваться более простым алгоритмом, состоящим в использовании формулы (3.28) в качестве рекуррентной. Последовательно переходя от одного четырехполюсника, начиная с последнего, к другому и каждый раз определяя $Y_{вх}$, находится значение данного параметра на входе всего каскадного соединения. Такая методика будет рассмотрена ниже в гл. 11 при параметрическом синтезе многозвенных фильтров.

Пакет программ **Mathcad** позволяет производить всевозможные операции с матрицами. Элементарные сведения по матричной алгебре приведены в приложении 2.

3.5. Устойчивость линейных устройств

Устойчивость динамической системы есть ее способность возвращаться к исходному состоянию после прекращения действия внешних сил. Строгое математическое определение устойчивости системы, впервые сформулированное А.М. Ляпуновым, связано с определением устойчивости решения дифференциального уравнения и сводится к следующему.

Пусть начальные возмущения, прикладываемые к системе в момент $t=t_0$, ограничиваются достаточно малой областью $\delta(\varepsilon)$. Тогда система называется устойчивой "в малом", если при $t \geq t_0$ отклонение возмущенного движения от невозмущенного так же сколь угодно мало и ограничивается областью ε, т. е. близкие по начальным условиям решения остаются близкими и при $t \geq t_0$ Система называется асимптотически устойчивой, если величина $\varepsilon \to 0$ при $t \to \infty$.

Линейная система, находящаяся под воздействием внешней силы X(t), описывается неоднородным дифференциальным уравнением (3.1), общее решение которого:

$$y(t) = c_0(t) + \sum_{i=0}^{m} c_i \exp(p_{bi} t), \tag{3.38}$$

где $C_0(t)$ – частное решение неоднородного уравнения (3.1), зависящее от X(t);

C_i – постоянные коэффициенты, определяемые начальными условиями;

p_{bi} – действительные и комплексные корни характеристического уравнения (3.13), называемые полюсами. (См. приложение 2.)

Первый член в (3.38) определяет вынужденные колебания в системе, второй – свободные.

Если все действительные корни и действительные части комплексных корней p_{bi} отрицательны: $\mathrm{Re}(p_{bi})<0$, то при $t \to \infty$ второй член в (3.38) стремится к 0 при любых начальных возмущениях. Такая система является асимптотически устойчивой. Если хотя бы один из корней имеет положительную действительную часть, то система неустойчива – в ней амплитуда колебаний со временем неограниченно возрастает. Таким образом, в устойчивой системе все полюсы располагаются в левой полуплоскости комплексного переменного $p=\sigma+j\omega$.

Другой метод определения устойчивости линейного устройства, называемый иммитансным критерием, основывается на анализе входной проводимости в системе Y-параметров. Согласно иммитансному критерию условием, гарантирующим устойчивость, является выполнение неравенств:

$$\mathrm{Re}\, Y_{ВХ}(\omega) \geq 0 \quad и \quad \mathrm{Re}\, Y_{ВЫХ}(\omega) \geq 0\,, \tag{3.39}$$

$$при \quad \mathrm{Re}\, Y_{11}(\omega) \geq 0 \quad и \quad \mathrm{Re}\, Y_{22}(\omega) \geq 0\,,$$

где $Y_{вх}$ – входная проводимость, определяемая согласно (3.28); $Y_{вых}$ – выходная проводимость.

Последние два неравенства в (3.28) означают необходимость устойчивости усилителя при коротком замыкании со стороны его входа и выхода.

Перейдем к анализу устойчивости линейного устройства с цепью отрицательной обратной связи (рис. 3,7,г). Согласно (3.24) при $K_2(p)=1$ оператор такого объекта:

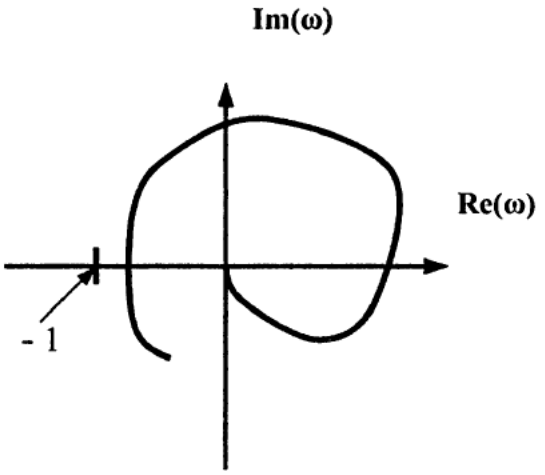
$$K(p)=\frac{K_P(p)}{1+K_P(p)}=\frac{A(p)}{A(p)+B(p)}, \qquad (3.40)$$

где $K_P(p)=A(p)/B(p)$ –

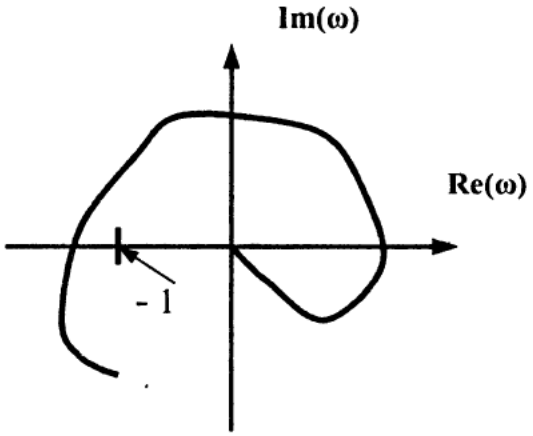
оператор разомкнутого объекта (рис. 3.9,а).



а)



б)



в)

Рис. 3.9

Согласно (3.40) характеристическое уравнение замкнутой системы, корни которого определяют устойчивость системы:

$$A(p)+B(p)=0. \qquad (3.41)$$

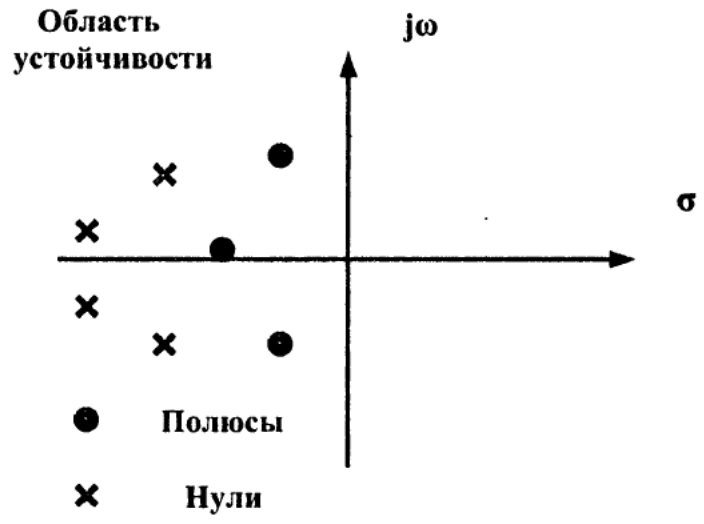


Рис. 3.10

Из (3.41) следует, что сумма числителя и знаменателя оператора $K_P(p)$ разомкнутой системы, приравненная 0, является характеристическим уравнением соответствующей замкнутой системы, а нули и полюсы оператора $K_P(p)$ (3.4) являются корнями этого уравнения. (См. приложение 2.) Следовательно, согласно введенному выше критерию устойчивости в форме $Re(p_i)<0$ для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы все нули и полюсы соответствующей разомкнутой системы находились в левой полуплоскости комплексного переменного (рис. 3.10).

Корни характеристического уравнения (3.41) или нули и полюсы оператора $K_P(p)$ легко найти для уравнений 1-го и 2-го порядка. Для систем более высокого порядка можно пользоваться правилами по определению устойчивости без непосредственного вычисления корней уравнения (3.41). Одним из таких способов является аналитический критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Сущность способа состоит в составлении матрицы из коэффициентов характеристического уравнения (3.13), позволяющей по определенным правилам составить неравенства, соблюдение которых является необходимым и достаточным условием устойчивости системы.

Так для системы 2-го порядка следует выполнить условия:

$b_0>0, b_1>0, b_2>0.$

Для системы 3-го порядка:

$b_0>0, b_1>0, b_2>0, b_3>0, b_1b_2-b_0b_3>0.$

Для системы 4-го порядка:

$b_0>0, b_1>0, b_2>0, b_3>0, b_4>0, b_1b_2b_3-b_0(b_3)^2-b_4(b_1)^2>0.$

Другой способ определения устойчивости называется частотным критерием Найквиста. Метод основан на наличии согласно (3.40) жесткой связи между коэффициентами передачи разомкнутой $K_P(j\omega)$ и замкнутой $K(j\omega)$ систем. Пусть разомкнутая система устойчива (рис. 3.9,а). Тогда согласно критерию Найквиста для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы не охватывал точки с координатами (–1, j0) (рис. 3.9,б). В противном случае, т. е. при охвате этой точки, система неустойчива (рис. 3.9,в). Физическое объяснение критерия Найквиста можно дать, исходя из теории возникновения автоколебаний (см. гл. 5).

3.6. Прохождение сигналов через линейные устройства

Назначение линейного устройства состоит в воздействии на параметры входного сигнала. В усилителях это воздействие связано с увеличением мощности входного сигнала, в фильтрах – в изменении его спектрального состава, в делителях мощности – в разветвлении сигнала по нескольким каналам и т. д. Общим во всех этих устройствах является определение структуры выходного сигнала при заданных параметрах входного сигнала и характеристик или схемы самого линейного объекта, объединяемых единым понятием – анализ работы. Поскольку свойства линейного устройства могут быть описаны различным образом – в одних случаях известна его электрическая схема, в других – коэффициент передачи или передаточная функция, в третьих – частотные или временные характеристики, в четвертых – его Y-параметры, то и анализ работы можно проводить разными методами. Рассмотрим в этой связи четыре метода анализа.

Спектральный анализ. Основой данного метода является обратное преобразование Фурье (2.6). При известной спектральной плотности входного сигнала $S_{ВХ}(j\omega)$ и коэффициенте передачи линейного устройства $K(j\omega)$ согласно (3.5) определяется спектральная плотность выходного сигнала

$$S_{ВЫХ}(j\omega)=K(j\omega)*S_{ВХ}(j\omega). \qquad (3.42)$$

Далее в соответствии с обратным преобразованием Фурье (2.6) или (2.8) рассчитывается выходной сигнал y(t). Следует помнить, что одним из условий применимости преобразования Фурье является абсолютная интегрируемость подинтегральной функции в интеграле Фурье (2.7), что ограничивает класс используемых сигналов при данном методе. В частности, в ограничительный список сигналов попадает и гармоническое колебание при $-\infty<t<\infty$.

При расчете по формуле (2.8) программа совпадает со 2-й частью программы, представленной на рис. 3.5, в части расчета переходной характеристики.

Операционный метод. В основе данного метода лежит преобразование Лапласа-Карсона (3.2) и операционный метод решения линейного дифференциального уравнения [10]. При заданном входном сигнале X(t) находится его изображение X(p). Далее при известной передаточной функции устройства K(p) (3.3) определяется изображение выходного сигнала Y(p)=K(p)*X(p), а затем в соответствии с правилами операционного исчисления оригинал Y(t) – выходной сигнал.

Метод на основе интеграла наложения – интеграла Дюамеля. В основе данного метода лежит представление входного сигнала в виде суммы "тонких" импульсов бесконечно малой длительности (рис. 3.11) и определение свойств объекта с помощью импульсной характеристики. Воздействие на линейный объект одного такого импульса позволяет определить импульсную характеристику, рассчитываемую согласно (3.17) или (3.18) и по программе,

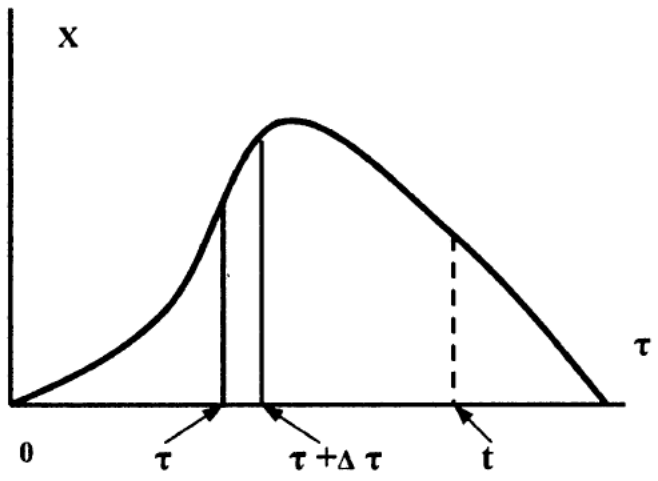


Рис. 3.11

приведенной на рис. 3.5. При сигнале, представляемом суммой импульсов (рис. 3.11), следует определить отклик системы не на один, а на сумму таких импульсов. Причем, в каждый момент t следует просуммировать действие всех импульсов, действующих на объект до данного момента, т. е. в промежутке от 0 до t, и учтя, что каждый последующий импульс сдвинут относительно предыдущего на бесконечно малое время $\Delta\tau$. Заменив операцию суммирования бесконечно малых величин интегрированием, получим выражение, позволяющее рассчитать отклик системы на сумму импульсов и называемое интегралом Дюамеля:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (3.43)$$

где $h(t-\tau)$ – импульсная характеристика, определяемая согласно (3.17) или (3.18), $X(\tau)$ – входной сигнал (рис. 3.11).

Метод, основанный на решении неоднородного линейного дифференциального уравнения. Линейная система описывается дифференциальным уравнением (3.1). Пакет программ **Mathcad** позволяет непосредственно решить данное уравнение одним из численных методов при любом сложном входном сигнале и известной схеме устройства. Рассмотрим данный метод на конкретном примере при прохождении через линейную цепь 2-го порядка (рис. 3.3) сигнала с частотой, изменяющейся по линейному закону – ЛЧМ-сигнал (с линейной частотной модуляцией), повсеместно используемый в радиолокации [11].

Составим дифференциальное уравнение, описывающее схему рис. 3.3. Для мгновенных значений напряжений имеем:

$$u_{BX} = u_R + u_L + u_C \ ,$$

$$u_{BX} = Ri + L\frac{di}{dt} + u_C \ , \quad i = C\frac{du_C}{dt} \ ,$$

$$u_{BX} = RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C \ . \qquad (3.44)$$

Введем принятые ранее обозначения: $x=u_{BX}(t)$, $y=u_{ВЫХ}(t)=u_C$. Из (3.44) получим:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b_1\frac{dy}{dt}+b_0y=a_0x\ , \qquad (3.45)$$

$$\text{где } a_0=b_0=\omega_P^2=(2\pi)^2 f_P^2\ ,\ \ b_1=2\pi f_P/Q\ ,$$

$$Q=L\omega_P/R\ ,\ \ \omega_P=1/LC\ .$$

Для круговой частоты сигнала, изменяющейся по линейному закону (рис. 3.12,а), запишем:

$$\omega(t)=\omega_0+\Delta\omega_Д t/T\ , \qquad (3.46)$$

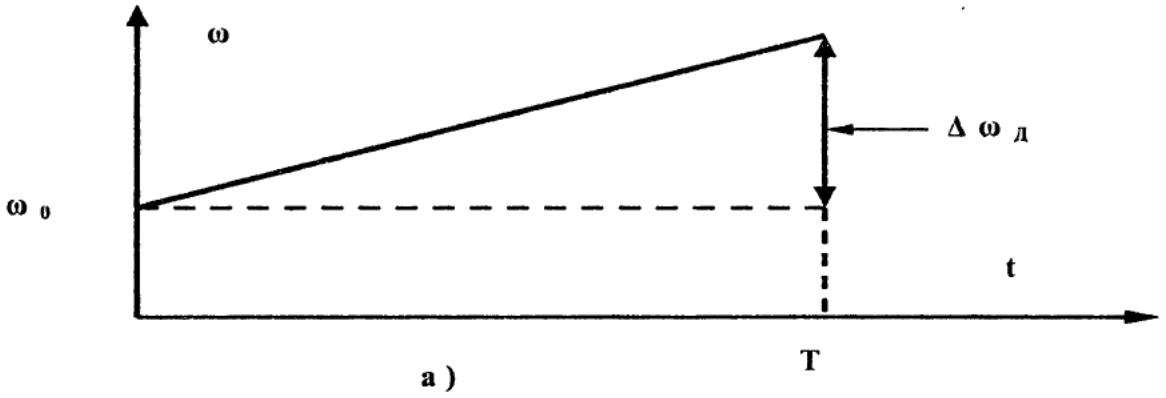
где $\Delta\omega_Д$ – девиация частоты; Т – длительность ЛЧМ сигнала.

Параметр $m=\Delta f_Д T$, называемый базой сигнала, показывает во сколько раз можно сжать по времени ЛЧМ-сигнал на приемной стороне радиолинии по сравнению с передающей.

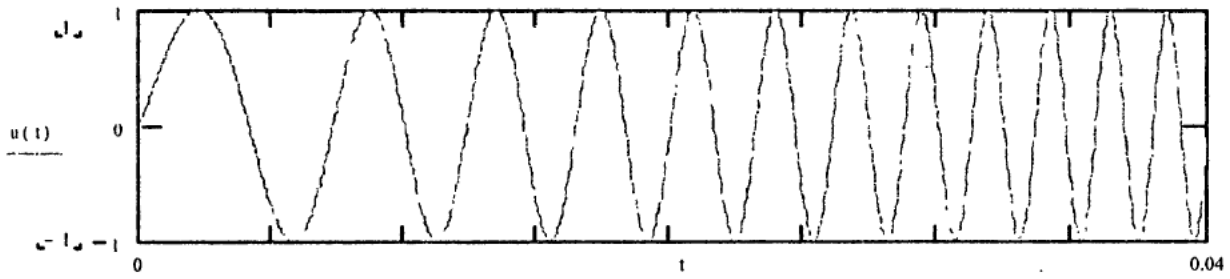
Для ЛЧМ-сигнала (рис. 3.12,б) с учетом (3.46) имеем:

$$u(t)=U_0\sin(\int\omega(t)dt)=U_0\sin(\omega_0t+\frac{\Delta\omega_Д t^2}{2T})=$$

$$U_0\sin[\omega_0t+\frac{\Delta\omega_Д/\omega_0}{2\omega_0T}(\omega_0t)^2]. \qquad (3.47)$$



а)



б)

Рис. 3.12

Преобразуем уравнение (3.45) с учетом параметров ЛЧМ-сигнала к виду:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+\frac{1}{Q}\frac{f_P}{f_0}\frac{dy}{d\tau}+(\frac{f_P}{f_0})^2 y-(\frac{f_P}{f_0})^2 u(\tau)=0\ , \qquad (3.48)$$

где $\tau=\omega_0 t$.

На основании уравнения (3.48) составим программу по расчету выходного сигнала y(t) на выходе линейной цепи 2-го порядка (рис. 3.3) при входном ЛЧМ-сигнале u(t) (3.47). В программе, представленной на рис. 3.13, приняты следующие обозначения:

U0, f0, Df, T – амплитуда, начальное значение частоты, девиация и длительность ЛЧМ-сигнала согласно (3.47);

fp, Q – резонансная частота и добротность электрической цепи согласно (3.45); (при размерности частоты в Гц, кГц или МГц время соответственно в секундах, миллисекундах или микросекундах);

τk – значение текущей фазы, соответствующее длительности T;

m – база сигнала;

K(f) – комплексный коэффициент передачи цепи K(jω) (3.19);

A(f) – модуль комплексного коэффициента передачи – амплитудно-частотная характеристика;

Θ(f) – фаза комплексного коэффициента передачи (в градусах) – фазо-частотная характеристика;

τ, $Y^{<0>}$ – текущая фаза;

y_0, $Y^{<1>}$ – выходной сигнал y(t);

y_1, $Y^{<2>}$ – производная от y(t).

В составленной программе (рис. 3.13) решение линейного дифференциального уравнения (3.48) проводится с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка путем обращения к функции **rkfixed** (см. приложение 3).

Сначала проводится расчет и построение амплитудно- и фазо-частотной характеристик в точном соответствии с аналогичным расчетом по программе, представленной на рис. 3.4, что позволяет сравнить динамическую амплитудно-частотную характеристику со статической.

Рассчитывается значение базы сигнала $m=\Delta f_Д T$, показывающее во сколько раз можно сжать по времени ЛЧМ-сигнал на приемной стороне радиолинии по сравнению с передающей.

По результатам решения дифференциального уравнения строится график функции выходного сигнала y(t) при воздействии на цепь ЛЧМ-сигнала. Огибающая данного графика является динамической амплитудно-частотной характеристикой цепи при ее быстрой перестройке.

$U0 := 1 \qquad f0 := 100 \qquad Df := 150 \qquad T := 2$

$fp := 150 \qquad Q := 50 \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a_0 := (2 \cdot \pi)^2 \cdot fp^2 \qquad b_0 := a_0 \qquad b_1 := \frac{(2 \cdot \pi \cdot fp)}{Q} \qquad b_2 := 1$

$j := \sqrt{-1} \qquad p(f) := j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$

$$K(f) := \frac{a_0}{\left(b_0 + b_1 \cdot p(f) + b_2 \cdot p(f)^2\right)}$$

$A(f) := |K(f)| \qquad \Theta(f) := \arg(K(f)) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)$

$\tau k := 2 \cdot \pi \cdot f0 \cdot T \qquad \tau k = 1.257 \times 10^3 \qquad m := Df \cdot T \qquad m = 300$

$\gamma := \frac{fp}{f0} \qquad v := \frac{Df}{f0} \qquad \beta := \frac{v}{(4 \cdot \pi \cdot f0 \cdot T)}$

$$\Phi(\tau) := \begin{cases} \left(U0 \cdot \sin\left(\tau + \beta \cdot \tau^2\right)\right) & \text{if } 0 \le \tau \le \tau k \\ 0 & \text{if } \tau > \tau k \end{cases}$$

$$\Psi(\tau, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -\left(\frac{\gamma}{Q}\right) \cdot y_1 - \gamma^2 \cdot y_0 + \gamma^2 \cdot \Phi(\tau) \end{bmatrix}$$

$Y := \text{rkfixed}(y, 0, 1500, 15000, \Psi)$

$Y =$

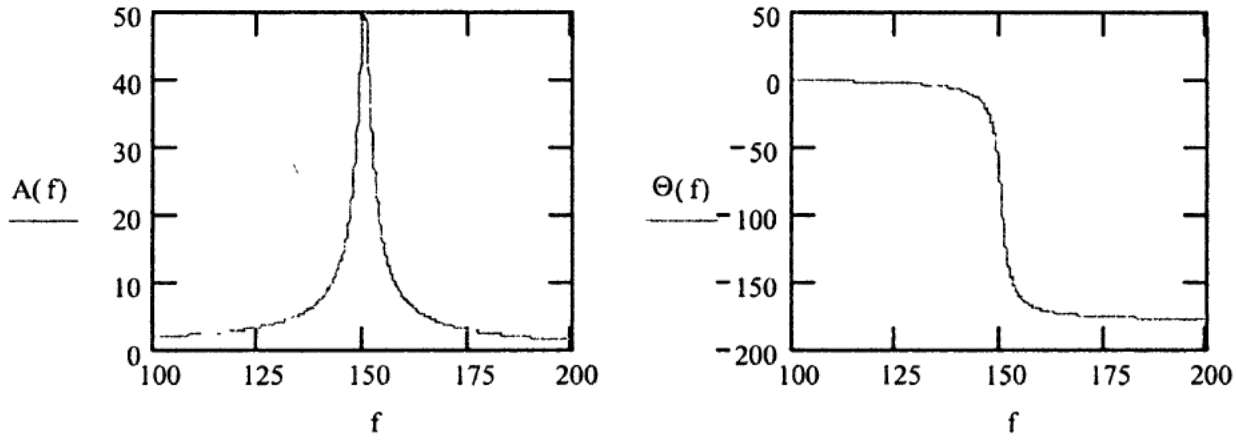
	0	1	2
0	0	0	0
1	0.1	$3.746 \cdot 10^{-4}$	0.011
2	0.2	$2.977 \cdot 10^{-3}$	0.044
3	0.3	$9.958 \cdot 10^{-3}$	0.099
4	0.4	0.023	0.172
5	0.5	0.045	0.261

Рис. 3.13

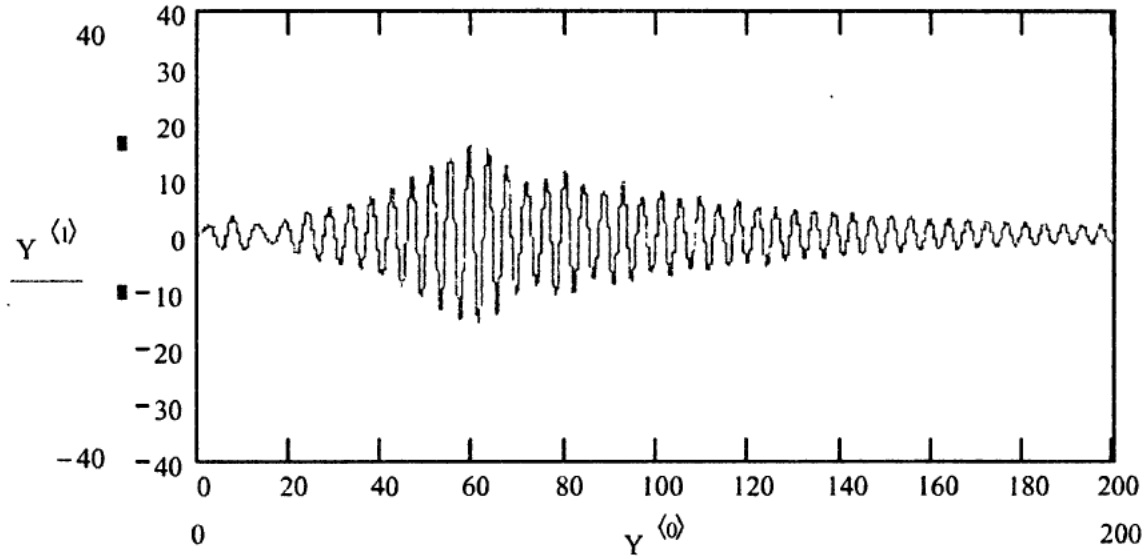
Результаты примера расчета по программе представлены на рис. 3.14.

На рис. 3.14,а построены статические амплитудно и фазо-частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) цепи; на рис.3.14, б,в,г – динамические характеристики при U0=1, f0=100, Df=150, fp=150,Q=50 и разных значениях длительности ЛЧМ-сигнала T, указанные в подписях к рисунку.

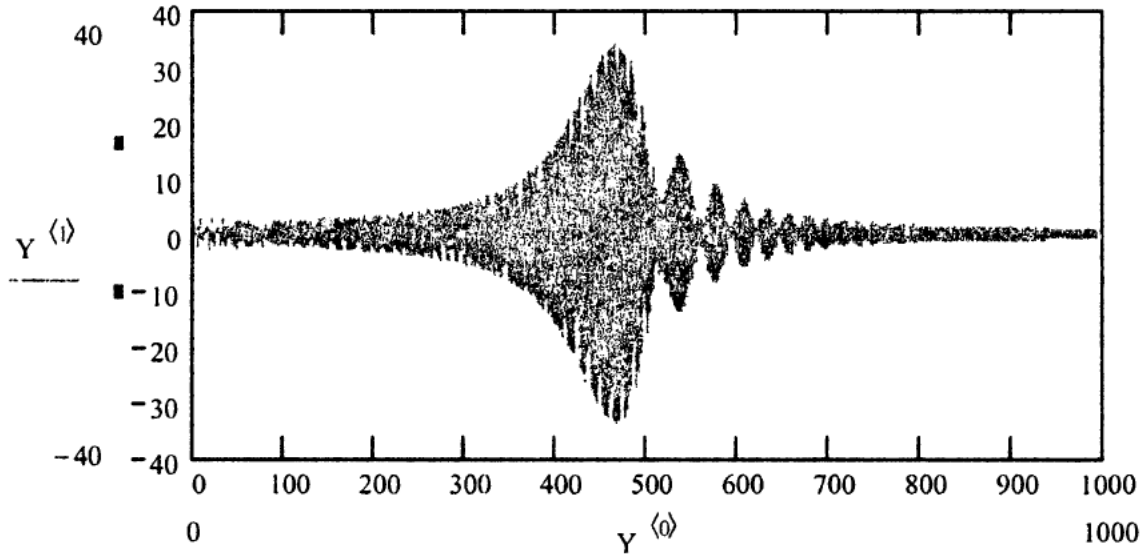
С помощью построенных графиков можно определить, как отличается АЧХ в динамическом режиме при быстрой перестройке резонансной цепи от статической характеристики и как влияет на выходной сигнал скорость перестройки $v=\Delta\omega_Д/T$. С повышением этой скорости или уменьшением величины T относительная длительность выходного импульса по сравнению с входным возрастает, а амплитуда уменьшается. При T=2 и Df=150 (рис. 3.14,в) на заднем фронте импульса появляются осцилляции.



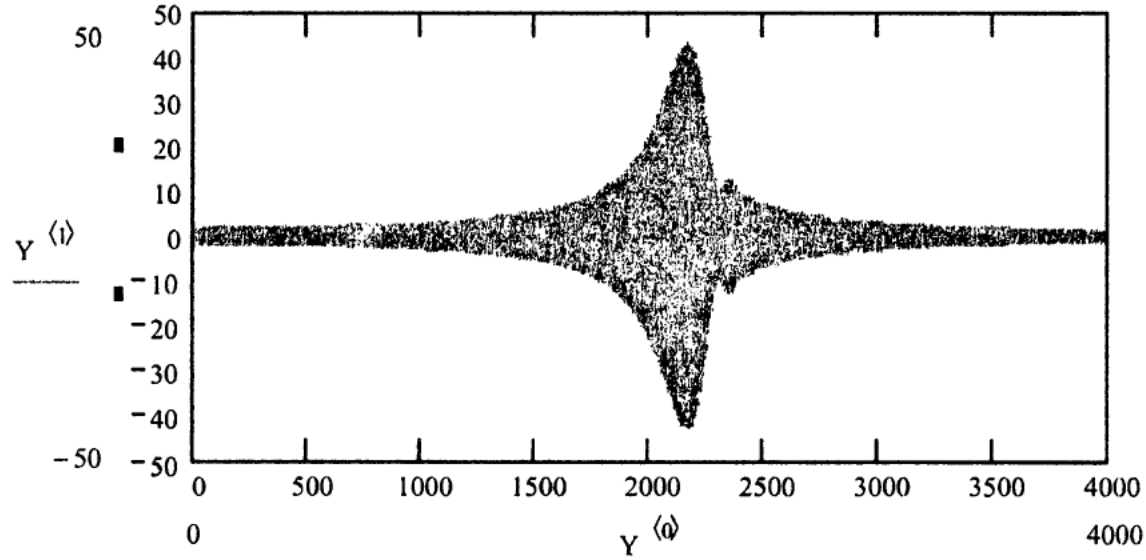
а)



б) T=0.2, Df=150; рис. 3.14



в) T=2, Df=150



г) T=10, Df=150;

Рис. 3.14

В заключение отметим, что ЛЧМ-сигналы широко используются в радиолокации, позволяя сузить в m раз ($m=\Delta f_Д T$ – база сигнала) принятый сигнал и тем самым повысить разрешающую способность системы [11]. С помощью программы (рис. 3.13) можно правильно выбрать параметры электрических цепей, исходя из допустимых искажений ЛЧМ-сигнала. Другая практическая направленность проведенного по программе анализа связана с быстрой перестройкой резонансных контуров в диапазонных радиоприемниках и радиопередатчиках, что свойственно современным системам радиосвязи с поиском свободного частотного канала. Исходя из допустимого уменьшения амплитуды сигнала, можно правильно выбрать скорость такой перестройки контуров.

По аналогии с программой, приведенной на рис. 3.13, можно составить другие программы при изменении внешнего сигнала, действующего на объект.

Глава 4. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ АНАЛОГОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

4.1. Математические модели

Нелинейным элементом в радиотехнических устройствах в большинстве случаев являются электронные приборы – полупроводниковые и электровакуумные. В сочетании с инерционными электрическими цепями они образуют нелинейные динамические звенья и устройства. К их числу относятся: низкочастотные и высокочастотные усилители мощности сигнала, умножители и делители частоты сигнала, преобразователи частоты и автогенераторы.

При всем разнообразии этих устройств с позиции математического моделирования их можно разделить на два больших класса: неавтономные и автономные. Признаками устройств неавтономного типа являются:

- зависимость выходного сигнала y(t) от входного x(t), причем при x(t)=0, как правило, y(t)=0;
- в воздействии на один или несколько параметров входного сигнала при его прохождении через устройство, например, в усилителях – на мощность сигнала, в преобразователях – на частоту.

Признаком устройств автономного типа является отсутствие внешнего воздействия, в них выходной сигнал y(t) определяется исключительно свойствами самого устройства. Так, например, частота автоколебаний зависит от параметров колебательной системы, а мощность сигнала – от электронного прибора и режима его работы.

Несмотря на физические различия математическая модель обоих типов устройств с электрическими цепями сосредоточенного типа едина и может быть представлена в виде системы из n нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dt} = \Psi_1(x(t), y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_n}{dt} = \Psi_n(x(t), y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

где x(t) – входной сигнал, в автономном устройстве x(t)=0;

y_1, y_2, y_3 – мгновенные значения сигналов в различных участках схемы.

Начальные условия при $t=t_0$ в виде $y_1(t_0)$, $y_2(t_0)$,..., $y_n(t_0)$ должны быть заданы.

Если удается систему уравнений (4.1) разрешить относительно высшей производной, то она принимает вид:

$$\frac{d^n y}{dt^n} - \Psi(x(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^3 y}{dt^3}, ... \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}) = 0. \qquad (4.2)$$

Уравнение (4.2) имеет единственное решение, соответствующее заданным начальным условиям и непрерывное со своими производными до (n-1)-го порядка включительно при $t=t_0$, если функция Ψ непрерывна и удовлетворяет условиям Липшицца [10].

Определенная часть устройств неавтономного типа описывается нелинейным дифференциальным уравнением с раздельной линейно и нелинейной частями. Такое уравнение можно рассматривать как частный случай (4.2) и записать его в виде:

$$L(p)y + \varphi(y) = x(t), \qquad (4.3)$$

где $\varphi(y)$ – нелинейная функция;

$p = \frac{d}{dt}$ – символ дифференцирования;

$$L(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} =$$

$$a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + ... + a_n \frac{d^n}{dt^n} - \qquad (4.4)$$

дифференциальный оператор n-го порядка.

Как и ранее, в автономном устройстве $x(t)=0$.

Рассмотри применяемые в радиотехнике методы решения уравнений (4.1)–(4.4) и покажем, в каких случаях возможно использование аналитических методов, а в каких следует обращаться к численным, практическая реализация которых возможна только с помощью компьютера.

4.2. Аналитические методы анализа

Асимптотический метод [12]. Данный метод применяют при решении уравнения вида:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon \Psi(y, \frac{dy}{dt}), \qquad (4.5)$$

где ε – малый положительный параметр.

При ε=0 устройство линейно и решение (4.5) есть:

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{4.6}$$

При ε # 0 решение ищется в виде ряда:

$$y = A(t)\cos[\omega t + \varphi(t)] + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \Phi_i, \tag{4.7}$$

где Φ_i – периодические функции, зависящие от амплитуды и фазы сигнала.

Для получения решения 1-го приближения в (4.7) сумма ряда отбрасывается, а зависимости для амплитуды и фазы отыскиваются в результате решения дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon F_1(A) \quad и \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon F_2(A) \quad , \tag{4.8}$$

где $F_1(A)$, $F_2(A)$ – функции, зависящие от амплитуды и определяемые с помощью нелинейной функции ψ, входящей в уравнение (4.5).

При таком применении асимптотический метод называется методом медленно меняющихся амплитуд, предложенный Ван-дер-Полем при решении частного случая уравнения (4.5), описывающего работу лампового автогенератора:

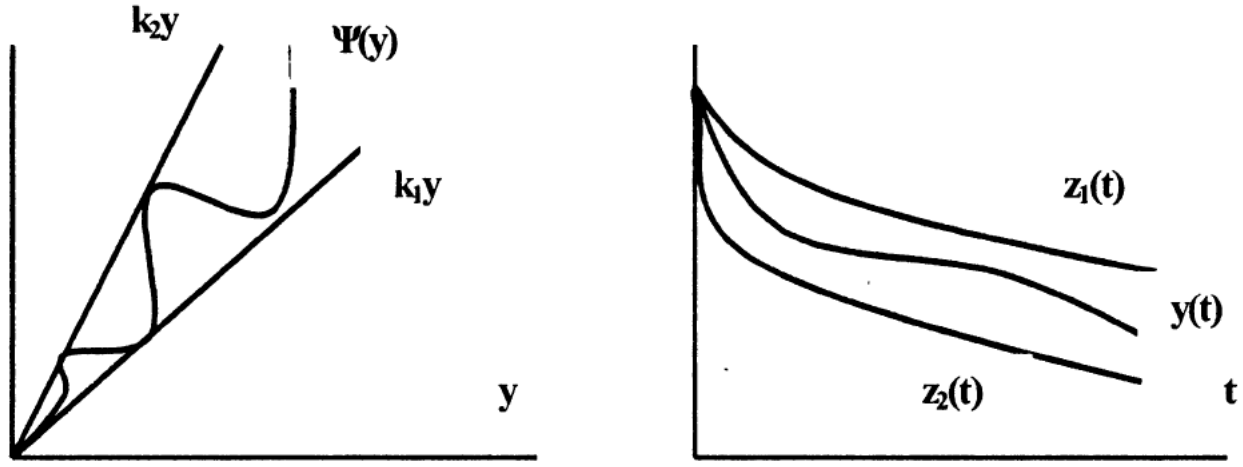
$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - \mu(1 - y^2)\frac{dy}{d\tau} + y = 0, \tag{4.9}$$

где $\tau = \omega t$ – нормированное время; μ – малый параметр.

Еще раз обратим внимание, что приближенное аналитическое решение уравнения (4.9) возможно только при $\mu << 1$.

Метод линеаризации. Этот метод основан на теореме о дифференциальных неравенствах, сформулированной Чаплыгиным [13]. Сущность данной теоремы заключается в следующем. В левую часть нелинейного дифференциального уравнения (4.2), разрешенного относительно высшей производной, вместо неизвестного истинного решения y(t) подставляется некоторым определенным образом подобранная функция z(t), которая при t_0 имеет начальное значение $z_0 = y_0$ и всюду непрерывна. Если в результате такой подстановки получается результат, больший 0, то для всех значений t, находящихся в интервале $t_0 \le t \le t_1$ можно утверждать: функция z>y. Если результат подстановки отрицательный, то справедливо обратное утверждение: функция z<y. Сложность практического использования данного метода состоит в определении значения t_1, до которого теорема справедлива.

Покажем применение данного метода в частном случае для устройства, математическая модель которого есть уравнение n-го порядка (4.3), а график нелинейного члена есть кривая, выходящая из начала координат (рис. 4.1,а).



а) **Рис. 4.1** б)

Заменив в уравнении нелинейный член φ(y) линейным ky, получим:

$$L(p)y + ky = x(t). \tag{4.10}$$

Решение линейного уравнения есть:

$$y_{Л}(t)=\Phi(t, C_1, C_2, ..., C_{n-1}), \tag{4.11}$$

где C_1, C_2, ..., C_{n-1} – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами устройства.

Подставив решение (4.11) линейного уравнения (4.10), в нелинейное (4.3) получим остаток:

$$R(y)=\varphi(y)-ky. \tag{4.12}$$

Проведем две прямые таким образом, чтобы график функции φ(y) находился внутри них (рис. 4.1,а). Очевидно, что при $k=k_1$, как следует из (4.12), функция $R(y)<0$ и согласно теореме о дифференциальных неравенствах решение (4.11) $y_{Л1}(t)<y_{И}(t)$ – истинного решения исходного нелинейного уравнения (4.3) при $t\le t_1$. При $k=k_2$, как следует из (4.12), функция $R(y)>0$ и, следовательно, $y_{Л1}(t)>y_{И}(t)$ при $t\le t_1$. Таким образом, найдя решение линейного уравнения (4.10) при $k=k_1$ и $k=k_2$, можно определить вилку, внутри которой расположено истинное решение $y_{И}(t)$, что для многих практических задач оказывается вполне достаточным. Однако справедливость данного утверждения распространяется исключительно до момента t_1, отыскать который не всегда удается. Только в одном случае – при апериодическом, монотонном характере переходного процесса в линеаризированном устройстве 1-го и 2-го порядка, описываемого уравнением (4.10), это ограничение отпадает и полученный результат справедлив при любых значениях t. График переходного процесса для такого случая показан на рис. 4.1,б. Существенное преимущество метода Чаплыгина со-

стоит в быстрой оценке по максимуму и минимуму приближенного решения при замене нелинейной системы линеаризированной.

Метод функционального ряда Вольтерра [14]. Один из методов анализа линейных динамических стационарных систем основан на применении интеграла (3.43), являющегося сверткой входного сигнала и импульсной характеристики:

$$y(t) = \int_0^{\infty} k(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau, \qquad (4.13)$$

где $k(\tau)$ – импульсная характеристика системы.

Согласно (4.13) выходной сигнал находится как предельная сумма откликов системы на бесконечное число входных импульсных воздействий, представляющих в совокупности входной сигнал $x(t)$ (рис. 4.3).

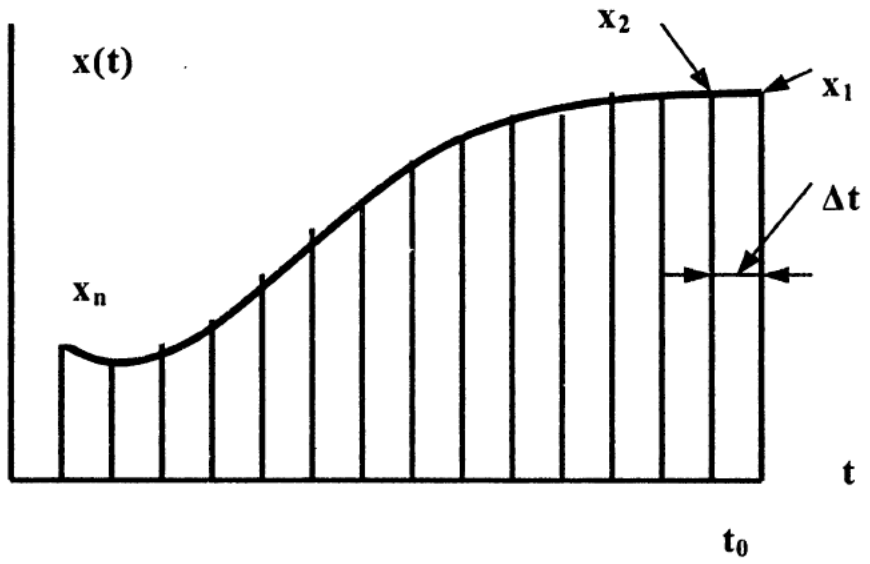


Рис. 4.3

Развитие данного метода применительно к нелинейной динамической стационарной системе с конечной памятью приводит к функциональному ряду Вольтерра, позволяющему установить связь выходного сигнала $y(t)$ с входным $x(t)$, на что первым обратил внимание Н. Винер [15]. Исследование по методу Винера-Вольтерра возможно только в случае физической реализуемости, однозначности и устойчивости нелинейной системы, т. е. при отсутствии в ней собственных колебаний. При этом выходной сигнал $y(t)$ представляется как сумма откликов нелинейной системы при моделировании последней в виде бесконечного множества импульсных переходных характеристик h (рис.4.4) и входном сигнале $x(t)$, в виде бесконечного множества импульсных сигналов (рис. 4.3).

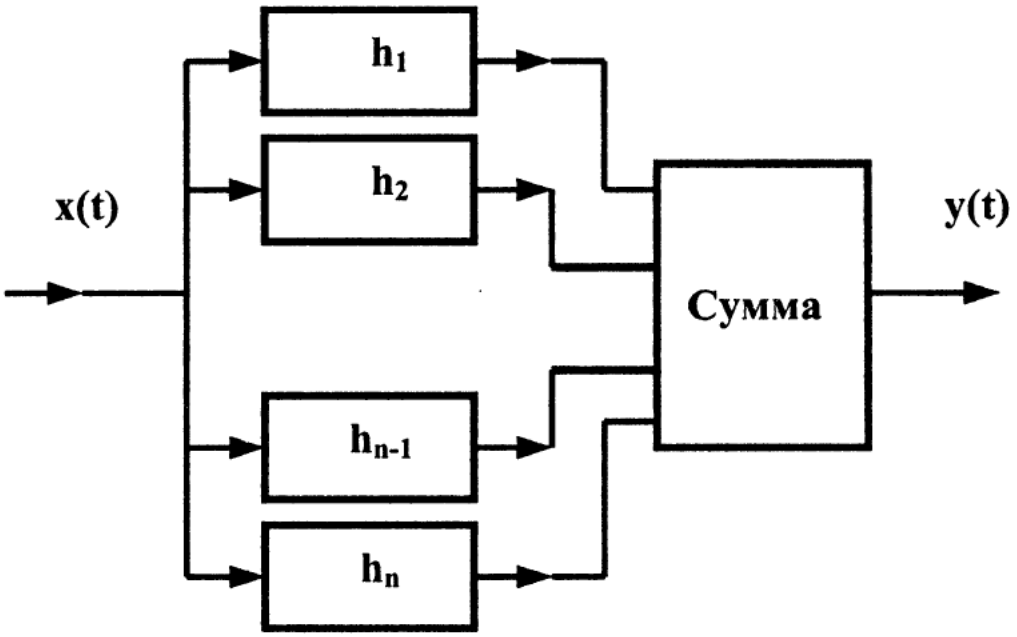


Рис. 4.4

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t). \qquad (4.14)$$

В случае линейной системы ее моделирование согласно (4.13) осуществляется с помощью единственной импульсной переходной характеристики и поэтому $y(t)=y_1(t)$.

Два обстоятельства имеют решающее значение при анализе нелинейной системы с помощью данного метода: идентификация ядер Вольтерра и определение количества членов, удерживаемых в ряде (4.14) с бесконечным числом членов, для получения приемлемой точности решения. Так что практическое использование данного метода весьма затруднительно.

Метод гармонической линеаризации [16]. Для исследования нелинейной динамической системы в режиме гармонических колебаний или при колебательном характере переходного процесса с медленно меняющейся амплитудой, возможно применение метода гармонической линеаризации. В случае автоколебательной системы метод называют также гармоническим балансом. При данном методе ограничение по виду нелинейности практически отсутствует, но вводится другое обязательное условие – фильтрация всех гармоник сигнала на выходе нелинейного элемента, кроме единственной, обычно первой. Сама система условно разбивается на две части: нелинейную и линейную. В силу принятого условия фильтрации сигнала, в линейной части устанавливаются колебания, близкие к синусоидальным, и поэтому решение нелинейного дифференциального уравнения (4.3), описывающего работу всей системы, отыскивается в виде:

$$y(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos\ \Omega t. \qquad (4.15)$$

Сам нелинейный элемент с характеристикой φ(y) заменяется квазилинейным элементом по 1-й или иной гармонике сигнала. Если функция φ(y) является нечетной, т. е. φ(–y)= –φ(y), то линеаризированный элемент по 1-й гармонике сигнала описывается зависимостью:

$$z=q_1 y, \tag{4.16}$$

где

$$q_1 = \frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} \varphi(A_0 \sin \Omega t)\sin \Omega t d(\Omega t) \quad - \tag{4.17}$$

коэффициент гармонической линеаризации, определяемый как коэффициент 1-й гармоники сигнала при разложении функции в ряд Фурье.

В исходном уравнении (4.3) нелинейный член φ(y) заменяется на линейный $q_1 y$. В результате уравнение в целом становится линейным, для решения которого можно использовать известные методы, в частности, операционный. В автономной системе во время переходного процесса показатель затухания γ и частота Ω, зависящие от амплитуды колебаний, могут изменяться. Поэтому в окончательном виде решение уравнения (4.3) принимает вид:

$$y(t) = A_0 e^{-\int \gamma dt} \sin\left(\int \Omega dt + \varphi_0\right). \tag{4.18}$$

После получения решения (4.18) проверяется обоснованность двух исходных предпосылок: о близости колебаний к синусоидальным и о медленном характере изменения величин γ и Ω,что возможно только при наличии фильтра на выходе нелинейного элемента.

Имеется принципиальное отличие различие между обычной и гармонической линеаризацией нелинейного элемента. В первом случае нелинейная характеристика заменяется отрезком прямой линии (рис. 4.1,а) и коэффициент усиления не зависит от величины входного сигнала. Кроме того накладывается ограничение на эту характеристику, которая не должна значительно отличаться от линейной.

Во втором случае нелинейный элемент заменяется квазилинейным с коэффициентом усиления, зависящим согласно (4.17) от амплитуды сигнала. Здесь возможна линеаризация и при существенной нелинейности, но вводится другое ограничение – фильтрация сигнала с выделением одной из гармоник сигнала.

Проведем краткий сравнительный анализ четырех рассмотренных методов аналитического решения дифференциальных уравнений при анализе нелинейных динамических систем, остановившись на их характерных особенностях:

- при 1-м методе (асимптотическом) – допустима только "малая" нелинейность;

- при 2-м методе (Чаплыгина) – неопределенность в определении момента времени t_1 и практическая возможность приложения только к процессам апериодического характера (рис. 4.1,б);

- при 3-м методе (Вольтерра-Винера) – допустима "малая" нелинейность или "малый" сигнал и сложность в определении ядер Вольтерра;

- при 4-м методе (гармонической линеаризации) – необходимость фильтрации сигнала в линейной части системы.

В зависимости от конкретных условий работы выбирается тот или иной из методов приближенного аналитического анализа нелинейной стационарной динамической системы.

4.3. Численные методы анализа

Свободными от перечисленных ограничений методов аналитического анализа нелинейных динамических систем являются численные способы решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (4.1), которые представим в более компактной, векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{\Phi}[x(t), \mathbf{Y}]. \qquad (4.19)$$

где $\mathbf{Y}$ – вектор-столбец функций $y_1(t), y_2(t),\ldots, y_n(t)$;

$\mathbf{\Phi}[x(t), \mathbf{Y}]$ – вектор-столбец функций $\Psi_1[x(t), y_1(t), y_2(t),\ldots, y_n(t)]$;
$\Psi_2[x(t), y_1(t), y_2(t),\ldots, y_n(t)],\ldots, \Psi_n[x(t), y_1(t), y_2(t),\ldots, y_n(t)]$.

Для решения уравнений (4.19) при заданных начальных условиях, непрерывности функции $\mathbf{\Phi}$ и выполнении условий Липшица достаточно знать метод решения нелинейного дифференциального 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dt} = \Phi\,(t, y), \qquad \text{при } y(t_0)=y_0. \qquad (4.20)$$

Задача отыскания решения дифференциального уравнения (4.20) при заданном начальном условии называется задачей Коши [10].

Общим правилом для различных методов численного решения уравнения (4.20), а следовательно, и в целом системы уравнений (4.19), является разбиение непрерывной функции y(t) на интервалы (шаги) и в определении решения в конце каждого шага, т. е. в дискретные отсчеты времени, путем некоторой итерационной процедуры.

Предположим, что функция y(t) непрерывна со своими производными на исследуемом интервале от t_k до $t_k+\Delta t$. Зная функцию y(t) и ее производные при $t=t_k$, путем ее разложения в окрестности этой точки в ряд Тейлора получим для момента $t=t_k+\Delta t$:

$$y(t_k+\Delta t) = y(t_k) + \Delta t \cdot y'(t_k) + \frac{1}{2}\Delta t^2 \cdot y''(t_k) + \frac{1}{6}\Delta t^3 \cdot y'''(t_k) + \ldots, \qquad (4.21)$$

где $y^j(t_k)$ – j-я производная функции при $t=t_k$.

Пусть процедура разложения функции в ряд Тейлора согласно (4.21) выполнена в окрестности (n+1) точек на оси времени t, т. е. в моменты t_0, t_1, t_2,..., t_n. Заменив Δt на шаг h и положив $t_n=nh$, получим итерационную формулу для (n+1)-го шага:

$$y_{n+1} = y_n + hy_n^{'} + \frac{1}{2}h^2 y_n^{''} + \frac{1}{6}h^3 y_n^{'''} + ... \qquad (4.22)$$

Формулу (4.22) можно рассматривать как приближенное решение уравнения (4.20), точность которого улучшается с уменьшением шага h и с увеличением удерживаемых в разложении членов.

Несмотря на свою наглядность, метод Тейлора в численных расчетах при решении уравнения (4.20) практически не используется ввиду необходимости определения производных функции. Зато этот метод выполняет роль определенного эталона по отношению к другим, более удобным методам, например, Рунге-Кутта, имеющим следующие достоинства:

- необходимость вычисления только самой функции **Ф**(t, y) без определения ее производных;
- одношаговость, т. е. возможность определения значения y_{n+1} только по значениям y_n и t_n, вычисленных на предыдущем шаге;
- сопоставимость с методом Тейлора.

В методе Рунге-Кутта 4-го порядка значение y_{n+1} вычисляется по следующим формулам:

$$k_1 = k_1 + \Phi(t_n, y_n), k_2 = \Phi(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1);$$

$$k_3 = \Phi(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = \Phi(t_n + h, y_n + hk_3);$$

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\frac{h}{6}. \qquad (4.23)$$

Погрешность метода на одном шаге не превышает Kh^4, где K – постоянная величина.

Математический пакет программ "Mathcad" предоставляет набор встроенных функций по численному решению дифференциальных уравнений. Две из таких функций: **rkfixed** и **Rkadapt** , производящие вычисления согласно методу Рунге-Кутта 4-го порядка, используются в последующих главах.

Для поиска решения в обоих случаях необходимо задать:

- начальные условия;
- дифференциальное уравнение, представляемое в виде уравнений первого порядка согласно (4.1) или (4.19);
- значения всех постоянных коэффициентов, входящих в эти уравнения;
- набор точек, в которых следует найти решение.

В функцию **rkfixed(y,** x1, x2, n, **F**) входят следующие параметры:

Y – вектор начальных условий с размерностью, соответствующей порядку **k** дифференциального уравнения или числу уравнений первого порядка в (4.1) или (4.19);

x1, x2 – граничные значения интервала, на котором ищется решение;

n – число фиксированных шагов или точек, в которых ищется приближенное решение;

F – вектор, в котором записаны правые части дифференциальных уравнений (4.1) или (4.19).

В результате решения получается матрица, содержащая (k+1) столбцов и (n+1) строчек. В 1-м столбце содержатся фиксированные значения аргумента, t_1, t_2,..., t_n, во 2-м – соответствующие им значения искомой функции $y(t_0)$, $y(t_1)$, $y(t_2)$..., $y(t_n)$, в 3-м – значения первых производных в тех же узлах и т. д.

Функция **Rkadapt(y,** x1, x2, n, **F**) имеет те же параметры, что и **rkfixed**, но несколько отличается от нее алгоритмом поиска решения. Если функция **rkfixed** ищет приближенное решение с постоянным шагом, то с помощью функции **Rkadapt** осуществляется адаптивный контроль этого процесса: с более мелким шагом при быстром изменении функции и более крупном – при медленном.

Рассмотрим пример решения нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка, описывающего работу автогенератора, называемого уравнением Ван-дер-Поля [12]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \mu(1-y^2)\frac{dy}{dt} + y = 0. \qquad (4.24)$$

Представим (4.24) в виде двух уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2;$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \mu(1-y_1^2)y_2 - y_1, \qquad (4.25)$$

где y_1 – искомая функция; y_2 – ее производная.

Дадим пояснения к составленной программе (рис. 4.5) по решению уравнений (4.25).

ORIGIN=1 – означает, что нумерация координат вектора начинается с 1.

N=2000 – число рассчитываемых точек или узлов.

$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ – вектор начальных значений функции y_1 и ее производной y_2.

F(t,y) – вектор правых частей уравнений (4.25).

x1=0, x2=100 – начальное и конечное значения интервала времени t, внутри которого находится решение.

Z – матрица, содержащая значения решения уравнения и его производной в рассчитываемых точках–узлах сетки.

$Z^{\langle 1 \rangle}$ – столбец, содержащий координаты узлов времени t.

$Z^{\langle 2 \rangle}$ – столбец, содержащий значения решения y в этих узлах.

$Z^{\langle 3 \rangle}$ – столбец, содержащий значения производной решения в этих узлах.

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad \mu := 0.1 \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$F(t, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ \mu \cdot \left[1 - (y_1)^2\right] \cdot y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 100, 2001, F)$$

$Z =$

	1	2	3
1	0	0	0.5
2	0.05	0.025	0.502
3	0.1	0.05	0.503
4	0.15	0.075	0.502
5	0.2	0.1	0.5

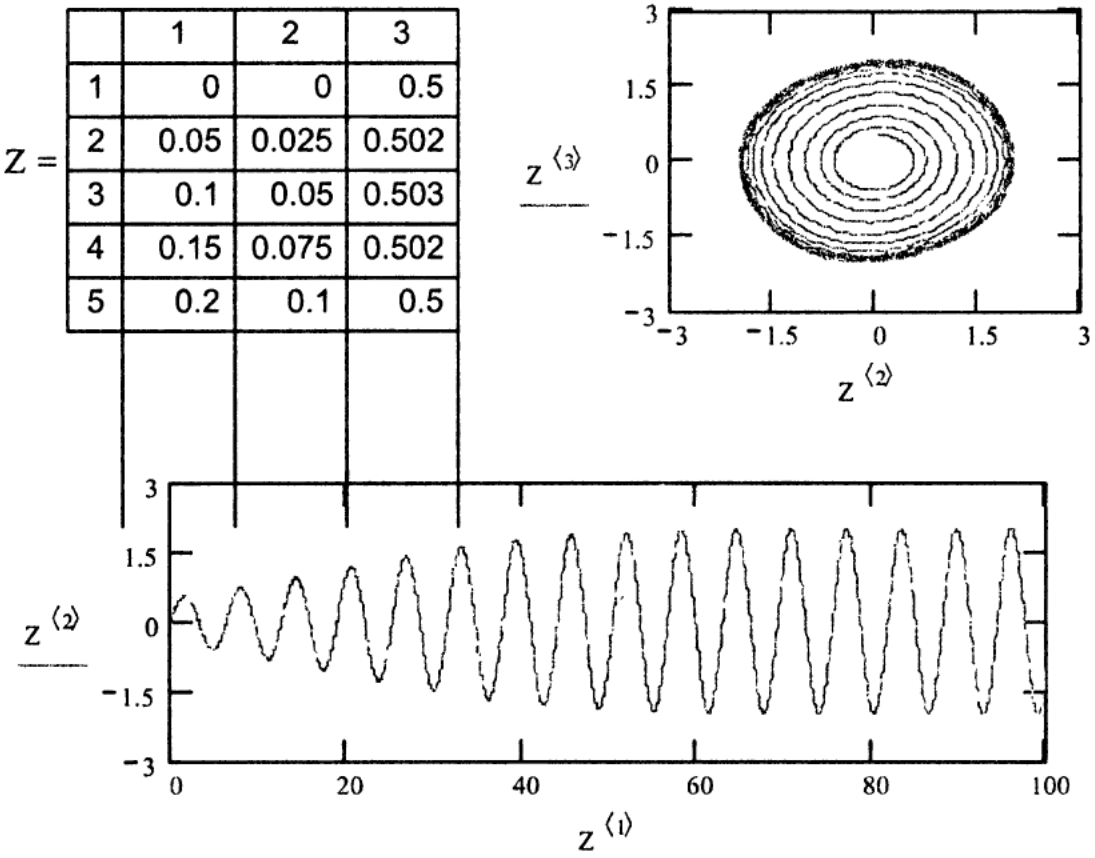


Рис. 4.5

Помимо самой программы на рис. 4.5 представлены результаты решения в виде таблицы и графиков искомой функции y(t) и фазовой траектории.

Ниже, в гл. 5 и 6, по описанной методике рассмотрено решение задач по анализу таких нелинейных динамических систем, как автогенератор и устройства автоматической подстройки частоты.

4.4. Фазовая плоскость

Выше было сказано, что автономная колебательная система описывается уравнениями (4.1) или в векторной форме (4.19) при исключении из них внешнего воздействия, т. е. при x(t)=0. Уравнение (4.19) при этом принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \Phi\ (\mathbf{Y}\ ). \tag{4.26}$$

Для наглядного отображения протекающих процессов в такой автономной динамической системе **n**-го порядка используется понятие **n**-мерного фазового пространства. Координаты точки в этом пространстве отображают мгновенное динамическое состояние системы, а совокупность таких точек образуют фазовую траекторию. В случае системы 2-го порядка это пространство вырождается в плоскость. Для автономной системы 2-го порядка из (4.1) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \Psi_1(y_1, y_2); \\ \frac{dy_2}{dt} &= \Psi_2(y_1, y_2). \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

При (4.27) за динамическим состоянием системы можно проследить с помощью фазовой траектории–зависимости $y_2(y_1)$ – на плоскости. В системе 2-го порядка, описываемой уравнениями вида (4.25), y_1 – есть функция, y_2 – ее производная.

Рассмотрим пример построения фазового портрета при колебательном характере процесса, описываемого уравнением:

$$y(t) = Ae^{\alpha t}\cos\ \omega t. \tag{4.28}$$

Программа по расчету производной $Z(t)=y'(t)$ и построению фазового портрета Z(Y) и временных зависимостей Y(t) и Z(t) для двух случаев представлена на рис. 4.6. В 1-м случае $\alpha<0$ и процесс носит затухающий колебательный характер, а фазовый портрет имеет вид сворачивающейся спирали (слева на рис. 4.6). Во 2-м случае $\alpha>0$ и процесс носит возрастающий колебательный характер, а фазовый портрет имеет вид разворачивающейся спирали (справа на рис. 4.6).

$$\alpha := -0.1 \qquad A := 10 \qquad F := 0.5$$

$$Y(t) := A \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F \cdot t) \qquad Z(t) := \frac{d}{dt} Y(t)$$

$$i := 1..400 \qquad t_i := 0.05 \cdot i$$

$$YA_i := Y(t_i) \qquad ZA_i := Z(t_i)$$

$\alpha := -0.1$ $A := 10$ $F := 0.5$ $\alpha := 0.1$ $A := 1$ $F := 0.5$

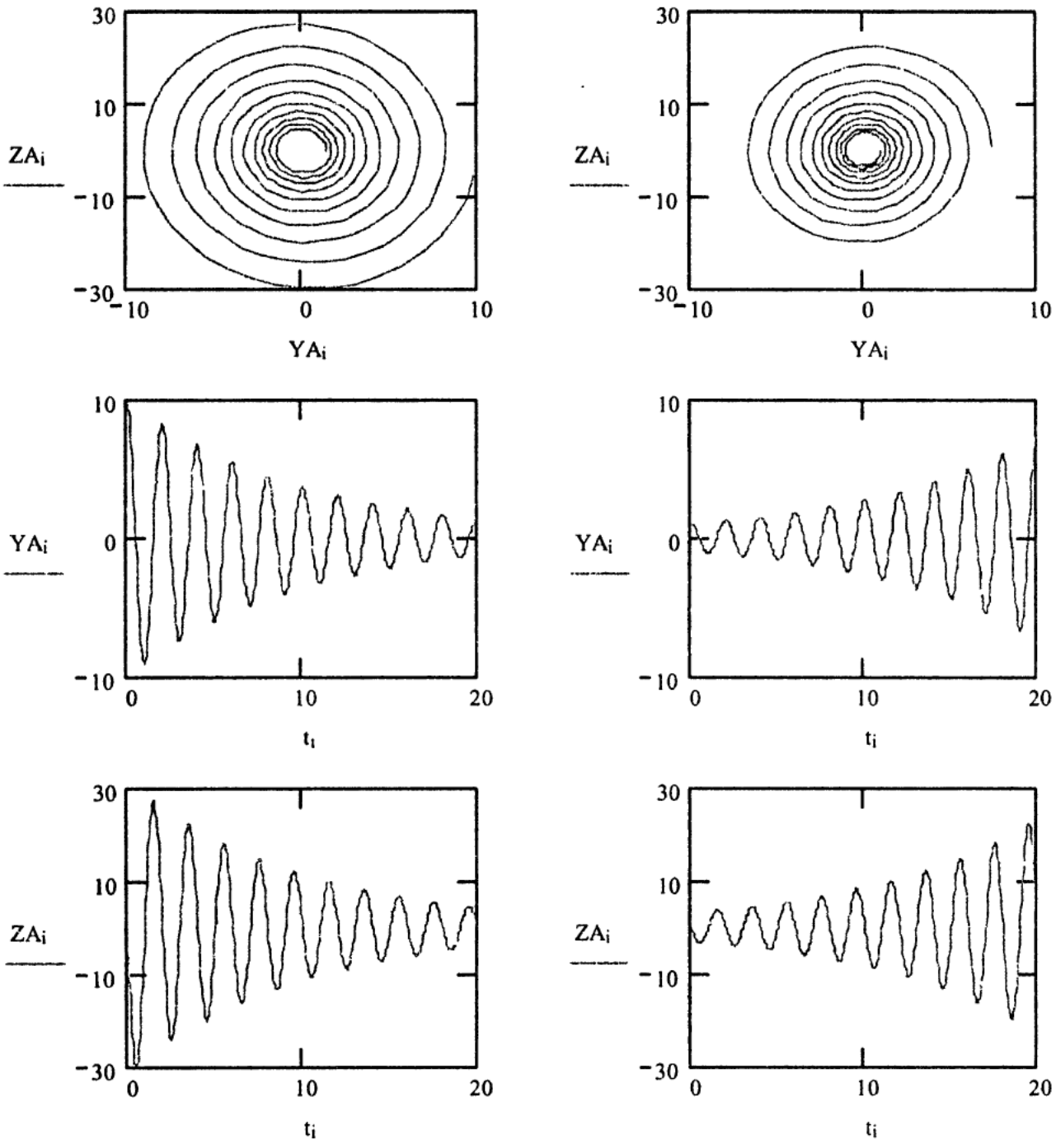


Рис. 4.6

Еще один пример построения фазового портрета представлен ранее на рис. 4.5 при анализе работы автогенератора. Здесь устанавливается режим устойчивых автоколебаний с постоянной амплитудой и поэтому фазовая траектория стремится к устойчивому предельному циклу.

Математический пакет программ "Mathcad" предоставляет исключительно удобные возможности для построения фазового портрета автономной динамической системы, поскольку при расчете переходного процесса рассчитывается и функция, и ее производная, что продемонстрировано в примере, приведенном на рис. 4.5. В рассматриваемых ниже задачах анализа нелинейных динамических систем, как правило, наряду с построением переходного процесса в системе строится и ее фазовый портрет.

4.5. Стохастические колебания в детерминированных автономных динамических системах

В радиоэлектронных устройствах повышенной мощности в некоторых случаях самопроизвольно возникают неконтролируемые стохастические колебания, которые также называют "паразитными". Причина их возникновения кроется в наличии нескольких обратных связей в устройстве и существенно нелинейном характере электронных приборов. Режим стохастических колебаний или хаоса в детерминированных системах возможен при их описании нелинейным дифференциальным уравнением не ниже 3-го порядка [17]. Исследуем один из случаев режима хаоса на основании уравнений, составленных Э. Лоренцем [42]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y; \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz; \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz. \end{aligned}\right\} \qquad (4.29)$$

При определенных значениях постоянных коэффициентов **σ, b, r** и начальных условиях в системе возникают стохастические колебания, спектр которых близок к спектру шума. В частности, возникновение хаоса в возможно при σ=10, b=2,7, r=27. Программа по численному решению уравнений (4.29) с фрагментом таблицы результатов расчета и графиками переходного процесса в системе и фазовыми траекториями в двух проекциях приведена на рис. 4.7.

Программа составлена согласно методики, изложенной в § 4.4. Решение нелинейных дифференциальных уравнений (4.29) проведено путем обращения к функции **rkfixed**.

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad \sigma := 10 \qquad b := 2.67 \qquad r := 27 \qquad x := \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$F(t, x) := \begin{pmatrix} -\sigma \cdot x_1 + \sigma \cdot x_2 \\ r \cdot x_1 - x_2 - x_1 \cdot x_3 \\ x_1 \cdot x_2 - b \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{rkfixed}(x, 0, 20, 2001, F)$$

$X =$

	1	2	3	4
1	0	20	30	100
2	$9.995 \cdot 10^{-3}$	20.218	14.773	101.832
3	0.02	18.977	0.033	100.576
4	0.03	16.539	-12.723	96.794
5	0.04	13.253	-22.61	91.627

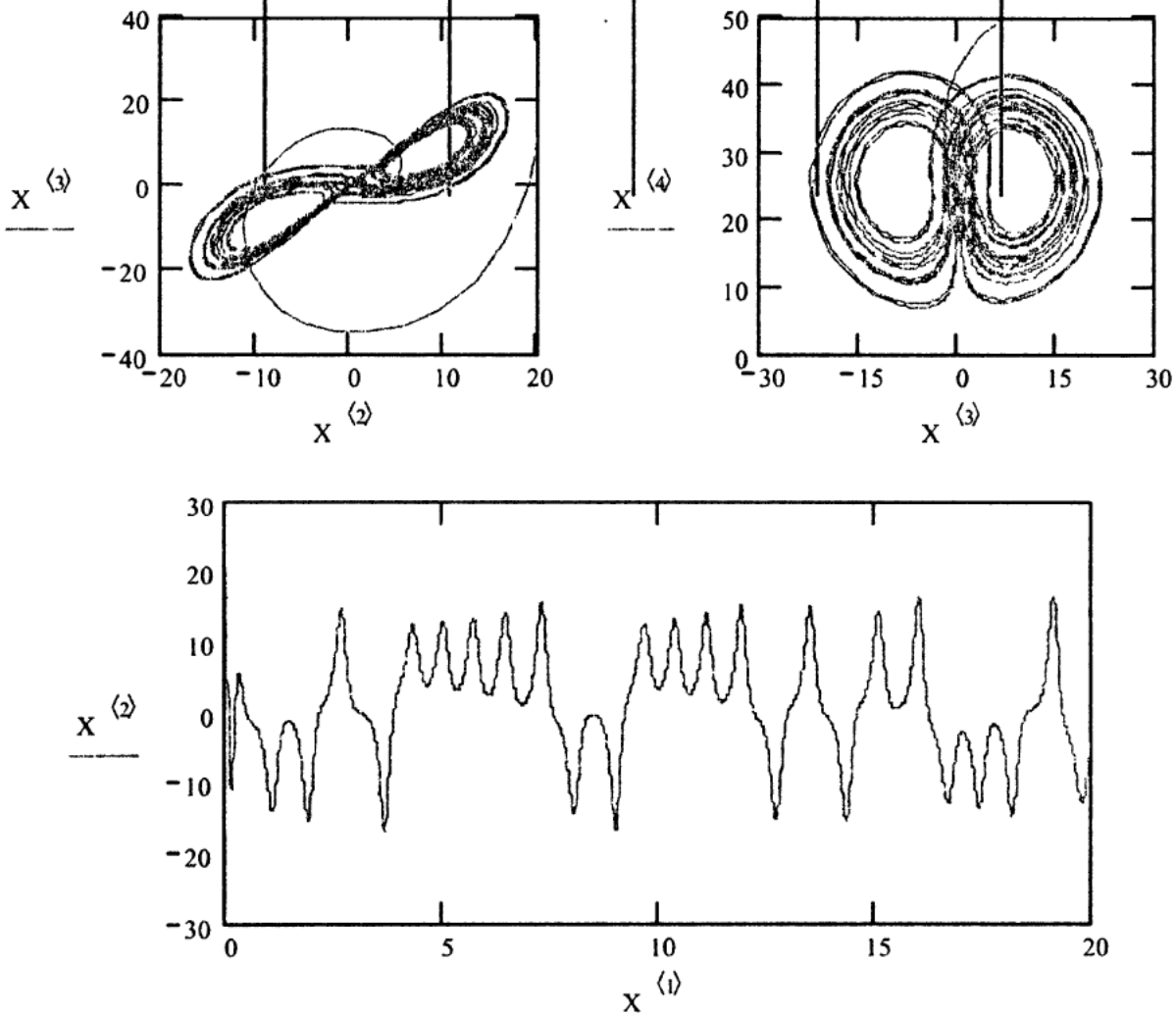


Рис. 4.7

В программе: X – матрица, содержащая значения решения уравнения.

$X^{\langle 1 \rangle}$ – столбец, содержащий координаты узлов времени t.

$X^{\langle 2 \rangle}$ – столбец, содержащий значения решения $x=x_1$ в узлах.

$X^{\langle 3 \rangle}$ – столбец, содержащий значения решения $y=x_2$ в узлах.

$X^{\langle 4 \rangle}$ – столбец, содержащий значения решения $z=x_3$ в узлах.

Исследование хаоса в фазовом пространстве приводит к понятию "странного аттрактора", представляющего собой математический образ стохастических колебаний. Остановимся подробнее на данной проблеме.

В теории колебаний аттрактором называется притягивающая область в фазовом пространстве. При странном аттракторе близкие фазовые траектории, не покидая некоторого пространства, внутри него расходятся экспоненциально, что и приводит к неустойчивым автоколебаниям. Причина возникновения хаотических колебаний, по виду напоминающие случайные колебания, состоит не в большом числе степеней свободы системы и не в наличии флуктуаций, а в экспоненциальной неустойчивости системы, в результате чего ее начальное состояние существенно влияет на характер протекающих процессов. В такой системе малая по своей величине причина вызывает значительные, непредсказуемые последствия. Для возникновения стохастических автоколебаний необходимо, чтобы в фазовом пространстве динамической системы все (или почти все) соседние траектории внутри некоторой области разбегались, оставаясь при этом однако внутри некоторого, пусть и большого, ограниченного фазового пространства. (В противном случае автоколебания будут неограниченно возрастать согласно уравнению (4.28) при $\alpha>0$.) Пример такой фазовой траектории в трехмерном фазовом пространстве показан на рис. 4.8. Фазовая точка, "раскручиваясь" по спирали (колебания медленно возрастают), резко затем уходит "вверх" вдоль оси z, "сваливаясь" затем к началу координат, после чего весь процесс повторяется, но с некоторой иной начальной точки. Поэтому следующая траектория оказывается отличной от первой, хотя она и лежит в некотором ограниченном фазовом пространстве. В результате колебания x(t) носят случайный характер.

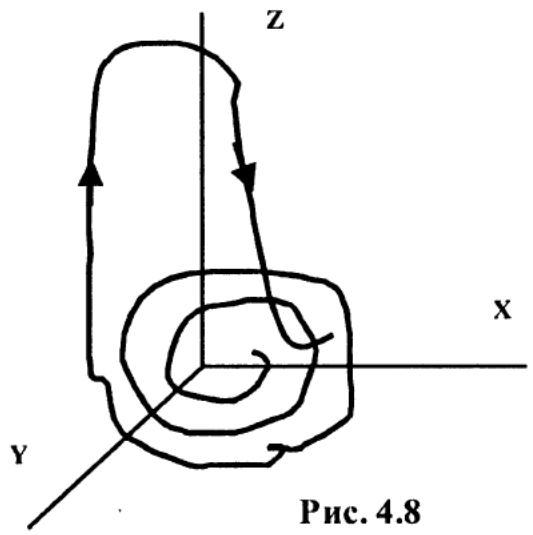


Рис. 4.8

Исследования по проблеме "хаоса" привели к открытию нерегулярных, стохастических колебаний в детерминированных динамических системах 3-го и более высокого порядка самой разнообразной природы– биологических, экономических, физических, механических [17, 42]. Теория хаоса помогает вскрыть механизм возникновения нерегулярных колебаний и в радиоэлектронных устройствах, в частности в автогенераторах и усилителях повышенной мощности.

4.6. Спектральный анализ неавтономного динамического устройства

Об одновременном усилении множества сигналов. В современных системах радиосвязи осуществляется множественный доступ к единому каналу радиосвязи. Поясним сказанное на конкретном примере сотовой радиосвязи [18]. В каждой соте одновременно могут выходить на радиосвязь К абонентов, каждый из которых имеет свою радиостанцию. Радиосигналы от абонентских радиостанций поступают на общую базовую радиостанцию, расположенную в центре соты, усиливаются и переизлучаются или по волоконно-оптичекой линии связи передаются на центральную станцию (рис. 4.9). Все принятые сообщения после соответствующей обработки перераспределяются центральной станцией по другим сотам в зависимости от того, с кем именно хотели связаться абоненты первой соты.

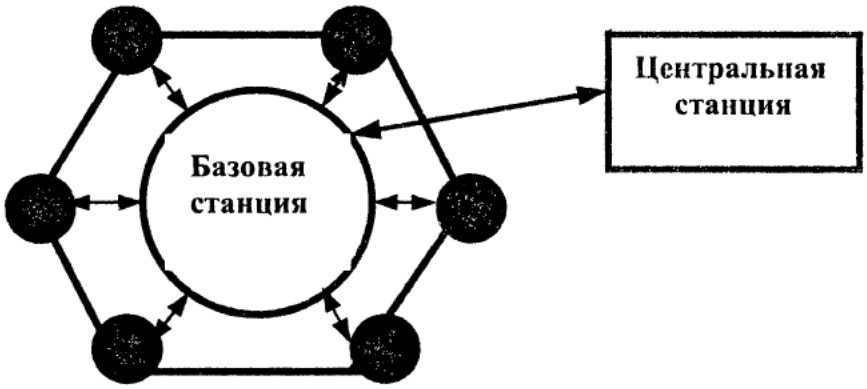


Рис. 4.9

При этом возможны три основных способа доступа абонентов общему каналу радиосвязи: **с частотным разделением**, при котором каждый абонент излучает сигнал на выделенной для него в данный момент частоте несущей; **с временным разделением** при излучении сигнала в строго фиксированные моменты времени; **с кодовым разделением** при индивидуальном кодировании сообщения от каждого абонента.

При такой схеме организации радиосвязи при частотном и кодовом способах в общем усилительном тракте базовой радиостанции одновременно усиливается множество высокочастотных сигналов. Поскольку тракт усиления высокочастотного сигнала по мощности является нелинейным устройством, то проходящие через него сигналы начинают взаимодействовать между собой, создавая взаимные помехи, уровень которых не должен превышать определенной величины.

Подобная же картина имеет место в космических системах дальней радиосвязи с частотным разделением при использовании на борту спутника ретранслятора "прозрачного" типа (см. гл. 14).

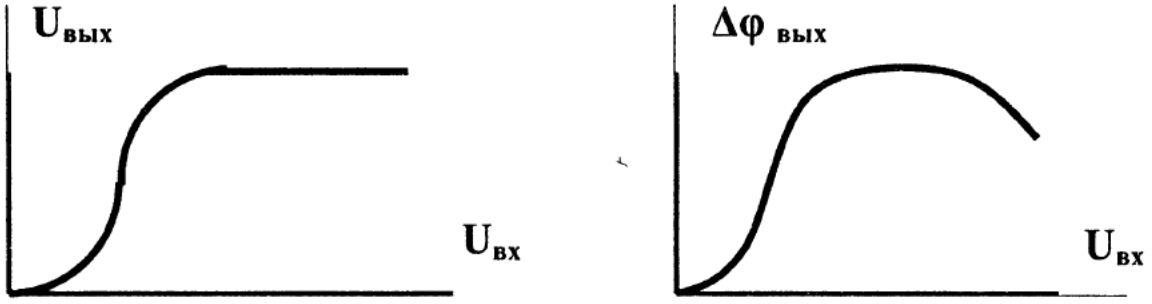
Высокочастотный усилительный тракт относится к классу нелиней-ных динамических неавтономных устройств (см. гл. 7). На его выходе и следует рассчитать спектр сигнала при многочастотном входном сигнале. Таким образом, помимо рассмотренного выше анализа нелинейного устройства во временной области большое практическое значение имеет также и спектральный анализ.

Квазистационарный метод расчета комбинационного спектра. Высокочастотный усилительный тракт содержит обычно большое количество каскадов, в большинстве случаев полупроводниковых, и разнообразных электрических цепей. В целом такой усилительный тракт относится к классу нелинейных динамических устройств, в котором происходят нелинейные искажения сигнала. Их причина обусловлена нелинейным характером процесса взаимодействия потока носителей заряда с электромагнитным полем во всех электронных приборах при усилении сигнала по мощности (см. гл. 7). Вся комбинация разнообразных нелинейных эффектов приводит к нелинейности амплитудной характеристики и зависимости фазы сигнала от амплитуды, называемой амплитудно-фазовой конверсией. Совокупность двух характеристик – амплитудной и фазоамплитудной в одночастотном режиме работы – позволяют комплексно оценить нелинейные свойства нелинейного динамического устройства, в том числе и высокочастотного усилителя сигнала по мощности.

Таким образом, способ анализа комбинационного спектра на выходе нелинейного динамического устройства должен исходить из определенных экспериментальных данных, позволяющих производить расчет при разном спектральном составе входного сигнала. Такой экспериментальной основой метода могут являться амплитудная и фазоамплитудная характеристики устройства в одночастотном режиме его работы, т. е. при $u_{BX}(t)=U_{BX}\cos\omega t$:

$$U_{Вых}=\psi(U_{BX}); \qquad \Delta\varphi_{ВЫХ}=\varphi_{ВЫХ}-\varphi_{BX}=\Phi(U_{BX}). \tag{4.30}$$

Пример таких характеристик приведен на рис. 4.10.



а) **Рис. 4.10** б)

Цель дальнейшего анализа состоит в том, чтобы при известных характеристиках одночастотного режима (4.30) нелинейной динамической системы определить выходной комбинационный спектр при заданном входном многочастотном сигнале. В качестве тестового ограничимся случаем двухчастотного сигнала, позволяющего получить комбинационный спектр выходного сигнала и дать количественную оценку нелинейным свойствам анализируемого устройства.

$$u_{BX}(t) = U_0 \sin(2\pi ft) + U_1 \sin[2\pi(f+F)t] = A(t)\sin[2\pi ft + \Theta(t)], \tag{4.31}$$

где A(t) – амплитуда; Θ(t) – фаза суммарного сигнала.

$$A(t) = U_0\sqrt{1 + p^2 + 2p\cos(2\pi Ft)}; \quad (4.32)$$

$$\Theta(t) = arctg\,\frac{p\sin(2\pi Ft)}{1+\cos(2\pi Ft)}, \quad (4.33)$$

где $p=U_0/U_1$ – отношение амплитуд сигналов.

При p=1 выражение (4.31) принимает вид:

$$u_{BX}(t) = 2U_0\sin[2\pi(f + 0{,}5F)t]\cos(\pi Ft).$$

Согласно (4.31)–(4.33) двухчастотный сигнал есть сигнал с амплитудной и фазовой модуляцией и поэтому он пригоден для анализа устройств с характеристиками типа рис. 4.10. Программа по расчету функций A(t) и Θ(t) двухчастотного сигнала приведена на рис. 4.11.

$$U0 := 1 \qquad f := 10 \qquad p := 0.5 \qquad F := 0.2$$

$$u(t) := U0\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t) + p\cdot U0\cdot\sin[2\cdot\pi\cdot(f+F)\cdot t]$$

$$s(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot F\cdot t) \qquad c(t) := \cos(2\cdot\pi\cdot F\cdot t)$$

$$A(t) := U0\cdot\sqrt{1 + p^2 + 2\cdot p\cdot c(t)}$$

$$\Theta(t) := \operatorname{atan}\left(p\cdot\frac{s(t)}{1+p\cdot c(t)}\right)$$

$$i := 1..1000 \qquad t_i := 0.01\cdot i$$

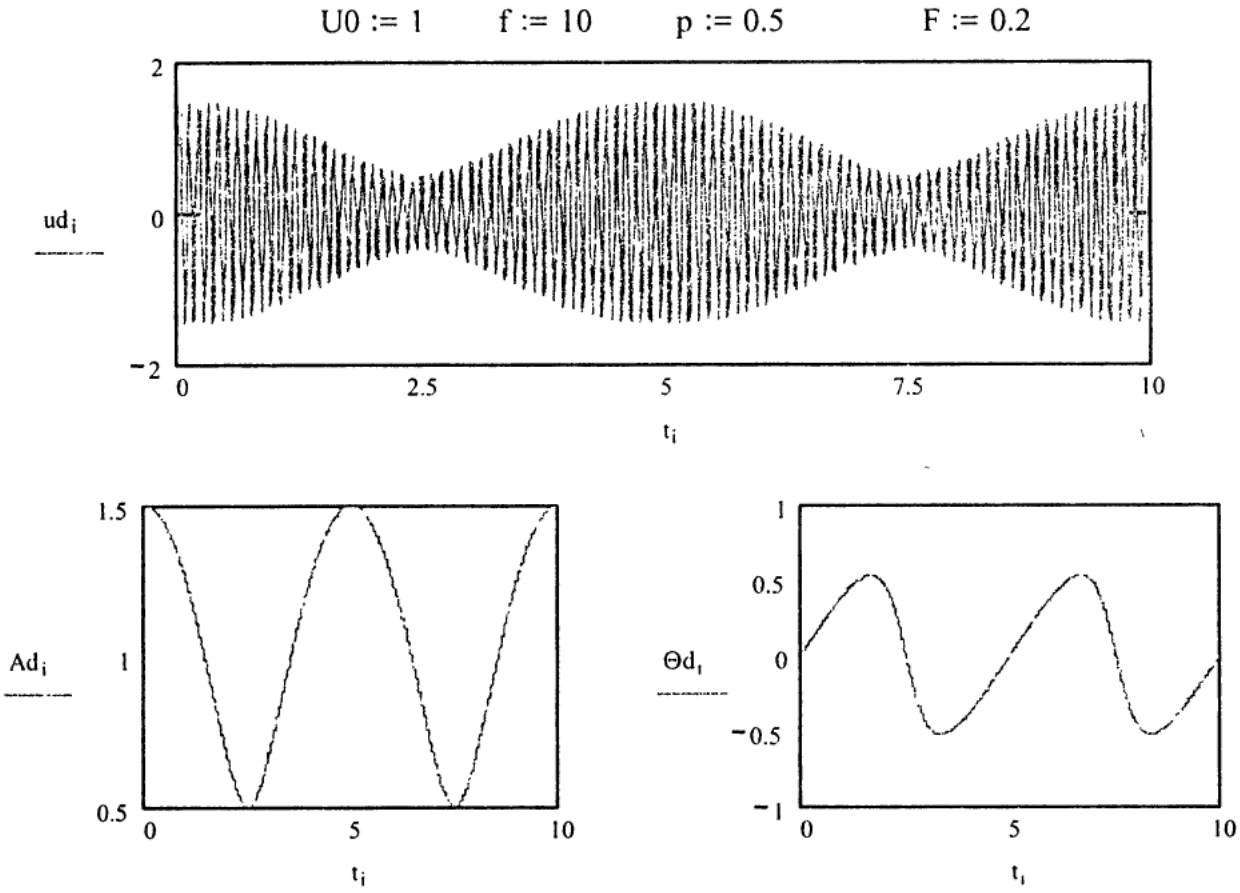
$$ud_i := u(t_i) \qquad sd_i := s(t_i) \qquad cd_i := c(t_i)$$

$$Ad_i := A(t_i) \qquad \Theta d_i := \Theta(t_i)$$

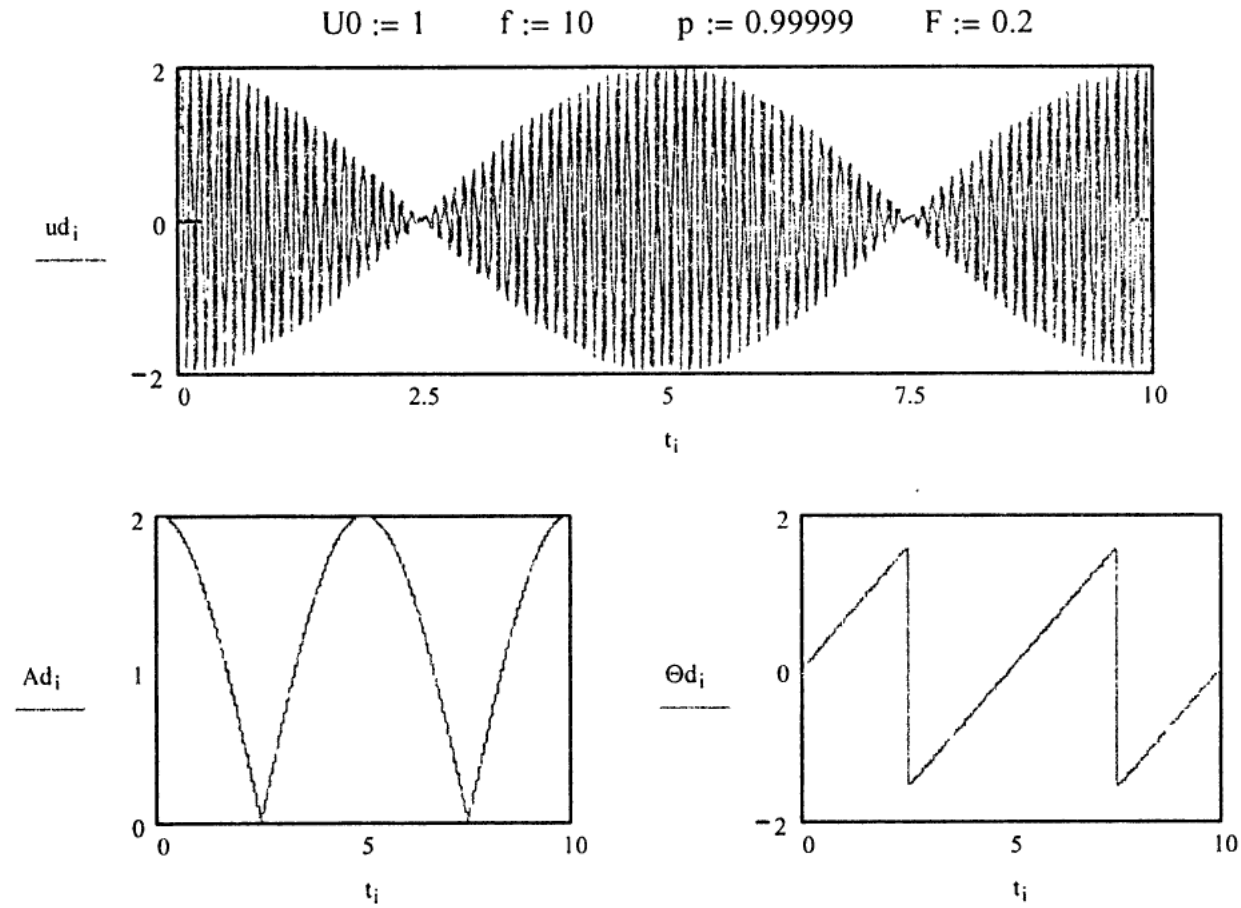
Рис. 4.11

Результаты расчета по программе в виде графиков для двух случаев: при p=0,5 и 1, приведены на рис. 4.12. Из них следует, что фаза суммарного колебания Θ(t) (в программе Θd) в течение одного периода колебаний с разностной частотой F меняет знак. При p=1 фаза меняется по пилообразному закону со скачком равным π, а глубина амплитудной модуляции составляет 100%.

Для расчета выходного комбинационного спектра применим квазистационарный метод [19], предполагающий относительно "медленное" изменение амплитуды и фазы суммарного сигнала по сравнению с частотой несущих колебаний, т. е. в рассматриваемом случае выполнение неравенства F<<f, что практически всегда соблюдается.


U0 := 1
f := 10
p := 0.5
F := 0.2
ud_i
Ad_i
Θd_i
t_i

а)


U0 := 1
f := 10
p := 0.99999
F := 0.2
ud_i
Ad_i
Θd_i
t_i

б)

Рис. 4.12

С учетом зависимостей (4.30) и (4.31) выходной сигнал:

$$u_{ВЫХ}(t) = U_{ВЫХ}(t)\sin[2\pi ft + \Theta(t) + \Delta\varphi_{ВЫХ}(t)] =$$
$$\Psi[A(t)]\sin[2\pi ft + \Theta(t) + \Phi(A(t))]. \quad (4.34)$$

Преобразуем (4.34) к виду:

$$u_{ВЫХ}(t) = C(y)\sin\omega t + D(y)\cos\omega t, \quad (4.35)$$

где $y = 2\pi Ft; \omega = 2\pi ft;$

$$C(y) = \Psi[A(y)]\cos[\Theta(y) + \Psi(A(y))]; \quad (4.36)$$

$$D(y) = \Psi[A(y)]\sin[\Theta(y) + \Psi(A(y))]. \quad (4.37)$$

Разложив периодические функцииC(y) и D(y) по разностной частоте $\Omega=2\pi F$, представим выходной сигнал в виде двух сумм бесконечного ряда:

$$u_{ВЫХ}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin[(\omega - n\Omega)t + \varphi_{An}] + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin[(\omega + n\Omega)t + \varphi_{Bn}] \quad (4.38)$$

Формулы по расчету амплитуд A_n, B_n и фаз φ_{An}, φ_{Bn} приведены в программе по расчету комбинационного спектра на выходе нелинейного устройства (рис .4.13).

Дадим необходимые пояснения к этой программе, состоящей из трех разделов. В рамках 1-го рздела в программу вводятся необходимые исходные данные по характеристикам усилителя и параметрам входного двухчастотного сигнала. Амплитудная $U_{ВЫХ}=\psi(U_{ВХ})$ и фазоамплитудная $\Delta\varphi_{ВЫХ}=\Phi(U_{ВХ})$ характеристики одночастотного режима, полученные экспериментальным путем, вводятся в табличной форме – матрица ХАР. В 1-м столбце этой матрицы записываются дискретные значения входного сигнала $U_{ВХ}$ (размерность – В), во 2-й – выходного сигнала $U_{ВЫХ}$, в третий – фазы $\Delta\varphi_{ВЫХ}$ в градусах. Значения амплитуды входного сигнала вводятся с помощью вектора ВХ, частота есть параметр F0, разностная частота – DF. Пример таких характеристик приведен в программе (рис. 4.13).

Далее производится аппроксимация функций $U_{ВЫХ}=\psi(U_{ВХ})$ и $\Delta\varphi_{ВЫХ}=\Phi(U_{ВХ})$, представленных в табличной форме, с помощью сплайн–интерполяции (операторы ***cspline*** и ***interp***). Графики характеристик строятся до и после аппроксимации.

Во втором разделе программы после произведенной интерполяции производится расчет выходного комбинационного спектра согласно (4.38). Комплексные коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам, представленным в программе.

Третий раздел включает результаты вычислений значений амплитуд и фаз требуемого числа комбинационных составляющих (по программе вычисляется по 7 составляющих А и В, но их число может быть увеличено). На рис. 4.14 представлено два варианта таких вычислений:

а) при $U_{ВХ1}=U_{ВХ2}=4$ и б) при $U_{ВХ1}=6$, $U_{ВХ2}=2$.

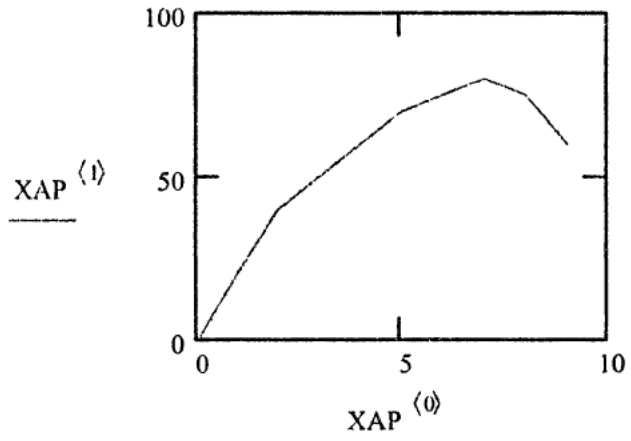
$$XAP := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & -10 \\ 2 & 40 & -40 \\ 3 & 50 & -70 \\ 4 & 60 & -90 \\ 5 & 70 & -100 \\ 6 & 75 & -80 \\ 7 & 80 & -60 \\ 8 & 75 & -55 \\ 9 & 60 & -50 \end{pmatrix}$$

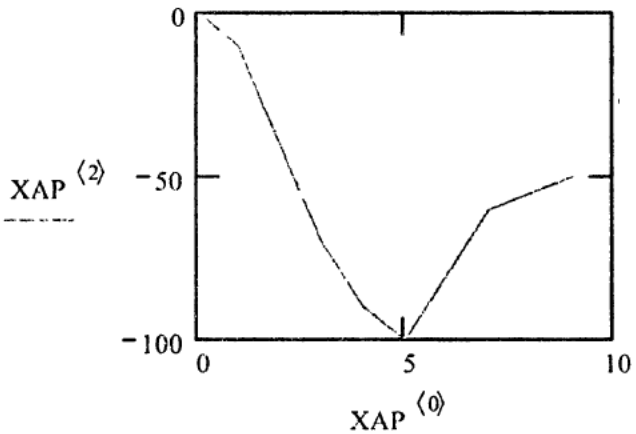
$$BX := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$F0 := 100$

$A := BX^{\langle 0 \rangle}$

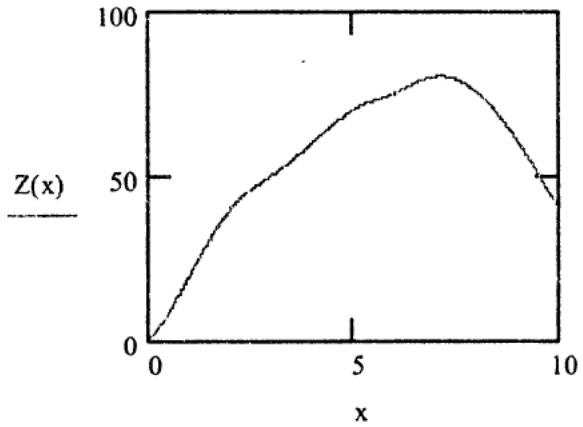
$DF := 2$

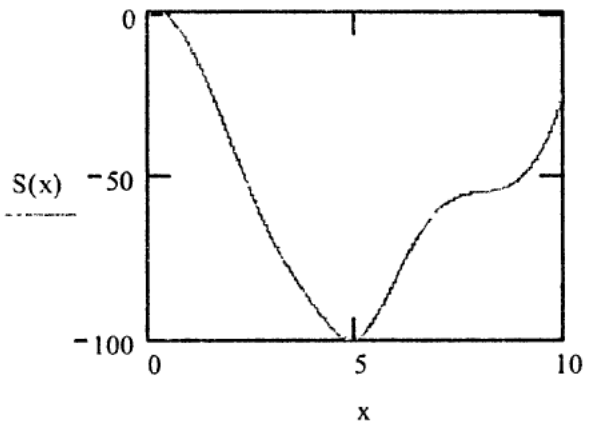




$X := XAP^{\langle 0 \rangle}$ $U := XAP^{\langle 1 \rangle}$ $R := cspline(X, U)$ $Z(x) := interp(R, X, U, x)$

$G := XAP^{\langle 2 \rangle}$ $W := cspline(X, G)$ $S(x) := interp(W, X, G, x)$





$$QS(y) := A_1 \cdot \sin(y) \qquad QC(y) := A_0 + A_1 \cdot \cos(y)$$

$$QA(y) := \sqrt{QS(y)^2 + QC(y)^2} \qquad QB(y) := \frac{QS(y)}{QC(y)} \qquad FB(y) := \operatorname{atan}(QB(y))$$

$$FBS(y) := FB(y) + S(QA(y)) \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$C(y) := Z(QA(y)) \cdot \cos(FBS(y)) \qquad D(y) := Z(QA(y)) \cdot \sin(FBS(y))$$

$$N := 6 \qquad k := 0..\,N$$

$$R1_k := \int_0^{2\cdot\pi} C(y) \cdot \cos(k \cdot y)\, dy \qquad R2_k := \int_0^{2\cdot\pi} C(y) \cdot \sin(k \cdot y)\, dy$$

$$R3_k := \int_0^{2\cdot\pi} D(y) \cdot \cos(k \cdot y)\, dy \qquad R4_k := \int_0^{2\cdot\pi} D(y) \cdot \sin(k \cdot y)\, dy$$

$$S1_k := R1_k - R4_k \qquad S2_k := R2_k + R3_k$$

$$S3_k := R1_k + R4_k \qquad S4_k := -R2_k + R3_k$$

$$AN_k := \left(\frac{1}{2 \cdot \pi}\right) \cdot \sqrt{(S1_k)^2 + (S2_k)^2} \qquad FNA_k := \frac{180}{\pi} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{S2_k}{S1_k}\right)$$

$$BN_k := \left(\frac{1}{2 \cdot \pi}\right) \cdot \sqrt{(S3_k)^2 + (S4_k)^2} \qquad FNB_k := \frac{180}{\pi} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{S4_k}{S3_k}\right)$$

$$FA_k := F0 - k \cdot DF \qquad AND_k := 20 \cdot \log\left(\frac{AN_k}{AN_0}\right)$$

$$FB_k := F0 + k \cdot DF \qquad BND_k := 20 \cdot \log\left(\frac{BN_k}{BN_0}\right)$$

Рис. 4.13

$$FA = \begin{pmatrix} 100 \\ 98 \\ 96 \\ 94 \\ 92 \\ 90 \\ 88 \end{pmatrix} \quad AND = \begin{pmatrix} 0 \\ -12.306 \\ -19.87 \\ -13.952 \\ -24.238 \\ -29.167 \\ -31.699 \end{pmatrix} \quad AN = \begin{pmatrix} 43.904 \\ 10.646 \\ 4.456 \\ 8.809 \\ 2.695 \\ 1.528 \\ 1.142 \end{pmatrix} \quad FNA = \begin{pmatrix} -66.472 \\ 58.773 \\ 21.07 \\ 11.812 \\ 25.19 \\ -49.972 \\ -71.952 \end{pmatrix}$$

$$FB = \begin{pmatrix} 100 \\ 102 \\ 104 \\ 106 \\ 108 \\ 110 \\ 112 \end{pmatrix} \quad BND = \begin{pmatrix} 0 \\ 9.295 \times 10^{-6} \\ -12.306 \\ -19.87 \\ -13.952 \\ -24.238 \\ -29.167 \end{pmatrix} \quad BN = \begin{pmatrix} 43.904 \\ 43.904 \\ 10.646 \\ 4.456 \\ 8.809 \\ 2.695 \\ 1.528 \end{pmatrix} \quad FNB = \begin{pmatrix} -66.472 \\ -66.472 \\ 58.774 \\ 21.07 \\ 11.812 \\ 25.19 \\ -49.972 \end{pmatrix}$$

а) а при $U_{BX1}=U_{BX2}=4$

$$FA = \begin{pmatrix} 100 \\ 98 \\ 96 \\ 94 \\ 92 \\ 90 \\ 88 \end{pmatrix} \quad AND = \begin{pmatrix} 0 \\ -12.103 \\ -27.486 \\ -24.571 \\ -29.253 \\ -47.504 \\ -47.683 \end{pmatrix} \quad AN = \begin{pmatrix} 67.432 \\ 16.739 \\ 2.848 \\ 3.984 \\ 2.324 \\ 0.284 \\ 0.278 \end{pmatrix} \quad FNA = \begin{pmatrix} -73.649 \\ 42.843 \\ -4.073 \\ 6.692 \\ -2.913 \\ -42.277 \\ -1.236 \end{pmatrix}$$

$$FB = \begin{pmatrix} 100 \\ 102 \\ 104 \\ 106 \\ 108 \\ 110 \\ 112 \end{pmatrix} \quad BND = \begin{pmatrix} 0 \\ -10.108 \\ -22.498 \\ -22.309 \\ -38.175 \\ -39.626 \\ -44.53 \end{pmatrix} \quad BN = \begin{pmatrix} 67.432 \\ 21.061 \\ 5.058 \\ 5.169 \\ 0.832 \\ 0.704 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad FNB = \begin{pmatrix} -73.649 \\ -33.26 \\ 54.035 \\ 3.242 \\ -22.136 \\ 9.977 \\ -12.945 \end{pmatrix}$$

б) при $U_{BX1}=6$, $U_{BX2}=2$

Рис. 4.14

В итоговых таблицах на рис. 4.14 приняты следующие обозначения:

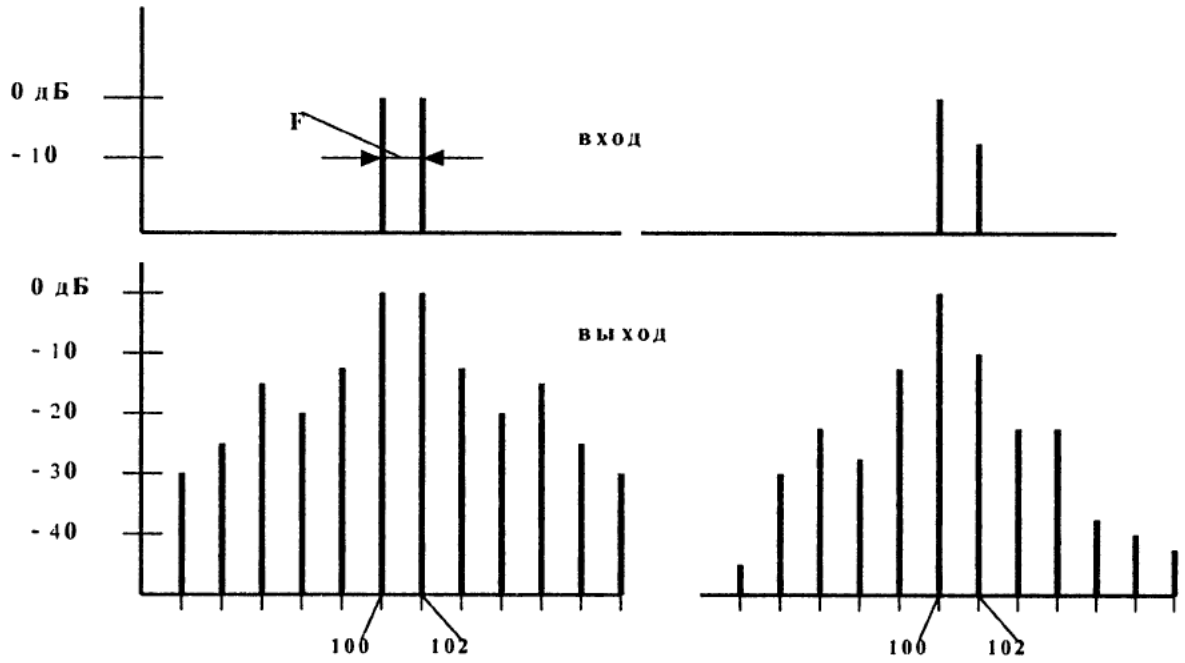
FA, FB – значения частот комбинационного спектра, частота FA_0=FB_0=F0, размерность всех частот одинакова, например, МГц.

AN, BN – значения амплитуд спектральных составляющих, В.

AND, BND – значения амплитуд тех же спектральных составляющих в дБ относительно амплитуды сигнала с частотой F0.

FNA, FNB – значения фаз тех же спектральных составляющих, в градусах.

По результатам вычислений на рис. 4.15 построены амплитудные составляющие комбинационного спектра, следующие через интервал с разностной частотой DF.



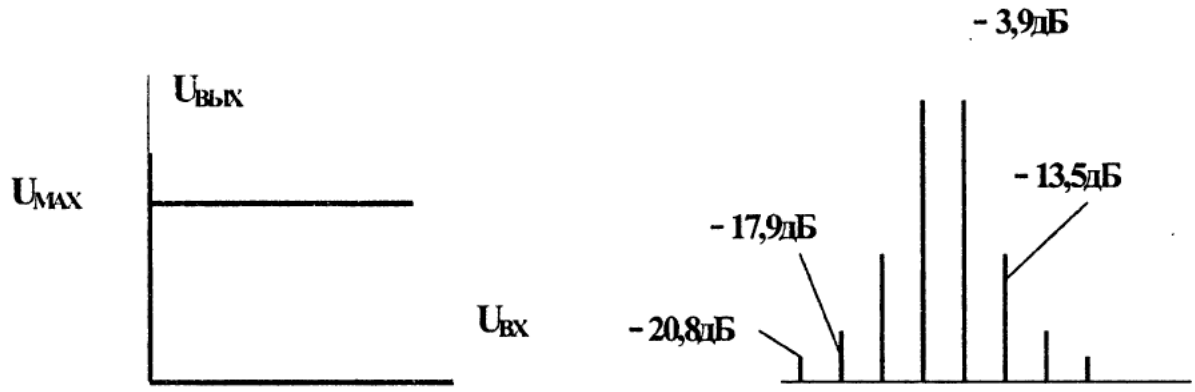
а) при U_{BX1}=U_{BX2}=4 **б)**при U_{BX1}=6, U_{BX2}=2

Рис. 4.15

Проведенные вычисления позволяют сделать следующие общие выводы:

- при равных амплитудах входного сигнала спектр выходного сигнала симметричен (рис. 4.15);
- при неравных входных сигналах в усилительном тракте происходит дополнительное подавление "слабого" сигнала "сильным";
- при переходе от равных по амплитуде входных сигналов к неравным происходят существенные изменения и в фазовом спектре выходного сигнала (см. рис. 4.14), причем эти изменения касаются обоих сигналов;
- чем меньше размах фазоамплитудной характеристики, т. е. чем меньше амплитудно-фазовая конверсия, тем меньшие изменения претерпевает фазовый спектр;
- для уменьшения взаимных помех сигналов, проходящих в общем высокочастотном тракте, следует добиваться не только улучшения линейности его амплитудной характеристики, но и возможного снижения амплитудно-фазовой конверсии.

Рассмотрим второй пример, связанный с идеальным амплитудным ограничителем с характеристикой $U_{ВЫХ}=U_{MAX}$ (рис. 4.16,а), при отсутствии амплитудно-фазовой конверсии. При двух равных по амплитуде входных сигналах результаты расчета по программе (рис. 14.4) в виде спектрограммы выходного сигнала приведены на рис. 4.16,б. За нулевой уровень отсчета в децибелах принята амплитуда сигнала U_{MAX}.



а) **Рис. 4.16** б)

Согласно спектрограмме на рис. 4.16,б ближайшие к основным частотам спектральные составляющие подавлены на 9,6 дБ, что совпадает с известным результатом.

Итак, согласно проведенному анализу и примерам расчета следует, что многочастотные сигналы могут претерпевать значительные искажения при их усилении в высокочастотных трактах. Для устранения или сведения к минимуму этого нежелательного явления необходимо линеаризировать тракты усиления. В высокочастотных усилительных трактах радиоприемных устройств следует обеспечить линейность амплитудной характеристики и постоянство фазоамплитудной характеристики при изменении амплитуды входного сигнала в пределах не менее 70–80 дБ. Данное требование связано с тем, что именно на такую величину могут отличаться мощности сигналы от различных радиопередатчиков, одновременно приходящих на вход радиоприемника в системах с кодовым и с частотным разделением сигналов. Выполнение данного требования обеспечивается путем правильного выбора – с большим динамическим диапазоном усиления – транзисторов и микросхем в высокочастотном усилительном тракте и применении автоматической регулировки усиления (АРУ).

В радиопередающих устройствах линеаризация тракта усиления осуществляется путем применения специальных схем и режимов мощных высокочастотных каскадов, введения в тракт амплитудного и фазового корректоров и использования схем автоматического регулирования [19]. Применение корректора, вводимого в тракт усиления, основано на компенсации нелинейных свойств одного устройства другим. Иначе говоря, одну нелинейность можно исправить с помощью другой, внеся предыскажения в усиливаемый сигнал. В результате амплитудную характеристику объединенного устройства «корректор-усилитель» удается приблизить к линейной и добиться независимости фазы сигнала от амплитуды. Эффект от

введения в тракт усиления корректора можно оценить по уменьшению комбинационных составляющих в спектре выходного сигнала.

Схема уменьшения нелинейных искажений сигнала, связанных с нелинейностью амплитудной характеристики усилителя мощности высокочастотных (ВЧ) колебаний, с помощью системы автоматического регулирования приведена на рис. 4.17. В этой схеме сравниваются огибающие двух сигналов: входного $U_{ВХ}(t)$ (неискаженного) и выходного $U_{ВЫХ}(t)$ (искаженного). В качестве звена сравнения может использоваться операционный усилитель.

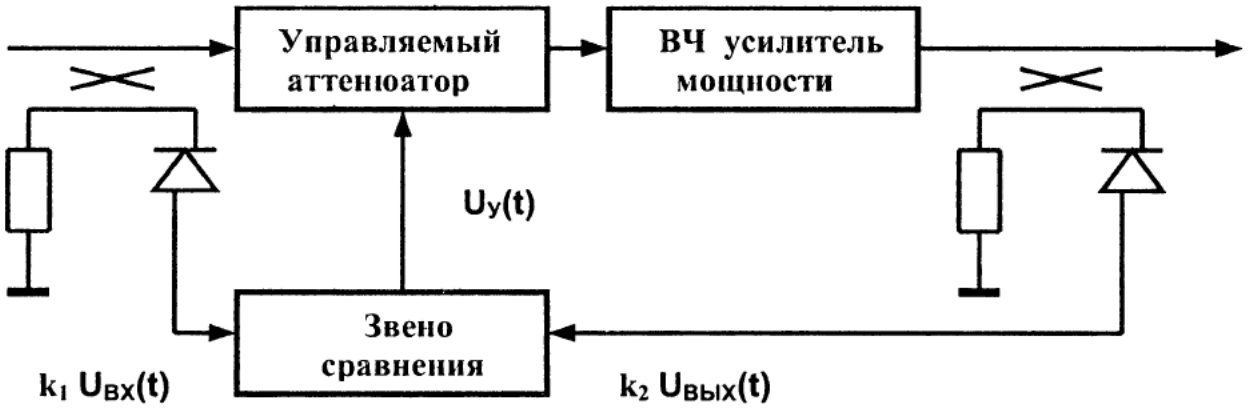


Рис. 4.17

На два входа звена сравнения сигналы поступают с линейных амплитудных детекторов, подключенных к направленным ответвителям. С помощью последних отбирается небольшая часть мощности входного и выходного ВЧ сигнала. В результате сравнения двух сигналов на выходе операционного усилителя вырабатывается сигнал ошибки $U_У(t)$, поступающий на управляемый аттенюатор, автоматически изменяющий амплитуду ВЧ сигнала на входе усилителя. Характеристика аттенюатора, приведена рис. 4.18.

Проведем дальнейший анализ работы схемы без учета ее инерционных свойств. Работа отдельных звеньев схемы описывается следующей системой уравнений:

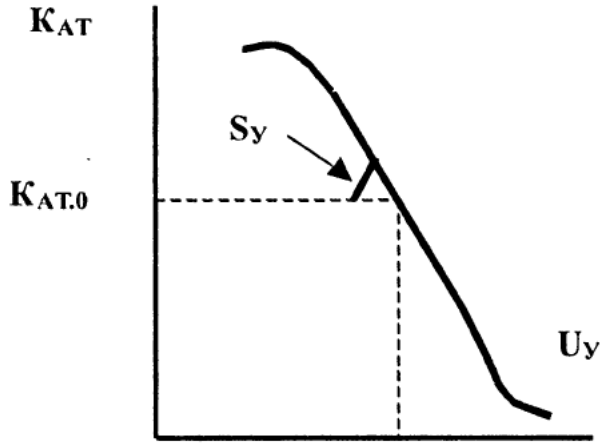


Рис. 4.18

$$U_У(t)=k_2U_{ВЫХ}(t)-k_1U_{ВХ}(t),$$
$$U_{ВЫХ}(t)=K_{ОБЩ}U_{ВХ}(t),$$
$$K_{ОБЩ}=K_{АТ}K_{УС}(U_{ВХ}),$$
$$K_{АТ}=K_{АТ0}-S_У\,U_У,$$

где $K_{УС}(U_{ВХ})$ – коэффициент усиления ВЧ усилителя при разомкнутой системе автоматического регулирования, значения всех остальных параметров ясны из рассмотрения рис. 4.17, 4.18.

В результате совместного решения данной системы уравнений получим для коэффициента усиления при замкнутой системе автоматического регулирования:

$$K_{УС.З} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{ВХ}} = \frac{K_{АТ.0}K_{УС}(U_{ВХ}) + k_1 S_У K_{УС}(U_{ВХ})U_{ВХ}}{1 + k_2 S_У K_{УС}(U_{ВХ})U_{ВХ}}. \qquad (4.39)$$

Из (4.39) следует, что при малой амплитуде входного сигнала $U_{ВХ}(t)$ влияние обратной связи на работу усилителя незначительно и общий коэффициент усиления $K_{ОБЩ}=K_{АТ}K_{УС}(U_{ВХ})$. Здесь, однако, и не требуется действие системы автоматического регулирования, поскольку при малом сигнале ВЧ-усилитель можно считать линейным. При возрастании амплитуды $U_{ВХ}(t)$ влияние обратной связи становится все более ощутимым и при $k_1S_У >> K_{АТ0}$, $k_2S_У >> 1$ и достижении $U_{ВХ}(t)$ определенного значения величина $K_{УСЗ}=k_1/k_2$, т. е. полностью определяется параметрами цепи обратной связи.

Таким образом, благодаря действию системы автоматического регулирования при правильном выборе ее параметров можно свести к минимуму нелинейные искажения сигнала в ВЧ усилителе по причине нелинейности его амплитудной характеристики. В схеме рис. 4.17 необходимые предискажения во входной сигнал, компенсирующие искажения сигнала в ВЧ усилителе, вносятся в автоматическом режиме. В результате огибающая выходного сигнала $U_{ВЫХ}(t)$ с высокой точностью повторяет закон изменения огибающей входного сигнала $U_{ВХ}(t)$.

Для нормального функционирования схемы автоматического регулирования необходимо обеспечить требуемое быстродействие, которое можно трактовать как время переходного процесса в замкнутой системе– $T_{ПЕР}$. В первом приближении это время должно быть на порядок меньше чем среднее время изменения огибающей или $T_{ПЕР}<0,1/F$, где F – верхняя частота в спектре огибающей ВЧ сигнала.

В заключение отметим, что доступ в общий канал радиосвязи, при котором каждый абонент излучает сигнал на выделенной для него в данный момент частоте несущей, все шире применяется как в наземных сотовых, так и спутнико-космических радиотехнических системах. Здесь, в отличие от систем с временным разделением сигналов (см. гл. 14, 15), не требуется общая синхронизация в работе радиостанций всех абонентов, что создает ощутимые преимущества для надежного функционирования всей системы в целом.

Еще раз подчеркнем, что обязательным условием реализации доступа в общий канал радиосвязи при частотном разделении сигналов является необходимость линеаризации ВЧ и СВЧ усилителей мощности. Поэтому рассмотренные в настоящей главе проблемы имеют большое прикладное значение.

Глава 5. ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

5.1. Назначение и классификация автогенераторов

Назначение автогенератора состоит в генерации высокочастотных (ВЧ) или сверхвысокочастотных (СВЧ) колебаний. В автогенераторе происходит преобразование энергии источника постоянного тока в энергию ВЧ или СВЧ колебаний. Автогенератор является каскадом, обязательно входящим в радиопередающее и радиоприемное устройства.

Классификация автогенераторов возможна по нескольким признакам.

В зависимости от диапазона частот они делятся на две большие группы: высокочастотные и сверхвысокочастотные. Различительным признаком здесь может являться даже не само значение частоты генерируемых колебаний, а тип используемых электрических цепей. В ВЧ генераторах таковыми являются цепи с сосредоточенными постоянными, в СВЧ – с распределенными параметрами, т. е. фидерные линии или волноводы.

Возможны следующие **способы стабилизации частоты** автоколебаний:

- параметрическая с использованием обычных колебательных систем;
- кварцевая с использованием в качестве резонатора кристалла кварца;
- с диэлектрическим резонатором (только в СВЧ диапазоне);
- молекулярная за счет индуцированного возбуждения атомов, находящихся на высоком энергетическом уровне.

Молекулярные генераторы, работающие в диапазоне более 10 ГГц, используются, в основном, как эталоны частоты.

По типу электронного прибора и схеме различают два основных типа автогенераторов:

- с применением транзистора или электровакуумного прибора и использования принципа положительной обратной связи;
- с применением генераторного СВЧ диода (туннельного, лавинно-пролетного или диода Ганна) – двухполюсника с отрицательной активной проводимостью.

По **взаимодействию с другими звеньями** аппаратуры различают автогенераторы:

- действующие в автономном режиме;
- в режиме синхронизации частоты внешним сигналом;
- в составе схемы автоматической подстройки частоты.

По **использованию в составе радиотехнического устройства** возможно такое разделение автогенераторов:

- опорные или эталонные, с повышенной стабильностью частоты, синхронизирующие работу всех звеньев и каскадов устройства;
- диапазонные, перестраиваемые по частоте, в том числе и в составе синтезатора частот.

Следующие основные параметры характеризуют работу автогенератора: диапазон частот или значение фиксированной частоты, мощность автоколебаний в нагрузке, нестабильность частоты – долговременная и кратковременная.

5.2. Основное уравнение автогенератора

Возможны два основных принципа построения автогенератора с колебательной системой.

В автогенераторе 1-го типа используется электронный прибор, представляемый в виде нелинейного генератора тока $\mathbf{i(u_y)}$, где $\mathbf{u_y}$ – управляющее напряжение (рис. 5.1,а). За счет цепи обратной связи часть мощности сигнала из колебательной системы поступает на вход электронного прибора. После усиления поступившие колебания возвращаются в колебательную систему, компенсируя потери и поддерживая устойчивый режим автоколебаний. При этом необходимо соблюдение условия синхронизма, состоящее в равенстве фаз колебаний отобранных из колебательной системы и вновь туда поступивших. Для управляющего напряжения при этом запишем:

$$u_y = k * u, \qquad (5.1)$$

где u – напряжение на колебательной системе; k – коэффициент положительной обратной связи.

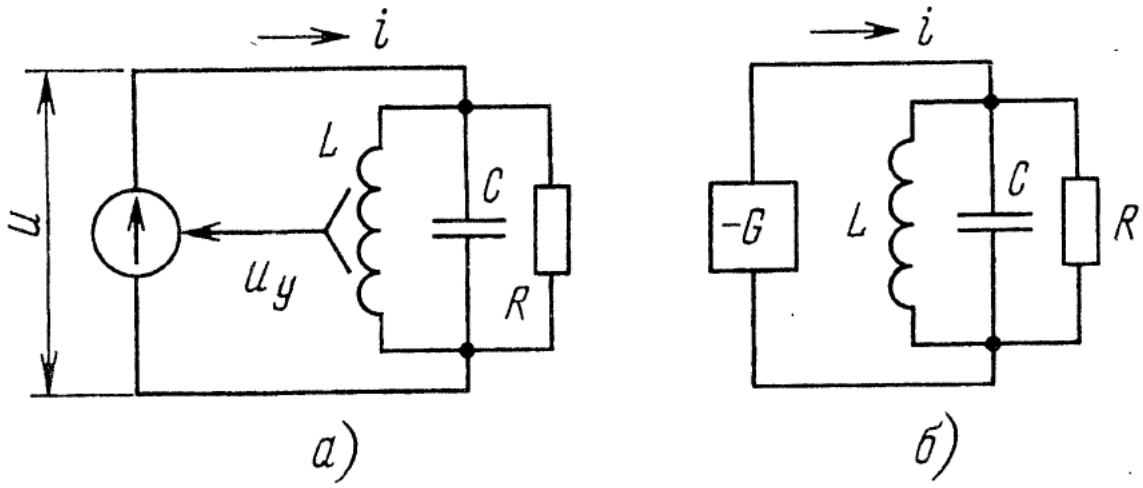


Рис. 5.1

Основой 2-го типа автогенератора являются специальные генераторные диоды, в эквивалентной схеме которых имеется отрицательная активная проводимость (Например, по причине падающего участка в вольтамперной характеристике или запаздывания сигнала в приборе). Такой прибор при подключении к колебательной системе компенсирует в ней потери, благодаря чему поддерживается устойчивый режим автоколебаний. Эквивалентная схема 2-го типа автогенератора приведена на рис. 5.1,б.

Составим обобщенное дифференциальное уравнение, описывающее работу обеих схем автогенератора при представлении колебательной системы в виде параллельного контура.

Для тока в общей цепи контура запишем (рис. 5.1):

$$\Psi(u) = C\frac{du}{dt} + \frac{1}{R}u + \frac{1}{L}\int_0^t u dt, \qquad (5.2)$$

где ψ(u) – вольт-амперная характеристика электронного прибора, т. е. нелинейная зависимость его тока от напряжения.

После дифференцирования (5.2) получим:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{RC} - \frac{d\psi(u)}{du}\right)\frac{du}{d\tau} + u = 0, \qquad (5.3)$$

$$где..\tau = \omega t,..\omega = 1/\sqrt{LC} -$$

частота, близкая к частоте автоколебаний.

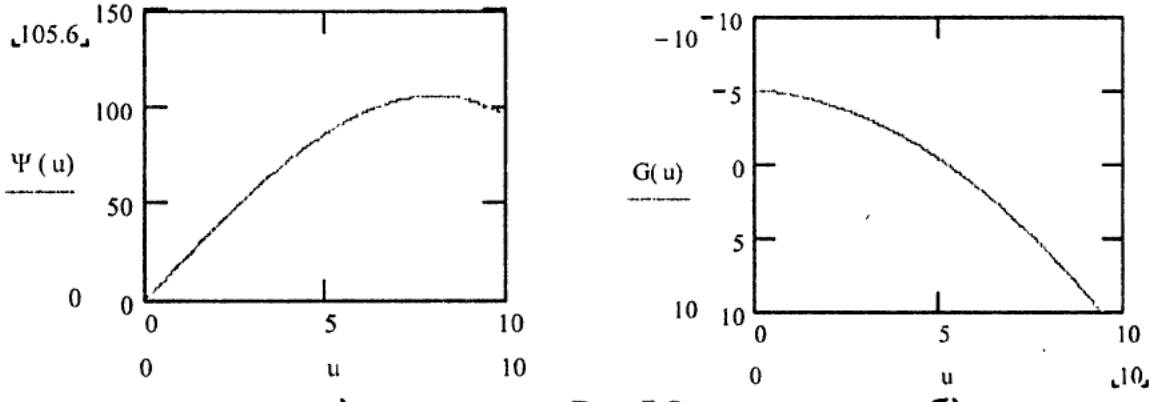
Для 1-й схемы ψ(u)=i(uу), для 2-й – ψ(u)=i(u). Под производной функции во 2-й схеме следует понимать нелинейную проводимость двухполюсника.

Для обеих эквивалентных схем автогенератора функцию ψ(u) можно представить в виде суммы членов степенного ряда n-го порядка. Для определенности примем n=3 и с учетом (5.1) запишем для функции и ее производной:

$$\Psi(u) = a_0 + a_1 ku - a_2 k^2 u^2 - a_3 k^3 u;^3 \qquad (5.4)$$

$$\frac{d\Psi(u)}{du} = a_1 k - 2a_2 k^2 u - 3a_3 k^3 u^2. \qquad (5.5)$$

Пример графика функции (5.4) при a_0=0 a_1=20 a_2=0,05 a_3=0,1 приведен на рис .5.2,а.



а) **Рис.5.2** б)

Наличие в графике участка насыщения, определяемого нелинейными членами, предотвращает неограниченное возрастание амплитуды автоколебаний, что в реальных схемах приводило бы к пробою **p–n** перехода полупроводникового прибора и выходу его из строя.

Подставив (5.5) в уравнение (5.3), после простых преобразований получим обобщенное дифференциальное уравнение, описывающее работу обеих схем автогенератора:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \mu(1 - bu - gu^2)\frac{du}{d\tau} + u = 0, \qquad (5.6)$$

где для 1-й схемы (рис.5.1,б) имеем:

$$b = 2a_2\rho k^2/\mu \ , \quad g = 3a_3\rho k^3/\mu \ ,$$

$$\mu = \rho a_1 k - (1/Q) \ , \quad \rho = 1/\omega C \ , \quad Q = R/\rho \ ,$$

ρ – волновое сопротивление контура; Q – его добротность;

k – коэффициент обратной связи.

Определим коэффициенты, входящие в (5.6) для 2-й схемы. Поскольку ψ(u) есть нелинейная зависимость тока от напряжения, то ее производная есть нелинейная проводимость двухполюсника, которую можно представить в виде:

$$G(u) = -G_0 + 2a_2u + 3a_3u^2, \qquad (5.7)$$

где G_0 – отрицательная активная проводимость эквивалентной схемы генераторного диода, подключенного параллельно контуру.

Пример графика функции (5.7) при G_0=5, a_2=0,1, a_3=0,05 приведен на рис. 5.2,б. С повышением амплитуды колебаний модуль отрицательной проводимости двухполюсника уменьшается, что предотвращает неограниченное возрастание амплитуды колебаний.

С учетом (5.7) для коэффициентов уравнения (3.6) в случае 2-й схемы (рис. 5.1,б) имеем:

$$b = 2a_2\rho/\mu, \quad g = 3a_3\rho/\mu, \quad \mu = \rho|G_0| - (1/Q).$$

Для генерации колебаний необходимо иметь μ≥0, т. е. отрицательная проводимость по модулю должна превышать проводимость активных потерь в колебательной системе. Как и ранее, ограничение амплитуды колебаний определяют нелинейные члены проводимости G(u).

Таким образом, двухполюсник с отрицательной активной проводимостью и электронный прибор – четырехполюсник с цепью положительной обратной связи суть эквивалентные понятия, приводящие к одинаковому результату – возможности возникновения и существования автоколебаний. Эта общность схем основана на том, что в обоих случаях происходит восполнение энергии, теряемой в колебательной системе, за счет внешнего дополнительного источника.

На основании полученного нелинейного дифференциального уравнения автогенератора составим с помощью математического пакета "Mathcad" программу, позволяющую исследовать работу автогенератора в широком диапазоне изменения его параметров: определять условия воз-

возникновения автоколебаний, их устойчивость в установившемся режиме работу, частоту и амплитуду автоколебаний, время переходного процесса.

Заметим, что аналитическое исследование уравнения вида (5.6), называемое уравнением Ван-дер-Поля, возможно только при малом значении параметра μ (поэтому μ называют "малым" параметром) с помощью метода медленно меняющихся амплитуд [12]. Компьютерный метод анализа в среде "Mathcad" позволяет снять данное ограничение и исследовать разнообразные режимы работы автогенератора.

В составленной программе (рис. 5.3) решение нелинейного дифференциального уравнения (5.6) проводится с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка путем обращения к функции **rkfixed** (см. приложение 2).

Само дифференциальное уравнение 2-го порядка (5.6) записано в программе в виде двух уравнений 1-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= y_2; \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= \mu(1 - by_1 - gy_1^2)y_2 - y_1, \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

где $y_1 = u$, $y_2 = \dfrac{du}{d\tau}$ – функция и ее производная.

В программе, приведенной на рис. 5.3 с фрагментом результатов расчета, приняты следующие обозначения для нормированного времени или фазы колебаний $\tau=\omega t$, функции и ее производной:

$$Z^{\langle 1\rangle} = \tau, \quad Z^{\langle 2\rangle} = u, \quad Z^{\langle 3\rangle} = \frac{du}{d\tau}.$$

Результаты расчета по программе в виде графика переходного процесса $u(\tau)$ и фазовых траекторий для пяти случаев приведены на рис. 5.4–5.6. Исходные данные и полученные в результате расчета значения амплитуды сигнала в установившемся режиме работы приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Номер	Рисунок	μ	b	g	Амплитуда
1	5.4, верхний	0,1	1	0,1	6
2	5.4, нижний	0,1	1	1	2
3	5.5, верхний	1	1	0,1	15
4	5.5, нижний	1	1	1	2
5	5.6	0,1	1	0	∞

$$\text{ORIGIN}:=1 \qquad \mu := 0.1 \qquad b := 1 \qquad g := 0.1 \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$F(t,y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ \mu \cdot \left[1 - b \cdot y_1 - g \cdot (y_1)^2 \right] \cdot y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

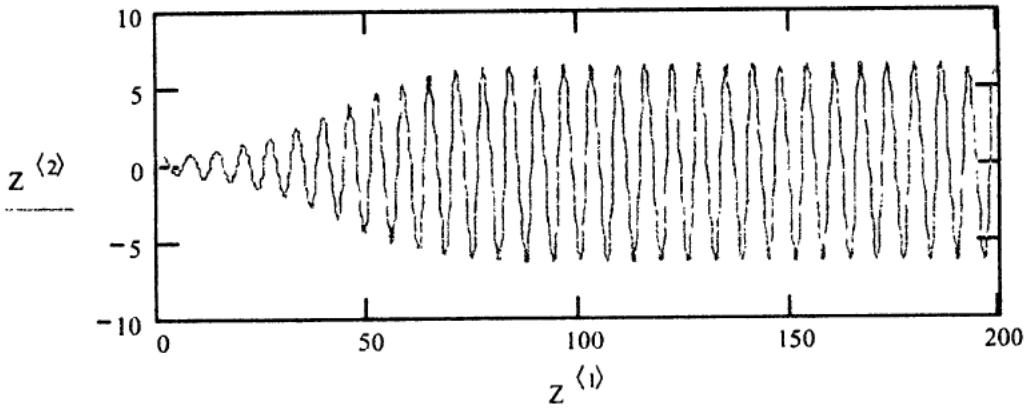
$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 200, 1001, F)$$

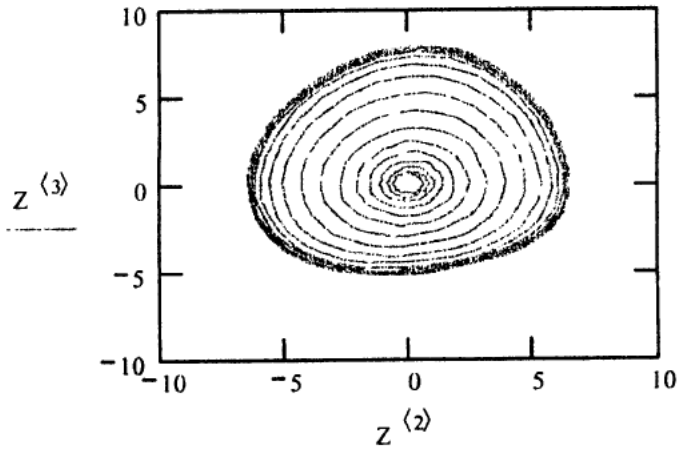
$Z =$

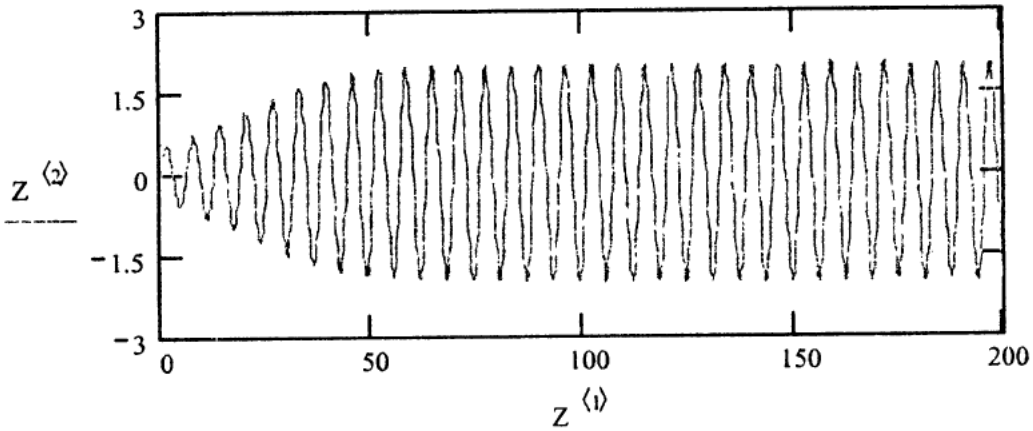
	1	2	3
1	0	0	0.5
2	0.2	0.1	0.5
3	0.4	0.198	0.478
4	0.599	0.29	0.436
5	0.799	0.371	0.375
6	0.999	0.439	0.298
7	1.199	0.489	0.207
8	1.399	0.521	0.108
9	1.598	0.532	$3 \cdot 10^{-3}$
10	1.798	0.522	-0.103
11	1.998	0.491	-0.206
12	2.198	0.44	-0.302
13	2.398	0.371	-0.388
14	2.597	0.286	-0.459
15	2.797	0.188	-0.514

Рис. 5.3

Начальные условия, заданные в программе в виде столбца-матрицы (y), практически не влияют на характер протекающего процесса. Поскольку уравнение автогенератора (5.6) и (5.7) составлено относительно нормированного времени $\tau=\omega t$, то частота синусоидальных автоколебаний во всех случаях неизменна и близка к 2π.


10
5
0
−5
−10
Z ⟨2⟩
0
50
100
150
200
Z ⟨1⟩


10
5
0
−5
−10
Z ⟨3⟩
−10
−5
0
5
10
Z ⟨2⟩


3
1.5
0
−1.5
−3
Z ⟨2⟩
0
50
100
150
200
Z ⟨1⟩

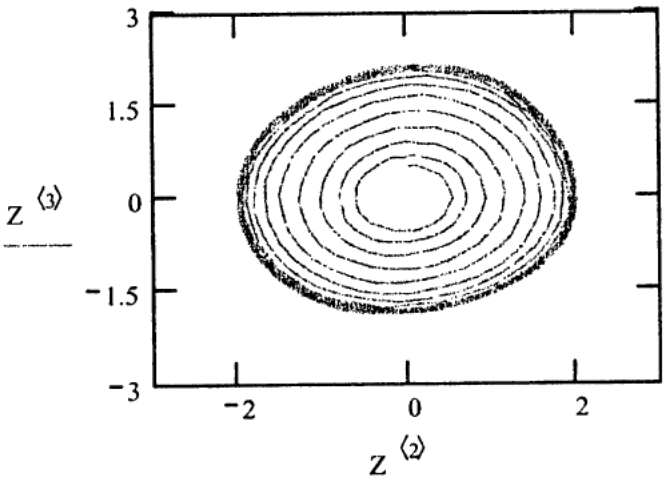

3
1.5
0
−1.5
−3
Z ⟨3⟩
−2
0
2
Z ⟨2⟩

Рис. 5.4

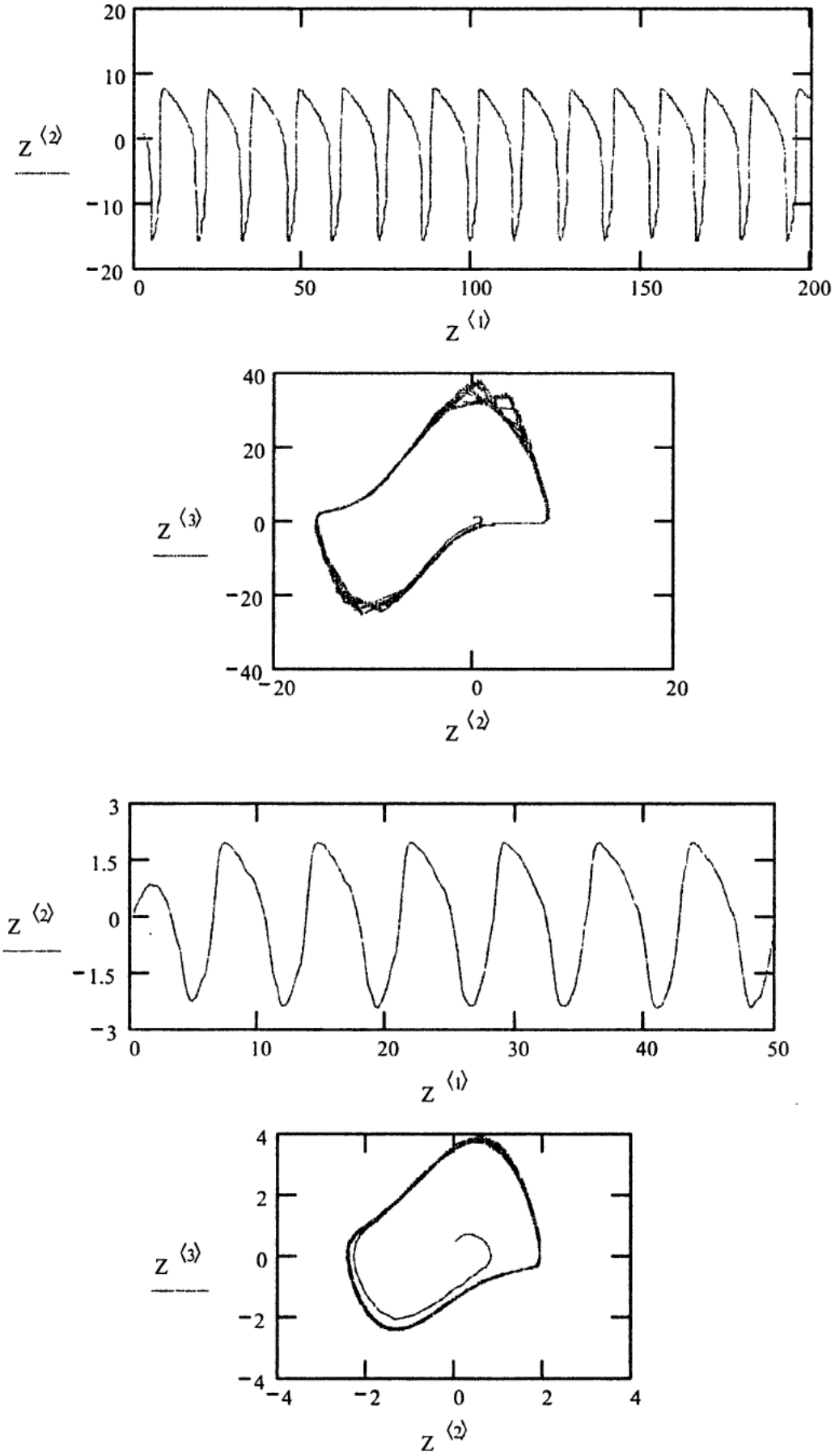

20
10
0
−10
−20
0
50
100
150
200
Z ⟨2⟩
Z ⟨1⟩
40
20
0
−20
−40
−20
0
20
Z ⟨3⟩
Z ⟨2⟩
3
1.5
0
−1.5
−3
0
10
20
30
40
50
Z ⟨2⟩
Z ⟨1⟩
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
Z ⟨3⟩
Z ⟨2⟩

Рис. 5.5

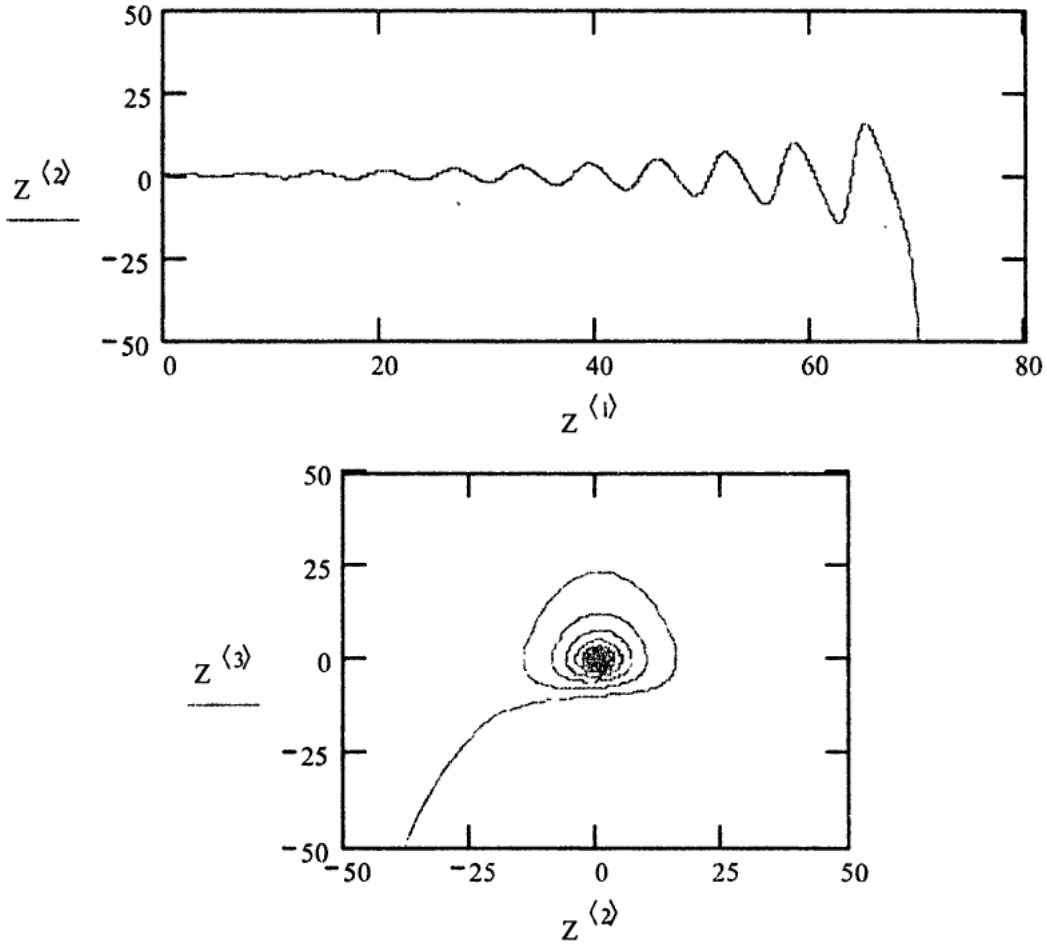


Рис. 5.6

На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

- в четырех первых случаях (рис. 5.4, 5.5) режим автоколебаний – устойчивый: амплитуда колебаний в установившемся режиме постоянна, на фазовой плоскости четко прослеживается устойчивый предельный цикл, по зависимости $u(\tau)$ можно определить время переходного процесса;

- в двух первых случаях при малом значении параметра μ=0,1 автоколебания почти синусоидальны, устойчивый предельный цикл близок по форме к окружности (рис. 5.4);

- при увеличении значения параметра μ до 1 колебания становятся релаксационными, т. е. близкими по форме к треугольным с крутыми фронтами, а траектория на фазовой плоскости принимает вид прямоугольника (3-й и 4-й случаи – рис. 5.5);

- при увеличении коэффициента g при квадратичном члене амплитуда автоколебаний уменьшается, поскольку снижается уровень ограничения в вольт-амперной характеристике электронного прибора (см. рис. 5.2);

- при отсутствии квадратичного члена в этой характеристике (g=0), определяющего участок насыщения, интегральная кривая стремится к бесконечности, а амплитуда автоколебаний неограниченно возрастает, что приводит обычно к пробою **p–n** перехода полупроводникового прибора (5-й случай – рис. 5.6).

5.3. Установившийся режим автоколебаний

В некоторых случаях (например, когда отсутствует необходимость определения времени переходного процесса) можно ограничиться исследованием только установившегося режима работы автогенератора. Наиболее предпочтительным для такого анализа является метод гармонического баланса, непременным условием применимости которого является фильтрация высших гармоник в колебательной системе и близость колебаний к синусоидальным.

Ток электронного прибора **i(t)** в автогенераторе может существенно отличаться от синусоидального вида и представлять собой периодическое колебание, состоящее из косинусоидальных (рис. 2.1) или иной более сложной формы импульсов (рис. 2.6). Разложив согласно (2.2) периодическое колебание в ряд Фурье, выделим из него 1-ю гармонику сигнала, для которой запишем: $I_1 = I_m \alpha_1$, где I_m – амплитуда импульса.

Введем следующий параметр – крутизну характеристики электронного прибора по 1-й гармонике сигнала: $S_У = I_1 / U_У = I_m \alpha_1 / U_У$, где $U_У$ – амплитуда напряжения на входе прибора, и запишем следующую систему уравнений для комплексных амплитуд 1-й гармоники сигнала:

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{S}_У \dot{U}_У; \\ \dot{U}_m &= \dot{I}_1 \dot{Z}_Э; \\ \dot{U}_У &= \dot{K} \dot{U}_m, \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

где U_m – амплитуда гармонического напряжения на контуре (выше принято, что колебательная система фильтрует все гармоники кроме 1-й); $Z_Э$ – эквивалентное сопротивление контура на частоте 1-й гармоники сигнала, K – комплексный коэффициент обратной связи.

Совместное решение (5.8) дает основное уравнение автогенератора в комплексной форме по 1-й гармонике сигнала:

$$\dot{S}_У \dot{Z}_Э \dot{K} = 1. \qquad (5.9)$$

Это уравнение распадается на уравнения для произведения модулей и суммы фаз, соответственно называемые уравнениями баланса амплитуд и фаз:

$$S_У Z_Э K = 1; \qquad (5.10)$$

$$\varphi_У + \varphi_Э + \varphi_K = 2\pi n. \qquad (5.11)$$

Уравнение баланса амплитуд (5.10) указывает на необходимость такого пополнения энергии в контур за счет цепи обратной связи, которое покрывало бы потери в нем, а уравнение баланса фаз (5.11) – на соблюдение условия синхронизма: дополнительные колебания, вводимые в контур, должны совпадать по фазе с уже существующими.

Количество дополнительной энергии можно регулировать за счет его модуля коэффициента обратной связи **К**, а фазирование – за счет фазы. Поскольку электронный прибор поворачивает фазу сигналу на величину, близкую к π, то согласно (5.11) на такую же величину должен происходить поворот фазы сигнала и за счет цепи обратной связи. Данному требованию отвечает, в частности, наиболее распространенная трехточечная схема автогенератора, которая в двух ее вариантах представлена на рис. 5.7. Первая из схем (рис. 5.7,а) называется емкостной, в ней модуль $K=C_1/C_2$, вторая (рис. 5.7, б) – индуктивной, в ней модуль $K=L_2/L_1$.

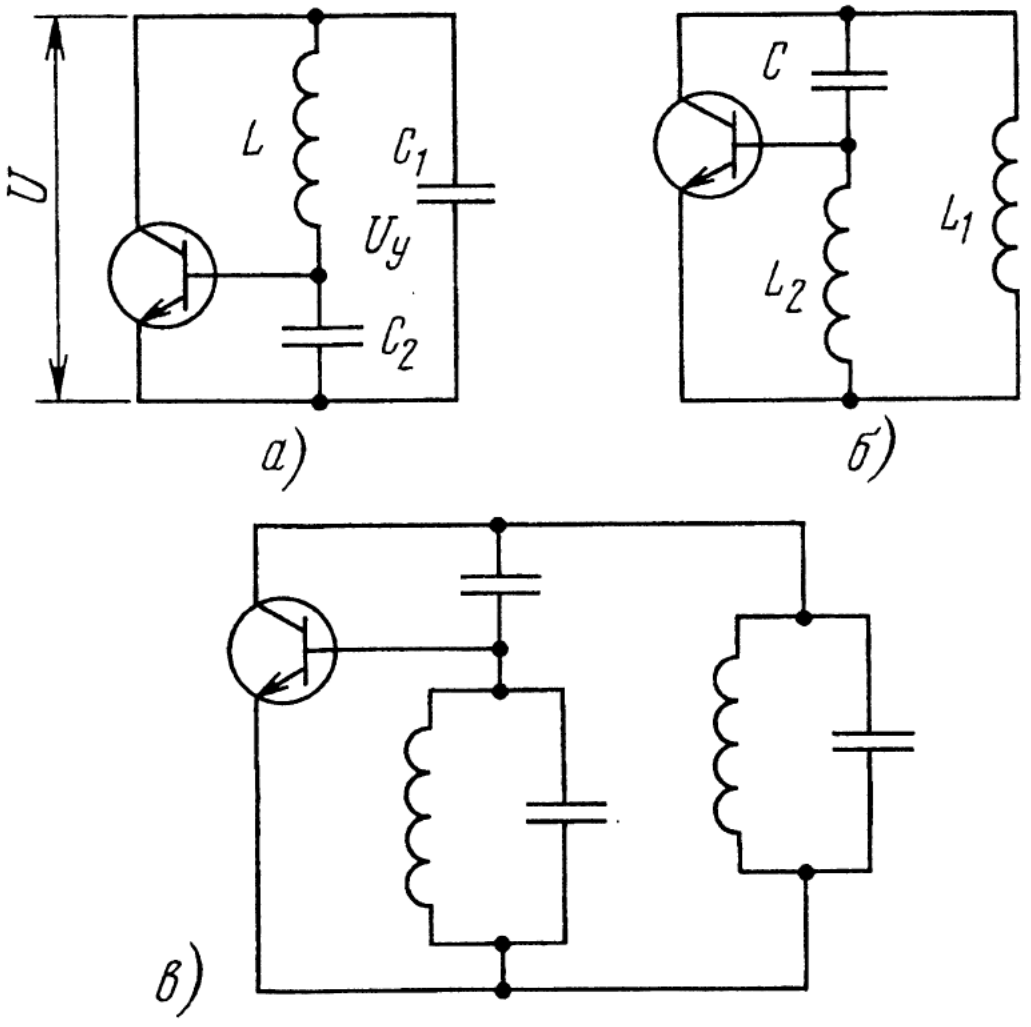


Рис. 5.7

Обе схемы могут рассматриваться и как эквивалентные по отношению к двухконтурной (рис. 5.7,в) и иным схемам автогенератора.

С помощью уравнений (5.9) можно определить амплитуду автоколебаний в установившемся режиме.

Представим с этой целью систему из трех уравнений в виде двух:

$$I_1=S_У(U_У)U_У, \quad I_1=(1/KR_Э)U_У. \tag{5.12}$$

Их совместное решение позволяет найти значение амплитуду тока I_1 в установившемся режиме, а затем и амплитуду напряжения: $U_m=I_1R_Э$.Такое графическое решение уравнений приведено на рис. 5.8. Для существования устойчивого режима автоколебаний необходима одна точка **А** пересечения графиков.

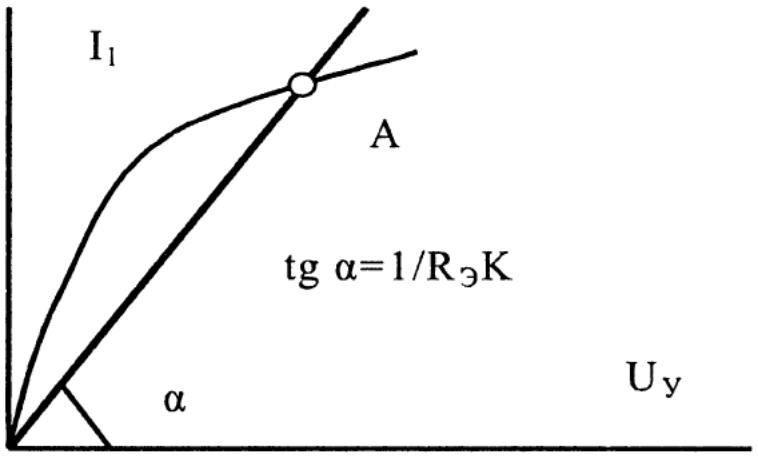


Рис. 5.8

Согласно общей теории устойчивости стационарный режим автогенератора является устойчивым, если малые отклонения амплитуды относительно установившегося значения возвращает систему в первоначальное состояние. Пусть колебания синусоидальны и определяются выражением:

$$u=U_{уст}e^{\alpha(U)t}\cos\omega t.$$

Тогда согласно сформулированному условию устойчивости следует:

$$\alpha(U)=0 \text{ при } U=U_{уст},$$
$$\alpha(U)<0 \text{ при } U>U_{уст},$$
$$\alpha(U)>0 \text{ при } U>Uуст,$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$d\left(\frac{dU}{dt}\right)\Big/dU<0. \tag{5.13}$$

При выполнении (5.13) любое увеличение или уменьшение амплитуды U относительно $U_{уст}$ возвращает систему в первоначальное состояние, что свидетельствует об устойчивости стационарного режима автоколебаний.

5.4. Стабильность частоты автогенераторов

Параметры, характеризующие работ автогенератора, можно разбить на две группы. К первой относятся величины, определяющие энергетические свойства автогенератора – колебательную мощность и КПД. Во вторую группу входят параметры, характеризующие частотные свойства автогенератора:

- диапазон частот $f_{min}...f_{max}$, в пределах которого возможна механическая, электрическая или электронная (в СВЧ приборах) перестройка частоты;
- требуемое, номинальное значение частоты генерируемого сигнала $f_{ном}$;
- долговременная нестабильность частоты за определенный интервал времени;
- кратковременная нестабильность частоты и фазы сигнала;
- чистота спектра и уровень шума излучаемого сигнала.

Кратковременная нестабильность частоты и связанная с ней чистота спектра излучаемого сигнала в некоторых случаях играют решающую роль в определении свойств радиосистемы. Например, разрешающая способность доплеровской радиолокационной станции и точность определения координат в радионавигационной системе во многом зависит от этих параметров. Поэтому остановимся более подробно на данной проблеме, имеющей большое значение для современных радиотехнических систем.

Сигнал, генерируемый автогенератором, не является абсолютно монохроматическим. Из-за различных физических причин происходят изменения амплитуды и фазы сигнала, которые носят как регулярный, так и случайный характер. В результате сигнал автогенератора можно представить в виде:

$$u(t)=[U_0+\Delta U_1(t)+\Delta U_2(t)+\Delta U_Ш(t)]* \\ *cos[\omega_{ном}t+\Delta\varphi_1(t)+\Delta\varphi_2(t)+\Delta\varphi_Ш(t)], \qquad (5.14)$$

где $\Delta U_1(t)$, $\Delta\varphi_1(t)$ – функции, определяющие относительно медленные изменения амплитуды и фазы сигнала под влиянием внешних условий, например, температуры окружающей среды,

$\Delta U_2(t)$, $\Delta\varphi_2(t)$ – функции, определяющие периодические изменения амплитуды и фазы сигнала под влиянием пульсаций питающего напряжения или воздействия на аппаратуру механических вибраций,

$\Delta U_Ш(t)$, $\Delta\varphi_Ш(t)$ – функции, описывающие случайные изменения амплитуды и фазы сигнала, обусловленные физическими процессами, протекающими в электронных приборах, например, дробовыми флюктуациями потока носителей заряда.

На основании соотношения, связывающего частоту колебаний с фазой:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}. \qquad (5.15)$$

Частота сигнала имеет те же составляющие, что и фаза:

$$f(t)=f_{ном}(t)+\Delta f_1(t)+\Delta f_2(t)+\Delta f_{Ш}(t), \qquad (5.16)$$

где $\Delta f_1(t)$, $\Delta f_2(t)$, $\Delta f_{Ш}(t)$ – функции, описывающие медленные, периодические и случайные изменения частоты сигнала, первая из которых определяет долговременную нестабильность частоты, а две другие – кратковременную.

Пример зависимости (5.16) приведен на рис. 5.9.

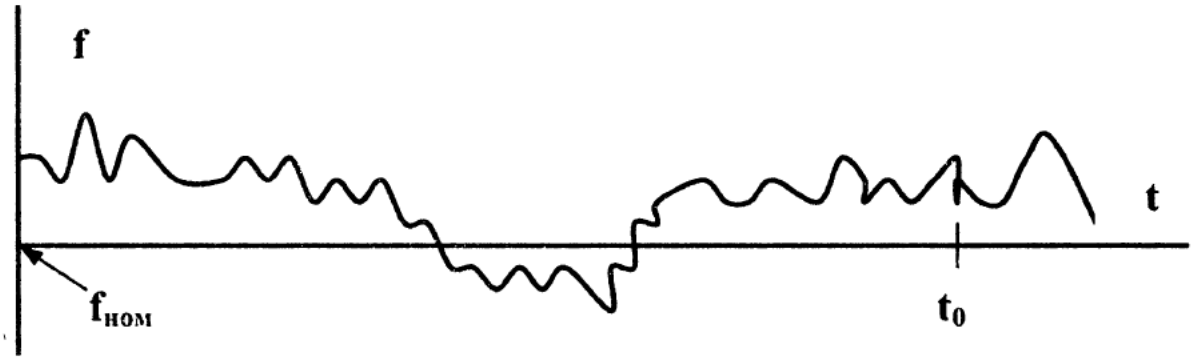


Рис. 5.9

Долговременная нестабильность частоты за период времени от 0 до t_0 определяется, как усредненное значение по N измерениям или как максимальное отклонение частоты от номинального значения:

$$\Delta f_{ДЛ.СР}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|f_k-f_{НОМ}\right| или \Delta f_{ДЛ.СР}=\left|f_{МАХ}-f_{НОМ}\right|. \qquad (5.17)$$

Норма на долговременную нестабильность частоты устанавливается обычно в относительных единицах и составляет для современных радиотехнических систем $\Delta f_{дл.ср.}/f_{ном}=10^{-9}\ldots10^{-6}$.

При $\Delta f_2(t)=\Delta f_m\cos\Omega t$ – 1-я составляющая кратковременной нестабильности есть Δf_m.

2-я составляющая кратковременной нестабильности $\Delta f_{СР.Ш}$ есть среднеквадратическое значение флюктуаций частоты относительного среднего значения. Считая, что функция $\Delta f_{Ш}(t)$ есть стационарный случайный процесс, согласно (2.20) имеем:

$$\Delta f_{СР.Ш}=\sqrt{\int_0^{\infty}S_{\Delta f}(F)dF}, \qquad (5.18)$$

где $S_{\Delta f}(F)$ – энергетический колебаний частоты автогенератора.

Действие случайного сигнала приводит к модуляции шумом амплитуды и частоты несущих колебаний и размытию спектральной линии сигнала автогенератора. Источником этого шума является активное сопротивление потерь колебательной системы и поток носителей заряда электронного

прибора. Второй фактор, как правило, значительно превалирует над первым, т.к. мощность тепловых шумов активных сопротивлений значительно меньше мощности шума электронного прибора. Шум автогенератора, зависящий от флюктуаций амплитуды $\Delta U_{ш}(t)$ и фазы $\Delta\varphi_{ш}(t)$ колебаний, количественно можно оценить с помощью различных параметров:

- энергетических спектров частоты, фазы и амплитуды (рис. 5.10);
- дисперсии флюктуации частоты, фазы и амплитуды;
- отношения мощности ЧМ и АМ шума к мощности несущих колебаний.

Флюктуации фазы и амплитуды статистически независимы, а энергетические спектры флюктуаций частоты $\Delta f_{ш}(t)$ и фазы $\Delta\varphi_{ш}(t)$ связаны соотношением:

$$S_{\Delta f}(F) = \Omega^2 S_{\Delta\varphi}(F), \qquad (5.19)$$

Нестрогое доказательство данного равенства базируется на следующем. Поскольку частота и фаза связаны зависимостью (5.15) и дифференцирование во временной области соответствует умножению на $j\Omega$ в частотной, то для энергетических спектров флюктуаций частоты и фазы получим множитель $\Omega^2=4\pi^2F^2$. Выражение (5.19) имеет физический смысл только при F>0.

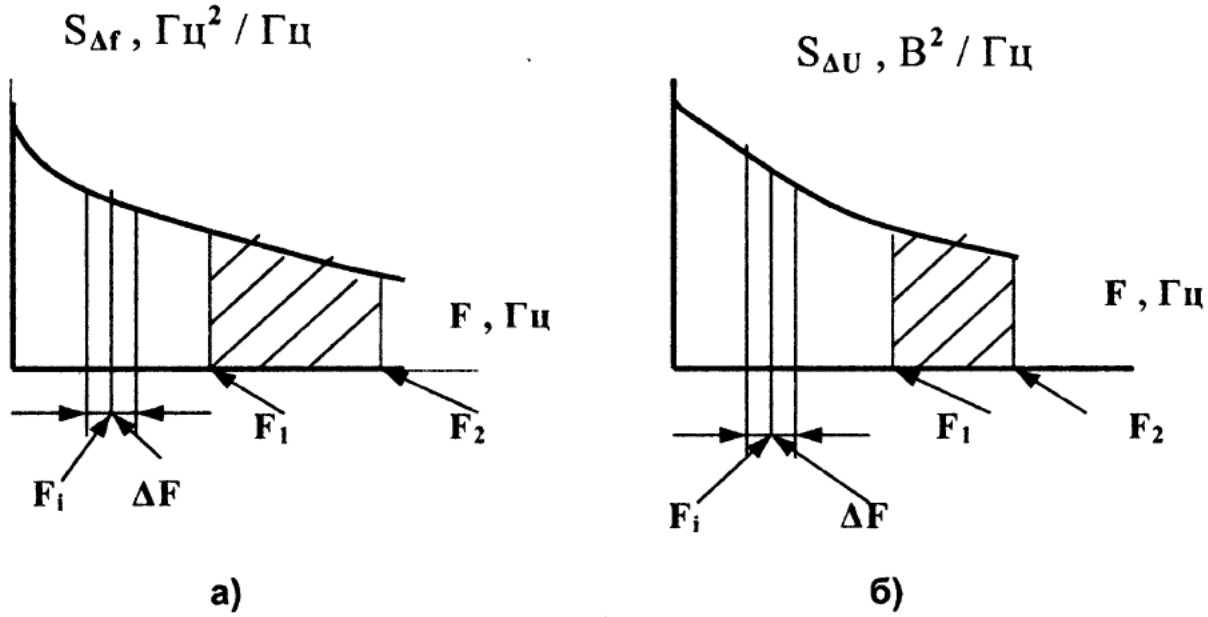


Рис. 5.10

Ширину шумового спектра, обусловленного флюктуаций фазы, можно оценить с помощью эффективной девиации частоты в полосе частот $F_1...F_2$ (рис. 5.10,а) по формуле, аналогичной (5.18):

$$\Delta f_{ЭФ.Д} = \sqrt{\int_{F_1}^{F_2} S_{\Delta f}(F)\,dF}\,. \qquad (5.20)$$

При этом для отношения мощности шума ($P_Ш$), приравненной мощности одной боковой составляющей спектра ЧМ колебания ($P_{БЧ}$) в узкой полосе частот ΔF (рис. 5.10,а), к мощности несущих колебаний ($P_{нес}$) получим:

$$\frac{P_{Ш}}{P_{НЕС}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta f_{ЭФ.Д}}{F_i}\right)^2. \qquad (5.21)$$

Это отношение, выраженное в децибелах, примет вид:

$$\frac{P_{Ш}}{P_{НЕС}} = -20\lg\frac{\sqrt{2}F_i}{\Delta f_{ЭФ.Д}}. \qquad (5.22)$$

При известном энергетическом спектре $S_{\Delta U}(F)$ флюктуаций амплитуды сигнала по аналогии с (5.20) для эффективного значения этой амплитуды в полосе частот $F_1...F_2$ (рис. 5.10,б) получим:

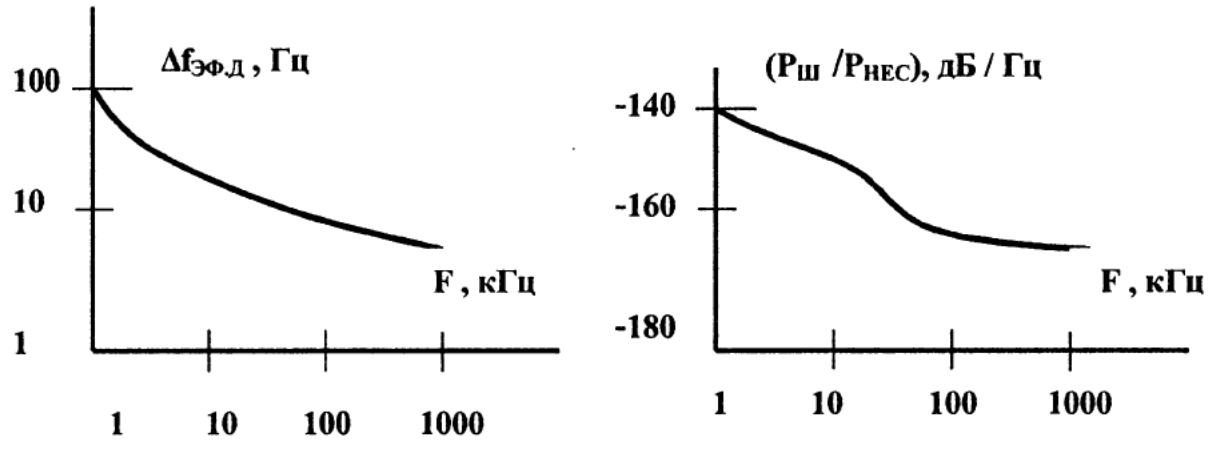
$$U_{ЭФ} = \sqrt{\int_{F_1}^{F_2} S_{\Delta U}(F)dF}. \qquad (5.23)$$

Для отношения в децибелах мощности одной боковой составляющей спектра АМ колебания ($P_{ША}$) к мощности несущих колебаний ($P_{нес}$) в узкой полосе частот ΔF (см. рис. 5.10,в) имеем:

$$\frac{P_{ША}}{P_{НЕС}} = -10\lg\frac{2U_0^2}{S_{\Delta U}(F_i)\Delta F}, \qquad (5.24)$$

где U_0 – амплитуда несущих колебаний.

Примеры графиков функций (5.20) и (5.22) приведены на рис. 5.11 (масштаб по обеим осям логарифмический).



а) **Рис. 5.11** б)

Сформулируем общие рекомендации по улучшению стабильности частоты автогенераторов, что имеет важное значение для современных радиотехнических систем.

Согласно уравнению баланса фаз автогенератора (5.11) в установившемся режиме работы устанавливается суммарный фазовый сдвиг, равный 2π. Опираясь на свойство автогенератора автоматически поддерживать этот баланс фаз, определим с помощью (5.11) долговременную нестабильность частоты под влиянием любого дестабилизирующего фактора δ: изменения температуры, давления, влажности, степени радиации и т. д. Дважды запишем уравнение (5.11): один раз при значении дестабилизирующего фактора $\delta=\delta_0$ и значении частоты $\omega=\omega_0$; другой – при изменении этого фактора на величину $\Delta\delta$, что вызывает соответствующее изменение частоты автоколебаний на величину $\Delta\omega$:

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\omega_0,\delta_0)=2\pi; \tag{5.25}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\omega_0+\Delta\omega,\delta_0+\Delta\delta)=2\pi. \tag{5.26}$$

Разложим в ряд Тейлора функцию (5.26) по двум переменным параметрам, сохранив только величины первого порядка малости:

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\omega_0,\delta_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k(\omega_0,\delta_0)}{\partial\omega}\Delta\omega+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k(\omega_0,\delta_0)}{\partial\delta}\Delta\delta=2\pi. \tag{5.27}$$

С учетом (5.25) получим из (5.27) для долговременной нестабильности частоты при изменении дестабилизирующего фактора δ на $\Delta\delta$:

$$\Delta\omega=-\Delta\delta\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\delta}\Big/\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\omega}. \tag{5.28}$$

При известной зависимости, связывающей фазу с частотой автоколебаний $\varphi=\psi(\omega)$, и определении влияния самого значительного из дестабилизирующих факторов – температуры t^0 – на стабильность частоты выражение (5.28) примет вид:

$$\Delta\omega=-\Delta t^0\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Psi(\omega)}{\partial t^0}\Big/\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\omega}. \tag{5.29}$$

Из (5.28) и (5.29) следует два вывода. Во-первых, необходимо по возможности уменьшать изменение фазы или частоты автоколебаний под дей-

ствием дестабилизирующего фактора, т. е. например, иметь, возможно, меньшие значения температурных коэффициентов всех реактивных элементов. Во-вторых, следует максимально увеличивать производную

$$\partial\varphi_k/\partial\omega,$$

характеризующую фиксирующую способность колебательной системы. Так, при параллельном колебательном контуре зависимость фазы от частоты определяется выражением:

$$\varphi = -arctg(2\Delta fQ/f_0) \qquad (5.30)$$

и при $\varphi \le \pi/6$ фиксирующая способность есть 2Q.

Таким образом, для уменьшения долговременной нестабильности частоты следует улучшать эталонные свойства колебательной системы (снижать ее температурный коэффициент частоты, сокращенно ТКЧ) и увеличивать ее добротность.

5.5. Кварцевые автогенераторы

Для получения высокой точности и стабильности частоты генерируемых колебаний в автогенераторах в качестве колебательной системы используется кварц. Такие автогенераторы называются кварцевыми. Кварц относится к числу кристаллов, обладающих свойствами прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта. Помещенный в электрическое поле высокой частоты кварц испытывает периодические механические деформации (явление обратного пьезоэффекта), что в свою очередь вызывает появление электрических зарядов на его гранях (явление прямого пьезоэффекта). Свойством пьезоэффекта обладают кристаллы более 100 веществ, но наиболее стабильны параметры у кварца, чем и объясняется его широкое применение в радиоэлектронной аппаратуре. Кварц следует отнести к звеньям с распределенными параметрами. Однако вблизи резонансных частот он может быть заменен эквивалентным электрическим контуром с сосредоточенными параметрами (рис. 5.12). Различные виды механических колебаний в кварцевой пластине могут происходить на основной частоте или одной из нечетных гармоник. Кристалл кварца имеет три оси симметрии – оптическую, электрическую и механическую. Зависимости от того, под каким углом к этим осям вырезана пластина, различают около десяти видов среза кварца.

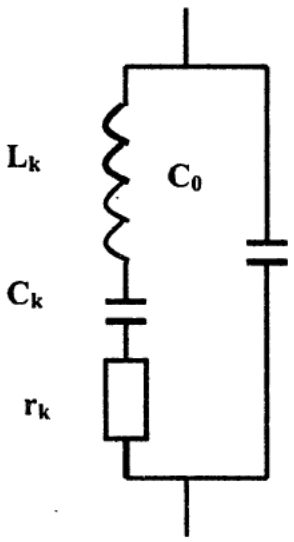


Рис. 5.12

Геометрические размеры, вид колебаний и тип среза пластины определяют основные электрические параметры кварцевого резонатора: частоту последовательного резонанса ω_1, добротность Q ,отношение емкостей C_k/C_0, температурный коэффициент частоты $ТКЧ_{КВ}$ и допустимую мощность рассеивания. Максимальная частота кварцевых резонаторов достигает 150 МГц и бо-

лее, но широкое практическое применение находят кварцы, возбуждаемые на 3–7-й механической гармонике с частотой до 60…70 МГц.

Определим основные параметра и зависимость эквивалентного сопротивления кварца от частоты вблизи его резонансных частот. Для проводимости кварца согласно схеме на рис. 5.12 имеем:

$$Y_0 = j\omega C_0 + \frac{1}{r_k + j[\omega L_k - (1/\omega C_k)]} = j\omega C_0 + \frac{1}{r_k(1 + jQ_k x)}, \qquad (5.31)$$

где

$\Delta\omega = 1 - (\omega_1/\omega)^2 \approx 2\Delta\omega/\omega_1$ – относительная расстройка;

$\Delta\omega = \omega - \omega_1$ – абсолютная расстройка;

$\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ – частота последовательного резонанса; (5.32)

$$\omega_2 = 1\Big/\sqrt{L_k \frac{C_k C_0}{C_k C_0}} \approx \omega_1\left(1 + \frac{C_k}{2C_0}\right) - \qquad (5.33)$$

частота параллельного резонанса;

$$Q_k = \omega_1 L_k / r_k = \sqrt{L_k / C_k}\,/ r_k \; - \qquad (5.34)$$

добротность кварцевого резонатора на частоте последовательного резонанса;

$\rho_k = \sqrt{L_k / C_k}$ – характеристическое сопротивление.

Благодаря большому значению L_k и малому C_k величина характеристического сопротивления ρ_k и добротности кварца Q_k достигают значительных величин ($\rho_k = 10^5 \ldots 10^7$ Ом, $Q_k = 10^4 \ldots 10^6$ Ом), на несколько порядков превышающих данные параметры у обычных электрических контуров. У специальных кварцев величина Q_k составляет даже $(3\ldots6)10^6$. Большая добротность предопределяет высокую крутизну фазовой характеристики кварца вблизи его резонансных частот:

$$\left.\begin{aligned} tg\varphi_1 &= 2Q_k\Delta\omega/\omega_1; \\ tg\varphi_2 &= -2Q_k\Delta\omega/\omega_2. \end{aligned}\right\} \qquad (5.35)$$

Для эквивалентного сопротивления кварца из (5.31) получим:

$$Z_{KB} = 1/Y_0 = 1/[j\omega C_0 + \frac{1}{r_k(1 + jQ_k x)}] = R_э(\omega) + jX_э(\omega). \qquad (5.36)$$

Программа по расчету параметров кварца с примером расчета, а также активной и реактивной составляющих эквивалентного сопротивления кварцевого резонатора, определяемых из (5.36), приведена на рис. 5.13.

$C := 0.25 \quad L := 0.2 \quad r := 10 \quad C0 := 8$

$$Q := 10^6 \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{r} \right) \qquad Q = 8.944 \times 10^4$$

$$f1 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \qquad f1 = 0.712$$

$$f2 := f1 \cdot \sqrt{1 + \frac{C}{C0}} \qquad f2 = 0.723$$

$$j := \sqrt{-1}$$

$$Y(f) := j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C0 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{r + j \cdot \left[2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot 10^6 - \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot 10^{-6}} \right) \right]}$$

$$Z(f) := \frac{1}{Y(f)} \qquad R(f) := \mathrm{Re}(Z(f)) \qquad X(f) := \mathrm{Im}(Z(f))$$

$$\theta(f) := \left(\frac{180}{\pi} \right) \cdot \arg(Z(f))$$

Рис. 5.13

В программе принята следующая размерность величин: индуктивность – Гн; емкость – пФ; сопротивление – Ом; частота – мГц.

Результаты примера расчета по программе приведены на рис. 5.14, на котором построены графики зависимости от частоты активной и реактивной составляющих эквивалентного сопротивления кварца и фазового угла, определяемых из (5.36). Из полученных результатов следует, что на частоте последовательного резонанса ω_1 сопротивление кварца мало $Z_{KB} \approx r_k$; на частоте параллельного – ω_2, напротив, возрастает до большой величины $Z_{KB} \approx Q_k(1/jC_0\omega_2)$.Между частотами ω_1 и ω_2 сопротивление кварца носит индуктивный характер, за пределами этих частот – емкостной. При пе-

реходе через резонансные частоты фаза благодаря высокой добротности скачком меняется на 180^0, что соответствует (5.35).

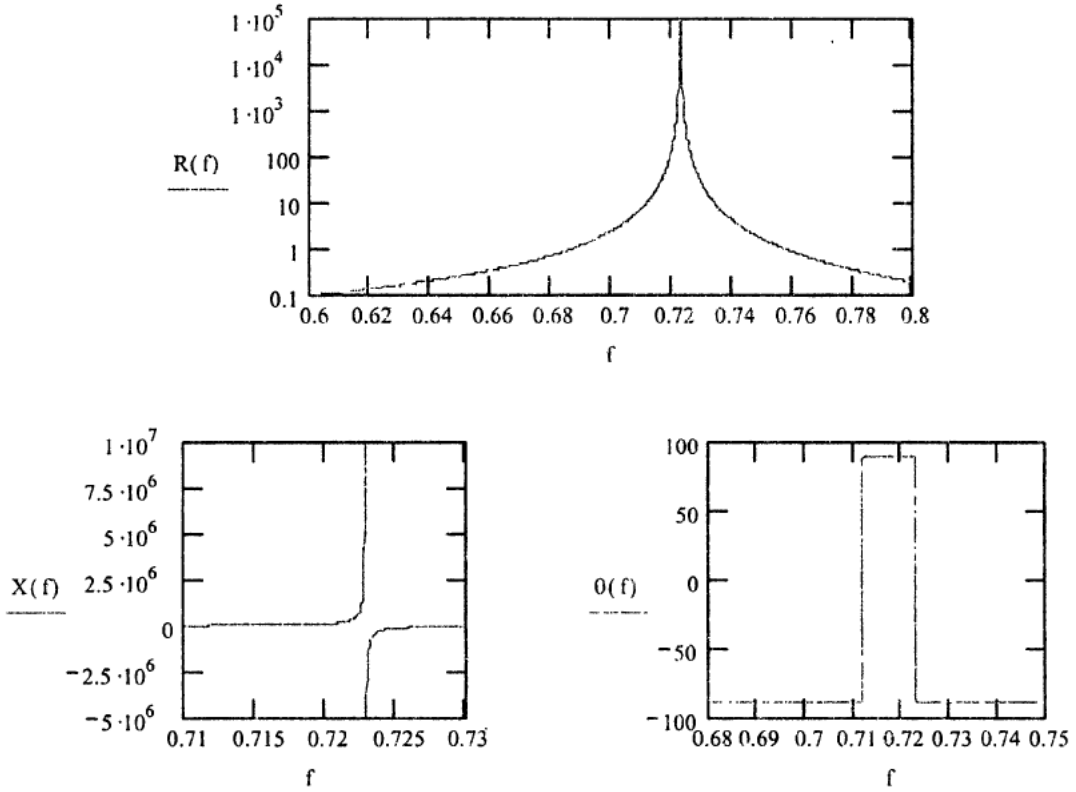


Рис .5.14

Величина ТКЧ серийно выпускаемых кварцев лежит в пределах $(0.5...2)10^{-6}$, а у специальных кварцев равна 10^{-7} в определенном интервале температур, что на два-три порядка меньше, чем у электрических контуров. Величина ТКЧ в значительной степени зависит от угла среза и является нелинейной функцией температуры. Благодаря очень высокой добротности и малому значению ТКЧ кварца нестабильность частоты автогенератора получается очень малой и приблизительно равной при размещении кварцевого резонатора в термостате 10^{-6}, а в специальных случаях $10^{-8}...10^{-9}$.Автоколебания в кварцевом резонаторе возможны только на частотах, соответствующих высокому значению крутизны фазовой характеристики, т. е. вблизи ω_1 или ω_2. Наиболее предпочтительна схема с использованием возбуждения на частоте ω_1 и с включением кварца в цепь обратной связи. Пример такой схемы кварцевого автогенератора приведен на рис. 5.15. Только на частоте ω_1 кварц имеет малое сопротивление r_k и цепь обратной связи оказывается замкнутой.

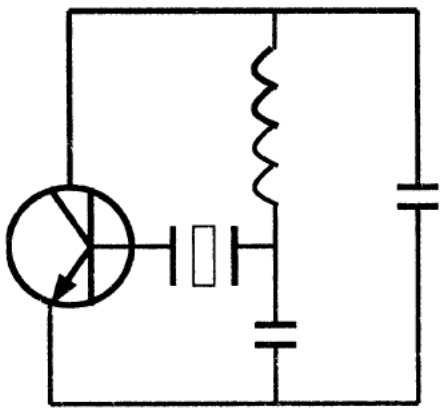


Рис. 5.15

5.6. Диодные СВЧ автогенераторы

Три типа специальных диодов применяются в СВЧ диапазоне для генерации колебаний: с междолинным переносом электронов, называемый диодом Ганна, лавинно-пролетный диод (ЛПД) и туннельный [20]. В первых двух типах приборов вследствие высокой напряженности электрического поля кинетическая энергия электронов значительно превосходит их равновесную тепловую энергию. Сами электроны при этом называются "горячими", а генераторы, использующие ЛПД и диоды Ганна, – устройствами на "горячих" электронах [21]. СВЧ автогенераторы с такими приборами работают в диапазоне частот от 1 до 100 ГГц. Устройство двух типов диодных СВЧ автогенераторов показано на рис. 5.16. В состав автогенератора входят: резонатор волноводного типа; в основном определяющий частоту автоколебаний; генераторный диод; элементы перестройки частоты, согласования диода с резонатором и связи с нагрузкой.

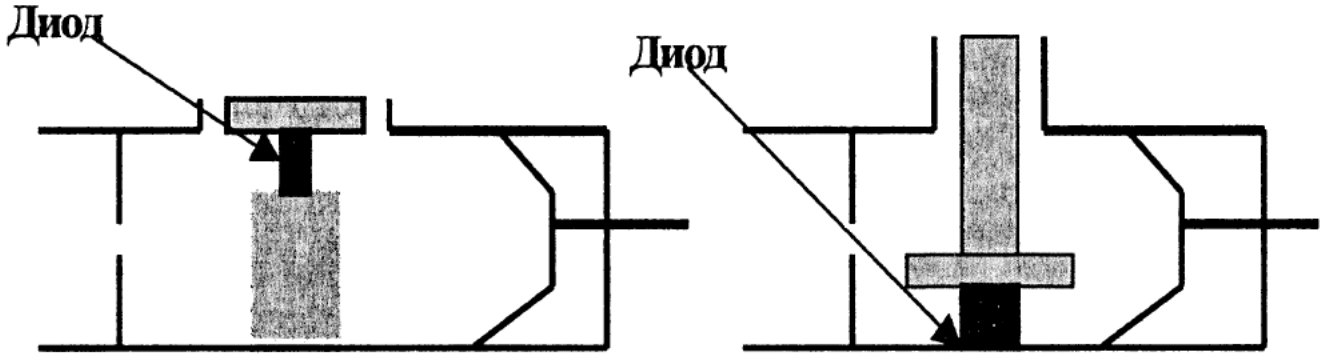


Рис. 5.16

Несмотря на большое число разновидностей СВЧ диодных автогенераторов, они приводятся к единой эквивалентной схеме, приведенной на рис. 5.1,б и 5.17.

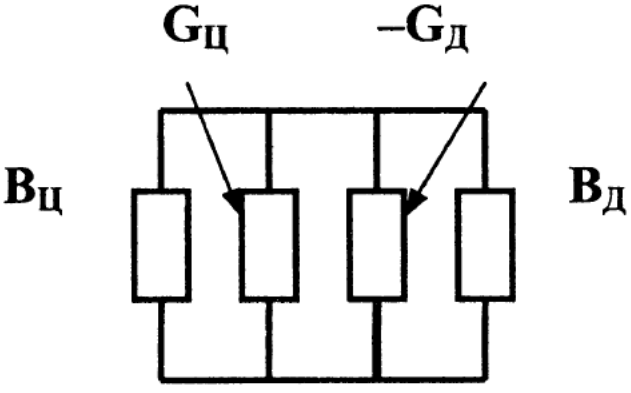


Рис. 5.17

Схема рис. 5.17 включает четыре параллельно соединенные проводимости. Две из них относятся к комплексной проводимости, отображающей колебательную систему автогенератора:

$$Y_Ц(\omega)=G_Ц(\omega)+jB_Ц(\omega). \qquad (5.37)$$

Две другие проводимости отображают комплексную, нелинейную проводимость генераторного диода:

$$Y_Д(\omega,U)=-G_Д(\omega,U)+jB_Д(\omega,U). \quad (5.38)$$

Знак "минус" перед $G_Д(\omega,U)$ указывает на отрицательный характер активной проводимости, благодаря чему и возможно возникновение автоколебаний (см. § 5.1), а зависимость от амплитуды напряжения U – на нелинейный характер этой проводимости.

Следующее уравнение отображает установившийся, стационарный режим работы автогенератора:

$$Y_Д(\omega,U)+Y_Ц(\omega)=0, \quad (5.39)$$

которое распадается на два уравнения–для действительных и мнимых величин. С учетом (5.37) и (5.38) получим из (5.39):

$$-G_Д(\omega,U)+G_Ц(\omega)=0, \quad (5.40)$$
$$B_Д(\omega,U)+B_Ц(\omega)=0. \quad (5.41)$$

Смысл анализа стационарного режима сводится к определению значений амплитуды U и частоты ω автоколебаний, удовлетворяющих уравнениям (5.40)–(5.41) и условиям устойчивого режима работы, рассмотренным в § 5.3.

Наиболее простой путь решения этих уравнений – графический. На комплексной плоскости проводимостей наносят графики функций $Y_Ц(\omega)=G_Ц(\omega)+jB_Ц(\omega)$ и $-Y_Д(\omega,U)=G_Д(\omega,U)-jB_Д(\omega,U)$, точки пересечения которых и есть возможные решения системы уравнений (5.40)–(5.41) (рис. 5.18,а).

Координаты точки **А** на рис. 5.18,а определяют амплитуду $U_{УСТ}$ и частоту ω автоколебаний в установившемся режиме. В более общем случае график функции $Y_Ц(\omega)$ может иметь несколько "петель" и соответственно несколько точек пересечения с графиком $-Y_Д(\omega,U)$ (рис. 5.18,б). Все эти точки необходимо проверить на существование устойчивого режима автоколебаний (см. §5.3). Мощность сигнала автогенератора при существовании устойчивого режима:

$$P_Г=0,5(U_{УСТ})^2|G_Д(\omega,U_{УСТ})|=0,5(U_{УСТ})^2G_Ц(\omega). \quad (5.42)$$

Следует отметить сравнительно невысокую стабильность частоты диодных автогенераторов и повышенный уровень создаваемых ими шумов, особенно в случае применения ЛПД.

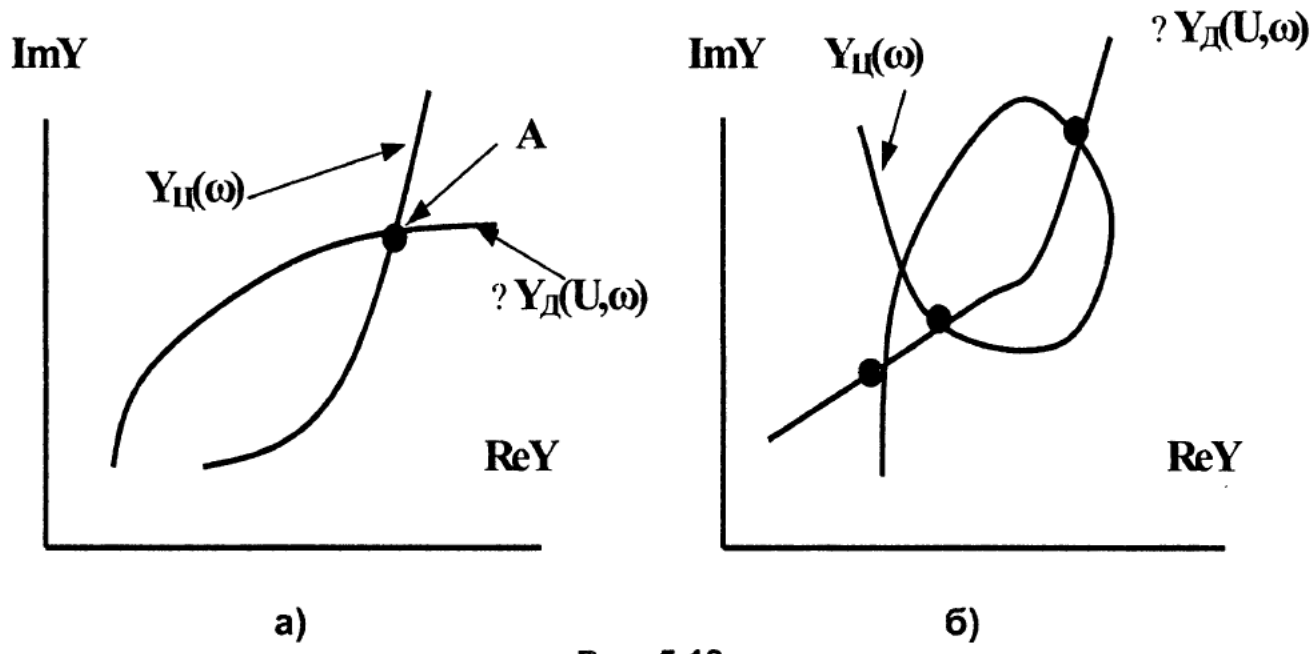


Рис. 5.18

Для улучшения параметров диодных автогенераторов по стабильности частоты применяют резонаторы с высокой добротностью и внешнюю синхронизацию частоты автоколебаний.

5.7. Синхронизация автогенераторов

Синхронизацией называется генерация автогенератором колебаний, частота которых определяется частотой воздействующего на устройство внешнего сигнала. Такой режим работы автогенератора называется также "захватом" его частоты внешним сигналом. Режим синхронизации вбирает в себя черты двух режимов: генерации автоколебаний и усиления сигнала по мощности.

Режим синхронизации используется при стабилизации частоты автогенератора частотой внешнего сигнала и при усилении сигнала в СВЧ генераторах (см. гл. 8). Во втором случае удается использовать диодные генераторы не только для генерации СВЧ колебаний, но их усиления по мощности. Особое место занимает режим в автогенераторе, называемом автодином. Здесь на автогенератор воздействует слабый сигнал вне полосы его синхронизации. Образованное в результате взаимодействия двух сигналов – собственно автогенератора и внешнего – колебание с разностной частотой используется для измерительных целей.

Работа автогенератора в режиме синхронизации описывается уравнением вида (5.3) или (5.6), в правой части которого записана функция, отражающая действие внешнего сигнала:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \mu\left(1 - bu - gu^2\right)\frac{du}{d\tau} + u = U\sin\Omega\tau, \qquad (5.43)$$

где U – амплитуда внешнего сигнала; Ω – его нормированная частота.

Программа по расчету режима синхронизации автогенератора согласно (5.43) с фрагментом таблицы полученных результатов приведена на рис. 5.19. Как указывалось выше (см. § 5.2), в данном уравнении нормировано время и поэтому частота собственных автоколебаний близка к 1. В этой связи под частотой внешнего сигнала в (5.43) следует понимать $\Omega=\omega_{ВНЕШ}/\omega_{АВТ}$.

Результаты расчета по программе в виде зависимости переходного процесса в автогенераторе u(т) и фазовой траектории для трех случаев при Ω=1,2; 1,5 и 2 приведены на рис. 5.20.

$$\text{ORIGIN}:=1 \qquad \mu := 0.1 \qquad b := 0.5 \qquad g := 1 \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Omega := 1.2 \qquad U := 1$$

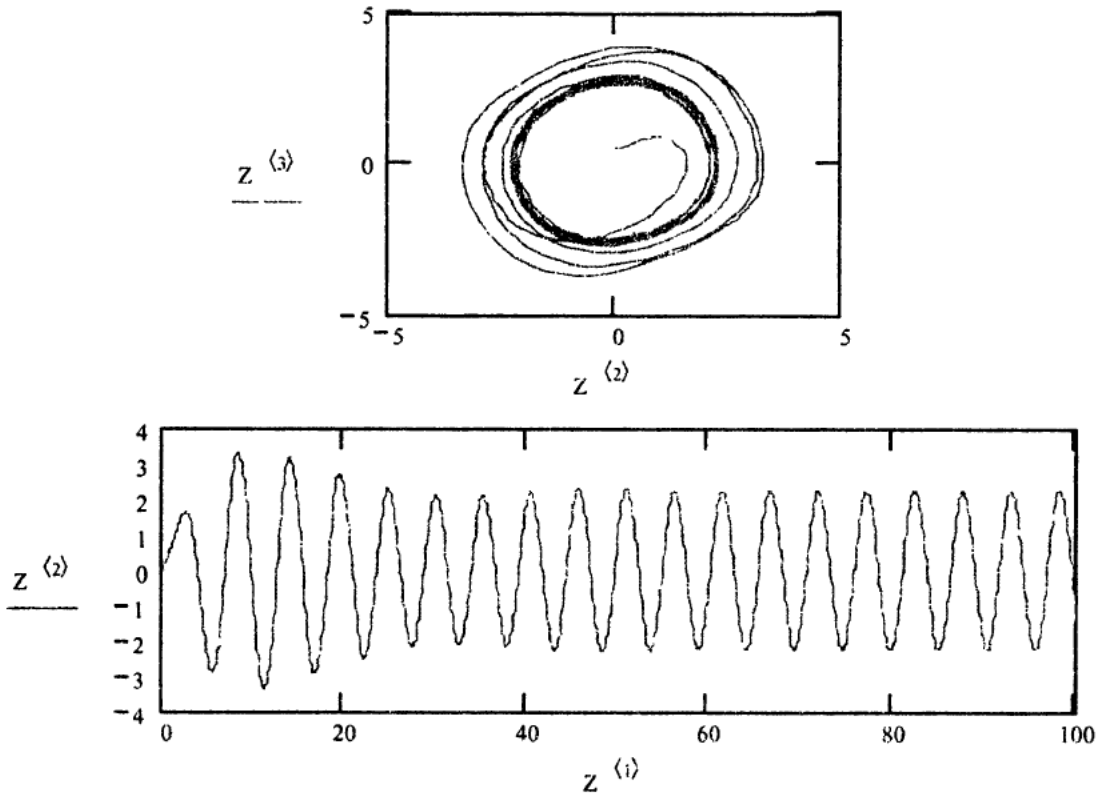
$$F(t,y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ \mu \cdot \left[1 - b \cdot y_1 - g \cdot (y_1)^2\right] \cdot y_2 - y_1 + U \cdot \sin(\Omega \cdot t) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 100, 1001, F)$$

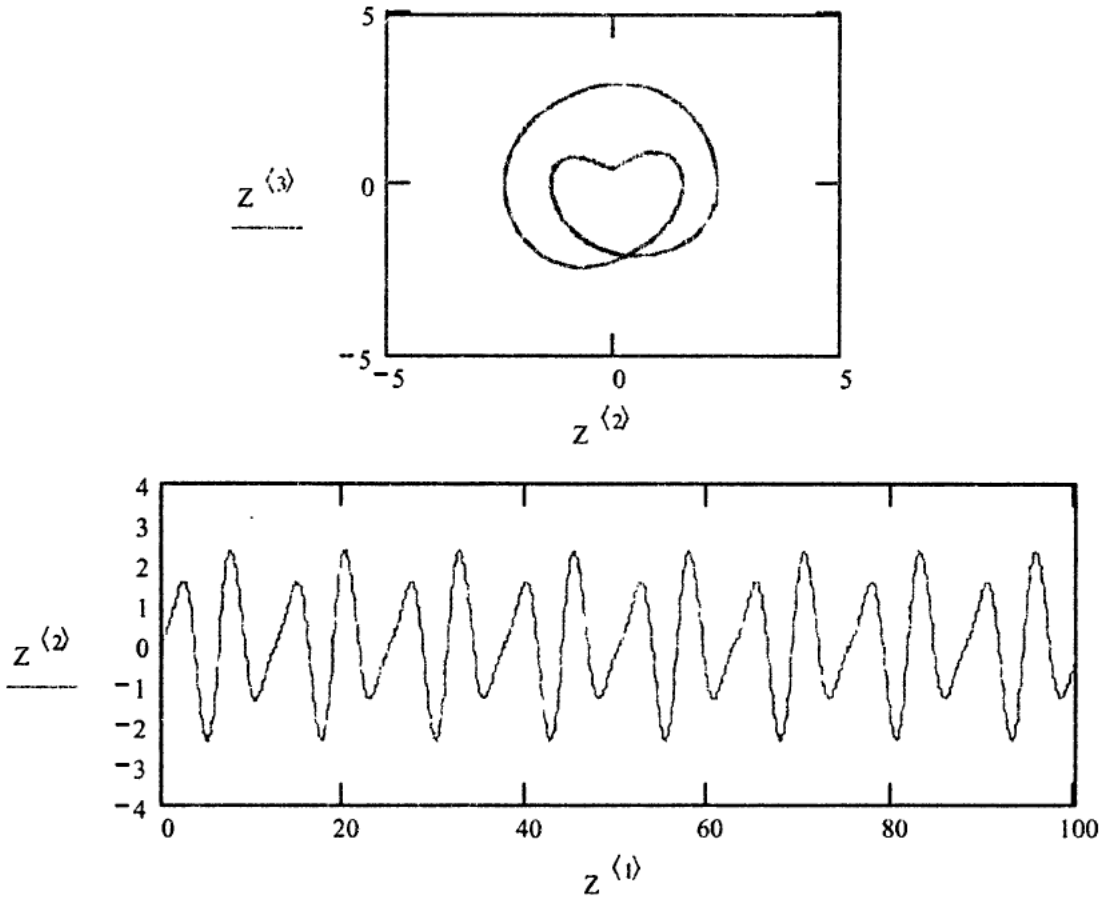
$Z =$

	1	2	3
1	0	0	0.5
2	0.1	0.05	0.508
3	0.2	0.102	0.524
4	0.3	0.155	0.545
5	0.4	0.211	0.572
6	0.5	0.27	0.605
7	0.599	0.332	0.64
8	0.699	0.398	0.679
9	0.799	0.467	0.718
10	0.899	0.541	0.756

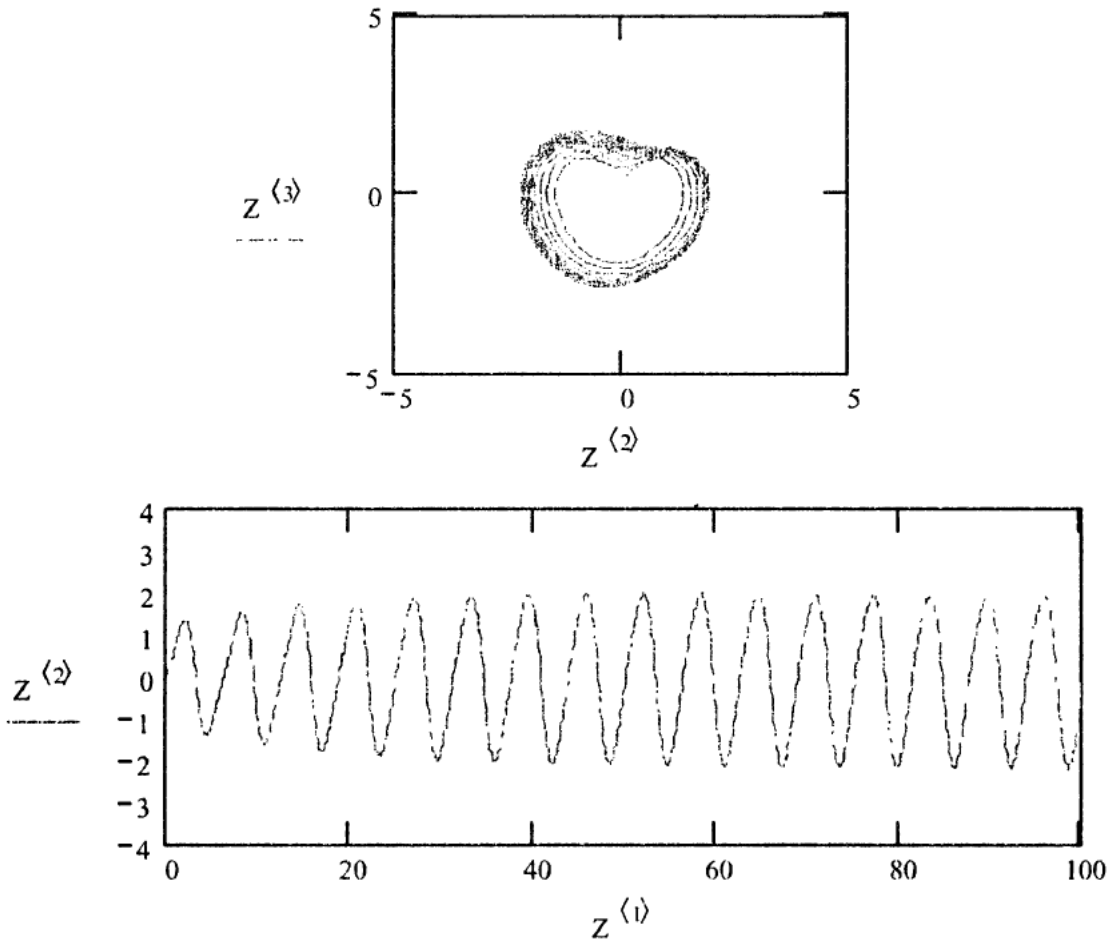
Рис. 5.19



а) Ω=1,2



б) Ω=1,5



в) Ω=2,0

Рис. 5.20

Из анализа полученных результатов следуют такие выводы.

При **Ω=1,2** частота автоколебаний становится равной частоте внешнего сигнала: происходит так называемы "захват" частоты ($\omega_{АВТ}=\omega_{ВНЕШ}$) и на фазовой плоскости четко прослеживается устойчивый предельный цикл. При **Ω=1,5** имеет место режим биений, при котором "захват" прекращается и одновременно действуют два сигнала: внешний и собственные автоколебания. При **Ω=2** происходит полное прекращение воздействия внешнего сигнала на автогенератор, который возвращается в автономный режим работы.

Изменяя значение **Ω** в большую и меньшую сторону относительно 1, можно определить зону синхронизацию или "захвата" и области биений колебаний и возврата в автономный режим работы автогенератора. В рассмотренном примере зона синхронизации достаточно велика и составляет 20%. В практических случаях она не превышает обычно нескольких процентов.

Дальнейший анализ показывает, что с увеличением амплитуды входного сигнала зона синхронизации возрастает. Долговременная нестабильность частоты автогенератора в режиме синхронизации равна частоте внешнего сигнала. Собственные шумы автогенератора уменьшаются с сужением зоны "захвата".

Глава 6. АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПОДСТРОЙКА ЧАСТОТЫ

6.1. Назначение и классификация устройств автоматической подстройки частоты

Устройства автоматической подстройки частоты (сокращенно АПЧ) служат для стабилизации и управления частотой автогенератора по эталонному сигналу [22–24].

Обобщенная структурная схема устройства АПЧ приведена на рис. 6.1. В схеме производится сравнение сигналов эталонного и стабилизируемого автогенераторов, в результате чего вырабатывается сигнал ошибки. После фильтрации этот сигнал управляет стабилизируемым автогенератором, частота которого по установленному алгоритму следит за частотой эталонного автогенератора. В схему АПЧ может входить также устройство поиска, осуществляющее ввод всего устройства в режим автоматического регулирования.

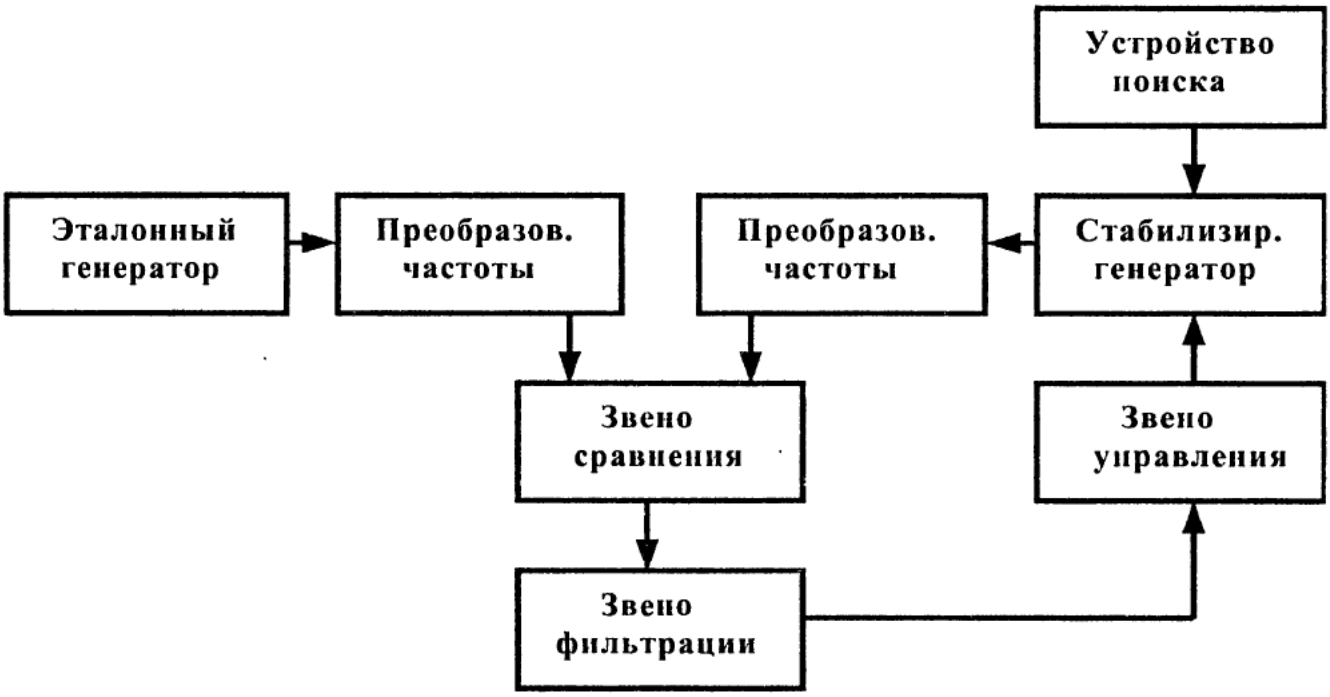
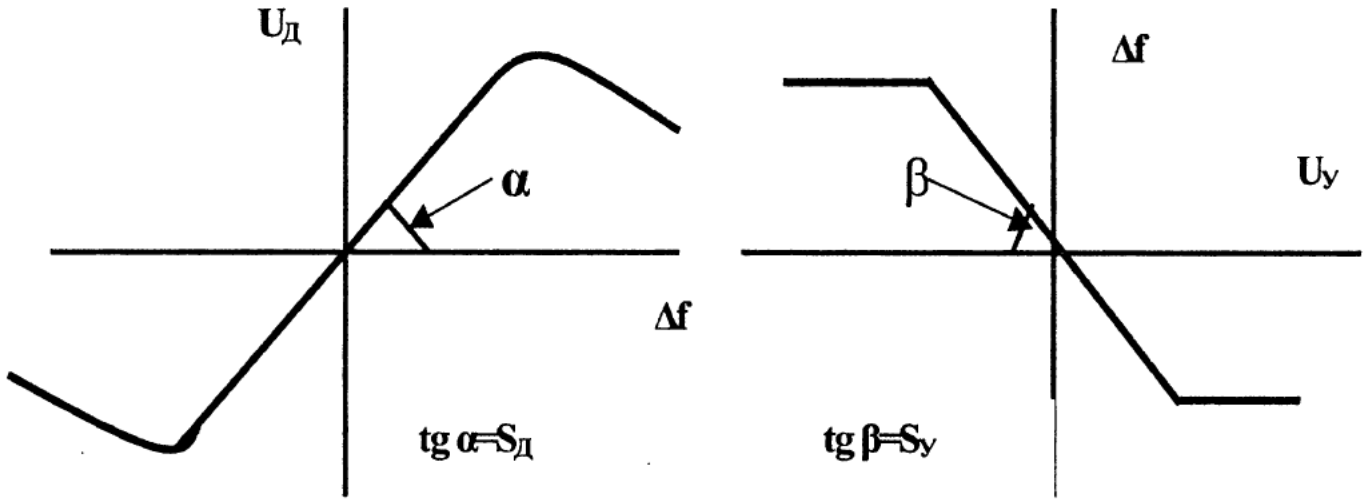


Рис. 6.1

В зависимости от способа получения сигнала ошибки различают: устройства частотной автоподстройки частоты (сокращенно – ЧАП), фазовой автоподстройки частоты (ФАП) и комбинированные (ЧАП-ФАП). В устройствах ЧАП сигнал ошибки вырабатывается путем сравнения частот сигналов эталонного и стабилизируемого автогенераторов, в устройствах ФАП – путем сравнения фаз тех же сигналов.

Кратко остановимся на звеньях, входящих в устройство АПЧ. В качестве эталонного генератора в ней обычно используется высокостабильный кварцевый автогенератор (см. § 5.5) или принимаемый радиосигнал, а в качестве стабилизируемого генератора – автогенератор с параметрической стабилизацией частоты (см. § 5.3). В качестве звена фильтрации применяется фильтр нижних частот 1-го, 2-го или более высокого порядка. Преобразователи частоты, включаемые после автогенераторов, могут выполнять такие функции как умножение, деление или смещение частоты сигнала.

Звеном сравнения в ЧАП является частотный дискриминатор, напряжение на выходе которого $U_Д$ зависит от разности частот входных сигналов: $U_Д=\psi(f_{СТ}-f_{ЭТ})$. Пример такой характеристики, начальный участок которой является линейным с крутизной $S_Д$, приведен на рис. 6.2,а.



а) **Рис. 6.2** б)

Звеном сравнения в ФАП является фазовый дискриминатор, напряжение на выходе которого $U_{СР}$ зависит от разности фаз сигналов эталонного и стабилизируемого автогенераторов: $U_{СР}=\psi(\varphi_{СТ}-\varphi_{ЭТ})$. Ниже звенья сравнения – дискриминаторы – будут рассмотрены более подробно.

Звеном управления обычно является управляющий элемент с варикапом или ферритом, устройство которых рассматривается ниже. Назначение данного элемента состоит в управлении частотой стабилизируемого автогенератора в зависимости от величины напряжения на его входе. Поэтому данное звено определяется зависимостью $\Delta f=\psi(U_У)$, пример которой приведен на рис. 6,2,б. Начальный участок данной характеристики обычно является линейным с крутизной $S_У$.

Системы АПЧ являются нелинейными устройствами, поскольку в них одно или несколько звеньев являются нелинейными. При линеаризации таких звеньев исследование АПЧ проводится в рамках линейной модели, что позволяет получить некоторые важные результаты.

По виду сигнала в цепи управления устройства АПЧ подразделяются на непрерывные при аналоговом сигнале и дискретные. Последние, в свою очередь, в зависимости от метода квантования сигнала делятся: на релейные (при квантовании по уровню), импульсные (при квантовании по времени) и цифровые (при квантовании по уровню и времени).

Разнообразно применение систем АПЧ в радиоприемных и радиопередающих устройствах. Назовем несколько наиболее типичных случаев их использования:

- для стабилизации частоты мощных автогенераторов по слабому сигналу эталонного автогенератора, что позволяет существенно сократить число ВЧ или СВЧ усилительных каскадов [24];
- в синтезаторах частоты, с помощью которых создается дискретное множество частот при одном эталонном сигнале [25];
- для автоматической подстройки частоты гетеродина радиоприемника по частоте принимаемого сигнала.

Следующие параметры, которые называются **показателями качества процесса регулирования**, характеризуют работу устройств АПЧ.

Точность, которая определяется отклонением частоты стабилизируемого автогенератора от номинального значения в установившемся режиме. При действии на устройство помимо полезного сигнала и помехи точность определяется средней и среднеквадратической ошибкой.

Коэффициент авторегулирования K_P, как отношение первоначальной ошибки по частоте автогенератора в момент его включения к ошибке в установившемся режиме работы. Пусть, например, ошибка частоты автогенератора, т. е. ее отклонение от номинального значения, при t=0 равна 1 МГц, а после окончания процесса регулирования она снижается до 100 Гц. Для коэффициента регулирования получим: $K_P=10^6/100=10^4$.

Полоса схватывания, как максимально допустимая величина первоначальной ошибки по частоте автогенератора, при которой устройство нормально функционирует после его включения.

Полоса удержания, как максимально допустимая величина собственной ошибки по частоте автогенератора в установившемся режиме работы. Как правило, полоса удержания больше полосы схватывания.

Характер переходного процесса установления частоты стабилизируемого автогенератора после включения устройства АПЧ или изменения частоты эталонного генератора. Обычно этот процесс носит апериодический или затухающий колебательный характер.

Время установления частоты стабилизируемого автогенератор, т. е. время переходного процесса, за которое частота входит в определенную зону.

Устойчивость работы устройства АПЧ, определяемая несколькими параметрами. Поскольку устройство АПЧ является схемой с обратной связью, то в ней подобно автогенератору могут возникнуть собственные автоколебания, если будут выполнены условия баланса амплитуд и фаз (см. § 5.3). Такой режим работы является недопустимым в устройстве АПЧ, которое должно от-

слеживать изменения частоты входных сигналов, а не создавать собственные автоколебания. Более того, следует иметь определенный запас по устойчивости.

6.2. Обобщенное уравнение автоматической подстройки частоты

В целом работа устройства автоподстройки частоты может быть описано с помощью уравнения, которое назовем уравнением автоподстройки. Такое уравнение должно обеспечивать возможность анализа работы устройства АПЧ и определение всех перечисленных выше показателей качества: точности, устойчивости, времени переходного процесса и т. д.

Поскольку назначение устройства АПЧ состоит в управлении частотой сигнала, то названное уравнение следует составить относительно частот стабилизируемого ($f_{СТ}$) и эталонного ($f_{ЭТ}$) автогенераторов или, что более удобно, относительно отклонения этих частот от их номинальных значений ($f_{СТ0}$ и $f_{ЭТ0}$):

$$\Delta f_{СТ}=f_{СТ}-f_{СТ0}, \quad \Delta f_{ЭТ}=f_{ЭТ}-f_{ЭТ0}.$$

Согласно рис. 6.1 собственная частота стабилизируемого автогенератора $f_{СТС}$ меняется под действием управляющего звена. Поэтому с учетом последних равенств для отклонений частот запишем:

$$\Delta f_{СТ}(t)=\Delta f_{СТС}(t)+\Delta f_{У}(t), \qquad (6.1)$$

где $\Delta f_{СТС}(t)$ – функция, описывающая изменение собственной частоты стабилизируемого автогенератора; $\Delta f_{У}(t)$ – функция, описывающая изменение частоты стабилизируемого автогенератора под действием управляющего звена.

Согласно схеме рис. 6.1. сигнал ошибки, образованный путем сравнения двух частот ($f_{СТ}$ и $f_{ЭТ}$), пройдя через фильтр, воздействует на управляющее звено. Данный процесс можно отобразить с помощью следующего уравнения:

$$\Delta f_{У}(t)=\boldsymbol{K_{СР}K_{Ф}K_{У}}[\Delta f_{ЭТ}(t)-\Delta f_{СТ}(t)], \qquad (6.2)$$

где $\boldsymbol{K_{СР}}$, $\boldsymbol{K_{Ф}}$, $\boldsymbol{K_{У}}$ – операторы, описывающие соответственно действие сравнивающего звена, фильтра и управляющего звена.

Подставив (6.2) в (6.1), получим основное уравнение автоподстройки, записанное с помощью нелинейных операторов:

$$\Delta f_{СТ}(t)=\Delta f_{СТС}(t)+\boldsymbol{K_{СР}K_{Ф}K_{У}}[\Delta f_{ЭТ}(t)-\Delta f_{СТ}(t)]. \qquad (6.3)$$

От данного уравнения можно перейти к линейной и нелинейной моделям устройства АПЧ. При анализе линейной модели будем исходить из предположений.

Сравнивающее и управляющее звенья являются безынерционными устройствами, у которых используются только линейные участки их статических характеристик (рис. 6.2). В таком случае крутизна этой характеристики и есть оператор соответствующего звена. Следовательно, для сравнивающего звена имеем $\mathbf{K_{СР}=S_{СР}}$, для управляющего $\mathbf{K_У=S_У}$.

Фильтр есть линейное звено и поэтому его оператор $\mathbf{K_Ф}$ может быть заменен линейным дифференциальным оператором $\mathbf{K_Ф}(p)$.

В результате для линейной модели АПЧ из (6.3) получим:

$$\Delta f_{СТ}(t)=\Delta f_{СТС}(t)+S_{СР}S_У K_Ф[\Delta f_{ЭТ}(t)-\Delta f_{СТ}(t)]. \qquad (6.4)$$

Переходя к записи в операционной форме, из (6.4) имеем:

$$\Delta f_{СТ}(p)=\Delta f_{СТС}(p)+S_{СР}S_У K_Ф(p)[\Delta f_{ЭТ}(p)-\Delta f_{СТ}(p)], \qquad (6.5)$$

где $\Delta f_{СТ}(p)$, $\Delta f_{СТС}(p)$, $\Delta f_{ЭТ}(p)$ – изображения функций $\Delta f_{СТ}(t)$, $\Delta f_{СТС}(t)$, $\Delta f_{ЭТ}(t)$.

Решив (6.5) относительно $\Delta f_{СТ}(p)$, получим основное уравнение автоподстройки в операционной форме линеаризированной модели АПЧ:

$$\Delta f_{СТ}(p)=K_1(p)\Delta f_{СТС}(p)+K_2(p)\Delta f_{ЭТ}(p), \qquad (6.6)$$

где

$$K_1(p)=\frac{1}{1+S_{СР}S_У K_Ф(p)} \qquad (6.7)$$

– оператор, описывающий зависимость частоты стабилизируемого автогенератора от изменения его собственной частоты;

$$K_2(p)=\frac{S_{СР}S_У K_Ф(p)}{1+S_{СР}S_У K_Ф(p)} \qquad (6.8)$$

– оператор, описывающий зависимость частоты стабилизируемого автогенератора от изменения частоты эталонного автогенератора.

Оператор устройства АПЧ при разомкнутой цепи обратной связи:

$$K_Р(p)=S_{СР}S_У K_Ф(p). \qquad (6.9)$$

В рамках линеаризированной модели устройства АПЧ можно определить ее точность и условия устойчивости, но нельзя найти полосу схватывания и время переходного процесса при использовании полного размаха характеристик сравнивающего и управляющего звеньев (рис. 6.2).

Для анализа устройства АПЧ в рамках нелинейной модели следует от уравнения в операторной форме (6.3) перейти к его записи в виде нелинейного дифференциального уравнения. Ниже данная процедура рассматривается применительно к устройствам частотной и фазовой автоподстройки частоты.

6.3. Частотная автоподстройка частоты

Звенья устройства. Структурная схема устройства частотной автоподстройки частоты (ЧАП) непрерывного типа приведена на рис. 6.1. В ней под звеном сравнения следует понимать частотный дискриминатор, напряжение на выходе которого зависит от частоты на его входе. Известно несколько схем частотных дискриминаторов, наиболее распространенными из которых являются балансного типа (рис. 6.3).и на расстроенных контурах [22, 24].

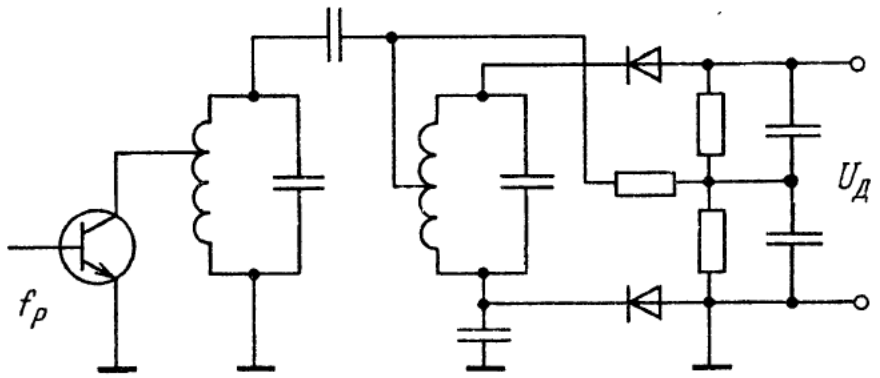
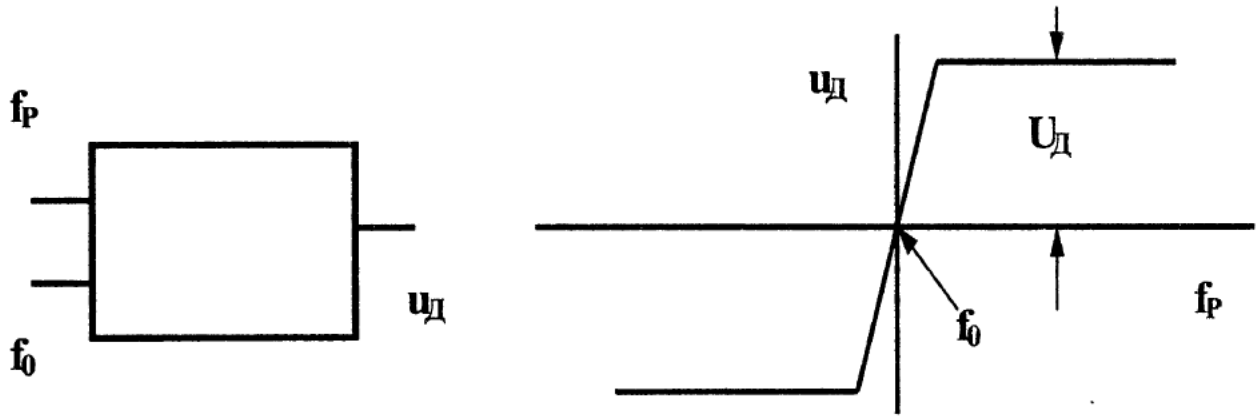


Рис. 6.3

В качестве частотного дискриминатора может использоваться и микросхема, имеющая два входа (рис. 6.4,а). На 1-й вход подается сигнал частоты f_0, определяющий среднюю частоту дискриминатора, а на 2-й – сигнал разностной частоты $f_Р=f_{СТ} - f_{ЭТ}$. При $f_Р>f_0$ напряжение на выходе дискриминатора $u_Д=U_Д$, а при $f_Р<f_0$ напряжение $u_Д= - U_Д$. В результате характеристика дискриминатора имеет вид, приведенный на рис. 6.4,б.



а) **Рис. 6.4** б)

Из схем управления частотой автогенератора выделим две: с варикапом и ферритом. Варикапом называется полупроводниковый диод, емкость закрытого **p–n** перехода которого существенно зависит от величины приложенного напряжения $U_{ОБР}$. Данная зависимость определяется следующим примерным соотношением:

$$C = \frac{C_0}{\sqrt{1 + 2|U_{ОБР}|}}. \qquad (6.10)$$

Схема управляющего элемента с варикапом приведена на рис. 6.5.

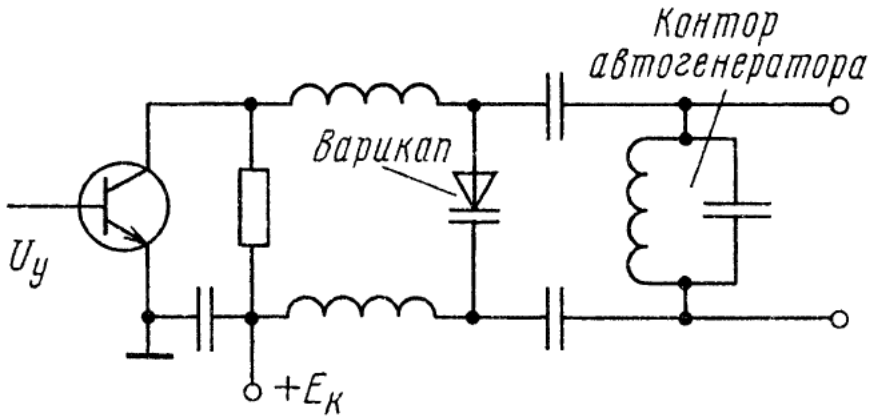


Рис. 6.5

Схема управляющего элемента с ферритом изображена на рис. 6.6 Катушка индуктивности с высокочастотным ферритом располагается в зазоре электромагнита. При изменении тока подмагничивания меняется дифференциальная магнитная проницаемость феррита, что приводит к изменению индуктивности контура и частоты автоколебаний.

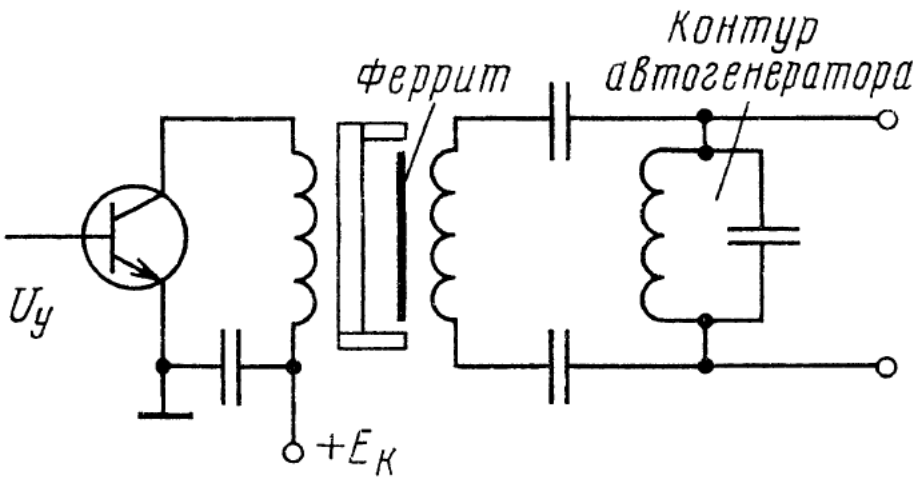
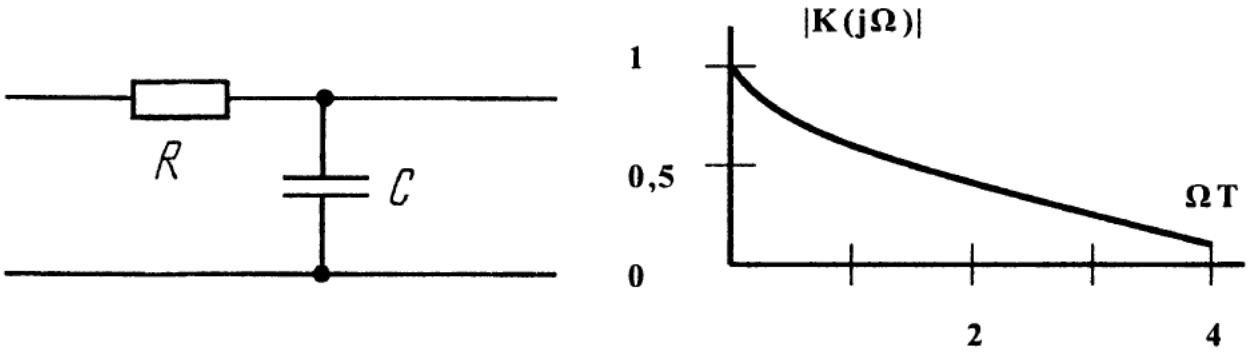


Рис. 6.6

В обеих схемах характеристика управляющего элемента $\Delta f_У=\psi(U_У)$ подобна характеристике, приведенной на рис. 6.2,б. В качестве фильтра нижних частот может использоваться, например, однозвенный RC-фильтр (рис. 6.7,а), передаточная функция и коэффициент передачи которого описываются выражениями:

$$K(p)=\frac{1}{1+Tp} \quad и \quad K(j\Omega)=\frac{1}{1+jT\Omega}\ , \tag{6.11}$$

где T=RC – постоянная времени фильтра.



а) **Рис. 6.7** б)

Характеристика модуля коэффициента передачи приведена на рис. 6.7,б. Анализ устройства ЧАП проведем в рамках линейной и нелинейной модели.

Анализ линейной модели ЧАП. Примем следующее начальное условие для частоты стабилизируемого автогенератора:

$$\Delta f_{СТ.С}(t)=0 \text{ при } t\le 0 \text{ и } \Delta f_{СТ.С}(t)=\Delta f_Н \text{ при } t>0, \tag{6.12}$$

где $\Delta f_Н$ – отклонение частоты стабилизируемого генератора от номинального значения в момент включения, называемое начальной расстройкой.

У характеристик частотного дискриминатора и управляющего элемента используются только линейные участки их характеристик (рис. 6.2). При данных условиях согласно (6.6) и (6.7) для передаточной функции устройства получим:

$$\Delta f_{СТ}(p)=\frac{\Delta f_Н}{1+S_Д S_У K_Ф(p)}. \tag{6.13}$$

При однозвенном RC-фильтре (рис. 6.7) с учетом (6.11) из (6.13) имеем:

$$\Delta f_{СТ}(p)=\frac{(1+pT)}{1+K_Р+pT}\Delta f_Н, \tag{6.14}$$

где $K_P=S_Д S_У$ – коэффициент регулирования.

Перейдя согласно правилам операционного исчисления от изображения функции (6.14) к оригиналу, получим для переходного процесса установления частоты стабилизируемого автогенератора в линейной модели ЧАП:

$$\Delta f_{CT}(t) = \frac{\Delta f_H}{1+K_P}[1 + K_P \exp(-\frac{1+K_P}{T}t)]. \qquad (6.15)$$

Из (6.15) получим в установившемся режиме работы при $t=\infty$:

$$\Delta f_{CT}(\infty) = \Delta f_{OP} = \frac{\Delta f_H}{1+K_P}. \qquad (6.16)$$

Данный параметр, характеризующий точность системы, называется остаточной расстройкой. Согласно (6.15) и (6.16) первоначальная ошибка Δf_H за счет ЧАП по экспоненциальному закону уменьшается в $(1+K_P)$ раз. Считая переходный процесс заканчивающимся при $\Delta f_{CT}(t)=2\Delta f_{OP}$, получим из (6.15) для времени установления частоты стабилизируемого автогенератора:

$$t_{пер.ст} = \frac{T}{K_P}\ln K_P. \qquad (6.17)$$

Рассмотренная линеаризированная система ЧАП описывается уравнением 1-го порядка и поэтому она устойчива при любых значениях параметров T и K_P. Однако в реальных устройствах всегда есть дополнительное запаздывание сигнала, что ограничивает максимальное значение K_P и минимальное значение T с целью обеспечения устойчивости.

Анализ нелинейной модели ЧАП. Составим и решим уравнение устройства ЧАП (рис. 6.1) с одним нелинейным элементом – частотным дискриминатором, выполняющим роль сравнивающего устройства. Заметим, что поскольку у управляющего элемента используется только линейный участок характеристики (рис. 6.2,б), то этот каскад схемы является линейным звеном. В результате из общего уравнения (6.3) для нелинейной ЧАП запишем:

$$\Delta f_{CT}(t)=\Delta f_{CTC}(t)+\boldsymbol{K_{CP}K_Ф}S_У[\Delta f_{ЭТ}(t)-\Delta f_{CT}(t)], \qquad (6.18)$$

которое преобразуем к виду:

$$\boldsymbol{K_{Ф.ОБР}}[\Delta f_{CT}(t)]=\boldsymbol{K_{Ф.ОБР}}[\Delta f_{CT.C}(t)]+S_У\boldsymbol{K_{CP}}[\Delta f_{ЭТ}(t)-\Delta f_{CT}(t)] \qquad (6.19)$$

где $\boldsymbol{K_{Ф.ОБР}}$ – линейный оператор, обратный оператору $\boldsymbol{K_Ф}$.

Дифференциальный оператор фильтра нижних частот n-го порядка:

$$K_{\Phi}(p)=\frac{1}{1+a_1 p+a_2 p^2+...+a_n p^n}\ , \qquad (6.20)$$

откуда для оператора обратного (6.20) получим:

$$K_{\Phi.ОБР}(p)=1+a_1 p+a_2 p^2+...+a_n p^n\ . \qquad (6.21)$$

Приняв за начальное условие (6.12), имеем $K_{Ф.ОБР}(p)\Delta f_H=\Delta f_H$, так как все производные от постоянной величины Δf_H равны 0. Оператор $K_{СР}$ при $\Delta f_{ЭТ}(t)=0$ определяется нелинейной характеристикой частотного дискриминатора (рис. 6.2,б; 6.4,б), которую обозначим $\Psi(\Delta f_{СТ})$. В результате из (6.19) получим уравнение для нелинейной модели ЧАП:

$$K_{Ф.ОБР}(p)\Delta f_{СТ}+S_У\Psi(\Delta f_{СТ})=\Delta f_H. \qquad (6.22)$$

Нелинейная характеристика частотного дискриминатора $\Psi(\Delta f_{СТ})$ может быть аппроксимирована нелинейной функцией:

$$\Psi(\Delta f_{СТ})=\frac{S_Д\Delta f_{СТ}}{1+d\left|\Delta f_{СТ}\right|+g(\Delta f_{СТ})^2}. \qquad (6.23)$$

С помощью (6.23), меняя значения входящих в нее коэффициентов $S_Д$, d, g, можно описать широкий класс характеристик частотного дискриминатора, в том числе приведенных на рис. 6.2,б и 6.4,б. Два примера таких характеристик, рассчитанных согласно (6.23), со значениями входящих в них коэффициентов приведены на рис. 6.8. Будем называть характеристику рис. 6.8,а – 1-го типа, рис. 6.8,б – 2-го типа.

Рассмотрим применение в системе ЧАП фильтров 1-го и 2-го порядка. Для фильтра 1-го порядка, схема которого изображена на рис. 6.7, согласно (6.21) имеем $K_{Ф.ОБР}(p)=1+a_1 p=1+Tp$.

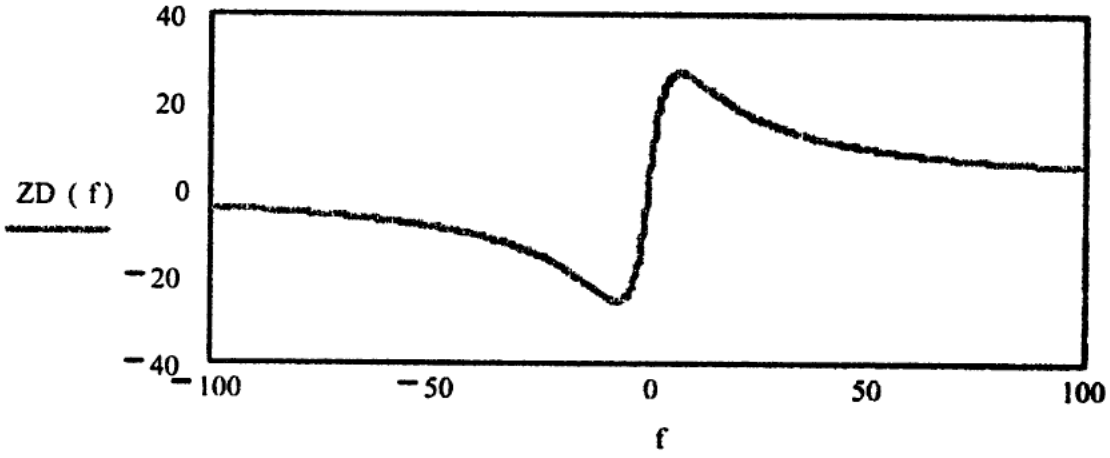
В результате из (6.22) получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка для нелинейной ЧАП с однозвенным RC-фильтром:

$$\frac{d\Delta f_{СТ}}{dt}=\frac{\Delta f_H}{T}-\frac{\Delta f_{СТ}}{T}-\frac{S_У\Psi(\Delta f_{СТ})}{T}, \qquad (6.24)$$

где $\Psi(\Delta f_{СТ})$ – функция, определяемая согласно (6.23).

$$SD := 10 \qquad d := 0.1 \qquad g := 0.02$$

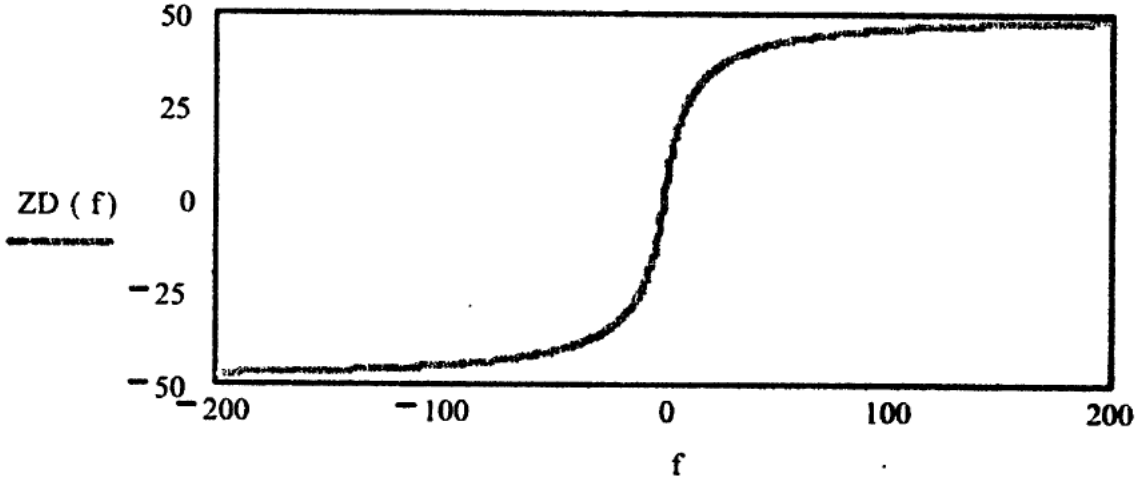
$$ZD(f) := \frac{(SD \cdot f)}{1 + d \cdot |f| + g \cdot f^2}$$



а)

$$SD := 5 \qquad d := 0.1 \qquad g := 0$$

$$ZD(f) := \frac{(SD \cdot f)}{1 + d \cdot |f| + g \cdot f^2}$$



б)

Рис. 6.8

На основании полученного уравнения (6.24) составим с помощью математического пакета "Mathcad" программу, позволяющую исследовать работу **нелинейной ЧАП 1-го порядка** в широком диапазоне изменения ее параметров: характеристик дискриминатора и фильтра нижних частот, коэффициента регулирования.

В составленной программе (рис. 6.9) решение нелинейного дифференциального уравнения (6.24) проводится с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка путем обращения к функции **Rkadapt** (см. Приложение 2).

В программе приняты следующие обозначения:

SU=$S_У$ – крутизна характеристики управляющего элемента (рис. 6.2,б);

FH=$\Delta f_Н$ – начальная расстройка;

T – постоянная фильтра нижних частот;

$S_Д$, d, g – коэффициенты характеристики частотного дискриминатора (6.23);

$Y^{<2>}$, $y_1=\Delta f_{СТ}$ – отклонение частоты стабилизируемого автогенератора;

$Y^{<1>}$ – время;

AX – амплитудно-частотная характеристика фильтра нижних частот, рассчитываемая после ввода исходных данных;

ZD(f) – характеристика частотного дискриминатора, также представляемая в виде графика (рис. 6.8).

При вводе параметров, относящихся к частоте в Гц, постоянная времени T и размерность времени переходного процесса, рассчитываемого по программе, – в секундах; при частоте в кГц, время – мс; при частоте в МГц, время – мкс.

Результаты расчета по программе трех случаев в виде графика переходного процесса $\Delta f_{СТ}(t)$ приведены на рис. 6.10.

1-й случай: (рис. 6.10,а): дискриминатор 1-го типа (рис. 6.8,а), T=1, $\Delta f_Н$=100.

2-й случай: (рис. 6.10,б): дискриминатор 2-го типа (рис. 6.8,б), T=1, $\Delta f_Н$=100.

3-й случай: (рис. 6.10,в): дискриминатор 1-го типа (рис. 6.8,а), T=1, $\Delta f_Н$=200.

Из сравнения 1-го и 2-го случаев видно существенное влияние на время переходного процесса вида характеристики частотного дискриминатора. Сам переходный процесс носит в обоих случаях апериодический характер, как и в случае линеаризированной системы ЧАП 1-го порядка, однако протекает значительно дольше, что следует из сравнения с (6.15).

Полосу схватывания, т. е. предельно возможное значение начальной расстройки, при которой устройство нормально функционирует, можно найти постепенно увеличивая значение FH=$\Delta f_Н$, и наблюдая, когда функция $\Delta f_{СТ}(t)$ перестанет стремиться к 0. Именно такая ситуация рассмотрена в 3-м случае. Здесь показано, как выход начальной расстройки за пределы полосы схватывания приводит к тому, что устройство ЧАП перестает нормально работать и частота стабилизируемого автогенератора остается далеко отстоящей от номинального значения.

$SU := 20 \qquad FH := 100 \qquad T := 1$

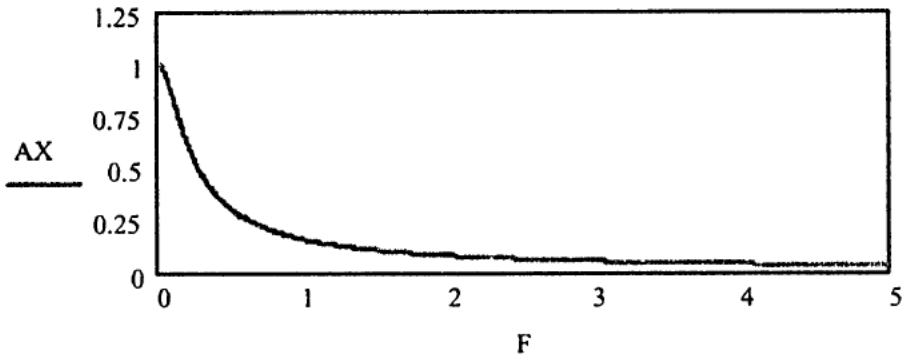
$SD := 10 \qquad d := 0.1 \qquad g := 0.02$

$$ZD(f) := \frac{(SD \cdot f)}{1 + d \cdot |f| + g \cdot f^2}$$

$j := \sqrt{-1} \qquad N := 1000 \qquad i := 0..N$

$F_i := 0.01 \cdot i \qquad p_i := 2 \cdot \pi \cdot j \cdot 0.01 \cdot i$

$$KF_i := \frac{1}{1 + T \cdot p_i} \qquad AX_i := |KF_i|$$



$ORIGIN := 1 \qquad y_1 := FH$

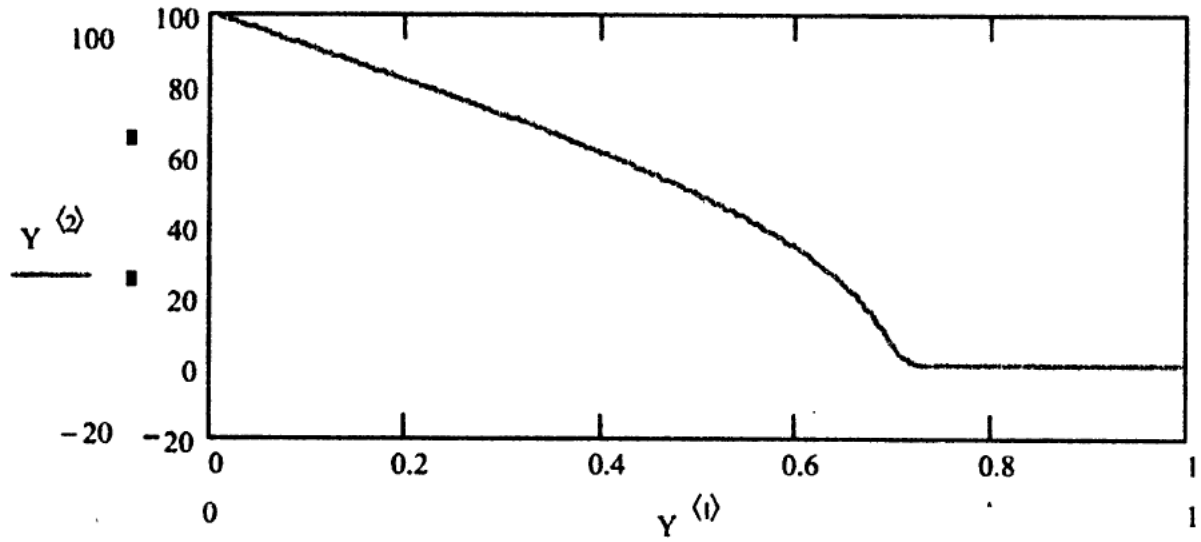
$$F(t,y) := \frac{FH - y_1 - SD \cdot SU \cdot y_1 \cdot \left[\frac{1}{1 + d \cdot |y_1| + g \cdot (y_1)^2} \right]}{T}$$

$Y := Rkadapt(y, 0, 2, 501, F)$

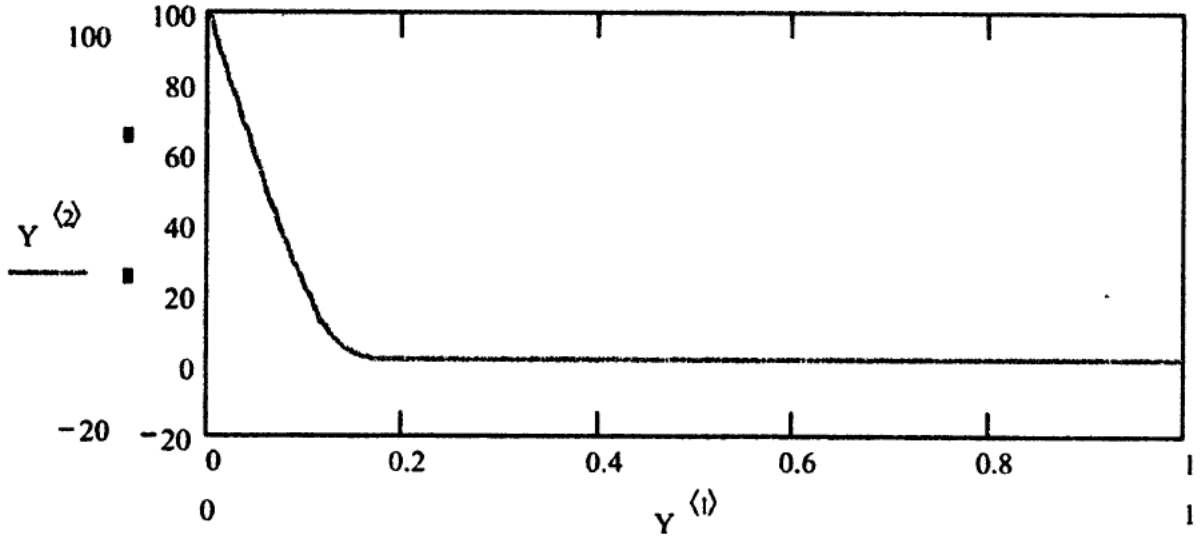
$Y =$

	1	2	3
1	0	100	
2	$3.992 \cdot 10^{-3}$	99.622	
3	$7.984 \cdot 10^{-3}$	99.244	
4	0.012	98.866	
5	0.016	98.488	
6	0.02	98.11	
7	0.024	97.732	

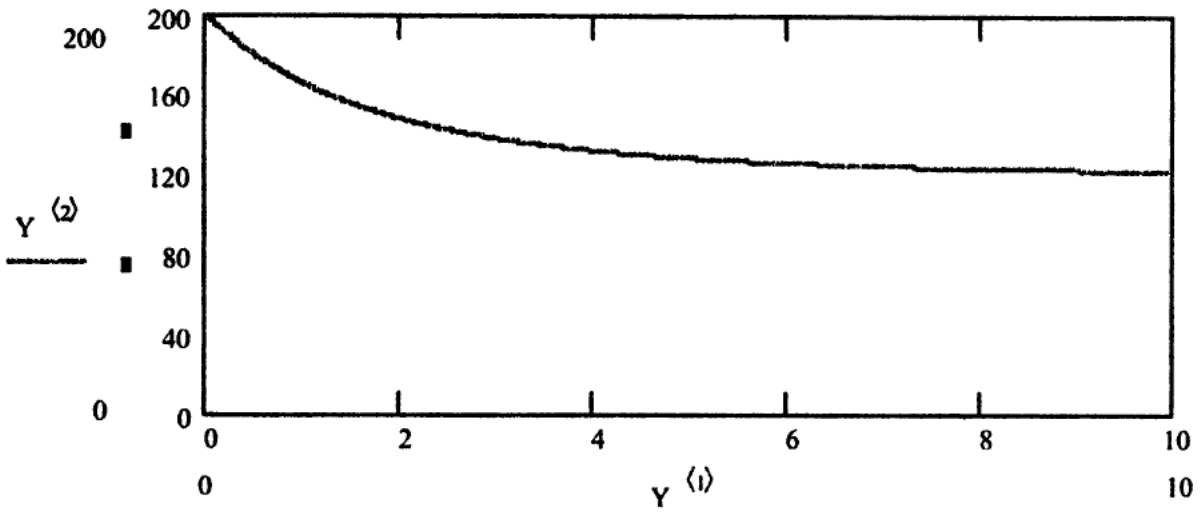
Рис. 6.9


100
80
60
40
20
0
-20
Y ⟨2⟩
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y ⟨1⟩

а)


100
80
60
40
20
0
-20
Y ⟨2⟩
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y ⟨1⟩

б)


200
160
120
80
40
0
Y ⟨2⟩
0
2
4
6
8
10
Y ⟨1⟩

в)

рис. 6.10

Рассмотрим работу **нелинейной ЧАП 2-го порядка**, для фильтра которой согласно (6.21) имеем:

$$K_{Ф.ОБР}(p)=1+a_1p+a_2p^2. \qquad (6.25)$$

С учетом (6.25) получим из (6.22) следующее нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{d^2\Delta f_{CT}}{dt^2}=-\frac{1}{a_2}\Delta f_{CT}-\frac{a_1}{a_2}\frac{d\Delta f_{CT}}{dt}-\frac{S_y}{a_2}\Psi(\Delta f_{CT})+\frac{\Delta f_H}{a_2}. \qquad (6.26)$$

Рассмотрим использование в качестве фильтра нижних частот 2-го порядка R–L–C-фильтра, схема которого приведена на рис. 6.11.

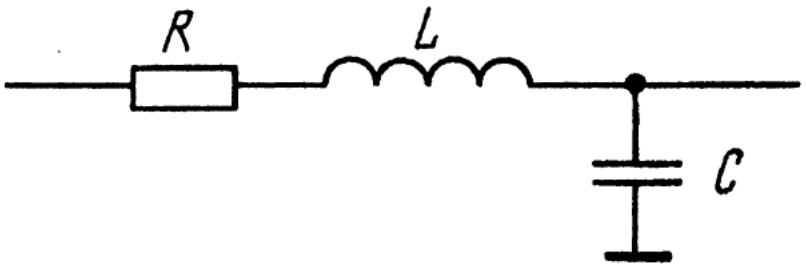


Рис. 6.11

Для коэффициента передачи фильтра имеем:

$$K_Ф(j\Omega)=\frac{(1/j\Omega C)}{R+j\Omega L+(1/j\Omega C)}=\frac{(\Omega_P)^2}{(\Omega_P)^2+\frac{\Omega_P}{Q}j\Omega+(j\Omega)^2}, \qquad (6.27)$$

$где..\Omega_P=1/\sqrt{LC}-резонансная..частота,$

$$Q=\frac{\sqrt{L/C}}{R}-добротность.$$

Из (6.27) получим ля передаточной функции фильтра (рис.6.11):

$$K_Ф=\frac{1}{1+a_1p+a_2p^2}=\frac{a}{a+bp+p^2}, \qquad (6.28)$$

$$где..a_1=1/\Omega_PQ,..a_2=1/(\Omega_P)^2,..a=(\Omega_P)^2,..b=\frac{\Omega_P}{Q}.$$

Характеристику фильтра (рис. 6.11) удобнее задать через значения его резонансной частоты F_P и добротности Q. Две такие характеристики приведены на рис. 6.12. При Q>1 характеристика имеет вид резонансной кривой.

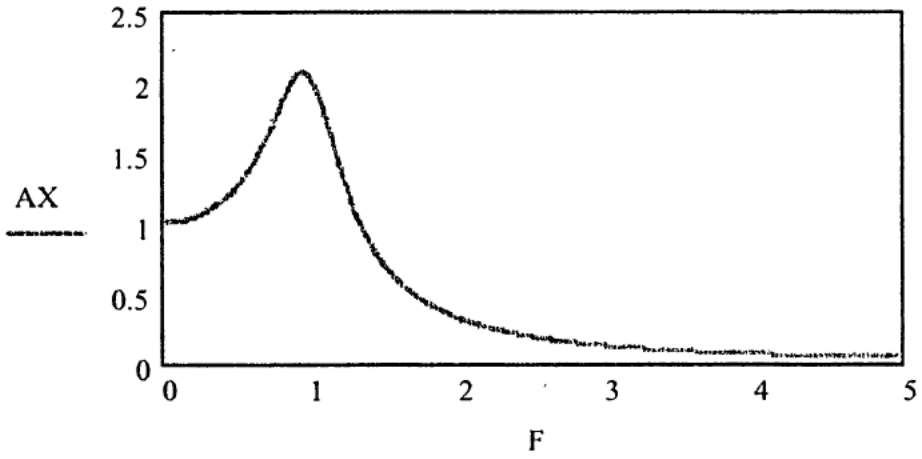
$$Q := 2 \qquad FP := 1$$

$$a := (2 \cdot \pi \cdot FP)^2 \qquad b := 2 \cdot \pi \cdot \frac{FP}{Q}$$

$$j := \sqrt{-1} \qquad N := 1000 \qquad i := 0..N$$

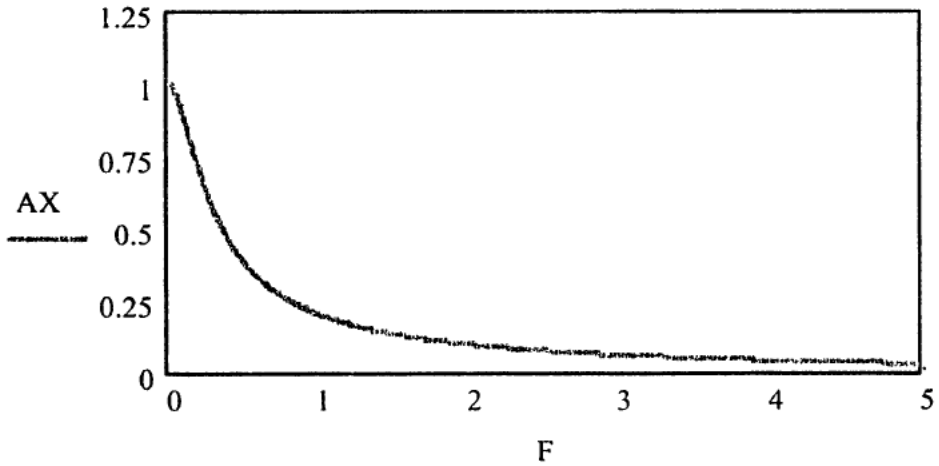
$$F_i := 0.01 \cdot i \qquad p_i := 2 \cdot \pi \cdot j \cdot 0.01 \cdot i$$

$$KF_i := \frac{a}{a + b \cdot p_i + (p_i)^2} \qquad AX_i := |KF_i|$$



б)

$$Q := 0.2 \qquad FP := 1$$



а) Рис. 6.12

На основании полученного уравнения (6.26) составим с помощью математического пакета "Mathcad" программу, позволяющую исследовать работу **нелинейной ЧАП 2-го порядка** в широком диапазоне изменения ее параметров: характеристик дискриминатора и фильтра нижних частот, коэффициента регулирования.

В составленной программе (рис. 6.13) решение нелинейного дифференциального уравнения (6.26) проводится с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка путем обращения к функции **Rkadapt** (см. приложение 2).

Само дифференциальное уравнение 2-го порядка (6.26) записано в программе в виде двух уравнений 1-го порядка с учетом зависимости (6.23) для нелинейной функции $\Psi(\Delta f_{CT})$ и коэффициентов фильтра (6.28):

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{1}{a_2} y_1 - \frac{a_1}{a_2} y_2 - \frac{S_y}{a_2}\Psi(y_1) + \frac{\Delta f_H}{a_2}, \qquad (6.29)$$

$$где..y_1 = \Delta f_{CT} - функция,..y_2 = \frac{d\Delta f_{CT}}{dt} - производная.$$

Все обозначения в программе соответствуют принятым в предыдущей для нелинейной ЧАП 1-го порядка (рис. 6.9). Вводится только дополнительный параметр для производной функции Δf_{CT}: $y_2=Y^{<3>}$,

Результаты расчета по программе четырех случаев в виде графика переходного процесса $\Delta f_{CT}(t)$ и интегральной кривой для 1-го случая приведены на рис. 6.14

1-й случай: (рис. 6.14,а): дискриминатор 1-го типа (рис. 6.8,а), Q=2; Δf_H=100.

2-й случай: (рис. 6.14,б): дискриминатор 1-го типа (рис. 6.8,а), Q=0,2; Δf_H=100.

3-й случай: (рис. 6.14,в): дискриминатор 2-го типа (рис. 6.8,б), Q=2; Δf_H =100.

4-й случай: (рис. 6.14,г): дискриминатор 1-го типа (рис. 6.8,а), Q=2; Δf_H =200.

Из сравнения 1-го и 2-го случаев видно существенное влияние на характер и время переходного процесса добротности фильтра нижних частот: в 1-м случае (при Q=2) он носит колебательный характер, во 2-м – (при Q=0,2) – апериодический.

Из сравнения 1-го и 3-го случаев видно существенное влияние на время переходного процесса вида характеристики частотного дискриминатора.

В 4-м случае показано, как выход начальной расстройки за пределы полосы схватывания приводит к тому, что устройство ЧАП перестает нормально работать и частота стабилизируемого автогенератора остается далеко отстоящей от номинального значения.

$$SU := 20 \qquad FH := 100$$

$$SD := 10 \qquad d := 0.1 \qquad g := 0.02$$

$$ZD(f) := \frac{(SD \cdot f)}{1 + d \cdot |f| + g \cdot f^2}$$

$$Q := 2 \qquad FP := 1$$

$$a := (2 \cdot \pi \cdot FP)^2 \qquad b := 2 \cdot \pi \cdot \frac{FP}{Q}$$

$$j := \sqrt{-1} \qquad N := 1000 \qquad i := 0..N$$

$$F_i := 0.01 \cdot i \qquad p_i := 2 \cdot \pi \cdot j \cdot 0.01 \cdot i$$

$$KF_i := \frac{a}{a + b \cdot p_i + (p_i)^2} \qquad AX_i := |KF_i|$$

$$ORIGIN := 1 \qquad y := \begin{pmatrix} FH \\ 2 \end{pmatrix}$$

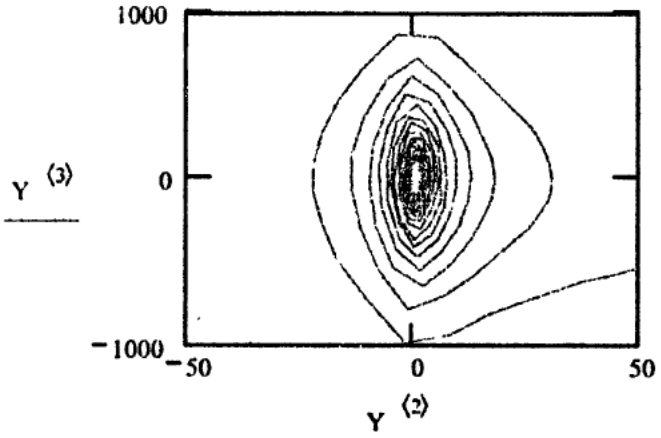
$$F(t,y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ FH \cdot a - y_1 \cdot a - b\, y_2 - \dfrac{(SD \cdot SU \cdot y_1) \cdot a}{\left[1 + d \cdot |y_1| + g \cdot (y_1)^2\right]} \end{bmatrix}$$

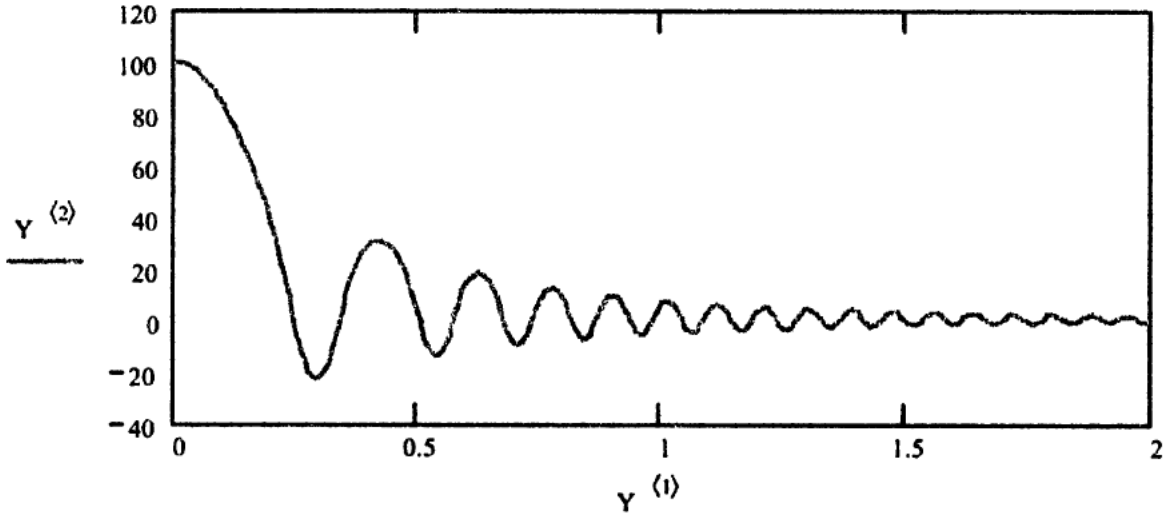
$$Y := Rkadapt(y, 0, 2, 201, F)$$

$Y =$

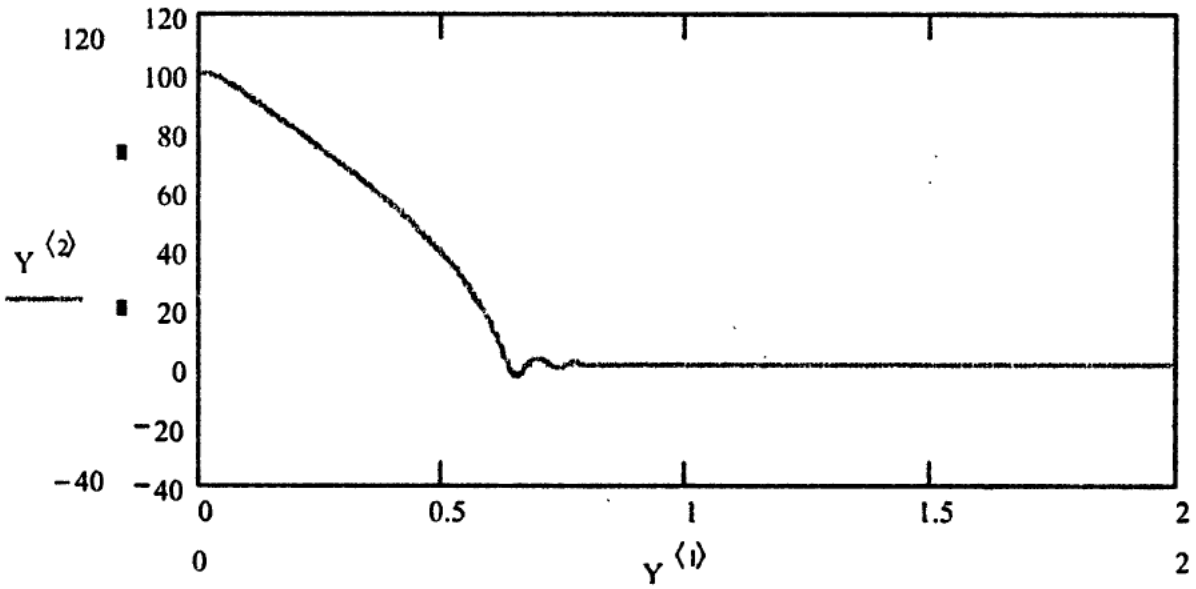
	1	2	3
1	0	100	2
2	$9.95 \cdot 10^{-3}$	99.836	-34.718
3	0.02	99.313	-70.292
4	0.03	98.441	-104.746
5	0.04	97.232	-138.108
6	0.05	95.696	-170.414
7	0.06	93.844	-201.707

Рис. 6.13

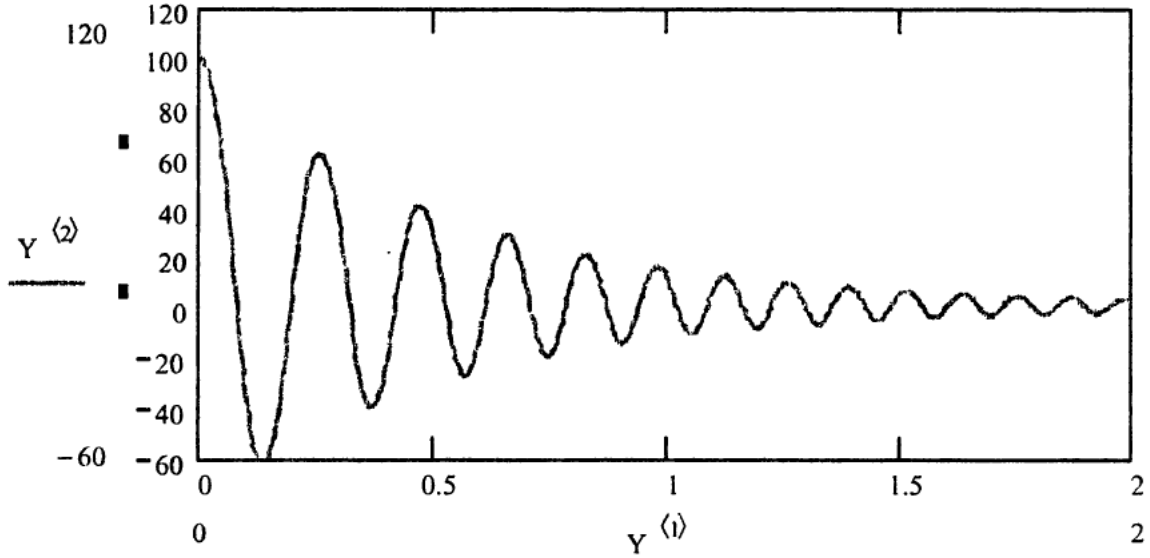

1000
0
−1000
−50
0
50
Y ⟨3⟩
Y ⟨2⟩


120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
0
0.5
1
1.5
2
Y ⟨2⟩
Y ⟨1⟩

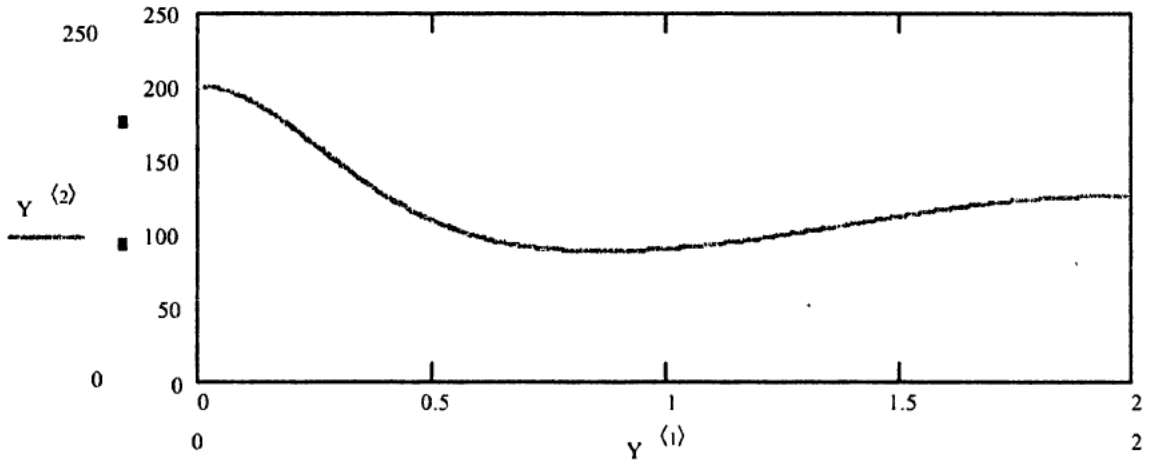
а)


120
100
80
60
40
20
0
−20
−40
0
0.5
1
1.5
2
Y ⟨2⟩
Y ⟨1⟩

б)



в)



г)

Рис. 6.14

Таким образом, проведенный анализ и составленные на его основании программы (рис. 6.9 и 6.13) по расчету нелинейной ЧАП 1-го и 2-го порядков позволяют исследовать их работу при разных видах характеристик частотного дискриминатора, широком изменении параметров фильтра и управляющего элемента, а также разных начальных расстройках частоты стабилизируемого автогенератора относительно номинального значения. По программам можно рассчитать переходный процесс, определить время установления частоты стабилизируемого автогенератора, точность устройства и полосу схватывания.

6.4. Фазовая автоподстройка частоты

Звенья устройства. Структурная схема устройства фазовой автоподстройки частоты (ФАП) непрерывного типа приведена на рис. 6.1. В ней под звеном сравнения следует понимать фазовый дискриминатор, напряжение на выходе которого зависит от мгновенной разности фаз входных сигналов. Таким образом, единственное отличие ФАП от ЧАП состоит в замене сравнивающего элемента – частотного дискриминатора на фазовый, что однако приводит к важным изменениям в работе устройств. Известно несколько схем фазовых дискриминаторов, одна из которых – кольцевого типа – изображена на рис. 6.15. Все остальные звенья схемы ФАП идентичны рассмотренным выше звеньям ЧАП.

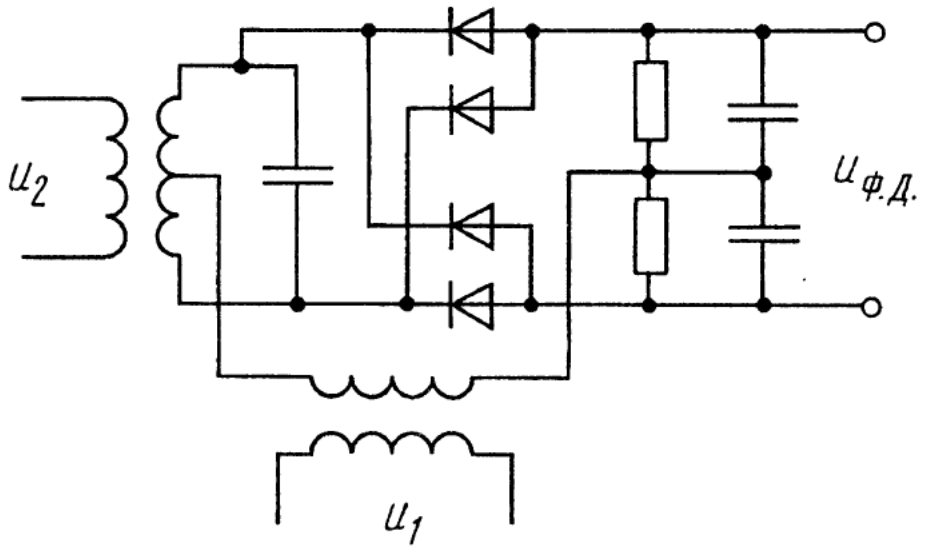


Рис. 6.15

Фазовый дискриминатор, вырабатывающий напряжение зависящее от разности мгновенных фаз входных колебаний, можно рассматривать как перемножитель этих колебаний. Докажем данное положение.

Перемножим два колебания:

$$u_{ВЫХ} = k \times u_1 \times u_2 = k \times U_1 \cos\omega_1 t \times U_2 \cos\omega_2 t = 0{,}5kU_1U_2[\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t. \quad (6.30)$$

После фильтрации колебания с суммарной частотой получим выходной сигнал, зависящий от разности фаз входных сигналов:

$$u_{ВЫХ} = 0{,}5kU_1U_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t = U_m \cos\varphi(t). \quad (6.31)$$

Рассмотрим сначала установившийся режим работы ФАП, приняв во внимание два обстоятельства. Во-первых, поскольку в этом режиме напряжение на выходе фильтра нижних частот равно входному напряжению (см. рис. 6.7, 6.11),

то справедливо следующее равенство: $u_{ФД}=u_У$, где $u_{Ф.Д}$ – напряжении на выходе фазового дискриминатора, $u_У$ напряжение на входе управляющего элемента (рис. 6.16)

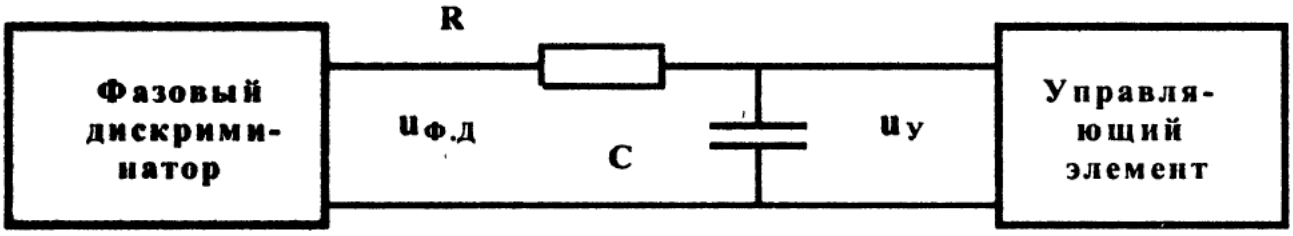


Рис. 6.16

Во-вторых, в нормально функционирующей ФАП в установившемся режиме должна устанавливаться постоянная разность фаз сигналов стабилизируемого и эталонного автогенераторов: $\varphi_{СТ}(t)-\varphi_{ЭТ}(t)=\varphi_Р=const$, что означает равенство частот этих колебаний $f_{СТ}(t)=f_{ЭТ}(t)$ или выполнение равенства $\Delta f_{СТ}=\Delta f_Н-\Delta f_У=0$, т. е. $\Delta f_У=\Delta f_Н$.

С учетом последних соотношений для ФАП в установившемся режиме справедлива следующая система из двух уравнений:

$$u_{Ф.Д}=U_m cos\varphi(t), \tag{6.32}$$

$$u_У=u_{Ф.Д}=\Delta f_Н/S_У. \tag{6.33}$$

Решим уравнения (6.32)–(6.33) графическим путем (рис. 6.17). Здесь, по-видимому, возможно три случая: 1) графики функций пересекаются во множестве точек; 2) график функции (6.33) является касательной по отношению к (6.32); 3) графики не имеют ни одной точки пересечения.

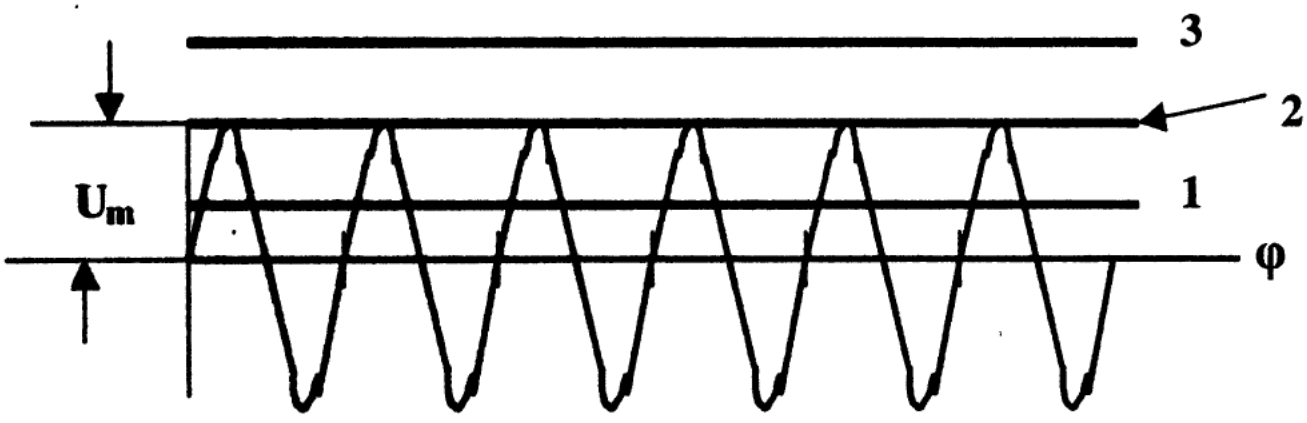


Рис. 6.17

Очевидно, в 3-м случае, при котором нет точек пересечения графиков, система уравнений (6.32)–(6.33) не имеет решения, что означает неработоспособность ФАП. В 1-м случае есть множество точек пересечения графиков –

по две на каждый период – и, следовательно, ФАП должна нормально функционировать. 2-й случай следует рассматривать, как крайний случай 1-го, при котором начальная расстройка Δf_H стабилизируемого автогенератора может быть максимальна. Такое максимальное значение Δf_H в установившемся режиме называется полосой удержания (см. § 6.1), для которой согласно (6.32)–(6.33) получим:

$$\Delta f_{УД}=S_У U_m. \qquad (6.34)$$

Перейдем к анализу динамического режима работы нелинейной модели ФАП. При исходной предпосылке о линейности характеристики управляющего элемента (рис. 6.2,б) из основного уравнения авторегулирования (6.3) получим:

$$\Delta f_{СТ}(t)=\Delta f_{СТС}(t)+S_У K_Ф K_{ФД}[\Delta f_{ЭТ}(t)-\Delta f_{СТ}(t)]. \qquad (6.35)$$

При однозвенном RC-фильтре с К(р), определяемом (6.11), $\Delta f_{ЭТ}(t)=0$ и начальном условии согласно (6.12) преобразуем (6.35) к виду:

$$(1+Tp)\Delta f_{СТ}=\Delta f_H+S_У K_{ФД}[\Delta f_{СТ}]. \qquad (6.36)$$

Уравнение (6.36) записано относительно частоты $\Delta f_{СТ}$, а характеристика фазового дискриминатора определена относительно разности фаз двух сигналов φ. Необходимо привести это уравнение к единой системе координат согласно соотношению, связывающему частоту с фазой колебаний:

$$\Delta f_{СТ}(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}. \qquad (6.37)$$

С учетом (6.37) и функции (6.31), определяющей характеристику фазового дискриминатора, преобразуем уравнение (6.36) к виду:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}=\frac{2\pi\Delta f_H}{T}-\frac{1}{T}\frac{d\varphi(t)}{dt}+\frac{2\pi S_У U_m}{T}\cos(\varphi(t)). \qquad (6.38)$$

На основании полученного уравнения (6.38) составим с помощью математического пакета "Mathcad" программу, позволяющую исследовать работу **нелинейной модели ФАП 2-го порядка** в широком диапазоне изменения ее параметров.

В составленной программе (рис. 6.18) решение нелинейного дифференциального уравнения (6.26) проводится с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка путем обращения к функции **Rkadapt** (см. Приложение 2).

Само дифференциальное уравнение 2-го порядка (6.38) записано в программе в виде двух уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2;$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{2\pi\Delta f_H}{T} - \frac{1}{T}y_2 + \frac{2\pi S_y U_m}{T}\cos(y_1),$$

$$где..y_1 = \varphi(t) - функция,..\frac{d\varphi(t)}{dt} - производная.$$

В программе приняты следующие обозначения:

SU=S_y – крутизна характеристики управляющего элемента (рис. 6.2,б);

FH=Δf_H – начальная расстройка;

TF–постоянная времени T фильтра нижних частот;

UM – амплитуда характеристики фазового дискриминатора (6.32);

$Y^{<1>}$ – время;

$Y^{<2>}$, $y_1=\varphi(t)$ – отклонение фазы стабилизируемого автогенератора;

$y_2=Y^{<3>}$ – производная функции.

При вводе параметров, относящихся к частоте в Гц, постоянная времени фильтра T и размерность времени переходного процесса, рассчитываемого по программе, – в секундах; при частоте в кГц, время – мс; при частоте в МГц, время – мкс.

Результаты расчета по программе пяти случаев в виде графика переходного процесса $\varphi(t)$ и фазовой траектории приведены на рис. 6.19. Параметры во всех случаях одинаковы(см. рис. 6.18), за исключением TF – постоянной времени T фильтра нижних частот и начальной расстройки FH, значения которых представлены в табл. 6.1

Таблица 6.1

Номер	Рисунок	FH, кГц	TF, мс	$T_{ПЕР}$, мс
1	6.19,а	100	1	10
2	6.19,б	100	0,1	1
3	6.19,в	100	0,01	0,1
4	6.19,г	100	0,001	0,01
5	6.19,д	120	1	Срыв

$UM := 10 \qquad SU := 20 \qquad TF := 0.1 \qquad FH := 100$

$ORIGIN := 1 \qquad y := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

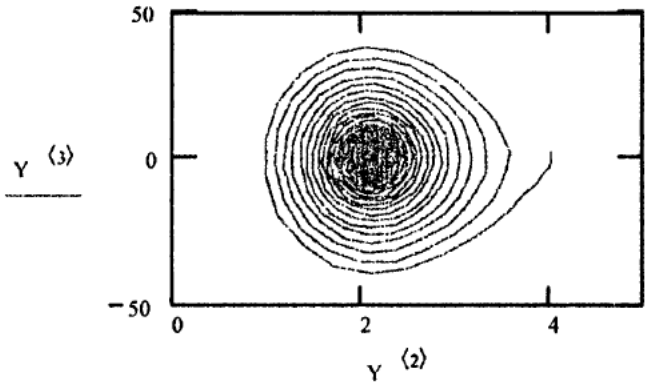
$$F(t,y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{(2\cdot\pi)}{TF}\cdot FH - \frac{y_2}{TF} + \frac{(2\cdot\pi\cdot SU\cdot UM)}{TF}\cdot\cos(y_1) \end{bmatrix}$$

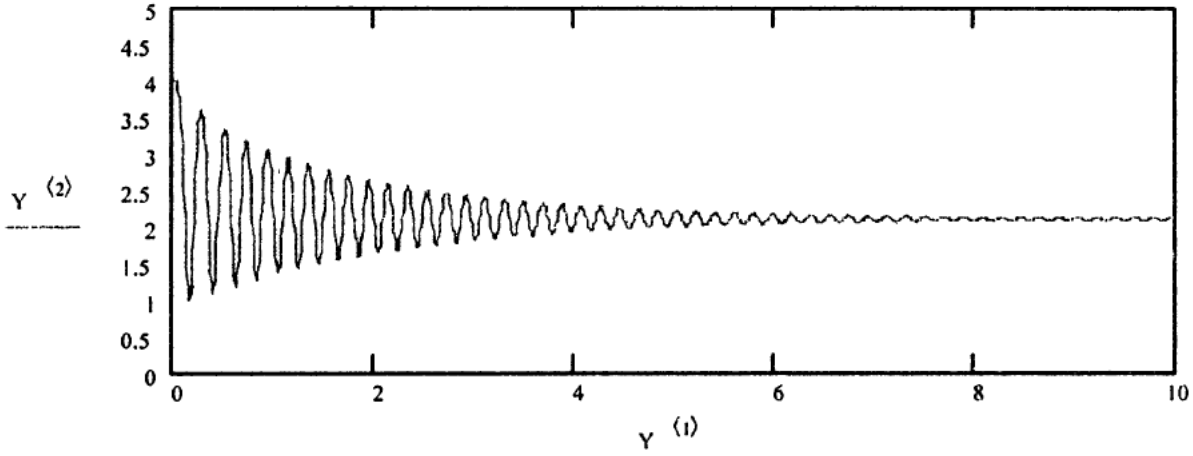
$Y := Rkadapt(y, 0, 1, 1001, F)$

$Y =$

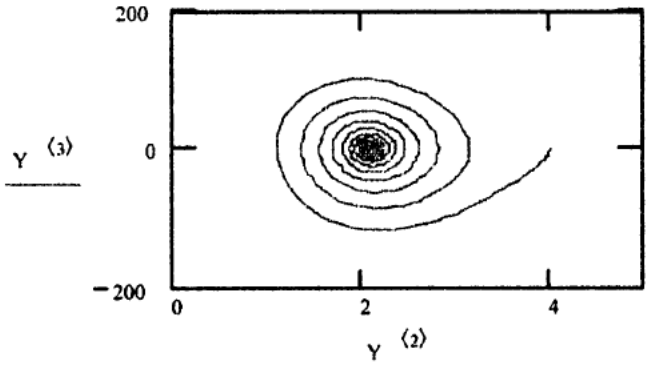
	1	2	3
6	$4.995\cdot10^{-3}$	3.986	-7.646
7	$5.994\cdot10^{-3}$	3.977	-9.66
8	$6.993\cdot10^{-3}$	3.967	-11.743
9	$7.992\cdot10^{-3}$	3.954	-13.913
10	$8.991\cdot10^{-3}$	3.939	-16.188
11	$9.99\cdot10^{-3}$	3.921	-18.585
12	0.011	3.902	-21.12
13	0.012	3.879	-23.812
14	0.013	3.854	-26.678
15	0.014	3.826	-29.732
16	0.015	3.795	-32.99
17	0.016	3.76	-36.466
18	0.017	3.722	-40.171
19	0.018	3.68	-44.114
20	0.019	3.633	-48.299

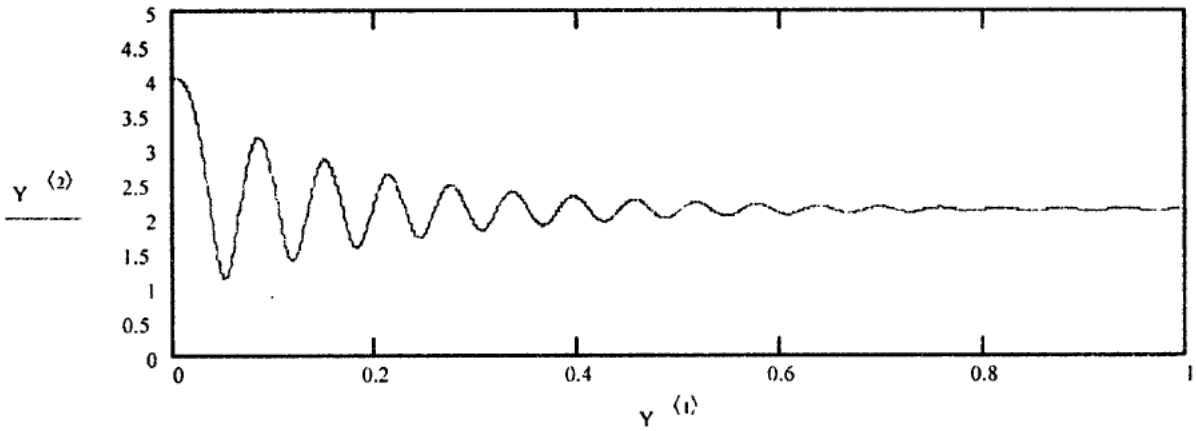
Рис. 6.18


50
0
−50
0
2
4
Y ⟨3⟩
Y ⟨2⟩

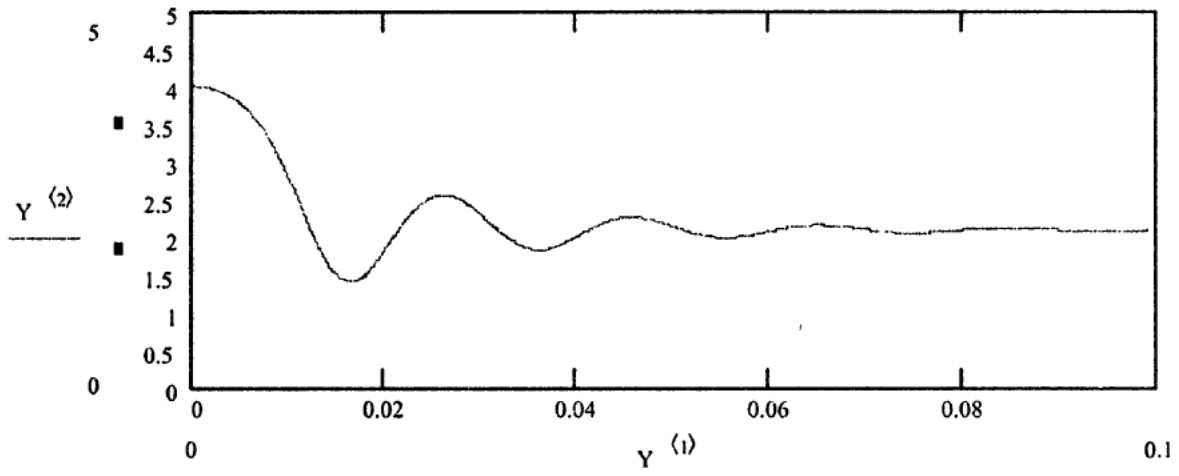

5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
Y ⟨2⟩
Y ⟨1⟩

а) T=1

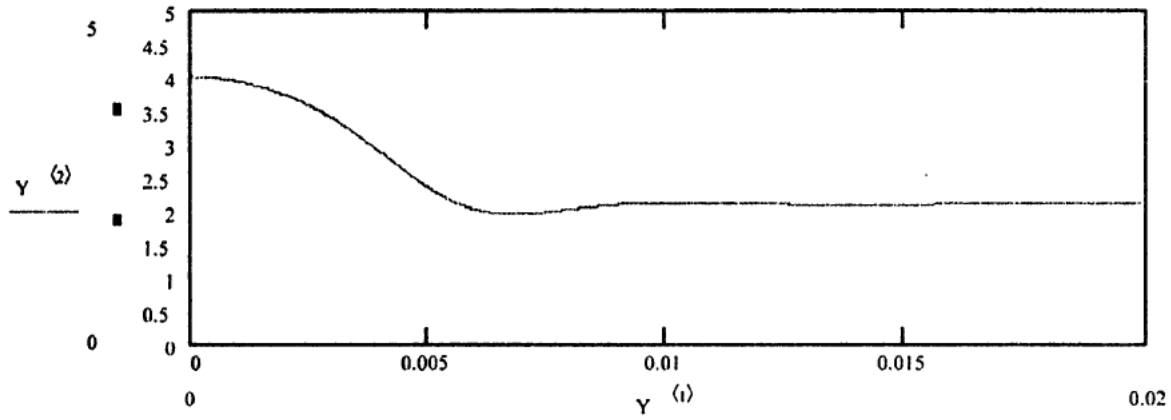

200
0
−200
0
2
4
Y ⟨3⟩
Y ⟨2⟩


5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y ⟨2⟩
Y ⟨1⟩

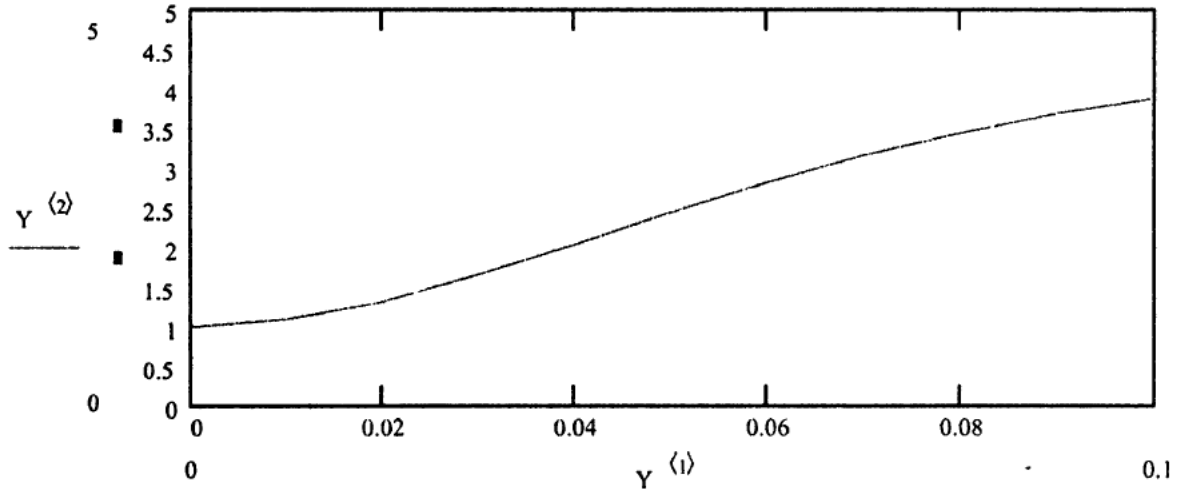
б) T=0,1



в) T=0.01



г) T=0.001



д) T=1, срыв автоподстройки

Рис. 6.19

Проведенный компьютерный анализ устройства ФАП с однозвенным RC-фильтром позволяет сделать следующие выводы:

- признаком нормальной работы ФАП является стремление функции $\varphi(t)$, определяющей разность фаз колебаний двух автогенераторов, к постоянному значению, а следовательно, к равенству частот этих автогенераторов (именно такая ситуация имеет место в первых четырех случаях на рис. 6.19);
- с уменьшение постоянной времени T фильтра нижних частот время переходного процесс уменьшается и сам процесс из затухающего, колебательного постепенно переходит в апериодический;
- при выбранных в расчетах параметрах ФАП время переходного процесса $T_{ПЕР} \approx 0,1T$;
- с увеличением значения T полоса схватывания уменьшается и становится зависимой от начальных условий.

Полосу схватывания, т. е. предельно возможное значение начальной расстройки, при которой устройство нормально функционирует, можно найти постепенно увеличивая значение $FH=\Delta f_H$, и наблюдая, когда функция $\varphi(t)$, определяющая разность фаз колебаний двух автогенераторов, перестанет стремиться к постоянному значению. Именно такая ситуация рассмотрена в 5-ом случае. Здесь показано, как выход начальной расстройки за пределы полосы схватывания приводит к тому, что устройство ФАП перестает нормально работать и разность фаз постоянно возрастает, что свидетельствует о том, что частоты автогенераторов отличны между собой.

По поводу полосы схватывания $\Delta f_{СХВ}$ следует сделать дополнительное замечание. Предположим, что в схеме ФАП используется идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с прямоугольной характеристикой и частотой среза $F_{СР}$ (рис. 6.20,а).

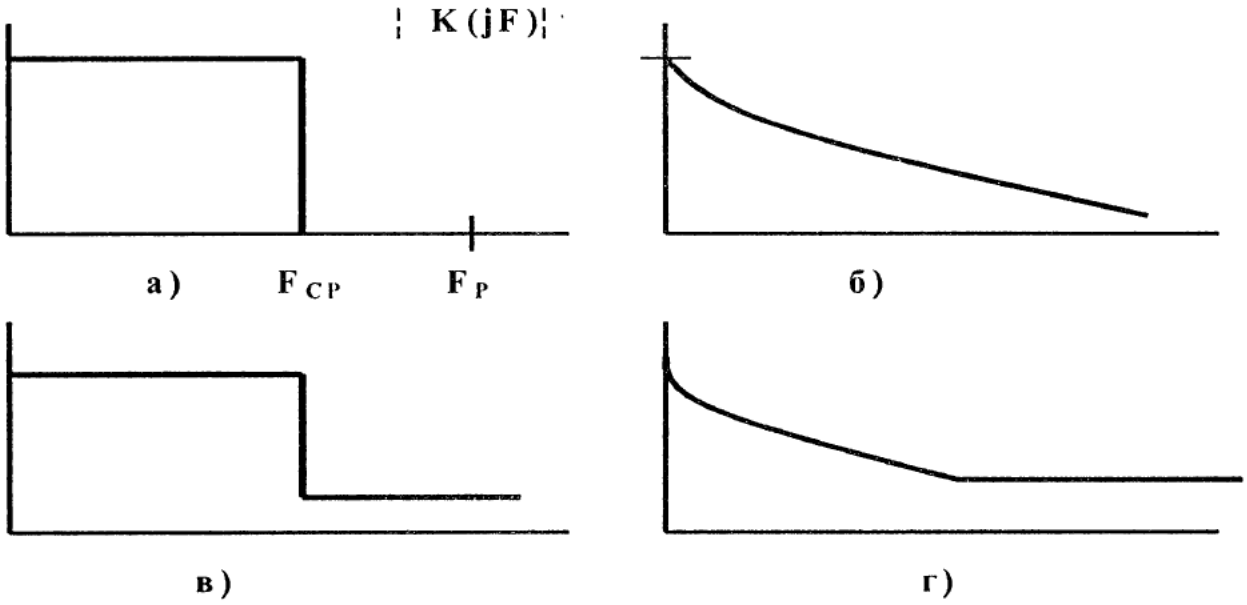


Рис. 6.20

В момент включения ФАП при t=0 мгновенная частота сигнала на выходе фазового дискриминатора $F_P=\Delta f_H$. Следовательно, при $\Delta f_H>F_{CP}$ схема окажется разомкнутой и вхождение в синхронизм не произойдет подобно тому, как это показано на рис. 6.19,д. Поскольку, однако, характеристика RC–фильтра имеет "хвост" (рис. 6.20,б) и сигнал с уменьшенной амплитудой все же проходит на вход управляющего элемента, то постепенно схема ФАП начинает входить в режим синхронизма – фаза при этом меняется по затухающему, колебательному закону.

Здесь следует отметить одно противоречие, свойственное схеме ФАП. Для повышения быстродействия схемы и расширения полосы схватывания (в пределе она равна полосе удержания, определяемой согласно (6.34)) следует расширять полосу пропускания ФНЧ, т. е. уменьшать его постоянную времени. С другой стороны, расширение этой полосы приводит к ухудшению помехоустойчивости схемы ФАП. Итак, получение хороших показателей устройства одновременно по двум параметрам – повышенной полосе схватывания и высокой помехоустойчивости – вступает в противоречие. Для его частичного разрешения следовало бы иметь характеристику ФНЧ с узкой основной частью и длинным "хвостом", обеспечивающим замкнутость ФАП и при большой начальной расстройке (рис. 6.20,в). Именно к такому виду приближается характеристика пропорционально-интегрирующего фильтра (рис. 6.20,г), две схемы которого приведены на рис. 6.21.

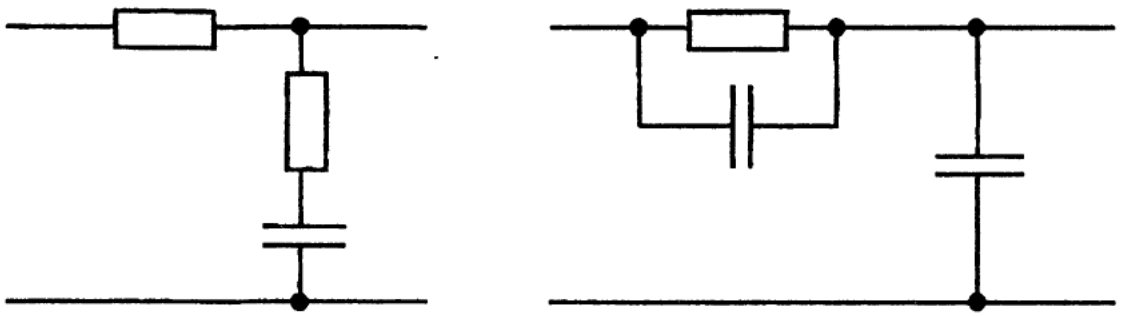


Рис. 6.21

Именно фильтр такого типа, в основном, и применяется в схемах ФАП непрерывного типа.

Основное преимущество ФАП перед ЧАП состоит в ее более высокой точности ввиду равенства частот стабилизируемого и эталонного автогенераторов (напомним, что в ЧАП они отличаются на величину остаточной расстройки). Для обеспечения большой полосы схватывания и высокой точности применяют комбинированные схемы ЧАП-ФАП [24].

В заключение отметим, что по программе, приведенной на рис. 6.18, можно провести всесторонне исследование работы схемы ФАП при изменении не только постоянной времени фильтра T, но и других параметров устройства.

6.5. Синтезатор частот

Синтезом частот называется формирование дискретного множества частот из одной или нескольких опорных частот. Опорной называется высокостабильная частота автогенератора, обычно кварцевого. Синтезатор частот – устройство, реализующее процесс синтеза, – используется в радиоприемных и радиопередающих устройствах различных радиотехнических систем, в том числе радиосвязи, радионавигации и радиолокации.

Основными параметрами синтезатора являются: диапазон частот выходного сигнала, количество и шаг сетки частот, долговременная и кратковременная нестабильность частоты, уровень побочных составляющих в выходном сигнале и время перехода с одной частоты на другую.

На первой стадии развития синтезатор частот состоял из большого числа кварцевых автогенераторов, с помощью которых путем суммирования и умножения частот сигналов с их дальнейшей фильтрацией удавалось создать определенную сетку частот. В настоящее время один из основных способов построения синтезатора частот основывается на применении схемы импульсно-фазовой автоподстройки частоты и элементов вычислительной техники. Рассмотри только принцип построения такого синтезатора частот в качестве примера применения автоматической подстройки частоты в радиотехнических устройствах. Подробные сведения по схемам, протекающим в них процессах и проектированию синтезаторов частот содержатся, например, в [25].

Структурная схема синтезатора с одним кольцом фазовой автоподстройки частоты приведена на рис. 6.22. Данная схема соответствует общей схеме автоматической подстройки частоты (рис. 6.1), если под преобразователями частоты понимать делитель в M раз частоты опорного генератора и делитель в N раз частоты стабилизируемого генератора, а под звеном сравнения – импульсно-фазовый дискриминатор. ДПКД на схеме есть делитель с переменным коэффициентом деления – К-разрядный программируемый цифровой счетчик. Назначение других звеньев схемы ясно из сделанных на них надписей. В блоке управления осуществляется прием и хранение данных программирования и формирование кодового сигнала, по которому устанавливается значение коэффициента деления N в зависимости от поступившей на синтезатор команды.

В результате действия фазовой автоподстройки частоты устанавливается равенство частот сигналов, поступающих на вход импульсно-фазового дискриминатора: $f_1=f_2$, что позволяет записать следующее соотношение для частот стабилизируемого и эталонного автогенераторов с учетом значений коэффициентов деления:

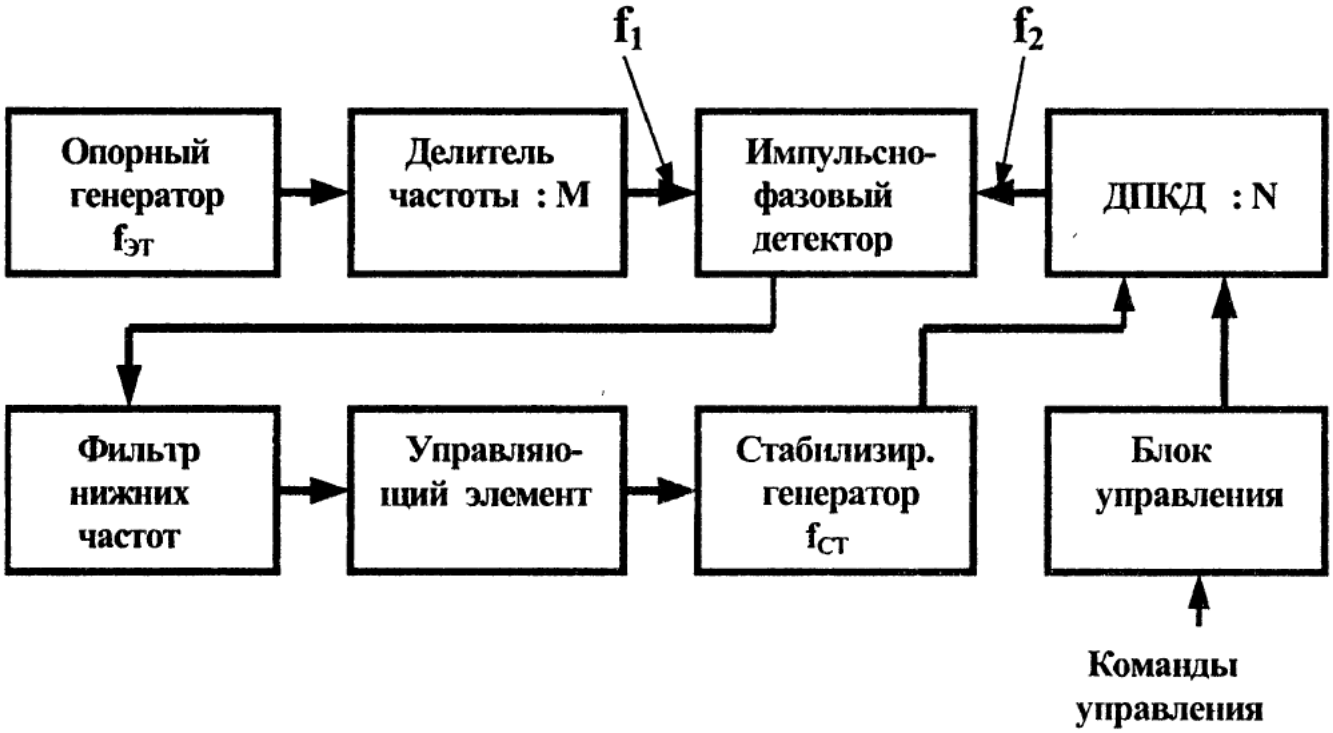


Рис. 6.22

$$\frac{f_{CT}}{N} = \frac{f_{ЭТ}}{M} \quad \text{или} \quad f_{CT} = \frac{N}{M} f_{ЭТ} \quad . \tag{6.39}$$

Согласно (6.39) шаг сетки частот $\Delta f_Ш = f_{ЭТ}/M$. Меняя управляемое значение N, устанавливают требуемое значение частоты стабилизируемого генератора, который с помощью управляющего элемента может перестраиваться в требуемом диапазоне частот. Схема автогенератора с управляющим элементом на варикапе может соответствовать рис. 6.5 или с ферритом – на рис. 6.6.

Пример. Требуется создать синтезатор с диапазоном частот 118...136 МГц и шагом $\Delta f_Ш$=25 кГц. Выбираем частоту кварцевого автогенератора $f_{ЭТ}$=1 МГц. Отсюда требуемое значение M=1000/25=40. Согласно (6.39) для нижней частоты 118 МГц следует иметь: N_1=118000/25=4720, для верхней частоты N_2=136000/25=5440. Следовательно, с помощью ДПКД – цифрового счетчика – следует обеспечить изменение коэффициента деления N через 1 в пределах от 4720 до 5440.

В целом современные синтезаторы частот строятся на основе одной большой микросхемы, в которую объединяются все звенья схемы рис. 6.22, за исключением управляемого по частоте стабилизируемого автогенератора.

Глава 7. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ С ВНЕШНИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

7.1. Общие принципы усиления и генерации высокочастотных и сверхвысокочастотных колебаний

Основное назначение генератора с внешним возбуждением (сокращенно – генератора) состоит в усилении мощности входного сигнала путем преобразования энергии источника постоянного тока в энергию высокочастотных (ВЧ) или сверхвысокочастотных (СВЧ) колебаний. Поскольку генераторы реагируют на внешнее воздействие, то они относятся к классу нелинейных неавтономных динамических устройств.

Известно большое число разнообразных электронных приборов – электровакуумных и полупроводниковых, используемых в генераторах с внешним возбуждением. Несмотря на различие физических процессов, протекающих в этих приборах, можно выделить общие черты, свойственные всем типам ВЧ и СВЧ генераторов.

Время взаимодействия. В основе работы всех типов электронных генераторных приборов лежит явление взаимодействия потока движущихся носителей заряда с электромагнитным полем. Обозначим время этого взаимодействия через $T_{ПР}$. Так в биполярном транзисторе под $T_{ПР}$ следует понимать время переноса не основных носителей заряда от эмиттера к коллектору, в полевом транзисторе – время переноса основных носителей заряда от истока к стоку, в электровакуумных лампах – время движения электронов от катоду к аноду, в СВЧ лампах бегущей волны – время движения электронов вдоль спирали и т. д. В зависимости от обобщенного параметра $\Delta=\omega T_{ПР}$, где ω – частота сигнала, электронные генераторные приборы можно разделить на три основные группы:

1) $\Delta<1$; 2) $\Delta\approx\pi$; 3) $\Delta>>1$.

ВЧ генераторные приборы–электровакуумные приборы и транзисторы – относятся к 1-й группе; СВЧ полупроводниковые генераторные диоды – лавинопролетные и Ганна – ко 2-й, большинство СВЧ электровакуумных приборов – например, лампы бегущей волны – к 3-й.

В приборах 1-й группы при нарушении соотношения $\Delta<1$, т. е. при частоте $\omega>(1/T_{ПР})$, резко уменьшается их выходная мощность, коэффициент усиления и КПД. Этот недостаток удалось преодолеть в приборах 3-й группы.

Принцип синхронизма и фазировки. Процессы усиления и генерации ВЧ и СВЧ колебаний сопровождаются двумя характерными явлениями. Первое связано с модуляцией потока носителей заряда по скорости и по плотности (или только по плотности). В результате происходит синхронное изменение частот колебаний потока и электромагнитного поля и обмен энергией между ними. В этом равенстве или кратности частот колебаний потока и поля и заключается соблюдение принципа синхронизма.

Однако соблюдения одного принципа синхронизма недостаточно, поскольку генерация и усиление ВЧ и СВЧ колебаний, сопровождающиеся

передачей энергии от потока полю, возможны только при торможении носителей заряда электромагнитным полем. Иначе говоря, перемещение носителей заряда под воздействием высокочастотного поля должно быть противоположно их движению за счет постоянного поля. В этом и заключается сущность принципа фазировки. Для его соблюдения необходимо иметь определенную разность фаз между векторами, характеризующими поток и поле, или между током $i(t)$, наведенным во внешней цепи, и напряжением $u(t)$ на электродах прибора. При торможении носителей заряда полем ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ должны находиться в противофазе.

Мощность взаимодействия и мощность 1-й гармоники генератора. Определим мощность взаимодействия между потоком носителей заряда и электромагнитным полем, что позволяет рассчитать мощность, генерируемую электронным прибором. Поток носителей заряда будем характеризовать током $i(t)$, наведенным во внешней цепи, а электромагнитное поле – напряжением $u(t)$ на электродах прибора. В силу нелинейного характера этого взаимодействия полное использование по мощности электронных генераторных приборов имеет место при несинусоидальных формах тока и напряжения, которые представим в виде ряда Фурье:

$$i(\omega t) = I_0 + \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{I}_k e^{jk\omega t}; \tag{7.1}$$

$$u(\omega t) = U_0 + \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{U}_k e^{jk\omega t}, \tag{7.2}$$

где U_0 – напряжение источника питания генератора; I_0 – постоянная составляющая тока,

$\dot{U}_k$, $\dot{I}_k$ – комплексные амплитуды гармоник, определяемые согласно (2.4).

Процесс взаимодействия потока носителей заряда с полем или электронного прибора с электрической цепью в установившемся режиме работы можно рассматривать по каждой гармонике сигнала. Мощность взаимодействия по 1-й гармонике составит:

$$P_{B3\,1} = 0{,}5\, \dot{I}_1^{*} \dot{U}_1 = \mathrm{Re}\, P_{B3\,1} + j\, \mathrm{Im}\, P_{B3\,1}, \tag{7.3}$$

где $\dot{I}_1^{*}$ – комплексно-сопряженная амплитуда 1-й гармоники тока, $\dot{U}_1$ – комплексная амплитуда напряжения.

Из (7.3) для активной и реактивной составляющих мощности взаимодействия получим:

$$P_{B3.A1} = \mathrm{Re}\, P_{B31} = 0{,}5 |I_1| |U_1| \cos\varphi_1; \tag{7.4}$$

$$P_{B3.P1} = \mathrm{Im}\, P_{B31} = 0{,}5 |I_1| |U_1| \sin\varphi_1, \tag{7.5}$$

где φ_1 – фазовый угол между двумя векторами (рис. 7.1).

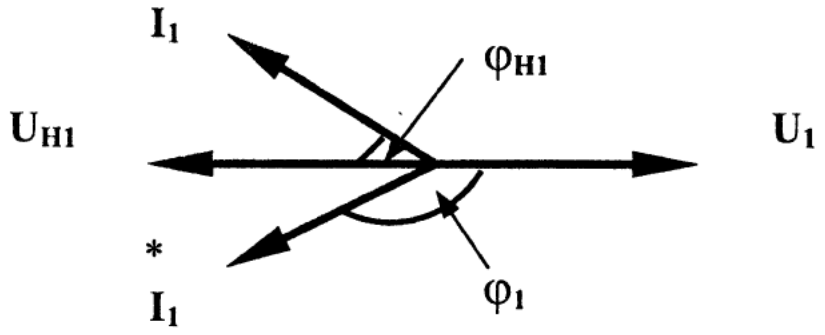


Рис. 7.1

При $P_{В3.А1}<0$ поток носителей зарядов отдает мощность электромагнитному полю или электронный прибор – электрической цепи. При $P_{В3.А1}>0$, наоборот, поле отдает мощность потоку зарядов и поэтому колебания в устройстве затухают или вообще не возникают. Неравенство $P_{В3.А1}<0$ соблюдается при $0{,}5\pi<\varphi_1<1{,}5\pi$,т. е. при выполнении условия фазировки. Мощность 1-й гармоники сигнала, передаваемая в активную нагрузку:

$$P_{Н1} = -P_{В3.А1} = 0{,}5|I_1||U_1|\cos\varphi_{Н1} \qquad (7.6)$$

где $\varphi_{Н1}=\pi-\varphi_1$ – разность фаз согласно рис. 7.1.

В выражении (7.3) реактивная составляющая мощности взаимодействия $P_{В3.Р1}$ характеризует обмен энергией между потоком и полем по 1-й гармонике сигнала или между электронным прибором и электрической цепью.

Мощность, потребляемая электронным прибором:

$$P_0=I_0U_0 \qquad (7.7)$$

С учетом (7.6) и (7.7) КПД генератора:

$$\eta = -\frac{P_{В3.А1}}{P_0} = \frac{P_{Н1}}{P_0} = \frac{1}{2}\frac{|I_1|}{I_0}\frac{|U_1|}{U_0}\cos\varphi_{Н1}. \qquad (7.8)$$

Значение КПД генератора зависит от типа электронного прибора, частоты и мощности усиливаемого сигнала и колеблется от 90% в нижней части ВЧ диапазона до 3–5% – в верхней части СВЧ диапазона. Мощность генераторных приборов колеблется от нескольких МВт в импульсном режиме работы до нескольких Вт в непрерывном режиме.

7.2. Основы теории высокочастотного генератора

Электрическая и эквивалентная схемы генераторов. Известно большое число разнообразных схем полупроводниковых и ламповых ВЧ генераторов с внешним возбуждением, две из них – с биполярным мощным транзистором и электровакуумной лампой – тетродом – приведены на рис. 7.2.

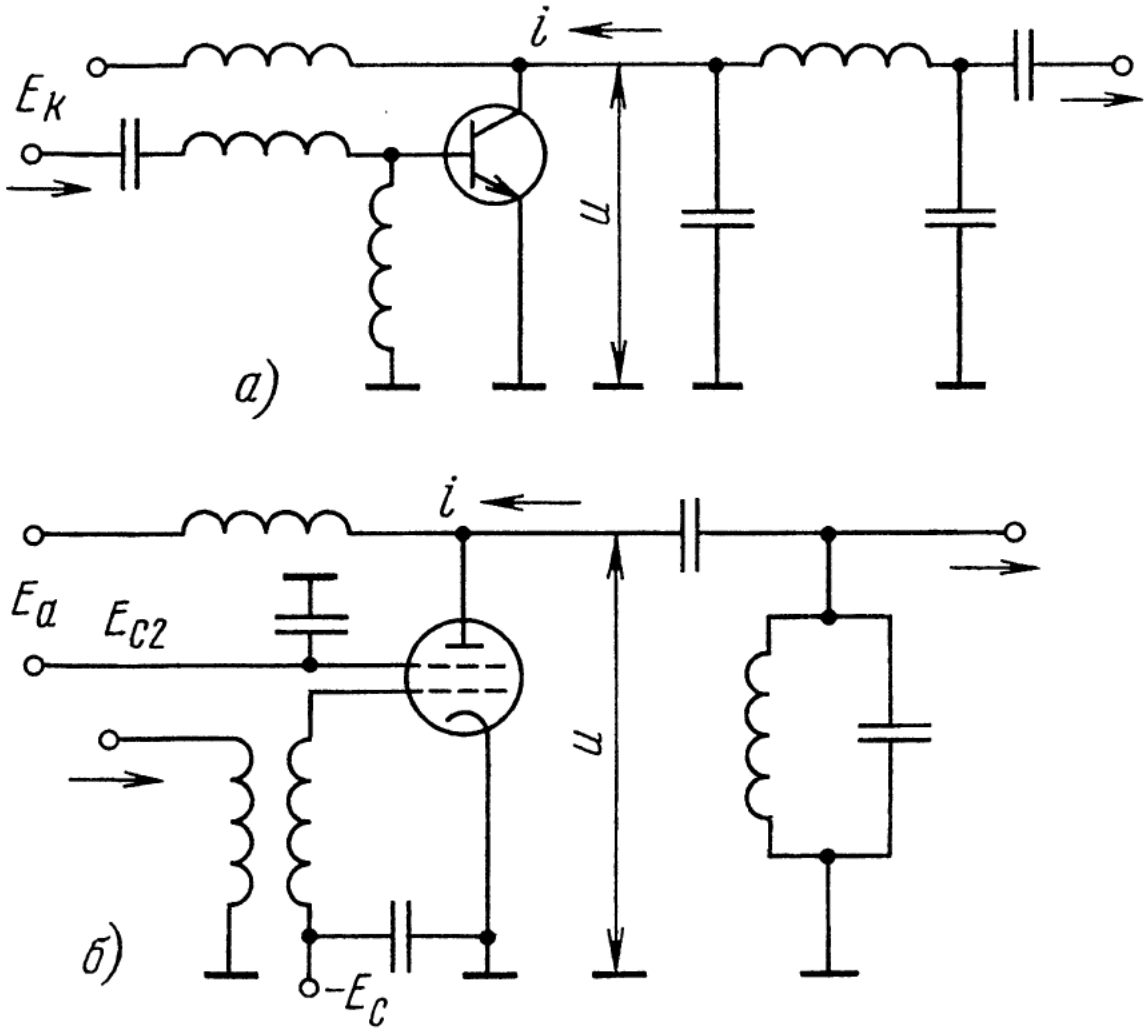
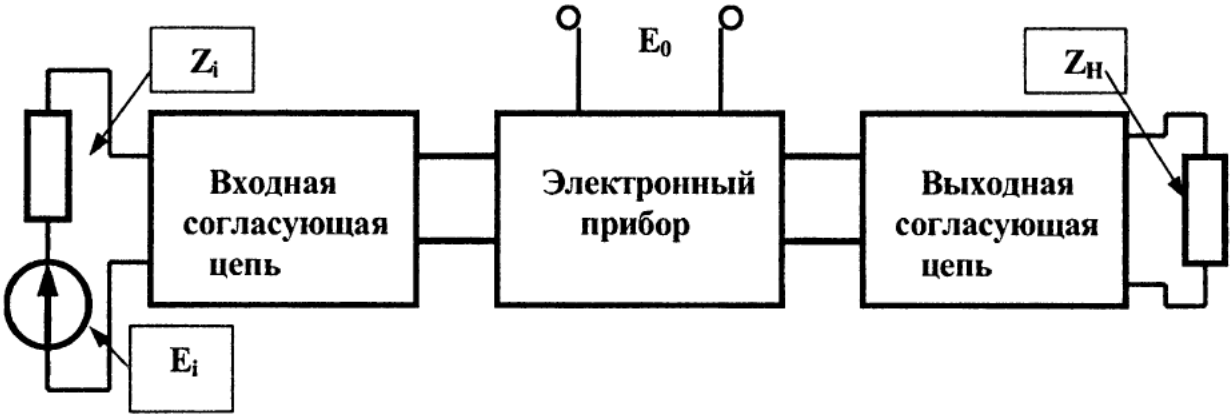


Рис. 7.2

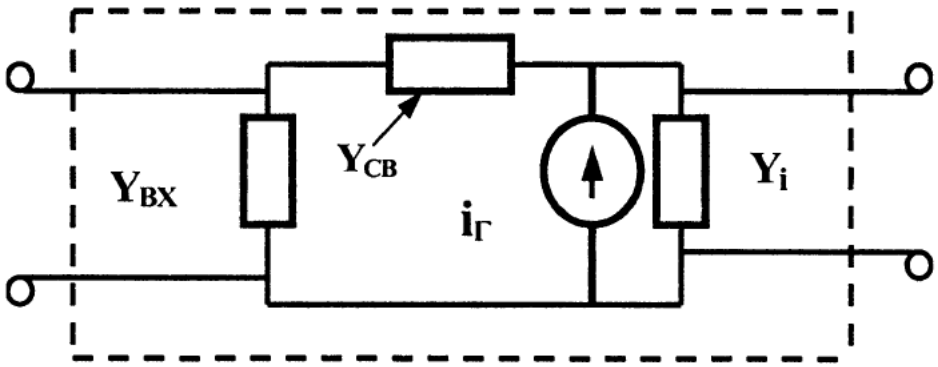
В первой из схем в качестве выходной электрической цепи используется фильтр нижних частот, во второй – параллельный колебательный контур. Ввиду низкого напряжения питания (обычно не выше 26 В) нагрузка транзистора является сравнительно низкоомной, что позволяет при необходимости иметь широкую полосу пропускания генератора. Ламповый генератор, напротив, работает при сравнительно высокоомной нагрузке. При равной колебательной мощности нагрузки лампового и транзисторного генератора отличаются, примерно, на два порядка.

Обобщенная схема для всех типов генераторов состоит из трех каскадно включенных четырехполюсников: входной и выходной согласующих электрических цепей и электронного прибора – транзистора или лампы (рис. 7.3,а).

Назначение электрических цепей состоит в согласовании входного и выходного сопротивлений электронного прибора соответственно с источником возбуждения и нагрузкой и в фильтрации высших гармоник сигнала. В свою очередь, электронный прибор может быть представлен в виде генератора тока $\dot{I}_г$ и трех комплексных проводимостей: внутренней проводимости генератора – Y_i, входной проводимости $Y_{вх}$ и проводимости связи – $Y_{св}$ (рис. 7.3,б). Все названные элементы являются нелинейными и частотно-зависимыми.

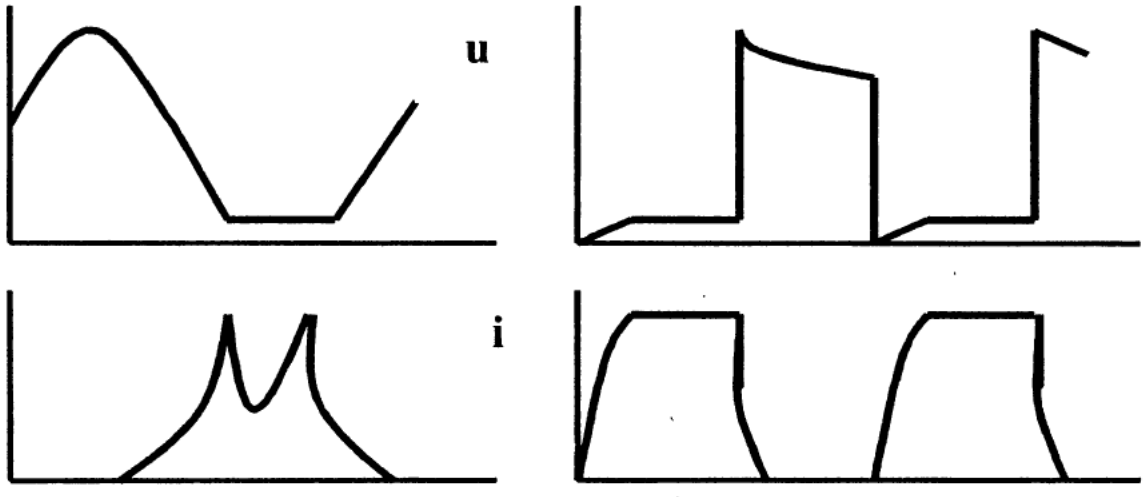


а)



б) **Рис.7.3**

Определение форм тока и напряжения на выходе электронного прибора. ВЧ генератор относится к классу существенно нелинейных устройств со сложными диаграммами тока и напряжения на выходе электронного прибора. Два примера таких диаграмм приведены на рис. 7.4.



а) б)

Рис. 7.4

Определение этих форм тока и напряжения проводится или экспериментальным путем, или по специализированным программам, учитывающим индивидуальные особенности каждого типа электронного прибора, или при-

ближенным аналитическим методом. Общий подход к решению данной задачи состоит в следующем. Составляется система из двух уравнений вида:

$$i=\psi(u,u_{BX}) \text{ или } i=\psi(u,i_{BX}); \quad (7.9)$$

$$i=\boldsymbol{\Pi}(u). \quad (7.10)$$

Здесь (7.9) есть функция, описывающая вольт-амперные характеристики электронного прибора и учитывающая его нелинейные и инерционные свойства. В зависимости от способа управления электронным прибором по входу – напряжением или током – выбирается первая или вторая запись в (7.9). Уравнение (7.10) описывает процесс, протекающий в выходной электрической цепи генератора, причем $\boldsymbol{\Pi}$ есть линейный оператор, характеризующий эту цепь.

Уравнения (7.9) и (7.10) могут быть развернуты в систему нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых позволяет определить функции тока i(t) и напряжения u(t) на выходе электронного прибора. Другой путь решения задачи состоит в применении метода гармонической линеаризации для решения нелинейной задачи (см. § 4.2). При анализе лампового генератора в рамках данного метода используется обычно кусочно-линейная аппроксимация вольт-амперных характеристик электровакуумного прибора. Анализ транзисторного генератора на основе зарядовой модели полупроводникового прибора рассмотрен в [26].

Для определения энергетических параметров генератора периодические функции i(t) и u(t) разлагаются в ряд Фурье согласно (2.2). При сложном виде этих функций, например, подобным на рис. 7.4, можно воспользоваться программой, приведенной на рис. 2.7 (пример 2.3 в § 2.2).

Баланс мощностей в выходной цепи генератора. Выходная колебательная мощность и КПД являются важнейшими параметрами генератора – усилителя мощности высокочастотного сигнала. По величине КПД можно судить, в частности, насколько совершенен тот или иной генератор. В этой связи следует составить уравнение баланса мощностей генератора и определить, как расходуется мощность, потребляемая генератором от источника питания.

Итак, пусть определены периодические функции i(t) и u(t), которые затем разложены в ряд Фурье согласно (2.2) или (7.1)–(7.2). При наличии двух функций, разложенных по одним и тем же гармоническим составляющим, справедливо следующее уравнение, называемое формулой замкнутости для рядов Фурье[10]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i(\omega t)u(\omega t)d\omega t = I_0U_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(\overset{*}{I}\,\dot{U}). \quad (7.11)$$

Уравнение (7.11) есть уравнение баланса мощностей в выходной цепи генератора, которое представим в виде:

$$P_0 = P_P - \sum_{k=1}^{\infty} P_{B3.Ak} \quad \text{или} \quad P_0 = P_P + \sum_{k=1}^{\infty} P_{H.Ak}\ , \quad (7.12)$$

где $P_0 = I_0 U_0$ – (7.13)

мощность, потребляемая генератором от источника постоянного тока, или коротко: мощность потребления;

$$P_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) u(\omega t) d\omega t \quad – \quad (7.14)$$

мощность, рассеиваемая в виде тепла в электронном приборе(на коллекторе транзистора или аноде лампы);

$$P_{B3.Ak} = 0.5 \operatorname{Re}(\overset{*}{I}_k \overset{\bullet}{U}_k) \quad – \quad (7.15)$$

активная мощность взаимодействия по k-й гармонике сигнала согласно (7.4).

$$P_{H.Ak} = -P_{B3.Ak} \quad – \quad (7.16)$$

мощность k-й гармоники, передаваемой генератором в активную нагрузку.

Динамические характеристики генератора. Свойства электронного прибора во многом определяются семейством статических вольт-амперных характеристик. Например, в случае биполярного транзистора таковыми являются зависимости коллекторного тока от постоянного коллекторного напряжения и тока базы; в случае лампы – зависимость анодного тока от постоянных напряжений на аноде и управляющей сетке.

Картина значительно усложняется при определении свойств ВЧ генератора в динамическом режиме, т. е. при усилении высокочастотного сигнала. В этом случае при фиксированной частоте и мощности входного сигнала свойства ВЧ генератора определяют три вида характеристик:

- **динамическая характеристика для мгновенных значений** тока и напряжения на выходе электронного прибора;
- **динамическая характеристика для первых гармоник** выходного тока и напряжения электронного прибора;
- **нагрузочная характеристика** генератора, т. е. зависимость выходных электрических параметров (тока, напряжения, мощностей, КПД) от сопротивления нагрузки.

Рассмотрим сначала более подробно две первые характеристики.

Примеры зависимостей для мгновенного тока $i(\omega t)$ и напряжения $u(\omega t)$ на выходе электронного прибора в динамическом режиме приведены на рис. 7.4. Из двух данных функций, исключив время, получим третью зависимость $i=\Phi(u)$, которая и является динамической характеристикой для мгновенных значений тока и напряжения. По расположению данной характеристики на плоскости вольт-амперных характеристик электронного прибора можно судить о режиме работы ВЧ генератора.

Четыре примера таких характеристик и соответствующие им формы коллекторного тока для транзисторного генератора приведены на рис. 7.5.

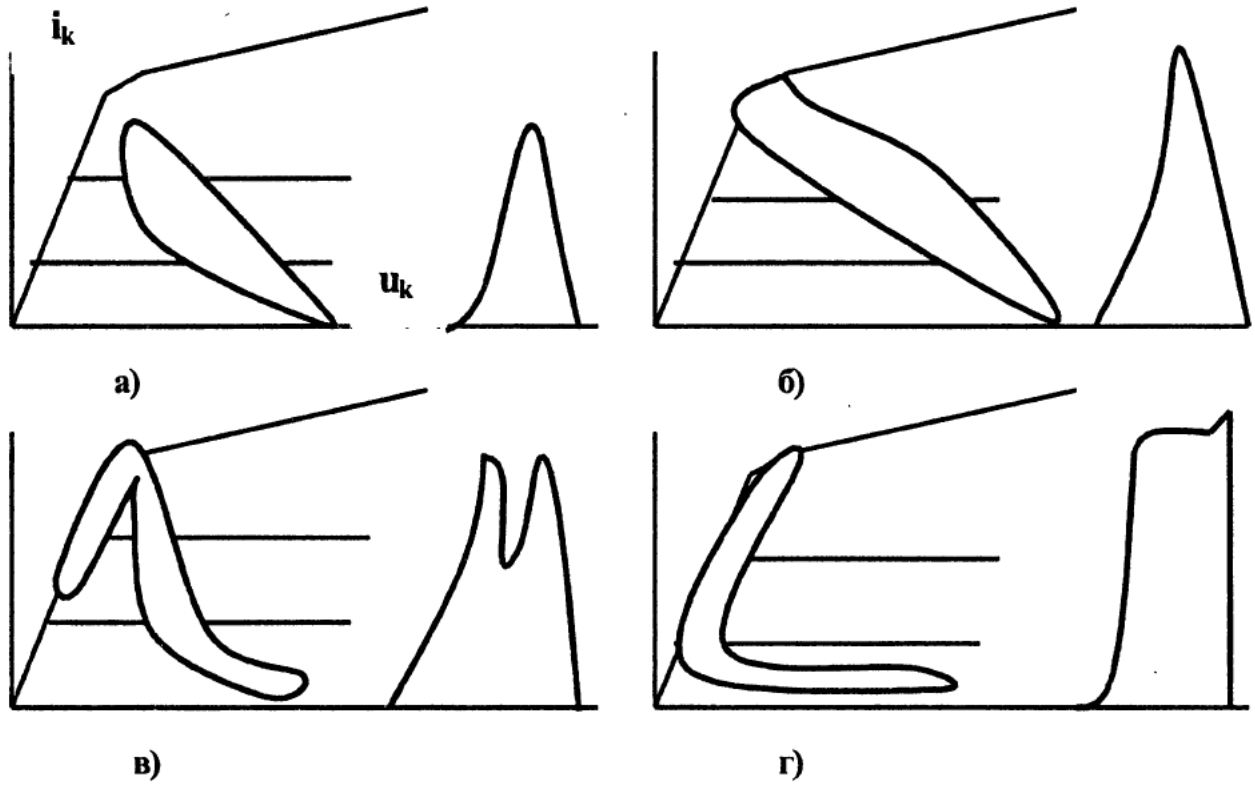


Рис. 7.5

Разложив в ряд Фурье функции $i(\omega t)$ и $u(\omega t)$, определим первые гармоники тока I_1 и напряжения U_1.Зависимость $I_1=\psi(U_1)$ называется динамической характеристикой по 1-й гармонике сигнала, пример которой приведен на рис. 7.6.

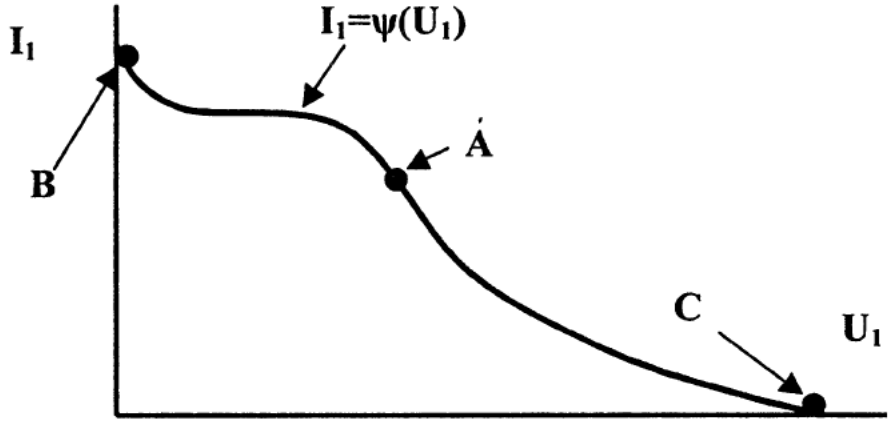


Рис. 7.6

С помощью динамической характеристики определим условия передачи максимальной мощности от генератора в нагрузку. Функция $I_1=\psi(U_1)$ является нелинейной, зависящей от частоты и мощности входного сигнала

и напряжения питания. Зафиксируем данные параметры и запишем согласно (7.6) для мощности, передаваемой генератором в нагрузку:

$$P_{H1} = 0{,}5 I_1(U_1) U_1 \cos\varphi_{H1}. \qquad (7.17)$$

Найдем частную производную функции (7.17) и приравняем ее 0 для определения экстремума функции:

$$\frac{\partial P_{H1}}{\partial U_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial I_1}{\partial U_1} U_1 \cos\varphi_{H1} + \frac{1}{2} I_1 \cos\varphi_{H1} = 0. \qquad (7.18)$$

Из (7.18) при φ_{H1}=const получим:

$$\frac{I_1}{U_1} = -\frac{\partial I_1}{\partial U_1}. \qquad (7.19)$$

На графике функции $I_1=\psi(U_1)$ (рис. 7.6) условию (7.19) передачи максимальной мощности от генератора в нагрузку соответствует точка "A", режиму короткого замыкания – точка "B", холостого хода – точка "C". Раскроем физическое содержание выражения (7.19). Под отношением

$$\frac{\partial I_1}{\partial U_1} = \left|Y_{iДДИ1}\right| \qquad - \qquad (7.20)$$

следует понимать модуль внутренней дифференциальной проводимости по 1-й гармонике сигнала эквивалентного генератора. Ее равенство проводимости нагрузки и есть условие передачи максимальной мощности (7.19), которое представим в виде:

$$\left|Y_{H1}\right| = \left|Y_{iДИФ1}\right|, \qquad (7.21)$$

где Y_{H1} – проводимость нагрузки, подключенной к выходу электронного прибора, на частоте 1-й гармоники сигнала.

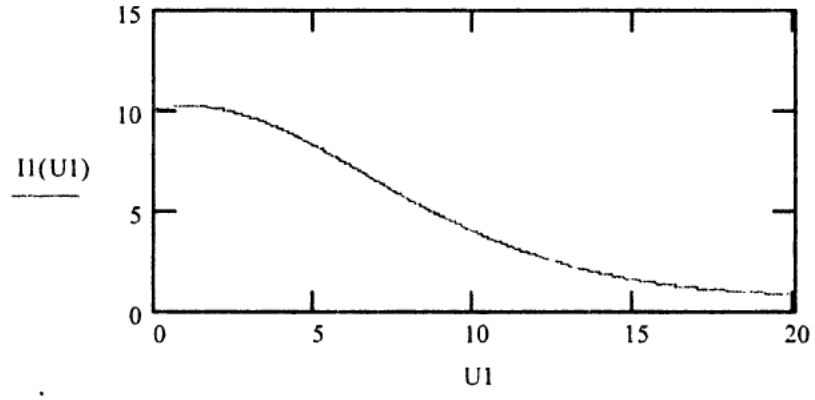
Точку "A" на динамической характеристике (рис. 7.6) можно найти графическим путем, как точку пересечения двух графиков согласно (7.19).

Данная процедура может быть осуществлена по программе, приведенной на рис. 7.7. В 1-й столбец матрицы исходных данных **DIN** записываются значения 1-й гармоники тока I_1, во 2-й – соответствующие им значения напряжения 1-й гармоники напряжения U_1. Затем производится аппроксимация функции, представленной в табличной форме, с использованием сплайн – интерполяции (операторы ***cspline*** и ***interp***). (Пояснения по данной процедуре даны в § 2.2, пример 2.3). График динамической характеристики $I_1=\psi(U_1)$ с учетом произведенной интерполяции приведен на том же рис. 7.7. Далее согласно (7.19) определяется проводимость нагрузки, как отношение I_1/U_1, и модуль внутренней дифференциальной проводимости по 1-й гармонике сигнала эквивалентного генератора тока согласно (7.20) и строятся графики двух данных функций. [В программе они обозначены как YH(U1) и YG(U1).]

$$DIN := \begin{pmatrix} 10 & 0.001 \\ 9 & 4 \\ 5.5 & 8 \\ 2.7 & 12 \\ 1.3 & 16 \\ 0.8 & 20 \end{pmatrix}$$

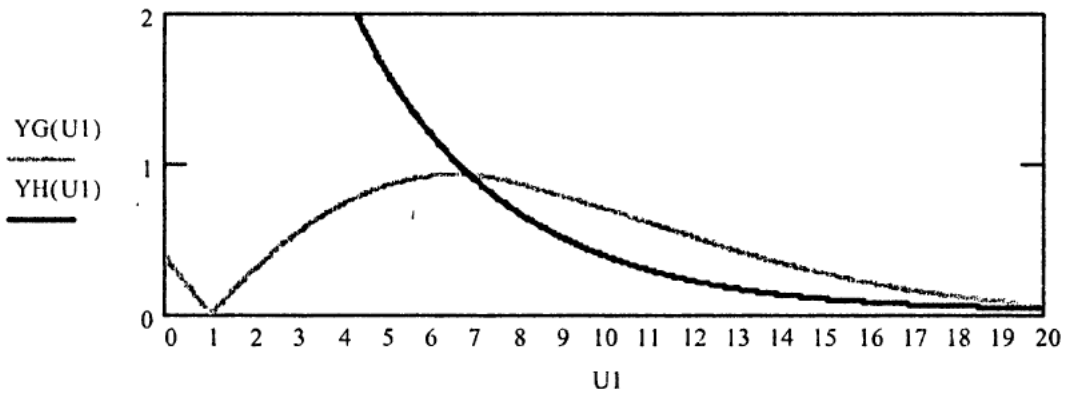
$X := DIN^{\langle 1 \rangle}$ $I := DIN^{\langle 0 \rangle}$

$R := cspline(X, I)$ $I1(U1) := interp(R, X, I, U1)$



$$YH(U1) := \frac{I1(U1)}{U1} \qquad YG(U1) := \left| \frac{d}{dU1} I1(U1) \right|$$

$$P1(U1) := 0.5 \cdot U1 \cdot I1(U1)$$



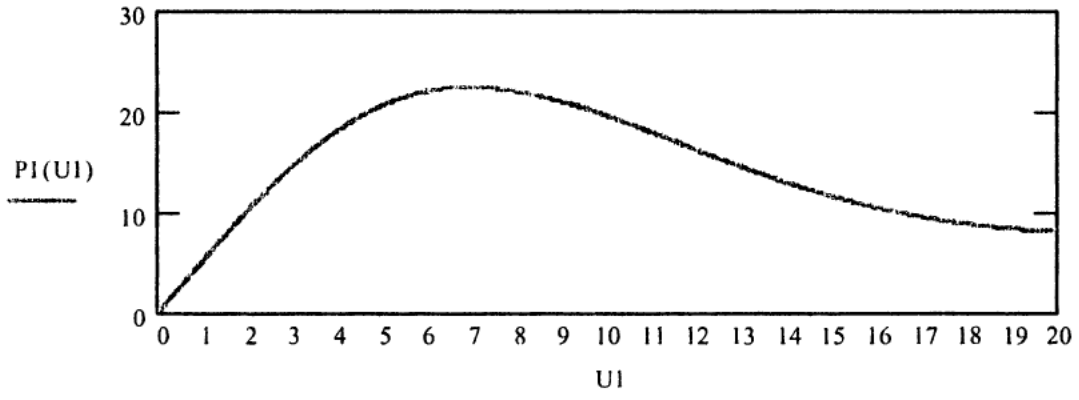


Рис. 7.7

Точка пересечения данных графиков соответствует условию передачи максимальной мощности от генератора в нагрузку. С целью проверки данного условия строится график зависимости колебательной мощности P1(U1) согласно (7.17). Убеждаемся в том, что действительно точке пересечения графиков проводимости соответствует максимум колебательной мощности.

В заключении отметим, что условие передачи максимальной мощности от генератора в нагрузку (7.19), есть записанное в более общей форме то же условие при постоянных параметрах генератора: равенство внутреннего сопротивления генератора $R_i=R_H$ – сопротивлению нагрузки.

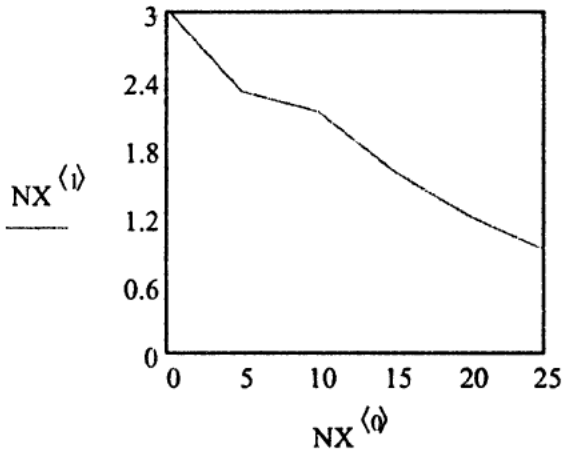
7.2. Режимы работы и характеристики высокочастотного генератора

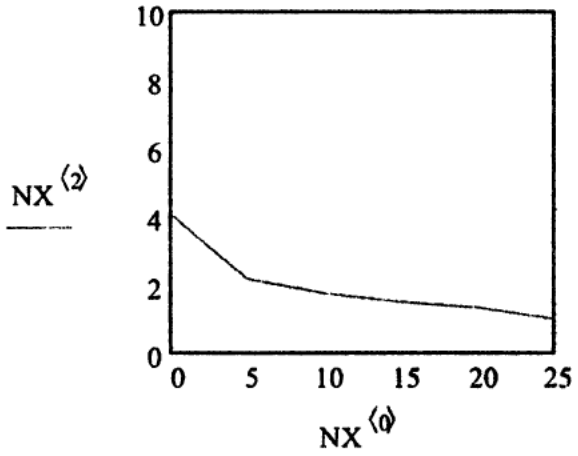
Нагрузочные характеристики генератора. Данные характеристики есть зависимости его выходных электрических параметров: колебательной мощности P_1, потребляемой – P_0 и мощности рассеивания в электронном приборе P_P, амплитуд первых гармоник тока I_1 и напряжения U_1, постоянной составляющей тока I_0 и кпд $\eta=P_1/P_0$ от сопротивления нагрузки генератора R_1. С их помощью можно выбрать оптимальный режим работы генератора по различным критериям (например, получению максимального КПД) и определить влияние изменения нагрузки (например, влияние входного сопротивления антенны) на выходные параметры ВЧ генератора.

Сначала необходимо определить импульсы выходного тока генератора при различных сопротивлениях нагрузки R_1 и разложив их в ряд Фурье (см. § 2.2, пример 2.3), найти зависимости I_1, $I_0=\Phi(R_1)$. Другой путь определения данных зависимостей является экспериментальным. Все дальнейшие расчеты производятся по программе, приведенной на рис. 7.8.

В 1-й столбец матрицы исходных данных **HX** записываются значения сопротивления нагрузки R_1, во 2-й – соответствующие им значения 1-й гармоники тока I_1, в 3-й – значения постоянной составляющей тока I_0. Затем производится аппроксимация двух функций, представленной в табличной форме, с использованием сплайн–интерполяции (операторы ***cspline*** и ***interp***). (пояснения по данной процедуре даны в § 2.2, пример 2.3). Далее согласно приведенным выше формулам (все они воспроизводятся и в программе) рассчитываются зависимости, определяющие работу генератора, и строятся их графики. Пример результатов такого расчета с построением графиков нагрузочных характеристик приведен на рис. 7.9. В программе U0 – напряжение питания, PR – мощность рассеивания в приборе, остальные обозначения соответствуют приведенным к программе на рис. 7.7. Все результаты расчета могут быть представлены и в табличной форме. Построенные графики позволяют определить сопротивление нагрузки, соответствующее получению максимальной мощности P_1, проследить, как меняется, например, мощность рассеивания в электронном приборе при изменении нагрузки и т. д.

$$NX := \begin{array}{c} \begin{matrix} R1 & I1 & I0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2.3 & 2.1 \\ 10 & 2.1 & 1.75 \\ 15 & 1.6 & 1.5 \\ 20 & 1.2 & 1.3 \\ 25 & 0.9 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad U0 := 20$$





$$X := NX^{\langle 0 \rangle} \qquad S := NX^{\langle 1 \rangle}$$

$$Q := cspline(X, S) \qquad I1(R1) := interp(Q, X, S, R1)$$

$$G := NX^{\langle 2 \rangle}$$

$$W := cspline(X, G) \qquad I0(R1) := interp(W, X, G, R1)$$

$$U1(R1) := R1 \cdot I1(R1)$$

$$P0(R1) := U0 \cdot I0(R1) \qquad P1(R1) := 0.5 \cdot U1(R1) \cdot I1(R1)$$

$$PR(R1) := P0(R1) - P1(R1) \qquad \eta(U1) := \frac{P1(U1) \cdot 100}{P0(U1)}$$

Рис. 7.8

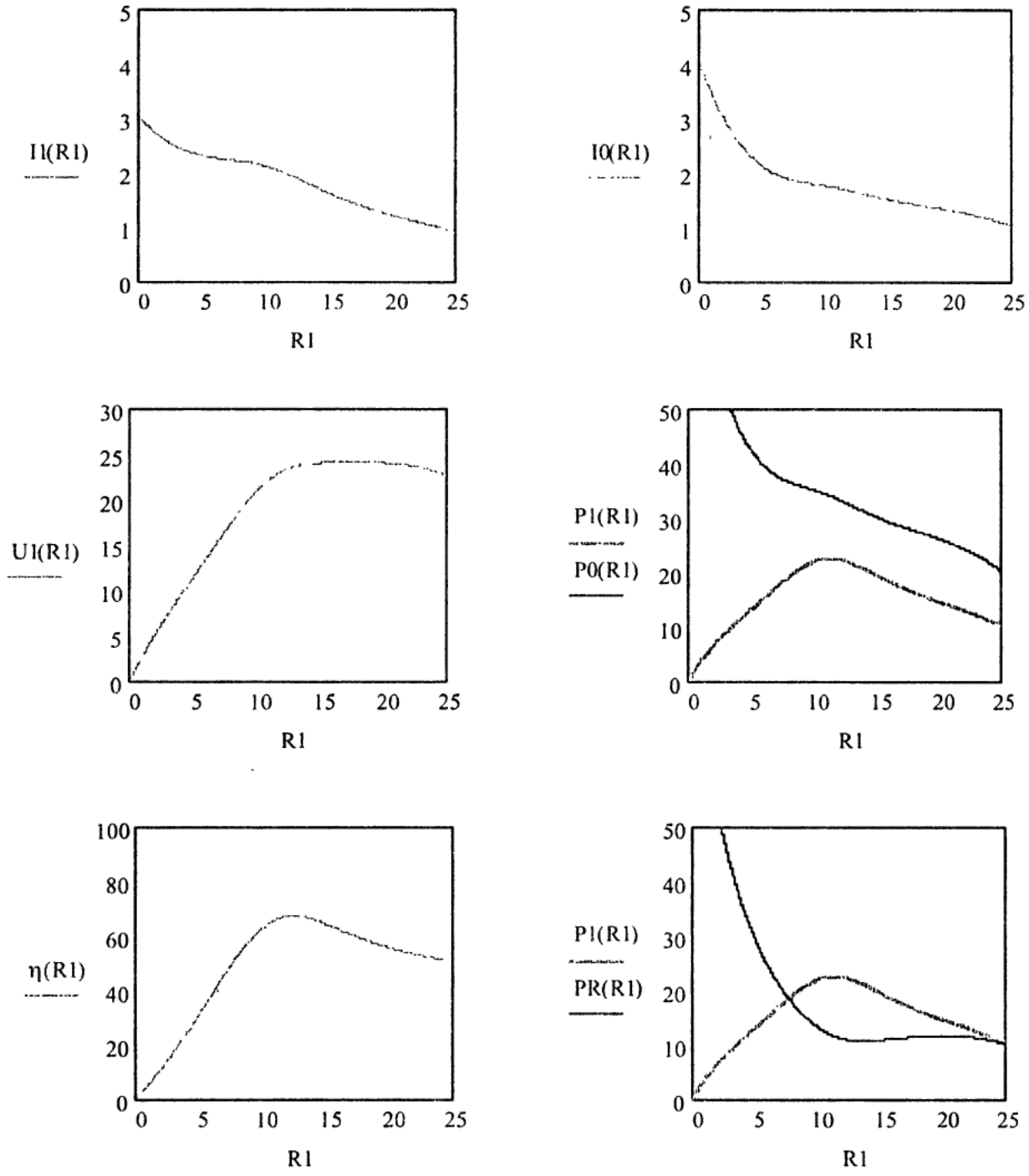


Рис. 7.9

Режимы работы высокочастотного генератора. Различают четыре основных режима работы ВЧ генератора: граничный (его иногда называют критическим), недонапряженный, перенапряженный и ключевой.

Граничному режиму соответствует получение максимальной мощности 1-й гармоники сигнала, что наглядно прослеживается на соответствующем графике нагрузочной характеристики (рис. 7.9). Условию реализации данного режима соответствует выполнение равенства (7.19) или (7.21). Динамическая характеристика $i=\Phi(u)$ занимает при данном режиме значительную область на плоскости статических вольт-амперных характеристик электронного прибора (рис. 7.5,б), не заходя, однако, в область резкого спада тока. Сопротивление нагрузки R_1, соответствующее данному

режиму, обозначим как $R_{1ГР}$, а коэффициент использования электронного прибора по напряжению $\xi=U_1/U_0$ как $\xi_{ГР}$.

Недопряженному режиму соответствует условие $R_1<R_{1ГР}$ или $\xi<\xi_{ГР}$. Динамическая характеристика i=Ф(u) занимает при данном режиме меньшую область на плоскости статических вольт-амперных характеристик электронного прибора, чем при граничном (рис. 7.5,а). Генератор в недонапряженном режиме недоиспользуется по мощности, КПД снижается, а мощность рассеивания существенно возрастает. Однако, его использование в некоторых случаях необходимо с целью улучшения линейности амплитудной характеристики.

Перенапряженному режиму соответствует условие $R_1>R_{1ГР}$ или $\xi>\xi_{ГР}$. Динамическая характеристика i=Ф(u) занимает при данном режиме значительную область на плоскости статических вольт-амперных характеристик электронного прибора, заходя в область резкого спада тока (рис. 7.4,а, 7.5,в). Как правило, в этом режиме наблюдается провал в импульсе тока. Физическая природа такого провала у разных электронных приборов различна. Так в электровакуумных приборах провал в импульсе анодного тока вызван резким увеличением тока управляющей сетки, а в транзисторах–открытием коллекторного перехода при заходе в область насыщения [26]. В перенапряженном режиме удается стабилизировать параметры ВЧ генератора–их относительную независимость от сопротивления нагрузки, что наглядно прослеживается при рассмотрении нагрузочных характеристик (рис. 7.9).

Ключевой режим работы высокочастотного генератора. В диапазонах волн от сверхдлинного вплоть до метрового помимо трех названных выше режимов работы ВЧ генератора применяется также ключевой режим[26, 27]. Особенностью ключевого режима является выполнение следующего условия для тока и напряжения ключевого элемента:

$$\left.\begin{array}{l} i(t)\neq 0,\ u(t)=u_H \text{ при } 0\le t<t_1; \\ i(t)=0,\ u(t)\neq u_H \text{ при } t_1\le t\le T, \end{array}\right\} \qquad (7.22)$$

где T – период колебаний, t_1 – момент переключения, u_H – малое остаточное напряжение на замкнутом ключе.

В качестве ключевого элемента используются транзисторы и тиристоры (кремниевые управляемые вентили). Динамическая характеристика i=Ф(u) при ключевом режиме работы, приведенная на рис. 7.5,г., обусловливает работу транзистора только в двух областях – насыщения (ключ открыт) и отсечки (ключ закрыт). Примеры диаграмм тока и напряжения в ключевом транзисторном генераторе приведены на рис. 7.4,б и 7.10.

Следствием выполнения (7.22) является малая мощность рассеиваемая в электронном ключе, поскольку согласно (7.14) имеем:

$$P_P = \frac{u_H}{T}\int_{t_1}^{T} i(t)\,dt. \qquad (7.23)$$

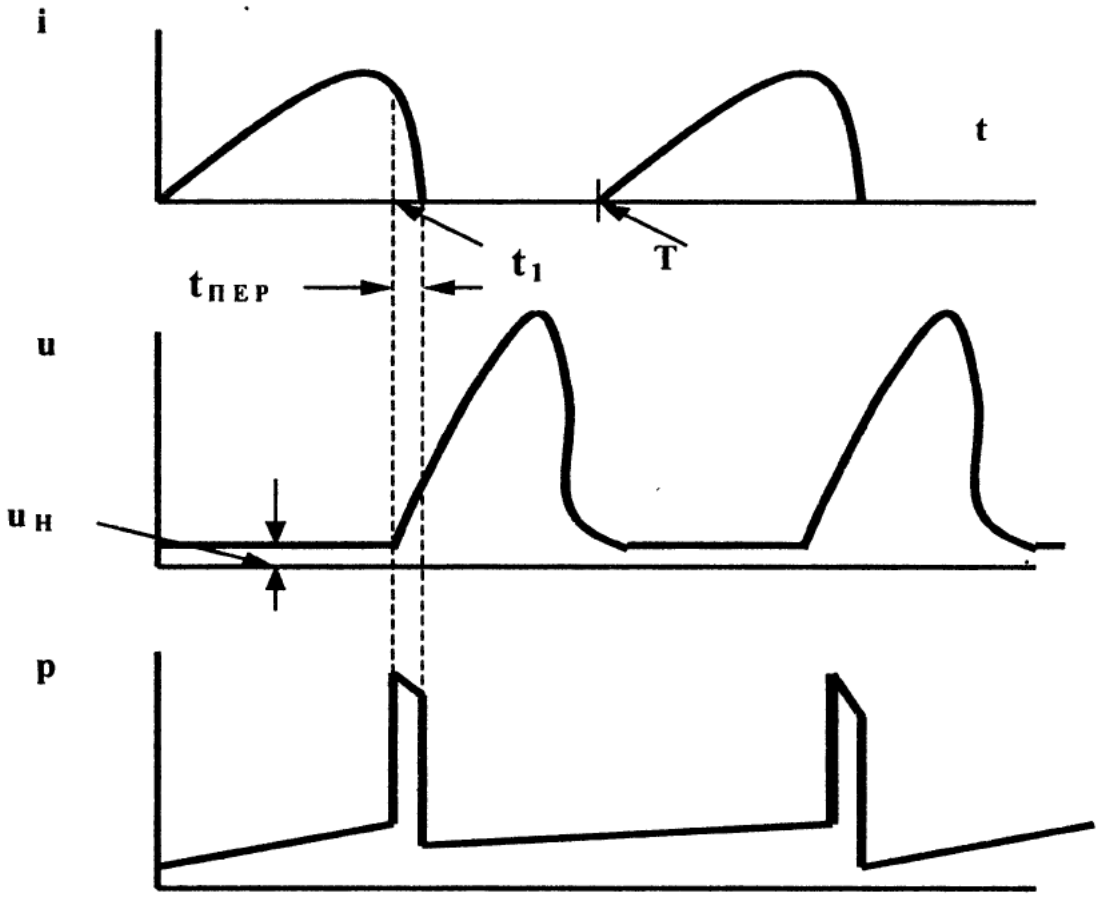


Рис. 7.10

При соответствующих формах тока и напряжения в ключевом генераторе можно получить выёсокий КПД, достигающий 90–95% в диапазоне длинных волн [27]. Одна из таких схем, называемая генератором инверторного типа, приведена на рис. 7.11. В схеме транзисторы – электронные ключи – включаются попеременно, замыкая электрическую цепь то на источник $E_К$, то на землю.

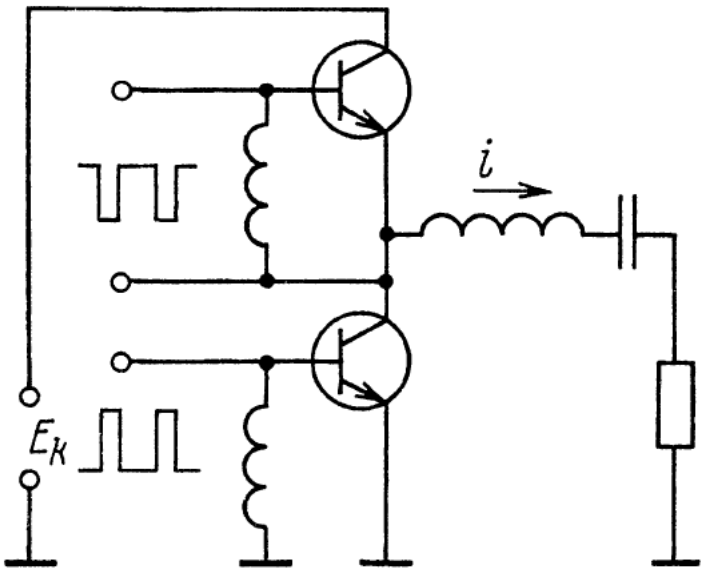


Рис. 7.11

Таким образом, малая мощность рассеивания в электронном приборе и высокий КПД – два значительных преимущества, реализуемые при ключевом режиме работы, особенно ощутимые при повышенной мощности ВЧ генератора.

Реализация ключевого режима работы возможна при времени переключения $t_{ПЕР} << T$, что ограничивает его использование с повышением частоты сигнала. При нарушении условия (7.22) значительно возрастает мгновенная мощность $p(t)=i(t)u(t)$ в момент переключения, что неблагоприятно сказывается на ключевом элементе (рис. 7.10).

Ключевые генераторы гармонических колебаний находят широкое применение в радиопередатчиках диапазона длинных и сверхдлинных волн мощностью до нескольких десятков кВт.

Номинальный коэффициент усиления по мощности. Данный параметр есть отношение мощности сигнала в активной составляющей сопротивления нагрузки $P_Н$ к номинальной мощности источника возбуждения $P_{Г.НОМ}$ в схеме, приведенной на рис. 7.3:

$$K_{Р.НОМ}=P_Н/P_{Г.НОМ}, \qquad (7.24)$$

где

$$P_{Г.НОМ} = E_i^2 / 8\,\mathrm{Re}(Z_i); \qquad (7.25)$$

E_i – амплитуда ЭДС генератора; Z_i – комплексное внутреннее сопротивление.

В случае прямого присоединения нагрузки к генератору (рис. 7.12) для коэффициента передачи мощности с учетом (7.25) получим:

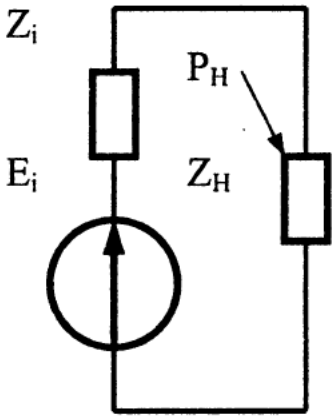


Рис. 7.12

$$K_{Г.Н.} = \frac{P_Н}{P_{Г.НОМ}} = \frac{4\,\mathrm{Re}(Z_i)\,\mathrm{Re}(Z_Н)}{|Z_i + Z_Н|^2}. \qquad (7.26)$$

$$При\ \dot{Z}_i = \overset{*}{Z}_Н;\ \ K_{Г.Н.} = 1 = \max.$$

Программа по расчету коэффициента $K_{Г.Н}$ в соответствии с (7.26) при заданных значениях активной (R) и реактивной (X) составляющих сопротивления нагрузки и внутреннего сопротивления генератора приведена на рис. 7.13. В программе дан пример расчета.

$$RH := 50 \qquad XH := 20 \qquad RI := 50 \qquad XI := 30$$

$$j := \sqrt{-1}$$

$$ZH := RH + j \cdot XH \qquad ZI := RI + j \cdot XI$$

$$KP := \frac{(4 \cdot \mathrm{Re}(ZI) \cdot \mathrm{Re}(ZH))}{(|ZI + ZH|)^2} \qquad KP = 0.8$$

Рис. 7.13

Обратимся теперь к обобщенной схеме генератора (рис. 7.3). Из нее следует, что номинальный коэффициент усиления генератора – трех каскадно включенных четырехполюсника – можно представить в виде произведения:

$$K_{У.ном} = K_{ВХ.Ц} K_{ТР} K_{ВЫХ.Ц}, \qquad (7.27)$$

где $K_{ВХ.Ц} \leq 1$ – коэффициент передачи по мощности входной согласующей цепи, определяемый согласно (7.26) по отношению к входному сопротивлению транзистора;

$K_{ВЫХ.Ц} \leq 1$ – коэффициент передачи по мощности выходной согласующей цепи, определяемый согласно (7.26) по отношению к сопротивлению нагрузки;

$K_{ТР}$ – собственный коэффициент усиления электронного прибора, в частности, транзистора.

Амплитудные и частотные характеристики высокочастотного генератора. Амплитудные характеристики, представляющие собой зависимости амплитуды и фазы выходного сигнала от амплитуды входного сигнала: $U_{ВЫХ}=\psi(U_{ВХ})$; $\Delta\varphi_{ВЫХ}=\varphi_{ВЫХ}-\varphi_{ВХ}=\Phi(U_{ВХ})$,определяют линейные свойства ВЧ генератора. Пример таких характеристик приведен на рис. 4.10. С помощью этих характеристик, определенных в одночастотном режиме работы, можно рассчитать выходной комбинационный спектр при многочастотном входном сигнале на основе квазистационарного метода. Данная проблема подробно рассмотрена в § 4.6.

Частотные характеристики, представляющие собой зависимости номинального коэффициента усиления по мощности $K_{Р.НОМ}$ и фазы выходного сигнала от частоты входного сигнала: $K_{Р.НОМ}=\psi(f)$; $\Delta\varphi_{ВЫХ}=\varphi_{ВЫХ}-\varphi_{ВХ}=\Phi(f)$, определяют частотные свойства ВЧ генератора. Пример такой амплитудно-частотной характеристики приведен на рис. 7.14.

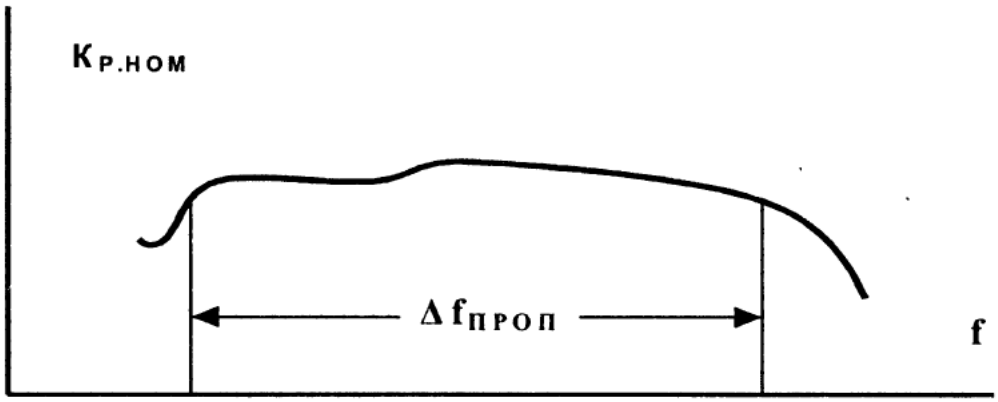


Рис. 7.14

С помощью данной характеристики, построенной в одночастотном режиме работы, можно определить прохождение через усилитель широкополосных сигналов, а также использование ВЧ генератора в диапазонных радиопередатчиках без перестройки электрических согласующих цепей. Проектирование широкополосных согласующих электрических цепей, основанное на их параметрическом синтезе, обсуждается в гл. 11.

7.3. Согласование электронного прибора с источником возбуждения и нагрузкой

Для получения максимально возможного коэффициента усиления генератора с независимым возбуждением согласно (7.27) недостаточно иметь высокое значение данного параметра у самого электронного прибора: необходимо также оптимально согласовать входное сопротивление этого прибора с внутренним сопротивлением источника возбуждения, а выходное – с сопротивлением нагрузки.

Для решения данной задачи согласования необходимо определить входное сопротивление согласующих цепей – четырехполюсников – в точках их присоединения к электронному прибору. В этой связи из обобщенной схемы генератора (рис. 7.3) составим схему, представленную на рис. 7.15,а, где ZI входное сопротивление 1-го четырехполюсника в точках его присоединения ко входу электронного прибора, а ZH входное сопротивление 2-го четырехполюсника в точках его присоединения ко выходу того же прибора.

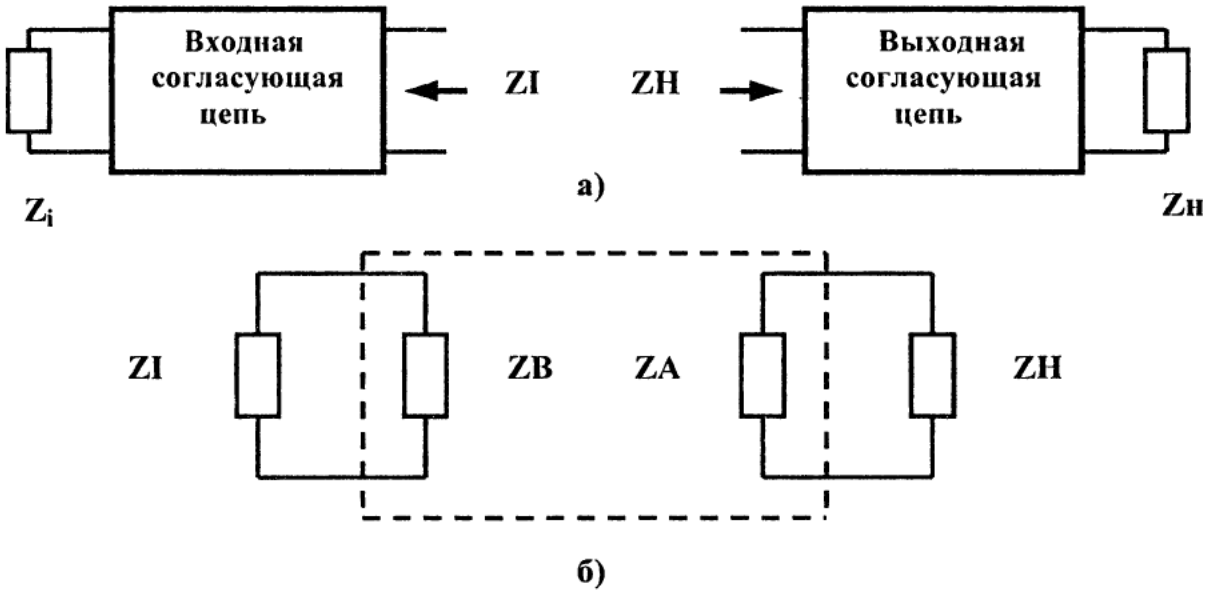


Рис. 7.15

Перейдя далее к схеме рис.7.15,б, где ZB, ZA – входное и выходное комплексные сопротивления электронного прибора, получим согласно (7.26) для коэффициентов передачи по мощности 1-й и 2-й цепей:

$$K_1 = \frac{4\,\mathrm{Re}(ZI)\,\mathrm{Re}(ZB)}{|ZI + ZB|^2}, .. K_2 = \frac{4\,\mathrm{Re}(ZH)\,\mathrm{Re}(ZA)}{|ZH + ZA|^2}. \qquad (7.28)$$

Как и прежде, условия оптимального согласования имеют вид:

$$\dot{ZI} = \overset{*}{ZB}, .. \dot{ZH} = \overset{*}{ZA},$$

т. е. сопротивления должны быть комплексно сопряженными величинами.

На основании (7.27)–(7.28) составим программу (рис. 7.16) по расчету коэффициента усиления генератора с независимым возбуждением в полосе частот.

$$\begin{matrix} & f & KT & RB & XB & RA & XA \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & RI & XI & RH & XH \end{matrix}$$

$$FX := \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1.5 & 8 & 6 & 0 \\ 1.1 & 8.5 & 1.7 & 8.5 & 5.5 & 2 \\ 1.2 & 6.8 & 1.85 & 9 & 5 & 4.2 \\ 1.3 & 5.7 & 1.9 & 10 & 4.7 & 4.8 \\ 1.4 & 4.8 & 1.95 & 10.8 & 4.2 & 5.8 \\ 1.5 & 4.5 & 2 & 11.3 & 3.8 & 7 \end{pmatrix} \qquad IH := \begin{pmatrix} 6 & -7 & 12 & -5 \\ 5.8 & -7.5 & 8.5 & -4.5 \\ 3.1 & -7 & 7.8 & -5 \\ 1.7 & -8 & 5 & -5.2 \\ 1.2 & -10 & 4.5 & -6.5 \\ 1 & -11 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$ORIGIN := 1$

$f := FX^{\langle 1 \rangle}$ $\quad KT := FX^{\langle 2 \rangle}$

$RB := FX^{\langle 3 \rangle}$ $\quad XB := FX^{\langle 4 \rangle}$ $\quad RA := FX^{\langle 5 \rangle}$ $\quad XA := FX^{\langle 6 \rangle}$

$RI := IH^{\langle 1 \rangle}$ $\quad XI := IH^{\langle 2 \rangle}$ $\quad RH := IH^{\langle 3 \rangle}$ $\quad XH := IH^{\langle 4 \rangle}$

$$j := \sqrt{-1} \qquad n := 1..6$$

$ZB_n := RB_n + j \cdot XB_n$ $\quad ZA_n := RA_n + j \cdot XA_n$

$ZI_n := RI_n + j \cdot XI_n$ $\quad ZH_n := RH_n + j \cdot XH_n$

$$K1_n := \frac{(4 \cdot Re(ZI_n) \cdot Re(ZB_n))}{(|ZI_n + ZB_n|)^2} \qquad K2_n := \frac{(4 \cdot Re(ZH_n) \cdot Re(ZA_n))}{(|ZH_n + ZA_n|)^2}$$

$KU_n := K1_n \cdot KT_n \cdot K2_n$ $\quad KUD_n := 10 \cdot \log(KU_n)$ $\quad KTD_n := 10 \cdot \log(KT_n)$

Рис. 7.16

В программе приняты следующие обозначения:

FX – матрица исходных данных транзистора на 6-ти частотах (их количество может быть изменено);

IH – матрица исходных данных на 6-ти частотах комплексных сопротивлений 1-й и 2-й согласующих цепей;

K1, K2 – коэффициенты передачи по мощности входной и выходной согласующих цепей, рассчитываемые согласно (7.28);

KT – коэффициент усиления электронного прибора, KTD – то же в дБ;

KU – номинальный коэффициент усиления генератора по мощности $K_{у.ном}$, рассчитываемый согласно (7.27), KUD – то же в дБ;

Результаты примера расчета по программе транзисторного усилителя приведены на рис. 7.17. Исходные данные для программы взяты из [20]. Размерность величин: частота в ГГц, сопротивления – Ом.

f_n =	$K1_n$ =	$K2_n$ =	KT_n =	KTD_n =	KU_n =	KUD_n =
1	0.629	0.825	10	10	5.189	7.151
1.1	0.689	0.925	8.5	9.294	5.414	7.335
1.2	0.805	0.948	6.8	8.325	5.191	7.152
1.3	0.762	0.997	5.7	7.559	4.331	6.366
1.4	0.886	0.992	4.8	6.812	4.221	6.254
1.5	0.88	0.999	4.5	6.532	3.958	5.975

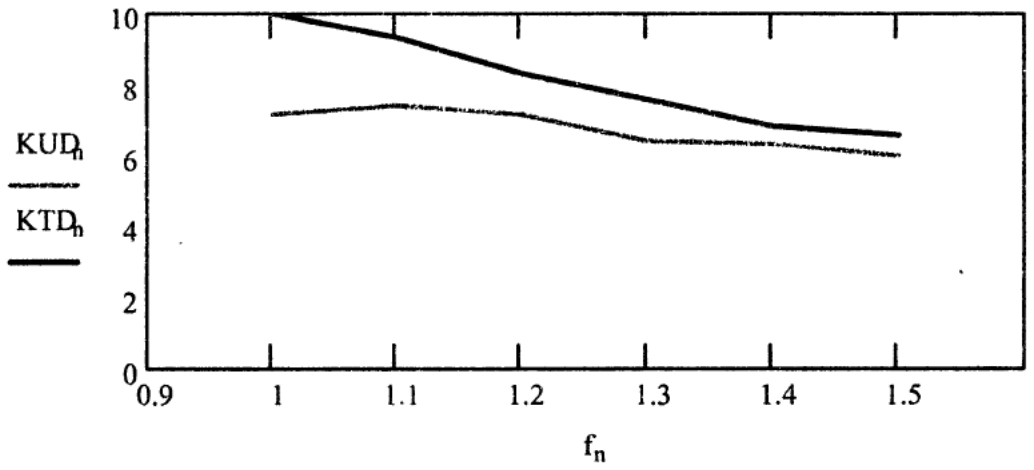


Рис. 7.17

Как видно из полученного в результате расчета графика амплитудно-частотной характеристики $K_{у.ном}=\psi(f)$, за счет согласующих цепей удается выравнить эту характеристику по сравнению с такой же зависимостью для собственно самого транзистора: неравномерность в 3,5 дБ уменьшена до 1 дБ.

Глава 8. СВЧ УСТРОЙСТВА

8.1. Метод анализа линейных СВЧ устройств

Большинство современных радиотехнических систем работают в СВЧ диапазоне. К ним относятся системы радиолокации, спутниково-космические системы радиосвязи, телевидения и радионавигации, системы телевизионного радиовещания, системы самолетной, морской и наземной радиосвязи. Высокая направленность антенн в СВЧ диапазоне позволяет узким лучом передавать радиосигнал и тем самым существенно снизить мощность радиопередатчиков, а повышенное значение частоты несущих колебаний на несколько порядков повысить скорость и объем передаваемых сообщений по сравнению с высокочастотным диапазоном.

Теория работы СВЧ устройств базируется на двух фундаментальных понятиях: электромагнитное поле и электрическая цепь с распределенными параметрами. Методы электродинамики, основанные на решении уравнений Максвелла, при определенных граничных условиях позволяют рассчитать электрическое и магнитное поле в таких цепях и заменить данный СВЧ элемент некоторой моделью или эквивалентной схемой, состоящей из реактивных и активных элементов сосредоточенного типа. Такой подход к расчету СВЧ элементов называется методом эквивалентных параметров [28,29].

Другой подход к анализу СВЧ устройств базируется на общей теории цепей с заменой понятия "напряжение и ток" понятием "напряжение и ток падающей и отраженной волны". При этом имеется возможность исследовать сложные СВЧ устройства, с входящими в них электронными приборами [20, 30].

Различные СВЧ звенья соединяют с помощью фидерных линий: коаксиальных, полосковых и микрополосковых линий передачи и волноводов. По эти линиям энергия от одного СВЧ устройства передается другому и к антенне. При распространении в линии только Т-волны процессы в ней описываются с помощью так называемых телеграфных уравнений, вытекающих из уравнений Максвелла [30]. Решая эти уравнения, находят комплексные амплитуды тока и напряжения в сечении ***x*** линии передачи (рис. 8,1,а):

$$U(x) = U_{ПАД0}\exp[-\gamma_0(x-x_0)] + U_{ОТР0}\exp[\gamma_0(x-x_0)]; \quad (8.1)$$

$$I(x) = \frac{U_{ПАД0}}{\rho}\exp[-\gamma_0(x-x_0)] - \frac{U_{ОТР0}}{\rho}\exp[\gamma_0(x-x_0)], \quad (8.2)$$

где $U_{ПАД\,0}$, $U_{ОТР\,0}$ – комплексные амплитуды напряжения падающей и отраженной волны при $x=x_0$;

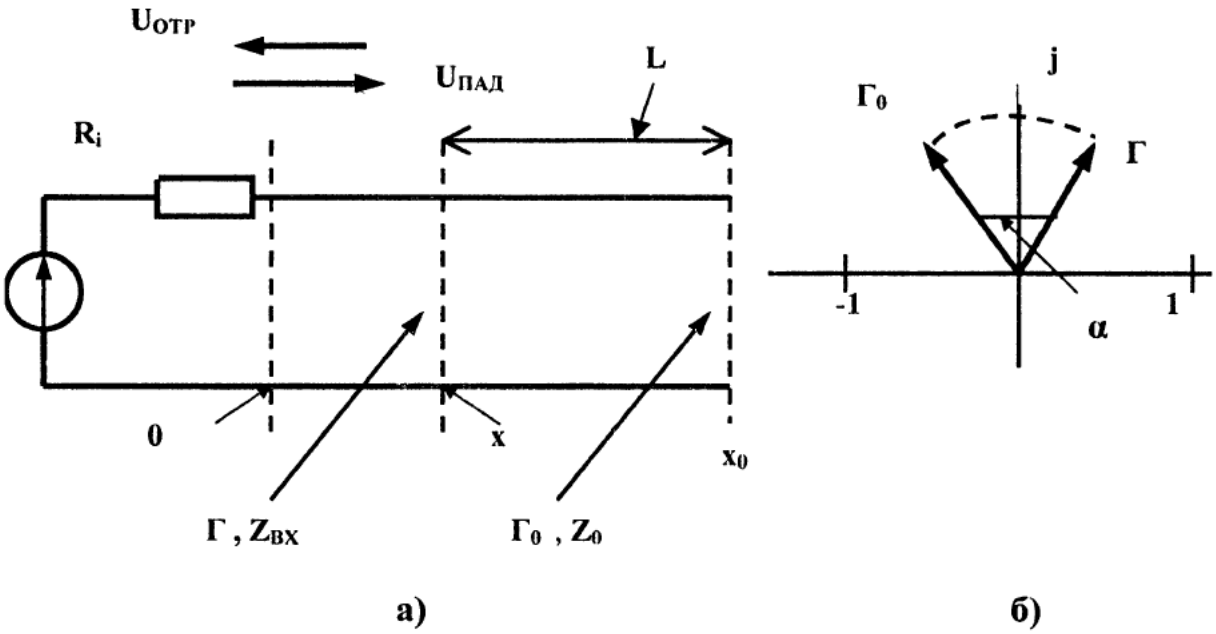
$\gamma_0=\alpha_0+j\beta_0$ – постоянная распространения;

α_0 – постоянная затухания (при пренебрежении потерями $\alpha_0=0$);

$\beta_0=2\pi/\lambda$ – фазовая постоянная;

ρ – волновое сопротивление линии;

λ – длина волны в линии.



а) б)

Рис. 8.1

Согласно (8.1) и (8.2) в линии распространяются две волны: падающая – в направлении от источника сигнала к нагрузку, и отраженная – в обратном направлении. Преобразуем (8.1) и (8.2) к виду:

$$U(x) = U_{ПАД0} \exp[-\gamma_0 (x - x_0)] \bullet \{1 + \Gamma_0 \exp[2\gamma_0 (x - x_0)]\}; \qquad (8.3)$$

$$I(x) = \frac{U_{ПАД0}}{\rho} \exp[-\gamma_0 (x - x_0)] \bullet \{1 - \Gamma_0 \exp[2\gamma_0 (x - x_0)]\}, \qquad (8.4)$$

где $\Gamma_0 = U_{ОТР.0}/U_{ПАД.0}$ – коэффициент отражения в сечении линии $x = x_0$ (рис. 8.1,а).

В произвольном сечении линии x:

$$\Gamma = U_{ОТР}/U_{ПАД} = \Gamma_0 \exp[2\gamma_0 (x - x_0)] . \qquad (8.5)$$

При $\alpha_0 = 0$ и $L = x - x_0$ из (8.5) получим:

$$\Gamma = \Gamma_0 \exp(-j4\pi L/\lambda). \qquad (8.6)$$

Для любого сечения линии при отсутствии неоднородностей и потерь $|\Gamma_0| = |\Gamma|$, причем вектор Г повернут относительно вектора Γ_0 на угол $\alpha = 4\pi L/\lambda$ (рис. 8.1,б). Из (8.3) и (8.4) для входного сопротивления линии в сечении x имеем:

$$Z = \frac{U(x)}{I(x)} = \rho \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}, \qquad (8.7)$$

из которого получим для коэффициента отражения:

$$\Gamma = \frac{Z - \rho}{Z + \rho}. \qquad (8.8)$$

Согласно уравнениям (8.1) и (8.2) при включении в сечении линии x_0 нагрузки $Z_н$ входное сопротивление в сечении линии x при $\alpha_0=0$:

$$Z_{ВХ} = \frac{U(x)}{I(x)} = \rho \frac{Z_H + j\rho tg(2\pi L/\lambda)}{\rho + jZ_H tg(2\pi L/\lambda)} . \qquad (8.9)$$

Согласно (8.7)–(8.9) линию, нагруженную на комплексное сопротивление, можно характеризовать как с помощью входного сопротивления, так и коэффициента отражения. При этом сопротивление Z при Re(Z)>0 в области действительных частот занимает половину плоскости комплексного переменного, а коэффициент отражения Г согласно (8.8) и в соответствии с правилами конформного отображения функций комплексной переменной – круг единичного радиуса (рис. 8.2)

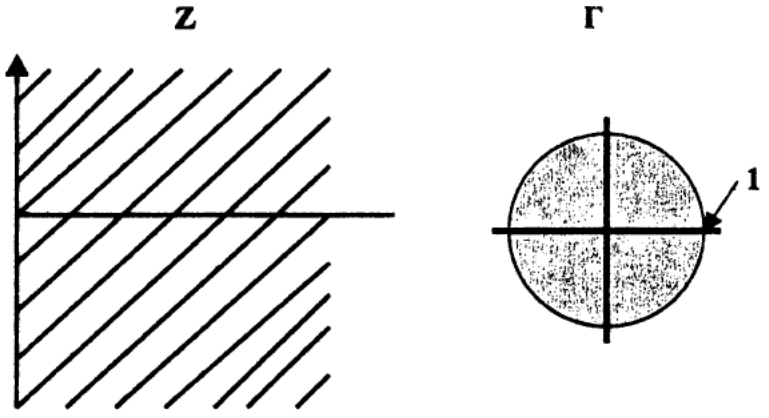


Рис. 8.2

Мощности падающей и отраженной волны есть:

$$P_{ПАД} = \left|U_{ПАД}\right|^2 / 2\rho , \qquad (8.10)$$

$$P_{ОТР} = \left|U_{ОТР}\right|^2 / 2\rho . \qquad (8.11)$$

Усредненный поток полной мощности, проходящий в любом сечении линии,

$$P_{ПР} = 0{,}5\,\mathrm{Re}[\dot{U}(x)\overset{*}{I}(x)] , \qquad (8.12)$$

где комплексные амплитуды напряжения и тока согласно (8.1) и (8.2):

$$U(x) = U_{ПАД} + U_{ОТР} , \; I(x) = (U_{ПАД} - U_{ОТР})/\rho .$$

С учетом последних соотношений для полной мощности имеем:

$$P = 0{,}5U(x)I(x) = \frac{1}{2\rho}(\left|U_{ПАД}\right|^2 - \left|U_{ОТР}\right|^2 + \dot{U}_{ОТР}\overset{*}{U}_{ПАД} - \dot{U}_{ПАД}\overset{*}{U}_{ОТР}).$$

Действительная часть этого выражения согласно (8.12) есть проходящая мощность, которая с учетом (8.10) и (8.11):

$$P_{ПР} = \frac{1}{2\rho}(\left|U_{ПАД}\right|^2 - \left|U_{ОТР}\right|^2) = P_{ПАД} - P_{ОТР} . \qquad (8.13)$$

Проходящая мощность при отсутствии потерь линии полностью поглощается в активной части нагрузки: $P_Н=P_{ПР}$. Поэтому с учетом (8.5), (8.10), (8.11) и (8.13) три значения мощности связаны между собой следующими соотношениями:

$$P_{ПАД} = P_Н \big/ (1-|\Gamma|^2)\,, \tag{8.14}$$

$$P_{ОТР} = P_Н |\Gamma|^2 \big/ (1-|\Gamma|^2) = P_{ПАД} |\Gamma|^2\,. \tag{8.15}$$

Разнообразные типы СВЧ устройств можно описать с помощью падающих и отраженных волн, распространяющихся в подключенным к ним линиям передачи (рис. 8.3). Для упрощения анализа будем считать одинаковыми и равными ρ_0 волновые сопротивления всех подводящих линий, что избавляет от операции нормирования. Обычно ρ_0=50 Ом – стандартному значению волнового сопротивления.

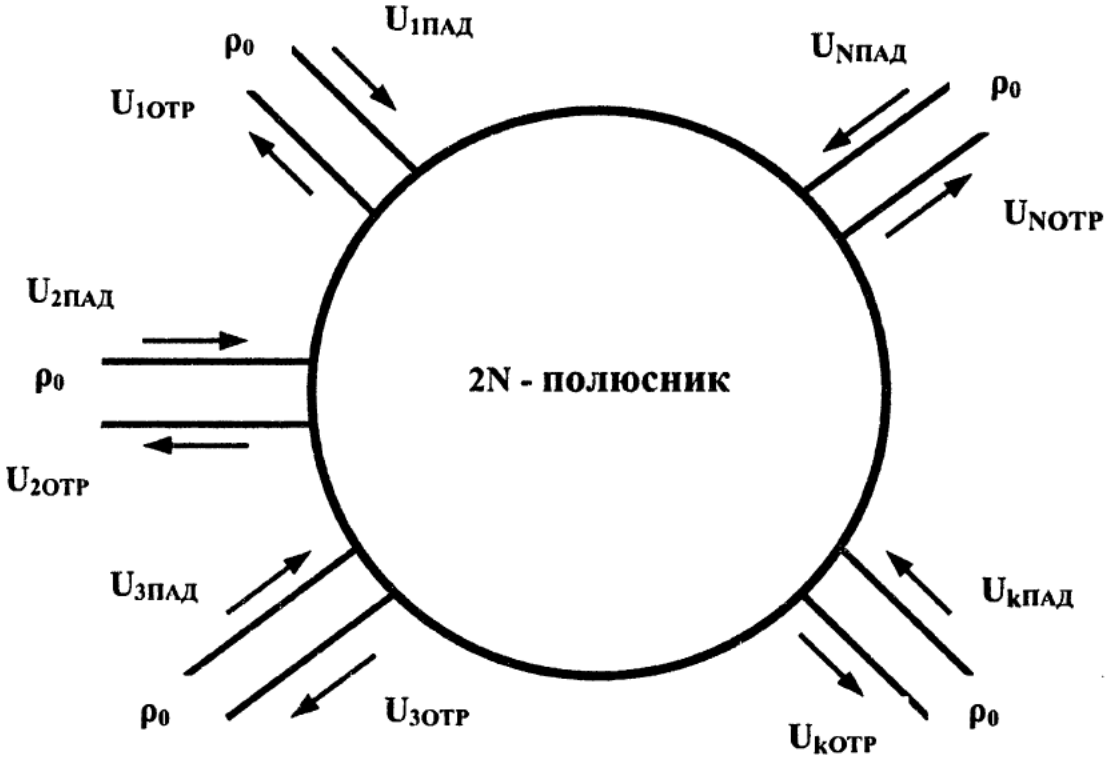


Рис. 8.3

Известны два вида волновых матриц: рассеяния (**S**-параметры) и передачи (**T**-параметры). В СВЧ устройствах линейного типа **S**- и **T**-параметры не зависят от амплитуды падающих и отраженных волн, а обусловлены только структурой самого объекта. Определяются данные параметры расчетным или экспериментальным путем.

Свойства многополюсника, представленного на рис. 8.3, описываются с помощью N уравнений, связывающих комплексные амплитуды падающих и отраженных волн в сечении входных полюсов СВЧ устройства:

$$\left.\begin{aligned}
&U_{1OTP} = S_{11}U_{1ПАД} + S_{12}U_{2ПАД} ..... + S_{1n}U_{N\,ПАД};\\
&U_{2OTP} = S_{21}U_{1ПАД} + S_{22}U_{2ПАД} ..... + S_{2n}U_{N\,ПАД};\\
&.....;\\
&U_{N\,OTP} = S_{n1}U_{1ПАД} + S_{n2}U_{2ПАД} ..... + S_{nn}U_{N\,ПАД};
\end{aligned}\right\} \qquad (8.16)$$

где $U_{1ПАД}$, $U_{2ПАД}$, $U_{NПАД}$ – комплексные амплитуды волн, входящих в многополюсник (падающие волны);

U_{1OTP}, U_{2OTP}, …, U_{NOTP} – комплексные амплитуды волн, выходящих из многополюсника (отраженные волны);

S_{kk}(k=1, 2, …, n) – коэффициенты отражения по соответствующим входам многополюсника при подключении согласованных нагрузок, равных ρ_0, ко всем остальным входам;

S_{km}(k,m=1,2,…, n, k # m) – коэффициенты передачи амплитуд волн напряжения с m-й линии в k-ю при подключении согласованных нагрузок, равных ρ_0, ко всем остальным линиям передачи.

Представим уравнения (8.16) в матричной форме (см. приложение 2):

$$\begin{vmatrix} U_{1OTP} \\ U_{2OTP} \\ ..... \\ U_{N\,OTP} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & ... & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & ... & S_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ S_{n1} & S_{n2} & ... & S_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_{1ПАД} \\ U_{2ПАД} \\ ..... \\ U_{N\,ПАД} \end{vmatrix}, \qquad (8.17)$$

$$[\mathbf{S}] = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & ... & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & ... & S_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ S_{n1} & S_{n2} & ... & S_{nn} \end{vmatrix} - \qquad (8.18)$$

– матрица рассеяния многополюсника.

Элементы этой матрицы – S_{km} – параметры рассеяния или **S**-параметры СВЧ устройства. Согласно (8.16)–(8.18) свойства линейного СВЧ-устройства – 2n-полюсника – можно описать с помощью квадратной матрицы n-го порядка, где n – число входов этого многополюсника. При известной матрице рассеяния (8.18) и заданных параметрах внешних источников сигнала и нагрузок, подключенных к различным входам многополюсника (рис. 8.3), с помощью системы уравнений (8.16) можно найти комплексные амплитуды падающих и отраженных волн во всех внешних линиях передачи. К этому по существу и сводится решение большинства задач по анализу работы СВЧ устройств. Кроме того, **S**-параметры позволяют непосредственно определить некоторые важные характеристики СВЧ устройства, в том числе коэффициент стоячей волны (КСВ) всех входов и рабочее затухание между всеми входами.

Пусть к входу **k** подключен источник сигнала, а ко всем остальным **(n-1)** входам – согласованные нагрузки, равные ρ_0. Тогда все $U_{m ПАД}=0$, кроме $U_{k ПАД}$, в результате чего имеем для КСВ по **k**-му входу:

$$KCB_k = (1+|S_{kk}|)/(1-|S_{kk}|) \qquad (8.19)$$

и для рабочего затухания между входами **k** и **m**:

$$b_{mk} = 10\lg(P_k/P_m) = 20\lg(U_{k ППА}/U_{m ООТ}) . \qquad (8.20)$$

Коэффициент b_{mk} показывает, какая часть мощности сигнала, подведенная **k**-у входу многополюсника достигает **m**-го входа.

Многополюсники делятся на активные (при наличии в их составе электронных приборов) и пассивные. Для пассивного многополюсника на любой действительной частоте справедливо неравенство:

$$[S]^*_T \times [S] \le [1] , \qquad (8.21)$$

где $[S]$ – исходная матрица рассеяния многополюсника (8.18);

$[S]^*_T$ – эрмитово сопряженная матрица по отношению к исходной;

$[1]$ – единичная матрица (см. приложение 2).

Пассивный многополюсник называется обратимым или взаимным при $S_{km}=S_{mk}$, а при отсутствии в нем активных потерь – реактивным, для которого (8.21) принимает вид:

$$[S]^*_T \times [S] = [1] , \qquad (8.22)$$

называемое условием унитарности. Справедливо и обратное утверждение: при выполнении условия унитарности многополюсник является реактивным.

Из (8.22) для реактивного многополюсника можно получить:

$$\sum_{i=1}^{n} |S_{ki}|^2 = 1 , \; где \; k = 1...n . \qquad (8.23)$$

Раскроем физический смысл уравнений (8.23). При подключении генератора к входу **k** и согласованных нагрузок ко всем остальным – имеем:

$$|S_{kk}|^2 = P_{k ОТР}/P_{k ПАД} \quad и \quad |S_{ik}|^2 = P_{i ОТР}/P_{i ПАД} .$$

Подставив данные выражение в (8.23), получим:

$$P_{k ПАД} = \sum_{i=1}^{n} P_{i ОТР} . \qquad (8.24)$$

Это есть уравнение баланса мощностей в реактивном многополюснике: мощность волны, подведенной к входу **k**, равна сумме мощности отраженной волны в этом канале и мощностей волн, поступающих во все остальные каналы многополюсника.

8.2. Волновые матрицы четырехполюсника

Как и ранее (см. гл. 3), обратимся к анализу четырехполюсника – одного из основных звеньев СВЧ устройств – с заданной волновой матрицей рассеяния, т. е. матрицей **S**-параметров. К четырехполюснику подключены две линии передачи с волновым сопротивлением ρ_0 (рис. 8.4).

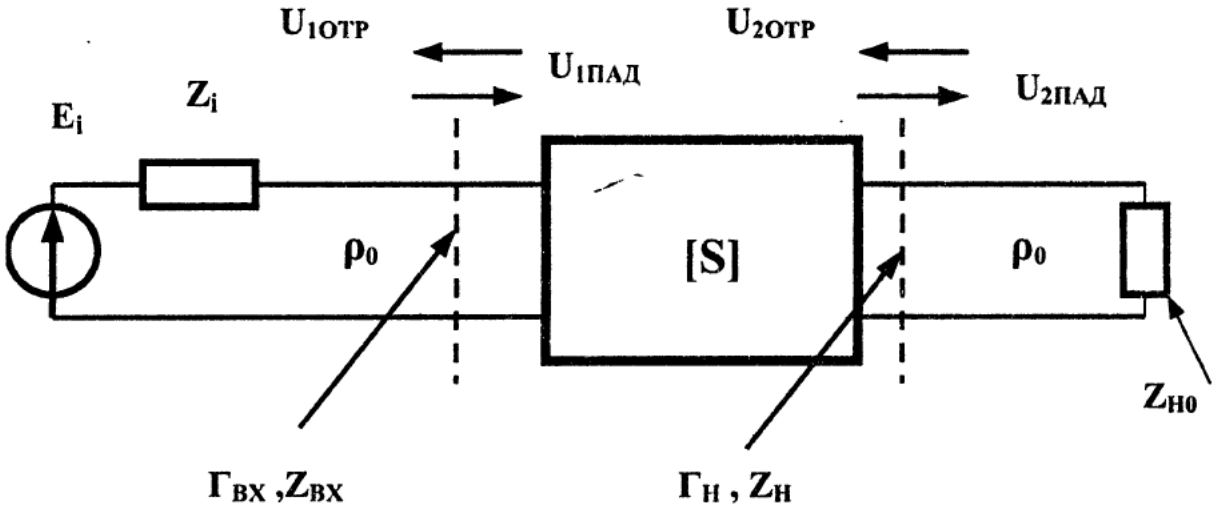


Рис. 8.4

Согласно (8.16) работа четырехполсника описывается системой из двух уравнений, в левой части которых записываются комплексные амплитуды волн, выходящих из четырехполюсника:

$$U_{1ОТР} = S_{11}U_{1ПАД} + S_{12}U_{2ОТР}\ , \tag{8.25}$$

$$U_{2ПАД} = S_{21}U_{1ПАД} + S_{22}U_{2ОТР}\ , \tag{8.26}$$

где S_{11} и S_{22} – коэффициенты отражения по входу и выходу четырехполюсника при согласованных нагрузках;

S_{12} и S_{21} – коэффициенты передачи волн напряжения при согласованных нагрузках.

Из уравнений (8.25) и (8.26) можно найти **S**-параметры:

$$S_{11} = U_{1ОТР}/U_{1ПАД} \quad при \quad U_{2ОТР} = 0 \quad или \quad Z_{H0} = \rho_0\ ,$$

$$S_{22} = U_{2ПАД}/U_{2ОТР} \quad при \quad U_{1ПАД} = 0 \quad или \quad Z_i = \rho_0\ ,$$

$$S_{12} = U_{1ОТР}/U_{2ОТР} \quad при \quad U_{1ПАД} = 0 \quad или \quad Z_i = \rho_0\ ,$$

$$S_{21} = U_{2ПАД}/U_{1ПАД} \quad при \quad U_{2ОТР} = 0 \quad или \quad Z_{H0} = \rho_0\ ,$$

образующие волновую матрицу рассеяния:

$$[\mathbf{S}]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}. \tag{8.27}$$

Из совместного решения уравнений (8.25)–(8.26) с учетом соотношения для коэффициента отражения нагрузки на зажимах четырехполюсника $\Gamma_Н=U_{2ОТР}/U_{2ПАД}$, получим для коэффициента отражения на входе четырехполюсника (рис. 8.4):

$$\Gamma_{ВХ}=\frac{U_{1ОТР}}{U_{1ПАД}}=S_{11}+\frac{S_{12}S_{21}\Gamma_Н}{1-S_{22}\Gamma_Н}\ . \tag{8.28}$$

Четырехполюсники, как и многополюсники, делятся на активные и пассивные. В активном четырехполюснике происходит преобразование энергии источника постоянного тока в энергию высокочастотных колебаний. Типичным примером такого четырехполюсника является СВЧ транзистор.

Пассивные четырехполюсники подразделяются на обратимые (или взаимные) и необратимые, симметричные и антиметричные, реактивные и с активными потерями.

Обратимым называется четырехполюсник, отвечающий правилу взаимности, выражаемому равенством: $S_{12}=S_{21}$, которое означает, что коэффициенты передачи падающих волн напряжения в четырехполюснике в обоих направлениях при подключении согласованных нагрузок равны.

Для симметричного обратимого четырехполюсника справедливы равенства: $S_{12}=S_{21}$ и $S_{11}=S_{22}$, означающие, что напряжение и ток во внешних цепях не зависят от направления передачи энергии через четырехполюсник. При антиметричном четырехполюснике $S_{12}=S_{21}$ и $S_{11}=-S_{22}$.

Из условия унитарности (8.22), которому следует реактивный четырехполюсник, можно получит следующие равенства:

$$|S_{11}|^2+|S_{21}|^2=1; \tag{8.29}$$

$$|S_{22}|^2+|S_{12}|^2=1; \tag{8.30}$$

$$|S_{11}\|S_{12}|=|S_{21}\|S_{22}|; \tag{8.31}$$

$$\varphi_{11}+\varphi_{22}=\varphi_{12}+\varphi_{21}\pm\pi\ . \tag{8.32}$$

Из уравнений (8.29)–(8.31) следует, что в реактивном четырехполюснике $|S_{11}|=|S_{22}|$ и $|S_{12}|=|S_{21}|$ и, следовательно, число исходных параметров, определяющих свойства объекта, может быть уменьшено. Уравнения (8.29)–(8.30), как и (8.23), отображают баланс мощностей в реактивном четырехполюснике.

При использовании волновой матрицы передачи, уравнения описывающие работу четырехполюсника (рис. 8.4), принимают вид:

$$U_{1ПАД} = T_{11}U_{2ПАД} + T_{12}U_{2ОТР}\ , \tag{8.33}$$

$$U_{1ОТР} = T_{21}U_{2ПАД} + T_{22}U_{2ОТР}\ . \tag{8.34}$$

Т-параметры этих уравнений образуют волновую матрицу передачи:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \tag{8.35}$$

Сравнение уравнений (8.26)–(8.27) с (8.33)–(8.34) позволяет установить связь между **S**-параметрами волновой матрицы рассеяния (8.27) и **T**-параметрами волновой матрицы передачи (8.35):

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} (1/S_{21}) & -(S_{22}/S_{21}) \\ (S_{11}/S_{21}) & [S_{12} - (S_{11}S_{22}/S_{21})] \end{bmatrix}, \tag{8.36}$$

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} (T_{21}/T_{11}) & [T_{22} - (T_{12}T_{21}/T_{11})] \\ (1/T_{11}) & -(T_{12}/T_{11}) \end{bmatrix}\ . \tag{8.37}$$

При каскадном включении СВЧ четырехполюсников (рис. 8.5) следует воспользоваться **T**-параметрами, ибо общая матрица такого соединения есть произведение волновых матриц передачи отдельных звеньев:

$$[\mathbf{T}] = \prod_{k=1}^{n} [\mathbf{T}_k] \tag{8.38}$$

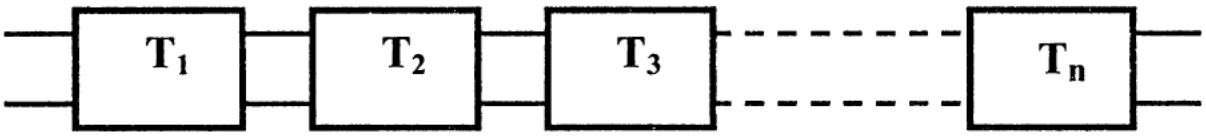


Рис. 8.5

Таким образом, зная **S**- или **T**-параметры отдельных четырехполюсников, можно с помощью (8-36)–(8.38) найти общую матрицу каскадного соединения в требуемой системе параметров. Так, например, если заданы **S**-параметры четырехполюсников, то следует сначала согласно (8.36) перейти от них к **T**-параметрам, затем по (8.38) найти общую матрицу всего соединения и с помощью (8.37) возвратиться к **S**-параметрам.

Пакет программ **Mathcad** позволяет производить всевозможные операции с матрицами, что обеспечивает условия составления программы по расчету каскадного соединения четырехполюсников согласно описанному алгоритму. Элементарные сведения по матричной алгебре даны в приложении 2.

В том случае, когда для анализа свойств объекта достаточно ограничиться только значением входного коэффициента отражения $\Gamma_{вх}$, например при расчете устойчивости (см.§ 8.5), можно воспользоваться более

простым алгоритмом, состоящим в использовании формулы (8.28) в качестве рекуррентной. Последовательно переходя от одного четырехполюсника, начиная с последнего, к другому и каждый раз определяя $\Gamma_{вх}$, находится значение данного параметра на входе всего каскадного соединения. Такая методика будет рассмотрена ниже в гл. 11 при параметрическом синтезе многозвенных фильтров.

Приведем выражения **S**- и **T**-параметров для двух типовых СВЧ звеньев: отрезка линии передачи (рис.8.6) и двух линий с разными волновыми сопротивлениями, с включенным на их стыке двухполюсника проводимостью **Y** (рис. 8.7).

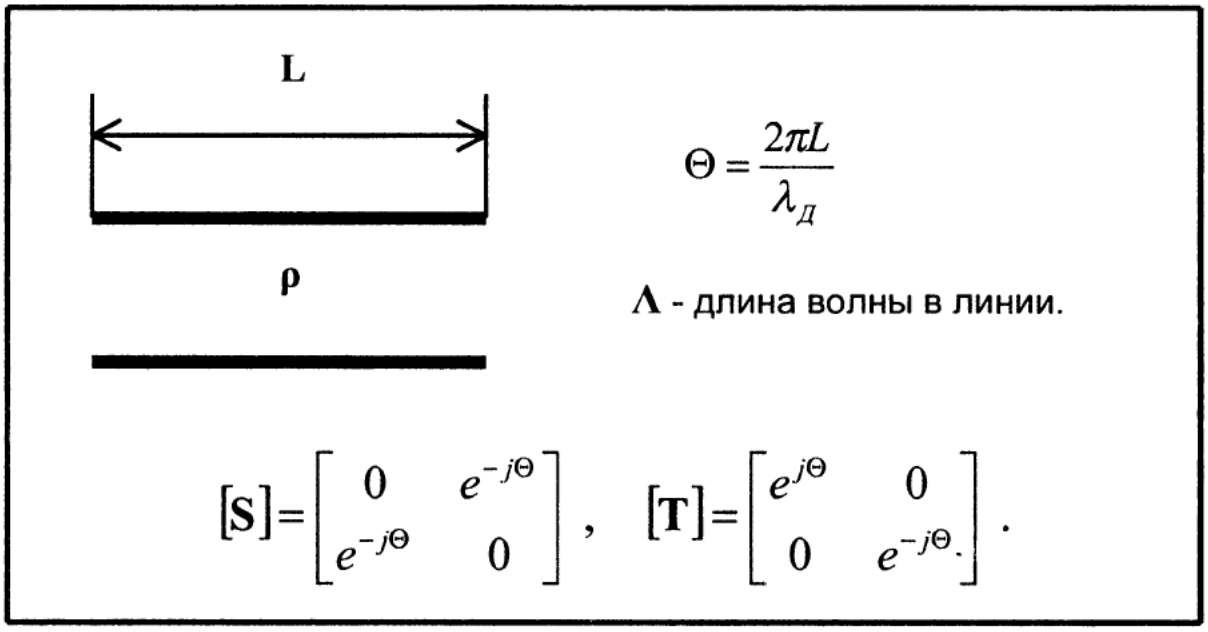


Рис. 8.6

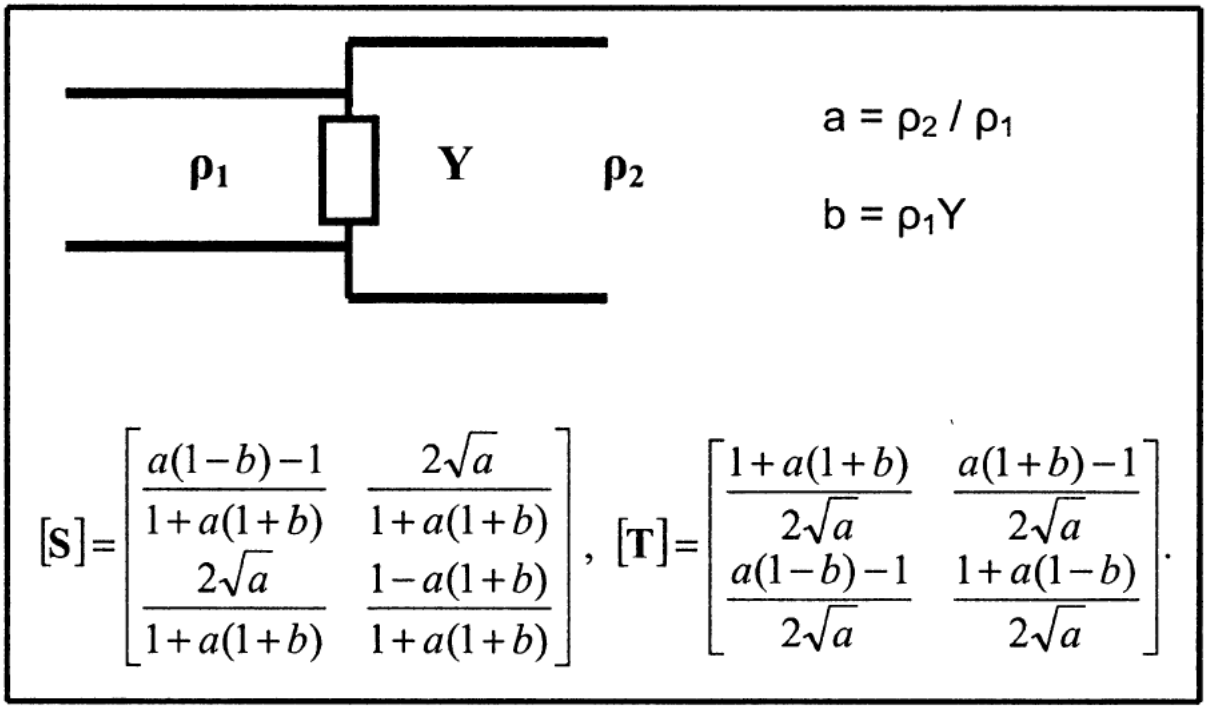


Рис. 8.7

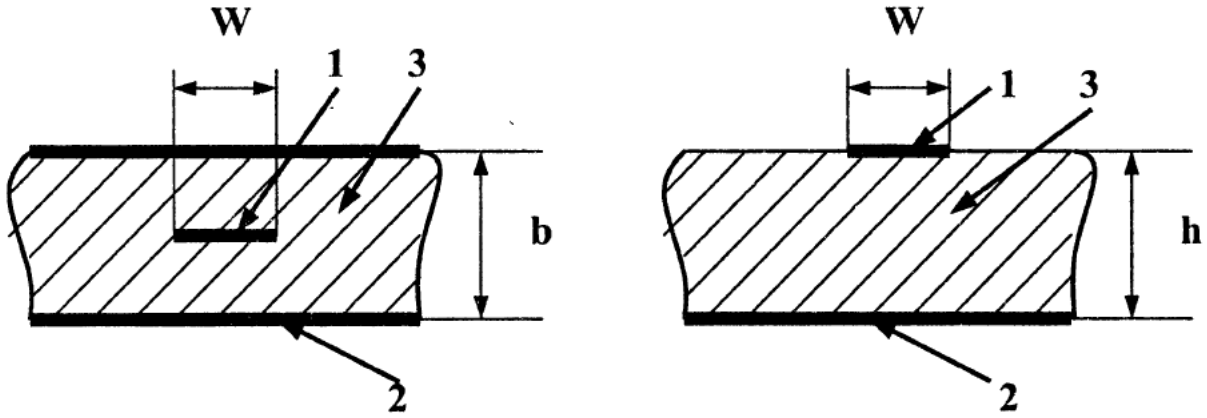
8.3. Гибридно-интегральные СВЧ устройства и микрополосковые линии

Большинство современных СВЧ устройств – активных с применением полупроводниковых приборов и пассивного типа (фильтры, мостовые устройства, направленные ответвители, согласующие звенья и другие) – изготавливаются по интегральной технологии.

Интегральные СВЧ устройства подразделяются на три основных типа: полупроводниковые, пленочные и гибридные. В полупроводниковых интегральных схемах (ИС) активные и пассивные элементы формируются в объеме полупроводниковой структуры или на ее поверхности, а межсоединения и контактные площадки выполняются с помощью тонких пленок. Основой такой ИС является полупроводниковая подложка (обычно кремний) с выращенным на ее поверхности тонким эпитаксиальным слоем [20]. Формирование элементов на полупроводниковой подложке осуществляется с помощью планарного диффузионного процесса.

В пленочной ИС активные и пассивные элементы и межсоединения выполняются в виде тонких пленок из различных материалов, нанесенных в определенной последовательности на диэлектрическую подложку. Из активных элементов в пленочном исполнении изготавливаются полевые транзисторы.

Большая часть СВЧ устройств изготавливается по гибридно-интегральной технологии. В таких ИС часть элементов и межсоединений выполняется в виде пленок, нанесенных на диэлектрическую подложку, а другая – главным образом корпусные или бескорпусные транзисторы – как самостоятельные элементы, встраиваемые в специальные гнезда и присоединяемые к схеме. Материалом диэлектрической подложки, являющейся основой гибридной ИС, является специальная керамика с малыми потерями и высокой диэлектрической проницаемостью ε_r>10. В частности, применяется поликор и сапфир. При этом все геометрические размеры СВЧ цепей в первом приближении уменьшаются в корень квадратный из ε_r.



а) Рис. 8.8 б)

В интегральных ИС электрические цепи выполняются на основе микрополосковых линий (МПЛ) передачи: несимметричных (рис .8.8,а)

и симметричных (рис. 8.8,б), а также их модификаций. На рис. 8.8 приняты следующие обозначения: 1 – центральный проводник, 2 – проводящая заземляемая поверхность, 3 – диэлектрическая подложка с проницаемостью материала ε_r.

В симметричной МПЛ распространяется Т-волна, в других видах – квази Т-волна. Все типы МПЛ, применяемые до частоты 30 ГГц, характеризуются тремя основными параметрами: волновым сопротивлением **ρ**, активными потерями и эффективной диэлектрической проницаемостью $\boldsymbol{\varepsilon_{эф}}$. Последний параметр определяется отношением:

$$\varepsilon_{эф} = (\lambda/\lambda_д)^2 , \qquad (8.39)$$

где λ – длина волны в свободном пространстве; $\lambda_д$ – длина волны в линии.

В симметричной МПЛ (рис. 8.8,а) с полным заполнением всего пространства диэлектриком: $\varepsilon_{эф}=\varepsilon_r$, в несимметричной: $\varepsilon_{эф}<\varepsilon_r$, поскольку силовые линии электрического поля проходят не только в диэлектрике, но и вне его. Зависимости **ρ** и $\boldsymbol{\varepsilon_{эф}}$ от геометрических размеров МПЛ и материала диэлектрика определяются в результате электродинамического расчета, а затем аппроксимируются аналитическими функциями. Для несимметричной МПЛ два данных параметра можно рассчитать по программе, приведенной на рис. 8.9, а для симметричной – на рис. 8.10. В первой из программ параметр **x=W/h** (рис. 8.8,а), во-второй параметр **x=W/b** (рис. 8.8,б). Задав требуемое значение **x** и ε_r=εr, по программе вычисляются значения **ρ** и $\boldsymbol{\varepsilon_{эф}}$=εf.

$$\varepsilon r := 9.8$$

$$\varepsilon f(x) := 0.5\cdot(\varepsilon r - 1) + 0.5\cdot\frac{(\varepsilon r - 1)}{\sqrt{1+\left(\frac{10}{x}\right)}}$$

$$Z(x) := 1 + 1.735\cdot \varepsilon r^{-0.0724}\cdot x^{-0.836}$$

$$\rho(x) := \frac{377}{x\cdot Z(x)\cdot\sqrt{\varepsilon r}} \qquad x := \frac{W}{h}$$

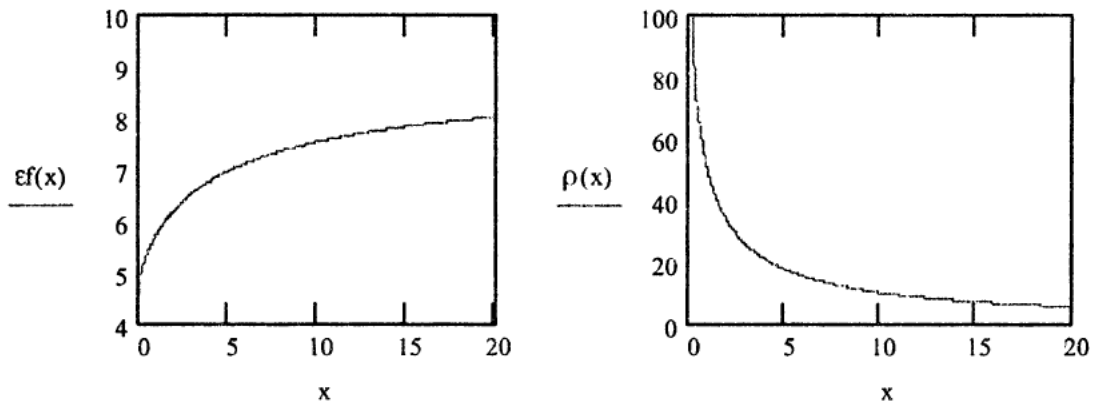


Рис. 8.9

$$\varepsilon r := 9.8 \qquad \varepsilon f := \varepsilon r$$

$$\rho(x) := \frac{94.172}{\sqrt{\varepsilon r}\cdot(0.441 + x)} \qquad x := \frac{W}{h}$$

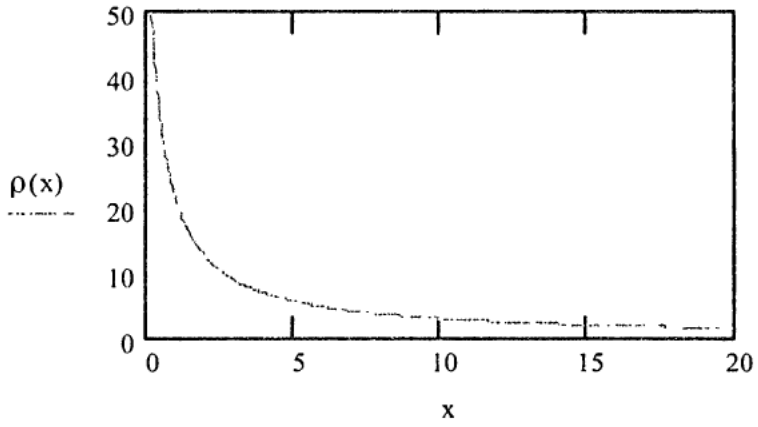


Рис. 8.10

Построенные на рис. 8.9 и 8.10 графики позволяют проследить зависимость **ρ** и $\varepsilon_{эф}$ от геометрических размеров МПЛ (рис. 8.8).

Помимо одиночных МПЛ в интегральных СВЧ устройствах, например фильтрах и направленных ответвителях, применятся и связанные МПЛ. Связанные несимметричные МПЛ с боковой связью приведены на рис. 8.11.

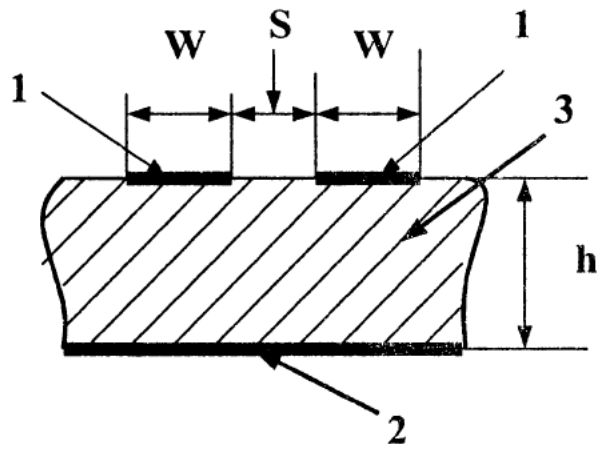


Рис. 8.11

С удовлетворительной точностью геометрические размеры связанных МПЛ (рис. 8.11) при ε_r=9,6 и волновом сопротивлении вне области связи ρ=50 Ом могут быть рассчитаны по формулам, полученным на основании аппроксимации зависимостей, определенных в результате электродинамического расчета. Такой расчет по функциям аппроксимации [20] можно произвести по программе, приведенной на рис. 8.12.

Задав в пределах 0.1...0.45 требуемое значение коэффициента связи между микрополосковыми линиями X=$K_{СВ}$, по программе определяется отношение Y=S/H и =Z=W/H при значении диэлектрической проницаемости подложки ε_r=9,6 (рис. 8.11). На рис. 8.12 построены графики зависимости Y и Z от $K_{СВ}$, позволяющие проследить влияние геометрических размеров связанных МПЛ на коэффициент связи между ними.

$$Y := \frac{S}{H} \qquad Z := \frac{W}{H} \qquad X := K_{cv}$$

$$Y(X) := 2.241 \cdot e^{-6.76 \cdot X}$$

$$Z(X) := -2.222 \cdot X^2 + 0.378 \cdot X + 0.954$$

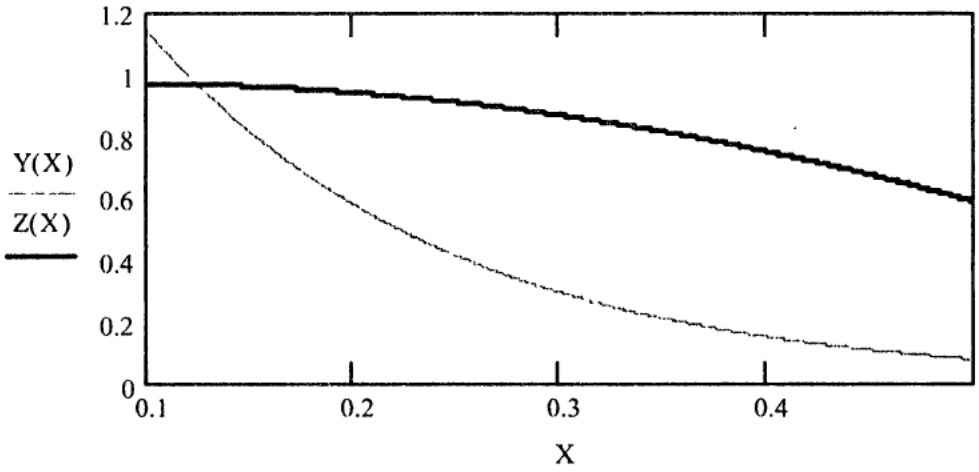


Рис. 8.12

8.4. СВЧ направленные ответвители и мостовые устройства

Направленным ответвителем называется симметричный восьмиполюсник, служащий для отбора части мощности падающей или отраженной волны из основного канала во вспомогательный (рис. 8.13).

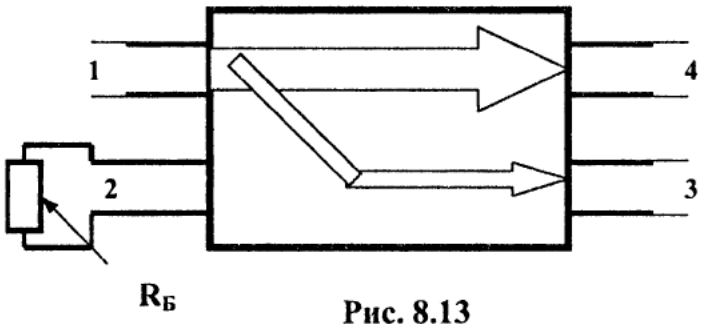


Рис. 8.13

Каждый и четырех входов направленного ответвителя связан с двумя другими и развязан с третьим. При подведении сигнала к одному из входов восьмиполюсник является делителем мощности. При одновременном возбуждении двух входов с соблюдением определенного фазового соотношения восьмиполюсник становится сумматором мощностей сигналов. При делении мощности поровну между выходными каналами, т. е. при уменьшении на 3 дБ мощности в каналах 3 и 4 по отношению к мощности во входном канале 1 (рис. 8.13), и постоянном сдвиге фаз между выходными сигналами в определенной полосе частот направленный ответвитель называется мостовым устройством. Его можно использовать и в качестве сумматора мощностей двух сигналов равной частоты и амплитуды при соблюдении определенного фазового соотношения. Учитывая сравнительно ограниченную мощность СВЧ тран-

зисторов, сумматоры играют важную роль в современных полупроводниковых радиопередатчиках (см. гл. 9).

В идеальном направленном ответвителе **S**-параметры имеют следующие значения:

S_{11} =0, S_{22}=0, S_{33}=0, S_{44}=0, т. е. собственные коэффициенты отражения по всем входам равны 0;

S_{12}=0, S_{21}=0, S_{34}=0, S_{43}=0 – при полной развязке двух пар входов,

S_{13}=S_{31}, S_{23}=S_{32}, S_{14}=S_{41}, S_{24}=S_{42} – в силу принципа взаимности.

С учетом данных значений матрица рассеяния (8.18) идеального направленного ответвителя имеет вид:

$$[\mathbf{S}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (8.40)$$

S-параметры позволяют определить рабочие характеристики направленного ответвителя – переходное затухание между каналами 1 и 3, 2 и 4:

$$b_{13}=10\lg(P_1/P_3)=-20\lg(|S_{13}|)\ ,\ b_{14}=10\lg(P_1/P_4)=-20\lg(|S_{14}|)$$

и коэффициент деления: $K_{Д}=20\lg(|S_{13}|/|S_{14}|)$.

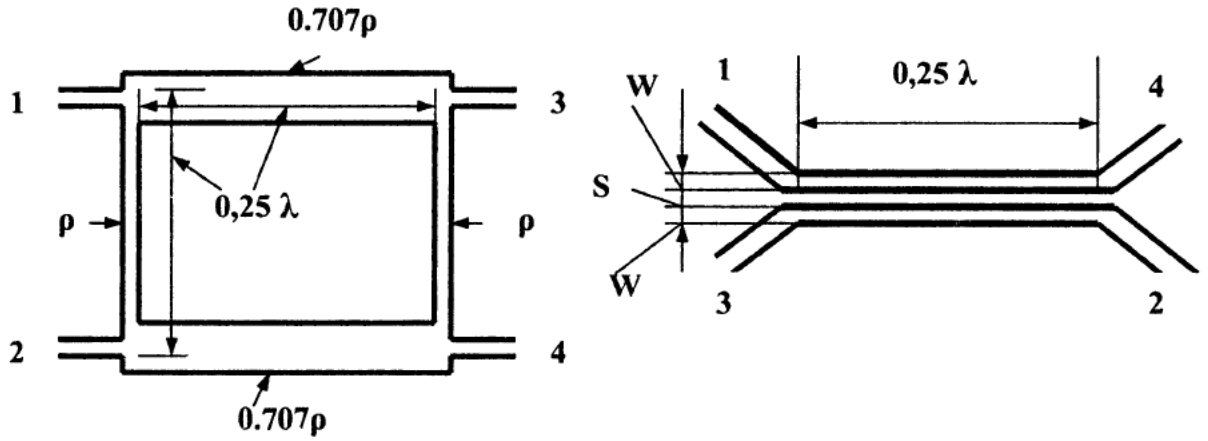
В идеальном мостовом устройстве, помимо приведенных соотношений, выполняются также следующие условия:

$$S_{13}=S_{31}=S_{24}=S_{42}=\gamma \quad и \quad S_{14}=S_{41}=S_{23}=S_{32}=\delta.$$

С их учетом матрица (8.40) примет вид:

$$[\mathbf{S}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ \delta & \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (8.41)$$

Мостовые устройства подразделяются по принципу действия и по значению фазового сдвига между сигналами в выходных каналах (3 и 4 на рис. 8.13). По второму признаку различают синфазные, квадратурные и противофазные мостовые устройства. Квадратурное мостовое устройство двухшлейфного типа на несимметричных микрополосковых линиях показано на рис. 8.14,а, с электромагнитной связью – на рис. 8.14,б. Эти же устройства могут использоваться и в качестве направленных ответвителей при иной ширине микрополосковых линий и связи между ними и при других типах фидерных линий.



а) б)

Рис. 8.14

Для направленного ответвителя на связанных линиях с электромагнитной связью (рис. 8.14,б) имеем:

$$\gamma = \frac{jk_{CB}\sin\theta}{\sqrt{1-k_{CB}^2}\cos\theta + j\sin\theta}\ , \qquad (8.42)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{1-k_{CB}^2}}{\sqrt{1-k_{CB}^2}\cos\theta + j\sin\theta}\ , \qquad (8.43)$$

где k_{CB} – коэффициент связи между связанными линиями, определяемый по программе рис. 8.12;

Θ – фазовый угол;

L – протяженность области связи линий;

$\lambda_Д$ – длина волны в линии.

В мостовом устройстве значение k_{CB}=0,707. На центральной частоте при Θ=π/2 согласно (3.42) и (3.43) имеем для **S**-параметров и переходных ослаблений:

$$\gamma = k_{CB}\ , \qquad \delta = -j\sqrt{1-k_{CB}^2}\ ,$$

$$b_{13} = 20\lg(1/k_{CB})\ , \qquad b_{14} = 20\lg(1/\sqrt{1-k_{CB}^2})\ .$$

Для определения свойств направленного ответвителя в полосе частот следует составить и решить систему уравнений вида (8.16). Решим данную задачу по отношению к коэффициенту отражения по входу 1 (рис. 8.14,б). При матрице (8.41) и направлениях падающих и отраженных волн согласно рис. 8.3 система уравнений примет вид:

$$\left.\begin{aligned} U_{1ОТР} &= \gamma U_{3ОТР} + \delta U_{4ОТР}\,, \quad \Gamma_1 = U_{1ОТР}/U_{1ПАД}\,, \\ U_{2ПАД} &= \delta U_{3ОТР} + \gamma U_{4ОТР}\,, \quad \Gamma_2 = U_{2ОТР}/U_{2ПАД}\,, \\ U_{3ПАД} &= \gamma U_{1ПАД} + \delta U_{2ОТР}\,, \quad \Gamma_3 = U_{3ОТР}/U_{3ПАД}\,, \\ U_{4ПАД} &= \delta U_{1ПАД} + \gamma U_{2ОТР}\,, \quad \Gamma_4 = U_{4ОТР}/U_{4ПАД}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (8.44)$$

Решив систему уравнений (8.44) относительно коэффициента отражения $\Gamma_1=U_{1ОТР}/U_{1ПАД}$, получим:

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma^2\Gamma_3 + \delta^2\Gamma_4 - (\gamma^2-\delta^2)^2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4}{1-(\delta^2\Gamma_3+\gamma^2\Gamma_4)\Gamma_2}\,. \qquad (8.45)$$

При коэффициенте отражения нагрузки, подключенной ко входу 2 (рис. 8.14,б) $\Gamma_2=0$, и разомкнутых полюсах 3 и 4, т. е. $\Gamma_3=1$ и $\Gamma_4=1$, получим из (8.45) для модуля коэффициента отражения по входу 1 с учетом (8.42) и (8.43):

$$|\Gamma_1| = |\gamma^2+\delta^2| = \frac{1-k_{СВ}^2(1+\sin^2\theta)}{1-k_{СВ}^2\cos^2\theta}. \qquad (8.46)$$

Для рабочего затухания, выраженного в дБ, направленного ответвителя с учетом (8.46) имеем:

$$b = 10\lg[1/(1-|\Gamma_1|^2)]\,. \qquad (8.47)$$

На центральной частоте f_0 при $\Theta=\pi/2$ из (8.46) и (8.47) получим:

$$|\Gamma_1| = 1-k_{СВ}^2\,,\quad b = 20\lg(1/2k_{СВ}\sqrt{1-k_{СВ}^2})\,.$$

На рис. 8.15 представлена программа по расчету коэффициента отражения и рабочего затухания согласно (8.46) и (8.47) в полосе частот. В приводимых выражениях фаза с частотой связаны соотношением:

$$\theta = 2\pi L/\lambda_Д = 0{,}5\pi[1+(\Delta f/f_0)]\,, \qquad (8.48)$$

где $\Delta f=f-f_0$ – отклонение частоты относительно f_0.

В программе (рис. 8.15) приняты обозначения:

Kc – коэффициент связи $k_{СВ}$; **X** – относительное изменение частоты $\Delta f/f_0$; **G1** – коэффициент отражения по входу Γ_1; **B** – рабочее затухание b.

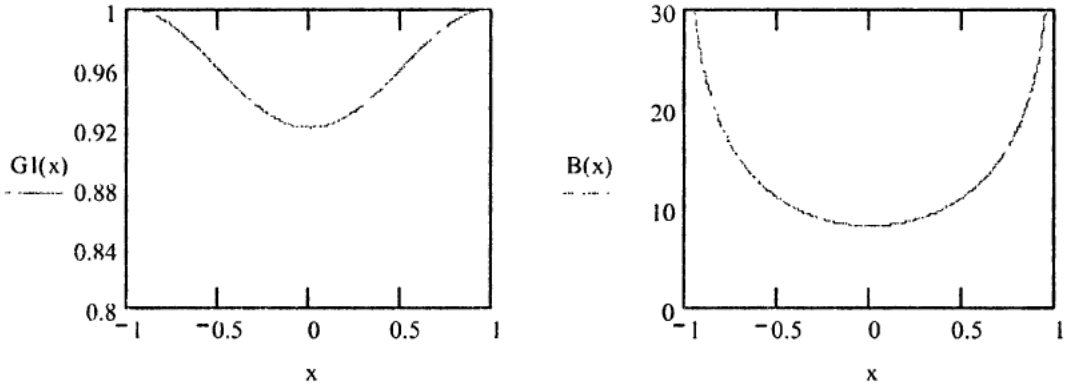
На рис. 8.16 построены графики функций **G1** и **B** от **X** при значении $k_{СВ}$=0,2, 0,5 и 0,707. Данные графики имеют вид, соответствующий характеристике затухания полосового фильтра. В силу данного качества путем каскадного включения направленных ответвителей на связанных микрополосковых линиях строится один их типов СВЧ полосовых фильтров (см. гл. 11).

$kc := 0.2$

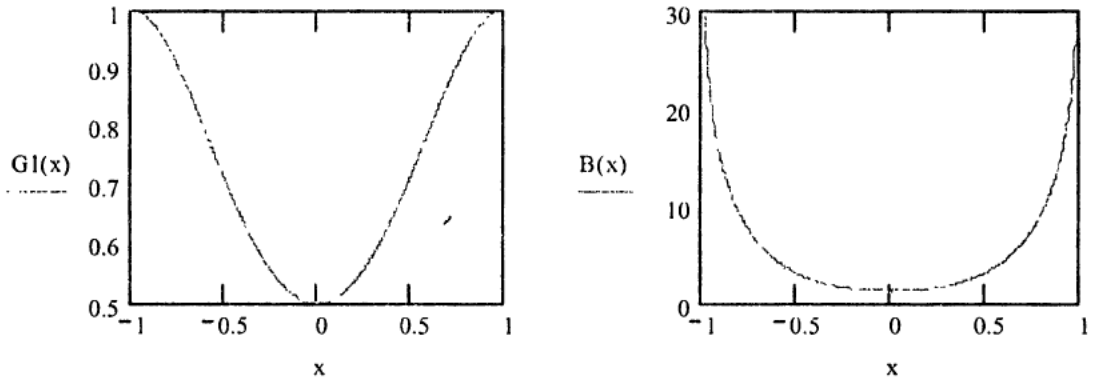
$\theta(x) := 0.5 \cdot \pi \cdot (1 + x)$ $\quad S(x) := (\sin(\theta(x)))^2$ $\quad C(x) := (\cos(\theta(x)))^2$

$$Gl(x) := \frac{\left[1 - kc^2 \cdot (1 + S(x))\right]}{1 - kc^2 \cdot C(x)} \qquad B(x) := 10 \cdot \log\left[\frac{1}{\left[1 - (Gl(x))^2\right]}\right]$$

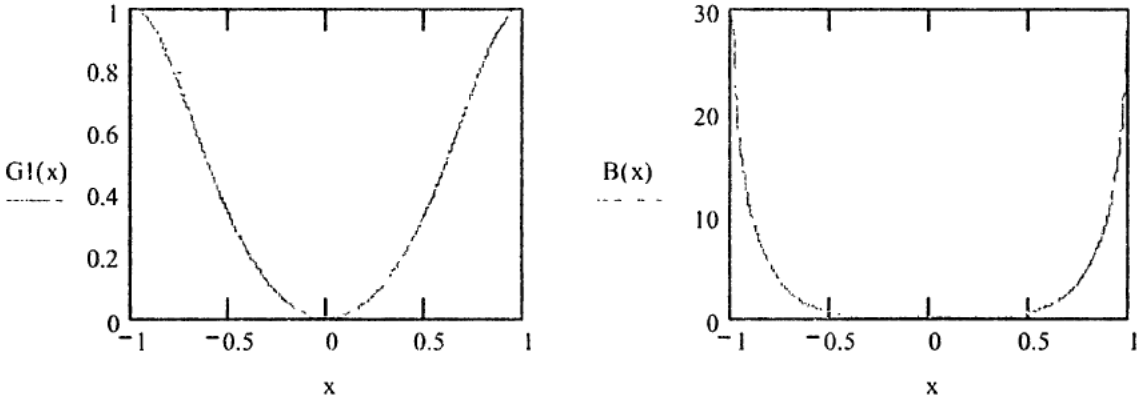
Рис. 8.15



а) $k_{СВ}$=0,2



б) $k_{СВ}$=0,5



в) $k_{СВ}$=0,707

Рис. 8.16

8.5. Передача мощности от генератора в нагрузку

Теория работы генератора, изложенная в гл. 7, полностью распространяется и на СВЧ генераторы с независимым возбуждением. Меняется только способ описания характеристик в силу перехода в СВЧ диапазоне к определению свойств электрической цепи с помощью коэффициентов отражения вместо таких параметров, как входное и выходное сопротивления, и к напряжениям падающей и отраженной волны – вместо полного напряжения (см.§ 8.1).

Как и прежде, свойства генератора, присоединенного к нагрузке, характеризуются коэффициентом передачи по мощности (7.26). Определим данный коэффициент при соединении нагрузки с генератором с помощью реактивного четырехполюсника (рис. 8.17,а).

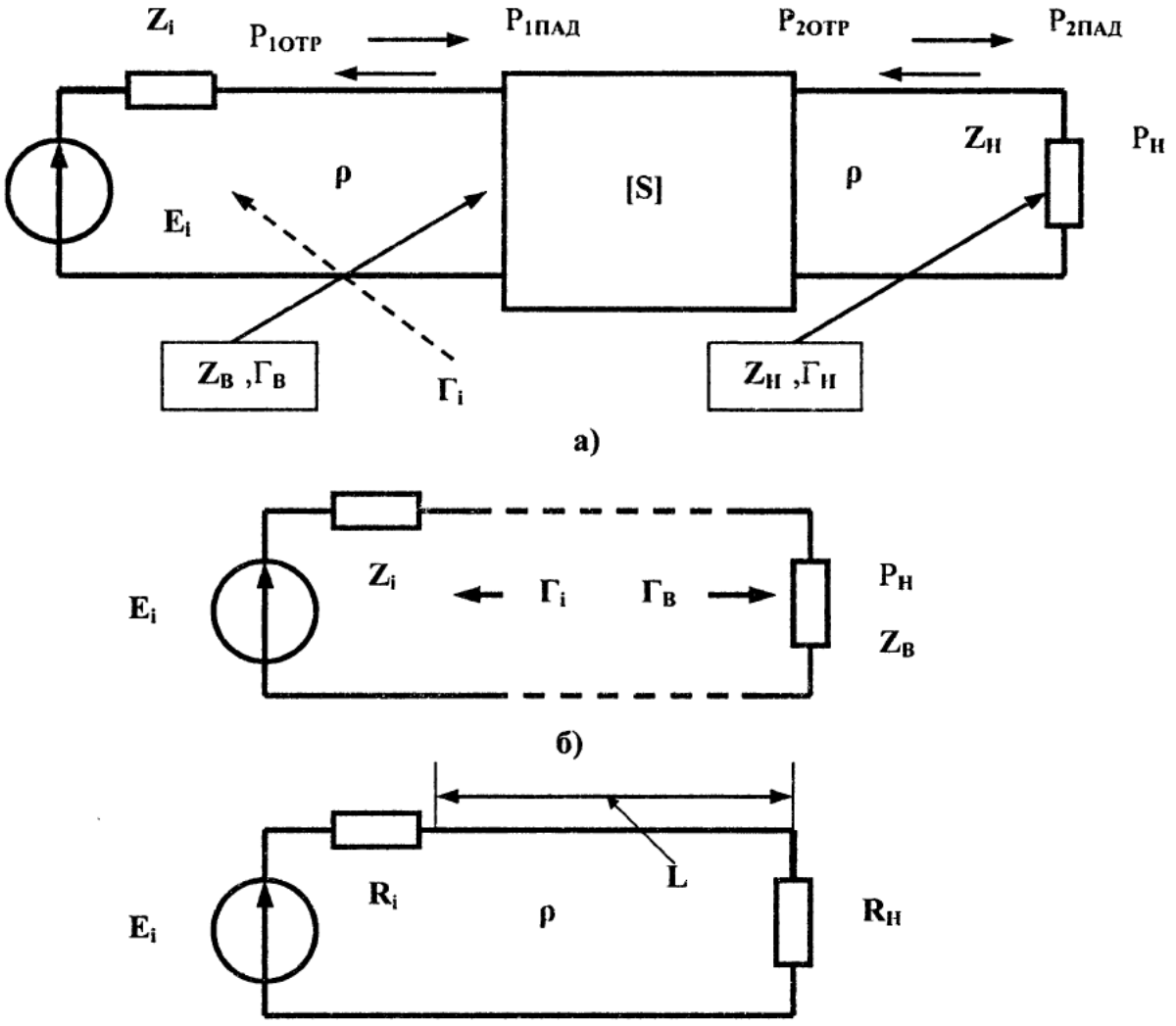


Рис. 8.17

Выразим входное сопротивление четырехполюсника и внутренне сопротивление генератора (рис. 8.17,а) через коэффициенты отражения. Согласно (8.7) имеем:

$$Z_B = \rho \frac{1+\Gamma_B}{1-\Gamma_B}, \quad Z_i = \rho \frac{1+\Gamma_i}{1-\Gamma_i}. \tag{8.49}$$

Действительные части комплексных сопротивлений (8.49):

$$\mathrm{Re}(Z_B)=\rho\frac{1-|\Gamma_B|^2}{|1-\Gamma_B|^2},\qquad \mathrm{Re}(Z_i)=\rho\frac{1-|\Gamma_i|^2}{|1-\Gamma_i|^2}. \tag{8.50}$$

Номинальная мощности генератора (7.25) с учетом (8.50) есть:

$$P_{\Gamma.НОМ}=\frac{E_i^2}{8\,\mathrm{Re}\,Z_i}=\frac{E_i^2}{8\rho}\frac{|1-\Gamma_i|^2}{1-|\Gamma_i|^2}. \tag{8.51}$$

Перейдем от схемы рис. 8.17,а к эквивалентной схеме рис. 8.17,б, где $Z_В$ – входное сопротивление и $Г_В$ коэффициент отражения на входе реактивного четырехполюсника. Поскольку в последнем нет потерь, то активная мощность $P_Н$, передаваемая в нагрузку $Z_Н$, равна активной мощности в сопротивлении $Z_В$. Поэтому для мощности с учетом (8.49)–(8.50) получим:

$$P_H=\frac{E_i^2\,\mathrm{Re}(Z_B)}{2|Z_i+Z_B|^2}=\frac{E_i^2}{8\rho}\frac{(1-|\Gamma_B|^2)|1-\Gamma_i|^2}{|1-\Gamma_B\Gamma_i|^2}. \tag{8.52}$$

С учетом (8.51)–(8.52) для коэффициента передачи мощности от генератора в нагрузку имеем:

$$K_{\Gamma.H}=\frac{P_H}{P_{\Gamma.НОМ}}=\frac{(1-|\Gamma_i|^2)(1-|\Gamma_B|^2)}{|1-\Gamma_B\Gamma_i|^2}. \tag{8.53}$$

При комплексно-сопряженных значениях $Г_i$ и $Г_В$ коэффициент $К_{Г.Н}$=1.

Выражения (7.26) и (8.53) идентичны. Только в одном случае коэффициент передачи мощности выражен через сопротивления нагрузки и генератора, а в другом – через их коэффициенты отражения. Первый подход более свойственен ВЧ диапазону, второй – СВЧ.

Из рассмотрения рис. 8.17 и уравнений четырехполюсника (8.25)–(8.26) следует:

$$\frac{P_{1ПАД}}{P_{\Gamma.НОМ}}=\frac{1-|\Gamma_i|^2}{|1-\Gamma_B\Gamma_i|^2}; \tag{8.54}$$

$$\frac{P_{2ПАД}}{P_{1ПАД}}=\frac{1-|\Gamma_B|^2}{1-|\Gamma_H|^2}; \tag{8.55}$$

$$\frac{P_{2ПАД}}{P_{1ПАД}}=\frac{|S_{21}|^2}{|1-S_{22}\Gamma_H|^2}. \tag{8.56}$$

Выражение (8.55) относится только к реактивным четырехполюсникам без потерь.

Программа по расчету коэффициента $К_{ГН}$ в соответствии с (8.53) при заданных значениях комплексных коэффициентов отражения нагрузки ($Г_Н$) и генератора ($Г_i$) приведена на рис. 8.18. В программе дан пример расчета.

$$KI := 0.5 \qquad \theta I := 30 \qquad KB := 0.5 \qquad \theta B := -50$$

$$j := \sqrt{-1} \qquad \theta 1 := \theta I \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \theta 2 := \theta B \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$K1 := KI \cdot \cos(\theta 1) + j \cdot \sin(\theta 1)$$

$$K2 := KB \cdot \cos(\theta 2) + j \cdot \sin(\theta 2)$$

$$K1M := |K1| \qquad K2M := |K2|$$

$$KP := \frac{\left[\left(1 - K1M^2\right) \cdot \left(1 - K2M^2\right)\right]}{\left(|1 - K1 \cdot K2|\right)^2} \qquad KP = 0.677$$

Рис. 8.18

В программе приняты обозначения:

KI – модуль и ΘI – фаза (в градусах) коэффициента отражения $Г_i$;

KB – модуль и ΘB – фаза (в градусах) коэффициента отражения $Г_В$;

KP – коэффициент передачи мощности от генератора в нагрузку $К_{ГН}$.

Рассмотрим **частный пример** согласования генератора с активной нагрузкой с помощью четвертьволновой линии передачи (рис. 8.17,в). Примем:

$$Z_i = R_i,\ Z_H = R_H \ \text{и} \ L = \lambda/4.$$

Согласно (8.8) получим:

$$\Gamma_H = \frac{R_H - \rho}{R_H + \rho} e^{-j\pi} = -\frac{R_H - \rho}{R_H + \rho}\ ,\ \Gamma_i = \frac{R_i - \rho}{R_i + \rho}\ .$$

При $R_H R_i = \rho^2$ [или $Г_Н = (Г_i)^*$] согласно (8.53) коэффициент $К_{ГН}=1$. Последнее равенство означает, что в нагрузку, согласованную с источником возбуждения с помощью четвертьволновой линии, передается номинальная мощность генератора.

Введем коэффициент $K=R_H/\rho$ и запишем для коэффициента отражения $Г_Н = -(R_H-\rho)/(R_H+\rho) = -(K-1)/(K+1)$. В результате согласно (8.14)–(8.15)

получим для мощностей падающей и отраженной волн в четвертьволновой согласующей линии:

$$G_{ПАД} = \frac{P_{ПАД}}{P_H} = \frac{(K+1)^2}{4K}, \; G_{ОТР} = \frac{P_{ОТР}}{P_H} = \frac{(K-1)^2}{4K}.$$

Согласно данным выражениям при согласовании генератора с нагрузкой ($R_H R_i = \rho^2$) в линии при $K \to 0$ и $K \to \infty$ мощности падающей и отраженной волн неограниченно возрастают (в реальном системе их рост ограничивается за счет потерь в линии), а разность мощностей:

$P_{ПАД} - P_{ОТР} = P_H = P_{Г.НОМ} = \text{const}$.

Согласование на одной частоте может быть осуществлено при любых значениях внутреннего сопротивления генератора и комплексного сопротивления нагрузки с помощью двухступенчатого перехода, составленного из двух отрезков фидерных линий. Значительно сложнее обстоит вопрос согласования генератора с нагрузкой в полосе частот. Здесь необходимо воспользоваться методом параметрического синтеза согласующего устройства, что обсуждается ниже в гл. 11.

8.6. СВЧ транзисторный усилитель

СВЧ транзисторные усилители, изготавливаемые по интегральной или интегрально-гибридной технологии, составляют наиболее обширную группу современных СВЧ генераторов с независимым возбуждением [20]. Эскиз такого усилителя с согласующими электрическими цепями на основе микрополосковых линий приведен на рис. 8.19.

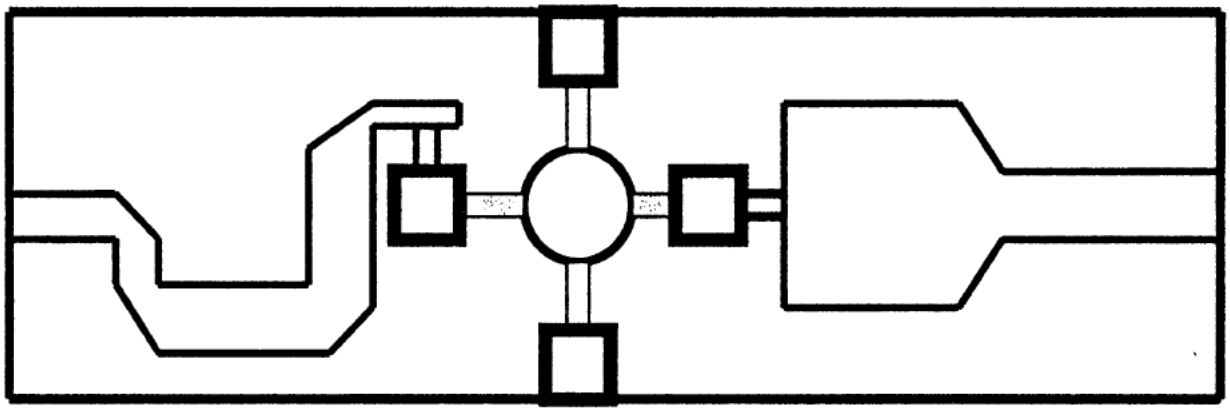


Рис. 8.19

Как и ранее при анализе ВЧ генератора (рис. 7.2, 7.3), разнообразные схемы СВЧ усилителей могут быть приведены к единой эквивалентной схеме, состоящей из трех каскадно соединенных четырехполюсников: входной и выходной согласующих электрических цепей и транзистора (рис. 8.20). Проведем анализ такого усилителя с использованием аппарата S-параметров и определении свойств согласующих цепей с помощью коэффициентов отражения. Отметим, что S-параметры определяются или

в режиме "малого сигнала", или рассматриваются как относящиеся к 1-ой гармонике в режиме "большого сигнала".

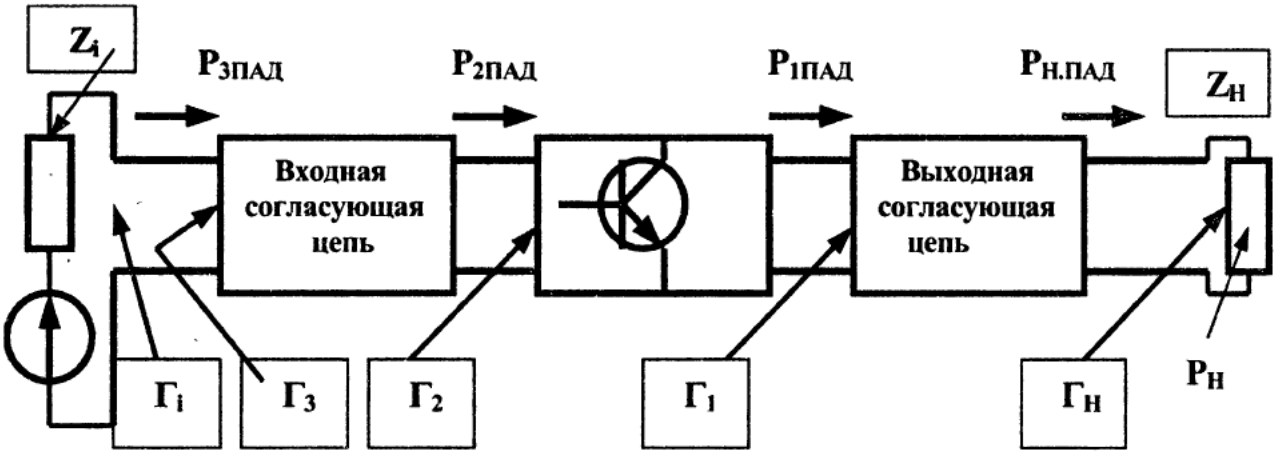


Рис. 8.20

Выразим номинальный коэффициент усиления генератора по мощности через отношение мощностей падающих волн напряжения в различных сечениях эквивалентной схемы (рис. 8.20):

$$K_{у.ном} = \frac{P_н}{P_{г.ном}} = \frac{P_н}{P_{н.пад}} \frac{P_{н.пад}}{P_{1пад}} \frac{P_{1пад}}{P_{2пад}} \frac{P_{2пад}}{P_{3пад}} \frac{P_{3пад}}{P_{г.ном}}, \qquad (8.57)$$

где $P_н$ – активная мощность, передаваемая в нагрузку;

$P_{г.ном}$ – номинальная мощность источника возбуждения, определяемая согласно (7.25);

$P_{н.пад}$, $P_{1пад}$, $P_{2пад}$, $P_{3пад}$ – мощности падающих волн в различных сечениях схемы рис. 8.20.

Согласно (8.53)–(8.56) для множителей в (8.57) имеем:

$$P_н / P_{н.пад} = 1 - |\Gamma_н|^2, \qquad (8.58)$$

$$P_{н.пад} / P_{1пад} = (1 - |\Gamma_1|^2) / (1 - |\Gamma_н|^2), \qquad (8.59)$$

$$P_{1пад} / P_{2пад} = |S_{21}|^2 / |1 - S_{22}\Gamma_1|^2, \qquad (8.60)$$

$$P_{2пад} / P_{3пад} = (1 - |\Gamma_3|^2) / (1 - |\Gamma_2|^2), \qquad (8.61)$$

$$P_{3пад} / P_{г.ном} = (1 - |\Gamma_i|^2) / |1 - \Gamma_i \Gamma_3|^2. \qquad (8.62)$$

где $\Gamma_н$, Γ_i, Γ_1, Γ_2, Γ_3 – коэффициенты отражения нагрузки, источника возбуждения, на входе согласующих цепей и транзистора (рис. 8.20).

Согласно (8.28) коэффициент отражения на входе транзистора:

$$\Gamma_2 = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_1}{1 - S_{22}\Gamma_1}. \qquad (8.63)$$

Для устойчивости необходимо иметь $|\Gamma_2|<1$. Коэффициенты отражения Γ_1 и Γ_3 определяются конфигурацией и параметрами согласующих цепей. Сначала можно определить входные сопротивления этих цепей, а затем согласно (8.8) – коэффициенты отражения.

Подставив (8.58)–(8.62) в (8.57) и умножив числитель и знаменатель на $(1-|S_{22}|^2)$, после группировки членов получим:

$$K_{У.НОМ} = K_{P1}K_{P2}K_{P3} \qquad (8.64)$$

где

$$K_{P1} = \frac{(1-|\Gamma_1|^2)(1-|S_{22}|^2)}{|1 - S_{22}\Gamma_1|^2} \qquad (8.65)$$

коэффициент передачи по мощности выходной согласующей цепи, определяемый согласно (8.53);

$$K_{P2} = \frac{|S_{21}|^2}{(1-|S_{22}|^2)(1-|\Gamma_2|^2)} \qquad (8.66)$$

собственный коэффициент усиления по мощности транзистора;

$$K_{P3} = \frac{(1-|\Gamma_3|^2)(1-|\Gamma_i|^2)}{|1 - \Gamma_3\Gamma_i|^2} \qquad (8.67)$$

коэффициент передачи по мощности входной согласующей цепи, определяемый согласно (8.53).

При $|S_{12}|<<1$ или $\Gamma_1=0$ согласно (8.63) $\Gamma_2=S_{11}$ и коэффициент усиления транзистора определяется только собственными S-параметрами:

$$K_{P2} = K_{TP} = \frac{|S_{21}|^2}{(1-|S_{22}|^2)(1-|S_{11}|^2)}. \qquad (8.68)$$

Собственный коэффициент усиления по мощности транзистора K_{P2} уменьшается с повышением частоты. За счет коэффициентов передачи по мощности выходной (K_{P1}) и входной (K_{P3}) согласующих цепей его удается выравнить, что будет показано в приводимом ниже примере.

На одной частоте или в узкой полосе частот всегда можно произвести "идеальное" согласование генератора с нагрузкой, т. е. в рассматриваемом случае входного сопротивления транзистора с источником возбуждения и выходного сопротивления – с нагрузкой. Проблема значительно усложняется в широкополосных транзисторных генераторах при необхо-

димости согласования транзистора с источником возбуждения и нагрузкой в определенной полосе частот. Здесь необходимо воспользоваться методами параметрического синтеза согласующих электрических цепей, что обсуждается ниже в гл. 11.

На основании (8.64)–(8.67) составим программу (рис. 8.21) по расчету коэффициента усиления по мощности СВЧ транзисторного генератора с независимым возбуждением в полосе частот.

ORIGIN:= 1

$$SF := \begin{pmatrix} f & S11 & & S12 & & S21 & & S22 & \\ 1 & 0.5 & -30 & 0.1 & 20 & 3 & 40 & 0.25 & -20 \\ 1.05 & 0.53 & -35 & 0.11 & 15 & 2.8 & 35 & 0.32 & -25 \\ 1.1 & 0.56 & -40 & 0.12 & 10 & 2.5 & 30 & 0.35 & -30 \\ 1.15 & 0.58 & -45 & 0.13 & 5 & 2.3 & 25 & 0.38 & -35 \\ 1.2 & 0.6 & -50 & 0.14 & 0 & 2 & 20 & 0.4 & -40 \end{pmatrix}$$

$$GF := \begin{pmatrix} GH & & G1 & & G3 & & GI & \\ 0.1 & 5 & 0.65 & 20 & 0.4 & 30 & 0.1 & 10 \\ 0.1 & 5 & 0.62 & 30 & 0.35 & 25 & 0.1 & 10 \\ 0.1 & 5 & 0.55 & 35 & 0.22 & 30 & 0.1 & 10 \\ 0.1 & 5 & 0.43 & 40 & 0.15 & 35 & 0.1 & 10 \\ 0.1 & 5 & 0.4 & 45 & 0.1 & 40 & 0.1 & 10 \end{pmatrix}$$

$f := SF\langle 1\rangle$

$S1M := SF\langle 2\rangle$ $\quad F1 := \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot SF\langle 3\rangle$ $\quad S2M := SF\langle 4\rangle$ $\quad F2 := \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot SF\langle 5\rangle$

$S3M := SF\langle 6\rangle$ $\quad F3 := \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot SF\langle 7\rangle$ $\quad S4M := SF\langle 8\rangle$ $\quad F4 := \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot SF\langle 9\rangle$

$G1M := GF\langle 1\rangle$ $\quad C1 := \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot GF\langle 2\rangle$ $\quad G2M := GF\langle 3\rangle$ $\quad C2 := \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot GF\langle 4\rangle$

$G3M := GF\langle 5\rangle$ $\quad C3 := \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot GF\langle 6\rangle$ $\quad G4M := GF\langle 7\rangle$ $\quad C4 := \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot GF\langle 8\rangle$

$$j := \sqrt{-1} \qquad n := 1..5$$

$$S11_n := S1M_n \cdot \left(\cos\left(F1_n\right) + j \cdot \sin\left(F1_n\right)\right) \qquad GH_n := G1M_n \cdot \left(\cos\left(C1_n\right) + j \cdot \sin\left(C1_n\right)\right)$$

$$S12_n := S2M_n \cdot \left(\cos\left(F2_n\right) + j \cdot \sin\left(F2_n\right)\right) \qquad G1_n := G2M_n \cdot \left(\cos\left(C2_n\right) + j \cdot \sin\left(C2_n\right)\right)$$

$$S21_n := S3M_n \cdot \left(\cos\left(F3_n\right) + j \cdot \sin\left(F3_n\right)\right) \qquad G3_n := G3M_n \cdot \left(\cos\left(C3_n\right) + j \cdot \sin\left(C3_n\right)\right)$$

$$S22_n := S4M_n \cdot \left(\cos\left(F4_n\right) + j \cdot \sin\left(F4_n\right)\right) \qquad GI_n := G4M_n \cdot \left(\cos\left(C4_n\right) + j \cdot \sin\left(C4_n\right)\right)$$

$$G2_n := S11_n + \frac{\left(S12_n \cdot S21_n \cdot G1_n\right)}{\left(1 - S22_n \cdot G1_n\right)} \qquad G2M_n := \left|G2_n\right|$$

$$K1_n := \left[1 - \left(\left|G1_n\right|\right)^2\right] \cdot \frac{\left[1 - \left(\left|S22_n\right|\right)^2\right]}{\left(\left|1 - S22_n \cdot G1_n\right|\right)^2}$$

$$K2_n := \frac{\left(\left|S21_n\right|\right)^2}{\left[\left[1 - \left(\left|S22_n\right|\right)^2\right] \cdot \left[1 - \left(\left|G2_n\right|\right)^2\right]\right]}$$

$$K3_n := \left[1 - \left(\left|G3_n\right|\right)^2\right] \cdot \frac{\left[1 - \left(\left|GI_n\right|\right)^2\right]}{\left(\left|1 - G3_n \cdot GI_n\right|\right)^2}$$

$$KP_n := K1_n \cdot K2_n \cdot K3_n$$

$$KPD_n := 10 \cdot \log\left(KP_n\right)$$

Рис. 8.21

В программе приняты следующие обозначения:

SF – матрица исходных данных транзистора: S-параметры на 5-ти частотах (их число может быть изменено), в 1-й столбец для каждого параметра заносятся значения модуля на данной частоте, во 2-й–значения фазы в градусах;

f – частота в ГГц, ее значения заносятся в 1-й столбец матрицы исходных параметров SF;

GF – матрица исходных данных коэффициентов отражения согласно схеме на рис. 8.20 на 5-ти частотах: GH=$\Gamma_н$, G1=Γ_1, G3=Γ_3, GI=Γ_i; в 1-й столбец для каждого параметра заносятся значения модуля на данной частоте, во 2-й – значения фазы в градусах.

K1, K3 – коэффициенты передачи по мощности выходной ($К_{Р1}$) и входной ($К_{Р3}$) согласующих цепей, рассчитываемые согласно (8.65) и (8.67);

K2 – собственный коэффициент усиления транзистора ($К_{Р2}$), рассчитываемый согласно (8.66);

G2M – модуль коэффициента отражения по входу транзистора Γ_2, рассчитываемый согласно (8.63);

KP – номинальный коэффициент усиления генератора по мощности, рассчитываемый согласно (8.64); KPD – то же в дБ.

Программа (рис. 8.21) условно состоит из четырех разделов.

В 1-м разделе осуществляется ввод исходных данных (матрицы SF и GF). Во 2-м разделе осуществляется формирование комплексных величин: S-параметров транзистора и коэффициентов отражения (при этом значения фазы в градусах переводятся в радианы). В 3-м разделе на основании формул (8.64)–(8.67) рассчитываются коэффициенты передачи по мощности выходной и входной согласующих цепей и коэффициенты усиления собственно самого СВЧ транзистора и всего генератора с независимым возбуждением. В 4-м разделе отражаются результаты расчета по программе в виде шести таблиц основных параметров генератора и трех графиков. Первый график есть зависимость коэффициента усиления всего генератора от частоты: $К_{у.ном}$ (дБ)=ψ(f). С помощью двух других графиков можно сравнить зависимости для коэффициента усиления собственно самого транзистора (K2), уменьшающегося с частотой, с коэффициентом усиления всего генератора (KP), который можно выравнить в полосе частот за счет согласующих цепей.

Результаты примера расчета по программе транзисторного усилителя приведены на рис. 8.22.

По результатам расчета можно сделать следующие выводы:

- с помощью входной и выходной согласующих цепей можно выравнить амплитудно-частотную характеристику по сравнению с такой же зависимостью для собственно самого транзистора (коэффициент K2);

- при комплексно-сопряженных значениях коэффициентов отражения Γ_1 и S_{22} коэффициент передачи по мощности выходной согласующей цепи $К_{Р1}$ =1;

- при комплексно-сопряженных значениях коэффициентов отражения Γ_3 и Γ_i коэффициент передачи по мощности входной согласующей цепи $К_{Р3}$ =1;

- об устойчивости усилителя можно судить по значению модуля коэффициента отражения Γ_2 (G2M), необходимо иметь G2M<1.

f_n =	$K1_n$ =	$K2_n$ =	$K3_n$ =
1	0.772	12.38	0.884
1.05	0.858	11.285	0.92
1.1	0.937	9.552	0.974
1.15	0.995	8.611	0.988
1.2	0.998	6.879	0.993

f_n =	$G2M_n$ =	KP_n =	KPD_n =
1	0.474	8.451	9.269
1.05	0.475	8.911	9.499
1.1	0.504	8.718	9.404
1.15	0.531	8.466	9.277
1.2	0.555	6.818	8.336

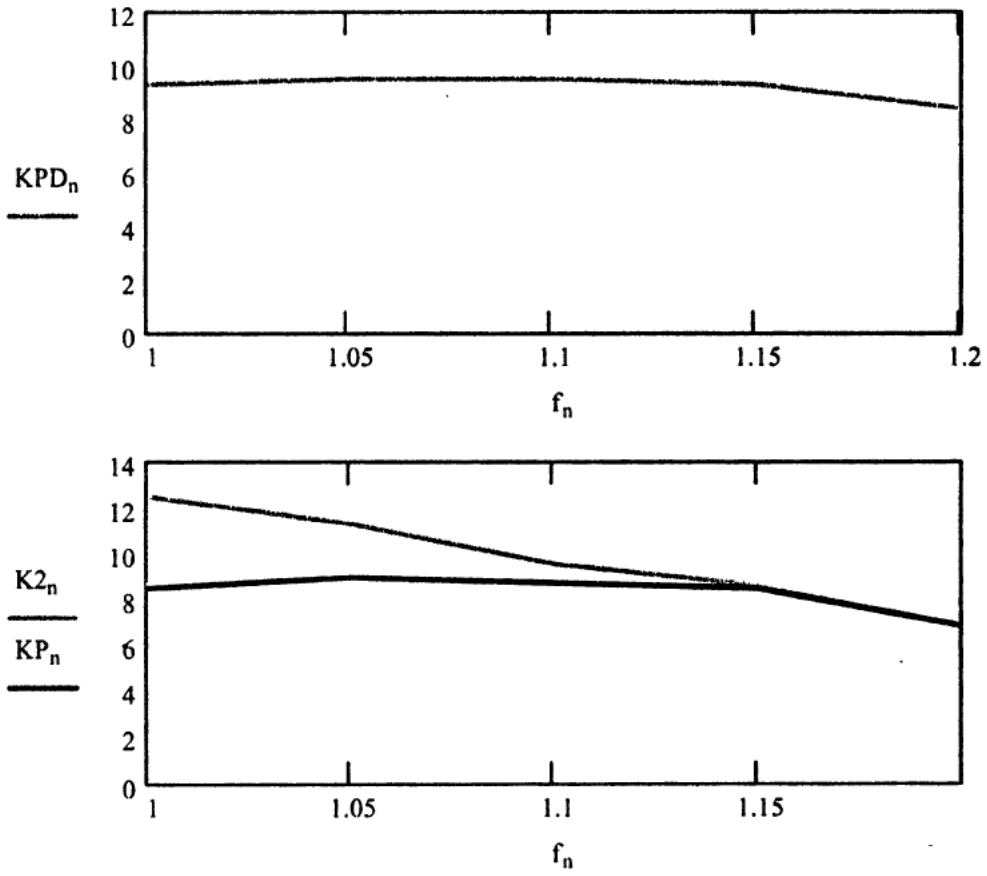


Рис. 8.22

8.7. СВЧ диодный генератор

В СВЧ диапазоне помимо транзисторных и электровакуумных приборов (ламп бегущей волны, прямопролетных клистронов, приборов магнетронного типа и т. д.) применяются также генераторы с использованием лавиннопролетного диода (ЛПД) и диода Ганна. Эквивалентная схема данных СВЧ приборов содержит отрицательное активное сопротивление (см.§ 5.2), что и позволяет использовать их в генераторах с внешним возбуждением для усиления мощности СВЧ сигнала. Основная область применения генераторных диодов занимает диапазон от 10 до 100 ГГц,т. е. выше верхней частоты СВЧ транзисторов.

Возможны три основные схемы СВЧ диодных усилителей: проходного, отражательного и типа бегущей волны. Принцип работы усилителя отражательного типа основан на разделении падающей (входной сигнал) и отраженной (выходной сигнал) волн, распространяющихся в фидерной линии, присоединяемой к активному двухполюснику – генераторному диоду. Такое разделение волн осуществляется или с помощью ферритового однонаправленного устройства – циркулятора, или мостового квадратурного устройства. Первая из схем приведена на рис. 8.23.

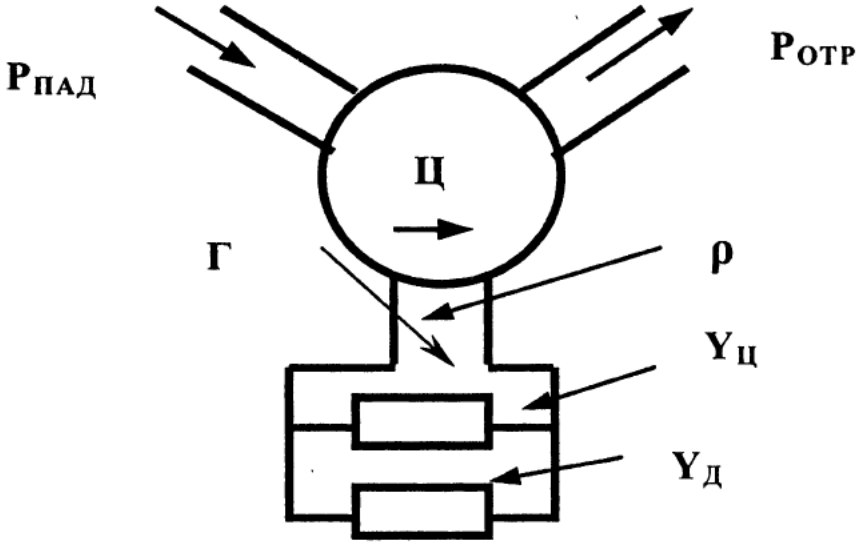


Рис. 8.23

Поскольку к диоду подключается СВЧ согласующая электрическая цепь, то их суммарная проводимость в месте подключения к фидерной линии есть:

$$Y=Y_Ц+Y_Д=g_Ц+jb_Ц-g_Д+jb_Д=g+jb, \qquad (8.69)$$

где $Y_ц$, $Y_д$ – комплексные проводимости цепи и диода;

$g=g_ц-g_д$ – суммарная активная проводимость двухполюсника;

$b=b_ц+b_д$ – суммарная реактивная проводимость двухполюсника.

Работу диодного генератора можно оценить с помощью коэффициента отражения, измеренного на входе фидерной линии с волновым сопротивлением ρ, к которой подключен двухполюсник проводимостью Y:

$$\Gamma = \frac{(1/\rho) - Y}{(1/\rho) + Y} = \frac{(1/\rho) - g - jb}{(1/\rho) + g + jb}. \qquad (8.70)$$

Коэффициент усиления устройства по мощности с учетом (8.70):

$$K_P = \frac{P_{ОТР}}{P_{ПАД}} = |\Gamma|^2 = \frac{|1 - g\rho|^2 + b^2\rho^2}{|1 + g\rho|^2 + b^2\rho^2}. \qquad (8.71)$$

Выражение (8.71) позволяет определить следующие режимы работы диодного генератора и отразить их на плоскости режимов (рис. 8.24):

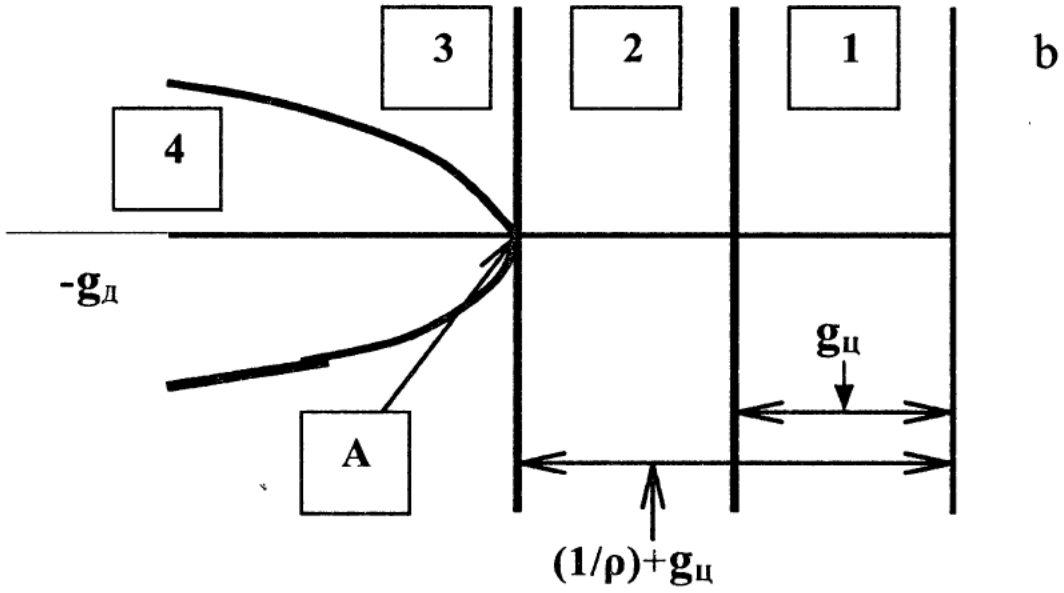


Рис. 8.24

1. При gρ>0 (или g>0) величина Г<1 и усиления сигнала не происходит (область 1 на рис. 8.24).

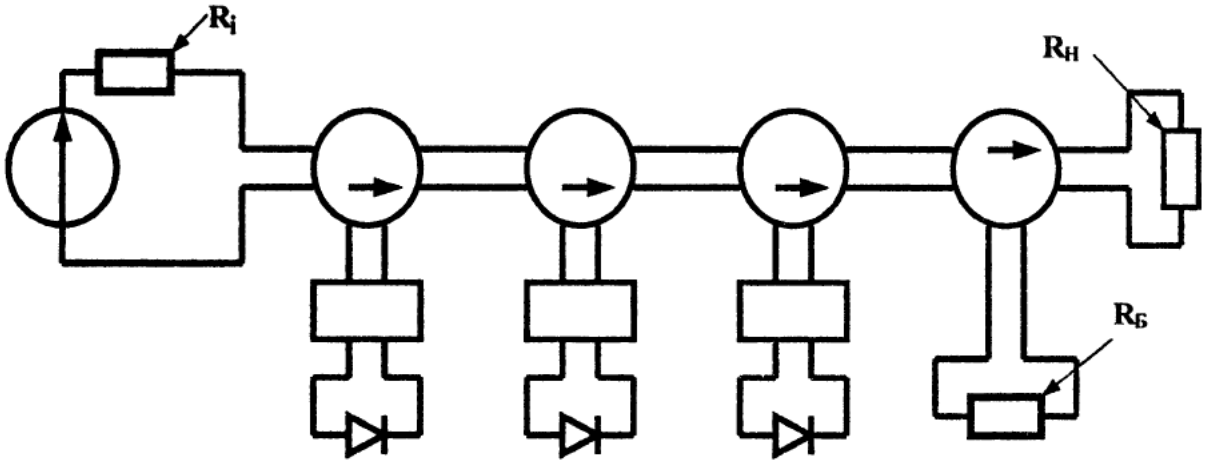
2. При −1<gρ<0 (при этом g<0) величина 1<Г<∞ – режим устойчивого усиления сигнала по мощности (область 2 на рис. 8.24).

3. При gρ=−1 (при этом g<0) величина Г=∞ – режим автоколебаний (точка **А** области 3 на рис. 8.24).

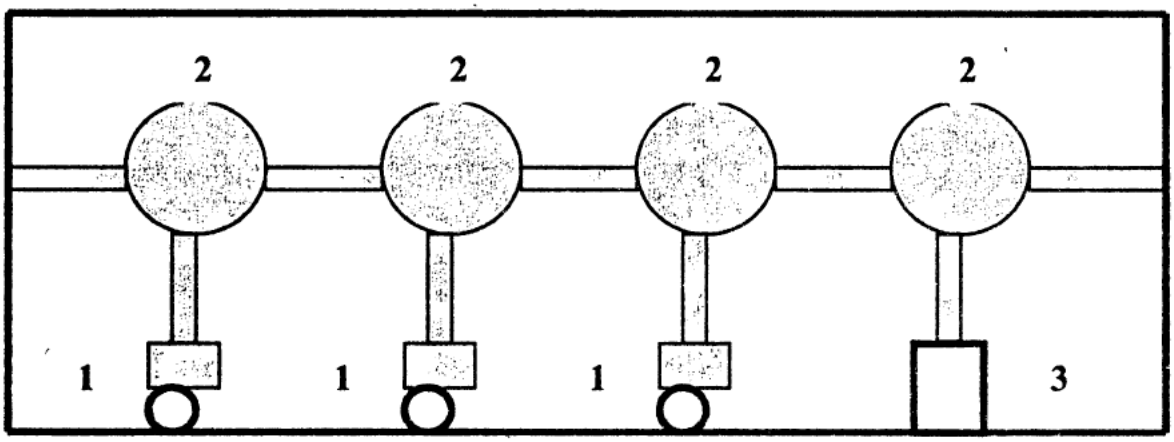
Возникновение автоколебаний возможно и при выполнении более жесткого условия: gρ<−1 в сочетании с режимом синхронизации автоколебаний (область 4 на рис. 8.24). (По поводу синхронизации автоколебаний см. § 5.5.)

Коэффициент усиления K_P одного диодного усилителя отражательного типа обычно не превышает 10…15 дБ. Поэтому при необходимости получения большего значения K_P последовательно включают несколько каскадов согласно схеме, приведенной на рис. 8.25,а. Межкаскадная развязка

усилителей осуществляется с помощью циркуляторов, что обеспечивает устойчивую работу всей сборки. Эскиз конструкции такого трехкаскадного диодного усилителя на микрополосковых линиях приведен на рис. 8.25,б, где 1 – генераторный СВЧ диод, 2 – циркулятор, 3 – балластная нагрузка.



а)



б)

Рис. 8.25

Общий коэффициент усиления такого трехкаскадного СВЧ диодного усилителя:

$$K_P = |\Gamma_1|^2 |\Gamma_2|^2 |\Gamma_3|^2 (1 - |\Gamma_H|^2), \qquad (8.72)$$

где $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, |\Gamma_3| \geq 1$ *и* $|\Gamma_H| \leq 1 -$

модули коэффициентов отражения генераторных диодов и нагрузки.

СВЧ диодные генераторы применяют обычно в диапазоне частот, лежащем выше максимальной частоты транзисторных генераторов, т. е. при частоте выше 8...10 ГГц. КПД таких СВЧ диодных генераторов невелик и не превышает 10%. Следует также учитывать, что подобные генераторы имеют повышенный уровень шума, особенно при использовании лавинно-пролетных диодов.

Глава 9. СУММИРОВАНИЕ МОЩНОСТЕЙ СИГНАЛОВ

9.1. Способы суммирования мощностей сигналов.

О проблеме суммирования мощностей сигналов генераторов. Требуемая мощность радиопередатчиков современных радиотехнических систем в некоторых случаях на три-пять порядков превышает максимальную мощность, генерируемую электронными приборами. Этот разрыв между мощностью радиопередатчика и мощностью единичного генератора стал особенно ощутим при переходе от электровакуумных приборов к полупроводниковым.

Мощность электровакуумных приборов в непрерывном режиме работы достигает десятков кВт, в импульсном – МВт. Максимальная мощность полупроводниковых приборов значительно ниже. Причем их мощность ограничена даже не причинами технологического, а физического характера: максимально допустимым значением напряженности электрического поля с целью исключения пробоя **p–n** перехода и максимально возможной температурой полупроводниковой структуры [20]. Более того, с увеличением частоты сигнала мощность транзистора снижется по закону, близкому к $1/f^2$, и составляет всего несколько Вт при частоте сигнала 5–6 ГГц. Вместе с тем требуемая мощность СВЧ радиопередатчиков в непрерывном режиме работы достигает нескольких, а в отдельных случаях десятков кВт. Но даже и в СВЧ радиопередатчиках сравнительно небольшой мощности в несколько десятков ватт мощность полупроводникового прибора во многих случаях оказывается меньше в несколько раз.

Итак, в связи с практически повсеместным переходом от ламповых к полупроводниковым радиопередатчикам проблема суммирования мощностей сигналов генераторов приобрела в радиотехнике весьма важное значение.

Возможно три основных способа суммирования мощностей сигналов однотипных генераторов:

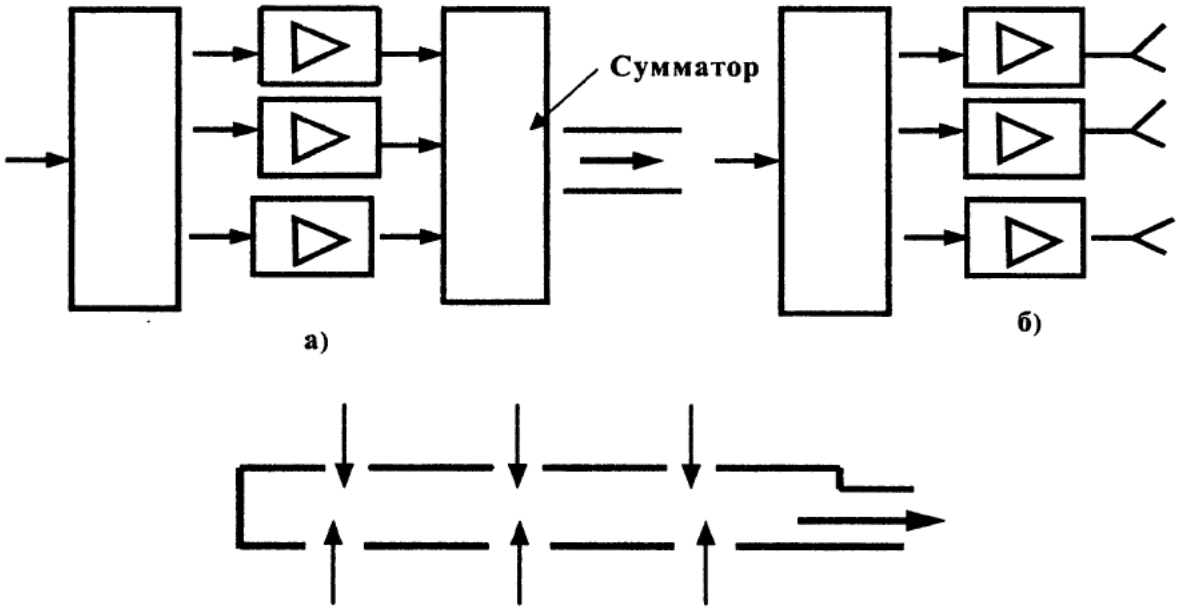
- с помощью многополюсных схем – сумматоров;
- со сложением сигналов в пространстве с помощью фазированной антенной решетки;
- в общем резонаторе.

Рассмотри основные черты этих способов.

При 1-м способе к специальному многополюсному устройству подключается большое число однотипных генераторов, мощность сигналов которых поступает в общий выходной сигнал, связанный с нагрузкой (рис. 9.1,а). Сумматор сигналов должен отвечать следующим требованиям:

- мощность сигнала в нагрузке должна быть, за вычетом небольших потерь, равна сумме номинальных мощностей отдельных генераторов, определяемых согласно (7.26) или (8.53);
- все входы сумматора должны быть развязаны между собой или взаимно независимы;
- все свойства должны сохраняться в требуемой полосе частот.

Второе требование означает, что сигнал от каждого генератора не должен поступать в каналы, к которым подключены другие источники, и, следовательно, влиять на их работу. Изменения в режиме работы любого генератора, включая режимы холостого хода и короткого замыкания, не должны влиять на работу и мощность всех других генераторов. Мощность последних должна по-прежнему оставаться равной номинальному значению и поступать из сумматора в полезную или балластную нагрузки.



в) **Рис. 9.1**

При 2-м способе сложение мощностей сигналов происходит в пространстве с помощью антенной решетки, состоящей из большого числа определенным образом ориентированных излучателей, каждый из которых возбуждается от самостоятельного генератора (рис. 9.1,б). Все сигналы, подводимые к излучателям, идентичны, за исключением значений начальных фаз, связанных между собой определенным законом. При этом возникает задача по стабилизации и управлению с определенностью точностью фронта фаз сигналов одинаковой структуры.

При 3-м способе сигналы генераторов подводятся к общей колебательной системе (в СВЧ диапазоне это объемный резонатор), в котором и происходит их сложение (9.1,в).

Практически первый способ позволяет повысить мощность радиопередатчика по отношению к мощности одного полупроводникового прибора на 15…20 дБ; второй – на 30…40 дБ, третий – на 10…13 дБ. Все способы позволяют существенно повысить надежность радиопередатчика, поскольку отказ одного из генераторов приводит только к некоторому снижению суммарной выходной мощности, и устойчивость работы усилительного тракта, так как сумматоры улучшают развязку между отдельными каскадами. Кроме того, при суммировании мощностей сигналов улучшаются условия охлаждения мощных полупроводниковых приборов, рассредоточиваемых по определенной охлаждающей поверхности.

9.2. Суммирование мощностей сигналов с помощью многополюсной схемы

Особенно актуальна проблема суммирования мощностей сигналов в СВЧ диапазоне в связи с малой мощностью СВЧ транзисторов. Поэтому применительно к этому диапазону и рассмотрим проблему суммирования мощностей сигналов на основе аппарата волновой матрицы рассеяния (см.гл.8).

Многополюсный сумматор должен иметь **n** входов (обозначим их номера с 1 по n) для подключения **n** однотипных генераторов, один общий выход для подключения нагрузки (обозначим его как "0") и **к** входов для подключения балластных нагрузок. Будем рассматривать эти нагрузки как составную, обязательную часть сумматора и поэтому определим последний как многополюсник с (n+1) входами (рис. 9.2), описываемый квадратной матрицей (n+1) порядка

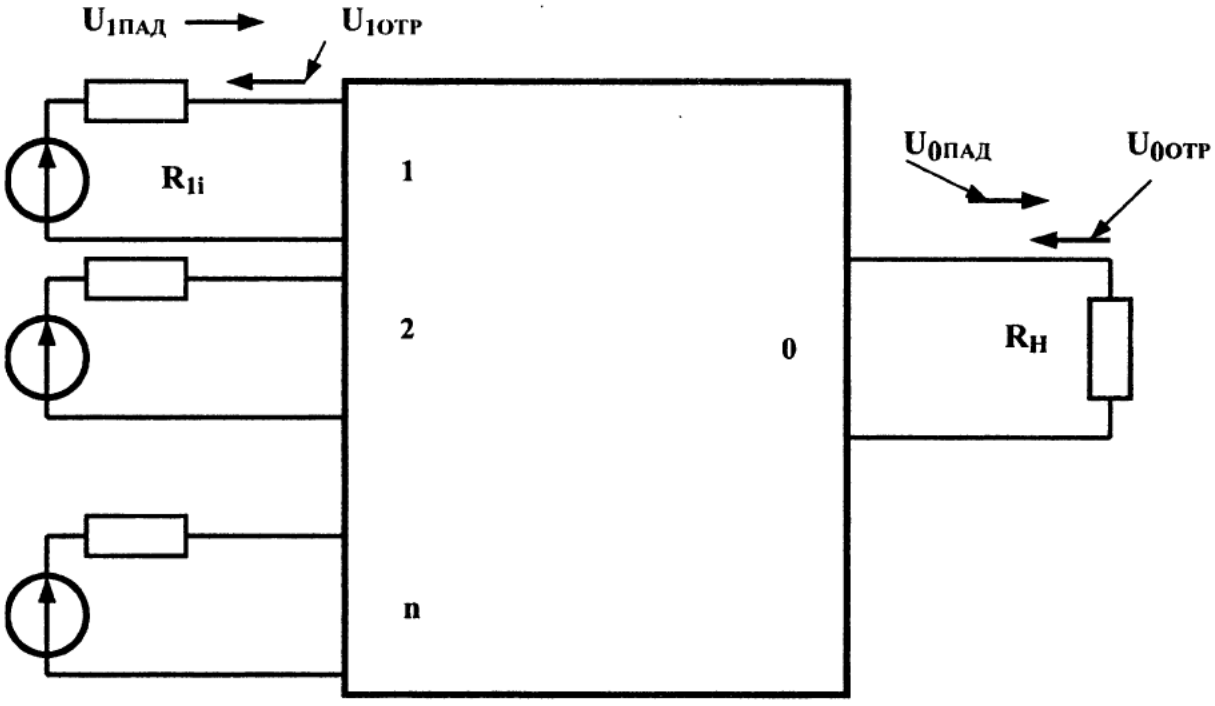


Рис. 9.2

Примем, что ко всем входам присоединяются фидерные линии с одним и тем же волновым сопротивлением, равным стандартному значению ρ_0=50 Ом. Тогда свойства сумматора можно описать с помощью следующей квадратной матрицы S-параметров, связывающей падающие и отраженные волны, распространяющиеся в линиях передачи, подключенных к многополюснику:

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \dots & S_{0N} \\ S_{10} & S_{11} & \dots & S_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{N0} & S_{N1} & \dots & S_{NN} \end{bmatrix}. \qquad (9.1)$$

где S_{kk} – коэффициент отражения **k** входа при подключении согласованных нагрузок величиной ρ_0 ко всем остальным входам; S_{km} – коэффициенты передачи по напряжению падающей волны с **k** входа на вход **m** при подключении согласованных нагрузок ρ_0 ко всем остальным входам.

Определим значения параметров матрицы рассеяния (9.1), удовлетворяющие условиям, предъявляемым к сумматорам: по полной передачи номинальной мощности всех генераторов в нагрузку и по взаимной развязке входов (см. § 9.1). Примем во внимание, что сумматор составлен из реактивных сосредоточенных элементов или отрезков фидерных линий, активными потерями в которых можно пренебречь, и что многополюсная схема удовлетворяет условию взаимности (обратимости) электрических цепей.

Для удобства согласования сумматора с генераторами и нагрузкой примем для собственных коэффициентов отражения по всем входам:

$$S_{kk}=0, \quad где\ k=0,1...n. \tag{9.2}$$

Для выполнения условия по взаимной независимости или развязки между собой всех генераторов необходимо иметь:

$$S_{km}=S_{mk}, \quad где\ k,\ m=1,2,...n. \tag{9.3}$$

При равенстве амплитуд всех суммируемых сигналов, поступающих в общий канал "0", модули всех коэффициентов передачи от генераторов к нагрузке должны быть равны:

$$|S_{01}| = |S_{02}| = ...|S_{0k}| = ...|S_{0n}|. \tag{9.4}$$

Благодаря принципу взаимности (обратимости) запишем:

$$S_{0k}=S_{k0},\ где\ k=1,\ 2,...n. \tag{9.5}$$

Рассматриваемый сумматор из-за отсутствия в нем активных потерь относится к числу реактивных четырехполюсников, отвечающих условию унитарности (8.22), что позволяет с учетом (9.2) записать:

$$|S_{10}|^2 + |S_{20}|^2 + ...|S_{k0}|^2 + ...|S_{n0}|^2 = 1 \tag{9.6}$$

или в соответствии с условием взаимности(9.5):

$$\sum_{k=1}^{n}|S_{k0}|^2 = \sum_{k=1}^{n}|S_{0k}|^2 = 1. \tag{9.7}$$

На основании принципа взаимности сумматор (рис. 9.1) можно использовать и в качестве делителя мощности сигнала, подведенного к каналу "0". При этом согласно (9.7) мощность сигнала равномерно распределится меду каналами с 1 по n. Из (9.7) для модулей S-параметров получим:

$$|S_{k0}| = |S_{0k}| = \frac{1}{\sqrt{n}},..где..k = 1,2,...n. \tag{9.8}$$

Фазы всех S_{k0} параметров должны иметь такое значение, чтобы суммарный вектор падающей волны в канале "0" общей нагрузки был равен арифметической сумме амплитуд всех подводимых к многополюснику сигналов. В частности, в сумматоре синфазного типа все значения этих фаз должны быть равны, в квадратурном отличаться на 90^0.

Таким образом, на основании проведенного анализа и с учетом выражений (9.2)–(9.5), матрица рассеяния сумматора, отвечающая сформулированным выше требованиям, примет вид:

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & S_{01} & \dots & S_{0n} \\ S_{01} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ S_{0n} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (9.9)$$

где модули $S_{0k}=S_{k0}$ определяются согласно (9.8).

С помощью матрицы (9.9) можно определить различные характеристики сумматора: коэффициент отражения со стороны каждого входа, суммарную мощность сигнала в общем канале, потери при разбалансе амплитуд и фаз суммируемых сигналов. Определим последний из названных параметров.

Амплитуда напряжения падающей волны в канале "0"согласно (9.9):

$$U_{0ПАД}=\sum_{k=1}^{n} U_{К.ПАД} S_{0k}. \qquad (9.10)$$

Для мощности той же волны получим:

$$P_{0ПАД}=\frac{\left|U_{0ПАД}\right|^2}{2\rho_0}=\frac{1}{2\rho_0}\left|\sum_{k=1}^{n} U_{К.ПАД} S_{0k}\right|^2=\frac{1}{2\rho_0 n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left|U_{К.ПАД}\right| e^{-\varphi_k}\right|^2 \qquad (9.11)$$

где $\left|U_{К.ПАД}\right|$ – модуль амплитуды падающей волны в k-м канале;

φ_k – суммарный фазовый сдвиг сигнала из канала k в канал 0.

При полной передачи мощности всех генераторов в общий канал:

$$P_{0ПАД}=nP_{Г.НОМ}=\frac{U^2_{НОМ}}{2\rho_0}, \qquad (9.12)$$

где $U_{НОМ}$ – номинальное значение амплитуды напряжения падающей волны в каждом из входных каналов.

Для коэффициента потерь при разбалансе амплитуд и фаз суммируемых сигналов с учетом (9.11) и (9.12) получим:

$$K_П = \frac{P_{0ПАД}}{nP_{Г.НОМ}} = \frac{1}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{n} p_k e^{-\varphi_k}\right|^2, \qquad (9.13)$$

где $p_k = U_{kПАД}/U_{НОМ}$ – относительное изменение амплитуды напряжения генератора по отношению к номинальному значению.

На основании формулы (9.13) составим программу (рис. 9.3), позволяющую рассчитать потери мощности в общей нагрузке при разбалансе амплитуд и фаз суммируемых сигналов.

В программе приняты следующие обозначения:

N=8 – число суммируемых сигналов (их число может быть изменено);

UH – номинальное значение амплитуды сигнала $U_{НОМ}$;

SU – матрица исходных данных: значения амплитуд ($U_{kПАД}$) и фаз (φ_k – в градусах) суммируемых сигналов;

K – коэффициент потерь, рассчитываемый согласно (9.13), KD – то же в дБ.

Результат примера расчета по программе при изменении амплитуд суммируемых сигналов по нормальному закону распределения и фаз по линейному закону приведены на том же рис. 9.3.

ORIGIN:= 1

N := 8

UH := 10

$$SU := \begin{pmatrix} U & \theta \\ 7.24 & -20 \\ 8.33 & -15 \\ 9.21 & -10 \\ 9.78 & -5 \\ 9.78 & 0 \\ 9.21 & 5 \\ 8.33 & 10 \\ 7.24 & 15 \end{pmatrix}$$

$U := SU^{\langle 1 \rangle}$ $\quad \theta := SU^{\langle 2 \rangle}$

$j := \sqrt{-1}$ $\quad n := 1..N$

$P_n := \frac{U_n}{UH}$ $\quad \psi_n := \theta_n \cdot \frac{\pi}{180}$

$Y_n := P_n \cdot \cos(\psi_n) + j \cdot P_n \cdot \sin(\psi_n)$

$K := \frac{1}{N^2} \cdot \left(\left| \sum_{n=1}^{N} Y_n \right| \right)^2$ $\quad KD := 10 \cdot \log(K)$

$K = 0.72$ $\quad KD = -1.427$

Рис. 9.3

Из приведенного примера видно, что разбаланс амплитуд и особенно фаз суммируемых сигналов приводит к ощутимым потерям: вместо полезной нагрузки часть мощности от генераторов поступает в балластные нагрузки. Поэтому при суммировании необходима с определенной точностью стабилизация и амплитуд, и фаз сигналов, в том числе с помощью системы автоматического регулирования (см. § 9.4).

На рис. 9.4 приведены две схемы сумматора четырех генераторов, построенные на основе мостовых квадратурных устройств и шестиполюсников. На рис. 9.4,а указаны требуемые фазы сигналов, Б.Н.– балластная нагрузка. Второй сумматор (рис. 9.4,б) является синфазным и здесь фазы всех сигналов одинаковы.

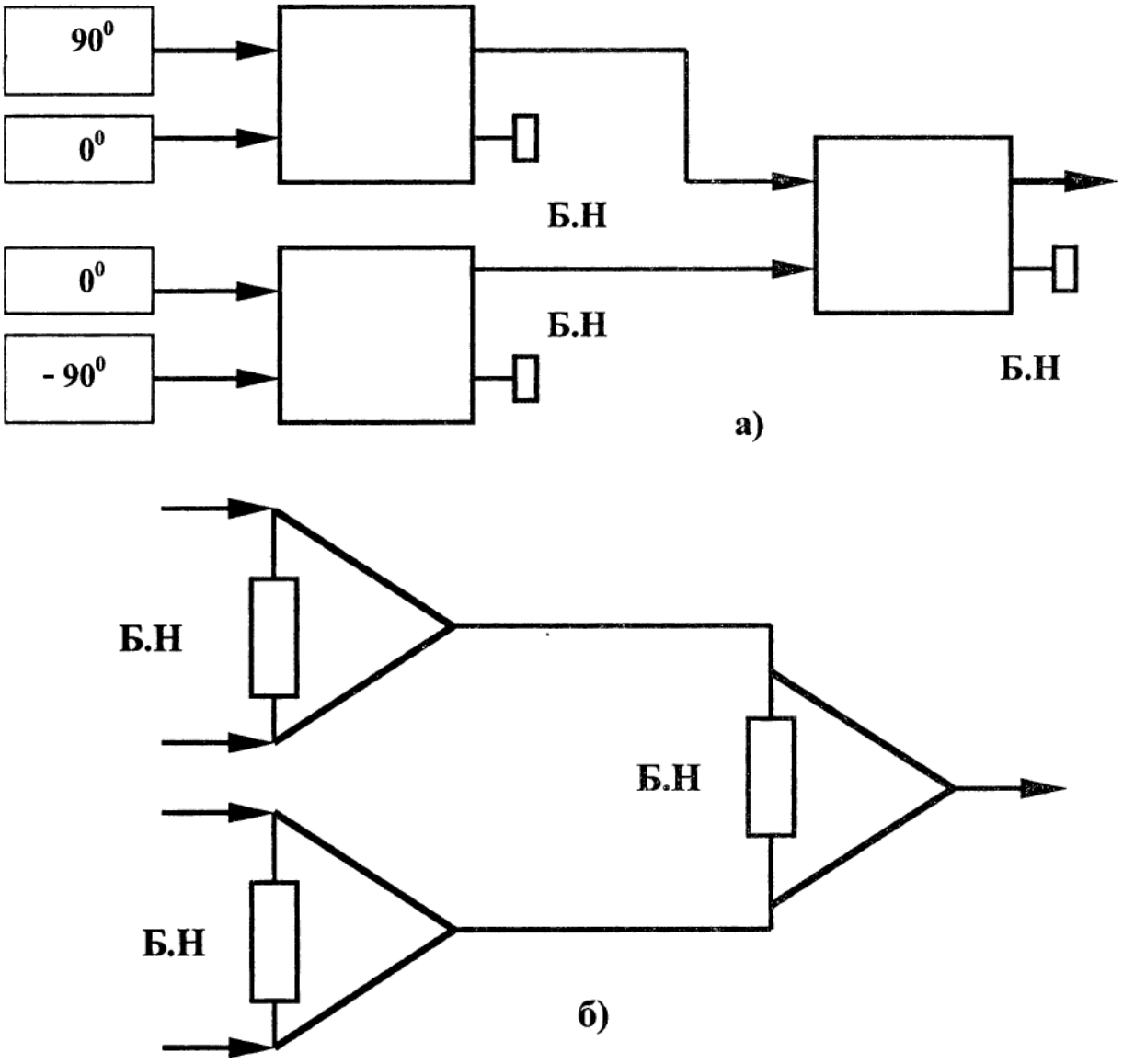


Рис. 9.4

9.3. Суммирование мощностей сигналов с помощью фазированной антенной решетки

Определенное число идентичных и одинаково ориентированных излучателей – электрических и щелевых вибраторов, рупорных, диэлектрических, спиральных и других типов антенн – составляют многоэлементную антенную решетку [31]. Для антенной решетки с прямоугольной сеткой напряженность в дальней зоне определяется выражением:

$$E(\boldsymbol{R}) = \Phi_И(\Theta,\varphi) * \Phi_Р(\Theta,\varphi), \qquad (9.14)$$

где $\Phi_И$ (Θ,φ) – множитель излучателя; $\Phi_Р$ (Θ, φ) – множитель решетки, Θ; φ – угловые координат; **R** – радиус-вектор.

В большинстве типов антенных решеток множитель $\Phi_И$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с множителем $\Phi_Р$. Поэтому все основные характеристики антенной решетки–коэффициент направленного действия, ширина основного и боковых лепестков диаграммы направленности – в первом приближении можно считать зависящими только от множителя решетки $\Phi_Р$. При включении фазовращателя дискретного типа в цепь возбуждения каждого излучателя (рис. 9.5) фронт комплексных амплитуд сигналов (фронт возбуждения) определяется выражением:

$$U_{m,n} = V_{m,n} \exp[j(m\varphi_x + n\varphi_y)], \qquad (9.15)$$

где $V_{m,n}$ – фронт амплитуд сигналов на входе блока фазовращателей;

φ_X, φ_Y – шаг изменения (дискрет) фазы между сигналами двух соседних излучателей, соответственно по осям X и Y;

m, n – номер излучателя по осям X и Y.

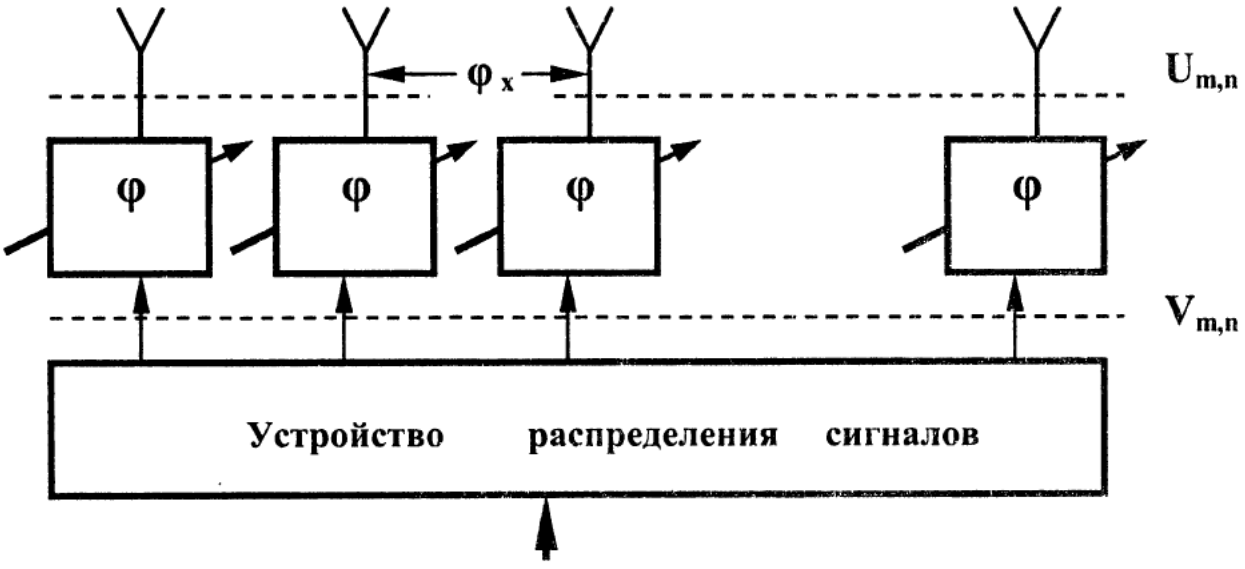


Рис. 9.5

Изменяя с помощью фазовращатлей значения дискретов φ_X и φ_Y и поворачивая тем самым плоскость фазового фронта, осуществляют в пространстве электронное сканирование луча диаграммы направленности. Такая антенная решетка с управляемыми значениями фаз сигналов называется фазированной (ФАР). Мощность сигнала, излучаемая ФАР в телесном угле главного лепестка диаграммы направленности, равна сумме мощностей всех генераторов, возбуждающих отдельные излучатели, за вычетом излучения по боковым лепесткам. Это позволяет рассматривать ФАР как устройство суммирования мощностей большого, до нескольких тысяч, источников сигнала.

В зависимости от расположения излучателей ФАР подразделяются на линейные, плоские и цилиндрические. Рассмотрим линейную ФАР, у которой излучатели располагаются вдоль прямой линии (рис. 9.5). При равенстве амплитуд фронта сигналов и $\Phi_И$=const диаграмма направленности линейной ФАР описывается выражением:

$$E(\theta)=\Phi_P(\theta)=V_0\sum_{n=1}^{N}e^{j(n-1)\beta} \quad , \tag{9.16}$$

где $\beta=\dfrac{2\pi b}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0)$,

b – расстояние между двумя соседними излучателями;

Θ_0 – направление главного лепестка диаграммы направленности;

N – число излучателей.

С помощью формулы для суммы геометрической прогрессии преобразуем (9.16) к виду:

$$E(\theta)=V_0\frac{\sin(N\beta/2)}{\sin(\beta/2)}e^{j\beta(N-1)/2} \quad . \tag{9.17}$$

Направление главного лепестка диаграммы направленности определяется из условия: $\varphi_X=-(2\pi b/\lambda)\sin\Theta_0$, из которого получим:

$$\Theta_0=-\arcsin(\varphi_X\lambda/2\pi b). \tag{9.18}$$

Согласно (9.18), управляя величиной дискрета фазы φ_X, можно изменять направление главного лепестка диаграммы направленности, т. е. производить электронное сканирование лучом антенны.

Программа по расчету диаграммы направленности – модуля комплексной амплитуды, определяемой из (9.17), приведена на рис. 9.6, а результаты расчета по ней при $\gamma=b/\lambda=0{,}5$ для трех случаев (в двух – значение $\Theta_0=0$, в третьем $\Theta_0=60^0$) – на рис. 9.7.

В программе угол $\Psi=\Theta_0$, остальные обозначения совпадают с обозначениями формул (9.16)–(9.17). Углы Ψ и Θ – в градусах. Число излучателей N может быть выбрано сколь угодно большим.

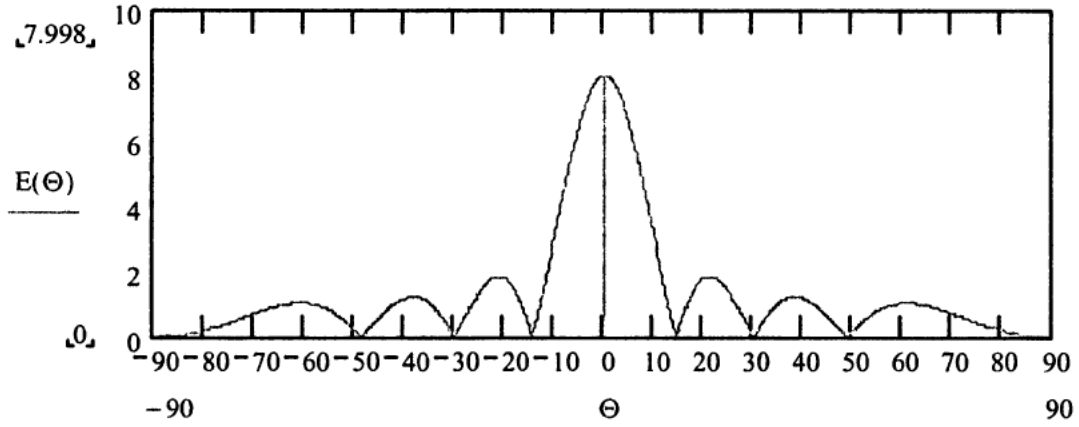
$$\Psi := 0 \qquad \gamma := 0.5 \qquad N := 8$$

$$q := \frac{\pi}{180} \qquad \alpha := 2 \cdot \pi \cdot \gamma$$

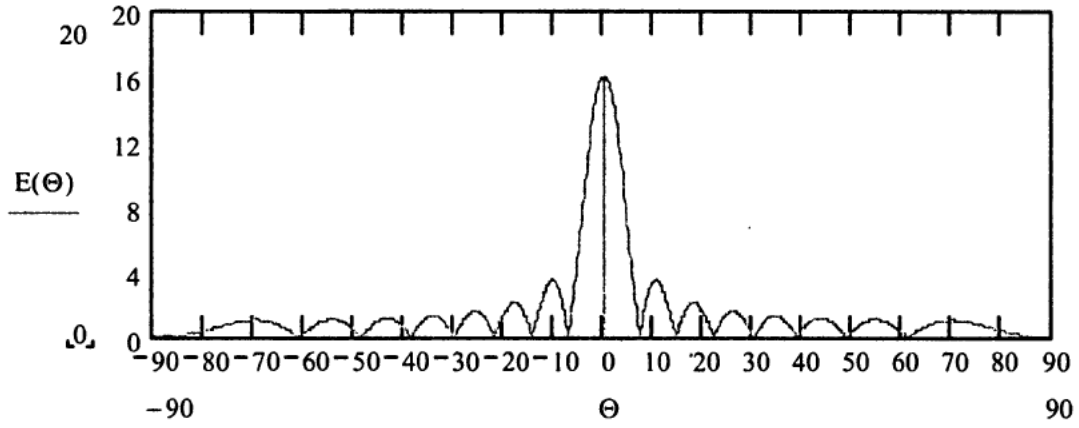
$$\beta(\Theta) := \alpha \cdot (\sin(q \cdot \Theta) - \sin(q \cdot \Psi))$$

$$E(\Theta) := \left| \frac{\sin(0.5 \cdot N \cdot \beta(\Theta))}{\sin(0.5 \cdot \beta(\Theta))} \right|$$

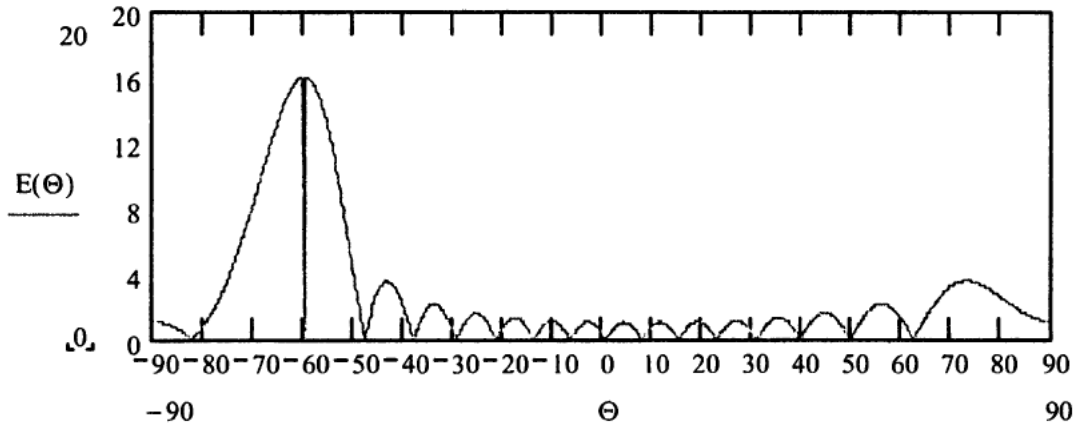
Рис. 9.6



N=8



N=16



N=16

Рис. 9.7

Из построенных графиков (рис. 9.7) видно, как влияют два параметра – число излучателей N и угол Θ_0, определяющий направление главного лепестка – на форму диаграммы направленности. С увеличением N главный лепесток сужается и увеличивается по амплитуде, а количество боковых лепестков возрастает. Во всех случаях максимальный уровень бокового лепестка на 12 дБ меньше основного. При смещении главного лепестка от нулевого направления он расширяется.

Укрупненная структура радиопередающего устройства с ФАР приведена на рис. 9.8.

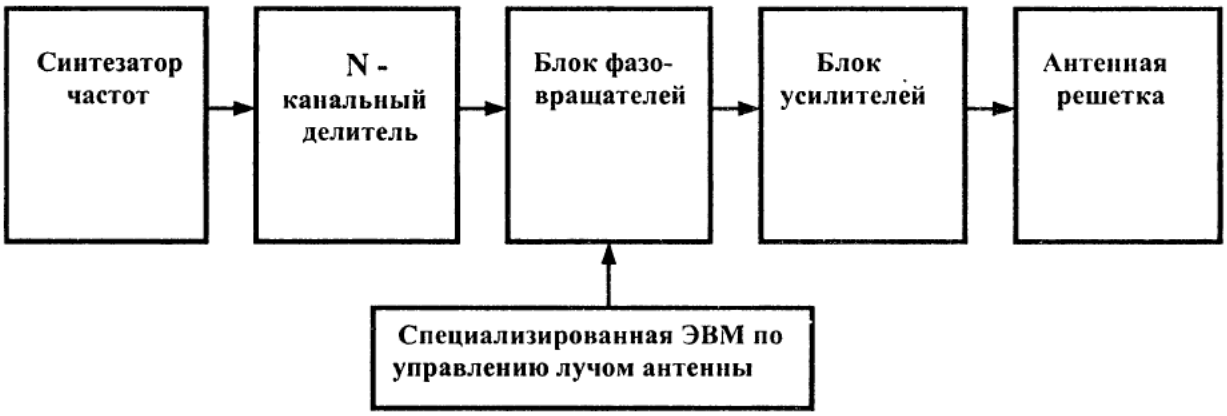


Рис. 9.8

К достоинствам ФАР следует отнести: возможность электронного сканирования лучом антенны с высоким быстродействием путем переключения фазовращателей по определенному алгоритму; сложение мощностей большого числа идентичных источников энергии, в том числе и полупроводниковых, питающих отдельные излучатели; возможность автоматизации процесса управления лучом антенны по программе с помощью компьютера; высокая надежность при выходе из стоя отдельных генераторов, поскольку в целом система остается работоспособной при несколько ухудшенных параметрах; слабая связь между отдельными излучателями, что позволяет обеспечить хорошую развязку (до 30 дБ и выше) между питающими их генераторами.

При плоской ФАР без ощутимого снижения ее параметров общий сектор обзора составляет $\pm 60^0$. Для управления лучом в двух ортогональных направлениях применяют двумерную плоскую ФАР. При необходимости расширения сектора обзора до 360^0 используют цилиндрическую ФАР, в которой производится поочередное подключение групп излучателей.

9.4. Многосвязная система автоматической стабилизации фронта фаз сигналов

Сущность проблемы. Как следует из анализа, проведенного в § 9.2 и 9.3, фазовый фронт сигналов существенно влияет на параметры системы в целом, как при суммировании мощностей посредством многополюсной схемы, так и с помощью ФАР. Необходимо с определенностью точностью поддерживать закон распределения фаз сигналов. В противном случае эффективность обоих методов суммирования сигналов резко снижается: согласно (9.13) уменьшается общая мощность сигнала радиопе-

редатчика, "расплывается " диаграмма направленности ФАР – расширяется главный и увеличивается амплитуда боковых лепестков. Анализ показывает, что при использовании схем – сумматоров разбаланс фаз между отдельными каналами допустим в пределах $\pm 10^0$, а при ФАР – не более $(0{,}1\ldots0{,}2)\Delta\varphi_Д$, где $\Delta\varphi_Д$ – дискрет изменения фазы сигнала. Причинами, дестабилизирующими фазовое распределение сигналов, являются неодинаковый фазовый набег в канальных усилителях и всех остальных звеньях схемы (рис. 9.8) и их зависимость от внешних условий, в первую очередь, от изменяющейся температуры окружающей среды.

Учитывая многообразие причин фазовой нестабильности каналов формирования высокочастотных сигналов, решить с требуемой точностью и в полной мере задачу фазирования можно только с использованием систем автоматического регулирования. Поскольку в такой системе имеется большое число связанных между собой контуров регулирования, определяемое числом канальных усилителей, то она называется многосвязной. Ее задача состоит в стабилизации фазового фронта сигналов, а в случае ФАР и программном управлении этим фронтом с целью электронного сканирования лучом антенны.

Известно несколько многосвзных систем фазовой стабилизации сигналов, определяющим признаком в которых является способ формирования опорного сигнала, по которому подстраиваются фазы сигналов всех канальных усилителей [19]. Проведем анализ одной из таких многосвязных схем автоматического регулирования.

Кольцевая схема стабилизации фронта фаз сигналов. В данной схеме (рис. 9.9) фазовые дискриминаторы, с помощью которых вырабатываются сигналы ошибки, объединены в кольцевую схему и ни один из каналов не является опорным, а эта функция поровну распределена между всеми каналами. Во всех каналах устанавливается некоторое усредненное значение фазы сигнала.

На схеме рис. 9.9 приняты следующие обозначения: УВЧ – усилитель высокой частоты, О.У. – операционный усилитель, ФНЧ – фильтр нижних частот, Н.О. – направленный ответвитель, Ф.Д. – фазовый дискриминатор, φ – управляемый фазовращатель. Схему рис. 9.9 из трехканальной легко преобразовать в N – канальную, поскольку все каналы усиления идентичны.

Введем следующие обозначения:

$K_У$ – коэффициент усиления операционного усилителя;

$S_У$ – крутизна характеристики управляемого фазовращателя;

$\mathbf{K_Ф}$ – линейный оператор, описывающий действие фильтра нижних частот;

$\mathbf{K_Д}$ – нелинейный оператор, описывающий действие фазового дискриминатора;

$\varphi_{Вых1}(t)$, $\varphi_{Вых2}(t)$ – фазы сигналов на выходе 1-го и 2-гоканалов;

$\varphi_{Ф1}(t)$ – изменение фазы сигнала под действием 1-го фазовращателя;

$\varphi_{Ф01}$ – начальное значение фазы сигнала в 1-м фазовращателе;

$\varphi_{У1}$ – изменение фазы сигнала в 1-м ВЧ усилителе;

$U_{У1}(t)$ – сигнал, управляющий 1-м фазовращателем;

$U_{Д1}(t)$ – сигнал на выходе 1-го фазового дискриминатора.

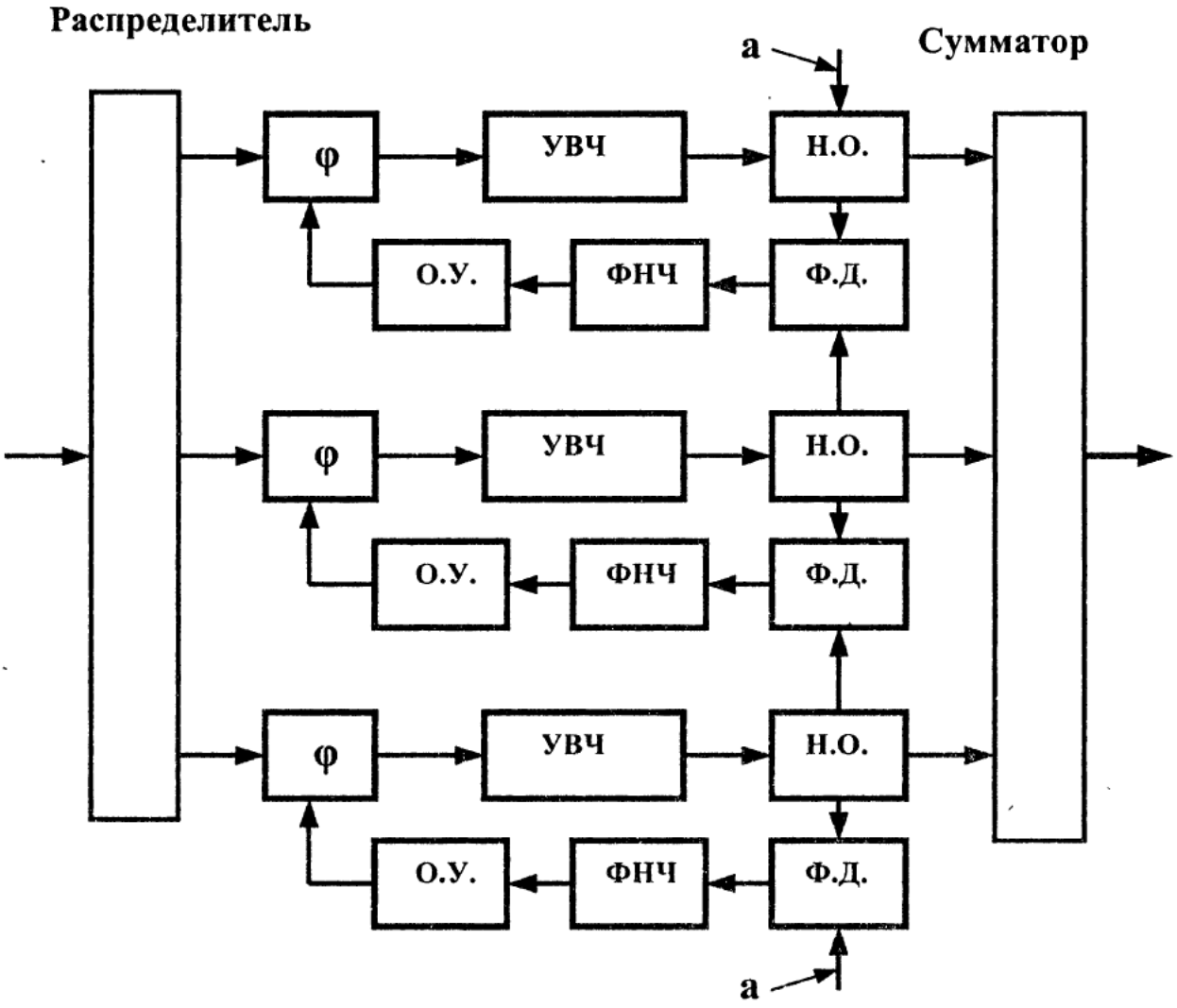


Рис. 9.9

По аналогии с методикой, принятой при анализе систем автоматической подстройки частоты (см. гл. 6), для 1-го кольца схемы автоматического регулирования, приведенной на рис. 9.9, составим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{ВЫХ1}(t) = \varphi_{Ф1}(t) + \varphi_{У1};\\
&\varphi_{Ф1}(t) = \varphi_{Ф01} - S_У U_{У1}(t);\\
&U_{У1}(t) = K_У \mathbf{К_Ф} U_{Д1}(t);\\
&U_{Д1}(t) = \mathbf{К_Д}[\varphi_{ВЫХ1}(t) - \varphi_{ВЫХ2}(t)].
\end{aligned}\right\} \qquad (9.19)$$

Совместно решая уравнения (9.19), получим уравнение авторегулирования для 1-го кольца, а по аналогии и для любого k-кольца ввиду их идентичности:

$$\varphi_{ВЫХ1}(t) = \varphi_{Ф01} + \varphi_{У1} - K_У S_У \mathbf{К_Ф К_Д}[\varphi_{ВЫХ1}(t) - \varphi_{ВЫХ2}(t)]; \qquad (9.20)$$

$$\varphi_{ВЫХk}(t) = \varphi_{Ф01} + \varphi_{У1} - K_У S_У \mathbf{К_Ф К_Д}[\varphi_{ВЫХk}(t) - \varphi_{ВЫХ(k+1)}(t)]. \qquad (9.21)$$

Пусть во всех кольцах используются одинаковые однозвенные фильтры нижних частот с постоянной времени T, а фазовые дискриминаторы имеют синусоидальную характеристику, что позволяет принять:

$$\mathbf{K_Ф} = K_Ф(P) = \frac{1}{1+Tp}; \tag{9.22}$$

$$\mathbf{K_Д} = U_m \sin[\varphi_{ВЫХ1}(t) - \varphi_{ВЫХ2}(t)]. \tag{9.23}$$

Примем следующее начальное условие по всем каналам:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{Ф0k} + \varphi_{уk} &= \Delta\varphi_k, \ \ при \ \ t \geq 0 \\ \varphi_{Ф0k} + \varphi_{уk} &= 0, \ \ при \ \ t \leq 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.24}$$

что позволяет считать

$$\frac{d\Delta\varphi_k}{dt} = 0, \ при \ t \geq 0. \tag{9.25}$$

С учетом (9.22)-(9.25) уравнения авторегулирования (9.20)–(9.21) примут вид:

$$(1+Tp)\varphi_{ВЫХ1}(t) = \Delta\varphi_1 - K_у S_y U_m \sin[\varphi_{ВЫХ1}(t) - \varphi_{ВЫХ1}(t)]; \tag{9.26}$$

$$(1+Tp)\varphi_{ВЫХk}(t) = \Delta\varphi_k - K_у S_y U_m \sin[\varphi_{ВЫХk}(t) - \varphi_{ВЫХ(k+1)}(t)]. \tag{9.27}$$

В целом система, состоящая из N каналов и такого же числа связанных между собой колец авторегулирования, на основании (9.26)–(9.27) описывается следующей системой из N нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi_{ВЫХ1}(\tau)}{d\tau} = -\varphi_{ВЫХ1}(\tau) - K_P \sin[\varphi_{ВЫХ1}(\tau) - \varphi_{ВЫХ2}(\tau)] + \Delta\varphi_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &\frac{d\varphi_{ВЫХk}(\tau)}{d\tau} = -\varphi_{ВЫХk}(\tau) - K_P \sin[\varphi_{ВЫХk}(\tau) - \varphi_{ВЫХ(k+1)}(\tau)] + \Delta\varphi_k; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &\frac{d\varphi_{ВЫХN}(\tau)}{d\tau} = -\varphi_{ВЫХN}(\tau) - K_P \sin[\varphi_{ВЫХN}(\tau) - \varphi_{ВЫХ1}(\tau)] + \Delta\varphi_N. \end{aligned}\right\} \tag{9.28}$$

где $K_P = K_у S_у U_m$ – коэффициент регулирования одного кольца;

$\tau = t/T$ – нормированное время.

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (9.28) с помощью функции **Rkadapt** (см. гл. 4 и приложение 2) при N=4

составим программу, представленную на рис. 9.10, в которой приняты следующие обозначения:

KP – коэффициент регулирования одного кольца K_P;

yg – вектор начальных значений функций $\varphi_{выхk}(t)$, в градусах;

ygh – вектор значений $\Delta\varphi_k$, в градусах;

$Z^{\langle 0\rangle}$ – нормированное время $\tau=t/T$.

y_1 и $Z^{\langle 1\rangle}$, y_2 и $Z^{\langle 2\rangle}$, y_3 и $Z^{\langle 3\rangle}$, y_4 и $Z^{\langle 4\rangle}$ – текущие значения фаз сигналов $\varphi_{выхk}(\tau)$ с 1-го по 4-й канал, в градусах.

$$\text{ORIGIN}:=1 \qquad yg:=\begin{pmatrix}180\\120\\90\\0\end{pmatrix} \qquad y:=\frac{\pi}{180}\cdot yg^{\langle 1\rangle}$$

$$yhg:=\begin{pmatrix}180\\120\\90\\0\end{pmatrix} \qquad yh:=\frac{\pi}{180}\cdot yhg^{\langle 1\rangle} \qquad KP:=200$$

$$F(t,y):=\begin{pmatrix}-y_1-KP\cdot\sin(y_1-y_2)+yh_1\\-y_2-KP\cdot\sin(y_2-y_3)+yh_2\\-y_3-KP\cdot\sin(y_3-y_4)+yh_3\\-y_4-KP\cdot\sin(y_4-y_1)+yh_4\end{pmatrix}$$

$$\text{ORIGIN}:=0 \qquad Z:=\text{Rkadapt}(y,0,2,1000,F)\cdot\frac{180}{\pi}$$

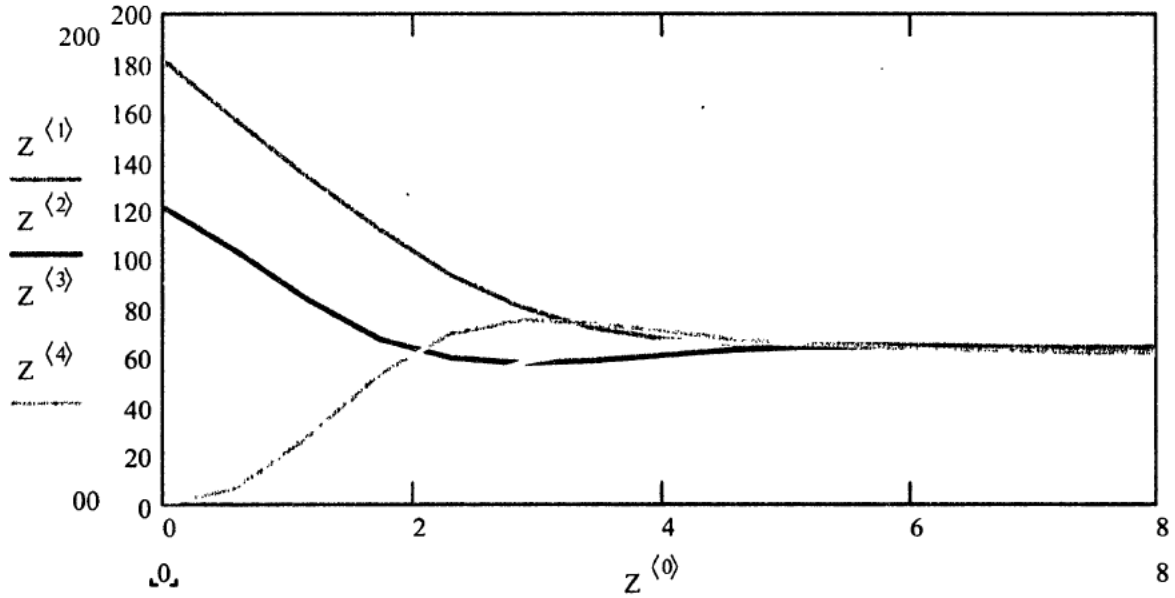
$Z =$

	0	1	2	3	4
0	0	180	120	90	0
1	0.115	160.886	106.894	67.864	4.376
2	0.229	142.813	91.987	51.065	18.54
3	0.344	125.526	77.951	44.249	40.186
4	0.458	109.449	67.507	46.743	60.728
5	0.573	95.53	61.989	53.795	73.44
6	0.688	84.696	60.729	61.28	78.55

Рис. 9.10

Результаты решения в виде таблицы даны в тексте программы (рис. 9.10), а соответствующие им графики функций $\varphi_{Выхk}(\tau)$ с 1-го по 4-й канал при коэффициентах регулирования одного кольца K_P =50 и 200 приведены на рис. 9.11. С помощью данных графиков легко определить время переходного процесса по установлению фаз сигналов во всех кольцах и их значения в установившемся режиме. Следует учитывать, что с увеличением значения K_P улучшается точность и снижается время переходного процесса, но ухудшается устойчивость системы авторегулирования.

При K_P=50



При K_P=200

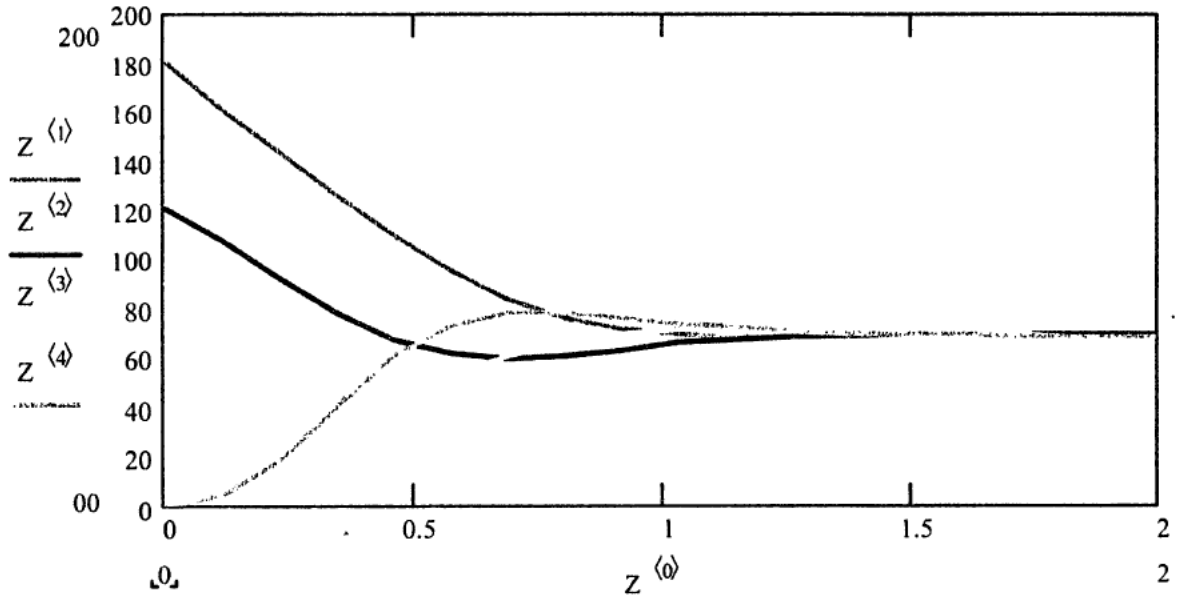


Рис. 9.11

По аналогии с составленной программой (рис. 9.10) легко составить программу для анализируемой системы (рис. 9.9) при любом ином количестве каналов усиления и авторегулирования.

Глава 10. ОПТИМИЗАЦИЯ

10.1. Критерии оптимизации и функция цели

Оптимизация есть процедура поиска и нахождения такой комбинации значений параметров устройства определенной структуры, при которой характеристики объекта имеют наилучшие значения согласно выбранному критерию. По существу инженерное проектирование устройства, превосходящее по своим параметрам другие устройства данного класса, и есть процесс оптимизации. Оптимизация в сочетании с перебором определенного числа структур проектируемого объекта перерастает в процедуру синтеза.

Важной стороной оптимизации является выбор критерия, по которому определяются свойства объекта и которое позволяет количественно оценить, какое из устройств данного класса является наилучшим. Эти критерии в зависимости от назначения устройства могут быть самыми разными. Так, например, в случае усилителя ВЧ или СВЧ колебаний такой критерий может быть связан с получением максимального КПД с соблюдением требования по нелинейным искажениям сигнала. При проектировании фильтра критерий может относиться к его амплитудно-частотной характеристике: минимуму потерь в полосе прозрачности и максимуму – в полосе заграждения. В третьем случае критерием является получение максимального отношения сигнал – шум на выходе демодулятора при заданном спектре сигнала и помехи.

Несмотря на все разнообразие критериев их можно свести к единой математической записи – функции цели, которая в концентрированной форме отражает смысл решаемой задачи по оптимизации устройства – в наилучшем приближении его характеристик к требуемым согласно определенным признакам. Функция цели является центральным звеном процедуры оптимизации, а, следовательно, и соответствующей программы, реализующей вычислительным путем выбранный алгоритм решения задачи. Все действия в такой программе оптимизации в конечном итоге направлены на получение экстремального значения функции цели – максимального или минимального, в зависимости от поставленной задачи. Поскольку, как правило, качество устройство определяют несколько критериев (например, в приводимом выше примере с фильтром – максимум в одной полосе, минимум – в другой), то целевая функция является суммой определенного числа членов и по своему виду является взвешенно–аддитивно цифровой, отражающей требование минимального отличия желаемых (иногда идеальных) характеристик от реально получаемых. Составим в обобщенном виде функцию цели.

При исследовании в частотной области для целевой функции, определяемой К критериями, запишем:

$$F_{Ц} = \sum_{k=1}^{K} V_k \sum_{n=1}^{N} \Phi_k [\Psi_{kT}(\omega_n) - \Psi_{kP}(\omega_n)], \qquad (10.1)$$

где Φ_k – частная целевая функция для k-й характеристики;

Ψ_{kT} – функция, определяющая требуемую k-ю частотную характеристику;

Ψ_{kP} – функция, определяющая реально полученную k-ю частотную характеристику, зависящую от параметров устройства;

V_k – весовой множитель для k-й характеристики.

Мерой расхождения между требуемой и реальной характеристиками могут являться или минимум суммы квадратов уклонений, или минимаксный критерий. При них функция цели примет вид:

$$F_Ц = \sum_{k=1}^{K} V_k \sum_{n=1}^{N} \left|\Psi_{kT}(\omega_n) - \Psi_{kP}(\omega_n)\right|^2, \tag{10.2}$$

$$F_Ц = \sum_{k=1}^{K} V_k \sum_{n=1}^{N} \min[\max\left|\Psi_{kT}(\omega_n) - \Psi_{kP}(\omega_n)\right|]. \tag{10.3}$$

В третьем случае требуется получить максимальное отношение параметров устройства, например A_k к B_k. Тогда функция цели примет вид:

$$F_Ц = \sum_{k=1}^{K} V_k \times (A_k / B_k). \tag{10.4}$$

Путем определенной процедуры следует найти или минимальное при (10.2) и (10.3), или максимальное при (10.4) значение функции цели. Для определенности рассмотрим первый случай, связанный с получением минимального значения.

Разделим все параметры устройства, определяющие его реальную характеристику Ψ_{kP}, на две группы: варьируемые (x_1, x_2, ..., x_n) и неизменные (y_1, y_2, ..., y_m). Соберем варьируемые параметры (их еще называют переменными) в вектор-столбец, который затем преобразуем в транспонированную матрицу (индекс Т) (см. приложение 2):

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T. \tag{10.5}$$

Аналогичным образом поступим с постоянными или неизменными параметрами устройства:

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots y_m]^T. \tag{10.6}$$

Будем рассматривать вектор $\mathbf{x}$ как точку или элемент **n**-мерного действительного пространства $\mathbf{R}^n$. Совокупность объектов $\mathbf{x}$ произвольного содержания (точки, векторы, функции и т. д.) составляют множество $\mathbf{X}$, а сами объекты есть элементы этого множества. Совместив понятия точечного множества, составленного из точек $\mathbf{x}$, и **n**-мерного пространства

$\mathbf{R^n}$, можно утверждать, что множество $\mathbf{X}$ представляет собой совокупность точек $\mathbf{x}$ в многомерном пространстве $\mathbf{R^n}$.

В процессе поиска среди множества векторов $\mathbf{x}$ следует найти такой вектор $\mathbf{x}_{\text{опт}}$ в пространстве $\mathbf{R^n}$, при котором функция цели (10.2) или (10.3) минимальна:

$$F_{Ц}(\mathbf{x_{опт}}, \mathbf{y}) = \min F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \textit{где} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R^n}. \tag{10.7}$$

При этом на вектор $\mathbf{x}$ могут накладываться определенные ограничения. Точка $\mathbf{x}_{\text{опт}}$ соответствует наилучшему в соответствии с выбранными критериями варианту проектируемого устройства. Поиск $\mathbf{x}_{\text{опт}}$ относится к классу задач, объединяемых теорией нелинейного программирования. При этом вектор $\mathbf{x}$ во всех рассматриваемых ниже задачах ограничен определенным пространством $\mathbf{R^n}$, что можно следующим образом представить в развернутом виде:

$$x_{1МИН} \le x_1 \le x_{1МАКС}, \ldots\ldots\ldots x_{nМИН} \le x_n \le x_{nМАКС}. \tag{10.8}$$

При функции цели в виде (10.4) выражение (10.7) примет вид:

$$F_{Ц}(\mathbf{x_{опт}}, \mathbf{y}) = \max F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \textit{где} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R^n}. \tag{10.9}$$

Перейдем к рассмотрению путей нахождения $\mathbf{x}_{\text{опт}}$.

10.2. Методы поиска экстремума функции цели

Скалярное значение функция цели (10.7) в пределах возможного изменения вектора $\mathbf{x}$ может иметь несколько или множество локальных минимумов и один глобальный $\mathbf{x}_{\text{опт}}$. Выражение (10.7) для глобального минимума справедливо для всех $\mathbf{x}$, принадлежащих пространству $\mathbf{R^n}$, а для локального – только в части этого пространства.

Сами методы поиска целевой функции, т. е. определение $\mathbf{x}_{\text{опт}}$, классифицируется по нескольким признакам:

- по виду искомого минимума–локальные и глобальные;
- по характерной черте метода – с использованием только значений, принимаемых целевой функцией $F_Ц(\mathbf{x})$ (методы прямого поиска), или как значений $F_Ц(\mathbf{x})$, так и ее первых и вторых производных (градиентные методы);
- по способу перехода от одной точки к другой на каждом шаге поиска – детерминированные и случайные;
- в зависимости от характерного признака целевой функции, в связи, с чем различают выпуклое, вогнутое, квадратичное программирование.

Обобщенная структурная схема программы поиска как локального, так и глобального минимума приведена на рис. 10.1, в которую включены в виде отдельных модулей все основные процессы поиска.

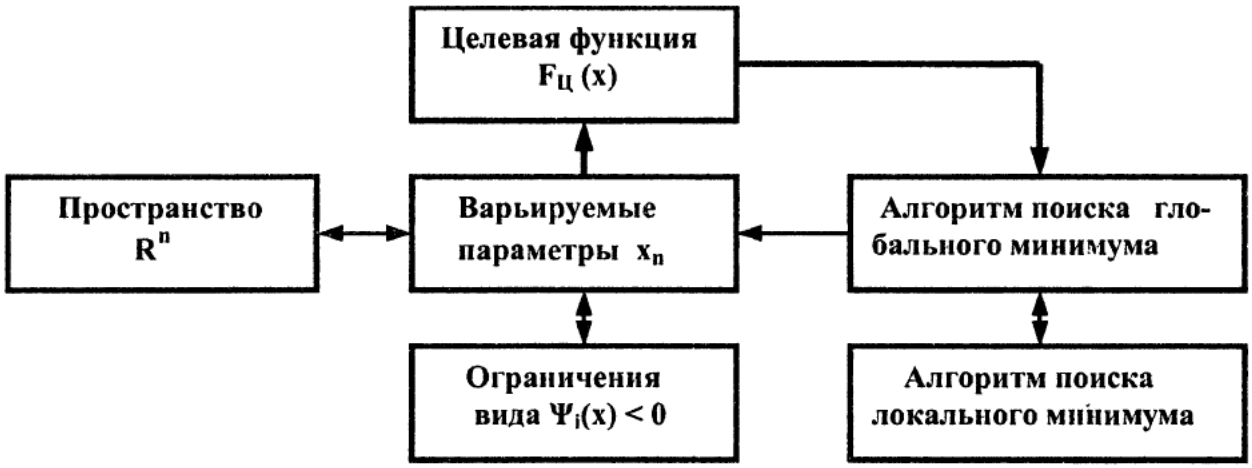


Рис. 10.1

В рассматриваемых ниже задачах оптимального проектирования методы локального поиска на основе производных (градиентные методы) обычно не используются, поскольку выражения для производных в аналитическом виде для исследуемых функций получить не удается, а их численное определение с помощью разностных схем может приводить к ощутимой ошибке в окрестности экстремума. Поэтому предпочтение отдается прямым методам поиска, основанным на вычислении только самой целевой функции цели.

Следует заметить, что при неизвестных свойствах целевой функции многих переменных, кроме ее непрерывности, метод поиска глобального минимума с гарантированным успехом существует только для выпуклых функций. Во всех остальных случаях судить об успехе можно только с определенной степенью вероятности. Однако, повторяя поиск несколько раз с разных начальных точек и получая один и тот же результат (т. е. каждый раз получая совпадающие значения $\mathbf{X}_{ОПТ}$), можно утверждать с высокой степенью вероятности о нахождении истинного глобального минимума, а не одного из локальных. Кратко рассмотрим алгоритмы нескольких методов поиска глобального минимума целевой функции [32–35].

Погрупповой метод последовательно поиска. Пусть число переменных параметров есть N и каждый из параметров X_n изменяется с шагом ΔX_n в пределах от $X_{1МИН}$ до $X_{1МАКС}$ и принимает M дискретных значений. Тогда при последовательном переборе всех комбинаций множества параметров X_n общее число рассчитываемых вариантов составит $Q=M^N$. Это число может быть столь большим (например, при M=10 и N=6 значение $Q=10^6$), что даже расчет на быстродействующей ЭВМ может оказаться недопустимо длительным. Поголовный перебор всех вариантов можно исключить, если параметры разбить на группы, включающие только взаимозависимые X_n. Далее производится перебор всех X_n только внутри группы с определением набора параметров, соответствующих минимуму це-

левой функции. Последовательно переходя от одной группы параметров к другой, определяют вектор $\mathbf{X}_{\text{ОПТ}}$, включающий все параметры X_n. Так например, в приведенном примере из 6-ти параметров при возможности их разбиения на две группы по 3 параметра общее число рассчитываемых вариантов составит $Q=2*10^3=2000$, т. е. почти на три порядка меньше, чем в первом варианте. Однако, воспользоваться таким простым и надежным способом поиска глобального минимума можно только при сильной зависимости параметров внутри одной группы и слабой – между разными.

Покоординатный метод. Здесь сначала дискретно изменяется только параметр X_1 при постоянных значениях всех остальных параметров X_n до тех пор, пока целевая функция не станет минимальной. Полученное значение X_1 фиксируется и в новом цикле начинается изменение параметра X_2 при неизменных значениях остальных параметров и т. д., вплоть до изменения параметра X_N. Подобная процедура повторяется несколько раз, в результате чего определяется вектор $\mathbf{X}_{\text{ОПТ}}$. Как и в предыдущем случае, такой простой алгоритм успешно действует только при слабой зависимости между собой всех параметров X_n.

Метод слепого поиска. При данном методе производится случайный перебор значений варьируемых параметров X_n до тех пор, пока значение целевой функции не станет приемлемо малым. При этом в программе должно производиться моделирование случайных величин по одному из известных способов. При "слепом" поиске процесс обучения в системе отсутствует, так как каждый шаг обособлен от другого. "Слепой" поиск с большим шагом изменения варьируемых параметров можно совместить с одним из локальных методов поиска с меньшим шагом, что помогает приблизиться к минимуму целевой функции.

Метод оврагов. Этот метод пригоден для так называемых хорошо организованных функций, для которых переменные параметры $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можно разбить на две группы: сильно и слабо влияющие на целевую функцию $F_Ц$. Параметры 1-й группы меняются с относительно большим шагом, 2-й – малым. После большого шага в рамках 1-й группы параметров производится локальный поиск с малым шагом в рамках 2-й группы параметров. Такая итерационная процедура позволяет относительно быстро продвигаться по так называемому "оврагу" к глобальному минимуму функции цели.

Метод Розенброка или вращающихся координат. Здесь используется специальная итерационная процедура, связанная с вращением направлений поиска по отношению к предыдущему шагу, в результате чего продвижение к минимуму функции цели, как и в предыдущем случае, происходит по "оврагу". Для целенаправленного поиска на каждом последующем шаге используется информация, полученная на предыдущем, что позволяет сравнительно быстро найти локальный минимум целевой функции. Меняя исходную точку поиска или совместив метод Розенброка со "слепым" или иным способом, можно с высокой степенью вероятности найти глобальный минимум функции цели.

Математический пакет программ "Mathcad" предлагает две функции – **Maximize** и **Minimize** (обе расположены в категории функций "Реше-

ние") – для реализации процедуры оптимизации, связанной с поиском вектора $\mathbf{x}_{\text{опт}}$ без вычисления производных функции цели.

С помощью функции **Maximize (F, x1, x2,..., xn),** где **F** – функция цели, **x1, x2,..., xn** – варьируемые параметры объекта оптимизации, осуществляется поиск параметров, соответствующих максимуму функции **F**.

С помощью функции **Minimize (F, x1, x2,..., xn)** – минимуму функции **F**.

Перейдем к рассмотрению конкретного примера оптимизации с использованием программы "Mathcad". (См. приложение 2.)

10.3. Адаптация фазированной антенной решетки

Рассмотрим применение процедуры оптимизации по отношению к фазированной антенной решетке (ФАР) (см. § 9.3). В силу свойства взаимности ФАР (рис. 9.5) может использоваться не только как излучающая система, но и в качестве приемной антенны. Предположим, что помимо полезного сигнала, ориентированного на главный лепесток диаграммы направленности (рис. 9.7), на ФАР приходит и внешняя помеха под углом, совпадающим с одним из боковых лепестков диаграммы направленности. Поскольку главный лепесток превышает по уровню ближайший к нему боковой всего на 12 дБ, то при мощности помехи превышающей полезный сигнал на те же 12 дБ отношение сигнал-помеха на входе приемного устройства станет равным 1, что может нарушить нормальный прием. Данное свойство ФАР, состоящее в возможности приема сигнала не только с главного, но и побочных направлений, существенно снижает помехозащищенность систем радиосвязи и радиолокации, в которых используется данный тип антенн. В режиме передачи наличие боковых лепестков означает не только уменьшение мощности полезного сигнала, направляемого в главном направлении, но и возможность обнаружения объекта излучения. Например, наземная станция в системе космической радиосвязи направляет главный луч антенны на спутник, а по боковому лепестку возможно ее обнаружение (рис. 10.2).

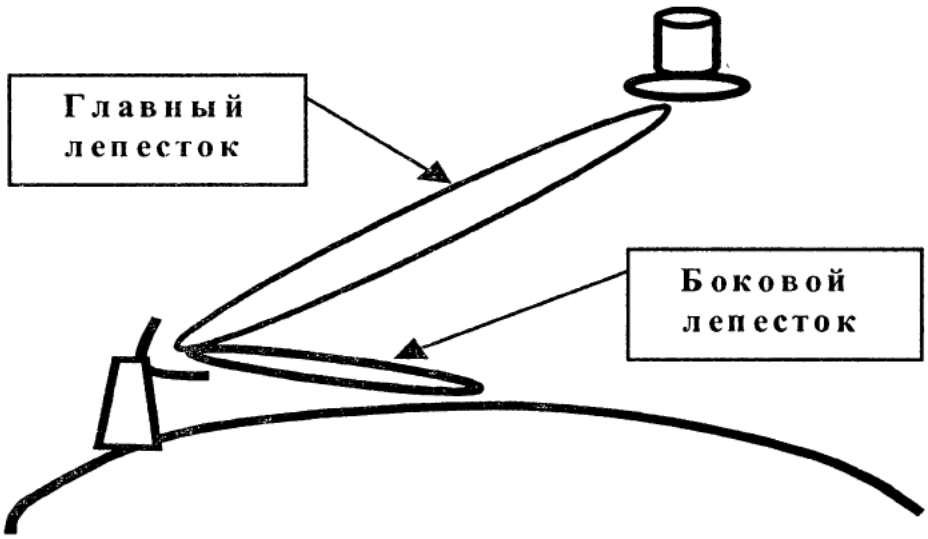


Рис. 10.2

Как избежать подобного положения, исключив прием с определенного направления при наличии помехи? Иначе говоря, как можно провести адаптацию ФАР, т. е. ее приспособление к изменившемся внешним условиям, сохранив прием полезного сигнала с главного направления и подавив прием с одного или даже нескольких нежелательных направлений, для чего требуется сформировать новую диаграмму направленности, например, подобную той, которая приведена на рис. 10.3.

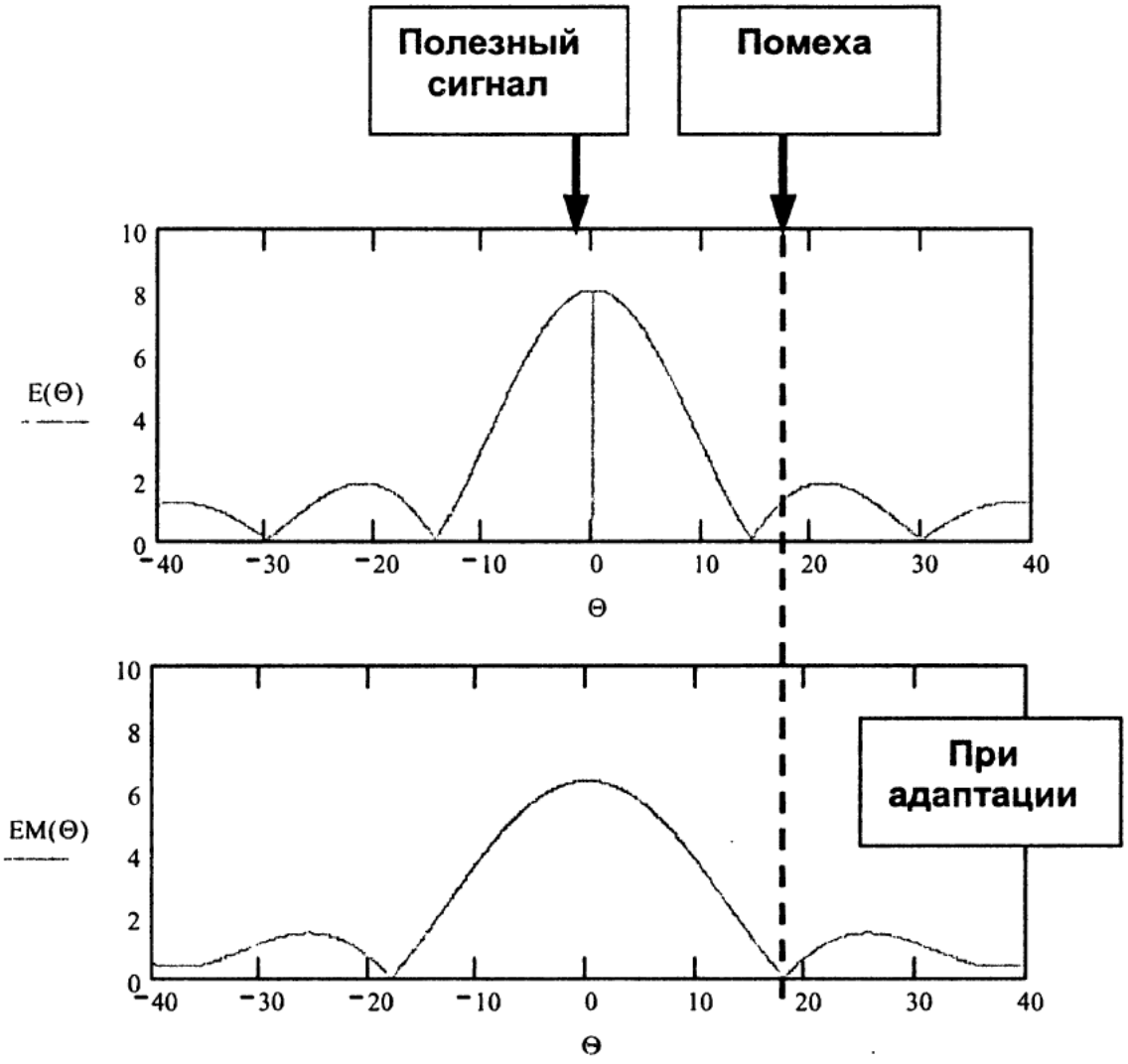


Рис. 10.3

Рассмотрим в этой связи новую диаграммообразующую схему ФАР, приведенную на рис. 10.4. В новой схеме (рис. 10.4) по сравнению со старой (рис. 9.5) сигнал после каждого излучателя раздваивается на две составляющие – косинусную и синусную (дополнительный фазовращатель в схеме сдвигает сигнал на 90^0), после чего проходит через аттенюаторы (на схеме A_1, B_1, A_n, B_n и т. д.), регулирующие амплитуду. С учетом данных новых условий – по две составляющие с регулируемой амплитудой от каждого излучателя – получим из (9.16) для диаграммы направленности линейной адаптированной ФАР:

$$E(\Theta) = \sqrt{E_C(\Theta)^2 + E_S(\Theta)^2} \qquad (10.10)$$

где $E_C(\Theta) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos[(n-1)\beta]$ – *косинусная составляющая,*

$$E_C(\Theta) = \sum_{n=1}^{N} B_n \sin[(n-1)\beta]$$ – *синусная составляющая,*

$$\beta = \frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\Theta - \sin\Theta_0).$$

B – расстояние между двумя соседними излучателями;
Θ_0 – направление главного лепестка диаграммы направленности;
N – число излучателей.

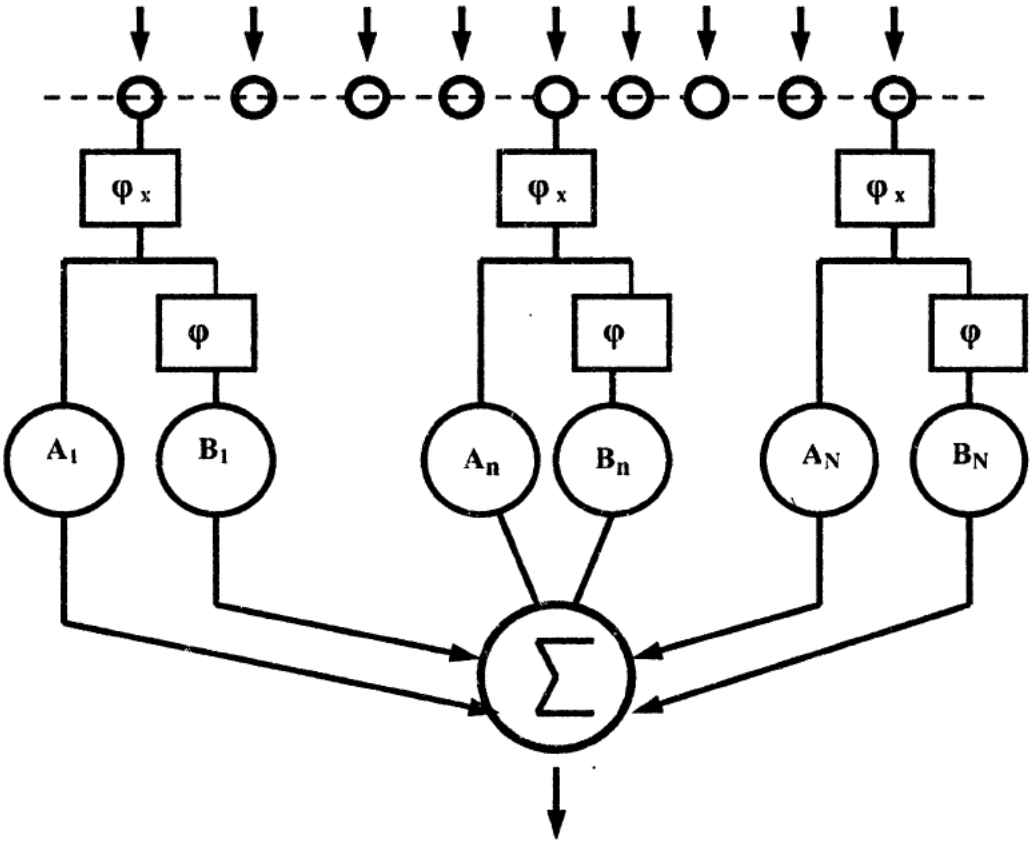


Рис. 10.4

Составим алгоритм управления диаграммообразующей схемой ФАР (рис. 10.4) с целью решения поставленной задачи. Соберем варьируемые весовые коэффициенты A_1, B_1,..., A_n, B_n... в вектор-столбец, который затем преобразуем транспонированную матрицу (индекс Т):

$$\boldsymbol{K}=[A_1, B_1, A_n, B_n, \ldots A_N, B_N]^T. \qquad (10.11)$$

Будем рассматривать вектор как точку в 2N-мерном пространстве $\mathbf{R^n}$. Все постоянные параметры ФАР: расстояние между излучателями **b**, число излучателей **N**, длину волны λ, обозначим как вектор неизменных параметров **Y**. Тогда диаграмма направленности определяется функцией:

$$E=\Phi(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{Y}, \varphi_X, \Theta), \tag{10.12}$$

где φ_X – управляемый сдвиг по фазе между двумя соседними излучателями в ФАР без адаптации.

Обозначим направление прихода полезного сигнала как Θ_0, побочные направления прихода сигналов помехи как Θ_1, Θ_2, …, Θ_M. В процессе поиска среди множества векторов **K** следует найти такой $\mathbf{K}_{ОПТ}$ в пространстве $\mathbf{R^n}$, при котором следующая функция цели максимальна:

$$F_Ц = \max[\sum_{m=1}^{M} V_m E(\Theta_0)/E(\Theta_m)], \tag{10.13}$$

где V_m – весовые коэффициенты.

Таким образом, внося дополнительные изменения, описываемые вектором **K**, в фронт суммируемых сигналов от ансамбля излучателей, можно целенаправленно "искажать" диаграмму направленности ФАР, создавая в ней при определенных углах Θ_m провалы и сохраняя максимум в нужном направлении Θ_0. Таким образом путем оптимизации, добиваясь максимума функции цели (10.13), осуществляется адаптация ФАР (рис. 10.3). Подобный подход к повышению помехозащищенности радиотехнической системы относится к классу пространственных методов подавления помехи.

Согласно (10.10) составим программу по расчету диаграммы направленности адаптированной ФАР (рис. 10.4), состоящей из 8-ми излучателей, и путем процедуры оптимизации, меняя значения четырех коэффициентов (A_1, A_2, B_2, B_3), осуществим адаптацию в соответствии с (10.13) при одном сигнале помехи. Конечная цель программы состоит в поиске оптимальной комбинации варьируемых параметров, при которой функция цели (10.13) принимает максимальное значение.

Программа включает три раздела. Первый раздел представляет собой программу расчета диаграммы направленности ФАР без адаптации на основании формулы (9.17) и полностью повторяет программу, приведенную на рис. 9.6. В программе угол $\Psi=\Theta_0$, остальные обозначения совпадают с обозначениями формул (9.16)–(9.17). Углы Ψ и Θ – в градусах. Число излучателей N=8. В результате расчета строится диаграмма направленности антенны без адаптации.

В рамках второго раздела с помощью функции **Maximize (F, x1, x2, …, xn)**, где **F** – функция цели, **x1, x2 ,…, xn** – варьируемые параметры объекта оптимизации, осуществляется поиск параметров, соответствующих максимуму функции $F_Ц$, определяемой согласно (10.13).

$\Psi := 0$ $\gamma := 0.5$ $N := 8$ ORIGIN := 1

$$q := \frac{\pi}{180} \qquad \alpha := 2 \cdot \pi \cdot \gamma$$

$$\beta(\Theta) := \alpha \cdot (\sin(q \cdot \Theta) - \sin(q \cdot \Psi))$$

$$E(\Theta) := \left| \frac{\sin(0.5 \cdot N \cdot \beta(\Theta))}{\sin(0.5 \cdot \beta(\Theta))} \right|$$

$A := V^{\langle 1 \rangle}$ $B := V^{\langle 2 \rangle}$

$$V := \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.063 & 1 \\ 0.179 & 0.555 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

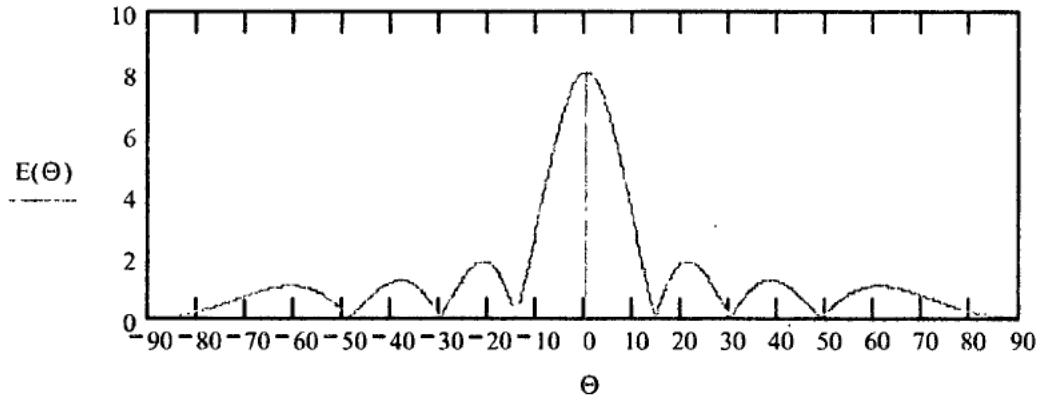
$$EC(\Theta) := \sum_{n=1}^{8} A_n \cdot \cos[(n-1) \cdot \beta(\Theta)]$$

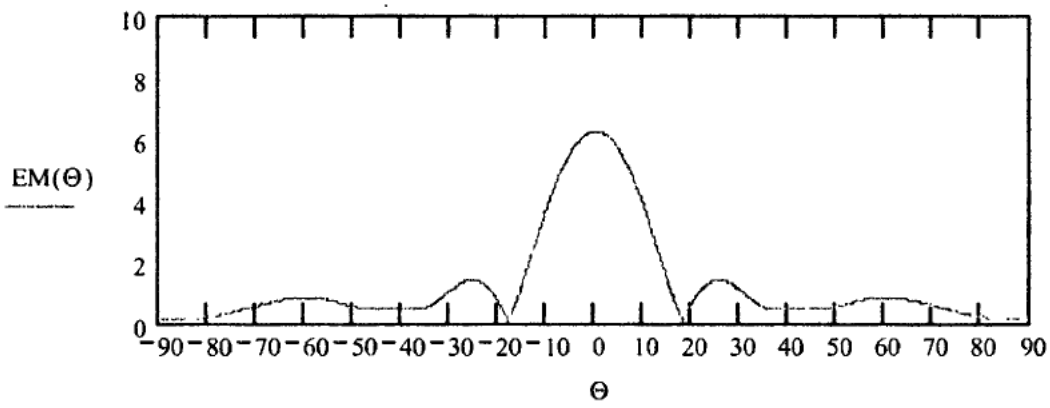
$$ES(\Theta) := \sum_{n=1}^{8} B_n \cdot \sin[(n-1) \cdot \beta(\Theta)]$$

$$EM(\Theta) := \sqrt{(EC(\Theta))^2 + (ES(\Theta))^2}$$

$EM(0) = 6.242$ $EM(18) = 3.603 \times 10^{-4}$ $R := \frac{EM(0)}{EM(18)}$

$R = 1.732 \times 10^{4}$ $RD := 10 \cdot \log(R)$ $RD = 42.386$





$\Theta G := 0 \qquad A1 := 0.5 \qquad A2 := 0.5 \qquad B2 := 0.5 \qquad B3 := 0.5$

$$ECG(A1, A2) := A1 + A2 \cdot \cos(\beta(\Theta G)) + \sum_{n=3}^{8} A_n \cdot \cos[(n-1) \cdot \beta(\Theta G)]$$

$$ESG(B2, B3) := B2 \cdot \sin(\beta(\Theta G)) + B3 \cdot \sin(2 \cdot \beta(\Theta G)) + \sum_{n=4}^{8} B_n \cdot \sin[(n-1) \cdot \beta(\Theta G)]$$

$$EMG(A1, A2, B2, B3) := \sqrt{(ECG(A1, A2))^2 + (ESG(B2, B3))^2}$$

$ECG(A1, A2) = 7 \qquad ESG(B2, B3) = 0 \qquad EMG(A1, A2, B2, B3) = 7$

$\Theta P := 18$

$$ECR(A1, A2) := A1 + A2 \cdot \cos(\beta(\Theta P)) + \sum_{n=3}^{8} A_n \cdot \cos[(n-1) \cdot \beta(\Theta P)]$$

$$ESR(B2, B3) := B2 \cdot \sin(\beta(\Theta P)) + B3 \cdot \sin(2 \cdot \beta(\Theta P)) + \sum_{n=4}^{8} B_n \cdot \sin[(n-1) \cdot \beta(\Theta P)]$$

$$EMR(A1, A2, B2, B3) := \sqrt{(ECR(A1, A2))^2 + (ESR(B2, B3))^2}$$

$$GR(A1, A2, B2, B3) := \frac{|EMG(A1, A2, B2, B3)|}{|EMR(A1, A2, B2, B3)|}$$

$ECR(A1, A2) = 0.618 \qquad ESR(B2, B3) = -0.512$

$EMR(A1, A2, B2, B3) = 0.803 \qquad GR(A1, A2, B2, B3) = 8.722$

Given $\quad 0 \le A1 \le 1 \quad 0 \le A2 \le 1 \quad 0 \le B2 \le 1 \quad 0 \le B3 \le 1$

$H := Maximize(GP, A1, A2, B2, B3) \qquad H = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.179 \\ 0.555 \\ 1 \end{pmatrix}$

$GR(H_1, H_2, H_3, H_4) = 1.616 \times 10^{11} \qquad GPD := 10 \cdot \log(GR(H_1, H_2, H_3, H_4))$

$GPD = 112.084$

Рис. 10.5

В качестве варьируемых выбрано четыре параметра: A_1, A_2, B_2, B_3, обозначаемые в программе как A1, A2, B2, B3. Угол $\Theta G=\Theta_0$ – означает главное направление, по которому приходит полезный сигнал, угол $\Theta P=\Theta_1$ – направление прихода помехи, углы – в градусах (В рассматриваемом по программе принято $\Theta G=0$, $\Theta P=18^0$). Для определения функции цели согласно (10.10) рассчитывается амплитуда диаграммы направленности при ΘG и ΘP. При этом члены, содержащие варьируемые параметры A_1, A_2, B_2, B_3, выносятся из под общего знака суммы. Отдельно рассчитываются суммы, содержащие косинусные и синусные составляющие, а затем определяется значение модуля. Далее в результате процедуры оптимизации, осуществляемой функцией **Maximize**, определяется оптимальная комбинация варьируемых параметров (вектор H), соответствующая максимуму функции цели (10.13). Связь между параметрами следующая: $H_1=A_{1опт}$, $H_2=A_{2опт}$, $H_3=B_{2опт}$, $H_4=B_{3опт}$. Рассчитывается значение функции цели **GP**, соответствующая набору оптимальных параметров, и то же значение **GPD**, выраженное в децибелах.

В рамках 3-го раздела по формуле (10.10) с определением синусной и косинусной составляющих рассчитывается диаграмма направленности при адаптации. Для этого необходимо вернуться к началу программы и в матрицу исходных данных **V** внести значения всех параметров: A_1–A_8, B_1–B_8. Четыре из них определены в результате оптимизации (A_1, A_2, B_2, B_3), остальные принимаются равными 1.(Именно такое действие отражено в тексте программы на рис. 10.5.) По результатам расчета строится диаграмма направленности антенны при адаптации, что позволяет произвести ее сравнение с первой диаграммой, без адаптации. Убеждаемся, что у адаптированной ФАР в рассматриваемом примере при угле $\Theta P=18^0$, соответствующем углу прихода помехи, значение амплитуды диаграммы направленности равно 0. Рассчитывается значение функции цели **R** при адаптации и то же значение **RD**, выраженное в децибелах. (Несовпадение в приводимом примере значений **GPD** с **RD** связано с делением на число, близким к 0, и округлением чисел. При учете большего числа знаков после запятой в **R** результаты расчета совпадают.) Программа, приводимая в 3-м разделе, позволяет сравнить результаты расчета диаграммы направленности при равенстве 1 всех коэффициентов A_1–A_8, B_1–B_8 по двум формулам – (9.17) и (10.10).

Из примера расчета, приведенного на рис. 10.5, следует, что за счет адаптации ФАР можно решить проблему пространственного подавления помехи путем соответствующего искажения диаграммы направленности. Необходимо, однако, иметь в виду, что при этом возможно уменьшение амплитуды основного лепестка и его расширение.

В реальных условиях работы при ФАР с тысячами излучателей задача адоптации решается с помощью быстродействующих компьютеров по специальным программам многопараметрической оптимизации.

Ниже, в гл. 11, процедура оптимизации будет рассмотрена при параметрическом синтезе фильтров и согласующих устройств, а в гл. 13 в рамках проблемы оптимальной фильтрации.

Глава 11. ФИЛЬТРЫ И СОГЛАСУЮЩИЕ ЦЕПИ

11.1. Алгоритм синтеза фильтров

Фильтром называется электрическая цепь, служащая для пропускания сигнала с малыми потерями в определенной полосе частот и большим– в других. В соответствии с этим определением различают следующие виды фильтров: полоснопропускающий (полосовой), полоснозаграждающий (режекторный), нижних и верхних частот. По устройству фильтр представляет собой многозвенный реактивный четырехполюсник. В высокочастотном диапазоне в качестве реактивных элементов четырехполюсника используются емкости и индуктивности, в СВЧ – соединенные между собой отрезки фидерных линий. Особое место занимают активные фильтры, выполненные на основе операционных усилителей с обратной связью, кварцевые фильтры и с использованием электроакустических поверхностных волн, а также цифровые фильтры на основе микропроцессора. В дальнейшем рассматриваются только фильтры на основе реактивного четырехполюсника.

Проектирование фильтра осуществляется путем процедуры синтеза, включающего два этапа – аппроксимацию и реализацию, исходя из заданных полос пропускания и заграждения и потерь в них. На первом этапе – аппроксимации – производится замена требуемой характеристики затухания фильтра функцией Чебышева или Баттерворта либо иной зависимостью, отвечающей условиям физической реализуемости. На втором этапе – реализации – определяется структура и параметры элементов фильтра. В СВЧ диапазоне процедура реализации предусматривает использование цепи – прототипа фильтра нижних частот на сосредоточенных элементах или восстановление матрицы передачи [T] по заданной функции рабочего затухания [28, 29].

Применение компьютера позволило изменить данный подход к синтезу фильтров, имеющий ряд ограничений, и повысить точность расчетов за счет возможности учета ряда факторов, например, дисперсионных свойств фидерных линий в СВЧ диапазоне и влияния разного рода неоднородностей. Сущность такого компьютерного подхода к проектированию фильтра состоит в замене традиционной процедуры синтеза – аппроксимации и реализации – процедурой оптимизации (см. гл. 10). При новом подходе производится непосредственный расчет характеристик фильтра на основе определенных рекуррентных соотношений. Осуществляется перебор нескольких типовых структур фильтров и оптимизации параметров в каждом варианте на основе поисковых методов глобального и локального минимума целевой функции. При таком подходе процедура синтеза представляется как множество вариантов анализа с поиском наилучшего из них согласно определенному критерию. Поскольку такая методика предусматривает огромный объем рутинных вычислений, то его практическая реализация возможна только с применением компьютера.

К преимуществам поискового метода проектирования фильтра, особенно в СВЧ диапазоне, относятся:

- прямой расчет проектируемой цепи с учетом ее распределенной структуры, без эквивалентных преобразований, что повышает точность конечного результата;

- требуемая характеристика фильтра составляет основу функции цели – центрального звена программы, никакая аппроксимация при этом не требуется;

- возможность учета ограничений конструктивно-технологического свойства, предъявляемых к отдельным элементам цепи и связанных, например, с точностью их изготовления;

- возможность учета неоднородностей в составе отдельных элементов или в месте их соединения и дисперсионности фидерных линий, т. е. зависимости ее параметров от частоты;

возможность ввода в фильтр дополнительных элементов конструктивного типа и их учета при синтезе;

- расчет при любом типе нагрузке, в том числе комплексной, частотно–зависимой;

- оценка свойств фильтра не только по характеристике затухания, но и по другим параметрам, например, фазо-частотной характеристике.

При составлении программы параметрического синтеза фильтра функция цели, подлежащая минимизации, может представлена в следующем виде:

$$F_Ц = V_1 \sum_{k=n1}^{n2} \left| B_3(f_k) \right|^2 + V_2 \sum_{k=m1}^{m2} \left| B_{3.TP}(f_k) - B_3(f_k) \right|^2 + V_3 \sum_{k=s1}^{s2} \left| \varphi_{TP}(f_k) - \varphi(f_k) \right|^2 , \quad (11.1)$$

где $f_{n1}...f_{n2}$ – полоса пропускания;

$f_{m1}...f_{m2}$ – полоса заграждения;

$f_{s1}...f_{s2}$ – полоса частот фазовой характеристики;

$B_3(f_k)$ – полученное затухание фильтра;

$B_{3.TP}(f_k)$ – требуемое затухание фильтра в полосе заграждения;

$\varphi(f_k)$ – полученная ФЧХ в полосе частот;

$\varphi_{TP}(f_k)$ – требуемая ФЧХ в той же полосе.

V_1, V_2, V_3 – коэффициенты веса, определяющие соотношение требований по затуханию, предъявляемых к полосам пропускания и заграждения, а также другим параметрам.

Согласно изложенному алгоритму составим программу по параметрическому синтезу СВЧ полосового фильтра на связанных микрополосковых линий.

Следует заметить, что при проектировании подобного фильтров на фидерных линиях иного типа следует только заменить операторы, по которым рассчитываются волновое сопротивление и длина отрезков линий, исходя из найденных оптимальных значений коэффициентов связи.

Проектирование СВЧ фильтров других типов, а также высокочастотных фильтров на реактивных элементах сосредоточенного типа может производиться по аналогичным программам. Общий алгоритм расчета при этом не меняется, изменения вносятся только в операторы, по которым рассчитываются отдельные звенья.

11.2. Параметрический синтез СВЧ полосового фильтра на связанных микрополсковых линиях

Структура 4-звенного фильтра на связанных микрополсковых линиях представлена на рис. 11.1.

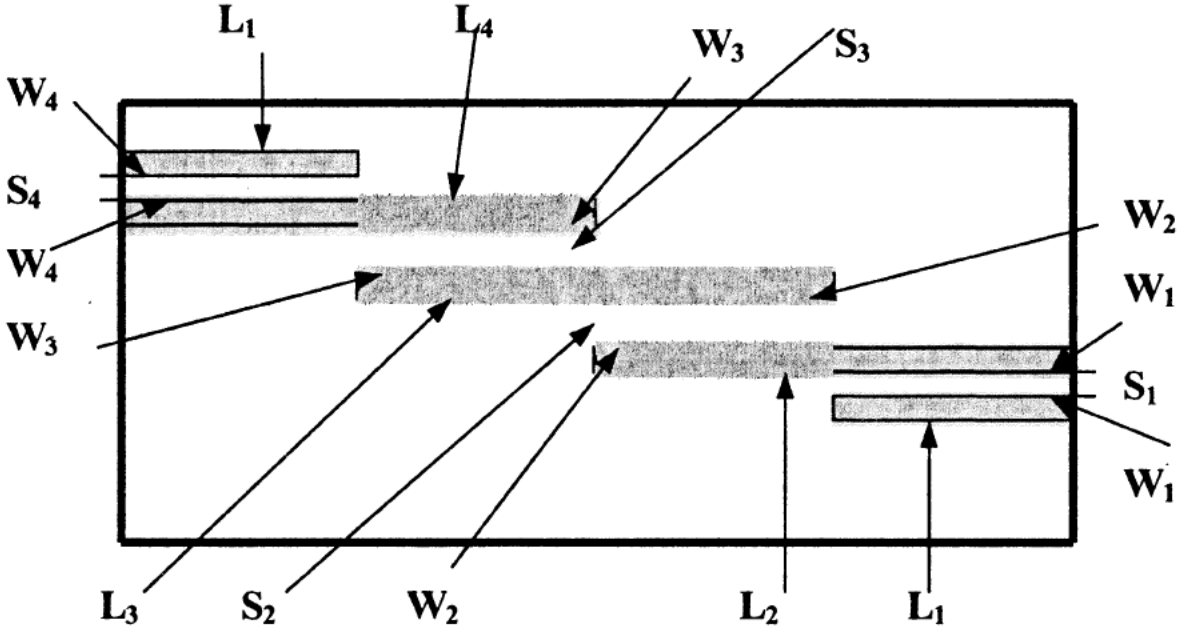


Рис. 11.1

Каждое звено представляет собой две связанные микрополосковые линии (рис. 8.11) – восьмиполюсник с двумя разомкнутыми входами (3 и 4) (рис. 11.2), последовательно подключаемый один к другому (рис. 11.1).

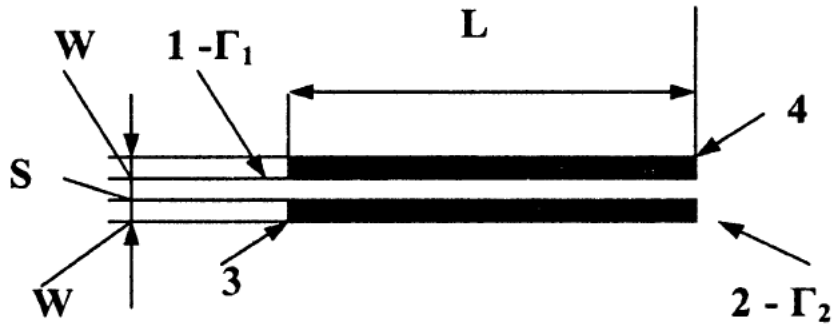


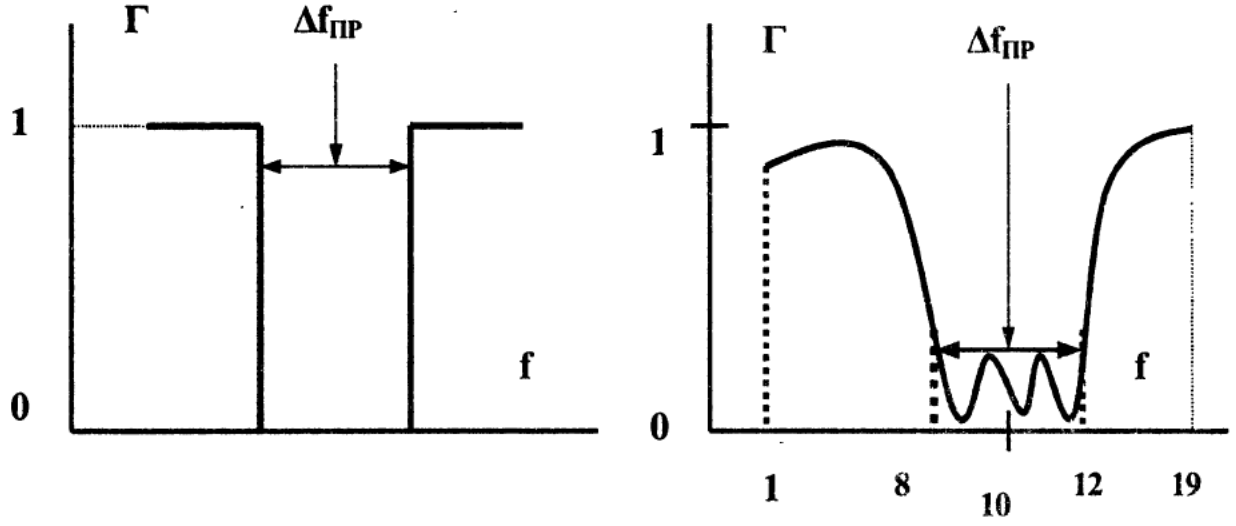
Рис. 11.2

В основе расчета каждого звена лежит формула по определению коэффициента отражения по входу восьмиполюсника Γ_1 (8.45) при линиях связи, разомкнутых на концах, т. е. при $\Gamma_3=1$ и $\Gamma_4=1$. S-параметры σ и γ, входящие в формулу (8.45), определяются согласно (8.42) и (8.43).

Конечная цель программы состоит в получении характеристикуи затухания, близкой к прямоугольной. Поскольку согласно (8.47) затухание связано с коэффициентом отражения Г соотношением:

$$B_з = -10\lg(1-|\Gamma|^2), \qquad (11.2)$$

то идеальная характеристика полосового фильтра, выраженная через коэффициент отражения $|\Gamma| = \Psi(f)$, должна иметь вид, показанный на рис. 11.3,а.



а) **Рис. 11.3** б)

Составленная программа по расчету полосового фильтра, представленная на рис. 11.4, включает четыре раздела. В 1-м разделе после ввода исходных данных путем использования в качестве рекуррентной формулы (8.45) рассчитывается коэффициент отражения на входе всего соединения и затухание, выраженное в дБ, согласно (11.2). При расчете используется нормированное, относительное значение частоты:

X=1+(n-k)*(Df/f0), где f0 – центральная частота, при которой область связи рана λ/4; Df – шаг изменения частоты, n – номер шага, при f=f0→n=k.

Во 2-м разделе представлена функция цели **Y(k1,k2)**, соответствующая (11.1) и включающая три слагаемых: первое и третье относятся к полосам заграждения, второе – пропускания. Функция цели рассчитывается по 19 частотным точкам, 5 из которых (с 8 по 12) относятся к полосе пропускания, 14 (с 1 по 7 и с 13 по 19) – заграждения. На рис. 13,б представлена характеристика затухания, получаемая в результате расчета. Цель поиска заключается в том, чтобы реальная характеристика (рис. 11.3,б) согласно критерию минимума суммы квадрата уклонений как можно ближе приблизилась к идеальной (рис. 11.3,а).

Варьируемыми параметрами при этом поиске являются коэффициенты связи **k1** и **k2** связанных линий. Поскольку структура фильтра симметрична, то при четырех звеньях требуется варьировать двумя параметрами. Поиск оптимальных значений этих параметров осуществляется с помощью функции **Minimize(Y,k1,k2).** (См. приложение 2.) Рекомендует-

ся сделать несколько циклов поиска оптимальных значений параметров **k1** и **k2** путем разного задания исходных точек поиска (В примере расчета, показанного на рис. 11.3, такими значениями являются k1=0.42 и k2=0.4). Минимальное значение функции цели и соответствующие ей оптимальные значения k1 и k2, являются конечным результатом поиска.

В 3-м разделе производится расчет геометрических размеров проектируемого фильтра: ширины(W) и длины (L) микрополосковых линий и зазор (S) между ними, все размеры в мм. Расчет производится согласно (8.48) и формул, приведенных в программах на рис. 8.9 и 8.12.

В 4-м разделе представляются результаты расчета фильтра: геометрических размеров всех микрополосковых линий (см. рис. 8.11, 11.1, 11.2) и характеристика затухания фильтра в двух вариантах: во всей рассчитываемой полосе частот и только в полосе пропускания. Кроме того, строится характеристика коэффициента отражения по входу всего соединения.

В программе приняты следующие обозначения:

f1…f2 – полоса пропускания фильтра в ГГц или МГц;

f0 – центральная частота фильтра, соответствующая середине полосы пропускания;

V1,V2 – коэффициенты веса, соответственно относящиеся к полосе пропускания и заграждения;

λ – длина волны в мм, соответствующая центральной частоте фильтра f0;

εr – диэлектрическая проницаемость подложки;

εf – эффективное значение диэлектрической проницаемости;

h – толщина подложки в мм;

GH – модуль коэффициента отражения нагрузки;

GF – коэффициент, определяющий фазовую характеристику нагрузки;

G4A, GBX – модуль коэффициента отражения по входу фильтра;

BZ, BD – затухание фильтра в дБ;

k1, k2 – коэффициенты связи – варьируемые параметры;

W, L, S – геометрические размеры микрополосковых линий в мм (см. рис. 8.11, 11.1, 11.2);

X – нормированное, относительное значение частоты, определенное выше.

Результаты примера расчета по программе приведены на рис. 11.5. Путем параметрического синтеза по программе удалось рассчитать фильтр, имеющий затухание в полосе пропускания 0,9…1,1 ГГц не более 0,5 дБ, в полосе заграждения – до 40 дБ. При необходимости улучшить характеристику затухания фильтра следует увеличить число звеньев. Общая структура программы при этом не изменится.

Следует заметить, что с повышением частоты следует учитывать и действие таких второстепенных факторов, как неоднородность, определяемую открытым концом микрополосковой линии, и дисперсионные свойства последней. В этом случае в программу следует ввести дополнительные операторы, учитывающие влияние на характеристику данных факторов.

$f1 := 0.9 \qquad f2 := 1.1 \qquad V1 := 1 \qquad V2 := 0.5$

$\lambda := 300 \qquad \varepsilon r := 9.6 \qquad h := 1 \qquad GA := 0.1 \qquad GF := 0.1$

$Df := 0.25 \cdot (f2 - f1) \qquad f0 := 0.5 \cdot (f2 + f1)$

$j := \sqrt{-1} \qquad GH(x) := GA \cdot e^{j \cdot GF \cdot x}$

$sf(x) := \sin(0.5 \cdot \pi \cdot x) \qquad cf(x) := \cos(0.5 \cdot \pi \cdot x)$

$$a1(x,k1) := j \cdot k1 \cdot \frac{sf(x)}{\left(\sqrt{1 - k1^2}\right) \cdot cf(x) + j \cdot sf(x)}$$

$$a2(x,k2) := j \cdot k2 \cdot \frac{sf(x)}{\left(\sqrt{1 - k2^2}\right) \cdot cf(x) + j \cdot sf(x)}$$

$$b1(x,k1) := \frac{\sqrt{1 - k1^2}}{\left(\sqrt{1 - k1^2}\right) \cdot cf(x) + j \cdot sf(x)}$$

$$b2(x,k2) := \frac{\sqrt{1 - k2^2}}{\left(\sqrt{1 - k2^2}\right) \cdot cf(x) + j \cdot sf(x)}$$

$$G1(x,k1,k2) := \frac{\left[\left[(a1(x,k1))^2 + (b1(x,k1))^2\right] - \left[(a1(x,k1))^2 - (b1(x,k1))^2\right]^2 \cdot GH(x)\right]}{1 - \left[(a1(x,k1))^2 + (b1(x,k1))^2\right] \cdot GH(x)}$$

$$G2(x,k1,k2) := \frac{\left[\left[(a2(x,k2))^2 + (b2(x,k2))^2\right] - \left[(a2(x,k2))^2 - (b2(x,k2))^2\right]^2 \cdot G1(x,k1,k2)\right]}{1 - \left[(a2(x,k2))^2 + (b2(x,k2))^2\right] \cdot G1(x,k1,k2)}$$

$$G3(x,k1,k2) := \frac{\left[\left[(a2(x,k2))^2 + (b2(x,k2))^2\right] - \left[(a2(x,k2))^2 - (b2(x,k2))^2\right]^2 \cdot G2(x,k1,k2)\right]}{1 - \left[(a2(x,k2))^2 + (b2(x,k2))^2\right] \cdot G2(x,k1,k2)}$$

$$G4(x,k1,k2) := \frac{\left[\left[(a1(x,k1))^2 + (b1(x,k1))^2\right] - \left[(a1(x,k1))^2 - (b1(x,k1))^2\right]^2 \cdot G3(x,k1,k2)\right]}{1 - \left[(a1(x,k1))^2 + (b1(x,k1))^2\right] \cdot G3(x,k1,k2)}$$

$$G4A(x,k1,k2) := |G4(x,k1,k2)| \qquad BZ(x,k1,k2) := -10 \cdot \log\left[1 - (G4A(x,k1,k2))^2\right]$$

ORIGIN:= 1 $k1 := 0.42$ $k2 := 0.4$

$n := 1..19$

$x_n := 1 + (n - 10) \cdot \frac{Df}{f0}$ $G_n := G4A(x_n, k1, k2)$

$$Y(k1,k2) := V2 \cdot \left[\sum_{n=1}^{7} \left[1 - (G_n)^2 \right] \right] + V1 \cdot \left[\sum_{n=8}^{12} (G_n)^2 \right] + V2 \cdot \left[\sum_{n=13}^{19} \left[1 - (G_n)^2 \right] \right]$$

$Y(k1,k2) = 3.132$

Given

$0.3 \le k1 \le 0.45$ $0.15 \le k2 \le 0.3$

$H := Minimize(Y, k1, k2)$ $H = \begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.24 \end{pmatrix}$ $k1 := H_1$ $k2 := H_2$

$i := 1..19$

$GBX_i := G4A(x_i, k1, k2)$ $BD_i := -10 \cdot \log\left[1 - (GBX_i)^2 \right]$

$$Y(k1,k2) := V2 \cdot \left[\sum_{i=1}^{7} \left[1 - (GBX_i)^2 \right] \right] + V1 \cdot \left[\sum_{i=8}^{12} (GBX_i)^2 \right] + V2 \cdot \left[\sum_{i=13}^{19} \left[1 - (GBX_i)^2 \right] \right]$$

$Y(k1,k2) = 0.486$

$S1 := 2.241 \cdot e^{-6.76 \cdot k1}$ $S2 := 2.241 \cdot e^{-6.76 \cdot k2}$

$W1 := 0.954 + 0.378 \cdot k1 - 2.222 \cdot k1^2$ $W2 := 0.954 + 0.378 \cdot k2 - 2.222 \cdot k2^2$

$$\varepsilon f1 := 0.5 \cdot (1 + \varepsilon r) + 0.5 \cdot (\varepsilon r - 1) \cdot \left[1 + \frac{(10 \cdot h)}{W1} \right]^{-0.5}$$

$$\varepsilon f2 := 0.5 \cdot (1 + \varepsilon r) + 0.5 \cdot (\varepsilon r - 1) \cdot \left[1 + \frac{(10 \cdot h)}{W2} \right]^{-0.5}$$

$L1 := \frac{\lambda}{4 \cdot \sqrt{\varepsilon f1}}$ $L2 := \frac{\lambda}{4 \cdot \sqrt{\varepsilon f2}}$

$k := 1..4$

$S_1 := S1$ $S_2 := S2$ $S_3 := S2$ $S_4 := S1$

$W_1 := W1$ $W_2 := W2$ $W_3 := W2$ $W_4 := W1$

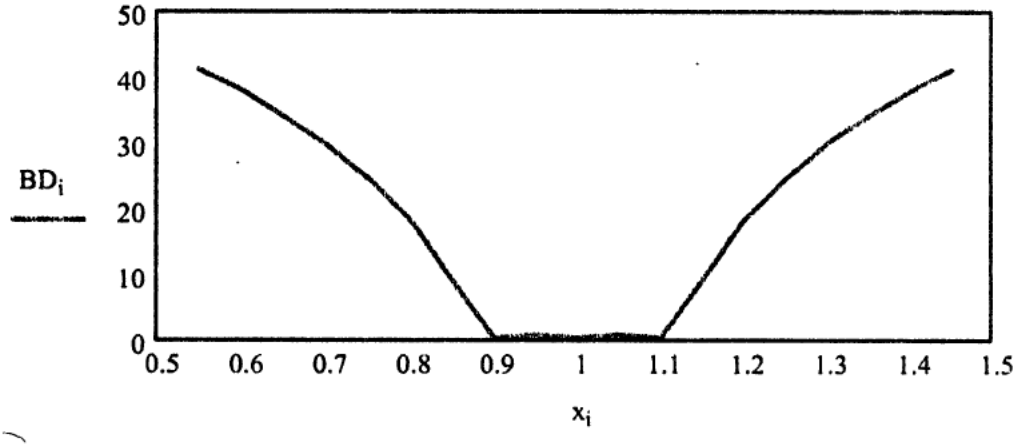
$L_1 := L1$ $L_2 := L1 + L2$ $L_3 := L1 + L2$ $L_4 := L1 + L2$

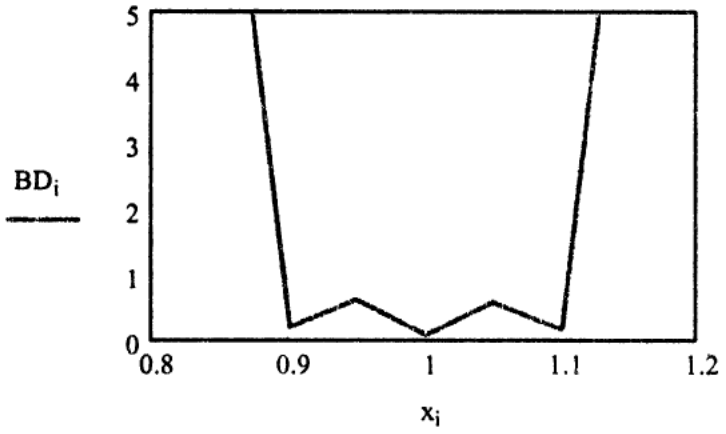
k1 = 0.42 k2 = 0.24 h = 1 εr := 9.6

S_k =
0.131
0.442
0.442
0.131

W_k =
0.721
0.917
0.917
0.721

L_k =
29.612
58.925
58.925
58.925





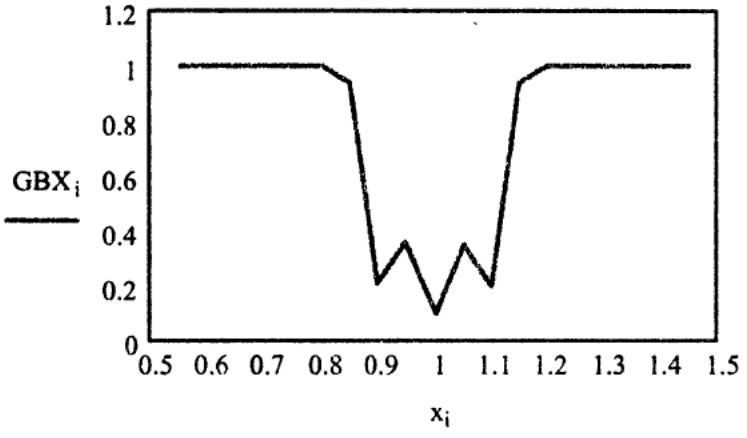


Рис. 11.5

11.3. Алгоритм синтеза согласующей цепи

Функция согласования, свойственная самым различным типам электрических цепей, носит наиболее универсальный характер и сводится к трансформации одного значения сопротивления в другое. Например, в рассмотренных примерах передачи мощности от генератора в нагрузку (см. § 7.4, 8.5), согласование состоит в трансформации сопротивления $Z_н$ в сопротивление, комплексно сопряженное с Z_i. В другом случае следует согласовать выходное сопротивление антенны с входным сопротивление малошумящего входного усилителя радиоприемника, в третьем–выходное сопротивление радиопередатчика с входным сопротивлением антенны и т. д. Поэтому согласующее устройство можно также назвать трансформатором ВЧ или СВЧ сопротивлений.

Согласующее устройство представляет собой реактивный четырехполюсник, потери в котором обусловлены отражением сигнала со стороны входа (рис. 11.6).

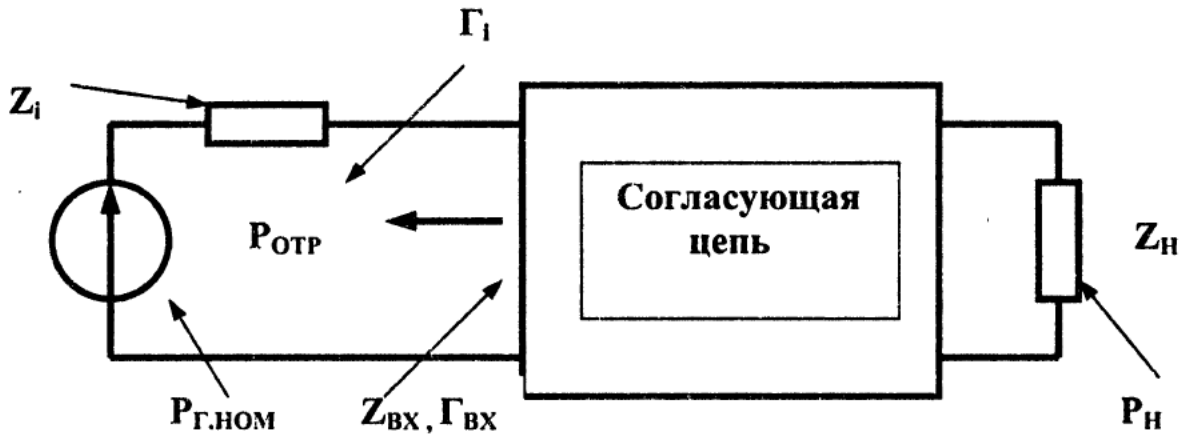


Рис. 11.6

Согласно рис. 11.6 запишем следующее уравнение баланса мощностей для согласующего устройства:

$$P_{Г.НОМ}=P_{ОТР}+P_Н \text{ или } 1=\left|\Gamma_{ВХ}\right|^2+K_П, \qquad (11.3)$$

где $\left|\Gamma_{ВХ}\right|^2=P_{ОТР}/P_{ПАД}$, $K_П=P_Н/P_{Г.НОМ}\leq 1$ – коэффициент передачи номинальной мощности генератора в нагрузку.

Таким образом, качество согласования, определяемое мерой передачи номинальной мощности генератора в нагрузку, можно определить или с помощью коэффициента $K_П$, или квадрата модуля коэффициента отражения $\left|\Gamma_{ВХ}\right|^2$, или затухания $B_З$ (11.2). При идеальном согласовании перечисленные параметры принимают значения:

$K_П=1$, $\left|\Gamma_{ВХ}\right|^2=0$, $B_З=0$.

Как было показано выше (см. § 7.4, 8.5), идеальное согласование обеспечивается при выполнении условия:

$$\dot{Z}_{ВХ}=\overset{*}{Z}_i \quad или \quad \dot{\Gamma}_{ВХ}=\overset{*}{\Gamma}_i. \qquad (11.4)$$

При согласовании на одной частоте всегда можно выполнить условие идеального согласования (11.4) с помощью простой схемы, содержащей всего 2–3 реактивных элемента. Рассмотрим в этой связи два характерных примера.

Пример 1. Требуется согласовать низкоомное комплексное входное сопротивление высокочастотное транзистора $Z_{ВХ.ТР}=R_{ВХ}+jX_{ВХ}$ с предыдущим каскадом, т. е. трансформировать $Z_{ВХ.ТР}$ в сопротивление R_1. Для этой цели может служить схема, представленная на рис. 11.7,а.

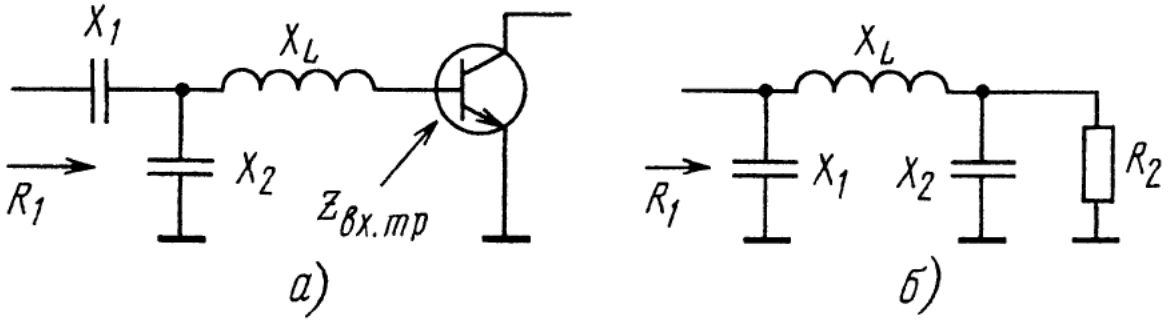


Рис. 11.7

Для схемы рис. 11.7,а справедливы следующие расчетные соотношения:

$$q=\sqrt{R_1/R_2}\geq 1\,,\quad X_L=\sqrt{R_1R_2}-X_{ВХ}\,,$$

$$X_1=\sqrt{R_1R_2}\quad,\quad X_2=\frac{q^2+1}{q^2-1}\sqrt{R_1R_2}\,.$$

Пример 2. Для трансформации активного сопротивления нагрузки R_2 в R_1 может быть использована П-образная схема – рис.11,7,б. Для нее справедливы следующие расчетные соотношения:

$$q=\sqrt{R_1/R_2}\geq 1\,,\quad X_1=\sqrt{R_1R_2}\,,$$

$$X_2=\sqrt{R_1R_2}\quad,\quad X_L=\sqrt{R_1R_2}\,.$$

В СВЧ диапазоне идеальное согласование на одной частоте можно выполнить с помощью одного-двух отрезков фидерных линий. Пример такого согласования двух активных сопротивлений любой величины с помощью четвертьволновой фидерной линии рассмотрен в § 8.5 (рис. 8.17,в).

Проблема согласования существенно усложняется при работе в полосе частот. Причем, при комплексном сопротивлении здесь вообще невозможно получить идеальное согласование на всех частотах. Рассмотрим данную проблему более подробно. В целом согласующая цепь характеризуется тремя параметрами:

сопротивлением нагрузки $Z_Н$ или ее коэффициентом отражения $Г_Н$;

полосой согласования $\Delta f=f_2-f_1$;

качеством согласования–одним из трех связанных между собой параметров: $К_П$, $|Г_{ВХ}|^2$ или $В_З$ (см. выше).

Рассмотрим случай, когда комплексное сопротивление нагрузки представляет собой параллельное соединение резистора и конденсатора или последовательное – резистора и индуктивности (рис. 11.8).

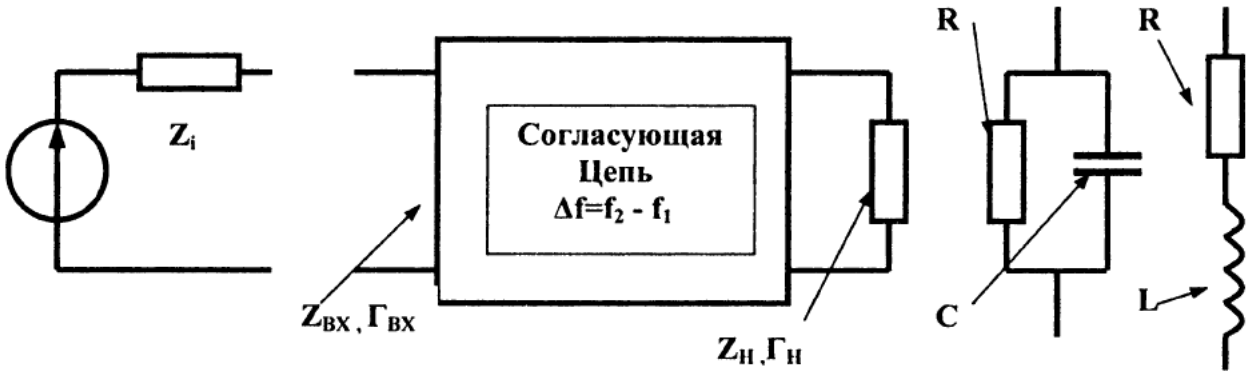


Рис. 11.8

При нагрузках, показанных на рис. 11.8, предельные возможности согласования с помощью реактивного четырехполюсника оцениваются соотношением, полученным Боде [28]:

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1}{|\Gamma_{BX}|} d\omega \le \frac{\pi}{T} \quad , \tag{11.5}$$

где T=RC или T=L/R – постоянная времени нагрузки.

Приняв $|\Gamma_{ВХ}| = |\Gamma_A|$ внутри полосы согласования Δf и $|\Gamma_{ВХ}| = 1$ – вне ее, имеем из (11.5):

$$\Gamma_{BX} \ge \exp(-\pi/\gamma) \ , \tag{11.6}$$

$$где \ \ \gamma = Q\Delta f / f \ -$$ обобщенный параметр;

Q=2πfL/R – добротность нагрузки.

С учетом (11.2) для затухания согласующей цепи получим:

$$B_3 \ge -10\lg[1-\exp(-2\pi/\gamma)] \ . \tag{11.7}$$

Соотношения (11.6) и (11.7), связывающие три названных выше параметра (нагрузку, полосу и качество согласования), отражают предельные возможности согласующей цепи при нагрузке, представленной на рис. 11.8. Лучшего согласования в полосе частот с помощью физически реализуемых цепей получить невозможно. Графики для граничного значения затухания в полосе частот построены на рис.11.9, где B1, B2, B3 – затухание в дБ, X=Δf/f – относительное значение полосы согласования. Из графиков следует, что чем выше добротность нагрузки и шире полоса, тем хуже качество согласования.

Компьютерный подход к проектированию согласующей цепи в полосе частот при комплексной нагрузке полностью совпадает с подобным проектированием фильтра (см. § 11.2). Та же функция цели (11.1) лежит в основе программы расчета согласующей цепи путем поиска наилучшей

комбинации ее параметров. Только здесь требование по отношению к полосе заграждения может отсутствовать, что влечет за собой исключение второго слагаемого в (11.1). Чем больше звеньев в согласующей цепи, тем при правильном выборе ее параметров удается ближе подойти к граничному случаю, представленному на рис. 11.9.

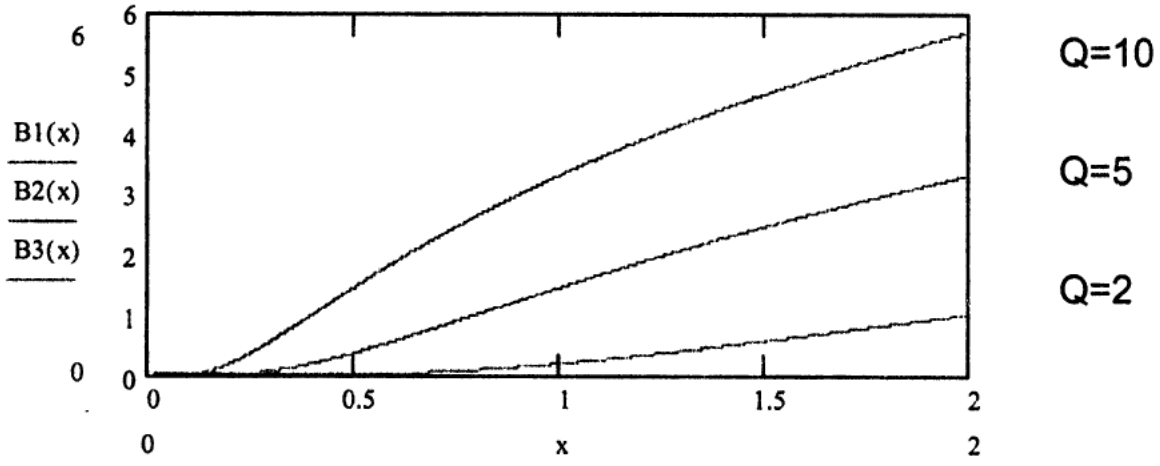


Рис. 11.9

Алгоритм, лежащий в основе проектирования согласующей цепи, является общим для ВЧ и СВЧ диапазона. Только в первом случае эта цепь составлена из реактивных элементов сосредоточенного типа, а во втором – распределенного.

11.4. Параметрический синтез СВЧ согласующей цепи на микрополсковых линиях

Одной из типовых структур согласующей цепи в СВЧ диапазоне является структура, составленная из отрезков фидерных линий с разными, ступенчато изменяющимися волновыми сопротивлениями. Причем крайние значения этих сопротивлений приближены к значениям согласуемых сопротивлений. Такая структура согласующей цепи, называемая ступенчатым переходом, показана на рис. 11.10.

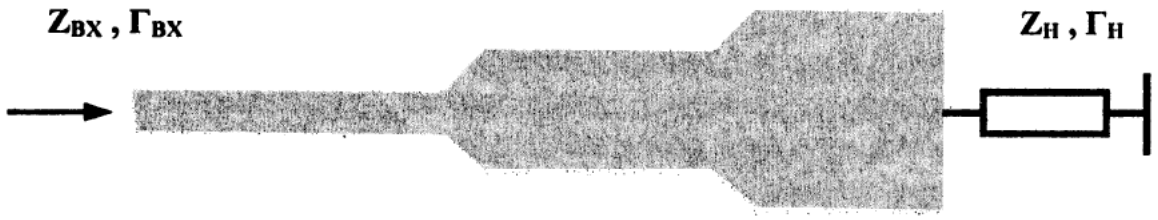


Рис. 11.10

Программа по расчету трехступенчатого перехода приведена на рис. 11.11. Конечная цель программы состоит в определении геометрических размеров трех отрезков микрополосковых линий, при которых согласующая цепь имеет наименьшие потери в заданной полосе частот согласс-

но критерию минимума суммы квадрата уклонений. Поиск этой наилучшей комбинации параметров осуществляется путем минимизации функции цели:

$$F_{Ц} \Rightarrow \min \sum_{k=1}^{n} \left| \Gamma_{ВХ\,k} \right|^2 . \qquad (11.18)$$

Составленная программа по расчету согласующей цепи имеет три раздела. 1-й раздел включает ввод исходных данных. Свойства нагрузки описываются функцией $Z_H(f)$, определяющей зависимость ее активного и реактивного сопротивлений от частоты. В программе такая зависимость принята линейной. Нагрузка может быть задана и по точкам в табличной форме. В этом случае требуется провести интерполяцию зависимости $Z_H(f)$ согласно примеру, рассмотренному в программе, приведенной на рис. 4.13 (см. § 4.6). Далее путем использования в качестве рекуррентной формулы (8.9) последовательно рассчитывается входное комплексное сопротивление на входе каждого звена. Комплексное сопротивление и коэффициент отражения на входе 3-го звена определяют параметры всей структуры. При расчете используются соотношения, определяющие параметры микрополоской линии: эффективную проводимость и волновое сопротивление согласно формул программы рис. 8.9 в § 8.3.

Во 2-ом разделе представлена функция цели **Y(**W1,W2,W3,L1,L2,L3**)** (11.18), рассчитываемая по 11 частотным точкам. Варьируемыми параметрами при этом поиске являются ширина и длина микрополосковых линий, из которых составлено согласующее устройство (рис. 11.10), т. е. следующие шесть параметров: W1, W2, W3, L1, L2, L3.

Поиск оптимальных значений этих параметров осуществляется с помощью функции **Minimize (**Y,W1,W2,W3,L1,L2,L3**)**. (См. приложение 2.) Рекомендуется сделать несколько циклов поиска оптимальных значений варьируемых параметров путем разного задания исходных точек поиска, поскольку функция **Minimize** ищет локальный, а не глобальный минимум. Минимальное значение функции цели и соответствующие ей оптимальные значения W1,W2,W3,L1,L2, L3, являются конечным результатом поиска.

В 3-м разделе производится расчет и построение графиков функции затухания и коэффициента отражения в требуемой полосе согласования и за ее пределами.

В программе (рис. 11.11) приняты следующие обозначения:

f1…f2 – полоса согласования в ГГц;

f – текущее значение частоты в ГГц;

Df – шаг сетки частот в ГГц;

εr – диэлектрическая проницаемость подложки;

εf – эффективное значение диэлектрической проницаемости;

h – толщина подложки в мм;

RA,XA – коэффициенты, определяющие активную и реактивную составляющую нагрузки ZH(f);

R, X – активная и реактивная составляющие сопротивления нагрузки, Ом, ρ – волновое сопротивление линии, Ом;

GM, G, GBX – модуль коэффициента отражения по входу согласующей цепи;

B, BD – затухание согласующей в дБ.

$$f1 := 1 \quad f2 := 2 \quad \varepsilon r := 9.6 \quad h := 1$$

$$Df := 0.1 \cdot f1 \quad RA := 20 \quad XA := 10$$

$$j := \sqrt{-1}$$

$$ZH(f) := RA \cdot \left(1 + \frac{f}{f1}\right) + j \cdot XA \cdot \left(1 + \frac{f}{f1}\right)$$

$$\varepsilon f1(W1) := 0.5 \cdot (1 + \varepsilon r) + 0.5 \cdot (\varepsilon r - 1) \cdot \left[1 + \frac{(10 \cdot h)}{W1}\right]^{-0.5}$$

$$\varepsilon f2(W2) := 0.5 \cdot (1 + \varepsilon r) + 0.5 \cdot (\varepsilon r - 1) \cdot \left[1 + \frac{(10 \cdot h)}{W2}\right]^{-0.5}$$

$$\varepsilon f3(W3) := 0.5 \cdot (1 + \varepsilon r) + 0.5 \cdot (\varepsilon r - 1) \cdot \left[1 + \frac{(10 \cdot h)}{W3}\right]^{-0.5}$$

$$\rho 1(W1) := \frac{300}{\left[\left(1 + \frac{W1}{h}\right) \cdot \sqrt{\varepsilon r}\right]} \qquad \rho 2(W2) := \frac{300}{\left[\left(1 + \frac{W2}{h}\right) \cdot \sqrt{\varepsilon r}\right]}$$

$$\rho 3(W3) := \frac{300}{\left[\left(1 + \frac{W3}{h}\right) \cdot \sqrt{\varepsilon r}\right]}$$

$$tf1(W1, L1, f) := \tan\left(\frac{\pi \cdot f \cdot \sqrt{\varepsilon f1(W1)} \cdot L1}{150}\right)$$

$$tf2(W2, L2, f) := \tan\left(\frac{\pi \cdot f \cdot \sqrt{\varepsilon f2(W2)} \cdot L2}{150}\right)$$

$$tf3(W3, L3, f) := \tan\left(\frac{\pi \cdot f \cdot \sqrt{\varepsilon f3(W3)} \cdot L3}{150}\right)$$

$$Z1(W1, L1, f) := \frac{\left[\rho 1(W1) \cdot \left(ZH(f) + j \cdot \rho 1(W1) \cdot tf1(W1, L1, f)\right)\right]}{\rho 1(W1) + j \cdot ZH(f) \cdot tf1(W1, L1, f)}$$

$$Z2(W1, W2, L1, L2, f) := \frac{\left[\rho 2(W2) \cdot \left(Z1(W1, L1, f) + j \cdot \rho 2(W2) \cdot tf2(W2, L2, f)\right)\right]}{\rho 2(W2) + j \cdot Z1(W1, L1, f) \cdot tf2(W2, L2, f)}$$

$$Z3(W1, W2, W3, L1, L2, L3, f) := \frac{\left[\rho 3(W3) \cdot \left(Z2(W1, W2, L1, L2, f) + j \cdot \rho 3(W3) \cdot tf3(W3, L3, f)\right)\right]}{\rho 3(W3) + j \cdot Z2(W1, W2, L1, L2, f) \cdot tf3(W3, L3, f)}$$

$$GM(W1, W2, W3, L1, L2, L3, f) := \left| \frac{(Z3(W1, W2, W3, L1, L2, L3, f) - 50)}{(Z3(W1, W2, W3, L1, L2, L3, f) + 50)} \right|$$

ORIGIN:= 1

$W1 := 11$ $W2 := 7$ $W3 := 0.2$

$L1 := 20$ $L2 := 7$ $L3 := 7$

$n := 1..11$

$f_n := f1 + (n - 1) \cdot Df$ $G_n := GM(W1, W2, W3, L1, L2, L3, f_n)$

$$B_n := -10 \cdot \log\left[1 - (G_n)^2\right]$$

$$Y(W1, W2, W3, L1, L2, L3) := \sum_{n=1}^{11} (G_n)^2$$

$Y(W1, W2, W3, L1, L2, L3) = 9.18$

Given

$5 \le W1 \le 10$ $\quad 1 \le W2 \le 5$ $\quad 0.5 \le W3 \le 1$

$1 \le L1 \le 10$ $\quad 8 \le L2 \le 25$ $\quad 8 \le L3 \le 25.1$

$H := \text{Minimize}(Y, W1, W2, W3, L1, L2, L3)$

$W1 := H_1 \quad W2 := H_2 \quad W3 := H_3$

$L1 := H_4 \quad L2 := H_5 \quad L3 := H_6$

$$H = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0.685 \\ 1 \\ 9.43 \\ 9.43 \end{pmatrix}$$

$i := 1..21$

$f_i := 0.5 \cdot f1 + (i - 1) \cdot Df$

$R_i := \text{Re}(ZH(f_i)) \quad X_i := \text{Im}(ZH(f_i))$

$GBX_i := GM(W1, W2, W3, L1, L2, L3, f_i)$

$BD_i := -10 \cdot \log\left[1 - (GBX_i)^2\right]$

$$Y(W1, W2, W3, L1, L2, L3) := \sum_{i=1}^{11} (GBX_i)^2$$

$Y(W1, W2, W3, L1, L2, L3) = 0.407$

$W1 = 5 \quad W2 = 1 \quad W3 = 0.685$

$L1 = 1 \quad L2 = 9.43 \quad L3 = 9.43$

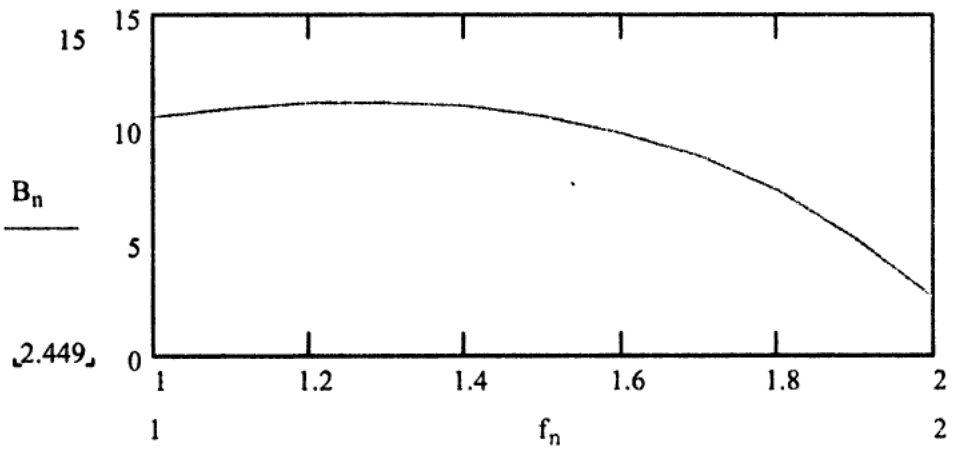


Рис. 11.11

Результаты примера расчета по программе в виде графиков зависимости активной (R) и реактивной (X) составляющих нагрузки, затухания (BD) и коэффициента отражения по входу согласующего устройства (GBX) от частоты f представлены на рис. 11.12. Из графика следует, что первоначальное затухание в диапазоне частот 1...2ГГц в пределах 3...10дБ (см. рис. 11.11) удалось снизить до 0.1...0,3дБ, а значение функции цели понизить с 9,18 до 0,407. Полученные оптимальные размеры линий, как элементы вектора H, приведены в конце программы рис. 11.11.

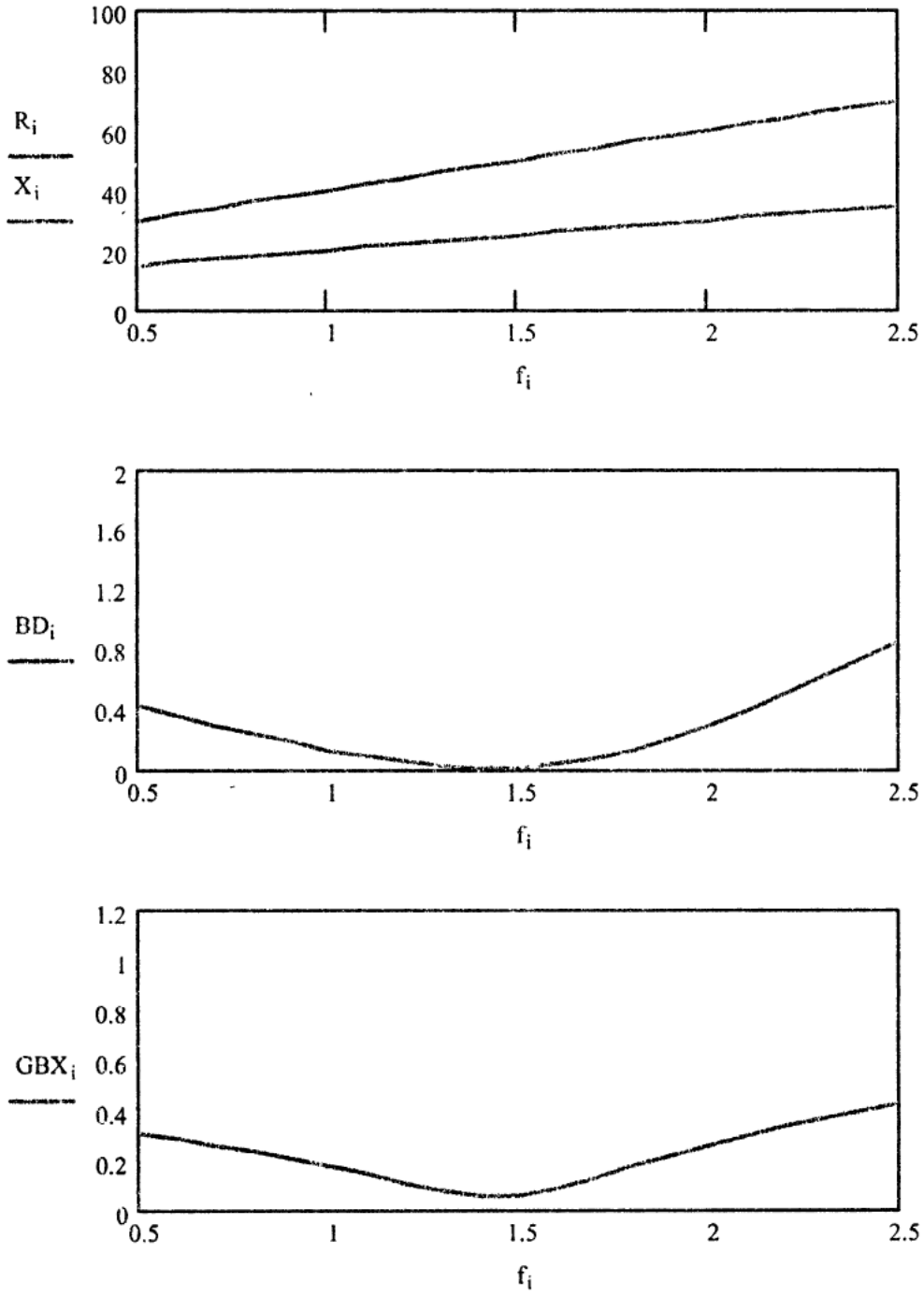


Рис. 11.12

По аналогичным программам могут быть рассчитаны согласующие цепи – ступенчатые переходы, содержащие большее число звеньев – отрезков микрополосковых или иных фидерных линий.

Глава 12. МОДУЛЯЦИЯ

12.1. Виды модуляции

Модуляцией называется процесс управления одним или несколькими параметрами колебаний высокой частоты в соответствии с законом передаваемого сообщения. Модуляцию можно также рассматривать как процесс наложения одного колебания на другое. Передаваемый сигнал называют модулирующим, управляемый высокочастотный – модулируемым. Частота модулирующего сигнала должна быть на один и более порядков ниже модулируемого.

Классификация методов модуляции возможна по трем признакам:

- в зависимости от управляемого параметра высокочастотного сигнала: амплитудная (АМ), частотная (ЧМ) и фазовая (ФМ);
- в зависимости от числа ступеней модуляции: одно-, двух-, трехступенчатая;
- в зависимости от вида передаваемого сообщения–аналогового, цифрового или импульсного – непрерывная, со скачкообразным изменением управляемого параметра (такую модуляцию называют манипуляцией) и импульсная.

Как и при анализе немодулированных сигналов (см. гл. 2), описание модулированных сигналов возможно в рамках временного и спектрального методов. Для неискаженного приема модулированного сигнала полоса пропускания всех высокочастотных трактов радиопередатчика и радиоприемника должна быть равна или больше ширины спектра излучаемого сигнала. С другой стороны, спектр модулированного сигнала не должен выходить за выделенную данному каналу допустимую полосу излучения (рис. 12.1).

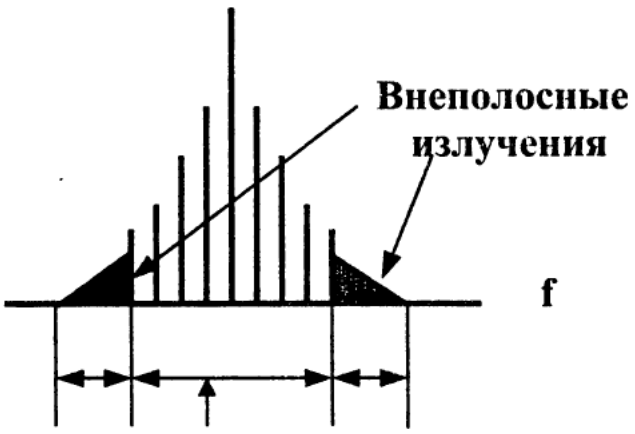


Рис. 12.1

Излучения, лежащие за пределами выделенной полосой излучения, называются внеполосными. Их уровень не должен превышать определенной, строго нормируемой величины. В противном случае данный канал связи будет создавать помехи другим каналам.

Ширина спектра модулированного высокочастотного сигнала $\Delta f_{СП}$ зависит как от спектра передаваемого сообщения, так и от вида модуляции. Параметром, характеризующим в целом модулированный сигнал, позволяющим сравнивать различные виды модуляции, является база сигнала, равная произведению:

$$B = T\Delta f_{СП}, \qquad (12.1)$$

где Т – длительность элемента сигнала.

При передаче аналоговых сообщений верхняя частота его спектра F связана с параметром T, трактуемым как время интервала отсчета, соотношением T=1/2F и поэтому (12.1) принимает вид:

$$B=\Delta f_{СП}/2F. \qquad (12.2)$$

При передаче цифровой информации двоичным кодом, состоящим из логических 1 и 0, со скоростью V, равной количеству передаваемых элементарных посылок (бит) в секунду (бит/с=бод), величина T трактуется как длительность элементарной посылки T=1/V и поэтому (12.1) принимает вид:

$$B=\Delta f_{СП}/V. \qquad (12.3)$$

При B=1 высокочастотный модулированный сигнал называется узкополосным, при B>3–4 – широкополосным. В соответствии с этим определением в зависимости от используемого вида сигнала и радиотехническая система в целом называется узко- или широкополосной.

При амплитудной модуляции сигнал всегда является узкополосным; при частотной – в зависимости от характеризующего ее параметра девиации частоты – узко- или широкополосным. Вид модуляции и значение параметра B оказывает существенное влияние на помехоустойчивость радиотехнической системы и получение требуемого соотношения сигнал-шум в радиоприемном устройстве (см. гл. 13). Пример модулированных сигналов одинаковой мощности, но с разной шириной спектра приведен на рис. 12.2.

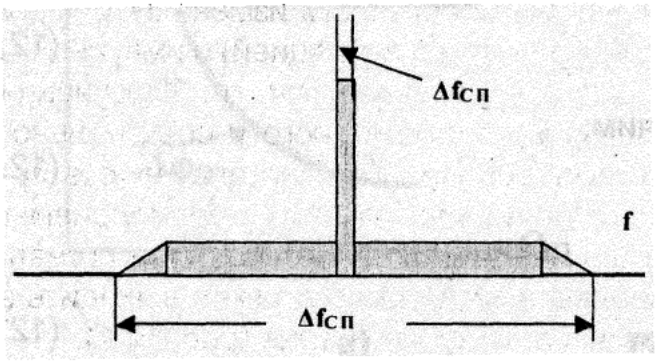


Рис. 12.2

Рассмотрим, чем вызвана необходимость применения двухступенчатой, а в некоторых случаях даже трехступенчатой модуляции. Пусть при одной частоте несущих колебаний $f_{НЕС}$ требуется передавать сообщения от нескольких источников. Для возможности разделения принятых сообщений в радиоприемном устройстве поступают следующим образом. Каждое из сообщений модулирует сначала свою индивидуальную несущую, называемую в этом случае поднесущей (рис. 12.3). Далее все поднесущие с разными частотами объединяются в общий, групповой сигнал, модулирующий несущую.

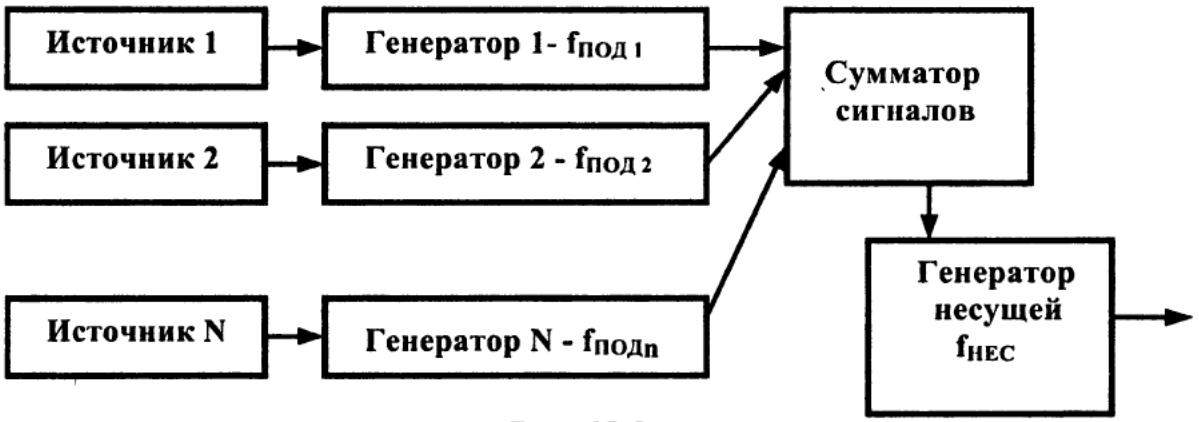


Рис. 12.3

При схеме рис. 12.3 возможны разные виды комбинации видов модуляции, например, в 1-й ступени АМ, во 2-й – ЧМ. Модуляция при этом называется АМ–ЧМ. Возможны и такие варианты: ЧМ–ЧМ, ЧМ–ФМ и т. д. При передаче дискретных сообщений применение двухступенчатой модуляции также имеет ряд достоинств (см. § 12.3).

12.2. Частотная и фазовая модуляция аналоговых сообщений

Основные определения. Поскольку мгновенная частота ω(t) с фазой θ(t) сигнала связана соотношением

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t)dt, \tag{12.4}$$

то частотная и фазовая модуляция взаимозависимы, их объединяют даже общим названием – угловая модуляция.

При частотной модуляции (ЧМ) мгновенная частота сигнала изменяется по закону модулирующего сигнала, при фазовой (ФМ) – фаза. Поэтому при модуляции тестовым синусоидальным сигналом частотой Ω:

$$u_M(t) = U_M \cos\Omega t, \tag{12.5}$$

при ЧМ и ФМ соответственно получим:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_Д \cos\Omega t\ , \tag{12.6}$$

$$\text{где}\ \ \Delta\omega_Д = kU_M\ - \quad \text{девиация частоты;}$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + \Delta\varphi_Д \cos\Omega t + \theta_0\ , \tag{12.7}$$

$$\text{где}\ \ \Delta\varphi_Д = kU_M\ - \quad \text{девиация фазы.}$$

Высокочастотное, несущее колебание:

$$u(t) = U_0 \cos\theta(t) = U_0 \cos\int_0^t \omega(t)dt\ . \tag{12.8}$$

При частотной модуляции тональным сигналом (12.5) с учетом (12.6) несущее колебание (12.8) примет вид:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k\int_0^t U_m \cos\Omega t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m_ч \sin\Omega t), \tag{12.9}$$

где индекс $m_ч = \Delta\omega_Д / \Omega$ – частотной модуляции.

При фазовой модуляции тональным сигналом (12.5) с учетом (12.7) несущее колебание (12.8) примет вид:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi_Д \cos\Omega t + \theta_0)\ , \tag{12.10}$$

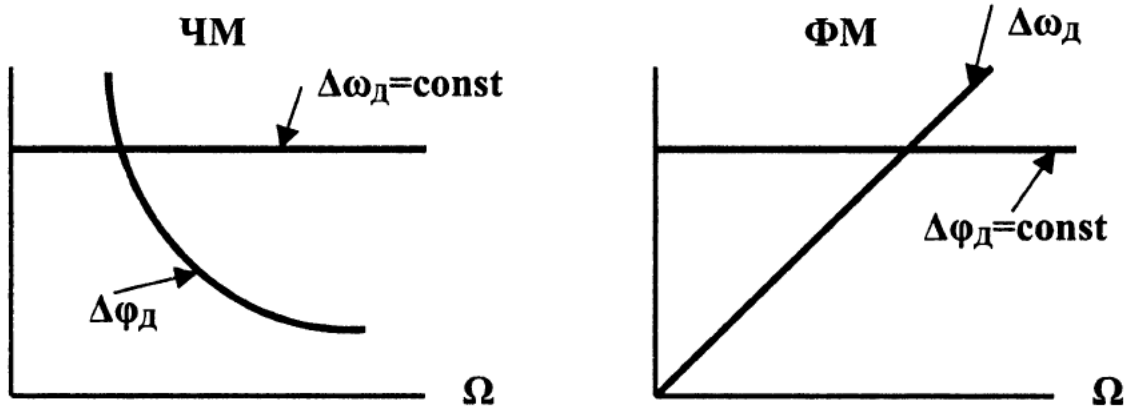
где $\Delta\varphi_Д$ – девиация фазы или индекс фазовой модуляции.

Из (12.9) и (12.10) следует, что при частоте модулирующего сигнала Ω=const отличить частотную модуляцию от фазовой не представляется возможным. Это различие можно обнаружить только при изменении частоты Ω. При ЧМ согласно (12.9) девиация частоты $\Delta\omega_Д$=const при изменении частоты Ω, а девиация фазы сигнала меняется по закону $\Delta\varphi_Д=\Delta\omega_Д/\Omega$.

При ФМ согласно (12.10) амплитуда колебания фазы сигнала $\Delta\varphi_Д$=const, а мгновенная частота сигнала меняется по закону:

$$\omega(t)=\frac{d\theta}{dt}=\omega_0-\Delta\varphi_Д\Omega\sin\Omega t \qquad (12.11)$$

и, следовательно, девиация частоты пропорциональна частоте модулирующего сигнала $\Delta\omega_Д=\Delta\varphi_Д\Omega$. Данное различие между ЧМ и ФМ иллюстрируется с помощью графиков, построенных на рис. 12.4.



а) **Рис. 12.4** б)

Таким образом, при обеих видах угловой модуляции – ЧМ и ФМ – меняется как мгновенная частота, так и фаза модулируемого высокочастотного сигнала. Однако, два основных параметра, характеризующих эти виды модуляции – девиация частоты $\Delta\omega_Д$ и девиация фазы $\Delta\varphi_Д$ – по-разному зависят от частоты модулирующего сигнала Ω.

Спектр сигнала при частотной и фазовой модуляции. Обратимся к выражению для ЧМ-сигнала (12.9), представив его в виде суммы двух слагаемых:

$$u(t)=U_0\cos(m_ч\sin\Omega t)\times\cos\omega_0 t-U_0\sin(m_ч\sin\Omega t)\times\sin\omega_0 t. \qquad (12.12)$$

Разложив периодические функции в (12.12) в ряд Фурье, имеем:

$$\begin{aligned}u(t)=&U_0J_0(m_ч)\cos\omega_0 t+\\&U_0J_1(m_ч)[\cos(\omega_0+\Omega)t-\cos(\omega_0-\Omega)t]+\\&U_0J_2(m_ч)[\cos(\omega_0+2\Omega)t+\cos(\omega_0-2\Omega)t]+\\&U_0J_3(m_ч)[\cos(\omega_0+3\Omega)t-\cos(\omega_0-3\Omega)t]+\ldots\end{aligned} \qquad (12.13)$$

где $J_n(m_ч)$ – бесселева функция 1-го рода n-порядка от аргумента $m_ч$, графики которой построены на рис.2. 15, n – целое число, $x=m_ч$.

$I0(x) := J0(x)$ $I1(x) := J1(x)$ $I2(x) := Jn(2,x)$

$I3(x) := Jn(3,x)$ $I4(x) := Jn(4,x)$ $I5(x) := Jn(5,x)$

$I6(x) := Jn(6,x)$ $I7(x) := Jn(7,x)$ $I8(x) := Jn(8,x)$

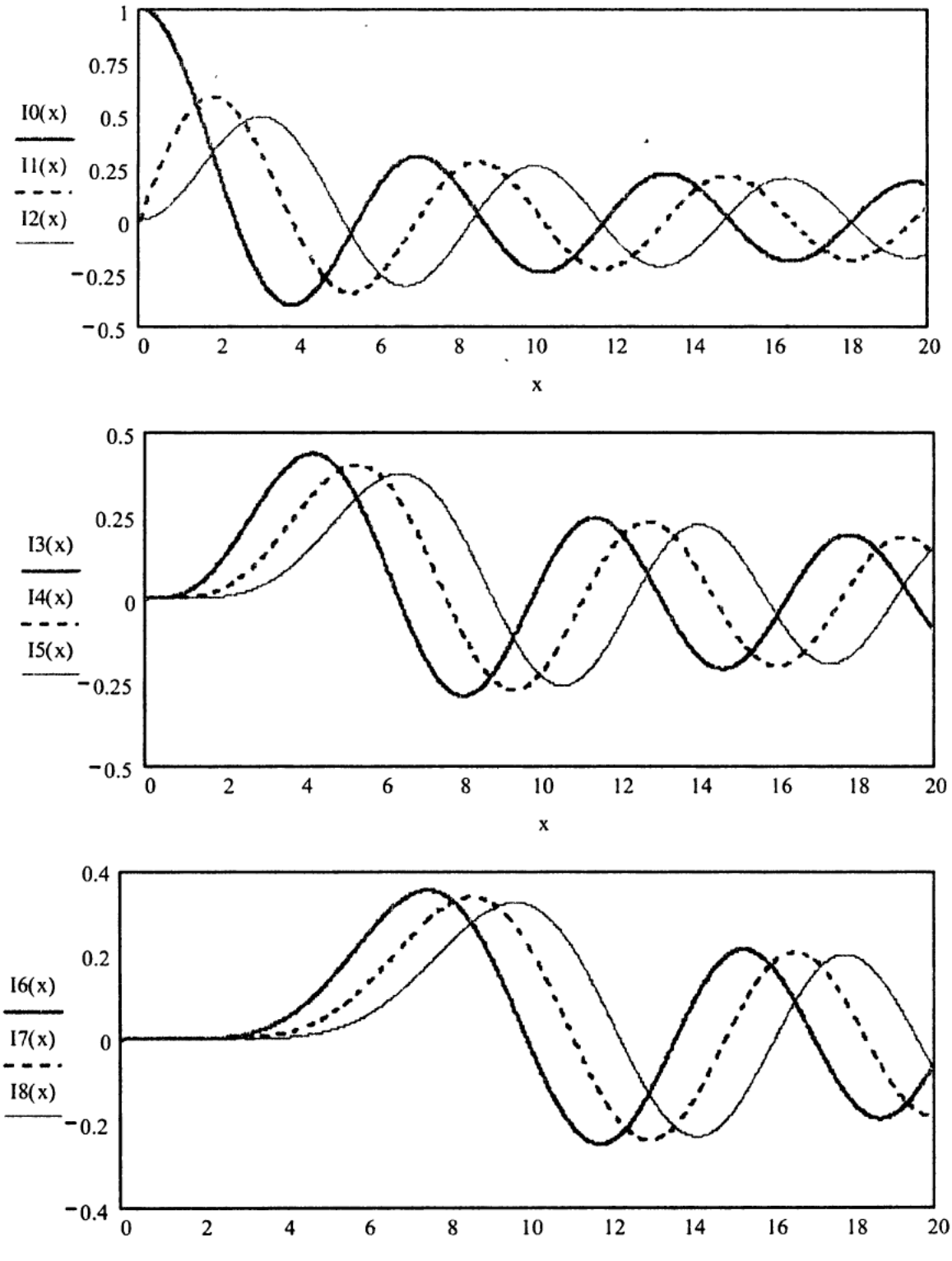


Рис. 12.5

Согласно (12.13) при ЧМ спектр высокочастотного сигнала при тональном модулирующем сигнале частотой Ω имеет бесконечное число спектральных составляющих, расположенных симметрично относительно частоты несущей через интервалы, равные Ω. Частоты этих спектральных составляющих равны $\omega_0 \pm n\Omega$, а амплитуды $U_0 J_n(m_ч)$. Аналогичный результат получается и при фазовой модуляции с заменой параметра $m_ч$ на $\Delta\varphi_д$.

Пакет программ **Mathcad** (см. приложение 2) представляет возможность путем обращения к функции J0, J1, Jn вычислить значения бесселевой функции 1-го рода n-порядка при любом значении аргумента $m_ч$. Такая программа и графики бесселевой функции при n=0...8 и $m_ч$=0...20 приведены на рис. 12.5. С помощью данных графиков можно построить спектр ЧМ и ФМ сигнала при заданном значении $m_ч$=x или $\Delta\varphi_д$=x. В качестве примера такие спектрограммы при $m_ч$=5 и 2,4 приведены на рис. 12.6.

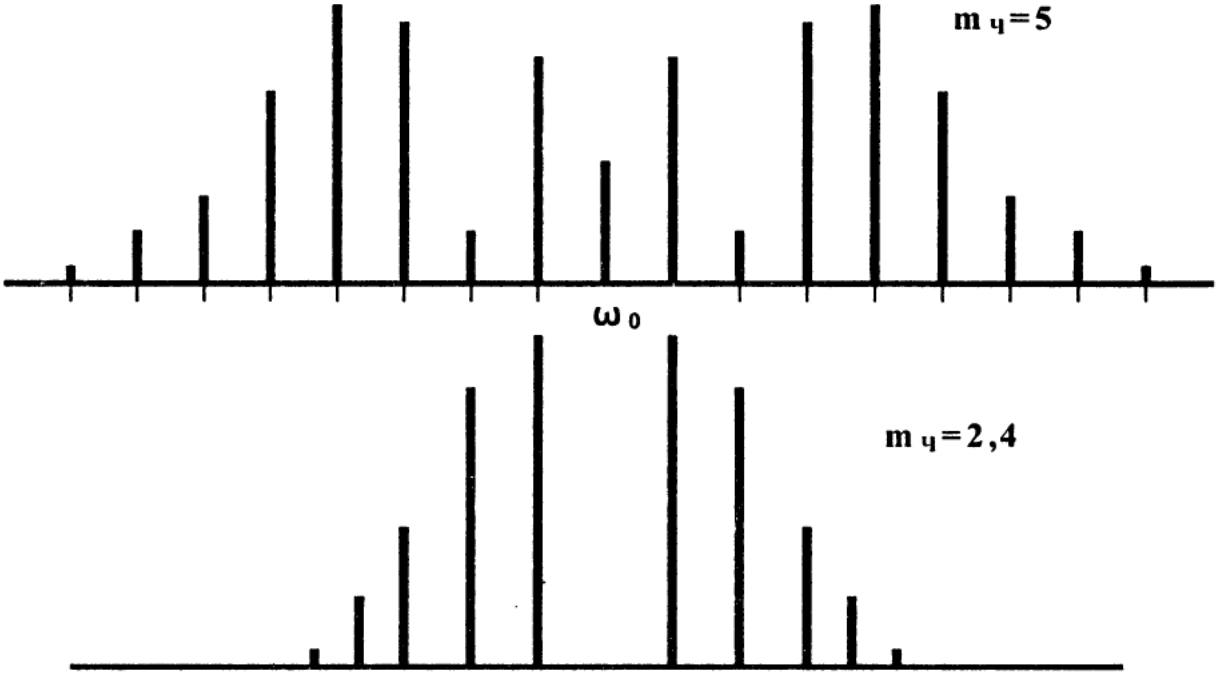


Рис. 12.6

Следует заметить, что спектральная составляющая с частотой ω_0 и несущая частотой ω_0 суть разные понятия. Так например, при $m_ч$=2,4 спектральная составляющая с частотой ω_0 равна 0, но это не означает отсутствие несущей в сигнале.

Теоретически спектр ЧМ-сигнала безграничен. Однако, как показывает анализ, большая часть энергии ЧМ-сигнала сосредоточена в полосе:

$$\Delta f_{СП} = 2(1 + m_ч + \sqrt{m_ч})F, \qquad (12.14)$$

где F – высшая частота в спектре модулирующего сигнала.

Именно на эту величину и следует рассчитывать полосы пропускания высокочастотных трактов радиопередатчиков и радиоприемников. При $m_Ч<<1$ ширина спектра ЧМ-сигнала $\Delta f_{СП}=2F$.

Частотная модуляция с индексом $m_Ч<1$ является узкополосной, с индексом $m_Ч>2–3$ – широкополосной. Преимущества частотной модуляции в полной мере реализуются при $m_Ч>1$.

Методы осуществления угловой модуляции. Эти методы можно разделить на две группы: прямые и косвенные.

При ЧМ прямой метод означает непосредственное воздействие на автогенератор или, точнее, на колебательную систему, определяющую частоту автоколебаний. Косвенный метод состоит в преобразовании фазовой модуляции в частотную.

При ФМ прямой метод означает воздействие на высокочастотный усилитель или умножитель частоты, т. е. на электрические цепи, определяющие фазу высокочастотных колебаний. Косвенный метод заключается в преобразовании частотной модуляции в фазовую. Сказанное поясняется с помощью четырех структурных схем, представленных на рис. 12.7, на котором приняты обозначения: Г – автогенератор, У – усилитель, МЧ – модулятор частотный, ФМ – модулятор фазовый, И – интегратор.

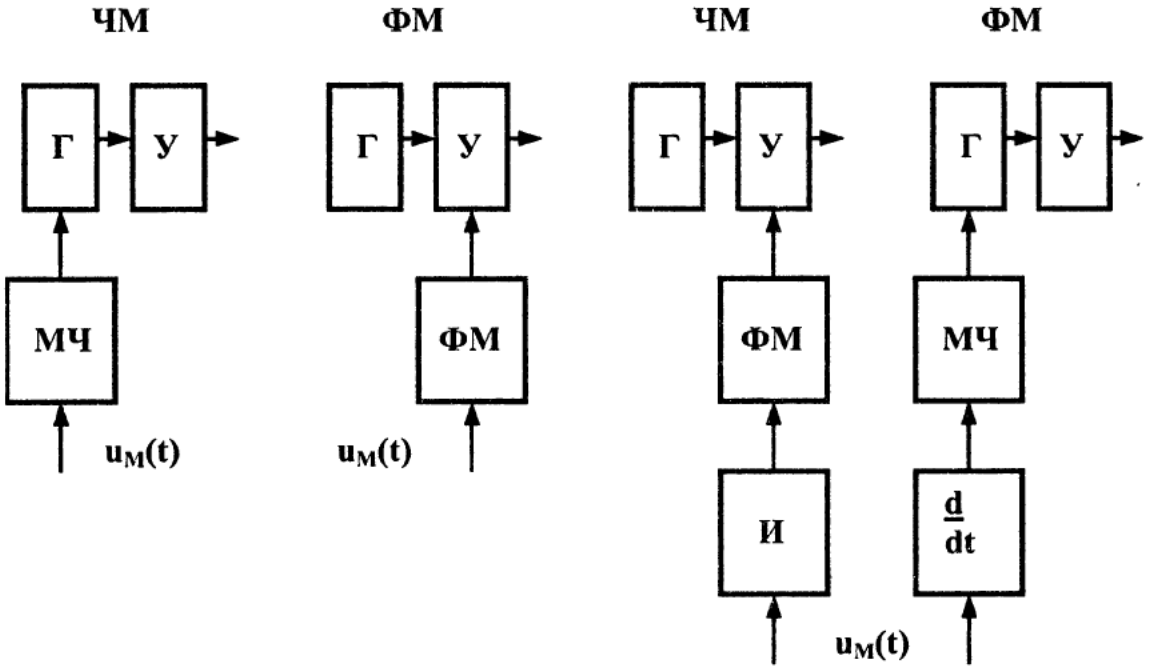


Рис. 12.7

Для преобразования фазовой модуляции в частотную на входе фазового модулятора включается интегратор (рис. 12.7,в), а частотной – в фазовую на входе частотного модулятора – дифференцирующая цепь (рис. 12.7,г).

Покажем, что именно эти цепи позволяют преобразовать один вид угловой модуляции в другой. Сигнал на выходе интегратора $\mathbf{u_{ВЫХ}(t)}$ связан с входным сигналом $\mathbf{u_М(t)}$ соотношением:

$$u_{ВЫХ}(t) = (1/T)\int u_M(t)dt. \qquad (12.15)$$

При модулирующем сигнале (12.5) из (12.15) получим:

$$u_{ВЫХ}(t) = (U_M/T\Omega)\sin\Omega t. \qquad (12.16)$$

При этом для фазы сигнала имеем:

$$\Delta\varphi(t) = Ku_{ВЫХ}(t) = (KU_M/T\Omega)\sin(\Omega t). \qquad (12.17)$$

Для изменения мгновенной частоты сигнала при функции, описывающей фазу согласно (12.17), получим:

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{KU_M}{T}\sin\Omega t. \qquad (12.18)$$

Из (12.18) следует, что девиация частоты $\Delta\omega_Д = KU_М/T = const$, что и требуется иметь при частотной модуляции. Из сравнения последнего выражения с девиацией фазы $\Delta\varphi_Д = KU_М/T\Omega$ (12.17) получим:

$$\Delta\omega_Д = \Delta\varphi_Д(\Omega)\Omega = const. \qquad (12.19)$$

Согласно (12.19) фаза меняется с частотой модулирующего сигнала, причем минимальному значению $\Omega_{МИН}$ соответствует максимальное значение отклонения фазы $\Delta\varphi_{Д.МАКС}$. Примем $\Delta\varphi_{Д.МАКС}$=1 рад. Тогда при косвенном методе ЧМ имеем: $\Delta\omega_Д = \Omega_{МИН}$. Небольшое значение девиации частоты $\Delta\omega_Д$, которое можно получить при косвенном методе ЧМ, ограничивает область его использования. Повышение $\Delta\omega_Д$ возможно путем увеличения $\Delta\varphi_{Д.МАКС}$ за счет применения многоконтурных колебательных цепей или умножения частоты сигнала в **n** раз, что в такое же число раз увеличивает девиацию частоты.

По аналогичной методике исследуя схему косвенной модуляции ФМ с использованием дифференцирующей цепи (рис. 12.7,г), получим для девиации фазы: $\Delta\varphi_Д = \Delta\omega_Д/\Omega = const$ и, следовательно, $\Delta\varphi_{Д.МАКС} = \Delta\omega_{Д.МАКС}/\Omega_{МАКС}$.

Частотный и фазовый модуляторы. Наибольшее применение имеет частотный модулятор на основе варикапа–полупроводникового диода с обратно смещенным **p-n** переходом. Закон изменения емкости **p-n** перехода, называемой барьерной или зараядной, от величины обратного напряжения U имеет вид:

$$C_{ВАР} = \frac{C_H}{(1+|U|/\varphi_0)^\gamma}, \qquad (12.20)$$

где φ_0=0,5...0,7 В (для кремния) – контактная разность потенциалов; γ=0,5 – коэффициент перехода; $C_Н$ – начальная емкость.

График зависимости (12.20) приведен на рис. 12.8. Варикап подключается к контуру автогенератора согласно схеме рис. 12.9.

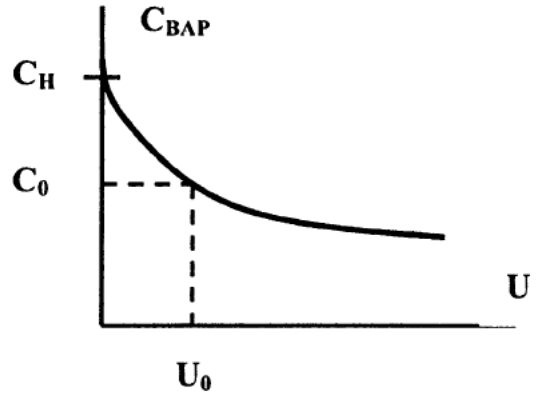


Рис. 12.8

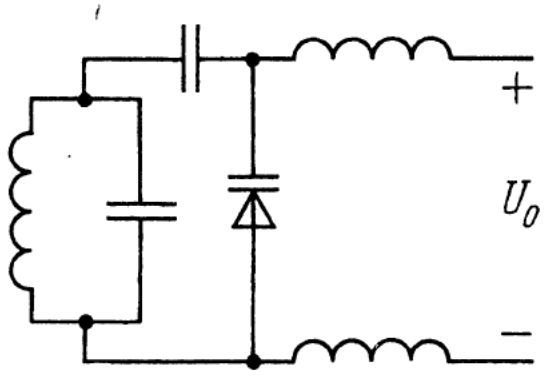


Рис. 12.9

При небольшой амплитуде модулирующего напряжения ΔU относительное изменение частоты под действием варикапа составит:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = k_{СВ} \frac{C_0 \gamma}{2C_К} \frac{\Delta U}{U_0}, \qquad (12.21)$$

где $k_{СВ}$ – коэффициент связи варикапа с контуром; $C_К$ – общая емкость контура.

Схема фазового модулятора идентична частотному, только варикап подключается к контуру усилителя или умножителя высокой частоты.

Стабилизация частоты несущей при частотной модуляции. Поскольку при прямом методе ЧМ к контуру автогенератора подключается частотный модулятор, то это приводит к снижению стабильности частоты автоколебаний, что недопустимо. Для нейтрализации этого нежелательного явления применяют три метода:

- модуляцию осуществляют в кварцевом автогенераторе;
- применяют косвенный метод модуляции, т. е. преобразование фазовой модуляции в частотную согласно схеме рис. 12,7,в;
- стабилизируют частоту автогенератора, к которому подключен частотный модулятор, с помощью системы автоматической подстройки частоты (см. гл. 6).

Два первых метода обеспечивают получение сравнительно малого значения девиации частоты и поэтому они применяются, в основном, при узкополосной ЧМ, когда девиация частоты не превышает нескольких кГц. Третий метод позволяет обеспечить и малую нестабильность частоты, и требуемое, в том числе и большое, значение девиации частоты. Именно этот метод используется в многочастотных синтезаторах (см. § 6.5).

12.3. Частотная и фазовая модуляция дискретных сообщений

При передаче дискретной, в том числе цифровой кодированной информации – комбинации двоичных сигналов, состоящей из логических 1 и 0, модуляцию также называют манипуляцией сигнала, а устройство, реализующее данный процесс как модулятором, так и манипулятором. Кроме того, процесс манипуляции называют также телеграфным режимом работы, соответственно заменяя название АМ на АТ, ЧМ на ЧТ, ФМ на ФТ. Три названных метода манипуляции высокочастотного сигнала имеют разный уровень помехоустойчивости, определяемую как вероятность ошибки принятого символа на выходе приемника от соотношения мощностей полезного сигнала и белого шума на входе демодулятора. Данная проблема обсуждается ниже в гл. 13.

Поскольку метод амплитудной манипуляции (АМ) по помехоустойчивости существенно уступает двум другим, то в современных системах радиосвязи используют, в основном, только два метода манипуляции: частотный (ЧМ) и фазовый (ФМ). Причем в качестве ФМ обычно используют ее разновидность – относительную фазовую модуляцию (ОФМ), называемую также фазоразностной. При ОФМ при передаче логической «1» фаза несущего колебания скачком изменяется на $\Delta\varphi$, например, на π, по отношению к фазе предыдущего бита, а при передаче логического «0» – фаза остается той же, что и у предыдущего бита.

Общим для обоих видов манипуляции (ЧМ и ФМ) является скорость передачи сообщения V, равная количеству передаваемых элементарных посылок (бит) в секунду (бит/с=бод), или длительность элементарной посылки $\tau=1/V$ (рис. 12,10,а). Кроме того, ЧМ характеризует дискрет частоты $\Delta F=F_1-F_2$, а ФМ–девиация или дискрет фазы $\Delta\varphi$, позволяющие различать логические 1 и 0 (рис. 12,10,б, в).

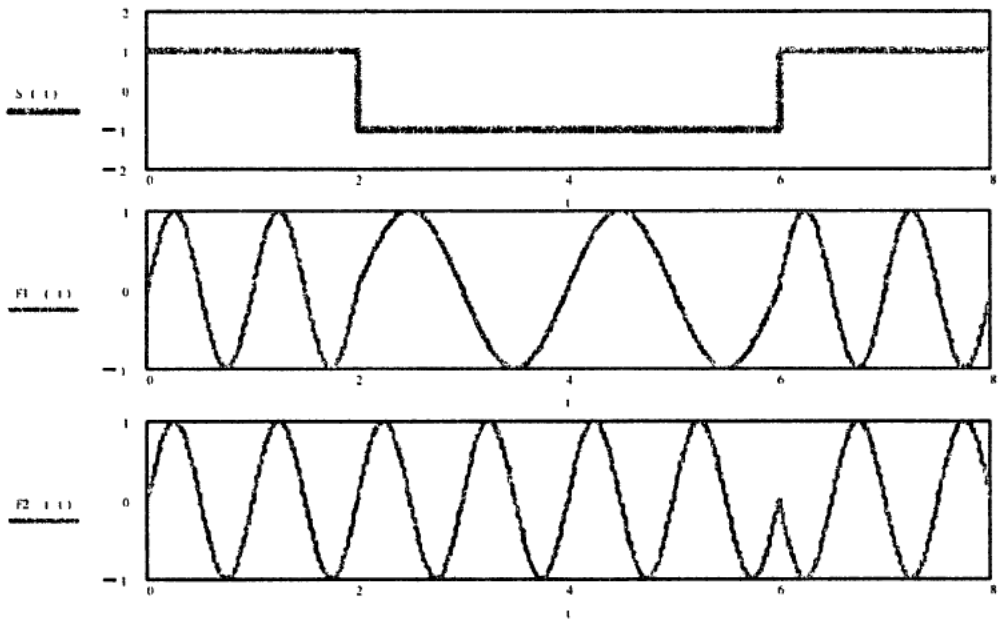


Рис. 12.10

Фазовая манипуляция (ФМ). В зависимости от дискрета фазы $\Delta\varphi$ наиболее часто используются следующие разновидности ФМ, приведенные в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Значение $\Delta\varphi$	Русское название	Международное название	Сокращенное название
π	Бинарная ФМ	Binary Phase Shift Keying	BPSK
$\pi/2$	Квадратурная ФМ	Quadrature Phase Shift Keying	QPSK
$\pi/2$	Квадратурная ФМ со смещением	Offset Quadrature Phase Shift Keying	OQPSK

При бинарной ФМ возможно два значения начальной фазы сигнала: 0 или π, что позволяет различить единичный бит информации: «1» или «0».

При квадратурной модуляции возможно четыре значения начальной фазы сигнала: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ или при смещении первого значения фазы на $\pi/4$ другая комбинация: $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$. Поэтому здесь можно различить комбинацию из двух битов информации согласно табл. 12.2.

Таблица 12.2

Кодовая комбинация	ФМ без смещения	ФМ при смещении на $\pi/4$	ЧМ
11	0	$\pi/4$	F_1
01	$\pi/2$	$3\pi/4$	F_2
10	π	$5\pi/4$	F_3
00	$3\pi/2$	$7\pi/4$	F_4

В результате при квадратурной ФМ, объединяя нечетный бит с четным или одновременно передавая битовые комбинации от двух источников, можно по сравнению с бинарной ФМ в два раза увеличить объем передаваемой информации за тот же по длительности сеанс связи. Смещение по начальной фазе осуществляется с целью лучшего различия одного символа от другого. Так, например, 1-й символ, определяемый с помощью N бит (в частности, N=8 или 16) передается без начального смещения фазы, 2-й символ – со смещением, 3-й символ – снова без смещения и т. д. (см. табл. 12.2). Формирование ФМ сигнала как бинарного, так квадратурного вида возможно с помощью процессора по специальной программе.

Частотная манипуляция (ЧМ). Применение одноступенчатой модуляции не позволяет во многих случаях реализовать преимущества ЧМ и ФМ. Это связано с тем, что в идеальном случае полоса пропускания радиоприемника должна быть равна спектру принятого сигнала. Практически данное требование из-за нестабильности частоты несущей радиопередатчика и частоты гетеродина радиоприемника реализовать не удается: полосу пропускания с учетом названных нестабильностей частоты прихо-

дится расширять, что снижает помехоустойчивость. Поэтому более продуктивным оказывается двухступенчатая модуляция, при которой логические 1 и 0 модулируют сначала поднесущую сравнительно низкой частоты, а затем этой поднесущей модулируют частоту несущей радиопередатчика. Рассмотрим более подробно такой метод двухступенчатой модуляции на примере ЧМ–ЧМ, осуществляемой согласно структурной схеме, приведенной на рис. 12.11. В 1-й ступени модуляции логической 1 присваивается частота F_1, а логическому 0 – F_2 (рис. 12.11).

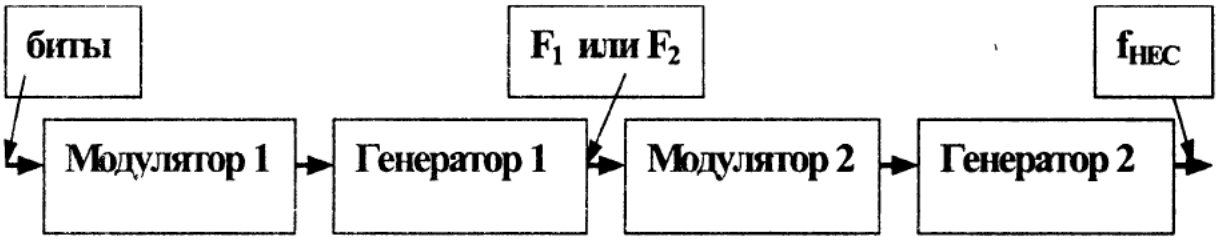


Рис. 12.11

Данный сигнал во 2-й ступени модулирует с девиацией $\Delta f_Д$ частоту несущей радиопередатчика. В радиоприемнике такой сигнал дважды проходит процедуру демодуляции: сначала выделяется частота поднесущей, а затем – исходное цифровое сообщение – битовая последовательность (рис. 12.10,а). При такой двухступенчатой модуляции полосы пропускания фильтров, устанавливаемых в канале поднесущей частоты, удается сузить до ширины спектра передаваемого сообщения и тем самым повысить помехоустойчивость.

Рассмотрим, как следует выбирать частоты F_1 и F_2. Во-первых, следует обеспечить "плавный" переход, т. е. без скачка фазы, от сигнала с частотой F_1 к сигналу с частотой F_2 так, как показано на рис. 12,10,б. Это вызвано тем, что при скачке фазы происходит «размытие» мгновенного спектра сигнала, что снижает помехоустойчивость радиоприема и создает помехи другим системам радиосвязи. Во-вторых, значения этих частот, а точнее соотношение между ними, должно быть таково, чтобы энергетический спектр промодулированного сигнала был бы сконцентрирован в возможно узкой полосе или, иначе говоря, не был бы «размыт». В третьих, сигналы с частотами F_1 и F_2 должны быть ортогональны. Ортогональными называют сигналы, неперекрывающиеся во времени и с несовпадающими спектральными составляющими в частотном спектре.

Введем понятие среднего значения частоты поднесущей: $F_0=0,5(F_1+F_2)$ и разности или дискрета частоты $\Delta F=F_1-F_2$. Тогда для частот, определяющих соответственно логические 1 и 0, запишем:

для «1»: $F_1=F_0+0,5\Delta F=KF_T$,
для «0»: $F_2=F_0-0,5\Delta F=NF_T$.

где $F_T=1/\tau$ – частота следования элементарных посылок;

K, N – числа, показывающие сколько периодов частоты поднесущей укладывается внутри элементарной посылки, т. е. внутри одного бита, причем K>N (рис. 12.10,б).

Для дискрета частоты имеем: $\Delta F=F_1-F_2=F_T(K-N)$.

Фазы сигналов внутри элементарных посылок на протяжении одного бита изменяются по закону:

Внутри бита логической «1»: $\varphi_1(t)=2\pi F_1 t=2\pi F_0 t+\Delta\varphi(t)$,

внутри бита логического «0»: $\varphi_2(t)=2\pi F_2 t=2\pi F_0 t-\Delta\varphi(t)$,

где дополнительное изменение фазы сигнала:

$\Delta\varphi(t)=2\pi*0{,}5\Delta F t=\pi F_T(K-N)t$.

К концу элементарной посылки, т. е. при $t=\tau=1/F_T$, дополнительный набег фазы на протяжении одного бита составит:

для логической «1»: $\Delta\varphi=+\pi(K-N)$;

для логического «0»: $\Delta\varphi=-\pi(K-N)$,

При K=1+N значение $\Delta\varphi=+\pi$ для «1» и $\Delta\varphi=-\pi$ для «0». Такой случай при K=4 и N=3 представлен на рис. 12.12,а, где «1» $-F_1=4F_T$; «0» $-F_2=3F_T$.

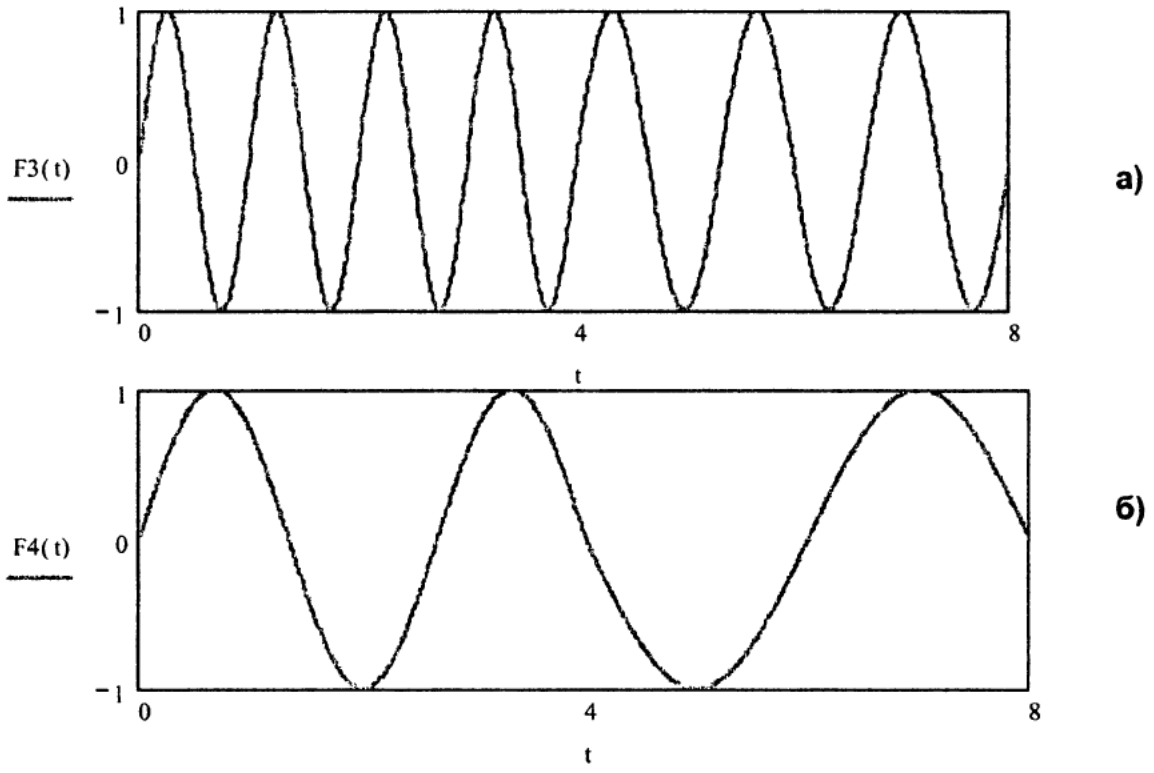


Рис. 12.12

Можно, например, выбрать следующие значения параметров:

τ=1,28 мс или F_T=781,25 Гц, F_1=3125 Гц, F_2=2343,75 Гц.

Определим спектр рассматриваемого сигнала. Для этого разложим в ряд Фурье периодическую последовательность прямоугольных импульсов – огибающую этого сигнала (рис. 12.10,а):

$$y(\omega t)=\frac{2A}{\pi}(\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 3\Omega t+...)\ . \qquad (12.22)$$

Рассматривая частотно-модулированный сигнал (рис. 12.12,а) как сумму двух амплитудно-модулированных сигналов, получим с учетом последней зависимости для огибающей спектр сигнала с периодически повторяющимся импульсами, заполненными сигналами с частотой F_1 и F_2. При K=1+N такой спектр представлен на рис. 12.13 (сплошные линии относятся к сигналу с частотой F_1, пунктирные – F_2). Из рассмотрения полученного спектра следует, что основная энергия сигнала сосредоточена в полосе $\Delta F=5F_T$, а выбранные сигналы ортогональны.

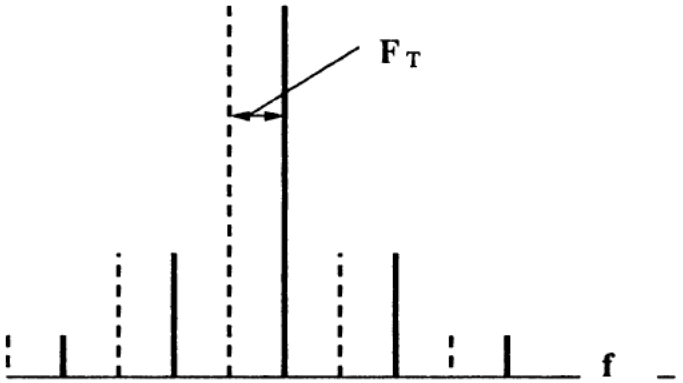


Рис. 12.13

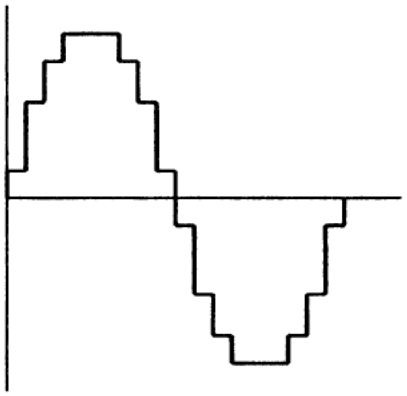


Рис. 12.14

Такой спектр можно еще более сузить при K=1,5 и N=1, т. е. при логической «1», представленной тремя полупериодами сигнала с частотой F_1 внутри одного бита, и двумя полупериодами частоты F_2 внутри бита для логического «0» (рис. 12,12,б). При этом согласно полученному выше выражению набег фазы на протяжении одного бита составит для «1»: $\Delta\varphi=+\pi/2$ для «0»: $\Delta\varphi=-\pi/2$. Такой случай частотной манипуляции называется манипуляцией с минимальным сдвигом (имеется в виду минимальный сдвиг фазы) – способ MSK (Minimum Shit Keying).

Сформировать сигналы при частотной манипуляции, приведенные на рис. 12.12, можно с помощью процессора по специальной программе. При этом может быть получен квазисинусоидальный сигнал, составленный из ступенек (рис. 12.14). Другой способ формирования сигнала при K=1,5 и N=1, т. е. с минимальным сдвигом, представлен на рис. 12.15 [36]. Данный способ в отличие от MSK называется GMSK, поскольку в нем осуществляется дополнительная фильтрация модулирующей последовательности элементарных посылок узкополосным гауссовским фильтром, что добавляет в название букву G. Рассмотрим работу этой схемы.

Сначала входная последовательность N-битовых прямоугольных импульсов – цифровой сигнал – проходит через гауссовский фильтр (G) с шириной полосы пропускания по уровню 3 дБ, равной $0,3F_T$, где F_T/τ – частота входной последовательности (рис. 12.12). Включение такого фильтра, имеющего амплитудно-частотную характеристику в виде гауссовской кривой, позволяет сгладить входной сигнал в точках излома и уменьшить «лепестки» спектра, а следовательно, и помехи соседним каналам связи. Затем входная последовательность «расщепляется» на два потока: первый состоит из нечетных битов, второй – четных.

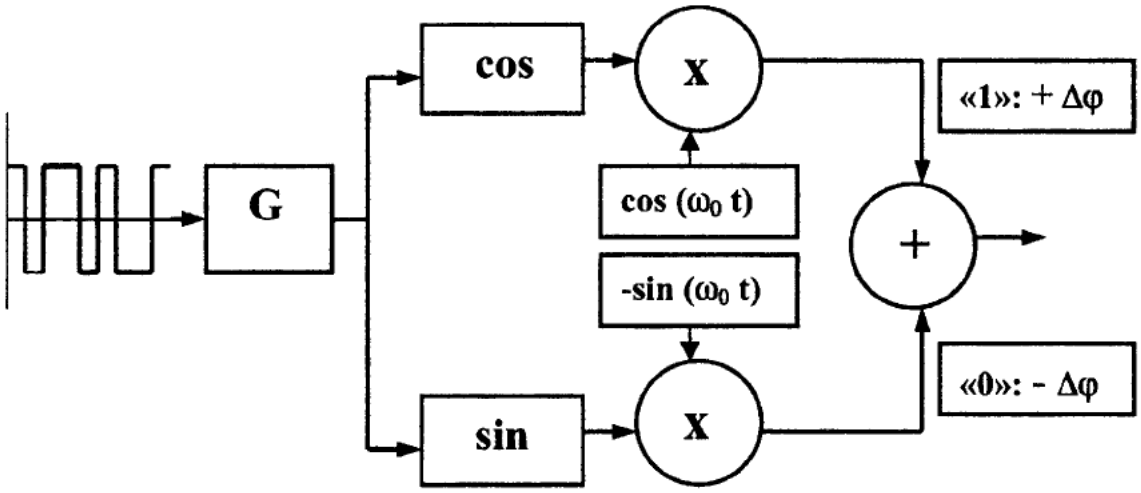


Рис. 12.15

Сигнал на выходе модулятора является результатом перемножения модулирующих сигналов квадратурных каналов с поднесущими частотой F_0 и суммированием полученных произведений:

$$y(t) = \pm\cos(\pi \cdot t / 2\tau)\cos(2\pi \cdot F_0 t) \pm \sin(\pi \cdot t / 2\tau)\sin(2\pi \cdot F_0 t) =$$

$$= \pm\cos(2\pi \cdot F_0 t \pm \pi \cdot t / 2\tau), \quad \text{где } (n-1)\tau \le t \le n\tau.$$

Знаки в данном выражении определяются согласно алгоритму таким образом, что текущая фаза модулированного сигнала:

внутри бита логической «1»: $\varphi_1(t)=2\pi F_1 t=2\pi F_0 t+\Delta\varphi(t)$;

внутри бита логического «0»: $\varphi_2(t)=2\pi F_2 t=2\pi F_0 t-\Delta\varphi(t)$,

где дополнительное изменение фазы сигнала $\Delta\varphi(t)=\pi t/2\tau$.

К концу элементарной посылки, т. е. при $t=\tau=1/F_T$, дополнительный набег фазы на протяжении одного бита составит: для логической «1»: $\Delta\varphi=+\pi/2$, для логического «0»: $\Delta\varphi=-\pi/2$.

Мгновенная частота сигнала как производная от фазы:

внутри бита логической «1»: $F_1=F_0+F_T/4=\text{const}$;

внутри бита логического «0»: $F_2=F_0-F_T/4=\text{const}$.

Изменение общего знака перед выражением y(t), что равносильно повороту фазы сигнала на π позволяет сохранить непрерывность сигнала при переходе от одного бита к другому и связанное с этим изменение частоты сигнала с F_1 на F_2 или обратно (рис. 12.12,б). Таким образом, схема рис. 12.15 позволяет реализовать частотную внутрибитовую модуляцию сигнала со значениями K=1,5 и N=1.

При ЧМ, как и при квадратурной ФМ, также можно попарно передавать биты, используя при этом четыре значения частоты, и тем самым вдвое увеличить объем информации (см. табл. 12.2).

12.4. Амплитудная модуляция

При амплитудной модуляции в соответствии с законом передаваемого сообщения меняется амплитуда модулируемого сигнала. Поэтому при тестовом тональном модулирующем сигнале (12.5) имеем для высокочастотного модулируемого сигнала:

$$u(t) = U_0(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t, \qquad (12.23)$$

где $m=U_M/U_0 \le 1$ – коэффициент глубины амплитудной модуляции; ω_0 – частота несущих колебаний.

По помехоустойчивости амплитудная модуляция существенно уступает частотной и фазовой и поэтому в современных радиотехнических системах практически не применяется. Однако, в давно действующих системах, работающих в длинно-, средне- и коротковолновых диапазонах волн, амплитудный вид модуляции является доминирующим.

Амплитудная модуляция осуществляется в генераторах с независимым возбуждением, в основном, в выходном или предоконечном каскадах путем изменения напряжения на одном или нескольких электродах электронного прибора. В соответствии с этим в транзисторных генераторах различают коллекторную, базовую и эмиттерную амплитудную модуляцию, а в ламповых – анодную, анодно-экранную, сеточную и катодную. При модуляции только предоконечного каскада выходной ВЧ усилитель мощности работает в режиме усиления модулированных колебаний.

Общая структурная схема усилительного тракта радиопередатчика, относящаяся ко всем способам амплитудной модуляции, изображена на рис. 12.16.

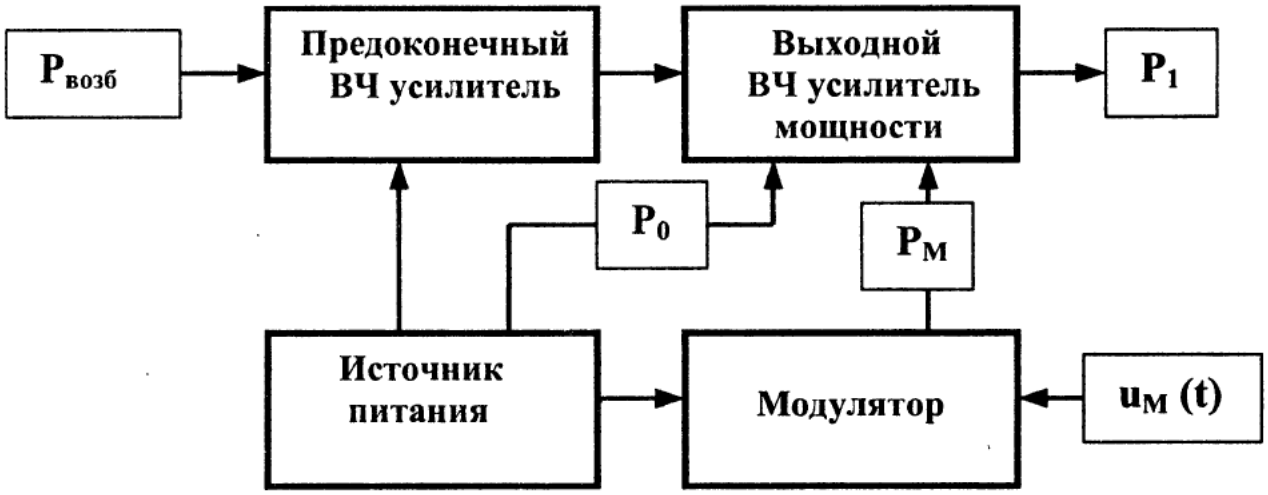


Рис. 12.16

Передаваемое сообщение поступает на вход модулятора и после усиления модулирующий сигнал мощностью P_M поступает на ВЧ усилитель. Требуемое значение P_M зависит от мощности высокочастотных колебаний P_1, коэффициента m и способа модуляции. Требуемая мощность источника питания P_0 также определяется данными параметрами. При кол-

лекторной и анодной амплитудной модуляции три данные мощности связаны следующими соотношениями: $P_M=0{,}5m^2P_0$, $P_1=\eta_\Gamma P_0$, где η_Γ – КПД генератора.

При любом способе амплитудной модуляции различают три основных режима работы: молчания (или несущей), максимальный и минимальный. При модуляции режим модулируемого высокочастотного каскада непрерывно меняется. Максимальному режиму соответствует максимальное значение амплитуды колебаний, минимальному режиму – минимальное, в режиме молчания модуляция отсутствует (рис. 12.17).

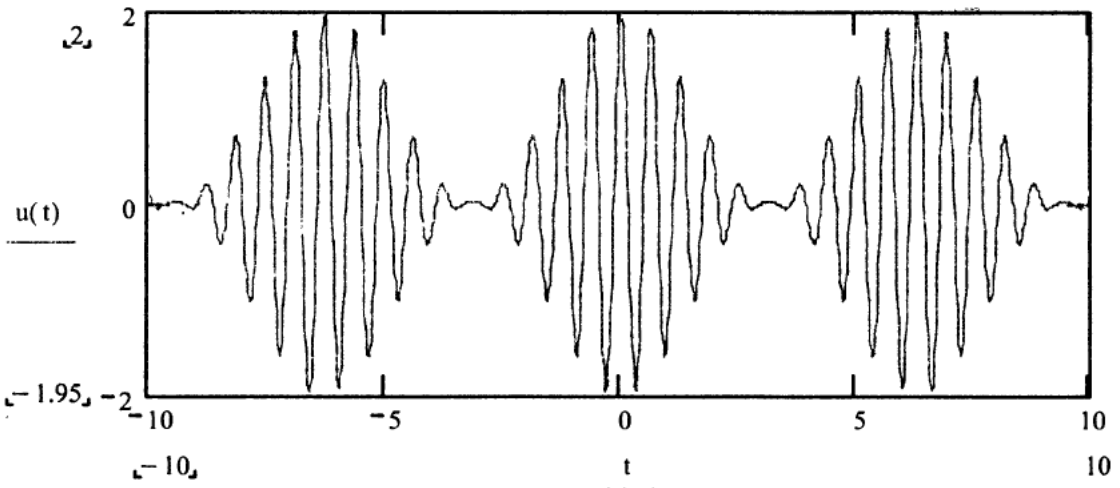


Рис. 12.17

Амплитуда высокочастотных колебаний и мощность при тональной амплитудной модуляции меняются по закону:

$$U_m = U_{МОЛ}(1+m\cos\Omega t)\ ,\ \ P_1 = P_{1МОЛ}(1+m\cos\Omega t)^2\ .$$

Согласно данным выражениям мгновенные мощности высокочастотного сигнала в трех режимах – молчания, максимальном и минимальном – связаны соотношениями:

$$P_{1МАКС} = P_{1МОЛ}(1+m)^2\ ,\ \ P_{1МИН} = P_{1МОЛ}(1-m)^2,$$

называют также пиковой мощностью.

Кроме мгновенных важна и средняя мощность ВЧ колебаний за период модулирующего сигнала Т:

$$P_{1СР} = \frac{1}{T}\int_0^T P_{1МОЛ}(1+m\cos\Omega t)^2\,dt = (1+\frac{m^2}{2})P_{1МОЛ}\cdot \qquad (12.24)$$

Из трех последних формул при m=1 получим:

$P_{1МАКС}=4P_{1МОЛ}$, $P_{1МИН}=0$, $P_{1СР}=1{,}5P_{1МОЛ}$. Отметим, что пиковая мощность генератора при амплитудной модуляции должна в 4 раза превосходить мощность в режиме несущей (молчания).

Качество амплитудной модуляции, определяемое уровнем нелинейных искажений модулирующего сигнала, во многом определяется статиче-

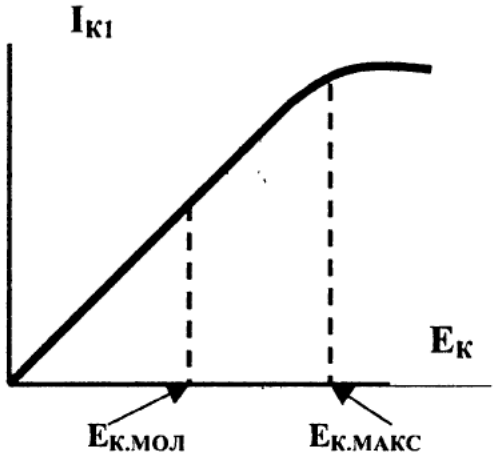


Рис. 12.18

ской модуляционной характеристикой– зависимостью 1-й гармоники тока ВЧ модулируемого генератора от постоянного напряжения на электроде электронного прибора, на который подается модулирующий сигнал. Так, например, при коллекторной модуляции это есть зависимость 1-й гармоники коллекторного тока ВЧ транзисторного генератора I_{K1} от постоянного напряжения на коллекторе E_K в динамическом режиме работы (рис. 12.18). Чем меньше график $I_{K1}(E_K)$ отклоняется от прямой линии в пределах $0 \le E_K \le E_{K.МАКС}$, тем меньше уровень нелинейных искажений передаваемого сообщения за счет амплитудной модуляции.

Представим выражение (12.23) в виде:

$$u(t) = U_0 \cos\omega_0 t + 0{,}5mU_0 \cos(\omega_0 - \Omega)t + 0{,}5mU_0 \cos(\omega_0 + \Omega)t, \qquad (12.25)$$

из которого следует, что спектр АМ колебания состоит из трех составляющих с частотами: ω_0(совпадает с частотой несущей), $\omega_0-\Omega$ (нижняя боковая), $\omega_0+\Omega$ (верхняя боковая), мощности между которыми распределены в пропорции: 1: $0{,}5m^2$: $0{,}5m^2$. Согласно (12.25) ширина спектра АМ-колебания, построенного на рис. 12.19, $\Delta f_{СП}=2F$. Следовательно, в соответствии с (12.2), имея базу B=1, сигнал при АМ-модуляции относится к классу узкополосных.

Согласование модулятора с нагрузкой – ВЧ генератором (рис. 12.16) – осуществляется обычно с помощью трансформатора. Однако, в транзисторных радиопередатчиках возможна и бестрансформаторная схема соединения генератора с модулятором, приведенная на рис. 12.20.

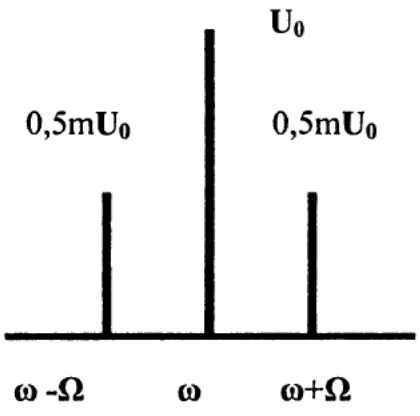


Рис. 12.19

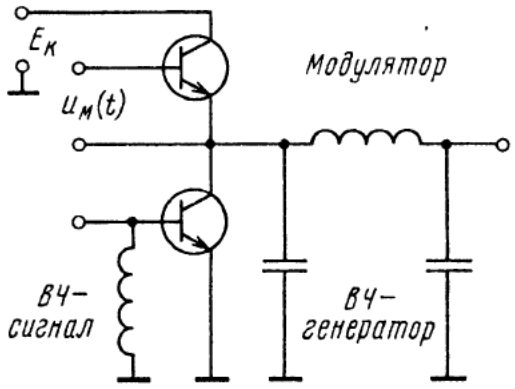


Рис. 12.20

Необходимость обеспечения пиковой мощности, в 4 раза превосходящую мощность в режиме молчания, и соблюдение линейности статической модуляционной характеристики (рис. 12.18) – два сложно выполнимых требования, предъявляемые к радиопередатчикам с амплитудной модуляцией.

Глава 13. ПРИЕМ РАДИОСИГНАЛОВ

13.1. Действие помех при приеме радиосигналов и структурная схема радиоприемника

Первый вопрос, на который необходимо ответить при анализе комплекса проблем, связанных с получением достоверной информации при приеме, состоит в определении мощности радиосигнала на входе радиоприемного устройства. Величина этого параметра колеблется в значительных пределах в зависимости от мощности, излучаемой антенной радиопередатчика, диапазона частот, ширины спектра принимаемого сигнала, дальности радиотрассы, затухания сигнала в атмосфере и многих других факторов. Поэтому рассмотрим частный пример для определения порядка величин, с которыми приходится иметь дело при приеме радиосигналов.

Предположим, что точечный источник, расположенный вне пределов Земли, излучает сигнал узким лучом мощностью $P_{ИЗЛ}$. Тогда на расстоянии R на площадке размером $S_{ПР}$ мощность сигнала составит:

$$P_C = P_{ИЗЛ} S_{ПР} / 4\pi R^2 = P_{ПЕР} K_A S_{ПР} / 4\pi R^2, \qquad (13.1)$$

где $P_{ИЗЛ}=P_{ПЕР}K_A$, $P_{ПЕР}$ – мощность радиопередатчика; K_A – коэффициент усиления антенны, характеризующий ее направленные свойства – способность излучать сигнал узким лучом в требуемом направлении.

Предположим, что радиопередатчик мощностью $P_{ПЕР}$=25 Вт излучает радиосигнал со спутника, находящегося на геостационарной орбите, для которой R=36000 км. Пусть остронаправленная спутниковая антенна создает узкий луч с телесным углом в 10 градусов, которому соответствует значение K_A=320, а на Земле приемная антенна с параболическим отражателем имеет площадь $S_{ПР}$=2м^2. Подставив данные значения в (13.1), получим $P_C=10^{-12}$ Вт.

Для уверенного приема полезного радиосигнала необходимо, чтобы его мощность превосходила мощность мешающих сигналов, коротко называемых помехами. Источники последних многочисленны и разнообразны – от других радиостанций и объектов, связанных с преобразованием и передачей электрической энергии, до излучений космического характера. Примем во внимание помехи, связанные с собственным тепловым шумом радиоприемника и приходящие по радиоканалу. Величина этих помех определяется согласно выражению:

$$P_Ш = kT_0 \Delta f (T_{ШЛ} + T_{ШПРМ}) / T_0, \qquad (13.2)$$

где $kT_0=4*10^{-21}$ Вт/Гц – спектральная мощность шума при стандартной температуре $T_0=290^0$K,

$T_{ШЛ}$ – эквивалентная температура шума канала радиосвязи;

$T_{ШПРМ}$ – эквивалентная температура шума приемника, пересчитанная к его входу;

Δf – ширина спектра принимаемого сигнала.

Примем в рассматриваемом примере следующие значения величин, входящих в формулу (13.2): $T_{Шл}+T_{ШПРМ.}=800^0$, $\Delta f=10МГц=10^7Гц$. Подставив данные значения в (13.2), получим $P_Ш=10^{-13}Вт$.

Таким образом, полученная в рассматриваемом примере мощность полезного сигнала $P_C=10^{-12}Вт$ вполне сравнима с мощностью помех $P_Ш=10^{-13}Вт$, источником которых является тепловой шум радиоприемника и канал радиосвязи. Аналогичная ситуация, связанная с наличием помех на входе радиоприемного устройства, которые сопоставимы с мощностью полезного сигнала, свойственна большинству радиотехнических систем. Отсюда вытекает первая проблема при приеме радиосигналов – необходимость принимать во внимание одновременное воздействие на радиоприемное устройство полезного сигнала и помехи и требование по возможному уменьшению действия последней, снижающей получение достоверной информации.

При всем разнообразии помех их классификация может быть произведена по трем основным признакам: по месту расположения источника, по характеру взаимодействия с полезным сигналом и по структуре. Остановимся более подробно на данной классификации.

По месту расположения источника помех их можно разбить на две основные группы: внешние и внутренние. Источники внешней помехи располагаются вне радиоприемного устройства и воспринимаются сначала приемной антенной, а затем поступают на входной ВЧ или СВЧ усилитель. Непосредственное воздействие помех на другие каскады радиоприемного устройства, минуя антенну, в большинстве случаев можно исключить за счет тщательной экранировки всей конструкции. К источникам внешней помехи относятся сигналы, приходящие от других радиотехнических средств (например, на современном самолете располагается до 20 радиотехнических устройств различного назначения) и разнообразных промышленных объектов электроэнергетического типа. К внешним помехам также относятся радиоизлучения Галактики, Солнца, поверхности Земли и атмосферного происхождения.

Источником внутренней помехи являются собственные шумы радиоприемника, в первую очередь, создаваемые электронными приборами входного ВЧ или СВЧ усилителя. Физическая природа внутренних шумов связана с тем, что в любом сопротивлении, микросхеме, транзисторе и иных элементах схемы помимо упорядоченного движения электрических зарядов под воздействием внешнего сигнала, происходит и хаотическое движение элементарных частиц, создающих флуктуационный, шумовой сигнал. Данная помеха относится к стационарным случайным процессам, имеет равномерный энергетический спектр в широкой полосе частот и называется белым шумом. Ее уровень, как было показано в рассмотренном выше примере, измеряется с помощью эквивалентной температуры шума.

По характеру взаимодействия с полезным сигналом помехи делятся на две группы: аддитивные и мультипликативные. Аддитивные помехи суммируются с полезным сигналом, при ней на вход радиоприемного устройства поступает сигнал:

$$u_{ВХ}(t)=u_C(t)+u_П(t), \qquad (13.3)$$

где $u_C(t)$ – полезны сигнал; $u_П(t)$ – помеха.

Мультипликативная помеха модулирует полезный сигнал и поэтому их взаимодействие отображается соотношением: $u_{ВХ}(t)=u_{П}(t)*u_{С}(t)$.

По структуре помехи делятся на сосредоточенные (к ним, в частности, относятся непрерывная синусоидальная и импульсная помехи) и относящиеся к случайным процессам, в первую очередь, стационарным с равномерным энергетическим спектрам. Такая помеха, как было сказано выше, называется белым шумом.

Рассмотрим передачу по каналу радиосвязи битовой информации в двоичном коде (рис. 12.10) и действие белого шума. После детектирования сигнала (13.3) установим пороговое устройство, решающее, какой единичный бит информации принят: «1» или «0». Считаем, что при превышении порога принят бит «1» , а при сигнале меньшем порога – «0». С учетом действия помехи возможно существование четырех ситуаций (рис. 13.1):

- помеха не помешала принятию правильного решения при приеме единичного бита «1»;
- помеха не помешала принятию правильного решения при приеме единичного бита «0»;
- наличие отрицательного выброса в помехе привело к снижению суммарного сигнала (13.3) ниже уровня порога и потому принято ошибочное решение о принятии «0» вместо «1»;
- наличие положительного выброса в помехе привело к превышению суммарным сигналом (13.3) уровня порога и потому принято ошибочное решение о принятии «1» вместо «0».

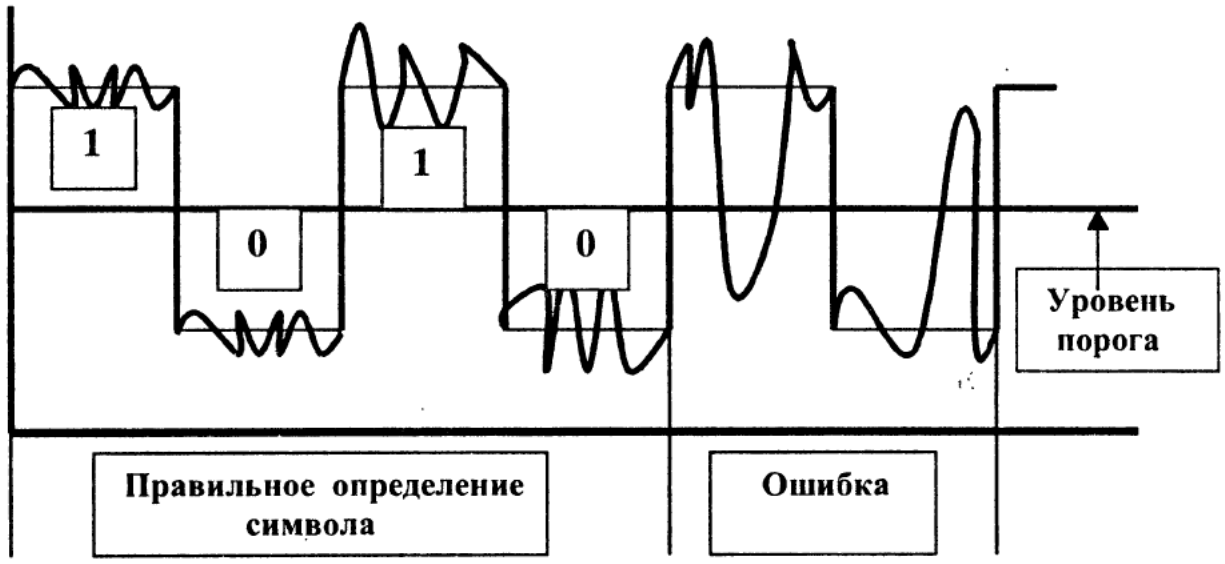


Рис. 13.1

Таким образом, как бы ни была мала помеха, всегда имеется опасность, что какой-то бит информации будет принят ошибочно. По данной причине вероятность ошибки принятого символа и максимально возможная пропускная способность канала связи зависят от соотношения мощности сигнала и помехи $P_С/P_П$. Так при передаче по каналу битовой информации в двоичном коде и действии белого шума эта зависимость определяется соотношением, полученным Шенноном [37]:

$$C = \Delta F \log_2(1 + P_C / P_Ш) \text{ , } [бит/с] \text{ ,} \qquad (13.4)$$

где ΔF – полоса пропускания канала связи, Гц; $P_С$, $P_Ш$ – мощности полезного сигнала и белого шума в канале связи.

Так, например, при ΔF=1000 Гц и $P_С/P_Ш$=10 дБ, т. е. в 10 раз по мощности, согласно (13.4) С=3,5 кбит/с, а при $P_С/P_Ш$=20 дБ, т. е. в 100 раз по мощности: С=6,7 кбит/с.

Однако реализовать предельные возможности канала связи по нескольким причинам весьма сложно, особенно при необходимости одновременного доступа в этот канал большого числа абонентов. При этом следует, во-первых, уметь различать абонентов друг от друга и, во-вторых, исключить или свести к минимуму влияние одного абонента на другой, т. е. не создавать в канале связи взаимных помех. Данная проблема обсуждается ниже в гл. 15.

В радиотехнических системах передачи информации после приема, усиления и обработки высокочастотного сигнала на выходе радиоприемного устройства должно быть выделено сообщение, которое поступило на вход модулятора радиопередатчика (рис. 13.2).

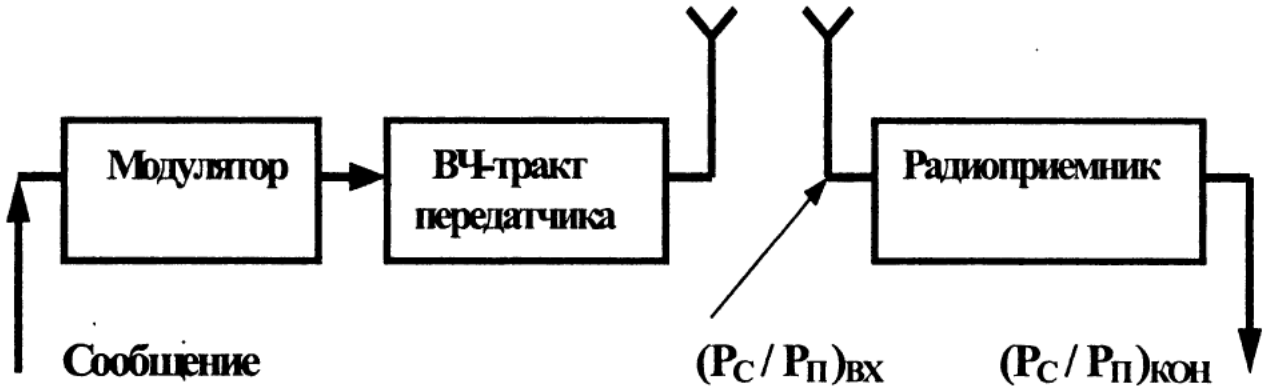


Рис. 13.2

Из-за помех точного соответствия между переданным и принятым сообщением получить невозможно. Качество принятого сообщения в зависимости от его характера оценивается по-разному. Так в цифровых системах передачи битовой информации это качество определяется вероятностью ошибки принятого символа. Например, если эта вероятность составляет 10^{-5}, то это означает, что из ста тысяч переданных бит один может быть ошибочным. При передаче речевой информации качество принятого сообщения оценивается по его разборчивости, т. е. по количеству правильно понятых слов, смысл которых не искажен. При передаче телевизионного сигнала вводится несколько критериев, по которым оценивается качество принятого изображения на экране телевизора. Названные разнородные критерии при передаче аналоговых сообщений являются функцией отношения мощности сигнала к мощности помехи (шума) на выходе радиоприемного устройства: $(P_С/P_П)_{КОН}$ (рис. 13.2).

Таким образом, конечная цель анализа приема радиосигнала при заданных параметрах передаваемого сообщения и канала радиосвязи

состоит в определении не только требуемой мощности полезного сигнала на входе радиоприемного устройства P_C, но и отношения этой мощности к мощности помехи $(P_C/P_П)_{ВХ}$ для получения требуемого отношения на выходе $(P_C/P_П)_{КОН}$ или обеспечения иного критерия. Данная задача решается в рамках структурной схемы радиоприемного устройства, представленный на рис. 13.3.

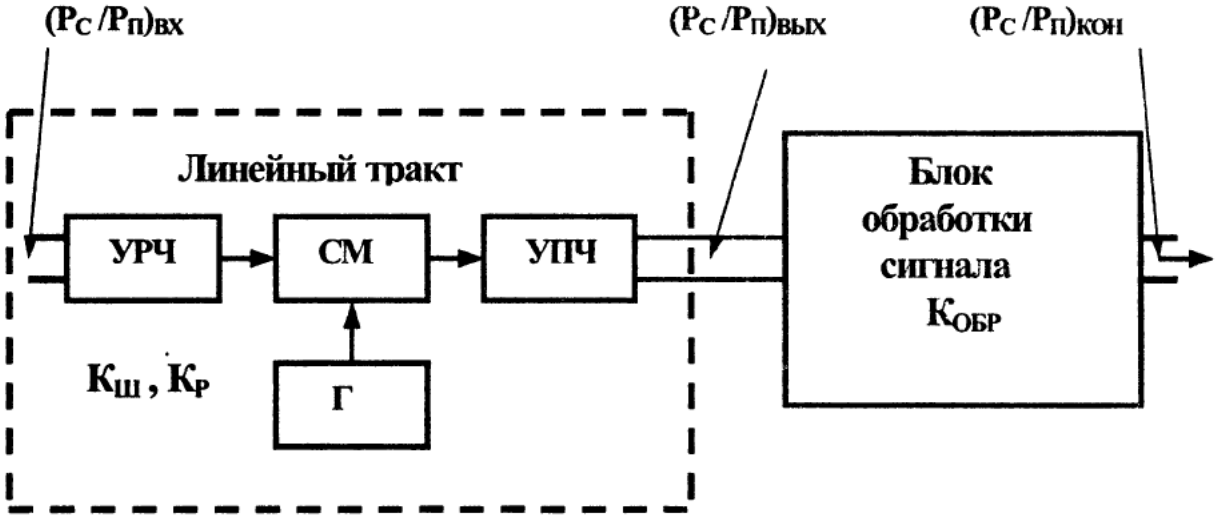


Рис. 13.3

Схема разбита на две основные части: линейный тракт и блок обработки сигнала. Остановимся более подробно на их назначении.

В линейном тракте происходит усиление сигнала по мощности с $P_{СВХ}$ до $P_{СВЫХ}$. Значение $P_{СВХ}$ определяется мощностью сигнала, приходящего на вход радиоприемника от антенны (в рассмотренном выше примере эта величина составила 10^{-12}Вт), $P_{СВЫХ}$ – требуемой мощностью для нормальной работы блока обработки сигнала. Отношение $К_Р=P_{СВЫХ}/P_{СВХ}$ – есть коэффициент усиления линейного тракта по мощности, его значение может достигать больших величин – вплоть до 100…120дБ, т. е. $10^{10}…10^{12}$ раз по мощности.

Второй параметр, характеризующий линейный тракт, есть коэффициент шума $К_Ш=[(P_C/P_П)_{ВХ}]/[(P_C/P_П)_{ВЫХ}]$ при стандартном источнике шума (см.§13.5). Поскольку в радиоприемнике к внешним шумам всегда прибавляются внутренние, то $К_Ш>1$. Чем меньше значение $К_Ш$, тем более качественным является радиоприемник.

Третьим параметром является полоса пропускания $\Delta f_{ПР}$ линейного тракта, определяемая шириной спектра принятого радиосигнала.

Помимо трех названных, есть еще ряд параметров, характеризующих работу радиоприемника. К ним, в первую очередь, относится избирательность по соседнему и побочным каналам, т. е. возможное исключение приема сигнала на всех частотах, кроме частоты несущей.

В линейном тракте помимо усиления сигнала по мощности происходит также преобразование его частоты, как правило, в сторону уменьшения. Два сигнала – пришедший с антенны f_C и предварительно усиленный каскадами УРЧ (усилитель радиочастоты) и сигнал гетеродина $f_Г$ (автогенератора) – подаются на смеситель, являющийся нелинейным элементом. В результате взаимодействия двух сигналов на выходе смесителя образуется комбинационный спектр, содержащий частоты $nf_C \pm mf_Г$, где n, m – целые числа, отличные от 0. (Механизм такого взаимодействия двух сигна-

лов в нелинейном устройстве рассмотрен в § 4.6). Из данного спектра с помощью полосового фильтра выделяется разностная частота, равная $f_{ПР}=f_C-f_Г$ или $f_{ПР}=f_Г-f_C$. Значение $f_{ПР}$ выбирается из необходимости подавления с помощью УРЧ так называемого зеркального канала, отстоящего от принимаемой частоты на величину, равную $2f_{ПР}$. Часто производится двойное, а иногда даже тройное преобразование частоты принятого сигнала. Следует отметить, что преобразование частоты есть нелинейный процесс, при котором взаимодействуют два сигнала: принятый антенной и усиленный УРЧ (с амплитудой U_C, частотой f_C), и сигнал гетеродина (с амплитудой $U_Г$, частотой $f_Г$). Однако, в силу неравенства $U_C<<U_Г$ по отношению к "слабому" входному сигналу соотношения, определяющие его усиление, носят линейный характер, что и позволяет в целом тракт усиления сигнала называть линейным.

Назначение блока обработки сигнала состоит в получении требуемого отношения мощностей сигнала и помехи на его выходе $(P_C/P_П)_{КОН}$ или обеспечении иного критерия при заданном отношении мощностей тех же сигналов на входе (см. рис. 13.3). Данные отношения свяжем параметром, который назовем коэффициентом обработки аналогового сигнала: $K_{ОБР}=[(P_C/P_П)_{КОН}]/[(P_C/P_П)_{ВЫХ}]$.

Коэффициент $K_{ОБР}>1$ указывает, насколько отношение сигнал/помеха за счет обработки может быть улучшено на выходе блока по сравнению с тем же отношением на входе. При одинаковых условиях работы, т. е. объеме и скорости передаваемой информации, тот метод обработки аналогового сигнала и выбранный метод передачи информации лучше, при которых значение коэффициента $K_{ОБР}$ больше. Как будет показано ниже, с увеличением базы сигнала B, определяемой согласно (12.1)–(12.3), значение коэффициента $K_{ОБР}$ возрастает.

В целом радиоприемное устройство можно характеризовать с помощью параметра, которое назовем коэффициентом радиоприема, определив его через отношение мощностей полезного сигнала и помехи на выходе и входе (рис. 13.3) и выразив через коэффициенты шума и обработки аналогового сигнала:

$$K_{ПРМ}=\frac{(P_C/P_П)_{КОН}}{(P_C/P_П)_{ВХ}}=\frac{(P_C/P_П)_{КОН}}{(P_C/P_П)_{ВЫХ}}\Big/\frac{(P_C/P_П)_{ВХ}}{(P_C/P_П)_{ВЫХ}}=\frac{K_{ОБР}}{K_Ш},$$

$$\text{где}\quad K_{ОБР}=\frac{(P_C/P_П)_{КОН}}{(P_C/P_П)_{ВЫХ}},\quad K_Ш=\frac{(P_C/P_П)_{ВХ}}{(P_C/P_П)_{ВЫХ}}\quad - \qquad (13.5)$$

коэффициент обработки и коэффициент шума, соответственно.

При одинаковых условиях работы, т. е. протяженности радиотрассы, мощности радиопередатчика, объеме и скорости передаваемой информации, максимальное значение $K_{ОБР}$ и минимальное $K_Ш$ соответствуют оптимальному приему радиосигнала при передаче аналогового сообщения.

13.2. Оптимальный радиоприем двоичных сигналов

В зависимости от назначения системы и характера принимаемого сообщения на фоне действующих помех принимают различные критерии оптимального приема. В одних случаях таким критерием является обнаружение полезного сигнала, в других – измерение параметров этого сигнала, в третьем – различение (или разрешение) сигналов. Рассмотрим случай, когда за критерий оптимального приема принимается обнаружение полезного сигнала на фоне помех.

Пусть передается информация в виде двоичных сигналов из логических «1» и «0» (рис. 12.10). Помехой является белый шум. Канал радиосвязи имеет постоянные параметры, вследствие чего амплитуда и фаза принимаемого сигнала неизменны.

Логической «1» соответствует сигнал $u_{C1}(t)$, логическому «0» – $u_{C2}(t)$. Образцы обоих сигналов в приемном устройстве известны, но какой именно бит информации – «1» или «0» – принимается в данный момент – неизвестно. Поэтому сообщения в месте приема следует рассматривать как случайные величины, имеющие известные априорные распределения P(«1») и P(«0»). Обычно их принимают равными: P(«1»)=0,5, P(«0»)=0,5, т. е. в каждый данный момент с равной степенью вероятности может придти бит информации «1» или «0». Закон распределения помехи $u_П(t)$ считается нормальным, гауссовским. Таким образом, на вход приемника приходит смесь из полезного сигнала и помехи, для которого запишем:

$$u_{BX}(t)=u_{C1}(t)+u_П(t) \text{ или } u_{BX}(t)=u_{C2}(t)+u_П(t). \qquad (13.6)$$

При различных видах телеграфной работы (так выше в §12.3 названа модуляция при передаче двоичных сигналов) имеем:

- при амплитудной телеграфии: $u_{C1}(t)=U\cos(\omega t+\varphi_1)$, $u_{C2}(t)=0$;
- при частотной телеграфии: $u_{C1}(t)=U\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$, $u_{C2}(t)=U\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$;
- при фазовой телеграфии: $u_{C1}(t)=U\cos(\omega_1 t)$, $u_{C2}(t)=-U\cos(\omega_1 t)$.

Цель радиоприема состоит в анализе принятого сигнала $u_{BX}(t)$ в течение промежутка времени T_0 и в выделении переданного сообщения «1» или «0» из принятой смеси полезного сигнала и помехи. Наличие помехи и ограниченное время анализа не может сделать этот процесс абсолютно достоверным. Поэтому метод радиоприема и обработки принятого сигнала, позволяющий выполнить данную операцию с наименьшей ошибкой, является оптимальным.

Согласно теории потенциальной помехоустойчивости В.А. Котельникова [6] наилучшим является тот приемник, который определяет принятое сообщение по наибольшей вероятности того или иного символа в данной реализации принятой смеси из полезного сигнала и помехи. Такие вероятности P_A(«1») и P_A(«0»), определяемые в результате анализа $u_{BX}(t)$, являются апостериорными, т. е. послеопытными. Данные вероятности, очевидно, отличаются от заранее известных априорных вероятностях P(«1») и P(«0»).

Руководствуясь сказанным, оптимальную схему обработки двоичных сигналов можно представить в виде, показанном на рис. 13,4,а [38].

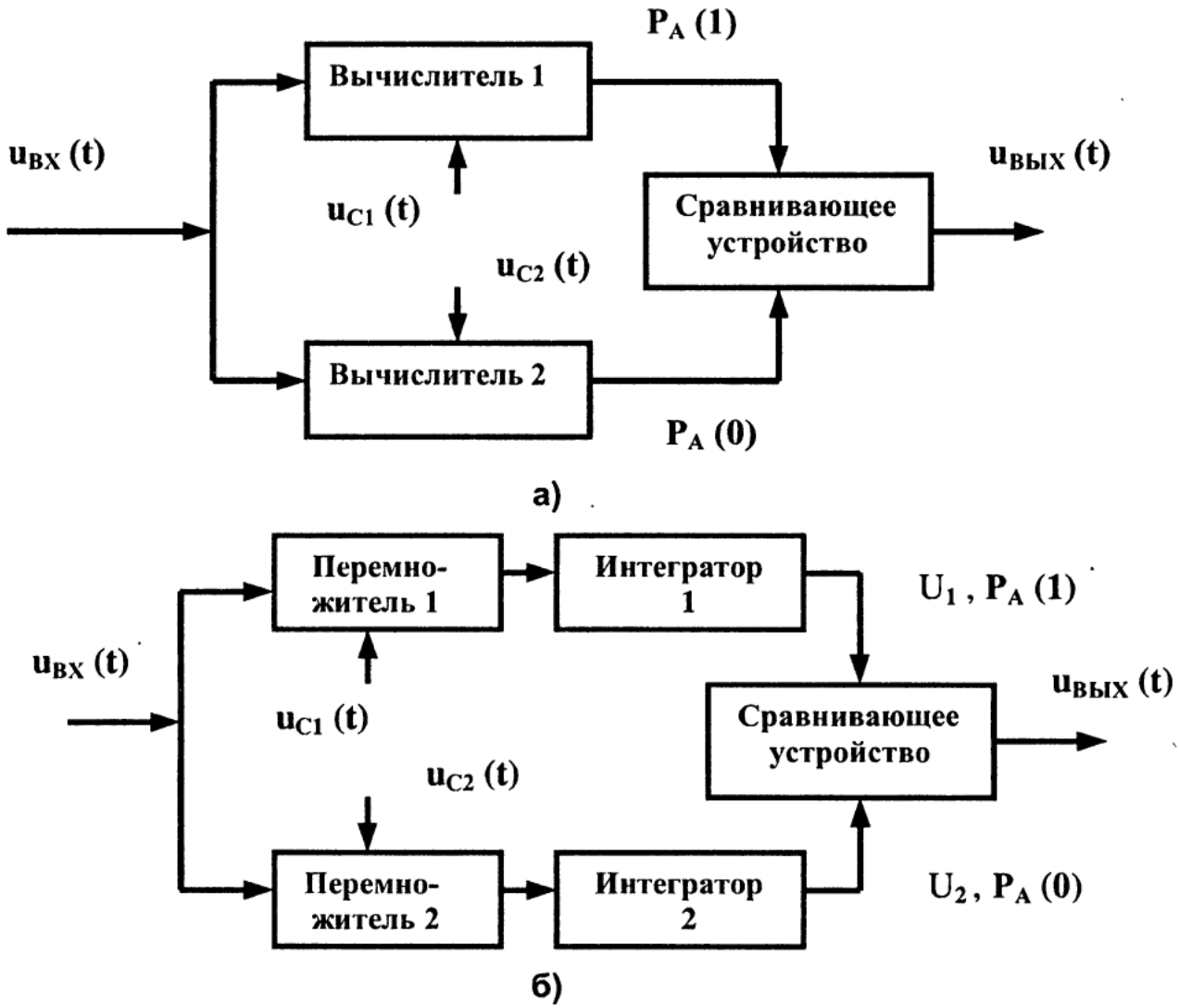


Рис. 13.4

В состав блока обработки сигнала входят два вычислителя, на 1-й вход которых поступает принятый входной сигнал (13.6) – смесь полезного сигнала и помехи. На 2-й вход 1-го вычислителя подается известная заранее одна из возможных реализаций полезного сигнала $u_{C1}(t)$, а на 2-й вход 2-го вычислителя – другая возможная реализация $u_{C2}(t)$. Вычислители определяют апостериорные вероятности $P_A(«1»)$ и $P_A(«0»)$, которые вычитаются в сравнивающем устройстве, образуя разность: $\Delta=P_A(«1») - P_A(«0»)$. При $\Delta>1$ выходной сигнал есть логическая «1», при $\Delta<1$ – логический «0». При равной априорной вероятности передачи символов «1» и «0» полная апостериорная вероятность ошибок равна половине суммы вероятностей ошибок от обоих вычислителей. Схеме оптимального приема по обнаружению полезного сигнала рис. 13.4,а эквивалентна схема корреляционного приема, приведенная на рис. 13.4,б, в которой вычислитель заменяется перемножающим устройством двух сигналов – принятого и одной из возможных реализаций полезного сигнала – и интегратором. В данной схеме происходит сравнение следующих двух сигналов:

$$U_1 = \frac{1}{T}\int_0^T u_{BX}(t)u_{C1}(t)dt \quad и \quad U_2 = \frac{1}{T}\int_0^T u_{BX}(t)u_{C2}(t)dt .$$

В результате анализа схемы оптимального приема (рис. 13.14) при нормальном законе распределения помехи и равновероятносным априорным распределением битовой информации «1» и «0» в [7] получены следующие выражения, позволяющие вычислить ошибку $P_{ош}$ принятого символа на выходе идеального приемника от соотношения $P_C/P_Ш$ в канале связи при трех видах манипуляции ВЧ сигнала – амплитудной (АТ), частотной (ЧТ) и фазовой (ФТ) (см. § 12.3):

$$При\ АТ: \quad P_{ош} = 1 - \Phi(0{,}5\sqrt{q}) , \tag{13.7}$$

$$При\ ЧТ: \quad P_{ош} = 1 - \Phi(\sqrt{0{,}5q}) , \tag{13.8}$$

$$При\ ФТ: \quad P_{ош} = 1 - \Phi(\sqrt{q}) , \tag{13.9}$$

где $q=P_C/P_Ш$ – отношение мощностей сигнала и помехи на входе схемы, приведенной на рис. 13.4:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \exp(-0{,}5x^2)dx - \tag{13.10}$$

интеграл вероятности или Лапласа. В рассматриваемом случае z=q.

Отношение мощностей сигнал/помеха для расчетов удобнее выразить в дБ, для чего $qd=10\lg(P_C/P_Ш)$ или $q=P_C/P_Ш=10^{0,1qd}$.

Пакет программ **Mathcad** позволяет путем обращения к функции **pnorm** вычислить интеграл вероятности (13.10). Программа по расчету функций (13.7)–(13.9) представлена на рис. 13.5. Там же построены графики зависимости вероятности ошибки $P_{ош}=\Phi(qd)$ для трех видов модуляции: амплитудной (верхний график), частотной (средний график) и фазовой (нижний график). В программе параметр qd выражен в дБ.

На основании проведенного анализа и полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Амплитудная телеграфия (АТ) по помехоустойчивости существенно уступает двум другим методам модуляции – ЧТ и ФТ. Этот проигрыш количественно выражается в том, что для получения одной и той же вероятности ошибки в случае АТ требуется иметь на входе блока обработки радиоприемника большее отношение сигнал/помеха. Так, для получения вероятности ошибки при передачи двоичных сигналов не хуже 10^{-5} мощность полезного сигнала в случае АТ следует повысить на 3 дБ (т. е. в 2 раза по мощности) по отношению к ЧТ и на 5,5 дБ (т. е. в 3,5 раза по мощности) по отношению к ФТ. Таким образом, при прочих равных условиях мощность радиопередатчика, например, в случае АТ необходимо повысить до 350 Вт вместо 100 Вт при использовании ФТ.

Простое физическое объяснение проигрыша в энергетике радиолинии при АТ по сравнению с ЧТ и ФТ связано с тем, что в двух последних

случаях радиопередатчик излучает сигнал как при передаче бита «1», так и «0», а в случае АТ при одном из видов бита (например «0») излучение отсутствует. По данной причине в современных системах радиосвязи метод модуляции АТ практически не применяется.

В силу сказанного и при двухступенчатой модуляции (рис. 12.3) АТ применяется крайне редко. Используются такие сочетания как ЧТ–ЧТ, ЧТ–ФТ и ФТ–ФТ.

$$x(qd) := 0.5 \cdot \sqrt{10^{0.1 \cdot qd}} \qquad FA(qd) := pnorm(x(qd), 0, 1) \qquad \Psi A(qd) := 1 - FA(qd)$$

$$y(qd) := \sqrt{0.5 \cdot 10^{0.1 \cdot qd}} \qquad F\Omega(qd) := pnorm(y(qd), 0, 1) \qquad \Psi\Omega(qd) := 1 - F\Omega(qd)$$

$$z(qd) := \sqrt{10^{0.1 \cdot qd}} \qquad F\Phi(qd) := pnorm(z(qd), 0, 1) \qquad \Psi\Phi(qd) := 1 - F\Phi(qd)$$

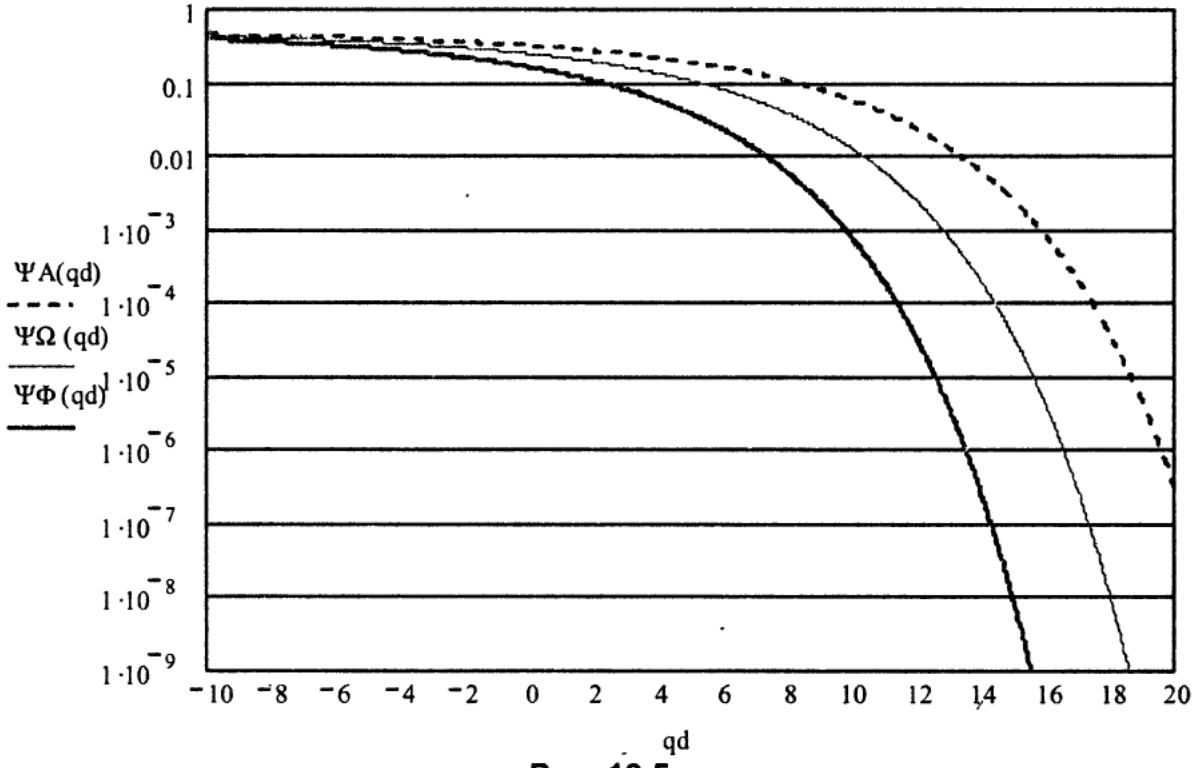


Рис. 13.5

13.3. Оптимальная линейная фильтрация

Другим способом оптимальной обработки сигнала, связанной с получением максимально возможного отношения сигнал/помеха, помимо корреляционного приема согласно схеме рис. 13.4, является применение так называемого согласованного фильтра, особенно в случае импульсных сигналов.

Сущность данного метода состоит в следующем. Как и ранее предполагается, что входной сигнал является смесью полезного сигнала и помехи. Принимаемый полезный сигнал задан или в виде функции времени X(t), или спектральной плотности S(jω) (см. § 2.3). Известны также стати-

стические параметры помехи. Требуется подобрать, а точнее сказать– синтезировать, такую электрическую цепь, на выходе которой будет получено согласно определенному критерию максимальное отношение сигнал/помеха. Такая электрическая цепь должна по возможности подавлять помеху и не ослаблять полезный сигнал, т. е. выполнять роль фильтра. (Отсюда проистекает название метода – оптимальная фильтрация.) Синтез в этом случае будет сводиться к поиску передаточной функции **K(p)** или коэффициента передачи **K(jω)** линейной цепи с постоянными параметрами и в создании на основании требуемой зависимости **K(jω)** структуры и параметров самого фильтра. Пример импульсного сигнала и непрерывной помехи на входе и выходе синтезируемого фильтра, а также их спектров приведен на рис. 13.6.

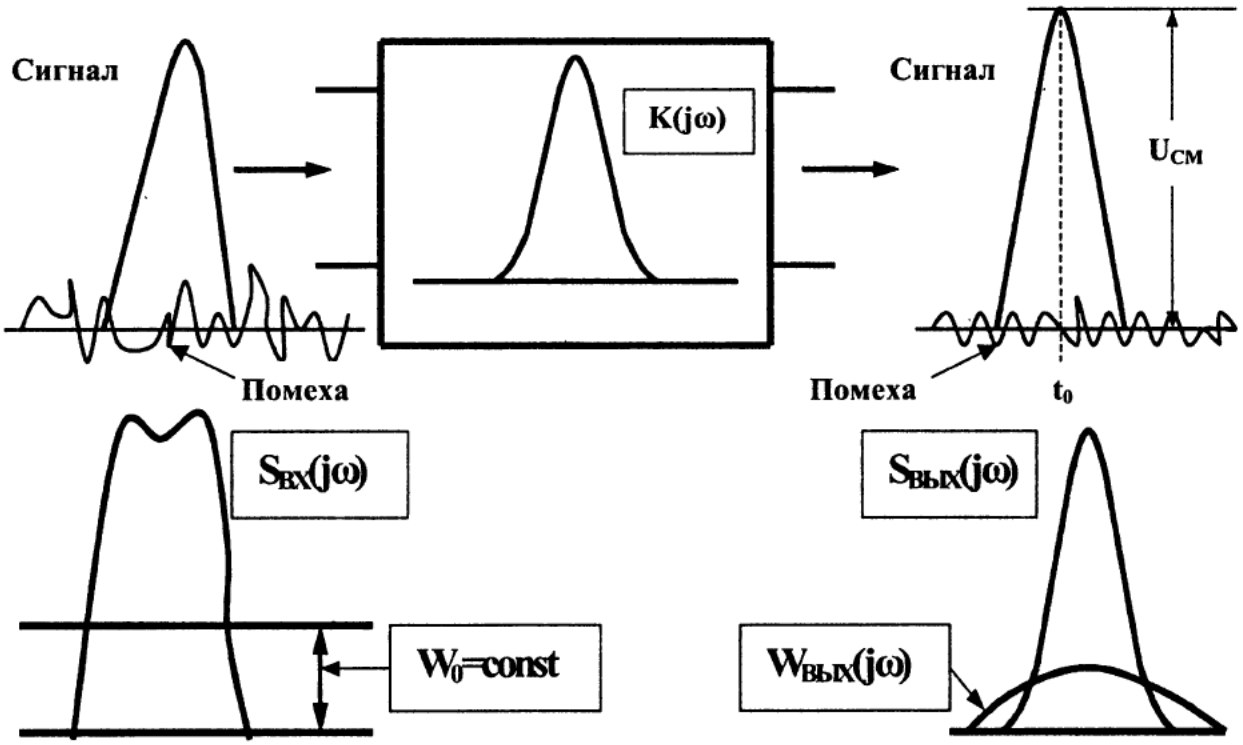


Рис. 13.6

Введем следующие обозначения:

$S(j\omega)=|S(j\omega)|\cdot\exp[-\Theta_S(j\omega)]$ – спектральная плотность полезного сигнала на входе фильтра;

$S_{вых}(j\omega)=|S_{вых}(j\omega)|\cdot\exp[-j\Theta_{Sвых}(\omega)]$ – спектральная плотность полезного сигнала на выходе фильтра;

$K(j\omega)=|K(j\omega)|\cdot\exp[-j\Theta_K(\omega)]$ – коэффициент передачи синтезируемого фильтра;

$W_0=const$ – плотность энергетического спектра помехи на входе фильтра – белого шума с равномерном энергетическим спектром.

Для спектра полезного сигнала на выходе фильтра согласно (3.5) получим:

$$S_{ВЫХ}(j\omega)=S(j\omega)K(j\omega)=|S(j\omega)||K(j\omega)|\exp[-j(\Theta_S(\omega)+\Theta_K(\omega))]. \quad (13.11)$$

Для полезного сигнала на выходе фильтра согласно (2.8) имеем:

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left|S_{ВЫХ}(j\omega)\right|\cos[\omega t+\Theta_S(\omega)+\Theta_K(\omega)]d\omega. \qquad (13.12)$$

Поскольку синтезируется полосовой фильтр, то можно считать, что за пределами его полосы пропускания f_1–f_2 (рис. 13.6) коэффициент передачи K(jω)=0. Тогда с учетом (13.11) и равенства $\omega=2\pi f$ преобразуем (13.12) к виду:

$$y(t)=2\int_{f_1}^{f_2}\left|S(f)\right|\left|K(f)\right|\cos[2\pi ft+\Theta_S(f)+\Theta_K(f)]df. \qquad (13.13)$$

Построив зависимость y(t) можно определить момент времени t_0, при котором амплитуда выходного импульса максимальна и равна $U_{СМ}=\max[y(t_0)]$ (рис. 13.6). Мгновенная мощность полезного сигнала при $t=t_0$ на выходе фильтра при нагрузке в 1 Ом составит:

$$P_{СВЫХ}=(U_{СМ})^2=\{max[y(t_0)]\}^2. \qquad (13.14)$$

Для мощности помехи на выходе фильтра при нагрузке в 1 Ом с учетом высказанных выше условий согласно (2.14) получим:

$$P_{П.ВЫХ}=W_0\int_{f_1}^{f_2}\left|K(f)\right|^2df. \qquad (13.15)$$

Примем в качестве критерия качества фильтрации или обработки сигнала и помехи отношение двух мощностей, определяемых согласно (13.14) и (13.15)

$$K_{ОБР}=P_{СВЫХ}/P_{ПВЫХ}. \qquad (13.16)$$

Согласно выбранному критерию фильтр, обеспечивающий максимум $K_{ОБР}$, будем считать оптимальным.

Можно показать, что оптимальный фильтр при принятых выше условиях имеет коэффициент передачи, комплексно сопряженный со спектральной функцией входного полезного сигнала [6]:

$$K(j\omega)_{ОПТ}=\overset{*}{S}(j\omega). \qquad (13.17)$$

Выражение (3.17) означает, что модули данных функций равны, а фазовые характеристики имеют противоположные знаки:

$$\left|K(j\omega)\right|=\left|S(j\omega)\right| \quad и \quad \Theta_K(j\omega)=-\Theta_S(j\omega). \qquad (13.18)$$

Иначе говоря, амплитудно-частотная характеристик оптимального фильтра должна повторять амплитудный спектр входного полезного сигнала, а фазо-частотная характеристика по форме совпадать с фазовым спектром входного сигнала, но иметь противоположный знак (рис. 13.7).

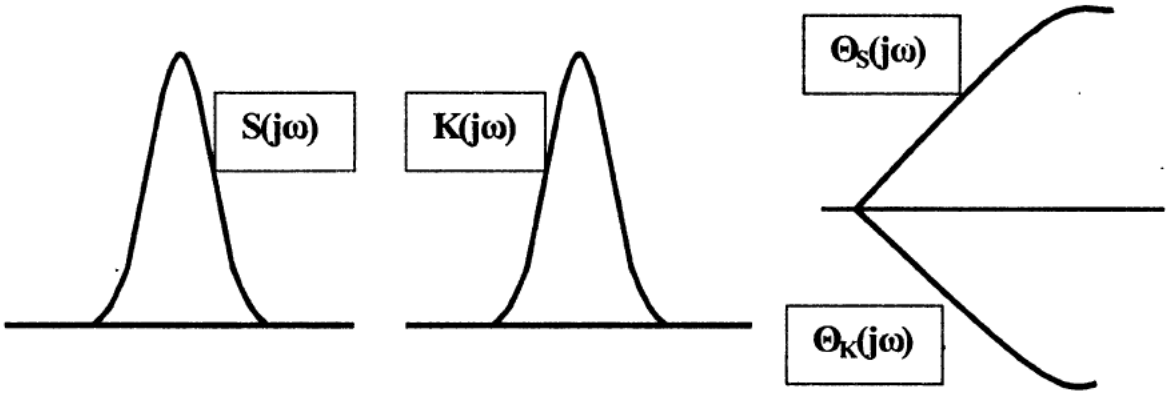


Рис. 13.7

Поскольку произвести синтез фильтра, характеристики которого в точности соответствовали бы оптимальному варианту, затруднительно, а в некоторых случаях и физически неосуществимо, то прибегнем к поиску по специальной программе оптимального варианта среди нескольких типовых структур (см. гл. 10 и 11). В рамках данной методики выбирается схема фильтра, а затем определяется оптимальный вариант параметров элементов путем обращения к функции цели, в основе которой лежит зависимость для коэффициента обработки $K_{ОБР}$ (13.16). Комбинация параметров фильтра, которая даст максимум данной функции и, следовательно, максимальное отношение мощности сигнала к помехе согласно выбранному критерию, является оптимальной.

При таком подходе производится непосредственный расчет характеристик фильтра на основе определенных рекуррентных соотношений. Осуществляется перебор нескольких типовых структур фильтров и оптимизации параметров в каждом варианте на основе поисковых методов глобального и локального минимума целевой функции (см. гл. 10). Таким образом, процедура синтеза в данном случае, как и при проектировании иных типов фильтров и согласующих устройств (см. гл. 11), заменяется анализом нескольких вариантов с поиском наилучшего из них согласно определенному критерию. Поскольку такая методика предусматривает огромный объем рутинных вычислений, то его практическая реализация возможна только с применением компьютера.

Изложенный подход к оптимизации фильтра по возможному повышению отношения сигнал/помеха проиллюстрируем на конкретном примере. В качестве полосового фильтра используем схему двухконтурной электрической цепи с емкостной связью, приведенной на рис. 13.8

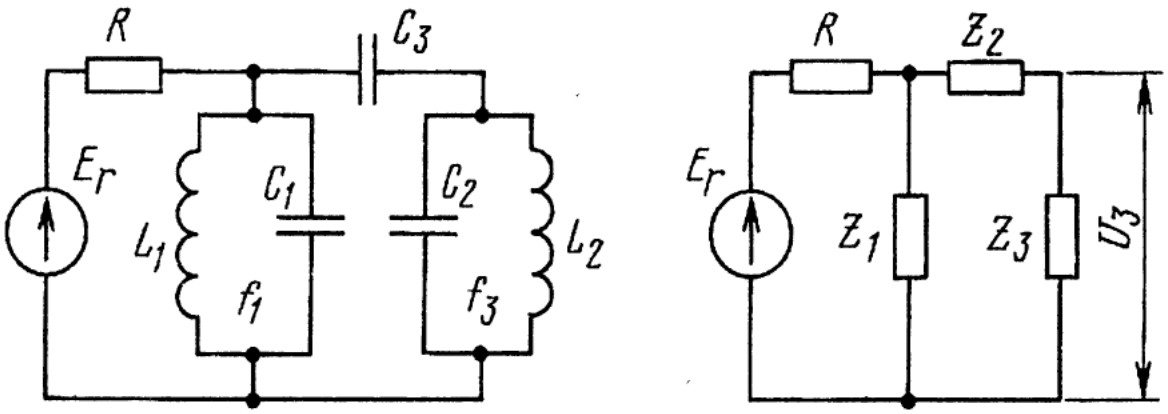


Рис. 13.8

Коэффициент передачи такого фильтра:

$$K(j\omega) = \frac{U_3(j\omega)}{E_\Gamma(j\omega)} = \frac{Z_1 Z_3}{R(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3}. \qquad (13.19)$$

Спектральная плотность входного полезного сигнала задается функцией, позволяющей путем изменения значений входящих в нее коэффициентов, придавать ей различную форму:

$$SC(f) = SA \times \exp[-c(f)(ad + jam)] \ , \qquad (13.20)$$

$$\text{где} \quad c(f) = 4\pi^2 (f - f_0)^2.$$

Программа, представленная на рис. 13.9 по поиску оптимальных параметров двухконтурного фильтра, состоит из четырех разделов.

В 1-м разделе вводятся исходные данные по параметрам фильтра и приводятся формулы по расчету отдельных цепей, что позволяет на основании (13.19) получить выражение для коэффициента передачи фильтра K(jω), его модуля $|K(j\omega)|$ и фазы. $\Theta_K(\omega)$ (в радианах и градусах).

Во 2-м разделе вводятся исходные данные по спектральной плотности входного полезного сигнала S(jω) согласно выражению (13.20) и строятся графики для $|S(j\omega)|$ модуля и фазы $\Theta_S(j\omega)$] данной функции. Далее вводится значение W_0=const плотности энергетического спектра помехи на входе фильтра – белого шума с равномерном энергетическим спектром – и строятся два графика спектров: модуля полезного сигнала и помехи. В конце раздела приводится выражение (13.13), позволяющее рассчитать полезный сигнал на выходе фильтра при заданных параметрах сигнала и помехи.

В 3-м разделе сначала для выбранной исходной точки поиска рассчитывается график полезного сигнала y(t) на выходе фильтра, что позволяет согласно рис. 13.6 определить его амплитуду, как разность между максимальным и минимальным значениями y(t) путем обращения к операторам **max** и **min**.

Затем производится поиск оптимальных параметров фильтра согласно критерию максимума отношения мощностей полезного сигнала и помехи на выходе фильтра – коэффициента $K_{ОБР}$ – в соответствии с (3.16). Варьируемыми параметрами при этом являются значения резонансных частот 1-го и 3-го контуров ($f_{Р1}$ и $f_{Р3}$), поиск оптимальных значений которых осуществляется путем обращения к функции **Maximize**. Рекомендуется сделать несколько циклов поиска значений $f_{Р1}$ и $f_{Р3}$ путем разного задания исходных точек. Получение максимума функции цели – коэффициента обработки сигнала и помехи $K_{ОБР}$ – и соответствующие ему оптимальные значения $f_{Р1}$ и $f_{Р3}$, являются конечным результатом поиска.

$$Q1 := 200 \qquad Q3 := 170 \qquad \rho := 20 \qquad R := 100 \qquad C2 := 10^{-6}$$

$$W_0 := 0.05 \qquad j := \sqrt{-1}$$

$$Y1(f, fp1) := j \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{f}{fp1} \cdot \left(1 - \frac{fp1^2}{f^2} - j \cdot \frac{1}{Q1} \cdot \frac{fp1}{f} \right)$$

$$Z1(f, fp1) := \frac{1}{Y1(f, fp1)} \qquad Z2(f) := -j \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C2}$$

$$Y3(f, fp3) := j \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{f}{fp3} \cdot \left(1 - \frac{fp3^2}{f^2} - j \cdot \frac{1}{Q3} \cdot \frac{fp3}{f} \right)$$

$$Z3(f, fp3) := \frac{1}{Y3(f, fp3)}$$

$$B1(f, fp1, fp3) := Z1(f, fp1) + Z2(f) + Z3(f, fp3)$$

$$B2(f, fp1, fp3) := Z1(f, fp1) \cdot Z2(f) + Z1(f, fp1) \cdot Z3(f, fp3)$$

$$XK(f, fp1, fp3) := \frac{(Z1(f, fp1) \cdot Z3(f, fp3))}{(R + Z2(f)) \cdot B1(f, fp1, fp3) + B2(f, fp1, fp3)}$$

$$K(f, fp1, fp3) := \left| XK(f, fp1, fp3) \right|$$

$$FAZR(f, fp1, fp3) := \arg(XK(f, fp1, fp3))$$

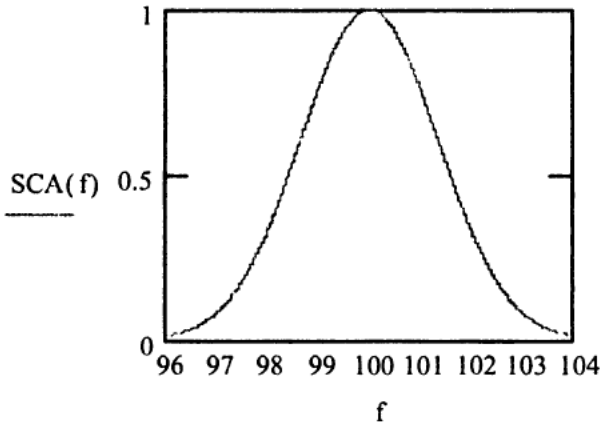
$$FAZ(f, fp1, fp3) := FAZR(f, fp1, fp3) \cdot \frac{180}{\pi}$$

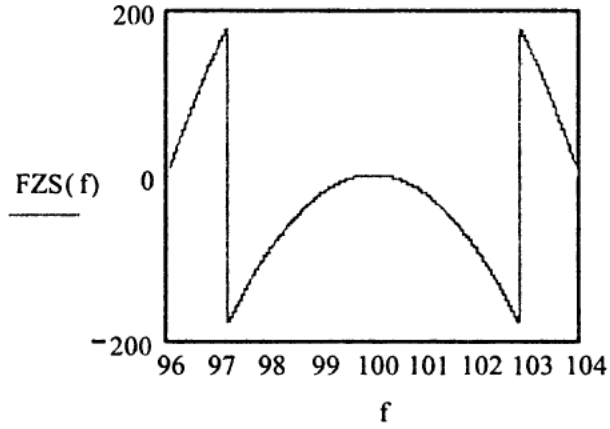
$j := \sqrt{-1}$ $\quad ad := 0.007 \quad am := 0.01 \quad SA := 1 \quad f0 := 100$

$$c(f) := 4 \cdot \pi^2 \cdot (f - f0)^2$$

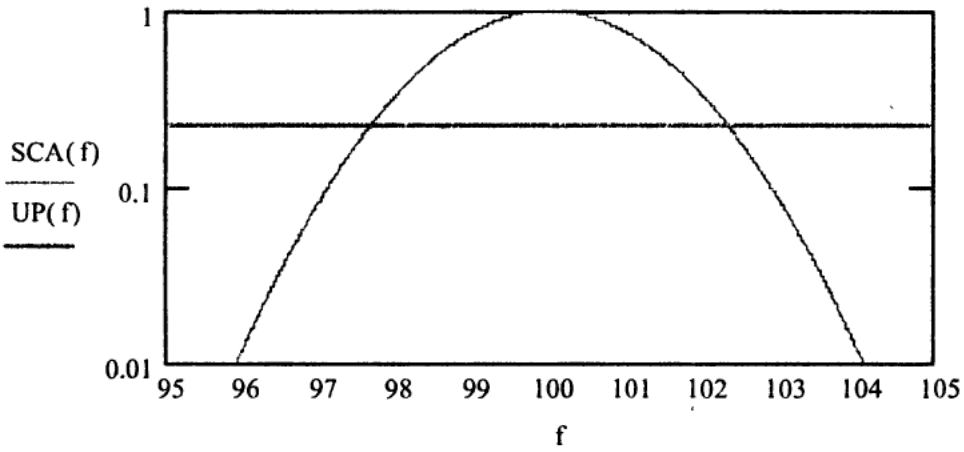
$$SC(f) := SA \cdot e^{-c(f)\cdot(ad + j\cdot am)}$$

$$SCA(f) := |SC(f)| \qquad FZSR(f) := \arg(SC(f)) \qquad FZS(f) := FZSR(f) \cdot \frac{180}{\pi}$$





$$W(f) := W_0 \qquad UP(f) := \sqrt{W(f)}$$



$$\Psi(f, fp1, fp3, t) := 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + FZSR(f) + FAZR(f, fp1, fp3)$$

$$SPT(fp1, fp3, t) := 2 \cdot \int_{90}^{110} SCA(f) \cdot K(f, fp1, fp3) \cdot \cos\left(\Psi(f, fp1, fp3, t)\right) df$$

$fp1 := 100.4 \qquad fp3 := 101.2 \qquad W_0 := 0.05$

$\Delta t := 0.2 \qquad k := 0..10 \qquad t_k := \Delta t \cdot k$

$SP_k := SPT(fp1, fp3, t_k)$

$G^{\langle 0 \rangle} := SP \qquad A1 := \max(G^{\langle 0 \rangle}) \qquad A2 := \min(G^{\langle 0 \rangle})$

$A1 = 0.496 \qquad A2 = -2.028 \qquad A := |A1 - A2| \qquad A = 2.524$

$$SPP := \int_{90}^{110} W_0 \cdot (K(f, fp1, fp3))^2 \, df$$

$$Y(fp1, fp3) := \frac{A}{SPP} \qquad Y(fp1, fp3) = 60.176$$

Given $\qquad 100 \le fp1 \le 102 \qquad 100 \le fp3 \le 102$

$H := \text{Maximize}(Y, fp1, fp3) \qquad H = \begin{pmatrix} 100.4 \\ 101.2 \end{pmatrix}$

$fp1 := H_0 \qquad fp3 := H_1$

$\Delta t := 0.1 \qquad n := 0..20 \qquad t_n := \Delta t \cdot n$

$K(f, fp1, fp3) := |XK(f, fp1, fp3)|$

$FAZR(f, fp1, fp3) := \arg(XK(f, fp1, fp3))$

$$FAZ(f, fp1, fp3) := FAZR(f, fp1, fp3) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$SP_n := SPT(fp1, fp3, t_n)$

$G^{\langle 0 \rangle} := SP \qquad A1 := \max(G^{\langle 0 \rangle}) \qquad A2 := \min(G^{\langle 0 \rangle})$

$A1 = 0.489 \qquad A2 = -2.028 \qquad A := |A1 - A2| \qquad A = 2.517$

$$SPP := \int_{90}^{110} W_0 \cdot (K(f, fp1, fp3))^2 \, df$$

$$Y(fp1, fp3) := \frac{A^2}{SPP} \qquad Y(fp1, fp3) = 151.074$$

$CP := 10 \cdot \log(Y(fp1, fp3)) \qquad CP = 21.792$

Рис. 13.9

В 4-м разделе программы производится расчет всех характеристик при найденных оптимальных значениях варьируемых параметров f_{P1} и f_{P3}: выходного полезного сигнала, амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик фильтра и их сопоставление с соответствующими зависимостями для амплитудного и фазового спектров полезного сигнала и помехи. Далее строятся графики данных функций. Такие графики для одного из примеров расчета приведены на рис. 13.10.

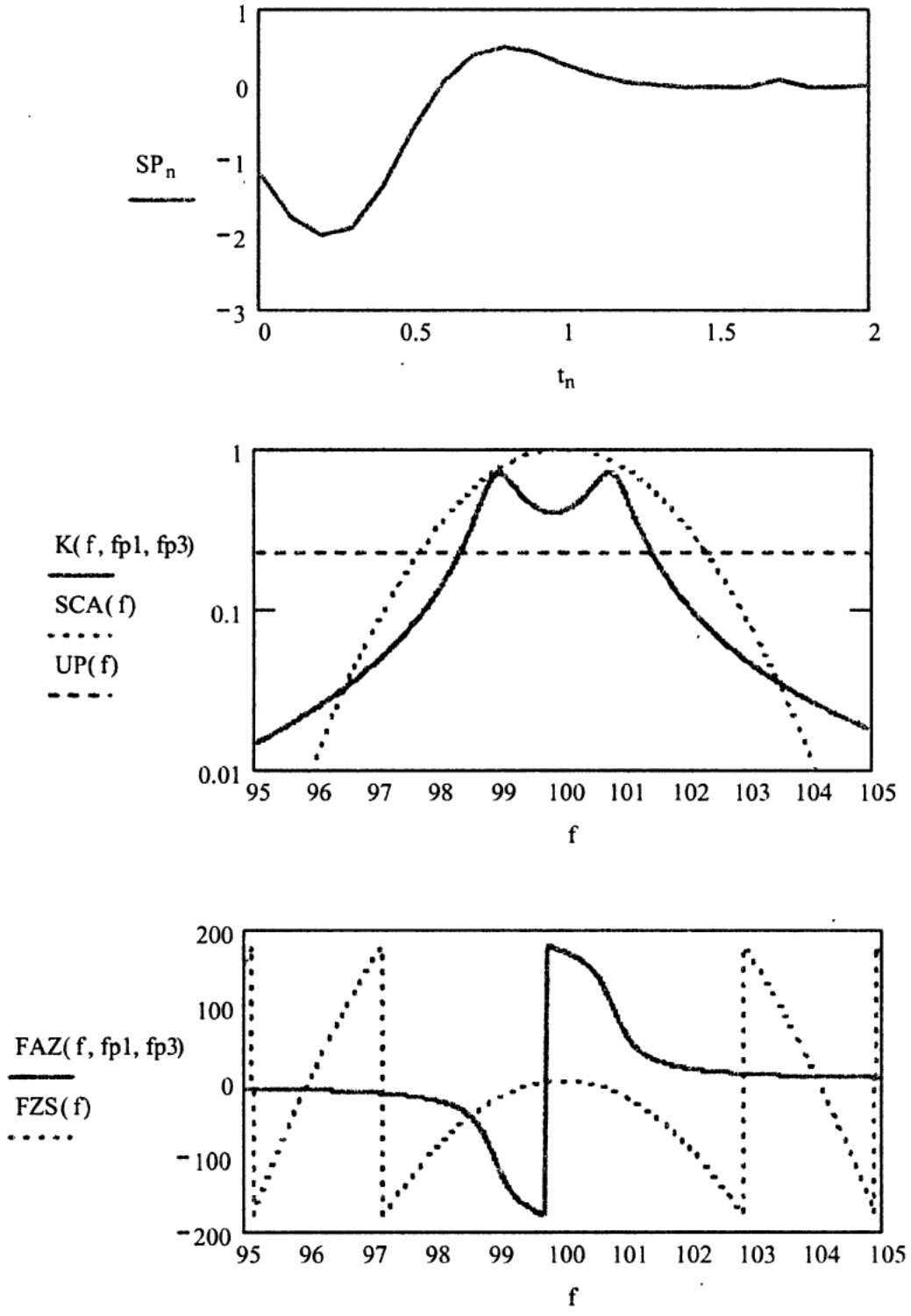


Рис. 13.10

В программе рис. 13.9 и графиках рис. 13.10 приняты следующие обозначения:

Q1, Q3 – добротность контуров (рис. 3.18);

fp1, fp2 – резонансные частоты контуров, размерность – МГц (рис. 3.18);

H_0, H_1 – значения резонансных частот, найденные в результате процедуры оптимизации;

ρ – волновое сопротивление контуров, размерность – Ом;

R – последовательное сопротивление (Ом) согласно рис. 3.18;

C2 – емкость связи контуров, размерность 1пр=10^{-6};

W(f)=W_0=const – плотность энергетического спектра помехи на входе фильтра, размерность $В^2$/мГц;

Z1, Z2, Z3, Y1, Y3 – сопротивления и проводимости звеньев фильтра согласно рис. 3.18;

XK – комплексный коэффициент передачи контура;

K – модуль коэффициента передачи контура;

FAZR, FAZ – фаза коэффициента передачи контура в радианах и градусах;

SC – спектральная плотность входного полезного сигнала, определяемая согласно (13.19);

SA, ad, am – коэффициенты, определяющие эту функцию, размерность SA–В/мГц;

SCA – модуль спектральной плотности входного полезного сигнала, размерность – В/мГц;

FZSR, FZS – фаза той же функции в радианах и градусах;

A – амплитуда импульса на выходе фильтра $U_{СМ}$, определяемая согласно рис. 3.16, размерность В;

SPT, SP_k, SP_n – функция выходного полезного сигнала на выходе фильтра y(t), определяемая согласно (13.13), размерность В;

SPP–мощность помехи на выходе фильтра, определяемая согласно (13.14);

Y – отношение мощности полезного сигнала к мощности помехи на выходе фильтра – коэффициент обработки $К_{ОБР}$, определяемый согласно (13.16);

CP – тот же коэффициент обработки, выраженный в дБ.

Пределы интегрирования (в примере 90–110), количество точек, по которым рассчитывается функция y(t), и некоторые другие параметры устанавливаются индивидуально в зависимости от исходных данных и характера решаемой задачи.

По аналогичной методике могут быть составлены программы по оптимизации более сложных фильтров, включающих большее число звеньев. При этом могут быть установлены и иные критерии оптимизации, чем принятый в рассматриваемой программе. Но конечная сущность таких программ остается неизменной – параметрический синтез фильтра, обеспечивающего максимальное подавление известной помехи при минимальных потерях, вносимых в известный полезный сигнал.

13.4. Обработка радиосигналов с частотной модуляцией

Частотная модуляция (ЧМ) является доминирующей в современных системах передачи информации СВЧ диапазона, в том числе спутниково-космических системах радиосвязи и телевидения. При ЧМ обеспечивается высокая помехоустойчивость и высокое качество передачи информации, допускается возможность одновременной работы в общем канале связи большого числа корреспондентов и реализуется более полное использование по энергетическим показателям радиопередающего устройства в силу постоянства амплитуды сигнала по сравнению с амплитудной модуляцией (см. гл. 12).

Типовая схема радиоприемного устройства при ЧМ приведена на рис. 13.11.

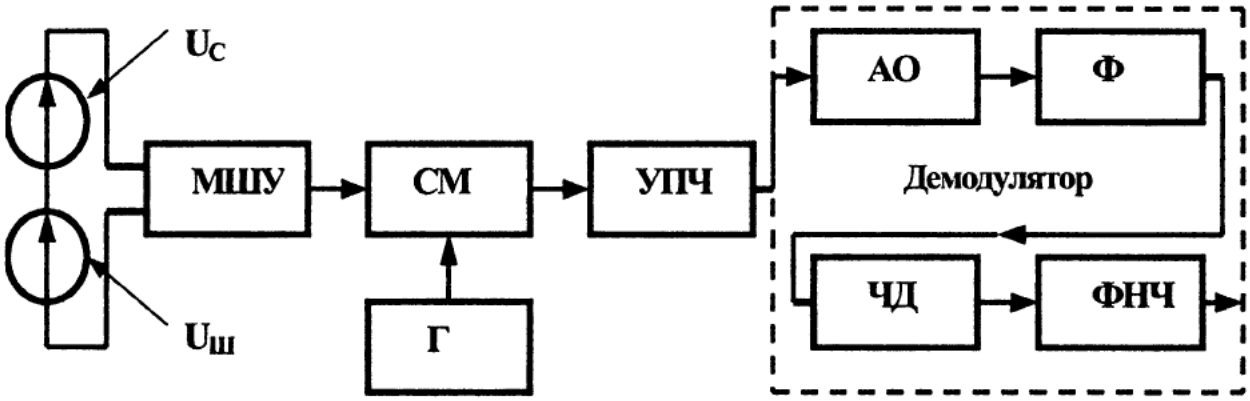


Рис. 13.11

На схеме рис. 13.11 приняты следующие обозначения: U_C – эквивалентный источник полезного сигнала, поступающего из антенны; $U_Ш$ – эквивалентный генератор шума, учитывающий шумы канала радиосвязи и собственные шумы радиоприемника; МШУ – малошумящий ВЧ или СВЧ (в зависимости от диапазона частот) усилитель; СМ – смеситель, понижающий частоту принятого сигнала; Г – гетеродин – автогенератор с высокой стабильностью частоты; УПЧ – усилитель промежуточной частоты; АО – амплитудный ограничитель; Ф – полосснопропускающий фильтр по отношению к 1-й гармонике сигнала промежуточной частоты; ЧД – частотный дискриминатор; ФНЧ – фильтр нижних частот.

Четыре последних звена (АО, Ф, ЧД и ФНЧ) образуют частотный демодулятор, выпускаемый в настоящее время в виде одной микросхемы. Полоса пропускания ФНЧ устанавливается равной верхней частоте модулирующего сигнала $F_В$. Полоса пропускания УПЧ выбирается, исходя из ширины спектра принимаемого частотно модулируемого сигнала, равного согласно (12.14):

$$\Delta f_{СП} = 2F_В(1 + m_Ч + \sqrt{m_Ч}) = 2(\Delta f_Д + F_В + F_В\sqrt{\Delta f_Д / F_В}), \qquad (13.21)$$

где $m_Ч = \Delta f_Д / F_В$, $\Delta f_Д$ –

индекс частотной модуляции и девиация частоты.

Пренебрегая крайними спектральными составляющими (рис. 12.6), эту полосу сужают до величины: $\Delta f_{СП}=2(\Delta f_Д+F)$.

Статическая характеристика частотного демодулятора имеет вид, показанный на рис. 13,12,а, амплитудно-частотная (АЧХ) по выходному сигналу – на рис. 13.12,б. В зависимости от характера передаваемого сообщения в АЧХ осуществляется подъем или завал определенных участков, например так, как показано на рис. 13.12,в.

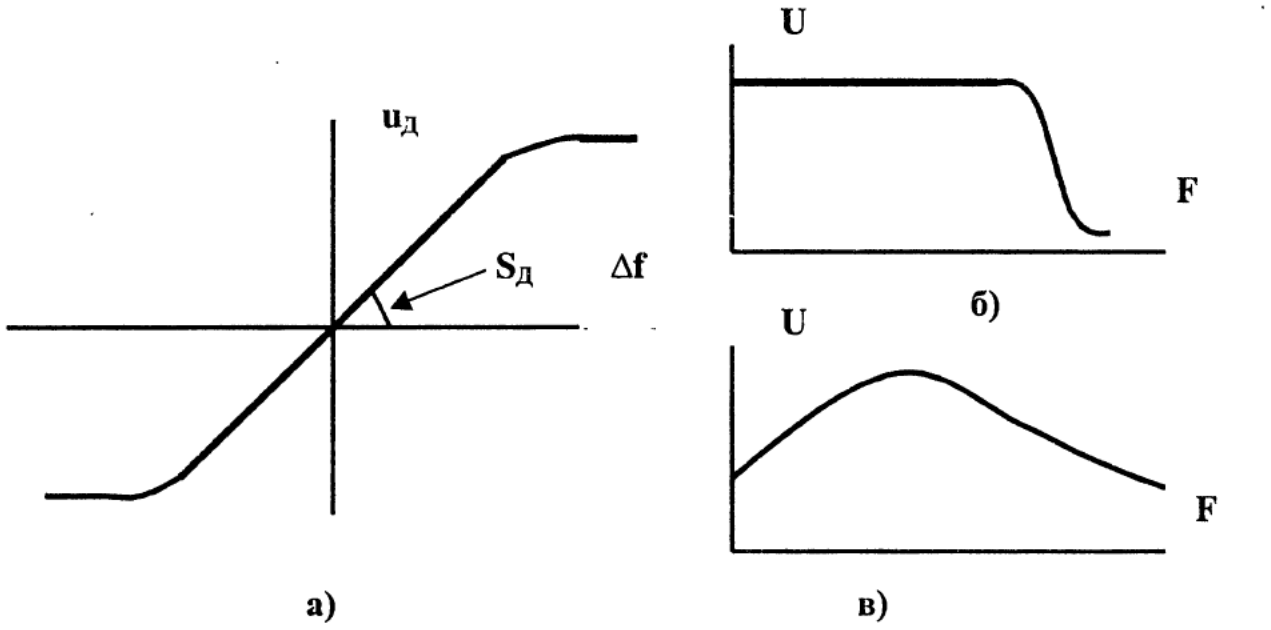


Рис. 13.12

На вход частотного демодулятора, как и на другие устройства обработки сигнала, помимо полезного сигнала поступает помеха. Взаимодействие между ними приводит или к подавлению помехи полезным сигналом (положительный эффект, создающий преимущества ЧМ), или, наоборот, к подавлению полезного сигнала помехой (отрицательный эффект).

Определим зависимость отношения мощностей полезного сигнала и помехи на выходе частотного демодулятора $(P_С/P_П)_{вых}$ от такого же отношения на входе $(P_С/P_П)_{вх}$ при следующих условиях:

- на вход демодулятора приходит полезный сигнал–немодулированная несущая с частотой, совпадающей с "0" характеристики частотного демодулятора, $u_С(t)=U_{СМ}\cos(\omega t)$;
- АЧХ полосового фильтра с полосой пропускания $\Delta f_{ПР}$ – плоская;
- АЧХ фильтра нижних частот с полосой среза $F_В$ – плоская;
- помеха – белый шум на входе частотного дискриминатора – имеет плотность энергетического спектра $W(f)=W_0=const$, отношение $(P_С/P_П)_{вх}>5$.

При данных условиях, как показано в [39], энергетический спектр на выходе частотного дискриминатора определяется зависимостью:

$$W(F)=\frac{4\pi^2 W_0}{U_{СМ}^2/2}F^2 \quad . \qquad (13.22)$$

АЧХ фильтров и энергетические спектры помехи на входе и выходе частотного дискриминатора приведены на рис. 13.13.

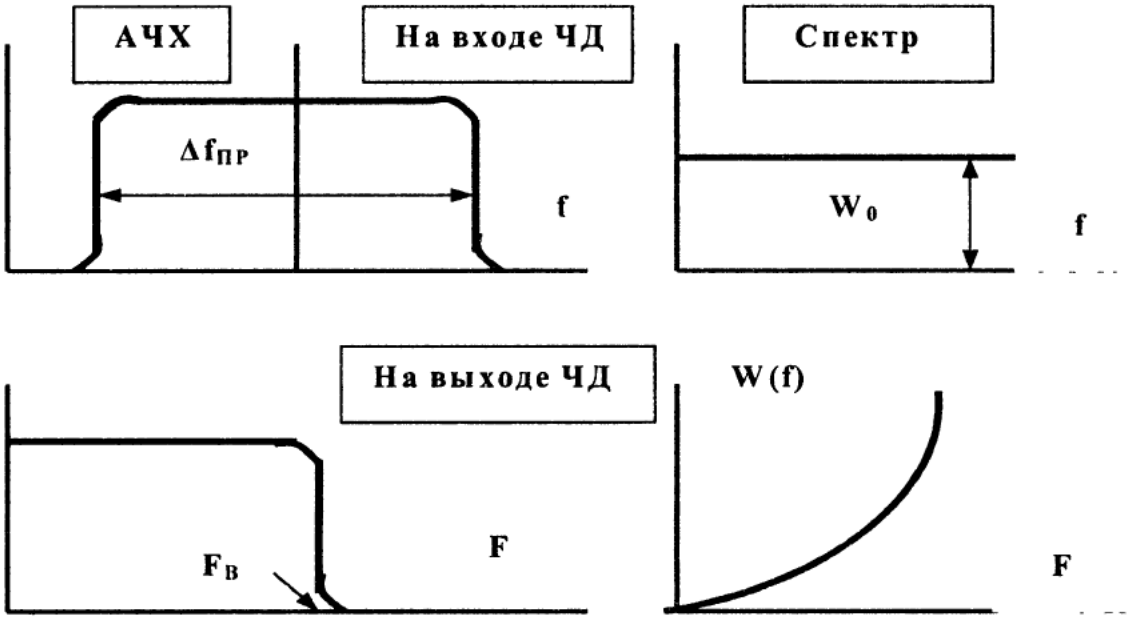


Рис. 13.13.

Для мощности помехи на выходе частотного дискриминатора при нагрузке в 1 Ом согласно (2.14) с учетом (13.22) получим:

$$P_{П} = \int_0^{F_B} W(F)dF = \frac{4\pi^2 W_0}{U_{СМ}^2/2}\frac{F_B^3}{3} = \frac{2\pi^2 F_B^2}{3q}, \qquad (13.23)$$

$$где\ \ q = (\frac{P_C}{P_П})_{ВХ} = \frac{U_{СМ}^2/2}{W_0 2F_B} - \qquad (13.24)$$

отношение мощностей сигнала и помехи в полосе $2F_В$ на входе частотного дискриминатора.

Мощность полезного сигнала на выходе частотного дискриминатора прямо пропорциональна девиации частоты и поэтому при крутизне $S_Д$=1 и нагрузке в 1Ом запишем:

$$P_{С.ВЫХ} = \frac{4\pi^2 \Delta f_Д^2}{2} \ . \qquad (13.25)$$

Для отношения мощностей сигнала и помехи на выходе частотного дискриминатора с учетом (13.23) и (13.25) получим:

$$\left(\frac{P_C}{P_П}\right)_{ВЫХ} = 3m_ч^2\left(\frac{P_C}{P_П}\right)_{ВХ} = 3m_ч^2 q \ , \qquad (13.26)$$

$$где\ \ m_ч = \Delta f_Д / F_В \ -$$

индекс частотной модуляции по отношению к высшей частоте модулирующего сигнала.

Формула (13.26) раскрывает основное преимущество частотной модуляции, состоящее в возрастании отношения мощностей сигнала и помехи на выходе частотного демодулятора с увеличении индекса $m_Ч$, а следовательно, согласно (12.2) базы сигнала и полосы пропускания высокочастотного тракта радиоприемника. Однако это свойство ЧМ сохраняется только при соблюдении условия $q=(P_С/P_П)_{ВХ}>q_{ПОР}$ – некоторого порогового значения, равного 10…12 дБ.

Остановимся подробнее на данном вопросе, рассмотрев следующую модель. Пусть на вход частотного дискриминатора поступает два синусоидальных сигнала, один из которых является полезным, а другой помехой. Такой двухчастотный сигнал (4.31), амплитуда и фаза которого описываются выражениями (4.32) и (4.33), использовался выше при анализе нелинейных свойств ВЧ усилителей мощности (см. § 4.6). Продолжим анализ по данной проблеме, получив путем дифференцирования фазы по времени (4.33) следующее выражение для мгновенной частоты сигнала:

$$\Psi(t)=\frac{d\Theta(t)}{dt}=2\pi F\frac{[1+p\cos(2\pi Ft)]^2}{1+p^2+2p\cos(2\pi Ft)}. \qquad (13.27)$$

$p=U_С/U_П$ – отношение амплитуд полезного сигнала и помехи.

Расширим программу, приведенную на рис. 4.11, включив в нее помимо вычисления сигнала A(t) и фазы Θ(t) и определение мгновенной частоты двухчастотного сигнала согласно (13.27). Новый вариант программы приведен на рис. 13.14.

$$U0:=1 \qquad f:=10 \qquad p:=0.9 \qquad F:=0.2$$

$$u(t):=U0\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)+p\cdot U0\cdot\sin[2\cdot\pi\cdot(f+F)\cdot t]$$

$$s(t):=\sin(2\cdot\pi\cdot F\cdot t) \qquad c(t):=\cos(2\cdot\pi\cdot F\cdot t)$$

$$A(t):=U0\cdot\sqrt{1+p^2+2\cdot p\cdot c(t)}$$

$$\Theta(t):=\operatorname{atan}\left(p\cdot\frac{s(t)}{1+p\cdot c(t)}\right)$$

$$\Psi(t):=2\cdot\pi\cdot F\cdot\left[\frac{(1+p\cdot c(t))^2}{1+p^2+2\cdot p\cdot c(t)}\right]$$

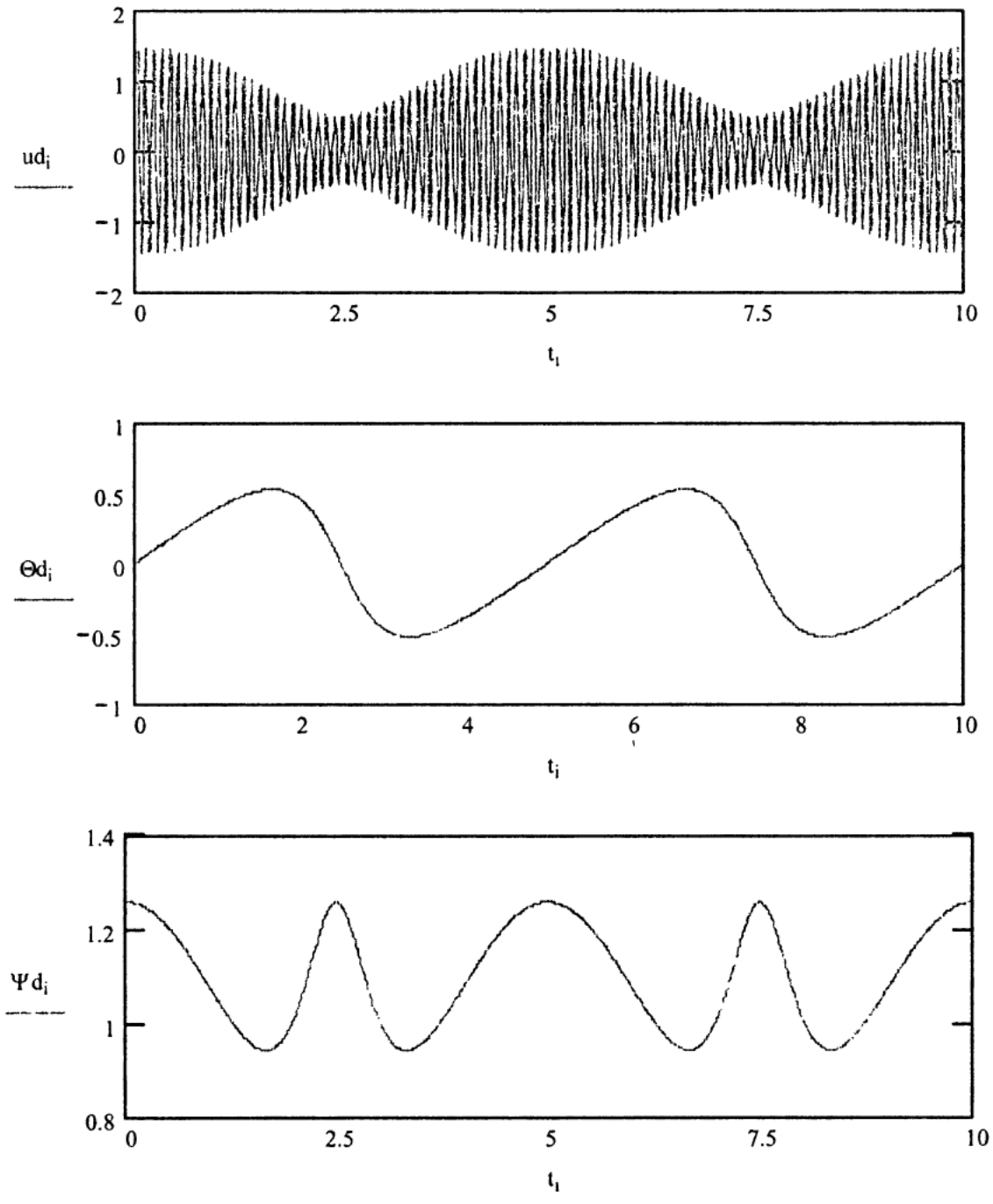
$$i:=1..1000 \qquad t_i:=0.01\cdot i$$

$$ud_i:=u(t_i) \qquad sd_i:=s(t_i) \qquad cd_i:=c(t_i)$$

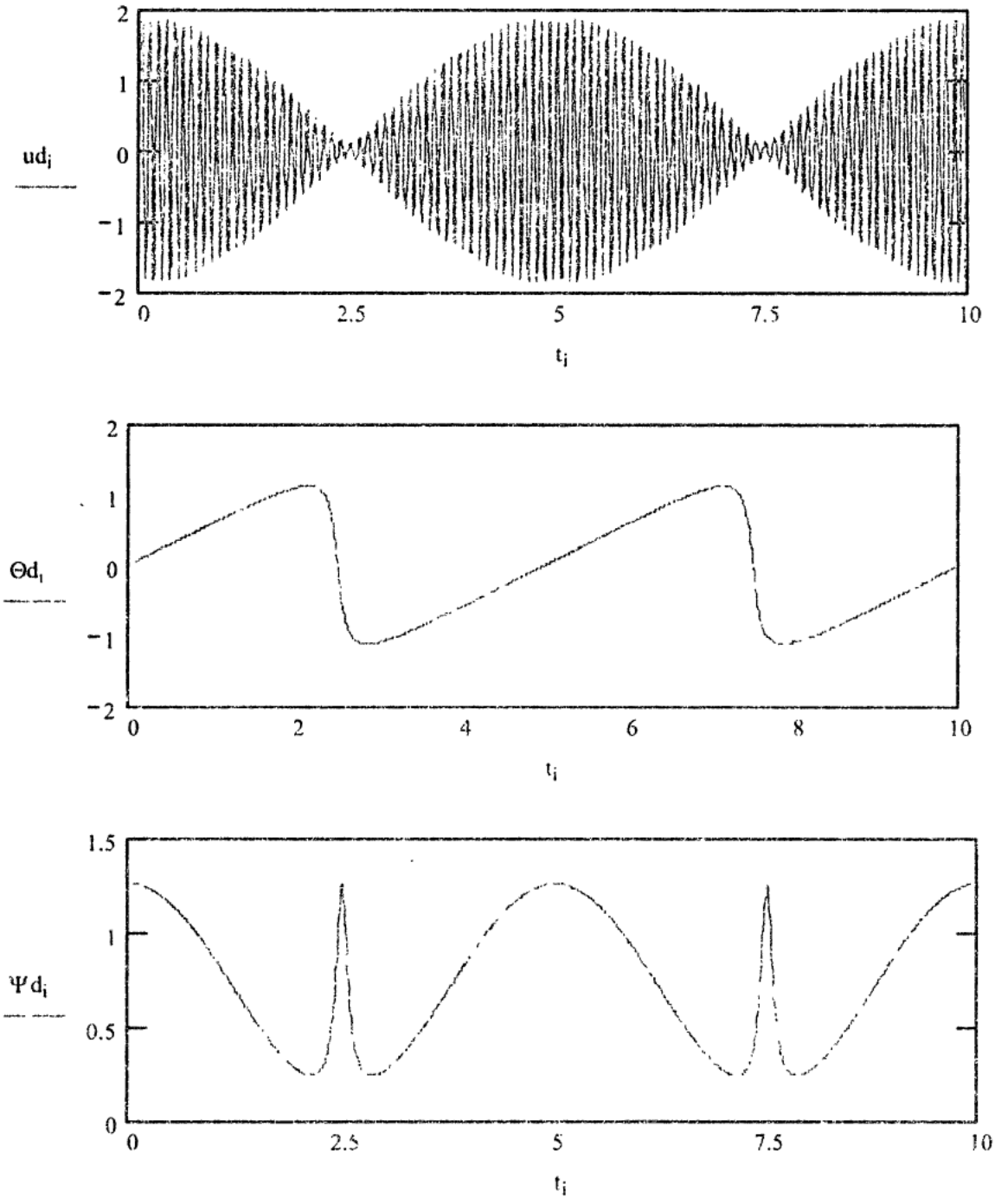
$$Ad_i:=A(t_i) \qquad \Theta d_i:=\Theta(t_i) \qquad \Psi d_i:=\Psi(t_i)$$

Рис. 13.14

Результаты расчета по программе в виде графиков для двух случаев: при p=0,5 и 0.9, приведены на рис. 13.15. Из них следует, что при p=0,5 мгновенная частота сигнала Ψ(t) (в программе Ψd) меняется сравнительно плавно. Однако при приближении значения $p=(U_C/U_П)$ к 1 в результате резкого закона изменения фазы сигнала в зависимости для частоты, являющейся производной от фазы, появляются острые импульсы, которые на выходе частотного дискриминатора могут существенно исказить полезный сигнал.



а) при p=0.5



б) при p=0,9

Рис. 13.15

После проведенного анализа с синусоидальной помехой вновь обратимся к воздействию на частотный демодулятор помехи, сформированной из белого шума, прошедшего каскады радиоприемника. Из теоретически безграничного спектра такой помехи можно вырезать узкую полосу, пропустив сигнал через полосовой фильтр. Именно такой узкополосный случайный процесс согласно схеме радиоприемника и приходит на частотного демодулятора (рис. 13.11). Каждая реализация такого случайного процесса представляет собой квазигармоническое колебание с медленно меняющимися по сравнению с центральной частотой фильтра ω_0 амплитудой и фазой. Поэтому для сигнала помехи, прошедшей через полосовой фильтр моно записать:

$$u_{П}(t) = U_{П}(t)\cos[\omega_0 t + \Theta(t)] \ , \qquad (13.28)$$

где $U_{П}(t)$, $\Theta(t)$ –

огибающая и фаза сигнала – случайные, медленно меняющиеся функции времени.

Функция фазы Θ(t) подчиняется равномерному закону распределения, означающему равновероятным любое значение фазы сигнала в пределах от 0 до 2π в любой момент. Функция огибающей $U_П(t)$ подчиняется закону распределения Релея, записываемому в виде:

$$p(U) = \frac{U}{\sigma^2}\exp(-\frac{U^2}{2\sigma^2}) \ , \qquad \textit{где } \sigma^2 - \textit{дисперсия шума.} \qquad (13.29)$$

График одной из возможных реализаций функции $U_П(t)$ представлен на рис. 13.16. На нем же показана амплитуда полезного сигнала $U_{СМ}$.

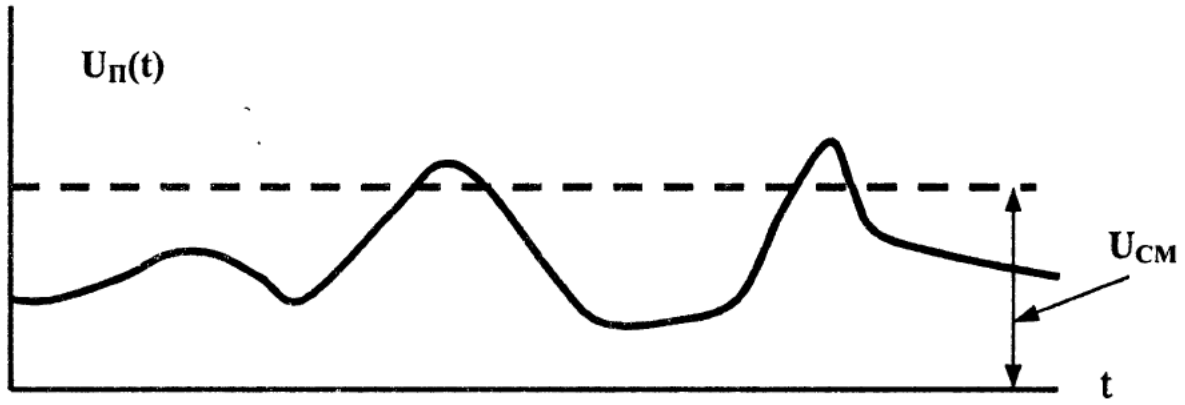


Рис. 13.16

Определим, какова вероятность превышения амплитудой помехи $U_П(t)$ амплитуды U_0.Поскольку импульсы в функции частоты начинают возникать при $q=(P_C/P_П)_{ВХ}<1$ (см. рис. 13.15), то за уровень сравнения примем значение $U_0=0{,}7U_{СМ}$. С учетом закона распределения Релея (13.29) вероятность такого превышения составит:

$$P(U > U_0) = \int_{U_0}^{\infty} \frac{U}{\sigma^2}\exp(-\frac{U^2}{2\sigma^2})dU = \exp(-0{,}5q) \ , \qquad (13.30)$$

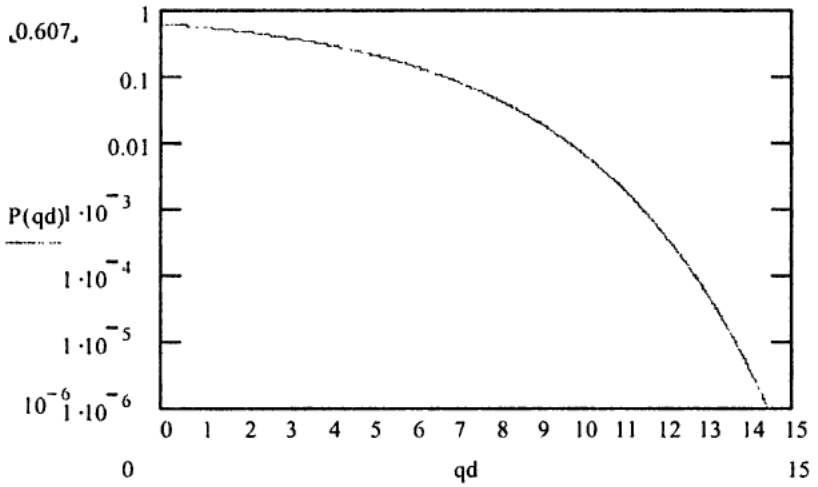
$$\textit{где } q = \frac{U_{СМ}^2}{2\sigma^2} = \left(\frac{P_C}{P_П}\right)_{ВХ} - \qquad (13.31)$$

отношение мощностей сигнала и помехи на входе частотного демодулятора.

Отношение мощностей сигнал/помеха для расчетов удобнее выразить в дБ, для чего запишем:

$$qd = 10\lg(P_C/P_П)_{ВХ} \text{ или } q = (P_C/P_П)_{ВХ} = 10^{0{,}1qd}.$$

График функции (13.30) построен на рис. 13.17, где по оси абсцисс отложено значение q, выраженное в дБ.



Как было показано выше, при воздействии на частотный демодулятор синусоидальной помехи и близости ее амплитуды к амплитуде полезного сигнала, возникает импульсная частотная помеха (см. рис. 13.15).

Рис.13.17

Подобное же явление, по всей видимости, должно иметь место и при воздействии на частотный демодулятор квазигармонической помехи (13.28): в те моменты времени, когда ее амплитуда становится близкой к $U_{СМ}$ (рис. 13.16), в законе изменения мгновенной частоты возникает резкий импульс, который должен мешать полезному сигналу. Но даже при q=10дБ, как следует из графика рис. 13.17, вероятность возникновения импульсной помехи составляет 1%, что может отрицательно сказаться на воспроизведении полезного сигнала. В те же моменты времени, когда амплитуда помехи $U_П(t)$ превысит амплитуду $U_{СМ}$, в ограничителе происходит даже подавление полезного сигнала

Согласно (13.30) и графика на рис. 13.17, с уменьшением отношения мощностей полезного сигнала и помехи на входе частотного демодулятора вероятность превышения амплитудой помехи $U_П(t)$ значения U_0 возрастает и, следовательно, возникновение импульсных частотных помех и подавление полезного сигнала в ограничителе становится более частым. Таков в общих чертах физический механизм явления по ухудшению отношения мощностей полезного сигнала и помехи на выходе частотного демодулятора при снижении мощностей тех же сигналов на входе и объяснение факта нарушения справедливости формулы (13.26) при $q=(P_С/P_П)_{ВХ}<q_{ПОР}$ Для удобства расчетов преобразуем зависимость (13.26) к виду:

$$\left(\frac{P_С}{P_П}\right)_{ВЫХ}(дБ) = 4{,}7 + 20\lg m_ч + \left(\frac{P_С}{P_П}\right)_{ВХ}(дБ). \qquad (13.30)$$

Графики зависимости $(P_С/P_П)_{ВЫХ}=Ф(P_С/P_П)_{ВХ}$ при разных значениях индекса частотной модуляции $m_ч$ приведены на рис. 13.20.

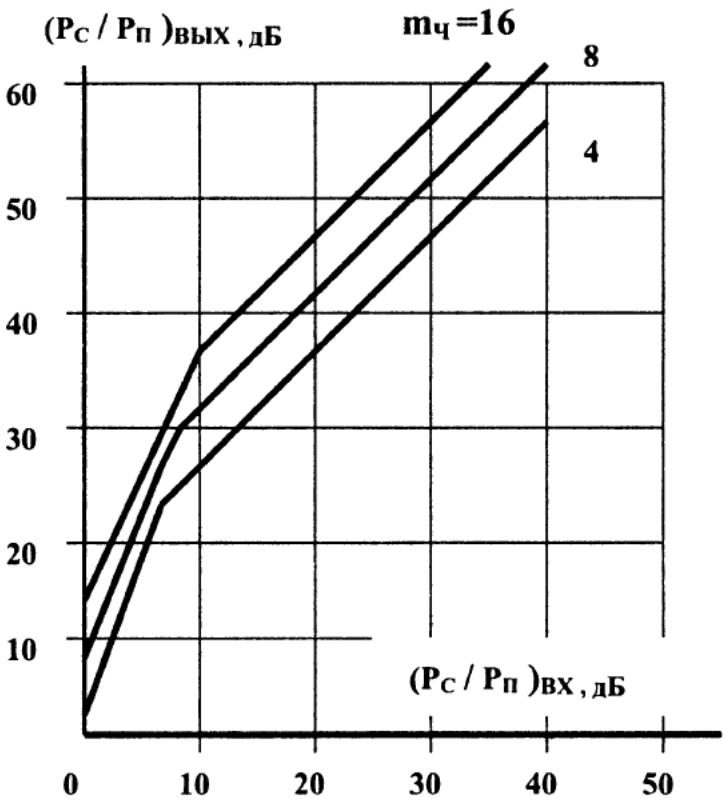


Рис. 13.20

При $q>q_{пор}$ данные графики построены согласно (13.30), при $q<q_{пор}$–на основании данных приведенных в [39].

На графиках четко прослеживается наступление порога при определенных значениях $(P_C/P_П)_{вх}$ в зависимости от значения $m_ч$, причем с увеличением $m_ч$ порог возрастает.

Таким образом, существенный выигрыш в обработке сигнала при частотной модуляции имеет место только при работе выше порога, т.е. при $(P_C/P_П)_{вх}\geq 10...12$ дБ. Этот выигрыш достигается при больших значениях $m_ч$ за счет расширения спектра сигнала и, следовательно, согласно (12.2) базы сигнала и полосы пропускания в высокочастотном тракте радиоприемного устройства, предшествующего частотному демодулятору (рис. 13.11).

Одним из способов снижения уровня порога, что повышает преимущества частотной модуляции, является применение схемы с обратной связью, получившей название "следящий фильтр", впервые предложенной А.И.Винницким [39]. В данной схеме, приведенной на рис. 13.21, имеется фильтр с управляемой центральной частотой, полоса пропускания которого уже, чем это требуется согласно (13.21). Однако за счет перемещения этой полосы, автоматически следящей за изменением закона модулирующего сигнала, удается без заметных искажений полностью пропускать ЧМ-сигнал. Сужение полосы пропускания высокочастотного тракта радиоприемника приводит к уменьшению мощности шумов на входе частотного демодулятора, что и снижает уровень порога.



Рис. 13.21

13.5. Линейный тракт радиоприемника

Перейдем к анализу линейной части радиоприемного устройства (рис. 13.2), назначение которой состоит в усилении принятого антенной радиосигнала до величины, необходимой для блока обработки, и в максимально возможном подавлении помех. Источником помех при приеме являются как внешние источники, краткая характеристика которых дана в § 13.1, так и собственные внутренние шумы.

Физическая природа внутренних шумов связана с тем, что в любом проводнике, сопротивлении, микросхеме, транзисторе, диоде и иных элементах схемы помимо упорядоченного движения электрических зарядов под воздействием внешнего источника сигнала, происходит и хаотическое движение элементарных частиц, создающих флуктуационный, шумовой сигнал. Так что любой участок схемы можно рассматривать как элементарный источник шумового сигнала – случайного стационарного процесса с нормальным распределением и равномерным энергетическим спектром в пределах полосы пропускания приемника. Величина дисперсии этого процесса определяет квадрат напряжения шумов, создаваемых сопротивлением R:

$$(E_Ш)^2 = 4kT_Ш R\Delta f, \qquad (13.31)$$

где $k=1{,}38*10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $T_Ш$ – абсолютная температура, называемая температурой шума, в градусах Кельвина (К), Δf – полоса частот, Гц.

Напряжение $E_Ш$ можно рассматривать как ЭДС шумового генератора, номинальная мощность которого:

$$P_Ш = (E_Ш)^2/4R = (kT_0)*(T_Ш/T_0)\Delta f, \qquad (13.32)$$

где $kT_0=4*10^{-21}$Вт/Гц – спектральная мощность шума при стандартной температуре $T_0=290^0$К.

Мощность стандартного источника шума, имеющего $T_Ш=T_0=290^0$К:

$$P_{Ш0} = (kT_0)*\Delta f. \qquad (13.33)$$

Согласно (13.32) мощность источника шума не зависит от сопротивления R, а определяется температурой нагрева относительно абсолютного нуля $T_Ш$ и полосой пропускания Δf. Поэтому источник шума можно характеризовать как мощностью $P_Ш$, так и температурой $T_Ш$. При абсолютном нуле хаотическое перемещение элементарных частиц прекращается и мощность шума $P_Ш=0$.

Мощность всех внутренних источников шума можно пересчитать ко входу радиоприемника и в целом весь линейный, высокочастотный тракт характеризовать с помощью единого источника шума мощностью $P_{ШПР}$ или температурой $T_{ШПР}$. К тем же входным полюсам можно подключить эквивалентный генератор полезного сигнала принятого антенной, с номинальной мощностью $P_С$, и эквивалентный генератор шума канала радиосвязи $P_{ШК}$, учитывающий шумы космического радиоизлучения, атмосферы и земной

поверхности. При пересчете двух последних сигналов ко входу радиоприемника следует учесть потери в антенно-фидерном тракте. В результате линейный тракт радиоприемника (рис. 13.1) с источниками сигналов примет вид, приведенный на рис. 13.22, где $R_Н$ – есть входное сопротивление блока обработки сигнала.



Рис. 13.22

В целом линейный тракт характеризуется тремя основными параметрами: полосой пропускания $\Delta f_{ПР}$, номинальным коэффициентом усиления полезного сигнала по мощности $К_Р$ и коэффициентом шума $К_Ш$. Раскроем их содержание.

Следует различать полосу пропускания радиоприемника по усилителю ВЧ или СВЧ сигнала и промежуточной частоты, т. е. до и после преобразования сигнала по частоте (рис. 13.11). Поскольку для определения уровня помех на выходе линейного тракта важна полоса пропускания по усилителю промежуточной частоты, то именно данную величину и будем понимать под $\Delta f_{ПР}$ при прямоугольной или близкой к ней АЧХ полосовых фильтров (рис. 13.13).

Номинальный коэффициент усиления линейного тракта по мощности:

$$K_P = P_{CH}/P_{C.} \qquad (13.34)$$

Величина $К_Р$ устанавливается из требуемой мощности сигнала на входе блока обработка сигнала $P_{СН}$ и мощности на входе радиоприемника $P_С$, при которой обеспечивается требуемое отношение мощностей сигнала и шума.

Коэффициент шума определяется, как отношение мощностей сигнала и помехи на входе линейного тракта к тому же отношению на его выходе при замене внешнего источника шума на стандартный с температурой шума T_0=290 К (13.33):

$$K_{Ш} = \frac{\left(P_C / P_{Ш}\right)_{ВХ}}{\left(P_{С.Н} / P_{Ш.Н}\right)_{ВЫХ}}. \qquad (13.35)$$

Шумы усиливаются в линейном тракте также, как и полезный сигнал, что позволяет для мощности шумов в нагрузке записать:

$$P_{ШН}=(P_{ШПР}+P_{Ш})K_{Р}. \qquad (13.36)$$

С учетом (13.34) и (13.36) преобразуем (13.35) к виду:

$$K_{Ш}=P_{ШН}/(P_{Ш}K_{Р})=(P_{ШПР}+P_{Ш})/P_{Ш}=1+(P_{ШПР}/P_{Ш}). \qquad (13.37)$$

Из (13.37) с учетом (13.32) и (13.33) получим для коэффициента шума:

$$K_{Ш}=1+T_{Ш}/T_{0}. \qquad (13.38)$$

Таким образом, коэффициент шума радиоприемника $K_Ш>1$ полностью определяется его эквивалентной шумовой температурой $T_Ш$. Усилители СВЧ высокого качества, называемые малошумящим (МШУ), имеют $T_Ш$=150–200 К. Температура специально охлаждаемых МШУ снижается до $T_Ш$=50–100 К.

С помощью (13.38) рассчитаем чувствительность радиоприемника, определяемую как мощность сигнала на входе радиоприемника, необходимой для получения требуемого отношения мощностей сигнала и помехи на выходе линейного тракта, соединенного с входом блока обработки сигнала (см. рис. 13.1): $C_{СШ}=P_{СН}/P_{ШН}$:

$$P_{ПРМ}=kT_{0}\Delta f_{ПР}C_{СШ}K_{Ш} \ \ (дБ). \qquad (13.39)$$

Та же чувствительность, выраженная в дБ относительно мощности в 1 Вт, с учетом значения kT_0:

$$P_{ПРМ.Д}=10\lg P_{ПРМ}=$$
$$=-174+10\lg\Delta f_{ПР}(кГц)+10\lg C_{С.Ш}+10\lg K_{Ш}\ (дБВт). \qquad (13.40)$$

Чувствительность, выраженная в мкВ, при входном сопротивлении радиоприемника 50 Ом связана с (13.40) следующим соотношением:

$$P_{ПРМ.Д}(дБВт)=-137+20\lg U_{ПРМ.Ч}. \qquad (13.41)$$

Пример расчета.

При $\Delta f_{ПР}$=1000 кГц, $C_{СШ}$=2,5. $T_Ш=290^0$ (или $K_Ш$=2) согласно (13.40) получим:

$P_{ПРМД}$=−137 дБВт.

Согласно (13.41) имеем:

При чувствительности $P_{ПРМД}$=1 мкВ значение $P_{ПРМД}$=−137 дБВт;

При чувствительности $P_{ПРМД}$=0,316 мкВ значение $P_{ПРМД}$=−147 дБВт.

При чувствительности $P_{ПРМД}$=0,1 мкВ значение $P_{ПРМД}$=−157 дБВт.

При расчете реальной чувствительности приемника следует учесть шумы канала радиосвязи $T_{ШК}$, заменив в (13.39) и (13.40) коэффициент шума на множитель $[1+(T_Ш/T_0)+(T_{ШК}/T_0)]$. Такой расчет проводится ниже в гл. 14.

Учтем еще один фактор – потери в фидере, связывающим радиоприемник с антенной. Как указывалось выше, любое активное сопротивление является источником флуктационного шума и поэтому при температуре T_0=290 К коэффициент шума пассивного четырехполюсника (т.е. не содержащего электронные приборы) численно равен его коэффициенту затухания, выраженному через отношение входной и выходной мощностей: $B_Ф=P_{ВХ}/P_{ВЫХ}>1$. В результате коэффициент шума приемника увеличится и примет значение $K_Ш=(1+T_Ш/T_0)B_Ф$.

Коэффициент шума СВЧ транзисторного усилителя рассчитывают, представляя все источники шума транзистора в виде эквивалентных генераторов, отнесенных ко входу устройства. Однако точность таких расчетов невысока и поэтому предпочтение отдается экспериментальным методам. Структурная схема измерений коэффициента шума $K_Ш$, коэффициента усиления по мощности $K_Р$, входного и выходного комплексных сопротивлений транзистора представлена на рис. 13.23.

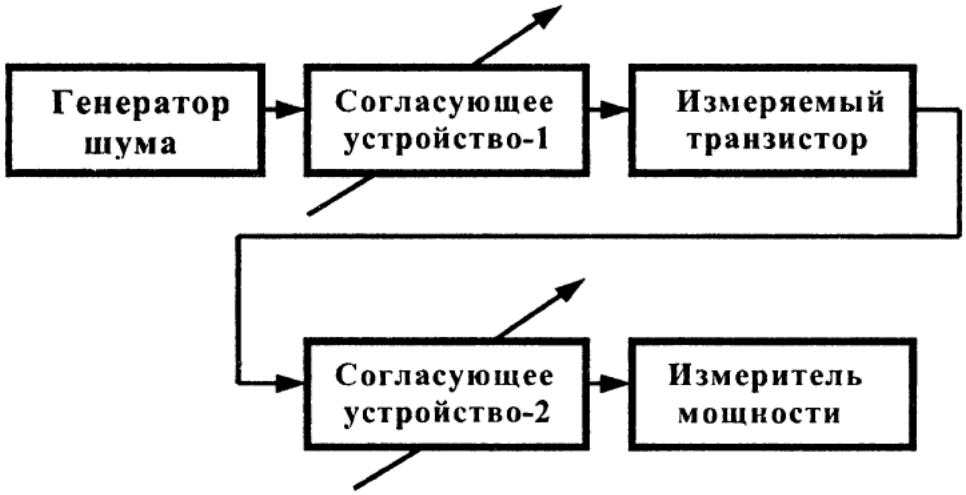


Рис. 13.23

В состав схемы входят: два перестраиваемых согласующих СВЧ трансформатора (на входе и выходе транзистора), генератор шума и измеритель коэффициента усиления $K_Р$ и коэффициента шума $K_Ш$. Поочередно настраивая согласующие устройства, добиваются минимального значения $K_Ш$ и максимального $K_Р$ и измеряют соответствующие им значения входного и выходного сопротивления СВЧ транзистора. При дальнейшем проектировании СВЧ транзисторного усилителя именно данные величины следует положить в основу расчета его согласующих входной и выходной цепей согласно методики, описанной в § 7.4 и 8.5. Следует заметить, что условия получения минимального значения $K_Ш$ и максимального $K_Р$ могут не совпадать. Однако, как правило, это расхождение незначительно.

Глава 14. СПУТНИКО-КОСМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ РАДИОСВЯЗИ

14.1. Три типа информационных систем

В современной технике передачи информации можно выделить три типа систем связи, которым в зависимости от зоны их действия дадим такие названия: глобальные, территориальные и автономные.

Первый тип систем включает интегрированные сети связи между абонентами, объединяющие различные физические каналы: радиоволновые наземные, радиоволновые спутнико-космические, наземные кабельные, главным образом, волоконно-оптические. Такие глобальные сети связи представляют разнообразные по функциональному содержанию услуги громадному количеству коллективных и индивидуальных пользователей и охватывают, как плотнонаселенные и высокоразвитые в технико-экономическом отношении регионы Земли, так и пустынные, малонаселенные области.

С помощью такой глобальной сети связи создана система "Internet", объединяющая миллионы компьютеров по всему миру, обменивающихся информацией на базе современных технологий.

В настоящее время (2001 г.) вступает в действие глобальная система спутнико-космической радиосвязи, охватывающая всю нашу планету и обеспечивающая всемирную телефонную радиосвязь и передачу цифровой информации абонентам, находящимся в любой точке Земли. Разнообразные коллективные и индивидуальные пользователи могут воспользоваться услугами таких глобальных систем радиосвязи и с их помощью удовлетворить информационные потребности, находясь на территории любой страны.

Второе направление в технике связи направлено на информационное обслуживание пользователей одного континента, страны или определенного географического района. Сотовые наземные системы радиосвязи, имеющие сеть базовых станций и обслуживающие абонентов в пределах определенной территории, например Москвы и Московской области, являются наиболее характерным примером систем подобного класса.

Третье направление в технике связи направлено на информационное обслуживание ограниченного числа пользователей в рамках замкнутой, автономной системы, которая обычно является наземной, радиоволновой и принадлежащей определенному производству или предприятию рассредоточенного типа.

Так, например, автотранспортное предприятие может стать коллективным пользователем некоторой территориальной системы радиосвязи (второй тип) или иметь собственную автономную систему радиосвязи со своими автомашинами и автобусами (третий тип). Выбор того или иного типа системы зависит от набора информационных услуг, предоставляемых выбранной системой радиосвязи, стоимости этих услуг и надежности работы. Например, стоимость информационной инфраструктуры не должна превышать, скажем, 5% от затрат основного производства, что может диктовать выбор типа системы радиосвязи. В другом случае, в связи с особым характером производства, достоверность передачи информации

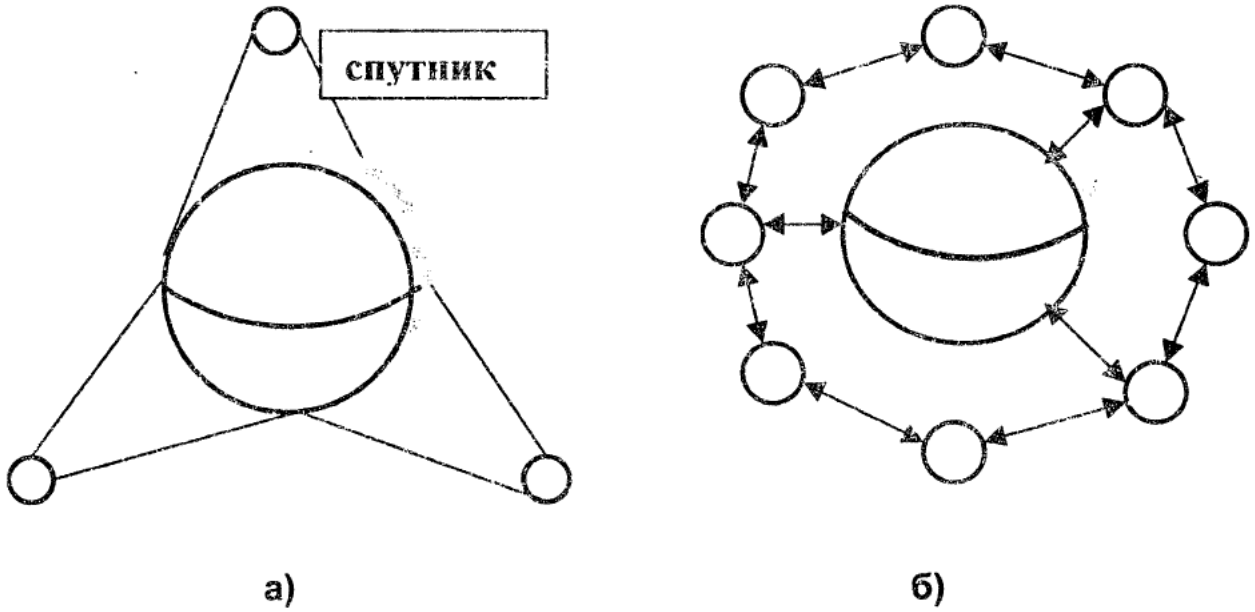
должна быть не хуже, например, 0,9999, с мгновенным сообщением об предаварийной или аварийной ситуации на контролируемых объектах, что сразу отметает определенную группу систем радиосвязи. В третьем случае система радиосвязи не может предоставить весь требуемый набор информационных услуг, например, не обеспечивает передачу компьютерной информации, что сужает выбор конкурирующих между собой систем.

Рассмотрим принципы построения глобальных, территориальных и автономных информационных систем с использованием как спутнико-космических, так и наземных средств радиосвязи.

14.2. Глобальные спутнико-космические радиоэлектронные системы

Околоземные орбиты спутников. Одним из главных классификационных признаков систем космической радиосвязи является тип орбиты, по которой движутся спутники, входящие в систему, с расположенными на их борту ретрансляторами радиосигналов и антеннами. Различают два основных вида околоземных орбит: геостационарные и не геостационарные, которые, в свою очередь, подразделяются на эллиптические, средневысотные и низкие круговые.

При геостационарной орбите спутник, располагаясь в плоскости экватора на высоте, примерно, в 36000км и двигаясь со скоростью вращения Земли вокруг ее оси, зависает над определенной точкой земной поверхности. Антенна такого неподвижного по отношению к наземному наблюдателю спутника постоянно в течение всех 24 часов суток «освещает» одну и ту же область земной поверхности. Поэтому пользователь системы, находящийся на земле в зоне «пятна» антенны, может иметь непрерывную, круглосуточную радиосвязь с другим абонентом, находящимся в той же зоне. Расположив на геостационарной орбите три спутника, имеющими между собой линии связи, можно с их помощью охватить радиосвязью всю Землю, за исключением территорий, лежащих за северным и южным полярными кругами (рис. 14.1,а).



а) б)

Рис. 14.1

Особенность данной системы радиосвязи состоит или в относительно большой мощности радиопередатчика наземного пользователя из-за большой протяженности радиотрассы, или необходимости высокоточного наведения наземной и спутниковой антенн, что не всегда возможно. Однако наметившаяся в последние годы тенденция по использованию на спутниках остронаправленных, многолучевых антенн позволяет разрешать технические трудности, возникающие при создании систем радиосвязи данного класса.

При средневысотной орбите спутник вращается на расстоянии в 5000...15000 км от поверхности Земли. Здесь непрерывную радиосвязь с помощью одного спутника можно иметь только в течение 1,5...2 часов. Поэтому для осуществления непрерывной круглосуточной связи в систему должно входить не менее 8–12 спутников (рис. 14.1,б).

При низкой круговой орбите спутник еще более приближен к Земле, всего на расстояние в 500...2000 км, находясь в зоне радиовидимости наземного наблюдателя только в течение 10...15 мин. Поэтому для реализации глобальной радиосвязи, т. е. охвата всей поверхности Земли и осуществления непрерывной круглосуточной связи, в состав системы должно входить 48–66 низкоорбитальных спутников. Достоинствами такой системы радиосвязи является пониженная мощность радиопередатчика (около 1 Вт) наземного абонента ввиду относительно малой протяженности радиотрассы и исключение требования по точному наведению наземной антенны на спутник. При этом масса всей радиостанции абонента может не превышать 0,5 кг.

Во всех системах для организации глобальной радиосвязи должна быть решена задача не только по связи наземного абонента со спутником, но и по обмену информацией между спутниками. Такая ретрансляция сигнала осуществляется или с помощью межспутниковых линий связи (рис. 14.1,б) или через специальные земные узловые станции сопряжения (рис. 14.2).

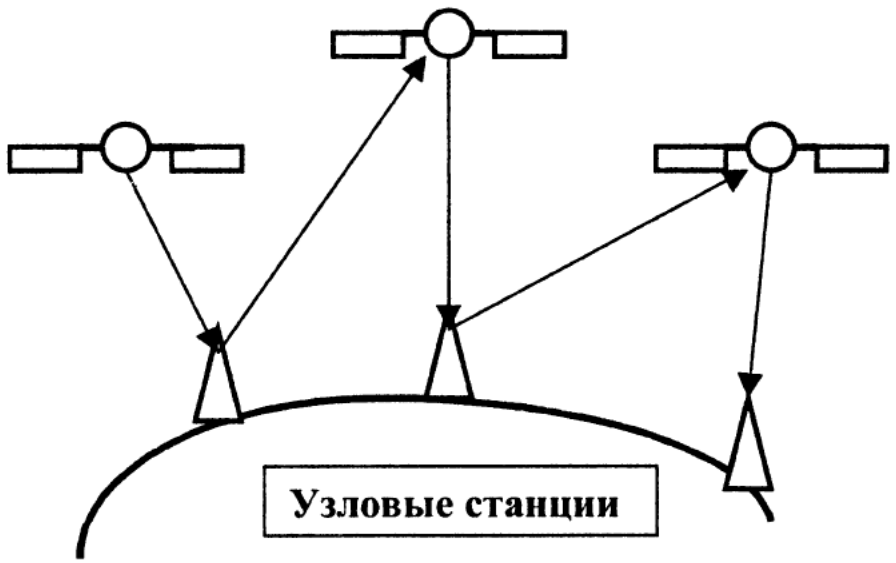


Рис. 14.2

Основные параметры спутнико-космических систем радиосвязи. Спутнико-космические системы радиосвязи состоят из двух основных частей или сегментов: космического и наземного. Космический сегмент включает определенное число спутников с установленными на них ретрансляторами радиосигнала. Наземный сегмент включает: центральную станцию – центр управления системой; узловые станции, осуществляющие связь со спутниками и слежение за их орбитами, и абонентские терминалы по обслуживанию пользователей системы. К числу основных параметров такой системы радиосвязи относятся:

в части космического сегмента системы:

- тип орбиты (геостационарная, средневысотная или низковысотная круговая), ее высота, наклонение и число орбитальных плоскостей;

-количество спутников, их число в одной орбитальной группировке и период обращения вокруг Земли;

- зоны обслуживания на Земле – системы в целом и каждым из спутников,

- параметры спутника: его масса, мощность источника электропитания, срок активного существования, точность удержания на орбите и т. д.;

- параметры ретранслятора спутника: диапазон частот, ширина полосы частот, мощность радиопередатчика, чувствительность радиоприемника, пропускная способность, коэффициенты усиления и ширина диаграммы направленности антенн и т. д.

в части наземного сегмента системы:

- количество наземных станций: центральной по управлению всей системой и узловых или сопряжения для слежения и связи со спутниками, и их радиотехнические параметры;

- максимальное количество абонентских терминалов и их массогабаритные и радиотехнические параметры;

- способ связи одного абонентского терминала с другим: непосредственно через спутник или с использованием одной из узловых станций (рис. 14.2).

С помощью центральной станции осуществляется управление всей системой: удержание с необходимой точностью спутников на их орбитах, передача команд во все звенья и прием с них необходимых телеметрических данных, позволяющих контролировать нормальное функционирование как отдельных частей, так и системы в целом, распределение потоков передаваемой системой информации, контроль за ее доставкой пользователям и т. д. Это управление и контроль осуществляется с помощью центрального компьютера системы по специальной программе. С использованием узловых станций осуществляется контроль за спутниками и связь с ними абонентских терминалов, находящихся в зоне их действия (рис. 14.2). Абонентские терминалы осуществляют связь друг с другом или непосредственно через спутник, или используя в качестве промежуточного ретранслятора одну из узловых станций.

Остановимся более подробно на радиотехнических параметрах спутнико-космических систем радиосвязи.

Диапазон частот. Для спутниковых систем радиосвязи Международным комитетом по регистрации частот (МКРЧ) выделены следующие полосы частот (табл. 14.1).

Таблица 14.1

Наименование диапазона	Полоса частот, ГГц	
	1-й поддиапазон	2-й поддиапазон
L	1,452…1,500	1,610…1,710
S	1,930…2,700	
C	3,400…5,250	5,725…7,075
X	7,250…7,750	7,900…8,400
Ku	10,700…12,750	12,750…14,800
Ka	14,400…26,500	27,000…50,200
K	84,000…86,000	

Для радиосвязи центральной и узловой станций и абонентского терминала с высокоорбитальным геостационарным спутником используются обычно диапазоны частот **C, Ku, Ka.** Для радиосвязи абонентского терминала с низкоорбитальным спутником используются более низкие диапазоны частот: **L, S,** а также диапазон **УКВ**–до 1ГГц (137…138 МГц, 148…150,05 МГц, 400,1 МГц, 406…406,1 МГц).

Пропускная способность системы, определяемая максимально возможным числом ее пользователей и объемом передаваемой информации.

Параметры антенны. Антенна характеризуется: эффективной площадью S_A, углом диаграммы направленности Θ и коэффициентом усиления K_A.

Три данных параметра связаны между собой следующими соотношениями:

$$K_A = 4\pi S_A / \lambda^2 , \qquad (14.1)$$

$$K_A = 36000 / \Theta^2 . \qquad (14.2)$$

где S_A – вм^2; Θ – в град; λ – длина волны, м. Коэффициент усиления антенны в децибелах: K_A (дБ)=10lgK_A.

Реальная чувствительность радиоприемника, определяемая мощностью радиосигнала на его входе для получения требуемого соотношения сигнал–шум $C_{сш}$ на выходе линейной части приемника или входе блока обработки сигнала (рис. 13.3) с учетом шумов канала радиосвязи и собственных шумов устройства. По аналогии с (13.39) имеем:

$$P_{прм}=kT_0\Delta f C_{сш}(T_{шл}+T_{шприм})/T_0, \ Вт \qquad (14.3)$$

где $kT_0=4*10^{-21}$ Вт/Гц – спектральная мощность шума при стандартной температуре T_0=290 К;

$T_{шл}$ – эквивалентная температура шума линии связи;

$T_{шприм}$ – эквивалентная температура шума приемника, пересчитанная к его входу;

Δf – полоса пропускания тракта промежуточной частоты радиоприемника до блока обработки сигнала, Гц;

Та же чувствительность, выраженная в децибелах относительно мощности в 1 Вт:

$$P_{прмД}=10lg\,P_{прм}=$$
$$=-174+10lg\Delta f(кГц)+10lgC_{сш}+10lg[(T_{шл}+T_{шпрм})/T_0],\ дБВт. \quad (14.4)$$

Мощность радиопередатчика $P_{пер}$, определяемая как мощность высокочастотного сигнала, поступающая в передающую антенну. Значение этого параметра ограничено плотностью потока мощности, создаваемого излучениями спутника у поверхности Земли, которая не должна превышать –152 дБВт/м^2 в полосе 4 кГц.

Эффективная изотропная излучаемая мощность (ЭИИМ), определяемая как произведение мощности радиопередатчика на коэффициент усиления антенны, т. е. мощность в луче антенны:

$$ЭИИМ=10lg(P_{пер}K_{ант}),\ дБВт. \quad (14.5)$$

Энергетическая добротность, определяемая с помощью двух параметров ретранслятора: температуры шумов радиоприемника и коэффициента усиления антенны:

$$Q_Э=10lg(K_{ант}/T_{шпрм}),\ дБ/К. \quad (14.6)$$

Скорость передачи цифровой информации по каналу радиосвязи, определяемая как число бит или кбит в секунду. В зависимости от значения данной величины системы связи разделяются на четыре класса:

со сверхнизкими скоростями – менее 1,2 кбит/с;

с низкими скоростями – от 1,2 кбит/с до 9,6 кбит/с;

со средними скоростями – от 9,6 кбит/с до 64 кбит/с;

с высокими скоростями – более 64 кбит/с.

Объем передаваемой служебной информации за сеанс связи с одним объектом. Этот объем определяется количеством и содержанием команд управления и телеметрического контроля, а также объемом служебных команд.

Метод модуляции и способ кодирования сигнала. Обычно используются наиболее помехозащищенные методы модуляции сигнала– фазовый и частотный.

Количество частотных стволов в ретрансляторе. Каждый ствол характеризуется шириной полосы пропускания и количеством объединенных в одном стволе корреспондентов.

Метод многостанционного доступа, связанный с доступом абонентского терминала к общему каналу спутниковой системы радиосвязи.

О методах многостанционного доступа Метод многостанционного доступа во многом определяет функциональную схему спутникового ретранслятора и построение в целом спутнико-космической системы радиосвязи. Поэтому остановимся более подробно на данном вопросе. Через одну наземную станцию такой системы может передаваться большое число аналоговых и цифровых сообщений, объединяемых в один общий многоканальный сигнал. Методы образования группового спектра такого многоканального сообщения те же, что и в радиорелейных линиях связи. Совокупность каналов передачи одной наземной станции образует ствол

связи, характеризуемый определенным значением несущей частоты и ширины спектра излучения, зависящий от полосы частот многоканального сообщения и метода модуляции. Один ствол может использоваться и для передачи только одного широкополосного сообщения, например, телевизионного. Сигналы всех стволов связи, входящих в данную систему, проходят через общий или отдельные ретрансляторы, установленные на спутнике, и переизлучаются на других частотах в сторону Земли. Поэтому различают два канала радиосвязи: Земля-спутник и спутник-Земля. Возможна различная организация доступа отдельных корреспондентов к стволам связи, т. е. различные методы многостанционного доступа в спутниково-космических системах радиосвязи. Основными из них являются:

- с частотным разделением каналов;
- с временным разделением каналов;
- с пространственным разделением каналов;
- с поляризационным разделением каналов;
- с кодовым разделением каналов;
- смешанные.

Рассмотрим первые три способа разделения каналов.

Многостанционный доступ с разнесением по частоте, при котором за каждой наземной станцией или даже отдельным корреспондентом закрепляется определенная полоса частот и все станции могут работать непрерывно и одновременно. Между корреспондентами и стволами предусматриваются защитные частотные интервалы (рис. 14.3).

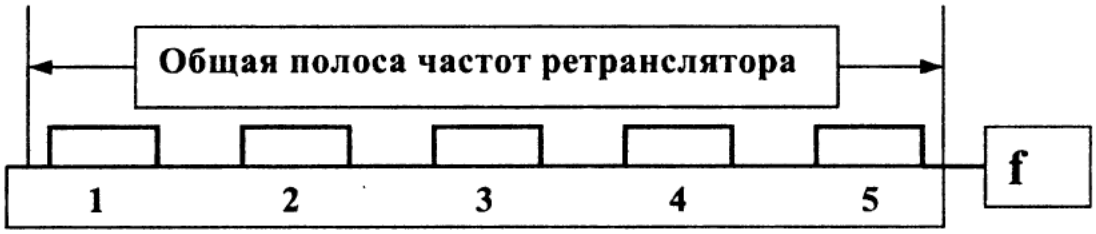


Рис. 14.3

Сам спутниковый ретранслятор при этом строится по принципу перенесения всего спектра частот из одного диапазона в другой, например, из диапазона 6 ГГц – в 4 ГГц или 14 ГГц – в 11 ГГц, без демодуляции сигнала. Радиоприемный тракт в таком ретрансляторе является общим для всех стволов, в нем обеспечивается большой линейный диапазон усиления высокочастотного сигнала. Радиопередающий тракт с целью уменьшения перекрестных помех между стволами строится по принципу закрепления за каждым стволом отдельного тракта усиления сигнала по мощности. Возможная структурная схема одного ствола такого ретранслятора, называемого «прозрачным», приведена на рис. 14.4.

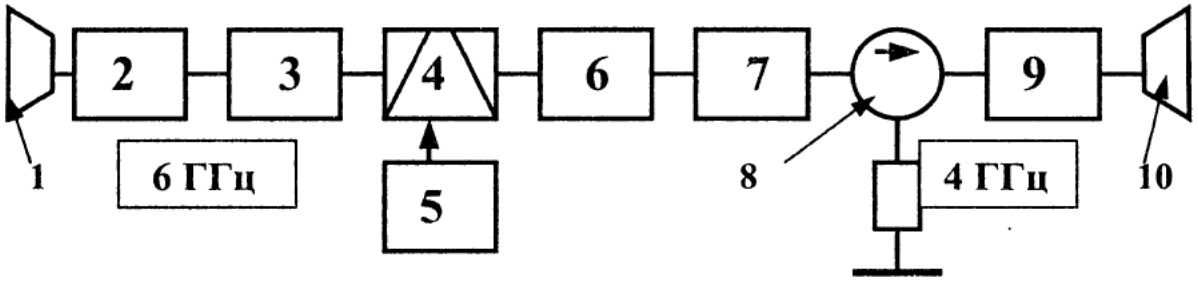


Рис. 14.4

На схеме обозначены: 1, 10 – антенны; 2, 9 – полосовые фильтры; 3 – малошумящий усилитель СВЧ; 4 – смеситель; 5 – гетеродин; 6 – корректор фазы и амплитуды; 7 – усилитель мощности СВЧ; 8 – циркулятор. Разделение и сложение сигналов отдельных стволов производится с помощью мультиплексеров, т. е. специальных многополюсных фильтров.

Другой вариант "прозрачного" ретранслятора предусматривает возможность усиления в одном стволе большого числа несущих колебаний – до 150–200. В этом случае к ретранслятору предъявляются повышенные требования в части линейности тракта усиления мощности высокочастотных колебаний (см. § 4.6).

Многостанционный доступ с разнесением по времени. При таком методе осуществляется поочередная работа корреспондентов во времени при одном значении частоты несущей и общей выделенной полосе частот. В этом случае необходима организация синхронного режима работы всех корреспондентов, объединяемых в одном стволе, при котором каждая наземная станция передает сообщение в строго фиксированные моменты времени. При таком методе доступа в ретрансляторе осуществляется обработка принятых сигналов, включающая их демодуляцию, уплотнение, разнесение во времени и объединение в общий групповой сигнал. Последний после модуляции на другой несущей излучается в сторону наземных станций, каждая из которых выбирает адресованное ей сообщение. Перечисленные операции осуществляются в ретрансляторе по специальной программе с помощью бортового процессора. Сам ретранслятор с демодуляцией принятого сигнала и последующей его модуляцией на другой несущей называют регенеративным.

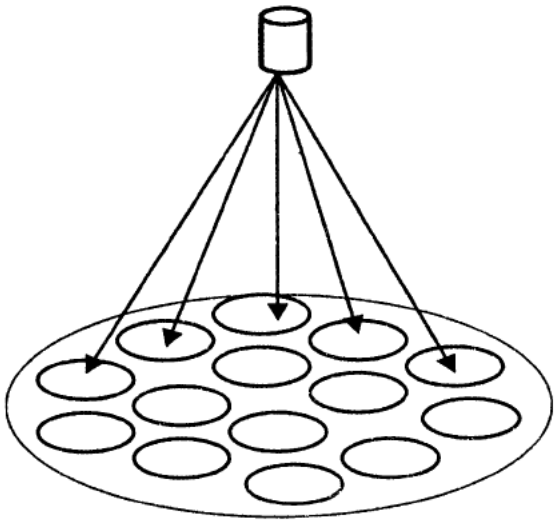


Рис. 14.5

Многостанцинный доступ с пространственным разнесением стволов (рис. 14.5). При данном методе используется многолучевая антенна на спутнике Лучи такой антенны разнесены в пространстве, за каждым из них закрепляется определенный ствол связи и каждый из них обслуживает определенную территорию на земной поверхности (рис. 14.5). Высокий коэффициент усиления антенны в каждом луче и возможность использования одного и того же диапазона

частот в каждом стволе благодаря их пространственному разнесению– являются значительными преимуществами данного метода.

Возможны также **комбинированные методы многостанционного доступа**, например, с частотным разделением по линии Земля – спутник и временным по линии спутник – Земля. При таком методе на вход ретранслятора приходят много несущих, число которых равно числу корреспондентов N, с частотами f_1, f_2, f_3,..., f_N. Принятые сигналы усиливаются, демодулируются и с помощью блока уплотнения расставляются во времени, образуя групповой сигнал. Этот сигнал модулирует (по частоте или фазе) сигнал автогенератора синтезатора и усиливается по мощности. В результате ретранслятор излучается сигнал одной несущей, промодулированный групповым сигналом, содержащим информацию от всех принятых корреспондентов. Пример структурной схемы ретранслятора при таком методе многостанционного доступа приведен на рис. 14.6.

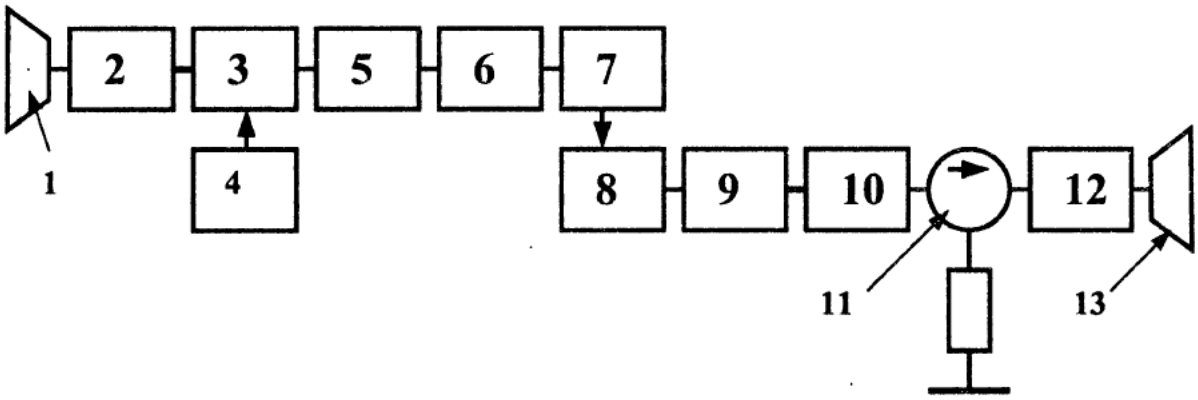


Рис. 14.6

На рис. 14.6 обозначены: 1, 13 – антенны; 2 – усилитель СВЧ; 3 – смеситель; 4 – гетеродин; 5 – усилитель ПЧ; 6 – демодулятор; 7 – блок временного уплотнения; 8 – модулятор; 9 – синтезатор частот; 10 – усилитель мощности СВЧ; 11 – циркулятор; 12 – полосовой фильтр.

Примеры спутнико-космических систем радиосвязи. К 2001г. в мире действовало около 50 спутнико-космических систем радиосвязи, многие из которых на коммерческой основе предлагают свои услуги широкому кругу коллективных и индивидуальных пользователей. Чтобы лучше разобраться в этом обширном рынке информационных услуг для различного рода пользователей рассмотрим несколько характерных примеров.

Система космической радиосвязи с использованием геостационарного спутника по обслуживанию транспортных перевозок грузов в пределах одного или нескольких континентов. Укрупненная структурная схема такой системы приведена на рис. 14.7.

Система включает космический сегмент со связным и навигационным спутниками и наземный сегмент: центральную станцию, диспетчерские пункты связи и до нескольких десятков тысяч мобильных абонентов – транспортных средств. Система позволяет осуществлять двусторонний обмен текстовой информацией водителя с диспетчером и отслеживать местоположение автомашины на всем пути ее следования. Одна из таких систем (**EUTELTRACS**) охватывает территорию Северной Африки, Ближ-

него Востока и Европы, в том числе и европейскую часть России. Весь информационный поток в сети связи замыкается на центральную станцию, рядом с которой располагается станция маршрутизации, осуществляющая анализ всех принятых сообщений и дающая разрешение на установление соединения. Кроме того, в сети имеется несколько диспетчерских пунктов, устанавливающих непосредственную связь с абонентом.

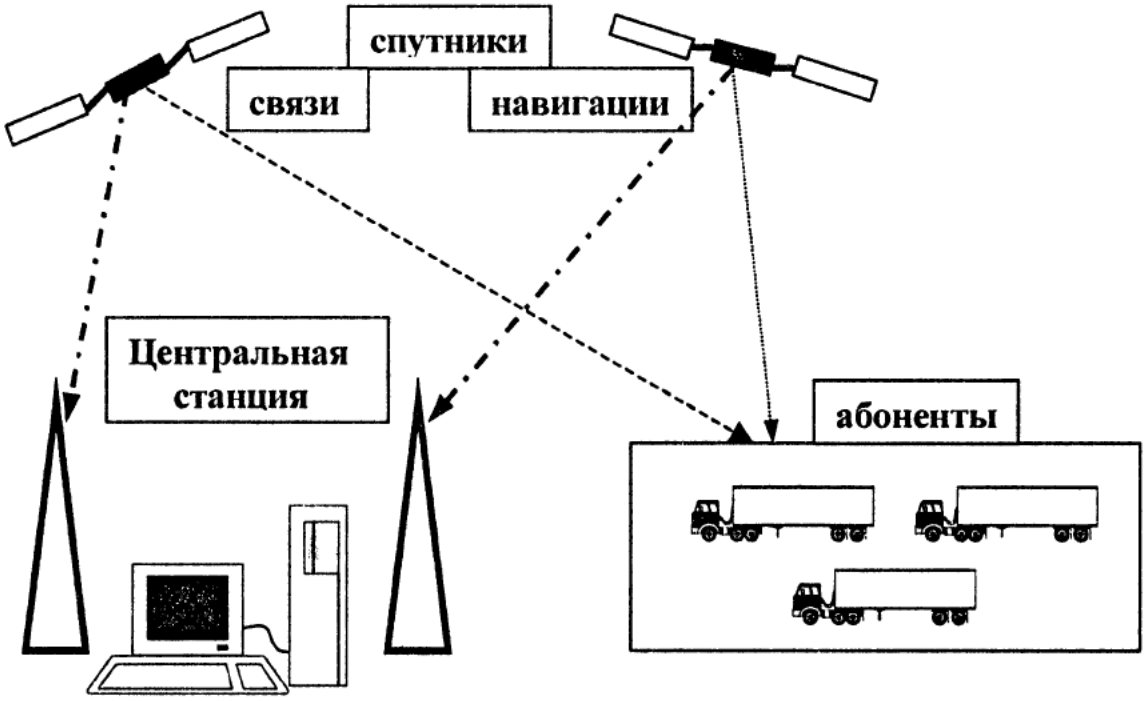


Рис. 14.7

Основные технические характеристики системы:

тип орбиты спутника – геостационарный;

количество спутников – 2 (радиосвязной и навигационный);

количество стволов – два для радиосвязи и один для навигации;

диапазон частот по линии центральная станция – спутник – 14/11 ГГц;

скорость передачи 5…15 кбит/с.

Абонентский терминал, устанавливаемый на автомашине, имеет следующие параметры:

мощность передатчика – 1 Вт;

ЭИИМ – 19 дБВт;

скорость передачи – 55…165 бит/с,

длина стандартного сообщения – 1900 символов.

Система космической радиосвязи с использованием геостационарного спутника по обеспечению мобильной телефонной радиосвязи и передачи данных в пределах одного континента. Одна из подобных систем **(MSAT)**, принадлежащая Канаде, охватывает Северную Америку, обеспечивая телефонную радиосвязь мобильным абонентам, находящимся в автомобиле и самолете. Система при передаче данных может использоваться и для контроля работы удаленных стационарных и подвижных производственных объектов. Основные характеристики данной системы:

тип орбиты спутника – геостационарный;

количество спутников – 1;

количество стволов – 6;

пропускная способность системы – 400 тысяч абонентов;

диапазон частот по линии центральная станция – спутник – 11/14 ГГц;

диапазон частот по линии абонентский терминал – спутник – 1,5/1,6 ГГц;

параметры спутникового ретранслятора: ЭИИМ=42…65 дБВт;

G/T=–4 дБ/К (прямой канал), 2,3 дБ/К (обратный канал), количество телефонных каналов на ствол от 300 до 400.

Параметры стационарного и мобильного терминала:

ЭИИМ=0,5 дБВт (мобильный) и 16,5 дБВт (стационарный);

G/T=12…26дБ/К (для разных типов антенн), скорость передачи 2,4…6,4 кбит/с.

Система космической радиосвязи с использованием от четырех до нескольких десятков низкоорбитальных спутников для сбора данных с необслуживаемых объектов, передачи аварийных и экстренных сообщений. Например, в такой системе парк наземных радиомаяков, подключенных к датчикам экологического контроля, позволяют отслеживать состояние среды на обширных территориях: возникновение лесных пожаров, выброс в атмосферу газов химических предприятий и т. д., и своевременно принимать необходимые меры по их локализации. В системе с небольшим числом спутников обычно реализуется режим «электронной почты», состоящий в следующем. Абонентский пост передает сообщение на спутник при появлении последнего в зоне его радиовидимости. Принятые спутником данные запоминаются в бортовом блоке памяти и «сбрасываются» по радиоканалу на землю при прохождении космическим аппаратом зоны радиовидимости получателя информации. Транспортные протоколы программного обеспечения компьютеров системы позволяют формировать пакеты данных, доставляемых по разным маршрутам с использованием наземных линий телекоммуникаций.

Приведем возможные параметры такой системы, предназначенной для передачи в режиме «электронной почты» по спутниковому каналу метеорологических, экологических и аварийных сообщений от стационарных и подвижных объектов и определения их местоположения, а также для проведения поисково-спасательных работ на суше и воде. Основные характеристики системы:

тип орбиты спутника – круговая низкоорбитальная, с высотой 1000км и периодом обращения спутника 105 мин;

количество спутников – 4;

пропускная способность системы – 50 тысяч абонентов, в одном сеансе – 200, на одном витке – 2000;

точность определения географических координат объекта – 2…5 км.

Параметры радиомаяка диапазона **121,5 МГц**: мощность 0,1 Вт, модуляция – АМ, длительность элементарной посылки – 0,25…0,5 с, частота 300…1600Гц.

Параметры радиомаяка диапазона **405,9 МГц**: мощность 5 Вт, модуляция – ФМ, длительность элементарной посылки – 0,44 с, максимальный объем данных в сеансе – 240 бит.

Глобальная спутнико-космическая система радиосвязи с использованием нескольких десятков низкоорбитальных спутников и охватывающая всю территорию Земли – GLOBALSTAR.

Система обеспечивает всемирную телефонную и пейджинговую радиосвязь и передачу данных абонентам, находящимся в любой точке Земли, а также местонахождение подвижных объектов.

Космический сегмент системы «**GLOBALSTAR**» включает 48 основных и 8 резервных спутников, вращающихся в 8 орбитальных плоскостях на низких околоземных орбитах при расстоянии 1400км от Земли. Создаваемое спутниками радиополе полностью охватывает всю нашу планету. Поэтому абонент системы, находясь в любой точке Земли может в любой момент времени за считанные секунды связаться с любым другим абонентом системы, месторасположение которого также может быть произвольным. В этом и состоит главное преимущество глобальной системы радиосвязи «**GLOBALSTAR**» перед действующими системами сотовой радиосвязи, охватывающими только 3% Земли и имеющими ограниченный радиус действия в пределах нескольких сотен километров. С помощью терминалов пользователь системы «**GLOBALSTAR**» имеет возможность войти в действующие телекоммуникационные системы.

Принцип построения системы «**GLOBALSTAR**» совпадает в основных чертах с наземными сотовыми системами радиосвязи. Главное отличие состоит в переносе в космическое пространство перемещающихся ретрансляционных базовых станций. В системе отсутствуют прямая связь между спутниками, а передача информации от одного спутника к другому осуществляется через наземные узловые станции (рис. 14.2), число которых после полного ввода системы в эксплуатацию должно достигнуть 210.

На каждом спутнике установлены ретранслятор прозрачного типа (рис. 14.4) и многолучевая антенна, создающая на Земле 16 одновременно перемещающихся сот диаметром 1600км с временем радиовидимости в одном луче в 2 мин.. Поэтому каждые 2 мин. связь с корреспондентом автоматически передается из одной соты в другую.

Основные радиотехнические параметры системы:

диапазоны частот:

по линии "терминал – спутник" .....1610…1626,5 МГц

по линии "спутник – терминал "..... .....2483,5…2500 МГц

по линии " спутник – узловая станция "..... .....6875…7055 МГц

по линии " узловая станция – спутник "..... .....5091…5250 МГц

ширина полосы частот в одном луче ....16,5 МГц

число каналов в полосе частот ....1,3 МГц…127

Параметры спутникового ретранслятора по связи с абонентским терминалом:

суммарная выходная мощность спутникового ретранслятора абонентских станций (L/S диапазон) – 240 Вт, с возможностью перераспределения мощности между лучами; ЭИИМ=–2,9 дБВт (в пересчете на канал 2,4 кбит/с), добротность G/T=–10 дБ/К, коэффициент усиления антенны $К_А$=12–17 дБ, шумовая температура – 261 К, количество информационных каналов – 118.

Параметры спутникового ретранслятора по связи с центральной станцией:

выходная мощность радиопередатчика – 140 Вт; ЭИИМ=–27,7 дБВт (в пересчете на канал 2,4 кбит/с); добротность G/T=–13,7 дБ/К; коэффициент усиления приемной антенны $К_А$=3,6 дБ; передающей $К_А$=1 дБ; пропускная способность на один спутник – 2400 каналов.

Параметры абонентского терминала:

выходная мощность радиопередатчика – 0,6 Вт (портативный); 3 Вт (мобильный); ЭИИМ=–0,7 дБВт, добротность G/T=–22 дБ/К; скорость передачи – 2,4 кбит/с; шумовая температура – 260 К.

Предполагается, что к 2012г. система «**GLOBALSTAR**» будет обслуживать 14 миллионов пользователей во всех странах Мира.

14.3. Расчет космической линии радиосвязи

Первым шагом при проектировании спутнико-космической системы радиосвязи является расчет радиолинии: спутниковый ретранслятор – наземная станция или абонентский терминал. Исходными данными для такого расчета являются:

- протяженность линии радиотрассы – прямого луча – между антеннами спутника и наземной станцией, т. е. значения R;
- выбор типа антенн и определение их параметров согласно (14.1) и (14.2);
- выбор диапазона частот или длины волны λ;
- определение затухания в атмосфере Земли $В_{тр}$ с помощью таблиц или графиков в зависимости от длины волны λ;
- определение затухания в антенно-фидерных трактах спутниковой и наземной радиостанций $В_{фид}$;
- определение требуемой полосы пропускания радиоприемника по промежуточной полосе $\Delta f_{\text{п}}$ исходя из заданной скорости передачи сообщения, выбранного метода модуляции и нестабильности частоты сигналов несущей и гетеродина;
- определение требуемого соотношения сигнал – шум на входе блока обработки сигнала радиоприемника $С_{сш}$ (рис. 13.3);
- расчет реальной чувствительности радиоприемника согласно (14.3) или (14.4).

В формулах (14.3) и (14.4) значение температуры шумов канала радиосвязи $Т_{шл}(f)$, обусловленной радиоизлучением Галактики и атмосферным поглощением, можно определить с помощью графиков, приведенных на рис. 14.8 [40].

Конечная цель расчета радиолинии состоит в определении мощности радиопередатчика, обеспечивающей устойчивую радиосвязь при передаче требуемого объема информации с заданной скоростью.

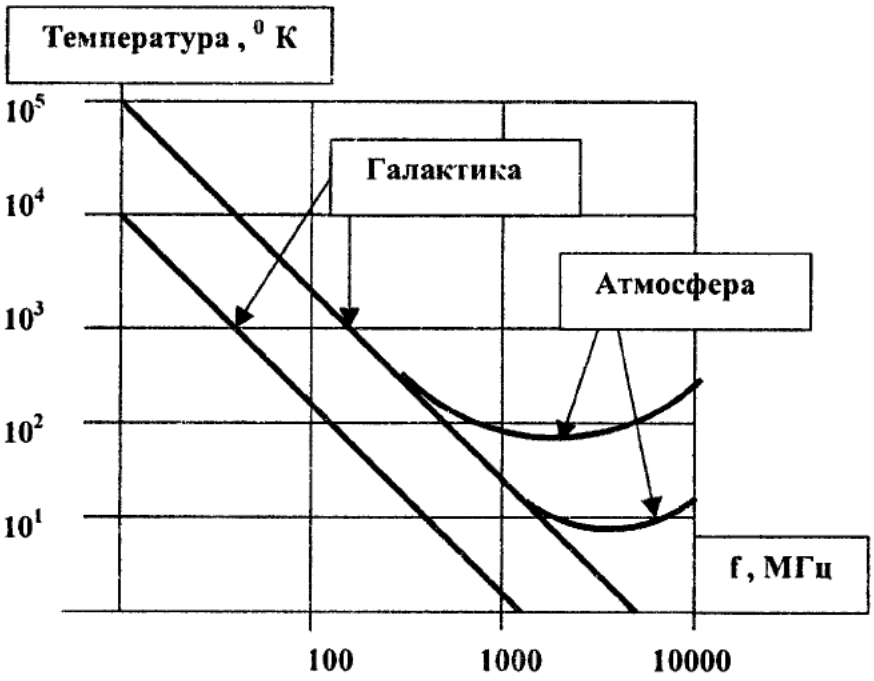


Рис. 14.8

Предположим, что точечный источник равномерно излучает сигнал мощностью $P_{изл}$ по всей сфере. Тогда на расстоянии R на площадке размером S_A мощность сигнал составит (рис. 14.9):

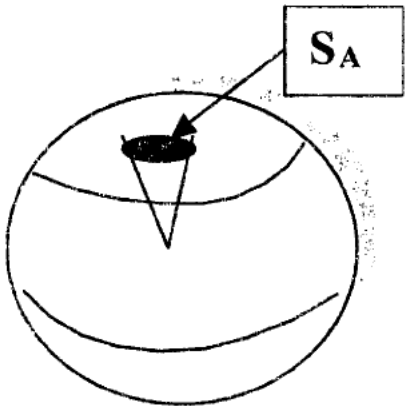


Рис. 14.9

$$P_c = P_{изл} S_A / 4\pi R^2. \qquad (14.7)$$

Заменив P_c на реальную чувствительность радиоприемника $P_{прм}$, а $P_{изл}$ на ЭИИМ, т. е. произведение $P_{пер}K_{ант}$, получим из (14.7) с учетом коэффициентов потерь в тропосфере и фидере ($B_{тр}$ и $B_{фид}$) следующую формулу по определению требуемой мощности радиопередатчика:

$$P_{пер} = 4\pi R^2 P_{прм} B_{тр} B_{фид} / K_{пер} S_{прм}, \qquad (14.8)$$

где $S_{прм}=S_A$ – площадь приемной антенны.

При неизменной площади передающей ($S_{пер}$) и приемной($S_{прм}$) антенн с учетом (14.1) преобразуем (14.8) к виду:

$$P_{пер} = R^2 \lambda^2 P_{прм} B_{тр} B_{фид} / S_{пер} S_{прм}. \qquad (14.9)$$

При неизменном значении коэффициентов усиления антенн формула (14.8) примет вид:

$$P_{пер} = (4\pi)^2 R^2 P_{прм} B_{тр} B_{фид} / \lambda^2 K_{пер} K_{прм}. \qquad (14.10)$$

Из формулы (14.8) следует, что при $K_{пер}$=const и $S_{прм}$=const энергетика радиолинии практически не зависит от длины волны λ, значение которой может только влиять на величину коэффициента $B_{тр}$. При неизменной площади обеих антенн согласно (14.9) требуемая мощность радиопередатчика возрастает пропорционально квадрату длины волны λ^2, а при неизменных значениях их коэффициентов усиления – наоборот уменьшается в λ^2 раз. Однако при этом согласно (14.2) соответствующим образом меняется и ширина диаграммы направленности антенн и, следовательно, зона обслуживания наземных корреспондентов. Так согласно (14.9) при $S_{пер}$=const и $S_{прм}$=const с целью уменьшения мощности радиопередатчика следует работать в более высокочастотных диапазонах. Однако при этом согласно (14.1) и (14.2) сужается луч антенны и уменьшается зона обслуживания наземных корреспондентов.

Для проведения расчетов значения параметров, входящих в формулы (14.8)–(14.10), целесообразнее выразить в децибелах. Тогда, например, формула (14.8) примет вид:

$$P_{перД}=10lgP_{пер}=$$
$$=71+20lgR(км)+10lgP_{прм}+10lg(B_{тр}B_{фид})-10lgK_{пер}-10lgS_{прм}. \quad (14.11)$$

Выразим также в децибелах относительно 1 Вт чувствительность радиоприемника:

$$P_{прм.Д}=10lgP_{прм}=$$
$$=-174+10lg\Delta f(кГц)+10lgC_{с.ш}+10lgK_{Т},\ дБВт \quad (14.12)$$

где $K_Т=(T_{шл.}+T_{шпрм})/T_0$ – реальный коэффициент шума (с учетом шума линии радиосвязи).

Пример расчета. Согласно формулам (14.11)–(14.12) произведем расчет линии космической радиосвязи при следующих исходных условиях:

орбита спутника – низкоорбитальная ..... R=1000км
полоса пропускания радиоприемника ..... Δf=40кГц
температура шума радиолинии ..... $T_{шл}$=700 К
температура шума радиоприемника ..... $T_{шпрм}$=500 К
требуемое соотношение сигнал–шум ..... $C_{сш}$=10
коэффициент потерь в атмосфере ..... $B_{тр}$=3 дБ
коэффициент потерь в фидерах ..... $B_{фид}$=2 дБ
коэффициент усиления передающей антенны ..... $K_{пер}$=10
площадь приемной антенны ..... $S_{прм}$=0,1 м^2

Согласно (14.12) определим реальную чувствительность радиоприемника спутникового ретранслятора:

$P_{прм}$(дБВт)=–174+10lg40+10lg10+10lg4=–174+16+10+6=–142 дБВт.

Согласно (14.11) т мощность радиопередатчика наземного абонента:

$P_{пер}$=71+20 lg1000–142+2+3–10lg10–10lg0,1=–6дБВт или $P_{пер}$=0,25 Вт.

Как видно из приведенного примера, для радиосвязи наземного абонента со спутником в виду работы прямым лучом достаточна мощность радиопередатчика с весьма малой мощностью в 250 мВт.

Программа по расчету космической линии радиосвязи согласно (14.11) приведена на рис. 14.10. В программе приняты следующие обозначения:

P1, P2, P3 – требуемая мощность радиопередатчика, дБВт;
PS – чувствительность радиоприемника $P_{прм}$, дБВт;
X – протяженность радиотрассы R, км;
ВТ – потери в тропосфере, дБ;
ВФ – потери в фидере, дБ;
КА – коэффициент усиления передающей антенны;
S – площадь приемной антенны $S_{прм}$, $м^2$.

$BT := 3 \qquad B\Phi := 2 \qquad KA := 10 \qquad S := 0.1$

$ORIGIN := 1 \qquad PS := \begin{pmatrix} -137 \\ -142 \\ -157 \end{pmatrix}$

$$P1(X) := 71 + 20 \cdot \log(X) + BT + B\Phi - 10 \cdot \log(KA) - 10 \cdot \log(S) + PS_1$$

$$P2(X) := 71 + 20 \cdot \log(X) + BT + B\Phi - 10 \cdot \log(KA) - 10 \cdot \log(S) + PS_2$$

$$P3(X) := 71 + 20 \cdot \log(X) + BT + B\Phi - 10 \cdot \log(KA) - 10 \cdot \log(S) + PS_3$$

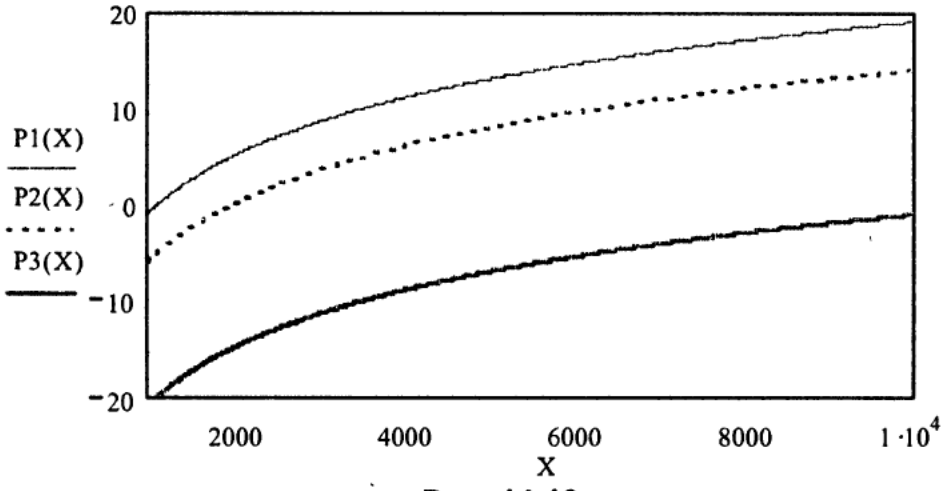


Рис. 14.10

На том же рис. 14.10 построены графики зависимости $P_{перд}(R)$ при трех значениях чувствительности радиоприемника:–137, –147, –157 дБВт. Данные графики позволяют проследить, как меняется требуемая мощность бортового спутникового радиопередатчика в зависимости от протяженности радиотрассы и параметров антенн, чувствительности радиоприемника, затухания в атмосфере и за счет фидера. По программе, введя новые исходные данные, можно быстро произвести необходимые расчеты.

Глава 15. НАЗЕМНЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ ПО ИНФОРМАЦИОННОМУ ОБСЛУЖИВАНИЮ ПРОИЗВОДСТВ РАССРЕДОТОЧЕННОГО ТИПА.

15.1. Назначение, основные функции и структура системы

Рассмотрим взаимодействие компьютера с радиотехническими устройствами в рамках единой автоматизированной системы. В качестве таковой выберем компьютеризированную радиоэлектронную систему по контролю и управлению производственными объектами рассредоточенного типа.

Всестороннее информационное обслуживание современных производств является непременным условием их эффективного функционирования и повышенной рентабельности. В понятие «информационное обслуживание» входит и контроль за протеканием технологических процессов, и дистанционное управление различными агрегатами и машинами, и своевременное оповещение об аварийных и даже предаварийных ситуациях во всех звеньях производственного цикла, и дистанционная охранная сигнализация, и возможность обмена оперативной информацией между участниками производственного процесса, и передача компьютерной информации. Особенно актуально оптимальное решение данной проблемы для производств рассредоточенного типа, когда их отдельные участки и объекты удалены друг от друга на значительные расстояния–сотни и даже тысячи и десятки тысяч километров, а производственные процессы протекают в режиме непрерывного технологического цикла, В качестве примера таких производств можно назвать нефтяные и газовые промыслы с их системой трубопроводов протяженностью в тысячи километров по перекачке нефти и газа или автотранспортные предприятия, осуществляющие межконтинентальные перевозки грузов и нуждающиеся в непрерывном контроле их местонахождения. Без надежной радиосвязи, без возможности оперативного обмена информацией между объектами и участниками производственного процесса в подобного рода предприятиях рассредоточенного типа невозможно порой их нормальное функционирование, не говоря уже об их эффективной и рентабельной работе.

Для оптимального проектирования радиоэлектронных систем по обслуживанию производств рассредоточенного типа необходимо глубже и всесторонне разобраться с протекающими в них процессами в информационном аспекте. Поэтому рассмотрим общие принципы функционирования производств рассредоточенного типа, что позволяет сформулировать исходные условия для расчета радиоэлектронной системы многофункционального действия. На конкретном примере построения одной из систем покажем, как современная радиотехника самым тесным образом соприкасается с информационными технологиями.

При всем многообразии производств различного профиля по территориальному признаку их можно разбить на две большие группы: сосредоточенные на одной, пусть и обширной территории (заводы и фабрики), и рассредоточенные в виде стационарных или перемещающихся объектов

на огромных пространствах, порой в пределах одного или даже нескольких континентов. Именно о таких предприятиях и производствах рассредоточенного типа, далеких друг от друга в технологическом плане, но родственных в информационном аспекте, и пойдет далее речь. К их числу относятся:

- газовые и нефтяные промыслы и трубопроводы по перекачке нефти и газа;
- системы водоснабжения и водоотведения;
- компании по добыче полезных ископаемых: угля, золота, алмазов и т. д., с большим числом рудников и карьеров;
- парки из "малых" и "мини" гидро- и ветроэлектростанций, расположенные на большой территории, с централизованным управлением;
- обширные стройки и горнообогатительные комбинаты;
- транспортные предприятия, нуждающиеся в непрерывном контроле перевозимых грузов на всем пути их следования;
- мониторинг окружающей среды путем автоматизированного сбора данных с датчиков экологического и метеорологического контроля;
- автоматизированный сбор данных с электрических, газовых и водяных датчиков;
- службы городского хозяйства и т. д.

Во всех перечисленных предприятиях на каждом из объектов производственный процесс протекает как по собственному, внутреннему циклу, так и по связям между объектами: непосредственно или по информационным каналам. При этом возникает проблема по выбору наиболее оптимального и экономически выгодного метода информационного обмена между каждым из объектов и центральным диспетчерским пунктом, руководящим всем процессом в системе.

При всем разнообразии производств рассредоточенного типа протекающие в них процессы в информационном аспекте можно свести к следующим функциям:

- контролю состояния и параметров объектов путем считывания показаний с аналоговых, цифровых и релейных датчиков;
- управлению различными агрегатами и машинами: их включению-выключению или дискретному изменению режима работы;
- плавному автоматическому регулированию параметров объекта при изменении задающего воздействия или внешних условий работы;
- охранной сигнализации с дистанционным оповещением,

–обмену текстовой или речевой информацией между обслуживающим объект персоналом и диспетчерским пунктом;

- обмену компьютерной информацией;
- видео-наблюдению за состоянием работы объекта;
- определению с определенной точностью географических координат перемещающегося в пространстве объекта.

В большинстве случаев не требуется выполнение полного набора перечисленных функций. Например, в системе экологического контроля требуется выполнение только первой функции, связанной со считыванием показаний датчиков. В системе контроля за перевозкой грузов транспортными средствами на большие расстояния требуется выполнение двух функций: речевой или факсимильной радиосвязи с водителем и определение географических координат автомашины. В системе управления по

радио парком гидроэлектростанций следует реализовать пять функций: телеконтроль, телесигнализацию, телеуправление, телерегулирование и связь. Примеры можно продолжить. Отметим только, что в каждом конкретном случае важно установить полный набор выполняемых производство функций, что предопределяет правильный выбор обслуживающей информационной системы.

Анализ перечисленных функций позволяет сформулировать общие требования, которым должны удовлетворять информационно-управляющие системы, обслуживающие современные производства рассредоточенного типа:

- контроль за работой всех рассредоточенных производственных объектов и их управление должны осуществляться с единого центрального диспетчерского пункта (ЦДП);
- этот контроль должен осуществляться в автоматическом режиме, что позволяет организовать непрерывную, круглосуточную работу в обслуживаемом производстве по безлюдной технологии;
- все протекающие технологические процессы в системе должны находиться «под наблюдением» компьютера, являющегося составной частью ЦДП, на который должна стекаться необходимая информация со всех производственных объектов;
- выполнение перечисленных выше информационных функций (телеконтроль, телесигнализация, телеуправление, телерегулирование, связь и т. д.) должно быть взаимно увязано и реализовываться в рамках единой специализированной рабочей программы;
- следует обеспечить надежную телекоммуникационную связь между центральным диспетчерским пунктом и объектами контроля и управления с возможностью передачи необходимого объема информации с определенной скоростью.

Сформулированные требования должны быть положены в основу проектирования информационно-управляющей системы и ее программного обеспечения для конкретного вида производства.

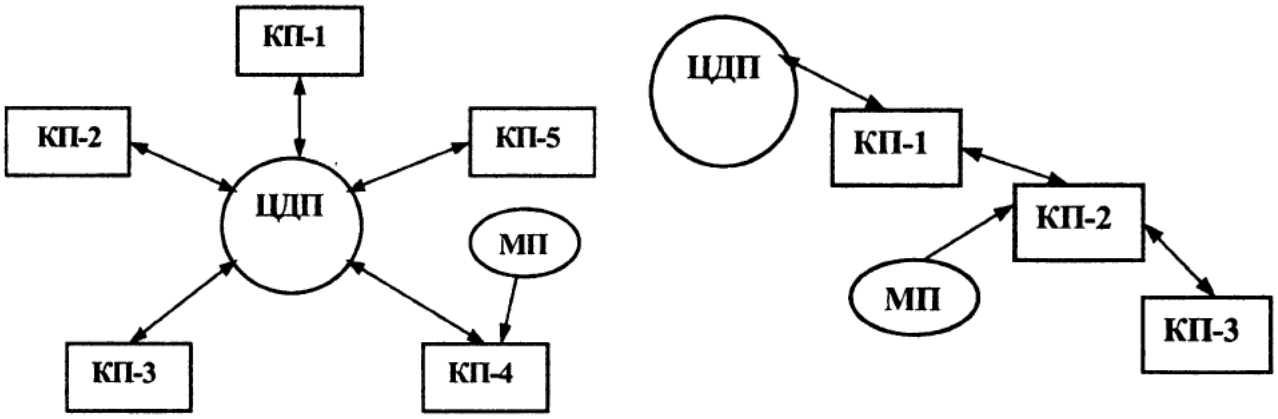
15.2. Структура, режимы работы и параметры Информационно-управляющей системы

В производствах рассредоточенного типа можно выделить три типа объектов:

- центральный диспетчерский пункт (ЦДП), на который стекается вся информация со всех объектов;
- контролируемые пункты 1-го уровня (КП): стационарные и передвижные производственные объекты, имеющие прямую связь с ЦДП;
- контролируемые, условно «малые» пункты 2-го уровня (МП): производственные объекты, имеющие связь с ЦДП через один из КП, выполняющего в таком случае роль ретранслятора.

По схеме информационной связи между ЦДП и КП различают три типа структур: радиальную, линейную и радиально–линейную (рис. 15.1). При радиальной структуре все КП имеют прямую связь с ЦДП (рис. 15.1,а); при линейной – связь с ЦДП осуществляется по «цепочке»: от одного КП

к другому, как в радиорелейных линиях связи (рис. 15.1,б); при радиально-линейной – имеются оба вида связей. Во всех трех случаях с каждым из КП может быть связано определенное число дополнительных «малых» объектов контроля МП. Связь между ЦДП и КП обычно двусторонняя, между КП и МП – односторонняя.



а) **Рис. 15.1** б)

ЦДП должен включать радиостанцию и компьютер, каждый из КП – радиостанцию и контроллер, к которому подключаются датчики контроля и объекты управления, каждый МП – только радиопередатчик и упрощенный контроллер, к которому присоединяются датчики контроля (рис. 15.2).



Рис. 15.2

На ЦДП системы осуществляется обработка, хранение, отображение и регистрация всей текущей и расчетной информации, поступающей по радиоканалу со всех контролируемых пунктов, а также обнаружение, оперативное отображение, хранение и регистрация отклонения всех технологических показателей от нормативных значений или возникновение на объектах предаварийных или аварийных ситуаций. Вся поступающая информация отображается с помощью компьютера ЦДП на видеограммах, технологических схемах и в табличной форме в реальном масштабе времени и архивируется. С ЦДП осуществляется управление и регулирование

всеми агрегатами и машинами, располагаемыми на КП и МП. Программное обеспечение системы должно допускать ее развитие и возможность внесения изменений по составу, содержанию и количеству контролируемых и управляемых объектов.

Анализ разнообразных производственных процессов показывает, что в большинстве случаев нет необходимости непрерывно сообщать о состоянии объектов с КП на ЦДП. Этот контроль со стороны ЦДП при нормальном протекании технологического процесса на всех объектах может носить дискретный характер с периодичностью от нескольких минут до нескольких часов. И только при возникновении на объектах аварийных или предаварийных ситуаций информация с КП на ЦДП должна поступать практически немедленно по инициативе аварийного КП. Кроме того, следует обеспечить обмен служебной информацией между персоналом КП и ЦДП и одновременную передачу с ЦДП на все КП директивной или иной общей для всех информации. Таким образом, в рассматриваемой многофункциональной системе следует обеспечить четыре режима работы:

- автоматический циклический, при котором информация запрашивается и передается на ЦДП со всех КП в заданном ритме;
- аварийный, при котором сигнал, содержащий сведения о характере аварии на КП, передается немедленно на ЦДП;
- циркулярный, при котором текстовая информация–телетайпное сообщение – передается с ЦДП одновременно на все КП;
- обмен телетайпной информацией между ЦДП с КП.

В целом рассматриваемую информационно-управляющую радиоэлектронную систему определяют следующие технические характеристики:

- число контролируемых пунктов (КП и МП) (рис. 15.2);
- режим эксплуатации (обычно непрерывный, круглосуточный);
- информационная емкость одного КП или МП;
- число каналов телеизмерения (аналоговые и цифровые датчики);
- число каналов телесигнализации (релейные датчики);
- число каналов телеуправления;
- число каналов телерегулирования;
- погрешность измеряемых и регулируемых параметров;
- вероятность безошибочной передачи информации;
- дальность действия между ЦДП и наиболее удаленным КП;
- скорость передачи информации по радиоканалу;
- время опроса одного КП;
- объем передаваемой в цифровой форме информации с одного КП и в целом со всех КП за один сеанс связи и длительность последнего;
- режимы работы, обеспечиваемые в системе;
- основные параметры программного обеспечения, связанные с обработкой, хранением, отображением и регистрацией всей текущей и расчетной информации на ЦДП;
- параметры и характеристики аппаратуры, обслуживающей систему.

Проведенный краткий анализ работы производств рассредоточенного типа позволяет выработать требования к параметрам обслуживающей ее информационной радиотехнической системе.

Форма сигнала. Поскольку в системе следует обеспечить пять режимов работы (телесигнализация, телеизмерение, телеуправление, теле-

регулирование, связь), то это предопределяет форму сигнала: цифровой N-разрядный кодированный сигнал. К числу возможных способов кодирования передаваемых букв, цифр и служебных команд относится, например, восьмиразрядный двоичный код международного стандарта ASCII.

Мощность радиопередатчика. С учетом действия нормативных требований и с целью минимизации помех другим радиосистемам мощность радиопередатчика в непрерывном режиме работы не должна, как правило, превышать 10 Вт.

Диапазон частот. Для систем народнохозяйственного назначения в УКВ диапазоне выделены следующие полосы частот: 27…58, 74…76, 146…174, 300…344, 440…470 МГц. Для рассматриваемой радиотехнической системы производственного назначения, обслуживающей удаленные объекты, максимально возможная протяженность радиотрассы имеет во многих случаях первостепенное значение.

В этой связи большой интерес представляет декаметровый диапазон волн (27…58 МГц), поскольку в нем благодаря явлениям дифракции и рефракции удается обеспечить прием радиосигнала далеко за линией радиогоризонта. При работе в декаметровом диапазоне отпадает необходимость в прямой видимости между антеннами в точках приема и передачи сигнала, что необходимо обеспечивать в метровом и более высоких по частоте диапазонах. В результате при поднятии простых штыревых антенн четверть- или полуволновой длины на небольшую высоту, всего на 10…20 м, и мощности передатчика в 10 Вт в декаметровом диапазоне удается обеспечить устойчивую радиосвязь на сравнительно большие расстояния, в наиболее совершенных системах до 50…100 км.

Можно утверждать, что системы радиосвязи декаметрового диапазона, использующие распространение радиоволн по искривленному лучу, огибающему Землю, оказываются в ряде случаев более экономичными по сравнению с СВЧ системами, работающими по принципу прямого луча. Эта экономия основана на том, что для получения одной и той же дальности линии радиосвязи в первом случае требуется меньшее число и более простые по устройству пункты связи.

Следует, однако, учитывать, что за линией радиогоризонта напряженность поля в декаметровом диапазоне может резко снижаться. Поэтому приходится принимать специальные меры по обнаружению радиосигнала при отношении сигнал/шум на входе приемника существенно меньше единицы, например, до минус 30 дБ. К таким мерам, как известно, относится когерентное накопление сигнала или сужение полосы пропускания в радиоприемном тракте.

Первые эксперименты по загоризонтной радиосвязи в декаметровом диапазоне относятся к 30-м годам. Результаты исследований по данной проблеме, проведенные в разных странах, обобщены в [41]. Распространение радиоволн декаметрового диапазона за линией радиогоризонта основывается на явлениях дифракции, т. е. огибании препятствий, и рефракции, т. е. искривлении траектории при переходе луча из одной среды в другую, что имеет место в тропосфере, представляющей собой неоднородную среду. Считается, что зона дифракции действует, ориентировочно, в пределах $R_{гор} \le R \le (2–3)R_{гор}$, где $R_{гор}$ – расстояние до радиогоризонта, R – расстояние между пунктами связи, а зоне рефракции соответствует со-

отношение $R>>R_{гор}$. В первом случае, т. е. использовании зоны дифракции, радиосвязь осуществляется, в основном, за счет поверхностной (земной) волны, огибающей Землю, во втором – пространственной, искривляемой за счет ионосферной рефракции, т. е. путем дальнего тропосферного распространения [42].

С 60-х годов явление распространения радиоволн декаметрового диапазона за линией радиогоризонта стало использоваться и в радиолокационных системах раннего обнаружения. Загоризонтные РЛС применяются для дальней локации аэродинамических объектов и дистанционного наблюдения за состоянием поверхности морей и океанов. При этом благодаря применению антенн с большим коэффициентом усиления (20 дБ и более), большой мощности передатчика (до 1 МВт) и когерентного накопления принимаемого сигнала удается обеспечить дальность действия загоризонтной РЛС до 200...300 км при использовании поверхностной (земной) волны и до 3000...4000 км за счет дальнего тропосферного распространения радиоволн.

Теории, которая позволяла бы с удовлетворительной точностью рассчитать напряженность поля в точке приема в декаметровом диапазоне волн при отсутствии радиовидимости, не существует. Это связано с тем, что величина данной напряженности зависит от множества статистически неопределенных факторов, влияющих на распространение декаметровых радиоволн: изменчивости и неоднородности электрических свойств поверхности Земли и атмосферы, уровня солнечной активности, рельефа местности, формы, высоты и радиопрозрачности разнообразных препятствий и т. д. В результате затухание на радиотрассе в зависимости от степени воздействия перечисленных изменчивых факторов может меняться в пределах до 10...30 дБ. Особенно такие колебания величины затухания свойственны в загоризонтной области распространения радиоволн. Поэтому расчет трасс в декаметровом диапазоне в значительной степени основывается на экспериментальных исследованиях, позволяющих определить коэффициент загоризонтной радиосвязи, вводимый в формулу расчета линии радиосвязи (см. ниже).

В более высоких по частоте диапазонах радиосвязь возможна только в пределах прямой радиовидимости по прямому лучу. Поэтому здесь организация радиотрассы большой протяженности возможна или путем поднятия антенн на соответствующую высоту, или с помощью радиоретрансляторов (рис. 15.3).

Оба варианта могут значительно удорожить стоимость всей системы, что следует учитывать при выборе диапазона частот.

Метод модуляции. Система должна обеспечивать высокую помехозащищенность при сравнительно облегченных требованиях к параметрам аппаратуры, в частности, к стабильности частоты, значение которой при отсутствии термостабилизации можно принять равной 10^{-5}. Учет данных, в определенной степени противоречивых факторов, приводит к выводу

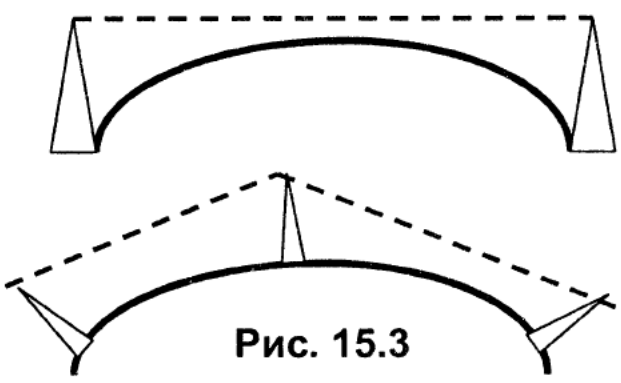


Рис. 15.3

о целесообразности применения двухступенчатой модуляции, позволяющей реализовать узкий частотный канал после детектора радиоприемника и тем самым повысить помехозащищенность системы в целом. При такой модуляции в рамках 1-й ступени осуществляется модуляция сигнала поднесущей передаваемой кодовой комбинацией исходного сообщения, в рамках 2-й ступени – сигнал поднесущей модулирует сигнал несущей. Среди возможных сочетаний разных методов модуляции можно рекомендовать два вида: ЧТ–ЧТ и ЧТ–ФТ.

Структура сообщения по линии КП–ЦДП. Информация, периодически поступающая по радиоканалу с КП на ЦДП, передается в виде рабочего кадра, содержащего следующие байты:

- вызывной сигнал (2 байта);
- номер пункта (1 или 2 байта);
- длина сообщения (2 байта);
- код телеметрического или текстового сообщения (1 байт);
- число групп дискретных датчиков (1 байт);
- число аналоговых датчиков (1 байт);
- число цифровых датчиков (1 байт);
- показания дискретных датчиков (1 байт на 8 датчиков);
- показания аналоговых датчиков (1или 2 байта на 1 датчик);
- показания цифровых датчиков (1 или 2 байта на 1 датчик);
- контрольная сумма (2 байта).

Таким образом, объем передаваемой информации технологического характера (за исключением текстовой информации) в рамках одного кадра (рис. 15.4,а) по линии КП–ЦДП составит в байтах:

$A=S+M+K+N/8$ или $A=S+2*M+2*K+N/8$,

где $S=11–12$ – число служебных байтов;

M – число аналоговых датчиков;

K – число цифровых датчиков;

N – число дискретных датчиков.

Время передачи одного кадра сообщения в секундах:

$T=8A/V$,

где V – скорость передачи информации, бит/с, число 8 определяет число бит в одном байте.

Пример. Контролируемый пункт имеет следующее число датчиков: M=8 (по 1 байту), K=5 (по 2 байта), N=8. Скорость передачи V=200 бит/с. В результате получим:

$A=11+8+2\cdot5+8/8=30$ байт, время $T=8\cdot30/200=1{,}2$ с.

Структура сообщения по линии ЦДП–КП. Информация, поступающая по радиоканалу с ЦДП на КП, передается в виде рабочего кадра, содержащего следующие байты:

- вызывной сигнал (2 байта);
- номер пункта (1 или 2 байта);
- длина сообщения (2 байта);
- код командного или текстового сообщения (1 байт);
- запрос дискретных датчиков (1 байт);
- запрос аналоговых датчиков (1 байт);
- запрос цифровых датчиков (1 байт);
- команды по управлению объектом (по 2 байта на каждую команду);

- команды по регулированию объектом (по 2 байта на каждую команду);
- контрольная сумма (2 байта).

Таким образом, объем передаваемой информации технологического характера (за исключением текстовой информации) в рамках одного кадра (рис. 15.4,б) по линии КП–ЦДП составит в байтах:

$$C=S+2*L+2*R,$$

где S=11–12 – число служебных байтов;

L – число команд управления;

R – число команд регулирования.

Время передачи одного кадра сообщения в секундах:

$$T=8C/V,$$

где V – скорость передачи информации, бит/с.

Служебное сообщение - S байт	Показания аналоговых датчиков - 2M байт	Показания цифровых датчиков 2K - байт	Показания дискретных датчиков - N/8 байт

а)

Служебное сообщение - S байт	Команды управления 2L - байт	Команды регулирвания 2R - байт

б)

Рис. 15.4

Обычно значения A и C не превышают в рассматриваемом классе систем 100...200 байт за сеанс радиосвязи. При этом и текстовые сообщения также не должны превышать 200 байт, т. е. 200 знаков.

Помехозащищенность и скорость передачи информации. УКВ диапазон насыщен разнообразными средствами радиосвязи. Поэтому в этом диапазоне высок уровень помех, вызванных не только атмосферными и космическими шумами, но, в первую очередь, исходящими от других радиотехнических систем. Из известного набора средств повышения помехозащищенности наиболее действенным и практически реализуемым является увеличение базы сигнала B за счет увеличения длительности элементарной посылки Δt или снижения скорости передачи согласно (12.3). В зависимости от допустимой величины вероятности P сбоя элементарной посылки выбирается требуемое значение q отношения сигнал/шум на входе блока обработки сигнала (рис. 13. 5). Так при $P=10^{-8}$ следует иметь q=15 дБ.

Требования к программному обеспечению радиоэлектронной системы. Проведенный анализ работы автоматизированной радиоэлектронной системы контроля и управления рассредоточенными производственными объектами позволяет сформулировать основные требования

к программному обеспечению, выливающиеся в выполнение определенных процедур. В целом программа системы должна обеспечивать:

- возможность контроля и управления всеми рассредоточенными объектами;
- обработку, хранение, преобразование и регистрацию всей текущей расчетной информации, поступающей со всех КП;
- анализ всей поступающей на ЦДП информации, в том числе своевременное распознавание предаварийной и аварийной ситуации в системе: обнаружение и немедленное оповещение об отклонении технологических показателей от нормативных значений с целью предотвращения аварий,
- возможность быстрой перенастройки программы, связанной с возможностью развития системы и внесения в нее изменений по составу, содержанию и количеству контролируемых и управляемых объектов.
- вывод на экран дисплея электронной карты региона, в пределах которого действует информационно-управляющая система, с обозначением на ней ЦДП и всех КП;
- отображение электрических мнемосхем каждого объекта;
- возможность реализации описанных выше режимов работы: автоматического циклического, по запросу диспетчера, аварийного, циркулярного и обмену телетайпограммы, и подача с ЦДП на КП всех необходимых команд: включение–выключение оборудования выбранного объекта, регулирование требуемых параметров, запуск – остановка всех режимов работы, управление высотой поднятия затворов и т. д.;
- отображение состояний всех объектов, находящихся на пункте;
- вывод на экран дисплея текущих показаний всех датчиков со всех пунктов в динамическом режиме, т. е. текущих показаний и N предыдущих;
- оповещение диспетчера о выходе контролируемых параметров за установленные пределы и возникновении критических состояний объектов;
- прием и посылку текстовых сообщений на все КП;
- составление различных протоколов и графиков с привязкой по времени, архивирование всей переданной и принятой на ЦДП информации и поиска требуемых данных;
- построение графиков измеряемых величин от времени;
- предоставление информации по каждому пункту и объекту;
- ведение протоколов приема информации с контролируемых пунктов и действий диспетчера;
- изменение конфигурации системы: добавление и исключение контролируемых параметров, корректировка масштабных коэффициентов (с возможностью нелинейной аппроксимации);
- создание архивных копий рабочих протоколов;
- статистическую обработку накопленных данных и поиск информации по различным критериям.

15.3. Расчет линии радиосвязи в декаметровом диапазоне волн

В случае работы прямым лучом расчет линии радиосвязи можно произвести по методике, рассмотренной в § 14.3. При работе в декаметро-

вом диапазоне волн и использовании в качестве антенн четвертьволновых вибраторов расчет проводится по методике, разработанной академиком Б. А. Введенским [41]. В основе такой методики лежат две формулы, позволяющие рассчитать линию УКВ радиосвязи не только в пределах прялентов и за линией радиогоризонта. Расстояние до линии радиогоризонта для идеальной модели Земли, т. е. шара радиусом 6370 км:

$$R_{ГОР} = 3{,}57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})\ ,\ (км), \qquad (15.1)$$

где h_1, h_2 – высота поднятия антенн в пунктах приема и передачи сигнала, м.

Напряженность электрического поля в точке приема при четвертьволновом вертикальном вибраторе в месте излучения сигнала:

$$E = \frac{90 h_1 h_2 \sqrt{P_1}}{\lambda R^2 K_P K_З}\ ,\ (мкВ/м)\ , \qquad (15.2)$$

где P_1 – излучаемая мощность, Вт; λ – длина волны, м; R – протяженность радиолинии, км; $K_P>1$ – коэффициент дополнительных потерь, учитывающий затухание сигнала вдоль трассы распространения волны за счет атмосферы и разного рода препятствий–зданий и иных сооружений, $K_З$ – коэффициент загоризонтной радиосвязи.

Значение K_P определяется экспериментально для разных трасс распространения радиоволн при определенной частоте сигнала. Согласно проведенным измерениям в г. Москве при частоте 40 МГц значение K_P колеблется в пределах 5–10.

При использовании декаметрового диапазона волн можно выделить три зоны приема: ближнюю, среднюю и дальнюю. Ближней будем называть зону приема в пределах прямой радиовидимости, т. е. в теоретической модели распространения радиоволн при $R \le R_{гор}$. В средней зоне, лежащей за линией радиогоризонта и ориентировочно ограниченной пределами $R_{гор} \le R \le (2–3)R_{гор}$, прием сигнала возможен за счет явлений дифракции и рефракции, приводящих к искривлению луча и распространению поверхностной волны, огибающей Землю. В дальней зоне, лежащей за пределами $R >> R_{гор}$, прием сигнала возможен за счет пространственной волны и ионосферной рефракции, т. е. путем дальнего тропосферного распространения радиоволн, что позволяет удлинить трассу радиоприема до 3000…4000км.

В радиосвязи декаметрового диапазона используются ближняя и средняя зоны приема, в загоризонтной радиолокации – средняя и дальняя. Следует иметь в виду, что деление зон приема на ближнюю и среднюю зоны в реальных условиях достаточно условно, поскольку в ближней зоне ($R \le R_{гор}$) из-за рельефа местности и разного рода строений, особенно в условиях города, радиовидимость между пунктами связи может отсутствовать, а прием основываться на явлении дифракции, т. е. огибании поверхностной радиоволной препятствий. Будем, однако, для определенности считать, что в формуле (15.2) в ближней зоне, т. е. при $R \le R_{гор}$, коэффициент $K_З=1$, а все дополнительные потери в радиотрассе учитывать за

счет коэффициента K_P. В средней зоне, т. е. при $R_{гор} \le R \le (2–3)R_{гор}$, возникают дополнительные потери, учитываемые с помощью коэффициента загоризонтной радиосвязи

$$K_З = (R/R_{гор})^n. \qquad (15.3)$$

где n>1 – показатель степени, зависящий от многих факторов, в том числе, рельефа местности, состояния атмосферы и частоты сигнала. Согласно экспериментальным данным для диапазона частот 30…40 МГц значение n=1,5–3. Поскольку значение n возрастает с повышением частоты сигнала, то при загоризонтной радиосвязи более предпочтителен диапазон 27…58 МГц, чем 146…174 МГц.

При вертикальном четвертьволновом вибраторе в месте приема мощность сигнала на входе радиоприемника с входным сопротивлением 50 Ом:

$$P_{пр} = (E^2\lambda^2/800)\cdot 10^{-12},\ (Вт). \qquad (15.4)$$

Подставив (15.2) в (15.4), получим

$$P_{ПР} = \frac{10 P_1 h_1^2 h_2^2}{R^4 K_P^2 K_З^2} 10^{-12},\ (Вт). \qquad (15.5)$$

Согласно (15.5) при антеннах – вертикальных четвертьволновых вибраторах на обоих концах радиолинии – мощность принимаемого сигнала не зависит от длины волны и с расстоянием уменьшается по закону $1/R^4$.

Выразим (15.5) в децибелах относительно уровня в 1 Вт.

$$P_{ПР.Д} = -110 + 10\lg P_1 + 20\lg(h_1 h_2) - 40\lg R - 20\lg K_р - 20\lg K_З,\ (дБВт). \qquad (15.6)$$

В частности, при мощности P_1=10 Вт и $K_р$=10 из (15.6) имеем:

$$P_{ПРД} = -120 + 20\lg(h_1 h_2) - 40\lg R - 20\lg K_З,\ (дБВт). \qquad (15.7)$$

Значение $P_{ПРД}$, вычисленное по (15.7), должно превышать реальную чувствительность приемника, определяемую согласно (13.41):
$P_{Ч.ПР.Д}$ (дБВт)=–137+20lg$U_{Ч.ПР}$.

При $U_{Ч.ПР}$=1,0 мкВ значение $P_{Ч.ПР.Д}$ (дБВт)=–137 дБВт.

При $U_{Ч.ПР}$=0,1 мкВ значение $P_{Ч.ПРД}$ (дБВт)=–157 дБВт.

На линии радиогоризонта при P_1=10 Вт, $K_Р$=10 и $K_З$=1 из (15.7) с учетом (15.1) получим:

$$P_{ПР.Д} = -142 + 40\lg\frac{\sqrt{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}},\ (дБВт). \qquad (15.8)$$

Согласно (15.8), например, при h_1=10 м и h_2=20 м имеем: $P_{ПРД}$=–131,3 дБВт, т. е. уровень сигнала в точке приема $R_{ГОР}$=27,2 км соответствует чув-

ствительности приемника в 2 мкВ. Следовательно, при реально достижимой чувствительности радиоприемника 0,1 мкВ запас уровня сигнала в точке приема превышает 20 дБ. Такое превышение сигнала позволяет организовать радиосвязь не только в области до радиогоризонта, но и за его пределами. Как показали экспериментальные исследования, при частоте 40 МГц дальность линии радиосвязи превышает значение $R_{ГОР}$ в 2–4 раза, т. е. при умеренной высоте подъема антенн в 10...20 м может достигать 50...100км.

Определим согласно (15.5) зависимость требуемой мощности радиопередатчика на линии радиогоризонта в зависимости от высоты поднятия четвертьволновых антенн над уровнем Земли. В составленной программе, приведенной на рис. 15.5, приняты следующие обозначения:

P1, P2, P3 – требуемая мощность радиопередатчика P_1, дБВт;

PS – чувствительность радиоприемника $P_{ПРД}$, дБВт;

R, X – протяженность радиотрассы R, км;

KB – коэффициент дополнительных потерь $K_Р$;

K3 – коэффициент загоризонтной радиосвязи $K_З$;

H1, H2 – высота поднятия антенн над уровнем Земли h_1, h_2, м.

$$KB := 10 \qquad K3 := 1 \qquad H2 := 20$$

$$ORIGIN := 1 \qquad PS := \begin{pmatrix} -130 \\ -140 \\ -150 \end{pmatrix}$$

$$F(H1) := 40 \cdot \log\left[\frac{\left(\sqrt{H1} + \sqrt{H2}\right)}{\sqrt{H1 \cdot H2}}\right]$$

$$P1(H1) := 132 + 20 \cdot \log(KB) + 20 \cdot \log(K3) + PS_1 + F(H1)$$

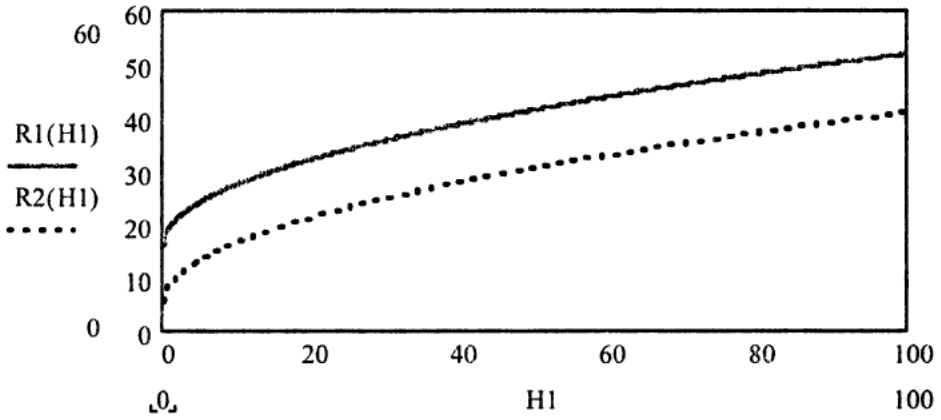
$$P2(H1) := 132 + 20 \cdot \log(KB) + 20 \cdot \log(K3) + PS_2 + F(H1)$$

$$P3(H1) := 132 + 20 \cdot \log(KB) + 20 \cdot \log(K3) + PS_3 + F(H1)$$

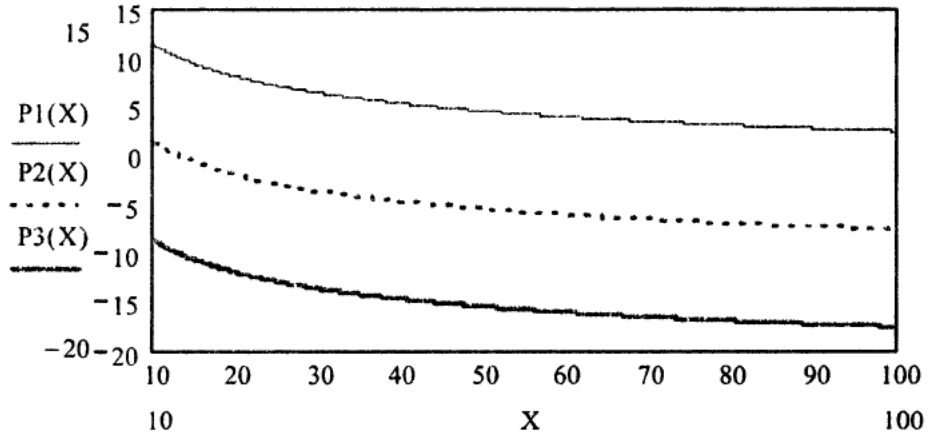
$$R(H1) := 3.57 \cdot \left(\sqrt{H1} + \sqrt{H2}\right)$$

Рис. 15.5

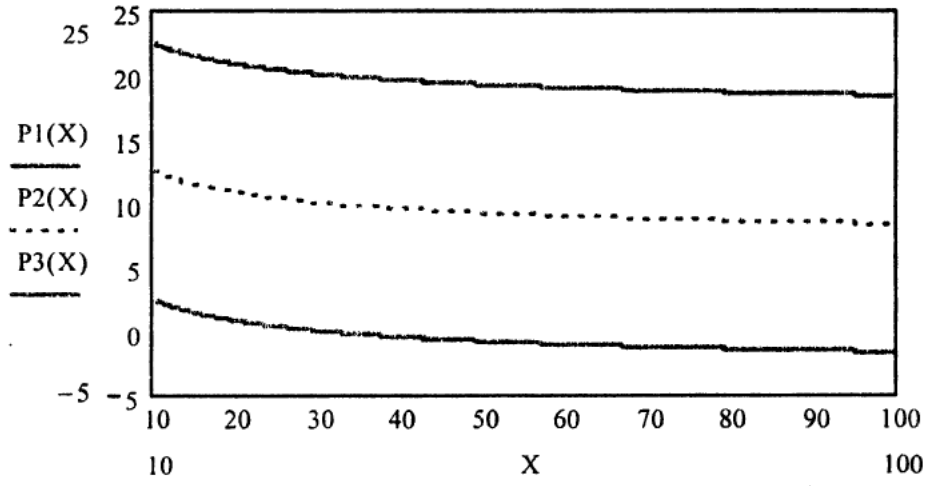
Графики зависимости мощности радиопередатчика P_1 от высоты поднятия антенны h_1 при h_2=const, рассчитанные по программе рис. 15.15, приведены на рис. 15.16.



а) при h_2=20м и 2м



б) при h_2=20м



в) при h_2=2м

Рис. 15.16

На рис. 15.6,а представлены графики зависимости протяженности радиотрассы до линии горизонта R (км) от высоты поднятия одной из антенн h_1(м) при h_2=2 м (нижний график) и 20 м (верхний график), рассчитанные согласно (15.1).

На рис. 15.6,б представлены графики зависимости требуемой мощности радиопередатчика P_1 (дБВт) от высоты поднятия одной из антенн h_1(м) при h_2=20 м и трех значениях чувствительности радиоприемника $P_{ПРД}$,=–130 дБВт, (верхний график), – 140 дБВт (средний график) и – 150 дБВт (нижний график).

На рис. 15.6,в представлены графики тех же зависимостей при h_2=2 м.

Еще раз подчеркнем, что данные графики относятся к случаю радиосвязи в области ограниченной горизонтом при прямой видимости между антеннами. В загоризонтной области происходит резкое уменьшение напряженности поля и здесь в основу проектирования следует положить предварительно проведенные измерения уровня сигнала.

15.4. Множественный доступ к каналу радиосвязи

Назначение системы радиосвязи состоит в передаче в выделенной полосе частот – частотном канале связи – возможно большего количества информации с учетом допустимой ошибки при приеме. Важное значение при этом имеет и количество абонентов, допущенных к данному каналу связи. В идеализированной модели канала связи при передаче по нему битовой информации в двоичном коде и действии нормального стационарного шума максимальная пропускная способность определяется выражением (13.4).

Однако реализовать предельные возможности канала связи по нескольким причинам весьма сложно, особенно при необходимости одновременного доступа в него большого числа абонентов. При этом следует, во-первых, уметь различать абонентов друг от друга и, во-вторых, исключить или свести к минимуму влияние одного абонента на другой, т. е. не создавать в канале связи взаимных помех. Среди возможных укажем на три метода доступа абонентов к каналу связи с:

- частотным разделением абонентов (международное название – FDMA или Frequency Division Multiple Access);
- временным разделением абонентов (международное название – TDMA или Time Division Multiple Access);
- кодовым разделением абонентов (международное название – CDMA или Code Division Multiple Access).

Рассмотрим более подробно данные методы.

Метод с частотным разделением абонентов. Здесь можно выделить два способа реализации метода. При первом методе выделенная полоса частот «нарезается» на строго фиксированные участки, которые закрепляются за каждым или несколькими абонентами (рис. 15.7,а). Между участками устанавливаются защитные интервалы. Требуемая полоса частот, закрепляемая за каждым абонентом, включает три составляющие:

$$\Delta F_П = \Delta F_{СП} + \Delta F_{ПЕР} + \Delta F_{ГЕТ}, \qquad (15.9)$$

где $\Delta F_{СП}$ – ширина излучения спектра сигнала;

$\Delta F_{ПЕР}$ – нестабильность частоты сигнала передатчика;

$\Delta F_{ГЕТ}$ – нестабильность частоты гетеродина приемника.

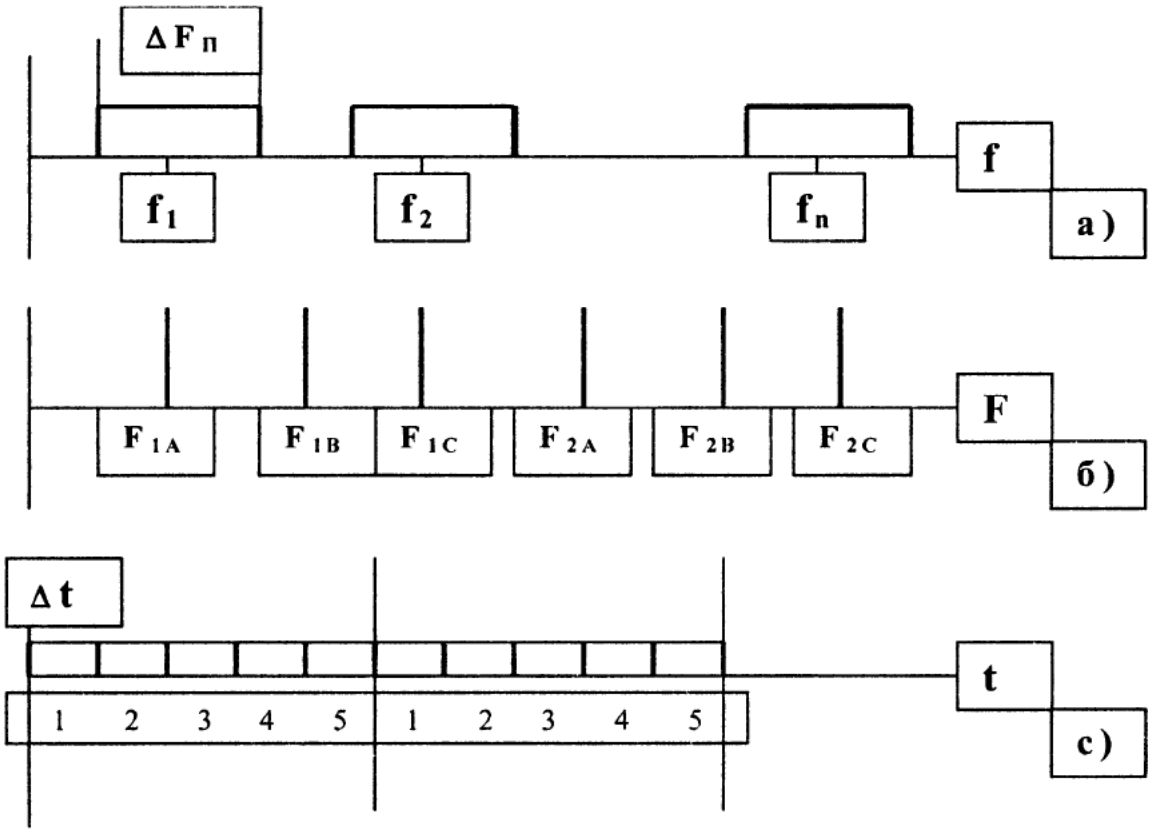


Рис. 15.7

Поскольку каждый из абонентов может использовать только ему выделенный частотный участок, то данный метод является наименее эффективным, так как значительная часть диапазона в течение определенного времени не используется. Если же один и тот же частотный участок предоставлять нескольким абонентам, то при частом выходе на связь они могут мешать друг другу. Для вызова на связь все абоненты кратковременно используют одну и ту же частоту (так называемую «частоту вызова»), после чего каждый из них переходит на выделенный ему частотный участок.

При втором способе частотного разделения абонентов с цифровой передачей информации все абоненты используют одну и ту же выделенную полосу частот, но каждый из них имеет разные значения поднесущих частот в соответствии с методами модуляции ЧТ–ЧТ (см. гл. 12). При этом на выходе радиоприемника устанавливаются полосовые фильтры, настроенные на значения поднесущих частот, индивидуально присвоенные каждому из абонентов. Данный метод более эффективен по сравнению с предыдущим, поскольку при нем каждый из абонентов использует всю выделенную полосу частот. Трудность в реализации данного метода состоит в том, что при одновременной работе нескольких абонентов следует исключить подавление одного, более слабого, сигнала другим, более сильным, в тракте радиоприемника, поскольку все сигналы имеют одну и ту же частоту несущей. Реализация данного требования достигается как путем линеаризации в большом динамическом диапазоне радиоприемного

тракта до частотного детектора, так и за счет регулирования мощности радиопередатчика в зависимости от мощности сигнала на входе радиоприемника.

Метод с временным разделением абонентов. При данном методе все абоненты используют одну и ту же выделенную полосу частот, но в строго фиксированные моменты времени (рис. 15.7,в). Передача цифровой информации позволяет воспользоваться таким способом без создания ощутимых помех одного абонента другому. Сложность реализации данного метода состоит в синхронизации работы всех абонентов, которые могут выходить на связь только в строго закрепленные за ними моменты времени. Реализация данного условия состоит в передаче базовой станцией специального сигнала, синхронизирующего работу всех работающих в сети абонентов. Именно такой метод множественного доступа является доминирующим в сотовых системах радиосвязи цифрового типа [36].

В системах сбора информации с датчиков, например, контролирующих состояние среды или потребление электроэнергии, когда абоненты могут выходить на связь не произвольно, а в выделенные для них «окна» времени, можно воспользоваться одним из трех методов.

1-й метод, основанный на ответе по запросу. В этом случае на контролируемом пункте должна располагаться абонентская радиостанция, включающая радиопередатчик и радиоприемник. Диспетчерская радиостанция посылает сигнал запроса с указанием в кодированной форме номера запрашиваемого абонента. Только после получения такого сигнала абонент отвечает диспетчерской радиостанции, передавая по радиоканалу накопленную в перерывах между запросами технологическую информацию. Все абоненты отвечают по очереди в установленном диспетчером порядке, у каждого из них имеется свое «окно» времени и поэтому абонентские радиостанции не мешают друг другу (рис. 15.8,а). Недостатком данного метода является удорожание абонентской радиостанции, в состав которой входит радиоприемник, необходимый только для приема сигнала запроса с целью синхронизации работы всей системы и исключения взаимных помех.

2-й метод, основанный на точном по времени выходе на связь. Установив в каждой абонентской радиостанции высокоточные кварцевые часы и предусмотрев в программе процессора, управляющего работой радиостанции, индивидуальное время выхода в эфир, можно исключить режим запроса. Для устранения возможного перекрытия временных «окон», отводимых каждой радиостанции, вводятся защитные интервалы (рис. 15.8,а). Кроме того, предусматриваются так называемые «окна молчания», в которые любая из абонентских радиостанций выходит на связь только при наличии аварийной ситуации на контролируемом объекте. Высокоточное время на абонентской радиостанции следует поддерживать с помощью кварцевых часов, точность которых может корректироваться по радиосигналу точного времени, излучаемому в эфир радиостанциями в длинноволновом диапазоне.

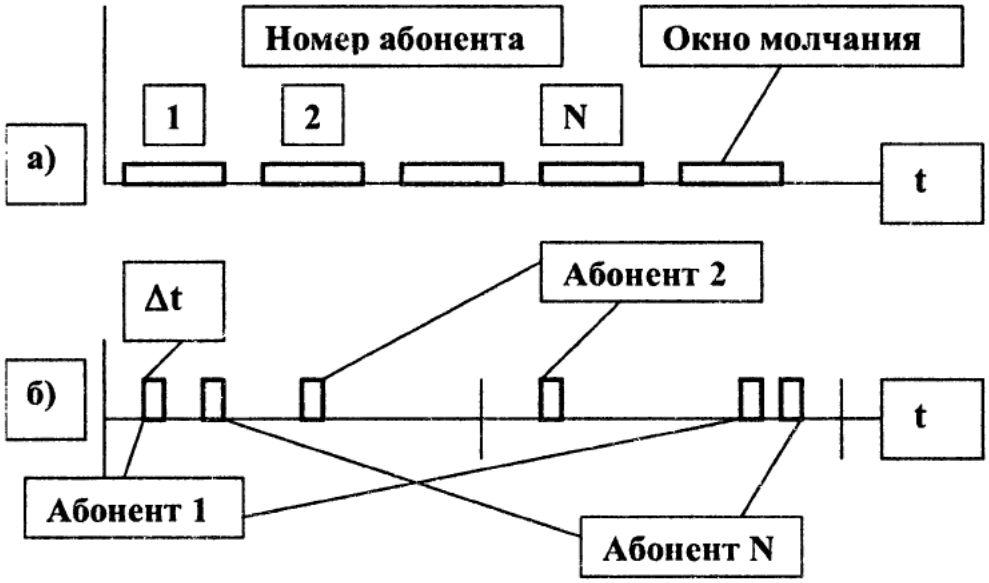


Рис. 15.8

3-й метод, основанный на выходе на связь абонентской радиостанции по случайному закону. В тех случаях, когда выход на связь абонентской радиостанции по условиям работы контролируемого пункта сравнительно редок – всего несколько раз в сутки, можно отказаться от синхронизации работы абонентов во времени и ввести режим их выхода в эфир по случайному закону при нормальном состоянии контролируемого объекта. (Заметим, что в случае аварийной ситуации, сообщение с объекта передается немедленно.) Рассмотрим такой, весьма экономичный способ временного разделения абонентов, не требующий синхронизации их работы, более подробно.

Пусть система включает N абонентов, выходящих на связь по случайному закону M раз на время Δt за период T (рис. 15.8,б).

Тогда вероятность однократного выхода в эфир составит $p_i=\Delta t/T$. Сбой в работе системы будет происходить при одновременном выходе в эфир двух и более абонентов. Рассчитаем вероятность такого события, обозначив число совпадений, т. е. одновременного выхода в эфир,через k. Общее количество таких событий:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2).....2\cdot 1}{[k(k-1)(k-2)....2\cdot 1]\cdot[(n-k)(n-k-1)....2\cdot 1]}. \qquad (15.10)$$

При $k=2$ и $n>>1$: $C_n^k = n^2/2$.

При $k=3$ и $n>>1$: $C_n^k = n^3/6$.

Вероятность совпадения любых двух событий (k=2): $p=p_1p_2$. Поскольку при числе абонентов N общее число таких совпадений определяется с помощью последней формулы, то при выходе каждого абонента в эфир M раз вероятность одновременного выхода в эфир любых двух абонентов при N>>1:

$$P = C_n^k M^2 p_i^2 = (1/2)N^2 M^2 p_i^2 \text{ , где } p_1 = p_2 = p_i. \qquad (15.11)$$

С учетом тех же замечаний вероятность одновременного выхода в эфир любых трех абонентов:

$$P = C_n^k M^3 p_i^3 = (1/6) N^3 M^3 p_i^3 \ , \text{где } p_1 = p_2 = p_3 = p_i. \qquad (15.12)$$

Рассчитаем с помощью полученных формул типовой пример. Пусть количество контролируемых постов в системе автоматически выходящих в эфир по случайному закону N=100. Каждый из абонентов выходит в эфир за сутки (T=24*3600 с) три раза (M=3) на одну секунду (Δt=1 с). Вероятность одиночного события–выхода в эфир $p_i=\Delta t/T=1/(24*3600)=10^{-5}$. Тогда согласно полученным формулам имеем вероятность сбоя в работе системы по причине одновременного выхода в эфир двух абонентов: $P=5*10^{-6}$, трех абонентов: $P=5*10^{-9}$. Таким образом, при трехкратном выходе в эфир за сутки каждого из абонентов вероятность их одновременной работы и, следовательно, возможного сбоя в работе системы ничтожно мала. Даже при возрастании на порядок числа абонентов, т. е. при N=1000, вероятность сбоя остается в вполне допустимых пределах: при одновременном выходе в эфир двух абонентов: $P=5*10^{-4}$, трех абонентов: $P=5*10^{-6}$.

Метод с кодовым разделением абонентов. При данном методе все абоненты работают одновременно в одной и той же, относительно широкой полосе частот. Например, в полосе частот 1,23 МГц располагается до 50 абонентов при исходной скорости битовой последовательности от каждого абонента 9,6 кбит/с [36]. Три принципа являются основой данного метода: кодирование исходной цифровой информации кодами Уолша, расширение спектра излучаемого сигнала с помощью источника псевдослучайного шума и регулирование мощности радиопередатчика абонентской радиостанции. Структурная схема радиопередатчика и радиоприемника, реализующего данный метод представлена на рис. 15.9.

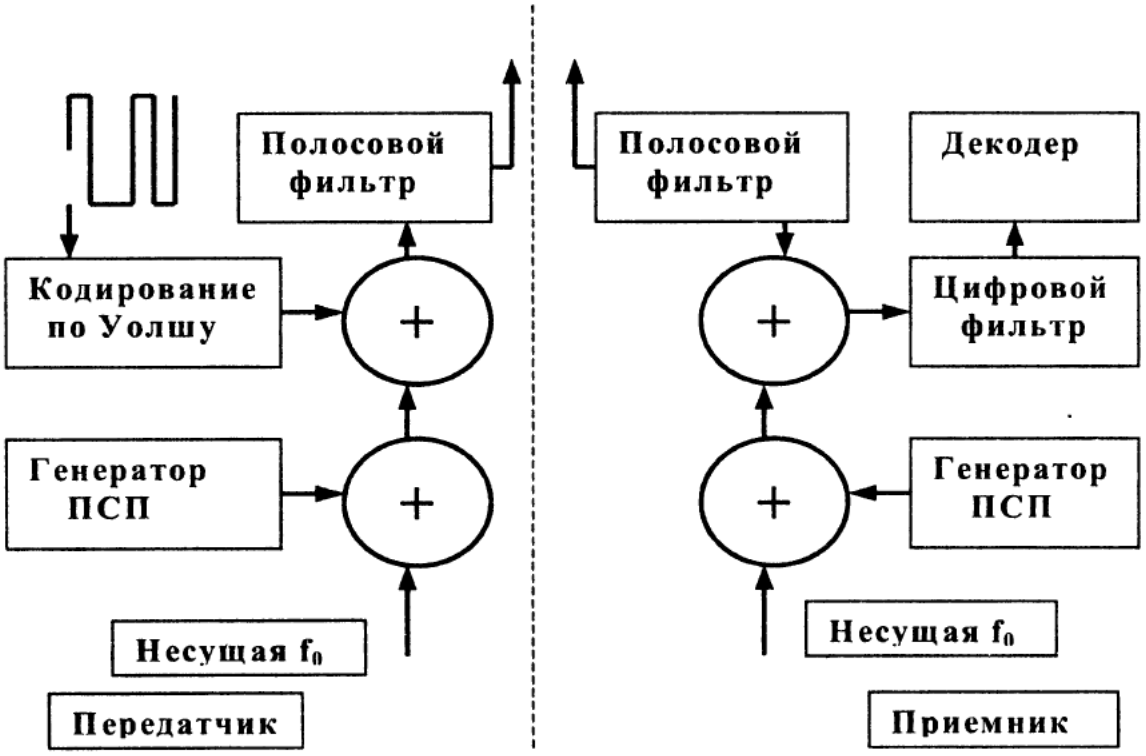


Рис. 15.9

Расширение спектра излучаемого сигнала осуществляется путем фазовой модуляции несущей частоты f_0 псевдослучайной последовательностью (ПСП) длительностью T, состоящий из N бит малой длительности τ (рис. 15.10).

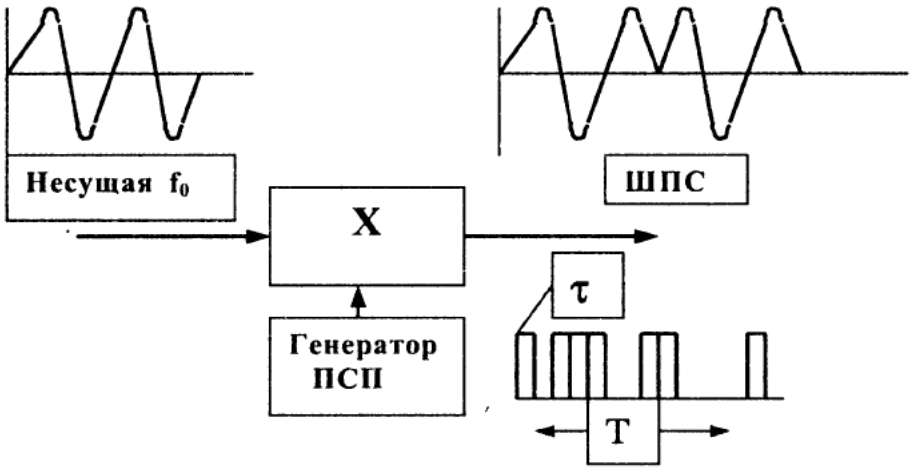


Рис. 15.10

Спектр такого сигнала, называемого шумоподобным, при этом расширяется до величины n/τ, где $n>4$. Исходное сообщение кодируется по Уолшу [6], после чего осуществляется модуляция шумоподобного сигнала, например, путем бинарной фазовой модуляции. Графики функций Уолша восьми первых порядков представлены на рис. 15.11.

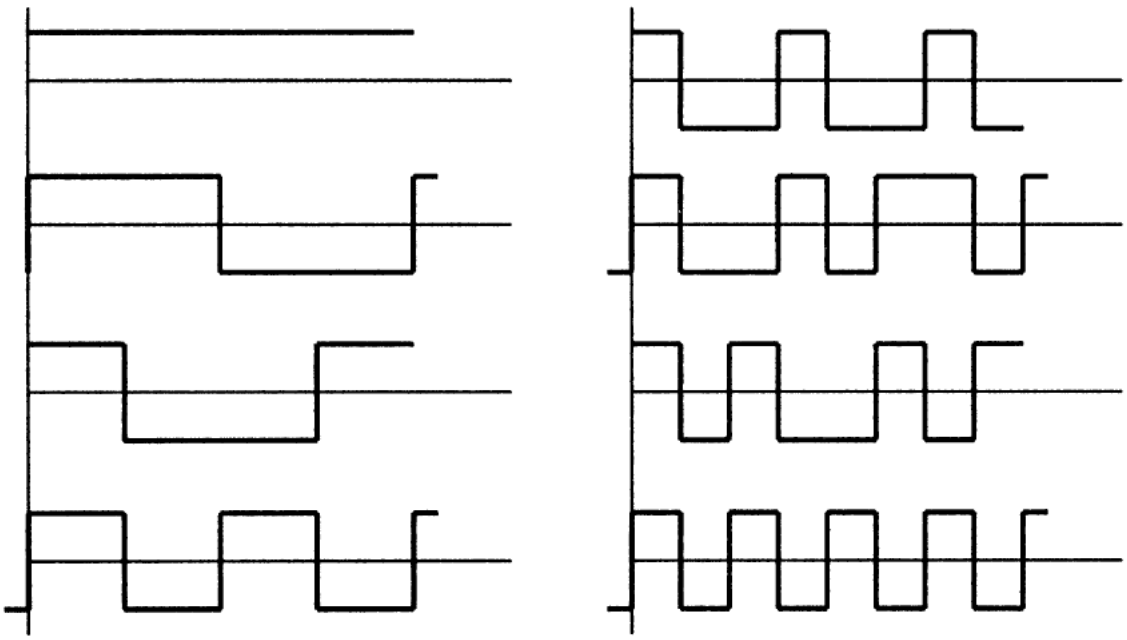


Рис. 15.11

Коды Уолша обладают свойством ортогональности, что позволяет различать между собой сигналы, закодированные с помощью функций

Уолша разных порядков. Благодаря свойству ортогональности на выходе цифрового фильтра логическая «1» появляется только при функции Уолша определенного порядка, всем же функциям Уолша иных порядков– соответствует логический «0». Поэтому закрепив за каждой абонентской станцией свой код Уолша, т. е. кодирование согласно функции Уолша определенного порядка, сигналы на приемной стороне можно различить с помощью специально настроенных фильтров даже при том, что спектры всех сигналов располагаются в одной и той же полосе частот.

Сформированный описанным способом шумоподобный сигнал поступает на вход радиоприемника, а после ВЧ фильтра – на вход коррелятора. На второй вход последнего подается сигнал псевдослучайной последовательности (ПСП), в точности совпадающий с сигналом ПСП, использованным в радиопередатчике (рис. 15.10). Благодаря такой идентичности сигналов после их перемножения на выходе коррелятора спектр полезного сигнала сжимается, а спектр фонового шума и других источников помех наоборот расширяется. В результате резко возрастает соотношение сигнал/шум. Чем шире спектр шумоподобного сигнала, т. е. чем больше он "размазан" в полосе частот, тем выше можно получить выигрыш соотношения сигнал/шум на приемной стороне после операции свертывания. Далее сигнал поступает на обработку в цифровой фильтр, настроенный на определенный код Уолша.

Описанный метод кодового разделения абонентов обладает высокой помехоустойчивостью и защитой от помех, связанных с многолучевостью, т. е. с приходом на вход радиоприемника не только прямого, но и нескольких отраженных сигналов. Другое положительное свойство метода – скрытность передачи сообщения, поскольку передаваемый шумоподобный сигнал трудно отличить от естественного шума и для его восстановления необходимо знать исходную псевдослучайную комбинацию.

Однако реализация метода сопряжена с определенными техническими трудностями, связанными как с проблемой синхронизации в работе всех станций, так и выравниванием по мощности принимаемых сигналов.

А. Преобразование Фурье как частный случай преобразования Лапласа.
Обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$\phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (П.1.1)$$

Тот же интеграл для функции $\Phi_1(t)=\Phi(t)\exp(-\sigma t)$ примет вид:

$$\phi_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_1(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega\ , \qquad (П.1.2)$$

где $p=\sigma+j\omega,\quad dp=jd\omega\ ,\quad d\omega=dp/j\ -$

новая переменная и ее производная, с учетом которых (П.1.1) примет вид:

$$\phi(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}S(p)e^{pt}dp\ , \qquad (П.1.3)$$

которое является преобразованием Лапласа.

Приняв σ=0 и p=jω , получим из (П.1.2) преобразование Фурье, как частный случай преобразования Лапласа, что и требовалось доказать.

Б. Выражения для переходной и импульсной характеристик.
Импульсная характеристика

$$h(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\ , \qquad (П.1.4)$$

$$где\ K(j\omega)=|K(\omega)|e^{j\theta(\omega)}=|K(\omega)|\cos\theta(\omega)+j|K(\omega)|\sin\theta(\omega)=$$

$$\mathrm{Re}(\omega)+j\ \mathrm{Im}(\omega)\ - \qquad (П.1.5)$$

коэффициент передачи.

С учетом (П1.5) выражение (П1.4) примет вид:

$$h(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|K(\omega)|e^{j(\omega t+\theta(\omega))}d\omega=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}(\omega)\cos\omega t d\omega-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Im}(\omega)\sin\omega t d\omega \qquad (П.1.6)$$

При t<0 функция h(t)=0 и поэтому с учетом очевидного соотношения sin(-ωt)=–sin(ωt) из (П.1.6) получим:

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}(\omega)\cos\omega t d\omega = -\int_0^\infty \mathrm{Im}(\omega)\sin\omega t d\omega \ . \qquad \text{(П.1.7)}$$

Выражение (П.1.7) характеризует однозначную связь между вещественной и мнимой частями коэффициента передачи линейного объекта, что позволяет определять импульсную характеристику только через вещественную или только мнимую часть K(jω). В результате с учетом (П.1.7) получим из (П.1.6) для импульсной характеристики линейного объекта следующих два равноправных выражения:

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}(\omega)\cos\omega t d\omega \ , \qquad \text{(П.1.8)}$$

$$h(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}(\omega)\sin\omega t d\omega \ . \qquad \text{(П.1.9)}$$

Поскольку переходная характеристика связана с импульсной интегральным соотношением:

$$\Phi(t) = \int_0^t h(t)dt \ , \qquad \text{(П.1.10)}$$

то из (П.1.8) и (П.1.9) путем их интегрирования получим для переходной характеристики линейного объекта следующих два равноправных выражения:

$$\Phi(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega \ , \qquad \text{(П.1.11)}$$

$$\Phi(t) = K(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\omega}\cos\omega t d\omega \ . \qquad \text{(П.1.12)}$$

Универсальный математический пакет программ «Mathcad»: основные сведения и правила

1. Возможности «Mathcad»

Пакет программ «Mathcad» позволяет выполнять математические расчеты с помощью компьютера в среде операционной системы «Windows» [2–4].

«Mathcad» включает в свой состав три редактора – формульный, текстовый и графический. Благодаря им обеспечивается принятый в математике способ записи функций и выражений и получение результатов вычислений, произведенных компьютером, в виде таблиц и графиков. Взаимодействие пользователя с компьютером осуществляется с помощью удобного графического интерфейса, включающего пиктограммы, диалоговые окна, меню, опции и другие "инструменты", располагаемые на экране дисплея.

«Mathcad» включает множество операторов, встроенных функций и алгоритмов решения разнообразных математических задач, которые прямо приложимы ко всему комплексу вопросов, рассматриваемых в рамках самых разнообразных научно-технических дисциплин. «Mathcad» обладает повышенной точностью и быстродействием вычислений повышенной степени сложности, используя 32-разрядную память.

С помощью «Mathcad» можно решать следующие математические задачи:

- оперировать с действительными и комплексными величинами и числами;
- решать всевозможные алгебраические задачи;
- разлагать функции в ряд Тейлора и Фурье;
- выполнять действия с векторами и матрицами;
- осуществлять логические операции;
- производить дифференцирование и интегрирование функций;
- осуществлять преобразования Фурье и Лапласа;
- решать систему дифференциальных уравнений;
- проводить статистические вычисления и анализ;
- производить аппроксимацию функций, заданных по точкам;
- решать задачи, относящиеся к линейному и нелинейному программированию и связанные с поиском глобального экстремума функции цели.

2. Основы языка «Mathcad»

Язык, на котором изъясняются в среде **«Mathcad»** для изображения констант, переменных величин, операторов, функций, уравнений и иных математических записей, практически полностью совпадает с общепринятым в математике.

Символами этого языка являются: малые и заглавные буквы латинского и греческого алфавита; арабские цифры от 0 до 9; знаки математических операций (+, −, *, /,=.); имена функций (cos, sin, tan, log, ln, n!...) и другие принятые в математике знаки.

В математике различают **константы** (целые и вещественные) и **переменные величины**. Значение константы остается неизменным в процессе выполнения программы, значение переменной – может изменяться.

Примеры записи целых констант: 1, – 5, 0, 769, – 3 …

Примеры записи вещественных констант 0,564; – 89,439; 7,72 или в сжатой форме при большом числе знаков с использованием буквы E в качестве основания 10: aEn, где a – целое или дробное число, E – основание 10, n – целое число, являющееся показателем основания 10.

Примеры записи вещественных констант с использованием буквы E: 5,4389E+6 есть число 5438900; 3,246E-3 есть число 0, 003246; 1E23 есть число 10^{23}.

Вычисления могут производиться с точностью до 15 знака после запятой.

Переменные величины обозначаются одной или несколькими буквами латинского или греческого алфавита: A, B, CR, a, в, c, ав, ut, RP, S3, Θ, Δ, Ω, α, β, γ… Переменные величины не должны совпадать с именами функций.

Комплексные числа с целыми или вещественными константами записываются в виде: 5,1 + i*3,5 или 4 +j*2, а с переменными величинами в виде: a+i*b или c+j*d, где i и $j = \sqrt{-1}$.

Функции, представляющие собой зависимости одной переменной величины от другой (аргумента) записываются в виде $Z(x)$, а в случае нескольких аргументов в форме $Z(x,y,a)$.

Громадный набор **стандартных функций**: тригонометрических и обратных им, гиперболических и обратных им, показательных и логарифмических, функций комплексного аргумента, специальных (Бесселя, Чебышева, Лагера, Лежандра, Эрмита, гамма и других), статистических, финансовых, связанных с разнообразными преобразованиями и поиском оптимальных решений и т. д., представлены подменю "Встроенные функции" и на математических инструментальных панелях. Путем обращения к этим встроенным в пакет **«Mathcad»** функциям можно выполнять самые разнообразные компьютерные вычисления.

Знаки всех **математических операций**, как арифметических (сложение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня и т. д.), так и относящихся к высшей математике (интегрирование, дифференцирование, связанных с матричным и векторным исчислением и т. д.) в пакете **«Mathcad»** совпадают с общепринятыми в математике.

Приведем примеры арифметических операторов, указывающих на выполнение определенных математических операций над данными (операндами): сложение **+,** вычитание **–,** деление **/**, умножение * и т. д.

Следует различать операции равенства **=** и присваивания **:=.** В программе сначала переменной присваивается определенное значение и только после окончания вычислений можно поставить знак равенства. Знаком равенства при символьных вычислениях является →.

Примеры записи математических выражений, вводимых с помощью специальной панели инструментов:

sin, cos, tan, log, ln, n! ,

$$\int_a^b \Psi(x)dx\ ,\quad \frac{d^n x}{dx^n}\ ,\quad \sum_{n=1}^{m} A_n\ ,\quad \prod_{n=1}^{m} B_n\ ,\quad \sqrt[n]{C}\ ,\quad |F(x)|,\ldots$$ и т. д.

Ввод всех перечисленных математических символов в составляемую программу на языке **«Mathcad»** осуществляется с помощью клавиатуры или специального инструментария в рамках языка визуального программирования путем обращения к специальным панелям.

Результаты расчета по программе, составленной на языке **«Mathcad»,** могут быть представлены в виде числа, символьной форме, таблицы или графика.

3. Описание текстового окна «Mathcad»

После запуска пакета программ «Mathcad».в соответствии с общими правилами работы в среде операционной системы «Windows» на экране дисплея появляется тестовое окно с наименованием «Mathcad Professional», именем формируемого или уже созданного файла и тремя строками: меню, стандартной и форматирования. В рабочей области текстового окна размещается вновь создаваемая программа на языке «Mathcad».

Частично содержание меню совпадает со стандартным набором «Windows – приложений». Поэтому дадим краткую характеристику стандартным для «Windows» меню и более подробно остановимся на содержании меню, относящихся только к «Mathcad».

Идущая после заголовка составляемой или вызванной программы первая строка текстового окна содержит названия девяти командных меню:**Файл–Правка–Вид–Вставка–Формат–Математика–Символы–Окно–?(справка).** Их вызов и раскрытие осуществляется принятым в «Windows» способом: установлением курсора на соответствующем названии меню и одним щелчком левой клавиши "мыши". Закрывается меню следующим щелчком при курсоре, находящимся в любом месте экрана.

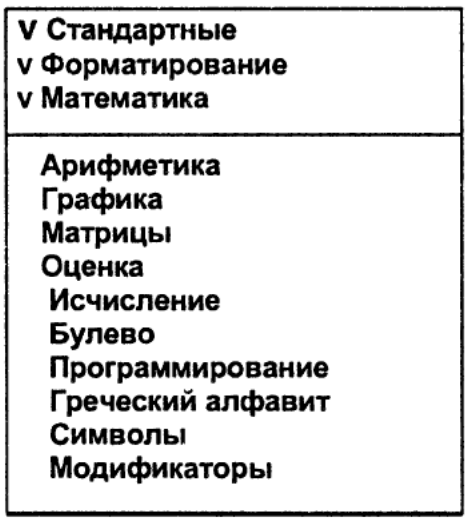


Рис. 1

Меню «Файл». Здесь сосредоточены такие операции, как сохранение составленной программы, просмотр текста и его печать, открытие нового файла.

Меню «Правка». Здесь расположены команды, связанные с исправлением текста: его полным или частичным устранением, переносом в другое место и копированием.

Меню «Вид». Это меню содержит подменю, специфические для пакета «Mathcad». В первую очередь, сюда относится подменю "Пакеты инструментов", содержание которого представлено на рис. 1. Установив курсор в начале каждой из строк "пакета инструментов" (рис. 1), щелчком левой клавиши "мыши" можно вызвать или наоборот убрать "птичку". Наличие последней указывает на исполнение данной команды.

Так наличие "птички" перед строкой "Стандартные" вызывает появление 2-й строки рабочего листа, а перед строкой "Форматирование" – 3-й строки. Наличие "птички" перед строкой "Математика" вызывает появление панели с пиктограммами (кнопками), которым соответствуют названия, перечисленные в подменю "Математика" (рис. 1). В свою очередь, или установив "птичку" перед каждой из строк в этом подменю (рис. 1), или произведя щелчок по соответствующей пиктограмме на панели "Математика", на рабочем листе появляется так называемая панель инструментов с указанием конкретных математических операций, преобразований или действий, которые могут быть выполнены с ее помощью. В общей сложности последовательно можно вызвать 10 панелей инструментов, перечисленных на рис. 1 в подменю "Математика" и частично раскрытых на рис. 2. Пользуясь принятыми в «Windows» приемами, можно менять конфигурацию панелей, перемещать их по текстовому окну, располагать их справа от вертикальной линии вне рабочей области, на которой пишется программа. Кратко опишем содержание инструментальных панелей, а процедуру их использования рассмотрим в последующих разделах.

На панели ***"Арифметика"*** располагаются арабские цифры, знаки арифметических операций и наименования тригонометрических и иных функций.

На панели ***"Графика"*** располагаются пиктограммы, с помощью которых можно строить в составляемой программе разнообразные графики, в том числе в декартовой и полярной системе координат, и гистограмму.

На панели ***"Матрицы"*** располагаются пиктограммы, позволяющие разместить в составляемой программе вектор и матрицу требуемой размерности и выполнить ряд операций с ними, в том числе суммирование, перемножение, обращение, транспонирование.

На панели ***"Оценка" ("Вычисления")*** располагаются знаки равенства, присвоения и другие.

На панели ***"Исчисление" ("Матанализ")*** располагаются пиктограммы, позволяющие произвести операции математического анализа: дифференцирование и интегрирование функций, их суммирование и перемножение, определение пределов.

На панели ***"Булево"*** располагаются знаки, относящиеся к логическим операциям.

На панели ***"Программирование"*** располагаются пиктограммы, позволяющие составлять определенные подпрограммы, в том числе циклического типа, вставляемые в текст основной программы.

На панели ***"Греческий алфавит"*** располагаются малые и заглавные буквы греческого алфавита.

На панели ***"Символы"*** располагаются ключевые слова определенных операций символьного характера, например, разложение многочлена на множители, функции – в степенной ряд, символьные преобразования в комплексной области.

На панели ***"Модификаторы"*** располагаются ключевые слова, позволяющие расширить возможности символьных операций, предусмотренные панелью ***"Символы"***.

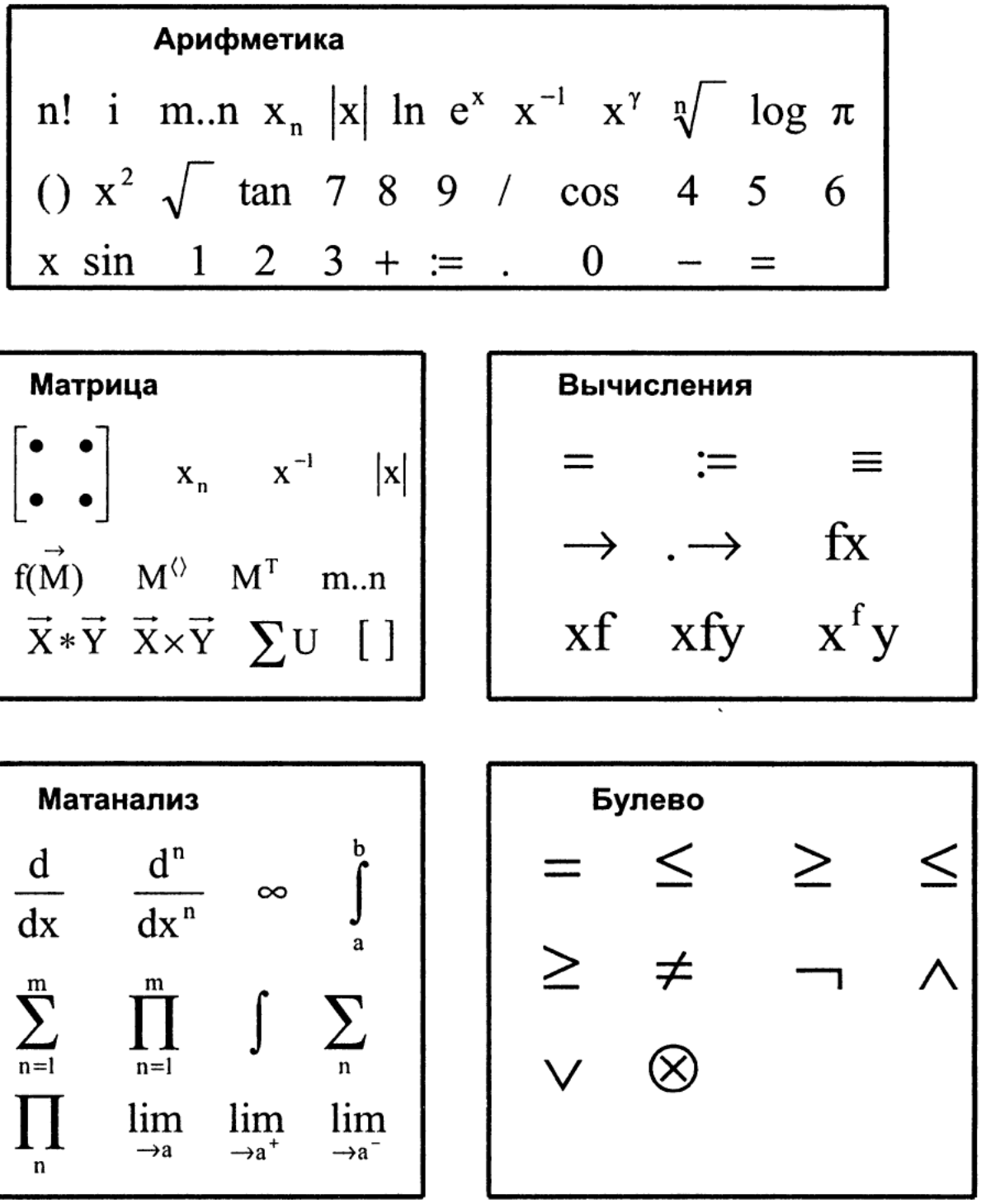


Рис. 2

Меню «Вставка». Здесь сосредоточены опции, позволяющие вставить в составляемую программу графики, матрицы, формулы, рисунки и установить требуемые единицы измерения.

Весьма важным здесь является подменю ***" Функции* f(x)*"***, вынесенное также на стандартную линейку.

Меню «Формат». Здесь расположены команды, позволяющие придать определенную форму создаваемому документу: разделить его на области, выбрать цвет, тип и размер шрифта надписей, придать определенный вид исходным данным, уравнениям и результатам вычислений.

Весьма важной для вычислений здесь является опция ***"Результат",*** после исполнения которой появляется окно, позволяющее установить форму результата и его точность (до 15-го знака после запятой).

Меню «Математика». Здесь сосредоточены опции, относящиеся к процессу вычисления, в том числе к его автоматизации.

Меню «Символы». Данное меню включает операции символьной математики: преобразование выражений, разложение многочлена на множители, определение коэффициентов полинома и его корней, интегрирование и дифференцирование функций.

Меню «Окно». С помощью команд этого меню можно придать определенный вид расположению окон, например, по вертикали, горизонтали или каскадом, содержащие определенные рабочие документы «Mathcad».

Меню «?» (справка) предоставляет возможность получить разнообразную информацию справочного характера по работе в среде «Mathcad».

Ниже с помощью примеров будет раскрыто содержание и процедура пользования различными подменю, командами и опциями из перечисленных меню.

Вторая строка текстового окна, называемая **стандартной линейкой**, включает наиболее часто используемые операции, каждой из которых соответствует определенная пиктограмма, смысл которой раскрывается ее изображением. При установке курсора на пиктограмме под ней появляется надпись, поясняющая ее назначение, а при одном щелчке левой клавишей "мыши" осуществляется выполнение соответствующей команды. Все пиктограммы дублируют наиболее часто используемые команды, содержащиеся в меню. Такое дублирование ускоряет работу с программой, позволяя ту или иную команду выполнить в один, а не в два приема.

Третья строка текстового окна называется **линейкой форматирования**. В ней представлены наиболее важные команды только из одного меню – форматирования, определяющего внешнюю форму напечатанного документа. При помощи линейки форматирования можно выбрать требуемый вид, размер и толщину шрифта, выровнять текст, дать нумерацию абзацам и выполнить другие команды. При установке курсора на значке под ним появляется надпись, раскрывающая его назначение, а при одном щелчке осуществляется выполнение соответствующей команды.

Панель ***"Математика"*** из меню **"Вид"**, можно постоянно расположить в текстовом окне в качестве 4-й строки.

4. Шесть правил вычислений в среде «Mathcad»

Возможны два типа вычислений в среде «Mathcad», осуществляемые с помощью формульного редактора**: численный и символьный.** При первом типе результат получается в виде числа, при втором – в форме математического выражения.

Реализация численного способа осуществляется:

- путем обращения к панелям математических инструментов из меню **"Вид"** (рис. 2);
- путем обращения к встроенным функциям **f(x)** из меню **"Вставка";**
- с помощью клавиатуры.

Реализация символьного способа, при котором происходит преобразование одного математического выражения в другое, осуществляется:

- путем обращения к меню **"Символы"**;
- путем обращения к панели математических инструментов **"Символы"** из меню **"Вид"** (рис. 2);
- с помощью клавиатуры.

Запись математических выражений в составляемую программу осуществляется с помощью математических инструментальных панелей (рис. 2), путем обращения к встроенным функциям **f(x)** и с помощью клавиатуры. В том месте рабочей области текстового окна, где установлен курсор-стрелка, после щелчка левой клавиши "мыши" возникает визир в форме значка + красного цвета. На месте установки визира отражается результат той или иной команды или операции и происходит ввод в программу требуемого математического выражения. После ввода первого символа визир преобразуется в две линии – горизонтальную и вертикальную – синего цвета. Перемещение визира осуществляется с помощью "мыши" при нажатой левой клавиши или клавиш клавиатуры, ответственных за перемещение курсора..

Сформулируем шесть правил, которыми следует пользоваться при реализации численного и символьного методов решения разнообразных математических задач в среде «Mathcad». Данные правила, позволяющие одну и ту же задачу решать разными способами, сопроводим примерами.

1-е правило, связанное с обращением к панелям математических инструментов из меню **"Вид"**: "Арифметика", "Матрицы" и "Математический анализ" (Исчисления"), позволяет получить результат в виде числа.

Сначала щелчком вызывается соответствующую панель инструментов (рис. 2), а затем производится щелчок по требуемой пиктограмме (кнопке), после чего в рабочей области текстового окна в месте установки красного визира появляется определенное выражение. Вписывание в него исходных данных и ввод знака равенства дает числовой результат.

Примеры.

1. Вычислить косинус угла, равного 0,5 радиана.

Вызываем панель ***"Арифметика",*** щелчок по кнопке **"cos"**. В рабочей области тестового окна появляется выражение: **cos(■)**. Вписываем внутрь скобок число 0.5 – **cos(0.5)** – и вводим знак =, после чего автоматически получаем результат: **cos(0.5)=0.878.**

2. Вычислить определенный интеграл от функции $\sin^2(x)$ в пределах изменения аргумента от 0.5 до 2.

Вызываем панель ***"Матанализ" ("Исчисление"),*** щелчок по пиктограмме, на которой изображен определенный интеграл. В рабочей области тестового окна в месте установки красного визира появляется выражение:

$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$ Вписываем в него значения верхнего и нижнего пределов интегрирования, а под знаком интеграла заданную функцию, вводим знак =, после чего автоматически получаем результат:

$$\int_{0.5}^{2} (\sin(x))^2 \, dx = 1.14957$$

3. Получить из заданной матрицы размером 3x3 транспонированную матрицу.

Вызываем панель инструментов ***"Матрица"*** (рис. 2). На ней делаем щелчок по пиктограмме, на которой изображена матрица. В рабочей области тестового окна в месте установки красного визира появляется диалоговое окно, в котором после слов "строки" и "столбцы" вписываем заданные числа: 3 и 3. После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" в тесте программы появляется матрица выбранной размерности. Вписываем в ячейки матрицы требуемые числа.

$\begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$ Обрамляем с помощью курсора всю запись пунктирной линией и щелкаем по пиктограмме $\mathbf{M^T}$, означающей выполнение операции по транспонированию матрицы. Вводим знак равенства, после чего автоматически получаем результат:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & -10 & 5 \\ 7 & -8 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -10 & -8 \\ 9 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Вызов матрицы можно произвести также путем обращения к подменю ***"Матрица"*** из меню **"Вставка".**

2-е правило, связанное с обращением к встроенным функциям **f(x)** из меню "Вставка", позволяет получить результат в виде числа.

Производится обращение к пиктограмме "Встроенная функция **f(x)**" на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбирается определенное имя, а в разделе "Название функции" – требуемая функция. После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" в рабочей области тестового окна появляется выбранная функция, в которую вписываются заданные числа и вводится знак =, после чего автоматически получается результат.

Примеры.

1. Вычислить косинус угла, равного 0,5 радиана.

Обращаемся к пиктограмме "Встроенная функция **f(x)**" на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбираем строку с надписью "Тригонометрия", а в разделе "Название функции" – **cos**. После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" в рабочей области тестового окна появляется выражение: **cos (■)**. Дальнейшие действия совпадают с 1-м правилом: вписываем внутрь скобок число 0.5 – **cos (0.5)** – и вводим знак =, после чего автоматически получаем результат:

cos (0.5)=0.878.

2. Вычислить значение гиперболического косинуса при значении аргумента 1.2.

Обращаемся к пиктограмме встроенная функция **f(x)** на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбираем строку с надписью "Гиперболические", а в разделе "Название функции" – **cosh**.

После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" в рабочей области тестового окна в месте установки красного визира появляется выражение **cosh (■)**. Вписываем внутрь скобок заданное значение аргумента – **cosh (1.2)** – и вводим знак =, после чего автоматически получаем результат: **cosh (1.2)=1.811.**

3. Вычислить функцию Бесселя 1-го рода 1-го порядка при аргументе 5.

Обращаемся к пиктограмме встроенная функция **f(x)** на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбираем строку с надписью "Бесселя", а в разделе "Название функции" – **I1**.

После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" в рабочей области тестового окна в месте установки красного визира появляется выражение **I1 (■)**. Вписываем внутрь скобок заданное значение аргумента – **I1 (5)** – и вводим знак =, после чего автоматически получаем результат: **I1 (5)=24.336.**

3-е правило, связанное с вводом необходимых знаков с помощью клавиатуры, позволяет получить результат, как в численном, так и символьном виде.

Данное правило, по существу, аналогично двум предыдущим. Только здесь все знаки – числа, арифметические действия и латинские обозначения – вводятся в текст составляемой программы с помощью клавиатуры.

Возможен ввод и специальных операторов при символьных вычислениях путем одновременного нажатия двух или трех клавиш.

Приведем несколько примеров по вводу специальных знаков:

1. Для ввода оператор 1-й производной следует одновременно нажать на две клавиши: **shift + ?**.
2. Для ввода оператора n-й производной следует одновременно нажать на три клавиши: **ctrl+ shift + ?.**
3. Для ввода знака неопределенного интеграла следует нажать на две клавиши: **ctrl + I.**
4. Для ввода знака определенного интеграла следует нажать на две клавиши: **shift + &.**
5. Исполнение символьных операций дифференцирования и интегрирования осуществляется нажатием двух клавиш: **shift +F9.**

4-е правило, связанное с обращением к математической панели инструментов **"Символы"**, позволяет получить результат как в символьном, так и численном виде.

Математическое выражение, подлежащее преобразованию, записывается в рабочей области текстового окна и с помощью курсора обрамляется рамкой. Далее в зависимости от вида преобразования выбирается соответствующее ключевое слово:

Series – при разложении функции в степенной ряд Маклорена по выбранной переменной;

Expland – при разложении в степенной ряд выражений типа бинома Ньютона;

Complex – при преобразовании комплексных чисел;

$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\rightarrow$, $\mathbf{M}^{-1}\rightarrow$, $|\mathbf{M}|\rightarrow$ – при транспонировании и обращении (инвертировании) матриц и расчете их определителя;

Символьный знак равенства → при дифференцировании, и т.д.

После щелчка по выбранному ключевому слову к записи автоматически добавляется это слово и символический знак равенства →,

После второго щелчка вне рамки записи автоматически появляется результат в виде нового символьного выражения, полученного из исходного в результате преобразования.

Примеры.

1. $\dfrac{x^6-y^6}{x-y}\ \text{series},x,6\rightarrow y^5+y^4x+y^3x^2+y^2x^3+yx^4+x^5,$
2. $(x+y)^3\ \text{expland},x\rightarrow x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\ ,$
3. $\exp\left(\dfrac{1}{3}i\pi xn\right)\text{complex}\rightarrow\cos\left(\dfrac{1}{3}\pi xn\right)+i\sin\left(\dfrac{1}{3}\pi xn\right),$

4. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$,

5. $\left\| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\| \rightarrow ad - bc$,

6. $\frac{d}{dx} x^3 \exp(x^2) \rightarrow 3x^2 \exp(x^2) + 2x^4 \exp(x^2)$.

5-е правило, связанное с обращением к меню **"Символы"**, подменю ***"Расчеты"***, позволяет произвести символьные вычисления, в том числе и в комплексной области.

Математические выражения, связанные между собой определенными операциями, записываются в рабочей области текстового окна, и с помощью курсора обрамляется рамкой.

Далее щелчком производится обращение к строке "символические" при дифференцировании и интегрировании функций и других операциях, а при работе с комплексными числами – к строке "комплексные".

После щечка на рабочем листе появляется результат в виде нового выражения, располагаемого под исходной записью.

Примеры.

1. $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$.

2. $(2a + 5a^2 + 8b^2) \bullet (a^3 - 3b^2)$

$2a^4 - 6ab^2 + 5a^5 - 15a^2b^2 + 8b^2a^3 - 24b^4$.

3. $\frac{d}{dx} x^4$ 4. $\int x^3 dx$

$4x^3$ $\frac{1}{4} x^4$.

6-е правило, также связанное с обращением к меню **"Символы"**, позволяет произвести разнообразные символьные преобразования, записав в рабочей области текстового окна подлежащее преобразованию выражение.

При обращении к подменю ***"Переменные"*** в этом выражении необходимо выделить (затемнить ▐) один символ – переменную – путем протаскивания курсора.

Далее с помощью подменю ***"Переменные"*** можно выполнить следующие операции:

– найти корни алгебраического и трансцендентного уравнений (опция "Вычислить");

– произвести дифференцирование функции (строка "Дифференциалы");

– произвести интегрирование функции (строка "Интеграция");

– разложить функцию в степенной ряд Маклорена (строка "Разложить на составляющие");

– разложить функцию на элементарные дроби (строка "Преобразовать в частичные доли").

При обращении к подменю ***"Матрица"*** следует обрамить рамкой все выражение. Это подменю позволяет осуществить транспонирование и обращение (инвертирование) матрицы и найти ее определитель.

При обращении к подменю ***"Преобразования"*** можно произвести прямое и обратное преобразования: Фурье, Лапласа и типа **Z**.

Примеры, относящиеся к данному правилу, рассматриваются ниже.

Сведем в табл. 1 шесть сформулированных правил по реализации численного и символьного методов решения разнообразных математических задач в среде «Mathcad».

Таблица 1

№ правила	Обращение:	Знак равенства	Вид результата
1	К панелям математических инструментов из меню **"Вид"**: "Арифметика", "Матрицы" и "Математический анализ"	=	Число
2	К встроенным функциям **f(x)** из меню "Вставка"	=	Число
3	С помощью клавиатуры	= **shift F9**	Число Символ
4	К математической панели инструментов **"Символы"**	→	Символ Число
5	К меню **"Символы"**, подменю ***"Расчеты"***		Символ
6	К меню **"Символы"**, подменю ***"Переменные", "Матрица", "Преобразования"***		Символ

5. Редактирование программы

Простое редактирование программы предусматривает выполнение следующих операций: удаление некоторых выражений, их копирование и перенос в другое место программы, а также вписывание определенных текстовых комментариев. Рассмотрим процедуру исполнения названных операций.

Удаление математических выражений.

Удаление отдельных символов осуществляется с помощью клавиши **«Backspace».** При этом визир следует установить после удаляемого символа.

Удаление одного математического выражения, например уравнения, осуществляется следующим образом. Сначала следует с помощью левой клавиши мыши очертить это выражение пунктирной линией, превращающейся затем в сплошную линию после снятия пальца с этой клавиши. Затем необходимо нажать на клавишу «**Backspace**», после чего все выражение будет выделено (затемнено) и вновь нажать на клавишу **«Backspace»** или **«Del»**. Выделение удаляемого выражения можно также осуществить путем протаскивания вдоль него курсора, после чего следует нажать на клавишу **«Backspace»** или **«Del»**.

Одновременное удаление двух и более математических выражений можно осуществить следующим образом. Сначала следует с помощью левой клавиши мыши очертить всю удаляемую группу выражений пунктирной линией, после чего каждое из удаляемых выражений будет окружено пунктирной линией.

Следующее действие может быть осуществлено одним из трех способов:

- или путем нажатия на клавишу «**Backspace**» или «**Del**»;
- или путем обращения к команде ***"Вырезать"*** на стандартной линейке или ***"Удалить"*** в меню **"Правка"**;
- или нажатием на правую клавишу "мыши", после чего появляется дополнительное окно, в котором есть строка ***"Вырезать".***

Копирование математических выражений.

Сначала по аналогии с предыдущим действием необходимо с помощью левой клавиши мыши очертить всю копируемую группу выражений пунктирной линией, после чего каждое из них будет окружено пунктирной линией.

Второе действие может быть осуществлено одним из двух способов:

- или путем обращения к команде ***«Копировать»*** на стандартной линейке или в меню **"Правка"**;
- или нажатием на правую клавишу "мыши", после чего появляется дополнительное окно, в котором есть строка ***«Копировать».***

Затем следует перевести курсор на то место в рабочей области, куда следует поместить копируемый материал, и выполнить третье действие одним из двух способов:

- или путем обращения к команде ***"Вставить"*** на стандартной линейке или в меню **"Правка"**;
- или нажатием на правую клавишу, после чего появляется дополнительное окно, в котором есть строка ***"Вставить".***

При копировании отдельного выражения первое из названных действий (выделение) можно осуществить протаскиванием курсора вдоль копируемого выражения, после чего следует выполнить два других действия.

Перенос математических выражений.

1-й вариант: аналогичен копированию выражений с заменой опции **«Копировать»** опцией **«Вырезать».**

2-й вариант. Сначала по аналогии с предыдущим действием необходимо с помощью левой клавиши мыши очертить всю копируемую группу выражений пунктирной линией, после чего каждое из них будет окружено пунктирной линией. Затем следует подвести курсор-стрелку к любой из пунктирных линий и дождаться преобразования курсора в изображение кисти руки. Далее, не снимая пальца с левой клавиши мыши, следует перетянуть всю группу выражений в требуемое место рабочий области. При перетягивании курсор примет вид стрелки с прямоугольником.

Вписывание в программу текстовых комментариев.

Данная операция осуществляется под руководством текстового редактора. После ввода с клавиатуры символа " (кавычки) в месте нахождения красного визира появляется прямоугольник, в который и вводится требуемый текст в полном соответствии с правилами работы редактора **«Word».** Редактирование введенного текста может быть осуществлено с помощью подменю ***«Текст»*** меню **«Формат»** и опций, вынесенных на линейку "Форматирование".

Удаление, копирование и перенос текстовых комментариев осуществляется по той же методике, что и математических выражений.

В некоторых версиях «Mathcad» для вводимого текста возможно использование только латинского алфавита.

6. Построение графиков

Построение графиков в составляемой программе на основе исходных данных или результатов вычислений осуществляется в среде «Mathcad» под руководством графического редактора. При построении графиков можно воспользоваться инструментальной панелью ***"График"*** из меню **"Вид"** или подменю ***"График"*** в меню **«Вставка»** (рис. 2). С их помощью можно построить двухмерные графики в декартовой и полярной системе координат, трехмерные и точечные графики, векторное поле и гистограммы.

Рассмотрим сначала на конкретном примере методику построения двухмерного графика декартовой системе координат.

Пример 1. Требуется построить график функции:

$$Y(t) = B\ exp(-\alpha t)\ sin(2\ \pi\ F1\ t)$$

в пределах изменения аргумента t от 0 до 5 при B=10, F1=5, α=−0,5.

Вызываем панели ***"Арифметика"*** и ***"Греческий алфавит".*** В рабочей области тестового окна в месте установки красного визира записываем согласно правилам «Mathcad» исходные данные и функцию (рис. 3).

Вызываем панель "График", щелчок по пиктограмме "Декартов график", в месте установки красного визира появляется прямоугольная рамка с осями абсцисс и ординат. График должен располагаться ниже формулы.

$$B := 10 \qquad F1 := 5 \qquad \alpha := 0.5$$

$$Y(t) := B \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F1 \cdot t)$$

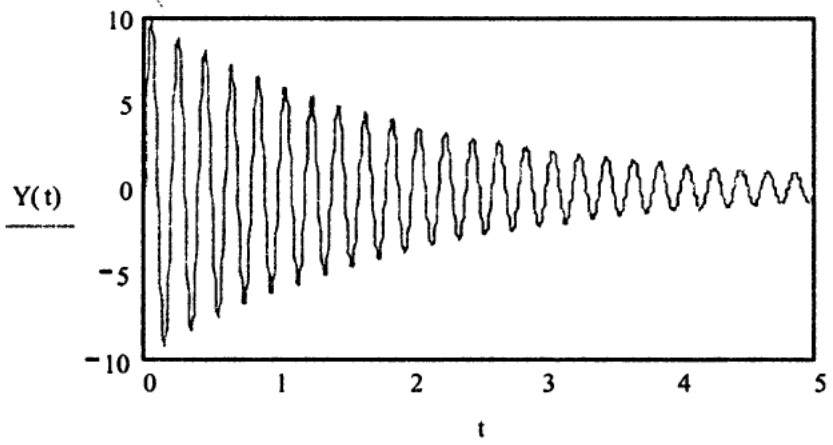


Рис. 3

На месте черного квадратика, расположенного внизу оси абсцисс, вписываем имя аргумента – t,а слева от оси ординат – имя функции Y(t).

После щелчка вне прямоугольной рамки происходит автоматическое построение графика. Устанавливаем требуемые крайние значения аргумента по оси абсцисс (0…5) и функции по оси ординат(−10…10).

Установив курсор внутри прямоугольной рамки, двумя щелчкам левой клавиши "мыши" вызываем диалоговое окно, позволяющее выбирать вид масштаба по осям (равномерный или логарифмический); количество вспомогательных линий координатной сетки; толщину, вид и цвет графика.

В результате получаем график заданной функции, представленный на рис. 3.

Пример 2. Требуется построить график полинома Чебышева 1-го рода 6-го порядка: $F(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$,
в пределах изменения аргумента x от −2 до +2.

Вызываем панель ***"Арифметика"*** В рабочей области тестового окна в месте установки красного визира записываем согласно правилам «Mathcad» исходную функцию (рис. 4).

Вызываем панель "График", щелчок по пиктограмме "Декартов график", в месте установки красного визира появляется прямоугольная рамка с осями абсцисс и ординат (рис. 4). График должен располагаться ниже формулы.

На месте черного квадратика, расположенного внизу оси абсцисс, вписываем имя аргумента – x, а слева от оси ординат – имя функции $F(x)$.

После щелчка вне прямоугольной рамки происходит автоматическое построение графика. Устанавливаем требуемые крайние значения аргумента по оси абсцисс и функции по оси ординат.

$$F(x) := 32 \cdot x^6 - 48 \cdot x^4 + 18 \cdot x^2 - 1$$

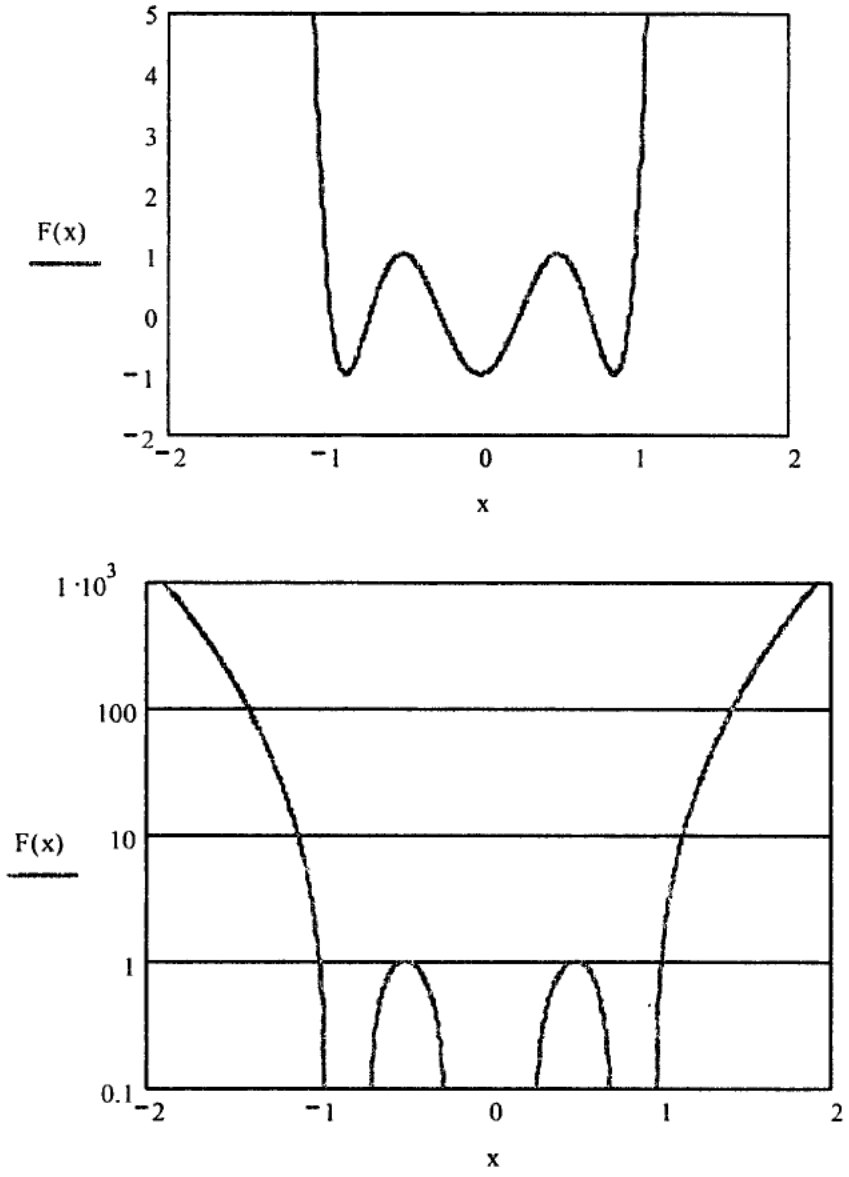


Рис. 4

Установив курсор внутри прямоугольной рамки, двумя щелчкам левой клавиши "мыши" вызываем диалоговое окно: выбираем логарифмический масштаб по оси ординат; количество линий координатной сетки; толщину, вид и цвет графика. Строим два графика заданной функции (рис. 4): при равномерном и логарифмическом масштабе по оси ординат.

Пример 3. Требуется построить в полярной системе координат график функции эллипса: $R=a(1-e^2)/(1+ e\cos\theta)$,
при значении большой оси a=5 и эксцентриситета e=0,8.

Вызываем панели ***"Арифметика"*** и ***"Греческий алфавит"***. В рабочей области тестового окна в месте установки красного визира записываем согласно правилам «Mathcad» исходные данные и функцию (рис. 5).

$$a := 5 \qquad e := 0.8$$

$$R(\Theta) := a \cdot \frac{1 - e^2}{1 + e \cdot \cos(\Theta)}$$

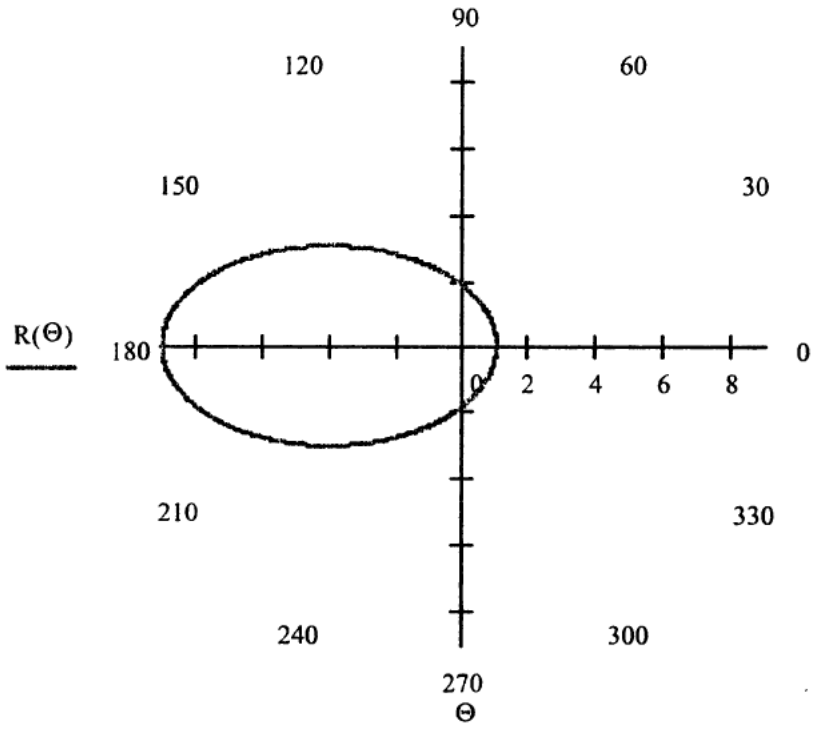


Рис. 5

Вызываем панель "График", щелчок по пиктограмме "Полярные координаты", в месте установки красного визира появляется окружность. График должен располагаться ниже формулы.

На месте черного квадратика, расположенного внизу окружности, вписываем имя аргумента – θ, а слева – имя функции $R(\theta)$.

После щелчка вне прямоугольной рамки происходит автоматическое построение графика в полярной системе координат.

Установив курсор внутри прямоугольной рамки, двумя щелчкам левой клавиши "мыши" вызываем диалоговое окно, позволяющее выбирать вид масштаба по осям (равномерный или логарифмический); количество вспомогательных линий координатной сетки; толщину, вид и цвет графика.

В результате получаем график заданной функции на рис. 5.

Отметим, что в пределах одной сетки координат можно построить до 6 разных графиков. Построение других видов графиков с помощью инструментальной панели "Графика" осуществляется по методике, аналогичной описанным в рассмотренных примерах.

Удаление, копирование и перенос графиков осуществляется по той же методике, что и математических выражений (см. § 5.). Изменение размера графика осуществляется путем протаскивания курсора, установленного на обрамляющей его рамке.

7. Определение корней алгебраических уравнений

Основные определения. Решить уравнение с одним неизвестным x:

$$F(x)=0, \qquad (1)$$

означает найти значения x_i , называемые корнями или решениями, удовлетворяющие уравнению (1). Правильность полученного решения можно проверить подстановкой. Уравнение (1), представляющее собой многочлен степени n относительно x,

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0\,, \qquad (2)$$

где коэффициенты a_i – действительные или комплексные числа, называется алгебраическим уравнение n-й степени.

Алгебраическое уравнение n-й степени имеет n корней. Алгебраическое уравнение (2) называется действительным, если все его коэффициенты a_i – действительные числа. Комплексные корни действительного уравнения (2) могут быть только парными, комплексно сопряженными числами. Уравнение (2) нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

Определение корней уравнения (2) имеет важное прикладное значение, например, при решении задач устойчивости систем автоматического регулирования.

Аналитические методы решения уравнения (2) при $n\geq 3$ весьма трудоемки [10]. Компьютерные методы решения предельно упрощают эту задачу.

Методы решения алгебраических уравнений в среде «Mathcad».

Возможны два способа нахождения корней уравнения (2) в среде «Mathcad»:

- с помощью методов символьной математики согласно **правилу 6**;
- путем обращения к встроенной функции согласно **правилу 2** (см. § 4).

Рассмотрим применение обоих методов на конкретных примерах.

Пример 4. Найти корни кубического уравнения

$$F(x) = x^3 + 3x^2 - 972 = 0. \qquad (3)$$

Решение по правилу 6.

Открываем рабочий лист и записываем многочлен из уравнения (3):

$x^3 + 3x^2 - 972$.

Выделяем (затемняем ▓) в этом многочлене в любом члене один символ – переменную x – путем протаскивания курсора.

Открываем меню "Символ", подменю "Переменные", щелчок по опции "Вычислить".

На рабочем листе появляется результат, записанный в форме вектора (рис. 6).

rule - 6

$$x^3 + 3 \cdot x^2 - 972$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -6 + 6 \cdot i \cdot \sqrt{2} \\ -6 - 6 \cdot i \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

rule - 2

$$x^3 + 3 \cdot x^2 - 972$$

$$v := \begin{pmatrix} -972 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -6 + 8.485281i \\ -6 - 8.485281i \\ 9 \end{pmatrix}$$

check-up

$F(x) := x^3 + 3 \cdot x^2 - 972$ $\quad i := \sqrt{-1}$

$x := 9$ $\quad F(x) = 0$

$x := -6 + 6 \cdot i \cdot \sqrt{2}$ $\quad F(x) = 2.273737 \times 10^{-13} - 1.136868 i \times 10^{-13}$

$x := -6 - 6 \cdot i \cdot \sqrt{2}$ $\quad F(x) = 2.273737 \times 10^{-13} + 1.136868 i \times 10^{-13}$

Рис. 6

Решение по правилу 2.

Вновь записываем многочлен из уравнения (3): $x^3+3\,x^2-972$.

Выделяем (затемняем ▓) в этом многочлене в любом члене один символ – переменную x – путем протаскивания курсора.

Записываем вектор коэффициентов многочлена, для чего открываем меню "Символ", щелчок по опции "Коэффициенты". Перед вектором вставляем его имя **V: =** (Полученный результат приведен на рис. 6)

Другой способ записи вектора состоит в обращении к панели инструментов "Матрица", к пиктограмме "Создать матрицу или вектор", в записи в открывшемся окне против "строки" – 4, "столбцы" – 1, щелчке по кнопке "ОК" или "Вставить". Заметим, что при отсутствии какого-либо члена соответствующий ему коэффициент принимается равным 0.

Обращаемся к пиктограмме "Встроенная функция **f(x)** " на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбираем строку с надписью "Решение", а в разделе "Название функции" – **polyroots**. После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" на рабочем листе появляется название данной функции, в скобки вписываем имя вектора коэффициентов **V** и вводим знак =. (Заметим, что подменю **f(x)** можно вызвать также из меню **"Вставка".**) После ввода знака равенства получаем результат в виде вектора (рис. 6).

Точность полученного результата устанавливаем путем открытия меню "Формат", подменю "Результат" и выбора требуемого числа десятичных знаков в открывшемся окне.

Проводим проверку **(check-up)** полученных результатов. Для этого последовательно при каждом из полученных значений корня x_i (переносим их методом копирования) вычисляем значение многочлена $F(x)$. Близость к нулю действительной и мнимой частей $F(x)$ указывает на правильность полученных результатов.

Программа определения корней обоими методами и проверка полученных результатов приведена на рис.6

Пример 5. Найти корни алгебраического уравнения 5-й степени.

$$F(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 11x - 15384 = 0\,. \qquad (4)$$

Заметим, что аналитическим путем данная задача практически неразрешима.

Решение по правилу 6.

Открываем рабочий лист и записываем (рис. 7) многочлен из уравнения (4): $x^5-5x^4+7x^3-9x^2+11x-15384$.

Выделяем (затемняем ▉) в этом многочлене в любом члене один символ – переменную x – путем протаскивания курсора.

Открываем меню "Символ", подменю "Переменные", щелчок по опции "Вычислить".

На рабочем листе появляется результат, записанный в форме вектора. По аналогии с примером 4 проводим проверку **(check-up)** полученных результатов. Программа определения корней и проверка полученных результатов приведена на рис. 7.

rule - 6

$$x^5 - 5 \cdot x^4 + 7 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 15384$$

$$v := \begin{pmatrix} -15384 \\ 11 \\ -9 \\ 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -4.62337614 + 4.02158526i \\ -4.62337614 - 4.02158526i \\ 3.12337614 + 6.43878385i \\ 3.12337614 - 6.43878385i \\ 8 \end{pmatrix}$$

check-up

$F(x) := x^5 - 5 \cdot x^4 + 7 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 15384 \qquad i := \sqrt{-1}$

$x := 8$	$F(x) = 0$
$x := -4.62337614 + 4.02158526i$	$F(x) = 5.379 \times 10^{-5} - 4.838i \times 10^{-6}$
$x := -4.62337614 - 4.02158526i$	$F(x) = 5.379 \times 10^{-5} + 4.838i \times 10^{-6}$
$x := 3.12337614 + 6.43878385i$	$F(x) = 5.845 \times 10^{-5} - 2.269i \times 10^{-5}$
$x := 3.12337614 - 6.43878385i$	$F(x) = 5.845 \times 10^{-5} + 2.269i \times 10^{-5}$

Рис. 7

8. Определение корней трансцендентных уравнений.

Основные определения. Уравнение (1) называется трансцендентным, если хотя бы одна из функций в нем не является алгебраической [10]. Примеры таких уравнений:

$$F(x) = 3^x - (4^{x-2}) * 2^x = 0,$$
$$F(x) = \sin(x) - \cos(x^2) + 1/4 = 0,$$
$$F(x) = 2 \lg_5 (3x-1) - \lg_5 (12x+1) = 0.$$

Регулярных аналитических методов решения трансцендентных уравнений не существует. В каждом конкретном случае ищется свой, индивидуальный прием. Общим является только графический метод, состоящий в построении графика функции $F(x)$. Точки пересечения построенного графика с осью абсцисс и есть искомые действительные корни уравнения (Ниже будут выполнены такие построения).

Методы решения трансцендентных уравнений в среде «Mathcad».

Возможны два способа нахождения корней уравнения (2) в среде «Mathcad»:

- с помощью методов символьной математики согласно **правилу 6;**

- с помощью встроенной функции **root** в подменю **f(x)** меню **"Вставка"** согласно **правилу 2** (см. § 4).

Рассмотрим применение обоих методов на двух примерах.

Пример 6. Найти корни трансцендентного уравнения

$$F(x)=3^X-(4^{X-2})*2^X=0. \qquad (5)$$

Открываем рабочий лист, записываем уравнение (5): $F(x)=3^X-(4^{X-2})*2^X$ и строим его график (**graph**) с целью приблизительного определения искомого действительного решения (рис. 8). Из графика видно, что это решение, определяемое как точка пересечения графика с осью абсцисс, лежит в промежутке значений x =2..3.

Решение по правилу 6.

Записываем многочлен из уравнения (5): $3^X-(4^{X-2})*2^X$.

Выделяем (затемняем ▮) в этом многочлене в любом члене один символ – переменную x – путем протаскивания курсора.

Открываем меню "Символ", подменю "Переменные", щелчок по опции "Вычислить".

На рабочем листе появляется результат (рис.8).

Решение по правилу 2.

Записываем уравнение (4): $F(x)=3^X-(4^{X-2})*2^X$.

Вводим любое имя искомого решения и знак присвоения, например, r :=, после которого размещаем красный визир +.

Обращаемся к пиктограмме "Встроенная функция **f(x)**" на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбираем строку с надписью "Решение", а в разделе "Название функции" – **root**. После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" на рабочем листе появляется название данной функции с четырьмя черными прямоугольниками, которые следует заполнить:

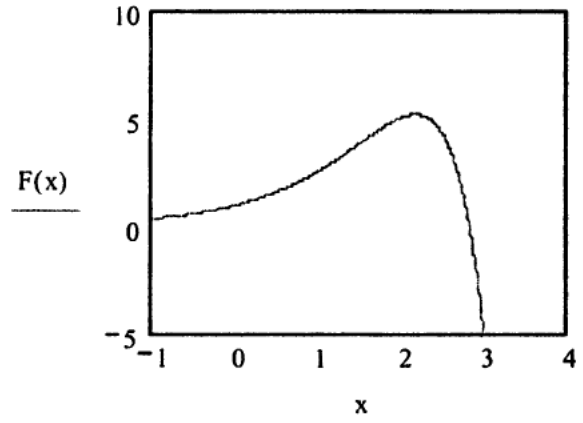
r := root (■ , ■ , ■ , ■) .

В 1-е окошко вписываем имя функции $F(x)$, во 2-е – переменную x, в 3-е и 4-е – нижний(a) и верхний (b) пределы, внутри которого ищется решение. Запись приобретает вид:

r := root (F(x), x, a , b).

graph

$$F(x) := 3^x - \left(4^{x-2}\right) \cdot 2^x$$



rule - 6

$$3^x - \left(4^{x-2}\right) \cdot 2^x$$

$$2 \cdot \frac{\ln(4)}{\ln\left(\frac{8}{3}\right)} = 2.8267802$$

rule - 2

$$F(x) := 3^x - \left(4^{x-2}\right) \cdot 2^x$$

$$r := \text{root}(F(x), x, 0, 3) \qquad r = 2.8267802$$

check-up

$$r = 2.8267802 \qquad F(2.8267802) = 2.287 \times 10^{-7}$$

Рис. 8

Согласно графику устанавливаем эти пределы, как 0 и 3 (рис. 8). Вновь вводим искомое решение, но теперь со знаком равенства **r =**, и сразу получаем результат. Полученное значение корня при 2-м методе в точности совпадают с решением при 1-м методе.

Точность полученного результата устанавливаем путем открытия меню "Формат", подменю "Результат" и выбора требуемого числа десятичных знаков в открывшемся окне.

Проводим проверку **(check-up)** полученного результата, для чего вычисляем значение функции $F(x)$ при найденном значении корня. Близость к нулю функции $F(x)$ указывает на правильность полученного результата.

Программа определения корня обоими методами и проверка полученного результата приведена на рис. 8.

Пример 6. Найти корни трансцендентного уравнения

$$F(x) = \sin(x) - (\cos(x))^2 + 1/4 = 0 . \qquad (6)$$

Открываем рабочий лист, записываем уравнение (6) и строим его график (**graph**) в двух масштабах с целью приблизительного определения искомых решений (рис. 9). Из графика видно, что эти решения, определяемые как точки пересечения графика с осью абсцисс, носят периодический характер: в пределах каждого периода в 2π имеется два решения, одно из которых лежит в промежутке значений x=0..1, а другое в промежутке x=2..3.

Решение по правилу 6.

Записываем многочлен из уравнения (6):

$\sin(x)-(\cos(x))^2+1/4.$

Выделяем (затемняем ▮) в этом многочлене в любом члене один символ – переменную x – путем протаскивания курсора.

Открываем меню "Символ", подменю "Переменные", щелчок по опции "Вычислить".

На рабочем листе появляется результат, записанный в форме вектора (рис. 9). Первые два решения, выраженные через **arctg,** указывают на периодический характер комплексного решения; два других – определяют действительные корни уравнения (6) в первом периоде: $\pi/6$ и $5\pi/6$, что вполне согласуется с построенным графиком. Все остальные корни следуют через 2π по отношению к этим двум решениям.

Решение по правилу 2 .

Записываем уравнение (6): $F(x) = 3^x - (4^{x-2})* 2^x$.

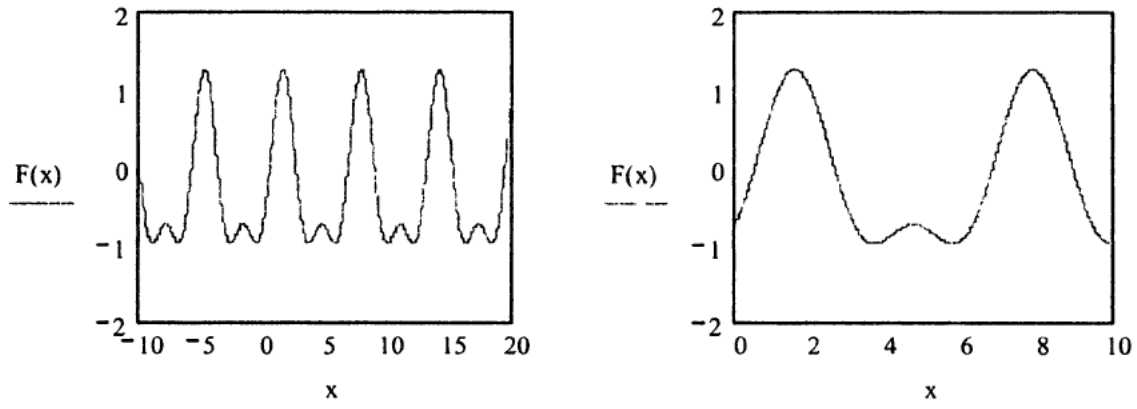
Вводим любое имя искомого решения и знак присвоения, например, **r :=** , после которого размещаем красный визир +.

Обращаемся к пиктограмме "Встроенная функция **f(x)**" на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбираем строку с надписью "Решение", а в разделе "Название функции" – **root**. После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" на рабочем листе появляется название данной функции с четырьмя черными прямоугольниками, которые следует заполнить:

r := root (■ , ■ , ■ , ■) .

graph

$$F(x) := \sin(x) - (\cos(x))^2 + \frac{1}{4}$$



rule - 6

$$\sin(x) - (\cos(x))^2 + \frac{1}{4}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{atan2}\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{5}\right) \\ \operatorname{atan2}\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{5}\right) \\ \frac{1}{6}\cdot\pi \\ \frac{5}{6}\cdot\pi \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \frac{\pi}{6} = 0.523599 \\ 5\cdot\frac{\pi}{6} = 2.617994 \end{matrix}$$

rule - 2

$$F(x) := \sin(x) - (\cos(x))^2 + \frac{1}{4}$$

$r := \text{root}(F(x), x, 0, 1)$ $\quad r = 0.523599$

$r := \text{root}(F(x), x, 1, 3)$ $\quad r = 2.617994$

check-up

$x := 0.523599$ $\quad F(x) = 3.886752\times 10^{-7}$

$x := 2.617994$ $\quad F(x) = -2.113249\times 10^{-7}$

Рис. 9

В 1-е окошко вписываем имя функции F(x), во 2-е – переменную x, в 3-е и 4-е – нижний (a) и верхний (b) пределы, внутри которого ищется решение. Запись приобретает вид:

r := root (F(x), x, a , b).

Сначала ищем 1-й корень, установив согласно графику эти пределы, как 0 и 1 (график на рис. 9). Вновь вводим искомое решение, но теперь со знаком равенства **r =**, и сразу получаем результат. Затем ищем 2-й корень, повторив всю процедуру при пределах 1 и 3. Полученные значения корней при 2-м методе в точности совпадают с 1-м методом.

Точность полученного результата устанавливаем путем открытия меню "Формат", подменю "Результат" и выбора требуемого числа десятичных знаков в открывшемся окне.

Проводим проверку **(check-up)** полученных результатов, для чего вычисляем значение функции F(x) при найденных значениях корня. Близость к нулю функции F(x) указывает на правильность полученного результата.

Программа определения корней обоими методами и проверка полученного результата приведена на рис. 9.

9. Разложение функции в степенной ряд

Основные определения. При решении многих научно-технических задач прикладного свойства возникает необходимость в представлении определенной функции F(x) в виде степенного ряда:

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_o)^k \qquad (7)$$

или при $x_0 = 0$

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \ , \qquad (8)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные или комплексные числа.

В одних случаях число членов ряда (8) конечно, в других – бесконечно. Примерами функций, разлагающихся в конечный ряд, являются:

$(x + y)^n$ – бином Ньютона,

$\frac{x^n - y^n}{x - y}$ – при любом целом n,

$\frac{x^n + y^n}{x + y}$ – при нечетном и целом n,

$\frac{x^n - y^n}{x + y}$ – при четном и целом n.

Любую функцию $F(x)$, непрерывную и имеющую все производные при $x=x_0$, можно представить в виде степенного ряда (8), называемого рядом Тейлора, где коэффициенты a_k определяются как производные, а число членов n бесконечно. В частном случае при $x_0=0$, т. е. при разложении по степеням x, этот ряд называется рядом Маклорена. При ограничении числа членов ряд Маклорена записывается в виде [10]:

$$F(x)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\frac{F'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$
$$+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\mathbf{O}(x^n)\,, \qquad (9)$$

где $\mathbf{O}(x^n)$ – остаточный член,

$F'(0), F''(0), \ldots, F^{(n-1)}(0)$ – производные в точке $x=0$.

В ряд Маклорена раскладывается большинство элементарных функций: sin(x), cos(x), tg(x), ln(x), e^x и т. д.

Разложение функции в степенной ряд в среде «Mathcad».

Возможны два способа разложения функции $F(x)$ в степенной ряд согласно (8) и (9) в среде «Mathcad»:

- с помощью методов символьной математики путем обращения к меню **"Символ"**, подменю ***"Переменные"*** согласно **правилу 6,** с помощью инструментальной математической панели ***"Символы"*** согласно **правилу 4** (см. § 4).

Решение по правилу 6.

После записи функции $F(x)$, разлагаемой в степенной ряд, в ней необходимо выделить (затемнить ▮) в любом члене один символ – переменную x – путем протаскивания курсора.

Само разложение функции в степенной ряд (8) осуществляется путем обращения к опции "Разложить на составляющие" в меню **"Символ"**, подменю ***"Переменные"***. После щелчка появляется окно, в котором следует установить порядок аппроксимации, т. е. наивысшую степень n степенного ряда (8) или (9).

Примеры такого разложения приведены на рис. 10. Первый пример показывает, как можно упорядочить многочлен, сгруппировав в нем переменные, относящиеся к переменной **x** одной и той же степени, два следующих – разложение функций в степенной ряд (8) при конечном числе членов. В примерах 4 и 5 показано разложение в ряд Маклорена с ограничением числа членов. Появляющаяся в конце ряда член $O(x^n)$ указывает на то, что при разложении функции учитываются только члены переменной **x** со степенью включительно по (n–1).

rule - 6

1. $x^2 - a^2 \cdot y^2 \cdot x^4 + \left(3 \cdot c^2 \cdot x + b\right) \cdot x^3 - x^4 + c \cdot x^2 - 5 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b^2 \cdot x$

$$2 \cdot b^2 \cdot x + (1 + c) \cdot x^2 + (b - 5 \cdot a) \cdot x^3 + \left(-1 - a^2 \cdot y^2 + 3 \cdot c^2\right) \cdot x^4$$

---

2. $\dfrac{x^6 - y^6}{x + y}$

$$-y^5 + y^4 \cdot x + -y^3 \cdot x^2 + y^2 \cdot x^3 + -y \cdot x^4 + 1 \cdot x^5$$

---

3. $\cos(x)$

$$1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{720} \cdot x^6 + \frac{1}{40320} \cdot x^8 - \frac{1}{3628800} \cdot x^{10} + O\left(x^{11}\right)$$

---

4. e^x

$$1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + \frac{1}{720} \cdot x^6 + O\left(x^7\right)$$

---

rule - 4

5. $\dfrac{x^6 - y^6}{x - y}\ \text{series}, x, 6 \rightarrow y^5 + y^4 \cdot x + y^3 \cdot x^2 + y^2 \cdot x^3 + y \cdot x^4 + x^5$

---

6. $\cos(x)\ \text{series}, x, 10 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{720} \cdot x^6 + \frac{1}{40320} \cdot x^8$

---

7. $e^x\ \text{series}, x, 7 \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + \frac{1}{720} \cdot x^6$

---

8. $(x - y)^4\ \text{expand}, x \rightarrow x^4 - 4 \cdot x^3 \cdot y + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y^3 + y^4$

Рис. 10

Решение по правилу 4.

Записываем функцию $F(x)$, разлагаемую в степенной ряд, и с помощью курсора обрамляем ее пунктирной линей, после чего вызываем инструментальную панель ***"Символы"*** и щелчком функцию **series**.

На рабочем листе появляется запись:

$F(x)$ **series** (■ , ■) →. В первое окошко вписываем имя переменной, во второе – наивысшую степень члена n+1 в проводимом разложении функции в степенной ряд. Запись приобретает вид:

$F(x)$ **series** (x, n+1) →. После щелчка получаем результат.

При разложении в степенной ряд функций типа бином Ньютона можно воспользоваться также функцией **expand** на той же панели ***"Символы"***. Запись при этом имеет вид:

$F(x)$ **expand**, x →

Примеры расчета по правилу 4 приведены на рис. 10. Отметим, что результаты расчета по обоим способам совпадают.

10. Разложение функции на элементарные дроби

Основные определения. Любое отношение двух функций, представляющих собой многочлены:

$$F(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+....+b_m}{x^n+a_1x^{n-1}+....+a_m}, \qquad (10)$$

где n>m, может быть представлено в виде суммы n элементарных дробей, соответствующих корням многочлена P(x) [10].

Разложение функции на элементарные дроби в среде «Mathcad».

После записи функции $F(x)$, разлагаемой на дроби, в ней необходимо выделить (затемнить ■) в любом члене один символ – переменную x – путем протаскивания курсора.

Само разложение функции (10) на элементарные дроби осуществляется путем обращения к меню **"Символ"**, подменю ***"Переменные"***, опции "Преобразование в частичные доли" согласно **правилу 6** (см. § 4). После щелчка на рабочем листе появляется результат разложения функции $F(x)$ в виде суммы элементарных дробей.

Примеры такого разложения приведены на рис. 11. В обоих примерах после разложения на дроби проводится проверка полученного результата для произвольно выбранных частных случаев: рассчитывается значение исходной функции и после ее разложения на дроби. Во всех случаях результаты в точности совпадают.

rule - 6

1. $$\frac{\left(5\cdot x^2-4\cdot x+16\right)}{(x-3)\cdot\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$\frac{1}{(x-3)}-\frac{(x+2)}{\left(x^2-x+1\right)}-\frac{(3+2\cdot x)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

chek-up

$$A(x):=\frac{\left(5\cdot x^2-4\cdot x+16\right)}{(x-3)\cdot\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$B(x):=\frac{1}{(x-3)}-\frac{(x+2)}{\left(x^2-x+1\right)}-\frac{(3+2\cdot x)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$A(5) = 0.137188$ $B(5) = 0.137188$

---

2. $$\left(\prod_{n=1}^{4}\frac{1}{x^2+n^2}\right)\cdot x^6$$

$$\frac{-1}{\left[360\cdot\left(x^2+1\right)\right]}+\frac{16}{\left[45\cdot\left(x^2+4\right)\right]}-\frac{729}{\left[280\cdot\left(x^2+9\right)\right]}+\frac{1024}{\left[315\cdot\left(x^2+16\right)\right]}$$

chek-up

$$Y(x):=\left(\prod_{n=1}^{4}\frac{1}{x^2+n^2}\right)\cdot x^6$$

$$Z(x):=\frac{-1}{\left[360\cdot\left(x^2+1\right)\right]}+\frac{16}{\left[45\cdot\left(x^2+4\right)\right]}-\frac{729}{\left[280\cdot\left(x^2+9\right)\right]}+\frac{1024}{\left[315\cdot\left(x^2+16\right)\right]}$$

$Y(5) = 0.014866$ $Z(5) = 0.014866$

Рис. 11

11. Комплексные числа

Возможны два способа преобразования и вычисления математических выражений, содержащих комплексные числа, в среде «Mathcad».

- путем обращения к разделу "Комплексные числа" в подменю встроенные функции **f(x)** меню **"Вставка"** согласно **правилу 2** в сочетании с инструментальной панелью "Арифметика";

- с помощью методов символьной математики путем обращения к инструментальной математической панели меню **"Символ"** согласно **правилу 4** (см. § 4).

При обоих методах в начале программы следует ввести обозначение комплексной единицы:

$$i := \sqrt{-1} \quad \text{или} \quad j := \sqrt{-1} \qquad .$$

Решение по правилу 2.

С помощью данного способа можно произвести все действия с комплексными числами: их суммирование, умножение, деление, возведение в степень, выделение действительной и мнимой частей, определение модуля и аргумента, преобразование из одной формы комплексного числа в другую. Так для определения действительной части комплексного числа следует обратиться к функции **Re** в разделе "Комплексные числа", мнимой части –**Im** , аргумента –**arg**, отношения комплексного числа к его модулю (z / |z|) – **signum,** где модуль комплексного числа определяется как |z|.

Примеры перечисленных действий с комплексными числами с помощью данного способа приведены на рис. 12.

Решение по правилу 2.

При данном способе **с**начала записывается комплексное выражение, подлежащее преобразованию. Затем путем обращения к инструментальной математической панели **"Символы"** вызывается ключевое слово ***"complex*** ". Запись приобретает вид:

F(x+i*y) complex→

После щелчка вне рамки записи автоматически появляется результат в алгебраической форме комплексного числа. Примеры перечисленных действий с комплексными числами с помощью данного способа приведены на рис. 12.

12. Матричные вычисления

Аппарат матриц имеет большое практическое приложение при анализе сложных явлений и устройств, характеризуемых большим количеством параметров и разветвленными связями, позволяя описать их в компактной и удобной форме. Матричные вычисления, в первую очередь, связаны с решением системы линейных алгебраических и дифференциальных уравнений, позволяя построить оптимальные алгоритмы их решения [10]. Матрицы применяются при анализе и синтезе сложных электронных устройств, в системах передачи электроэнергии, в разветвленных системах водоснабжения и водоотведения и других случаях.

rule - 2

$x1 := 1 \qquad y1 := 2 \qquad x2 := 3 \qquad y2 := 4$

1. $i := \sqrt{-1} \qquad z1 := x1 + i \cdot y1 \qquad z2 := x2 + i \cdot y2$

$u := z1 + z2 \qquad u = 4 + 6i$

$z := z1 \cdot z2 \qquad z = -5 + 10i$

$s := \frac{z1}{z2} \qquad s = 0.44 + 0.08i$

$w := z^3 \qquad w = 1.375 \times 10^3 - 250i$

2. $\mathrm{Re}(z1 + z2) = 4 \qquad \mathrm{Re}(z1 \cdot z2) = -5$

$\mathrm{Im}(z1 + z2) = 6 \qquad \mathrm{Im}(z1 \cdot z2) = 10$

$\theta 3 := \arg(z) \qquad \theta 3 = 2.034$

$M2 := |z^3| \qquad M2 = 1.398 \times 10^3$

$r := \arg(z^3) \qquad r = -0.18$

$A := \mathrm{signum}(z) \qquad A = -0.447 + 0.894i$

3. $e^{i \cdot \pi} = -1 \qquad e^{i\frac{\pi}{3}} = 0.5 + 0.866i$

4. $F(n) := \exp(i \cdot n \cdot \pi)$

$n := 6.7 \qquad F(n) = -0.588 + 0.809i$

---

rule - 4

5. $\exp\left(\frac{1}{3} \cdot i \cdot \pi\right) \text{ complex } \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}$

6. $\cos(a \cdot x + x \cdot i) \text{ complex } \rightarrow \cos(a \cdot x) \cdot \cosh(x) - i \cdot \sin(a \cdot x) \cdot \sinh(x)$

7. $(x + i \cdot y)^3 \text{ complex } \rightarrow x^3 - 3 \cdot x \cdot y^2 + i \cdot \left(3 \cdot x^2 \cdot y - y^3\right)$

8. $\frac{(x + i \cdot y)}{(x - i \cdot y)} \text{ complex } \rightarrow \frac{x^2}{\left(x^2 + y^2\right)} - \frac{y^2}{\left(x^2 + y^2\right)} + 2 \cdot i \cdot y \cdot \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)}$

Рис. 12

Основные определения.

Линейную систему из n алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \,, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,, \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \,, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

можно представить в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix} \qquad (12)$$

или в сокращенной записи:

$$\mathbf{Y=[A]X.} \qquad (13)$$

Согласно (11)–(13) матрица есть совокупность m x n коэффициентов, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. При m=n матрица называется квадратной порядка или ранга n.

К количественным характеристикам матрицы относятся: количество в ней строк и столбцов, общее число элементов, максимальное и минимальное их значения, величина определителя.

Элемент матрицы **[A]**, расположенный в **i**-й строке и **j**-м столбце, обозначается $\mathbf{a_{ij}}$.

Матрица, состоящая из одного столбца или строки, называется вектором.

Матрица **[A]=[B]** при равенстве элементов $\mathbf{a_{ij}=b_{ij}}$.

При суммировании матриц **[C]=[A]+[B]** складываются соответствующие элементы $\mathbf{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}$.

При вычитании матриц **[C]=[A]–[B]** вычитаются соответствующие элементы $\mathbf{c_{ij}=a_{ij}–b_{ij}}$.

При умножении матрицы на скалярный множитель производится умножение каждого элемента на этот коэффициент:

k**[A]=[A]**k=**[C]**, где $\mathbf{c_{ij}}$=k$\mathbf{a_{ij}}$.

При умножении двух квадратных матриц одного порядка **[C]=[A]x[B]** элемент $\mathbf{c_{ij}}$ произведения матриц **[A]** и **[B]** есть сумма произведений **i**-й строки матрицы **[A]** на элемент **j**-го столбца матрицы **[B]**:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \,. \qquad (14)$$

Например, при умножении квадратных матриц 2-го порядка:

$$[\mathbf{A}]\times[\mathbf{B}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}= \qquad [\mathbf{A}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Матрица называется диагональной при равенстве нулю всех элементов, кроме диагональных (a_{11}, a_{22},…, a_{nn}).

Матрица называется симметричной при $a_{ij}=a_{ji}$.

Диагональная матрица размера nxn называется единичной при $a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}$:

$$[1]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

.

Квадратная матрица $[A]^{-1}$ называется обратной по отношению к матрице [A], если справедлива зависимость:

$$[A]x[A]^{-1}=[1] \qquad (17)$$

Транспонированная матрица $[A]_T = [B]$ образуется из исходной матрицы [A] путем замены строк на столбцы. Элементы матриц [B] и [A] связаны соотношением $b_{ij}=a_{ji}$. Симметричная матрица равна своей транспонированной матрице.

Комплексно-сопряженная матрица $[A]^{*}=[C]$ образуется из исходной [A] путем замены элементов на комплексно-сопряженные величины $c_{ij}=a^{*}_{ij}$.

Эрмитово сопряженная матрица $[A]_Э=[A]_T^{*}=[D]$ образуется из транспонированной матрицы $[A]_T$ путем замены элементов на комплексно-сопряженные величины: $d_{ij}=a^{*}_{ji}$. Иначе говоря, эрммитово сопряженная матрица $[A]_Э$ есть транспонированная, комплексно-сопряженная матрица по отношению к исходной [A].

Согласно проведенным определениям для квадратной матрицы 2-го порядка имеем:

$$[\mathbf{A}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ – исходная матрица;

$$[\mathbf{A}]_{\text{Т}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} -$$ транспонированная матрица;

$$[\mathbf{A}]^{*} = \begin{bmatrix} a_{11}^{*} & a_{12}^{*} \\ a_{21}^{*} & a_{22}^{*} \end{bmatrix} -$$ комплексно-сопряженная матрица;

$$[\mathbf{A}]_{\text{Э}} = [\mathbf{A}]_{\text{Т}}^{*} = \begin{bmatrix} a_{11}^{*} & a_{21}^{*} \\ a_{12}^{*} & a_{22}^{*} \end{bmatrix} -$$ эрмитово сопряженная матрица.

Матрица называется унитарной при удовлетворении условию унитарности:

$$[\mathbf{A}]_{\text{Э}} \times [\mathbf{A}] = [1] \quad \textit{или} \quad [\mathbf{A}]_{\text{Т}}^{*} \times [\mathbf{A}] = [1]. \tag{18}$$

Зададим в пространстве прямоугольную систему декартовых координат. Тогда единичные векторы **i, j, k** осей Ox, Oy, Oz образуют систему базисных векторов, что позволяет представить вектор в виде:

$$\mathbf{A} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} , \tag{19}$$

где координаты a_X, a_Y, a_Z есть декартовые прямоугольные координаты вектора **A**.

Модуль вектора **A:**

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \tag{20}$$

Сумма двух векторов:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} . \tag{21}$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \tag{22}$$

Векторное произведение двух векторов:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} . \tag{23}$$

Преобразования и операции с матрицами и векторами в среде «Mathcad». Действия с самой матрицей будем называть ее преобразованием, одновременно с двумя и более матрицами – операциями. К преобразованиям матрицы будем относить: ее транспонирование, обращение (инвертирование), выделение столбцов, строк и элементов, формирование диагональной и единичной матриц, расчет числовых характеристик и т. д. К опе-

рациям относится: суммирование, умножение, возведение в степень и другие действия с двумя и более матрицами.

Возможны пять способов действий с матрицами и векторами в среде «Mathcad»:

- преобразования и операции с помощью инструментальной математической панели ***"Вектор и матрица"*** согласно **правилу 1;**
- преобразования, главным образом формирование и подсчет характеристик, путем обращения к разделу "Вектор и матрица" в подменю **f(x)** меню согласно **правилу 2;**
- преобразования и операции путем обращения к меню **"Символ"**, подменю ***"Матрица"*** согласно **правилу 6;**
- преобразования и операции путем обращения к меню **"Символ"**, подменю ***"Расчеты"*** согласно **правилу 5;**
- преобразования и операции с помощью инструментальной математической панели ***"Символы"*** согласно **правилу 4** (см. § 4).

Два первых метода оперируют с числами, три других – как с числами, так с переменными величинами в рамках символьной математики.

При всех способах матричные вычисления начинаются с открытия рабочего листа и записи в него матриц с использованием инструментальной математической панели "Матрица". Вносимые в матрицу коэффициенты могут быть действительными или комплексными числами или переменными величинами в зависимости от выбранного способа вычислений. Имя матрицы и вектора может быть любым, например, **A, B1, CM5**.

Сама матрица или вектор вызываются путем щелчка на панели инструментов по кнопке "Матрица", после чего появляется окно, в котором необходимо указать, какое количество строк и столбцов должна иметь формируемая матрица или вектор. После ввода необходимых чисел или переменных и команды "ОК" или "Вставить" на экране появляется матрица, в ячейки которой вводятся заданные числа или величины. Так, например, при формировании матрицы размером 3x3 она будет иметь вид:

$$A := \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$, а при формировании вектора $$B := \begin{pmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{pmatrix}$$.

Поскольку по умолчанию координаты векторов, строк и столбцов нумеруются , начиная с 0, то первый столбец матрицы **A** обозначается как $A^{\langle 0 \rangle}$, второй – как $A^{\langle 1 \rangle}$, третий – как $A^{\langle 2 \rangle}$.

При необходимости начать нумерацию с 1 перед матрицей или вектором вводится ключевое слово ORIGIN:=1. При этом первый столбец матрицы **A** обозначается как $A^{\langle 1 \rangle}$, второй – как $A^{\langle 2 \rangle}$ и т. д. Нумерация элементов матрицы в этом случае имеет вид: $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ и т. д., а нумерация элементов вектора B примет вид: B_1, B_2, B_3 и т. д.

Рассмотрим применение всех способов обращения с матрицами на примерах.

Действия по правилу 1. Операции транспонирования и обращения матрицы осуществляются путем обращения к соответствующим кнопкам

инструментальной математической панели "Матрица". На рис. 13 приведены матрицы, в которых в одном случае элементы являются действительными числами (матрица **A**), в другом – комплексными (матрица **AK**). Далее показаны операции транспонирования (to transpose) и обращения или инверсии (inversion) обеих матриц. Правильность операции проверяется путем получения единичной матрицы согласно (17).

На рис. 13 показаны также операции умножения и суммирования матриц, выделения элемента и столбца матрицы и вычисление определителя.

С помощью той же инструментальной математической панели "Матрица", обратившись к соответствующим кнопкам, можно вычислить скалярное и векторное произведение двух векторов в прямоугольной декартовой системе координат согласно (20)–(23). Примеры таких вычислений представлены на рис. 14.

Операции по правилу 2.

Обращаемся к пиктограмме "Встроенная функция **f(x)**" на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбираем строку с надписью "Вектор и матрица", после чего предлагается большой набор разных функций, связанных с формированием матрицы или расчетом ее характеристик. На рис. 15 приведены примеры использования некоторых из них:

diag – формирует диагональную матрицу, элементы главной диагонали которой предварительно собраны в векторе **V**;

identity – формирует диагональную единичную квадратную матрицу размера n **x** n;

cols – подсчитывает число столбцов в матрице;

max – вычисляет элемент матрицы, имеющей наибольшее значение;

min – вычисляет элемент матрицы, имеющей наименьшее значение;

rank – определяет ранг квадратной матрицы.

Использование функции **Isolve** из категории "Вектор и матрица" для решения системы линейных алгебраических уравнений рассматривается ниже.

Операции по правилу 6. С помощью данного способа можно осуществлять как преобразования, так и вычисления матриц с элементами, представленными в виде переменных величин и чисел.

После записи матрицы, подлежащей преобразованию, ее необходимо с помощью курсора обрамить пунктирной линией или выделить (затемнить ▉) путем протаскивания курсора. Затем следует обратиться к меню **"Символ",** подменю ***"Матрицы"*** и выполнить одну из трех возможных опций: инвертирование (обращение), транспонирование или вычисление определителя. После щечка на рабочем листе появляется результат в виде вновь сформированной матрицы или определителя, располагаемые под исходной. Примеры выполнения данных операций приведены на рис. 16.

rule - 1

ORIGIN:= 1 $\quad i := \sqrt{-1}$ **data**

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad AK := \begin{pmatrix} 1 & -2+3i & -5 \\ 6 & 3 & -6i \\ 8 & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

$C := A^T$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ **to transpose**

$CK := AK^T$ $\qquad CK = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ -2+3i & 3 & 1+i \\ -5 & -6i & 2 \end{pmatrix}$

$B := A^{-1}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} -0.833 & -1 & 0.833 \\ 0.167 & 2 & -1.167 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}$ **inversion**

$BK := AK^{-1}$

$$BK = \begin{pmatrix} 3.183\times 10^{-3} + 0.023i & -9.637\times 10^{-3} - 0.041i & 0.132 + 0.028i \\ -0.071 - 0.176i & 0.16 - 0.022i & -0.111 + 0.039i \\ -0.065 + 0.032i & -0.052 + 0.096i & 0.047 - 0.076i \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad AK \cdot BK = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **chek-up**

$S := A + B$ $\qquad S = \begin{pmatrix} 0.167 & 1 & 3.833 \\ 4.167 & 7 & 3.833 \\ 7.5 & 7 & 9.5 \end{pmatrix}$

$V1 := S^{\langle 1 \rangle}$

$$V1 = \begin{pmatrix} 0.167 \\ 4.167 \\ 7.5 \end{pmatrix} \qquad S_{3,1} = 7.5 \qquad |S| = -93.667$$

Рис. 13

rule - 1

data $A := \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$

$|A| = 26.739$ $|B| = 16.882$

$A + B = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ -11 \end{pmatrix}$ $|A + B| = 22.226$

$A \cdot B = -253$ $A \times B = \begin{pmatrix} 301 \\ 18 \\ 221 \end{pmatrix}$

Рис. 14

rule - 2

ORIGIN:= 1

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $V := A^{\langle 2 \rangle}$ $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\text{diag}(V) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\text{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{cols}(A) = 3$ $\text{rank}(A) = 3$

$\max(A) = 9$ $\min(A) = 1$

Рис. 15

rule - 6

data $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{-b}{(a \cdot d - b \cdot c)} \\ \frac{-c}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{a}{(a \cdot d - b \cdot c)} \end{bmatrix}$$ **inversion**

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **to transpose**

$a \cdot d - b \cdot c$ **determinant**

---

data $i := \sqrt{-1}$ $\begin{pmatrix} 5 & 4 + i \cdot 6 \\ c & d \end{pmatrix}$

inversion

$$\begin{bmatrix} \frac{-d}{(-5 \cdot d + 4 \cdot c + 6 \cdot c \cdot i)} & 2 \cdot \frac{(2 + 3 \cdot i)}{(-5 \cdot d + 4 \cdot c + 6 \cdot c \cdot i)} \\ \frac{c}{(-5 \cdot d + 4 \cdot c + 6 \cdot c \cdot i)} & \frac{-5}{(-5 \cdot d + 4 \cdot c + 6 \cdot c \cdot i)} \end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 5 & c \\ 4 + 6 \cdot i & d \end{pmatrix}$ **to transpose**

determinant

$5 \cdot d - 4 \cdot c - 6 \cdot c \cdot i$

---

rule - 5

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & a \cdot b + c \cdot d \\ a \cdot b + c \cdot d & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^2$ $\begin{pmatrix} a^2 + c \cdot b & a \cdot c + c \cdot d \\ b \cdot a + d \cdot b & c \cdot b + d^2 \end{pmatrix}$

Рис. 16

Операции по правилу 5.

После записи группы матриц, связанных определенными знаками математических операций (например, умножение или суммирование), их необходимо с помощью курсора обрамить пунктирной линией или выделить (затемнить ▉) путем протаскивания курсора. Затем следует обратиться к меню **"Символ"**, подменю ***"Расчеты"***, опция "символические". После щечка на рабочем листе появляется результат в виде вновь сформированной матрицы, располагаемой под исходной записью. Примеры выполнения данных символьных вычислений приведены на рис. 16.

Операции по правилу 4.

С помощью данного способа можно осуществлять преобразования, как одной, так сразу и группы матриц, связанных определенными знаками математических операций (например, умножение или суммирование) с элементами, представленными в виде переменных величин и чисел.

После записи матрицы, подлежащей преобразованию, ее необходимо с помощью курсора обрамить пунктирной линией или выделить (затемнить ▉) путем протаскивания курсора. В случае группы матриц их следует заключить в общие скобки и всю запись обрамить пунктирной линией.

Затем следует обратиться к инструментальной математической панели **"Символы"** и вызывать одно из трех ключевых слов: $\mathbf{M}^{T}\rightarrow$(транспонирование), $\mathbf{M}^{-1}\rightarrow$(инвертирование) или $|\mathbf{M}|\rightarrow$ (определитель). После щелчка по выбранному ключевому слову запись принимает вид **[M]** →.

После второго щелчка вне рамки записи автоматически появляется результат в виде вновь сформированной матрицы или определителя, а в исходной матрице появляется признак выполненного преобразования. Примеры выполнения данных символьных вычислений приведены на рис. 17.

Решение системы линейных алгебраических уравнений.

Основные определения. Система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2,\ldots, x_n$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\,x_n = b_1\\ &a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\,x_n = b_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Коэффициенты системы уравнений (18) могут быть собраны в квадратную матрицу, из которой можно найти определитель (декремент) D:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

rule - 4

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{T} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$ **to transpose**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{-b}{(a \cdot d - b \cdot c)} \\ \frac{-c}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{a}{(a \cdot d - b \cdot c)} \end{bmatrix}$$ **inversion**

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{-b}{(a \cdot d - b \cdot c)} \\ \frac{-c}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{a}{(a \cdot d - b \cdot c)} \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ **inversion**

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| \rightarrow a \cdot d - b \cdot c$$ **determinant**

---

to transpose

$$\left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]^{T} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & a \cdot b + c \cdot d \\ a \cdot b + c \cdot d & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

determinant

$$\left|\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| \rightarrow a^2 \cdot d^2 + c^2 \cdot b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$$

---

to transpose

$$\left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 + i4 & b \\ c & -i6 \end{pmatrix}\right]^{T} \rightarrow \begin{bmatrix} a \cdot (5 + i4) + c^2 & b \cdot (5 + i4) + c \cdot d \\ a \cdot b - c \cdot i6 & b^2 - d \cdot i6 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 5 + i4 & b \\ c & -i6 \end{pmatrix}\right| \rightarrow -5 \cdot i6 - i6 \cdot i4 - b \cdot c$$ **determinant**

Рис. 17

При определителе D≠0 система (18) имеет единственное решение.
В матричной форме уравнение (5.7) имеет вид:

$$[\mathbf{A}]\times[\mathbf{X}]=[\mathbf{B}] \quad . \qquad (26)$$

Из (5.10) получим для вектора решений:

$$[\mathbf{X}]=[\mathbf{A}]^{-1}\times[\mathbf{B}] \quad , \qquad (27)$$

где $[\mathbf{A}]^{-1}$ – обратная матрица.

Методы решения системы линейных уравнений в среде «Mathcad».

Возможны два способа нахождения решений системы линейных уравнений (24) в среде «Mathcad» при определителе D≠0:

- по формуле (27) с помощью инструментальной математической панели "Матрица" согласно **правилу 1**;

- с помощью встроенной функции **Isolve** в подменю **f(x)** меню **"Вставка"** согласно **правилу 2**.

Открываем рабочий лист и согласно уравнениям (24) с использованием инструментальной математической панели "Матрица" записываем в разделе "Data" матрицу коэффициентов **[A]** и вектор правых частей уравнений **[B]** (рис. 18). В качестве примера рассматриваем решение системы из 5-ти линейных уравнений с 5-ю неизвестными

Решение по правилу 1.

С помощью панели "Матрица" записываем формулу (27) и введя вектор искомых решений со знаком равенства X= , получаем результат (рис. 18).

Решение по правилу 2.

Вводим имя вектора искомого решения X и знак присвоения: X **:=** , после которого размещаем красный визир +.

Обращаемся к пиктограмме "Встроенная функция **f(x)**" на 2-й строке текстового окна – стандартной линейке. На появившемся после щелчка диалоговом окне в разделе "Категория функций" выбираем строку с надписью "Решение", а в разделе "Название функции" – **Isolve**. После нажатия на кнопку "ОК" или "Вставить" на рабочем листе появляется название данной функции с двумя черными прямоугольниками, которые следует заполнить:

Y:=Isolve(■ , ■). (Заменяем вектор X на Y, чтобы получить отличие по сравнению с 1-м случаем). В 1-е окошко вписываем имя матрицы коэффициентов A, во 2-е – имя вектора B. Запись приобретает вид: **Y:=Isolve**(A, B). После ввода "Y=" получаем результат в виде вектора.

Из данного примера видно, как можно быстро, при записи всего одной строчки, получить в среде «Mathcad» решение даже при увеличенном числе линейных уравнений.

data

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 6 & 12 \\ 4 & 7 & -1 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 3 & -3 & -5 \\ -8 & 9 & 1 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$D := |A| \qquad D = -4.316 \times 10^4$$

---

rule - 1

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} -0.851 \\ 0.828 \\ 1.009 \\ 1.188 \\ -0.165 \end{pmatrix}$$

---

rule - 2

$$Y := \text{lsolve}(A, B) \qquad Y = \begin{pmatrix} -0.851 \\ 0.828 \\ 1.009 \\ 1.188 \\ -0.165 \end{pmatrix}$$

Рис. 18

13. Числовые ряды

Основные определения. Числовым рядом называется выражение, составленное из бесконечной последовательности чисел [10]:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n \ldots\ldots$$

$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ – есть частичная сумма ряда.

При существовании предела $S_m = S$ при $m \to \infty$ ряд называется сходящимся, при отсутствии такого предела – расходящимся.

Определение суммы ряда в среде «Mathcad».

Частичная сумма ряда может быть вычислена с помощью инструментальной математической панели ***"Вектор и матрица"*** согласно **правилу 1**, полная – с помощью инструментальной математической панели

"Символы" согласно правилу 4 или путем обращения к меню "**Символ**", подменю ***"Расчеты"*** согласно правилу 5. Примеры расчета по всем трем способам суммы и произведения членов ряда приведены на рис. 19.

rule 1

1. $$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n!} = 1.7182818285$$

$$e - 1 = 1.7182818285$$

rule 4

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \rightarrow \exp(1) \cdot (1 - \exp(-1))$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rightarrow 2$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

rule 6

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\exp(1) \cdot (1 - \exp(-1)) = 1.7182818285$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+1)}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \pi = 0.1073009183$$

---

rule 1

1. $$\prod_{n=1}^{100} n = 9.333 \times 10^{157}$$

2. $$\prod_{n=1}^{100} (1 - \exp(-n)) = 0.5044286547$$

Рис. 19

14. Вычисления по циклу

При решении самых разнообразных научно-технических задач возникает необходимость в определении зависимости функции от одного или нескольких аргументов. Например, необходимо рассчитать температуру нагрева тела от времени, дальность полета ракеты в зависимости от массы ее полезного груза, мощность радиосигнала в зависимости от расстояния, колебательный процесс в электрическом контуре, скорость протекания химической реакции и т. д. При этом результаты расчета следует представить в виде числа или, точнее, массива чисел, заключив их в определенную таблицу. При подобных многократных расчетах по одной и той же формуле или алгоритму следует, во-первых, выбрать "шаг" или дискрет изменения аргумента. Например, необходимо знать значение температуры тела через каждую секунду, а значение мощности сигнала через каждый километр расстояния и т. д. Во-вторых, следует определить точность, с которой требуется рассчитывать значение того или иного параметра. Иногда требуется рассчитать десятки, сотни и даже тысячи значений одной и той же функции в зависимости от значения аргумента.

В подобных случаях самый экономный путь решения задачи, не требующий многократного обращения пользователя к одной и той же функции, состоит в организации расчета в рамках определенного цикла. В таком цикле автоматическое обращение к функции производится согласно зашитому в программу алгоритма. При этом пользователь должен только указать, с каким дискретом, точностью и какое количество вариантов следует рассчитать.

Язык «Mathcad» предлагает несколько способов организации такого циклического расчета. Самый простой из них состоит в использовании оператора цикла «**m..n**», пиктограмма которого расположена на математической панели инструментов ***"Матрица".*** После вызова щелчком этого оператора в него следует ввести значения нижнего и верхнего пределов:

k:=M..N

где **k** – дискретно на **1** изменяемый параметр, последовательно принимающий целые значения от целых **M ≥** 0 до **N**. Заметим, что при **M >** 0 все значения функции при 0 **≤ k < M** принимают значения, равные 0. Аргумент $X_k = \Delta * k$ при циклическом расчете изменяется с "шагом" (дискретом) **Δ**, значение которого может быть выбрано любым.

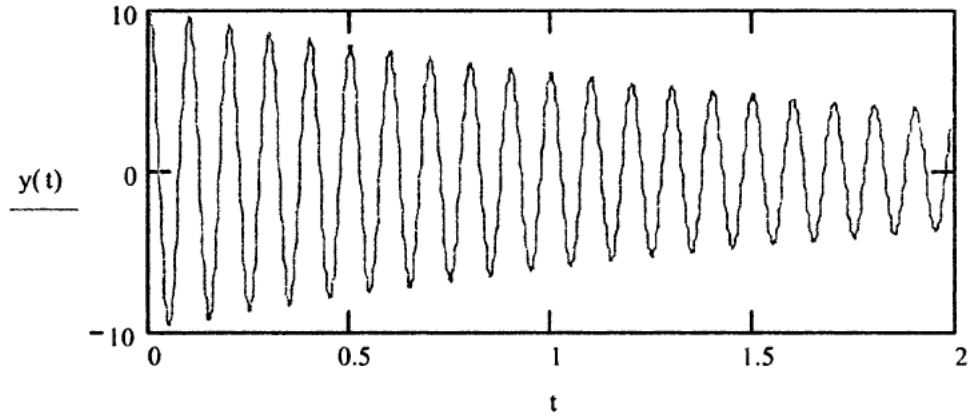
Приведем пример такого циклического расчета.

Рассчитать с дискретом **Δ**=0,01π затухающий колебательный процесс, описываемый функцией y(t), приведенной на рис. 20. Сначала строим график непрерывной функции **y(t)**.Организуем цикл расчета с помощью записи **k:=0..N** и выражений для аргумента t_k и дискретной функции $Y_k(t_k)$, полученной из непрерывной функции **y(t)** (рис. 20).

Строим график дискретной функции $Y_k(t_k)$. Вывод в виде таблицы дискретных значений Y_k осуществляется путем записи **Y=** или Y_k=. По умолчанию на рабочий лист выводится 16 значений функции. Щелкнув по графику функции, обрамляют ее рамкой и путем протаскивания вниз курсора расширяют таблицу до любого требуемого значения **k≤N.**

$A := 10 \qquad F := 10 \qquad a := 0.5 \qquad N := 1000$

$y(t) := A \cdot \exp(-a \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F \cdot t)$



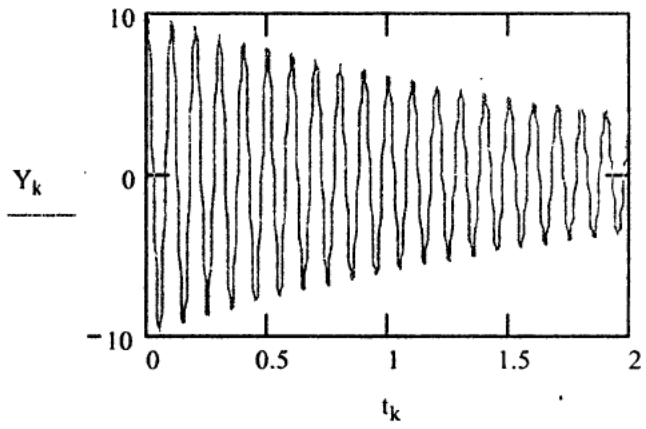
$k := 0..N \qquad t_k := \dfrac{0.01 \cdot k}{\pi} \qquad Y_k := y(t_k)$

	0
0	10
1	9.785
2	9.181
3	8.214
4	6.923
5	5.36
6	3.589
7	1.681
8	-0.288
9	-2.24

Y =

$Y_k =$

10
9.785
9.181
8.214
6.923
5.36
3.589
1.681
-0.288
-2.24



$N := 100$

$F(n) := \left| \begin{array}{l} F \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1..N \\ \quad F \leftarrow F + \dfrac{1}{n!} \end{array} \right.$

$F(N) = 1.7182818285$

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} = 1.7182818285$

Рис. 20

При протаскивании курсора вверх таблица наоборот сжимается. Таким же образом можно вывести и таблицу значений аргумента, сделав в рассматриваемом случае запись $t_k =$.

При зависимости функции от двух аргументов можно организовать циклический расчет, "вложив" один цикл в другой.

Циклический расчет можно также организовать с помощью операторов **"for"** и **"break"**, пиктограммы которых расположены на инструментальной математической панели ***"Программирование"*** (рис.1).

Пример такого расчета суммы членов численного ряда с использованием операторов **for , Add Line** и внутреннего присвоения ← приведен на рис.20. Оператор **Add Line**, служащий для расширения программного блока, отображается в виде вертикальной черты. На том же рис.20 для контроля полученного результата приведен расчет с помощью оператора суммы.

15. Дифференцирование функций

Возможны пять способов дифференцирования функций в среде «Mathcad» :

- с помощью инструментальной математической панели ***"Матанализ" ("Исчисление")*** согласно **правилу 1,**
- с помощью инструментальной математической панели ***"Символы"*** согласно **правилу 4 ,**
- путем обращения к меню **"Символы",** подменю ***"Расчеты",*** строка "Символические" согласно **правилу 5**;
- путем обращения к меню **"Символы",** подменю ***"Переменные",*** строка "Дифференцирование" согласно **правилу 6**;
- с помощью клавиатуры согласно **правилу 3**

(Все правила - см.§ 4).

Первый способ оперируют с числами, второй и пятый - с переменными и числами, третий и четвертый - с переменными величинами в рамках символьной математики.

При всех способах дифференциальные вычисления начинаются с открытия рабочего листа и записи в него оператора дифференцирования с использованием инструментальной математической панели "Матанализ" (рис.2) или клавиатуры. Затем в оператор вписываются переменная, по которой производится дифференцирование, и сама функция. Далее дается команда на исполнение согласно приведенным выше правилам (см.§ 4).

С помощью клавиатуры ввод оператора 1-ой производной осуществляется нажатием двух клавиш « **shift + ?**» , ввод оператора n-ой производной - нажатием трех клавиш: «**ctrl+shift+?**», исполнение символьных операций дифференцирования - нажатием двух клавиш:«**shift+F9**».

Примеры дифференциальных вычислений по первому способу, в том числе и циклического вида, приведены на рис.21.

Примеры дифференциальных вычислений по трем другим способам приведены на рис.22. Обратите внимание, что при вычислениях по правилам 4 и 5 вводится оператор дифференцирования, поскольку здесь выполняются расчеты в соответствии с произведенной записью. При вычис-

лениях по правилу 6 вводится только сама функция, у которой находится производная, поскольку здесь процедура дифференцирования предусмотрена в самом алгоритме производимых символьных вычислений по команде "Дифференцирование".

1 rule

1. $x := 5$ $\frac{d}{dx} 2 \cdot x^5 = 6.25 \times 10^3$ $\frac{d^3}{dx^3} 2 \cdot x^5 = 3 \times 10^3$

2. $x := 3$ $y(x) := 3 \cdot x^2 + 7 \cdot x^4$ $\frac{d}{dx} y(x) = 774$

3. $x := 2$ $\frac{d}{dx} x^3 \exp\left(x^{-2}\right) = 12.84$

$F(x) := x^3 \exp\left(x^{-2}\right)$ $x := 7$ $F(x) = 350.072$

$P(x) := \frac{d}{dx} F(x)$ $x := 5$ $P(x) = 75.979$

$k := 0..10$

k =	F(k) =	P(k) =
0	0	1
1	2.718	2.718
2	10.272	12.84
3	30.173	27.938
4	68.128	48.967
5	130.101	75.979
6	222.084	108.986
7	350.072	147.99
8	520.063	192.992
9	738.056	243.994
10	$1.01 \cdot 10^3$	300.995

Рис. 21

4 rule

1. $y(x) := x^5$

2. $\frac{d}{dx} y(x) \rightarrow 5 \cdot x^4$ $\quad$ $\frac{d}{dx} x^3 \rightarrow 3 \cdot x^2$

3. $\frac{d^4}{dx^4} y(x) \rightarrow 120 \cdot x$

4. $\frac{d}{dx} x^3 \exp(x^2) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot \exp(x^2) + 2 \cdot x^4 \cdot \exp(x^2)$

---

5 rule

1. $\frac{d}{dx} x^5$

   $5 \cdot x^4$

2. $\frac{d^3}{dx^3} x^5$

   $60 \cdot x^2$

3. $\frac{d}{dx} x^3 \exp(x^2)$

   $3 \cdot x^2 \cdot \exp(x^2) + 2 \cdot x^4 \cdot \exp(x^2)$

4. $\frac{d}{dx} (3 \cdot x^2 \cdot \exp(x^2) + 2 \cdot x^4 \cdot \exp(x^2))$

   $6 \cdot x \cdot \exp(x^2) + 14 \cdot x^3 \cdot \exp(x^2) + 4 \cdot x^5 \cdot \exp(x^2)$

---

6 rule

1. $x^3 \cdot \exp(x^2)$

   $3 \cdot x^2 \cdot \exp(x^2) + 2 \cdot x^4 \cdot \exp(x^2)$

2. $3 \cdot x^2 \cdot \exp(x^2) + 2 \cdot x^4 \cdot \exp(x^2)$

   $6 \cdot x \cdot \exp(x^2) + 14 \cdot x^3 \cdot \exp(x^2) + 4 \cdot x^5 \cdot \exp(x^2)$

Рис. 22

Особое место занимает определение производной в точке **x** =0, в которой значение функции можно вычислить только, воспользовавшись понятием предела:

$$\lim f(x) \text{ при } x \to 0 \quad , \tag{28}$$

а значение производной в той же точке с помощью другого предела :

$$\lim [f(x)/x] \text{ при } x \to 0 \quad . \tag{29}$$

Примером такой функции является: $f(x)= \sin(x)/ x$.

Численные значения функции и ее производной в точке **x**=0 могут быть найдены с помощью оператора **lim** , пиктограмма которого расположена на математической панели инструментов "Матрица". Сначала целесообразно построить график функции $f(x)$, позволяющий наглядно представить себе ее поведение в точке **x** = 0. Расчеты по формулам (28) и (29) можно выполнить руководствуясь правилом 4 (см. § 4) с помощью символьного знака равенства → , расположенного на панели ***"Символы"*** . Два примера такого расчета приведены на рис.23

16. Интегрирование функций

Возможны четыре способа определения неопределенного интеграла символьного вида в среде «Mathcad» :

- с помощью инструментальной математической панели ***"Символы"*** согласно **правилу 4**,
- путем обращения к меню **"Символы"**, подменю ***"Расчеты"***, строка "Символические" согласно **правилу 5**;
- путем обращения к меню **"Символы"**, подменю ***"Переменные"***, строка "Интегрирование" согласно **правилу 6**;
- с помощью клавиатуры согласно **правилу 3** ,

и два численных способа - для определенного интеграла:

- с помощью инструментальной математической панели ***"Матанализ" ("Исчисление")*** согласно **правилу 1,**
- с помощью клавиатуры согласно **правилу 3** ,

(Все правила - см.§ 4.4).

При всех способах интегральное исчисление начинаются с открытия рабочего листа и записи в него оператора интегрирования с использованием инструментальной математической панели "Матанализ" (рис.2) или клавиатуры. Затем в оператор вписываются переменная, по которой производится интегрирование, и сама функция. Далее дается команда на исполнение согласно приведенным выше правилам (см.§ 4.4).

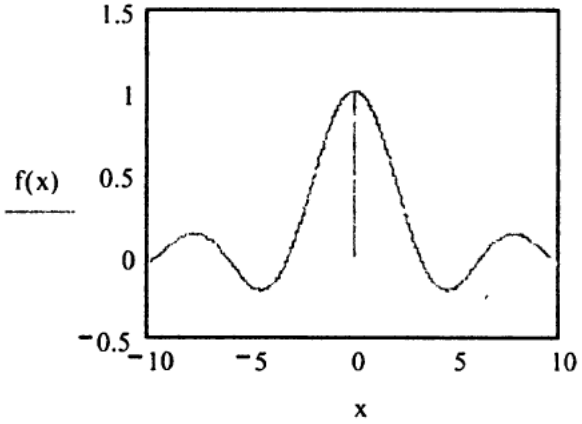
С помощью клавиатуры ввод знака неопределенного определенного интеграла осуществляется нажатием двух клавиш:«**ctrl+I**», определенного интеграла - нажатием двух клавиш: «**shift +&**» , исполнение операций интегрирования - нажатием двух клавиш:«**shift+F9**».

Примеры символьного вычисления неопределенного интеграла тремя способами приведены на рис.24. Обратите внимание, что при вычислениях по правилам 4 и 5 вводится оператор интегрирования, поскольку здесь выполняются расчеты в соответствии с произведенной записью.

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$

$$s(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

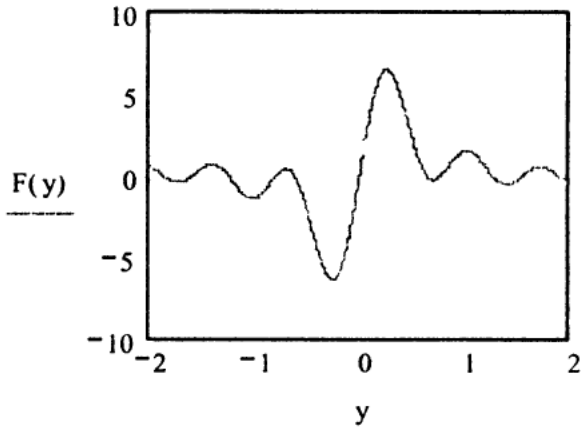
$$s(x) \rightarrow \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \to 0} s(x) \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 0$$

$$F(y) := \frac{(\cos(y) - \cos(9 \cdot y))}{y}$$



$$S(y) := \frac{d}{dy} F(y)$$

$$S(y) \rightarrow \frac{(-\sin(y) + 9 \cdot \sin(9 \cdot y))}{y} - \frac{(\cos(y) - \cos(9 \cdot y))}{y^2}$$

$$\lim_{y \to 0} F(y) \rightarrow 0 \qquad \lim_{y \to 0} S(y) \rightarrow 40$$

Рис. 23

При вычислениях по правилу 6 вводится только подынтегральная функция, поскольку здесь процедура интегрирования предусмотрена в самом алгоритме производимых символьных вычислений по команде "Интеграция".

Примеры вычисления определенного интеграла первым способом приведены на рис. 25. Все примеры сопровождены проверкой (chek-up).

4 rule

1. $\int x^5\,dx \to \frac{1}{6}\cdot x^6$

2. $\int \sin(\ln(x))\,dx \to \frac{1}{2}\cdot x\cdot(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))$

3. $\int \frac{(x+t)}{x^2+c}\,dx \to \frac{1}{2}\cdot \ln\left(x^2+c\right) + \frac{t}{c^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot \operatorname{atan}\left[\frac{x}{c^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\right]$

5 rule

1. $\int (\ln(x))^3\,dx$

$\ln(x)^3\cdot x - 3\cdot x\cdot \ln(x)^2 + 6\cdot x\cdot \ln(x) - 6\cdot x$

2. $\int x^3\cdot \exp(x)\,dx$

$x^3\cdot \exp(x) - 3\cdot x^2\cdot \exp(x) + 6\cdot x\cdot \exp(x) - 6\cdot \exp(x)$

3. $\int x\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right)dx$

$\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\cdot x\cdot a + \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right)$

6 rule

1. $x\cdot \sinh(a\cdot x)$

$\frac{(x\cdot a\cdot \cosh(x\cdot a) - \sinh(x\cdot a))}{a^2}$

2. $\sqrt{a\cdot x+b}$

$\frac{2}{3}\cdot \frac{(x\cdot a+b)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{a}$

Рис. 24

1 rule

1. $$\int_1^5 \operatorname{atan}\left(\frac{x}{5}\right) dx = 2.095$$

chek-up

$$\int \operatorname{atan}\left(\frac{x}{5}\right) dx \rightarrow x \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) - \frac{5}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{25} \cdot x^2\right)$$

$$F(x) := x \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{1}{5} \cdot x\right) - \frac{5}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{25} \cdot x^2\right)$$

$F(1) = 0.099 \qquad F(5) = 2.194 \qquad 2.194 - 0.099 = 2.095$

---

2. $$\int_0^{100} x^2 \cdot \exp\left(-x^2\right) dx = 0.443$$

chek-up $\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0.443$

---

3. $$\int_0^{100} \frac{x}{1 + \exp(x)} dx = 0.822$$

chek-up $\qquad \frac{\pi^2}{12} = 0.822$

Рис. 25

17. Прямое и обратное преобразования Лапласа

Основные определения. Изображением или прямым преобразованием по Лапласу заданной функции – оригинала **F(t)** – называется функция комплексной переменной **s** (в других случаях обозначается буквой **p**), определяемая выражением [10]:

$$\Psi(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)\, F(t)\, dt \quad . \tag{30}$$

В (30) функция **F(t)** =0 при t<0 и удовлетворяет неравенству |**F(t)**|<Mexp(at), где M, a – некоторые положительные постоянные.

По изображению $\Psi(s)$ можно найти оригинал функции **F(t)**. Такая операция называется обратным преобразованием Лапласа:

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp(st)\Psi(s)\,ds \quad . \tag{31}$$

Приведем три примера прямого преобразования Лапласа:
Изображение ступенчатой функции:
F(t)=1 при t≥ 0 и **F(t)**=0 при t<0 есть $\Psi(s)=1/s$.
Изображение 1-й производной функции-оригинала:

$$\frac{dF(t)}{dt}=s\Psi(s)-sF(0) \quad , \tag{32}$$

Изображение интеграла от функции-оригинала:

$$\int_0^t F(t)dt \rightarrow \frac{1}{s}\Psi(s) \quad . \tag{33}$$

Другие соотношения, относящиеся к прямому и обратному преобразованиям Лапласа приведены, например, в [10].

Преобразования Лапласа лежат в основе операторного метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящим в переходе от уравнения для неизвестной функции к вспомогательному, алгебраическому уравнению для ее изображения. Решив это уравнение, переходят согласно обратному преобразованию Лапласа от изображения к оригиналу функции.

Прямое и обратное преобразования Лапласа в среде «Mathcad». Такие преобразования можно выполнить путем обращения к меню **"Символы"**, подменю ***"Преобразования",*** опции "Лаплас" и "Лаплас обратный" согласно **правилу 6**.

При прямом преобразовании в записанной функции-оригинале **F(t)** следует выделить (затемнить) один знак – переменную (в рассматриваемых ниже примерах это время **t**).

При обратном преобразовании в записанной функции-изображении $\Psi(s)$ следует выделить (затемнить) так же один знак – комплексную переменную **s**.

Примеры прямого преобразования Лапласа по переходу от оригинала к изображению функции приведены на рис. 26. Для примера 5 построен график функции-оригинала.

Примеры обратного преобразования Лапласа по переходу от изображения функции к ее оригиналу приведены на рис. 27. В обоих примерах построены по два графика функции-оригинала. Эти графики в случае электрической цепи отображают входной (X(t) и Y(t)) и выходной (F(t) и Z(t)) сигналы.

1. $\exp(-a \cdot t)$

$$\frac{1}{(s + a)}$$

2. $t \cdot \sin(a \cdot t)$

$$2 \cdot \frac{a}{\left(s^2 + a^2\right)^2} \cdot s$$

3. $\cos(a \cdot t)$

$$\frac{s}{\left(s^2 + a^2\right)}$$

4. $\sin(a \cdot t)$

$$\frac{a}{\left(s^2 + a^2\right)}$$

5. $\exp(-a \cdot t) \cdot \cos(b \cdot t)$

$$\frac{(s + a)}{\left[(s + a)^2 + b^2\right]}$$

6. $\exp(-a \cdot t) \cdot \sin(b \cdot t)$

$$\frac{b}{\left[(s + a)^2 + b^2\right]}$$

$a := 0.3 \quad b := 10 \qquad F(t) := \exp(-a \cdot t) \cdot \cos(b \cdot t)$

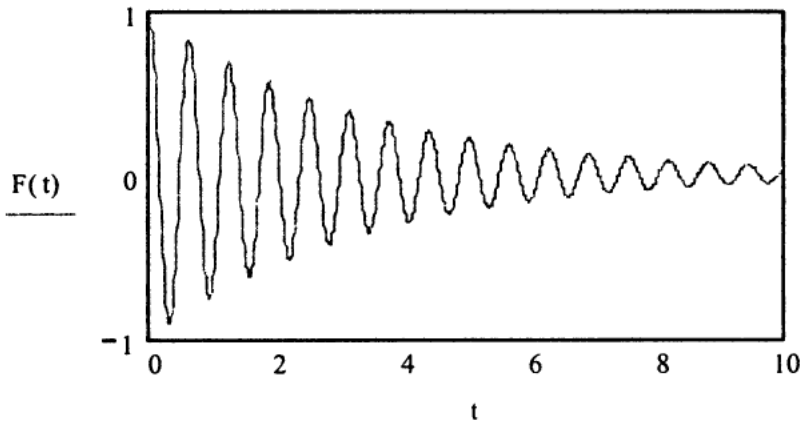
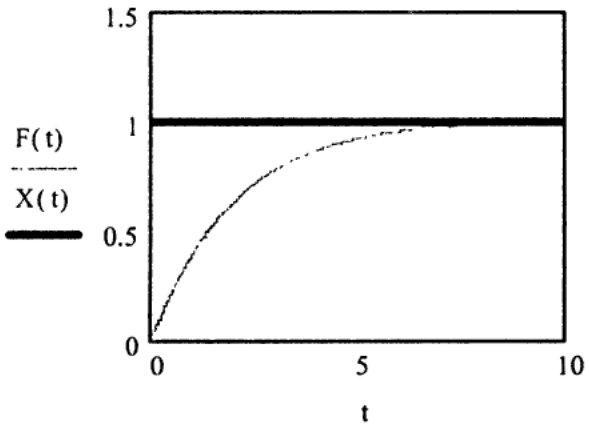


Рис. 26

1. $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot T}$ $X(t) := 1$ $t \geq 0$

$1 - \exp\left(\frac{-t}{T}\right)$ $T := 2$ $F(t) := 1 - \exp\left(\frac{-t}{T}\right)$



2. $\frac{1}{(s + a)} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot T}$

$$\frac{-1}{(-1 + a \cdot T)} \cdot \exp(-a \cdot t) + \frac{1}{(-1 + a \cdot T)} \cdot \exp\left(\frac{-t}{T}\right)$$

$a := 0.5$ $T := 5$

$$Z(t) := \frac{-1}{(-1 + a \cdot T)} \cdot \exp(-a \cdot t) + \frac{1}{(-1 + a \cdot T)} \cdot \exp\left(\frac{-t}{T}\right)$$

3. $\frac{1}{(s + a)}$ $\exp(-a \cdot t)$ $Y(t) := \exp(-a \cdot t)$

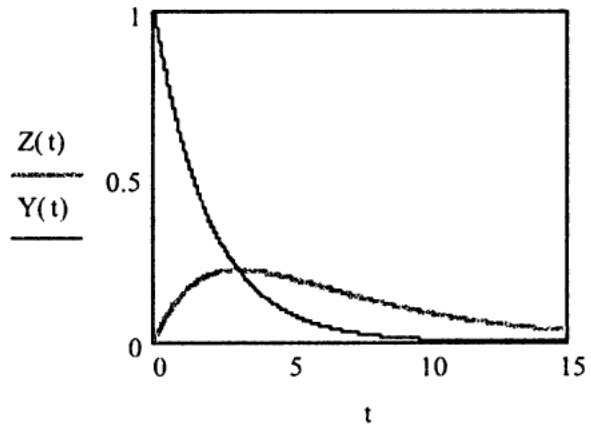


Рис. 27

18. Прямое и обратное преобразования Фурье

Основные определения. Прямым преобразованием Фурье является интеграл [10]:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (34)$$

определяющий спектральную плотность функции Ф(t).

Обратным преобразованием Фурье, позволяющим найти исходную функцию по ее спектральной плотности, является интеграл:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad (35)$$

Одним из условий применимости преобразования Фурье является абсолютная интегрируемость подынтегральной функции **Ф(t)** в (34).

Прямое и обратное преобразования Фурье в среде «Mathcad». Такие преобразования можно выполнить путем обращения к меню **"Символы"**, подменю ***"Преобразования"***, опции "Фурье" и "Фурье обратный" согласно **правилу 6**.

При прямом преобразовании в записанной функции-оригинале **Ф(t)** следует выделить (затемнить) один знак – переменную (в рассматриваемом ниже примере это время **t**).

При обратном преобразовании в записанной функции – спектральной плотности **S(ω)** – следует выделить (затемнить) так же один знак – частоту **ω.**

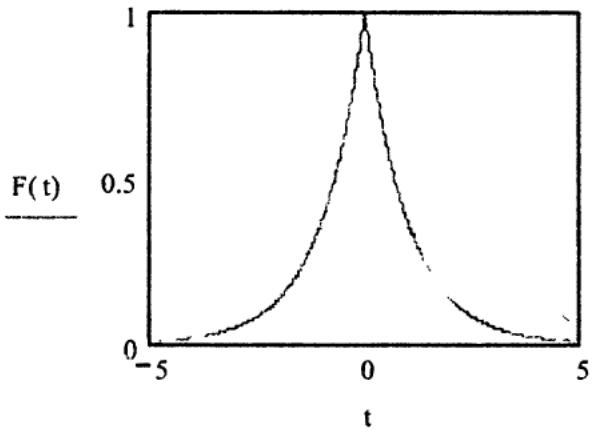
Пример прямого преобразования Фурье по определению спектральной плотности для экспоненциальной функции приведен на рис.28. Там же построены графики самой функции и ее спектральной плотности.

Следует отметить ограниченные возможности по прямому и обратному преобразования Фурье по правилу 6. В большинстве случаев для определения спектральной плотности приходится составлять небольшую программу, связанную с расчетом определенного интеграла (34).

Разложение функций в ряд Фурье рассматривается в § 2.2.

1. $\exp(-|t|)$ $F(t) := \exp(-|t|)$

$$\frac{2}{\left(1+\omega^2\right)}$$



2.

$$S(\omega) := \frac{2}{\left(1+\omega^2\right)}$$

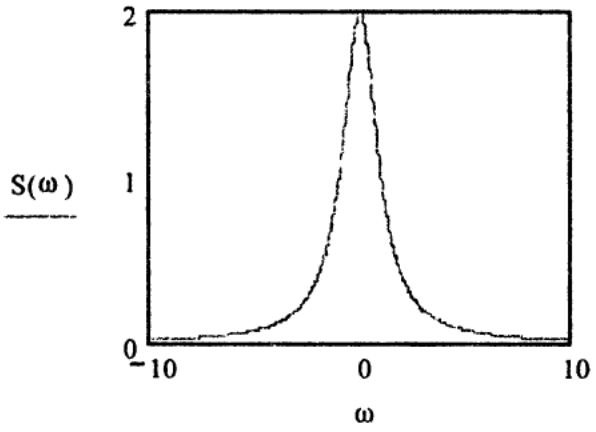


Рис. 28

19. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений

Математическая модель множества устройств, технических систем и процессов, протекающих в природе, несмотря на их физические различия может быть представлена как нелинейная динамическая структура, описываемая в виде системы из n нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \Psi_1(x(t), y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\

20. Об аппроксимации функций

При решении многих задач в радиотехнике исходная функция задается в табличной форме или по точкам. В качестве примера здесь могут служить полученные экспериментально амплитудная или ампплитудно-частотная характеристики усилителя. Вместе с тем для дальнейшего анализа необходимо знать значение функции при любом значении аргумента, а не только при некоторых его дискретных значениях. Данной цели, т. е. к переходу от дискретного описания функции к непрерывному, служит процедура аппроксимации. При определении функции между узловыми точками аппроксимация называется интерполяцией.

«Mathcad» располагает двумя способами такой интерполяции: кусочно-линейной и более точной, называемой сплайновой. При 2-м виде интерполяции последовательно используются две встроенные функции: ***cspline*** и ***interp.***

Пусть исходная функция, заданная по точкам, записана в виде **Y(X).** Тогда функция **W:=*cspline* (X,Y)** возвращает вектор вторых производных **W** при приближении в узловых токах к кубическому полиному. Вторая функция **Z(x):=*interp*(W,X,Y,x)** возвращает значение функции **Z(x)**, которая аппроксимирует исходную, дискретно заданную функцию **Y(X),** при любом заданном значении аргумента **x** между узловыми точками. В узловых точках функции **Y(X)** и **Z(x)** в точности совпадают.

Применение описанной процедуры интерполяции показано в книге в программах на рис. 2.7, 2.18 и 6.10.

21. О задачах оптимизации

Оптимизация относится к классу задач нелинейного программирования. Сущность процесса оптимизации сводится к поиску наилучшего решения определенной задачи – характеристик устройства или процесса – согласно выбранному критерию. При этом обычно составляется функция цели, в концентрированном виде отражающая смысл искомого решения. Далее осуществляется поиск комбинации варьируемых параметров, обеспечивающих максимум или минимум (в зависимости от поставленной задачи) функции цели.

"Mathcad" предоставляет несколько встроенных функций по задачам оптимизации. Рассмотрим две из них: **Maximize** и **Minimize,** из подменю "Встроенные функции" , категории "Решения".

Функции **Maximize(F,x1,x2,...xn),** где **F** – функция цели $F_ц$, **x1, x2, ..., xn** – варьируемые параметры объекта оптимизации, осуществляет поиск параметров, соответствующих максимуму функции $F_ц$.

Функция **Minimize(F,x1,x2,...xn)** осуществляет поиск параметров, соответствующих минимуму функции $F_ц$.

В обеих функциях использованы алгоритмы оптимизации, не требующие вычисления производных функции. В программе должна указываться точка многомерного пространства откуда начинается поиск оптимального решения и пределы изменения варьируемых параметров, которым предшествует ключевое слово "Given". Обе функции возвращают найденную оптимальную комбинацию варьируемых параметров в виде вектора. Рекомендуется сделать несколько циклов поиска оптимальных значений варьируемых параметров путем разного задания исходных точек

поиска, поскольку функции **Maximize** и **Minimize** ищут локальное, а не глобальное значения экстремума функции цели.

Применение описанной процедуры оптимизации рассмотрено в программах, приведенных на рис. 10.5, 11.5, 11.11 и 13.9.

22. Статистические вычисления

Статистические вычисления в среде "Mathcad" проводятся по следующим основным направлениям:

- расчету статистических параметров массива случайной последовательности чисел: среднего значения, дисперсии, коэффициента корреляции и т. д.;
- расчету различных законов плотности распределения вероятности (нормального, равномерного, биноминального, экспоненциального и др.);
- расчету функций распределения вероятности (нормального или Лапласа, биноминального, Пуассона, Стьюдента, равномерного и др.);
- генерированию случайной последовательности чисел с разным законом распределения вероятностей.

Рассмотрим более подробно данные направления – категории, представленные в виде функций в подменю "Встроенные функции", обращение к которым осуществляется согласно правилу 2 (см. § 4.4).

Категория "Статистика" в подменю *"Встроенные функции"* f(x). Пусть в результате сбора сведений самого разнообразного свойства, например, экономического характера или как результат определенных измерений, получен длинный ряд значений: X_1, X_2, X_3, ..., X_N. В случае нормального закона распределения полученного массива чисел **M** можно вычислить, например, следующие обобщенные статистические параметры.

Среднее значение массива чисел:

$$x_{CP} = (1/n)\sum_{k=1}^{n} x_k$$

путем обращения к функции **mean (M1,M2,..)** , где M1, M2,... есть матрицы, в которые собраны массивы обрабатываемых чисел.

Дисперсию массива чисел

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{cp})^2$$

путем обращения к функции **var (M1,M2,...).**

Среднеквадратичное значение массива чисел σ путем обращения к функции **stdev (M1,M2,...).**

Коэффициент корреляции двух массивов **M1** и **M2** путем обращения к функции **corr (M1,M2)** и другие параметры.

Пример расчета данных параметров приведен на рис. 29.

Категория "Плотность вероятности" в подменю *"Встроенные функции"* f(x). Покажем на примере нормального распределения расчет плотности распределения вероятности, описываемой зависимостью:

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad , \qquad (37)$$

где μ – среднее значение случайной величины, σ – ее среднеквадратическое значение.

$$A := \begin{pmatrix} 49 & 55 & 54 & 60 & 51 \\ 55 & 58 & 54 & 53 & 59 \\ 61 & 49 & 55 & 53 & 52 \\ 53 & 59 & 58 & 53 & 60 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 53 & 58 & 54 & 61 & 50 \\ 50 & 56 & 51 & 55 & 50 \\ 60 & 49 & 50 & 57 & 51 \\ 57 & 51 & 52 & 59 & 61 \end{pmatrix}$$

$$\text{mean}(A, B) = 54.65$$

$$\text{var}(A, B) = 14.378$$

$$\text{stdev}(A, B) = 3.792$$

$$\text{corr}(A, B) = 0.417$$

Рис. 29

Расчет зависимости (37) осуществляется путем обращения к функции **dnorm (x, μ, σ).** Пример ее расчета с выводом таблицы дискретных значений и графиком приведен на рис. 30.

Категория "Распределение вероятности" в подменю *"Встроенные функции"* f(x). Функция распределения вероятности есть определенный интеграл от плотности вероятности :

$$P(a) = \int_{-\infty}^{a} W(x)dx \quad , \tag{38}$$

где a – возможное значение x.

Вычисленное значение P(a) есть вероятность того, что случайная величина $-\infty \le x \le a$. При $a = \infty$ интеграл P(a)=1.

Расчет интеграла (38) при нормальном законе распределения осуществляется путем обращения к функции **pnorm (x, μ, σ),** где **μ, σ** – соответствуют (37). Пример такого расчета с выводом таблицы дискретных значений и графиком приведен на рис. 30. На нем же произведена проверка правильности произведенного вычисления путем непосредственного расчета согласно (37), (38).

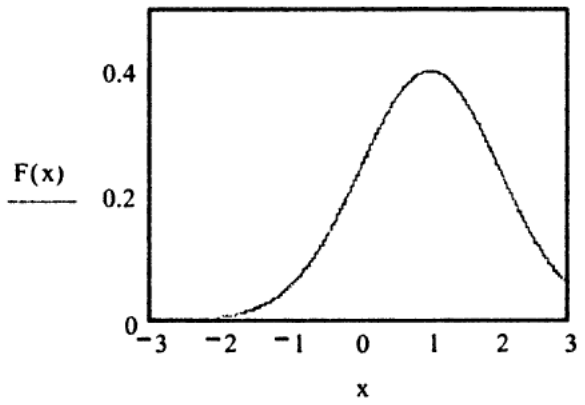
В тех случаях, когда значение x может принимать только положительные значения, например, при вычислении ошибки измерений по абсолютной величине, интеграл (38) принимает вид:

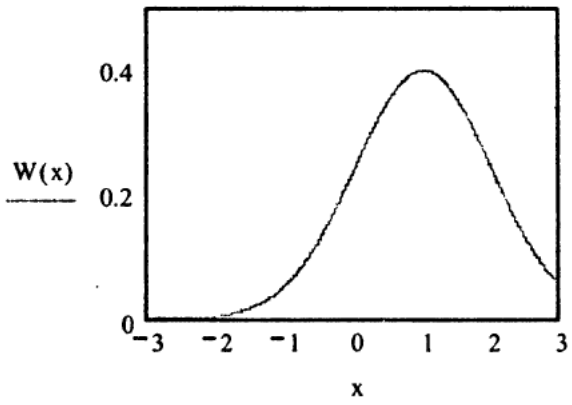
$$PL(a) = 2\int_{0}^{a} W(x)dx \quad , \tag{39}$$

где верхний предел интегрирования $a \ge 0$.

$\mu := 1 \qquad \sigma := 1$

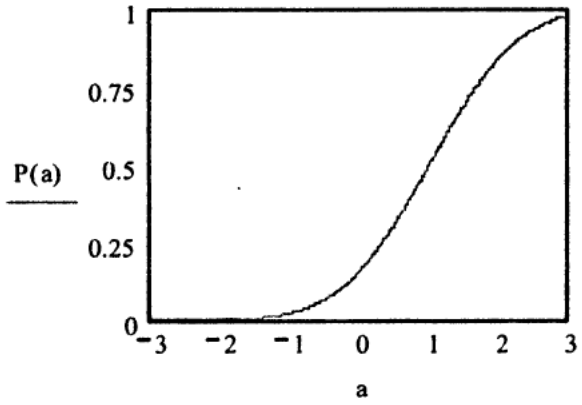
$F(x) := \mathrm{dnorm}(x, \mu, \sigma)$ $\qquad W(x) := \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}\right) \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right]$

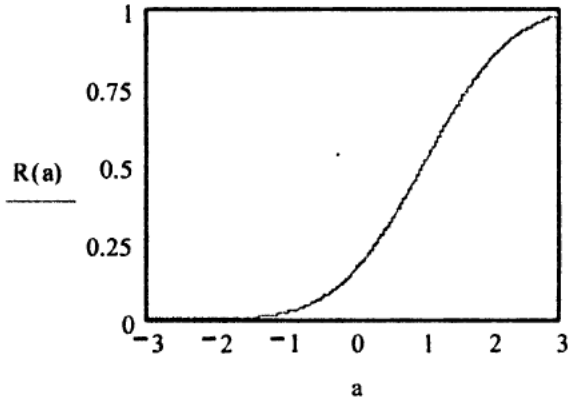




$\int_{-20}^{20} F(x)\,dx = 1$ $\qquad \int_{-20}^{20} W(x)\,dx = 1$

$P(a) := \mathrm{pnorm}(a, \mu, \sigma)$ $\qquad R(a) := \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}\right) \cdot \int_{-20}^{a} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right] dx$





$k := 0..6 \qquad a_k := -3 + k \qquad WD_k := W(a_k) \qquad PD_k := P(a_k)$

$a_k =$	$WD_k =$	$PD_k =$
-3	$1.338 \cdot 10^{-4}$	$3.167 \cdot 10^{-5}$
-2	$4.432 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$
-1	0.054	0.023
0	0.242	0.159
1	0.399	0.5
2	0.242	0.841
3	0.054	0.977

Рис. 30

Вычисленное значение PL(a) есть вероятность того, что случайная величина 0≤x≤a. При a = ∞ интеграл PL (a)=1 . При μ=0 интегралы (38) и (39) связаны соотношением:

*PL(a)=2*P(a)−1=1−2*P(−a).* (40)

При μ=0 и нормированном значении верхнего предела выражение (39) называется интегралом вероятностей или функцией Лапласа. С учетом (37) и (39) для данного интеграла получим:

$$IL(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \exp(-\frac{x^2}{2})dx \quad , \tag{41}$$

где **t=a/σ≥0** – нормированное значение верхнего предела.

Заметим, что в других случаях при −∞≤x≤a интегралом вероятностей называют:

$$IB(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^t \exp(-\frac{x^2}{2})dx \quad . \tag{42}$$

Функция IB(t) = pnorm(t,0,1), т. е. при **μ=0** и **σ=1.**

В справочниках по теории вероятности приводится таблица значений интеграла вероятностей (41) или (42), связанных соотношениями:

IB (t)= 1 — IB (−t), IL (t)= 2*IB (t) —1 = 1 — 2*IB (−t) .

Расчет интегралов вероятности (41) и (42) с выводом таблицы дискретных значений и графиками, приведен на рис. 31.

Категория "Случайные числа " в подменю *"Встроенные функции"* f(x). При моделировании определенных процессов часто возникает необходимость в создании массива чисел, подчиняющихся определенному статистическому закону. Такая задача может быть решена путем обращения к функциям категории **"Случайные числа",** с помощью которых возможна генерация последовательности случайных чисел, подчиняющихся выбранному закону распределения вероятностей. Приведем три примера таких функций.

- **rnorm(M, μ, σ)** генерирует случайную последовательность M чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения;
- **runf (M, a, b)** генерирует случайную последовательность M чисел, имеющих равномерное распределение внутри интервала, заключенного между граничными значениями **a – b**;
- **rnd (x)** генерирует случайную последовательность M чисел, имеющих равномерное распределение внутри интервала, заключенными между граничными значениями 0 – **x**.

Пример расчета по данным функциям приведен на рис. 32. Для последнего примера построена диаграмма в полярной системе координат.

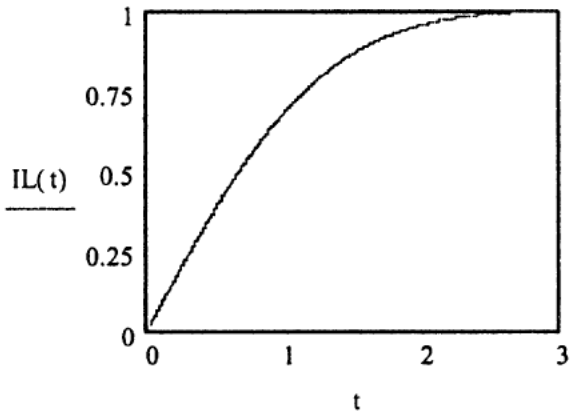
При повторном обращении к одной и той же функции автоматически происходит генерация обновленной последовательности случайных чисел.

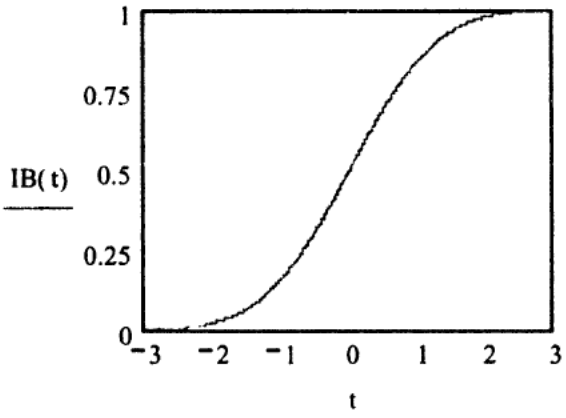
Кроме того, такое обновление может быть осуществлено после щелчка "мышью" по функции и нажатия на клавишу F9. Изменение старто-

вого значения в генерируемой последовательности осуществляется путем обращения к подменю ***"Параметры"*** в меню **"Математика"** и изменения цифры в строке "Начальная величина для случайных чисел".

$$0 \le |x| \le t \qquad -\infty \le |x| \le t$$

$$IL(t) := \left(\frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}}\right)\cdot\int_0^t \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx \qquad IB(t) := \left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\right)\cdot\int_{-20}^t \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx$$





$$k := 0..20 \qquad t_k := 0.2\cdot k \qquad L_k := IL(t_k) \qquad B_k := IB(t_k)$$

$$IL(t) := 1 - 2\cdot IB(-t)$$

t_k =	L_k =	B_k =
0	0	0.5
0.2	0.158519	0.57926
0.4	0.310843	0.655422
0.6	0.451494	0.725747
0.8	0.576289	0.788145
1	0.682689	0.841345
1.2	0.769861	0.88493
1.4	0.838487	0.919243
1.6	0.890401	0.945201
1.8	0.928139	0.96407
2	0.9545	0.97725

Рис. 31

rnorm(100, 0, 10) =

	0
0	-4.39
1	-6.794
2	-4.733
3	-9.515
4	-16.857
5	0.435
6	-1.206
7	5.564
8	21.918
9	8.087
10	9.851

runif(100, 1, 10) =

	0
0	1.447
1	3.342
2	9.058
3	7.556
4	4.542
5	9.135
6	4.493
7	4.182
8	7.708
9	7.655
10	2.802

$k := 1..100$ $\quad F_k := \mathrm{rnd}(2 \cdot \pi)$ $\quad R_k := \mathrm{rnd}(1)$

$F_k =$

5.43
1.841
4.052
5.206
5.478
5.734
2.766
2.224

$R_k =$

0.256
0.792
0.553
0.522
0.704
0.732
0.914
0.797

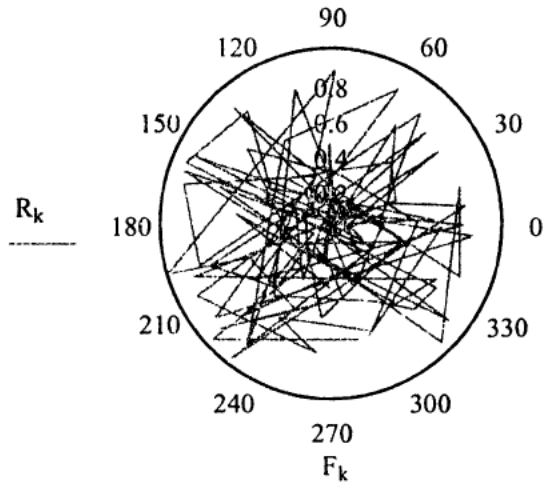


Рис. 32

23. Специальные функции

Особый раздел в математике занимают специальные классы функций, встречающиеся при интегрировании уравнений математической физики. Так например, с решением определенного класса линейных однородных уравнений второго порядка связаны ортогональные многочлены Чебышева, Лежандра, Эрмита, Лагера. В другом случае решением линейного дифференциального уравнения, описывающего колебательные процессы, являются функции Бесселя. В третьем случае специальная функция есть определенный интеграл от некоторой функции. Таким примером может служить гамма-функция:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (43)$$

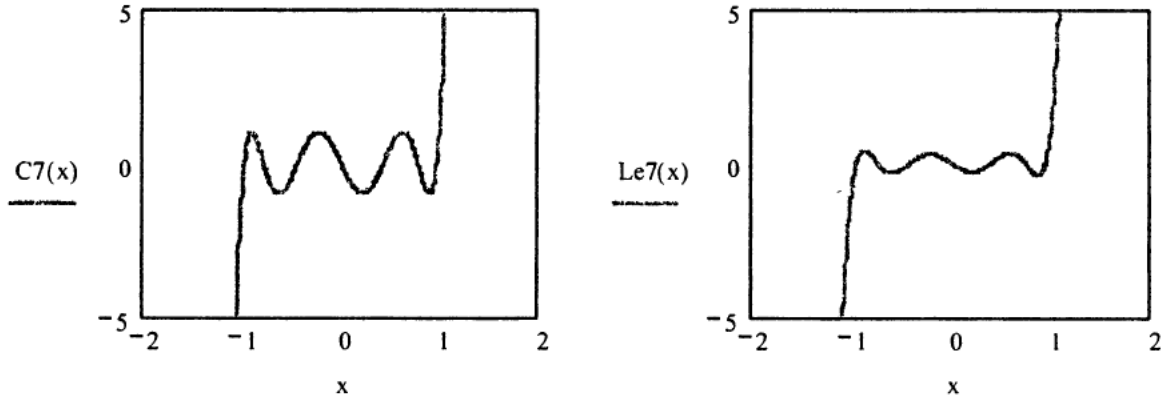
«Mathcad» предоставляет возможность быстрого вычисления некоторых специальных функций путем обращения к подменю "Встроенные функции", категория "Особые" и "Бесселя". В качестве примера наименования четырех таких функций – полиномов n-й степени – приведены в табл. 2. С их помощью можно вычислить значение полинома при любой степени n и аргументе x. В таблице показаны также выражения данных функций при n=5.

Таблица 2

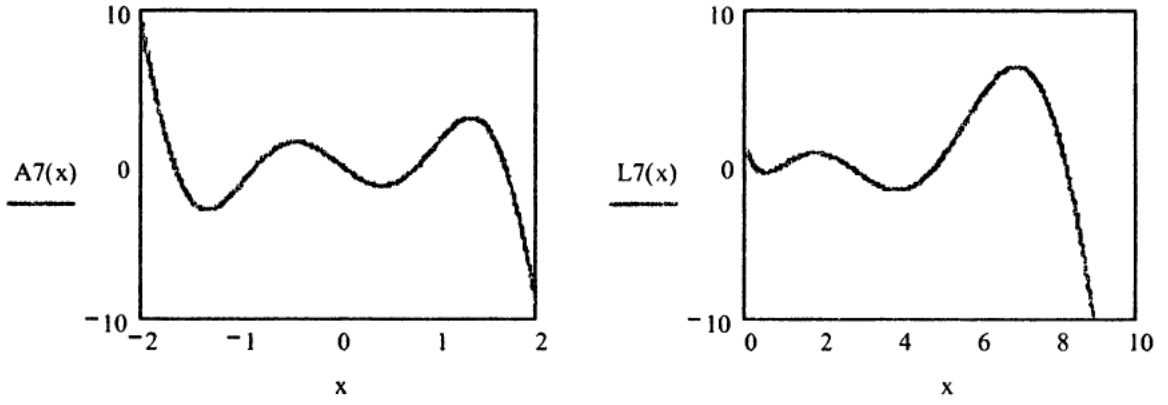
Функция	Имя в «Mathcad»	Выражение при n=5
Чебышева 1-го рода	**Tcheb (n , x)**	$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$
Лежандра	**Leg (n , x)**	$= (1/8)*(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
Эрмита	**Her (n , x)**	$= 32x^5 - 160x^3 + 120x$
Лагера	**Lag (n , x)**	$=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$
Бесселя 1-го рода	**Jn(n,x)**	

Графики функций, представленных в табл. 2, при n=7 приведены на рис. 33. На нем же построены графики функции Бесселя первого рода при n=0,1,2,3.

$C7(x) := Tcheb(7, x)$ $Le7(x) := Leg(7, x)$



$$A7(x) := \frac{Her(7, x)}{7^3} \qquad L7(x) := Lag(7, x)$$



$I0(x) := J0(x)$ $I1(x) := J1(x)$ $I2(x) := Jn(2, x)$ $I3(x) := Jn(3, x)$

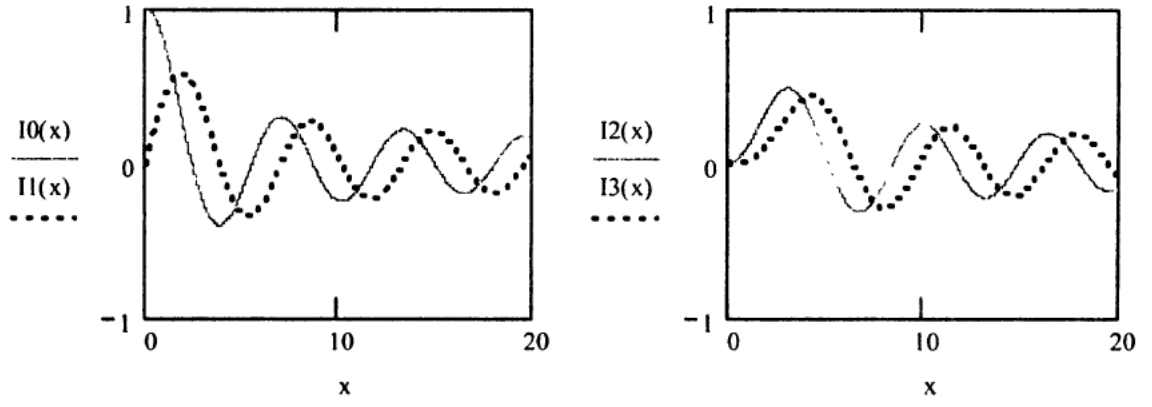


Рис. 33

По методике, описанной в п. 14, с помощью оператора цикла можно результаты вычисления специальных функций представить в табличной форме с любым дискретным шагом. Примеры таких таблиц для функций Чебышева первого рода, Лежандра и Бесселя при n=7 ,приведены на рис. 34.

$C7(x) := Tcheb(7, x)$ $Le7(x) := Leg(7, x)$ $I7(x) := Jn(7, x)$

$k := 0..100$ $t_k := 0.1 \cdot k$ $C_k := C7(t_k)$ $L_k := Le7(t_k)$ $I_k := I7(t_k)$

k =	C_k =	L_k =	I_k =
0	0	0	0
1	-0.645	-0.199	$1.55 \cdot 10^{-13}$
2	-0.987	-0.294	$1.982 \cdot 10^{-11}$
3	-0.846	-0.224	$3.381 \cdot 10^{-10}$
4	-0.258	-0.015	$2.527 \cdot 10^{-9}$
5	0.5	0.223	$1.202 \cdot 10^{-8}$
6	0.978	0.323	$4.291 \cdot 10^{-8}$
7	0.755	0.15	$1.257 \cdot 10^{-7}$
8	-0.206	-0.24	$3.186 \cdot 10^{-7}$
9	-1	-0.368	$7.229 \cdot 10^{-7}$
10	1	1	$1.502 \cdot 10^{-6}$
11	11.177	6.293	$2.908 \cdot 10^{-6}$
12	39	19.694	$5.309 \cdot 10^{-6}$
13	99.674	47.838	$9.225 \cdot 10^{-6}$
14	216.148	100.655	$1.537 \cdot 10^{-5}$
15	421.5	192.376	$2.468 \cdot 10^{-5}$

Рис. 34

Заключение

Из приведенных материалов следует, что в среде «Mathcad» одна и та же задача может быть решена несколькими способами, число которых в некоторых случаях может достигать пяти. Многовариантность при решении задач, принятый в математике способ записи функций и выражений и получение результатов вычислений, произведенных компьютером, в виде таблиц и графиков, – являются отличительными особенностями языка «Mathcad». Приведенные в приложении примеры помогут читателю быстро освоить данный язык и проводить сложные компьютерные вычисления.

Список программ

Номер	Стр.	Рис.	Содержание
1	15	2.2	Разложение в ряд Фурье косинусоидальной последовательности импульсов
2	17	2.4	Разложение в ряд Фурье прямоугольной последовательности импульсов
3	20	2.7	Разложение в ряд Фурье последовательности импульсов любой формы
4	24	2.8	Расчет спектральной плотности импульса прямоугольной формы
5	26	2.10	Расчет спектральной плотности импульса в форме трапеции
6	27	2.11	Расчет спектральной плотности импульса в форме экспоненты
7	28	2.12	Расчет спектральной плотности импульса косинусоидальной формы
8	33	2.14	Расчет корреляционной функции синусоидального сигнала
9	33	2.15	Расчет энергетического спектра при экспоненциальной корреляционной функции
10	35	2.17	Расчет энергетического спектра при треугольной корреляционной функции
11	36-37	2.18-2.19	Расчет энергетического спектра при корреляционной функции любого вида
12	46-47	3.4	Расчет характеристик электрической цепи 2-го порядка
13	48-49	3.5	Расчет характеристик электрической цепи 4-го порядка
14	54	3.8	Расчет четырехполюсника по Y-параметрам.
15	63	3.13	Прохождение ЛЧМ-сигнала через линейную цепь 2-го порядка
16	76	4.5	Решение уравнения Ван-дер-Поля
17	78	4.6	Решение уравнения автогенератора
18	80	4.7	Стохастические колебания
19	84	4.11	Расчет огибающей и фазы двухчастотного сигнала.
20	87-88	4.13	Расчет комбинационного спектра при двухчастотном сигнале
21	99	5.3	Расчет автогенератора
22	113	5.13	Расчет параметров кварцевого резонатора
23	118	5.19	Синхронизация автогенератора
24	131	6.8	Характеристики дискриминатора
25	133	6.9	Нелинейная ЧАП 1-го порядка
26	136	6.12	Характеристики фильтра 2-го порядка

Номер	Стр.	Рис.	Содержание
27	138	6.13	Нелинейная ЧАП 2-го порядка
28	145	6.18	Нелинейная ФАП
29	161	7.7	Динамическая характеристика генератора
30	163	7.8	Нагрузочные характеристики генератора
31	167	7.13	Передача мощности от генератора в нагрузку
32	170	7.16	Коэффициент усиления широкополосного генератора
34	184	8.10	Параметры симметричной микрополосковой линии
35	185	8.12	Параметры связанных микрополосковых линий
36	189	8.15	АЧХ четырехполюсника при связанных микрополосковых линиях
37	192	8.18	Передача мощности от генератора в нагрузку в СВЧ диапазоне
38	196-197	8.21	Коэффициент усиления широкополосного СВЧ генератора
39	208	9.3	Потери мощности при суммировании сигналов.
40	212	9.7	Диаграмма направленности ФАР
41	217	9.10	Многосвязная система автоматического регулирования
42	228-229	10.5	Адаптация ФАР
43	236-238	11.5	Синтез полосового фильтра на связанных микрополосковых линиях
44	244-246	11.11	Синтез согласующего устройства на микрополосковых линиях.
45	252	12.5	Графики функции Бесселя 1-го рода
46	275	13.5	Вероятность ошибки при приеме двоичных сигналов
47	280-282	13.9	Синтез фильтра при оптимальной линейной фильтрации
48	288	13.14	Функция мгновенной частоты при двухчастотном сигнале
49	313	14.10	Расчет космической линии радиосвязи
50	326	15.15	Расчет наземной линии радиосвязи

Список литературы

1. *Карлащук В.И.* Электронная лаборатория на IBM PC.– М.: Солон Р, 2000. – 506 с.
2. *MATHCAD 6.0 PLUS*. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. – 2-е изд. – М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", 1997. – 712 с.
3. *Плис А.И., Сливина Н.А.* Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб.пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 656 с.
4. *Дьяконов В.П., Абраменкова*. Mathcad 8 PRO в математике, физике и Internet. – М.: Нолидж, 2000. – 512 с.
5. *Харкевич А.А.* Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике. – М.: ГИТТЛ, – 1956. – 184 с.
6. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – 4-е изд. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
7. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 680 с.
8. *Денисенко А.Н., Стеценко О.А.* Теоретическая радиотехника: Справочное пособие, ч.1: Детерминированные сигналы. – М.: Изд-во стандартов, 1993. – 216 с.
9. *Денисенко А.Н.* Теоретическая радиотехника. Сигналы с фазовой и частотной модуляцией. – М.: Из-во стандартов, 1994. – 175 с.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике: Пер. с англ./ Под ред. И.Г. Арамановича – М.: Наука, 1978. – 832 с.
11. *Финкельштейн М.И.* Основы радилокации. – М.: Советское радио, 1973. – 496 с.
12. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 408 с.
13. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 95 с.
14. *Музыкин С.Н., Родионова Ю.М.* Моделирование динамических систем. – Ярославль: Верх.-Волж. кн. Изд-во, 1984. – 304 с.
15. *Винер Н.* Кибернетика: Пер. с англ./ Под ред. Г.Н.Поварова. – М.: Советское радио, 1968. – 328 с.
16. *Попов Е.П., Пальтов И.П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 468 с.
17. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации.– Горький: Институт прикладной физики, 1989. – 256 с.
18. *Ратынский М.В.* Основы сотовой связи. – М.:Радио и связь, 1998.– 248 с.
19. *Каганов В.И.* Проектирование транзисторных радиопередатчиков с применением ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988.– 256 с.
20. *Каганов В.И.* СВЧ полупроводниковые радиопередатчики. – М.: Радио и связь, 1981. – 400 с.
21. *Кэррол Д.* СВЧ-генераторы на горячих электронах: Пер. с англ./ Под ред. Б.Л. Гельмонта. – М.:Мир, 1972. – 383 с.
22. *Капланов М.Р., Левин В.А.* Автоматическая подстройка частоты. – 3-е изд.– М.: Госэнергоиздат, 1962. – 320 с.

23. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. – М.: Связь, 1972. – 448 с.
24. *Каганов В.И.* Системы автоматического регулирования в радиопередатчиках. – М.: Связь, 1969. – 232 с.
25. *Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К.* Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. – М.: Радио и связь, 1989. – 232 с.
26. *Каганов В.И.* Транзисторные радиопередатчики. – 2-е изд. – М.: Энергия, 1976. – 448 с.
27. *Артым А.Д.* Ключевые генераторы гармонических колебаний. – М.: Энергия, 1972. – 170 с.
28. *Маттей Г.Л., Янг Л., Джонс Е.М.Т.* Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи вязи: Пер. с англ./ Под ред. Л.В. Алексеева и Ф.В. Кушнира. – М.: Связь, 1971, т.1. – 439 с.
29. *Маттей Г.Л., Янг Л., Джонс Е.М.Т.* Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи вязи: Пер. с англ./ Под ред. Л.В. Алексеева и Ф.В. Кушнира. – М.: Связь, 1972, т.2. – 495 с.
30. *Альтман Д.Л.* Устройства сверхвысоких частот: Пер. с англ./ Под ред.И.В. Лебедева. – М.: Мир, 1968. – 488 с.
31. *Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч.* Теория и анализ фазированных антенных решеток: Пер. с англ./ Под ред. А.Ф. Чаплина. – М.: Мир, 1974. – 456 с.
32. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ./ Под ред. М.Л. Быховского. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
33. *Базара М., Шетти К.* Теория и алгоритмы: Пер. с англ./ Под ред. Д.Б. Юдина. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
34. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации: Пер. с англ./ Под ред. Б.Т. Полякова. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
35. *Полак Э.* Численные методы оптимизации: Пер. с англ./ Под ред. И.А. Вателя. – М.: Мир, 1974. – 376 с.
36. *Андрианов В.И., Соколов А.В.* Средства мобильной связи. – СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1988.– 256 с.
37. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике: Пер. с англ. – М.: ИИЛ, 1963. – 271 с.
38. *Петрович Н.Т.* Передача дискретной информации в каналах с фазовой манипуляцией. – М.: Советское радио, 1965. – 264 с.
39. *Кантор Л.Я., Минашин В.П., Тимофеев В.В.* Спутниковое вещание. – М.: Радио и связь, 1981. – 232 с.
40. *Айнбиндер И.М.* Шумы радиоприемников. – М.: Связь, 1974. – 328 с.
41. *Введенский Б.А.* Распространение ультракоротких радиоволн. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
42. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 528 с.

Оглавление

Предисловие…….. ……..3

Глава 1. РОЛЬ КОМПЬЮТЕРА В РАДИОТЕХНИКЕ……4
1.1. Области применения компьютера……..4
1.2. Классификация радиотехнических устройств……..5
1.3. Пять типов задач в радиотехнике……7
1.4. Об универсальном математическом пакете программ «Mathcad»…...10

Глава 2. СИГНАЛЫ……...12
2.1. Виды сигналов……12
2.2. Периодические сигналы и ряд Фурье……..13
2.3. Одиночный импульс и интеграл Фурье……21
2.4. Связь между периодическим сигналом и одиночным импульсом…...29
2.5. Случайные сигналы……...30
2.6.Сравнение детерминированного и случайного сигналов……39

Глава 3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ УСТРОЙСТВ……40
3.1. Назначение и классификация линейных устройств……40
3.2. Передаточная функция и коэффициент передачи, временные и частотные характеристики……41
3.3. Анализ многокаскадных линейных устройств……50
3.4. Матричный анализ линейных устройств……52
3.5. Устойчивость линейных устройств……56
3.6. Прохождение сигналов через линейные устройства……59

Глава 4. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ АНАЛОГОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ ……...66
4.1. Математические модели……66
4.2.Аналитические методы анализа……67
4.3.Численные методы анализа……73
4.4.Фазовая плоскость……77
4.5.Стохастические колебания в детерминированных автономных динамических системах……79
4.6. Спектральный анализ неавтономного динамического устройства……82

Глава 5. ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ……94
5.1. Назначение и классификация автогенераторов……94
5.2. Основное уравнение автогенератора……95
5.3. Установившийся режим автоколебаний……103
5.4. Стабильность частоты автогенераторов……105
5.5. Кварцевые автогенераторы……111
5.6. Диодные СВЧ автогенераторы……115
5.7. Синхронизация автогенераторов……117

Глава 6. АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПОДСТРОЙКА ЧАСТОТЫ.....121
6.1. Назначение и классификация устройств автоматической подстройки частоты.....121
6.2. Обобщенное уравнение автоматической подстройки частоты.....124
6.3. Частотная автоподстройка частоты 126
6.4. Фазовая автоподстройка частоты 141
6.5. Синтезатор частот.....150

Глава 7. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ С ВНЕШНИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ.....152
7.1. Общие принципы усиления и генерации высокочастотных и сверхвысокочастотных колебаний.....152
7.2. Основы теории высокочастотного генератора.....154
7.3. Режимы работы и характеристики высокочастотного генератора.....162
7.4. Согласование электронного прибора с источником возбуждения и нагрузкой.....169

Глава 8. СВЧ УСТРОЙСТВА.....172
8.1. Метод анализа линейных СВЧ устройств.....172
8.2. Волновые матрицы четырехполюсника 178
8.3. Гибридно-интегральные СВЧ устройства и микрополосковые линии.....182
8.4. СВЧ направленные ответвители и мостовые устройства.....185
8.5. Передача мощности от генератора в нагрузку.....190
8.6. СВЧ транзисторный усилитель.....193
8.7. СВЧ диодный генератор.....200

Глава 9. СУММИРОВАНИЕ МОЩНОСТЕЙ СИГНАЛОВ.....203
9.1. Способы суммирования мощностей сигналов.....203
9.2. Суммирование мощностей сигналов с помощью многополюсной схемы.....205
9.3. Суммирование мощностей сигналов с помощью фазированной антенной решетки.....210
9.4. Многосвязная система автоматической стабилизации фронта фаз сигналов.....213

Глава 10. ОПТИМИЗАЦИЯ.....219
10.1. Критерии оптимизации и функция цели.....219
10.2. Методы поиска экстремума функции цели.....221
10.3. Адаптация фазированной антенной решетки.....224

Глава 11. ФИЛЬТРЫ И СОГЛАСУЮЩИЕ ЦЕПИ.....231
11.1. Алгоритм синтеза фильтров.....231
11.2. Параметрический синтез СВЧ полосового фильтра на связанных микрополсковых линиях.....233
11.3. Алгоритм синтеза согласующей цепи.....239
11.4. Параметрический синтез СВЧ согласующей цепи на микрополсковых линиях.....242

Глава 12. МОДУЛЯЦИЯ.....248
12.1. Виды модуляции.....248
12. 2.Частотная и фазовая модуляция аналоговых сообщений.....250
12.3. Частотная и фазовая модуляция дискретных сообщений.....257
12.4. Амплитудная модуляция.....263

Глава 13. ПРИЕМ РАДИОСИГНАЛОВ.....266
13.1. Действие помех при приеме радиосигналов и структурная схема радиоприемника.....266
13.2. Оптимальный радиоприем двоичных сигналов.....272
13.3. Оптимальная линейная фильтрация.....275
13.4. Обработка радиосигналов с частотной модуляцией.....285
13.5. Линейный тракт радиоприемника.....294

Глава 14. СПУТНИКО-КОСМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ РАДИОСВЯЗИ.....298
14.1. Три типа информационных систем.....298
14.2. Глобальные спутнико-космические радиоэлектронные системы...299
14.3. Расчет космической линии радиосвязи.....310

Глава 15. НАЗЕМНЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ ПО ИНФОРЦИОННОМУ ОБСЛУЖИВАНИЮ ПРОИЗВОДСТВ РАССРЕДОТОЧЕННОГО ТИПА.....314
15.1. Назначение, основные функции и структура системы.....314
15.2. Структура, режимы работы и параметры информационно-управляющей системы.....316
15.3. Расчет линии радиосвязи в декаметровом диапазоне волн.....324
15.4. Множественный доступ к каналу радиосвязи.....328

Приложение 1.....335
Приложение 2.....337

Список программ.....407
Список литературы.....409