# Д. Ф. Клаербоут

## СЕЙСМИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЗЕМНЫХ НЕДР

# Jon F. Claerbout

## IMAGING THE EARTH'S INTERIOR

# Imaging the Earth's Interior

Jon F. Claerbout

*Department of Geophysics*
*Stanford University*

BLACKWELL SCIENTIFIC PUBLICATIONS
Oxford London Edinburgh
Boston Palo Alto Victoria

Д.Ф. Клаербоут

# Сейсмическое изображение земных недр

Перевод с английского
*В.Н. Лисина*

Редактор перевода
доктор технических наук
*О.А. Потапов*

МОСКВА «НЕДРА» 1989

ББК 26.21
К 47
УДК 550.834

Рекомендована к переводу *О. А. Потаповым и Б. Р. Завалишиным*

**Клаербоут Д. Ф.**

К 47 Сейсмическое изображение земных недр. Пер. с англ.; Ред. пер. О. А. Потапов. М.: Недра, 1989. 407 с.: ил. Пер. изд.: США, 1985.

ISBN 5 247 01117—1

Описана миграция волновых полей в сложно построенных средах. Изложены физические основы миграции, приведен математический аппарат, необходимый для алгоритмирования миграционных процессов. Рассмотрены поглощение и расфокусировка сейсмической энергии в реальных средах, выбор скоростей миграции, новый способ изображения земных недр с помощью сейсмических отражений.

Для инженерно-технических работников, занимающихся изучением волновых полей, обработкой и интерпретацией сейсмических данных. Полезна студентам вузов, специализирующихся в сейсморазведке.

**К $\frac{1803020000—210}{043(01)—89}$ 32—89** **ББК 26.21**

**ISBN 5—247—01117—1**

**ISBN 0—86542—304—0**

© Blackwell Scientific Publications, 1985

© Перевод на русский язык. Издательство «Недра», 1989

# Предисловие к русскому изданию

## Немного истории

Сейсморазведчики, применяющие метод отраженных волн, получают изображения земных недр. В 60-х годах это делалось от случая к случаю. Между 1968 и 1972 гг. я предложил и опробовал на полевых материалах новый метод получения изображений, основанный непосредственно на использовании физического волнового уравнения. Ранее волновое уравнение использовали для предсказания результатов наблюдений, причем за исходные брали упрощенные гипотетические модели. Его не применяли при обычной обработке данных. Мой метод изображения, основанный на использовании конечных разностей, вскоре стал широко применяться при поисках и разведке нефти и природного газа. Методом заинтересовались другие исследователи, существенно его усовершенствовавшие. Ранее применявшиеся способы изображения были пересмотрены и тоже усовершенствованы в свете волновой теории.

Для разработки новых методов в Стэнфордском университете была образована поддержанная промышленными компаниями группа, известная как Стэнфордский разведочный проект (СРП). Многие из 52 организаций-участников из 13 стран располагают собственными крупными научно-исследовательскими отделами. Поэтому дело движется вперед быстрыми темпами. Я отобрал для книги некоторые результаты исследований, полученные в последнее десятилетие.

Ранее мною написана книга «Основы обработки геофизической информации». Она имеет более теоретический характер, чем данная книга, которая больше подходит для самостоятельного обучения и для новичков. В ней содержится обзор процесса обработки данных сейсморазведки при разведке на нефть и природный газ. Она представляет собой основное пособие по разведочной геофизике в Стэнфордском университете. В то же время я не претендую на то, чтобы считать ее своего рода энциклопедией. Некоторые важные процедуры обработки, такие как деконволюция и расчет статических поправок, описаны схематично. То же самое можно сказать и о практическом применении томографии, лучевых методах и так называемых методах Кирхгофа.

## Организация материала

При получении сейсмического изображения среды используются многие идеи, появляющиеся в математике и физике одна за другой. Я решил подать материал в настоящей книге в логической последовательности. Такая организация удобна для новичков, желающих досконально понять содержание. Чтобы увязать содержание с практическими задачами, которые при любой логической организации материала оказываются несколько разбросанными, прилагаются детальный предметный указатель и список литературы, содержащий более сотни названий.

Я также попытался удовлетворить тех читателей, которые желают понять суть явления (его физику), не вдаваясь глубоко в математику. В отдельных разделах перед математическим анализом приводятся практические примеры и возможно полное их обсуждение. Сами главы организованы таким же образом. Поэтому, например, дойдя до середины гл. 1, можно перейти к изучению гл. 2. Оказывается, что физику волновых явлений можно понять и не прибегая к детальному математическому анализу. И все же перед чтением настоящей книги вы должны познакомиться с дифференциальным и интегральным исчислениями, комплексными экспоненциальными функциями и преобразованием Фурье.

## Философские основы книги

В данной книге я часто указываю на расхождения между теорией и производственной практикой. Новичку иногда кажется, что причина расхождения заключается в недостаточной тщательности практического воплощения. Но в теории могут содержаться скрытые предположения. В настоящей книге, кроме фактов, излагаются и некоторые мои соображения по поводу изображения строения земных недр.

## Благодарности

Я в долгу перед многими коллегами за оказанную ими помощь. Я также благодарен за компьютеризованную подготовку рукописи к изданию. Она позволила внести множество изменений в содержание без дополнительных ошибок. Я сам подготовил входные данные на английском языке и считаю, что такой способ создания книг более удовлетворительный, чем традиционный.

**Личное послание к коллегам, говорящим на русском языке**

Всех читателей моей книги на русском языке приглашаю посетить мою лабораторию в Стэнфордском университете. Возможно, что мы встретимся также и на одном из международных геофизических симпозиумов. Поскольку в несоциалистическом мире геофизическая деятельность осуществляется приблизительно 500 независимыми компаниями, международные геофизические симпозиумы являются существенной частью нашей работы. Я со своими студентами посещаю ежегодные конференции Общества геофизиков-разведчиков, устраиваемые в западном полушарии. Некоторые из нас присутствуют на ежегодных собраниях Европейского общества геофизиков-разведчиков, а один из нас участвовал в Международном геофизическом симпозиуме социалистических стран. На протяжении всей своей жизни я много читал о вашей стране, а в 1985 г. имел удовольствие побывать на Московском симпозиуме. Надеюсь, мы сможем встретиться снова.

Джон Ф. Клаербоут
Стэнфордский университет
Февраль 1987 г.

# Введение к русскому изданию

*«Ищи истину в фактах»* — Дэн Сяопин

Поиски нефти и природного газа начинают с проведения сейсморазведки. С помощью компьютеров отраженные волны преобразуются в изображения, во многом проясняющие историю геологического развития исследуемой территории. Во всем мире на сейсморазведку отраженными волнами и последующее построение изображений тратится около 4 млрд. долл. в год.

## Смысл, содержащийся в измерениях

Объем, занимаемый горными породами, намного превосходит объем углеводородов, поэтому наличие нефти и природного газа в них почти не оказывает прямого влияния на сейсмические отраженные волны. Однако отражения хорошо увязываются с границами раздела пород различного типа. В пористых породах углеводороды могут свободно перемещаться. Жидкости имеют тенденцию подниматься вверх. По форме границ раздела горных пород можно судить о том, где могут накапливаться углеводороды. В качестве примера очень успешного применения сейсморазведки методом отраженных волн (МОВ) можно сослаться на открытие залежей нефти и газа в срединной части акватории Северного моря. В процессе бурения первых поисковых скважин, заложенных по данным сейсморазведки МОВ, невозможно было сказать с определенностью, дадут ли они нефть. Но существовала большая уверенность в том, что, если и суждено найти нефть где-либо под дном Северного моря, то именно в местах, определенных по данным МОВ и благоприятных для бурения. И, как известно, вскоре нефть была найдена.

После бурения скважины и проведения в ней каротажа сейсмические изображения приобретают еще большую ценность, так как в этом случае известно, какого типа породы соответствуют каждому из отражающих горизонтов. С помощью сейсморазведки обычно удается удивительно точно картировать типы пород на некотором расстоянии от скважины. Особенно ценно знать, в каком направлении породы изгибаются вверх и где слои нарушены разрывами. Сейсморазведка дает такую информацию при значительно меньших затратах, чем бурение. Когда поиски и разведка на нефть и газ переносятся на море, затраты на сейсморазведку уменьшаются на порядок, а затраты на бурение настолько же возрастают.

### Воспроизводимость наблюдений

Данные сейсморазведки МОВ характеризуются большими объемами. Они отнюдь не похожи на карандашные заметки на листе бумаги. Это бесчисленные ряды магнитных лент с записью высокой плотности. Многие сейсмограммы понятны с первого взгляда, но многие не поддаются расшифровке, особенно с первой попытки. Хотя многие наблюдения непонятны и кажутся случайными и отягощенными помехами, примечательно, что их можно воспроизвести в полевых условиях. Обнаруживается также, что, работая с такими данными, мы узнаем все больше и больше, и возникает стимул к продолжению обработки. В книге основное внимание концентрируется на схеме наблюдений по одиночным разведочным профилям с обычными приповерхностными источниками и приемниками. Однако, учитывая достижения в области объемной сейсморазведки, я рассмотрел и случаи обработки трехмерной информации.

### Компьютеры как изображающие устройства

В настоящей книге в качестве изображающих устройств, преобразующих сейсмические отражения, используются компьютеры. В качестве изображающего устройства компьютер во многих отношениях идеален. Возможности телескопа, например, ограничены качеством составляющих его деталей. Создаваемое же компьютером изображение больше ограничено нашим пониманием математики, физики и статистики, чем присущими самому компьютеру ограничениями. Практика показала, что сейсмические данные имеют максимальный объем информации, обработка которого возможна только на современных ЭВМ.

### Компьютеры и киносейсмика

В книге помещено несколько машинных программ. Они используются в качестве иллюстраций и упражнений, но могут быть полезными и в качестве справочного материала. Трудно дать какие-то гарантии, но у меня программы работали при создании многих рисунков, помещенных в книге, поэтому должны работать и у вас. Вы заметите, что они составлены на языке, похожем на ФОРТРАН. Язык описан в начале раздела 1.7. У всех свои возможности графовывода, поэтому, чтобы воспользоваться этими программами, вам придется изучить их достаточно хорошо, так, чтобы вы смогли согласовать выходную информацию с вашими графическими устройствами.

С помощью современных ЭВМ можно получить кинофильм, который фактически представляет собой набор картинок. Внутри ЭВМ — это просто трехмерная матрица чисел в формате с плавающей запятой, которые каким-то образом следует преобразовать в уровни яркости. К моменту завершения написания данной книги лишь несколько ЭВМ были оборудованы и приспособлены для непосредственного преобразования трехмерной матрицы в видеофильм. В течение промежутка времени, потраченного на перевод, произведены десятки тысяч настольных компьютеров, способных выполнять указанную операцию.

Возможность получения киносейсмических изображений очень важна. Киносейсмика углубляет наше понимание сейсморазведочных материалов и методов обработки. Студенты заметно воодушевляются, видя, как их усилия по программированию сразу же превращаются в кинофильм, легко записываемый на видеокассету.

### Будет ли работа?

Основное применение метод построения сейсмических изображений по отраженным волнам находит в нефтеразведке. В отличие от ядерной энергии, углеводороды являются практически невозобновляемым ресурсом энергии. Кроме того, есть предположение, что в течение жизни молодого поколения добыча нефти и природного газа должна упасть. Означает ли это, что молодые люди не должны изучать геофизику? Я думаю, что должны. В далекой перспективе, учитывая при этом рост населения Земли, трудно вообразить таких людей, которые бы потеряли интерес к изучению земной коры. Можно предположить, что по мере уменьшения открытых запасов нефти и газа усилия, направленные на их поиски, будут расти. Работники нужны и сегодня, так как еще не изобрели самолетов с двигателями, работающими на каменном угле или на ядерном топливе. В любом случае разрабатываемые в книге навыки и умения, способы воплощения на ЭВМ физических концепций всегда будут находить всеобщее применение.

### Путеводитель по книге

В гл. 1 и 3 излагаются основные понятия построения изображений геологической среды по данным сейсморазведки МОВ. Гл. 2 и 4 посвящены машинным способам анализа наблюденных волновых полей. В Стэнфордском университете гл. 1—3 преподаются студентам, готовящимся к степени магистра. Они преподаются в виде курса, рассчитанного на один семестр. Эти студенты изучают также и некоторые главы из

моей предыдущей книги либо перед изучением настоящей книги, либо после.

Если вы не желаете вникать в методические вопросы, попробуйте прочесть лишь гл. 1 и 3, но гл. 2, благодаря ее конкретности и содержащимся в ней примерам, поможет вам лучше понять материал. Гл. 4 предназначена мастерам обработки, которые хотят знать, что скрывается за высококачественным воплощением идеи, или же исключительно квалифицированным интерпретаторам, желающим разобраться в возникающих расхождениях при обработке разными способами. В гл. 5 описаны новые концепции построения сейсмических изображений, которые кажутся правильными в принципе, но по различным причинам (многие из которых мне не известны) не нашли широкого практического применения. Интерпретаторы, которые хорошо владеют тематикой, могут оценить гл. 5, так как в ней делается попытка объяснить, как и почему получается так, как это наблюдается на практике. Но гл. 5 больше всего должна заинтересовать тех, кто хотел бы создать новую методику построения изображений земных недр по сейсмическим отраженным волнам.

Джон Ф. Клаербоут

# Глава 1
# ВВЕДЕНИЕ В СЕЙСМИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

## 1.1. Излучающие отражающие границы

Основная аппаратура для проведения сейсморазведки методом отраженных волн состоит из источника возбуждения геофона (устройства, напоминающего микрофон) и многоканальной системы визуального воспроизведения волновых импульсов. Сейсморазведочный профиль располагается на поверхности земли. Он может совпадать с курсом корабля и в этом случае приемник сейсмических колебаний называют гидрофоном. Источник звука и приемник практически не обладают регулируемой направленностью, так как частоты, пронизывающие земные недра, характеризуются волнами, длина которых превышает размер корпуса судна. В результате, в один и тот же момент времени могут подходить отражения с нескольких направлений. Истолкование получаемых данных является задачей и геофизиков и геологов. Геофизики изучают количественную, физическую и статистическую стороны этой задачи. Они преследуют цель, совпадающую с основной целью данной книги,— создавать по наблюдаемым отражениям хорошие картины внутреннего строения земных недр.

### Некоторые аналогии

На рис. 1 изображены два варианта распространения волн. Первый вариант представляет собой практически реализуемый способ наблюдений. Второй — теоретический эксперимент, предполагающий, что отражающие границы в среде внезапно взрываются. Волны, возникающие при таком гипотетическом взрыве, распространяются вверх до поверхности земли, где и наблюдаются с помощью воображаемой расстановки сейсмоприемников.

Отметим особенность рисунка, заключающуюся в том, что траектории лучей в первом варианте кажутся такими же, как и во втором. В возможности предположить, что два упомянутых волновых поля — наблюденное и гипотетическое — в самом деле представляют собой одно и то же, заключается огромное концептуальное преимущество. Если они одинаковы, то можно пренебречь тем обстоятельством, что в действительности выполнялись многие тысячи наблюдений, и сосредоточить внимание на данном единственном гипотетическом экспери-

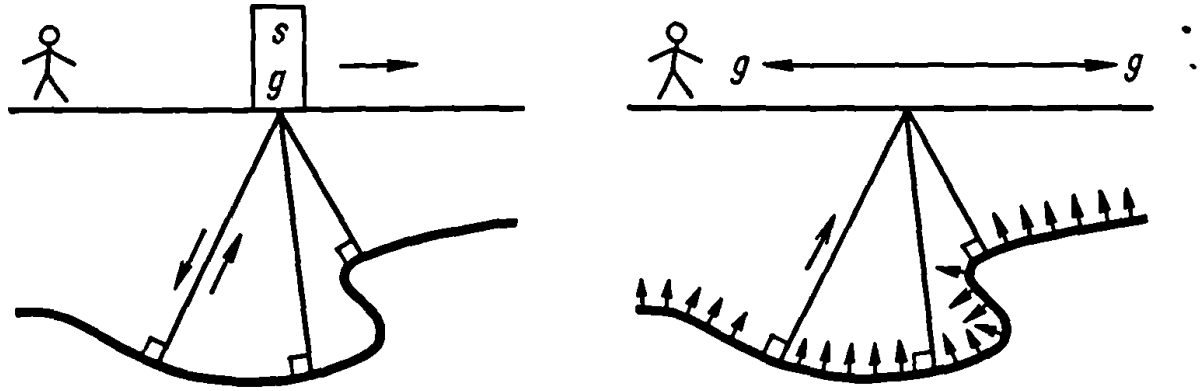



РИС. 1. Отражения, регистрируемые совмещенными источником и приемником, которые перемещаются по поверхности земли (слева), и концептуальная модель «излучающих» границ (справа)

менте. Одно из очевидных различий между указанными случаями состоит в том, что в соответствии со схемами полевых наблюдений волны должны сначала распространяться вниз и затем возвращаться по тем же траекториям, а в гипотетическом эксперименте они движутся только вверх. Время пробега при полевом эксперименте можно разделить пополам.

### Вторичный точечный источник Гюйгенса

Океанические волны имеют длины, сравнимые с длинами волн, которые используются в сейсморазведке (15—500 м), но они движутся столь медленно, что поддаются наблюдению. Представим себе протяженный мол гавани, параллельный береговой линии и имеющий небольшой промежуток для прохода судов (рис. 2). Падающая на такой мол из открытого моря плоская волна породит волну, прошедшую через этот промежуток. Внутри гавани будет наблюдаться волновой фронт в виде окружности с центром в месте разрыва мола.

Линейность является свойством всех малоамплитудных волн, за исключением пенистых, прибойных волн, образующихся возле берега. Отсюда следует, что два разрыва в молу, ограничивающем гавань, образуют два волновых фронта в виде полуокружностей. Там, где окружности пересекаются, высоты волн будут складываться по простому линейному закону. Интересно вообразить мол со многими разрывами. В предельном случае при очень большом числе разрывов мол исчезает, превратившись попросту в последовательность разрывов. Полукруговые волновые фронты объединяются в падающую плоскую волну. В случае гиперболических фронтов получаем то же самое. На рис. 3 изображены гиперболы, плотность расположения которых растет слева направо. Все волны, падающие на барьер под косыми углами, каким-то образом интерферируют между собой и ничего кроме плоской волны не остается.

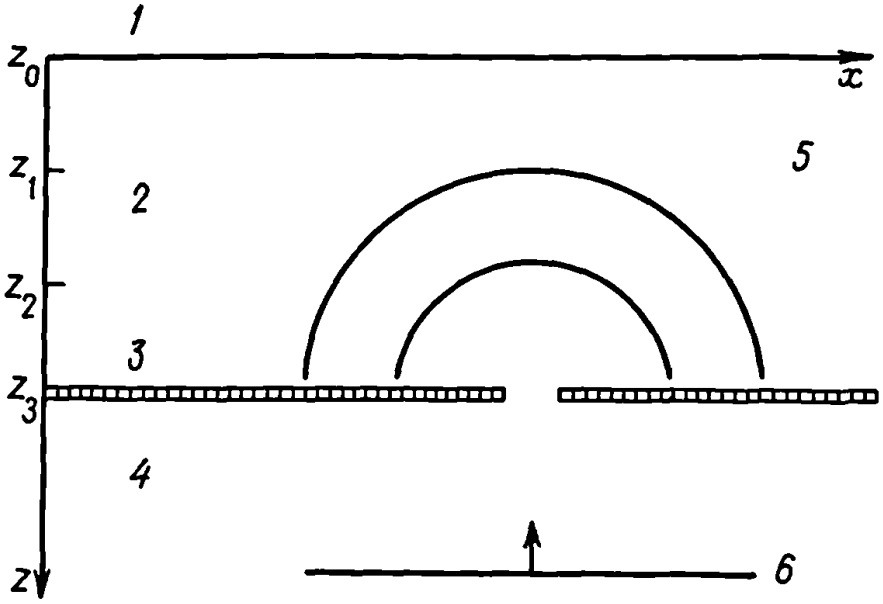



РИС. 2. Фронт волны, проходящей через разрыв в барьере, имеет вид полуокружности:
*1* пляж; *2* — гавань; *3* волнорез; *4* открытый океан; *5* — вторичный точечный источник Гюйгенса; *6* падающая волна

Наложим на поверхность океана декартову систему координат, направив ось $x$ вдоль берега, а ось $z$ вдоль расстояния до него. Если провести аналогию с методом отраженных сейсмических волн, то окажется, что люди находятся на берегу (на поверхности земли) и производят измерения высоты волн в зависимости от $x$ и $t$. Располагая такими наблюдениями, они могут сделать выводы относительно существования разрывов в сплошном моле на плоскости $(x, z)$. На рис. 4 изображены времена прихода к берегу волны, прошедшей через разрыв со стороны океана. Наименьшие времена наблюдаются в окрестности разрыва в моле.

Волны представляют собой расширяющиеся окружности. Уравнение окружности, расширяющейся со скоростью $v$ относительно точки с координатами $(x_3, z_3)$, имеет вид

$$(x-x_3)^2+(z-z_3)^2=v^2t^2. \qquad (1)$$

Положив $t$ постоянной величиной, т. е. сделав мгновенный снимок, находим, что уравнение (1) есть уравнение окружности. Положив постоянной $z$, получаем уравнение гиперболы на плоскости $(x, t)$. В пространстве $(t, x, z)$ уравнение (1) превращается в уравнение конической поверхности. Сечения при различных значениях $t$ дают окружности различного размера. Сечения конической поверхности при различных значениях $z$ дают набор гипербол. На рис. 4 изображены четыре гиперболы. Первая соответствует наблюдению, сделанному на берегу, т. е. при $z_0=0$. Вторая изображает гипотетическую последовательность наблюдений, произведенных на некотором расстоянии $z_1$ от берега в сторону моря. Третья последовательность наблюдений произведена на еще большем расстоянии $z_2$ от берега. Четвертая на расстоянии $z_3$ почти совпадает с молом,

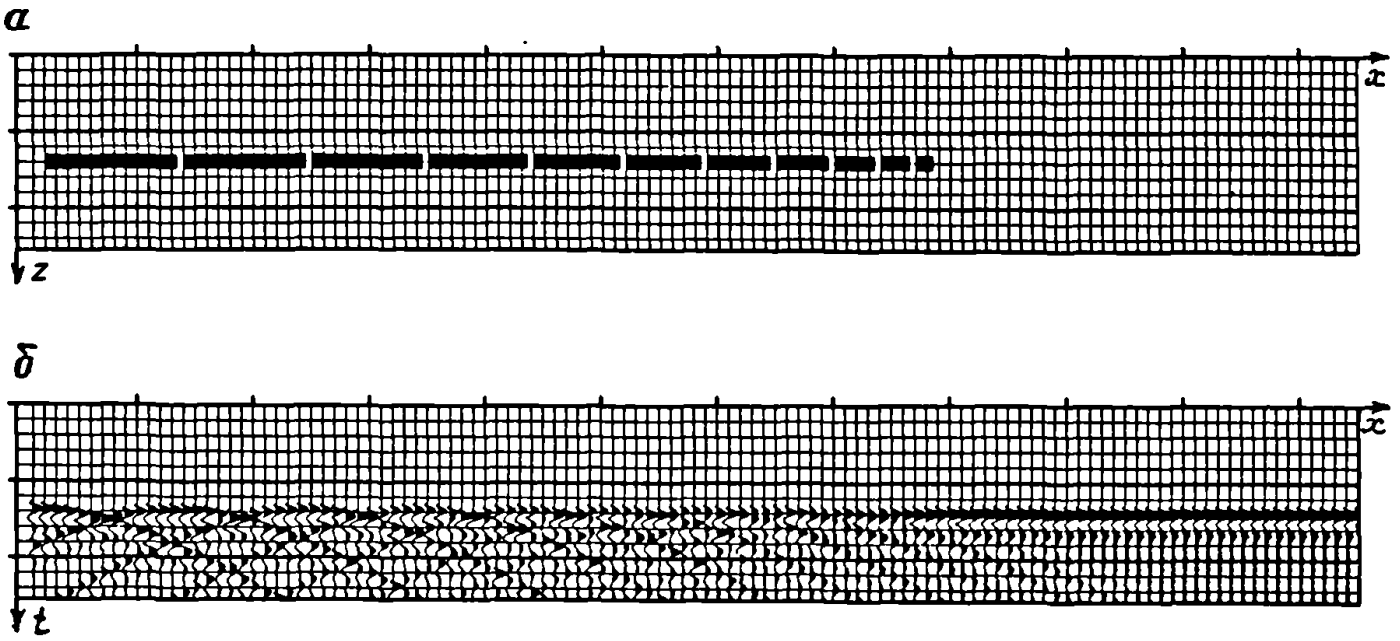



РИС. 3. Барьер с множеством отверстий (*а*) и волны, наблюдаемые за барьером (*б*)

где гипербола вырождается в точку. Все эти гиперболы принадлежат некоторому семейству, при этом каждой из гипербол соответствует одна и та же асимптота. Асимптота описывает волну, которая разворачивается у разрыва почти на 90 и движется почти параллельно береговой линии со скоростью $dx/dt$. (В описываемой аналогии с волной на поверхности воды предполагается, хотя и неправомерно, что ее скорость постоянна и не зависит от толщины слоя воды.)

Если исходная падающая волна представляет собой положительный импульс, то вторичный источник Гюйгенса должен возбуждать импульс с противоположными полярностями, так как только в этом случае в результате интерференции уничтожатся все волны, кроме плоской. Таким образом, волна Гюйгенса обладает фазовым сдвигом. В следующем разделе будут приведены математические выражения, описывающие вторичный источник Гюйгенса. Людям, плывущим в лодке, хорошо знакомо явление, состоящее в том, что наибольшие

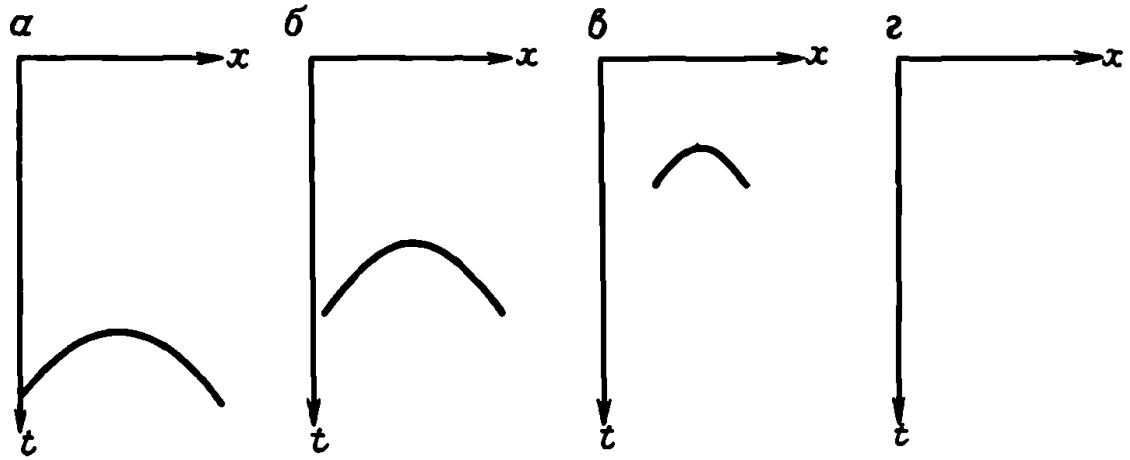



РИС. 4. Годографы наблюдений на различном расстоянии от берега (по Гонзалесу)

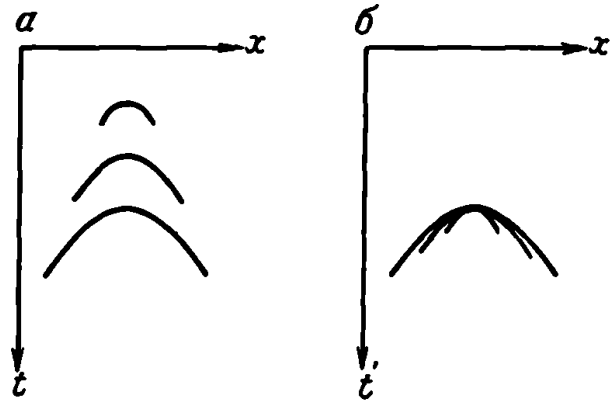



РИС. 5. Суперпозиция годографов, изображенных на рис. 4, без временного сдвига (*а*) и со сдвигом (*б*) [по Гонзалесу]

амплитуды на полуокружности Гюйгенса наблюдаются в непосредственном направлении к берегу. Амплитуда волн, распространяющихся параллельно берегу, падает до нуля. В оптике указанное убывание амплитуды в зависимости от угла падения называется фактором наклонности.

### Определение миграции

В словарях приводится множество значений слова run. Они родственны, но четко различаются между собой. Аналогично этому в геофизической разведке слово migration имеет около четырех родственных между собой, но различающихся значений. Самым простым из них является значение, сходное со словом «двигаться». Когда некоторый объект, расположенный в какой-то точке плоскости $(x, z)$, некоторое время спустя обнаруживается в ином месте, мы говорим, что он движется. Точно так же, когда некоторое вступление волны (часто называемое «событием»), расположенное где-то на плоскости $(x, t)$ геофизических наблюдений, обнаруживается в иной точке линии наблюдений, располагающейся на большей глубине $z$, говорят, что оно мигрирует.

Чтобы лучше усвоить сказанное, вообразим, что четыре части рис. 4 взяты из кинофильма. В процессе киносъемки глубина $z$ меняется от берега (поверхности земли) к волнорезу. На рис. 5, *а* указанные кинокадры совмещены друг с другом. Главное, что происходит в данном кинофильме волна мигрирует вверх, в направлении $t=0$. Чтобы устранить указанный доминирующий эффект вертикального перемещения, совместим кадры по-иному, поместив все вершины гипербол в одном и том же месте. С математической точки зрения эта операция сводится к тому, что ось времени $t$ заменяется на так называемую ось задержанного времени $t'=t+z/v$, изображенную на рис. 5, *б*. Второе, более точное определение миграции означает перемещение события в $(x, t')$-пространстве по мере изменения $z$. После устранения вертикального смещения остаточное перемещение в основном представляет собой изменение формы. В соответствии с этим определением, верши-

ны гипербол, т. е. горизонтальные слои, не претерпевают миграции.

Изображенные на рис. 5 гиперболы в действительности простираются до бесконечности, но на рисунке все они обрываются на времени в $\sqrt{2}$ раза большем минимального. Следовательно, гиперболы графически изображают только те лучи, которые отклоняются от вертикали на 45 . Не следует забывать, что отношение времени первого вступления какой-либо гиперболы к любому другому определяет величину косинуса угла распространения. Конец каждой гиперболы соответствует лучу, наклоненному под 45 к вертикали. Заметим, что концы гипербол на этом рисунке можно соединить прямой. Отметим также, что наклон гипербол на концах их одинаков. Любой фронт волны в физическом пространстве образует угол $\theta = dx\ dz$. У любой сейсмической оси синфазности тангенс угла ее наклона $vdt/dx$ равен $\sin\theta$, в чем легко убедиться, рассмотрев волновой фронт, подходящий к поверхности земли под углом $\theta$. Таким образом, энергия, распространяющаяся по прямой в физическом пространстве $(x, z)$, мигрирует в пространстве наблюдения $(x, t)$ также по прямой. С увеличением $z$ энергия, распространяющаяся под различными углами, сходится в фокусе, который и является взрывающейся (излучающей) границей. Этот фокус и есть разрыв в барьере. Третье определение миграции поэтому гласит: миграция процесс, который определенным способом перемещает наблюденные данные, т. е. зависимость высоты волны от $x$ и $t$, от берега к волнорезу. Третьим определением подчеркивается не столько само движение, сколько преобразование от начальной точки к конечной.

Чтобы продвинуться в нашем объяснении дальше, необходимо рассмотреть более общий по сравнению с волнорезом пример. В примере с волнорезом наши возможности ограничены формированием источников Гюйгенса лишь на заданной глубине $z$, а возможны источники и на других глубинах. Поэтому используя процесс волновой экстраполяции, который позволяет перемещать наблюдения на все большие глубины $z$, построим изображения излучающих отражающих границ с помощью равенства вида

$$\text{Изображение}\ (x, z) = \text{Волна}\ (t = 0,\ x,\ z). \qquad (2)$$

Четвертое определение миграции включает в себя и определение дифракции как процесса, противоположного миграции (рис. 6). Дифракцию иногда рассматривают как такой естественный процесс, который создает и удлиняет гиперболоиды. Миграция представляет собой такой вычислительный процесс, который выполняет обратную операцию.

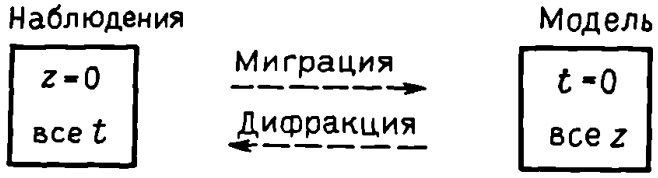



РИС. 6.

Еще один аспект использования слова миграция встречается в гл. 3, где в качестве горизонтальной координаты используется либо $y$ средняя точка между ПВ и ПП, либо удаление пункта взрыва от пункта приема $h$. Гиперболоиды можно продолжать вниз в плоскостях $(y, t)$ и $(h, t)$. Если данный процесс совершается в плоскости $(y, t)$, то его называют миграцией или сейсмическим изображением, если же он происходит на плоскости $(h, t)$, то называется фокусировкой или скоростным анализом.

**Наблюдаемые импульсоиды**

При дифракции по Гюйгенсу в пространстве $(x, z)$ берется одиночная импульсная функция (дельта-функция) и превращается в гиперболу в координатах $(x, t)$ при $z=0$. Обратное преобразование начинают с дельта-функции в пространстве $(x, t)$ при $z=0$. Оно соответствует такой методике сейсморазведки, когда отражения регистрируются в одной определенной точке, причем и в ней регистрируется всего лишь одно отражение. Какая модель земной среды должна согласовываться с подобными наблюдениями? Как следует из рис. 7, эта модель должна выглядеть как сферическое зеркало, центр которого находится в этой аномальной точке наблюдения.

Вероятность того, что в результате естественно развивающихся процессов в недрах земли будут образовываться многочисленные сферические зеркала, равна нулю. Но изучая обработанные геофизические материалы, часто можно наблюдать сферические зеркала. Становится очевидным, что во входных данных содержатся такие импульсоиды, которые не согласуются с изложенной выше теорией распространения волн. Это обстоятельство объясняет, почему нефтеразведчики вынуждены изучать вопросы обработки наблюдений по методу отраженных сейсмических волн, хотя лично они и не собираются составлять обрабатывающие программы. Полевые сейсмограммы слишком сложны для их осмысливания. Обработанные материалы дают основание для построения одной из моделей глубинного геологического строения Земли, но оценить ее надежность трудно. Вполне возможно, что вам никогда не понадобится собирать автомобиль, но если вы направляетесь в одиночку в глубь пустыни, вам просто необходимо знать как можно больше об устройстве автомобиля.

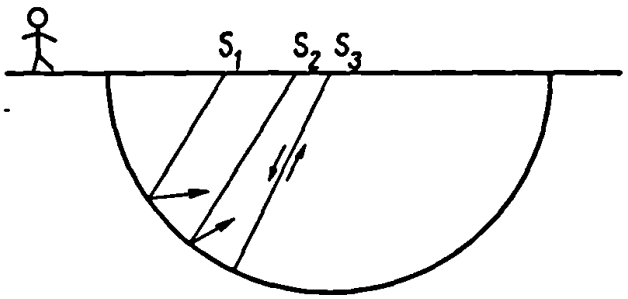



РИС. 7. Отражение возвращается к сейсмоприемнику, совмещенному с источником, только тогда, когда источник расположен в центре сферического зеркала

## Графическая миграция

По сейсмическому событию в точке $(x_0, t_0)$ и с угловым коэффициентом $p=dt/dx$ определим его положение $(x_м, t_м)$ после миграции. Для этого возьмем плоский волновой фронт, образующий угол $\theta$ с поверхностью земли и проходящий расстояние $dx$ за время $dt$. При значении скорости $v$ получим угол выхода через измеряемые величины:

$$\sin\theta = v\,dt/dx = pv. \qquad (3)$$

Путь пробега по вертикали меньше, чем по наклонному лучу на величину

$$t_м = t_0\cos\theta = t_0\sqrt{1-p^2v^2}. \qquad (4а)$$

Зная время пробега $t_0$ и горизонтальную компоненту скорости $v\sin\theta$, получаем горизонтальную координату после миграции:

$$x_м = x_0 - t_0 v\sin\theta = x_0 - t_0 pv^2. \qquad (4б)$$

Из рассмотрения гиперболы, мигрирующей к своей вершине, становится понятным, почему в формуле (4б) стоит знак минус. Уравнения (4а) и (4б) — основные уравнения для графической миграции данных метода отраженных сейсмических волн. Они показывают куда мигрирует заданная точка, но ничего не говорят о том, как изменяется угловой коэффициент $p$.

## Увеличение угла наклона отражающей границы

Рассмотрим вертикальную стенку, т. е. предельный случай наклонно залегающего пласта. Отражения от нее, т. е. асимптоты некоторой гиперболы, не будут вертикальными. Отсюда следует, что миграция увеличивает кажущуюся крутизну падающих под углом пластов. Автор воспользовался выражением «кажущаяся крутизна», так как угловой коэффициент на плоскости $(x, t)$ возрос. Результат миграции в действительности выражается в $z$, но при построении мигрированного временного разреза часто на $t$ накладывают $z/v$. Когда говорят, что гипербола мигрирует к своей вершине, конечно же имеют в виду мигрированный временной разрез. Выразим рост крутизны как функцию угла.

Возьмем точку $(x_{0+}, t_{0+}) = x_0 + \Delta,\ t_0 + p\Delta$, находящуюся по соседству с исходной $(x_0, t_0)$. В соответствии с уравнениями (4) соседняя точка мигрирует в точку с координатами

$$t_{м+} = (t_0 + p\Delta)\sqrt{1 - p^2 v^2}, \tag{5а}$$

$$x_{м+} = x_0 + \Delta - (t_0 + p\Delta)pv^2. \tag{5б}$$

Теперь найдем величину сноса мигрированного события

$$p_м = dt_{м+}/dx_{м+} = (dt_{м+}/d\Delta)/(dx_{м+}/d\Delta),$$

$$p_м = (p\sqrt{1 - p^2v^2})/(1 - p^2v^2) = p/\sqrt{1 - p^2v^2} = \operatorname{tg}\theta/v. \tag{6}$$

Итак, угловые коэффициенты на мигрированном временном разрезе, как и на декартовой плоскости, пропорциональны тангенсам углов наклона. В то же время угловые коэффициенты на временных разрезах без миграции пропорциональны синусам.

Может показаться парадоксальным тот факт, что в результате миграции наклонно залегающие пласты меняют свой угловой коэффициент, а в процессе продолжения вниз наклон крыльев гипербол не изменяется. Одна из причин состоит в том, что миграция представляет собой продолжение поля вниз плюс изображение (принимая $t = 0$). Другая причина заключается в том, что гипербола — это особого вида годограф, получающийся при одиночном источнике на заданной глубине, в то время как залегающий наклонно пласт можно рассматривать как суперпозицию точечных источников, расположенных на различных глубинах. На рис. 8 показано, каким образом точки, образующие линейную отражающую границу, дифрагируют в линейное отражение, а точки, образующие линейное отражение, мигрируют в линейную отражающую границу. Слева на рисунке показана суперпозиция множества гипербол. Вершина каждой гиперболы лежит на прямой. Прямая подобна отражающей границе, но не непрерывна, а представляет собой последовательность точек. В результате интерференции кажущееся отражение смещается в сторону. Справа изображена суперпозиция полуокружностей. Низ каждой полуокружности лежит на линии, которая может быть линией наблюдаемой плоской волны. Вместо этого плоская волна разбита на точечные вступления, каждое из которых можно истолковать как приходящее от зеркала в виде полуокружности. Сложив такие зеркала, получаем более круто наклоненную отражающую границу.

### Ограничения, присущие концепции излучающих отражающих границ

Для лиц, занятых только интерпретацией данных, а не их обработкой, понятие излучающих отражающих границ —

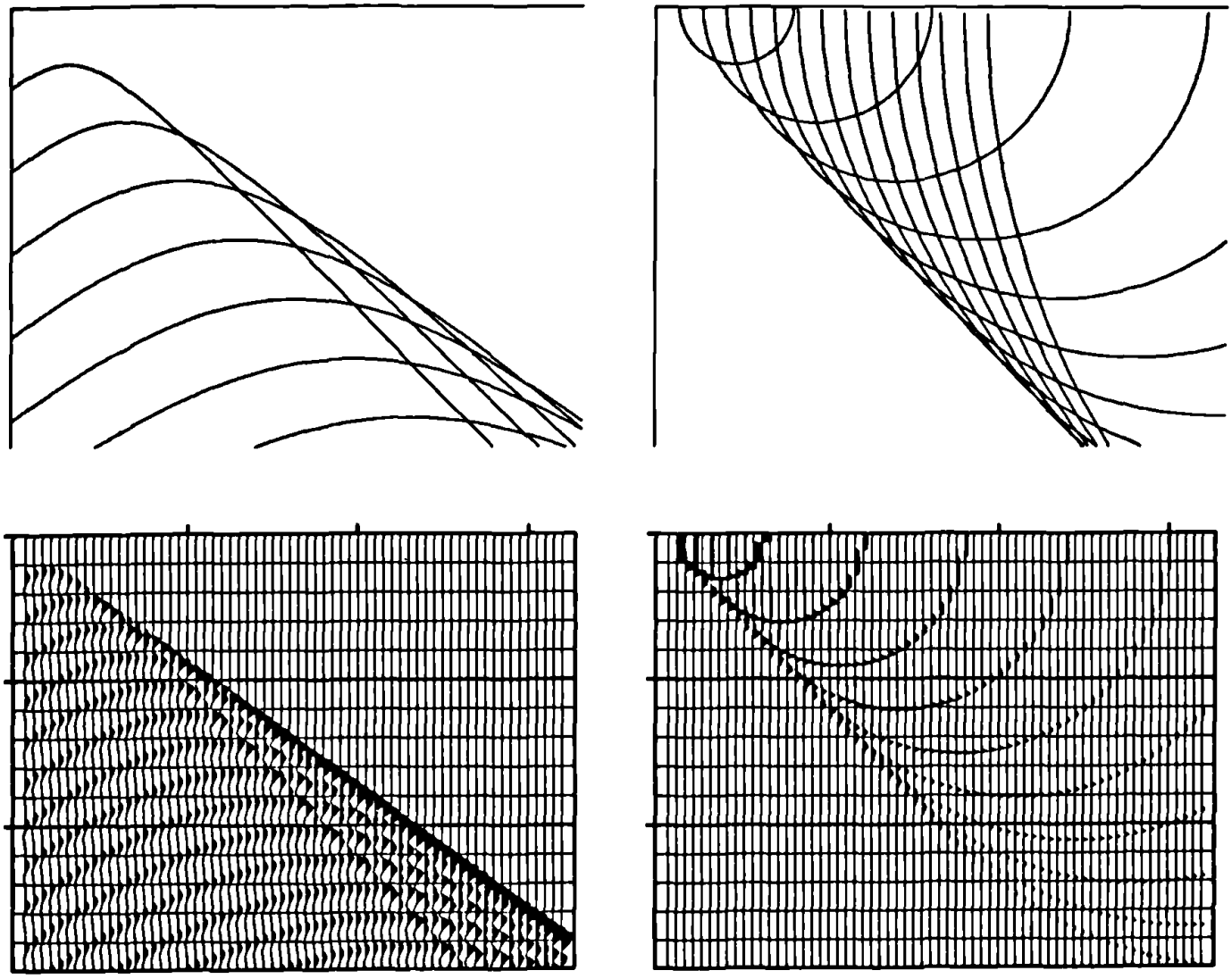


РИС. 8. Суперпозиция точечных источников, расположенных на разных глубинах

очень важно. Но по мнению тех, кто занимается обработкой сейсморазведочных данных, понятие об излучающих отражающих границах имеет серьезный недостаток.

Никому еще не удалось догадаться, как распространить его на наблюдения, регистрируемые при ненулевых удалениях от пункта возбуждения. Преобладающая же часть материалов регистрируется при довольно больших расстояниях от источника.

Так, в морской сейсморазведке используются не единицы, а сотни гидрофонов, размещенных в шланге, который буксируется судном. Расстановка сейсмоприемников обычно имеет длину в 2—3 км. Бурение скважин может производиться на глубину около 3 км. Поэтому встречающиеся в практике работ углы выхода велики. С этим связаны и новые трудности, и новые возможности, причем ни те, ни другие не будут рассматриваться до гл. 3.

Более того, с количественной точки зрения даже при нулевом удалении точки наблюдения от источника концепция излучающей отражающей границы оказывается неправильной. Пока отметим три ее очевидных недостатка. Во-первых, на

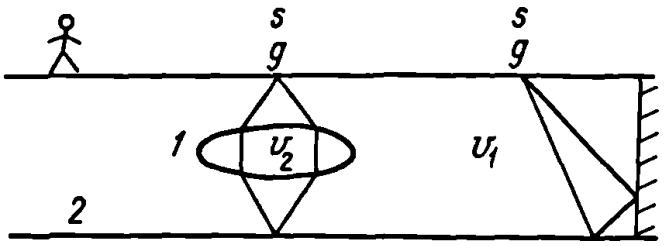



РИС. 9. Два луча, не прогнозируемые моделью излучающих границ:
*1* скоростная линза; *2* отражающая граница

рис. 9 изображены лучи, которые не поддаются предсказанию с помощью модели излучающих отражающих границ. Такие лучи будут присутствовать на разрезах, составленных из трасс, регистрируемых на нулевых удалениях от источника. Для объяснения подобных ситуаций следует предполагать наличие горизонтального градиента скоростей.

Во-вторых, концепция излучающей отражающей границы не срабатывает и в случае кратных отражений. При плоском морском дне, время отражения от которого равно $t_1$, кратные отражения предсказываются на временах $2t_1$, $3t_1$, $4t_1$ и т. д. Согласно геометрическим соотношениям, характерным для модели излучающих границ, первое кратное отражение движется от границы до поверхности наблюдений, затем от поверхности до границы и после — от границы до поверхности, затрачивая на весь путь время $3t_1$. Последующие кратные отражения появляются на временах $5t_1$, $7t_1$ и т. д. Ясно, что кратные отражения, присутствующие на разрезе при нулевых удалениях, отличаются от кратных, характерных для модели излучающих границ.

Третий недостаток модели излучающих отражающих границ проявляется тогда, когда имеется возможность наблюдать волны, падающие на границу с обеих сторон. Согласно модели излучающих отражающих границ, волны, испускаемые обеими сторонами границы, имеют одну и ту же полярность. С физической же точки зрения коэффициенты отражения от противоположных сторон границы должны иметь противоположные полярности.

## Пример изучения развития плитовой тектоники

Согласно теории тектоники плит, океаническое дно сложено тонкими плитами, образующимися в недрах вулканических хребтов, расположенных примерно посредине океана. Эти плиты перемещаются в сторону прогибов, которые располагаются в самых глубоких частях океанов. Самым убедительным подтверждением данной теории является отсутствие древних пород на дне земных океанов. В общем континенты представляют собой массивы более древних пород, на которые надвигаются океанические плиты, сложенные более молодыми горными породами. Образование плит под воздействием вулканических процессов в пределах срединных хребтов можно

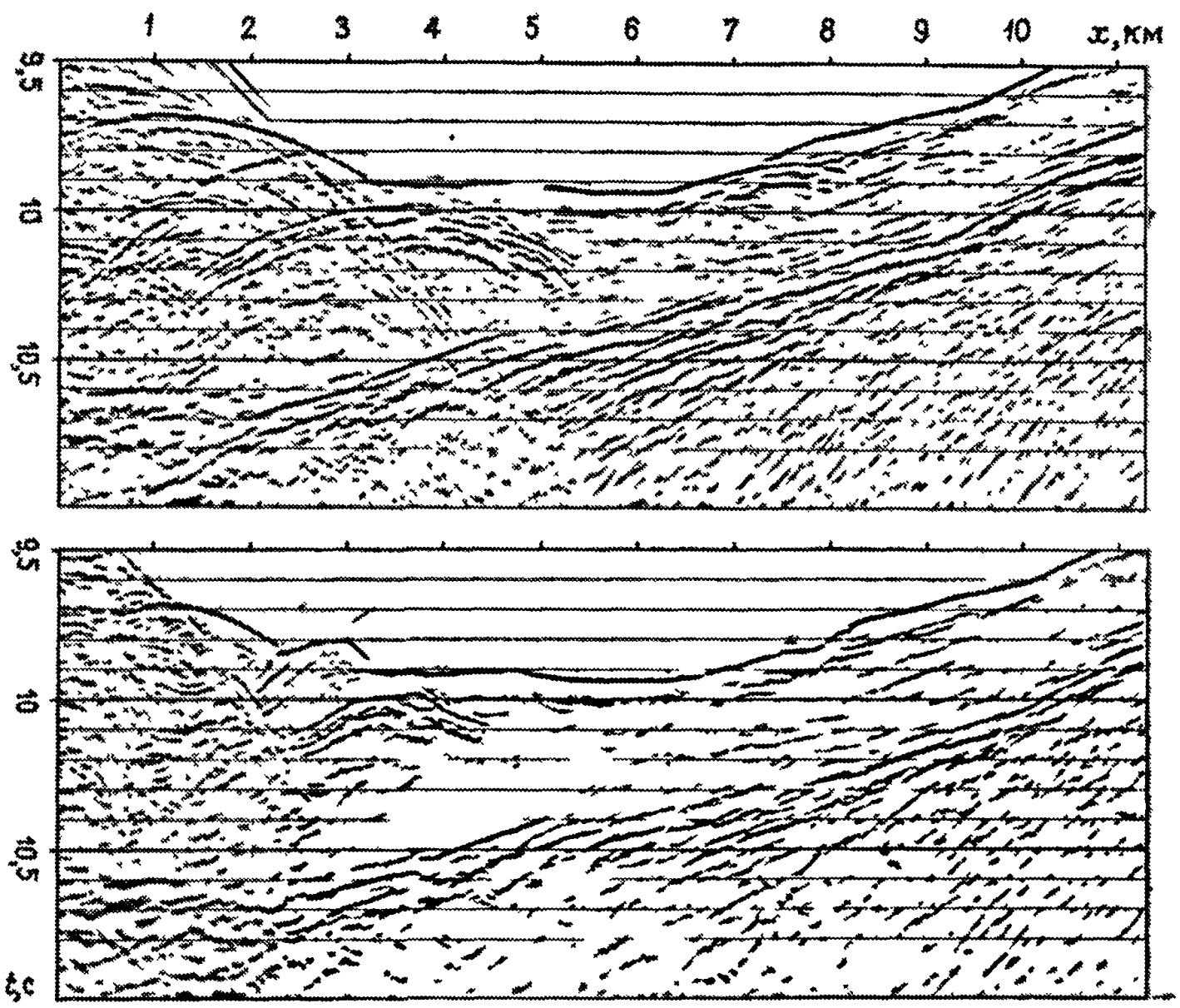



РИС. 10. Сейсмические разрезы, полученные в пределах Японского желоба

наблюдать различными способами. Процесс же погружения плит в желобах не поддается столь же простому наблюдению. Существование этого процесса подтверждается расположением эпицентров землетрясений и данными метода отраженных сейсмических волн. На рис. 10 изображены сейсмические разрезы, полученные в пределах Японского желоба. На них доминируют два отражающих горизонта: дно моря и глубинный слой, падающий справа налево. Последний предположительно связан с верхней частью плиты, которая начинает погружаться. О погружении плиты можно также судить по наличию трещиноватости вблизи ее поверхности. (Самый верхний слой на разрезе сложен рыхлыми молодыми морскими отложениями, которые слабо связаны с самой плитой).

Заметим, что верх рисунка не совпадает с нулевым моментом. По оси времен демонстрируемый интервал разреза соответствует 9,5 11,0 с. До времени 9,5 с отражения отсутствуют, так как за этот промежуток времени волна пробегает расстояние между судном и дном океана. В интервале профиля

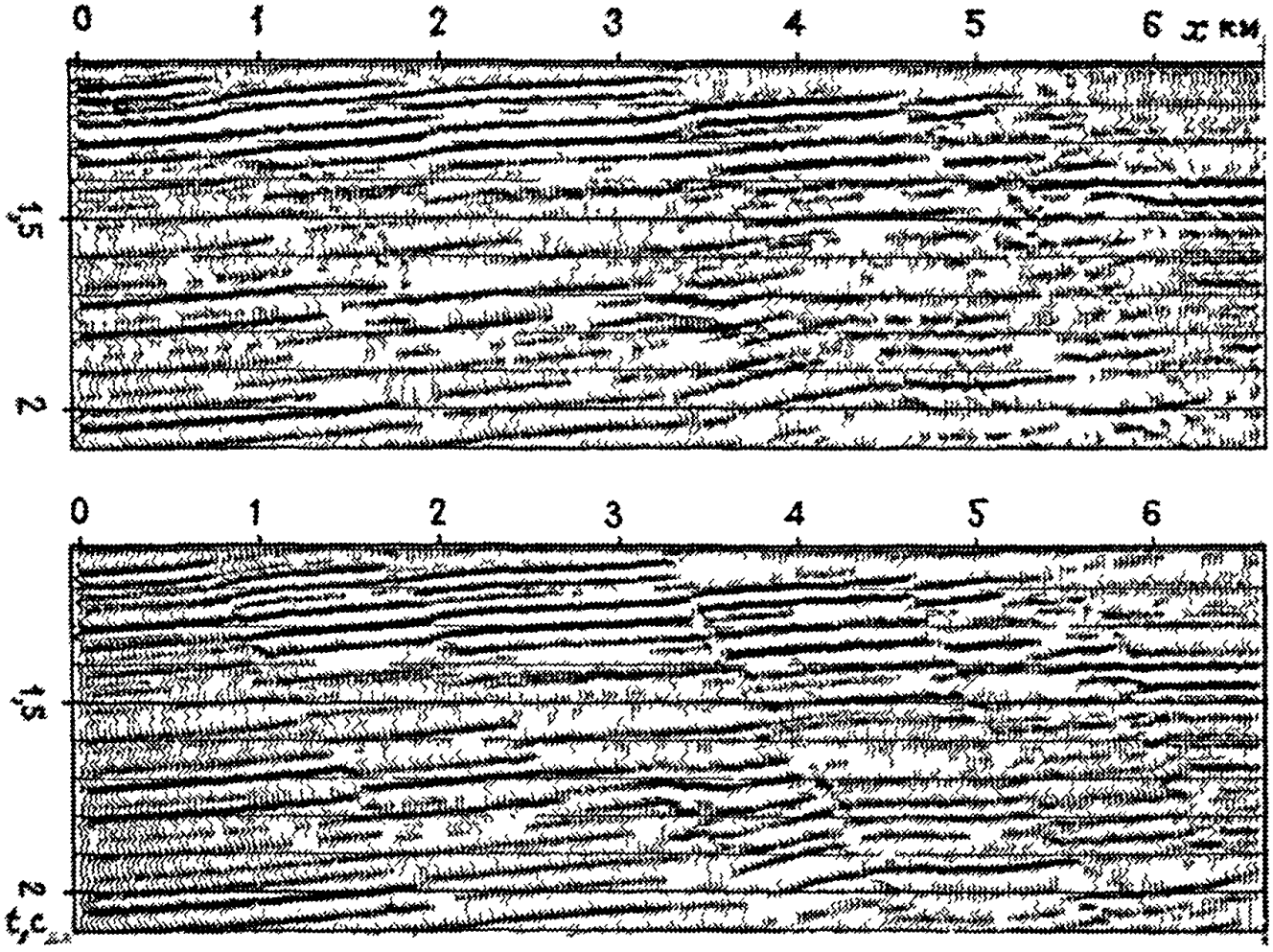



РИС. 11. Сейсмический разрез, полученный в прибрежной части шт. Техас, США

от 1 до 3 км гиперболические годографы отражений в результате миграции стягиваются и образуют интересные «блоковые» структурные формы. Обратите внимание на рельеф морского дна в районе 8 км и на различие между мигрированным и немигрированным разрезами. После миграции гиперболы дифрагированных на морском дне волн уходят в сторону отражений от плит (четвертый километр). Более резко вырисовываются разломы (особенно разлом на 6,2 км). Наконец, судя по представленным данным, не очевидно, что плита изгибается вниз. Решить вопрос об изгибании плиты можно лишь после проведения более детального анализа изменений сейсмической скорости в горизонтальном направлении.

Пример из сейсморазведки на нефть и газ представлен на рис. 11. Сейсмический разрез получен в пределах прибрежной части штата Техас. В тех местах, где реки впадают в Мексиканский залив, осадочные породы прогибаются. Дополнительная нагрузка приводит к резким опусканиям вдоль крутопадающих плоскостей разрывов. После стратиграфической привязки по скважинам слоя проницаемых песчаников можно по разрезам, аналогичным приведенному на рис. 11, протрассировать отражение от этого слоя вверх по восстанию до ближайшего разрывного нарушения. Само разрывное нарушение по всей вероятности непроницаемо и служит экраном для

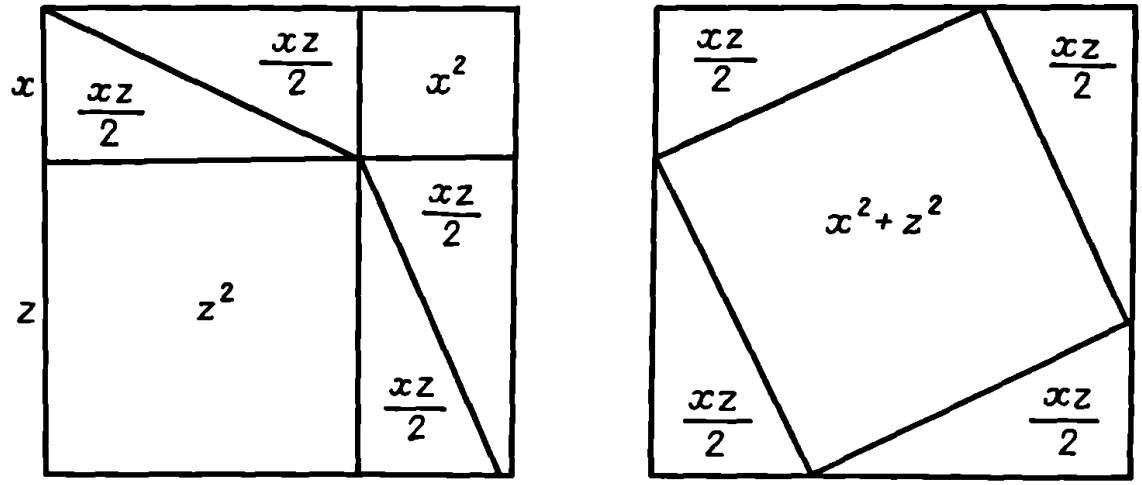



РИС. 12.

перемещающихся вверх по коллектору углеводородов. На таких глубинах песчаник может иметь пористость примерно 25%. Допустим, что скорость сейсмических волн равна 2,2 км/с. Найдите переводной коэффициент между физическим объемом и данными на рис. 11. Сопоставив величину объема нефти с размером того же объема на рис. 11, можно убедиться в важности построения хороших изображений.

**Упражнения**

1. Докажите теорему Пифагора, т. е. то, что длина гипотенузы $vt$ прямоугольного треугольника удовлетворяет соотношению вида $x^2+z^2=v^2t^2$. Примите во внимание следующие геометрические соображения (рис. 12).
2. Найдите углы распространения для крыльев гиперболы, изображенной на рис. 10.
3. Использовав результат, полученный в упр. 2, определите угол погружения плиты.
4. Какова глубина Японского желоба, если принять скорость сейсмических волн в воде равной 1,5 км с.
5. Оценив разрезы, полученные на побережье Мексиканского залива, определите, в какой стороне расположено море. Почему?

## 1.2. Волновая экстраполяция как двухмерный фильтр

Одна из главных идей, заложенных в фурье-анализе, состоит в том, что любую импульсную функцию (дельта-функцию) можно представить в виде суперпозиции синусоид или комплексных экспоненциальных функций. При изучении временных рядов эта идея используется для построения импульсной реакции фильтра. При изучении пространственных функций она исполь-

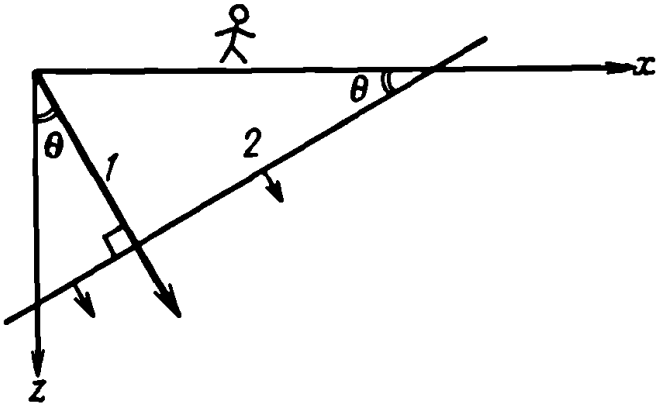



РИС. 13. Падающий луч (*1*) и волновой фронт (*2*)

зуется для создания физического точечного источника.

При совместном рассмотрении временно́й и пространственной координат фурье-компоненты можно интерпретировать как монохроматические плоские волны. В этом случае физическая оптика, а с ней и МОВ расширяют теорию фильтров. В настоящем разделе мы займемся изучением математического вида источников Гюйгенса в пространстве Фурье. В случае пространственной экстраполяции волновых полей они представляют собой двухмерные фильтры.

### Лучи и фронты

На рис. 13 изображен луч, движущийся вниз под углом $\theta$ к вертикали. Перпендикуляр к лучу будет фронтом волны. Исходя из элементарных геометрических соотношений, находим, что угол между фронтом волны и поверхностью земли тоже равен $\theta$. Длина луча увеличивается со скоростью $v$. Наблюдаемая на поверхности земли скорость равна скорости перемещения вдоль этой поверхности точки пересечения с ней фронта волны. Кажущаяся скорость, т. е. величина $v/\sin\theta$, больше $v$. Аналогично, скорость перемещения точки пересечения фронта волны с вертикалью равна $v\cos\theta$. Уравнение прямой, описывающей плоский волновой фронт, на рис. 13 имеет вид

$$z = z_0 - x\,\mathrm{tg}\,\theta. \tag{7}$$

В последнем выражении $z_0$ координата точки пересечения волнового фронта с вертикальной осью. Заменим ее на произведение времени на соответствующую скорость для нахождения места положения точки вниз по вертикали:

$$z = v(t\ \cos\theta) - x\,\mathrm{tg}\,\theta. \tag{8}$$

Решив последнее уравнение относительно временной координаты, получим

$$t(x, z) = (z\ \ v)\cos\theta + (x\ v)\sin\theta. \tag{9}$$

Уравнение (9) определяет момент времени прохождения фронтом волны заданной точки $(x, z)$. Выражение для смещенного импульсоида произвольной формы имеет вид $f(t-t_0)$. Если для определения временного сдвига воспользуемся выражением (9), то получим уравнение волнового поля для некоторого импульсоида, перемещающегося вдоль луча:

$$\text{движущееся волновое поле} = f\left[t - (x\ \ v)\sin\theta - (z\ \ v)\cos\theta\right]. \tag{10}$$

### Волны в пространстве Фурье

Способом суперпозиции синусоид можно формировать функции произвольного вида. Синусоиды и комплексные экспоненциальные функции встречаются часто. Одна из причин послед-

него состоит в том, что они суть решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Большинство физических законов выражается через линейные дифференциальные уравнения в частных производных.

Применив к временным функциям интеграл Фурье, получаем так называемое ядро Фурье вида $\exp(-i\omega t)$. Если положить, что произвольно взятая функция в уравнении (10) является вещественной частью функции вида $\exp[-i\omega(t-t_0)]$, то можно получить, что

$$\text{движущаяся косинусная волна} = \cos\left[\omega\left(\frac{x}{v}\sin\theta + \frac{z}{v}\cos\theta - t\right)\right]. \tag{11}$$

Чтобы иметь возможность пользоваться интегралами Фурье на пространственной оси $x$, необходимо определить пространственную угловую частоту. Поскольку в будущем нам придется иметь дело со многими пространственными осями (три для пункта взрыва, три для сейсмоприемника, а также оси средней точки и удаления от источника), условимся, что символ $k$ будем снабжать нижним индексом, соответствующим оси, по которой совершается преобразование Фурье. Таким образом, через $k_x$ обозначается угловая пространственная частота на оси $x$, а через $\exp(ik_x x)$ ядро преобразования Фурье. Возникает вопрос, с каким знаком следует использовать $i$ на каждой из осей и для каждого из ядер Фурье. Здесь мы будем пользоваться таким знаковым соглашением, которое применяется в большинстве работ по физике, а именно тем, которое согласуется с уравнением (11). Доводы в пользу этого приведены в разделе 1.6. С учетом принятого соглашения положительное направление движения волны совпадает с положительным направлением пространственной оси. Следовательно, в пространстве $(x, z, t)$

$$\text{ядро Фурье} = e^{ik_x x} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} = \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)]. \tag{12}$$

Путем приравнивания уравнения (11) к вещественной части уравнения (12) мы соотносим физические углы и скорости с составляющими Фурье. Эти соотношения следует запомнить!

$$\sin\theta = vk_x/\omega; \qquad \cos\theta = vk_z\ \omega. \tag{13}$$

Подставим определения углов в знакомое нам соотношение: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. В результате получим одно из наиболее важных соотношений, известное как дисперсионное соотношение скалярного волнового уравнения

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2/v^2. \tag{14}$$

Дисперсионные соотношения и скалярное волновое уравнение нам встретятся позже. Значение уравнения (14) заключается в том, что оно позволяет проводить различие между произвольной функцией и некоторой хаотической, которой фактически и выражается волновое поле. Возьмем любую функцию вида $p(t, x, z)$. Найдем ее фурье-преобразование $P(\omega, k_x, k_z)$. Отыщем в объеме $(\omega, k_x, k_z)$ все неисчезающие значения функции $P$. Вы будете иметь дело с волновым полем тогда и только тогда, когда у всех неисчезающих $P$ координаты будут удовлетворять соотношению (14). Более того, на практике зависимость в координатах $(x, t)$ при $z=0$ обычно бывает известна, а зависимость от координаты $z$ неизвестна. В таком случае можно найти зависимость от $z$, предположив, что $P$ — волновое поле. Следовательно, зависимость от $z$ выводится из уравнения (14).

## Миграция улучшает разрешенность по горизонтали

В принципе, миграция преобразует гиперболы в точки. На практике гиперболы не стягиваются в точки, они стягиваются в ф о к у с ы. Фокус имеет конечные размеры, поддающиеся измерению. Результат миграции считается «хорошим», так как он увеличивает пространственную разрешенность. Миграция сжимает длинную гиперболическую ось синфазности в крошечный фокус. Чтобы оценить степень улучшения сейсмических разрезов в результате миграции с количественной стороны, нужно определить размеры гипербол и фокусов. На рис. 14 показаны различные способы измерения размера гиперболы.

Вдоль гиперболы сгруппированы импульсоиды, принадлежащие одной волне. Поэтому ширина полосы по $\omega$ такой гиперболы грубо задается шириной главного экстремума по временной оси. В качестве типичного значения автор назвал бы 50 Гц, хотя вы можете встретить значения раза в четыре больше или меньше. От знания сейсмических скоростей зависит степень разрешенности по глубине. Предлагаю воспользоваться значением скорости, равным 3 км/с, хотя опять же вы можете встретить значения раза в четыре большие и меньшие предложенного автором. Приняв указанные значения, получаем длину сейсмической волны, равную $v/f=60$ м. Но эффективная длина сейсмической волны равна половине фактической. «Половина» объясняется тем, что при расчетах на основе модели излучающих границ значения скорости делятся пополам, или же тем, что длина сейсмической волны делится на равные падающую и восходящую части. Как обычно, разрешающая способность принимается равной приблизительно половине эффективной длины волны, т. е. около 15 м. (Вопрос о том, равна ли сейсмическая разрешающая способность половине эффективной

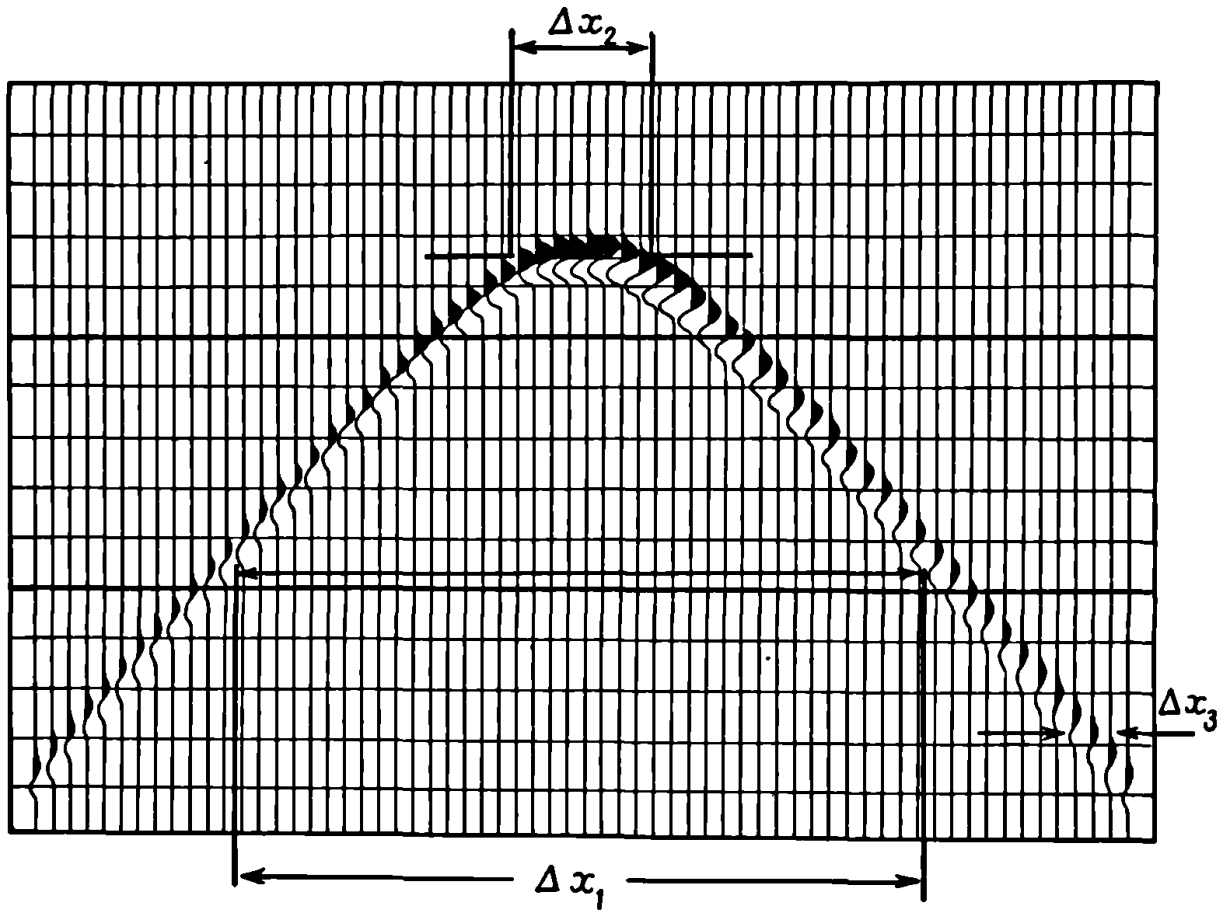



РИС. 14. Измерение параметров гиперболы

длины волны или же меньшей ее доле, решается с учетом отношения сигнал/помеха, а это находится за рамками нашего исследования).

Для определения горизонтальной разрешающей способности нужны оценки ширины гиперболы и фокуса. На рис. 14 изображены три варианта ширины гиперболы. Самое большое значение ширины $\Delta x_1$ содержит в себе около трех четвертей энергии гиперболы. Следующая по величине ширина $\Delta x_2$ называется зоной Френеля. Она соответствует тому моменту времени, когда первое вступление изменяет свою полярность. Третья, наименьшая ширина приходится на удаленные от центральной части ветви гиперболы. Здесь располагаются самые малые из длин волн по горизонтали. Разрешающая способность определяется размером погрешности, но нет особого смысла в том, чтобы точно знать ошибку самой погрешности. Главное то, что $\Delta x_1 > \Delta x_2 > \Delta x_3$. Ширина пространственного спектра $k_x$ приблизительно равна $1/\Delta x_3$. Насколько малым может оказаться фокус в результате миграции? Ограничения накладываются фактической шириной спектра $k_x$. Размер фокуса будет почти таким же, как $\Delta x_3$.

На рис. 15 изображены геометрические соотношения для зоны Френеля. Зона Френеля представляет собой место пересечения сферической волны с плоскостью. Само пересечение определяется тогда, когда сферическая волна проходит через плоскость на глубину, равную половине своей длины. В чем

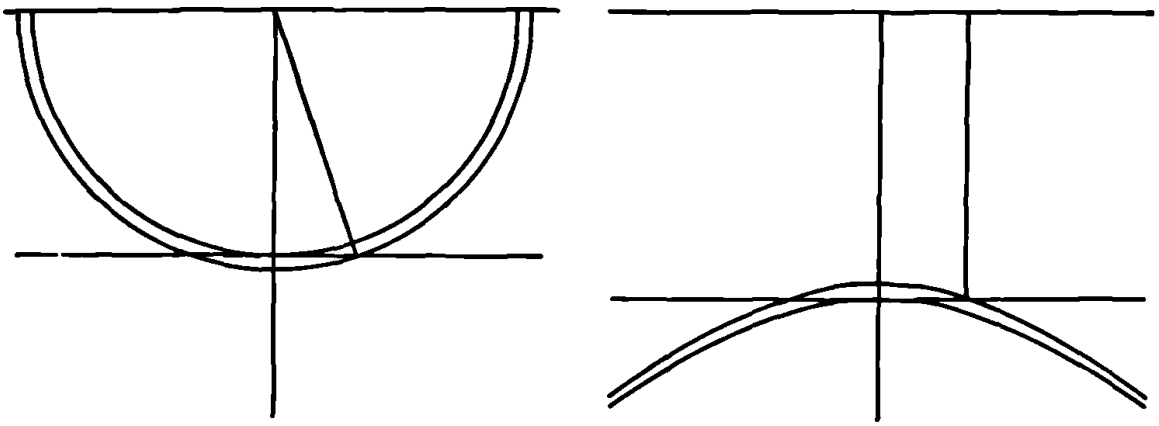


РИС. 15. Геометрические соотношения зоны Френеля

смысл ширины зоны Френеля $\Delta x_2$? Представьте, что вы стоите перед стеной с отверстием и обращаетесь к другу, находящемуся за стеной. Каким образом громкость звука будет зависеть от размера отверстия $\Delta x$? Ответ не очевиден, но из теории и практики хорошо известно, что отверстия, размер которых больше зоны Френеля, вносят небольшое затухание, если же они меньше нее, то препятствуют прохождению звука пропорционально своим размерам.

Процесс распространения волны представляет собой фильтр свертки, который смешивает информацию, содержащуюся на интервале $\Delta x_2$ вдоль отражающей границы (или же на интервале $\Delta x_1$ разреза), и переносит ее к точке наблюдения на поверхности земли. Процесс миграции обратен процессу распространения волн и поэтому представляет собой операцию деконволюции. Максимальная степень разрешенности по горизонтали ограничивается шириной полосы пространственных частот наблюденных данных.

Миграцию можно применять и в тех случаях, когда отражающие границы залегают горизонтально. Если нужно выбрать точку заложения глубокой скважины с погрешностью, не превышающей $\Delta x_2$, то интерпретатору приходится изучать малейшие изменения амплитуды и формы записи вдоль отражающей границы. В результате миграции эти вариации амплитуды и формы записи претерпевают изменения и смещаются вдоль отражающих границ. Перемещения по горизонтальной координате приблизительно равны ширине зоны Френеля.

Основополагающим фактом сейсморазведки является ограничение разрешающей способности, обусловленное возрастанием сейсмической скорости и уменьшением частоты с глубиной. Это происходит по той причине, что по мере проникновения волн в глубь среды их пространственные длины растут. Что касается разрешенности по вертикали, то здесь все просто чем длиннее волны, тем ниже разрешающая способность. То же самое происходит и в случае разрешающей

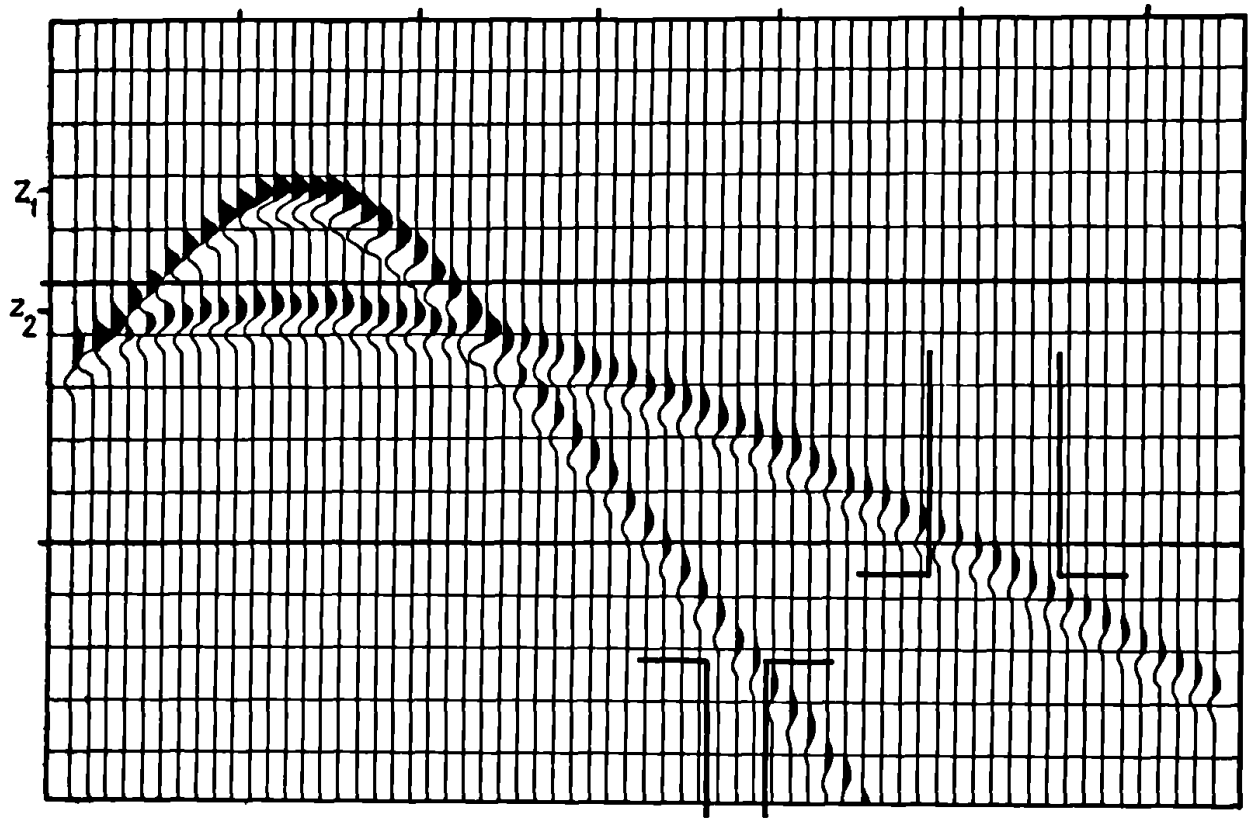



РИС. 16. Годографы волн, рассеянных на неоднородностях

способности по горизонтали. Сказанное поясняется рис. 16. На нем изображены гиперболические годографы волн, рассеянных на неоднородностях, залегающих на различных глубинах. У гиперболы, соответствующей неглубоко залегающему рассеивателю, вершины регистрируются раньше, а асимптоты более крутые. Асимптоты с меньшей крутизной характеризуются большими длинами волн по горизонтали. Таким образом, с глубиной латеральная разрешенность ухудшается. Названная выше причина уменьшения разрешающей способности усугубляется поглощением высокочастотной энергии на больших временах.

## Двухмерное преобразование Фурье

Прежде чем перейти к следующей теме, напомним основные моменты, касающиеся двухмерного преобразования Фурье. В вычислительной машине двухмерную функцию представляют в виде численной матрицы. Одномерное фурье-преобразование с помощью ЭВМ представляет собой операцию над вектором. Двухмерное преобразование Фурье можно получить как результат выполнения некоторой последовательности одномерных фурье-преобразований. В первую очередь можно преобразовывать каждый вектор-столбец матрицы, а затем — каждую вектор-строку. И наоборот, можно сначала преобразовывать строки, а затем столбцы. Сказанное можно изобразить графически следующим образом (рис. 17):

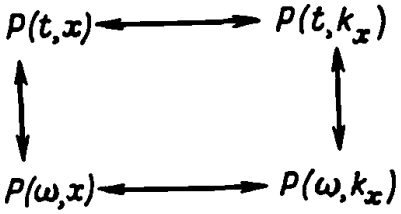



РИС. 17.

Трудности, возникающие с изображением символов, объясняются тем, что оказывается невозможным придерживаться обычного обозначения физических величин строчными буквами, а их преобразований Фурье прописными, так как в этом случае неясно, как обозначать смешанные величины типа $P(t, k_x)$ и $P(\omega, x)$. Вместо того, чтобы изобретать новые обозначения, мне кажется, лучше предоставить читателю возможность решать данную проблему с помощью контекста. Аргументы функции должны помогать в поиске ее названия.

На рис. 18 показан пример использования упомянутых выше преобразований на материалах, полученных в типичных условиях глубоководного бассейна. В условиях глубоководного океана образуются тонкозернистые осадки, медленно отлагающиеся в виде ровных регулярных горизонтальных слоев. Отсутствие хорошо проницаемых пород типа песчаников сильно уменьшает перспективы промышленной нефтегазоносности акваторий глубоководных морей. Тонкозернистые глинистые сланцы перекрывают неровную поверхность изверженных пород, слагающих фундамент. На графике функции $P(t, k_x)$ латеральная непрерывность отложений подтверждается наличием сильного спектра при низких значениях $k_x$. Изверженные породы дают спектр, простирающийся до столь больших $k_x$, что возникает опасность искажения глубоких отражений из-за недостаточно плотной пространственной дискретизации (когда точки наблюдения располагаются слишком далеко одна от другой). График $P(\omega, x)$ показывает, что в наблюденных данных не содержится низкочастотная энергия. При больших $\omega$ энергия затухает не настолько быстро, как этого следовало бы ожидать, что указывает на искажения временных частот за счет недостаточно частой дискретизации. Подобные искажения видны и на графике $p(t, x)$, причем они выражаются на сейсмическом разрезе в виде ступенчатых отражений от морского дна. Наклон морского дна проявляется на графике $(\omega, k_x)$ в виде энергии, пересекающей начало координат под углом.

Двухмерное преобразование Фурье группы сейсмограмм занимает всего в 2 раза больше вычислительного времени, чем одномерное фурье-преобразование каждой из сейсмограмм в отдельности. Это можно считать удачей. Выпишем несколько уравнений, чтобы убедиться, что указанная процедура действительно выполняет двухмерное преобразование Фурье. Положим сначала, что любую функцию от $x$ и $t$ можно представить в виде суперпозиции синусоидальных:

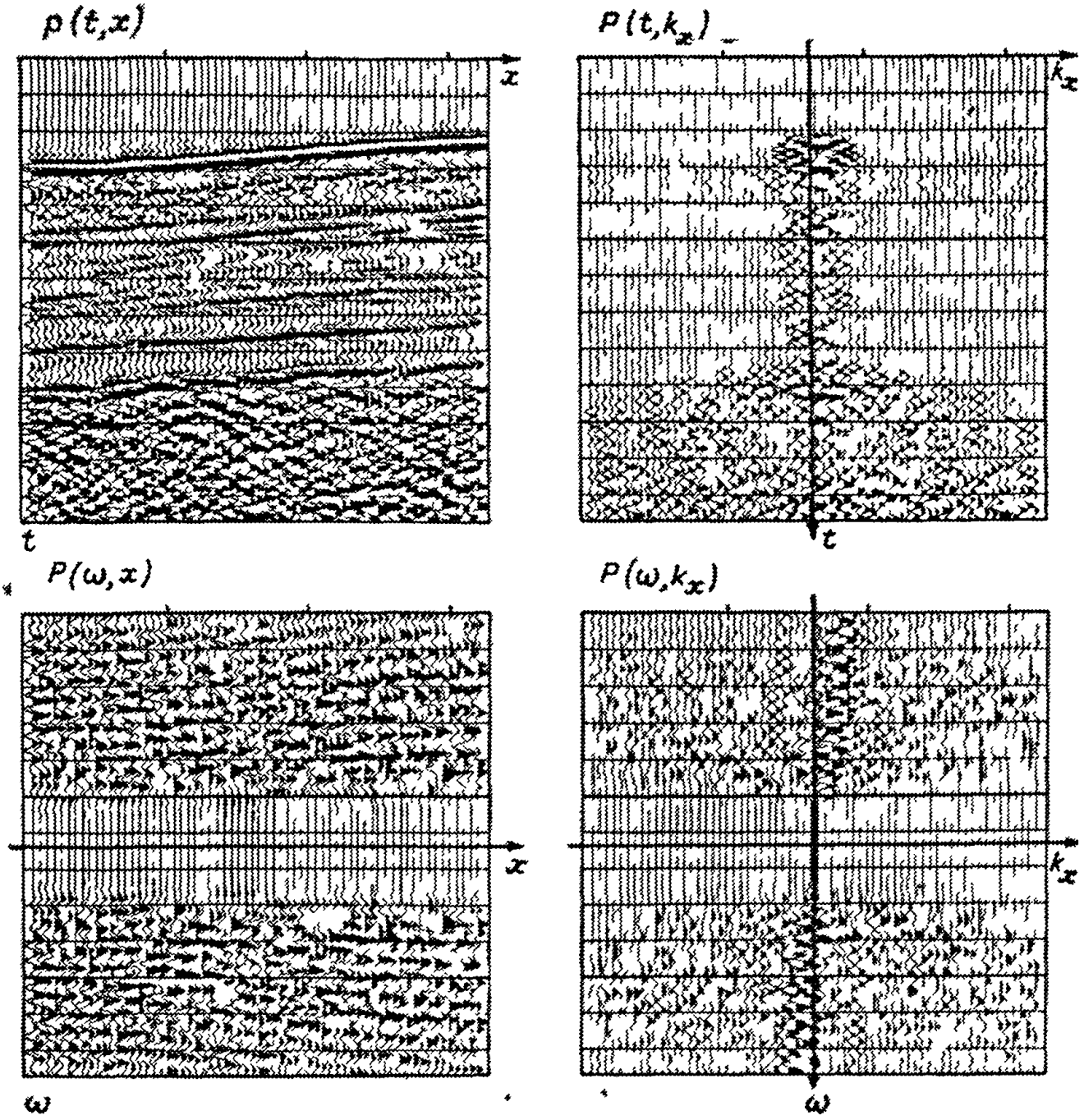



РИС. 18. Сейсморазведочные данные, полученные в условиях глубоководья $p(t, x)$ и вещественная часть различных их фурье-преобразований

$$p(t, x)=\iint e^{-i\omega t+ik_x x}P(\omega, k_x)d\omega dk_x. \qquad (15)$$

(Используемое при преобразованиях Фурье соглашение о знаках разъяснено в разделе 1.6). Ядро приведенного выше обратного преобразования Фурье имеет вид волны, движущейся в положительном направлении оси $x$. При прямом фурье-преобразовании знаки обеих экспоненциальных функций изменяются, но ядро преобразования представляет собой волну, движущуюся в положительном направлении. Весовой коэффициент и бесконечные пределы опущены просто ради удобства. Двойной интеграл можно записать так, чтобы подчеркнуть, что сначала выполняются временные (внутренние) преобразования:

$$p(t, x)=\int e^{ik_x x}\left[\int e^{-i\omega t}P(\omega, k_x)\,d\omega\right]dk_x=\int e^{ik_x x}P(t, k_x)\,dk_x.$$

В квадратных скобках стоит фурье-преобразование по ω, выполняемое для каждого значения $k_x$. С другой стороны, можно записать такой вложенный интеграл, у которого внутри будет интеграл по $k_x$. Это означает, что сначала преобразуются строки, а не столбцы (и наоборот). Вычисления получаются простыми и недорогостоящими именно из-за возможности разделения функции $\exp(-i\omega t + ik_x x)$ на произведение показательных.

**Соотношение между входом и выходом**

Основу процесса миграции составляет операция продолжения наблюденных данных в нижнее полупространство. Располагая входными данными, полученными на плоской земной поверхности при $z=0$, нужно сформировать такие наблюдения, которые должны были бы регистрироваться на глубине $z$. Такая операция совершается наиболее просто в фурье-области. Позже мы убедимся, что продолжение поля в нижнее полупространство заключается просто в умножении на комплексную показательную функцию:

$$P(\omega, k_x, z) = P(\omega, k_x, 0)\exp\left[ik_z(\omega, k_x)z\right]. \qquad (16)$$

Поскольку данная операция является умножением в фурье-представлении, ее можно изобразить в виде электротехнической диаграммы (рис. 19):

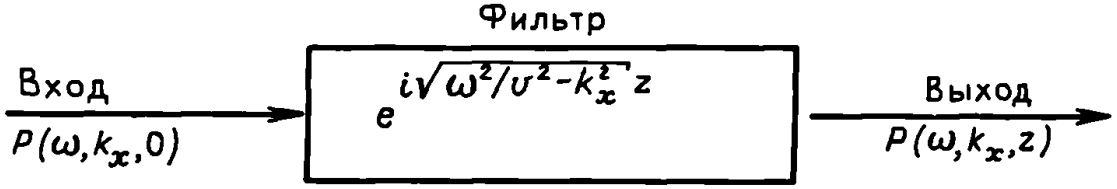



РИС. 19.

Продолжение в нижнее полупространство представляет собой произведение как в ω-, так и в $k_x$-представлениях. Как выглядят фильтры во временном и пространственном представлениях? Они оказываются похожими на конус, или же на импульсную функцию вида $x^2+z^2-v^2t^2$. Точнее они представляют собой источник вторичных волн Гюйгенса, примером которого могут служить океанические волны, проходящие через разрыв в волнорезе. Сложение множества откликов в волнорезе аналогично свертке по $x$. Суперпозиция множества набегающих океанических волн аналогична свертке по $t$.

Теперь покажем, почему фильтр продолжения в нижнее полупространство выражается математически именно в таком виде. Каждая точка на плоскости с координатами $(\omega, k_x)$ соответствует синусоидальной плоской волне. Изменение с глубиной будет также синусоидальным, а именно, вида $\exp(ik_z z)$. Значение $k_z$ для плоской волны можно найти, просто решив уравнение (14):

$$k_z = \pm(\omega^2/v^2 - k_x^2)^{1\,2}, \qquad (17а)$$

$$k_z = \pm\frac{\omega}{v}(1 - v^2k_x^2/\omega^2)^{1/2}, \qquad (17б)$$

$$k_z = \pm(\omega/v)\cos\theta. \qquad (17в)$$

Если взять знак плюс, то $\exp(-i\omega t + ik_z z)$ будет падающей волной, так как если $z$ растет с ростом $t$, то фаза остается постоянной. Если же взять знак минус, то волна становится восходящей. В модели излучающих отражающих границ используются восходящие волны, поэтому почти всегда используется знак минус как при миграции, так и при моделировании.

Фильтр вида $e^{i\Phi}$, помещенный между входом и выходом, оказывается фазосдвигающим, не влияющим на амплитуду. Он хорошо вписывается в наши представления о деконволюции. Это значит, что при выполнении миграции влияние отношения сигнал/помеха не будет играть столь важную роль, как при обычной фильтрации.

**Упражнения**

1. Предположим, что вы наблюдаете поперечные волны на обычных сейсмических частотах. Будет ли в этом случае пространственная разрешенность лучше, такой же или хуже, чем обычно? Почему?

2. Найдите в учебнике гиперболические оси синфазности на полевых материалах и измерьте по ним ширину зоны Френеля. При отсутствии записей на нулевом удалении от источника хорошие результаты получаются при измерении $\Delta x_2$ по наклонной линии.

3. Объясните наблюдаемую горизонтальную «слоистость» на рис. 18 на графике $P(\omega, x)$. От чего зависит разделение слоев? Что определяет наклон «слоя»?

4. Эволюция волнового поля во времени описывается уравнением

$$p(x, z, t) = \iint [P(k_x, k_z, t=0)\, e^{-i\omega(k_x, k_z)t}]\, e^{ik_x x + ik_z z}\, dk_x dk_z.$$

Пусть $P(k_x, k_z, 0)$ постоянная величина, что обозначает точечный источник, расположенный в начале координат на плоскости $(x, z)$. Пусть $t$ очень велико, т. е. фаза $\Phi = [-\omega(k_x, k_z) + k_x(x\ t) + k_z(z\ t)]\, t$ при интегрировании часто изменяется на обратную при изменении $k_x$ и $k_z$. Предположим, что единственный значимый вклад в величину интеграла вносится только при стационарной фазе, т. е., когда и $\partial\Phi\ \partial k_x$ и $\partial\Phi\ \partial k_z$ обращаются в нуль. Где будет находиться волна в пространстве с координатами $(x, z, t)$?

5. Продолжение некоторой волны в нижнее полупространство описывается уравнением вида

$$p(x, z, t) = \iint [P(k_x, z=0, \omega)\, e^{ik_z(\omega, k_x)z}]\, e^{-i\omega t + ik_x x}\, d\omega dk_x.$$

Пусть $P(k_x, 0, \omega)$ постоянная величина, т. е. точечный источник находится в начале координат на плоскости $(x, t)$. Где будет находиться волна в пространстве $(x, z, t)$?

## 1.3. Четыре метода миграции при больших удалениях

Все четыре метода миграции данных МОВ, рассматриваемые в настоящем разделе, находят широкое практическое приме-

нение. Взятые в целом, они легко преобразовывают лучи, отраженные под большими углами, но оказываются менее эффективными при наличии вариаций сейсмических скоростей по горизонтали.

### Глубина, выраженная во времени пробега

Результатом действия любой программы миграции является какая-то картина на плоскости ($x$, $z$). На практике по вертикальной оси почти никогда не откладывают координату глубины $z$, в подавляющем большинстве случаев это ось времени пробега по вертикали $\tau$. В среде с постоянной скоростью координаты времени и глубины связаны простым переводным коэффициентом. Он появляется по той причине, что по сравнению с плоскостью ($x$, $z$) плоскость ($x$, $\tau$) характеризуется завышенным масштабом по вертикали. При проведении рекогносцировочных работ масштаб по вертикали часто оказывается завышенным приблизительно в 5 раз. К тому времени, когда участки работ становятся изученными в степени, достаточной для выбора точки заложения поисковой скважины, коэффициент искажения масштаба по вертикальной оси приближается к единице, т. е. разрезы строятся без искажения по осям.

Время пробега $\tau$ обычно состоит из времен пробега падающей и восходящей волн. Разрезы при нулевом удалении ПВ—ПП обычно интерпретируются как волновые поля излучающих границ. Чтобы выдержать указанное соответствие, при волновом анализе значения скорости в породах делят пополам:

$$\tau = 2z/v_{\text{ист}} = z/v_{\text{пол}}. \qquad (18)$$

Первая задача интерпретации сейсморазведочных данных состоит в расчете приближенного численного значения указанного искажения вертикальной оси. Его, скорее всего, не будет в заголовке сейсмограммы, так как в действительности сейсмическая скорость не бывает известна. Более того, скорость обычно возрастает с глубиной, что ведет к изменению масштаба по вертикальной оси. Формула пересчета времени в глубину для случая сред со слоистым распределением скоростей имеет вид

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{dz}{v(z)} \quad \text{или} \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{v}. \qquad (19)$$

### Способы суммирования по гиперболе и суперпозиции по полуокружности

Указанные в заголовке способы миграции являются наиболее известными из всех. Возьмем уравнение конического сечения, т. е. окружности в плоскости ($x$, $z$) или гиперболы в плоскости ($x$, $t$). Перейдя к координате глубины, выраженной

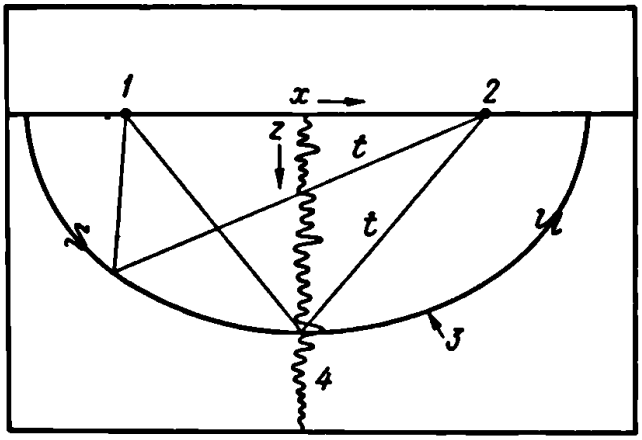



РИС. 20. Иллюстрация способа суперпозиции по полуокружности:
*1* источник; *2* приемник; *3* геометрическое место равных времен пробега; *4* входная трасса

во времени пробега, или, для краткости, к координате псевдоглубины τ, получаем:

$$x^2+z^2=v^2t^2, \tag{20а}$$

$$x^2/v^2+\tau^2=t^2. \tag{20б}$$

На рис. 20 поясняется способ суперпозиции по полуокружности (рисунок заимствован из классической статьи В. Шнайдера [123]). Предположив, что в полевых наблюдениях содержатся несколько импульсных функций, получаем, что выходной сигнал должен представлять собой суперпозицию соответствующих полуокружностей. Каждая из полуокружностей является моделью среды, представленной сферической отражающей границей, которой соответствует некоторое множество данных с одиночным импульсом. В случае, если поле данных состоит из тысячи сейсмотрасс, каждая из которых содержит тысячу отсчетов, выходной сигнал будет представлять собой суперпозицию миллиона полуокружностей. Поскольку сейсмотрасса содержит и положительные и отрицательные экстремумы, получается, что приблизительно половина полуокружностей будет наложена с обратной полярностью. Результат суперпозиции может быть похож на что угодно. В самом деле, полуокружности могут взаимно уничтожиться везде, за исключением одного единственного импульса на плоскости $(x, \tau)$. Если такое случится, вы имеете полное право считать, что входной сейсмический разрез на плоскости $(x, t)$ является вторичным источником Гюйгенса, т. е. энергией, сконцентрированной вдоль некоторой гиперболы. Последнее приводит к методу суммирования по гиперболам.

Возвращаясь к рис. 20, заметим, что миграционное преобразование можно описывать многими путями. Два из них, весьма простые и в равной мере справедливые, представлены на рис. 20 и 21. На рис. 20 процесс миграции разъясняется путем показа того, что случается с единственной входной трассой, изображенной посредине между источником и приемником в виде функции глубины (возможно использование и времени). Каждое значение данной трассы отображается в деталь среды путем суммиро-

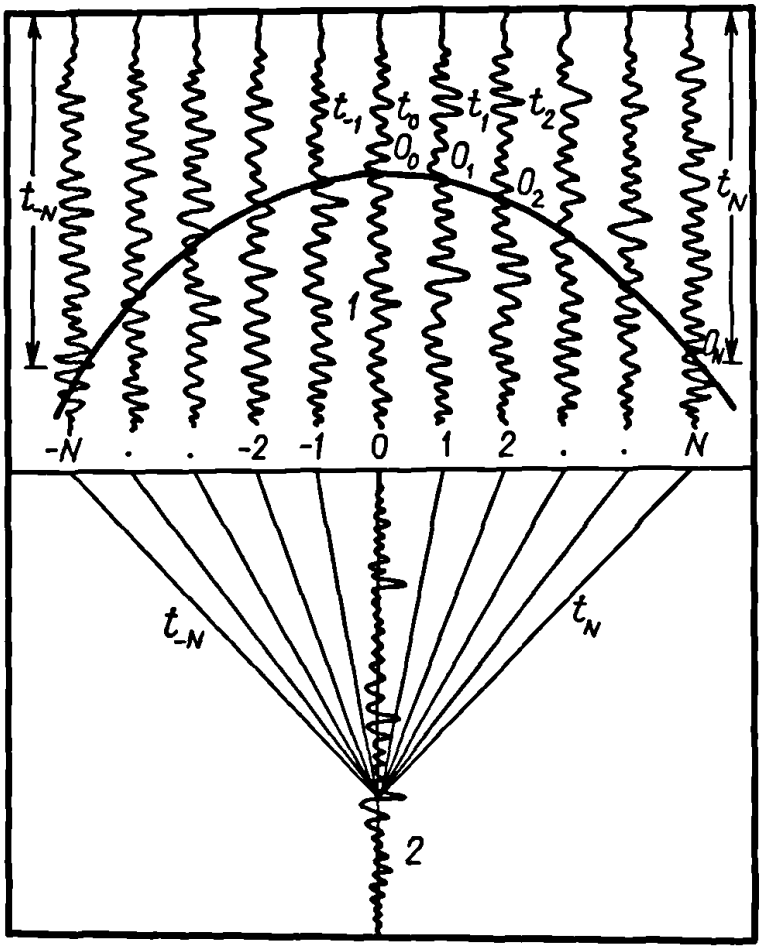



РИС. 21. Миграционное преобразование путем суммирования по гиперболам:
*1* входные трассы; *2* — выходная трасса

вания по кривой, являющейся геометрическим местом точек, для которых время пробега от источника до точки отражения и обратно к приемнику есть величина постоянная. В случае постоянства скорости подобные кривые являются эллипсами, фокусы которых расположены в источнике и приемнике. Получаемая в результате картина соответствует просто фронту волны, модулированному амплитудной характеристикой сейсмотрассы. Ясно, что само по себе подобное изображение бесполезно, но когда оно совмещается с полученными по соседним трассам (и трассам ОГТ при различных удалениях от источника), то в результате конструктивной и деструктивной интерференций между фронтами волн, в соответствии с классическими идеями Гюйгенса возникают полезные изображения глубинного геологического разреза. Например, фронты волн соседних трасс пересекутся на узле дифракции и в результате синфазного сложения возникнет образ дифрагирующего элемента среды в виде разрастания амплитуды, разрешенность которой на плоскости $(z, x)$ определяется шириной импульса и горизонтальными размерами приемной расстановки, зарегистрировавшей сложенные сейсмотрассы. В то же время, если модель среды представлена отражающей поверхностью, то фронты волн на соседних трассах будут касательны к этой поверхности и дадут в результате конструктивной интерференции перекрывающихся частей соседствующих волновых фронтов образ отражающей границы. В тех местах, где исследуемая среда не содержит отражающих или рассеивающих

тел, в результате сложения по случайному закону фронты волны стремятся к взаимному уничтожению.

Способ миграционного преобразования путем суммирования по гиперболам изображен на рис. 21. Идея способа заключается в последовательном построении одной точки в пространстве ($x$, $\tau$). Этим данный способ отличается от способа полуокружностей, когда каждая из точек на плоскости ($x$, $\tau$) строится по частям, по мере того, как полуокружности накладываются друг на друга. Чтобы построить одну фиксированную точку в выходном пространстве ($x$, $\tau$), вообразим, что гипербола, описываемая уравнением (20б), помещена своей вершиной в соответствующую точку плоскости ($x$, $t$) . Все значения трасс, попадающие на гиперболическую кривую, складываются и в итоге получается некоторое выходное значение в соответствующем месте на плоскости ($x$, $\tau$). Описанным способом заполняются все остальные точки плоскости ($x$, $\tau$). Можно задать вопрос, равнозначны ли упомянутые способы миграции или же какой-то из них лучше.

На рис. 21 иллюстрируется способ миграционного преобразования сейсмических материалов путем суммирования по гиперболе. Выходная трасса получается по ансамблю входных, причем последние изображены в виде сейсмограмм ОГТ в верхней части рисунка. На нижней половине рисунка показано, что каждое значение амплитуды выходной трассы на плоскости ($x$, $z$) получается путем суммирования входных амплитуд, попавших на гиперболу, соответствующую годографу дифрагированной волны. Если в среде в указанной выходной точке находится центр дифракции, то получится большая амплитуда. Описанный процесс срабатывает и в случае отражающих границ в разрезе, так как отражающую границу можно рассматривать в качестве непрерывного ряда дифрагирующих элементов, самостоятельные изображения которых сливаются в гладкую непрерывную границу.

Занятием, противоположным обработке данных или построению по ним моделей глубинного строения среды, является расчет синтетических сейсмограмм по заданным моделям. После небольших видоизменений указанные выше две обрабатывающие программы можно превратить в программы моделирования. Дело сводится к тому, что вместо суммирования по гиперболам или суперпозиции по полуокружностям выполняется суперпозиция по гиперболам или суммирование по полуокружностям.

Можно также задаться вопросом, действительно ли программы обработки обратны программам моделирования. Следует рассмотреть несколько факторов, среди которых можно назвать такие, как зависимость амплитуды импульсоида Гюйгенса от угла выхода волны, или падения ее на границу,

сферическое расхождение энергии, фазовый сдвиг импульсоида Гюйгенса. Оказывается, что результаты миграции получаются достаточно хорошими, даже если пренебречь указанными выше осложняющими факторами.

По мере разработки новых способов миграции становились более понятными недостатки прежних методов, которые оказались вполне поддающимися исправлению путем тщательного выполнения самого преобразования. Одним из преимуществ более поздних способов миграции является то, что в них воплощены по-настоящему широкополосные фильтры. Поэтому в результате применения таких способов миграции сохраняется неизменным общий вид самих наблюдений. Это обстоятельство указывает на возможность восстановления высоких частот, которые подавляются при интегрировании по гиперболическим законам. Работы Трори [145] и Хилтермана [76] с использованием интеграла Кирхгофа привели к созданию совершенных программ решения прямой сейсмической задачи. В конечном счете эти работы дали количественный способ согласования методов миграции путем суммирования по гиперболам с другими методами, по меньшей мере для случая однородной среды [124]. В соответствии с современным лексиконом любой способ миграции, основанный на суммировании по гиперболическим законам или по полуокружностям, называется сейчас методом Кирхгофа, хотя, строго говоря, интеграл Кирхгофа применим только в условиях однородной среды.

### Искажения, возникающие при пространственной дискретизации

Искажения при пространственной дискретизации возникают при недостаточной частоте выборки данных вдоль пространственной оси. Это затруднение носит столь общий характер, что его следует учитывать во всех способах миграционного преобразования.

Наблюдения нужно дискретизировать с таким расчетом, чтобы на длине волны находилось более двух отсчетов. В противном случае становится неоднозначным определение направления подхода волны. На рис. 22 изображены синтезированные сейсмограммы, дискретизированные по оси $x$ с недостаточной плотностью. Легко убедиться, что искажения, связанные с дискретизацией, особенно заметны на высоких частотах и при крутых наклонах осей синфазности.

Не существует общепризнанного автоматизированного способа миграции данных, искаженных в результате недостаточно плотной их дискретизации по пространственной координате. В подобных ситуациях человек выполняет миграционное преобразование намного лучше, чем любая машина, так как опыт

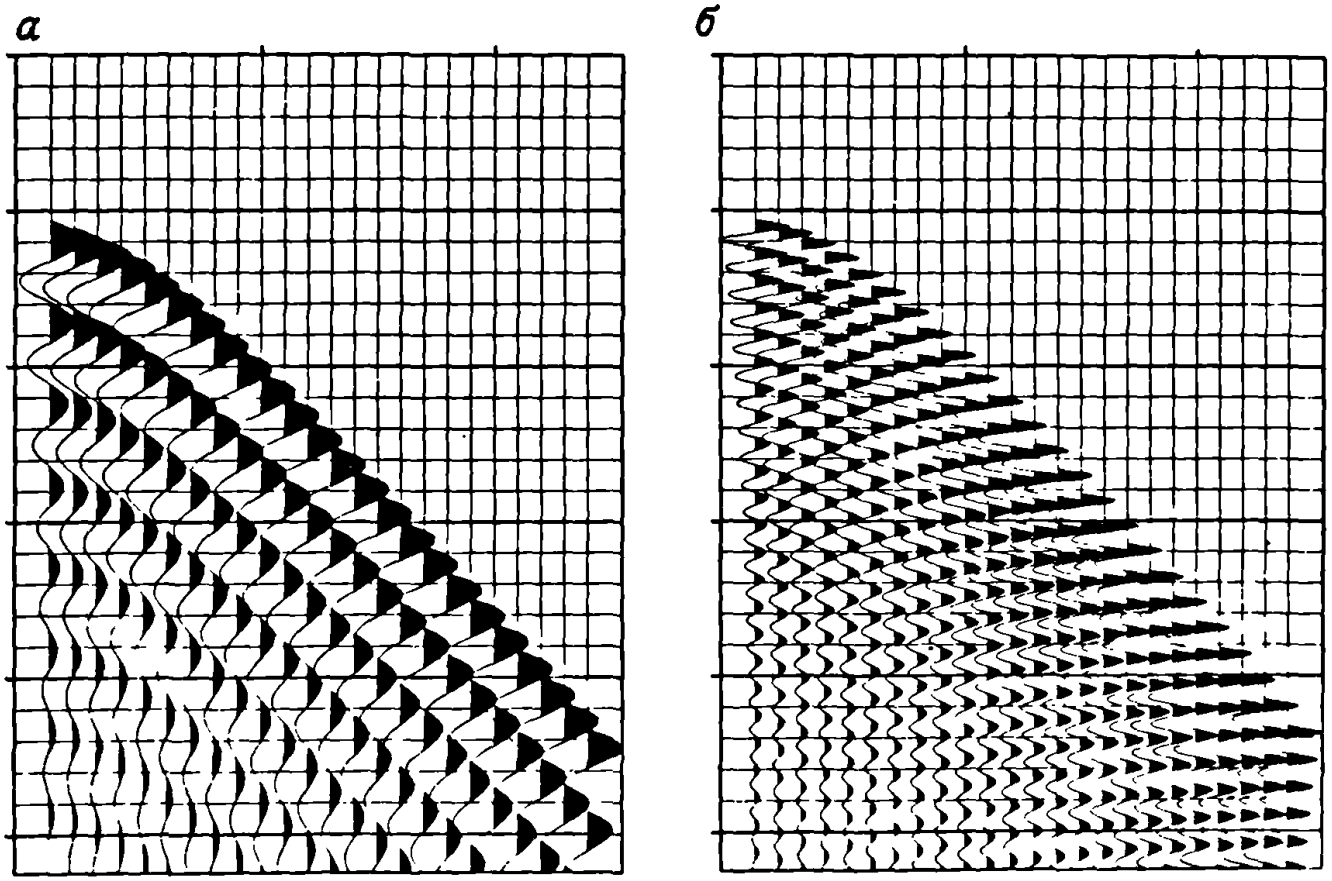



РИС. 22. Пример недостаточно плотной пространственной дискретизации: *а* и *б* соответственно низко- и высокочастотные дискретизации

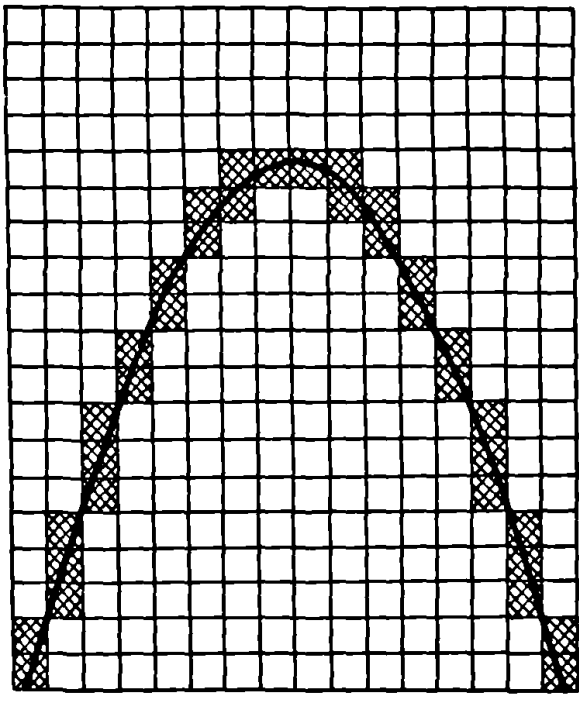


РИС. 23. При интегрировании низкоскоростных гипербол требуется более одного отсчета на канал

позволяет ему находить истинные направления осей синфазности. Если же исходные материалы дискретизированы надлежащим образом, то машинная миграция, основанная на волновом уравнении, дает результаты, лучшие по сравнению с ручными методами. В настоящее время, как правило, обеспечивается необходимая плотность наблюдений по сейсмическим профилям и трудности возникают лишь при дискретизации в перпендикулярных к ним направлениях.

При использовании миграционных преобразований, основанных на суммировании по гиперболам, возникает опасность того, что сам оператор миграции может оказаться под-

верженным искажениям, вызванным недостаточно плотной дискретизацией. Указанную опасность следует избегать путем тщательного проведения самой миграции. Первое, что следует уяснить, заключается в том, что интегрирование должно производиться по гиперболической траектории. Простое сложение единичных отсчетов с каждой трассы является весьма плохим приближением к нормальному процессу миграционного преобразования. Лучше включать в сумму большее число отсчетов (рис. 23). Вероятность того, что оператор окажется искаженным недостаточно плотной дискретизацией по пространственной оси, возрастает на тех участках годографа, где его гипербола круто наклонена. При обработке материалов морской сейсморазведки оператор миграции часто не обеспечивает надлежащую пространственную дискретизацию в интервале отражений от поверхности моря до морского дна и здесь возникают специфические помехи, вызванные тем, что круто наклоненная гипербола пересекает дно моря, хотя само дно может быть и плоским.

### Метод фазового сдвига

Предложенный Е. Газдагом метод фазового сдвига предусматривает непосредственную экстраполяцию поля вниз с помощью преобразования $\exp(ik_z z)$, которая обеспечивает нахождение значений волнового поля в момент времени $t=0$ (т. е. в момент времени, когда отражающие границы «взрываются»). Из всех способов миграции данных, регистрируемых на больших удалениях от источника, он наиболее просто учитывает изменения скорости с глубиной. Правильно и автоматически учитываются фазовый угол и зависимость коэффициента отражения от угла падения на границу. В отличие от методов Кирхгофа в методе фазового сдвига отсутствует опасность искажения оператора миграционного преобразования недостаточно плотной дискретизацией.

Миграционное преобразование по методу фазового сдвига начинается с двухмерного фурье-преобразования массива данных. (Заметим, что некоторые практические детали процесса двухмерного фурье-преобразования описаны в разделе 1.7). После этого преобразованные значения данных, находящиеся на плоскости $(\omega, k_x)$, продолжаются вниз на глубину $\Delta z$ путем умножения их на

$$e^{ik_z \Delta z} = \exp\{-i\omega/v\,[1-(vk_x/\omega)^2]^{1/2}\,\Delta z\}. \qquad (21)$$

Обычно интервал дискретизации по времени $\Delta\tau$ выходного мигрированного разреза выбирается равным интервалу дискретизации по времени входных данных, чаще всего 4 мс. Итак, при шаге по глубине $\Delta z = v\Delta\tau$ оператор продолжения вниз для одной единицы времени принимает вид

$$C=\exp\{-i\omega\Delta\tau\left[1-(vk_x/\omega)^2\right]^{1\ 2}\}. \qquad (22)$$

Наблюденные данные будут многократно умножаться на $C$ и, таким образом, продолжаться вниз с шагом $\Delta\tau$.

Затем возникает задача получения изображения. Для каждого значения глубины за обратным фурье-преобразованием следует определение его значения при $t=0$, так как отражающие границы «взрываются» в момент времени $t=0$. К счастью, необходимо выполнять фурье-преобразование лишь в одной точке, т. е. при $t=0$, и к этому сводятся все вычисления. Сами вычисления исключительно просты, поскольку значение в момент времени $t=0$ представляет собой сумму всех частотных компонент $\omega$. В последнем можно убедиться, если подставить $t=0$ в обратный интеграл Фурье. И наконец, совершается обратное фурье-преобразование $k_x$ в $x$. Миграционное преобразование, т. е. вычисление изображения по восходящей волне $u$, можно кратко представить в виде следующей схемы:

$U(\omega, k_x)=FT[u(t, x)]$
При $\tau=\Delta\tau,\ 2\Delta\tau,\ \ldots,$ конец оси времени на трассе {
  Для всех значений $k_x$ {
    *Изображение*$(k_x, \tau)=0$.
    Для всех значений $\omega$ {
      $C=\exp\left(-i\omega\Delta\tau\sqrt{1-v^2k_x^2\ \omega^2}\right)$
      $U(\omega, k_x)=U(\omega, k_x)*C$
      *Изображение*$(k_x, \tau)=$ *Изображение*$(k_x, \tau)+U(\omega, k_x)$
      }
    }
  *Изображение*$(x, \tau)=FT$ [*Изображение*$(k_x, \tau)$]
  }

Обратное миграционное преобразование (моделирование) совершается почти так же. Взяв восходящую волну, равную нулю на больших глубинах, продвигаем ее шаг за шагом путем умножения на $\exp(ik_x\Delta z)$. К восходящей волне прибавляют отражения, соответствующие каждому уровню излучающих отражающих границ. Программа моделирования восходящей волны $u$ имеет вид:

*Изображение*$(k_x, z)=FT[$*изображение*$(x, z)]$
Для всех значений $\omega$ и $k_x$
  $U(\omega, k_x)=0$.
Для всех значений $\omega$ {
Для всех значений $k_x$ {
Для $z=z_{max},\ z_{max}-\Delta z,\ z_{max}-2\Delta z,\ \ldots,\ 0$ {
  $C=\exp\left(+i\Delta z\omega\sqrt{v^{\ 2}-k_x^2\ \omega^2}\right)$
  $U(\omega, k_x)=U(\omega, k_x)*C+$ *Изображение*$(k_x, z)$
  }}}
$u(t, x)=FT[U(\omega, k_x)]$

Положительный знак у комплексной показательной функции является комбинацией двух отрицательных, т. е. восходящей волны и экстраполяции вверх. Три указанные цикла по $\omega$, $k_x$

и $z$ взаимозаменяемы. Когда скорость не зависит от глубины, программу можно ускорить, переместив расчет комплексной показательной функции $C$ из внутреннего цикла по $z$.

Точные значения скорости почти всегда не известны, поэтому скоростное распределение по глубине часто аппроксимируют слоистым с постоянными значениями в пределах отдельных слоев, хотя в действительности скорость может непрерывно возрастать с глубиной. Достоинством такой аппроксимации является ее экономичность. После вычисления корня квадратного, синусов и косинусов, содержащихся в уравнении (22), сам сложный множитель (22) можно использовать многократно. При шаге дискретизации записи в 4 мс и мощности слоя в 200 мс этот множитель используется 50 раз прежде, чем становится ненужным.

## Метод Столта

Реализованный на большинстве типов ЭВМ метод миграционного преобразования Столта является самым быстродействующим, причем с большим запасом. При решении многих прикладных задач быстродействие оказывается наиболее важным свойством этого метода миграции. В случае однородной среды он совершенно правильно учитывает волновой источник Гюйгенса. Как и другие методы миграции, он допускает обращение и, следовательно, может быть превращен в программу моделирования. Один принципиальный недостаток заключается в том, что в методе Столта не учитываются изменения скорости с глубиной. На практике это полностью компенсируется введением приближенной поправки, при расчете которой используется процедура растяжения оси (см. раздел 4.5). Периодичность всех преобразований Фурье создает сложности при вычислениях на практике. В принципе эти трудности преодолевают, добавляя к обоим концам последовательности отсчетов данных нужное количество нулевых значений.

Метод Столта можно изобразить в виде следующей цепочки:

$$p(x, t) \rightarrow P(k_x, \omega) \rightarrow P'(k_x, k_z = \sqrt{\omega^2/v^2 - k_x^2}) \rightarrow P(x, z).$$

Чтобы понять, почему он работает, рассмотрим сначала соотношение между входом и выходом для случая экстраполяции волнового поля вниз:

$$P(\omega, k_x, z) = e^{ik_z z} P(\omega, k_x, z = 0). \qquad (23)$$

Выполним двухмерное обратное преобразование Фурье:

$$p(t, x, z) = \iint e^{ik_x x - i\omega t + ik_z z} P(\omega, k_x, 0)\, d\omega dk_x.$$

Используем представление о том, что изображение в точке $(x, z)$ является волной, излучаемой отражающей границей в момент времени $t=0$:

$$\text{Образ } (x, z)=\iint e^{ik_x x} e^{ik_z(\omega, k_x) z} P(\omega, k_x, 0)\, d\omega dk_x. \quad (24)$$

Уравнение (24) описывает окончательное сейсмическое изображение, но оно сложно, поскольку на каждом из $z$-уровней должно выполняться двухмерное интегрирование. Процедура Столта заменяет требуемые согласно соотношению (24) трехмерные вычисления единственным двухмерным фурье-преобразованием.

До сих пор ничего не было сделано для определения восходящей волны. Направление распространения волны находится из соотношения между $z$ и $t$, сохраняющего постоянство фазы в выражении $\exp(-i\omega t+ik_z z)$. Если бы $\omega$ была всегда положительной, то $+k_z$ всегда относилось бы к падающей волне, а $-k_z$ — к восходящей. Для описания тех волн, которые имеют вещественные, а не комплексные, значения, нужны как положительные, так и отрицательные частоты $\omega$. Поэтому самым подходящим признаком падающей волны является одинаковость знаков при $\omega$ и $k_z$, а для восходящей волны они разные. С учетом сделанного разъяснения изменим переменную интегрирования в уравнении (24) с $\omega$ на $k_z$:

$$\omega=-\operatorname{sgn}(k_z)\, v\sqrt{k_x^2+k_z^2}, \quad (25а)$$

$$d\omega/dk_z=-\operatorname{sgn}(k_z)\, vk_z/\sqrt{k_x^2+k_z^2}, \quad (25б)$$

$$d\omega/dk_z=-v|k_z|/\sqrt{k_x^2+k_z^2}. \quad (25в)$$

Подставим соотношения (25) в уравнение (24) и добавим знак минус, чтобы интегрирование по $k_z$ производилось от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. так, как это делалось при интегрировании по $\omega$.

Сейсмический образ $(x, z)=$

$$=\iint e^{ik_z z+ik_x x}\left\{P\left[\omega(k_x, k_z), k_x, 0\right]\frac{v|k_z|}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}}\right\} dk_z dk_x. \quad (26)$$

Уравнение (26) подтверждает тот факт, что результат миграционного преобразования по Столту есть не что иное, как двухмерное обратное преобразование Фурье. Метод миграции Столта является прямым воплощением уравнения (26). Его алгоритм состоит из следующих этапов:

1) двойного фурье-преобразования исходных наблюдений из $p(t, x, 0)$ в $P(\omega, k_x, 0)$;

2) интерполяции $P$ на новую расчетную сетку, так чтобы указанное преобразование стало функцией координат $k_x$ и $k_z$, и умножения $P$ на весовой множитель, равный, например, $\cos\theta$;

3) обратного фурье-преобразования в пространство $(x, z)$.

Примеры миграционного преобразования импульсоидов по методу Столта приведены на рис. 24. Как и ожидалось, наблюдаются полуокружности, выгнутые вверх и вниз. Самая

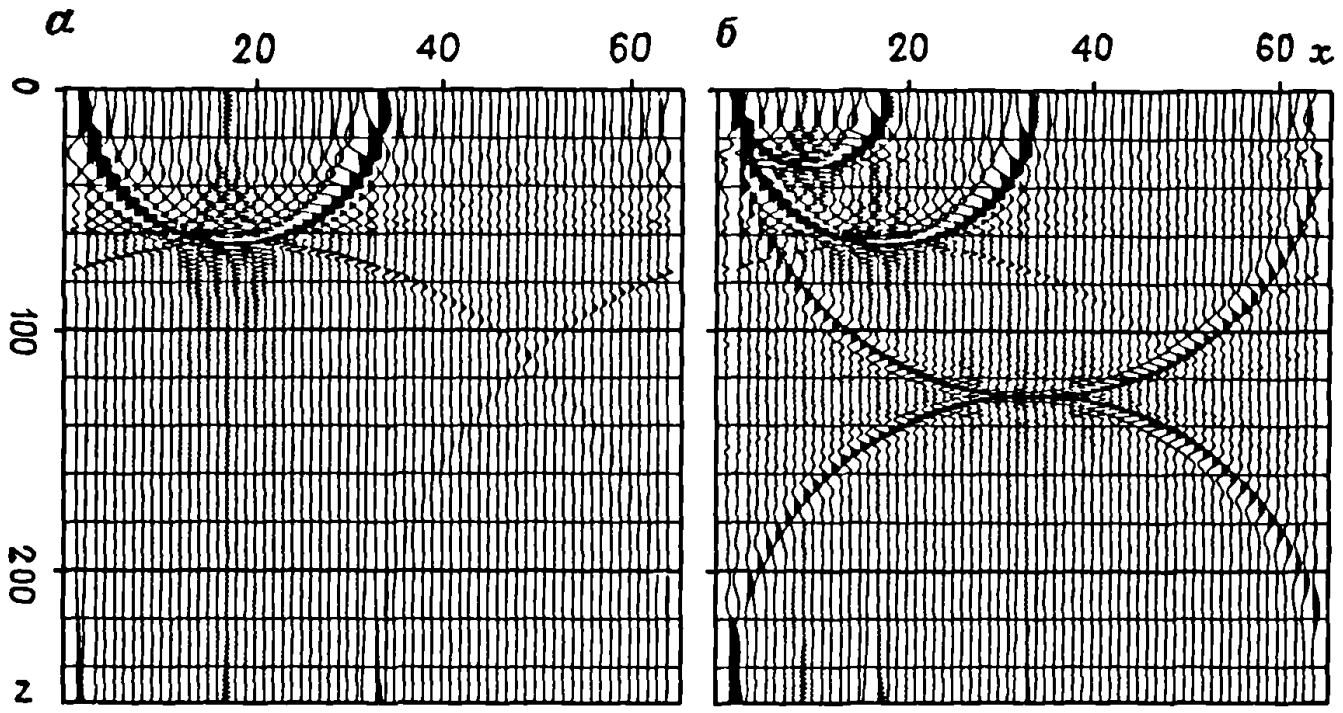



РИС. 24. Миграционное преобразование импульсоидов по методу Столта. Импульсоиды: *а* один, *б* несколько

большая из них соответствует наиболее глубоко расположенному импульсоиду. Эти полуокружности имеют свои центры не только на поверхности земли $z=0$, но и на подошве модели $z=z_{max}$. Известно, что выгнутые книзу полуокружности можно подавить путем более скрупулезной интерполяции. Интерполяция является способом перехода от равномерной сетки по $\omega$ к такой же сетке по $k_z$. Можно, скажем, интерполировать с помощью специальной интерполирующей функции sinc вместо линейной (см. раздел 4.5) или задать нулевые значения в низах модели.

Чтобы остаться в пределах разумных требований к объемам машинной памяти, приведенный выше алгоритм можно реорганизовать так, как показано в одном из упражнений. Естественно, что наличие периодичности по $x$ вынуждает добавлять и сюда нулевые значения.

### Усовершенствование способа суммирования по гиперболам в метод миграции Кирхгофа

Шнайдер [124] предложил следующее аналитическое выражение для вторичного импульсоида Гюйгенса:

$$FT^{-1}\left(e^{ik_z z}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\mathrm{step}(t-r\ v)}{\sqrt{t^2-r^2\ v^2}}, \qquad (27)$$

где $r=x^2+(z-z_0)^2$ расстояние между источником (в виде излучающей границы) и приемником. Функция (27) содержит полюс и производную ступенчатой функции. Так как она принимает бесконечно большие значения, ее нельзя изобразить графически, но по математическому выражению можно сразу

догадаться, что возмущение сосредоточено в пределах ожидаемого конуса. Наличие производной ступенчатой функции приводит к появлению на конусе положительного импульсоида. Производная от квадратного корня придает импульсоиду шлейф отрицательной полярности, затухающий пропорционально степени $-3/2$. Косинусная зависимость амплитуды от угла падения возникает по той причине, что производная берется от $z$, а не по $r$.

Уравнение (27) описывает двух-, а не трехмерный импульсоид Гюйгенса. Последний отличается некоторыми мелкими деталями. Хотя волны, излучаемые точечными источниками, по преимуществу сферические, фокусировка изогнутых слоев представляет собой в основном двухмерный процесс. Другими словами, изогнутые слои больше походят на цилиндры, чем на сферы.

Можно задаться вопросом: почему, располагая точным обратным преобразованием (27), все предпочитают все-таки пользоваться приближениями. Графическое построение зависимости (27) на практике затруднено из-за возникающей необходимости ее свертывания с наблюденными данными. Именно поэтому первые результаты миграции по Кирхгофу обычно характеризовались помехами в условиях горизонтального морского дна. Главы 2 и 4 посвящены в основном усовершенствованным вариантам преобразования (27), которые действуют в условиях переменной скорости или же являются улучшенными вариантами представления на сетке данных.

После преобразования по Фурье функция вторичного источника Гюйгенса принимает простой и сглаженный вид. Вычисление такой функции по прямоугольной сетке и ее обратное преобразование с помощью программ, приведенных в разделе 1.7, выполняются весьма просто. На рис. 25 изображен результат преобразования, полученный по сетке размером $256 \times 64$. На практике обычно применяются сетки размером приблизительно $1024 \times 256$, но использованная в настоящем примере более грубая сетка все-таки обеспечила графические построения достаточной степени детальности. Из-за трудностей, связанных с построением функций, похожих на импульсный дублет, в нижней части рис. 25 дается другое графическое изображение интеграла, на этот раз с несколько ограниченной полосой частот.

### Чувствительность процесса миграции к ошибкам в определении скорости

На рис. 26 показано, как процесс миграции зависит от скорости. Вспомним, что результаты миграционных преобразований обычно изображаются в виде временных разрезов.

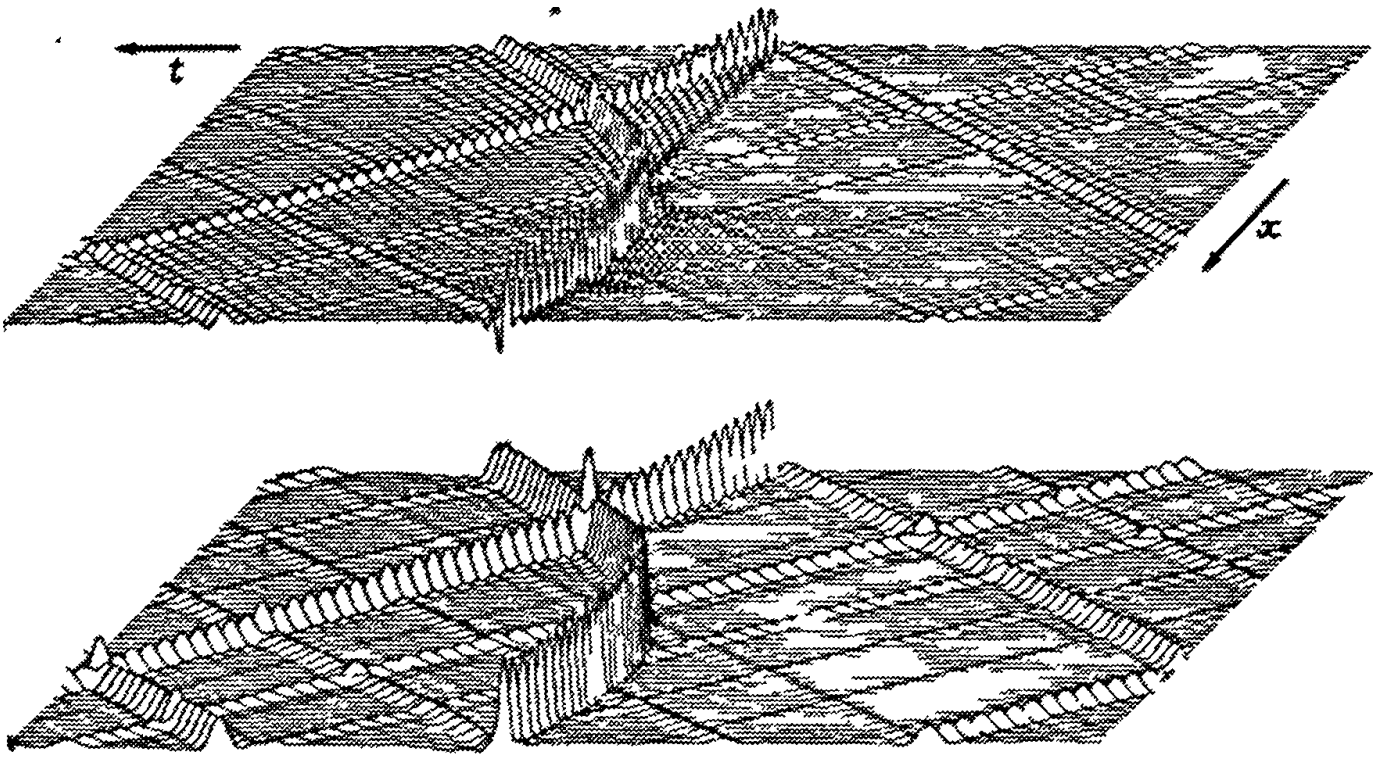



РИС. 25. Импульсоид Гюйгенса (вверху) и сглаженный временной интеграл (внизу)

В условиях горизонтальной слоистости среды ошибки определения скорости не играют никакой роли.

Разные исследователи пользуются различными критериями точности. Один из разумных критериев состоит в том, чтобы ошибка в определении местоположения энергии в пределах полуокружности не превышала половины длины волны. В том случае, когда рассматривается волна, движущаяся в горизонтальном направлении, ошибка определения ее местоположения просто связывается с преобладающим периодом $\Delta T$ и временем пробега $T$. Из опыта известно, что отношение $T/\Delta T$ редко превышает 100. Поэтому число 100 оказывается фундаментальным практическим параметром при работах методом отраженных волн в условиях осадочных бассейнов. Возможно, что теоретически он связывается с показателем добротности осадочных пород $Q$ или же с образованием хаотических внутренних многократных отражений. Значения указанного параметра, превышающие 100, наблюдаются в тех случаях, когда бóльшая часть пути волны приходится на воду, либо же когда времена пробега превышают 4 с. На рис. 27 приведены результаты, полученные с использованием двух близких по значениям скоростей миграции. Разделение кривых между собой улучшается с увеличением угла наклона границ. Чтобы при угле падения границы 90 расстояние между кривыми было меньше длины волны, ошибка в значении скорости должна быть меньше 1%. При угле падения 45 величина погрешности в задании миграционной скорости может быть увеличена в $\sqrt{2}$ раз. Значения скоростей редко бывают известны с указан-

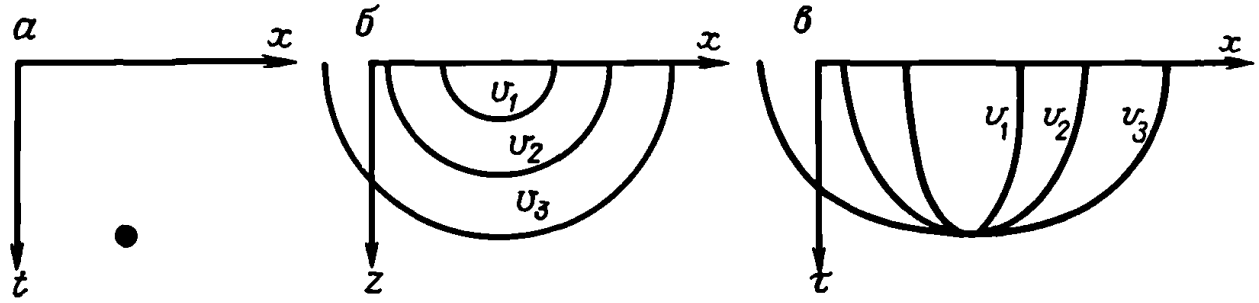



РИС. 26. Чувствительность к ошибке в скорости возрастает с ростом угла до 90 . Миграция наблюденного импульсоида в зависимости от скорости:
*а* наблюденные данные; *б* модель; *в* мигрированный временной разрез

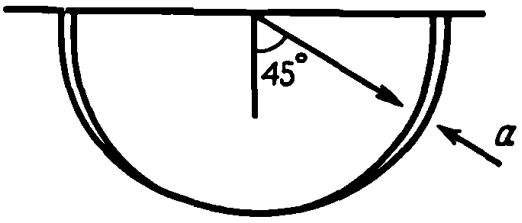



РИС. 27. Ошибка во времени (*а*) из-за использования неправильной скорости растет с увеличением угла

ной выше точностью. Поэтому можно поставить под вопрос значимость миграционных преобразований сейсмотрасс, наблюдаемых при больших удалениях от источника сейсмических волн.

## Субъективные сравнение и оценка методов миграции

В табл. 1 сопоставлены три основные метода миграционных преобразований, рассмотренные в настоящем разделе. Изложенное в последующих главах позволяет высказать замечания о качественной стороне методов миграции при больших удалениях приемника от источника. Самое уязвимое место этих методов большие сложности при их использовании в условиях горизонтального градиента скоростей. Самая сильная их сторона эффективность миграции при больших удалениях от источника — ослабляется несовершенствами в других звеньях цепочки, образуемой регистрацией и обработкой наблюдений.

1. Расстояния между источником и приемниками зачастую велики, но это обстоятельство не учитывается. Разрез ОГТ не является разрезом при нулевых удалениях.

2. Зачем обрабатывать трассы, регистрируемые на самых больших удалениях от источника по линии профиля, если не принимаются во внимание боковые волны, подходящие к поверхности наблюдений даже под самыми малыми углами?

3. Приемные группы часто располагаются по профилю с частотой недостаточной для представления крутых осей синфазности без искажений пространственной дискретизации.

4. Стремление к повышению точности определения скоростей редко оправдывает миграционное преобразование сейсмотрасс, удаленных на большие расстояния от источника.

**Таблица 1**

**Субъективное сравнение трех методов миграции при больших удалениях от источника**

| | Суммирование по гиперболе или суперпозиция по полуокружности | Метод фазового сдвига | Метод Столта |
|---|---|---|---|
| Изменение скорости с глубиной | Расчет лучей | Легко | Приближенно, путем растяжения осей |
| Большие удаления от источника | Учет ошибок дискретизации данных и оператора | Учет ошибок дискретизации данных | Учет ошибок дискретизации наблюденных данных |
| Учет фаз и зависимости амплитуды от угла отражения | Возможен с некоторыми сложностями в случае однородной среды | Прост при любой зависимости скорости от глубины | В случае однородной среды |
| Периодические искажения | Отсутствуют | По оси $x$. Способ уменьшения помех по $t$ изложен в разделе 4.5 | По оси $x$. Способ уменьшения помех по $(t, z)$ изложен в разделе 4.5 |
| Изменение скорости по горизонтали | Программы обработки содержат серьезные недостатки | Приближенно, путем итерации и интерполяции | Программы обработки неизвестны |
| Боковые границы и неравномерный шаг | Отлично | Плохо | Плохо |
| Быстродействие | Медленное | Среднее | Очень высокое |
| Организация памяти | Неудобная | Хорошая | Хорошая |

5. Помехи в конце концов начинают преобладать над полезными отражениями и это обстоятельство также устанавливает предельно допустимые удаления приемников от источника. Например, если залежи нефти находятся на псевдоглубине в 2 с, а длительность записи равна 4 с, то предельный угол выхода волны составляет 60 .

**Упражнения**

1. Схема программы моделирования волн предполагает, что излучающие границы представляют собой импульсные функции времени. Видоизмените схему программы волнового моделирования таким образом, чтобы она учитывала и импульсоид источника $s(t)$.

2. Схема программы миграции допускает изменение скорости с глубиной, но ее быстродействие может быть значительно повышено в случае однородной среды. Покажите, как это можно сделать.

3. Составьте схему программы вычислений по алгоритму, обратному алгоритму Столта, т. е. программу синтезирования наблюдений по заданной модели среды.

4. Алгоритм Столта можно переделать таким образом, чтобы уменьшить потребность в машинной памяти для создания по оси времени буфера из нулевых значений. Для этого нужно сначала найти фурье-преобразование $x$ в $k_x$, затем отыскать среди наблюдений на плоскости $(t, k_x)$ векторы с постоянными $k_x$. Каждый из таких векторов можно переместить в пространство некоего длинного вектора, затем снабдить его нужным числом нулей и проинтерполировать. Нарисуйте схему получившейся программы.

5. Если длительность сейсмограмм равна 4 с, то какова максимальная псевдоглубина (глубина по времени), с которой лучи будут подходить под углом 80 ?

## 1.4. Физические основы

В предыдущих разделах рассмотрены геометрические аспекты процесса распространения волн и то, каким образом они связаны с проблемой построения сейсмического изображения. Теперь обратимся к связи сейсмических изображений с физическими параметрами. Среда, в которой распространяются волны, обладает массовой плотностью и сжимаемостью. Волны характеризуются материальным вектором ускорения и градиентом давления. Статические деформации, поверхностные волны — помехи, сдвиговые напряжения, жесткость, процессы рассеяния, образование осадочных пород — каким образом все это связывается с задачей построения сейсмических изображений?

Из-за сложности строения осадочного чехла не существует относительно приемлемого математического описания модели. Чтобы помочь вам понять пределы применимости теории, рассмотрим несколько примеров расхождений между теоретическими представлениями и современной производственной практикой.

### Разрез, представленный грубообломочными породами

Вообще говоря, большинство пород-коллекторов углеводородов представлено песчаниками. Сами же песчаники чаще всего образуются из песка, отлагающегося вблизи устьев рек, т. е. там, где скорость течения воды уже недостаточно велика, чтобы перемещать песчинки. Пески отлагаются вдоль кромок песчаных баров, образующихся в устьях рек, на поверхностях, наклоненных под углом в 25 или около этого (рис. 28). Хотя пески отлагаются на наклонных поверхностях, на более поздних

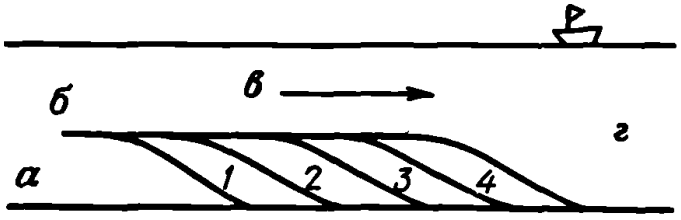



РИС. 28. Пески осаждаются на довольно крутых склонах в местах впадения рек в океан:
*а* осадки; *б* река; *в* течение; *г* океан; *1* *4* клиноформные осадки

этапах могут сформироваться и горизонтально залегающие слои.

Глины представляют собой более тонкозернистый материал (грязь), который переносится в более глубоководные части осадочного бассейна, прежде чем осесть и превратиться в глинистый сланец. Отложения глинистых сланцев характеризуются горизонтальной слоистостью в значительно большей степени, нежели песчаники. Конкретные места отложения песков меняются в зависимости от прошедших штормов или времени года, в результате чего порода приобретает характерную древовидно-зернистую текстуру.

И сама речная дельта представляет собой сложную, постоянно меняющуюся совокупность каналов и баров, перемещающихся вдоль береговой линии. В процессе образования осадков кажется, что дельта движется в сторону моря, но позже в результате осаждения, уплотнения пород, или же поднятия уровня моря дельта начинает двигаться в сторону суши.

Наличие песчаников в разрезе весьма важно, так как благодаря их пористости нефть может накапливаться, а благодаря проницаемости — перемещаться в сторону скважины. Значение глинистых сланцев объясняется тем, что в них сохраняются продукты жизнедеятельности древних организмов на Земле, из которых, в свою очередь, возникают углеводороды. Последние выжимаются в находящиеся по соседству песчаники, причем часто не в сторону поверхности земли, так как песчаники могут перекрываться непроницаемыми глинами. Акустические свойства песчаников и глин часто совпадают между собой, хотя в общем скорости в глинах несколько ниже скоростей в песчаниках. Геофизики, находясь на поверхности земли, наблюдают с помощью сейсмических волн длиной около 30 м эту окончательно сложившуюся из переслаивания песчаников и глинистых сланцев трехмерную среду.

Смеси песчаников и глин называют обломочными породами. Они образуются из обломков кристаллических. Большинство осадочных пород относится к типу обломочных. Большая часть разведанных запасов нефти содержится в обломочных породах, но много нефти находится также и в карбонатных породах типа известняка. Карбонатные породы образуются в условиях мелководья из морских организмов. Во многих карбонатных (и обломочных) породах содержится нефть, которую нельзя извлечь из-за отсутствия проницаемости. Проницаемость в кар-

бонатных породах образуется в результате нескольких не вполне ясных процессов. Сейсморазведчикам карбонатные породы известны как породы, скорость распространения волн в которых выше, чем в обломочных. Обычно скорость волн в карбонатных породах на 20—50% выше, чем в обломочных. Иногда в обломочной породе содержится известняк и тогда она называется мергелем.

### Хроностратиграфия

Как ни странно, до сих пор не существует согласия относительно природы сейсмических отражений. Физики склонны считать, что отражения возникают на границах раздела пород различного типа, например, на контакте пластов песчаника и глины. Слабым моментом такой точки зрения является то, что песчаники и глины в разрезе переслаиваются сложным образом, причем мощности переслаивающихся слоев могут быть как больше, так и меньше длины сейсмической волны. Многие геологи, особенно группа так называемых сейсмостратиграфов, придерживаются иной концепции. (См. мемуар № 26 Американской ассоциации геологов-нефтяников под названием «Сейсмостратиграфия в применении к поискам залежей углеводородов»). Ими изучены тысячи километров сейсмических разрезов МОВ и большое количество данных ГИС глубоких поисковых скважин. Они считают, что отражение связывается с горизонтом, имеющим одинаковый геологический возраст. Они утверждают также, что протяженный непрерывный отражающий горизонт вполне может связываться в различных своих частях с различными типами осадочных пород от терригенных до морских. Интерпретация сейсмических наблюдений, базирующаяся на таких представлениях, называется *хроностратиграфией*. Точка зрения сейсмостратиграфов кажется довольно обоснованной для тех районов, где осадочный чехол полностью сложен обломочными породами, но когда в разрезе присутствуют карбонатные и иные породы, более обоснованной представляется точка зрения физиков. Для более глубокого знакомства с данным вопросом можно рекомендовать работу Шериффа [130].

### Трудности наблюдения обменных поперечных волн

В сейсмологии и при лабораторных измерениях четко различаются два уровня скоростей распространения упругих волн. Более высокие значения скорости соответствуют волне сжатия (Р-волне), а более низкие — волне сдвига (S-волне). Поперечная волна может быть поляризована в горизонтальной (SH) или в вертикальной (SV) плоскостях. Теория, полевые

наблюдения и лабораторные измерения согласуются между собой. Успешные опытные работы по использованию поперечных волн в сейсморазведке описаны в работах [24, 49].

Примечателен тот факт, что свыше 99% сейсморазведочных работ на нефть и газ проводится без привлечения поперечных волн. С математической точки зрения земную среду рассматривают в качестве либо жидкости, либо газа. В опытах с поперечными волнами для возбуждения и регистрации вибраций, ориентированных поперек сейсмического профиля, т. е. SH-волн, использовались специальные установки. Картина строения земных недр, получаемая с помощью поперечных волн, часто оказывается испорченной из-за неблагоприятного влияния самых верхних слоев, иногда же она бывает ясной и логичной. Удивительно, но результаты обработки SH-волн даже хорошего качества часто трудно увязываются с разрезами по P-волнам. По данным проведенных экспериментов, всюду по разрезу за исключением ВЧР скорость распространения поперечных волн приблизительно вдвое меньше скорости продольных. В верхней части разреза скорости поперечных волн бывают намного ниже и характеризуются резкой изменчивостью. Частота наблюдаемых в поле поперечных волн обычно ниже частоты продольных. Поперечная волна вдвое меньшей частоты и скорости по сравнению с продольной имеет одинаковую с ней длину и, следовательно, такую же разрешающую способность. Действительно, полевые наблюдения показали, что поперечные волны обладают почти такой же пространственной разрешенностью, как и продольные. Подавляющая часть сейсморазведочных материалов, регистрируемых на суше, характеризует лишь вертикальную составляющую движения сейсмоприемника, а при морской сейсморазведке все сейсмограммы представляют собой записи давления. Поэтому, применяя традиционные схемы наблюдения, в идеальном случае мы не должны наблюдать SH-волны. Точнее говоря, SH-волны должны быть слабыми, возникающими только в тех случаях, когда строение земных недр отличается от простого переслаивания.

В методе отраженных сейсмических волн существует загадочный момент, связанный с поперечными волнами. Он заключается в том, что, применяя стандартную методику наблюдений, не удается регистрировать обменные PS-волны обычным порядком. Согласно теоретическим прогнозам, продольные волны, падающие на границу под углом, должны частично превращаться в поперечные. Более того, при углах падения 30—60 , что, кстати, имеет место постоянно, обменные волны по амплитуде должны быть соизмеримыми с отраженными продольными.

Обычно применяемые стандартные схемы наблюдения и обработки данных не применимы в полной мере для обменных



РИС. 29. Сейсмический разрез нулевых удалений, содержащий кратные отражения (Восточная Африка)

поперечных волн. Но они же неблагоприятны и для многократных отражений (причем механизм воздействия очень похож на предыдущий), которые наблюдаются постоянно. Более того, форма записи обменных волн должна походить на форму записи кратных отражений, но они четко различаются. Обменные волны должны постоянно наблюдаться при изучении скоростей (см. гл. 3). На рис. 29 изображен сейсмический разрез при нулевых удалениях, осложненный кратными отражениями. Кратное отражение распознается по повторению им особенностей рельефа более высоко залегающих горизонтов. Обменные волны также повторяют рельеф, но временной масштаб будет равен приблизительно 3 2, а не точно 4/2. В случае достаточно сложного строения отражающей поверхности, как например на рис. 29, вероятность того, что обменная волна будет по ошибке принята за еще одну однократно отраженную волну, мала.

В сейсморазведке обменные волны должны хорошо диагностироваться. Вместе с тем вероятность обнаружения обменных поперечных волн на традиционных сейсмозаписях кажется настолько ничтожной, что большинство интерпретаторов прекратило их поиски. Почему же обменные волны не заметны на традиционных сейсмозаписях? Можно предложить несколько объяснений, три из которых приведены ниже.

1. При работах на море, видимо, совершается еще один обмен на продольный тип при прохождении волны через толщу воды.

2. При работах на суше следует учитывать, что самая верхняя часть разреза особенно хорошо поглощает сдвиговые напряжения.

3. Вертикальные сейсмоприемники в основном реагируют на продольные составляющие волнового поля. Последнему благоприятствует и то обстоятельство, что лучи в приповерхностной части разреза принимают почти вертикальное направление.

Ни одно из приведенных выше объяснений того, почему обменные поперечные волны обязательно должны быть слабее продольных, не является убедительным. В разнообразных сейсмогеологических условиях регистрируются волны самой различной амплитуды. Нередко наблюдения визуализируют после автоматической регулировки амплитуд (АРУ). По-видимому, ослабление амплитуд нельзя считать достаточной причиной неудач, испытываемых при наблюдениях обменных волн. Нужно продолжать их искать. Обменных волн наверняка намного больше, просто мы их не можем заметить. Кстати, автор сам ни разу не выделял обменную волну на обычных сейсмограммах.

Поэтому, несмотря на то, что обменные поперечные волны будут, возможно, играть заметную роль в сейсморазведке отраженными волнами, вернемся к идеям по поводу того, что нужно делать, чтобы эффективно обращаться с информацией, получаемой при работе по общепринятой методике для продольных волн.

### Надежность моделирования реверберации

В литературе по сейсмологии в изобилии представлены теоретические описания поведения сейсмических волн в слоистых средах. Одним из важных аспектов сейсмической разведки является отношение к внутрислойной реверберации. При отражении волны от границы раздела слоев ее энергия составляет небольшую, как правило, меньше 10%, долю энергии падающей сейсмической волны. В этой книге мы рассматриваем в основном отраженные однократные волны, но отраженная волна может быть и многократной. При небольших мощностях слоев подобных отражений может быть очень много. Несколько подробнее вопрос о кратных волнах освещается в разделе 5.5.

Ситуация упрощается при наличии сейсмокаротажных материалов, но даже в этом случае затруднения по учету кратных волн весьма серьезны.

### Неудача с ньютоновой вязкостью

Представляется примечательной неудача, постигшая основные пособия по сейсмологии в их попытке объяснить наблюдае-

мую дисперсию сейсмических параметров в зависимости от частоты. Простейший подход к теоретическому решению проблемы дисперсии $Q$ заключается во введении в закон Гука, связывающий напряжения и деформации, дополнительного члена с коэффициентом деформации. В этом случае получается, что относительное рассеяние энергии на высоких частотах превышает рассеяние на низких. Наблюдаемое же экспериментально относительное рассеяние сохраняется приблизительно постоянным в полосе частот, равной многим десяткам герц. Согласно другим упрощенным ньютоновским теориям, отношение напряжения к деформации представляется через полиномиальные отношения по $-i\omega$. В указанных теориях фигурируют масштабные длины и характеристические частоты. Согласно им, параметр $Q$ не может быть постоянным. Один из подходов к проблеме объяснения дисперсии заключается в предположении гетерогенности осадочного чехла при всех масштабах (см. раздел 4.6)

**Философия решения обратных задач**

Физические процессы часто имитируют с помощью компьютеров. Память машины используется в качестве отображения физического пространства, а сами вычисления производятся в том же временном масштабе, который характерен для имитируемого мира. Положительная особенность такого способа решения задач заключается в том, что никогда не возникает вопросов относительно единственности получаемого решения. Ошибки в исходных данных и погрешности дискретизации модели не ведут к катастрофическим последствиям. Но геофизикам-разведчикам, к сожалению, редко приходится решать задачи подобного типа. Вместо того, чтобы помещать в запоминающее устройство пространство $(x, z)$ и имитировать процесс в естественном времени $t$, в память записывают пространство $(x, t)$ и производят экстраполяцию по координате $z$. В этом и заключается наша работа регистрировать информацию (наблюдения) на поверхности земли и пытаться экстраполировать ее на глубину. Естественное устойчивое течение времени еще не обеспечивает «доказательства существования» того, что цели, преследуемые экстраполяцией, обоснованы, устойчивы или просто возможны.

Задачи, связанные с расчетом времен волн часто называют прямыми задачами, а задачи экстраполяции на глубину обратными. При решении, например, задачи о распространении акустических волн, ясно, что нужно и что можно получить. Нужно найти распределение значений плотности $\rho(x, z)$ и несжимаемости $K(x, z)$, а также знать источник начального возмущения. Располагая указанной информацией, можно рас-

считать значения волнового поля для последующих моментов времени в любой точке пространства, но обычно интересуются лишь его значениями на поверхности земли, чтобы иметь возможность сопоставить их с имеющимися наблюдениями. При решении обратной задачи наблюдаемые на поверхности земли волны берут в качестве входных данных и стараются определить физические свойства среды $\rho(x, z)$ и $K(x, z)$. Опыт показал, что рядовые полевые наблюдения не обеспечивают получения обоснованных и приемлемых оценок изображений, или отображений, значений параметров $\rho$ и $K$.

### Что можно извлечь из данных МОВ

К счастью, было обнаружено, что некоторые функции параметров $\rho$ и $K$ можно надежно определять и отображать. Значения скорости $v$ и акустического импеданса $R$ определяются по формулам

$$v=\sqrt{K/\rho}, \tag{28а}$$

$$R=\sqrt{K\rho}. \tag{28б}$$

Обратное решение уравнения (28) находится очень просто:

$$K=vR, \tag{29а}$$

$$\rho=R/v. \tag{29б}$$

Практически решение уравнения (29) не имеет особой ценности, так как параметры $v$ и $R$ наблюдаются через неперекрывающиеся спектральные окна. Акустический импеданс $R$ просматривается через спектральное окно с типичной полосой 10—100 Гц при хорошем качестве материалов МОВ. Так как низкочастотная часть спектра отсутствует, обычно говорят, что в этом случае наблюдается не импеданс, а градиентная функция отражательной способности, обозначаемая через $c(x, z)$ и равная $\nabla\log(R)$.

Скорость $v$ наблюдается через гораздо меньшее окно. Ее определение связано с изучением зависимости времени пробега волны от расстояния между сейсмоприемником и источником и будет изложено в гл. 3. С помощью второго из указанных окон трудно получить 16 независимых определений скорости по сейсмограмме длительностью 4 с. Поэтому, как показано на рис. 30, данное окно имеет полосу от 0 до $\approx$2 Гц.

Отметим, что в интервале 2 10 Гц располагается информационный провал. Даже если предположить, что физика горных пород в состоянии дать нам зависимость между $\rho$ и $K$, указанный выше провал серьезно уменьшает способность сейсморазведчиков прогнозировать разрез до того, как пробурена скважина. Сейсморазведчики могут с некоторой степенью

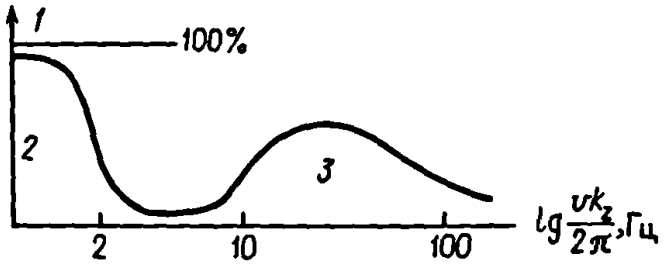



РИС. 30. Надежность информации, получаемой при наземной сейсморазведке МОВ:
*1* точность; *2* скорость; *3* отражательная способность

определенности прогнозировать лишь отфильтрованную каротажную кривую.

Описанное выше положение дел с полевыми наблюдениями заставило сейсморазведчиков, работающих с отраженными волнами, употреблять слово «скорость» в более конкретном смысле. Для них термин скорость означает низкочастотную по пространственной частоте часть «действительной скорости». Высокочастотную часть последней не называют скоростью, ее называют отражательной способностью. Плотность, как правило, не принимают во внимание, так как она практически не поддается измерению средствами наземной сейсморазведки МОВ.

## Математические обратные задачи

В математике решение обратной задачи стало означать «определение» физических свойств среды по волновым полям. Это достигается чаще всего посредством некоей «сходящейся последовательности». Геофизики менее строги (или же более либеральны) относительно того, что понимать под термином «определение». В гл. 1 и 2 данной книги отражающие границы «определены» с помощью понятия об излучающем отражении. В гл. 3 вводится координата удаления взрыв—прием, а функции отражательной способности $c(x, z)$ и скорости $v(z)$ «определяются» с помощью понятия глубинного наблюдения. В гл. 5 развивается концепция подавления кратных отражений и нахождения «истинных» амплитуд отражений путем обнуления восходящих волн до момента вступления падающей. Схемы обработки, которые появятся в будущем, вероятно, приведут к появлению новых понятий, связанных с построением изображений. Можно было бы показать, что некоторые наши «определения» совпадают с применяемыми математиками, но мы вовсе не преследуем такую цель.

## Вывод акустического волнового уравнения

Акустическое волновое уравнение описывает поведение звуковых волн в жидкостях или газах. Другое, более сложное множество уравнений описывает поведение упругих волн в твердых телах или в сплошных средах. Рассмотрим сначала

акустический случай. Обозначим через ρ массу единичного объема флюида, через $u$ скоростной поток флюида в направлении оси координат $x$, через $w$ скоростной поток флюида в направлении оси координат и через $P$ давление внутри флюида. Согласно закону сохранения количества движения Ньютона, под воздействием приложенной силы небольшой объем в газовой среде будет ускоряться. Сила возникает из-за разности давлений на противоположных гранях рассматриваемого небольшого объема. Закон Ньютона можно выразить в виде словесной формулы: масса × ускорение = сила = градиент давления

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{30а}$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{30б}$$

Другим физическим процессом является накапливание энергии путем сжатия и изменения объема. Если вектор скорости $u$ в точке $x+\Delta x$ больше соответствующего вектора в точке $x$, то говорят, что поток дивергирует. Другими словами, небольшой объем между точками $x$ и $x+\Delta x$ расширяется. Расширение должно приводить к падению давления. Величина падения давления пропорциональна параметру флюида, называемому несжимаемостью $K$. В одномерном варианте уравнение имеет вид: падение давления = (несжимаемость) × (дивергенция скорости)

$$-\partial P \;\partial t = K(\partial u \;\partial x). \tag{31а}$$

В двухмерном варианте оно принимает вид:

$$-\partial P \;\partial t = K(\partial u \;\partial x + \partial w \;\partial z). \tag{31б}$$

Чтобы прийти к одномерному волновому уравнению, возьмем за исходные соотношения (30а) и (31а), сначала разделим уравнение (30а) на ρ и возьмем его производную по $x$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} u = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{32}$$

Затем найдем производную по времени от уравнения (31). В науках о твердой оболочке Земли пользуются тем счастливым обстоятельством, что исследуемое вещество не изменяет своих свойств во время проведения эксперимента. Это значит, что $K$ постоянна во времени:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t} = -K\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} u. \tag{33}$$

После подстановки (32) в (33) получается одномерное скалярное волновое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = K\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{34а}$$

В точном варианте с двумя пространственными координатами акустическое скалярное волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = K\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\right)P. \qquad (34б)$$

Вам часто будет встречаться скалярное волновое уравнение в упрощенном виде, при условии, что $\rho$ не зависит от $x$ и $z$. Подобное упрощение оправдывается следующими двумя доводами. Во-первых, обычно по самим наблюдениям определить плотности бывает невозможно, поэтому с одинаковым успехом их можно положить постоянными. Во-вторых, вскоре мы убедимся, что решение методами Фурье не получается в случае переменных пространственных коэффициентов. Прежде чем исследовать справедливость последнего упрощения, рассмотрим следствия из него. Указанное упрощение приводит (34б) к обычному скалярному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)P. \qquad (35)$$

Чтобы убедиться в том, что последнее уравнение представляет собой математическое выражение тех геометрических концепций, которые были изложены в предыдущих разделах, подставим в него пробное решение вида

$$P = \exp\left(-i\omega t + ik_x x + ik_z z\right). \qquad (36)$$

В результате получаем дисперсионное соотношение двухмерного скалярного волнового уравнения

$$\omega^2/(K/\rho) = k_x^2 + k_z^2. \qquad (37)$$

Ранее [см. раздел 1.2, уравнение (14)] уравнение подобное (37) было получено при рассмотрении лишь геометрического поведения волн. В том выводе на месте отношения $K/\rho$, стоящего в уравнении (37), оказался квадрат скорости волны. Поэтому и физический и геометрический подходы можно согласовать между собой, если воспользоваться соотношением

$$v^2 = K/\rho. \qquad (38)$$

И, наконец, посмотрим, почему применение методов Фурье не приносит удачи в тех случаях, когда скорость становится переменной по пространственной координате. Пусть $\omega$, $k_x$ и $k_z$ не зависят от пространственной координаты. Подставив уравнение (36) в соотношение (35), приходим к противоречию, заключающемуся в том, что $\omega$, $k_x$ и $k_z$ должны быть переменными по пространству в случае зависимости скорости от пространственной координаты.

### Быстрозатухающие и поверхностные волны

Завершив физический вывод дисперсионного соотношения

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2/v^2, \qquad (39)$$

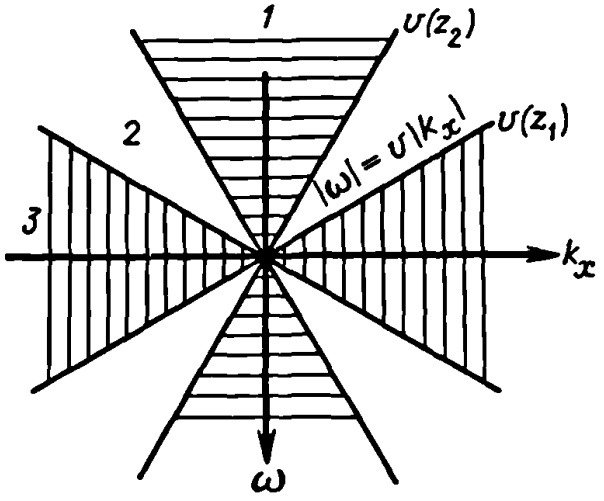



РИС. 31. Вееры отраженной энергии $|\omega| > v(z)|k_x|$ становятся уже с ростом скорости и глубины. Поверхностные волны представляют собой энергию, распространяющуюся вблизи поверхности и быстро затухающую с глубиной:
*1* отражения; *2* поверхностные волны; *3* — быстрозатухающая энергия

можно по-новому взглянуть на него. Оно содержит в себе больше смысла, чем можно было ожидать от вывода, сделанного с геометрических позиций. Дисперсионное соотношение первоначально рассматривалось просто в качестве уравнения типа $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, причем $\sin\theta = vk_x/\omega$. Следовательно, в значениях $\sin\theta$, больших 1, или $vk_x$, больших $\omega$, смысла не было. Теперь же он есть. В двух из указанных выше методов миграции содержалась скрытая неоднозначность: поскольку наблюденные данные могут быть функцией произвольного вида на плоскости $(t, x)$, их фурье-преобразование может быть произвольной функцией на плоскости $(\omega, k_x)$, что поясняется рис. 31.

В том случае, когда $vk_x$ превосходит по своей величине $\omega$, известное нам выражение процедуры экстраполяции вниз лучше представить в виде соотношения

$$e^{\pm i\sqrt{\omega^2 v^2 - k_x^2}z} = e^{\pm\sqrt{k_x^2 - \omega^2 v^2}z}. \qquad (40)$$

Оно означает, что зависимость физического решения от глубины представляет собой возрастающую или убывающую показательную функцию. Эти решения называются быстрозатухающими волнами. В предельном случае $\omega = 0$ волновое число $k_x$ вещественно, а $k_z = \pm ik_x$. Для случая упругих волн это может представлять собой, например, деформацию грунта под стоящим самолетом. Волна будет излучаться вниз только в том случае, если самолет будет двигаться по поверхности земли со сверхзвуковой скоростью. Если же самолет движется с дозвуковой скоростью, такую деформацию называют квазистатической.

Может быть, более подходящим физическим описанием данного явления будет эксперимент с синусоидально рифленым листом. Подобные рифленые металлические щиты иногда используют в качестве кровельного материала или дверей для гаража. Длина волны рифления определяет значение $k_x$. Если двигать такой лист возле уха со скоростью $v$, то можно услышать гармонику колебаний с частотой $vk_x$, причем без-

различно, будет ли $v$ больше или меньше скорости звука в воздухе. Но сила звука будет ослабляться по экспоненте с ростом расстояния между ухом и листом, если только скорость перемещения листа не будет слишком большой, т. е. когда $V > v$. В этом случае движущийся рифленый лист будет излучать звук на большое расстояние. Именно по этой причине сверхзвуковые самолеты расходуют так много топлива.

Что должна делать программа миграции с энергией, движущейся со скоростью, меньшей скорости звука? С теоретической точки зрения такая энергия должна экспоненциально затухать в направлении от источника. В количественном отношении затухание в краевых областях пространства $(\omega, k_x)$ происходит исключительно быстро. Поэтому, согласно простой теории излучающих отражающих границ, при столь низких скоростях должна быть очень незначительная энергия.

В действительности же, в области существования быстрозатухающих волн пространства $(\omega, k_x)$ наблюдаются довольно большие количества энергии. Это еще одно очень слабое место концепции излучающих отражающих границ. Отмеченное осложнение достигает крайних пределов при наблюдениях на суше. Волны, которые быстро затухают в залегающих на глубине высокоскоростных породах, могут распространяться на большие расстояния в низкоскоростном приповерхностном слое. Такую энергию называют поверхностной волной. Пример ее приведен на рис. 32. Самая верхняя часть разреза, контролирующая образование поверхностных волн, сильно изменчива и своей изменчивостью напоминает поведение рельефа земли. Поэтому, хоть рис. 32 и являет собой прекрас-

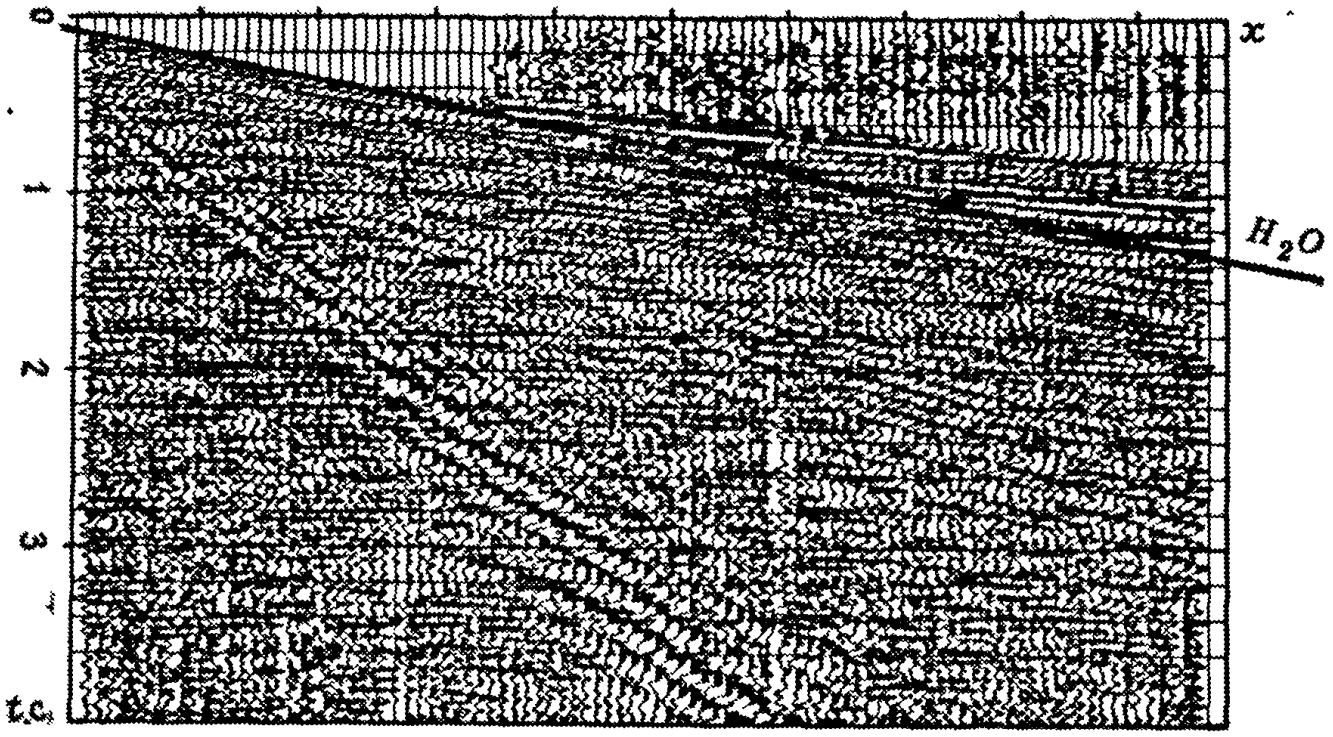



РИС. 32. Сейсмограмма, полученная в условиях мелководья у берегов Флориды, характеризуется поверхностными волнами и частотной дисперсией

ный пример, на деле не существует примера, который можно было бы назвать типичным. На рисунке изображен не разрез при нулевых удалениях, а обыкновенная сейсмограмма ОТВ, причем пункт взрыва расположен слева, а сейсмотрассы зарегистрированы на последовательно увеличивающихся расстояниях от ПВ. Прямая определяет скорость распространения в воде. Более крутые оси синфазности соответствуют поверхностной волне. На рисунке присутствуют два типа поверхностных волн один со скоростью распространения, приблизительно в 2 раза меньшей, чем скорость в воде, и другой, более сильный по энергии, со скоростью, равной четверти скорости в водном слое. Последняя, более сильная волна демонстрирует интересное свойство, известное как частотная дисперсия. Если посмотреть на сейсмограмму, то можно заметить, что высокочастотные волны вступают раньше низкочастотных.

Поверхностные волны являются нежелательными помехами, так как из-за экспоненциального затухания с глубиной практически не реагируют на интересующие нас глубинные объекты. Поэтому сейсмическую энергию, расположенную в краевой области пространства $(\omega, k_x)$, следует подавлять. Судя по математическому описанию, сложное отображение модельного пространства в сейсмическое и обратно является не тождественным, а идемпотентным преобразованием.

### Отражения и высокочастотный предел

Известно, что наличие контакта между различными веществами может привести к появлению акустических свойств. Контактом называется такое место, где либо $K$, либо $\rho$ изменяются скачком в пространстве. В одномерном случае либо $\partial K/\partial x$, либо $\partial\rho\ \partial x$, либо обе производные могут оказаться бесконечными в точке и по любой из указанных причин может возникнуть отражение. Поэтому может быть выглядит немного странным то обстоятельство, что в уравнении (34б) производная плотности содержится в явном виде, а производная несжимаемости — в неявном. Последнее означает, что исключение из уравнения (34б) градиента плотности не приведет к ликвидации всех возможных отражений. Исключение указанных членов уравнения, однако, несколько упрощает дальнейший анализ и, поскольку случай постоянной плотности вполне допустим, эти члены зачастую опускаются.

Существуют известные математические условия, при соблюдении которых можно пренебрегать членами первого порядка. Сосредоточим внимание на волне, движущейся в некотором направлении. В этом случае величины $\omega$, $k_x$ и $k_z$ будут определенным образом взаимосвязаны между собой. В предельном случае, когда частота возрастает до бесконечности, члены

уравнения (35) $P_{tt}$, $P_{xx}$ и $P_{zz}$ будут стремиться к бесконечности в квадрате. Пусть две среды постепенно переходят друг в друга, т. е. производная $\partial\rho/\partial x$ меньше бесконечности. Члены, которыми мы пренебрегли при переходе от уравнения (34б) к уравнению (35), имеют вид $\rho_x P_x$ и $\rho_z P_z$. При стремлении частоты к бесконечности они стремятся к бесконечности лишь в первой степени, а следовательно их можно отбросить.

Указанные выше члены уравнения обычно учитываются в тех разделах теоретической сейсмологии, которые посвящены расчету синтетических сейсмотрасс. Но когда цель состоит в создании моделей глубинного строения Земли по полевым сейсморазведочным наблюдениям, которую собственно, преследует и настоящая книга — ими обычно пренебрегают. Построение сейсмических изображений глубинного строения земных недр — более сложная задача, чем расчет синтетической сейсмотрассы. Но часто этими членами пренебрегают лишь потому, что хотят уменьшить клаттер, или когерентную интерференцию. Ими можно пренебрегать и по той же причине, по которой уравнения часто записывают не в трехмерном, а в двухмерном варианте — трехмерное расширение обычно возможно, но редко необходимо. Кроме того, эти члены часто отбрасывают для облегчения способов решения, основанных на фурье-преобразованиях. Могут возникнуть и такие практические ситуации, при которых их следует принимать во внимание. В случае применения способа конечных разностей (см. раздел 2.2) учет этих членов не представляет затруднений. Но каждый раз, когда предпринимаются попытки учитывать их при обработке наблюденных данных, следует также принимать в расчет и другие факторы, играющие равнозначную роль, как, например, предположение о том, что акустическое уравнение удовлетворительно аппроксимирует мир упругих деформаций.

**Упражнения**

1. Самая верхняя часть разреза обычно насыщена водой ниже некоторого уровня, называемого уровнем грунтовых вод. По данным изучения ВЧР с помощью ударных воздействий известно, что значение сейсмической скорости на уровне грунтовых вод скачком возрастает до величины скорости в воде, т. е. 1500 м с. Предположим, что на участке профиля наблюдаются поверхностные волны, превышающие по амплитуде отраженные, и принято решение закапывать сейсмоприемники. По наблюдениям, скорость мешающих поверхностных волн равна 0,6 скорости в воде. На какую глубину следует погрузить сейсмоприемники под уровень грунтовых вод, чтобы ослабить поверхностные волны в 10 раз? Предположите, что в наблюдениях содержатся все частоты в диапазоне от 10 до 100 Гц. Положите также, что $\log_e 10 \approx 2{,}2\pi \approx 6$ и т. д.

2. Возьмите функцию вида

$$P(z, t) = P_0 \frac{1}{\sqrt{Y(z)}} e^{i\omega t} \; i \int_0^{\omega} \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{K(\xi)}}\, d\xi, \tag{41}$$

где $P_0$ постоянная, а $Y = 1\sqrt{\rho(z) K(z)}$, в качестве пробного решения одномерного волнового уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{K(z)}{\rho(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P = -\frac{K(z)}{\rho(z)^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{42}$$

Подставьте пробное решение (41) в волновое уравнение (42). Найдите оптимальное соотношение между изменением вещественных свойств и справедливостью данного решения при различных длинах волн.

## 1.5. Параксиальное волновое уравнение

В отличие от уравнений Фурье, скалярное волновое уравнение допускает произвольные вариации плотности и скорости по пространству. Поэтому можно было бы ожидать, что оно годится для прямого построения мигрированных разрезов. Но для миграционных преобразований оно практически не находит применения. Попробуем сначала разобраться в чем тут дело, а затем познакомимся с параксиальным волновым уравнением, лежащим в основе большинства способов миграции, применяемых при обработке сейсморазведочных материалов.

С философской точки зрения параксиальное волновое уравнение занимает место где-то посредине между простыми понятиями лучевой теории и теорий плоских волн, с одной стороны, и более глубокими концепциями, воплощенными в волновом уравнении, с другой стороны. (Заметим, что параксиальное волновое уравнение называют также уравнением с одним квадратным корнем. В гл. 2 частный его случай назван параболическим волновым уравнением). Вывод параболического волнового уравнения начинается не с простых понятий классической физики, а идет сложными путями, напоминающими вывод уравнения Шредингера квантовой физики. Требуется некоторое время, чтобы понять, для чего нужно такое уравнение. Когда в 1970 г. я впервые ввел параболическое волновое уравнение в сейсморазведочные вычислительные процедуры, к нему отнеслись с заметным неодобрением. К счастью для вас, читатели, годы работы с ним научили меня доступно объяснять смысл и необходимость этого уравнения. К счастью для меня самого, оно заняло доминирующее положение в сфере обработки сейсморазведочных материалов, что должно побудить вас к серьезному его изучению.

Вы познакомитесь с параксиальным уравнением через методы Фурье. Последние несовместимы с коэффициентами, переменными по пространственной координате. Поскольку желательно учитывать пространственные вариации скорости, указанное ограничение следует, в конечном счете, снять. Поэтому после перевода параксиального уравнения в область Фурье величина $ik_z$ заменяется на $\partial/\partial z$, а $ik_x$ — на $\partial/\partial x$. Теперь скорость может быть переменной по пространственной координате. В итоге получаем дифференциальное уравнение в частных производных, которое часто решается методами конечных разностей. Описанная выше процедура вывода оказывается действительной, но лица, изучающие миграционное преобразо-

вание, по вполне понятным причинам относятся к ней с недоверием. Поэтому в конце настоящего раздела книги дается вывод параксиального уравнения без использования методов анализа Фурье.

### Почему скалярное волновое уравнение редко используется для миграции

Жизнь была бы значительно проще, если бы миграционное преобразование можно было делать с помощью скалярного, а не параксиального волнового уравнения. Действительно, миграционные преобразования можно выполнять с помощью скалярного волнового уравнения и у этого способа имеются некоторые потенциальные достоинства [74, 88]. Тем не менее более 99% современных способов миграционного преобразования сейсморазведочных материалов основываются на параксиальном уравнении.

Главная трудность со скалярным волновым уравнением состоит в том, что при его решении невозможно избежать необходимости учета кратных отражений. Концепция же излучающих отражающих границ не предусматривает расчета многократных отражений. Дело в том, что первичные (однократные) отражения можно моделировать с помощью только восходящих волн, но для расчета кратных требуются и восходящие и падающие. Кратные отражения, наблюдаемые в действительности, совершенно отличаются от прогнозируемых в соответствии с концепцией излучающих отражающих границ. В случае кратного отражения от морского дна при времени отражения от него, равном $t_0$, кратные отражения наблюдаются на временах $2t_0$, $3t_0$, $4t_0, \ldots$. В концептуальной модели излучающих границ при времени пробега волны до дна, равном $t_0$, кратные отражения будут наблюдаться на временах $3t_0$, $5t_0$, $7t_0, \ldots$.

При конструировании телескопа, микроскопа или фотоаппарата его создатель принимает меры для подавления отраженного в обратном направлении света, так как последний создает на изображении фон помех. По аналогии со сказанным, при создании программы миграционного преобразования мы не учитываем энергию, не участвующую в формировании изображения. Скалярное же волновое уравнение с переменными в пространстве коэффициентами будет генерировать такую энергию, которая особенно вредна, если обладает когерентностью и мигрирует на те значения времени, на которых однократные отражения слабы. Она создает такой же эффект, что и отражение от ярко освещенного окна, падающее на экран телевизора. Поэтому, если вы все-таки попытаетесь выполнять миграционное преобразование с помощью скалярного волново-

го уравнения, то постарайтесь сделать скоростную функцию как можно более гладкой.

Еще одна трудность построения сейсмических изображений с помощью скалярного волнового уравнения возникает из-за быстрозатухающих волн. Эти волны экспоненциально возрастают или затухают с глубиной. Природа экстраполирует волны в прямом направлении во времени, а мы экстраполируем их по глубинной координате.

Третья трудность построения сейсмического изображения с помощью скалярного волнового уравнения связана с начальными условиями. Скалярное волновое уравнение содержит в себе вторую производную по глубине $z$. Это означает, что на оси $z$ нужно задать два граничных условия. Поскольку наблюдения производятся на поверхности земли ($z=0$), кажется естественным, что этими граничными условиями должны быть величины $P$ и $\partial P/\partial z$ при $z=0$. Но производная $\partial P/\partial z$ не регистрируется.

К счастью, при восстановлении изображения при помощи ЭВМ мы используем параксиальное волновое уравнение.

### Вывод параксиального волнового уравнения фурье-методом

Возьмем дисперсионное соотношение скалярного волнового уравнения

$$k_x^2+k_z^2=\omega^2/v^2. \tag{43}$$

Извлечем квадратный корень:

$$k_z=\pm\sqrt{\omega^2/v^2-k_x^2}. \tag{44}$$

Чтобы оставить только восходящие волны, нужно просто взять знак минус в формуле (44). Уравнение (43) представляет собой трехмерное фурье-преобразование скалярного волнового уравнения. Если сделаем обратное преобразование уравнения (44), то получим уравнение только для одного типа волн — восходящих или падающих. Обратное фурье-преобразование по одной из координат состоит лишь в выборе одной или более из следующих подстановок:

$$\partial/\partial t=-i\omega, \tag{45а}$$

$$\partial/\partial x=ik_x, \tag{45б}$$

$$\partial/\partial z=ik_z. \tag{45в}$$

После обратного преобразования по $z$ получаем дифференциальное уравнение относительно $z$, в котором можно использовать переменную по $z$ скорость. То же самое имеем и по координате $x$. Любое из уравнений, получающееся после любой из подстановок (45) в уравнение (44), называется параксиаль-

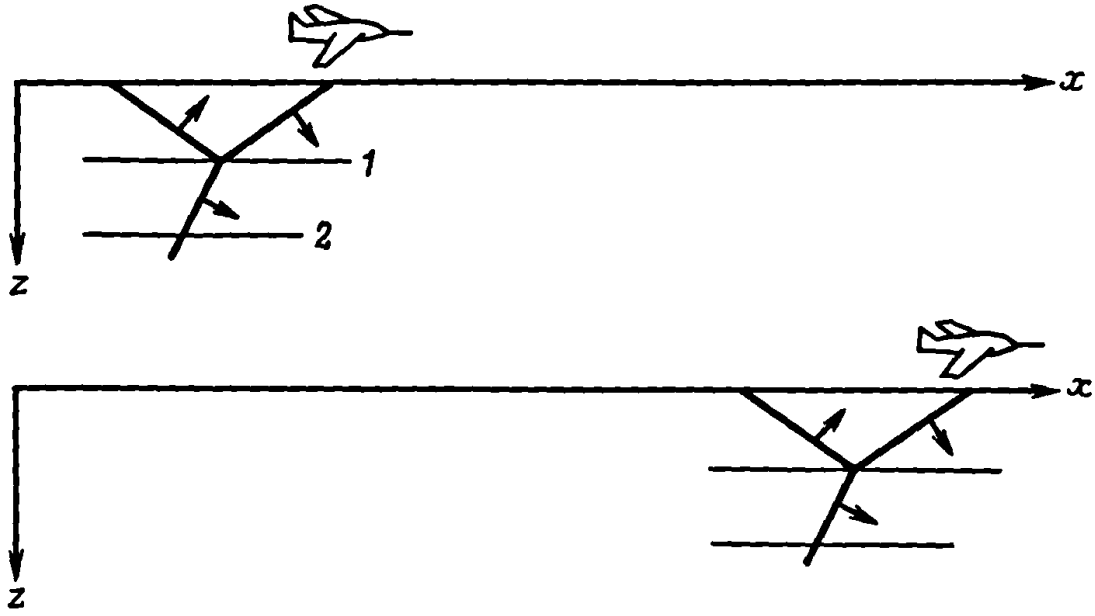



РИС. 33. Быстро летящий самолет излучает в земную среду звуковую волну:
1 и 2 — границы раздела сред

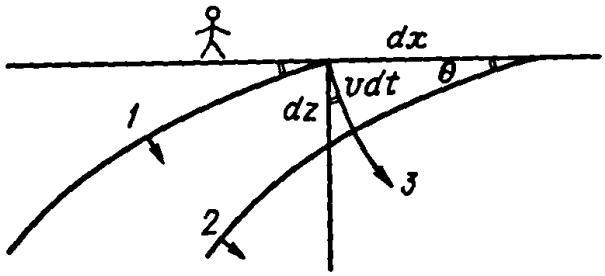



РИС. 34. Фронты и лучи падающей волны в слоистой среде. Фронты волн переносятся в горизонтальном направлении параллельно сами себе:
*1* более ранний фронт; *2* фронт волны; *3* — луч

ным. Подробно параксиальные уравнения будут рассмотрены в гл. 2. Но перед детальной интерпретацией параксиальное волновое уравнение будет получено без использования преобразований Фурье. Такой способ вывода параксиального уравнения не только указывает ясный путь к основному уравнению миграционного преобразования сейсмической записи, но и дает лучшее представление о реальных возможностях данного уравнения миграции и его отличии от скалярного волнового уравнения.

## Волны Снеллиуса

Изучение волн естественно начинать с уравнений, которые описывают поведение плоских волн в однородной среде. Однако для сейсморазведки отраженными волнами типична ситуация, когда средние скорости до глубоких отражающих горизонтов более чем в 2 раза выше средних скоростей до самых мелких горизонтов. Поэтому при анализе полевых наблюдений почти всегда учитывается изменение скорости с глубиной. В теории сейсморазведки приходится считать, что волны во всем напоминают плоские за исключением того, что траектории их распространения искривляются в соответствии с распределением скоростных слоев по разрезу $v(z)$. Сказанное иллюстрируется схематически на рис. 33 для случая волн, излучаемых горизонтально летящим сверхзвуковым самолетом.

Самолет летит горизонтально с постоянной скоростью. Он перемещается от точки $x=-\infty$ до $x=+\infty$. Пусть земная среда горизонтально слоиста. У такой модели нет ничего, что могло бы отличить одну точку на оси $x$ от другой. Сейсмическая скорость же меняется от слоя к слою. Могут возникать простые отраженные, головные, поперечные и кратно-отраженные волны. Какая бы волновая картина ни возникла, она будет перемещаться вместе с самолетом. Вместе с ним движется картина волновых фронтов, возникающих вблизи от самолета. Верхняя и нижняя части картины волновых фронтов перемещаются в горизонтальном направлении с одинаковой скоростью, несмотря на то, что скорость в среде с глубиной возрастает. Если бы скорости были разные, картина исказилась бы, войдя в противоречие с предположением о симметрии переноса. Скорость горизонтального перемещения, или, точнее, обратная ей величина имеет несколько названий. В практической работе ее называют градиентом времени, а в теоретических трудах—лучевым параметром. Очень важно подчеркнуть, что $\partial t/\partial x$ не меняется с глубиной, несмотря даже на то, что сейсмическая скорость переменна по глубине. В однородной среде направление распространения волны с глубиной не изменяется. В слоистой среде лучевой параметр $\partial t/\partial x$ не зависит от координаты глубины.

На рис. 34 показаны соотношения дифференциальной геометрии для этой волны. Из них следует, что

$$\partial t/\partial x=(\sin\theta/v), \tag{46а}$$

$$\partial t/\partial z=(\cos\theta/v). \tag{46б}$$

Последние равенства определяют два варианта скорости (обратной). Первый вариант горизонтальная скорость, измеряемая вдоль поверхности земли и называемая горизонтальной фазовой скоростью. Второй вариант—скорость по вертикали, измеряется она в скважинах и называется вертикальной фазовой скоростью. Заметим, что обе названные скорости превышают скорость распространения волны в среде $v$. Проекции волновых фронтов на координатные оси дают значения скорости бóльшие, а проекции лучей—меньшие $v$. Величина, обратная фазовой скорости, называется временным градиентом или медленностью.

Закон Снеллиуса связывает углы падения и преломления волны в контактирующих слоях. Постоянство соотношения (46а) при изменении глубины выражает просто-напросто закон Снеллиуса. Все волны, используемые в сейсморазведке, распространяются в средах, слоистых в скоростном отношении. Поэтому их нельзя называть плоскими. Вместе с тем нужно как-то называть те волны, которые по своим характеристикам

близки к плоским. Под волной Снеллиуса будем подразумевать обобщение плоской волны на случай слоистой по скоростям среды, описываемой распределением $v(z)$.

Другими словами, плоская волна, вошедшая в среду с переменной по глубине скоростью $v(z)$, превращается в волну Снеллиуса. Вместо угла падения, характеризующего плоскую волну, в случае волны Снеллиуса имеем параметр Снеллиуса $p=\partial t/\partial x$.

Следует подчеркнуть, что параметр Снеллиуса можно наблюдать непосредственно на поверхности земли, и в то же время ни $v$, ни $\theta$ не поддаются прямому измерению. Поскольку $p=\partial t/\partial x$ не только поддается измерению, но и постоянен с глубиной, его обычно используют для исключения угла $\theta$ из уравнения (46):

$$\partial t/\partial x=(\sin\theta)/v=p, \tag{47а}$$

$$\partial t/\partial z=(\cos\theta)/v=\left(1/v\left(z^{\backslash 2}-p^2\right)^{1\ 2}\right). \tag{47б}$$

При условии, что в начальный момент времени волна Снеллиуса проходит через начало координат, выражение для времени вступления волны Снеллиуса в произвольную область пространства принимает вид

$$t(x,\ z)=\frac{\sin\theta}{v}x+\int_0^z\frac{\cos\theta}{v}dz, \tag{48а}$$

$$t(x,\ z)=px+\int_0^z\left(\frac{1}{v(z)^2}-p^2\right)^{1\ 2}dz. \tag{48б}$$

Справедливость уравнения (48б) легко проверить, найдя $\partial t/\partial x$ и $\partial t/\partial z$ и сравнив его с уравнением (47).

Волна Снеллиуса может переносить волновой импульс $f(t)$ произвольной формы. Воспользуемся выражением (48) для того, чтобы определить время запаздывания $t_0$ волны $f[t-t_0(x,\ z)]$ в точке $(x,\ z)$:

$$\text{Волна Снеллиуса } (t,\ x,\ z)=f\left\{t-px-\int_0^z\left(\frac{1}{v(z)^2}-p^2\right)^{1\ 2}dz\right\}. \tag{49}$$

**Уравнения временного сдвига**

Важной задачей является предсказание по заданной на поверхности земли волне волнового поля внутри среды. В случае падающей плоской волны эта задача решается с помощью сдвигающего во времени дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial P(t,\ z)}{\partial z}=-\frac{1}{v}\frac{\partial p(t,\ z)}{\partial t}, \tag{50}$$

что сразу же проверяется путем подстановки пробного решения вида

$$P(t,\ z)=f(t-z/v)\ \text{(для однородной среды)} \tag{51}$$

или

$$P(t, z)=f\left(t-\int_0^z \frac{dz}{v(z)}\right) \text{ (для случая } v(z)\text{).} \tag{52}$$

Указанная выше задача решается и в случае невертикального падения волн. Для этого используется дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial P(t, x, z)}{\partial z}=-\frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial P(t, x, z)}{\partial t}, \tag{53}$$

решением которого будет функция

$$P(t, x, z)=f\left(t-px-\int_0^z \frac{\partial t}{\partial z}dz\right). \tag{54}$$

При истолковании равенств (53) и (54) следует помнить, что величина $1/(\partial t/\partial z)$ представляет собой кажущуюся скорость вдоль ствола скважины. Частная производная волнового поля $P(t, x, z)$ по глубинной координате $z$ берется при постоянном значении $x$, что означает экстраполяцию волны вниз по скважине. Мысль о том, что экстраполяцию вниз можно осуществлять простым сдвигом во времени, справедлива только в том случае, когда налицо одиночная волна Снеллиуса. Это значит, что в любой точке пространства должна наблюдаться одна и та же производная функция времени.

Подстановка вида (47) позволяет также записать уравнение (53) в различных вариантах:

$$\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial z}=-\frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial t}, \tag{55а}$$

$$\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial z}=-\left(\frac{1}{v(z)^2}-p^2\right)\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial t}, \tag{55б}$$

$$\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial z}=-\left[\frac{1}{v(z)^2}-\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial t}. \tag{55в}$$

Уравнение (55) представляет собой параксиальное волновое уравнение. Поскольку $\partial t/\partial x=p$ поддается измерению на поверхности земли, может показаться, что с помощью уравнения (55в) вместе с принятым скоростным законом $v(z)$ и наблюденными данными $P(t, x, z=0)$ можно будет определить $\partial P/\partial z$, что является первым обязательным шагом при продолжении поля вниз. Но ранее было сделано предположение о том, что существует единственная волна Снеллиуса, а не суперпозиция нескольких. В случае суперпозиции волн, следующих различными снеллиусовыми путями, в различных местах должны наблюдаться неодинаковые временны́е функции. Тогда простым временным сдвигом не удалось бы получать продолжение поля вниз. К счастью, сложное волновое поле, изменяющееся от точки к точке, поддается разложению на множество волн Снеллиуса, каждую из которых можно экстраполировать вниз с помощью дифференциального

уравнения (55) или его решения (54). Одним из способов разложения сложного волнового поля является фурье-анализ.

**Разложение Фурье**

Для осуществления фурье-анализа функции $f(x, t, z=0)$, наблюдаемой на поверхности земли, требуется ядро преобразования Фурье вида $\exp(-i\omega t + ik_x x)$. Перемещаясь, на поверхности земли с обратной скоростью $\partial t/\partial x = k_x/\omega$, фаза ядра Фурье, и, следовательно, само ядро остаются постоянными. Только те синусоидальные составляющие, которые перемещаются со скоростью волны Снеллиуса, могут иметь с ядром ненулевую корреляцию. Поэтому если возмущение представлено одиночной волной Снеллиуса, то все фурье-составляющие за исключением удовлетворяющих равенству $p = k_x\,\omega$ обратятся в нуль. Нужно запомнить следующие основные соотношения:

$$\partial t/\partial x = \sin\theta/v = p = k_x/\omega. \qquad (56)$$

В теоретических исследованиях часто пользуются функцией с квадратным корнем, которая получается, если выразить косинус через соотношение (56).

Пользуясь фурье-представлением параметра Снеллиуса $p$, можно записать уравнение с квадратным корнем (55) в еще более практичной форме. Но для этого нужно сначала найти выражение с квадратным корнем в фурье-области. Последнее делается путем замены оператора $\partial/\partial t$ в уравнении (55) на $-i\omega$. В результате имеем

$$\partial P(\omega, k_x, z)/\partial z = +i\omega\left(1\ v(z)^2 - k_x^2/\omega^2\right)^{1\ 2} P(\omega, k_x, z). \qquad (57)$$

На данном этапе безразлично, что определять — дифференциальное уравнение (57), либо его решение (54) с помощью $f$ в качестве комплексной показательной функции:

$$P(\omega, k_x, z)\mathrm{e}^{-i\omega t} = \exp\left\{i\omega \int_0^z \left(1/v(z)^2 - k_x^2/\omega^2\right)^{1\ 2} dz\right\}. \qquad (58)$$

Позднее, при учете латеральных вариаций скорости $v(x)$ решение (58) становится неправильным. В то же время дифференциальное уравнение (55в) остается полноценным описанием любого локального поведения плоской волны. Но прежде чем приступить к рассмотрению латеральных градиентов скорости, следует более внимательно изучить вертикальные градиенты.

**Градиенты скорости**

Подставив выражение для волнового поля Снеллиуса в скалярное волновое уравнение, обнаруживаем, что наше определение волны Снеллиуса ему не удовлетворяет. Указанное расхождение возникает лишь в присутствии градиентов скорости. Другими словами, если какие-то верхний и нижний слои характеризуются, соответственно, постоянными значениями скорости $v_1$ и $v_2$, то волновое уравнение будет удовлетворяться

везде, за исключением той области, где $v_1$ изменяется на $v_2$. Из-за влияния коэффициентов прохождения в решениях скалярного волнового уравнения должны изменяться амплитудные значения при переходе через границу раздела скоростных слоев. Согласно нашему определению, волна Снеллиуса не меняет амплитуду с глубиной. Параксиальное уравнение можно видоизменить таким образом, чтобы оно учитывало воздействие коэффициента прохождения. На деле оно редко модифицируется и, возможно, по той же причине, по которой часто пренебрегают градиентами плотности.

Даже если модифицировать параксиальное волновое уравнение так, чтобы оно учитывало влияние коэффициентов прохождения, все равно его решение не будет удовлетворять скалярному уравнению из-за отсутствия отраженной волны. Но именно это и хорошо, так как для целей обработки наблюдений желательно располагать именно параксиальным уравнением.

**Упражнения**

1. Найдите математическое выражение для плоской волны, которая представляет собой импульсную функцию времени, распространяющуюся под углом 15 к вертикали в направлении положительной оси $z$. Выразите полученный результат в следующих координатах:
а) $(t, x, z)$; б) $(\omega, x, z)$; в) $(\omega, k_x, z)$; г) $(\omega, p, z)$.

2. Найдите такую амплитудную функцию $A(z)$, которая, будучи умноженной на $f$ из уравнения (54), даст приближенное решение скалярного волнового уравнения для случая слоистой среды $v(z)$. При $p=0$ решение должно свестись к решению из упр. 2, раздела 1.4.

## 1.6. Искусство двухмерных преобразований Фурье

Ниже даются несколько полезных советов для тех, кто будет заниматься практическим воплощением методов миграционного преобразования.

### Знаки и весовые коэффициенты в фурье-преобразованиях

При фурье-преобразованиях координат $t$, $x$, $z$ для каждой из них нужно условиться о знаках. Инженеры-электронщики выбрали одно соглашение, а физики — другое. Хотя и те, и другие убедительно обосновывают свой выбор, наши условия ближе к условиям работы физиков, поэтому будем пользоваться их соглашением. В случае обратного фурье-преобразования оно имеет вид

$$p(t, x, z)=\iiint e^{-i\omega t+ik_x x+ik_z z} P(\omega, k_x, k_z)\, d\omega\, dk_x dk_z. \qquad (59)$$

В случае прямого фурье-преобразования пространственные переменные имеют отрицательный знак, а время — положительный. Пределы интегрирования и весовой коэффициент в случае

непрерывных функций отличаются от соответствующих параметров для дискретного случая. В любом случае преобразования редко производятся аналитическим способом. Поскольку дополнительные значки, требующиеся для обозначения пределов интегрирования и весовых коэффициентов, скорее затемняют, а не проясняют обсуждение какого-либо вопроса, впредь они будут вовсе опускаться за исключением тех случаев, когда они играют действительно полезную роль.

Соглашение о знаках имеет большое значение. Из-за обилия разнообразных пространственных осей (ниже будут введены и преобразовываться такие пространственные координаты, как средняя точка и удаление взрыв прием) имеет смысл разработать хорошее соглашение о знаках. Тот, кто решит прибегнуть к подходу типа «меняй знаки до тех пор, пока система не заработает», скорее всего придут в замешательство от числа возможных перестановок. Соглашение о знаках, разработанное физиками, убедительно обосновано, а поскольку обоснование известно, само соглашение легко запомнить.

По соглашению, волны должны распространяться в положительном направлении пространственной оси. Это особенно ясно, когда в качестве пространственной оси используется радиус. Атомы, как и геофизические источники, всегда излучают от некоторой точки в бесконечность, а не наоборот. Поэтому условимся, что волны всегда движутся в положительном направлении вдоль любой пространственной оси. Применительно к уравнению (59) это условие означает, что знаки пространственных частот должны быть противоположны знаку временной частоты. Данное утверждение имеет силу как для прямого, так и для обратного преобразований.

Последнее обстоятельство оставляет свободу выбора относительно того, каким из осей — временной или пространственным — присвоить положительный знак. Пространственных осей много, а временная лишь одна. Если, например, положить, что пространственный градиент $\partial/\partial x$, $\partial/\partial z$ и т. д. связан с положительным $k$-вектором, т. е. с $ik_x$, $ik_z$ и т. д., то количество отрицательных знаков и число перемен знака будет минимальным. Разумеется, в этом случае производная по времени останется с множителем $-i\omega$.

Подобное знаковое соглашение противоречит практике инженеров-электронщиков, редко имеющим дело с пространственными осями и поэтому вполне естественно остановивших свой выбор на связи производной $\partial/\partial t$ с $+i\omega$. Единственный известный мне разумный довод в пользу этого выбора состоит в том, что наши вычисления производятся с помощью матричного спецпроцессора, разработанного и запрограммированного инженерами-электрониками, а они, разумеется, пользовались при этом своим привычным соглашением о знаках. Вид

соглашения безразличен для программ преобразования комплексных функций времени в комплексные функции частоты, так как в этом случае соглашение о знаках контролируется пользователем. Но он не безразличен для программ преобразования вещественных функций времени в комплексные функции частоты. Единственный способ существования в обоих мирах заключается в том, чтобы просто помнить, что найденные программой частоты изменяются не в диапазоне от 0 до $+\pi$, как указано в тексте программы, а от 0 до $-\pi$. Правда, возможен и иной путь — найти комплексную сопряженную преобразования, при вычислении которой знак оси $\omega$ меняется на обратный. В алгоритме Столта обычно первой преобразуется пространственная координата. В этом случае соглашение, заложенное в матричном процессоре, оказывается нашим.

### Каким образом транспортировать большую матрицу

Следует считать крупной удачей то, что большие матрицы можно легко транспортировать. Именно это обстоятельство позволяет осуществлять обработку сейсморазведочных материалов с использованием волнового уравнения на небольших миникомпьютерах. Под очень большой матрицей подразумевается такая матрица, для которой объем машинной памяти с произвольным доступом оказывается недостаточным. Если же две копии данных могут разместиться в памяти с произвольным доступом, то транспонирование представляет собой просто операцию копирования: $T(i, j) = M(j, i)$.

Алгоритм транспонирования очень больших матриц прост, но с хитростями. Поэтому начнем с описания карточного фокуса. У меня в руках колода карт, из которой вынуты девятки, десятки и все картинки. Обозначим через $a$, $b$, $c$ и $d$ черви, пики, трефы и бубны, соответственно. Кроме того, расположим карты в следующем порядке (единицей обозначим туз):

$$1a\ 1b\ 1c\ 1d\ \ 2a\ 2b\ 2c\ 2d\ \ 3a \ldots 8d$$

Теперь сдадим карты лицевой стороной вверх попеременно одну в стопку $A$, одну в стопку $B$. Имеем:

стопка $A$: $1a\ 1c\ 2a\ 2c\ 3a\ 3c \ldots 8a\ 8c$
стопка $B$: $1b\ 1d\ 2b\ 2d\ 3b\ 3d \ldots 8b\ 8d$

Затем положим стопку $A$ на стопку $B$ и снова сдадим попеременно на две стопки $A'$ и $B'$:

стопка $A'$: $1a\ 2a\ 3a \ldots 8a\ 1b\ 2b \ldots 8b$
стопка $B'$: $1c\ 2c\ 3c \ldots 8c\ 1d\ 2d \ldots 8d$

Теперь положим стопку $A'$ на стопку $B'$. Итак, в начале фокуса в колоде шли вместе все тузы, все двойки и т. д., а сейчас карты оказались сгруппированными по мастям. Таким образом, легко убедиться, что всего за две сдачи произошло транспонирование колоды карт. При этом карты не разбрасывались по столу, так как к ним не нужно было осуществлять так называемый произвольный доступ. Операция транспонирования таким образом выполнена путем последовательного расклада колоды карт. В принципе, для транспонирования матрицы по указанному алгоритму требуются четыре магнитные ленты и символические объемы оперативной памяти.

Теперь попытаемся сделать обратное транспонирование. Заметим, что при этом потребовалось сдать карты 3 раза, а не 2, как при первом транспонировании. Этот факт объясняется тем, что в колоде находится $2^2=4$ масти и $2^3=8$ чисел. Вообще-то существует другой алгоритм, который позволяет выполнять обратное транспонирование всего за две сдачи. Просто сделаем все в обратной последовательности. Начнем со стопок $A'$ и $B'$. Образуем стопку $A$, выбирая попеременно по карте из стопок $A'$ и $B'$. Аналогично поступим и при формировании стопки B. Затем указанная процедура повторяется. Первый алгоритм называется алгоритмом сортировки, а второй — алгоритмом объединения. С помощью указанных двух алгоритмов можно выполнить операцию транспонирования матрицы размером $2^n \times 2^m$ за меньшее из двух чисел — $n$ или $m$ — число операций над исходными данными.

Возможны разнообразные обобщения. При наличии четырех колод карт можно разработать схемы транспонирования матриц размером $4^n$. При этом уменьшается число операций, но растет число требуемых магнитофонов.

Таким образом, минимизация числа операций над сейсморазведочными материалами оборачивается максимизацией числа магнитных лент. На практике вам не придется пользоваться при транспонировании самими лентами. Вместо этого операции с магнитными лентами имитируются на большой дисковой памяти. При этом выбираемое число «магнитных лент» определяется отношением скорости случайных переносов к скорости последовательных переносов.

## Двухмерное фурье-преобразование без транспонирования

Самым прямым методом двухмерного преобразования Фурье с помощью компьютера является метод повторного применения одномерного преобразования. Самое легкое — выбрать «быстрое» направление вычислений, т. е. в случае хранения матрицы данных столбцами — как это имеет место при употреблении ФОРТРАНа — преобразование столбцов сводится к три-

виальному повторению одномерной программы. Теперь рассмотрим случай записи матрицы данных строками. Если матрица помещается в память с произвольным доступом, то все происходит просто: можно копировать строку за строкой, превращая их в некий вектор, последний преобразуется по Фурье и копируется обратно в строку матрицы. Более типичным является случай, когда матрица данных не помещается в оперативную память с произвольным доступом, но зато вполне соответствует объему так называемой «виртуальной» памяти. Последнее означает, что программист может записать равенство $T(i, j) = M(j, i)$, но программа будет работать недопустимо медленно, так как, чтобы отыскать одно-единственное число, с диска должна считываться одна полная страница виртуальной памяти.

С концептуальной точки зрения один из простых путей преобразования по строкам заключается в транспонировании матрицы, последующем преобразовании каждого из столбцов и обратном транспонировании преобразованной матрицы. Ф. Рокка предложил более быстрый и простой способ преобразования Фурье по строчным индексам. В основной программе преобразования Фурье предусмотрены дополнительные вычисления, например, расчет или поиск значений синусов и косинусов. Обычно такие вычисления повторяются всякий раз, когда делается преобразование Фурье. Согласно методу Рокки вспомогательные вычисления производятся лишь раз и все строки подвергаются фурье-преобразованию. Поэтому он действует быстрее, чем даже прямое преобразование. Ниже дается его описание.

Матрицу данных можно рассматривать в качестве вектора-строки, элементами которой являются столбцы. Если заставить «быстрый» индекс пробегать вниз по столбцу, то столбцы можно будет подвергать одномерному преобразованию либо до, либо после выполнения построчных операций. В свою очередь, для выполнения операций над строками нужно лишь изменить обыкновенную программу одномерного фурье-преобразования, заменив операции скалярного сложения или умножения на те же самые операции, производимые над каждым из элементов соответствующего столбца.

Изложенный выше порядок доступа к данным делает строчный алгоритм Рокки эффективным при работе с виртуальной памятью. До появления виртуальной памяти строчный алгоритм Рокки осуществлялся путем считывания и записи вокруг внутренних циклов.

Для иллюстрации работы метода Рокки была составлена программа строчного фурье-преобразования, базирующаяся на имеющейся [53] программе одномерного преобразования Фурье. Она приводится в следующем разделе. Эта программа

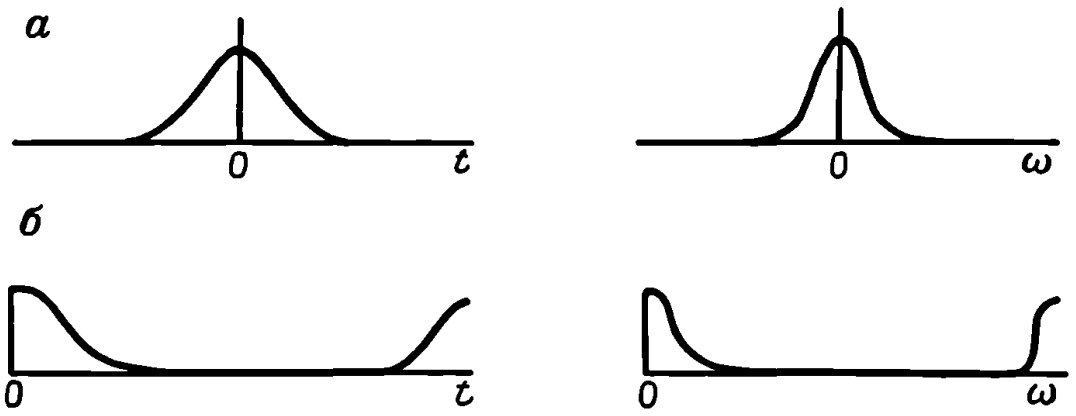



РИС. 35. Организация машинной памяти в программах одномерного преобразования Фурье:
*а* люди; *б* ЭВМ

преобразует комплексные функции времени в комплексные функции частоты. Если же вам придется составлять программу фурье-преобразования вещественных функций в комплексные, помните, что по предположению вещественные и мнимые части функций должны заноситься в память в смежные ячейки. Указанное предположение действительно для столбцового, но не строчного, индекса.

## 1.7. Примеры программ

С помощью помещенных в данном разделе программ получены многие примеры, включенные в настоящую книгу. Они составлены с упором на четкость и краткость и отлично приспособлены к различного рода экспериментам. Хорошие программы производственной обработки данных сейсморазведки обладают в 3 4 раза большим быстродействием. Увеличить быстродействие можно, используя специальные приемы программирования. Например, наблюденные данные вещественны, но при составлении приведенных ниже учебных программ предполагалось, что они комплексны.

### Рациональный ФОРТРАН-РАЦФОР

Наиболее универсальным вычислительным языком в настоящее время считается самый простой ФОРТРАН. Но он практически не годится для учебного изучения характеристик алгоритмов. Идеальным учебным языком программирования является РАЦФОР (аббревиатура слов «рациональный ФОРТРАН», т. е. абсолютно чистый). При помощи транслятора программы на Рацфоре быстро превращаются в обычные фортрановские.

Если вам уже знаком ФОРТРАН или любой другой язык программирования, вам будет несложно изучить язык Рацфор. Операторы в строке можно разделять знаком «;». Их можно

объединять с помощью фигурных скобок { }. В DO-циклах не нужно указывать номера операторов, так как фигурные скобки { } уже определяют диапазон действия. При условии, что «*if*( )» истинно, выполняются операторы, заключенные в следующих фигурных скобках. Оператор «Else{ }» выполняет заданную вами операцию. Разрывы применяют для облегчения чтения программ. Пишите своим собственным стилем, мой оказался сверхсжатым. Все, что следует за знаком #, представляет собой комментарий. Одиночные операторы можно не заключать в фигурные скобки. Слово «Break» вызывает досрочную остановку операций в скобках. Команда «Break 2» позволяет выйти из двойных скобок. По команде «While( ){ }» операторы в фигурных скобках повторяются до тех пор, пока условие ( ) действительно. Оператор «Repeat{ }унтил ( )» представляет собой цикл, осуществляющий проверку в конце. Оператор цикла более общего характера, чем «до», имеет вид «for(initialize; condition; reinitialize) { }». Команда «Next» вызывает переход в конец любого цикла и повторную проверку контрольного условия. Фортрановские реляционные операторы типа .gt., .ge., .ne., и т. д. можно записывать как >, >=, !=, и т. д. Логические операторы .and. и .or. можно записывать, как & и |. Все, что не имеет смысла для рацфоровского препроцессора, например, фортрановский вход—выход, пропускается без каких-либо изменений.

### Двухмерное преобразование Фурье

Двухмерные преобразования Фурье базируются на одномерном. Исключительно быстрым способом расчета одномерного преобразования Фурье является алгоритм Кули—Тьюки или быстрое преобразование Фурье [БПФ]. Предполагается, что все функции периодические, поэтому физические затухающие функции должны рассматриваться в качестве функций, обладающих очень большим периодом. Обычно накладывается еще одно ограничение период должен равняться точно $2^N$ отсчетам дискретизированной функции, причем $N$—целое число. Чтобы усвоить принцип действия БПФ, нужно заглянуть в работу [53] или в любой учебник по электротехнике. Чтобы составлять и пользоваться программами двухмерного преобразования Фурье, необходимо знать лишь одномерное определение входных и выходных данных. На рис. 35 наглядно изображена связь временного и частотного представления данных при расположении $t=0$ и $\omega=0$ посредине оси. В то же время в стандартных программах одномерного фурье-преобразования начала соответствующих координат размещаются на одном из концов вектора.

Возьмем одномерное преобразование Фурье восьмиотсчетной временной функции. На выходе в первом элементе вектора находится нулевая частота. Найквистова частота $\pi$, самая высокая частота, которую можно представить на сетке, а именно, функция вида $+1, -1, +1, -1, \ldots$, находится в пятом элементе восьмиточечной функции и за ней следует последовательность отрицательных частот. Наименьшая из ненулевых отрицательных частот находится в восьмом элементе вектора. Если бы имелся девятый элемент, то в силу периодичности он равнялся бы первому. Самая обычная ошибка начинающего — он обнаруживает, что результат миграции не является вещественным. Как и следовало ожидать, мнимая часть должна составлять примерно $10^{-6}$ от вещественной. Если мнимая часть намного больше, будучи при этом пропорциональной дроби $1/N$, где $N$ — длительность вектора, то это указывает на ошибку в программе.

Ниже приводится текст для программы двухмерного преобразования. Команда «write» — местная фортрановская, а не рацфоровская. Преобразуемая функция низкочастотна по оси времен и весьма низкочастотна по оси расстояний.

```
#Тест для программы двухмерного преобразования Фурье
integer it, nt, ix, nx;        complex cp(64, 64), cwork(64)
open(4, file='plotfile', status='new', access='direct', form='unformatted', recl=1)
nx=64;    nt=64;
do it=1, nt
        do ix=1, nx
                cp(it, ix)=0.
cp(16, 3)=1.; cp(16, 4)=4.; cp(16, 5)=6.; cp(16, 6)=4.; cp(16, 7)=1.
cp(17, 3)=1.; cp(17, 4)=4.; cp(17, 5)=6.; cp(17, 6)=4.; cp(17, 7)=1.
call ft2d(nt, nx, cp, +1., +1., cwork)
write(4, rec=1) ((real(cp)it, ix)), it=1, nt), ix=1, nx)
stop; end
```

Приведем наиболее элементарную программу двухмерного преобразования Фурье:

```
#Двухмерное преобразование Фурье с помощью одномерного
subroutine ft2d(n1, n2, cp, sign1, sign2, cwork)
complex cp(n1, n2), cwork(n2)
integer n1, n2
real sign1, sign2
do i2=1, n2                          #transform over the fast dimension
        call fork(n1, cp(1, i2), signl)      #one-dimensional Fourier transform
do i1=1, n1 {                                #transform over the slow dimension
        doi2=1, n2
                cwork(i2)=cp(i1, i2)
        call fork(n2, cwork, sign2)  #one-dimensional Fourier transform
        do i2=1, n2
                cp(i1, i2)=cwork(i2)
        }
return;         end
```

И наконец, есть программа быстрого одномерного преобра-

зования Фурье. Она представляет собой рацфоровскую версию фортрановской «вилки», помещенной на стр. 12 в работе [53]. Как всегда, через Lx обозначен показатель степени 2, выходная величина cx(1) представляет собой нулевую частоту, cx(Lx/2+ +1) — так называемая частота Найквиста, а cx(Lx) — наименьшая отрицательная частота. Алгоритм краток, но с фокусами, поэтому не стоит пытаться прочесть программу, не проконсультировавшись в других пособиях по программированию.

```
#Быстрое одномерное преобразование Фурье
subroutine fork(lx, cx, signi)
complex cx(lx), carg, cexp, cw, ct
j=1; k=1;        sc=sqrt(1. lx)
do i=1, lx{
        if(i<=j) {ct=cx(j)*sc; cx(j)=cx(i)*sc; cx(i)=ct}
        m=lx 2
        while(j>m) {j=j-m; m=m 2; if(m<1) break}
        j=i+m
        }
repeat{
        istep=2*k
        do m=1, k{
                carg=(0., 1.)*(3.14159265*signi*(m-1)) k; cw=cexp(carg)
                do i=m, lx, istep
                        {ct=cw*cx(i+k); cx(i+k)=cx(i)-ct; cx(i)=cx(i)+ct}
                }
        k=istep
        } until(k>=lx)
return;         end
```

Фурье-преобразования состоят из вещественной и мнимой частей. Иногда обе они выводятся на графопостроитель. Часто же мнимой частью пренебрегают. Последнее объясняется тем, что большинство временных функций, с которыми мы имеем дело, ранее момента времени $t=0$ равны нулю. Поэтому их фурье-преобразования должны удовлетворять определенным условиям, а именно, вещественная и мнимая части должны быть связаны между собой преобразованием Гильберта. В нашем случае одна из частей часто похожа на косинусную функцию, а другая на синусную. Поэтому по внешнему виду вещественной части часто бывает легко представить, как выглядит мнимая. На рис. 36 изображен результат на выходе тестовой программы.

### Миграционное преобразование Столта

В приводимой ниже программе миграции по методу Столта для превращения оси $\omega$ в ось $k_z$ использована линейная интерполяция. Взвешивание посредством $dk_z/d\omega$ сказывается мало, поэтому ради сокращения текста программы оно опущено. (Кроме того, что-то нужно оставить и для упражне-

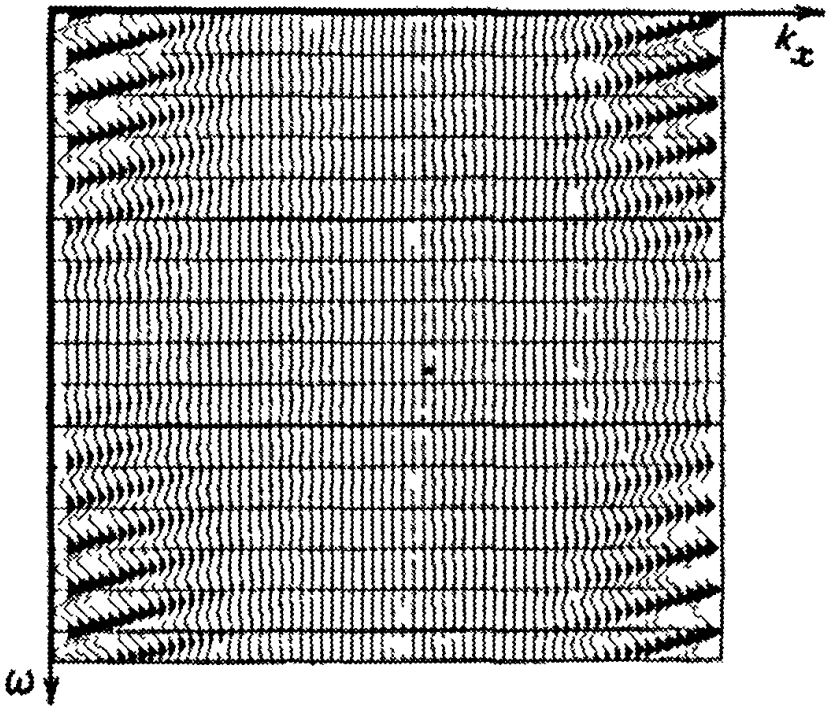



РИС. 36. Результат на выходе тестовой программы двухмерного преобразования Фурье

ний). В качестве тестового примера взято построение полуокружностей из импульсов.

```
#Тест для миграционного преобразования Столта
integer it, nt, ix, nx; real vdtodx; complex cp(256, 64)
open(4, file='plotfile', status='new', access='direct', form='unformatted', recl=1)
nx=64;      nt=256;      vdtodx=1. 4.              #vdtodx=v dt dx
do it=1, nt
        do ix=1, nx
                cp(it, ix)=0.
cp(32, 9)=1.;      cp(64, 17)=1.;      cp(128, 33)=1.
call stolt(nt, nx, cp, vdtodx)
write(4, rec=1) ((real(cp(it, ix)), it=1, nt), ix=1, nx)
stop; end

#Подпрограмма миграции Столта без косинусного взвешивания
subroutine stolt(nt, nx, cp, vdtodx)
integer ikx, nx, nt, nth, iktau, iom
real om, vkx, wl, wh, aktau, pi, pionth, vdtodx
complex cp(nt, nx), cbf(1025)
pi=3.14159265; nth=nt 2; pionth=pi nth;
call ft2d(nt, nx, cp, 1., -1., cbf)
do ikx=1, nx {
        vkx=(ikx-1)*2.*pi*vdtodx nx
        if (ikx>nx 2) vkx=2.*pi*vdtodx-vkx        #отрицательные κx
        cbf(1)=0.;        cbf(nt+1)=0.              #рабочий буфер
        do iom=1, nt
                cbf(iom)=cp(iom, ikx)             #исключение взвешивания
        cp(1, ikx)=0.                             #исключение нулевой частоты
        do iktau=2, nth+1{                          #растягивание
                aktau+(iktau-1.01)*pionth
                om=sqrt(aktau*aktau+vkx*vkx);      iom=1+om pionth
                if(iom<nth) {
                        wl=iom-om pionth;      wh=1.-wl
                        cp(iktau, ikx)    =wl*cbf(iom)    +wh*cbf(iom+1)
                        cp(nt-iktau+2, ikx)=wl*cbf(nt-iom+2)+wh*cbf(nt-iom+1)
                        }
                else
```

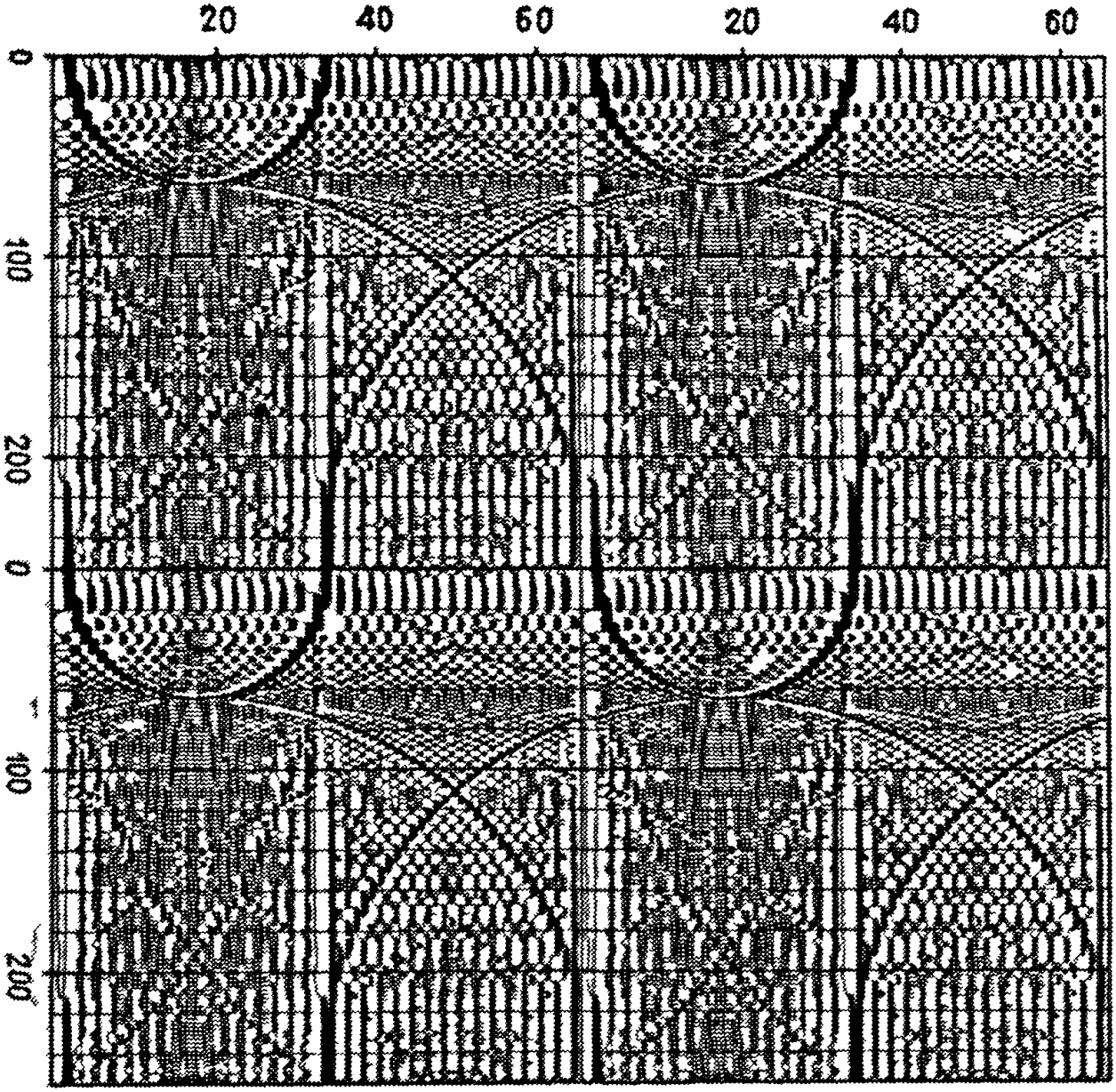



РИС. 37. Периодичность результата программы миграционного преобразования Столта

```
                    cp(iktau, ikx)=0.
                }
        }
call ft2d(nt, nx, cp, -1., 1., cbf)
return;       end
```

Результат применения данной тестовой программы приводится в разделе 1.3. Чтобы подчеркнуть периодическую природу этого решения, все полуокружности, кроме одной, убраны, а результат выведен с применением нелинейной регулировки усиления. На рис. 37 помещены рядом четыре одинаковых графика.

### Фурье-преобразование строк матрицы

Фурье-преобразование по строкам матрицы, впервые предложенное Ф. Роккой, обладает несколько бóльшим быстродействием по сравнению с элементарной программой, поскольку

минимально необходимые вспомогательные вычисления производятся один раз, в то время как фурье-преобразованию подвергается каждая строка матрицы. Но главное преимущество метода Рокки над элементарным подходом заключается в том, что исходные данные не нужно транспонировать и программа работает эффективно в любом режиме.

```
#Построчное фурье-преобразование Рокки
#     sign2 should be+1. or-1. it is the sign of i.
subroutine rowcc (n1, n2, cx, sign2, scale)
complex cx(n1, n2), cmplx, cw, cdel
do i1=1, n1
      do i2=1, n2
            cx(i1, i2)=cx(i1, i2)*scale
j=1
do i=1, n2 {
      if(i<=j) call twid1(n1, cx(1, i), cx(1, j))
      m=n 2 2
      while (j>m) {j=j-m; m=m 2; if (m<1) break}
      j=j+m}
lstep=1
repeat {
      istep=2*lstep; cw=1.
      arg=sign2*3.14159265 lstep; cdel=cmplx(cos(arg), sin(arg))
      do m=1, lstep {
            do i=m, n2, istep
                  call twid2(n1, cw, cx(1, i), cx(1, i+lstep))
            cw=cw*cdel
      Lstep=istep
      } until(lstep>=n2)
return;      end
subroutine twid1(n, cx, cy)
complex cx(n), cy(n), ct
do i=1, n {ct=cx(i); cx(i)=cy(i); cy(i)=ct}
return;      end

#Если хотите оптимизировать, делайте это здесь
subroutine twid2(n, cw, cx, cy)
complex cx(n), cy(n), ctemp, cw
do i=1,n{ctemp=cw*cy(i); cy(i)=cx(i)-ctemp; cx(i)=cx(i)+ctemp}
return;      end
```

**Упражнения**

1. Большинство функций времени вещественно, их мнимая часть равна нулю. Покажите, что в таком случае $F(\omega, k)$ можно определять по $F(-\omega, -k)$.

2. Подтвердите на своем компьютере и плоттере, что рис. 36 получен с помощью предложенной в учебнике программы.

3. Вещественную часть фурье-преобразования, полученного в предыдущем упражнении, сложно интерпретировать, так как отрицательные частоты и волновые числа расположены неудобно. Видоизмените программу так, чтобы $F(\omega, k)$ имела начало координат в центральной точке (33,33) вычерченной сетки. Видоизмените функцию $f(t, x)$ перед тем, как выполнять преобразование Фурье, в связи с чем вспомните теорему о сдвиге. Запишите $f(t, x)$ и новую, более просто интерпретируемую функцию $F(\omega, k)$. Обозначьте оси.

4. В результате точечного взрыва на поверхности земли в точке $x=32$ и в момент времени $t=0$ получены синтетические сейсмограммы на плоскости

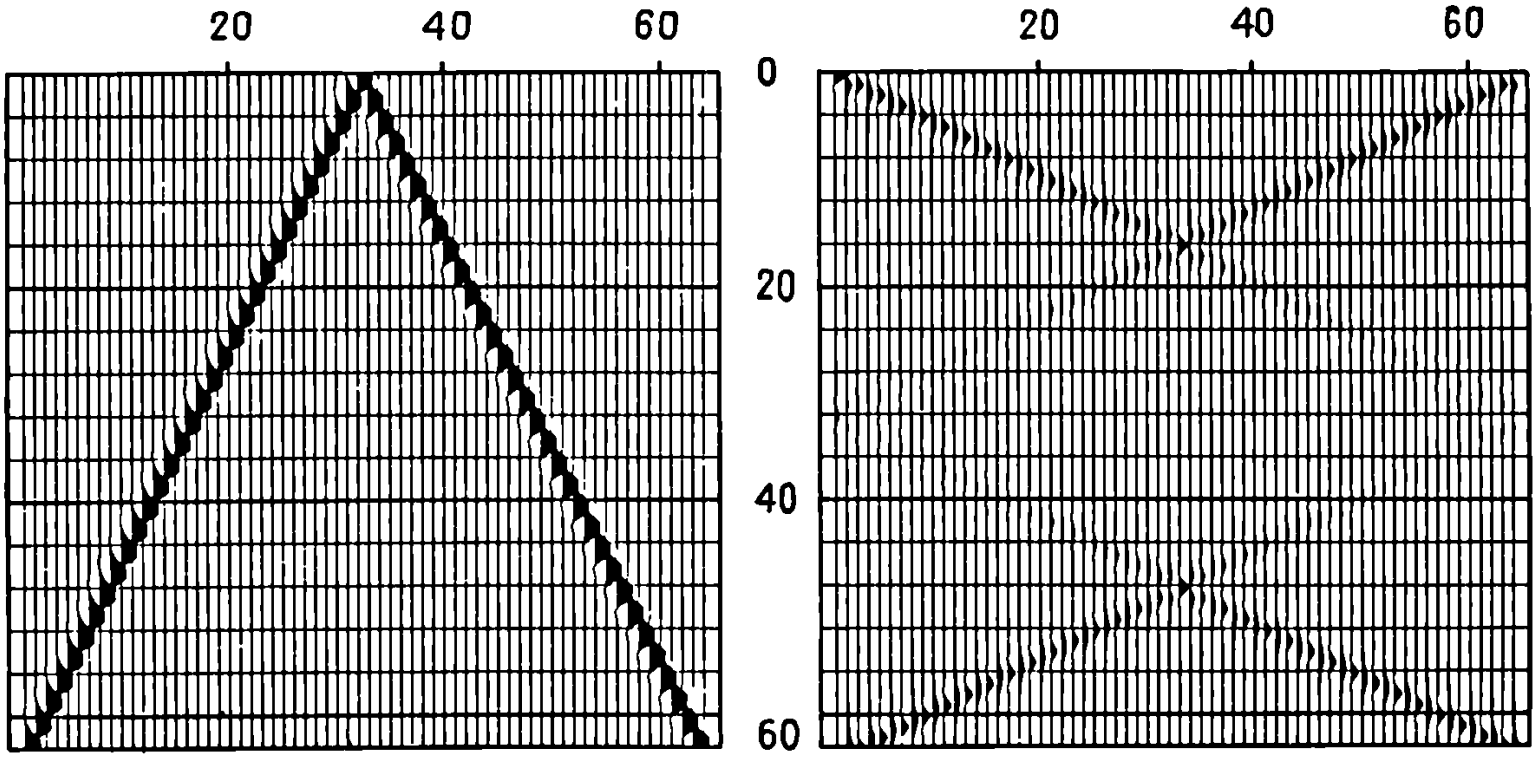



РИС. 38.

($t$, $x$), изображенные на рис. 38 внизу слева. Справа изображены магнитуды двухмерного преобразования Фурье на плоскости ($\omega$, $k_x$). Начала координат у каждого из графиков находятся в верхнем левом углу. Как будут выглядеть эти графики при наблюдении на поверхности среды, скорость распространения упругих волн в которой наполовину ниже?

5. Внесите в программу миграционного преобразования Столта подходящую зависимость амплитуды от косинуса угла падения. Протестировав, убедитесь, что различие небольшое, если не принимать во внимание некоторого изменения интенсивности в зависимости от угла распространения волны.

6. Напишите программу расчета дифрагированной волны методом Столта, т. е. рассчитайте соответствующие гиперболы для заданных внутри среды точечных узлов дифракции.

7. Если вы вводите в программу дифракции Столта весовую функцию, обратную косинусной, то не забывайте о полюсе, расположенном в краевой области существования быстрозатухающих волн. Когда лучше выполнить растяжение: до взвешивания или после? Почему?

8. Ошибку интерполяции в программе Столта можно уменьшить путем уменьшения скорости осцилляции функции $P(\omega)$ в зависимости от $\omega$. При этом помните, что при отрицательных $t$ функция $p(t)$ обращается в нуль. Поэтому перед интерполяцией нужно умножить $P(\omega)$ на $\exp(-i\omega\tau)$ и только после этого делить. Каким должно быть значение постоянной $\tau$, используемое в данной программе?

# Глава 2
# ПОЧЕМУ ИМЕННО ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ?

В предыдущей главе мы научились экстраполировать волновые поля вниз, внутрь среды. Сам по себе процесс прост, так как он представляет собой всего лишь умножение на exp $[ik_z(\omega, k_x)z]$ в частотной области. В дальнейшем мы убедимся, что конечно-разностные методы сложны. Их применение связано с новыми приближениями и новыми ловушками для неосторожных. Так зачем же их изучать? Ответ на этот вопрос состоит, прежде всего, в том, что многие находят конечно-разностные методы более доступными для понимания и усвоения. В пространстве $(t, x, z)$ нет ни комплексных чисел, ни комплексных показательных функций, ни магического ящика, называемого быстрым преобразованием Фурье.

Данная ситуация аналогична ситуации при обычной частотной фильтрации. Частотную фильтрацию можно выполнять либо перемножением в частотной области, либо сверткой во временной. При волновой экстраполяции операции умножения выполняются как по временной $\omega$, так и по пространственной $k_x$ частоте. Новым моментом является двухмерное пространство $(\omega, k_x)$, которое пришло на смену старому, одномерному $\omega$. Заданный выше вопрос: «Зачем нужны конечные разности?» представляет собой разновидность старого вопроса: «Кого должна беспокоить фильтрация во временном представлении сейчас, когда известно быстрое преобразование Фурье?»

Этот вопрос будет задаваться много раз и при различных обстоятельствах. Позднее в изложении появятся координата удаления пункта возбуждения от пункта приема и координата средней точки между ними. И снова нужно будет делать выбор между способом конечных разностей и преобразованием Фурье при преобразованиях данных по разным осям.

Ответ на наш вопрос, так же как и задачи, стоящие перед геофизикой, многоплановый. Большинство критериев, лежащих в основе ответа на этот вопрос, уже знакомы по обыкновенной теории фильтров. Инженеры-электронщики и специалисты по старым методам деконволюции, которые занялись обработкой волн, не представляли себе, что их знания находят применение в столь многочисленных областях.

На рис. 39 показано различие между вычислениями в частотном (фурье-плоскости) и временном представлениях. Картина, изображенная на рисунке, была рассчитана с помощью сетки

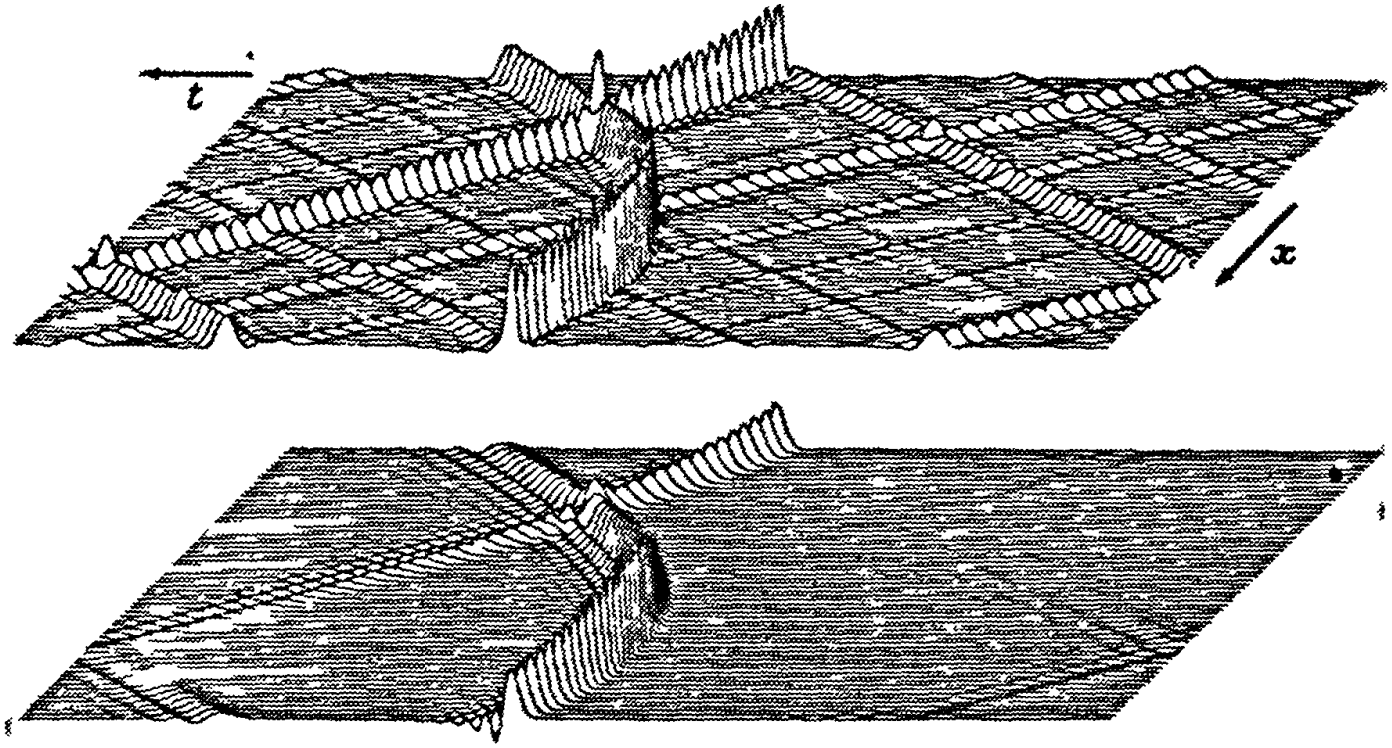



РИС. 39. Гипербола в частотном (вверху) и временном (внизу) представлениях

размером 256 × 64. Она предназначена для наглядной демонстрации тех трудностей, которые возникают в каждой из областей. Как правило, расчеты по Фурье бывают отягощены периодическими помехами, а во временном представлении — дисперсией частот (см. раздел 4.3). («Временная гипербола», изображенная на рис. 39, в действительности смоделирована в частотной области с целью удобства ее рассмотрения). В настоящей главе мы познакомимся с методикой расчетов во временном представлении. Более детальное сопоставление обоих представлений будет дано в гл. 4.

Даже если миграционное преобразование всегда выполняется в частотной области, стоит изучить методы миграции во временном представлении. Это поможет осмысленно выбирать параметры, обеспечивающие качественные результаты во временной области. Например, обе части рис. 39 получены в частотной области, но одна из них имитировала вычисления во временном представлении.

### Изменения по горизонтали

В обыкновенной теории линейной фильтрации доказывается, что фильтр можно сделать переменным во времени. Это обстоятельство представляется полезным в сейсморазведке отраженными волнами, так как частотный состав отражений меняется со временем. Неприятной особенностью переменных во времени фильтров является то, что их нельзя задавать в частотном представлении в виде простого произведения.

Поэтому, применяя переменные во времени фильтры, приходится покидать частотную область, или же прибегать к различного рода ухищрениям (например, к растяжению временной оси), цель которых сделать так, чтобы все выглядело независимым от временно́й координаты.

Все высказанные соображения касаются и горизонтальной пространственной оси $x$. Особой заботы на пространственных осях требует сейсмическая скорость $v$. Если она переменна по пространственной координате, скажем, имеет вид $v(x)$, то операцию экстраполяции волновых полей вверх и вниз уже нельзя выражать через произведение в области $k_x$. Процедуры волновой экстраполяции следует переместить из области пространственной частоты в область, где используются конечные разности. Иначе снова придется прибегнуть к разного рода ухищрениям типа растяжения оси $x$, чтобы попытаться сделать все величины независимыми от пространственной координаты.

В случае двух и более измерений, процедура растяжения становится более сложной и дает менее удовлетворительные результаты.

Более простой ситуацией, когда применение конечных разностей предпочтительнее методов Фурье, является ситуация с нерегулярным расположением приемных каналов. Если по каким-то причинам сейсмоприемники распределили по профилю неравномерно, т. е. расстояние $\Delta x$ между сейсморегистрирующими каналами зависит от $x$, то можно либо повторно дискретизировать наблюдения, соблюдая равномерный шаг каналов, и затем сделать фурье-преобразования, либо же непосредственно приступить к обработке с помощью конечных разностей.

### Приращение времени по годографу

Многое в сейсморазведке сводится к измерению временных сдвигов. Под приращением времени по годографу понимается изменение времени пробега волны с изменением точки наблюдения. Вычисления в частотной области обычно завершают переходом во временную, для того чтобы иметь возможность наблюдать воочию эти приращения. Преимущество вычислений во временной области заключается в том, что временные сдвиги между волновыми пакетами можно измерять в процессе вычислений. В частотной области не составляет труда соотнестись с одним-единственным моментом времени, или же оценить временной сдвиг, присущий всей временной функции в целом. Но обеспечить доступ к отдельным импульсоидам или волновым пакетам, не возвращаясь во временное представление, нелегко.

Фильтр экстраполяции волнового поля в верхнее и в нижнее полупространства вида $\exp[ik_z(\omega, k_x)z]$ по своей сути является широкополосным. Такой фильтр перемещает сейсмическую энергию по круговым траекториям без какого-либо ее усиления или ослабления. Я считаю, что именно поэтому миграционная фильтрация более интересна, чем минимально-фазовая. Миграционные фильтры собирают энергию со всех сторон и помещают ее в надлежащее место, а минимально-фазовые ничего не перемещают они просто одни частоты усиливают, а другие ослабляют. Любой фильтр типа $\exp[i\Phi(\omega)]$ является широкополосным. Каковы же ограничивающие вид функции $\Phi(\omega)$ условия, которые делают временное представление функции $\exp(i\Phi)$ причинным?

Оказывается, что причинные широкополосные фильтры обладают весьма полезным свойством — возможностью представления через Z-преобразования, а именно: $Z^N\bar{A}(1/Z)/A(Z)$. Лица, знакомые с теорией фильтров, догадаются, что деление на $A(Z)$ поднимает целый ряд новых вопросов — обратная связь, экономичность параметризации и возможная неустойчивость. Заметим, что Z-преобразования рассматриваются в разделе 4.6. Все перечисленные выше вопросы возникнут при использовании конечных разностей для экстраполяции волновых полей в нижнее полупространство. Последний процесс является процессом с обратной связью, который отличается экономичностью. Если возьмем, например, $A(Z)=1+a_1Z+a_2Z^2$, то увидим, что имеющихся в наличии двух регулируемых коэффициентов вполне достаточно для выбора частоты и ширины полосы пропускания, обеспечивающих избирательную задержку. Экономичность параметризации означает также и экономическую эффективность практического воплощения. Это хорошо. Хорошо также, когда из самой формы функции вытекает ее причинность. В то же время экономические преимущества сопровождаются и недостатками. И наконец нужно изучить некоторые положения теории устойчивости и пользоваться ими. Функция $A(Z)$ должна быть минимально-фазовой.

### Сравнение частотной и временной областей

Методы Фурье носят глобальный характер. Это значит, что перед началом обработки под руками должно находиться полное множество наблюденных данных. Отдаленные погрешности и усечения данных могут приводить к серьезным локальным эффектам. Конечно-разностные методы, напротив, локальны по своей природе. Отсчеты данных прямо связаны лишь с соседними. Отдаленные погрешности распространяются медленно. Приведу два примера ловушек, в которые можно

угодить при работе в частотной области. Оба примера взяты из одномерного анализа временных рядов.

При работе в частотном представлении фильтры с крутыми срезами, например, имеющие абсолютно прямоугольную полосу пропускания в диапазоне 8  80 Гц, задаются легко. Но во временной области задание подобных фильтров связано с определенными проблемами. Такие фильтры оказываются непричинными, т. е. создающими некоторый отклик еще до того, как энергия поступила на вход. Еще одна их крайне неприятная особенность заключается в том, что временная реакция убывает лишь обратно пропорционально $t$. Глубинные отражения, амплитуда которых убывает обратно пропорционально квадрату времени, оказываются потерянными в длительной реакции фильтра на ранние вступления.

Чаще возникают трудности с режекторными фильтрами, рассчитанными на подавление наводок от силовых линий (50 или 60 Гц). Они имеются у большинства типов сейсморегистрирующей аппаратуры. Фильтры-пробки легко конструировать в области Z-преобразований. Начнем с нуля, расположенного на единичной окружности точно на 60 Гц. Такой фильтр подавляет помеху (наводку), но также искажает полосу пропускания и на других частотах. Поэтому поместим полюс на крошечном расстоянии от нуля за пределами единичного круга. Расстояние между полюсом и нулем определит полосу пропускания фильтра-пробки. Если смотреть на эту пару с некоторого расстояния, полюс своим воздействием почти уничтожает влияние нуля. Таким образом, получается идеально плоский спектр вне зоны подавления. Попробуем зарегистрировать наблюдения с включенным режекторным фильтром. Поздние вступления волн слабее ранних, поэтому в программе графовывода предусмотрено возрастание усиления со временем. После установки в сейсмостанцию фильтров, рассчитанных на подавление наводок от силовых электролиний, обнаруживается, что они усилили наводки вместо того, чтобы их ослабить. Почему? Это объясняется тем, что вы поместили полюс слишком близко к единичной окружности. Введение экспоненциальной регулировки усиления фактически привело к удалению единичной окружности от нуля в направлении к полюсу. Полюс мог вообще оказаться на самой единичной окружности! Если же поместить полюс дальше от нуля, то получится более широкополосная пробка и заграждающий фильтр теперь будет работать с переменным во времени коэффициентом усиления более эффективно.

### Добавление нулей

С внедрением в практику быстрого преобразования Фурье одним из его первых применений стала свертка. Если фильтр

состоит более, чем из 50 отсчетов, то его применение оказывается эффективнее в частотной области. Получаемый при этом результат будет во всем идентичен свертке, если к концам рядов наблюденных данных и фильтра добавить необходимое количество нулей. Они делают невидимым периодический характер дискретного преобразования Фурье. При фильтрации временных функций длительностью приблизительно в тысячу отсчетов большая экономия машинного времени достигается за счет незначительного увеличения дополнительных объемов памяти. Сейсмические разрезы часто состоят из нескольких тысяч трасс. При миграционном преобразовании нули должны добавляться одновременно на пространственной и временной осях. Ниже показаны те три места, где могут потребоваться нули:

| | |
|---|---|
| данные | 0 |
| 0 | 0 |

В разделе 4.5 содержатся предложения по преодолению трудностей, сопутствующих применению миграционных преобразований в фурье-представлении.

**Заглядывая вперед**

Только что был дан краткий обзор некоторых проблем, связанных с преобразованиями в частотной области. Проблемы, связанные с преобразованиями в пространственном представлении, будут рассмотрены в гл. 2 и 4. Обработка сейсморазведочных материалов представляет собой многомерную задачу, при решении которой различные измерения зачастую обрабатываются разными путями. Но если вы считаете, что фурье-область полностью удовлетворяет вас, можете из настоящей главы многое пропустить и перейти сразу же к гл. 3. В ней вы познакомитесь с координатой расстояния взрыв — прием, суммированием ОСТ и миграционным преобразованием до суммирования.

## 2.1. Уравнения волновой экстраполяции

Уравнение волновой экстраполяции представляет собой выражение для производной волнового поля, как правило, по координате глубины $z$. Когда известны волновое поле и его производная, экстраполяцию можно осуществлять посредством различных численных представлений функции $P(z+\Delta z)= =P(z)+\Delta z dP/dz$. Следовательно, необходимо найти выражение для производной $dP/dz$. Существуют два теоретических метода нахождения производной $dP/dz$: появившийся первым

метод преобразований и более поздний дисперсионных соотношений.

### Встреча с параболическим волновым уравнением

В те времена, когда параболическое уравнение было введено в практику сейсморазведки на нефть (1969 г.), широко было распространено мнение, что «волновая теория не работает». Тогда сейсморазведчики пользовались лучевым представлением. Волновое уравнение не использовалось на практике, оно интересовало только университетских теоретиков. (Фактически же волновая теория применялась при изучении поверхностных волн, возникающих при мощных землетрясениях, т. е. явлений, масштаб которых в 1000 раз превышает сейсморазведочные.) Но даже по мнению университетских научных работников конечно-разностные решения волнового уравнения были недостаточно хорошими. При тогдашних вычислительных машинах решения больше походили на «вибрации магнитных головок на барабане», чем на «сейсмические волны в земной среде». Параболическое уравнение было первоначально предназначено для ускорения процесса моделирования волн конечно-разностным методом.

Непреодолимая до 1969 г. трудность возникала из неправильного предположения, занимавшего центральное место во всей существовавшей в то время теории сейсмических волн и гласившего, что геологическая среда горизонтально-слоиста. Единственный путь отказа от такого предположения заключался в лучевой теории, но расчет траекторий лучей никак не был связан с моделированием формы волновых импульсов. В сейсморазведке на нефть и газ почти все исследования по волновой теории сосредоточились впоследствии на случае вертикального падения. Путь к успеху лежал в направлении расширения зоны исследований в пределах определенного углового диапазона и в отказе от большей части известной в то время тяжеловесной теории сейсморазведки.

Вертикально падающая плоская волна математически описывается уравнением вида

$$P(t,\ x,\ z)=P_0 e^{-i\omega(t-z\,v)}. \tag{60}$$

В нем $P_0$ абсолютно постоянна. Смоделировать небольшое отклонение от вертикального падения можно путем замены постоянной $P_0$ на нечто, не строго постоянное, а медленно меняющееся, скажем на $Q(x,\ z)$:

$$P(t,\ x,\ z)=Q(x,\ z)\,e^{-i\omega(t-z\,v)}. \tag{61}$$

Подставив выражение (61) в скалярное волновое уравнение $P_{xx}+P_{zz}=P_{tt}/v^2$, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q+\left(\frac{i\omega}{v}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 Q=-\frac{\omega^2}{v^2}Q,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{2i\omega}{v}\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}=0. \qquad (62)$$

В итоге, волновое уравнение оказалось выраженным через функцию $Q(x, z)$. До сих пор не делалось никаких аппроксимаций. Если потребовать, чтобы волновое поле оставалось близким к полю плоской волны, то функция $Q(x, z)$ должна быть почти постоянной величиной. Подходящим средством достижения подобной цели является приравнивание высшей производной функции $Q$ по глубине, т. е. $Q_{zz}$, к нулю. В результате получается параболическое волновое уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{v}{-2i\omega}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}. \qquad (63)$$

Когда его впервые начали использовать в сейсморазведке, самым важным свойством этого уравнения считали следующее: поскольку вторая производная волнового поля, близкого к вертикально падающей плоской волне, по координате $x$ мала, то будет малой и производная по $z$. Следовательно, конечно-разностный метод вычислений должен допускать использование больших приращений по глубине $\Delta z$, т. е. быть в состоянии работать с моделями, близкими к реальным геологическим средам.

Вскоре стало очевидным, что параболическое волновое уравнение именно то, которое необходимо для построения сейсмических изображений, т. е. является уравнением волновой экстраполяции.

Любопытно, что уравнение (63) равнозначно уравнению Шредингера из квантовой механики.

Изложенный выше подход основанный на преобразованиях был и остается полезным и эффективным. Но все же вскоре он был заменен подходом, основанным на дисперсионном уравнении, так как последний позволяет получать уравнения для экстраполяции волн, регистрируемых на больших удалениях от источника, т. е. при больших углах падения волны на границу.

### Разложение квадратного корня способом Мюира

При пользовании последним методом волновых экстраполяций приходится искать различные приближения к дисперсионному соотношению, содержащему квадратный корень. Затем приближенное дисперсионное соотношение преобразуется обратно в дифференциальное уравнение. Благодаря в основном

усилиям Френсиса Мюира, со времени выхода в свет книги [53] дисперсионный подход получил значительное развитие.

В результате подстановки плоской волны $\exp(-i\omega t+ik_x x+ik_z z)$ в двухмерное скалярное волновое уравнение получается дисперсионное соотношение

$$k_z^2+k_x^2=\omega^2/v^2. \tag{64}$$

Выделив из него $k_z$ при положительном квадратном корне, т. е. взяв в данном случае падающие волны, получим

$$k_z=(\omega/v)\sqrt{1-v^2k_x^2/\omega^2}. \tag{65а}$$

Чтобы совершить обратное преобразование оси $z$, достаточно признать, что $ik_z$ соотносится с производной $\partial/\partial z$. В результате получим выражение для экстраполяции волнового поля

$$\partial p/\partial z=i(\omega/v)\sqrt{1-(v^2k_x^2/\omega^2)}\,P. \tag{65б}$$

Чтобы перевести уравнение (65б) в пространственную область, недостаточно заменить $k_x$ второй производной по $x$. Трудность связана с отсутствием четкого понятия корня квадратного дифференциального оператора. Квадратному корню из дифференциального оператора не дается определения в учебниках по дифференциальному исчислению для старших курсов университетов, не существует и его простого представления через конечные разности. Квадратный корень, о котором идет речь, приобретает смысл лишь в том случае, когда он представлен некоторым усеченным рядом. В разделе 4.6 будет показано, что ряд Тейлора для этих целей не годится. Ф. Мюир показал, что предложенные ранее 15- и 45-градусный методы представляют собой просто-напросто усечения разложения в непрерывную дробь. Чтобы в этом убедиться, определим $X$ и $P$, записав уравнение (65а) в виде

$$k_z=(\omega/v)\sqrt{1-X^2}=(\omega\, v)\,R. \tag{66}$$

Искомое отношение многочленов порядка $n$ обозначим через $R_n$, которое будем находить с помощью рекуррентной формулы

$$R_{n+1}=1-X^2/(1+R_n). \tag{67}$$

Чтобы увидеть, к чему сходится данная последовательность, если она вообще сходится, положим в формуле (67) $n=\infty$ и найдем

$$R_\infty=1-X^2\,(1+R_\infty),\ R_\infty(1+R_\infty)=1+R_\infty-X^2,\ R^2=1-X^2. \tag{68}$$

Квадратный корень из уравнения (68) дает требуемое выражение (66). Геометрическое истолкование уравнения (68) сводится к тому, что квадрат косинуса угла падения волны равен единице минус квадрат его синуса. Усечение разложения приводит

**Таблица 2**

**Первые четыре усечения разложения в непрерывную дробь**

| | |
|---|---|
| 5 | $R_0 = 1$ |
| 15 | $R_1 = 1 - \frac{X^2}{2}$ |
| 45 | $R_2 = 1 - \frac{X^2}{2 - \frac{X^2}{2}}$ |
| 60 | $R_3 = 1 - \frac{X^2}{2 - \frac{X^2}{2 - \frac{X^2}{2}}}$ |

к появлению ошибок в определении угла. Фактически используются лишь члены низших порядков данного разложения. Задавшись $R_0 = 1$, получаем выражения, сведенные в табл. 2.

Исторически получилось так, что приведенные в табл. 2 уравнения часто называют соответственно 5-, 15- и 45-градусными, причем сами названия дают приемлемую качественную (но плохую количественную) оценку того диапазона углов падения волны, который поддается адекватной обработке. Из соображений оптимальности компромисса между степенью сложности обработки и точностью получаемых результатов приходится чаще пользоваться 45-градусным уравнением. Затем обнаруживается, что приемлемая обработка обеспечивается для чуть более широкого диапазона углов, если начать рекурсию, например, со значения $R_0 = \cos 45$ . Для повышения точности можно взять в качестве $R_0$ функцию скорости, пространственных координат, либо частоты.

### Дисперсионные соотношения

Подставив данные табл. 2 в уравнение (66), получим дисперсионные соотношения, которые можно сравнить с точным его выражением (65а). Последние приведены в табл. 3.

Как показано на рис. 40 и в табл. 3, дисперсионные соотношения описывают полуокружность.

### Переменная по глубине скорость

Отождествление $ik_z$ с производной по глубине $\partial/\partial z$ превращает дисперсионные соотношения из табл. 3 в дифференциальные уравнения, приведенные в табл. 4.

**Таблица 3**

**Дисперсионные соотношения для различных усечений**

| | |
|---|---|
| 5 | $k=\frac{\omega}{v}$ |
| 15 | $k=\frac{\omega}{v}-\frac{vk_x^2}{2\omega}$ |
| 45 | $k=\frac{\omega}{v}-\frac{k_x^2}{2\frac{\omega}{v}-\frac{vk_x^2}{2\omega}}$ |

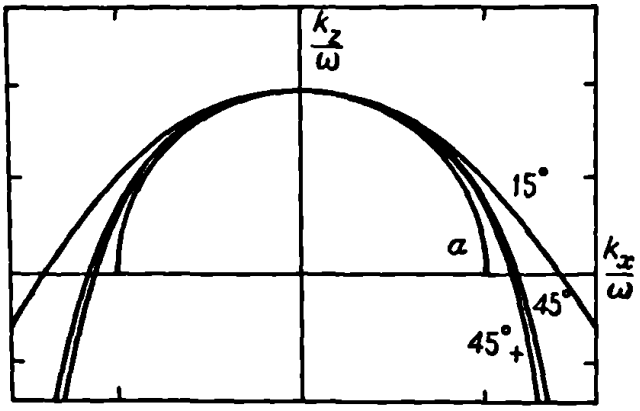



РИС. 40. Графики дисперсионного соотношения, построенные в соответствии с формулами (65а) и табл. 3. Кривая, помеченная $45_+$, построена при $R_0=\cos 45$ и точно совпадает при 0 и 45 :

*a* точная кривая

**Таблица 4**

**Уравнения экстраполяции для случая, когда скорость зависит только от глубины**

| | |
|---|---|
| 5 | $\frac{\partial P}{\partial z}=i\left(\frac{\omega}{v}\right)P$ |
| 15 | $\frac{\partial P}{\partial z}=i\left(\frac{\omega}{v}-\frac{vk_x^2}{2\omega}\right)P$ |
| 45 | $\frac{\partial P}{\partial z}=i\left(\frac{\omega}{v}-\frac{k_x^2}{2\frac{\omega}{v}-\frac{vk_x^2}{2\omega}}\right)P$ |

Дифференциальные уравнения из табл. 4 основаны на дисперсионном соотношении, которое нашли, исходя из предположения об однородной среде. Поэтому они не будут строго соблюдаться и даже не будут полезными в случаях скорости, переменной по глубинной координате $v=v(z)$. Фактически ограничение их возможностей заключается в том, что они неспособны самостоятельно описывать отраженные волны.

Методы миграционного преобразования, базирующиеся на уравнении (65б) или же на табл. 4, называются методами фазового сдвига.

### Запаздывание в частотном представлении

Часто бывает удобно так организовать расчет волны, чтобы при этом снимался эффект общего перемещения и волна казалась как бы «стоящей на месте». Этот вопрос — задержи-

**Таблица 5**

**Задержаниые уравнения фазового сдвига**

| | | |
|---|---|---|
| 5 | $\frac{\partial Q}{\partial z}=0$ | $+\ i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{\bar{v}(z)}\right)Q$ |
| 15 | $\frac{\partial Q}{\partial z}=-i\frac{vk_x^2}{2\omega}Q$ | $+\ i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{\bar{v}(z)}\right)Q$ |
| 45 | $\frac{\partial Q}{\partial z}=-i\frac{k_x^2}{2\frac{\omega}{v}-\frac{vk_x^2}{2\omega}}Q$ | $+\ i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{\bar{v}(z)}\right)Q$ |
| Общее | $\frac{\partial Q}{\partial z}=$ дифракция | + тонкая линза |

вание волны — будет рассмотрен более детально в разделе 2.6. А между тем довольно легко ввести понятие временного сдвига $t_0$ волны, распространяющейся по вертикали в воображаемой среде, характеризующейся скоростным распределением вида $\bar{v}(z)$, т. е.

$$t_0=\int_0^z\frac{dz}{\bar{v}(z)}. \tag{69}$$

Введение временной задержки $t_0$ во временном представлении соответствует умножению на $\exp(i\omega t_0)$ в частотном. Следовательно, фактическое волновое поле $P$ связано со сдвинутым по времени полем $Q$ равенством

$$P(z,\ \omega)=Q(z,\ \omega)\exp\left(i\omega\int_0^z\frac{dz}{v(z)}\right). \tag{70а}$$

Заметим, что уравнение (70) действительно как по $x$, так и по $k_x$ координатам. Продифференцировав по $z$, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial z}\exp\left(i\omega\int_0^z\frac{dz}{\bar{v}(z)}\right)+Q(z,\ \omega)\frac{i\omega}{\bar{v}(z)}\exp\left(i\omega\int_0^z\frac{dz}{\bar{v}(z)}\right)$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\exp\left(i\omega\int_0^z\frac{dz}{\bar{v}(z)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{i\omega}{\bar{v}(z)}\right)Q. \tag{70б}$$

Наконец, подставив уравнения (70) в табл. 4, получим задержанные уравнения, приведенные в табл. 5.

### Горизонтальный градиент скоростей

Аппроксимировав квадратный корень отношением многочленов, можно выполнить обратные преобразования табл. 4 и 5 из области горизонтального волнового числа $k_x$ в область горизонтальной пространственной координаты $x$ путем подстановки $(ik_x)^2=\partial^2/\partial x^2$. Как и прежде, результат имеет силу в широком диапазоне распределений $v=v(x, z)$, хотя вывод вроде бы препятствует этому. Обычно зависимость $\bar{v}(z)$ представляет собой некоторое усреднение по горизонтальной координате распределения $v(x, z)$. Если же допустить, чтобы $\bar{v}$ зависела от $x$, то появится много новых членов, которые очень неудобно учитывать, а пренебрежение ими приводит к возникновению неизвестного характера осложнений. Поэтому обычно полагают, что величина $\bar{v}$ зависит только от $z$.

### Расщепление

Численные решения уравнений, содержащихся в табл. 4 и 5 и преобразованных в $x$-область, обычно ищут путем расщепления. Последнее означает, что продвижение вперед осуществляют небольшими шагами $\Delta z$, попеременно применяя два следующих экстраполятора:

$\partial Q/\partial z=$ линзовое слагаемое, (71а)

$\partial Q/\partial z=$ дифракционное слагаемое. (71б)

Обоснование процесса расщепления можно найти в разделе 2.4. Первое из указанных выше уравнений называется линзовым и решается аналитически:

$$Q(z_2)=Q(z_1)\exp\left[i\omega\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{1}{v(x, z)}-\frac{1}{\bar{v}(z)}\right)dz\right]. \qquad (72)$$

Методы миграции, использующие линзовое уравнение, называются глубинными. В тех случаях, когда $v(x)$ трудно определить, линзовое слагаемое часто опускают и такие способы миграционного преобразования называют временными.

Отметим, что дифракционные части табл. 4 и 5 совершенно одинаковы. Воспользуемся ими и уравнением (71б) для того, чтобы составить таблицу дифракционных уравнений. Заменяя $ik_x$ на $\partial/\partial x$ и извлекая операторы $\partial/\partial x$ из знаменателей, получим табл. 6.

**Таблица 6**
**Дифракционные уравнения для случая измеичивых по горизонтали сред**

| | |
|---|---|
| 5 | $\frac{\partial Q}{\partial z}=0$ |
| 15 | $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{v(x,z)}{-2i\omega}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$ |
| 45 | $\left[1-\left(\frac{v(x,z)}{-2i\omega}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{v(x,z)}{-2i\omega}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$ |

### Временное представление

Чтобы перевести последние уравнения во временную область, нужно лишь переместить $\omega$ в числитель и затем заменить $-i\omega$ на $\partial/\partial t$. Например, 15-градусное задержанное уравнение из табл. 6 для случая $v=\bar{v}$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}Q=\frac{v}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q. \tag{73}$$

Истолкование времени $t$, входящего в выражение переменной задержанного времени $Q$, нуждается в дополнительных разъяснениях, которые и будут даны в разделе 2.6.

### Восходящие волны

Все приведенные выше уравнения описывают падающие волны. Чтобы получить уравнения восходящих волн, нужно лишь поменять знаки у $z$ и $\partial/\partial z$. Обозначив через $D$ падающее волновое поле и через $U$ восходящее поле, найдем, что уравнение (73), например, преобразуется в уравнения падающих и восходящих дифрагированных волн во временном представлении с запаздыванием и 15-градусной аппроксимацией

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}D=+\frac{v}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}D,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}U=-\frac{v}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U.$$

При использовании концепции излучающих отражающих границ в программах миграции и дифракции содержится именно уравнение восходящей волны.

**Упражнение**

Возьмем наклонную прямую, касательную к окружности. Воспользуемся ею, как исходным условием при разложении квадратного корня по методу Мюира. Составьте уравнения и изобразите их графически ($-2 \leqslant X \leqslant +2$) для следующих двух приближений Мюира.

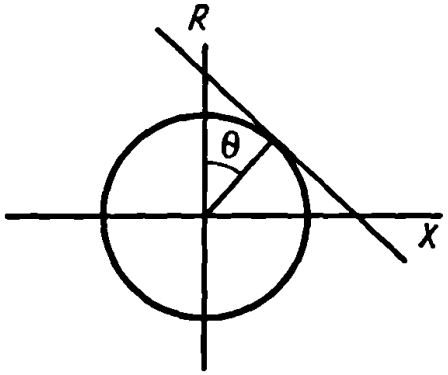



РИС. 41.

## 2.2. Метод конечных разностей

Основным методом решения дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ является метод конечных разностей. Основное преимущество метода в том, что он позволяет анализировать объекты практически любой формы, будь то рельеф земной поверхности или геологическая структура. Обычно задачи методом конечных разностей решаются просто. Главный его недостаток связан с проблемой неустойчивости решения. Часто случается так, что кажущийся разумным подход к решению корректной физической задачи приводит к неопределенным результатам. К счастью, существует довольно ограниченный набор действенных и легко осваиваемых приемов, с помощью которых большинство проблем устойчивости решается положительно.

На втором плане находятся соображения стоимости обработки и точности получаемых результатов. Их следует рассматривать вместе, поскольку повысить точность можно простым увеличением затрат на вычисления по более густой сетке. Хотя излагаемые на следующих страницах методы отобраны не по признаку их точности и эффективности, оказалось, что они превосходны и в этом отношении. В самом деле, насколько мне известно, некоторые из них уже совершенны, а другие могут быть улучшены лишь незначительно. Под незначительным улучшением я понимаю повышение экономической эффективности в 5 раз или меньше. Подобное улучшение не имеет особого значения при проведении научно-исследовательских или опытных работ, но его значимость при производственной обработке вполне оправдывает изучение соответствующей научной литературы, выходящей далеко за рамки следующего ниже изложения.

### Уравнение линзы

Различные операторы волновой экстраполяции можно расщеплять на две части — сложную, называемую дифракционной или миграционной, и простую по строению, называемую

линзой. Линзовое уравнение вносит временной сдвиг, который, в свою очередь, является функцией $x$. Оно получило такое название, так как действует подобно тонкой оптической линзе, на которую пучок света падает вдоль оптической оси (в нашем случае, вертикально). Поправки за направление падения, отличное от вертикального, и за толщину линзы каким-то образом спрятаны в дифракционной части оператора. Линзовое уравнение имеет аналитическое решение вида $\exp[i\omega t_0(x)]$. Лучше пользоваться аналитическим, а не конечно-разностным решением, так как оно более устойчиво. Единственная причина, по которой уравнение линзы вообще упоминается в главе, посвященной методу конечных разностей, заключается в том, что сопутствующее ему уравнение дифракции должно применяться совместно с линзовым, а поэтому указанные аналитические решения осуществляют последовательно на каждом шаге экстраполяции.

### Явный способ нахождения первых производных

Процесс инфляции денег $q$ со скоростью 10% можно описать разностным уравнением вида

$$q_{t+1} - q_t = 0{,}10 q_t, \tag{74а}$$

$$(1{,}0)\, q_{t+1} + (-1{,}1)\, q_t = 0. \tag{74б}$$

Эти одномерные вычисления можно выразить в виде разностной матрицы и таблицы данных, играющих роль прототипа при организации вычислений в случае двухмерных дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим нижеследующее:

| Разностная матрица | Таблица данных | | |
|---|---|---|---|
| | 2,000 | время | (75) |
| −1,1 | 2,200 | ↓ | |
| +1,0 | 2,420 | | |
| | 2,662 | | |

Поскольку числа в таблице данных удовлетворяют разностному уравнению (74), разностную матрицу можно поместить поверх таблицы, числа в матрице перемножить на соответствующие числа таблицы и тогда сумма полученных взаимных произведений может оказаться равной нулю. С другой стороны, если бы в таблице данных все числа, кроме одного (начального условия) отсутствовали, то остальные числа можно было бы заполнить последовательно одно за другим путем перемещения матрицы вдоль таблицы, принимая при этом разностное уравнение за истинное и находя неизвестное значение на каждом этапе вычислений.

Если числовую константу 0,10 заменим на комплексное число, то получим не столь тривиальные примеры использования той же самой дифференцирующей матрицы, которые характеризуются колебательным процессом с разрастанием и затуханием амплитуд.

### Неявный способ вычисления первых производных

Решим уравнение

$$dq/dt = 2rq \tag{76}$$

численными методами. Заметим, что уравнение инфляции денег (74) может служить приближением, причем $2r = 0{,}1$. Кроме того, заметим, что в уравнении инфляции денег выражение производной $dq/dt$ симметрично относительно точки $t+1/2$, причем выражение самой величины $q$ приходится на момент времени $t$. Нет никаких препятствий тому, чтобы $q$ в правой части уравнения (76) нельзя было бы усреднить по моментам времени $t$ и $t+1$, сделав, таким образом, все уравнение симметричным относительно точки $t+1/2$. В частности, центрированное приближение уравнения (76) имеет вид

$$q_{t+1} - q_t = 2r\Delta t\,(q_{t+1} + q_t)/2. \tag{77а}$$

Положив в последнем равенстве $\alpha = r\Delta t$, получим равенство

$$(1-\alpha)\,q_{t+1} - (1+\alpha)\,q_t = 0, \tag{77б}$$

которое можно представить в виде разностной звезды

$$\begin{matrix} t \\ \downarrow \end{matrix}\begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ +1 & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{77в}$$

При фиксированном шаге $\Delta t$ подобная звезда обеспечивает более точное решение дифференциального уравнения (76), чем звезда для случая уравнения инфляции.

### Уравнение теплового потока в явном виде

Уравнение теплового потока описывает диффузию тепла. Оно является прототипом миграционного преобразования. Уравнение 15-градусной миграции представляет собой уравнение теплового потока с мнимой постоянной теплопроводности. (В действительности уравнение миграции является уравнением Шредингера, описывающим диффузию вероятности распределения атомных частиц). Положив $\sigma$ постоянной, получаем

$$\partial q/\partial t = (\sigma/C)\,(\partial^2 q/\partial x^2). \tag{78}$$

Для решения уравнений (78) с помощью ЭВМ требуются разностные приближения частных производных. Самым очевид-

ным (но не единственным) из них будет основное определение элементарного курса дифференциального исчисления. В случае производной по времени разностное приближение имеет вид

$$\partial q/\partial t \approx [q(t+\Delta t) - q(t)]/\Delta t. \qquad (79а)$$

Удобно пользоваться нижними индексами, что позволяет сократить запись выражения (79а) до

$$\partial q/\partial t \approx (q_{t+1} - q_t)/\Delta t. \qquad (79б)$$

В такой записи $t+\Delta t$ сокращается до $t+1$, что очень удобно при записи более громоздких уравнений. Формулу для второй производной можно получить, найдя первую производную дважды. В результате получаем: $q_{t+2} - 2q_{t+1} + q_t$. Последнюю формулу обычно используют в симметричном варианте, применив сдвиг на один шаг: $q_{t+1} - 2q_t + q_{t-1}$. Оба варианта формулы становятся равнозначными при стремлении $\Delta t$ к нулю, но при $\Delta t$, не равном нулю, симметричный вариант будет давать более точные результаты. Воспользовавшись верхними индексами для описания зависимости от $x$, получаем конечно-разностное приближение второй производной по пространственной координате

$$\partial^2 q/\partial x^2 \approx (q^{x+1} - 2q^x + q^{x-1})/\Delta x^2. \qquad (80)$$

После подстановки двух последних уравнений в уравнение теплового потока (и воспользовавшись знаком = для обозначения приближенного равенства) получаем

$$\frac{q_{t+1}^x - q_t^x}{\Delta t} = \frac{\sigma}{C} \frac{q_t^{x+1} - 2q_t^x + q_t^{x-1}}{(\Delta x)^2}. \qquad (81)$$

Если положить $\alpha = \sigma \Delta t/(C\Delta x^2)$, то уравнение (81) можно записать в следующем виде:

$$q_{t+1}^x - q_t^x - \alpha(q_t^{x+1} - 2q_t^x + q_t^{x-1}) = 0. \qquad (82)$$

Геометрически уравнение (82) можно представить в виде вычислительной матрицы на плоскости ($x$, $t$) (рис. 42). Перемещая матрицу по таблице данных, замечаем, что ее можно расположить таким образом, чтобы каждый раз на неизвестный элемент таблицы накладывалось только одно число (единица). Это делает возможным последовательный расчет строк, начиная с верхней. Тем самым мы решаем уравнение в частных производных конечно-разностным методом. Возможны и иные организации начальных и боковых условий, например, нулевые боковые условия. Ниже приведены машинная программа и тестовый пример.

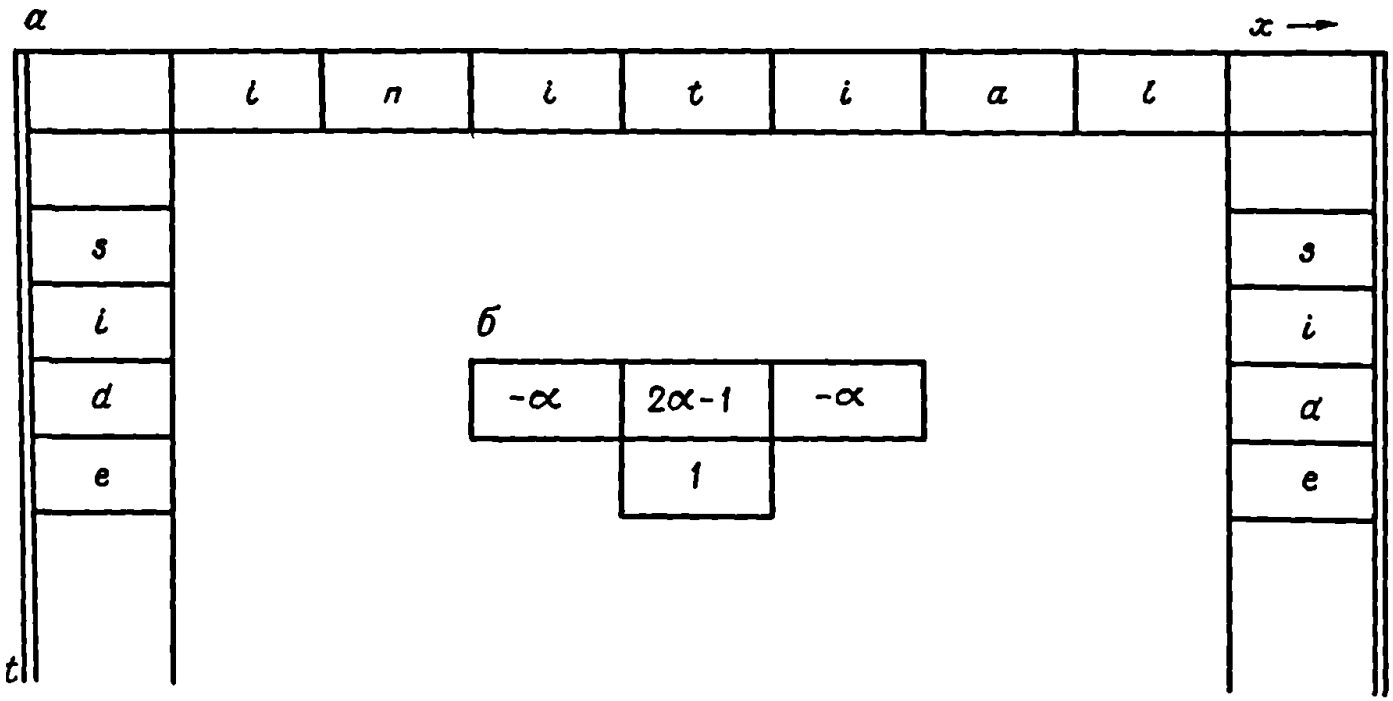



РИС. 42. Оператор вычисления последовательных разностей и таблица данных для случая решения одномерного уравнения теплового потока:
*а* — таблица данных, *б* — оператор

```
#Уравнение теплового потока в явном виде
real q(12), qp(12)
nx=12
do ia=1,2{          #устойчивый и неустойчивый примеры
      alpha=ia*.3333; write(6, '(/"alpha=", f4.2)')alpha
      do ix=1, 6;   q(ix)=0.        #Начальный температурный шаг
      do ix=7, 12; q(ix)=1.
      do it=1, 6 {
            write(6, '(20f5.2)')(q(ix), ix=1, nx)
            do ix=2, nx-1
                  qp(ix)=q(ix)+alpha*(q(ix-1)-2.*q(ix)+q(ix+1))
            qp(1)=qp(2); qp(nx)=qp(nx-1)
            do ix=1, nx
                  q(ix)=qp(ix)
            }
      }
stop; end
```

альфа = 0,33

```
0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 1,00 1,00 1,00 1,00 1,00 1,00
0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 0,33 0,67 1,00 1,00 1,00 1,00 1,00
0,00 0,00 0,00 0,00 0,11 0,33 0,67 0,89 1,00 1,00 1,00 1,00
0,00 0,00 0,00 0,04 0,15 0,37 0,63 0,85 0,96 1,00 1,00 1,00
0,00 0,00 0,01 0,06 0,19 0,38 0,62 0,81 0,94 0,99 1,00 1,00
0,00 0,00 0,02 0,09 0,21 0,40 0,60 0,79 0,91 0,98 1,00 1,00
```

альфа = 0,67

```
0,00 0,00   0,00   0,00   0,00   0,00   1,00 1,00 1,00 1,00 1,00 1,00
0,00 0,00   0,00   0,00   0,00   0,67   0,33 1,00 1,00 1,00 1,00 1,00
0,00 0,00   0,00   0,00   0,44   0,00   1,00 0,56 1,00 1,00 1,00 1,00
0,00 0,00   0,00   0,30 -0,15   0,96   0,04 1,15 0,70 1,00 1,00 1,00
0,00 0,00   0,20 -0,20   0,89 -0,39   1,39 0,11 1,20 0,80 1,00 1,00
0,13 0,13 -0,20   0,79 -0,69   1,65 -0,65 1,69 0,21 1,20 0,87 0,87
```

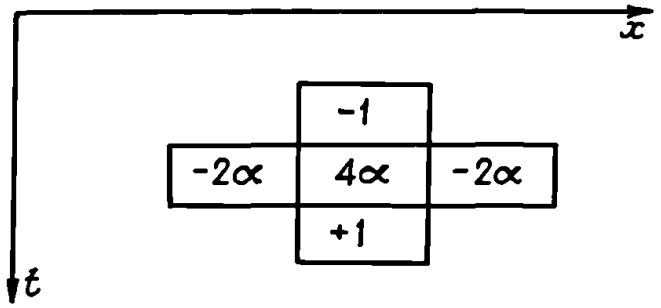
## Метод скачка

Трудность применения приведенной выше программы вычислений заключается в том, что она работает не при всех возможных числовых значениях параметра $\alpha$. Например, когда $\alpha$ чересчур велика (т. е., когда шаг $\Delta x$ слишком мал), решение во внутренней области таблицы данных будет иметь возрастающие значения. Последнее объясняется тем, что низкочастотная часть решения ведет себя (пока) нормально, а высокочастотная расходится. Выявление точной причины расхождения требует математического анализа, который будет приведен в разделе 2.8. При длинах волн, сравнимых с $\Delta x$ или $\Delta t$, мы вправе надеяться на то, что разностное приближение будет совпадать с истинным уравнением теплового потока, сглаживая нерегулярности в поведении температуры. При коротких длинах волн наличие чрезвычайно сильных осцилляций решения свидетельствует о том, что разностное уравнение может вести себя почти прямо противоположно тому, как должно вести себя дифференциальное уравнение. Расхождение решений на коротких волнах объясняется тем, что разностные операторы равнозначны дифференциальным только на длинных волнах. Расходимость решения представляет собой принципиальное затруднение, так как возникающие при этом ошибки округления в конце концов нарушат и решения на низких частотах.

Предположив, что неустойчивость решения возникает из-за того, что производная по времени центрирована на времени $t+1/2$, которое немного отличается от времени $t$ центровки второй производной, приходим к так называемому методу скачка, согласно которому производная по времени берется в виде разности между значениями в моменты времени $t-1$ и $t+1$:

$$\partial q/\partial t \approx (q_{t+1}-q_{t-1})/2\Delta t. \tag{83}$$

Получающаяся в результате матрица для вычисления разностей выглядит следующим образом (рис. 43):




(84)

РИС. 43.

В данном случае результат получился еще хуже. Последующий анализ показал, что теперь решение расходится при всех вещественных числовых значениях $\alpha$. Хотя идея отцентрировать обе производные была и хороша, но оказалось, что идея

выразить первую производную по большему числу узлов сетки неправильна. Увеличенный оператор имеет сразу два решения вместо одного известного. Численное решение представляет собой сумму двух теоретических, одно из которых, к сожалению, как в рассматриваемом случае, растет и колеблется при всех вещественных значениях величины $\alpha$. Чтобы избежать указанные затруднения (и заодно получить более точные ответы), обратим внимание на более сложные методы решения, известные под названием неявных.

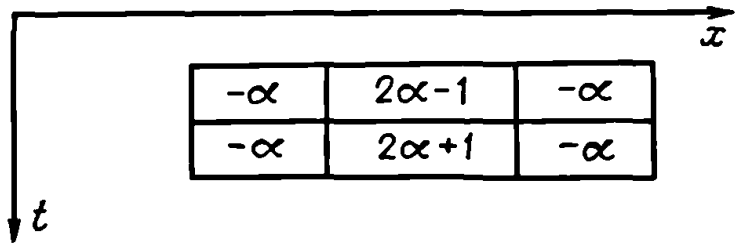
**Метод Крэнка — Никольсона**

Метод Крэнка — Никольсона решает задачу точности и устойчивости. Ранее уравнение теплового потока (79б) записывалось, как $q_{t+1}^{x}-q_t^x=a\left(q_t^{x+1}-2q_t^x+q_t^{x-1}\right)$.

Усредним правую часть уравнения по моментам $t$ и $t+1$:

$$q_{t+1}^{x}-q_t^x=\frac{a}{2}\left[\left(q_t^{x+1}-2q_t^x+q_t^{x-1}\right)+\left(q_{t+1}^{x+1}-2q_{t+1}^x+q_{t+1}^{x-1}\right)\right]. \quad (85а)$$

Уравнение (85а) представляет собой запись оператора метода Крэнка — Никольсона. Положив $\alpha=a/2$, получаем разностный оператор (матрицу) в виде рис. 44.




(85б)

РИС. 44.

При размещении данного оператора поверх таблицы данных можно заметить, что, как правило, с неизвестными ячейками совпадают сразу три элемента. Переместим все члены уравнения (85а) с индексом $t+1$ в левую часть, а с индексом $t$ — в правую, в результате чего получим

$$-\alpha q_{t+1}^{x+1}+(1+2\alpha)\,q_{t+1}^{x}-\alpha q_{t+1}^{x-1}=\alpha q_t^{x+1}+(1-2\alpha)\,q_t^x+\alpha q_t^{x-1}. \quad (86а)$$

Пусть все значения с индексом $t+1$ не известны, а все значения с индексом $t$ известны, тогда правая часть уравнения (86а) будет известной величиной (обозначим ее, например, $d_t^x$), а левая — системой уравнений для определения неизвестной $q_{t+1}$. Другими словами, уравнение (86а) не дает нам каждую из неизвестных $q_{t+1}^x$ в явном виде. Они задаются в неявном виде через решение системы уравнений. Если на оси $x$ находятся всего пять точек, то система выглядит, как

$$\begin{bmatrix} e_{lf} & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & e_{rt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{t+1}^1 \\ q_{t+1}^2 \\ q_{t+1}^3 \\ q_{t+1}^4 \\ q_{t+1}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_t^1 \\ d_t^2 \\ d_t^3 \\ d_t^4 \\ d_t^5 \end{bmatrix}. \quad (86б)$$

Значения $e_{lf}$ и $e_{rt}$ можно подбирать с учетом граничных условий. Важно отметить, что матрица трехдиагональная, т. е. за исключением трех центральных диагоналей все остальные элементы матрицы (86б) равны нулю. Решение такой системы уравнений можно получить экономичным путем. Оказывается, что затраты возрастают лишь в 2 раза по сравнению с решением в явном виде (82). На деле описанный выше неявный метод оказывается дешевле, поскольку повышенная точность решения уравнения (86а) по сравнению с точностью решения уравнения (82) позволяет пользоваться гораздо большими численными значениями шага $\Delta t$. Ниже приводится программа, демонстрирующая устойчивость метода даже при больших $\Delta t$. В ней используется подпрограмма решения трехдиагональной системы уравнений, объясняемая ниже.

```
#Уравнение теплового потока в неявном виде
real q(12), d(12), e(12), f(12)
nx=12; a=8.; write(6, '(/"a=", f4.2)')a; alpha=.5*a
do ix=1, 6;  q(ix)=0.        #Initial temperature step
do ix=7, 12; q(ix)=1.
do it=1, 4 {
      write(6, '(20f5.2)') (q(ix), ix=1, nx)
      d(1)=0.; d(nx)=0.
      do ix=2, nx-1
            d(ix)=q(ix)+alpha*(q(ix-1)-2.*q(ix)+q(ix+1))
      call rtris(nx, alpha, -alpha, (1.+2.*alpha), -alpha, alpha, d, q, e, f)
      }
stop; end

#Программа решения вещественного трехдиагонального уравнения
subroutine rtris(n, endl, a, b, c, endr, d, q, e, f)
real q(n), d(n), e(n), a, b, c, den, endl, endr
e(1)=-a/endl; f(1)=d(1) endl
do i=2, n-1 {
      den=b+c*e(i-1); e(i)=-a/den; f(i)=(d(i)-c*f(i-1))/den }
q(n)=(d(n)-c*f(n-1)) (endr+c*e(n-1))
do i=n-1, 1, -1
      q(i)=e(i)*q(i+1)+f(i)
return;      end
```

```
a=8,00

0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 1,00 1,00 1,00 1,00 1,00 1,00
0,17 0,17 0,21 0,30 0,47 0,76 0,24 0,53 0,70 0,79 0,83 0,83
0,40 0,40 0,42 0,43 0,40 0,24 0,76 0,60 0,57 0,58 0,60 0,60
0,44 0,44 0,44 0,44 0,48 0,68 0,32 0,52 0,56 0,56 0,56 0,56
```

**Решение трехдиагональной системы уравнений**

Большая часть машинного времени ЭВМ затрачивается на решение трехдиагональных систем уравнений. Для справок и полноты изложения данного вопроса здесь приводится алгоритм решения.

Запишем систему уравнений в виде разностного уравнения

$$a_j q_{j+1} + b_j q_j + c_j q_{j-1} = d_j. \tag{87}$$

Введем вместе с уравнением и новые неизвестные $e_j$ и $f_j$:

$$q_j = e_j q_{j+1} + f_j. \tag{88}$$

Запишем уравнение (88) со смещенным индексом:

$$q_{j-1} = e_{j-1} q_j + f_{j-1}. \tag{89}$$

Подставим уравнение (89) в (87):

$$a_j q_{j+1} + b_j q_j + c_j (e_{j-1} q_j + f_{j-1}) = d_j. \tag{90}$$

Теперь так преобразуем соотношение (90), чтобы оно стало похожим на (88):

$$q_j = \frac{-a_j}{b_j + c_j e_{j-1}} q_{j+1} + \frac{d_j - c_j f_{j-1}}{b_j + c_j e_{j-1}}. \tag{91}$$

Из сопоставления уравнений (91) и (88) находим рекуррентные формулы для определения новых неизвестных $e_j$ и $f_j$:

$$e_j = \frac{-a_j}{b_j + c_j e_{j-1}}, \tag{92а}$$

$$f_j = \frac{d_j - c_j f_{j-1}}{b_j + c_j e_{j-1}}. \tag{92б}$$

Прежде всего следует сформулировать граничное условие для левой части уравнения. Оно может состоять из одной или двух точек. Наиболее общим граничным условием является линейная зависимость типа (88) при $j=0$, т. е. $q_0 = e_0 q_1 + f_0$. Таким образом, в граничном условии должны содержаться и $e_0$, и $f_0$. При наличии $e_0$ и всех $a_j$, $b_j$, $c_j$ для расчета всех значений $e_j$ можно воспользоваться уравнением (92а).

Граничное условие необходимо и на правой границе. Общее двухточечное граничное условие имеет вид

$$c_{n-1} q_{n-1} + e_{rt} q_n = d_n. \tag{93}$$

В уравнении (93) как частные случаи содержатся граничные условия с нулевым значением и с нулевым угловым коэффициентом. Равенство (93) можно сравнить с правой частью равенства (89)

$$q_{n-1} = e_{n-1} q_n + f_{n-1}. \tag{94}$$

И $q_n$, и $q_{n-1}$ неизвестны, но поскольку мы располагаем двумя уравнениями (93) и (94) — решение находится просто. На последнем этапе расчетов берем значение $q_n$ и путем его подстановки в (89) находим $q_{n-1}$, $q_{n-2}$, $q_{n-3}$ и т. д.

Чтобы получить от своего компьютера максимальную отдачу, необходимо учесть следующие особенности рассмотренного алгоритма. Во-первых, вычисление $e_j$ зависит от среды через посредство параметров $a_j$, $b_j$, $c_j$, но не зависит от решения $q_j$ (даже через посредство $d_j$). Это означает, что можно сохранять $e_j$ и повторно использовать его. Во-вторых, многие ЭВМ выполняют деление гораздо медленнее, чем умножение. Поэтому делитель в формулах (92а, б) можно вычислить и запомнить для повторного использования.

### Производная третьего порядка

45-градусное уравнение дифракции отличается от 15-градусного наличием в нем производной вида $\partial^3/\partial x^2 \partial z$. К счастью, она вписывается в шеститочечный разностный оператор вида

$$\frac{1}{\Delta x^2 \Delta z}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{95}$$

Поэтому ее вычисление не требует дополнительных усилий, кроме изменения шести коэффициентов оператора.

### Затруднения, встречающиеся при большем числе размерностей

До сих пор мы не встречали особых затруднений в разработке недорогих, надежных и точных разностных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных. Изложенный выше неявный метод отвечает всем требованиям. Но при работе с более чем одной пространственной координатой неявный метод неприемлем, так как становится дорогим. Причину этого покажем на примере задачи генерализации второй производной $\partial^2/\partial x^2$ до $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Простейшим случаем является уравнение теплового потока, для которого методом Крэнка — Никольсона было получено решение (86а). Если ввести сокращение вида $\delta_{xx} q = q^{x+1} - 2q^x + q^{x-1}$, то соотношение (86а) превратится в

$$(1 - \alpha\delta_{xx})\, Q_{t+1} = (1 + \alpha\delta_{xx})\, Q_t. \tag{96}$$

Выражение в скобках в левой части представляет собой трехдиагональную матрицу. Критический момент связан с решением трехдиагональной системы уравнений относительно вектора неизвестных $Q_{t+1}$. К счастью, существует специальный алгоритм ее решения, причем затраты машинного времени растут пропорционально размеру матрицы лишь по линейному

закону. Теперь перейдем от одномерного физического пространства координаты $x$ к двухмерному $(x, y)$. Обозначив через $\alpha$ численную постоянную в выражении (96), получим уравнение для продвижения вперед

$$[1-\alpha(\delta_{xx}+\delta_{yy})]\,Q_{t+1}=[1+\alpha(\delta_{xx}+\delta_{yy})]\,Q_t. \qquad (97)$$

Неизвестные $Q_{t+1}$ представляют собой двухмерную функцию координат $x$ и $y$, которую можно обозначить матрицей. Теперь дадим толкование заключенному в скобках выражению в левой части уравнений. Оно оказалось четырехмерной матрицей!

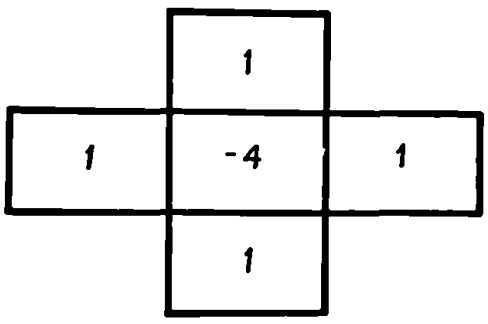
Чтобы пояснить смысл этой матрицы, выполним отображение двух измерений на одно. Пусть температура $Q$ определена на сетке размером $4\times4$. Естественный способ оцифровки узлов сетки выглядит, как

$$\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{array} \qquad (98)$$

Для выполнения алгебраических операций над ними приведенные выше 16 чисел можно отобразить в один вектор одним из способов. Более простой состоит в соотнесении узлов сетки (98) с составляющими вектора с помощью приведенной ниже группировки по столбцам

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{array} \qquad (99)$$

Оператор вычисления разностей второго порядка на плоскости $(x, y)$ имеет вид следующей матрицы (рис. 45):




(100)

РИС. 45.

**Таблица 7**

**Двухмерная матрица коэффициентов оператора Лапласа**

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −4 | 1 | . | . | 1 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 1 | −4 | 1 | . | . | 1 | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | 1 | −4 | 1 | . | . | 1 | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | 1 | −4 | . | . | . | 1 | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 1 | . | . | . | −4 | 1 | . | . | 1 | . | . | . | . | . | . | . |
| . | 1 | . | . | 1 | −4 | 1 | . | . | 1 | . | . | . | . | . | . |
| . | . | 1 | . | . | 1 | −4 | 1 | . | . | 1 | . | . | . | . | . |
| . | . | . | 1 | . | . | 1 | −4 | . | . | . | 1 | . | . | . | . |
| . | . | . | . | 1 | . | . | . | −4 | 1 | . | . | 1 | . | . | . |
| . | . | . | . | . | 1 | . | . | 1 | −4 | 1 | . | . | 1 | . | . |
| . | . | . | . | . | . | 1 | . | . | 1 | −4 | 1 | . | . | 1 | . |
| . | . | . | . | . | . | . | 1 | . | . | 1 | −4 | . | . | . | 1 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | 1 | . | . | . | −4 | 1 | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | 1 | . | . | 1 | −4 | 1 | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 1 | . | . | 1 | −4 | 1 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | 1 | . | . | 1 | −4 |

Положим эту фигуру на плоскость $(x, y)$ матрицы (99) и будем ее перемещать. К сожалению, при наличии всего 16 элементов большая часть результатов перемножения подвержена влиянию краев и углов. Опробуйте все положения оператора, при которых его центральное значение −4 накладывается на одну из 16 точек. Не обращайте внимания на то, что единицы будут выходить за пределы матрицы. Начните с совмещения −4 оператора (100) с 1 в верхнем левом углу матрицы (99). Единицы оператора совместятся с числами 2 и 5 матрицы. Поместите эти единицы в верхнюю строку табл. 7, во второй и пятый столбцы. Затем совместите −4 оператора (100) с числом 2 матрицы (99). Единицы оператора совпадут с числами 1, 3 и 6 матрицы. Поместите единицы в следующую строку табл. 7. Затем совместите −4 с числом 3. Единицы попадут на 2, 4 и 7. Продолжайте вычисления описанным способом. В результате получится квадратная матрица размером $16 \times 16$, приведенная выше.

После построения табл. 7 можно вернуться к истолкованию уравнения (97). Матрица неизвестных величин $Q_{t+1}$ отобразилась сначала в 16-элементный вектор-столбец, а выражение в скобках, умножаемое на $Q_{t+1}$, затем было отображено в матрицу размером $16 \times 16$. Ясно, что в этой матрице вместо точек табл. 8 стоят нули. Благоприятен тот факт, что в таблице

много нулей, и возникает надежда на быстрое решение данной системы уравнений. Но разочаровывает то обстоятельство, что хороший метод решения ее до сих пор не найден. Самые лучшие из известных требуют затрат машинного времени, пропорциональных $N^3$, где $N$ в нашем случае равно 4. Те из нас, кто занимался этой проблемой, основываясь на опыте работы с одним измерением, надеялись отыскать метод решения, требующий затрат, пропорциональных $N^2$, т. е. сравнимый по затратам машинного времени с методом явного решения, когда все затраты сводятся по существу к затратам на вычисление правой части равенства (89). Все благоприятные особенности и свойства неявных методов не оправдывают увеличения стоимости вычислений в $N$ раз. Следующим по эффективности является метод расщепления.

### Упражнения

1. Истолкуйте уравнение денежной инфляции при процентной ставке, равной мнимому числу $i/10$.
2. Запишите 45-градусное уравнение дифракции через координаты $(x, z)$ при фиксированной $\omega$ в виде оператора (85 б).

## 2.3. Монохроматические волновые программы

У старого профессора была единственная тема каждой его лекции: «Люди учатся на решении задач. Решение задач — единственный способ обучения ... и т. д. и т. п.». Все, что он когда-либо делал, это читал лекции, но никогда не поставил ни одной проблемы.

### Анализ программы получения фильмоцикла

Чтобы фильмоцикл имел какой-то смысл для зрителя, предмет фильма должен быть периодическим и организован таким образом, чтобы последний кадр естественно переходил в первый. В программе для получения фильма есть параметр лямбда, контролирующий основную частоту повторения волновых импульсов, посылаемых сверху на экран. Как только импульсоид пробегает четверть пути вниз по кадру, посылается следующий. Сказанное определяется строкой

$$\lambda = \mathrm{nz}*\mathrm{dz}/4 = N_z \Delta z/4.$$

Импульсоиды представляют собой суперпозицию синусоид, число которых равно $n\omega$, а частоты образуют последовательность $\Delta\omega$, $2\Delta\omega$, ..., $\mathrm{nw}\Delta\omega$. Длина волны наименьшей частоты $\mathrm{dw} = \Delta\omega$ равна величине, обратной лямбде. Отсюда следует определение

$$\mathrm{dw} = \mathrm{v}*\mathrm{pi}2/\lambda = 2\pi v/\lambda.$$

Наконец, длительность фильмоцикла должна равняться периоду синусоиды с наименьшей частотой, т. е.

$N_t \Delta t = 2\pi/\Delta\omega$.

Последнее равенство определяет временной интервал на прямой

dt = pi2 (nt*dw).

Программа решает следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{i\omega}{v(x, z)} P + \frac{v}{-i\omega 2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (101)$$

На каждом шаге $\Delta z$ вычисления производятся двумя этапами. На первом этапе решается уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{v}{-i\omega 2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}. \quad (102)$$

После применения метода Крэнка Никольсона получаем

$$\frac{q_{z+1}^x - q_z^x}{\Delta z} = \frac{v}{-i\omega 2}\left(\frac{q_z^{x+1} - 2q_z^x + q_z^{x\ 1}}{2\Delta x^2} + \frac{q_{z+1}^{x+1} - 2q_{z+1}^x + q_{z+1}^{x\ 1}}{2\Delta x^2}\right).$$

Объединив все постоянные в одну

$$\alpha = v\Delta z\ (-i\omega 4\Delta x^2), \quad (103)$$

получим

$$q_{z+1}^x - q_z^x = \alpha\left[(q_z^{x+1} - 2q_z^x + q_z^{x-1}) + (q_{z+1}^{x+1} - 2q_{z+1}^x + q_{z+1}^{x-1})\right].$$

Перенесем неизвестные в левую часть уравнения:

$$-\alpha q_{z+1}^{x+1} + (1+2\alpha) q_{z+1}^x - \alpha q_{z+1}^{x-1} = \alpha q_z^{x+1} + (1-2\alpha) q_z^x + \alpha q_z^{x-1}. \quad (104)$$

На втором этапе решается уравнение

$$\partial Q\ \partial z = (i\omega\ v) Q \quad (105)$$

аналитическим путем получаем

$$Q(z+\Delta z) = Q(z)\, e^{i(\omega\ v)\Delta z}. \quad (106)$$

В программе строго соблюдается нумерация, принятая в уравнениях (103), (104) и (106).

Волновой импульс формируют, складывая частотные составляющие. В программе используются только две частоты, т. е. nw = 2. Если взять одну частоту, т. е. nw = 1, решение становится менее ясным. Волны, отраженные от боковых границ (см. особенно упр. 2), более походят на стоячие. Если же использовать больше частот, то программа будет работать дольше, но кинофильм будет более наглядным.

### Фазовый сдвиг

Согласно теоретическим представлениям, в двухмерном случае волны, проходя через фокус, должны претерпевать фазовый сдвиг на 90 . Это означает, что на фокус падает

симметричный импульсоид, а выходит из него асимметричный. (Это явление лучше всего наблюдается на рис. 50, но нагляднее оно в кинофильме). При миграционном преобразовании волны доходят только до фокуса, но не проходят через него. Поэтому импульсная реакция миграции в двухмерном варианте несет в себе фазовый сдвиг в 45 . Несмотря на то, что в реальности все происходит в трех измерениях, двухмерная реакция вполне подходит для миграционного преобразования сейсмических разрезов, на которых, как предполагается, фокусировка создается не сферическими, а цилиндрическими отражающими границами.

**Латеральные изменения скоростей**

Данная программа не учитывает изменения скорости по горизонтали $v=v(x)$, но это нетрудно сделать, используя уравнение (106). Если наблюденные данные таковы, что $k_x$ настолько мало, что им можно пренебречь, то уравнение (106) остается единственным, где учет латеральных изменений скорости необходим.

**Анализ боковых границ**

В геофизике желательно вообще не рассматривать вопрос о боковых границах и возникает он тогда, когда сейсмический профиль ограничен по своей протяженности. Если все же необходимо учитывать влияние боковых границ, то следует продумать, как лучше это сделать. В программу включены граничные условия в виде нулевых угловых коэффициентов. Этот тип граничных условий получился в результате того, что было предположено:

$$d(1)=0.;\ d(nx)=0.,$$

а в операторе вызова команды «ctris» приняли

$$endl=-a;\ endr=-c.$$

Один из быстрых путей получения нулевых условий на боковых границах состоит в том, чтобы принять:

$$endl=endr=10^{30}\approx\infty.$$

Изложенный выше подход требует использования большой машинной памяти, что исключается при кодировании граничных условий методом Д. Хейла:

```
q0=bl*q(1);          qnxp1=br*q(nx)
cd(1)=aa*q(2)          +(1.   2.*aa)*q(1)+aa*q0
cd(nx)=aa*q(nx-1)  +(1.   2.*aa)*q(nx)+aa*qnxp1
endl=c*bl+b;
endr=a*br+b
call  ctris(nx,endl,a,b,c,endr,cd,q,ce,cf)
```

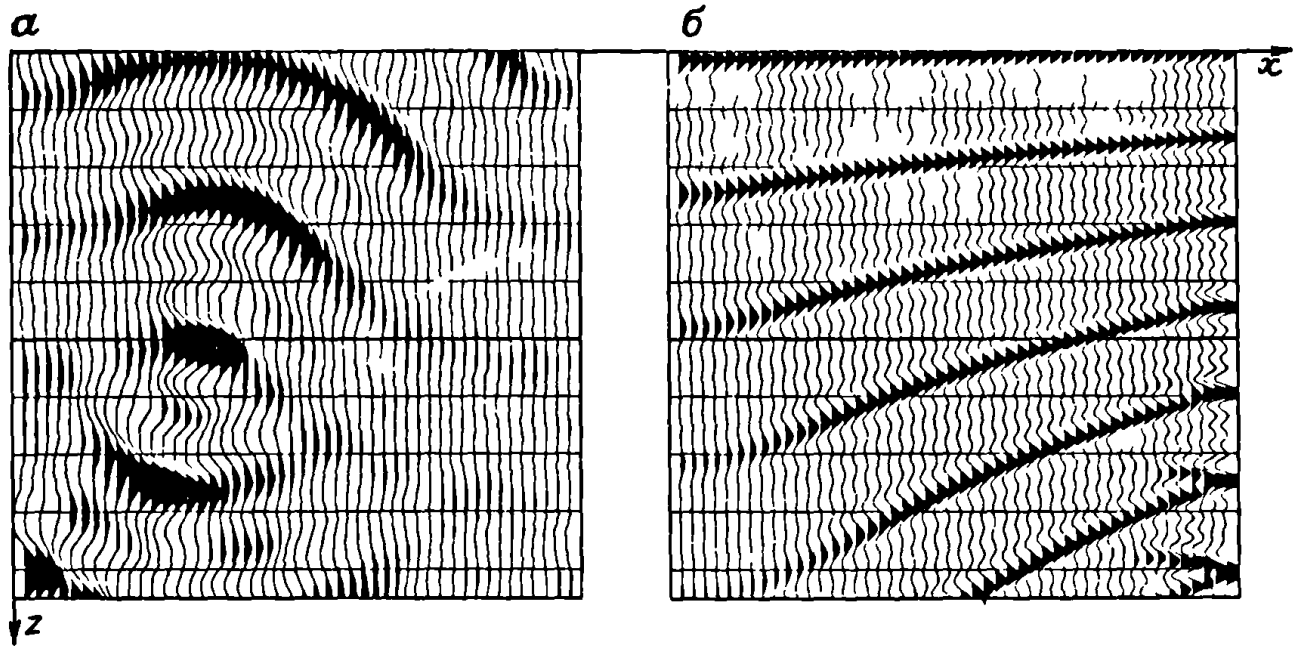



РИС. 46. Первый кадр фильма, рассчитанного по программе, приведенной на рис. 37 (*а*) и решение упр. 1 (*б*)

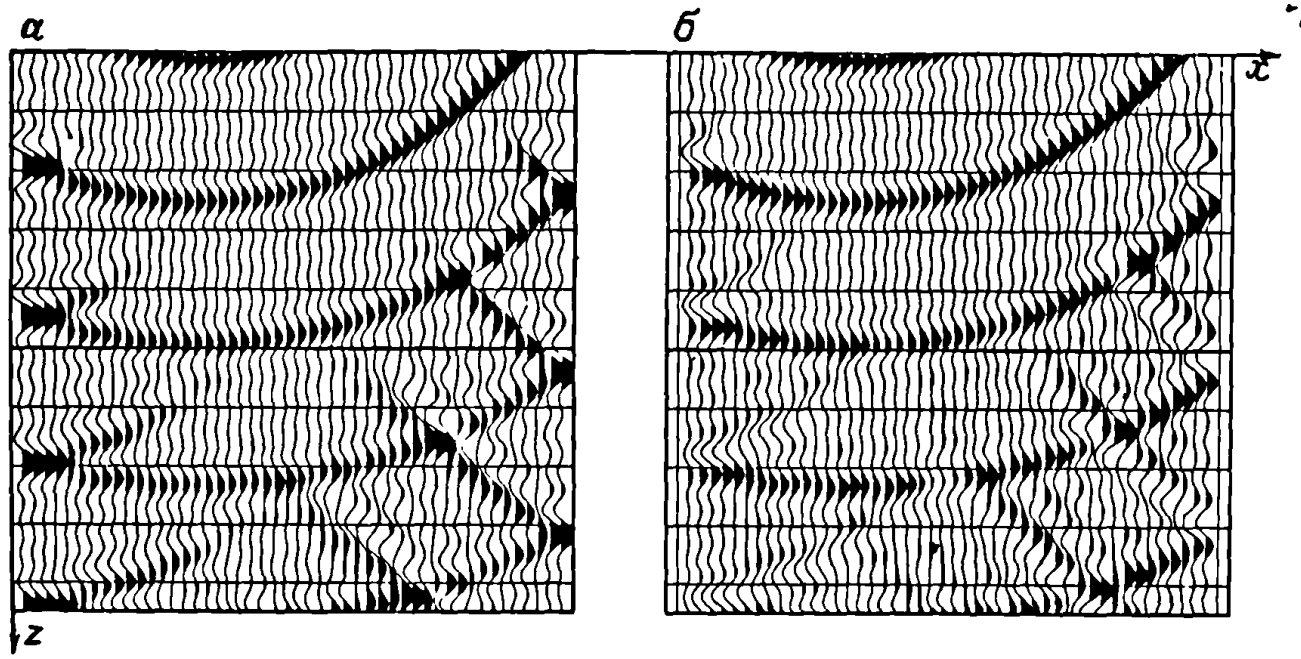



РИС. 47. Решение упр. 2 в виде расходящейся сферической волны (*а*), такое же решение упр. 3, но с нулевым значением расхождения (*б*)

Заметим, что для границ с нулевыми значениями bl = br = 0, а для границ с нулевым угловым коэффициентом bl = br = 1. Поглощающие боковые границы, введенные в разделе 4.4, получаются в случае, если bl и br — комплексные величины.

### Варианты программы фильмоцикла

При выполнении следующих упражнений фиксируйте свои успехи. Это поможет вам при подготовке к выпускным экзаменам. И, спустя годы, вы будете в состоянии освежать в памяти эти вопросы.

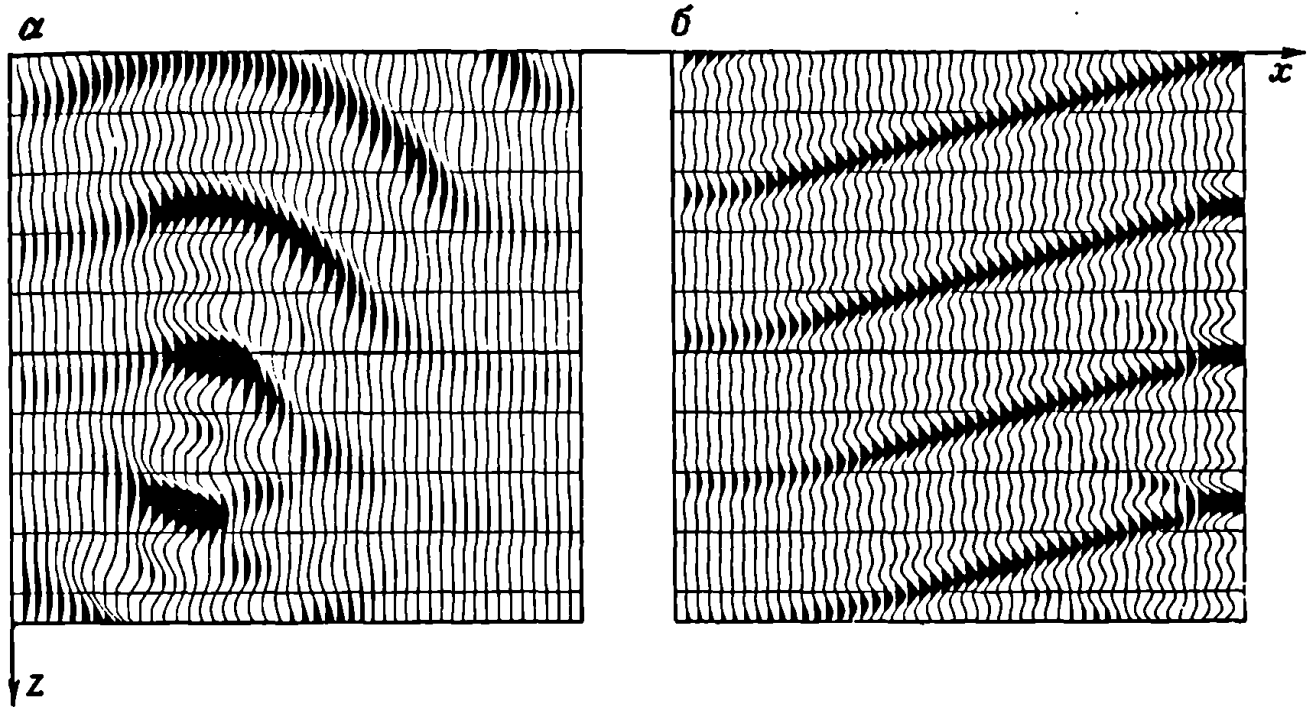



РИС. 48. 45-градусный член управления из упр. 4 (*а*), латеральные изменения скорости, принятые в упр. 5 (*б*)

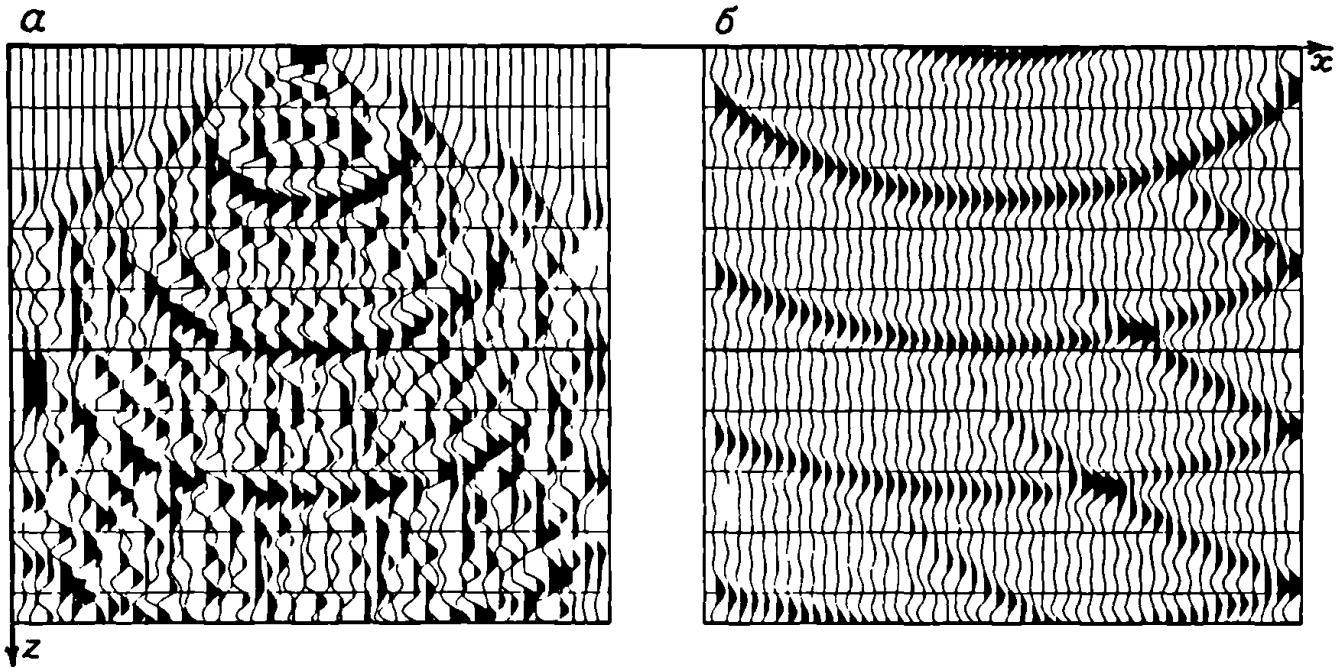



РИС. 49. Вычислительные искажения искусственного происхождения в случае точечного источника из упр. 6 (*а*); упр. 7 на поглощающую границу (*б*)

Заведите сшиватель с тремя кольцами. Обрежьте все графики и листинги программы по листу размером 216×279 мм, проколите их трехдырчатым дыроколом. Если требуется алгебраический анализ, делайте его на листах того же размера. Не оставляйте важных частей анализа на клочках бумаги. Либо храните эти материалы вместе с записями лекций, либо заведите отдельную тетрадь для лабораторных занятий, всегда помечая дату их проведения.

Для каждого из следующих упражнений нужно подготовить листинг программы и графическое изображение первого кадра.

## Упражнения

1. Определите те изменения в программе, которые обеспечат расчет исходной плоской волны, распространяющейся вниз под углом 15 справа от вертикали. (Решение упражнения см. на рис. 46).

2. Если задана область вычислений: $0<x<=x\,\text{max}$ и $0<z\leqslant z\,\text{max}$, то как нужно изменить начальные условия при $z=0$, чтобы имитировать точечный источник в точке $(x, z)=(x\,\text{max}\ 3,\ -z\,\text{max}\ 2)$? Проверьте свой ответ (рис. 47).

3. Измените программу так, чтобы боковые границы с нулевым угловым коэффициентом поменялись на боковые границы с нулевыми значениями (ответ см. на рис. 47).

4. Включите в программу 45-градусную компоненту $\partial_{xxz}$ для случая коллапса сферической волны. Используйте боковые границы с нулевым угловым коэффициентом.

5. Внесите в программу действие компоненты тонкой линзы с горизонтальными изменениями скорости в 40% на ширине кадра, которые создаются постоянным градиентом «медленности». Выявите части программы, на которые влияют латеральные вариации скорости (рис. 48). Выявленные части видоизменять не нужно. Почему они должны быть практически неизменными?

6. Путем тестирования программы и пользуясь при этом точечным источником, расположенным в $(x, z)=(x\,\text{max}\ 2{,}0)$, найдите и опишите вычислительные искажения искусственного происхождения. Такой источник обогащен высокими пространственными частотами, в присутствии которых разностные уравнения уже не могут имитировать дифференциальные (рис. 49).

7. В разделе 4.4 объяснено, каким образом нужно поглощать энергию на боковых границах. Внесите в программу необходимые для этого изменения.

8. Точность вычисления производной по $x$ можно повысить методом, который проанализирован в разделе 4.3. Вкратце его смысл состоит в том, что вместо представления $k_x^2\Delta x^2$ с помощью трехдиагональной матрицы **T**, у которой на главной диагонали находится $(-1, 2, -1)$, пользуются комбинацией вида $\mathbf{T}\,(1-\mathbf{T}/6)$. Видоизмените экстраполяционный анализ путем сквозного перемножения на знаменатель. Сделайте необходимые изменения в 45-градусной программе стягивания волн в точку (рис. 50).

## Программа миграции в области ($\omega$, $x$, $z$)

Эта программа миграционного преобразования, предложенная Кьяртанссоном и Джэкобсом, подобна программе фильмоцикла, но имеются и некоторые различия. В программе фильмоцикла команда "do loops" заключена в четырех скобках. Она дает результаты для многих значений $t$. Миграционному же преобразованию нужно лишь одно значение в момент времени $t=0$. Поэтому экономится один цикл, а это значит, что за то же количество машинного времени можно обработать больший объем информации. К сожалению, потеря одного цикла означает и потерю фильма. При миграции в области $\omega$ интересны для наблюдения только входные и выходные данные.

Входными данными для рассматриваемого процесса, вероятно, будут служить полевые наблюдения и поэтому в отличие от киносейсмики в области $\omega$ не будет аналитического представления.

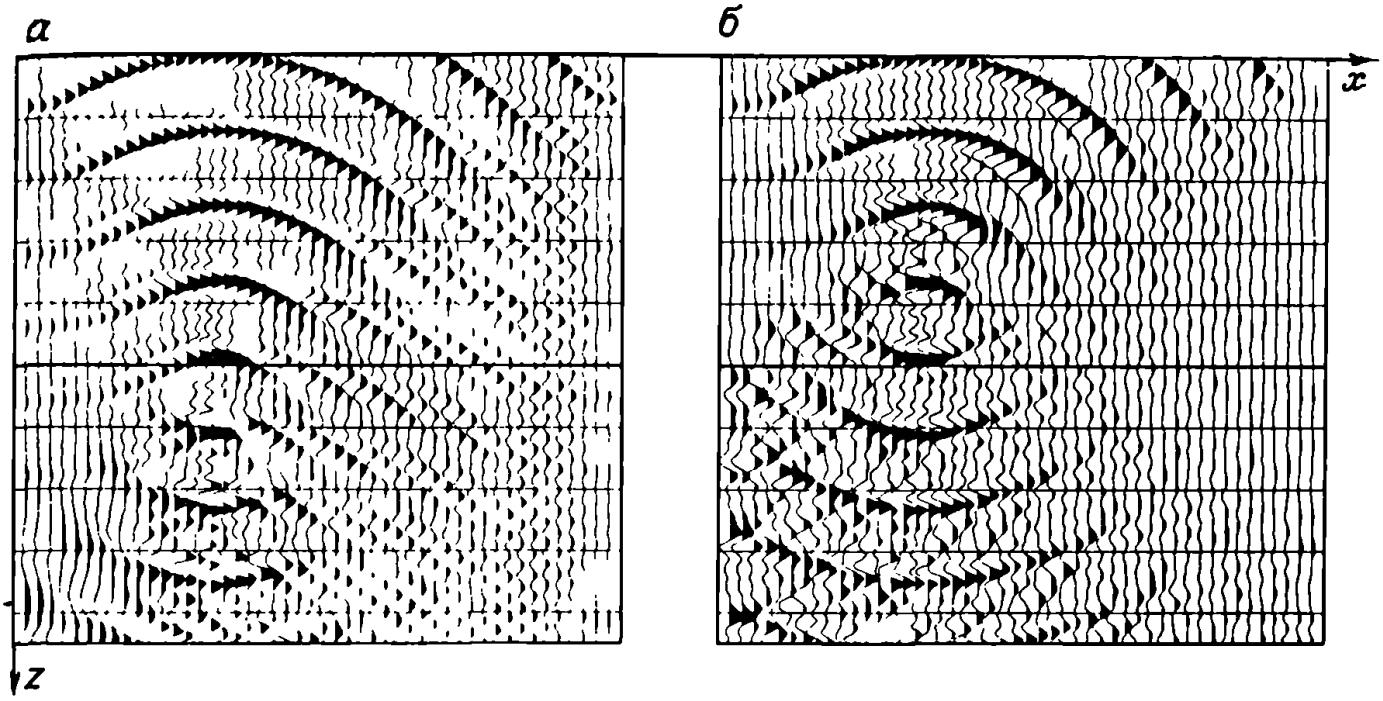



РИС. 50. Упр. 8, выполненное:
*а* без учета (1 6)λ, *б* с учетом (1 6)λ

Входные материалы будут представлены во временной области и должны будут подвергаться фурье-преобразованию. При составлении программы определяются импульсоиды, имитирующие волновые импульсы, наблюдаемые в поле. Они расширены и должны мигрировать к приближенным полуокружностям. Точные импульсоиды не применяются, так как из-за различий между разностными и дифференциальными операторами возникают разнообразные помехи.

Затем программа осуществляет фурье-преобразование этих псевдоданных из временной области в частотную.

На следующем этапе производится продолжение вниз каждой из частот. Эта часть программы представляет собой циклы по глубине $z$ и частоте $\omega$. Любой из названных циклов может находиться внутри. Конкретный выбор производится с учетом эффективности работы машины.

Для выполнения миграции требуется уравнение восходящих волн, а не падающей волны, как в случае программы фильмоцикла. Изменим знак оси $z$ в уравнении (101), что повлияет на знак при *aa* и фазе оператора *cshift*.

Еще одно отличие программы вычисления фильмоцикла состоит в том, что теперь входные данные зависят от времени, а выходные продолжают зависеть от глубины. Удобно так преобразовать вычисления, чтобы глубины откладывались во временах пробега (или псевдоглубинах), а вертикальные оси на входе и выходе были одинаковыми. Учитывая, что $\tau = z\ v$, или что то же самое $d\tau/dz = 1/v$, с помощью цепного правила получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial \tau}. \qquad (107)$$

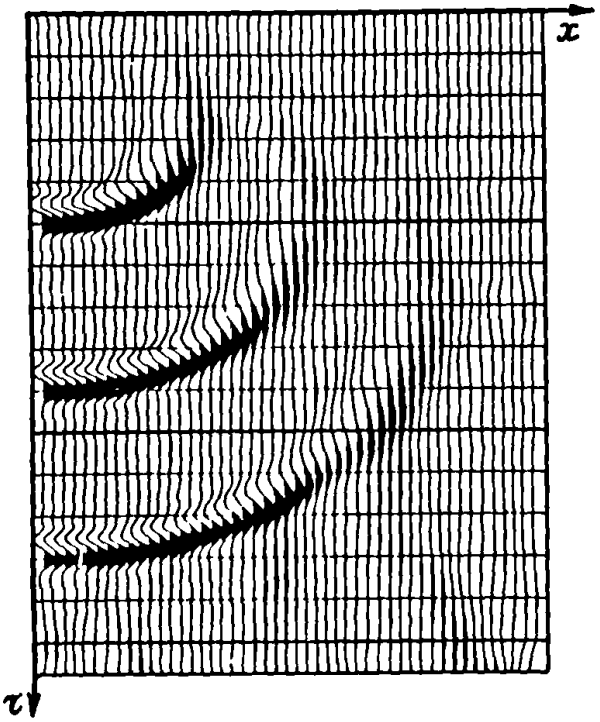



РИС. 51. Результат миграционного преобразования в области (ω, $x$, $z$)

Подстановка (107) в уравнение (101) приводит к соотношению

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -i\omega P - \frac{v^2}{-i\omega 2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \qquad (108)$$

В программе предусмотрено, что интервалы выборки отсчетов по времени dt $=\Delta t$ и по псевдоглубине dtau $=\Delta\tau$ равны единице, поэтому максимальной будет найквистова частота. Заметим, что цикл по частоте действует только в пределах оси положительных частот. Отрицательные частоты служат лишь для сохранения вещественной временной функции.

Результат на выходе данной программы изображен на рис. 51. Преимущественно видны аппроксимации в виде полуокружностей. На больших временах наблюдаются и помехи искусственного происхождения, которые могут вызываться периодичностью в частотном представлении. Очевидно, что импульсоиды на входе были достаточно широкополосными по кажущимся скоростям, так как полукруговое приближение фактически представляет собой эллипс, проходящий через начало координат.

Отметим то обстоятельство, что исходные импульсоиды имели вид симметричных функций времени, а полуокружности образованы такими импульсоидами, которые не являются ни симметричными, ни антисимметричными, а представляют собой импульсоиды, сдвинутые по фазе на 45 . Волны от точечного источника в трехмерном пространстве должны были бы иметь фазовый сдвиг, равный 90 . Волны, излучаемые двухмерной отражающей границей в трехмерном пространстве, имеют фазовый сдвиг, равный 45 .

## 2.4. Расщепление и полное разделение

Два процесса **A** и **B**, обычно действующие одновременно, могут (или не могут) быть взаимосвязанными. Случай,

когда они независимы один от другого, называется полным разделением. В таком случае часто оказывается полезным — как при обдумывании, так и вычислениях — считать, что процесс А завершается до того, как начался процесс **В**. В тех же случаях, когда процессы взаимосвязаны, можно на короткий период реализовать процесс **А**, затем перейти к процессу **В** и наоборот. Попеременный режим называется расщеплением.

### Уравнение теплового потока

Уравнения дифракции или миграции можно называть уравнениями «залечивания» фронта волны. Они сглаживают все латеральные разрывы в волновом фронте, которые могут вызываться начальными условиями или же влиянием линзовой слагаемой. Уравнение 15-градусной миграции имеет тот же вид, что и уравнение теплопроводности. Но в последнем все числа вещественные и их физический смысл более доступен пониманию. Поэтому предлагаемое вашему вниманию отступление от темы вполне оправдано. Ниже приведены два предположения, на которых основан вывод уравнения теплопроводности. Первое из них гласит, что тепловой поток $H_x$ в направлении $x$ равен отрицательному градиенту $-\partial/\partial x$ температуры $T$, умноженному на коэффициент теплопроводности $\sigma$. Во втором утверждается, что понижение температуры $-\partial T/\partial t$ пропорционально дивергенции теплового потока $\partial H_x/\partial x$, деленной на теплоемкость вещества $C$. Учитывая оба предположения, переходя к двум размерностям и полагая $\sigma$ постоянной, а $C=1$, получаем уравнение теплопроводности в виде

$$\partial T/\partial t=\sigma\left(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2\right)T. \qquad (109)$$

### Расщепление

Численное решение уравнения теплового потока методом расщепления состоит в замене двухмерного уравнения теплопроводности двумя одномерными, каждое из которых применяется попеременно во времени:

$$\partial T/\partial t=2\sigma\left(\partial^2 T/\partial x^2\right) \quad \text{(все } y\text{)}, \qquad (110а)$$

$$\partial T/\partial t=2\sigma\left(\partial^2 T/\partial y^2\right) \quad \text{(все } x\text{)}. \qquad (110б)$$

В уравнении (110а) коэффициент теплопроводности удваивается для потока в направлении $x$ и приравнивается к нулю для потока в направлении $y$. Для уравнения (110б) справедливо обратное соотношение. В нечетные моменты времени тепло течет в соответствии с уравнением (110а), а в четные — согласно уравнению (110б). Можно доказать аналитически, что решение путем попеременного использования уравнений (110а) и (110б)

сводится к решению уравнения (109) с погрешностью порядка $\Delta t$. Следовательно, ошибка стремится к нулю при стремлении к нулю $\Delta t$. Применение метода расщепления оправдывается тем, что неявные многомерные методы решения практически не осуществимы (см. конец раздела 2.2).

### Полное разделение

Метод расщепления может оказаться намного точнее, чем мы думаем, а во многих случаях потери в точности вообще нет, и следовательно его можно применять в самых крайних случаях. Продумайте такой радикальный подход к решению уравнений (110а и б), при котором вместо обращения к ним попеременно в следующие друг за другом моменты времени можно использовать сначала только уравнение (110а). Полученный промежуточный результат возьмем в качестве начального условия для уравнения (110б), которое используется на каждом шаге вычислений для получения окончательного результата. Может показаться удивительным, что такой радикальный метод может давать правильное решение уравнения (109). Но если $\sigma$ не зависит от $x$ и $y$, то последнее утверждение истинно. Изложенный выше процесс изображен на рис. 52 для случая импульсного начального возмущения. Если описанным выше радикальным методом можно получить правильное решение, то говорят, что дифференциальное уравнение типа (109) поддается полному разделению. Не стоит удивляться тому, что полное разделение становится возможным лишь при условии постоянства $\sigma$, так как в этом случае появляется возможность применить фурье-преобразование, в результате чего двухмерное решение $\exp\left[-\sigma\left(k_x^2+k_y^2\right)t\right]$ оказывается равным последовательности одномерных $\exp\left(-\sigma k_x^2 t\right)\times\exp\left(-\sigma k_y^2 t\right)$. Как будет показано ниже, условие применимости полного разделения определяется возможностью перестановки местами производных $\sigma\partial^2/\partial x^2$ и $\sigma\partial^2/\partial y^2$, т. е. должно быть все равно, в каком порядке выполнять дифференцирование. Существует также требование технического порядка, связанное с граничными условиями, но оно не создает затруднений в том случае, когда возмущение затухает прежде, чем достигает границы.

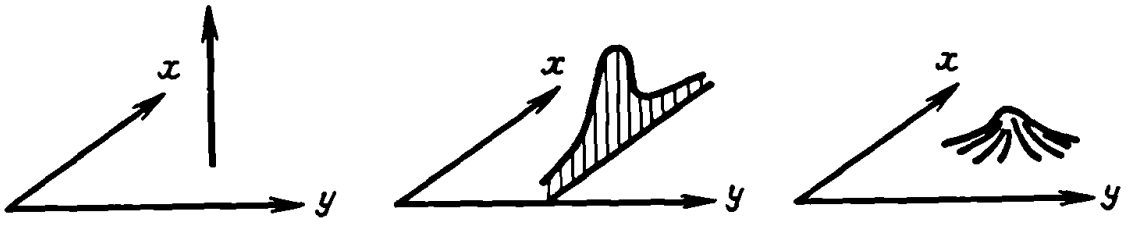



РИС. 52. Распределение температур на плоскости ($x$, $y$), начиная с дельта-функции (слева). Позволив теплу течь сначала в направлении $x$ (в центре), а затем $y$, получаем симметричный гауссов результат для случая одновременного распространения по направлениям $x$ и $y$ (справа)

Удивительно, но во многих учебниках по численному анализу нет никаких упоминаний о возможности полного разделения. Может быть, это объясняется тем, что независимо от того, каким способом находится решение расщеплением или же полным разделением общее число операций сложения и умножения остается одним и тем же. Но на практике стоимость решения громоздких задач не растет просто пропорционально числу операций умножения. Когда база данных не вмещается полностью в память с произвольным доступом — а это случается почти всегда при решении больших задач — то при каждом шаге решения методом расщепления приходится транспонировать базу данных, скажем, порядок записи в память $(x, y)$ заменять на $(y, x)$. Для транспонирования не нужно делать умножений, но во многих ситуациях операция транспонирования оказывается самой дорогостоящей частью всего вычислительного процесса. Поэтому, если транспонирования нельзя избежать, то следует стремиться к тому, чтобы на практике его объемы были сведены до приемлемого минимума.

Бывают обстоятельства, которые заставляют выбирать средний путь между расщеплением и полным разделением. Примером служит ситуация, когда $\sigma$ представляет собой медленно меняющуюся функцию $x$ или $y$. В таком случае оказывается, что $\sigma\partial^2/\partial x^2$ достаточно строго преобразуется в $\sigma\partial^2/\partial y^2$, поэтому прежде чем транспонировать данные и переключаться на уравнение (110б), можно совершить некоторое число временных шагов с уравнением (110а). Обстоятельства, подобные описанным и представляющие для геофизиков большой интерес, возникают при работе с уравнением волновой экстраполяции, которое рассматривается ниже. Значение концепций расщепления и полного разделения для сейсмологии было впервые подчеркнуто в работе [21].

### Случай латеральных изменений скорости

Уравнение для дифференциальных операторов имеет простой физический смысл и представляет собой так называемое монохроматическое 15-градусное уравнение волновой экстраполяции в неоднородных средах. При условии $v \approx \bar{v}$ оно имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \left\{ \frac{i\omega}{\bar{v}(z)} + i\omega \left[ \frac{1}{v(x, z)} - \frac{1}{v(z)} \right] - \frac{\bar{v}(z)}{2i\omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} U =$$

$$= (\text{запаздывание} + \text{тонкая линза} + \text{дифракция}). \qquad (111)$$

Изучение внешнего вида уравнения (111) показывает, что можно менять местами член, описывающий запаздывание, и слагаемые тонкой линзы и дифракции в свободном пространстве. Но слагаемые тонкой линзы и дифракции некоммутативны

между собой. С практической точки зрения, кажется, лучше всего применять метод расщепления, причем часть, представляющую собой тонкую линзу, решать аналитически, а дифракционную — методом Крэнка — Никольсона. В таком случае устойчивость гарантируется, так как известно, что каждая из задач в отдельности устойчива. Привлекательна также и точность, которую обеспечивает решение аналитическим путем. Теперь возникает вопрос о степени коммутативности этих слагаемых.

Эта проблема в точности совпадает с задачей фокусировки фильмоскопа. Регулировка фокуса с помощью рукоятки аппарата по существу аналогична перемещению слагаемого тонкой линзы относительно слагаемого дифракции в свободном пространстве. Существует небольшой интервал перемещения рукоятки, в пределах которого невозможно заметить какие-либо изменения, и несколько больший интервал, в пределах которого расфокусировка практически незаметна при наблюдении из заднего ряда демонстрационного зала. Многое в обработке геофизических данных сводится к их экстраполяции вниз. Латеральные вариации скорости, находящиеся в линзовом слагаемом, бывают известны лишь с ограниченной точностью. Областью применения линзового слагаемого может стать определение функции $v(x)$ с помощью процедуры экстраполяции.

В случае больших латеральных пространственных длин волн допускается перестановка слагаемых уравнения (111). Тогда дифракцию можно осуществлять и без знания латеральных вариаций скорости.

### Случай трехмерного продолжения в нижнее полупространство

Оператор миграционного преобразования данных МОВ при нулевых удалениях в трехмерном пространстве можно разложить на члены второго порядка с помощью ряда Тейлора так называемого 15-градусного приближения:

$$\left[\frac{(-i\omega)^2}{v^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]^{1/2}\approx\frac{-i\omega}{v}-\frac{v}{-2i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{v}{-2i\omega}\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (112)$$

Наиболее часто встречается случай, когда $v$ меняется медленно или вообще не зависит от $x$ и $y$. Тогда выполняются условия полного разделения. Это хорошо, так как при трехмерной экстраполяции можно пользоваться программами двухмерной волновой экстраполяции, выполняя преобразования продольных и непродольных наблюдений в любой последовательности. Трудности появляются при попытках повысить точность. Если сохранить в ряде Тейлора большее число членов, то не замедлит появиться член вида $\partial^4/\partial x^2\partial y^2$. При наличии подобного члена разложения нельзя осуществить ни расщепления, ни полного разделения. Схемы наблюдения, применяемые в на-

стоящее время в морской сейсморазведке, трудно контролировать в поперечном к профилю направлении, поэтому нет весомых оснований для обработки этих наблюдений с использованием иных уравнений, кроме 15-градусного. У Ф. Мюира возникла хорошая идея представить корень квадратный в следующем виде:

$$\left[\frac{(-i\omega)^2}{v^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]^{1/2}\approx\left[\frac{(-i\omega)^2}{v^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]^{1/2}-\frac{v}{-2i\omega}\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (113)$$

При обработке наблюдений на суше можно оправдать применение лучших приближений. Фурье-преобразование по меньшей мере одной из двух пространственных осей решает вычислительные трудности. Такой подход может оказаться приемлемым и в том случае, когда скорость в среде изменяется по латерали не столь резко, чтобы исключить применение фурье-преобразований.

## Обоснование возможности разделения трехмерной миграции

С операционной точки зрения трехмерные преобразования намного сложнее двухмерных. Поэтому целесообразно предположить, что трехмерную миграцию можно осуществить, выполнив дважды двухмерную: один раз по направлению $x$, другой — по направлению $y$. Судя по изложенному в предыдущем разделе, подобный подход должен приводить к значительному снижению точности результатов. В действительности же ситуация намного лучше, чем можно предположить.

Объясняется это тем, что миграционное преобразование — нечто большее, чем просто продолжение в нижнее полупространство. Составной частью в него входит и сейсмическое изображение, т. е. селекция данных в момент времени $t=0$. По основной схеме сначала завершается экстраполяция вниз, причем по обоим направлениям — $x$ и $y$. После нее применяется процедура изображения. Целесообразный же процесс состоит из четырех стадий: продолжения вниз по $x$, изображения, продолжения вниз по $y$ и, наконец, второго изображения. Такой процесс приводит к правильному результату, что объясняется следующим.

Подставляя уравнение (114) в (115) получаем уравнение (116), причем

$$t_1^2=t_0^2+(x-x_0)^2/v^2, \qquad (114)$$

$$t^2=t_1^2+(y-y_0)^2/v^2, \qquad (115)$$

$$t^2=t_0^2+(x-x_0)^2/v^2+(y-y_0)^2/v^2. \qquad (116)$$

Уравнение (116) определяет время пробега до произвольного точечного рассеивателя (или точки дифракции). В случае двухмерных наблюдений по оси $y$, т. е. при постоянном $x$,

уравнение (115) представляет собой уравнение годографа. Годографы по продольным направлениям не отличаются от гиперболических годографов в поперечном к профилю направлении. В результате двухмерного миграционного преобразования с помощью уравнения (115) энергия перемещается вверх до $t_1$. Последующая миграция в другом направлении с помощью выражения (114) перемещает энергию вверх по оставшемуся отрезку пути до $t_0$. Такой же результат получается и с помощью более дорогостоящей процедуры трехмерной миграции, реализуемой по соотношению (116).

Обоснование, сделанное Яқубовичем, более математическое, но его можно изложить следующим образом. Заметим, что в результате подстановки уравнения (117) в (118) получаем уравнение (119):

$$k_\tau^2 = \omega^2 - v^2 k_x^2, \tag{117}$$

$$k_z^2 = \frac{k_\tau^2}{v^2} - k_y^2, \tag{118}$$

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_x^2 - k_y^2. \tag{119}$$

Двухмерную миграцию Столта по $x$ можно рассматривать, как преобразование переход от глубины во время пробега $t$ к псевдоглубине $\tau$ с помощью уравнения (117). Вторую двухмерную миграцию по $y$ можно считать переходом от псевдоглубины $\tau$ к истинной глубине $z$ с помощью уравнения (118). Их комбинация равнозначна уравнению (119), определяющему трехмерное миграционное преобразование.

Выводы Якубовича находят широкое применение. Привыкший работать в двухмерном пространстве геофизик может мигрировать волновое поле и в условиях иных сейсмических сносов, кроме нулевого. (В гл. 3 миграционные преобразования совершаются над наблюдениями с нулевыми сносами). Если преобразование сделано добротно, вся отраженная энергия переместится вверх к вершине гиперболического годографа, имеющего нулевой сейсмический снос. Если же преобразуются годографы с нулевым сносом, то возможно преобразование в поперечной плоскости. Таким образом, наличие сноса вершины гиперболы не представляет проблемы. Но можно ли добротно переместить всю энергию годографа в вершину гиперболы, характеризующейся нулевым сейсмическим сносом?

В случае зависимости скорости в среде от глубины, что обычно имеет место, возникают осложнения. Тогда доказательство Якубовича не срабатывает, то же самое можно сказать и о целесообразности трехмерного метода. При обработке сейсморазведочных материалов, полученных на линейных профилях, проблема заключается в том, что миграционные скорости в боковых плоскостях отличаются от таковых для вертикальной

плоскости профиля. Волны, распространяющиеся в стороны от профиля наблюдений, достигают глубинных высокоскоростных слоев за большие промежутки времени. Поэтому для миграции боковых волн обычно требуются пониженные скорости. Если вам действительно хочется выполнить трехмерную миграцию с помощью распределения $v(z)$, то следует забыть о разделении и идти трудным путем. Но поскольку мы научились транспонировать (см. раздел 1.6), трудный путь оказывается не столь уж и трудным.

### Возможность разделения по горизонтальной координате

Регистрация отраженных сейсмических волн производится на поверхности земли. Можно вообразить, как будут выглядеть сейсмические данные при возбуждении и регистрации на некоторой глубине, т. е. при погруженных источниках и приемниках. Наблюдения при погруженных источниках и приемниках можно синтезировать по наземным следующим способом. Сначала нужно экстраполировать вниз сейсмоприемники, затем, воспользовавшись принципом взаимности, поменять местами источники и приемники и, наконец, экстраполировать вниз наземные источники (ставшие теперь приемниками). Другим равнозначным подходом может быть продвижение вниз шаг за шагом, при этом источники и приемники должны чередоваться. Последний подход разработан в гл. 3, а результат выражается просто в виде

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\left\{\left[\frac{(-i\omega)^2}{v(s)^2}-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right]^{1\ 2}+\left[\frac{(-i\omega)^2}{v(g)^2}-\frac{\partial^2}{\partial g^2}\right]^{1\ 2}\right\}U. \qquad (120)$$

Из равнозначности указанных подходов вытекает следующее математическое соображение. Координаты источника $s$ и сейсмоприемника $g$ являются независимыми переменными, поэтому допускается взаимная перестановка содержащихся в уравнении (120) двух квадратных корней. Таким образом, путем расщепления получается такое же решение, как и в случае полного разделения.

### Справедливость концепций расщепления и полного разделения

Если фурье-преобразование возможно, то операторы экстраполяции представляют собой комплексные числа вида $e^{ik_z z}$. Из теории комплексных чисел известно, что, если $a$ и $b$ комплексные числа, то обязательно $ab=ba$. В таком случае расщепление и полное разделение всегда возможны, но доказательство этого утверждения будет дано лишь для более общего случая.

Предположим, что фурье-преобразование не сделано или не могло быть сделано из-за наличия каких-то пространственных вариаций свойств вещества. В таком случае операторы экстраполяции формируются путем объединения конечно-разностных

операторов типа описанных в предыдущих разделах. Обозначим через **А** и **Б** два таких оператора. Оператор **А**, например, может быть матрицей, включающей в себя оператор вычисления разностей второго порядка по $x$. В матричной записи граничные условия дифференциального оператора находятся в углах. Нижняя линия соответствует равенству $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, поэтому ясно, что данный вопрос связан как с граничными условиями, так и с дифференциальными операторами.

Экстраполяцию вперед на небольшое расстояние можно осуществить с помощью оператора вида $(\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta z)$. В двухмерных задачах **А** является четырехмерной матрицей, в чем мы могли убедиться ранее. В целях удобства члены четырехмерной матрицы можно перегруппировать в большую обыкновенную двухмерную. В результате вычисления конечных разностей в неявном виде были получены операторы экстраполяции вида $(\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta z)/(\mathbf{I}-\mathbf{A}\Delta z)$. Обозначим через **р** вектор, компоненты которого определяют волновое поле в различных точках. Как было показано, эти точки не обязательно должны находиться на оси $x$, они могут распределяться и по плоскости $(x, y)$. Из численного анализа возьмем такой матричный оператор **А**, который позволяет осуществлять прогрессивное проецирование:

$$\mathbf{p}(z+\Delta z)=\mathbf{A}_1\mathbf{p}(z).$$

Нижний индекс у **А** обозначает тот факт, что оператор может изменяться с глубиной $z$. Чтобы сделать следующий шаг, снова воздействуют оператором

$$\mathbf{p}(z+2\Delta z)=\mathbf{A}_2[\mathbf{A}_1\mathbf{p}(z)].$$

С операционной точки зрения матрица **А** никогда не возводится в квадрат, но с аналитической она оказывается на деле возведенной в квадрат:

$$\mathbf{A}_2[\mathbf{A}_1\mathbf{p}(z)]=(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)\mathbf{p}(z).$$

Чтобы продвинуться на некоторое расстояние вниз по оси $z$, указанный оператор применяют несколько раз. Возьмем интервал $z_1-z_0$, который разобьем на $N$ подынтервалов. Поскольку число интервалов $N$, в каждом подынтервале будет накапливаться ошибка, пропорциональная $1/N$, и ко времени достижения глубины $z_1$ она вырастет до недопустимого уровня. С другой стороны, ошибка, пропорциональная $1/N^2$, может накопиться только до уровня полной ошибки, пропорциональной $1/N$. Такая ошибка по мере роста числа подынтервалов должна исчезать.

Чтобы доказать справедливость операции расщепления, возьмем $\Delta z=(z_1-z_0)/N$. Учтем, что оператор $(\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta z)(\mathbf{I}+\mathbf{B}\Delta z)$ отличается от $\mathbf{I}+(\mathbf{A}+\mathbf{B})\Delta z$ на величину, пропорциональную $\Delta z^2$ или $1/N^2$. Поэтому при очень большом числе подынтервалов ошибка исчезает.

Намного проще доказать справедливость концепции полного разделения. Свойство коммутативности выражается равенством $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$. Свойство коммутативности всегда соблюдается для скалярных величин. При вычислении конечных разностей возникает вопрос о коммутативности этих матриц. Если положить, что **A** и **B** — дифференциальные операторы, свойство коммутативности можно определить с помощью семейства всех возможных волновых полей $P$. В этом случае матрицы **A** и **B** коммутативны при условии соблюдения равенства $\mathbf{AB}P=\mathbf{BA}P$.

Дифференциальный оператор $\partial P/\partial z$ принимается равным $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. Простейшая схема численного интегрирования, использующая метод расщепления, имеет вид

$$P(z_0+\Delta z)=(\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta z)(\mathbf{I}+\mathbf{B}\Delta z)P(z_0). \tag{121}$$

В результате многократного применения схемы (121) получаем произведение большего числа операторов. Операторы **A** и **B** имеют нижний индекс $j$, обозначающий возможность изменения их с глубиной $z$:

$$P(z_1)=\prod_{j=1}^{N}[(\mathbf{I}+\mathbf{A}_j\Delta z)(\mathbf{I}+\mathbf{B}_j\Delta z)]P(z_0). \tag{122}$$

Если **A** и **B** коммутативны, то коэффициенты в (122) можно перегруппировывать по желанию. Например, оператор **A** можно использовать во всей его полноте перед применением оператора **B**:

$$P(z_1)=\left[\prod_{j=1}^{N}(\mathbf{I}+\mathbf{B}\Delta z)\right]\left[\prod_{j=1}^{N}(\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta z)\right]P(z_0). \tag{123}$$

Итак, мы убедились, что концепция полного разделения зависит от коммутативности операторов.

**Упражнения**

1. Прибегнув к методу расщепления, в работе [97] показали, что путем последовательного применения уравнения, аналогичного 45-градусному, можно осуществлять миграцию трасс, регистрируемых на очень больших удалениях. Этот путь позволяет избегать решения ленточных матриц, свойственных разложениям Мюира высоких порядков. Конкретно это сводится к тому, что подбираются коэффициенты $a_j$ и $b_j$ в приближающей квадратный корень функции вида

$$ik_z=\sum_{j-1}^{n-1}k_x^2 b_j\,(-i\omega+a_j ik_x).$$

Общий случай $n$-го порядка сложнее, поэтому вам нужно просто найти $a_1$, $a_2$, $b_1$ и $b_2$, обеспечивающие согласование между аппроксимирующей функцией и 45-градусным уравнением.

2. Осуществите миграционное преобразование двухмерного множества данных, используя скорость $v_1$. Затем проведите миграцию полученного множества данных при помощи скорости $v_2$. Ф. Рокка отметил, что подобное двойное мигрирование имитирует миграционное преобразование с некоторой третьей скоростью $v_3$. Воспользовавшись методом рассуждений, аналогичным использованному Якубовичем при выводе уравнений (117), (118) и (119), выразите $v_3$ через $v_1$ и $v_2$.

3. Рассмотрите миграционное преобразование наблюдений с нулевыми удалениями, т. е. $P(x, y, t)$, зарегистрированных на некотором участке плоской земной поверхности. Предположим, что в вашем распоряжении находится ЭВМ с достаточно емкой памятью с произвольным доступом, могущей вместить данные по нескольким профилям произвольной ориентации, выбранным из объема наблюдений. (Весь объем наблюдений находится в медленнодействующих запоминающих устройствах.) Определите алгоритм миграционного преобразования и программу (подобную приведенной в разделе 1.3). Ваш метод должен допускать изменение скорости с глубиной.

## 2.5. Рекурсивные фильтры кажущихся скоростей

Рекурсивная фильтрация представляет собой такой вид фильтрации, при которой сигнал с выхода фильтра подается снова на его вход. Этим достигается длительная импульсная реакция при совершенно незначительных объемах вычислений. Она особенно эффективна при вычислении текущей средней. Текущую среднюю можно осуществить в виде низкочастотного фильтра в частотной области, но оказывается, что гораздо лучше избегать перехода в преобразованное пространство. Работа в физическом пространстве требует меньших затрат, позволяет изменять коэффициенты и более гибко обращаться с границами. Множества геофизических данных редко остаются стационарными на больших интервалах, безразлично, пространственных или временных, поэтому рекурсивная фильтрация особенно эффективна при отыскании статистических оценок.

Назначение большинства типов фильтров состоит в обеспечении возможности выявления значимых, но слабых, сейсмических событий на сейсмограммах, замаскированных фоном сильных помех. Одномерные фильтры могут решать эту задачу только путем селекции или подавления частотных составляющих. В двухмерном варианте возможно использование иного критерия, а именно, критерия селекции по кажущейся скорости волны, или по наклону оси синфазности.

Процесс фильтрации по кажущейся скорости вызывает давний и устойчивый интерес у геофизиков [47]. Круто наклоненные оси синфазности часто связаны с поверхностными волнами. Горизонтальные оси также могут соответствовать помехам. Например, слабые, дифрагированные на разрывных нарушениях волны несут в себе ценную информацию, но они зачастую невидимы из-за доминирующего фона отражений от полого залегающих слоев.

Чтобы выполнить обычную фильтрацию по кажущимся скоростям (веерную фильтрацию), нужно просто преобразовать данные в пространство $(\omega, k)$, умножить результат на любую функцию параметра $k/\omega$ и совершить обратное преобразование. Таким образом, веерные фильтры позволяют осуществлять полный контроль над характеристикой фильтра в пространстве

кажущихся скоростей $k/\omega$. Хотя рекурсивные фильтры не поддаются столь простой регулировке по кажущимся скоростям, они отвечают тем же требованиям, что и веерные. Кроме того, они имеют такие дополнительные достоинства, как переменность во времени и в пространстве, причинность, простота реализации и на порядок бóльшая экономичность по сравнению с фильтрами в представлении через $(\omega, k)$.

Свойство причинности дает возможность для ее реализации в процессе регистрации наблюдений. В регистрирующую аппаратуру, помещенную в современной морской сейсмокосе, можно вмонтировать фильтры, которые будут подавлять волны, распространяющиеся в воде.

### Определение рекурсивного фильтра кажущихся скоростей

Обозначим через $P$ первичные, необработанные данные, а через $Q$ — результат их фильтрации. Когда сейсмические наблюдения квазимонохроматичны, фильтрацию по кажущимся скоростям можно осуществлять с помощью пространственно-частотных фильтров. Ниже приведены характеристики фильтров кажущихся скоростей с регулируемым параметром среза $\alpha$ для монохроматических наблюдений $(\omega = \text{const})$.

Для низких частот $Q = \frac{\alpha}{\alpha + k^2} P$;

для высоких частот $Q = \frac{k^2}{\alpha + k^2} P$.

Чтобы использовать указанные фильтры в пространственной области, необходимо лишь рассматривать $k^2$ в качестве трехдиагональной матрицы $\mathbf{T}$ с вектором $(-1, 2, -1)$, располагающимся на главной диагонали. В частности, для создания низкочастотного фильтра необходимо решить систему трехдиагональных уравнений типа

$$(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{T})\mathbf{q} = \alpha\mathbf{p}, \qquad (124)$$

в котором $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ представляют собой векторы-столбцы, чьи элементы обозначают различные точки на оси $x$. Аналогичная операция производилась и ранее при решении уравнения теплопроводности. Чтобы сделать фильтр переменным по пространственной координате, можно поставить параметр $\alpha$ в зависимость от $x$. В этом случае произведение $\alpha\mathbf{I}$ заменяется на диагональную матрицу произвольного вида. Не имеет значения, в каком из представлений — $\omega$ или $t$ — выражены $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

Переключим внимание с узкополосных наблюдений на данные с более широким спектром и рассмотрим фильтры кажущихся скоростей в случае наблюдений с умеренно широким спектром $(\Delta\omega)$:

для низких частот $Q=\dfrac{\alpha}{\alpha+\dfrac{k^2}{-i\omega}}P,$

для высоких частот $Q=\dfrac{\dfrac{k}{-i\omega}}{\alpha+\dfrac{k^2}{-i\omega}}P.$

Естественно, что последние фильтры можно использовать при обработке наблюдений, имеющих спектры любой ширины. Но они соответствуют своему названию лишь в пределах полосы частот довольно скромной ширины.

Чтобы понять принцип действия указанных выше фильтров, нужно изучить поведение изолиний постоянного отношения $k^2/\omega$, изображенных на плоскости $(\omega, k)$, т. е. изолиний, для которых соблюдается приближенное равенство $\omega \approx k^2$. Эти изолинии, примеры которых можно видеть на рис. 53, представляют собой кривые постоянного ослабления и постоянного фазового сдвига. У низкоскоростного фильтра в зоне пропускания нет фазового сдвига, но существует временная дифференциация в зоне ослабления. Эти особенности заметны и в определяющем фильтр уравнении. Высокоскоростной фильтр не имеет фазового сдвига в области полосы пропускания, но в зоне ослабления наблюдается временное интегрирование.

Интересной особенностью указанных фильтров кажущихся скоростей является то, что в сумме низкоскоростной и высокоскоростной фильтры дают единицу. Поэтому, если множество данных разделяется ими на две части, то ничего не теряется. Можно сложить высокоскоростную часть с низкоскоростной и восстановить исходное множество. Кроме того, при наличии сигнала на выходе низкоскоростного фильтра намного проще рассчитать сигнал на выходе высокоскоростного фильтра, так как он будет равен разности между входным сигналом и сигналом, прошедшим через низкоскоростной фильтр.

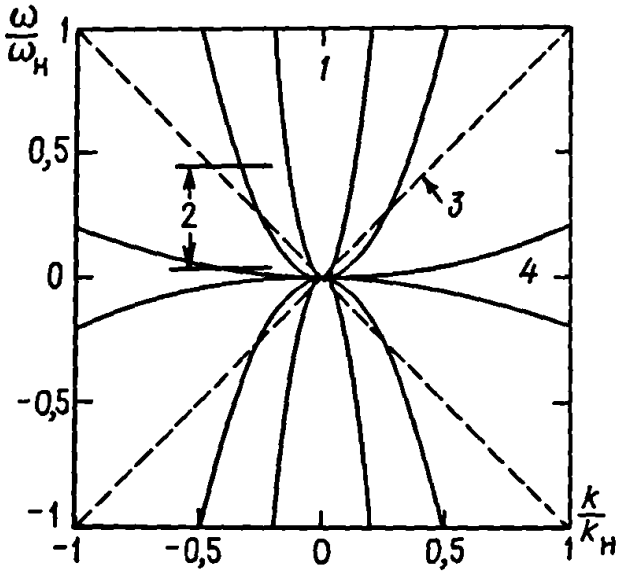



РИС. 53. Изолинии постоянного ослабления для фильтров кажущихся скоростей. В полосе сейсмических частот эти параболы удовлетворительно приближаются к диагональным прямым. Зоны пропускания и подавления показаны для низкоскоростного фильтра:
*1* полоса пропускания; *2* полоса сейсмических частот; *3* — идеальный фильтр кажущихся скоростей; *4* — полоса подавления

## Практическая реализация рекурсивного фильтра кажущихся скоростей

Реализация фильтров кажущихся скоростей, имеющих умеренную ширину полосы пропускания,— довольно простое дело. Например, избавившись от дробей, получаем низкоскоростной фильтр вида

$$(-i\omega\alpha\mathbf{I}+\mathbf{T})\mathbf{Q}=-i\omega\alpha\mathbf{P}. \tag{125}$$

Главный фокус заключается в осознании того факта, что дифференцирование (умножение на $-i\omega$) выполняется в смысле Крэнка — Никольсона, т. е. недифференцируемые члены находятся путем усреднения по соседним значениям:

$$\mathbf{I}\frac{\alpha}{\Delta t}(\mathbf{q}_{t+1}-\mathbf{q}_t)+\mathbf{T}\frac{\mathbf{q}_{t+1}+\mathbf{q}_t}{2}=\frac{\alpha}{\Delta t}(\mathbf{P}_{t+1}-\mathbf{P}_t). \tag{126}$$

Перенеся неизвестные в левую часть уравнения, получаем

$$\left(\frac{\alpha}{\Delta t}\mathbf{I}+\frac{1}{2}\mathbf{T}\right)\mathbf{q}_{t+1}=\left(\frac{\alpha}{\Delta t}\mathbf{I}-\frac{1}{2}\mathbf{T}\right)\mathbf{q}_t+\frac{\alpha}{\Delta t}(\mathbf{P}_{t+1}-\mathbf{P}_t). \tag{127}$$

Уравнение (127) представляет собой трехдиагональную систему уравнений относительно неизвестных $\mathbf{q}_{t+1}$. Систему можно решить рекурсивным способом для последовательных значений времени $t$.

Параметр $\alpha$ определяет граничный срез характеристики фильтра. Он может быть любой функцией времени и пространства. Но если мы предположим, что функция должна изменяться очень быстро, то будем вынуждены прибегнуть к анализу устойчивости решения, который будет дан в одной из следующих глав.

## Боковые границы

Обычно геофизиков устраивает, когда боковые волны от близких границ отсутствуют, или же они находятся в бесконечности. Есть два вида боковых условий, о которых стоит поразмыслить, а именно, условия по $x$ и по $k$.

Боковые условия по $x$ часто наилучшим образом аппроксимируются условиями нулевого углового коэффициента. Можно воспользоваться и более общими боковыми условиями, так как ранее мы узнали, как решать любую трехдиагональную систему уравнений.

Боковые условия в пространстве $k$ связаны с наименьшими по величине кажущимися скоростями. Один из способов фильтрации осей синфазности с такими угловыми коэффициентами состоит в использовании соотношения $\mathbf{T}/(\mathbf{I}-\beta\mathbf{T})$ для того, чтобы выразить $k^2$. Этот прием связан с введением еще одного

регулируемого параметра $\beta$, который должен оставаться меньшим 1/4. Более детально этот вопрос освещается в разделе 4.3.

### Веерная фильтрация

Вполне естественно, что нас могут больше устраивать истинные фильтры кажущихся скоростей, т. е. функции от $k/\omega$, а не от $k^2/\omega$, о которых говорилось выше. На это можно возразить, что замена в приведенных выше выражениях отношения $k^2/\omega$ на $k^2/\omega^2$ приводит к неустойчивости рекурсии.

Более острые веерные фильтры, т. е. фильтры, характеристики которых более строго походят на прямоугольную функцию от $k/\omega$, можно задавать различными способами аппроксимации [70]. В общем случае $|k|$ можно разложить в степенной ряд по $\partial^2/\partial x^2$. Если аппроксимация $|k|$ гарантировано положительная, то можно надеяться на устойчивость рекурсии, которая представляет отношение $|k|/i\omega$.

Более простой случай возникает при фурье-преобразовании одной из координат — временной или пространственной. По непреобразуемой координате требуемой операцией будет высоко- или низкоскоростная фильтрация. Последняя легко реализуется несколькими способами, например, в виде фильтра Баттеруорта.

### Большее число измерений

Естественно представить себе рекурсивный трехмерный фильтр низких кажущихся скоростей в виде функции

$$\frac{\alpha}{\alpha+(k_x^2+k_y^2)/(-i\omega)}. \tag{128}$$

Но подобные рассуждения приводят к неразрешимой ситуации Крэнка — Никольсона. Многомерная низкоскоростная фильтрация возможна посредством функции типа

$$\left(\frac{\alpha_x}{\alpha_x+k_x^2/(-i\omega)}\right)\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_y+k_y^2/(-i\omega)}\right). \tag{129}$$

## 2.6. Запаздывающие координаты

Чтобы изучить волны в движении, самое лучшее — перемещаться вместе с ними. Поэтому, для описания волны, распространяющейся в глубь земли, заменим координаты $(x, z)$ движущимися координатами $(x, z')$, где $z'=z+tv$.

Альтернативой системе движущихся координат является переход к запаздывающим координатам $(x, z, t')$, где $t'=t-z/v$. Классическим примером запаздывающих координат является солнечное время. Время кажется покоящимся относительно самолета, который летит на запад со скоростью перемещения солнца.

Процесс миграционного преобразования напоминает моделирование процесса распространения волны либо в движущейся, либо в запаздывающей системе координат. Запаздывающие координаты гораздо более популярны, чем движущиеся. Происходит это по следующей причине. Как известно из физики твердой Земли, скорость может зависеть как от $x$, так и от $z$, но в процессе сейсмических наблюдений земная среда не изменяет свои свойства со временем $t$. В движущейся координатной системе скорость может зависеть от всех трех переменных сразу, что ведет к излишнему усложнению расчетов. Фурье-преобразование — популярный способ решения волновых уравнений, но в случае непостоянства коэффициентов он во многом теряет свою эффективность.

### Определение независимых переменных

Часто само запаздывание базируется на представлении о воображаемых лучах, движущихся отвесно вниз со скоростью $\bar{v}(z)$. Определение подобных координат имеет смысл и в задачах, допускающих изменение скорости в среде по латерали, т. е. $v(x, z)$, даже в том случае, когда лучи, идущие прямо вниз, отсутствуют. В принципе, для описания любой обстановки можно воспользоваться любой координатной системой, но полезность системы запаздывающих координат уменьшается по мере того, как определяющее ее семейство лучей все больше и больше отклоняется от фактического.

Определим систему запаздывающих координат $(t', x', z')$ через обыкновенные декартовы $(t, x, z)$ с помощью следующей системы уравнений

$$t'=t'(t, x, z)=t-\int_0^z \frac{dz}{\bar{v}(z)}, \tag{130а}$$

$$x'=x'(t, x, z)=x, \tag{130б}$$

$$z'=z'(t, x, z)=z. \tag{130в}$$

Назначение интеграла состоит в накапливании времени пробега от поверхности земли до глубины $z$. Координаты $(x', z')$ определяются для того, чтобы, во-первых, избежать путаницы при нахождении частных производных и, во-вторых, для

подготовки к ситуациям, при которых семейство лучей имеет более обобщенный характер.

### Определение зависимых переменных

Существуют два вида зависимых переменных: один из них характеризует среду, другой — сами волны. Среда характеризуется скоростью распространения волн в ней $v$ и отражательной способностью $c$. Волны разделяются на восходящие $U$, и падающие — $D$. Кроме этого рассмотрим давление $P$ и модулированную форму давления $Q$. Пусть $P(t, x, z)$ — математическое выражение давления в заданной точке $(t, x, z)$, а $P'(t', x', z')$ — то же самое в точке $(t', x', z')$. Утверждение, что две математические функции $P$ и $P'$ относятся к одной и той же физической переменной, имеет следующий вид:

$$P(t, x, z)=P'[t'(t, x, z),\ x'(t, x, z),\ z'(t, x, z)], \qquad (131)$$
$$P(t, x, z)=P'(t', x', z').$$

Очевидно, что существуют аналогичные выражения и для других зависимых переменных и параметров среды, например, скорости $v(x, z)$.

### Цепное правило и высокочастотный предел

В пространстве $(t, x, z)$ на помощь приходят известные дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. С помощью нахождения частных производных переведем их в пространство $(t', x', z')$. Например, в результате дифференцирования (131) по $z$ получаем

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial P'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}+\frac{\partial P'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial P'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}. \qquad (132а)$$

Воспользовавшись уравнением (131) для оценки производных по координатам, получим

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{v}}\frac{\partial P'}{\partial t'}+\frac{\partial P'}{\partial z'}. \qquad (132б)$$

Можно также записать

$$\frac{\partial}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{v}}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial z'}, \qquad (133)$$

где в левой части находится операция над функциями, зависящими от $(t, x, z)$, а в правой — над функциями, зависящими от $(t', x', z')$. Продифференцировав (133) дважды, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\left(\frac{-1}{v}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial z'}\right)\left(\frac{-1}{\bar{v}}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial z'}\right). \qquad (134)$$

Воспользовавшись тем фактом, что скорость не зависит от времени, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{\bar{v}^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{2}{\bar{v}}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial z'}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}+\left(\frac{1}{\bar{v}^2}\frac{dv}{dz'}\right)\frac{\partial}{\partial t'}. \tag{135}$$

Если не обращать внимания на первый член в скобках, то можно сказать, что «возведение в квадрат» оператора (133) дает вторую производную. При обработке сейсморазведочных материалов последним членом почти всегда пренебрегают. Это объясняется тем, что его влияние похоже на влияние других членов с первыми производными и вещественными градиентами вместо коэффициентов. Как показано в разделе 1.5, наличие таких членов уравнения заставляет более точно вычислять амплитуды.

### Фурье-преобразования в запаздывающих координатах

Задавшись полем давлений $P(t, x, z)$, можно его преобразовать по Фурье относительно любой или всех независимых переменных $(t, x, z)$. Аналогично, если поле давлений определено в запаздывающих координатах, можно выполнить фурье-преобразование относительно $(t', x', z')$. Поскольку фурье-аналогом переменных $(t, x, z)$ являются координаты $(\omega, k_x, k_z)$, разумно предположить, что фурье-аналогом координат $(t', x', z')$ должны быть координаты $(\omega', k_x', k_z')$. Теперь возникает вопрос, каким образом координаты $(\omega', k_x', k_z')$ могут быть связаны с координатами $(\omega, k_x, k_z)$? Ответ содержится в отыскании частных производных. Любое выражение наподобие

$$\frac{\partial}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{v}}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial z'} \tag{136}$$

после Фурье-преобразования принимает вид

$$ik_z=-\frac{-i\omega'}{\bar{v}}+ik_z'. \tag{137}$$

Вычислив все остальные производные, получим следующее преобразование:

$$\omega=\omega', \tag{138а}$$

$$k_x=k_x', \tag{138б}$$

$$k_z=k_z'+\frac{\omega'}{\bar{v}}. \tag{138в}$$

Обратимся к дисперсионному соотношению для скалярного волнового уравнения:

$$\frac{\omega^2}{v^2}=k_x^2+k_z^2. \tag{139}$$

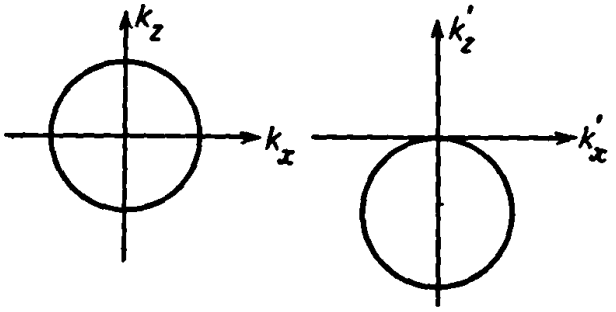



РИС. 54. Дисперсионное соотношение волнового уравнения в обычных координатах (слева) и в координатах запаздывающего времени (справа)

Подставив соотношение (138) в уравнение (139), получим выражение скалярного волнового уравнения в запаздывающем времени вида

$$\left(\frac{\omega'}{v}\right)^2 = k_x'^2 + \left(k_z' + \frac{\omega'}{\bar{v}}\right)^2. \tag{140}$$

Последние два дисперсионных соотношения изображены на рис. 54, где показано, что запаздывание может снижать затраты на конечно-разностные вычисления. Волны, распространяющиеся прямо вниз, располагаются возле вершины дисперсионной кривой (окружности). Эффект запаздывания производится путем смещения вершины окружности вниз до начала координат. Дискретизация осей $x$ и $z$ приводит к появлению на них искажений пространственной частоты. Чем выше частота $\omega$, тем больше окружность. Ясно, что вершина смещенной окружности находится дальше от порога возникновения наложения частот. С другой стороны, для экономии затрат машинного времени шаг вычислений $\Delta z$ может быть увеличен, прежде чем $k_z'$ превысит частоту Найквиста $\pi/\Delta z$.

### Истолкование смысла переменной модулированного давления $Q$

Ранее переменная $Q$ была определена через давление $P$ с помощью уравнения

$$P(\omega) = Q(\omega) \exp\left[i\omega \int_0^z \frac{dz}{\bar{v}(z)}\right]. \tag{141}$$

В правой части стоит произведение двух функций частоты $\omega$. При постоянной скорости уравнение (141) выражается следующим образом:

$$P(\omega) = Q(\omega)\, e^{i\omega z\, v} = Q(\omega)\, e^{i\omega t_0}. \tag{142}$$

Во временном представлении $\exp(i\omega t_0)$ превращается в дельта-функцию $\delta(t - t_0)$. Равенство (142) представляет собой произведение в частотном представлении, поэтому во временной области оно будет сверсткой

$$p(t)=q(t)*\delta(t-z/v)=q(t-z/v)=q(t'). \qquad (143)$$

Анализ равенств (141)—(143) говорит о том, что определение зависимой переменной $Q$ равнозначно введению запаздывающего времени $t'$.

## Специальная теория относительности Эйнштейна

О применении специальной теории относительности Эйнштейна при построении сейсмических изображений ничего не известно, хотя некоторые математические методы ей родственны. Обратимся к этой знаменитой теории.

В 1887 г. в результате опытов на интерферометре, выполненных Майкельсоном и Морли, было установлено с высокой степенью точности, что свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, днем и ночью, зимой и летом. Мы же убедились, что дисперсионное соотношение скалярного волнового уравнения представляет собой окружность с центром в начале координат. Последнее означает, что волны по всем направлениям движутся с одной и той же скоростью. Но если координатная система движется относительно среды, то дисперсионное соотношение теряет свою симметрию по направлениям распространения волн. Когда свет распространяется в вакууме космического пространства, естественная базисная система координат вроде бы отсутствует. Если предположить, что летом Земля стоит на месте, то зимой она будет двигаться вокруг Солнца в противоположном направлении. Летние координаты связаны с зимними примерным равенством $x'=x-2v_3t$. Анализ эксперимента Майкельсона Морли приводит к выводу о том, что подобное движение должно иметь измеримую асимметрию, но наблюдения показывают, что предсказываемая асимметрия отсутствует. Почему? Одно из объяснений дается гипотезой «эфира». Эфир — воображаемая субстанция, которая объясняет парадокс опыта Майкельсона — Морли. Предполагается, что он имеет ничтожную плотность и вязкость и каким-то образом увлекается Землей во вращение, причем получается, что земные наблюдатели всегда движутся с той же скоростью, что и эфир. Другие опыты также противоречат гипотезе о существовании эфира. Например, присутствие эфира в атмосфере должно вызвать поддающуюся измерению рефракцию звездного света, но ничего похожего не наблюдается.

Объяснение упомянутых выше опытов, данное Эйнштейном, основывается на математических расчетах, которые вы можете легко проверить. Определим координатную систему следующим образом:

$$z'=z-v\frac{t}{\sqrt{1-v^2\ c^2}}, \qquad (144а)$$

$$x'=x, \qquad (144б)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{\sqrt{1 - v^2 c^2}}. \qquad (144в)$$

Поразительное свойство последнего преобразования, которое легко проверяется, состоит в том, что оно превращает уравнение $P_{xx} P_{zz} = c^{-2} / P_{tt}$ в $P_{x'x'} + P_{z'z'} = c^{-2} P_{t't'}$.

Преобразованное волновое уравнение не зависит от скорости $v$, что и привело Эйнштейна к его теории.

## 2.7. Вычисление конечных разностей в пространстве $(t, x, z)$

Большая, если не бóльшая, часть сейсморазведочных наблюдений подвергается миграционным преобразованиям в пространстве с координатами $(t, x, z)$. Чтобы избежать сложности трехмерного пространства, познакомимся сначала с тем, как выполняется миграция в пространстве $(z, t)$ при фиксированном $k_x$.

### Миграция в пространстве с координатами $(z, t)$

Миграцию и синтез сейсмических наблюдений в пространстве $(z', t')$ можно наглядно представить в виде графика, изображающего восходящую волну $U$ (рис. 55):

(145)

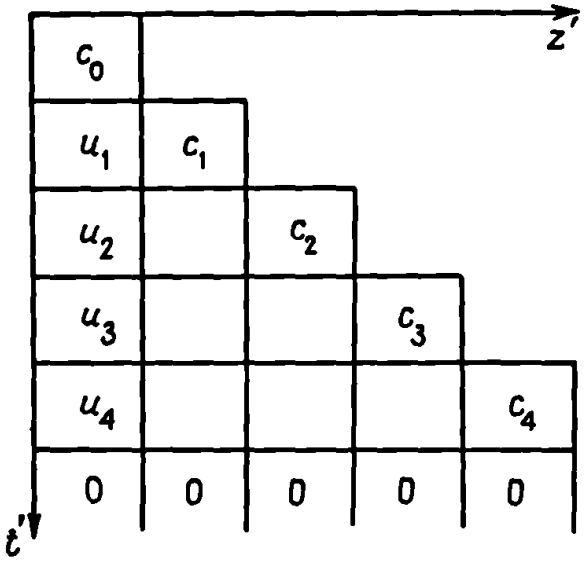



РИС. 55.

В ней восходящая волна, регистрируемая на поверхности земли $z' = 0$, обозначена символом $U_t$. Разрез, полученный в результате миграционного преобразования и обозначенный буквой $c_t$, изображен по диагональным квадратикам, так как условие сейсмического изображения излучающих границ в момент времени $t = 0$ выражается в пространстве запаздывающих координат, как

$$z' = z, \qquad (146а)$$

$$t' = t + z/v \ (+\text{для случая движения вверх}), \qquad (146б)$$

$$0 = t = t' - z'/v. \qquad (147)$$

Наилучшим образом сфокусированный результат миграционного преобразования не обязан совпадать с линией, наклоненной под углом 45 , как это выглядит на графике (145). Он может находиться на любой прямой или кривой, положение

которой определяется распределением скоростей в среде. Такая кривая, в свою очередь, образует основу для определения скоростей (см. раздел 3.5). В частотном представлении определять скорости подобным образом невозможно.

Согласно разделу 2.1, уравнение восходящих волн $U$ в запаздывающих координатах $(t', x', z')$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z' \partial t'} = -\frac{v}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}. \tag{148}$$

Проведем фурье-преобразование по оси $x$. При этом предполагается, что $v$ не зависит от $x$, а зависимость $U$ от $x$ представляет собой синусоидальную функцию вида $\exp(ik_x x)$. Следовательно,

$$0 = \left(\frac{v}{2}k_x^2 - \frac{\partial^2}{\partial z' \partial t'}\right) U. \tag{149}$$

Теперь дискретизируем последнее дифференциальное уравнение в частных производных по $t'$ и $z'$. Будем пользоваться матричной записью, хотя сама запись не имеет никакого отношения к алгебре матриц. Используемые ниже матрицы обозначают разностные операторы, которые можно налагать на плоскость с координатами $(t', z')$ типа (145). Обозначим значком $*$ свертку в пространстве $(z, t)$. Последовательность производных представляет собой в действительности операцию свертки, поэтому равенство $(\partial/\partial z)(\partial/\partial t) = (\partial^2/\partial z)^{\partial t}$ выражается через

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{150}$$

Таким образом, конечно-разностная форма уравнения (149) имеет вид

$$0 = \left(\frac{v}{2}\frac{\Delta z' \Delta t'}{4} k_x^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) * U. \tag{151}$$

В последнее уравнение множитель 1/4 входит на том основании, что среднее значение волны $U$ определяется по четырем ячейкам вычислительной сетки.

Сумму двух операторов $|b| \geqslant |s|$ выразим следующим образом:

$$0 = \begin{bmatrix} s & b \\ b & s \end{bmatrix} * U. \tag{152}$$

Для заполнения графика (145) значениями $U$ будет использоваться разностный оператор из выражения (152).

При наличии трех значений $U$ в клеточках, отсутствующее значение $M$ можно определить с помощью любой из двух следующих ниже операций (рис. 56).




(153 а, б)

РИС. 56.

Оказывается, что поскольку $|b| \geqslant |s|$, следующие заполняющие операции (рис. 57) будут неустойчивыми:




(154)

РИС. 57.

Очевидно, что при $s=0$ возникает проблема деления на нуль и нетрудно провести анализ устойчивости, который покажет, что условие (154) вызывает возрастание по экспоненте небольших возмущений.

Полезно выполнить следующее упражнение. Предположим, что угловой коэффициент $k_x$ равен нулю и воспользуемся числовыми значениями из оператора уравнения (152) для заполнения элементов графика (145). В результате увидим, что значения $u_t$ перемещаются по оси $z$ в графике не изменяясь, что подтверждает прогноз $c_t = u_t$. Медленное изменение по $z$ указывает на то, что ось $z$ дискретизирована со слишком малым шагом. На практике можно добиться экономии вычислительных мощностей, если частоту дискретизации по $z$ уменьшить по сравнению с частотой дискретизации по оси $t$.

## Программа 15-градусной дифракции в пространстве ($t$, $x$, $z$)

Самый простой путь изучения 15-градусной миграции в пространстве с координатами $(t, x, z)$ — начать с миграционного преобразования в пространстве с координатами $(z, t)$. Вместо скалярной функции $U(k_x)$ воспользуемся вектором $\mathbf{u}$, составляющие которого $u_j$ равны давлению в точках $x = j\Delta x$. Представим $k_x^2$ в виде трехдиагональной матрицы $\mathbf{T}$, у которой $(-1, 2, -1)$ находится на главной диагонали. Заметим, что величина $k_x^2$ положительная, и что матрица $\mathbf{T}$ — положительная, определенная с положительным элементом на главной диагонали. Возьмем уравнение (151) и обозначим постоянную при левой матрице через $\alpha$. В результате получим

$$0 = \left\{ \alpha \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\} * \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{T} - \mathbf{I} & \alpha\mathbf{T} + \mathbf{I} \\ \alpha\mathbf{T} + \mathbf{I} & \alpha\mathbf{T} - \mathbf{I} \end{bmatrix} * \mathbf{u}. \qquad (155)$$

Рассмотрим программу моделирования. Она начинается с экстраполяции вниз с помощью разностного оператора (153б). Решив (155) относительно неизвестной $\mathbf{u}_{t'+1,z'}$ и опустив все штрихи, получим

$$(\alpha\mathbf{T}+\mathbf{I})\,\mathbf{u}_{t+1,z}=-\left[(\alpha\mathbf{T}+\mathbf{I})\,\mathbf{u}_{t,z+1}+(\alpha\mathbf{T}-\mathbf{I})(\mathbf{u}_{t,z}+\mathbf{u}_{t+1,z+1})\right]. \tag{156}$$

Сначала оценим выражение в правой части. Левая часть представляет собой трехдиагональную систему, которую нужно решать относительно неизвестной $\mathbf{u}_{t+1,z}$. Последовательность решения уравнения (156) зависит от разностного оператора (153б).

Учитывая сделанное ранее замечание о том, что при наличии волн с небольшими значениями кажущихся скоростей ось $z'$ не нужно дискретизировать с той же частотой, что и ось $t'$, произведем вычисления, пропуская каждый второй уровень по $z'$. Конкретный порядок уровней, принятый в нашей программе указан цифрами в следующем графике (рис. 58):

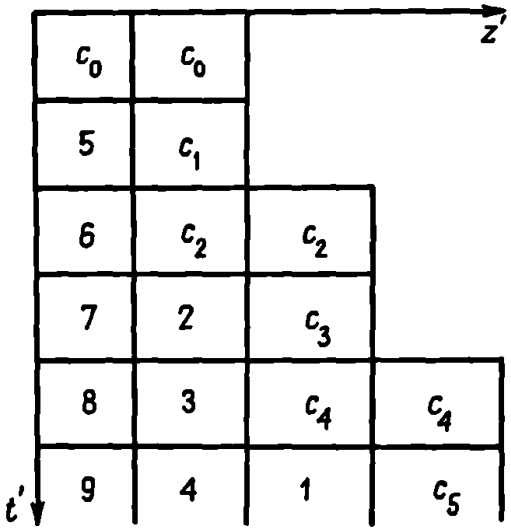



РИС. 58. (157)

Неизбежное практическое затруднение, показанное на графике (157) для случая, когда число отсчетов по оси $t'$ не равно точно числу отсчетов по оси $z'$, состоит в том, что сейсмическое изображение среды должно интерполироваться вдоль диагонали расчетной сетки. Та грубая интерполяция, которая произведена в (157), иллюстрирует предположение о том, что волновое поле быстро меняется по $t'$, но медленно по $z'$, т. е. предположение о лучах, близких к вертикальным.

На рис. 59 изображен последний кадр фильма, полученного с помощью опытной программы. После внесенных некоторых изменений она превратилась в самостоятельную программу миграционного преобразования с помощью волнового уравнения, предложенного в работах [30] и [44].

### Возможность внесения временных сдвигов

Может возникнуть необходимость в миграционном преобразовании в пространстве с координатами $(x, z, t)$ при наличии латеральных вариаций скоростей (рис. 60). В таком случае этап тонкой линзы будет осуществляться путем сдвига во времени, а не с помощью умножения на $\exp\left(i\omega\left[v(x,z)^{-1}-\right.\right.$

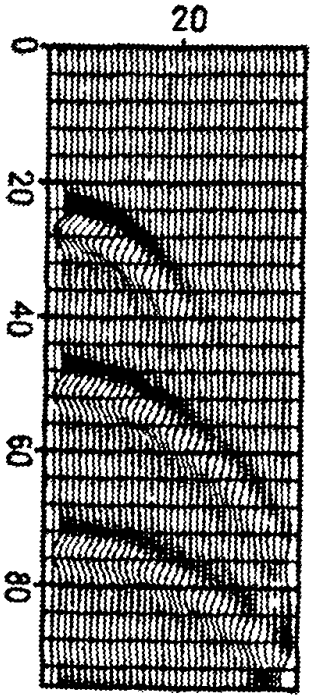



РИС. 59. Дифрагированные волны при продолжении в нижнее полупространство

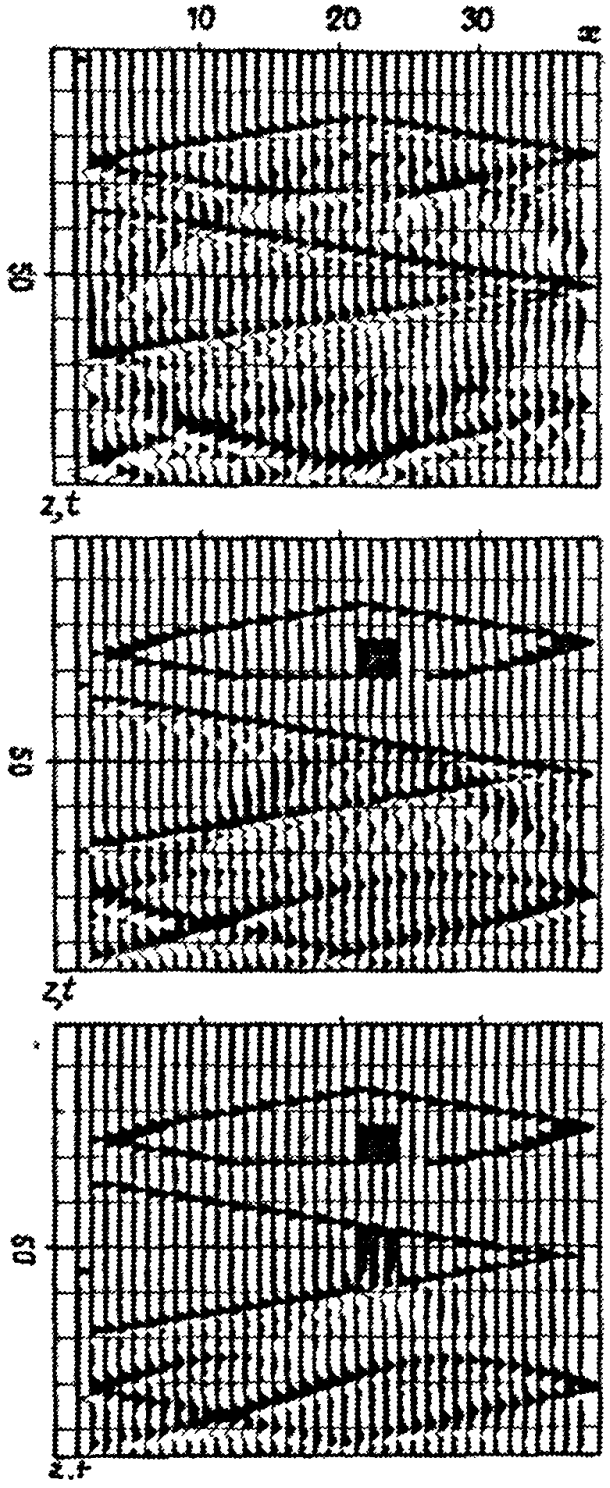



РИС. 60. Расчет синтетических данных по усложненной модели с помощью программы расчета процесса миграции во временной области. На крайнем левом канале каждого кадра отмечена глубина, к которой относится соответствующий кадр

$-v\,(z)^{-1}]\Delta z$). Сдвиг во времени является очень простой операцией в том случае, когда нужно сместить наблюдения на целое число интервалов дискретизации. Однако, неоднократные смещения во времени на дробное число шагов дискретизации превращаются в трудоемкий процесс. Для их реализации требуются многоточечные операторы интерполяции. И даже в этом случае импульсоиды стремятся диспергировать. Поэтому, может быть, лучше оставлять линзовый член миграционного уравнения в частотной области.

### 45-градусное уравнение в пространстве ($t$, $x$, $z$)

45-градусная миграция выполняется немного сложнее, чем 15-градусная, так как во временной области оператор имеет

более высокий порядок, но приемы миграции аналогичны используемым в 15-градусном уравнении и при рекурсивной фильтрации по кажущимся скоростям. Самый простой и непосредственный подход заключается в последовательном определении разностных операторов. Когда автор использовал этот подход, то обнаружил, что самое простое — это воспользоваться приемом, основанным на Z-преобразовании, и вместо $1/(-i\omega\Delta t)$ применять билинейное преобразование вида $(1/2)[(1+Z)\ (1-Z)]$. Существуют различные способы расчетов, один из которых заключается в переносе всех степеней в числитель и их объединении. Другой, под названием комплексного, состоит в сохранении у некоторых членов дробей вида $1/(1-Z)$. Члены, содержащие дробь $1/(1-Z)$, представлены в машине буферами, в которых хранится сумма за промежуток времени от бесконечности до момента $t$. Подход, основанный на Z-преобразовании, детально рассматривается в разделе 4.6. Его действительное достоинство заключается в том, что он вносит систематичность в анализ устойчивости.

**Упражнение**

Возьмите программу 45-градусной миграции в пространстве с координатами $(z, t, k_x)$. Найдите коэффициенты шестиэлементного разностного оператора, три элемента которого расположены по оси времени, а два — по оси глубин. Для простоты положите $v=1$, $\Delta t=1$, $\Delta z=1$. Предположим, что указанный анализ переведен в область $x(\Delta x=1)$ путем замены $k_x^2$ на **T**. Какого вида систему трехдиагональных уравнений пришлось бы при этом решать?

## 2.8. Введение в проблему устойчивости

Опыт показывает, что при рассмотрении ситуации, значительно отличающейся от описанных в учебнике, в основном возникает проблема устойчивости решения, а не его точности. Наличие или отсутствие устойчивости определяют достижимость цели вообще, а степень точности — просто цену ее достижения. Рассмотрим проблему устойчивости уравнения теплопроводности при вещественном и мнимом коэффициентах теплопроводности. Поскольку последний случай соответствует сейсмической миграции, здесь появляется хорошая основа для анализа устойчивости.

Анализ устойчивости базируется на преобразовании Фурье. Проще говоря, исследуются пробные решения в виде одиночной синусоиды и комплексной экспоненциальной функции. Если какой-то метод становится неустойчивым на какой-то частоте, то он будет неустойчивым и в любом реальном случае, так как физические функции представляют собой просто комбинации всевозможных частот.

Возьмем синусоидальную функцию вида

$$P(x)=P_0 e^{ikx}. \qquad (158)$$

Вторая производная этой функции

$$\partial^2 P/\partial x^2 = -k^2 P. \tag{159}$$

Следующее выражение, аналогичное оператору вторых разностей, определяет величину $\hat{k}$:

$$\delta^2 P/\delta x^2 = [P(x+\Delta x) - 2P(x) + P(x-\Delta x)]/\Delta x^2, \tag{160а}$$

$$\delta^2 P/\delta x^2 = -\hat{k}^2 P. \tag{160б}$$

В идеале $\hat{k}$ должно равняться $k$. После подстановки комплексной экспоненциальной функции (158) в (160а) получим выражение для $\hat{k}$:

$$-\hat{k}^2 P = \frac{P_0}{\Delta x^2}\left[e^{ik(x+\Delta x)} - 2e^{ikx} + e^{ik(x-\Delta x)}\right], \tag{161а}$$

$$(\hat{k}\Delta x)^2 = 2[1 - \cos(k\Delta x)]. \tag{161б}$$

Равенство (161а) или корень квадратный из него легко изобразить графически. С учетом тригонометрического тождества для половинного угла находим, что корень квадратный из (161б) равен

$$\hat{k}\Delta x = 2\sin(k\Delta x/2). \tag{161в}$$

Разложение в ряд показывает, что $\hat{k}$ хорошо согласуется с $k$ на низких пространственных частотах. На частоте Найквиста, равной $k\Delta x = \pi$, значение $\hat{k}\Delta x = 2$ будет плохим приближением к числу $\pi$. Как и при любом фурье-преобразовании в дискретном представлении, на частотах выше найквистовой $\hat{k}$ представляет собой периодическую функцию от $k$. Хотя $k$ изменяется в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$, функция $\hat{k}^2$ оказывается сжатой в диапазон от 0 до 4. (Неустойчивость часто возникает на одном из его концов).

### Уравнение теплового потока в явном виде

Начнем с уравнения теплового потока и фурье-преобразования по пространству. В этом случае производная $\partial^2/\partial x^2$ превращается просто в $-k^2$, а

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\sigma}{c} k^2 q. \tag{162}$$

В результате вычисления конечных разностей в явном виде по временной координате получаем уравнение, идентичное по виду уравнению инфляции денег:

$$(q_{t+1} - q_t)/\Delta t = -(\sigma/c) k^2 q_t, \tag{163а}$$

$$q_{t+1} = (1 - (\sigma\Delta t/c) k^2) q_t. \tag{163б}$$

Для устойчивости решения величина $q_{t+1}$ должна быть меньше или равна величине $q_t$. Для этого требуется, чтобы множитель в скобках был меньше или равен единице. Опасным является тот

случай, когда этот множитель меньше $-1$. Неустойчивость возникает, когда $k^2 > 2c/(\sigma\Delta t)$. Это означает, что высокие частоты изменяются во времени. В случае коротких волн определение конечных разностей в явном виде на временной оси практически невозможно, однако можно получить приемлемый результат, если вычисления конечных разностей по пространственной оси осуществлять довольно грубо. Вторая пространственная производная в области фурье-преобразования равна $-k^2$. Будучи дискретизированной, ось $x$ превращается в $-\hat{k}^2$. Поэтому, чтобы дискретизировать выражения (162) и (163), нужно просто заменить $k$ на $\hat{k}$. Из уравнения (161в) следует, что $\hat{k}^2$ имеет верхний предел, равный $4/\Delta x^2$, на частоте Найквиста $k\Delta x = \pi$. Наконец, множитель в (163б) будет меньше единицы, т. е. будет обеспечиваться стабильность, при условии, что

$$\hat{k}^2 = 4/\Delta x^2 \leqslant 2c/\sigma\Delta t. \tag{164}$$

Можно избегать неустойчивости решений путем более плотной дискретизации временно́й координаты по сравнению с пространственной. Однако, когда значения коэффициента теплопроводности $\sigma(x)$ находятся в широком диапазоне, подобное решение проблем устойчивости становится слишком дорогим. В случае задач с одной пространственной координатой выход находят в использовании неявных методов. При решении задач в пространствах с большим числом координат должны использоваться явные методы.

### Уравнение 15-градусной миграции в явном виде

В разделе 2.1 было показано, что уравнение запаздывающей 15-градусной волновой экстраполяции подобно уравнению теплового потока, только коэффициент теплопроводности $\sigma$ нужно заменить на мнимое число $i$. Коэффициент усиления (значение множителя в круглых скобках уравнения (163б) равен теперь квадратному корню из суммы квадратов вещественной и мнимой частей. Поскольку вещественная часть уже равна единице, коэффициент усиления превышает единицу при всех ненулевых значениях $k^2$. Возникающая в результате неустойчивость проявляется в виде возрастания фона плоских волн с наклонными осями синфазности. Чем больше угловой коэффициент осей, тем быстрее растет интенсивность фона. Более того, дискретизация оси $x$ проблемы не решает.

### Уравнения в неявном виде

Вспомним, что уравнение инфляции

$$q_{t+1} - q_t = rq_t \tag{165}$$

является просто результатом вычисления конечных разностей в явном виде дифференциального уравнения $dq/dt \approx q$. И вспомним также, что одно из лучших приближений к дифференциальному уравнению задается уравнением Крэнка—Никольсона

$$q_{t+1} - q_t = r(q_{t+1} + q_t)/2, \tag{166а}$$

которое с помощью группировки можно привести к виду

$$(1 - r/2)\, q_{t+1} = (1 + r/2)\, q_t \tag{166б}$$

или

$$q_{t+1}/q_t = (1 + r/2)/(1 - r/2). \tag{166в}$$

Величина коэффициента усиления (166в) меньше единицы для всех отрицательных значений $r$, даже для $r = -\infty$. Вспомним, что уравнение теплового потока соответствует выражению

$$r = -(\sigma \Delta t/c)\, k^2, \tag{167}$$

где через $k$ обозначена пространственная частота. Поскольку уравнение (166в) годится для всех отрицательных $r$, уравнение теплового потока в неявных конечных разностях по времени пригодно для всех пространственных частот $k$. Уравнение теплового потока устойчиво в любом случае—дискретизирована пространственная ось или нет (тогда $k \to \hat{k}$) и независимо от размеров интервалов дискретизации $\Delta t$ и $\Delta x$. Более того, безусловно устойчивым является и 15-градусное уравнение волновой экстраполяции. Этот вывод следует из того обстоятельства, что $r$ в (166в) взято чисто мнимым. В таком случае коэффициент усиления (166в) принимает вид комплексного числа $1 + r/2$, деленного на его комплексно-сопряженное. Если выразить комплексное число в полярных координатах, то станет ясным, что модуль его равен единице. И снова налицо безусловная устойчивость.

В этом месте удобно сделать замечание исторического характера. Когда внедрялась конечно-разностная миграция, многие возражали на том основании, что были непривычны теоретические предпосылки. Вопреки всем возражениям конечно-разностная миграция быстро завоевала популярность. Причина ее популярности, видимо, объяснялась тем, что по сравнению с другими методами, известными в то время, она оперировала с исходными данными мягко. Наглядный пример—поскольку выражение (166в) равно единице, спектр $(\omega, k)$ на выходе будет точно таким же, как и на входе. Из этого факта можно, пожалуй, сделать более глубокий вывод, а именно: любой, воздействующий на полевые наблюдения процесс обработки, должен как можно меньше изменять их.

### Уравнения скачка

Вычисление конечных разностей методом скачка связано с нахождением производных по времени, соответствующих двум соседним моментам времени,что позволяет сохранять центры операторов вычисления конечных разностей на одном и том же месте. В случае уравнения теплового потока, подвергнутого фурье-преобразованию по пространственной координате, имеем

$$(q_{t+1}-q_{t\ \ 1})/2\Delta t=-(\sigma/c)k^2q_t. \qquad (168)$$

Анализировать последнее уравнение — занятие не из приятных, так как оно распространяется на времена $t-1$, $t$ и $t+1$ и требует применения более сложных аналитических приемов. Поэтому, видимо, стоит сначала объявить результаты. В случае уравнения теплового потока решение всегда расходится. В случае уравнения волновой экстраполяции результат гораздо более благоприятный — устойчивость наблюдается при выполнении определенных ограничений относительно размеров сетки, а именно, шаг $\Delta z$ должен быть меньше, чем $\Delta x^2$, умноженный на некоторый коэффициент. Последний результат не представляет собой ничего особенного при одной пространственной координате (т. е. когда неявные методы оказываются идеально подходящими), но при работе с многокоординатным пространством, например, при обработке материалов так называемой трехмерной сейсморазведки, можно лишь благодарить судьбу за то, что существует метод скачка.

Наилучшим способом анализа уравнений типа (168), распространяющихся на три и более временных уровня, является теория фильтрации, основанная на Z-преобразовании. На языке Z-преобразований вопрос об устойчивости уравнения (168) сводится к вопросу о том, имеет ли фильтр нули внутри (или вне) единичного круга. Анализ устойчивости с привлечением Z-преобразований изложен в разделе 4.6. Подобный анализ необходимо провести для всех возможных численных значений функции $k^2$. В результате придем к выводу, что если $k^2$ изменяется от нуля до бесконечности, то всегда можно ожидать неустойчивости. Но при использовании уравнения волновой экстраполяции неустойчивости можно избежать, если определенным образом ограничить параметры сетки, так как $(k\Delta x)^2$ лежит между нулем и четырьмя.

### Решение трехдиагональных уравнений

Трехдиагональный алгоритм устойчив для всех положительно определенных матриц. Если же возникают проблемы при решении трехдиагональных уравнений, следует поставить под сомнение правильность постановки самой задачи, как, например, в случае, когда вроде бы требуется деление на нуль.

# Глава 3

# ЕЩЕ ОДНО ИЗМЕРЕНИЕ — УДАЛЕНИЕ ОТ ИСТОЧНИКА

При изложении материала предыдущих глав предполагалось, что источник и приемник располагаются в одном и том же месте. В действительности же расстояние по горизонтали между ними часто достигает 3 км. Удаление в 3 км уже сравнимо с глубиной залегания многих залежей нефти и газа.

В анализе наблюденных данных удаление ПП от ПВ представляет собой еще одно измерение. В настоящее время эта координата часто представляется 48 сейсморегистрирующими каналами. Однако никто, кажется, не считает, что 48 каналов достаточно. Входят в употребление сейсморегистрирующие системы с числом каналов, достигающим 1024.

Координата удаления приемника от источника вносит три важных аспекта в метод отраженных сейсмических волн. Во-первых, она позволяет производить массовые определения скоростей распространения сейсмических волн в горных породах. В предшествующих главах настоящей книги скорости предполагались известными. Во-вторых, она обеспечивает избыточность наблюдений и тем самым возможность независимого определения одних и тех же величин. Суперпозиция независимых измерений (суммирование ОСТ) предоставляет возможность усиления полезных сигналов за счет деструктивной интерференции волн-помех. В-третьих, поскольку координата удаления ненулевая, процедуры миграционного преобразования усложняются, что является недостатком метода. К концу данной главы мы попытаемся при обработке учитывать все три осложняющих фактора — кажущиеся скорости, удаление и латеральные изменения скорости — одновременно.

Теоретически представляется, что горизонтальная координата должна давать возможность распознавать характеристики горных пород путем изучения зависимости коэффициента отражения от угла падения, причем как по продольным, так и по обменным волнам. Но в действительности оказывается, что ни одно из указанных измерений не может быть сделано надежно, а иногда оно вообще невыполнимо. В разделе 1.4 обменные волны рассмотрены более полно. Сами по себе они представляют интересный объект для научных исследований, обладающий большими потенциальными возможностями в смысле их геологической эффективности [104, 140]. Однако

исследование причин возникновения трудностей при проведении измерений геофизических величин и путей их преодоления выходит за рамки настоящей книги. Ее цель — научить эффективно использовать и обрабатывать то, что наблюдается в соответствии с известными методиками.

## Варианты суммирования

Определим координату средней точки между источником и приемником $y$, а также координату половины расстояния по горизонтали между источником и приемником $h$:

$$y=(g+s)/2, \tag{169а}$$

$$h=(g-s)/2. \tag{169б}$$

Причина использования половины расстояния между источником и сейсмоприемником в последних соотношениях заключается в желании упростить и сделать симметричными многие из последующих уравнений. Само удаление от источника определяется именно как $g-s$, а не $s-g$, чтобы положительным удалениям соответствовали волны, движущиеся в положительном направлении оси $x$. В случае морской сейсморазведки это значит, что судно должно плыть по профилю в отрицательном направлении оси $x$. На деле судно может плыть в любую сторону, т. е. при отработке профиля пикеты возбуждения могут либо возрастать, либо убывать по своим номерам. В некоторых ситуациях суть дела проясняется, если сделать номера пикетов возбуждения отрицательными.

На практике полевые наблюдения определяются в пространстве с координатами ($s$, $g$). С помощью равенства (169) указанные координаты переводятся в пространство с размерностями ($y$, $h$). Координаты средней точки между приемником и источником, а также половины расстояния между приемником и источником особенно полезны для целей интерпретации и обработки наблюдений. Поскольку наблюденные данные представляют собой также и функцию времени пробега волн $t$, получается, что полное множество данных образует некий объем. Так как сделать удовлетворительное графическое изображение подобного объема данных весьма затруднительно, обычно ограничиваются визуализацией сечений. Наименования сечений в разных геофизических компаниях несколько отличаются друг от друга.

Ниже приводится перечень названий, которые должны быть широко распространены и понятны:
($y$, $h=0$, $t$) — разрез при нулевых удалениях (ПП и ПВ совмещены)

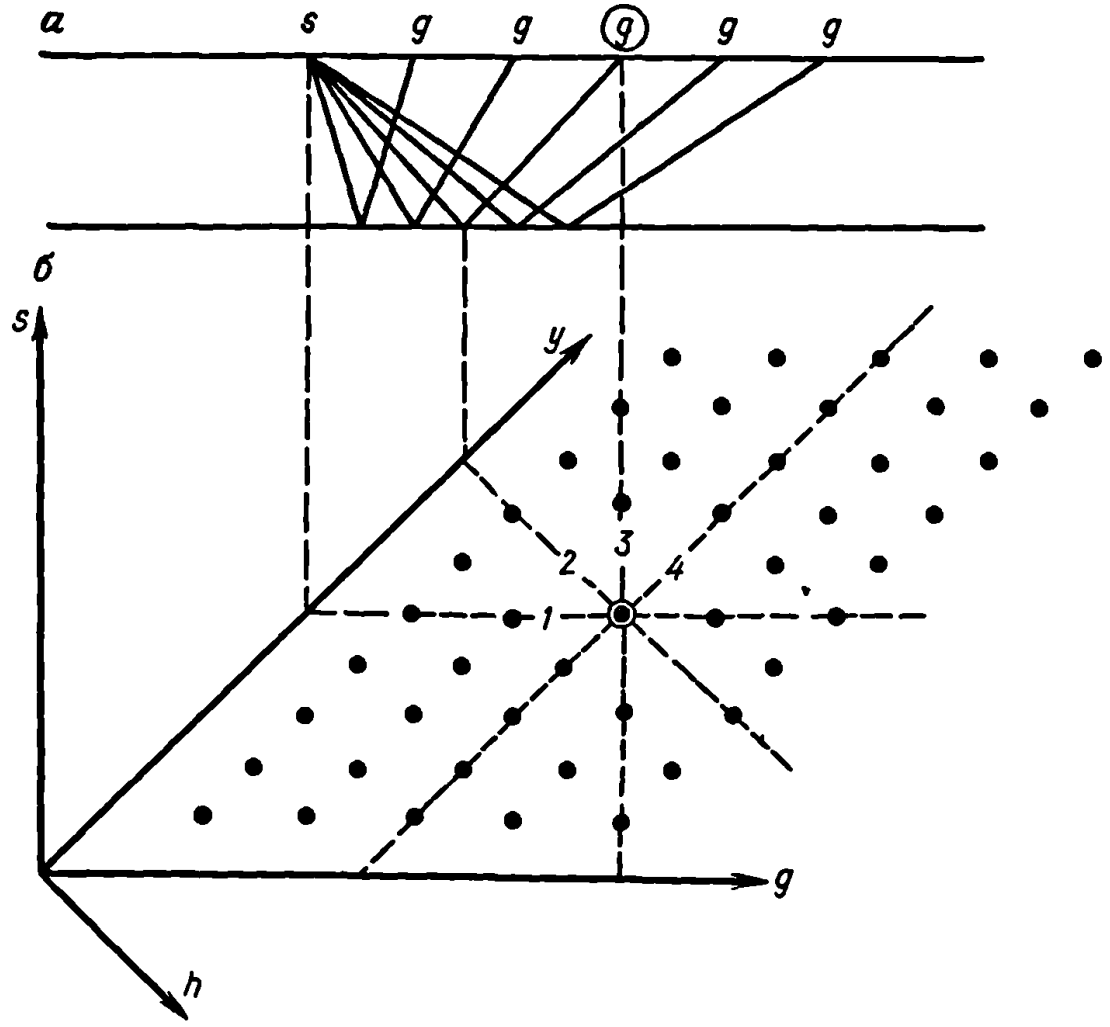



РИС. 61. Схема регистрации морских сейсмограмм (*а*) и диаграмма суммирования (*б*):
*1* полевая сейсмограмма или сейсмограмма общей точки взрыва; *2* сейсмограмма общей средней точки; *3* сейсмограмма общей точки приема; *4* разрез постоянных удалений

($y$, $h=h_{min}$, $t$) — разрез ближайших трасс
($y$, $h=$const, $t$) — разрез при постоянных удалениях
($y$, $h=h_{max}$, $t$) — разрез дальних трасс
($y=$const, $h$, $t$) — сейсмограмма общей средней точки (ОСТ)
($s=$const, $g$, $t$) — полевая сейсмограмма (или сейсмограмма общей точки возбуждения ОТВ)
($s$, $g=$const, $t$) — сейсмограмма общей точки приема (ОТП)
($s$, $g$, $t=$const) — временное сечение
($h$, $y$, $t=$const) — временное сечение

Диаграмма перечисленных выше сечений приведена на рис. 61. На рис. 62 приведены три сечения объема данных сейсмических наблюдений. Первый способ изображения называется «техническим чертежом» (слева). Второй изображением на гранях куба (справа). Следует помнить, что изображаемые сечения относятся к внутренним частям куба, хотя и выглядят они в виде граней. На срезах показаны линии их взаимного пересечения.

В практической сейсморазведке под сейсмограммами общей глубинной точки (ОГТ) и общей средней точки (ОСТ) пони-

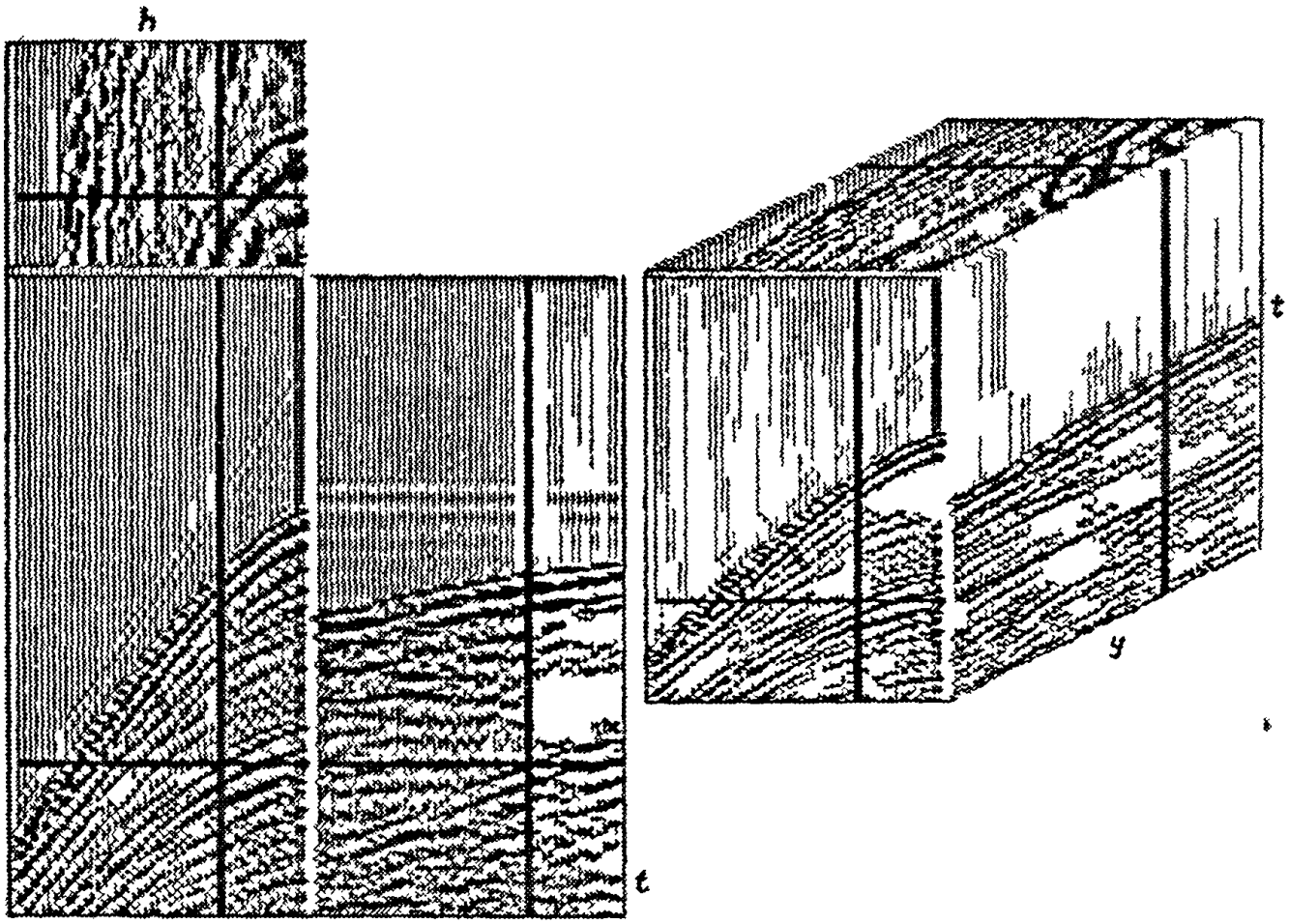



РИС. 62 Сечения куба данных (район Грэнд Бэнкс)

мается одно и то же. Но здесь между ними будет проводиться различие. Под сейсмограммой ОГТ будет пониматься такая сейсмограмма ОСТ, временная ось котор й растянута в соответствии с некоторой скоростной моделью, т. е. можно записать, что $(y=\text{const}, h, \sqrt{t^2 \quad 4h^2 v^2})$ сейсмограмма общей глубинной точки. Указанное выше, зависящее от координаты удаления, растяжение приводит к тому, что временная ось сейсмограммы ОГТ становится более похожей на глубинную (тем самым оправдывается присутствие буквы Г в аббревиатуре ОГТ).

Такое растяжение называется нормальной кинематической поправкой. Подчеркнем, что по мере возрастания эффективной скорости до бесконечности величина растяжения стремится к нулю.

В практической сейсморазведке полевые наблюдения не принято изображать в виде сейсмограмм ОГТ, вместо этого каждую сейсмограмму ОГТ суммируют по горизонтальной координате. В результате получают одну трассу. Для каждой средней точки можно построить такую сейсмограмму. Совокупность последовательно расположенных суммарных трасс, т. е. функция средней точки и времени, называется разрезом ОГТ. Можно сказать, что разрез ОГТ подобен разрезу при

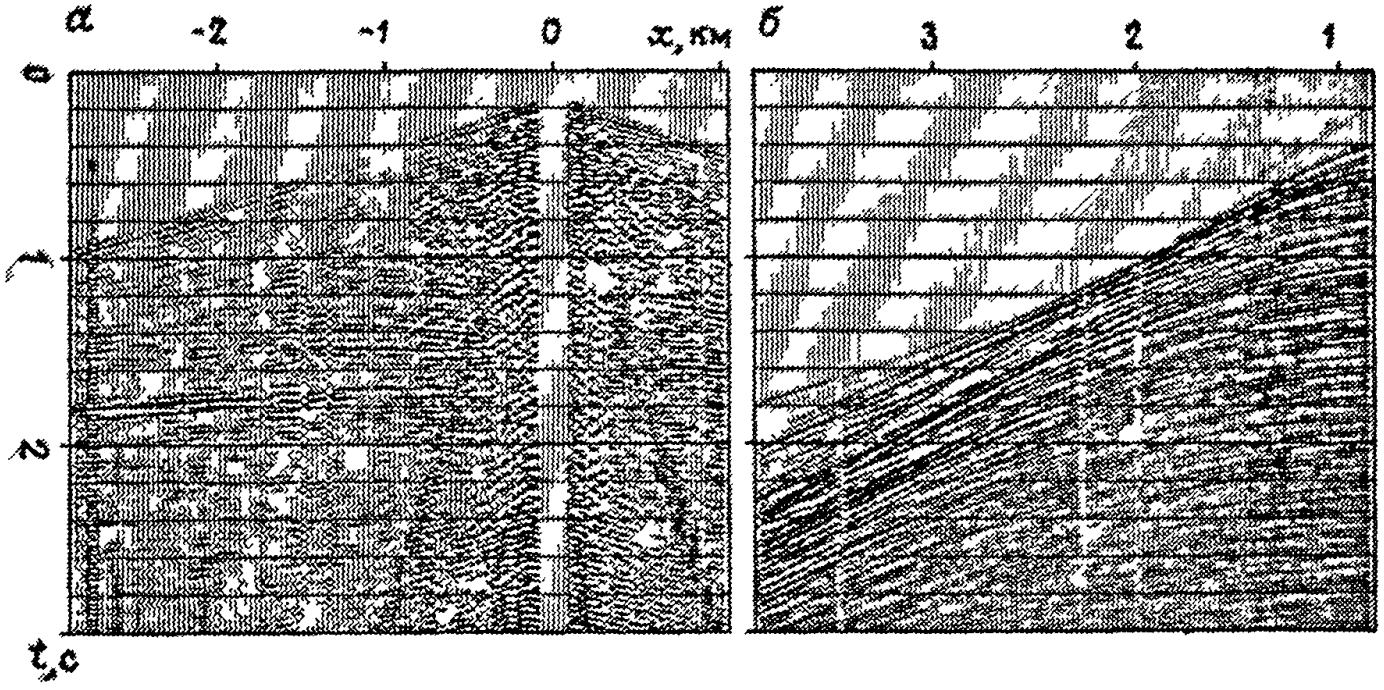



РИС. 63. Полевые сейсмограммы, полученные при исследованиях: *а* наземных (шт. Техас), *б* морских (Алеутские о-ва),

нулевом удалении ПП от ПВ, но отличается меньшим уровнем фона помех.

Для построения разреза ОГТ требуется выбрать конкретную скоростную зависимость, по которой будут рассчитываться кинематические поправки. Эта зависимость называется распределением скоростей суммирования ОГТ по разрезу. В качестве него можно просто взять какие-то априорные данные, которые затем уточняются путем построения разрезов ОГТ с пробными скоростными законами. Останавливаются обычно на таком скоростном законе, который обеспечивает построение наиболее динамически выраженных разрезов ОГТ с наименьшим фоном помех. Более подробно о суммировании ОГТ будет сказано в разделе 3.5.

На рис. 63 показаны типичные сейсмограммы (сейсмограммы общей точки возбуждения), полученные при наземных и морских работах. При работах на суше сейсмоприемники располагались по обе стороны от ПВ. Изображенная сейсмограмма характеризует несимметричную центральную схему наблюдений. В качестве источника сейсмической энергии использовался вибратор. На морской сейсмограмме превосходно видны две или три головные волны (см. разделы 3.5 и 5.2). При работах на море в качестве источника применялась пневмопушка. Каждая из приведенных на рисунке сейсмограмм зарегистрирована с помощью приблизительно 120 сейсмоприемников.

## Что такое «некачественные» наблюдения?

Обширные районы мира имеют хорошие перспективы на обнаружение месторождений нефти и природного газа, но их трудно разведывать из-за сложностей, связанных с получением материалов МОВ хорошего качества. Что же это такое — «некачественные» наблюдения? С точки зрения экспериментатора почти все сейсмические наблюдения хороши в том смысле, что они повторяемы. Проблема возникает в том случае, когда из полевых наблюдений невозможно извлечь никакой полезной геологической информации.

В качестве модели среды возьмем случайное распределение точечных отражателей. Соответствующий такой модели мигрированный разрез трасс с нулевым удалением ПП от ПВ тоже будет выглядеть случайным. С учетом факта повторяемости полевых наблюдений по случайному виду их можно сделать заключение о хаотическом распределении точек отражения внутри среды. Располагая лишь разрезом при нулевых удалениях, трудно сказать большее. Но если в нашем распоряжении будут находиться наблюдения в полном диапазоне удалений приемника от источника, то можно попытаться провести более вдумчивый анализ ситуации. В настоящей главе объясняются некоторые приемы такого анализа.

Интересной моделью земной среды является случайное распределение точечных отражателей в однородном пространстве. В этом случае наблюдения будут представлять собой случайную функцию времени и горизонтальной координаты точки, расположенной посредине между источником и приемником. После надлежащей обработки таких наблюдений в каждой из средних точек должны получаться идеальные гиперболические зависимости от расстояния между источником и приемником. Они определяют точное значение скорости в земной среде даже в случае произвольного распределения отражателей в трехмерном объеме и наблюдении лишь по одному профилю, расположенному на поверхности.

Указанная модель может и не объяснить того, что понимается под «сейсмограммами плохого качества». Можно было бы опробовать иные модели, например, проанализировать влияние случайных вариаций скорости в приповерхностной части разреза или кратных отражений. Помехи в сейсморазведке обычно можно считать результатом неудачного анализа, а не фактором, загрязняющим наблюдения. Именно координата удаления приемника от источника обеспечивает избыточность информации, в которой мы испытываем нужду, пытаясь расшифровать то, что происходит в действительности.

## Текстура горизонтально слоистой среды по данным морской сейсморазведки

Сила тяжести оказывает большое влияние на образование слоев горных пород, поэтому во многих местах мира можно наблюдать горизонтально слоистые среды. Но даже в идеальнейших условиях осадконакопления не образуются зеркально гладкие слои говорят, что слоистая среда обладает некоторой текстурой. Мы начнем изучение координаты удаления по синтетическим материалам, имитирующим идеальнейшие условия осадкообразования. Такие условия почти наверняка характеризуют морские бассейны, где отложение осадков может происходить медленно и однородно. Положим скорость распространения волн постоянной, т. е. волны будут отражаться как бы от горизонтально лежащих зеркал. Математически текстура учитывается тем, что допускается латеральная изменчивость коэффициента отражения от слоя. Характер латеральной изменчивости коэффициента отражения предполагается случайным, но не обязательно его описывать белым шумом. Изучим внешний вид получающихся в этих условиях полевых сейсмограмм.

Случайный характер среды вводится с помощью случайной функции координат между приемником и источником точки $y$ и глубины $z$. Случайность заключена в самом характере напластования, который можно было бы выразить в виде некоторой геологической функции глубины $z$. В пространстве с координатами удаления от источника $h$ и временем пробега $t$ каждой точке пространства с координатами $(y, z)$ должна соответствовать гипербола соответствующей случайной амплитуды.

Как выглядит пространство окончательных данных? В этом вопросе мало смысла до тех пор, пока мы не решим, каким образом визуализировать объем трехмерных данных. Рассмотрим более внимательно сейсмограммы в том виде, в котором они получаются в поле. С каждым пунктом возбуждения связана система координат, вертикальной осью которой служит время пробега волн, а горизонтальной — расстояние от судна до сейсмоприемников в косе. Ограниченная этими координатами сейсмограмма образует как бы кадр кинофильма. Следующий пункт возбуждения дает нам следующий кадр. Последовательность кадров образует фильм. Что же демонстрируется в этом кинофильме?

На одиночных кадрах видны гиперболы с наложенной на них текстурой. Кинофильм демонстрирует, как текстура перемещается вдоль каждой из гипербол в сторону возрастания координаты удаления. (Считаю, что никакая последовательность неподвижных картинок не может создать такое впечатление, которое производит кинофильм). В действительности

перемещается судно, а текстура геологической среды под ним остается стационарной. Именно так выглядит большинство морских сейсмограмм и соответствующая программа вычислений. Сравнив синтетические материалы с кинофильмами, смонтированными по реальным морским сейсмограммам, автор поразился тому огромному количеству изменений по линии наблюдений, которые пришлось учесть при моделировании, чтобы добиться их сходства с полевыми наблюдениями. Степень случайности кажется слишком большой, чтобы объясняться только литологическими изменениями. По-видимому, это результат чего-то не учтенного при моделировании. Может быть, это происходит из-за недостаточного понимания механизма отражения от квазислучайной среды. А может быть, это эффект частичной фокусировки волн некоторое время спустя после их отражения от незначительных неоднородностей рельефа границ раздела слоев. Чтобы дать исчерпывающее объяснение, необходимо провести дополнительные исследования.

### Влияние верхней части разреза (ВЧР) на данные сейсморазведки на суше

Регистрируемые на суше отраженные сейсмические волны часто имеют случайный характер из-за неоднородного строения ВЧР. Нередко запись оказывается настолько прерывистой, что источники сейсмической энергии приходится размещать на больших глубинах (делая при этом большие затраты). Что же касается сейсмоприемников, то в регистрирующей расстановке их обычно слишком много, чтобы можно было заглубить и их. На большинстве сухопутных сейсмограмм МОВ волновая картина в большей мере определена сложностью строения ВЧР, чем глубинным строением среды.

Чтобы прояснить ход наших мыслей, предложим следующую идеальную математическую модель. Пусть отражающие слои плоские и однородные, а в сейсмоприемники введены случайно распределенные временные задержки величиной в несколько интервалов дискретизации, называемые статическими поправками. Предположим, что мощности источников распределены по случайному закону. Кадрами рассматриваемого кинофильма служат сейсмограммы общей средней точки (ОСТ), другими словами, каждой фиксированной точке $y$ соответствует кадр, представляющий собой множество сейсмотрасс с координатами $(h, t)$. Следующие друг за другом кадры будут демонстрировать последовательные ОСТ. На рис. 61 вы видите, что связанные с сейсмоприемниками нерегулярности во временах пробега должны перемещаться влево, а связанные с источниками амплитудные нере-

гулярности будут перемещаться вправо. В реальности с источниками и приемниками бывают связаны оба типа аномалий — амплитудные и временные.

**Упражнения**

1. Заметим, что рис. 61 соответствует случаю, когда взрывной интервал $\Delta s$ равен половине расстояния между сейсмоприемниками $\Delta g$. Нарисуйте аналогичную диаграмму для случая $\Delta s = \Delta g$. Теперь сейсмограммы общей средней точки будут двух типов. Предложите два возможных определения для разреза «ближних трасс».

2. Составьте программу так, чтобы она рассчитывала кинофильм синтетических сейсмограмм средней точки со случайным распределением амплитуд источников и временных задержек в сейсмоприемники. Просматривая полученный кинофильм, вы ощутите трудности при попытке одновременного наблюдения за движениями влево и вправо. Попытайтесь так отрегулировать величины аномалий, чтобы влево и вправо картины были видимыми. Вы часто будете наблюдать только одну картину, мысленно исключая другую, и это будет похоже на способ представления трехмерного куба по его двухмерным проекциям граней (рис. 64).

3. Определите рекурсивные фильтры кажущихся скоростей, пропускающие и подавляющие различные волны, связанные с источником, приемником и средней точкой.

## 3.1. Поглощение и немного о фокусировке

Иногда слои осадочного чехла залегают горизонтально с незначительными неоднородностями. В этом случае можно пренебречь эффектами миграции. Сейсмические лучи должны удовлетворять простой модели с большими углами отражения, наблюдаемыми при больших удалениях от источника. Подобные сейсморазведочные материалы должны быть идеальными для измерения коэффициентов отражения в зависимости от угла падения волны или же для определения функции акустической поглощаемости земной среды $1/Q$. В своей докторской диссертации Э. Къяртанссон доложил о таком исследовании. Полученные им результаты оказались настолько поучительными, что это исследование будет здесь подробно изложено. Я не знаю, насколько газовое месторождение Грэнд-Айл [108] типично для остальных нефтегазоносных провинций мира, но оно представляет собой идеальное место для изучения значения, которое имеет расстояние между источником и приемником.

### Газовое месторождение Грэнд-Айл как классический пример проявления «яркого пятна»

Э. Къяртанссон изучил данные по сейсмическому профилю, пересекающему газовое месторождение Грэнд-Айл, расположенное в пределах прибрежной шельфовой части шт. Луизиана. Сейсмические материалы по нему были предоставлены компанией «Галф Ойл». В них содержатся классические примеры

«ярких пятен» (сильных отражений), выделяемых в условиях сравнительно пологого, ненарушенного залегания слоев пород. Интерес представляют латеральные вариации амплитуды отражений на временах около 2,3 с (см. рис. 67). Многие считают, что подобные «яркие пятна» вызываются неглубоко залегающими газонасыщенными песчаниками.

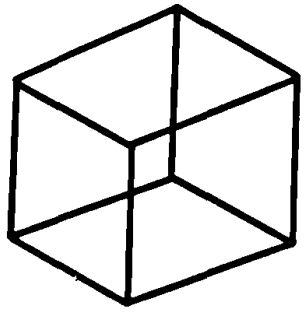


РИС. 64.

Согласно теоретическим представлениям, коэффициент отражения должен быть некоторой функцией угла падения. В аномальной физической ситуации — газонасыщенные пески — указанная зависимость должна проявляться четко. Свидетельство тому следует искать на сейсмограммах ОСТ, типа изображенных на рис. 65. Бросив взгляд на любую из представленных на рисунке сейсмограмм, вы заметите, что зависимость амплитуды отражения от удаления приемник — источник кажется гладкой, осмысленной функцией, очевидно поддающейся измерению. Однако с помощью теории слоистых сред было доказано, что только невероятно экзотическая среда может характеризоваться столь ярко выраженными вариациями величины коэффициента отражения в зависимости от угла, особенно при малых углах падения волн. (Угол отражения сейсмической энергии, регистрируемой на дальних трассах на времени 2,5 с, не относится к большим углам. В однородной среде величина arccos (2, 3/2, 6) = 28 ). Загадка усложняется тем, что на каждой из сейсмограмм ОСТ наблюдается отличная от других гладкая осмысленная измеримая функция. Более того, средние точки, о которых идет речь, расположены близко одна от другой, на расстоянии в 10 взрывных интервалов, т. е. 250 м.

### Къяртанссонова модель латеральных изменений амплитуды

Наблюдения в районе месторождения Грэнд-Айл нельзя понять, если исходить из модели, основанной на теории слоистых сред. Поэтому Э. Къяртанссон предложил свою модель. На рис. 66 изображены траектории лучей в виде прямых, исходящих из источника, достигающих плоской горизонтальной отражающей границы и затем отражающихся к приемникам. Единственные осложнения в среде имеют вид включений какого-то вещества. Они, по предположению, должны привести к аномальному ходу сейсмических лучей. Для начала можно вообразить, что эти включения поглощают волновую энергию. (В конце изложения так и останется неясным от чего именно происходят помехи — то ли от фокусировки, то ли от поглощения энергии).

Включение *A* находится вблизи от поверхности наблюдений. Сейсмические наблюдения подвергаются его влиянию дважды:

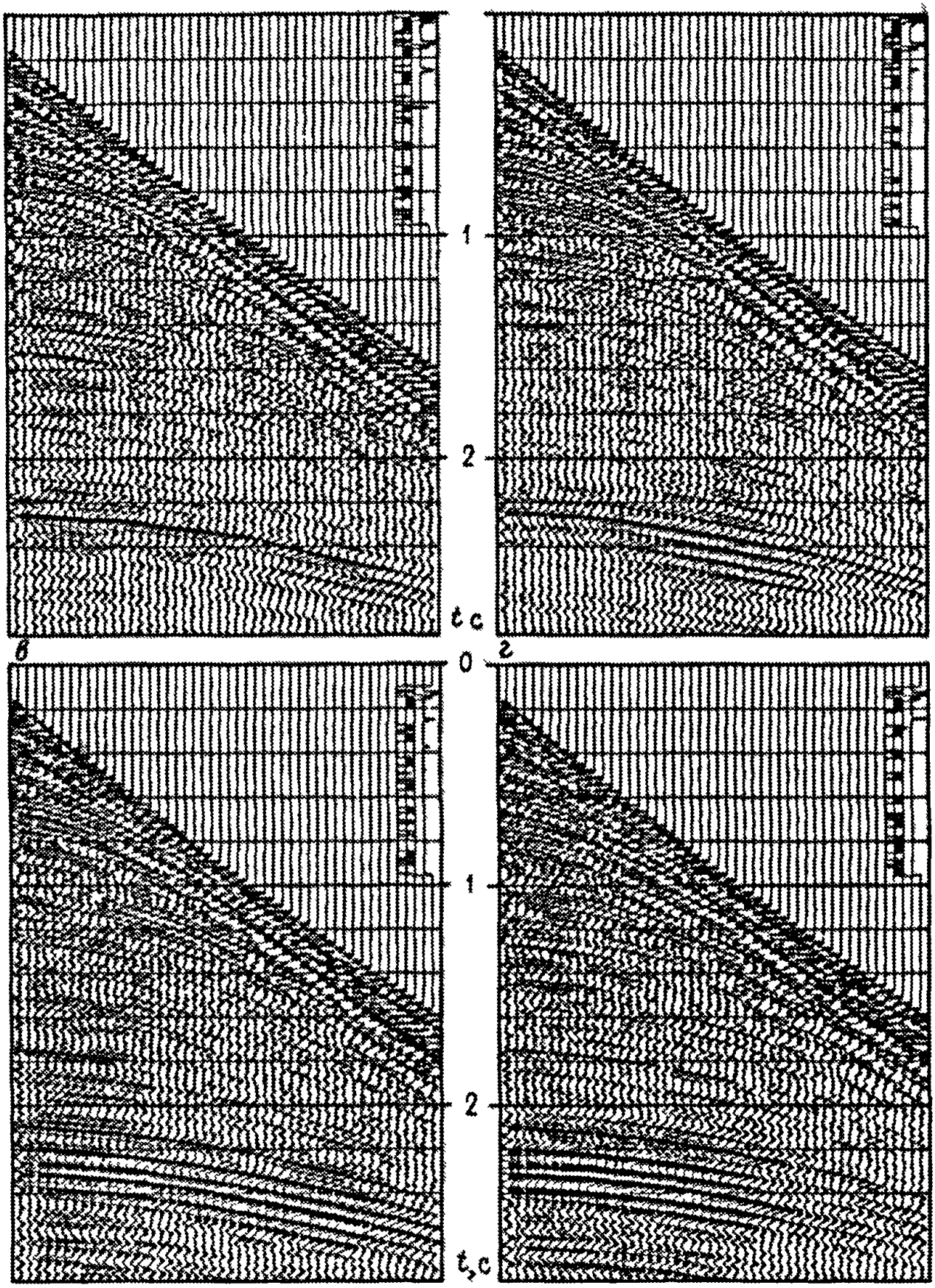



РИС. 65. Исходные полевые сейсмограммы с регулировкой усиления на выводе, пропорциональной времени·
*а* ПВ 220; *б* ПВ 230; *в* ПВ 305, *г* ПВ 315

один раз, когда включение пересекается источником, и второй раз, когда оно пересекается приемником. Включение *С* находится вблизи от отражающей границы и захватывает ее небольшой отрезок. Включение *С* не ощущается на всех

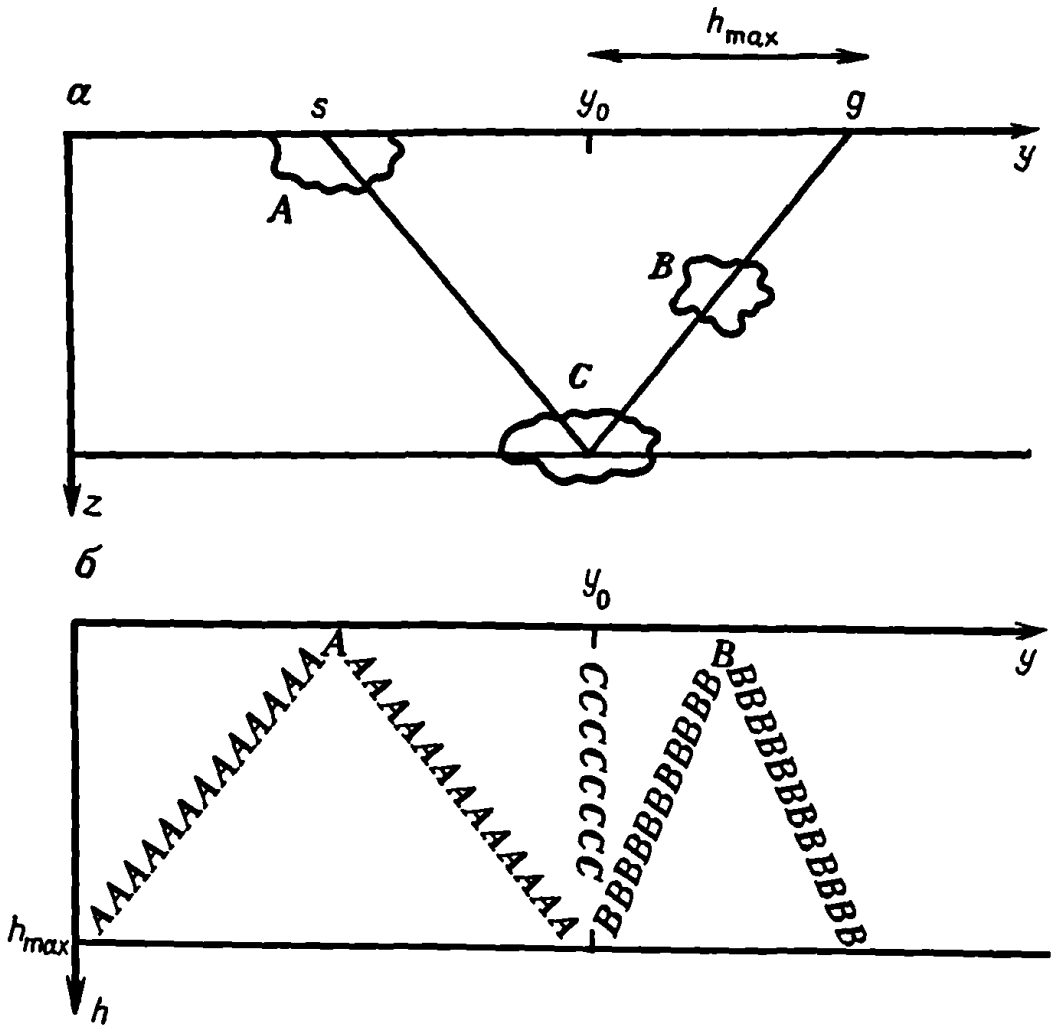



РИС. 66. Модель Къяртанссона. Аномальные включения *A*, *B* и *C* (*а*) можно обнаружить по их влиянию на отражения от подстилающего слоя (*б*)

удалениях $h$, кроме одной средней точки $y_0$. В верхней части рис. 66 изображен луч, на который оказывают свое воздействие все указанные выше включения инородного материала. Ему соответствует средняя точка $y_0$ и самое большое удаление от источника $h_{max}$. Найдите этот луч в нижней части рис. 66.

Включение *B* находится несколько в стороне, между *A* и *C*. Значение углового коэффициента нарушенных точек в плоскости ($y$, $h$) находится где-то между угловыми коэффициентами включений *A* и *C*.

На рис. 67 приведен разрез при постоянном удалении, пересекающий газовое месторождение. На разрезе изображены пятые трассы от ближайшей к ПВ, т. е. трассы, удаленные на 320 м от источника. Учтите, что море в этом месте было неглубоким. Первое вступление приблизительно на 0,33 с представляет собой волну, падающую под большим углом.

Была рассчитана величина энергии каждой трассы в интервале 1,5—3,0 с. Значения энергии изображены на рис. 68 в виде функции средней точки и удаления. Отметим полосы энергии, секущие плоскость ($y$, $h$) под углом приблизительно 45°. Самая интенсивная полоса пересекает график точно под углом 45° и проходит через ближнее удаление на ПВ 170. Она соответствует

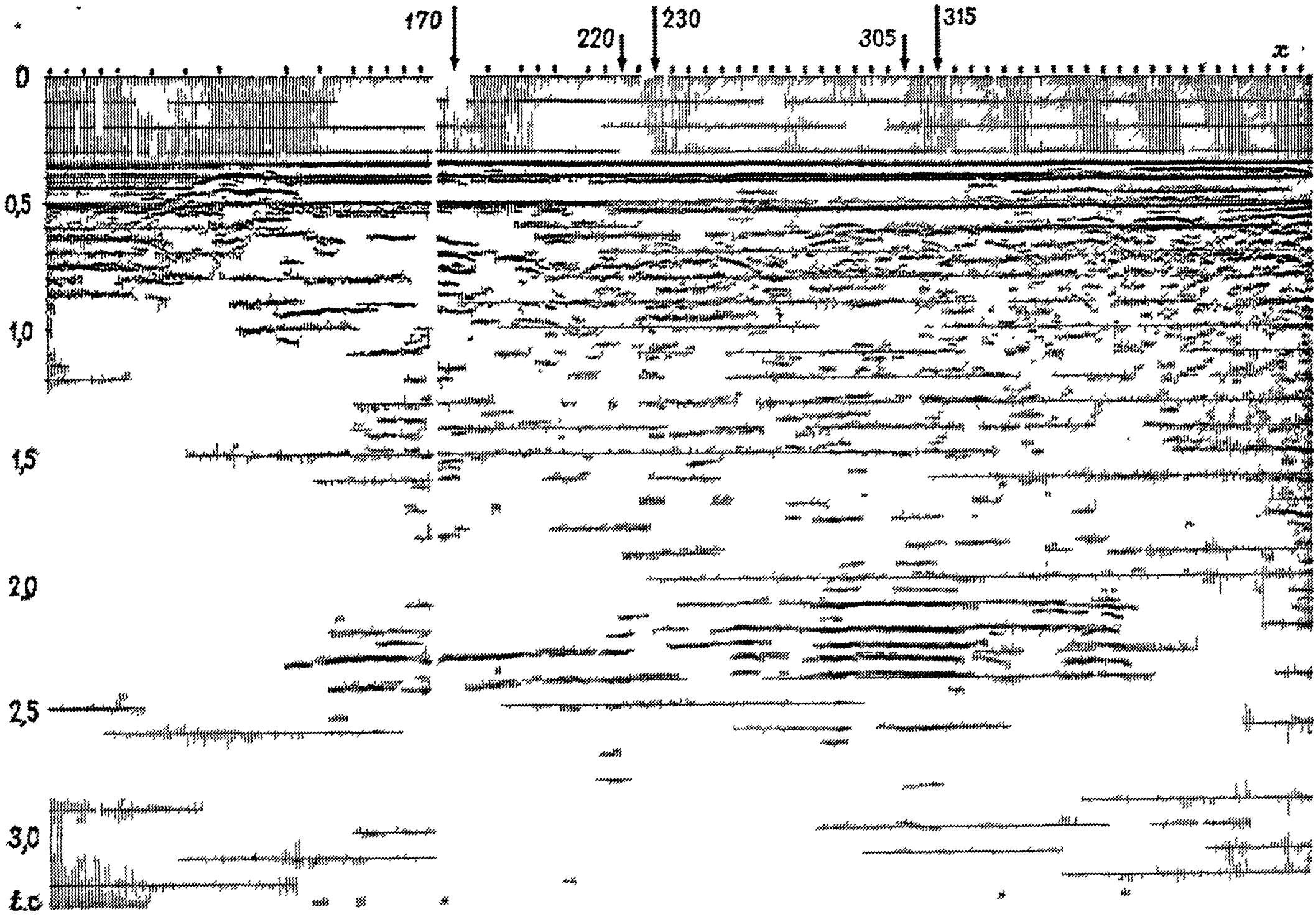



РИС. 67. Разрез постоянных удалений через газовое месторождение Грэнд-Айл

пропущенному наблюдению, что ясно видно из рис. 67. Теперь подумаем о газонасыщенных песках, описанных в модели в качестве включения *С*. Любой эффект газонасыщенного песка будет проявляться на наблюденных данных в виде полосы, пересекающей все удаления в средней точке газонасыщенного песка, т. е. ориентированной горизонтально, поперек страницы. На рис. 68, *а* таких полос не видно. Внимательное изучение рисунка показывает, что остальные из множества четко видимых полос секут плоскость под углом заметно меньшим $\pm 45$ . Такая величина угла наклона полос на рисунке объясняется тем, что они похожи на аномальную зону *В*. Они находятся где-то между поверхностью наблюдений и отражающей границей. Угол определяет глубину залегания зоны. Если он ближе к 45 , а не к 0 , то значит, что аномальные зоны располагаются ближе к поверхности, чем к отражающей границе.

На рис. 68, *б* изображена временная аномалия в том же виде, как на рис. 68, *а* амплитудная. Был построен разрез ОГТ и проведено сопоставление с ним каждой полевой трассы. Определен остаточный временной сдвиг по каждой из трасс и его величина вынесена на рис. 68, *б*. Остаточные времена для одной из сейсмограмм общей средней точки показаны на рис. 69.

Полученные в результате материалы напоминают амплитуды за тем исключен ем, что они отягощены помехами в тех случаях, когда амплитуды малы, или же когда «переход на фазу» искажает измерения. Из рис. 68, *б* четко видно, что возмущающее влияние на временную характеристику происходит на той же глубине, где искажаются и амплитуды.

Процесс обратного направленного суммирования, который будет описан в разделе 5 2, позволяет определять распределение аномальных зон по глубине. Такое распределение изображено на рис. 68, *в, г*.

**Захороненные алл гатор ı**

Осадки, переносимые рекой Миссисипи, отлагаются в дельте. В дельте образуются песчаные барьеры, точечные бары, заиленные старицы, ветвящиеся занесенные песком протоки, а между ними болотистые заливные равнины, которые заполнены разлагающимся органическим материалом. Ландшафт, очевидно, изменяется по латерали, и он в конце концов опустится под собственной тяжестью, а также под воздействием конседиментационн ıх разрывных нарушений и веса позднейших отложений. После того как вся эта местность погрузится, отмеченная латеральная изменчивость сохранится в виде ано-

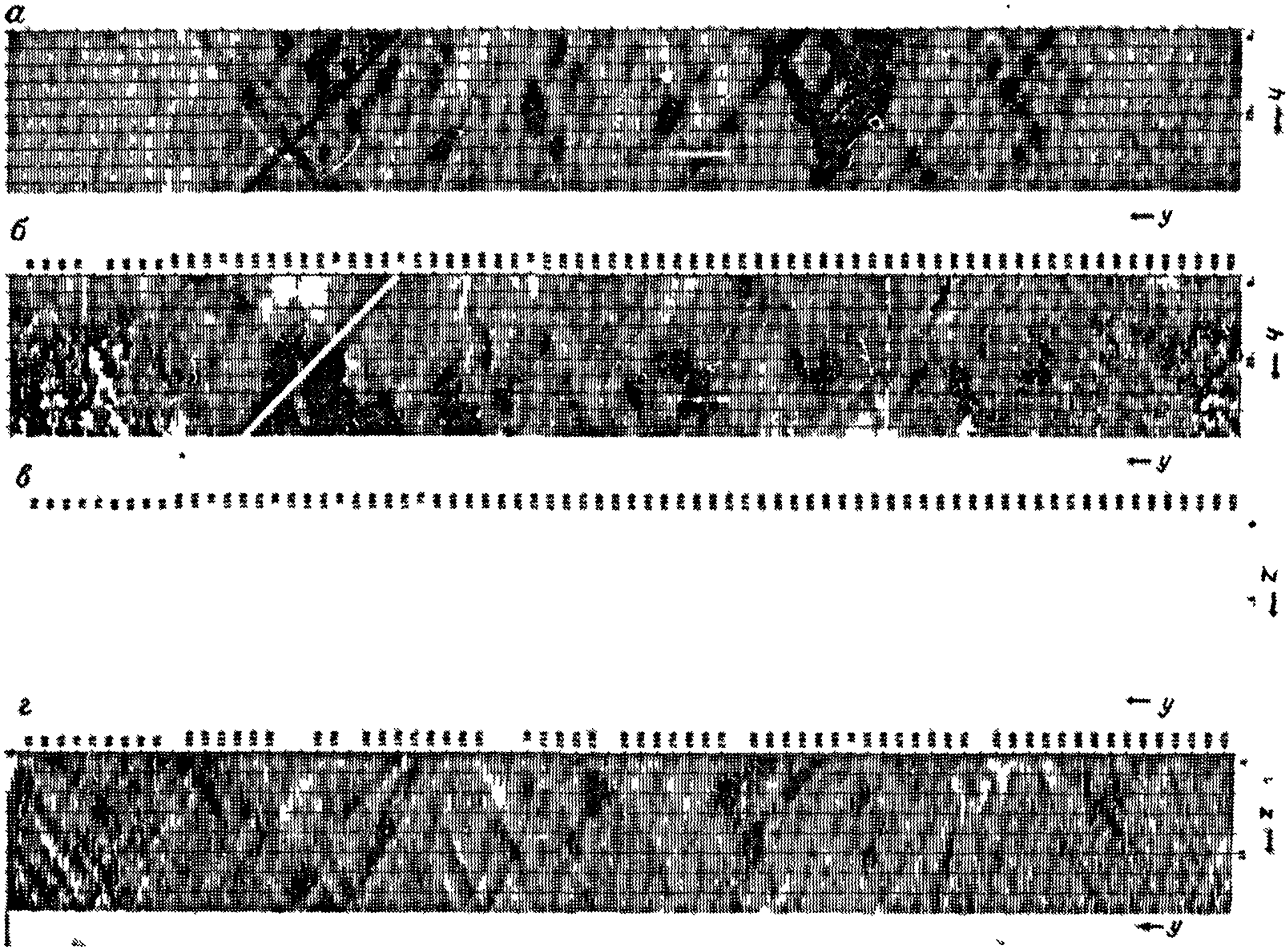



РИС. 68. Энергии трасс разреза, изображенного на рис. 67, в амплитудном (*а*, *в*) и временном (*б*, *г*) представлении

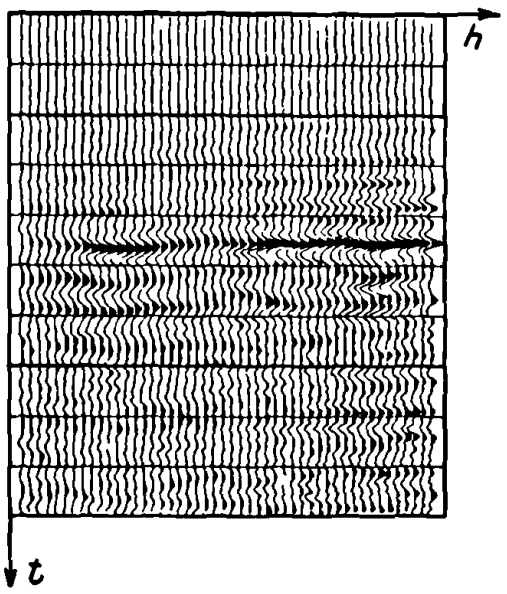



РИС. 69. Сейсмограмма общей средней точки 220 (той же, что и на рис. 65 *в*) после ввода кинематических поправок. Показан интервал шириной в 1 с с центром на 2,3 с. Кинематические поправки рассчитаны для скорости 2100 м с (по Къяртанссону)

мальных зон, которые будут изучать сейсморазведчики будущего. Они, возможно, увидят картину, подобную приведенной на рис. 70, на котором изображены данные трехмерной сейсморазведки, т. е. наблюдения по множеству параллельных профилей, отстоящих один от другого приблизительно на 70 м. Верхняя плоскость срез при постоянном значении времени — дает картину распространения захороненных речных меандров. Наблюдения, приведенные на рис. 70, более полно описаны в работе [39].

**Фокусировка или поглощение?**

Сильно поглощающие породы обычно характеризуются низкими скоростями. После прохождения аномально низкоскоростной зоны волны должны ослабиться в результате поглощения. В то же время они должны усилиться в результате фокусировки. Какой из названных эффектов преобладает? Каким образом это явление зависит от пространственной длины волны? Остается полностью воссоздать физическую модель. Может быть, вам удастся ее рассчитать, зная, что темные места на рис. 68, *в* соответствуют малым амплитудам, или высокому поглощению, а они же на рис. 68, *г* низким скоростям.

**Упражнение**

Возьмите волны, обменявшие свой тип с продольного P на поперечный S. Предположите, что скорость распространения волны S равна приблизительно половине скорости волны P. Как будет выглядеть рис. 66 в случае обменных волн?

## 3.2. Введение в кажущуюся скорость

Изучение зависимости времени пробега сейсмических волн от расстояний между источником и приемниками начинается с

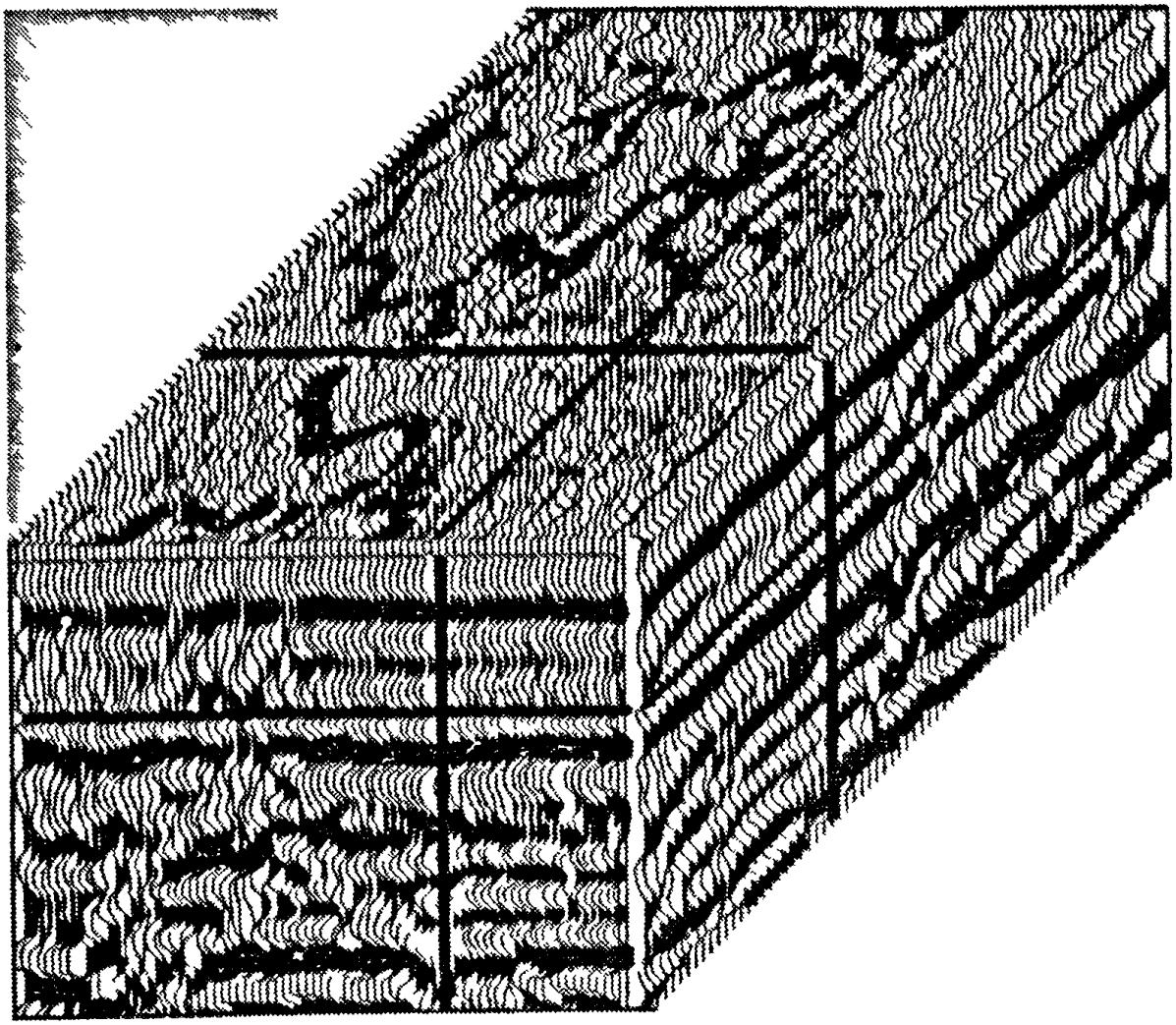


РИС. 70. Трехмерные сейсмические данные, полученные в Таиландском заливе

вычисления времен пробега по лучевым направлениям для некоторых идеальных ситуаций.

### Разрезы и сейсмограммы для случая плоских отражающих поверхностей

Самым простым случаем в методе отраженных волн является одиночная горизонтальная отражающая граница раздела, изображенная на рис. 71. Как и ожидалось, разрез при нулевых удалениях имитирует модель среды. Сейсмограмма ОСТ представляет собой гиперболу, асимптоты которой — прямые с угловыми коэффициентами, равными величине, обратной скорости $v_1$. Самым существенным способом обработки первичных сейсморазведочных данных является суммирование по методу общей глубинной точки, или суммирование ОГТ. При суммировании по способу ОГТ все трассы сейсмограммы смещаются во времени таким образом, чтобы оси синфазности отражений образовывали горизонтальные прямые, и затем складываются вместе. В результате получается имитация сейсмотрассы, наблюдаемой на нулевом удалении приемников от источника. Совокупность подобных трасс называется разрезом, отсуммированным по ОГТ, или

просто разрезом ОГТ. На практике отсуммированные по ОГТ разрезы часто принимаются за разрезы при нулевых удалениях и мигрируются, как таковые. В данной главе мы научимся избегать этого популярного, чересчур упрощающего реальность предположения.

Следующая простейшая ситуация возникает при наличии плоской отражающей границы, ориентированной вертикально. Она нетипична, но рассматривается здесь по той причине, что влияние наклонных границ в среде становится более понятным при изучении какого-либо крайнего случая. В рассматриваемом случае волна распространяется вдоль границы раздела земля — воздух. Чтобы избежать путаницы, отражающую границу можно слегка наклонить к вертикали, как на рис. 72.

На рис. 72 демонстрируется, что время пробега отраженной волны не меняется с изменением расстояния по горизонтали. Может показаться парадоксальным тот факт, что время пробега волны не растет с увеличением расстояния между точкой возбуждения и точкой приема. Объяснение этого парадокса заключается в том, что сохраняется постоянным местоположение средней точки, а не пункта возбуждения. По мере увеличения расстояния между ПП и ПВ пикет источника удаляется от отражающей границы, а приемник приближается к ней. Время, теряемое на прохождение одной части пути, экономится на другой.

Плоская отражающая граница в осадочном чехле может занимать любое положение между горизонтальным и вертикальным. Значит сейсмограмма общей средней точки будет иметь любой вид, промежуточный между изображенными на рис. 71 и 72. Разрез при нулевых удалениях (см. рис. 72), представляет собой прямую линию, которая оказывается асимптотой некоторого семейства гипербол. Угловой коэффициент этой асимптоты равен величине, обратной скорости $v_1$.

### Наклонно залегающий слой

Хотя годографы в случае наклонно залегающих пластов выглядят простыми, получить их аналитические выражения отнюдь не просто. Прежде чем выводить формулу годографа, сообщим результат: в случае отражающей границы, наклоненной под углом $\alpha$ к горизонтали, уравнение годографа имеет вид

$$t^2v^2 = 4(y-y_0)^2\sin^2\alpha + 4h^2\cos^2\alpha. \qquad (170)$$

При $\alpha = 45$ уравнение (170) является известным конусом Пифагора, т. е. имеет вид $t^2 = z^2 + x^2$. При прочих значениях $\alpha$ уравнение все еще остается конусом, но менее привычным из-за растяжения осей.

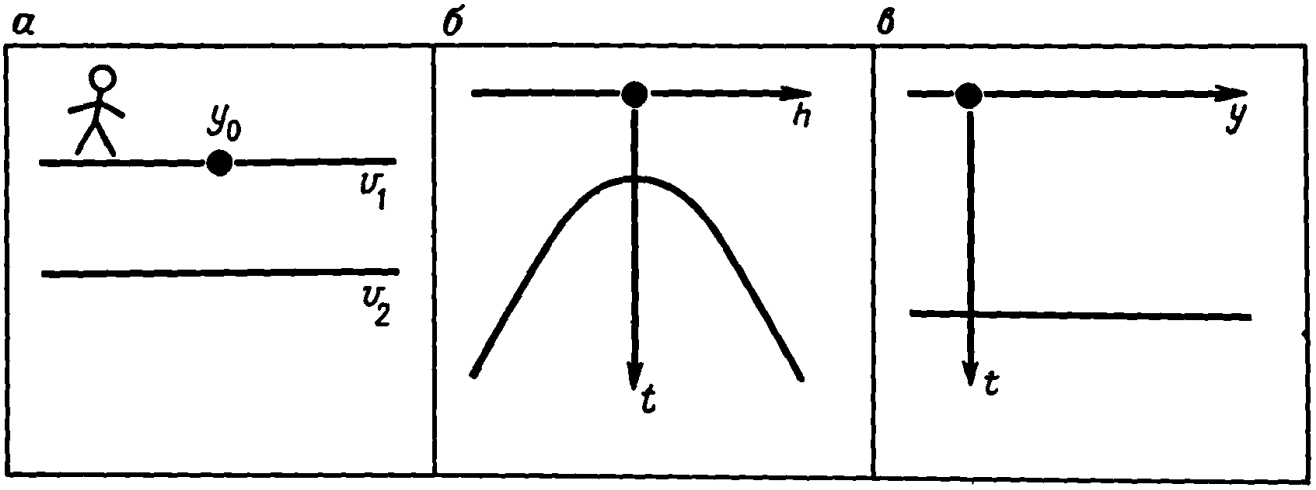



РИС. 71. Простейшая модель земной среды:
*а* горизонтально-слоистая модель; *б* сейсмограмма общей средней точки $y_0$; *в* разрез постоянных удалений $h_0$

В случае сейсмограммы общей средней точки для $y=y_1$ на плоскости $(h, t)$ уравнение (170) принимает вид $t^2=t_0^2+4h^2/v_к^2$. Таким образом, независимо от угла наклона границ в среде на сейсмограмме общей средней точки наблюдается точная гипербола. Влияние угла наклона проявляется в изменении асимптоты гиперболы, т. е. в изменении величины кажущейся скорости. Полученный результат играет большую роль в практической сейсморазведке и известен как поправка за наклон Левина [91]:

$$v_к=v/\cos(\alpha). \qquad (171)$$

(См. также работу [133].) Короче говоря, наклон отражающих границ приводит к увеличению скорости суммирования ОГТ.

На рис. 73 изображены некоторые траектории лучей, соответствующие трассам сейсмограммы общей средней точки. Заметим, что каждый луч падает на наклонный пласт в различных точках. Поэтому сейсмограмма общей средней точки не равнозначна сейсмограмме общей глубинной точки. Чтобы понять почему точка отражения перемещается по отражающей

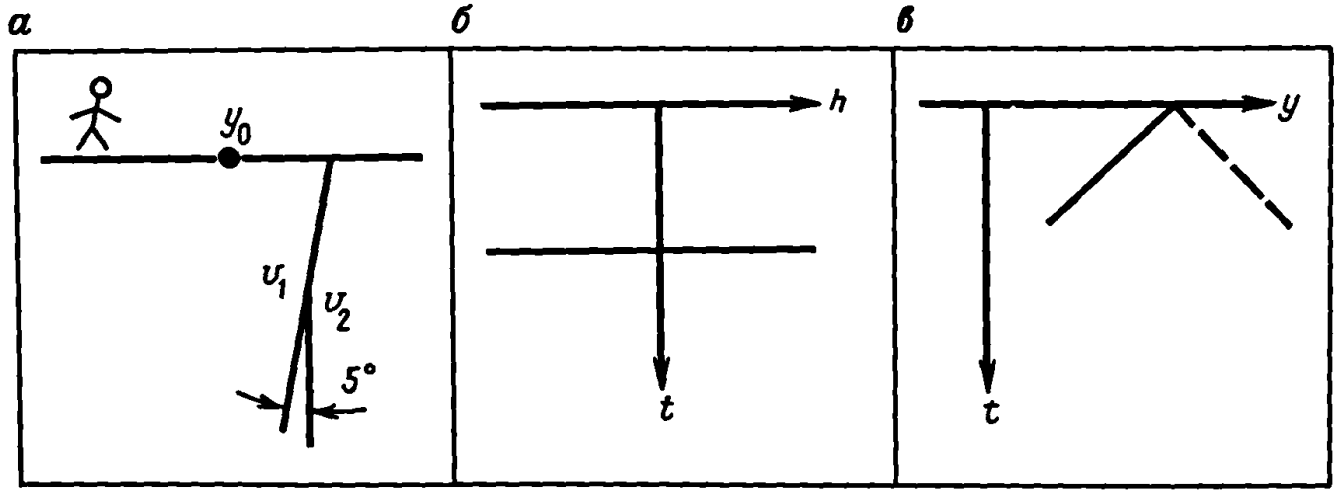



РИС. 72. Модельные исследования в условиях вертикального контакта:
*а* — модель среды с почти вертикальным контактом; *б* сейсмограмма общей средней точки $y_0$; *в* — разрез нулевых удалений

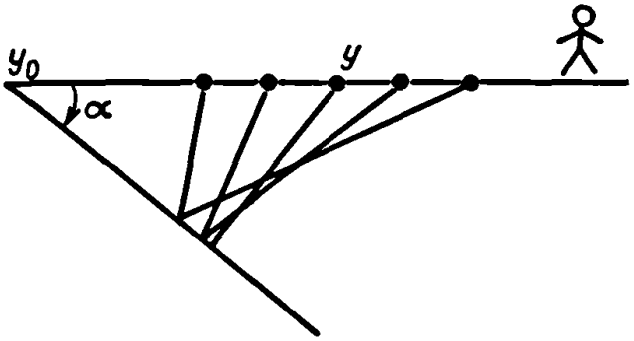



РИС. 73. Траектории лучей, соответствующие сейсмограмме общей средней точки

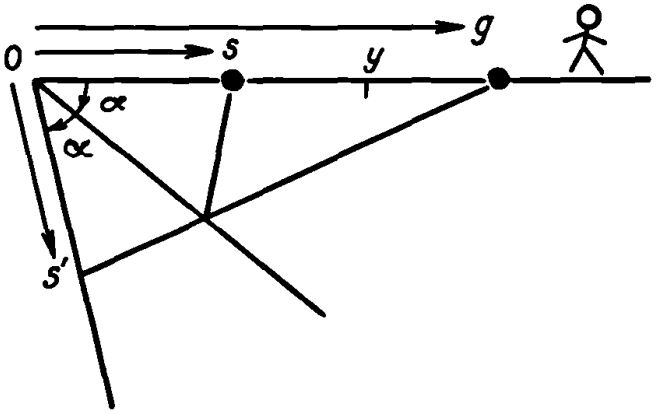



РИС. 74. Время пробега волны от мнимого источника в точке $s'$ до сейсмоприемника, находящегося в точке $g$, можно выразить с помощью экрана косинусов

границе, вспомним тот факт, что биссектриса угла в треугольнике в общем случае не делит противоположную сторону пополам. Точка отражения при увеличении расстояния между ПВ и ПП перемещается вверх по восстанию границы.

И, наконец, докажем уравнение (170). На рис. 74 изображены необходимые для этого геометрические соотношения вместе с мнимым источником, расположенным на другой отражающей границе, имеющей в 2 раза больший угол наклона. Ради удобства принято, что граница пересекает поверхность наблюдения в точке $y_0=0$. Длина прямой $s'g$ на рис. 74 определяется с помощью закона косинусов из тригонометрии и равна

$$t^2v^2=s^2+g^2-2sg\cos 2\alpha=(y-h)^2+(y+h)^2-$$
$$-2(y-h)(y+h)\cos 2\alpha=2(y^2+h^2)-2(y^2-h^2)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=4y^2\sin^2\alpha+4h^2\cos^2\alpha,$$

а последнее выражение представляет собой уравнение (170).

Еще одно свойство уравнения (170) заключается в том, что оно описывает разрез при постоянном удалении.

### Отклик отражающей точки

Еще одним простым геометрическим телом является отражающая точка, расположенная внутри среды. Волна, падающая на точку с любого направления, отражается во всех направлениях. Указанная геометрия имеет особо важное значение по той причине, что любую модель можно представить в виде суперпозиции точечных рассеивателей. На рис. 75 приведен один из примеров, когда годографы имеют пропуски по тем же причинам, по которым некоторые из годографов на рис. 71 и 72 представляют собой непрерывные прямые линии.

Геометрические соотношения для случая точечного рассеивателя, расположенного в $(x, z)$, показаны на рис. 76. Уравнение

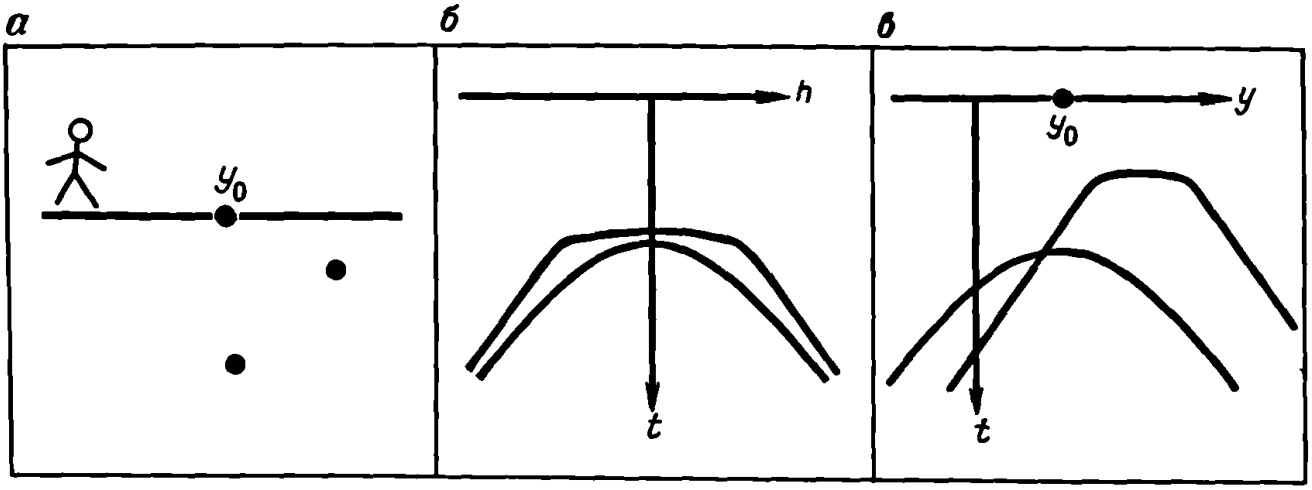



РИС. 75. Волны при двух точечных рассеивателях:
*а* модель среды с двумя точечными рассеивателями; *б* — сейсмограмма общей средней точки $y_0$; *в* разрез постоянных удалений $h_0$

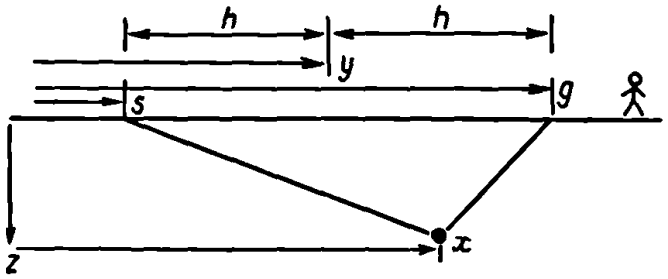



РИС. 76. Геометрические соотношения при одном точечном рассеивателе

времени пробега $t$ представляет собой сумму двух путей пробега волны:

$$tv=\sqrt{z^2+(s-x)^2}+\sqrt{z^2+(g-x)^2}. \qquad (172)$$

### Пирамида Хеопса

Ввиду важности модели точечного рассеивателя не пожалеем усилий на то, чтобы визуализировать функциональную зависимость между $t$, $z$, $x$, $s$ и $g$ в уравнении (172). Получится рисунок более сложный, чем коническое сечение в случае геометрии излучающих границ.

Для начала предположим, что первый квадратный корень в уравнении (172) постоянен по той причине, что все величины в подкоренном выражении сохраняются постоянными. В результате получается знакомая гипербола на плоскости с координатами ($g$, $t$), отличающаяся лишь тем, что к времени прибавлена некоторая постоянная. Теперь предположим, что постоянен другой квадратный корень. И снова получим гиперболу на плоскости с координатами ($s$, $t$). На плоскости ($s$, $g$) время пробега оказывается суммой функций от $s$ и от $g$. Путь волны в этом случае можно представить в виде вешалки для пальто, ориентированной параллельно оси $s$, которая висит на другой вешалке, ориентированной параллельно оси $g$.

Вид на вершину, образованную временами пробега и возвышающуюся над плоскостями ($s$, $g$) или ($y$, $h$), показан на рис. 77, *а*. Заметим, что сечение этой «горы» для больших значений $t$ представляет собой квадрат со сглаженными углами.

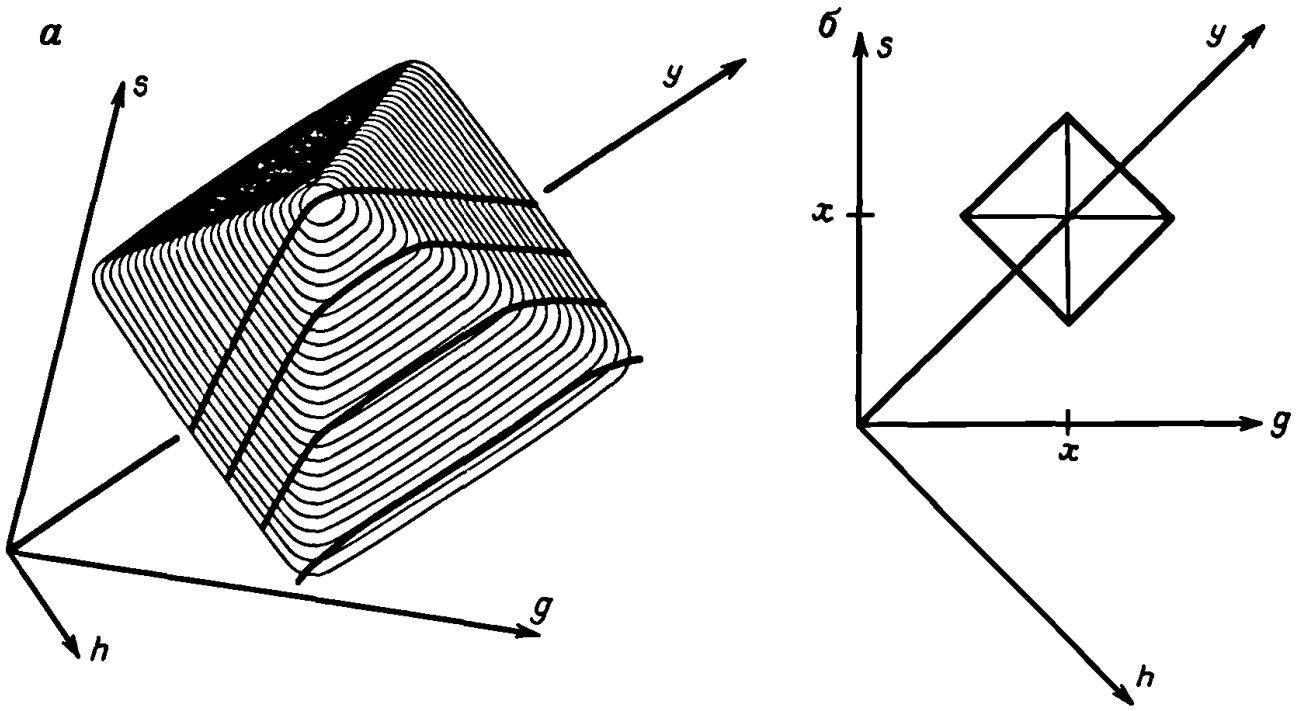



РИС. 77. Поверхностный годограф, описываемый уравнением (172) при фиксированных $x$ и $z$ ($а$)
(жирными линиями показано положение разрезов постоянных удалений) и разрез через поверхностный годограф при большом $t$ или малом $z$ ($б$) (по Оттолини)

При постоянном значении $t$ получается квадрат на плоскости $(s, g)$, что и изображено на рис. 77, $б$. С алгебраической точки зрения квадратность становится очевидной в тех случаях, когда точечные отражатели располагаются вблизи от поверхности наблюдений, т. е. при $z \to 0$. Тогда уравнение (172) принимает вид

$$vt = |s-x| + |g-x|. \qquad (173)$$

Центр квадрата расположен в точке $(s, g) = (x, x)$. При возрастании времени пробега $t$ в направлении вниз от горизонтальной плоскости с координатами $(s, g)$ контур квадрата напоминает срез через пирамиду египетского фараона Хеопса. Прохаживаться вокруг пирамиды на постоянной высоте значит прохаживаться по квадрату. И наоборот, изменение альтитуды маршрута по координате $g$ при постоянной $s$ равно просто сумме некоторой постоянной и абсолютного значения функции. То же самое наблюдается и при маршруте по координате $s$ при постоянной $g$.

Более интересными и менее очевидными являются годографы на сейсмограммах общей средней точки и на оси синфазности на разрезах при постоянном удалении ПВ—ПП. Вспомним, что координата средней точки между источником и приемником обозначается через $y$. Вспомним также, что $h$ обозначает половину горизонтального расстояния между источником и приемником:

$$y = (g+s)/2, \qquad (174а)$$

$$h = (g-s)/2. \qquad (174б)$$

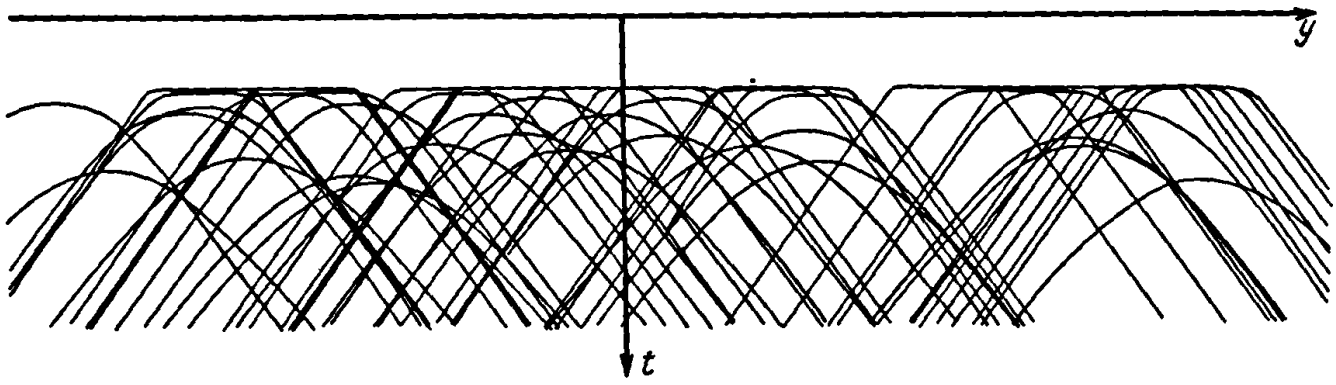



РИС. 78. Разрез постоянных удалений над случайно распределенными точечными рассеивателями

Маршрут $y$ при постоянном расстоянии $h$ показан на рис. 77. Достигнув на этом маршруте максимальной высоты, вы ступаете на плоскую горизонтальную ступень, напоминающую гиперболоиды с плоскими вершинами, изображенные на рис. 75. Слегка сгладив вершину и ребра пирамиды, получаем модель для случая ненулевой глубины залегания отражающей границы.

В случае лучей, близких к вертикали, годографы находятся далеко от асимптот гиперболы. Сейчас квадратные корни уравнения (172) можно разлагать в ряд Тейлора, с получением параболы вращения. Последнее объясняет срезание пика пирамиды.

### Случайно распределенные точечные рассеиватели

На рис. 78 изображен синтетический разрез при постоянном удалении (РПУ), рассчитанный по модели среды, содержащей около 50 случайно распределенных точечных рассеивателей. Более поздние годографы похожи на гиперболы. У годографов на малых временах вершины выположены. Минимальное время вступления соответствует пробегу по лучу, направленному горизонтально от источника к приемнику.

На рис. 79 изображена синтезированная полевая сейсмограмма общей точки возбуждения (сейсмограмма ОТВ), рассчитанная для той же модели среды со случайно распределенными точечными рассеивателями. От каждого рассеивателя получается своя гиперболическая ось синфазности. Гиперболы не симметричны относительно центральной точки, их расположение также случайно. Но они все располагаются под линиями $|g-s|=vt$. Как на больших, так и на малых временах можно найти гиперболы с острыми вершинами. Островершинные годографы, соответствующие неглубоко залегающим рассеивателям вблизи от сейсмоприемника, располагаются возле прямых $|g-s|=vt$.

На рис. 80, *а* изображена синтетическая сейсмограмма ОСТ, рассчитанная по модели среды, содержащей внутри около 50 случайно распределенных точечных рассеивателей. Поскольку

РИС. 79. Сейсмограмма общей точки возбуждения при наблюдениях над случайно распределенными рассеивателями

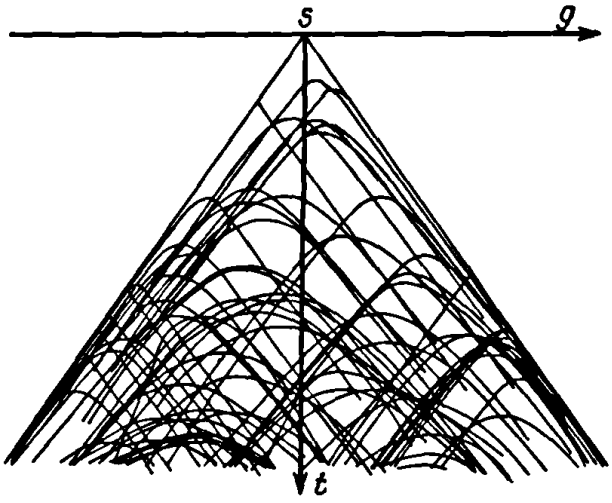
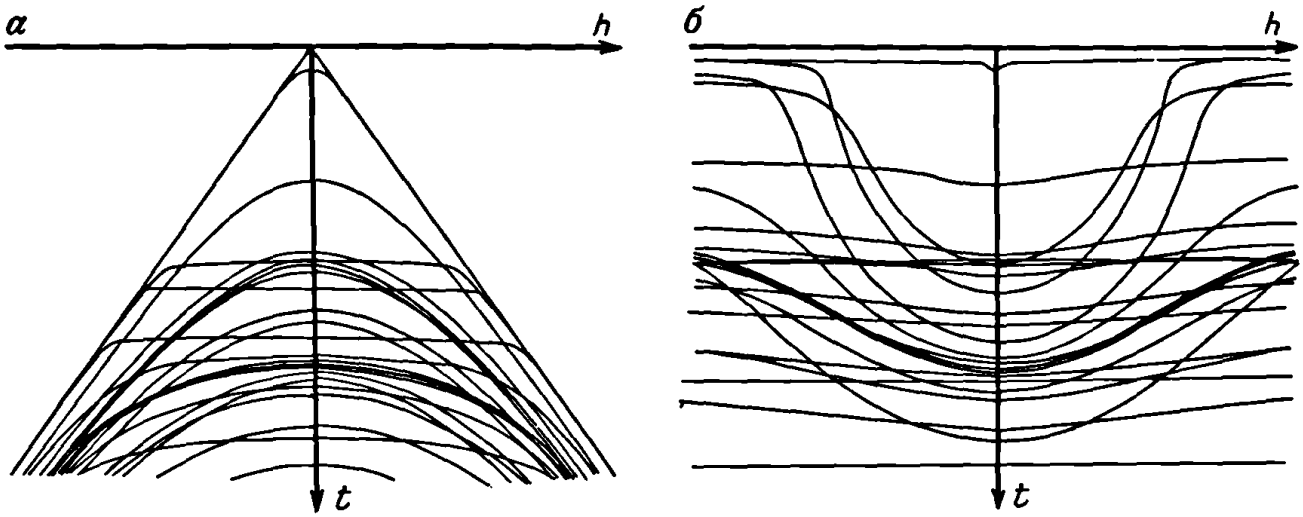



РИС. 80. Сейсмограмма общей средней точки для среды с случайно распределенными точечными рассеивателями (*а*), она же после ввода кинематических поправок (*б*)




это сейсмограмма общей средней точки, годографы симметричны относительно нулевой координаты удаления приемника от источника. (Полевые сейсмограммы почти никогда не изображаются для отрицательных удалений.) Некоторые оси синфазности имеют уплощенные вершины. Это значит, что соответствующие рассеиватели располагаются в стороне от вертикали, проходящей через среднюю точку.

Введение нормальной кинематической поправки (НКП) сводится к растяжению полевых сейсмограмм по временной оси с целью выпрямления гиперболических осей синфазности. Нормальная кинематическая поправка вводится в предположении, что слои залегают горизонтально, но она годится и для случая, когда точечные рассеиватели находятся прямо под средней точкой. На рис. 80, *б*, показано, что получается, когда нормальные кинематические поправки вводятся в условиях модели со случайно распределенными рассеивателями: одни оси синфазности выполаживаются, другие оказываются переспрямленными.

### Рассеяние в прямом и обратном направлениях — полосы Ларнера

В некоторых районах поверхностные волны преобладают над полезными отражениями от глубоко залегающих границ,

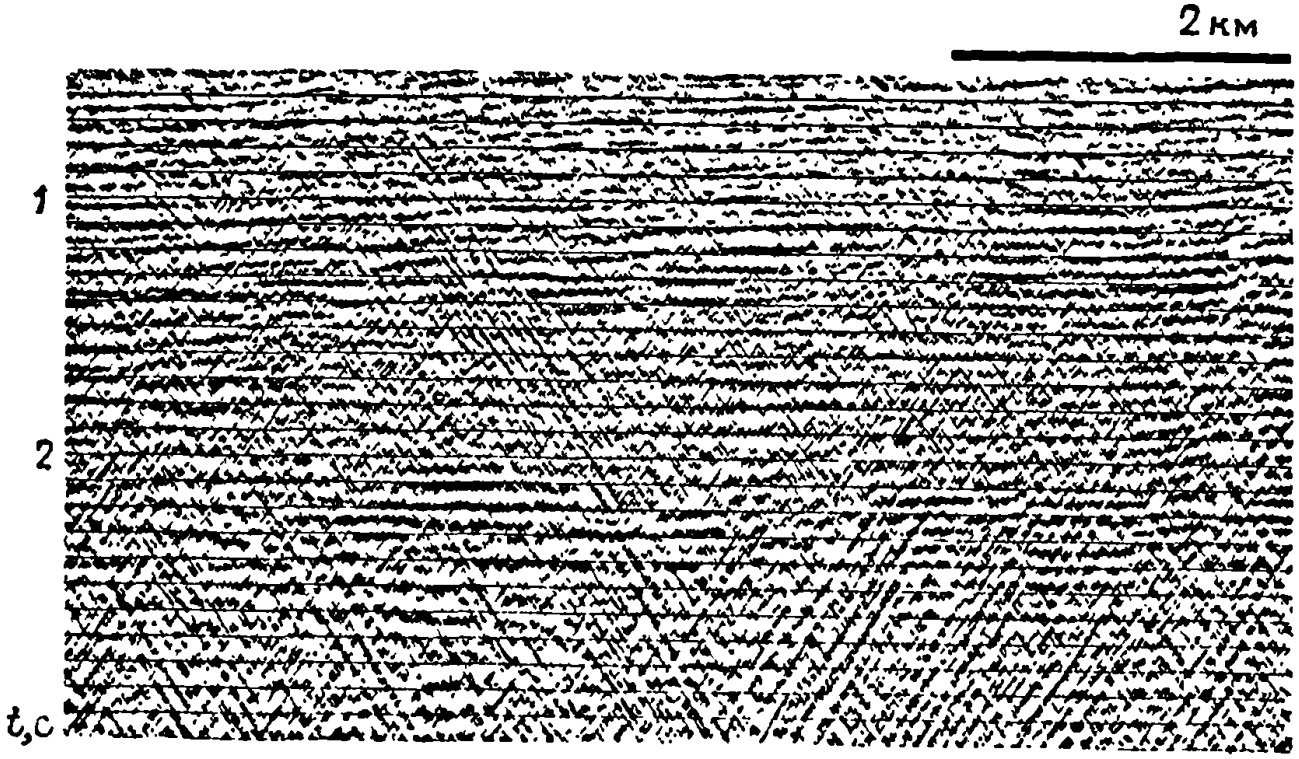



РИС. 81. Разрез ОГТ с помехами поверхностного происхождения (пролив Шелехова, Аляска) [по Ларнеру и др.]

представляющих геологический интерес. Возникающие при этом трудности осложняются тем обстоятельством, что поверхностные волны, как правило, нерегулярны, так как верхняя часть разреза более изменчива по сравнению с нижней. При работах на суше волны-помехи поверхностного типа иногда называют «раскачкой грунта», а при работах на море — водными волнами (не путать с волнением водной поверхности).

В качестве модели, генерирующей поверхностные волны-помехи, можно взять вертикальную отражающую стенку на рис. 72. В такой модели волны остаются вблизи от поверхности наблюдений. Если взять модель со случайно распределенными вертикальными стенками, то можно получить разрез при нулевом удалении, который будет похож на реальный сейсмический, изображенный на рис. 81. В качестве другой, менее экстремальной модели поверхностных волн-помех можно принять годографы с плоскими вершинами, образующиеся для модели со случайно распределенными точечными рассеивателями.

В рассмотренной выше модели со случайно распределенными точечными рассеивателями скорость предполагалась постоянной. В реальных геологических условиях скорости поверхностных волн обычно имеют пониженные значения, а отражений от глубоких границ — сравнительно повышенные. Последнее обстоятельство создает условия для неожиданного усиления помех.

Операция суммирования по способу ОГТ усиливает оси синфазности, соответствующие скорости суммирования (ско-

рости ОГТ) и подавляет оси синфазности с иными скоростями. Поэтому можно ожидать, что суммирование ОГТ с более высокими, глубинными скоростями будет ослаблять низкоскоростные поверхностные волны. Помехи поверхностного типа не являются отражениями от горизонтально залегающих слоев — они больше походят на отражения от вертикальных или круто падающих слоев. Но из уравнения (171) следует, что наклон границ приводит к возрастанию кажущихся скоростей. Поэтому и не удивительно, что в результате суммирования ОГТ с высокими скоростями, соответствующими глубоким частям геологического разреза, могут усиливаться помехи поверхностного происхождения. Практические примеры проявления указанных осложнений прекрасно объяснены и проиллюстрированы в статье Ларнера [89].

### Скорости боковых волн

В условиях мелководья помехи могут образовываться в результате рассеяния волн на затонувшем судне или же при отражении от окраин острова или айсберга, располагающихся в нескольких километрах в стороне от сейсмического профиля. Представьте себе, что по дну мелководного моря разбросаны валуны и они лежат не только по курсу корабля, но и в стороне от него. Годографы отражений от валунов будут прекрасно согласовываться с моделью случайно распределенных точечных рассеивателей. Из-за больших длин сейсмических волн имеющиеся в нашем распоряжении источники и приемные системы не позволяют отличать волны, распространяющиеся в вертикальной плоскости профиля наблюдений, от волн, подходящих с боковых направлений.

Пусть в нескольких километрах сбоку от судна находится один неглубоко залегающий рассеиватель. Точнее, пусть подобный рассеиватель залегает на поверхности земли перпендикулярно к линии наблюдения в точке, расположенной посередине между пунктами возбуждения и приема. В этом случае сейсмограмма ОСТ будет представлять собой идеальную гиперболу, похожую на годограф отражения от глубокой границы типа изображенной на рис. 79. Поскольку эта гиперболическая ось синфазности будет характеризоваться более низкой скоростью соответствующей скорости волны в воде, указанная помеха рассеянного типа должна подавиться в результате суммирования ОГТ с более высокой скоростью, соответствующей глубоко залегающим пластам. Следовательно, упомянутые выше «образующие полосчатость» рассеиватели не находятся сбоку. Они должны располагаться вдоль профиля наблюдений, а не в стороне от него.

**Миграционный эллипс**

Еще одно замечание по поводу уравнения (172): считать координату половины расстояния между источником и приемником $h$ и полное время пробега $t$ фиксированными постоянными. Тогда окажется, что геометрическое место возможных точек отражения будет описываться эллипсом на плоскости с

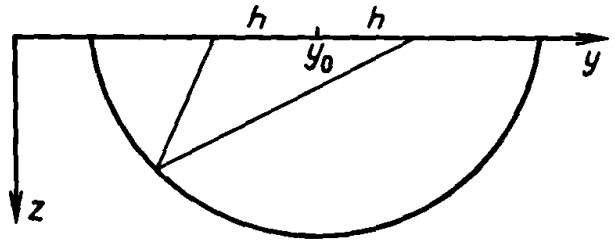



РИС. 82. Миграционный эллипс

координатами $(y-y_0, z)$. Почему именно эллипсом — следует из его геометрического определения. Нарисуем эллипс, поместим иглу в точку $s$ (см. рис. 76), а другую в точку $g$. Соединим иглы нитью длиной достаточной для того, чтобы она проходила через точку $(y_0, z)$. Эллипс, проходящий через $(y_0, z)$, можно построить с помощью карандаша, скользящего по нити, находящейся под натяжением. Нить сохраняет полное расстояние $tv$ постоянным (рис. 82).

Вспомним из раздела 1.3, что один из методов миграции разрезов при нулевых удалениях ПП от ПВ заключается в том, что каждый отсчет данных на плоскости с координатами $(y, t)$ используется для суперпозиции подходящей полуокружности на плоскость $(y, z)$. Для случая ненулевых удалений окружность превращается в эллипс (см. рис. 20).

Непросто показать, что уравнение (172) описывает эллипс, но это важно для последующего анализа.

Уравнение (172) в пространстве $(y, h)$ имеет вид

$$tv=\sqrt{z^2+(y-y_0-h)^2}+\sqrt{z^2+(y-y_0+h)^2}. \qquad (175)$$

Чтобы сократить выкладки, определим новую переменную $y$, как равную старой, но сдвинутую на $y_0$. Введем также следующие обозначения:

$$tv=2d=2tv, \qquad (176а)$$

$$a=z^2+(y+h)^2, \qquad (176б)$$

$$b=z^2+(y-h)^2, \qquad (176в)$$

$$a-b=4yh. \qquad (176г)$$

В результате уравнение (175) принимает вид

$$2d=\sqrt{a}+\sqrt{b}. \qquad (177)$$

Возведем последнее в квадрат и получим новое уравнение лишь с одним квадратным корнем:

$$4d^2-(a+b)=2\sqrt{a}\sqrt{b}. \tag{178}$$

Снова возведем обе части в квадрат, чтобы исключить и последний квадратный корень:

$$16d^4-8d^2(a+b)+(a+b)^2=4ab, \tag{179а}$$

$$16d^4-8d^2(a+b)+(a-b)^2=0. \tag{179б}$$

Используем определения для $a$ и $b$:

$$16d^4-8d^2(2z^2+2y^2+2h^2)+16y^2h^2=0. \tag{180}$$

Перенесем члены с $y$ и $z$ в правую сторону:

$$d^4-d^2h^2=d^2(z^2+y^2)-y^2h^2, \tag{181а}$$

$$d^2(d^2-h^2)=d^2z^2+(d^2-h^2)y^2, \tag{181б}$$

$$d^2=\frac{z^2}{1-\frac{h^2}{d^2}}+y^2. \tag{181в}$$

И, наконец, с учетом всех ранее сделанных определений получаем

$$t^2v^2=\frac{z^2}{1-\frac{h^2}{t^2v^2}}+(y-y_0)^2. \tag{182}$$

При фиксированном $t$ уравнение (182) представляет собой уравнение окружности, с растянутой осью $z$. Выполненные нами алгебраические преобразования подтвердили вывод о том, что определения эллипса с помощью «иголки с ниткой» и «растянутой окружности» совпадают (рис. 83). Эллипс моделирует среду при условии, что на разрезе при постоянном удалении наблюдается импульсоид.

## 3.3. Опускание наблюдений (продолжение поля вниз) с помощью уравнения с двумя квадратными корнями

Заменим способ изображения с использованием излучающих границ более широким подходом — изображением по методу опускания наблюдений. Выведем новое уравнение, называемое уравнением с двумя квадратными корнями (ДКК) и предназначенное для получения изображения методом опускания наблюдений. Назначение уравнения ДКК состоит в продолжении в нижнее полупространство всего сейсмического наблюдения целиком, и не только одних приемников, но и источников. После вывода ДКК-уравнения остальная часть

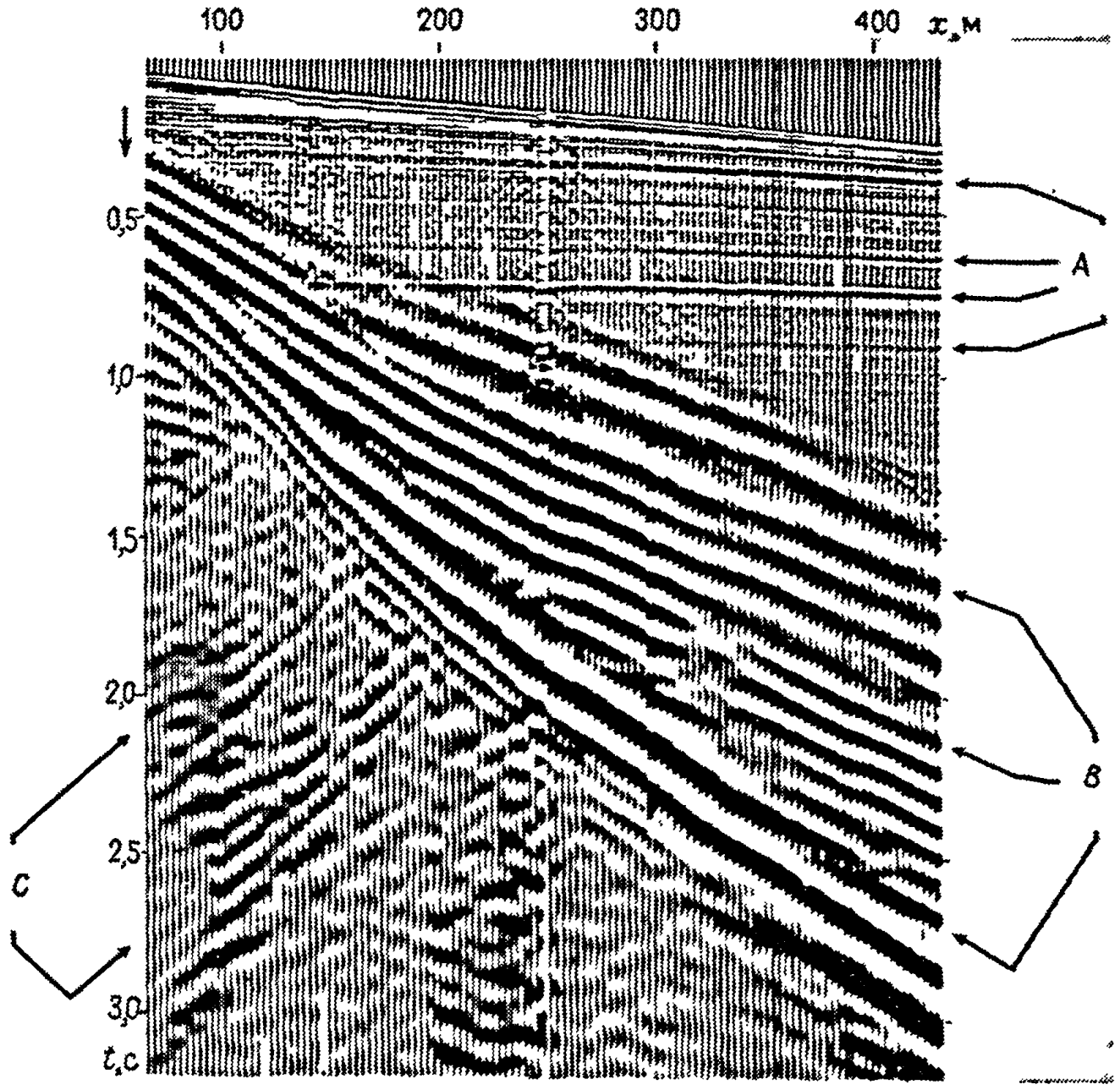



РИС. 83. Данные сейсмического зондирования. Скорость звука в воде равна 1500 м с. Идентифицируйте волны, помеченные буквами *A*, *B* и *C*. Что это сейсмограмма ОТВ или ОСТ?

главы будет посвящена разъяснению миграционного преобразования, суммирования ОГТ, миграции до суммирования ОГТ, скоростного анализа и поправок за латеральные изменения скоростей на языке уравнения с двумя квадратными корнями.

Таким уравнением является уравнение (191). Здесь один корень квадратный выражает косинус угла подхода волны, другой — угол выхода волны из источника. Один из косинусов выражается через фурье-составляющую по оси сейсмоприемников в пространстве $(s, g, t)$, т. е. через $k_g$. Другой, содержащий $k_s$, представляет собой фурье-составляющую по оси источников.

Полевые сейсмотрассы находятся в плоскости $(s, g)$. Чтобы перейти в плоскость $(y, h)$ — плоскость, выбранную сейсморазведчиками-интерпретаторами — нужно совершить простой поворот. Например, наблюденные данные можно преобразовать

по Фурье относительно координат $y$ и $h$. Последующее продолжение вниз будет выполняться с помощью уравнения (199), а не (191). Справедливость ДКК-уравнения зависит от выполнения принципа взаимности, с рассмотрения которого мы и начнем.

### Сейсмическая взаимность

Принцип взаимности гласит, что если поменять местами источник и сейсмоприемник, то должна получиться та же самая сейсмотрасса. С физической точки зрения соблюдение взаимности состоит в том, что какими бы сложными ни были схема наблюдений и геометрические траектории распространения волн, скорость звука по лучу одинакова по всем направлениям.

С математической точки зрения принцип взаимности обосновывается тем, что физические уравнения упругости самосопряжены. Смысл термина самосопряженный поясняется в работе [53], где показано, что дискретизированные акустические уравнения приводят к симметричной матрице даже в тех случаях, когда плотность и сжимаемость переменны по пространственной координате. Матрица, обратная любой симметричной, также будет симметричной (она называется матрицей импульсной реакции). Элементы, расположенные на диагонали матрицы, равны между собой. Каждый из элементов любой пары представляет собой отклик на импульсное воздействие.

Одна из сложностей соблюдения принципа взаимности связана с тем, каким образом следует обращаться с интерференционными системами. Например, у одиночного вертикального сейсмоприемника имеется естественная характеристика направленности. Он не реагирует на распространяющиеся по горизонтали продольные или же по вертикали поперечные волны. Для того, чтобы соблюдался принцип взаимности, характеристики направленности, определяемые средой, не должны изменяться при перемене местами источника и приемника.

Автор отыскал в своих архивах магнитограммы, полученные с помощью центральной расстановки сейсмоприемников в наземных условиях, которые могли бы проиллюстрировать соблюдение принципа взаимности в полевых условиях. Разрез при постоянном удалении, изображенный на рис. 84, получен с применением вертикальных вибраторов и вертикальных же сейсмоприемников. Сами работы не были направлены на проверку принципа взаимности, поэтому вполне вероятно, что пункты расположения источников могли оказаться несколько смещенными относительно пунктов приема. Возможно также и то, что геометрические параметры групп на возбуждении и приеме слегка различались. Углы падения отражающих границ в среде для случая, изображенного на рис. 84, оказались очень

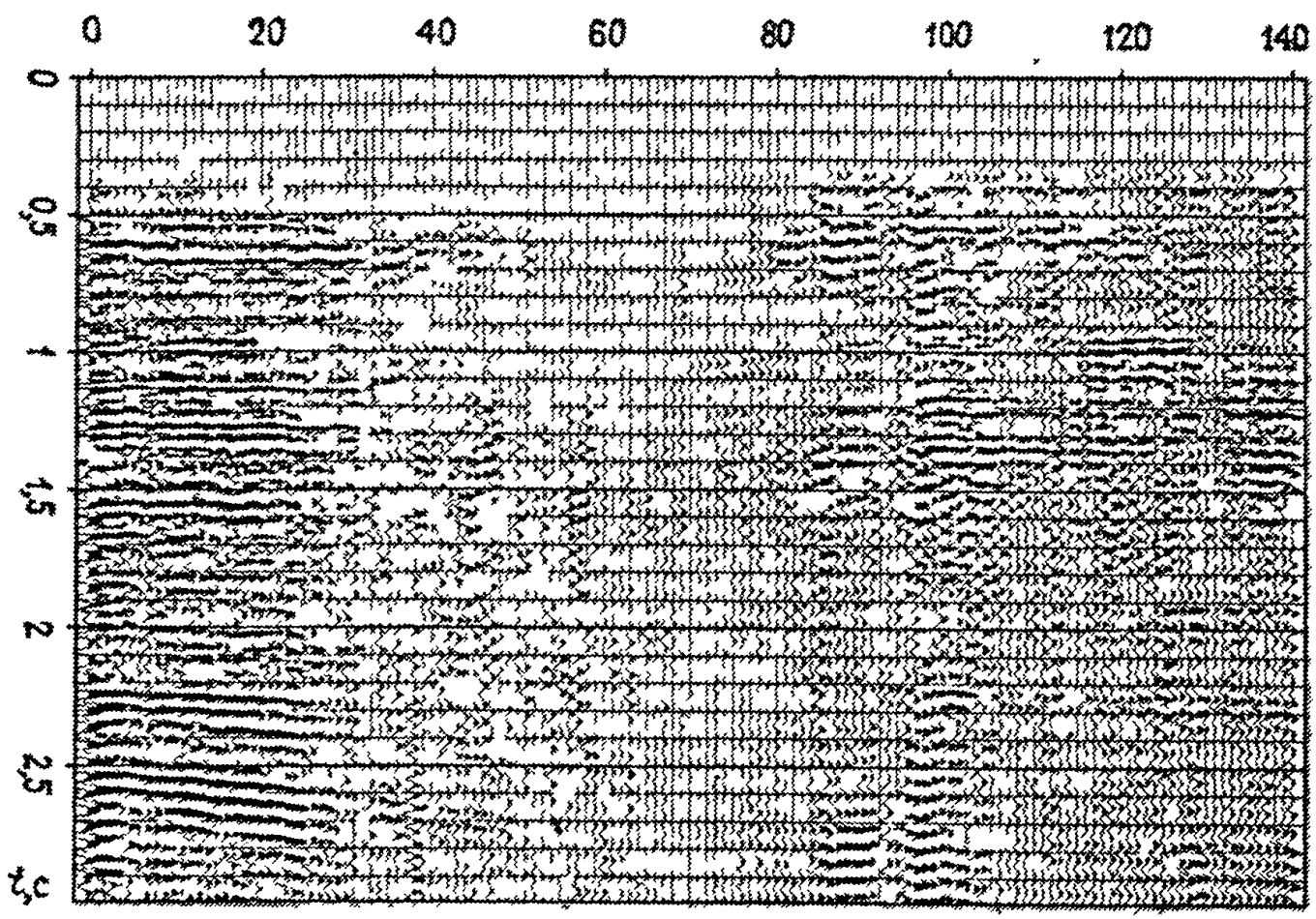



РИС. 84. Разрез постоянных удалений (Центральная долина, Калифорния) [по Шеврону]

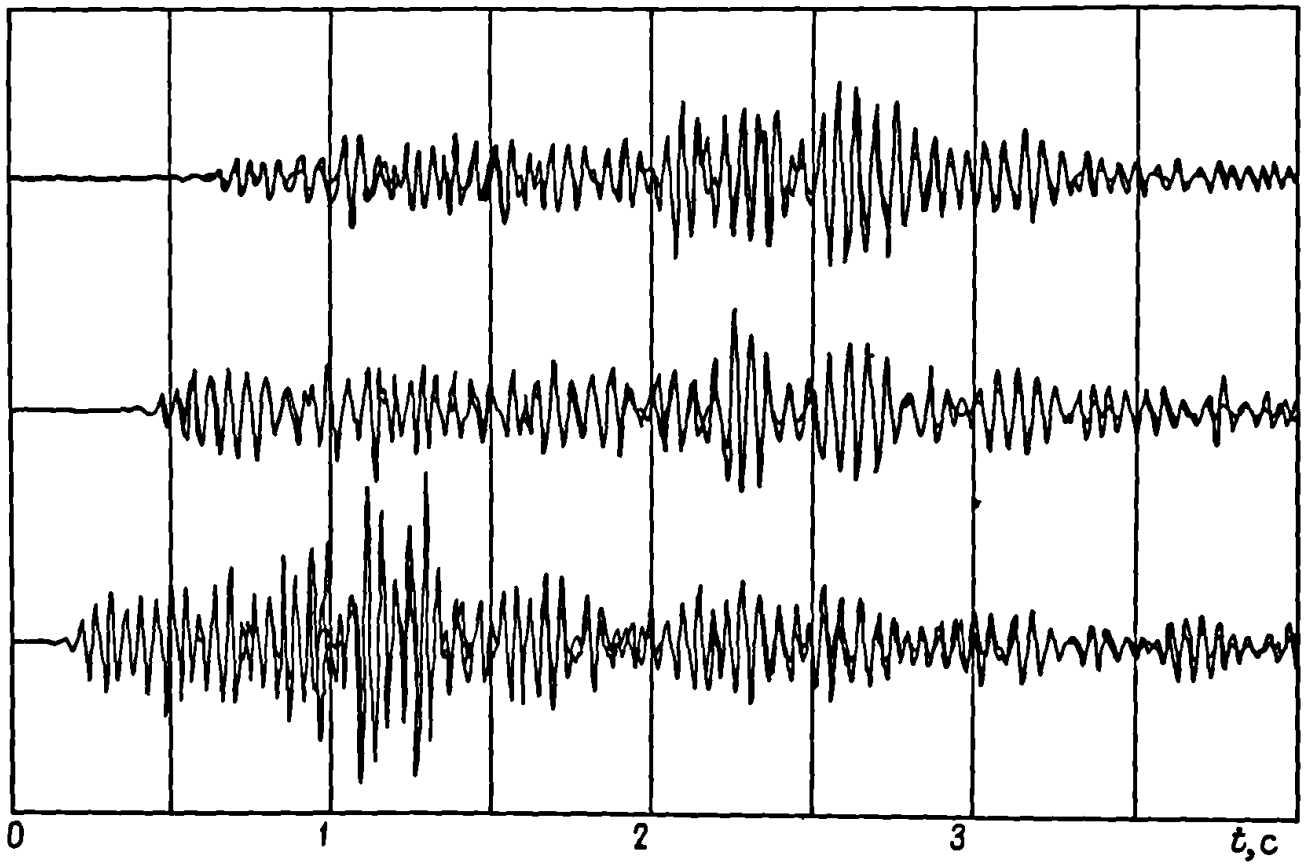



РИС. 85. Наложенные одна на другую взаимные сейсмотрассы

небольшими, хотя известно, что в данном районе скорости могут существенно изменяться по латерали.

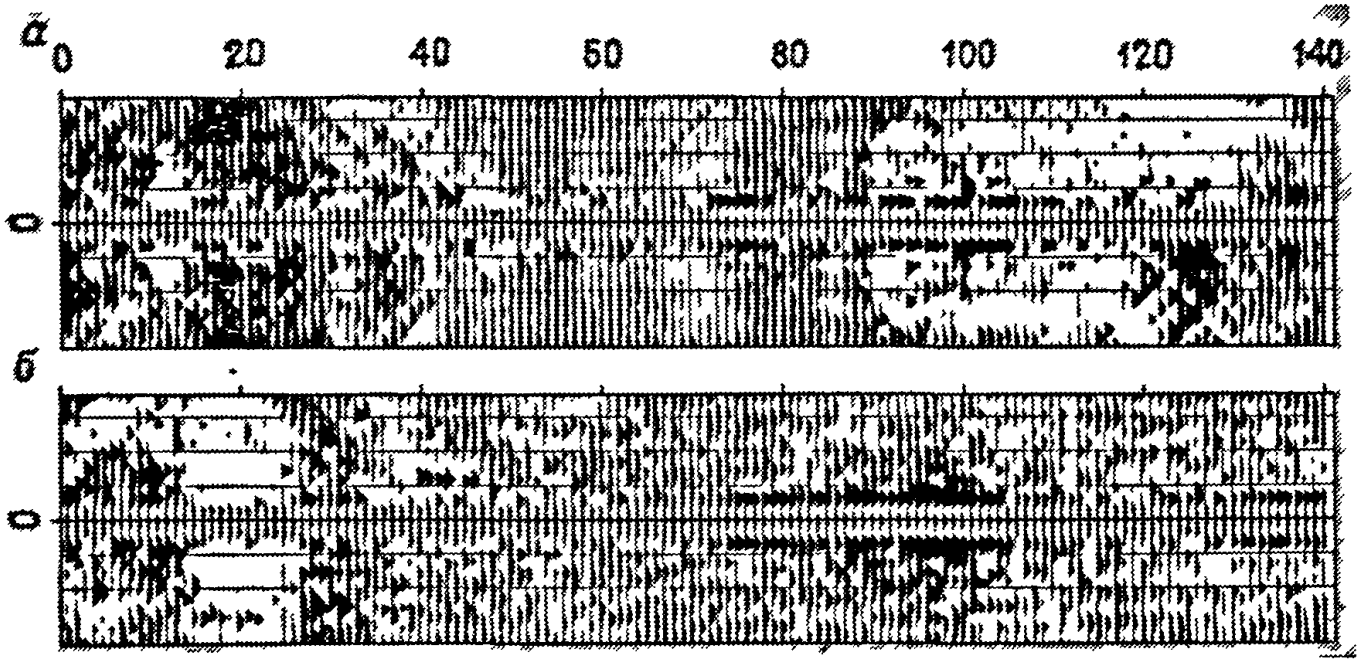



РИС. 86. Срезы на временах 1 (*а*) и 2,5 с (*б*)

На рис. 85 приведены три взаимные сейсмотрассы. Пары выбраны для малого, среднего и большого удалений. Можно убедиться, что взаимные сейсмотрассы обычно имеют одинаковую полярность, а зачастую и почти одинаковые амплитуды. (Показан лучший из трех подготовленных мной рисунков).

На каждом из срезов при постоянном времени (рис. 86) можно видеть соблюдение принципа взаимности для многих пар сейсмотрасс. Средняя точка перемещается по горизонтали на том же интервале, что и на рис. 84. Горизонтальная координата расстояния между ПВ и ПП отложена по вертикали. Вблизи от вибраторов регистрация не производилась, поэтому в середине образовался разрыв. С целью сведения к минимуму вариаций, не относящихся к данному вопросу, перед построением временных срезов были введены кинематические поправки. (В левой части рисунка находится пропущенный пункт возбуждения.) При просмотре кинофильма, составленного из кадров, аналогичных рис. 86, можно убедиться, что двухсторонняя симметрия, наблюдаемая на отдельных кадрах, характерна для всех времен. Отметим, однако, что наблюдается значительное отклонение от принципа взаимности на срезе, соответствующем 1 с (район средней точки № 120).

В лабораторных условиях принцип взаимности подтверждается в пределах погрешности измерений. Точность соблюдения может быть просто превосходной (см. пример Уайта в работе [53]). В полевых условиях справедливость принципа взаимности зависит от степени соблюдения необходимых условий. Морской пневмоисточник должен быть взаимным с морским сейсмоприемником. Применяемый при работах на суше источник ударного типа должен быть взаимен с вертикальным сейсмоприемником. В работе [52] приведены сведения о соблюдении

принципа взаимности в различных сейсмогеологических условиях. Оказывается, что небольшие погрешности в местоположении источников и приемников легко могут привести к расхождениям, превышающим видимые естественные отклонения от принципа взаимности. Приводятся также примеры того, что взаимные с теоретической точки зрения наблюдения в действительности оказываются менее взаимными, чем заведомо не удовлетворяющие принципу взаимности.

Геометрическая сложность строения среды не уменьшает степени применимости принципа линейности. По аналогии с последним утверждением, геометрическая сложность строения среды не уменьшает масштабов применения принципа взаимности. Принцип взаимности не применим к звуковым волнам при наличии ветра. Звук распространяется против ветра медленнее, чем по ветру. Но подобное влияние ветра часто встречается при полевых работах. После естественного ослабления отражений со временем начинают преобладать помехи, которые не подчиняются принципу взаимности. При дальнейшем изложении будем считать, что принцип взаимности в общем применим к анализу данных метода отраженных сейсмических волн.

### Концепция опускания наблюдений

Концепция излучающих границ позволяет связать сейсмические волны, наблюдаемые при нулевых удалениях с волнами на удалениях, возникающими в результате условного взрыва отражающей границы. Аналогия с излучающей границей обладает некоторыми ограничениями, связанными с латеральными изменениями скорости и многократными отражениями, и одним очень серьезным — концепция излучающих границ не дает ответа на вопрос о том, каким образом следует мигрировать сейсморазведочные материалы, полученные при ненулевых удалениях приемника от источника. Испытывается нужда в более широкой концепции построения сейсмических изображений.

Возьмем для начала полевые сейсмограммы по профилю, ориентированному вдоль оси $x$. Предположим, что число наблюдений бесконечно, причем каждое из них заключалось в размещении точечного источника в точке $s$ на оси $x$ и регистрации отражений с помощью сейсмоприемников, расположенных во всех возможных точках $g$ той же оси. Следовательно, в качестве наблюденных данных имеем восходящую волну, т. е. двухмерную функцию координат $s$ и $g$, например, $P(s, g, t)$. (Касающиеся рассматриваемого вопроса практические соображения о фактических расстояниях между источником и приемниками, а также длинах расстановок, будут рассмотрены позже в разделах 3.6 и 4.3.)

В предыдущих главах было показано, каким образом нужно продолжать вниз восходящую волну. Продолжение в нижнее полупространство восходящей волны по существу то же самое, что и продолжение вниз сейсмоприемников. Для операций продолжения безразлично, где возникают волны. Они могут начаться либо на излучающей границе, либо на поверхности наблюдений, а затем распространиться вниз и отразиться вверх.

Чтобы применить концепцию построения изображений по методу опускания наблюдений, нужно продолжить в нижнее полупространство как источники, так и приемники. Нам уже известно, как нужно продолжать вниз сейсмоприемники. Поскольку принцип взаимности разрешает менять местами приемники и источники, получается, что нам фактически известно, каким образом нужно продолжать вниз и источники.

Источники и приемники можно продолжать вниз на различные уровни и в процессе продолжения они могут находиться на разных уровнях, но в момент получения окончательного результата требуется, чтобы они были на одном и том же уровне. Другими словами, если $z_s$ — глубина нахождения источника, а $z_g$ — глубина нахождения сейсмоприемника, то при продолжении наблюдений вниз требуется, чтобы на всех уровнях $z = z_s = z_g$.

По определению, изображением отражающей границы в точке $(x, z)$ являются правильное отображение истинных значений интенсивности и полярности отражения, регистрируемого с помощью ближайшей пары источник — приемник. В пределе такой парой будут источник и приемник, расположенные в одной точке на отражающей границе. Время пробега у такого отражения будет равно нулю. Концепцию построения изображения методом опускания наблюдений можно кратко выразить в виде равенства:

$$\text{Образ} \quad (x, z) = \text{Волна} \quad (s = x, \quad g = x, \quad z, \; t = 0). \qquad (183)$$

При наличии достоверных данных, т. е. удовлетворяющих условиям, заложенным в метод продолжения в нижнее полупространство, при нулевом времени пробега энергия должна мигрировать в точку с нулевым расстоянием между источником и приемником. Изучение той энергии, которая не поддается миграции описанным выше образом, должно способствовать совершенствованию модели. Усовершенствование модели среды обычно сводится к уточнению пространственного распределения скоростей.

### Краткое описание параксиального волнового уравнения

В разделе 1.5 было получено уравнение для параксиальных волн. Предположение о единственности плоской волны озна-

чает, что время вступления волны задано с помощью одного числа $t(x, z)$. На плоскости с постоянным значением $z$, например на поверхности земли, параметр Снеллиуса $p$ поддается измерению. Он равен

$$\partial t/\partial x = \sin\theta/v = p. \tag{184а}$$

При работах в скважинах действует условие, согласно которому измерения должны производиться при постоянной $x$, а значение измерения по восходящей волне имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{\cos\theta}{v} = -\left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{184б}$$

Воспользуемся смещающимся по времени дифференциальным уравнением в частных производных и его решением $U$ в виде произвольной функциональной зависимости:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{185а}$$

$$U = f\left(t - \int_0^z \frac{\partial t}{\partial z}\,dz\right). \tag{185б}$$

Частные производные в уравнении (185а) берутся при постоянной координате $x$, т. е. точно так же, как и в уравнении (184б). После подстановки (184б) в (185а) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{186а}$$

При фурье-преобразовании волнового поля по $(x, t)$ производная $\partial/\partial t$ заменяется на $-i\omega$. По аналогии с этим у движущейся волны с ядром Фурье вида $\exp(-i\omega t + ik_x x)$ постоянство фазы означает, что $\partial t/\partial x = k_x/\omega$. С учетом последнего уравнение (186а) превращается в

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -i\omega\left(\frac{1}{v^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2}\right)^{1/2} U. \tag{186б}$$

Решения уравнения (186б) согласуются с решениями скалярного волнового уравнения до тех пор, пока $v$ не станет функцией $z$ и в этом случае у скалярного волнового уравнения будет два решения в виде восходящей и падающей волн. В то же время (186б) имеет только восходящие решения. В гл. 2 мы научились переходить в область латеральных координат путем замены $ik_x$ на $\partial/\partial x$. Получающееся в результате уравнение применяется для суперпозиции многочисленных локально-плоских волн и для учета латеральных вариаций скоростей $v(x)$.

### Уравнение с двумя квадратными корнями в пространстве источник — приемник

Пусть сейсмоприемники опущены на расстояние $dz_g$ внутрь земной среды. Изменение времени пробега наблюдаемой восходящей волны подчиняется равенству

$$\frac{\partial t}{\partial z_g} = -\left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial t}{\partial g}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{187а}$$

Допустим, что источники были инициированы на глубине $dz_s$ вместо $z=0$. Тогда по аналогии с предыдущим получим

$$\frac{\partial t}{\partial z_s} = -\left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{187б}$$

При уравнениях (187а) и (187б) должен быть отрицательный знак, так как при перемещении приемников или источников вниз время пробега уменьшается.

Опустим источники и приемники одновременно вниз на одинаковую глубину по вертикали $dz = dz_g = dz_s$. Изменение времени пробега равно сумме (187а) и (187б), т. е.

$$dt = \frac{\partial t}{\partial z_g} dz_g + \frac{\partial t}{\partial z_s} dz_s = \left(\frac{\partial t}{\partial z_g} + \frac{\partial t}{\partial z_s}\right) dz \tag{188}$$

или

$$\frac{\partial t}{\partial z} = -\left\{\left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial t}{\partial g}\right)^2\right]^{1/2} + \left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{189}$$

Последнее выражение производной $\partial t/\partial z$ можно подставить в уравнение (185а):

$$\frac{\partial U}{\partial z} = +\left\{\left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial t}{\partial g}\right)^2\right]^{1/2} + \left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{190}$$

Трехмерное преобразование Фурье превращает восходящую волну $u(t, s, g)$ в функцию вида $U(\omega, k_s, k_g)$. Выразив уравнение (190) в координатах Фурье, получим

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -i\omega\left\{\left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{k_g}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} + \left[\frac{1}{v^2} - \left(\frac{k_s}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}\right\} U. \tag{191}$$

Вернемся к уравнению (191), один из квадратных корней которого представляет собой косинус угла подхода волны к сейсмоприемникам, деленный на скорость в точке приема, а другой — косинус угла выхода волны из источника, деленный на скорость в районе пикета возбуждения. Из предыдущих глав нам известно, как следует переходить в область латеральных пространственных координат путем замены $ik_g$ на $\partial/\partial g$ и $ik_s$ на

$\partial/\partial s$. Чтобы учесть изменения скорости по латерали $v(x)$, следует различать скорость в районе источника и скорость в районе приемников. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\left\{\left[\left(\frac{-i\omega}{v(g)}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial g^2}\right]^{1/2}+\left[\left(\frac{-i\omega}{v(s)}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right]^{1/2}\right\}U. \tag{192}$$

Уравнение (192) известно как уравнение с двумя квадратными корнями в пространстве источник — приемник. Может быть, имеет больше смысла называть его уравнением опускания наблюдений, так как оно как бы опускает вниз одновременно источники и приемники. Вспомнив раздел учебника, посвященный расщеплению и полному разделению (раздел 2.4), замечаем, что операторы с двумя квадратными корнями обладают коммутативным свойством, выражающимся в том, что $v(s)$ перестанавливается с $\partial/\partial g$. Поэтому совершенно безразлично, раздельно или вместе продолжать вниз источники и приемники.

### Уравнение с двумя квадратными корнями в пространстве «средняя точка — удаление»

Преобразовав ДКК-уравнение к виду, соответствующему пространству с координатами «средняя точка — расстояние между источником и приемником», можно выделить из него знакомую нам часть, описывающую миграционное преобразование при нулевом удалении, а также поправки за удаление от источника. Преобразование параметров наблюдения $(g, s)$ в параметры интерпретации $(y, h)$ производится с помощью соотношений

$$y=(g+s)/2, \tag{193а}$$

$$h=(g-s)/2. \tag{193б}$$

Время пробега волны $t$ можно параметризовать в пространствах $(g, s)$ либо $(y, h)$. В этом случае дифференциальные соотношения получаются с помощью цепного правила вычисления производных:

$$\frac{\partial t}{\partial g}=\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial g}+\frac{\partial t}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial g}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial h}\right), \tag{194а}$$

$$\frac{\partial t}{\partial s}=\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial t}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial h}\right). \tag{194б}$$

Познакомившись с тем, как преобразуются приращения из пространства «источник — приемник» в пространство с координатами «средняя точка — расстояние между приемником и источником», убедимся, что пространственные частоты преобразуются в основном таким же путем. Ясно, что сейсмические

наблюдения можно переводить из пространства $(s, g)$ в пространство $(y, h)$ с помощью равенств (193) и в пространство $(k_y, k_h)$ посредством фурье-преобразования. Возникает вопрос о том, какой вид примет уравнение с двумя квадратными корнями (191), если его выразить через пространственные частоты $(k_y, k_h)$. Определим полевые сейсморазведочные данные в обеих координатных системах, как

$$U(s, g)=U'(y, h). \tag{195}$$

В результате будет введена новая математическая функция $U'$ с тем же физическим смыслом, что и $U$, но с более удобной возможностью машинного расчета значений $(y, h)$, чем $(s, g)$. Применив цепное правило отыскания частных производных к уравнению (195), получим

$$\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial U'}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial U'}{\partial h}, \tag{196а}$$

$$\frac{\partial U}{\partial g}=\frac{\partial y}{\partial g}\frac{\partial U'}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial U'}{\partial h}. \tag{196б}$$

С учетом соотношений (193) уравнение (196) запишется как

$$\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U'}{\partial y}-\frac{\partial U'}{\partial h}\right), \tag{197а}$$

$$\frac{\partial U}{\partial g}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U'}{\partial y}+\frac{\partial U'}{\partial h}\right). \tag{197б}$$

В области фурье-преобразований, где $\partial/\partial x$ переходит в $ik_x$, после сокращения $i$ и $U=U'$ уравнение (197) принимает вид

$$k_s=\frac{1}{2}(k_y-k_h), \tag{198а}$$

$$k_g=\frac{1}{2}(k_y+k_h). \tag{198б}$$

Уравнение (198) представляет собой фурье-преобразование уравнения (197). Подставив (198) в (191), получим уравнение миграционного преобразования с двумя квадратными корнями в координатах «средняя точка — удаление»:

$$\frac{\partial}{\partial z}U=-i\frac{\omega}{v}\left\{\left[1-\left(\frac{vk_y+vk_h}{2\omega}\right)^2\right]^{1/2}+\left[1-\left(\frac{vk_y-vk_h}{2\omega}\right)^2\right]^{1/2}\right\}U. \tag{199}$$

(Вывод этого уравнения являлся основной целью данного раздела.)

Уравнение (199) играет роль отправного для многих видов анализа сейсмограмм общей средней точки. Ниже даются некоторые удобные определения, упрощающие его внешний вид:

$$G = vk_g/\omega, \tag{200а}$$

$$S = vk_s/\omega, \tag{200б}$$

$$Y = vk_y/2\omega, \tag{200в}$$

$$H = vk_h/2\omega. \tag{200г}$$

В гл. 1 было показано, что величину $vk_x/\omega$ можно проинтерпретировать как угол выхода волны. Следовательно, согласно новым определениям, $S$ и $G$ являются синусами углов выхода и подхода луча. Когда синусы достигают своих предельных значений $\pm 1$, они соответствуют наибольшим наклонам в координатах $(s, t)$ и $(g, t)$. По аналогии, функцию $Y$ можно истолковать как угловой коэффициент горизонтов, наблюдаемых на сейсмических разрезах. Величина $H$ равна приращению времени, наблюдаемому на сейсмограмме общей средней точки. С учетом последних определений уравнение (199) становится менее громоздким:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{i\omega}{v}\left[\sqrt{1-(Y+H)^2}+\sqrt{1-(Y-H)^2}\right]U. \tag{201}$$

Большинство современных процедур миграционного преобразования до суммирования по ОГТ можно проинтерпретировать с помощью уравнения (201). При его последующем анализе мы объясним ограничения, присущие традиционным способам обработки, и предложим меры по их совершенствованию.

**Упражнение**

Преобразуйте уравнение (199) таким образом, чтобы оно учитывало различие в скоростях около источника и приемника.

## 3.4. Смысл уравнения с двумя квадратными корнями

Уравнение с двумя квадратными корнями, полученное в предыдущем разделе, нелегко понять, так как оно представляет собой оператор, действующий в четырехмерном пространстве $(z, s, g, t)$. Мы будем изучать его практически, предполагая, что латеральные вариации скорости отсутствуют. В качестве исходных возьмем уравнения

$$\frac{dU}{dz} = \frac{-i\omega}{v}\left(\sqrt{1-G^2}+\sqrt{1-S^2}\right)U, \tag{202а}$$

$$\frac{dU}{dz} = \frac{-i\omega}{v}\left(\sqrt{1-(Y+H)^2}+\sqrt{1-(Y-H)^2}\right)U. \tag{202б}$$

### Миграция при нулевом удалении $(H=0)$

Один из способов ограничения уравнения (202б) состоит в том, чтобы положить $H=0$. Тогда оба квадратных корня станут

одинаковыми и их можно будет объяснить, получив знакомое параксиальное уравнение

$$\frac{dU}{dz} = -i\omega \frac{2}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2 k_y^2}{4\omega^2}}\, U. \tag{203}$$

В обоих частях уравнения (203), где появляется скорость сейсмической волны в породе, она делится на 2. Как известно, скорость в породах нужно делить пополам для того, чтобы полевые наблюдения соответствовали модели излучающих границ. Поэтому, полагая $H=0$, приходим к тому же уравнению миграционного преобразования, которое использовалось в гл. 1. Другими словами, приравнивая $H$ к нулю, мы отождествляем концепцию опускания наблюдений и концепцию излучающих границ.

### Суммирование при нулевом наклоне $(Y=0)$

Когда мы имеем дело с координатой удаления $h$, обычно делаем предположение о том, что среда горизонтально слоистая, и поэтому результаты полевых наблюдений не должны зависеть от координаты средней точки $y$. В случае горизонтально слоистой модели среды фурье-преобразование всех наблюденных данных по координате $y$ обращается в нуль всегда, за исключением $k_y=0$, или, другими словами, $y=0$. И снова оба квадратных корня в уравнении (202) становятся одинаковыми, а результирующее уравнение — параксиальным:

$$\frac{dU}{dz} = -i\omega \frac{2}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2 k_h^2}{4\omega^2}}\, U. \tag{204}$$

Воспользовавшись последним уравнением для продолжения гиперболических осей синфазности вниз с поверхности земли, обнаруживаем, что они с глубиной сокращаются до тех пор, пока не будет достигнута надлежащая глубина, на которой фокусировка оказывается наилучшей. Сказанное демонстрируется рис. 87.

Наилучшая фокусировка волн достигается при нулевом удалении приемника от источника. Фокус представляет собой продолженное вниз до отражающей границы наблюдение. Отражение имеет наибольшую амплитуду при нулевом значении времени пробега, т. е. когда источник и приемник совместились на отражающей границе. Один из способов подавления помех — определение значения амплитуды при нулевом удалении в момент $t=0$, без учета других удалений. (Фактически это один из способов определения помехи.) В первом приближении указанный процесс сводится к традиционной процедуре суммирования по гиперболическим траекто-

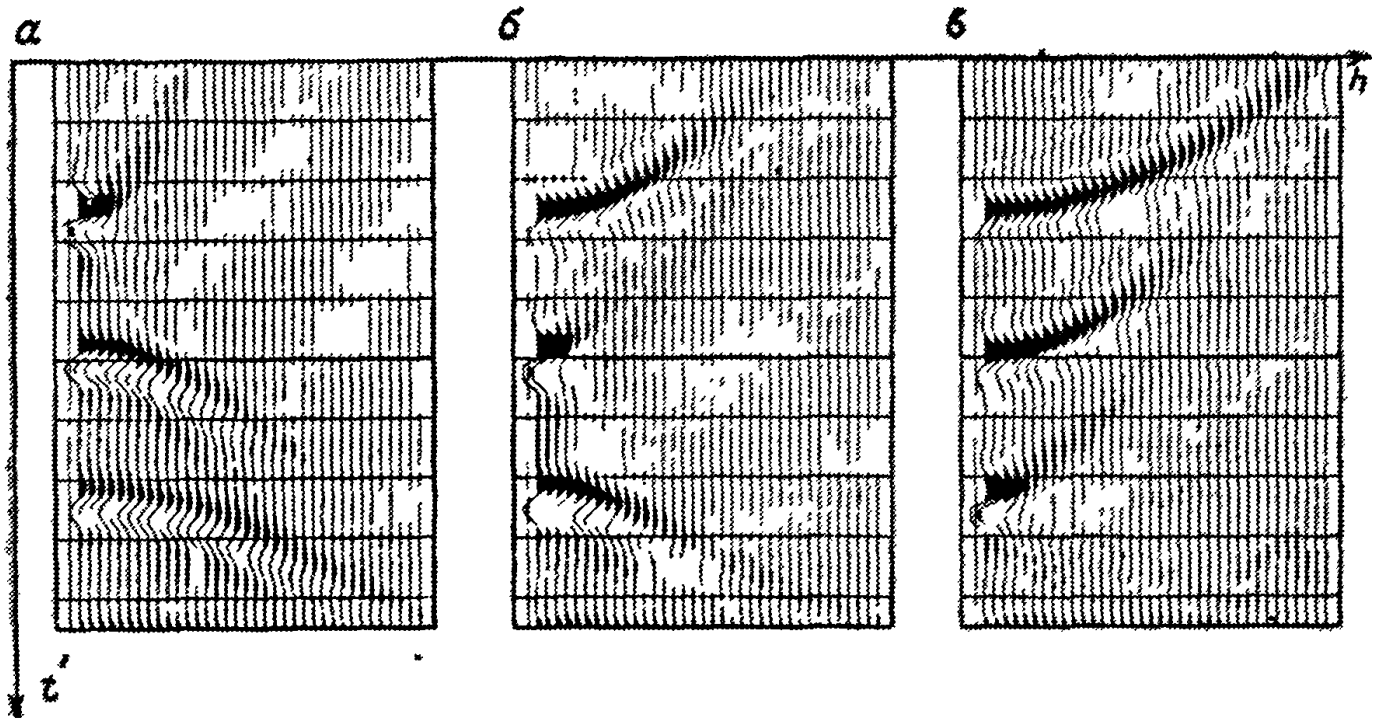



РИС. 87. Сейсмограммы ОСТ для трехслойной модели. На кадрах показаны результаты продолжения вниз на последовательные глубины, на которых достигается наилучшая фокусировка отражений при $z=vt_1$ (*а*), $z=vt_2$ (*б*), $z=vt_3$ (в); $t'=t+z\,v$

риям, выполняемой по исходным данным. Естественно, что результат суммирования будет наилучшим в том случае, когда используемая при продолжении вниз скорость совпадает со скоростью в среде. Ниже для определения скоростей будут использоваться удаленные наблюдения.

### Традиционная обработка как раздельная аппроксимация

Определим оператор с двумя квадратными корнями (ДКК-оператор) как оператор, заключенный в скобки в уравнении (202б):

$$\text{ДКК}(Y, H)=\sqrt{1-(Y-H)^2}+\sqrt{1-(Y+H)^2}. \qquad (205)$$

В пространстве Фурье продолжение вниз производится с помощью оператора $\exp\left(i\omega v^{-1}\text{ДКК}z\right)$.

При работе с таким оператором возникает серьезное затруднение — он не делится на слагаемые-операторы, один из которых был бы оператором в пространстве удалений, а другой — в пространстве средних точек. В данном контексте понятие «неделимости» означает, что в разложении в ряд Тейлора функции (205) содержатся члены вида $Y^2H^2$. Такие члены ряда нельзя выразить в виде суммы функций от $Y$ и от $H$. Свойство неделимости неприемлемо для обработки сейсморазведочных материалов и означает, что процедуры миграционного преобразования и суммирования ОГТ должны выполняться одновременно, а не последовательно. Единствен-

ным путем восстановления абсолютной разложимости оператора (205) на слагаемые является возврат в пространство с координатами $S$ и $G$. (Последнее связано с отходом от традиционных подходов к обработке. Позже мы вернемся к этому.)

Рассмотрим вкратце общие вопросы проблемы разделения операторов на слагаемые. Очевидно, достичь раздельной аппроксимации оператора $\sqrt{1-X^2-Y^2}$ можно, разлагая его в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием всех взаимных членов. Более хитроумным приближением следует считать разложение вида $\sqrt{1-X^2}+\sqrt{1-Y^2}-1$, которое точно совпадает со всеми значениями $Y$, когда $X=0$, и со всеми значениями $X$, когда $Y=0$. Применив сказанное к ДКК-оператору, получаем

$$\text{РАО}(Y, H)=2+[\text{ДКК}(Y, 0)-2]+[\text{ДКК}(0, H)-2], \qquad (206а)$$

$$\text{РАО}(Y, H)=2[1+(\sqrt{1-Y^2}-1)+(\sqrt{1-H^2}-1). \qquad (206б)$$

Здесь аббревиатурой РАО обозначена «раздельная аппроксимация оператора». Заметим, что при $H=0$ уравнение (206) превращается в оператор с двумя квадратными корнями. При $Y=0$ оно также превращается в ДКК-оператор. Лишь когда $H$ и $Y$ не равны нулю, уравнение (206) отличается от уравнения (205).

Разделение уравнения (206) на сумму трех операторов обладает преимуществом, аналогичным тому, которое обеспечивается двухмерным ядром Фурье вида $\exp(ik_y y+ik_h h)$, имеющим фазовый спектр, который можно представить в виде суммы двух частей. Последнее означает, что под интегралом Фурье могут быть либо $y$, либо $h$. Поэтому продолжение вниз с помощью уравнения (206) можно производить в области с координатами $(k_h, k_y)$, что следует из (202б), либо же можно обратиться к преобразованию Фурье в области с координатами $(h, k_y)$ $(k_h, y)$ или $(y, h)$, прибегнув к соответствующим «вложенным операциям».

Удобно дать уже известные наименования всем трем слагаемым уравнения (206б). Первое связано с преобразованием времен в глубины (ВГ), второе с миграцией (МИГ) и третье — с введением нормальных кинематических поправок (КИН):

$$\text{РАО}(Y, H)=\text{ВГ}+\text{МИГ}(Y)+\text{КИН}(H). \qquad (206в)$$

Аппроксимацию (206) можно истолковать как «стандартную обработку». Первым этапом при стандартной обработке сейсморазведочных данных является ввод нормальных кинематических поправок. Содержащийся в (206) оператор ввода кинематических поправок продолжает в нижнее полупространство все значения удалений на поверхности земли до всех

значений удалений на глубине. Выбор нулевого удаления сводится к отбрасыванию всех прочих удалений. Как и в случае суммирования ОГТ по удалениям, выбор нулевого удаления уменьшает объем рассматриваемых данных.

Как правило, отброшенные удаления не подвергаются миграционному преобразованию. (Как вариант, совершенная процедура изменения скоростей суммирования ОГТ после миграции связана с миграцией нескольких удалений, близких к нулевому.)

Поскольку все слагаемые в РАО-операторе можно менять местами, было бы неэкономно пользоваться им для миграции всех удалений перед суммированием ОГТ. Получающийся при этом результат должен быть идентичным результату миграционного преобразования после суммирования ОГТ.

### Различные значения условия $H=0$

Вспомним различные виды оператора приращения $2H/v$: расчет лучевой траектории $dt/dh$; Фурье $k_h/\omega$; дифференциальное уравнение в частных производных $\partial_h^t = \int_{-\infty}^{t} dt \frac{\partial}{\partial h}$.

Из принципа взаимности следует, что время пробега отраженной волны является симметричной функцией удаления и поэтому производная $dt/dh$ обращается в нуль в точке $h=0$. В данном контексте кажется вполне уместным применить уравнение (203) к разрезам при нулевых удалениях. Точнее говоря, лучевое выражение $dt/dh$ строго применимо только при наличии одиночной плоской волны. Сферические фронты волн образуются путем суперпозиции плоских волн. В этом случае фурье-интерпретация величины $H$ становится более подходящей. Если положить $\omega=0$, то это будет равнозначно выбору составляющей с нулевой частотой, т. е простого интеграла сейсмической трассы. Если положить $k_h=0$, то это будет равнозначно выбору составляющей с нулевой пространственной частотой, т. е. интеграла по удалениям. Традиционное суммирование ОГТ можно определить как интегрирование (или суммирование) по удалениям вдоль гиперболической оси синфазности. Простое приравнивание $k_h=0$ представляет собой выбор горизонтальной гиперболической оси синфазности, т. е. годографа с бесконечно большой скоростью. При таком интегрировании основной вклад вносит вершинная часть гиперболического годографа наблюденных данных, т. е. та его часть, где оси синфазности наблюдений касаются горизонтальной линии интегрирования. (Исторически получилось так, что подобную сумму данных часто называют вертикальной.) Боль-

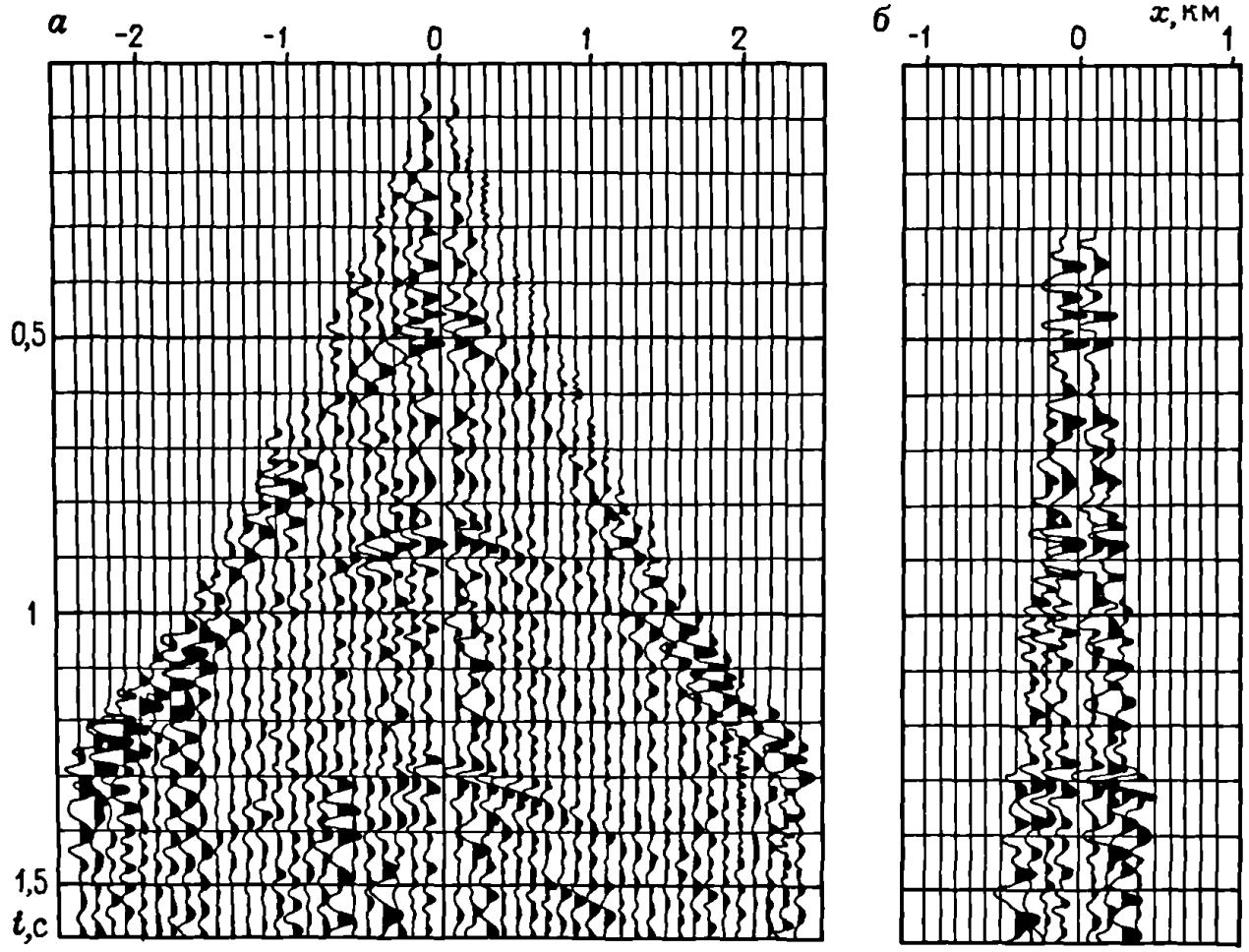



РИС. 88. Сейсмограмма, полученная при наземных работах (*а*) и соответствующая ей зона Френеля (*б*)

шая часть полного интеграла определяет центральную зону Френеля, понятие о которой дано в разделе 1.2. На рис. 88 изображена зона Френеля, извлеченная из наземной полевой сейсмограммы. Судя по рис. 88, в интервале около 1 с наблюдаются несколько частот. В интервале между $t=1{,}0$ с и $t=1{,}1$ с наблюдаются два периода низкочастотных колебаний и около пяти высокочастотных. Самые высокие частоты определяют предел сейсмической разрешающей способности. В интервале между 0 и 1 с наблюдаются около 100 полупериодов высокочастотных колебаний, характеризующих односекундные периоды сейсмических колебаний. Это значит, что на любом времени наивысшая гармоника, имеющая значимую пространственную коррелируемость, имеет полупериод, равный приблизительно 1 100 полного времени пробега. Можно сказать, что коэффициент добротности осадочного чехла земной коры $Q$ часто принимает значения, близкие к 100. Поэтому угол, о котором мы упоминали выше, равен $\cos 8 = 0{,}99$.

С теоретической точки зрения главными различиями между разрезом при нулевых удалениях и вертикальной суммой являются амплитудные и небольшой фазовый сдвиг. Маловероятно, что на практике результаты их миграции будут заметно различаться. Было бы прекрасно, если бы нам удалось отыскать

уравнение для продолжения вниз таких данных, которые отсуммированы со скоростями, отличающимися от бесконечной.

Приравнивание $H=0$ при работе с дифференциальными уравнениями в частных производных идентично условию независимости скорости от горизонтальной координаты при работе в области Фурье. В иных случаях дифференциальные уравнения в частных производных обеспечивают несколько более общий подход. Конкретизируя рассматриваемый вопрос, но избегая при этом когерентной интерференции, уравнение (202) можно выразить в виде 15-градусного миграционного преобразования в запаздывающих пространственных координатах:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{v}{-i\omega 8}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial h^2}\right)\right]U'=0. \tag{207}$$

Проинтегрируем последнее уравнение по координате удаления $h$. Интеграл коммутативен с дифференциальными операторами. Учтем, что интеграл производной равен разности значений функции при верхнем и нижнем пределах, и получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{v}{-i\omega 8}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\int U dh\right)+\frac{v}{-i\omega 8}\frac{\partial U}{\partial h}\Bigg|_{h=-\infty}^{h=+\infty}=0. \tag{208а}$$

Данная волна должна обратиться в нуль на бесконечном удалении. В нуль обратится и ее производная по горизонтальному удалению. Итак, последний член в (208а) должен обратиться в нуль. Следовательно, условие $H=0$ означает, что

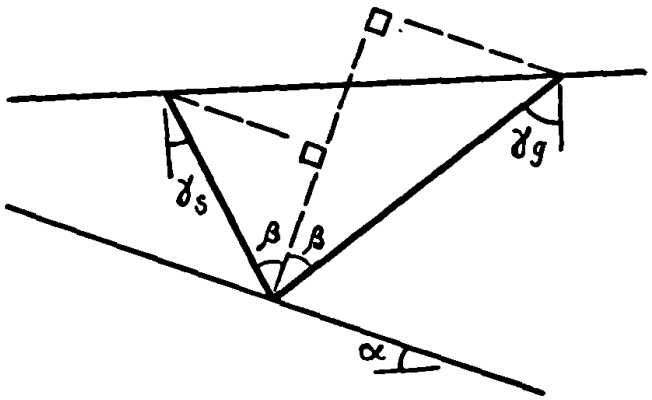
(Параксиальный оператор) (вертикальная сумма) $=0$. (208б)

Затруднение при выводе уравнения (208б) заключалось в том, что дважды предполагалась независимость скорости от координаты удаления — первый раз, когда из уравнения (207) был исключен член тонкой линзы и второй, когда оператор интегрирования по координате удаления был заменен на операцию умножения на скорость. Если скорость зависит от горизонтальной координаты $x$, значит она обязательно зависит от координат средней точки и половины расстояния между приемником и источником. В заключение скажем, что если в пределах зоны Френеля скорость меняется медленно, то условие $H=0$ обеспечивает применимость уравнения для продолжения в нижнее полупространство вертикально отсуммированных наблюдений.

### Косинусные поправки Клейтона

Существует тенденция связывать синус угла наклона отражающей границы с координатой $y$, а синус угла падения

РИС. 89. Геометрические соотношения для случая наклонного пласта. Отметим, что биссектриса угла 2β не проходит через среднюю между *g* и *s* точку




приемника от источника — с координатой $H$. Несмотря на то, что сказанное в общем справедливо, есть необходимость в существенной поправке. Рассмотрим наклонную отражающую границу (рис. 89). Угол ее падения обозначим через α, а удаление приемника от источника выразим через так называемый угол удаления β. Клейтон показал, и это будет доказано ниже, что

$$Y = \sin\alpha\cos\beta, \tag{209а}$$

$$H = \sin\beta\cos\alpha. \tag{209б}$$

При малых положительных или отрицательных углах значениями косинусов можно пренебречь и тогда можно связывать синус угла падения границ с $Y$, а синус угла удаления с $H$. При углах умеренной величины необходимо вносить косинусную поправку. При углах, превышающих 45 , чувствительности меняются на обратные и традиционные представления становятся прямо противоположными истине. Читатель должен остерегаться тех неформальных рассуждений, которые просто связывают $Y$ с углом падения границы, а $H$ — со скоростью. «Полосы Ларнера», демонстрировавшиеся в разделе 3.2, являются примером смешения эффектов от угла наклона границы и удаления приемника от источника. В самом деле, при больших углах наклона границ обычную процедуру определения скоростей по $H$ следует каким-то образом изменить, чтобы использовать для этих целей $Y$.

Докажем справедливость соотношений (209). Угол выхода волны из источника обозначим через $\gamma_s$, а угол падения волны на сейсмоприемник через $\gamma_g$. Сначала свяжем $\gamma_s$ и $\gamma_g$ с α и β. Сложив углы меньшего из построенных треугольников, получаем

$$(\pi/2 - \gamma_s - \alpha) + \beta + \pi/2 = \pi, \qquad \gamma_s = \beta - \alpha. \tag{210а}$$

Сложив углы большего треугольника, получим

$$\gamma_g = \beta + \alpha. \tag{210б}$$

Чтобы правильно связать углы в среде α и β с градиентами времени на поверхности земли $dt/ds$ и $dt/dg$, нужно осторожно

обращаться со знаками, помня, что время пробега волны растет при перемещении сейсмоприемника вправо и уменьшается при перемещении вправо пунктов возбуждения. С учетом уравнений (198) и (200) из раздела 3.3 и определения кажущихся углов $Y$ и $H$, получим

$$Y-H=S=\frac{vk_s}{\omega}=v\frac{dt}{ds}=-\sin\gamma_s=\sin(\alpha-\beta),$$

$$Y+H=G=\frac{vk_g}{\omega}=v\frac{dt}{dg}=+\sin\gamma_g=\sin(\alpha+\beta).$$

Сложив последние соотношения и затем вычтя одно из другого, а также воспользовавшись формулой для суммы углов из тригонометрии, получим выражение для косинусных поправок Клейтона (209):

$$Y=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta,$$

$$H=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)=\sin\beta\cos\alpha.$$

### Суммирование волн Снеллиуса и направленное суммирование ОСТ

Если приравнять к нулю угол выхода волны из источника, то уравнение с двумя квадратными корнями превратится в уравнение с одним квадратным корнем. Смысл условия $S=0$ состоит в том, что $k_s=0$, или, что то же самое, сейсморазведочные данные необходимо просуммировать по пунктам взрыва $s$, но без смещения во времени. Такое суммирование имитирует падающую плоскую волну. Оно основано на следующем принципе сейсмического изображения: наблюдать восходящую волну нужно в момент вступления падающей (см. раздел 5.7). Как будет объяснено в разделах 5.2 и 5.3, с целью имитации падающей волны Снеллиуса нужно $S$ положить равной некоторой постоянной.

Волна Снеллиуса является обобщением распространяющейся вниз плоской волны при косом падении. Взрывы производятся не одновременно, а последовательно с интервалом $dt/ds=S/v$. Ее можно имитировать и путем суммирования полевых сейсмограмм на плоскости $(t, s)$ по направлениям с угловым коэффициентом, равным $dt/ds$. Если приравнять $S$ некоторой постоянной, например, положить $S=vdt/ds$, то уравнение с двумя квадратными корнями будет сведено к параксиальному волновому, т. е. именно к такому, которое нужно для продолжения в нижнее полупространство падающей волны Снел-

лиуса. Волны Снеллиуса можно рассчитать для различных значений лучевого параметра $p=dt/ds$. Каждую из них можно затем подвергнуть миграционному преобразованию и изобразить, а изображения просуммировать по параметру $p$. Подобные идеи возникали еще до появления уравнения с двумя квадратными корнями, но так и не обрели популярности.

Трудности, связанные с моделированием волн Снеллиуса, заключаются в том, что волновое поле обычно дискретизируется приемной расстановкой с большим интервалом дискретизации, причем длина расстановки сейсмоприемников никогда не бывает сравнимой с расстояниями, на которые распространяются волны. Изощренные способы интерполяции и экстраполяции наблюденных данных потерпели неудачу по той простой причине, что на сейсмограмме общей точки приема горизонтальная координата вершины гиперболической оси синфазности не обязательно должна быть нулевой. В случае наклонных слоев минимальные времена регистрации отраженной волны часто наблюдаются за пределами приемной расстановки. Поэтому надежность обработки данных в сильной степени зависит от отсутствующих наблюдений.

Указанные выше осложнения дают возможность проводить направленное суммирование по способу средней точки, т. е. при соблюдении условия $H=pv$. (Более полное изложение способа направленного суммирования дается в разделе 5.2.) На сейсмограмме общей средней точки гиперболические оси синфазности проходят через точки с нулевыми координатами удаления, имея нулевые угловые коэффициенты. Отсортированные указанным способом сейсмотрассы становятся более удобными для интерполяции и экстраполяции, выполнение которых необходимо при интегрировании по различным направлениям. Положив $H=pv$, получим

$$k_z=-\frac{\omega}{v}\left[\sqrt{1-(Y+pv)^2}+\sqrt{1-(Y-pv)^2}\right]. \qquad (211)$$

Указанная подстановка не свела ДКК-уравнение к параксиальному, но упростила задачу до вида, который уже поддается решению известными приемами, например, методами Столта или фазового сдвига. Исследование последнего подхода можно найти в работе [107].

### О продолжении поля вниз в пространстве с координатами $(S, G)$

Если бы скоростной разрез был известен и единственная задача состояла бы в миграционном преобразовании, то не существовало бы серьезных причин, препятствующих продолжению вниз в пространстве $(S, G)$. В действительности же

скорости бывают известны недостаточно точно. Чувствительность миграционного преобразования к погрешностям в значениях скоростей быстро растет с ростом угла, а угловая точность и есть то самое предполагаемое достоинство пространства с координатами $(S, G)$. Более того, конечная протяженность приемной расстановки и тенденция к возникновению искажений, связанных с недостаточно частой дискретизацией по горизонтальной координате, создают при миграции в пространстве $(S, G)$ те же проблемы, которые приходится преодолевать при получении сумм Снеллиуса. Не вижу обоснованных причин, по которым миграция в пространстве $(S, G)$ должна быть в чем-то лучше направленного суммирования ОСТ, а положение дел с искажениями дискретизации и ограниченностью полевых наблюдений выглядит хуже. Ниже в данной главе будут изложены менее амбициозные и более практичные подходы к решению задачи миграционного преобразования наблюдений, полученных на больших удалениях от источника.

В то же время наличие латеральных вариаций скоростей может сделать необходимым применение миграции в пространстве с координатами $(s, g)$.

И еще один довод в пользу перехода в пространство источник — приемник состоит в том, что взрывы производятся на больших расстояниях друг от друга. В таком случае данные будут искажены из-за неоптимальности частоты дискретизации как по пространству средней точки, так и по пространству удаления (см. раздел 5.7).

## 3.5. Суммирование ОГТ и скоростной анализ

Суммирование ОГТ по координате удаления по гиперболическому закону представляет собой, может быть, самый важный процесс машинной обработки, применяемый в сейсморазведке. Он более важен, чем миграционное преобразование, так как переводит базу данных из объема с координатами $(s, g, t)$ на плоскость с координатами $(y, t)$. В настоящее время мало кто из сейсморазведчиков-интерпретаторов имеет в своем распоряжении полевые сейсмозаписи или рассчитанные на компьютере материалы киносейсмики, поэтому большинство вынуждено работать с разрезами ОГТ. Миграционное преобразование просто переводит одну плоскость в другую. Более того, оно имеет тот недостаток, что иногда осложняет волновую картину из-за недоучета латеральных изменений скорости в ВЧР и многократных отражений. Суммирование ОГТ тоже может привести к усложнению волновой картины, но в районах с плохим качеством полевых материалов вообще ничего нельзя увидеть до тех пор, пока последние не будут отсуммированы по ОГТ. В дополнение к другим преимуществам, суммирование

ОГТ дает в качестве побочного продукта оценки значений скоростей распространения сейсмических волн в горных породах.

Суммирование ОГТ выполнялось и продолжает выполняться на основе лучевой теории почти повсеместно. В то же время миграционное преобразование чаще выполняется методами, основанными на волновом уравнении, т. е. методами фурье-преобразования и конечных разностей. И миграционное преобразование, и суммирование ОГТ являются процессами распознавания гиперболических осей синфазности на поле сейсмограммы. Преимущества методов миграции, основанных на волновом уравнении, многочисленны. Не должны ли эти преимущества проявляться также и при суммировании ОГТ? Так вроде бы должно и быть, но вся современная практика сейсморазведки не подтверждает этого предположения. Причины пока не ясны. Поэтому заключительная часть данного раздела была бы больше к месту в научной монографии с шутливым названием: «Теория, которая скоро будет разработана». Современные идеи определения скоростей изложены в разделах 5.0—5.4. Методы суммирования ОГТ и определения скоростей, в основе которых лежит волновое уравнение, весьма хитроумны. Возможно, они еще не прошли достаточного опробования, или же просто алгоритм суммирования несовершенен. Читатель волен строить на этот счет собственные догадки, а время рассудит.

Одна из возможных причин того, что многие теоретические разработки не находят постоянного применения в практике сейсморазведки, состоит в том, что суммирование ОГТ с целью устранения избыточности, может быть, более правильно рассматривать как статистическую, а не физическую задачу. Чтобы учесть и такой поворот дела, автор уделил внимание и так называемой «кинематике волнового уравнения», т. е. одному из путей выполнения статистического анализа после продолжения в нижнее полупространство. Другая из возможных причин связана с тем, что многие задачи можно более гибко решать с помощью лучевых методов, а не методов, основанных на волновом уравнении. На этот случай в книгу включен небольшой подраздел, посвященный вопросу восстановления наблюдений. В любом случае процедуры обработки данных, описанные в настоящей главе, должны оказаться полезными.

### Кинематические поправки

Ввод кинематических поправок представляет собой операцию такого растяжения временной оси, чтобы все сейсмотрассы выглядели, как зарегистрированные при нулевом удалении от источника. Кинематические поправки были впервые упомянуты в разделе 3. В простейшем варианте кинематическая

поправка рассчитывается по теореме Пифагора: $t^2_{\text{нкп}} = t^2 - x^2/v^2$. В случае однородной среды ввод кинематических поправок равнозначен перемещению асимптоты семейства гиперболических годографов до положения $t = 0$. Указанная процедура исключает из рассмотрения часть сейсмотрассы до момента первого вступления и растягивает оставшуюся часть. Растяжение временной оси максимально вблизи от первых вступлений и уменьшается с ростом времени. На примере ввода кинематических поправок (рис. 90) показано появление низкочастотной записи, вызванное растяжением.

Кинематические поправки можно вводить в полевые сейсмограммы общей точки взрыва или же в совокупности сейсмотрасс, подобранные по признаку общей средней точки, которые, ради удобства, будем дальше называть сейсмограммами ОСТ. После введения кинематических поправок в полевую сейсмограмму она становится похожей на небольшую часть разреза при нулевых удалениях. На ней более ясно проявляется

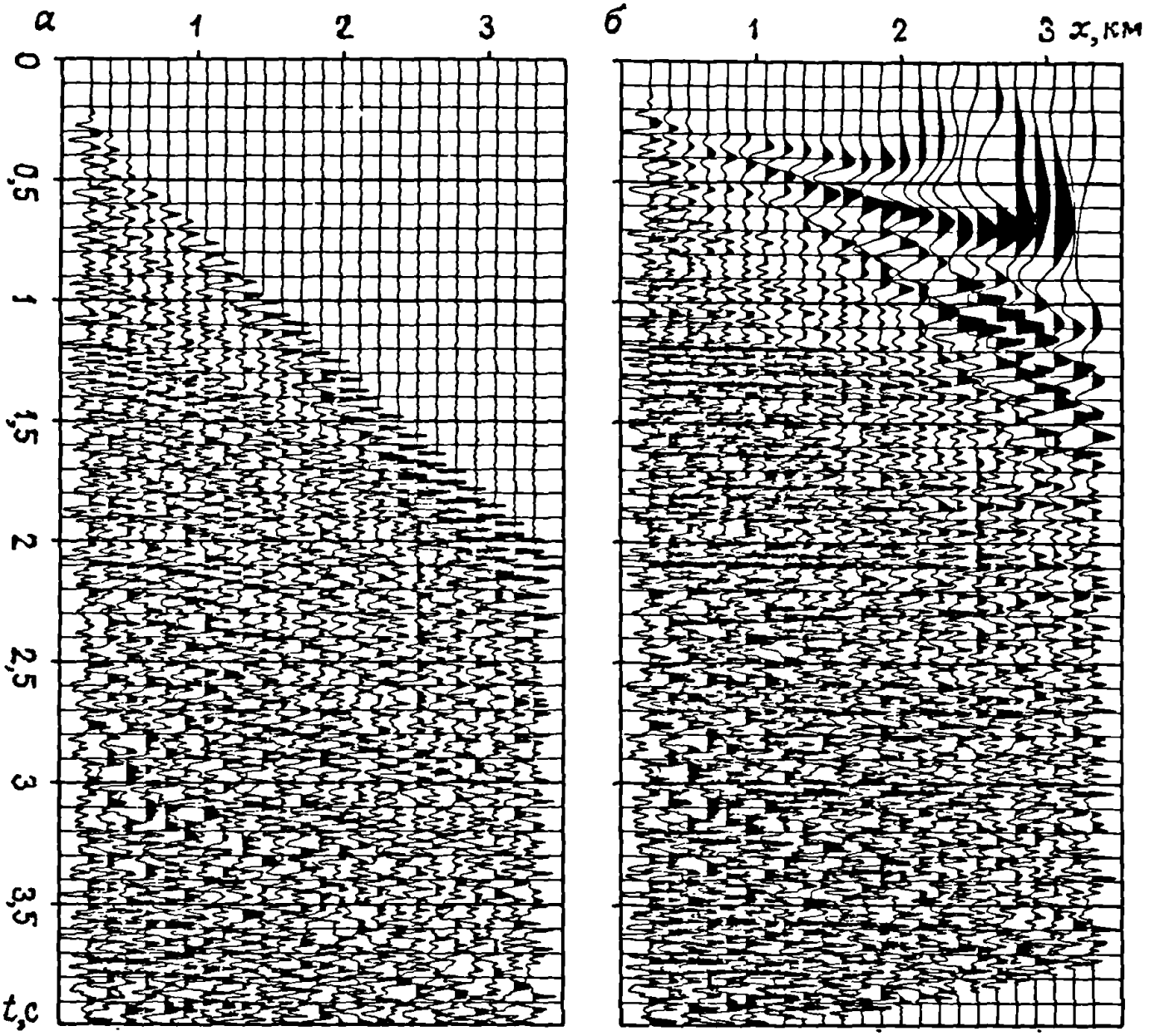



РИС. 90. Сейсмограмма ОСТ, полученная на побережье Мексиканского залива (а); она же после ввода кинематических поправок (*б*)

глубинное геологическое строение. Ввод кинематических поправок в сейсмограммы ОСТ основной способ определения зависимости скорости от глубины. Последнее справедливо потому, что характер сейсмограммы ОСТ не зависит от углов наклона геологических границ.

С математической точки зрения ввод кинематических поправок является линейной операцией. Может показаться парадоксальным, что операция неравномерного растяжения временной оси оказывается линейной, но в самом деле растяжение осей координат удовлетворяет математическим условиям линейности. Не нужно смешивать применяемое в математике условие линейности с менее распространенным условием временной инвариантности. Условие линейности требует, чтобы при любом разложении исходных данных $P$ на части, например, на $P_1$ и $P_2$, сумма частей с введенными кинематическими поправками равнялась сумме с введенной единой кинематикой. Среди примеров разложения можно назвать разделение времен на ранние и поздние, разделение массива моментов времени на четные и нечетные, разделение колебаний на низко- и высокочастотные, разделение значений сигнала на большие и малые.

Чтобы зрительно представить себе операцию введения кинематических поправок как линейную, нужно вообразить, что сейсмотрасса вектор. Оператор ввода кинематических поправок напоминает диагональную матрицу, причем такую, у которой по диагонали расположены интерполяционные фильтры. При этом для создания нужных временных задержек интерполяционные фильтры убираются с этой диагонали.

### Обыкновенный скоростной анализ

При обыкновенном скоростном анализе берется ряд значений скорости. Подразумевается, что каждое из выбранных значений не зависит от глубины, и по ним рассчитываются кинематические поправки. На рис. 91 слева изображена сейсмограмма ОСТ, идентичная сейсмограмме на рис. 90, но с введенными кинематическими поправками, которые были рассчитаны в предположении постоянства скорости. Заметим, что оси синфазности в средней части сейсмограммы стали почти горизонтальными. В то же время оси синфазности на малых временах остались недоспрямленными, а на больших — переспрямленными. Это обычное явление, так как величина кинематической поправки изменяется обратно пропорционально значению скорости (по закону Пифагора), а скорость в осадочном чехле обычно возрастает с глубиной. Мера согласованности между значением скорости, по которому рассчитывались кинематические поправки, и значением скорости в среде находится путем суммирования сейсмограммы ОСТ по

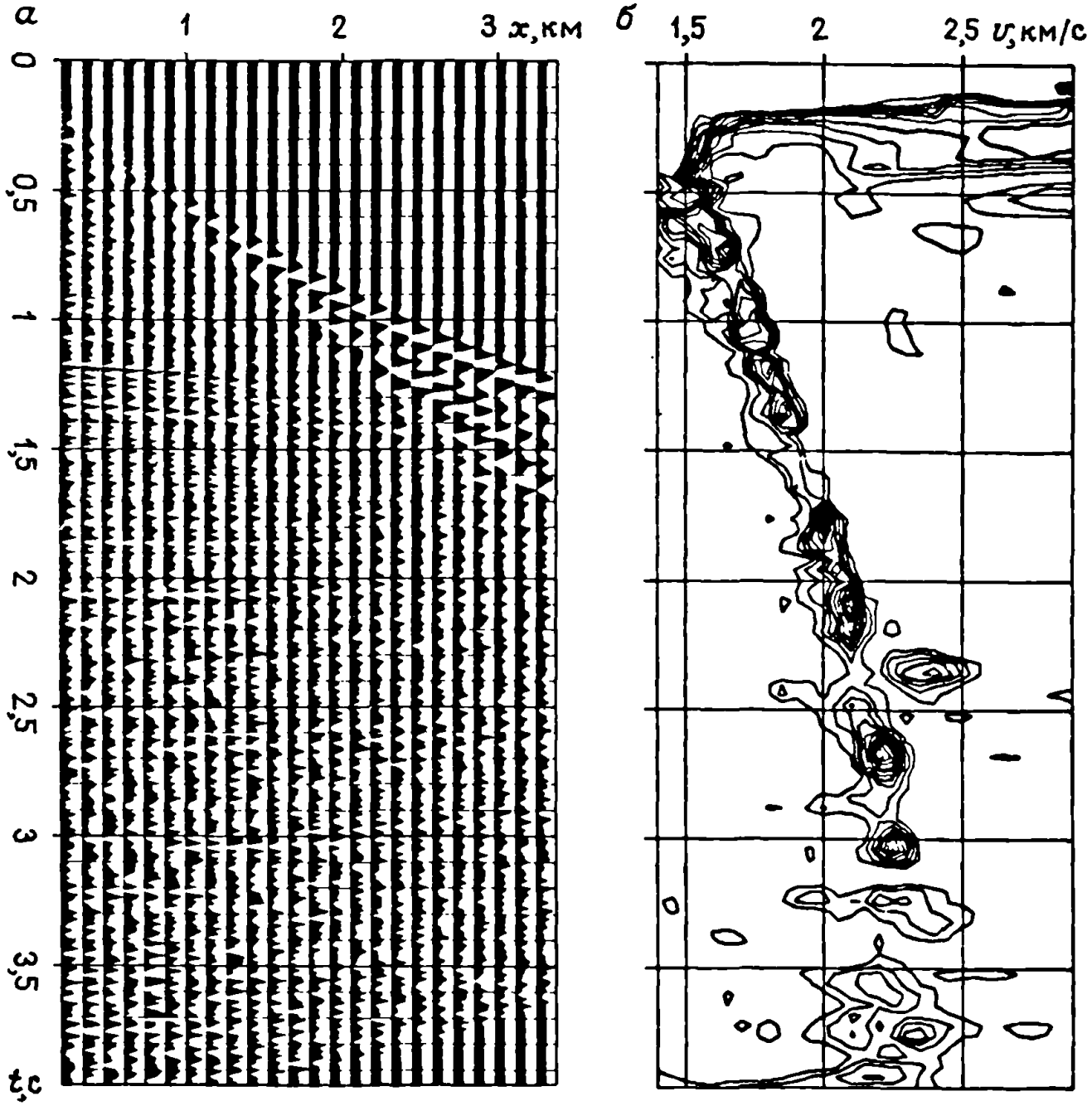



РИС. 91. Сейсмограмма с введенными кинематическими поправками (*а*) и результат скоростного анализа (*б*)

координате удаления. Считается, что чем лучше согласуются между собой названные скорости, тем лучше (больше) будет сумма. Описанный процесс повторяется несколько раз при различных значениях скорости. На рис. 91 справа изображена в изолиниях зависимость амплитуды указанной выше суммы от времени и скорости.

На практике перед суммированием часто проводят дополнительные процедуры. Сейсмотрассы могут быть выравнены путем умножения на весовые коэффициенты как по своим мощностям, так и по спектральному составу (см. о деконволюции в разделе 5.5). Можно также пронормировать и сгладить амплитуду суммы [135]. Кроме того, наблюденные данные могут быть отредактированы и подвергнуты воздействию весовыми функциями, о чем будет сказано в следующем подразделе.

Наилучшую сумму обеспечивает то значение скорости, которое равно средней скорости распространения волн до отражающей границы. Точное определение понятия средней скорости будет дано в разделе 5.4.

### Мьютинги и весовые функции

Важной частью процесса обработки является мьютинг. Мьютинг представляет собой весовую функцию, которая используется для подавления ненужных частей полевых сейсмограмм. На рис. 92 приведена полевая сейсмограмма, часть которой обнулена. Весовые и обнуляющие функции существенно влияют на качество сумм ОГТ. Поэтому неудивительно, что они часто являются предметом теоретических и экспериментальных исследований.

Часто обнуляющие функции одномерны и зависят от координаты $r=h/t$. Можно привести доводы в пользу обнуления сейсмотрасс как с большими, так и с малыми значениями $r$.

При малых значениях $r$ энергия, регистрируемая на ближних к ПВ трассах, объясняется помехами, создаваемыми падением после взрыва грязи и воды или же низкоскоростными поверхностными волнами.

При больших значениях $r$ возникают проблемы с первыми вступлениями, в области которых растяжение от введения кинематических поправок наибольшее, причем оно наиболее чувствительно к значениям использованных скоростей. Волны, регистрируемые в первых вступлениях, часто называют головными или рефрагированными. Практически головная волна опознается как волна, у которой время пробега оказывается линейной функцией от расстояния. Она распространяется по траектории, параллельной границе раздела двух слоев. Реальные головные волны могут быть и слабее и сильнее отраженных. Существование сильных головных волн можно объяснить тем фактом, что отраженные волны расходятся в трехмерном пространстве, а головные лишь в двухмерном.

Операцию мьютинга можно считать умножением на нулевую весовую функцию. С целью получения наиболее оптимальных сумм ОГТ можно применять весовые функции более общего вида. При детальном анализе обязательно изучаются волны-помехи и эффекты усечения рядов данных. Если выполним упрощенный анализ, то придем к самой элементарной весовой функции.

Обычно интегрирование по координате удаления производится по гиперболическим законам. При переходе к решению трехмерной задачи возникает естественное желание интегрировать по гиперболоиду вращения. Предположим, что он имеет радиальную симметрию. Взвешивание подынтегрального

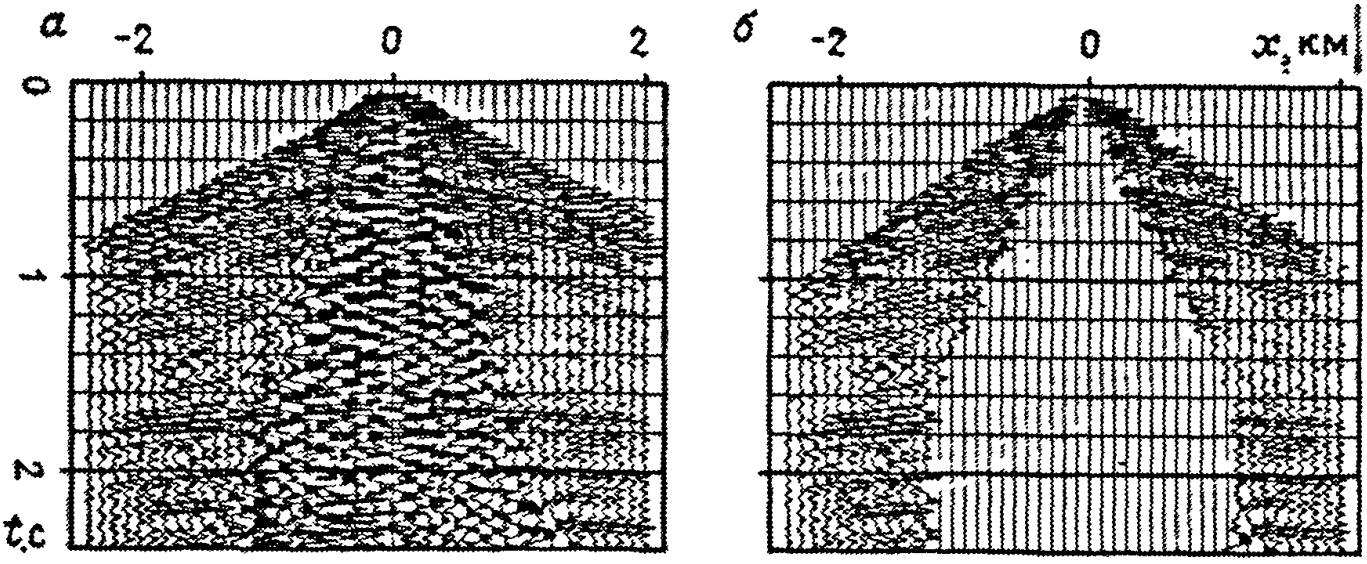



РИС. 92. Полевая сейсмограмма, полученная в провинции Альберта, Канада (*а*); она же после процедуры мьютинга (*б*)

выражения с помощью $h$ позволяет моделировать интегрирование по гиперболоиду вращения обычным линейным интегралом. Второй довод в пользу взвешивания данных по координате удаления перед суммированием ОСТ заключается в том, что вблизи нулевых удалений, где величины приращения времени по годографу невелики, содержится меньше информации о скоростях, чем на больших удалениях, где градиент $\Delta t/\Delta h$ больше.

### Уравнения кинематических поправок

В диапазоне глубин, исследуемых сейсморазведкой, скорость упругих волн в среде обычно изменяется в 2 раза и более. Поэтому приведенный выше анализ, базирующийся на теореме Пифагора, нуждается в пересмотре. Практически учет изменения скорости с глубиной производится путем подстановки в пифагорово соотношение скоростной функции времени. (В классическом труде [135] содержится много полезных подробностей по этому вопросу.) Указанное приближение применяется широко, хотя не трудно рассчитать и точный негиперболический закон изменения кинематических поправок. Посмотрим, каким образом формула связывает функцию скорости $v(z)$ с законом изменения кинематических поправок. Если пренебречь наклоном границ, то в результате ввода кинематических поправок сейсмограммы общей средней точки $P(h, t)$ переводятся в модель геологической среды вида

$$Q(h, z) = \text{земная среда } (z) \times \text{постоянная } (h). \qquad (212)$$

На самом деле $Q(h, z)$ не остается постоянной при изменении координаты $h$.

Процедуру ввода кинематических поправок можно рассматривать в качестве операции перевода. Легко представить себе

процесс перевода точек на плоскости $(h, t)$ в соответствующие места точек в плоскости $(h, z)$. Обозначим его через

$$Q[h, z(h, t)] = P(h, t). \tag{213}$$

Нужно позаботиться, чтобы на плоскости $(h, z)$ не оставалось пустых мест, для чего надо просмотреть каждую точку на результативной плоскости $(h, z)$ и найти соответствующую ей на плоскости $(h, t)$. С помощью таблицы $t(h, z)$ кинематические поправки в наблюденные данные вводятся преобразованием

$$Q(h, z) = P[h, t(h, z)]. \tag{214}$$

Если воспользоваться терминологией, принятой в данной книге, то на входе оператора ввода кинематических поправок будет сейсмограмма ОСТ, а на выходе — сейсмограмма ОГТ, обозначаемые, соответственно, через $P(h, t)$ и $Q$.

Практически первый этап составления таблиц времен пробега сводится к замене переменной глубины $z$ на переменную времени пробега по вертикали $\tau$. Следовательно, искомой будет таблица $t(h, z)$. Выход в точке $(h, \tau)$ равен входу в точке $(h, t)$. Как нам кажется, самый простой и надежный путь составления такой таблицы — трассирование лучей с некоторым шагом по $z$, а фактически по $\tau$. Это значит, что для различных фиксированных значений параметра Снеллиуса $p$ по кривой $v(\tau)$ рассчитываются функции $t(p, \tau)$ и $h(p, \tau)$ путем интегрирования следующих уравнений по $\tau$:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau}\frac{dt}{dz} = v\frac{1}{v\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 v(\tau)^2}}, \tag{215}$$

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau}\frac{dh}{dz} = v\,\mathrm{tg}\,\theta = \frac{pv(\tau)^2}{\sqrt{1 - p^2 v(\tau)^2}}. \tag{216}$$

(В уравнениях (215) и (216) производные $dt\,dz$ и $dh/dz$ вычисляются по лучам, а не по фронтам.) Чтобы исключить $p$ и найти зависимость $t(h, \tau)$, нужно, располагая таблицами $t(p, \tau)$ и $h(p, \tau)$, выполнить операции итерации и интерполяции. Это неудобно, так как на больших удалениях от источника в срединных частях осей синфазности отражений обычно регистрируются вступления головных волн. Но если уж эта работа сделана, то полученную таблицу можно сохранить и многократно использовать. Разветвление годографов отраженных волн на больших удалениях от пункта возбуждения служит обоснованием для применения методов скоростного анализа, базирующихся на волновом уравнении. Наибольшая чувствительность к изменению скорости наблюдается там, где годограф негиперболичен и имеется интерференция с другими волнами.

## Статистическая оценка

Линейность способов обработки данных, основанных на использовании волнового уравнения, позволяет разлагать совокупность сейсморазведочных данных на части, обрабатывать эти части отдельно друг от друга и затем складывать результаты их обработки. Итог будет таким же, как если бы исходный массив данных обрабатывался целиком.

Предположим, что сейсмограмма ОСТ поделена на две части на ближние к ПВ трассы $A$ и дальние — $B$. Обозначим через $(A, 0)$ сейсмограмму ОСТ, у которой обнулены дальние трассы, а через $(0, B)$ — копию этой же сейсмограммы, у которой обнулены ближние трассы. Сейсмограммы $(A, 0)$ и $(0, B)$ можно продолжить в нижнее полупространство. После продолжения вниз $(A, 0)$ и $(0, B)$ можно сложить. В другом варианте можно оценить статистические характеристики волн и затем применить к ним весовую функцию. На рис. 93 изображена совокупность из трех сейсмотрасс, разделенная на три части по одной трассе в каждой. Полуокружностями показаны результаты продолжения вниз каждой из сейсмотрасс. Каждая из дуг окружности проходит через точку с нулевым удалением, давая в итоге надлежащим образом растянутую скорректированную за кинематику сейсмотрассу.

Использование весовой функции представляет собой решительный отход от прежнего метода анализа, когда мы пренебрегали статистическими характеристиками. При выборе весовой функции значительную роль играют дисперсии сигнала и помехи. Когда принимается решение о способе окончательной визуализации результатов обработки, необходимо учитывать человеческие способности к восприятию и требование сжатия динамического диапазона с целью визуализации небольших значений. Следует предусматривать сжатие динамического диапазона в разных плоскостях представления данных.

Существует много способов разложения массивов наблюдений на части. Выбор конкретного способа зависит от принятой вами статистической модели и от желания многократно повторять обработку. Вполне возможно, что часть сейсмических

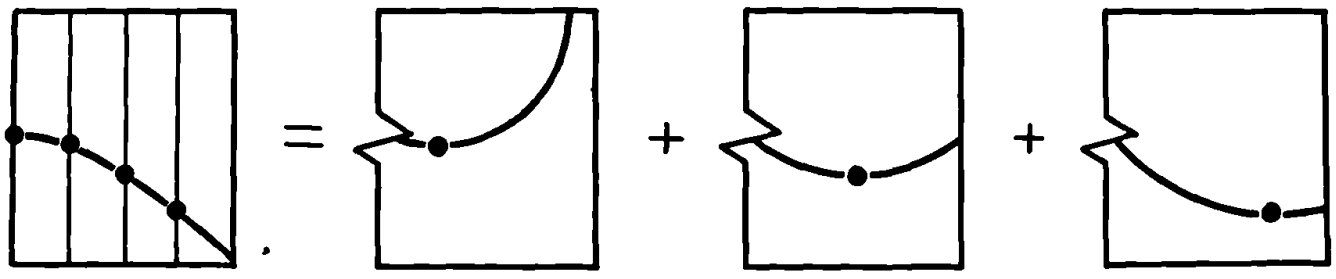


РИС. 93. Трехтрассовая сейсмограмма ОСТ, разделенная на трассы. Слева изображены вырисовывающие гиперболу интерполированные импульсы. Справа отсчеты данных растянуты в миграционные полуокружности, каждая из которых проходит через нулевое удаление в вершине гиперболы

материалов должна разлагаться не по значениям $h$, а по типичным для нее значениям отношения $r=h/t$. Ясно одно: пищи для размышлений предостаточно.

### Латеральная интерполяция и экстраполяция сейсмограмм ОСТ

Практические затруднения при работе с сейсмограммами общей средней точки возникают из-за недостаточного количества трасс на них. Усечение приводит к затруднениям, возникающим из-за фиксированной длины расстановок сейсмоприемников, обычно меньшей расстояния, на которое распространяется сейсмическая энергия. На рис. 94 разъясняется, почему конечные размеры сейсмической косы создают трудности при пользовании традиционными, т. е. базирующимися на лучевой теории, методами суммирования ОГТ, равно как и методами, основанными на волновом уравнении. Затруднения, вызываемые искажениями дискретизации, возникают потому, что источники и приемники располагаются недостаточно близко друг к другу. Искажения пространственной дискретизации наблюдений по оси удалений представляют более серьезную проблему для методов, базирующихся на волновом уравнении, нежели для методов, основанных на лучевой теории. Причина заключается в том, что кинематические поправки уменьшают частоту по пространственной координате. Пропуски в наблюдениях, возникающие из-за неисправностей в сейсмоприемниках и кабеле или же из-за недоступности участка профиля, тоже приводят к осложнениям в обработке.

Все перечисленные выше проблемы обработки будут решаться путем применения систематического подхода к восстановлению пропущенных сейсмотрасс. Описываемый ниже способ является простейшим из процедур оценки пропущенных наблюдений, разрабатываемых в настоящее время в рамках Стэнфордского исследовательского проекта.

Сначала вводятся нормальные кинематические поправки, т. е. растягивается временная ось с целью спрямления гиперболических осей синфазности. Первый вопрос — какую выбрать скорость для расчета кинематических поправок? При межтрассовой интерполяции оказывается, что подходящей для расчета кинематических поправок скоростью является скорость, соответствующая волнам на сейсмограмме ОСТ, доминирующим по энергии. Эта скорость на одних временах может соответствовать однократным отраженным волнам, на других — многократным. Применение такой нефизической скорости обосновывается следующим: чтобы сохранить на сейсмозаписи слабые волны, с сильными нужно обращаться осторожно. Конечной протяженностью слабых осей синфазности в данном

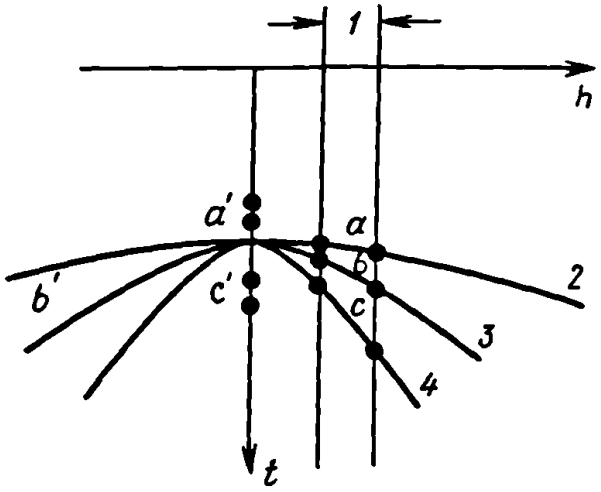



РИС. 94. Кинематические поправки, рассчитанные по скоростной характеристике. Концевые точки записей дифрагированных и кратных волн перемещаются соответственно в $a'$ и $c'$.
*1* отрезок расстановки; *2* годограф дифрагированной волны; *3* полезное отражение; *4* кратное отражение

случае можно пренебречь, как затруднением «второго порядка». Практическая задача обычно состоит в подавлении интенсивных волн, распространяющихся в водном слое, при наличии на записи слабых отражений от границ в осадочном чехле, причем обработка ведется в высокочастотном диапазоне. В принципе, может быть поставлена задача выделения слабоинтенсивных обменных волн P—SV на фоне сильных продольных P—P.

После ввода кинематических поправок оставшаяся сейсмическая энергия должна образовывать оси синфазности с небольшими наклонами, за исключением, естественно, тех мест, где представленные нулями пропущенные трассы приводят к расширению спектра зарегистрированных трасс по пространственной частоте. Чтобы выделить слабые волны необходимо использовать фильтр типа рекурсивного фильтра высоких кажущихся скоростей, рассмотренного в разделе 2.5:

$$\frac{k^2/-i\omega}{\alpha+k^2-i\omega}. \qquad (217)$$

Заметим, что этот фильтр сильно ослабляет энергию с малыми значениями $k$, т. е. энергию, должным образом скорректированную за кинематику. В то же время по соседству с пропущенными трассами спектр должен быть широким по $k$ и эта энергия проходит через фильтр практически без ослабления.

Теперь сигнал на выходе рекурсивного фильтра можно вычесть из исходных наблюдений. Вычитание производится избирательно: из реально существующих наблюдений вычитание не производится. На этом первая итерация заканчивается. Затем этапы обработки повторяются и итерируются. Когда на пикетах, где наблюдения не регистрировались, сигнал на выходе фильтра равен нулю, сходимость достигнута. На рис. 95 приведена сейсмограмма, полученная в результате применения описанного процесса обработки.

Применение этой процедуры ограничено потому, что в ней не учитывается возможный наклон границ в направлении координаты средней точки (см. раздел 3.6) и возможность наличия на сейсмограммах нескольких скоростей одновременно. Чтобы

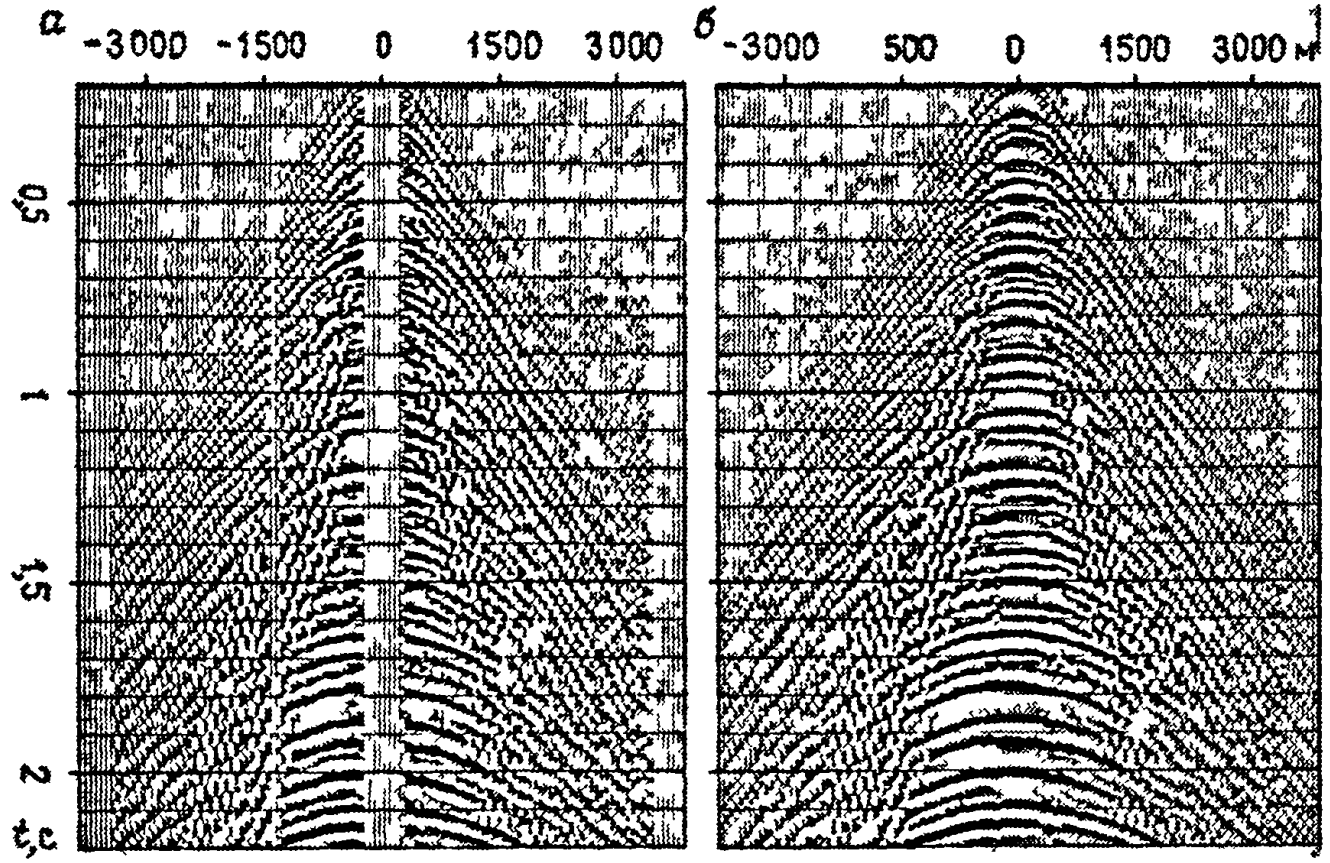



РИС. 95. Полевая сейсмограмма с пропущенными трассами (*а*), восстановленными с помощью итеративной пространственной фильтрации (*б*)

выполнить качественную обработку данных в широком диапазоне скоростей, могут потребоваться модель и понятие о скоростном спектре, рассмотренное ниже и в разделе 5.4.

### Внутри и за пределами пространства скоростей

В результате суммирования сейсмограммы общей средней точки по гиперболическим в зависимости от координаты удаления траекториями получаем суммарную трассу, называемую суммой при постоянной скорости (СПС). Пространство скоростей можно определить как семейство таких суммарных трасс, причем каждая из трасс получена при одном значении скорости. Суммирование ОГТ с постоянными скоростями представляет собой преобразование пространства удалений в пространство скоростей. В результате суммирования с постоянными скоростями из сейсмограммы общей средней точки $(t, h)$ получается график скоростей $(t, v)$. Традиционный способ определения скоростей, применяемый в практической сейсморазведке, сводится к суммированию с постоянными скоростями, дополненному возведением в квадрат и нормировкой. Линейные преобразования, подобные суммированию ОГТ с постоянными скоростями, в общем случае обращаемы, но преобразование в пространство скоростей требует значительно больших вычислений. При 48 сейсмотрассах по 1000 отсчетов на каждой получаем 48 000-мерное

преобразование. Современные вычислительные средства не в состоянии обращать столь большие матрицы алгебраическими способами. Однако существуют отличные приближенные способы обратных преобразований.

Матрица транспонирования унитарной матрицы равна матрице обращения. В теории распространения волн часто оказывается, что оператор транспонирования хорошо аппроксимирует оператор обращения. В работе [143] показано, что операция транспонирования результатов суммирования ОГТ с постоянными скоростями практически равнозначна самому СПС. Чтобы транспонировать результаты суммирования с постоянными скоростями, возьмем для начала развернутый график скоростей на плоскости $(t, v)$. Для расчета некоторого заданного удаления $h$ каждую трассу графика $(t, v)$ нужно сначала сжать и тем самым компенсировать растяжение, допущенное при вводе кинематических поправок. Для этого импульсоиды следует переместить с времени, соответствующего нулевому удалению на плоскости $(t, v)$, на время, соответствующее заданному значению координаты $h$. Затем график $(t, v)$ суммируется по координате $v$ и получается сейсмотрасса для заданного значения координаты $h$. Процесс повторяется для всех нужных значений $h$. Убеждаемся, что программа транспонирования суммотрасс ОГТ с постоянными скоростями подобна программе расчета самих суммотрасс за тем исключением, что растяжение заменено на компенсирующее его сжатие.

Обращение суммотрасс ОГТ с постоянными скоростями аналогично обращению направленных сумм, т. е. преобразованию Радона (см. раздел 5.2). Это значит, что СПС представляет собой почти свое собственное обращение с изменением знака и применением фильтрации, подобной ро-фильтрации. Именно ро-фильтрацией обращение суммы ОГТ с постоянной скоростью отличается от ее транспонирования.

Слово «транспонирование» связано с понятием транспонирования матриц. Трудно понять, почему слово «транспонирование» подходит к нашему случаю, так как мы обсуждаем двухмерные пространства наблюдений и четырехмерные операторы. Но если преобразовать эти двух- и трехмерные объекты в знакомые нам одно- и двухмерные с помощью преобразований типа (98) и (99) из раздела 2.2, то можно увидеть, что слово «транспонирование» вполне подходит к данному случаю. Ро-фильтрация, необходимая для сумм ОГТ с постоянными скоростями, более сложна, чем обыкновенная ро-фильтрация [143].

На рис. 96 приведен пример обращения пространства скоростей по методу Торсона. На рис. 96, *а* изображена исходная сейсмограмма общей средней точки. Далее следует приближенное восстановление исходной сейсмограммы ОСТ по прост-

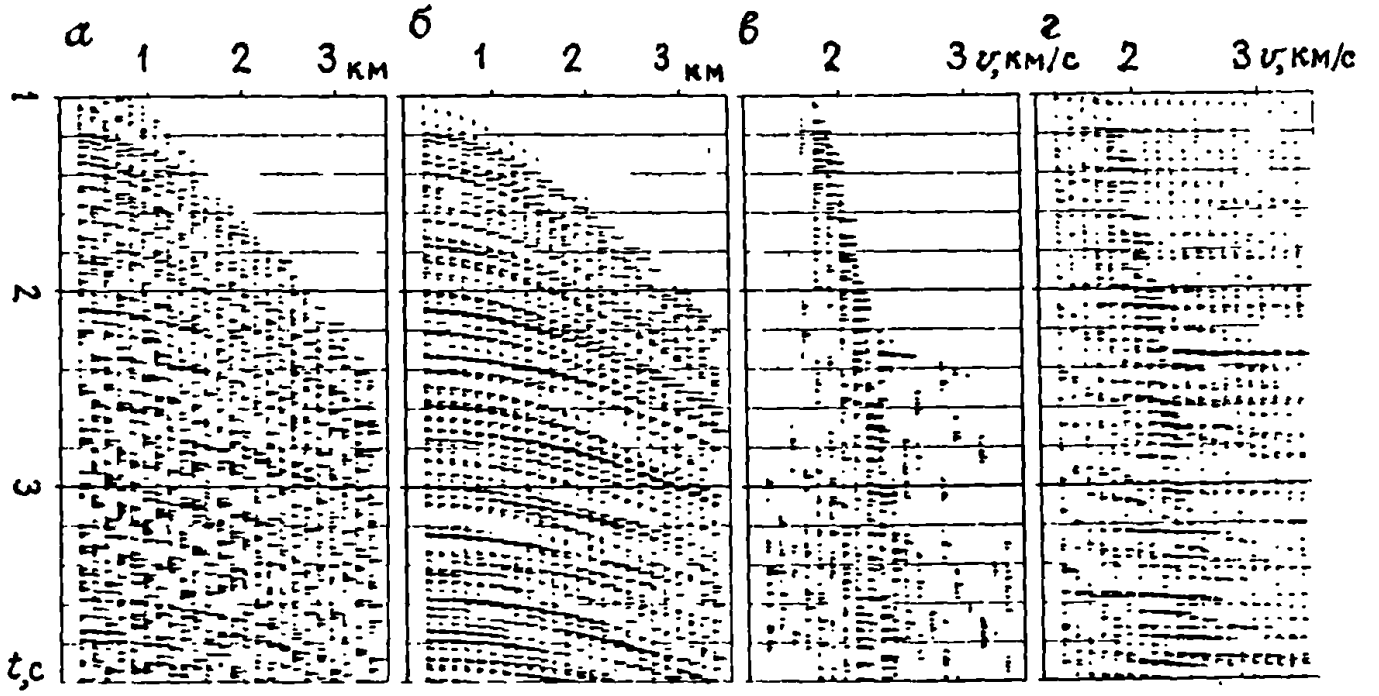



РИС. 96. Пример обращения пространства скоростей по методу Торсона

ранству скоростей (рис. 96, *б*). Гиперболические оси синфазности восстановились намного лучше, нежели случайный шум. Причина последнего в том, что при суммировании ОСТ диапазон скоростей ограничивался скоростью в воде и значением 3,5 км/с. Рис. 96, *в* и *г* теоретически связаны между собой так называемой ро-фильтрацией. На рис. 96, *г* приведен результат суммирования ОГТ исходной сейсмограммы ОСТ, а рис. 96, *б* является обращением суммы ОГТ, изображенной на рис. 96, *в*.

Стоит отметить, что расчет графика скоростей связан с большим объемом вычислений. Для каждого значения скорости рассчитывается суммотрасса ОГТ. Определение скоростей способами, основанными на волновом уравнении, будет изложено ниже и в разделе 5.4. Они, как правило, экономичнее, хотя и не могут полностью сравниться по эффекту со способом Торсона.

## Метод плоскости $(z, t)$

В 15-градусном уравнении продолжения вниз $U_{zt} = -1/2v\ U_{hh}$ масштаб по глубине $z$ неотличим от масштаба по скорости. Поэтому продолжение вниз с неправильной скоростью практически то же самое, что и продолжение на неправильную глубину. С. М. Доэрти [45] воспользовался этими соображениями для определения скоростей (рис. 97).

Идея состоит в том, чтобы осуществлять операцию продолжения вниз, располагая предварительной скоростной моделью, и строить сейсмотрассы при нулевом удалении, являющиеся функциями $t'$, при всех значениях временных глубин $\tau$. Если максимальная амплитуда наблюдается при $t' = \tau$, значит предварительная модель хороша. Если же максимум смещен, то

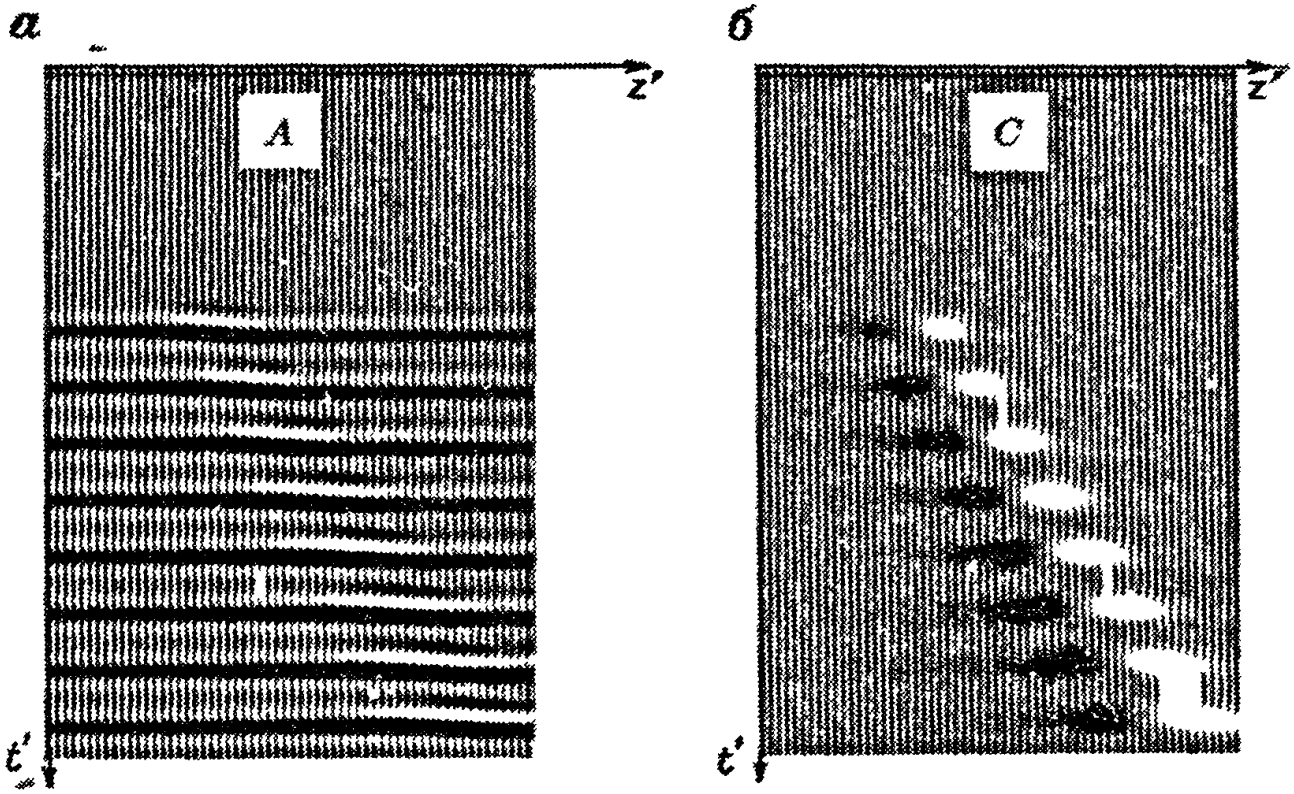



РИС. 97. Пример определения скоростей по методу Доэрти:
*а* при $P(t', z, h=0)$; *б* при $\frac{\partial}{\partial z}\left\| P(t', z, h \quad 0) \right\|^2$

необходим дополнительный анализ, чтобы выбрать нужное значение скорости для следующей итерации.

Модель среды на рис. 97 содержит восемь отражающих границ, расположенных по глубине с одинаковым интервалом. Сверху находится слой воды. Модели соответствует семейство гиперболических годографов на плоскости $(h, t)$ при $z=0$. В левой части рисунка изображен разрез при нулевых удалениях. Амплитудный максимум в фокусе не бросается в глаза, но сдвиг фаз очевиден. В правой части изображена производная по $z$ от огибающей сейсмотрассы при нулевом удалении. Линейное упорядочение амплитудных максимумов стало более очевидным. Уравнение прямой имеет вид $z'=vt'$.

### Разделение сейсмограмм на высоко- и низкоскоростные составляющие

Рассмотрим процесс деления сейсмограммы ОСТ (как отраженных, так и головных волн) на две части, одна из которых характеризуется среднеквадратичной скоростью, превышающей заданную модельную $\bar{v}(z)$, а другая меньшей $\bar{v}(z)$.

Сделав подобное разделение, можно исключить низкоскоростные помехи. С другой стороны, посредством итераций можно найти скорость в среде. Ниже увидим, что в силу линейности и необращаемости процесса разделения сейсмических наблюдений по признаку скорости, становится возмож-

ным применение и различных статистических процедур, наподобие интерполяции и латеральной экстраполяции.

Сама процедура проста. Берется сейсмограмма общей средней точки, обнуляются отрицательные удаления и затем выполняется продолжение в нижнее полупространство в соответствии с скоростной моделью $\bar{v}(z)$. Компоненты сейсмограммы, обладающие скоростью, меньшей $\bar{v}(z)$, окажутся перемигрированными, т. е. пройдут через нулевое удаление в область отрицательных. Те компоненты, скорость которых больше $\bar{v}(z)$, будут недомигрированны: они переместятся в сторону нулевого удаления, но не дойдут до него. Таким образом, окажется, что низкоскоростная часть расположена в области с отрицательными удалениями, а высокоскоростная — в области с положительными. По желанию, процесс можно выполнить в обратном порядке и возвратить обе части в пространство исходных наблюдений.

Очевидно, что умножение наблюдений на единичную функцию может привести к возникновению нежелательных дифракций, и в таком случае следует отказаться от надежды найти фильтр скоростей с бесконечно большой крутизной среза. Ложные дифракции можно ослабить, если вместо ступенчатой функции воспользоваться линейно-нарастающей или линейно-убывающей. Альтернативой обнулению отрицательных $h$ может быть переход в пространство с координатами $(k_h, \omega)$ и обнуление двух квадрантов, в которых $k_h$ и $\omega$ имеют разные знаки.

К сожалению, сам по себе описанный выше метод разделения не дает скоростного спектра. Энергия, находящаяся в стороне от $h=0$, не сфокусирована и не связана очевидным образом со скоростью. Необходимость нахождения скоростных спектров побуждает разрабатывать и изобретать новые процессы обработки.

## Отраженные головные волны на сейсмических разрезах

Интерпретатор легко распознает на разрезе ОГТ отраженные головные волны. Практически на плоскости $(y, t)$ они выглядят как гиперболические асимптоты. С теоретической точки зрения такие волны распространяются от источника вдоль горизонтальной границы раздела, пока не встречают на своем пути какую-то неоднородность, например разрывное нарушение сплошности слоев, от которой отражаются назад к источнику. Отраженные головные волны иногда называют отраженно-преломленными. По такой оси синфазности скорость определяется легко по формуле $v=2dy/dt$. С точки зрения обработки наблюдений такой способ определения скоростей является неожиданным, так как все способы автоматического

определения скоростей работают в пространстве удалений. Для того, чтобы отраженная головная волна проявилась, нужны особые геологические условия, а именно, наличие в среде достаточно сильного рассеивателя, обеспечивающего образование визуально прослеживаемой на сейсмограммах гиперболической асимптоты. Точечный рассеиватель должен быть такой силы, чтобы преодолеть ослабляющее воздействие, создаваемое интерференционными системами источников и приемников и самим суммированием ОГТ. Сильнее всего подавляются именно те волны — в водном слое и поверхностного типа — чьи оси синфазности наиболее часто наблюдаются на отсуммированных по ОГТ разрезах. (Вспомним полосы Ларнера.) Сильно отраженно-преломленные волны наблюдаются на сейсмограмме общего пункта взрыва (ОТВ), изображенной на рис. 79.

Значения скоростей, найденные по годографам отраженных волн, являются средними скоростями пробега до слоев, залегающих над точкой отражения. Чтобы получить разрешенность по глубине, необходимо из общей средней скорости вычесть значения скоростей до предыдущих горизонтов (см. раздел 5.4), при этом теряется точность. Поэтому в случае отраженных волн существует естественный компромисс между точностью определения скоростей и разрешенностью по глубине. В то же время оценки скоростей по головным волнам имеют высокую степень разрешенности по глубине.

По всему видно, что процедуры обработки подавляют рассеянные на неоднородностях головные волны, но все же они часто наблюдаются и используются. Этому следует дать какое-то объяснение. Если рассмотрим этот вопрос с теоретической точки зрения, то увидим, что косинусы углов выхода волн из среды при больших их значениях меняются местами. На больших временах играет роль еще один фактор — длина приемной расстановки может оказаться намного меньше ширины миграционной гиперболы.

Каким образом можно учесть факт изменения коэффициента отражения по латерали и через него увеличить, а не уменьшить наши возможности в отношении определения скоростей? Начнем суммирование ОГТ с большого значения скорости. Затем воспользуемся тем соображением, что на любой глубине $z$ спектр мощности наблюдений $U(\omega, k_y)$ должен иметь срез на значении приращения $p(z)=k_y/\omega=1/v(z)$. Последнее должно проявиться на графике зависимости спектра мощности $U^*U$ или лучше спектра кажущихся скоростей от глубины. Может быть, все же лучше просмотреть внимательно сам сейсмический разрез после его фильтрации по кажущимся скоростям, обратив особое внимание на значения около ожидаемой скорости.

Уравнение волновой экстраполяции представляет собой широкополосный фильтр? Так почему же спектр мощности

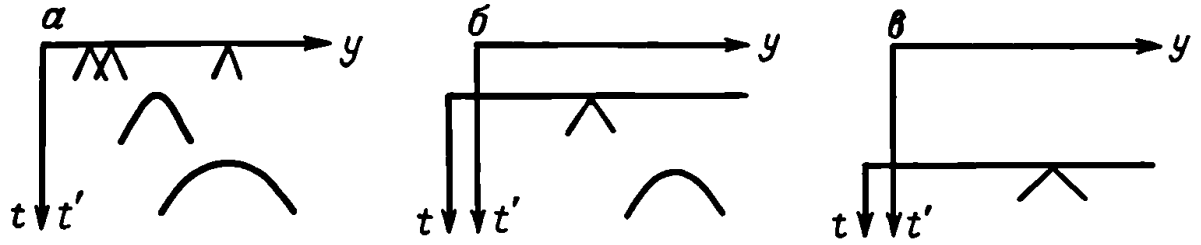



РИС. 98. Определение скоростей методом спектра кажущихся скоростей

изменяется с глубиной? Это происходит потому, что на любой заданной глубине нужно исключать из рассмотрения все сейсмические наблюдения на временах до $t=0$. Прежде чем вычислять спектр кажущихся скоростей, такие наблюдения следует обнулять. Сказанное поясняется рис. 98. Чтобы отыскать значение скорости на любой глубине, нужно на этой глубине взять самую крутую ось синфазности. На рис. 98, *а* у поверхности наблюдений показаны поверхностные волны. На рис. 98, *б* и *в* показаны волны с самыми низкими скоростями, которые являются асимптотами гиперболических годографов, соответствующих волнам с постепенно увеличивающимися скоростями.

Насколько мне известно, описанный метод нигде не применялся. Мне кажется, что он заслуживает серьезного опробования. Даже в геологических провинциях с ярко выраженной горизонтальной слоистостью всегда присутствуют разрывные нарушения и неоднородности, которые могут выявить весь спектр. Маловероятно, чтобы из-за слабой интенсивности сигналов могли возникнуть затруднения. Скорее всего, потенциальный источник осложнений в обработке будет связан со скоростной неоднородностью верхней части разреза.

Упражнения

1. Предположим, что наблюдения $P(y, h, t)$ не зависят от средней точки $y$. Найдите по сейсмограмме общей средней точки $P(h, t, z=0)$ интегральное преобразование типа Столта от $P(h, t, z=0)$ к $P(h=0, t, z)$, в основе которого лежит уравнение с двумя квадратными корнями

$$\frac{\partial}{\partial z}P=-i\frac{\omega}{v}\left[\sqrt{1-(Y+H)^2}+\sqrt{1-(Y-H)^2}\right]P.$$

Как и в случае миграционного преобразования Столта, ваш ответ должен быть выражен в виде двухмерного обратного преобразования Фурье.

2. Возьмите сейсмограмму ОГТ $u(h, t)$, определенную, согласно принципу взаимности, для положительных и отрицательных значений $h$. Опишите результат применения следующих операций (рис. 99): преобразования Фурье в $U(k_h, \omega)$; умножения на $1+\operatorname{sgn}(\omega)\operatorname{sgn}(k_h)$; обратного преобразования в пространство с координатами $(h, t)$.

## 3.6. Миграция с определением скоростей

Часто возникают сразу три осложняющих обстоятельства — наклон границ, удаление от источника и неизвестные скорости.

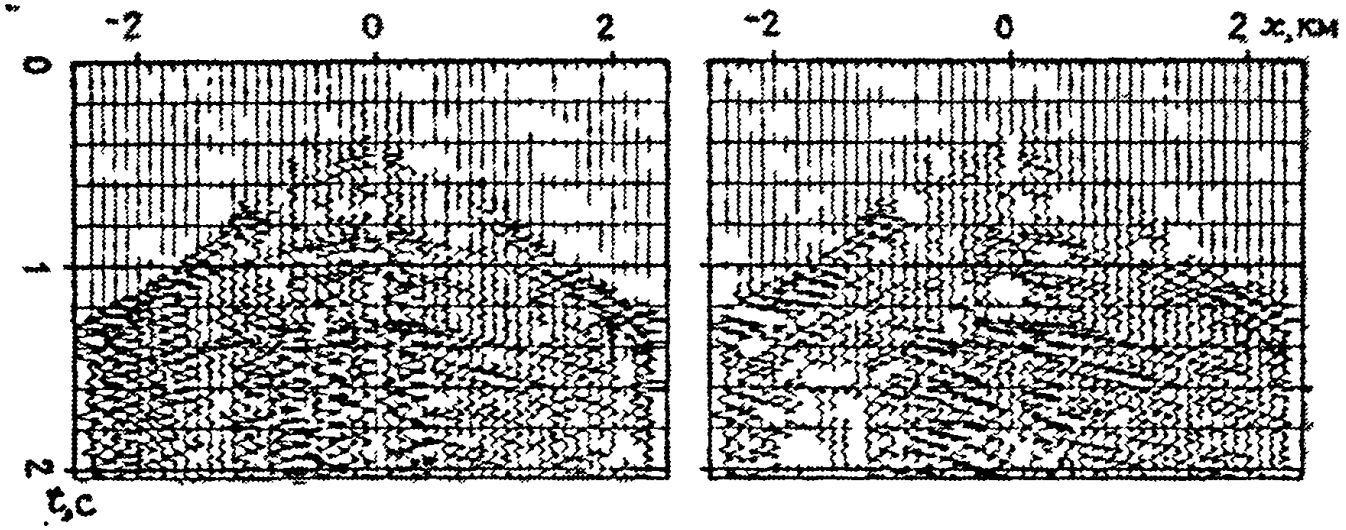



РИС. 99. Что это такое?

Уравнение с двумя квадратными корнями удобно применять, когда скоростной разрез известен, в противном случае мы можем использовать лишь процедуры определения скоростей, подобные описанным в предыдущем разделе, которые справедливы лишь в случае горизонтального залегания. Ниже будет разработан способ определения скоростей при наклонных границах.

### Кинематическая поправка за наклон Шервуда

Вспомним (см. раздел 3.2) выражение Левина для времени пробега волны, отраженной от границы, падающей под углом к горизонту:

$$t^2v^2=4(y-y_0)^2\sin^2\alpha+4h^2\cos^2\alpha. \qquad (218)$$

Эта кривая в координатах $(h, t)$ является гиперболой. Умножив скорость на $\cos\alpha$, получим годограф, идентичный годографу отражения от горизонтально залегающей границы. В этом состоит традиционный подход к суммированию ОГТ и скоростному анализу. Часто он оказывается вполне удовлетворительным. Иногда он дает неудовлетворительные результаты, так как угол наклона границы не является однозначной функцией пространственной координаты. Например, около плоскости скольжения разрывного нарушения обязательно возникают дифрагированные волны. Они представляют собой суперпозицию отражений от дифрагирующих элементов различного наклона, каждое из которых обычно слабее нормального отражения. На одном и том же участке сейсмограммы присутствуют оси синфазности с различными кажущимися скоростями. Они вносят неопределенность в оценки скоростей и понижают четкость суммы ОГТ.

В принципе миграция перед суммированием, будучи одной из реализаций полного уравнения ДКК, решает эту общую

задачу. Но как определить скорость, которую следует использовать в уравнениях миграционного преобразования? Несмотря на то, что при небольших удалениях приемника от источника миграционное преобразование практически не чувствительно к изменениям скорости, при больших удалениях зависимость его от скорости начинает ощущаться.

Процесс миграционного преобразования тесно связан с процессом определения скоростей. В работе Дж. Шервуда [132] показано, каким образом должны переплетаться процессы миграции и определения скоростей. Кинематическую поправку следует считать состоящей из двух частей: одна часть зависит от координаты удаления приемника от источника (нормальная кинематическая поправка), другая — от угла наклона границы. Понятие о второй части кинематической поправки введено недавно. Дж. Шервуд описал ее как своего рода фильтрацию, но не привел подробностей, касающихся ее расчета. Позднее в работе [150] процесс расчета кинематических поправок за наклон отражающей границы был назван частичной миграцией до суммирования ОГТ, но окончательно его стали называть просто кинематической поправкой за наклон границы. Сначала познакомимся с результатами, полученными Шервудом, затем с концептуальной моделью ввода кинематической поправки за наклон, предложенной Рокки, и, наконец, с двумя различными в концептуальном отношении количественными реализациями указанного процесса.

На рис. 100 дано несколько изображений одной и той же части разреза ОГТ, полученных с различными значениями скорости ОГТ. При низких скоростях доминируют горизонтально залегающие границы, а при высоких — круто наклоненные. После ввода кинематических поправок за наклон эти материалы были просуммированы по ОГТ снова. Из рис. 101 следует, что скорость суммирования по ОГТ уже не зависит от угла наклона. Отсюда можно сделать вывод, что после введения поправок за наклон границ скорости можно определять, не обращая внимания на наклон. Другими словами, границы с различными углами наклона дают значения одной и той же скорости. Поэтому метод Шервуда должен давать более устойчивые значения скоростей в условиях геологической среды с границами, падающими в противоположные стороны. Кроме того, можно рассчитывать и на улучшение результатов суммирования по ОГТ.

### Оператор Рокки

Фабио Рокки дал четкое истолкование модели поправок за наклон Шервуда. Идея оператора частичной миграции до сум-

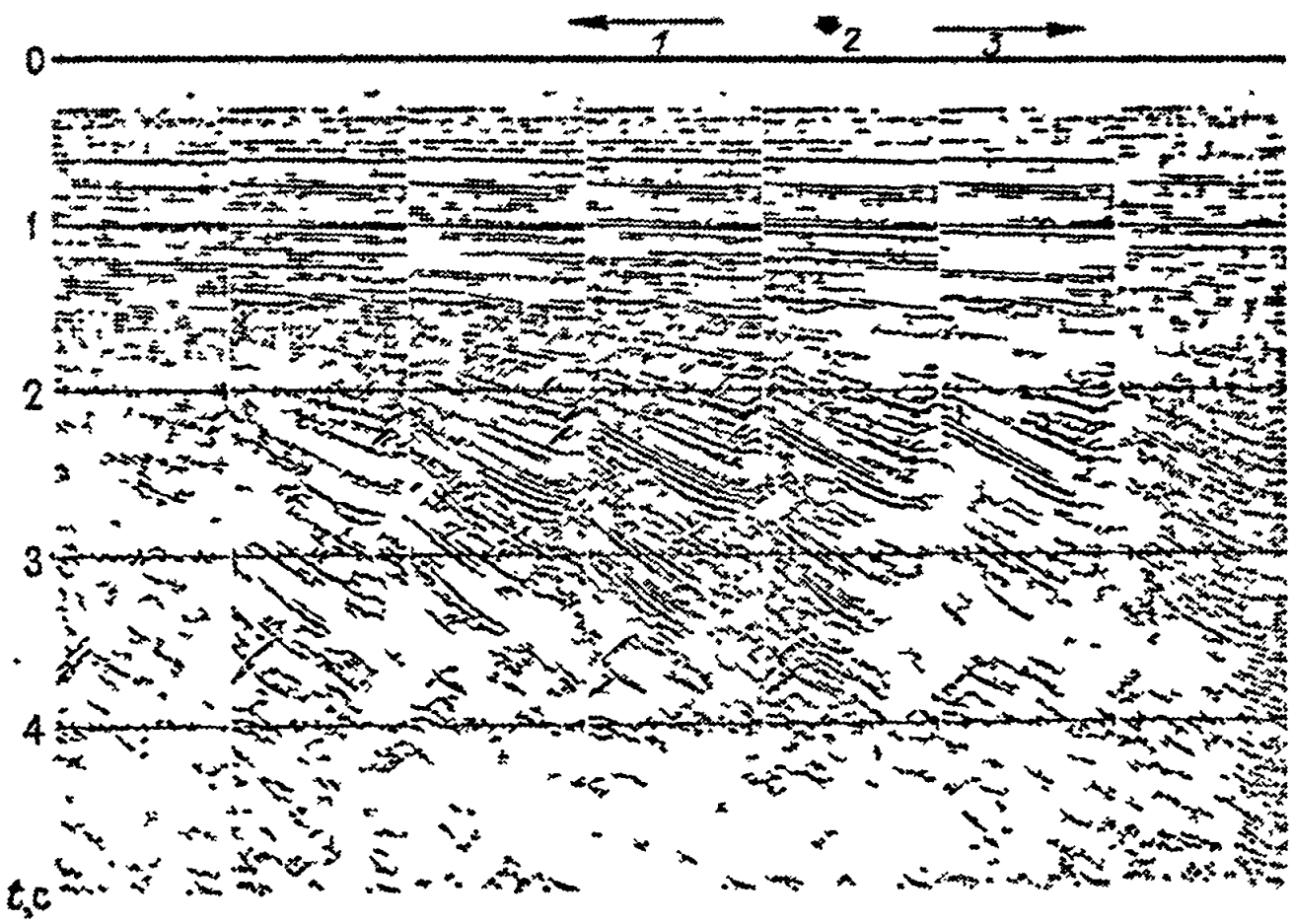



РИС. 100. Обыкновенные суммы ОГТ с различными скоростями:
*1* высокие скорости; *2* скорости суммирования ОГТ; *3* низкие скорости

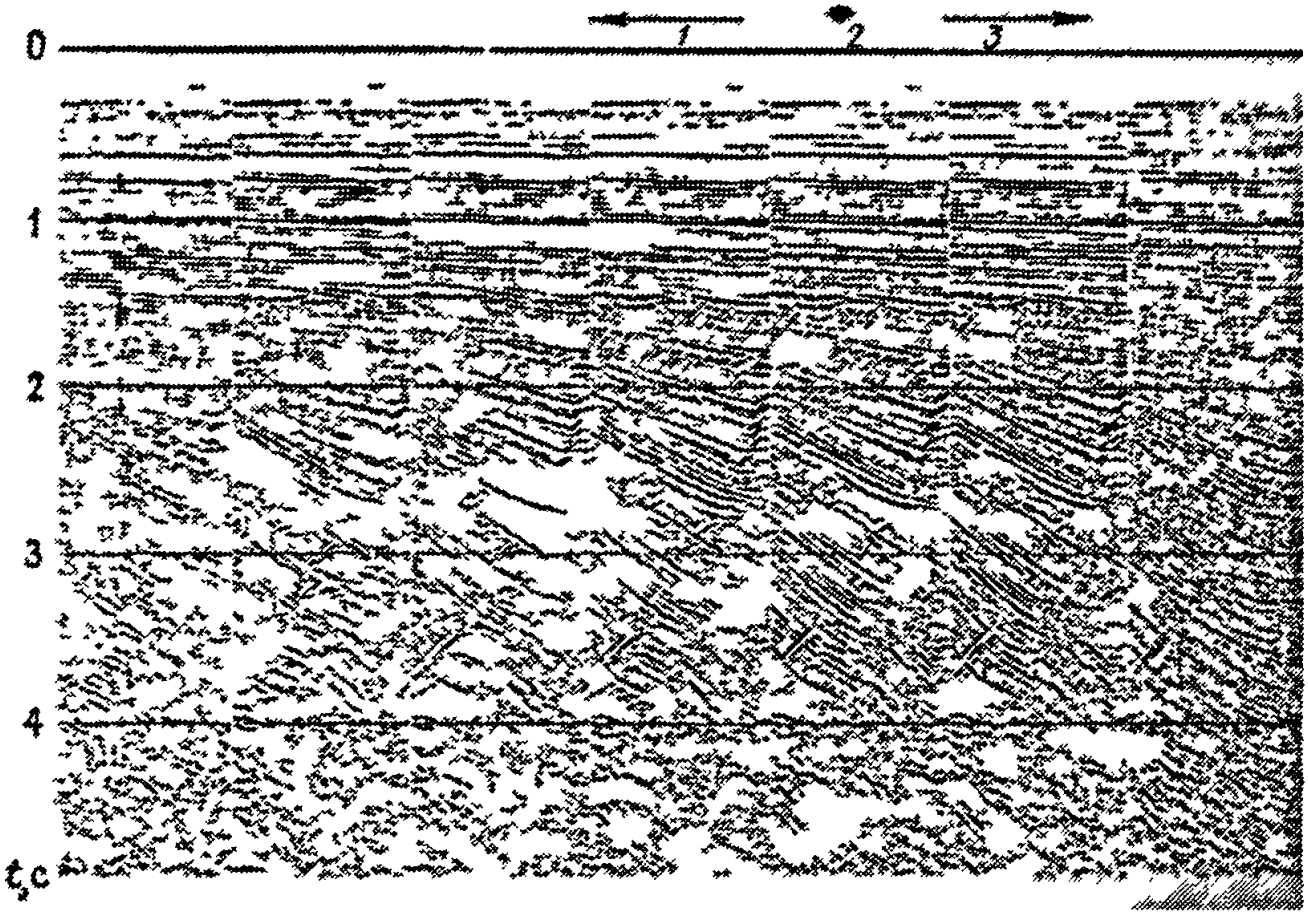



РИС. 101. Суммы ОГТ с кинематическими поправками за наклон при различных скоростях суммирования:
*1* высокие скорости; *2* скорости суммирования ОГТ; *3* низкие скорости

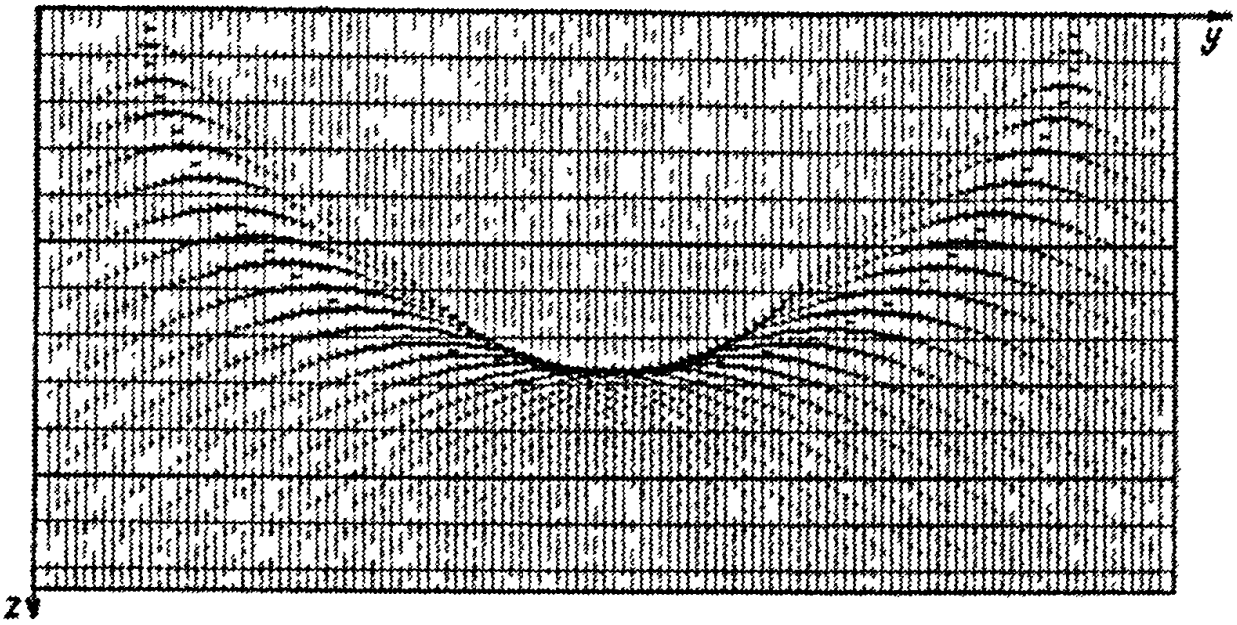



РИС. 102. Оператор частичной миграции до суммирования Рокки

мирования ОГТ Рокки разъясняется на рис. 102. Вообразим себе сейсмический разрез при постоянном удалении $P(t, y, h=h_0)$, в некоторой точке $(t_0, y_0)$ которого содержится импульсная функция. Модель среды, отвечающая таким наблюдениям, представляет собой отражающую границу в форме эллипса, причем точка взрыва располагается в одном из фокусов, а приемник — в другом. По этой модели решается прямая задача — строится разрез при нулевых удалениях, т. е. каждая точка эллипса растягивается в гиперболу. Объединив обе названные выше операции — миграцию при постоянном удалении и дифракцию при нулевом удалении — получим оператор Рокки.

Аналитическое выражение для времени пробега по кривой оператора Рокки представляет собой узкий эллипс (рис. 103). Дадим без вывода уравнение этой кривой:

$$1=(y-y_0)^2/h^2+t^2/t_0^2. \qquad (219)$$

Оператор Рокки кажется независимым от скорости, но это не совсем так, поскольку кривая обрывается при значении градиента $dt/dy=2/v$.

Оператор Рокки преобразует разрез при постоянном удалении в разрез при нулевом удалении. Такое преобразование достигает двух целей. Во-первых: оно вводит нормальную кинематическую поправку и, во-вторых, рассчитывает и вводит кинематические поправки за наклон Шервуда. Оператор, изображенный на рис. 102, свертывается по оси средних точек разреза при постоянном удалении и в результате получается разрез при нулевых удалениях в один из моментов времени, скажем $t_0$. Для каждого $t_0$ нужно сконструировать свой оператор Рокки. Сигналы на выходе оператора при всех $t_0$

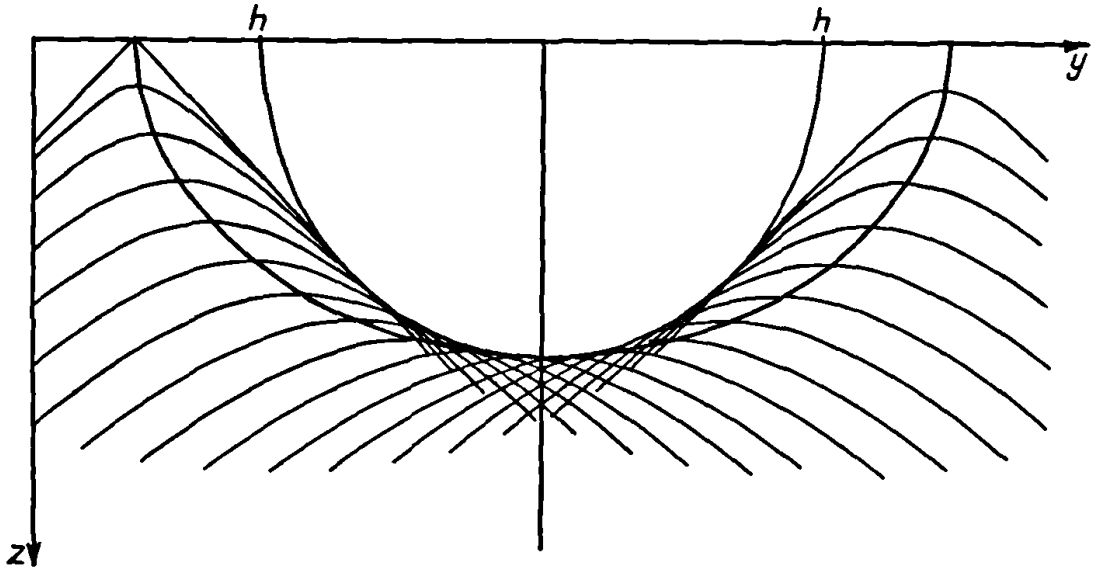



РИС. 103. Эллипс Рокки

нужно наложить друг на друга. На рис. 104 приводится результат суперпозиции для нескольких значений $t_0$.

Оператор Рокки особенно удобен с практической точки зрения. Вместо большого широкого эллипса, с помощью которого производится миграция каждого разреза при постоянном удалении, нужен лишь маленький узкий оператор Рокки. По рис. 104 можно судить, что энергия в операторе ввода кинематической поправки за наклон концентрируется в узком интервале в нижней его части. В предельном случае, когда $h/vt_0$ мало, вся энергия собирается в центральной прогнутой части оператора, и он фактически превращается в дельта-функцию. После корректировки каждого значения удаления и перевода его в нулевое скорость определяется по остаточной нормальной кинематической поправке. Затем наблюдения суммируются по ОГТ и подвергаются миграционному преобразованию.

Узость эллипсоида Рокки имеет два преимущества. С практической точки зрения это означает, что для определения скорости и выполнения суммирования ОГТ нет необходимости вводить в основное запоминающее устройство компьютера много средних точек. Более фундаментальное соображение состоит в том, что ввиду компактности самого оператора над наблюдениями не совершается каких-то больших действий. Последнее важно потому, что указанная операция выполняется на ранней стадии обработки, пока скоростной разрез еще недостаточно изучен. Поэтому может оказаться удобным принять скорость в операторе Рокки постоянной, усредненной, например равной 2,5 км/с.

Выражение для оператора кинематической поправки за наклон границ может стать полезным при реализациях типа кирхгофовской. В данном случае важнее рассмотреть фурье-представление самого оператора, которое будет дано в следующем подразделе.

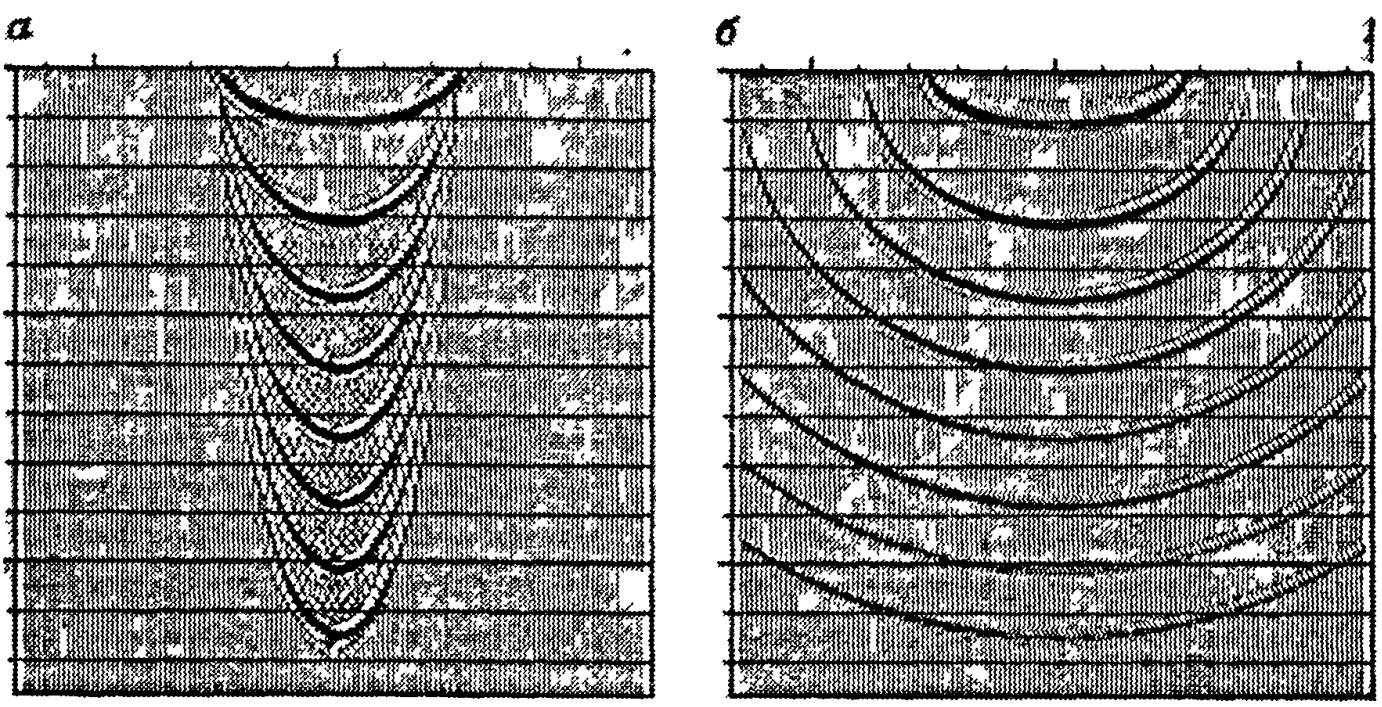



РИС. 104. Волна точечного источника при вводе кинематической поправки за наклон (*а*) и миграция при постоянном удалении (*б*)

## Кинематическая поправка за наклон в разрезы постоянного удаления Хейла

Хейл [71] нашел фурье-представление кинематической поправки за наклон границ. Определяющие уравнения сведены в табл. 8.

Чтобы воспользоваться зависящими от угла наклона границ уравнениями из табл. 8, необходимо знать угол наклона отражающих границ $\alpha$. Его можно замерить по разрезу нулевых удалений. На разрезе нулевых удалений, построенном в пространстве Фурье, синус угла наклона границы равен $vk_y/2\omega$. Чтобы подчеркнуть тот факт, что этот замер годится только для разрезов нулевых удалений, будем писать $\omega_0$:

$$\sin\alpha = vk_y\ 2\omega_0. \qquad (220)$$

При горизонтальном залегании границ нормальная кинематическая поправка должна преобразовывать любую сейсмотрассу в точную копию сейсмотрассы с нулевым удалением (приемник и источник совмещены). При наклонном залегании

**Таблица 8**

**Уравнения нормальных кинематических поправок и поправок за наклон границ**

| | | |
|---|---|---|
| Нормальная кинематическая поправка | $t \to t_n$ | $t = \sqrt{t_n^2 + 4h^2 v^{-2}}$ |
| Кинематическая поправка Левина | $t \to t_0$ | $t = \sqrt{t_0^2 + 4h^2 v^{-2}\cos^2\alpha}$ |
| Кинематическая поправка за наклон границ | $t_n \to t_0$ | $t = \sqrt{t_1^2 - 4h^2 v^{-2}\sin^2\alpha}$ |

отражающих границ совместное введение нормальной кинематической поправки и поправки за наклон границ должно преобразовывать любой разрез постоянного удаления в разрез нулевого удаления. Полученные описанным путем из разрезов постоянного удаления псевдоразрезы нулевого удаления будем обозначать через $p_0(t_0, h, y)$. Сначала заменим координату Фурье $k_y$. Затем выполним фурье-преобразование по времени, положив, что $\omega_0$ является фурье-аналогом $t_0$:

$$P_0(\omega_0, h, k_y) = \int dt_0 e^{i\omega_0 t_0} P_0(t_0, h, k_y). \quad (221)$$

Изменим переменную интегрирования с $t_0$ на $t_n$:

$$P_0(\omega_0, h, k_y) = \int dt_n \frac{dt_0}{dt_n} e^{i\omega_0 t_0(t_n)} P_0(t_0(t_n), h, k_y). \quad (222)$$

Выразим подынтегральное выражение через наблюдения с введенными нормальными кинематическими поправками $P_n$. Это делается с учетом равенства $P_n(t_n, h, k_y) = P_0(t_0(t_n), h, k_y)$:

$$P_0(\omega_0, h, k_y) = \int dt_n \frac{dt_0}{dt_n} e^{i\omega_0 t_0(t_n)} P_n(t_n, h, k_y). \quad (223)$$

Как и в случае миграционного преобразования Столта, якобиан преобразования, т. е. $dt_0/dt_n$, играет роль весовой функции, но не вносит временных сдвигов. Введение кинематических поправок за наклон границ фактически производится экспоненциальным членом последнего выражения.

Опустив играющий незначительную роль якобиан, процесс в целом можно представить в виде следующей программы:

$P(k_y) = FT[P(y)]$
$P_n(t_n) = NMO[P(t)]$
для всех $k_y$ { # 3 вложенных цикла, взаимозаменяемых
для всех $h$ { # 3 вложенных цикла, взаимозаменяемых
для всех $\omega_0$ { # 3 вложенных цикла, взаимозаменяемых
sum = 0
для всех $t_n$ {

$$\text{sum} = \text{sum} + \exp\left[ i\omega_0 \left( t_n^2 + \frac{h^2 k_y^2}{\omega_0^2} \right)^{1/2} \right] P_n(t_n, h, k_y)$$

}
$P_0(\omega, h, k_y) = \text{sum}$
} } }
$P_0(t_0, h, y) = FT2D[P_0(\omega_0, h, k_y)]$

Заметим, что экспоненциальная функция во внутреннем цикле программы не зависит от скорости. Скорость в уравнении кинематической поправки за наклон границ (см. табл. 9) исчезает после подстановки $\sin\alpha$ из уравнения (220). Следовательно, кинематическая поправка за наклон не зависит от скорости (рис. 105).

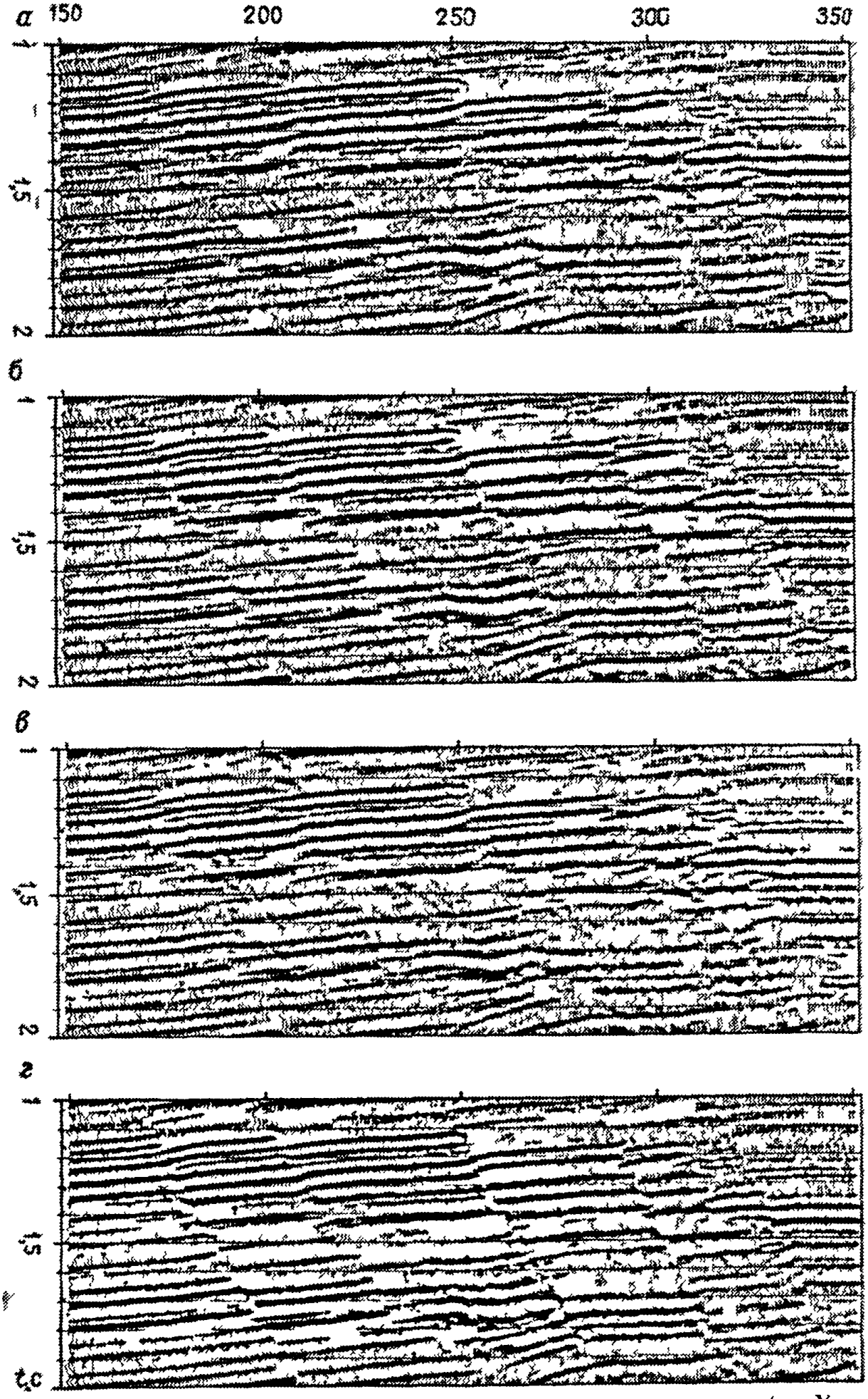



РИС. 105. Обработка с вводом кинематических поправок за наклон (по Хсилу): *а* разрез ОСТ без ввода кинематических поправок за наклон; *б* мигрированный разрез без ввода кинематических поправок за наклон; *в* разрез ОСТ с введенными кинематическими поправками за наклон; *г* мигрированный разрез ОСТ с введенными кинематическими поправками за наклон

Описанная выше процедура требует ввода нормальных кинематических поправок перед коррекцией за наклон границ. Изменение порядка операций на обратный будет аппроксимацией. Это усложняет вычисления, так как предпочтительнее сделать один раз дорогостоящую не зависящую от скорости операцию ввода кинематических поправок за наклон, а затем перейти к итеративной, но зато позволяющей определять скорости, операции ввода кинематических нормальных поправок.

### Радиальные трассы Оттолини

Обычно под сейсмограммой общей средней точки понимается набор сейсмических трасс, т. е. функций времени, каждая из которых соответствует определенному удалению $h$. Но поле данных $(h, t)$ можно представить в иной координатной системе. Хорошими свойствами обладает система радиальных трасс, предложенная Турханом Танером. Для этой системы берутся трассы при постоянном угле, а не $h$. Идея иллюстрируется рис. 106.

Кроме определенных теоретических достоинств, которые станут очевидными позже, предложенная система имеет и некоторые практические преимущества. Среди них можно отметить следующие: 1) там, где наблюдения не равны нулю, трассы равномерно заполняют пространство; 2) на малых временах, когда малы длины волн, трассы располагаются близко друг к другу, там же, где длины волн велики, они располагаются реже; 3) энергия трассы стремится отображать распространение волны в пространстве при фиксированном угле. Последнее свойство особенно важно при наличии многократных отражений (см. раздел 5.6). Но для наших целей лучшим свойством радиальных трасс является другое.

Ричард Оттолини заметил, что точечный рассеиватель внутри среды на разрезе радиальных трасс выглядит как точная гипербола, а не гиперболоид с уплощенной вершиной. Уравнение годографа в случае точечного рассеивателя — «пирамиду Хеопса» — можно записать в виде уравнения «длины струны» или растянутой окружности (см. раздел 3.2). Введя определение

$$\sin\psi = 2h/vt \tag{224}$$

и подставив его в уравнение (182) из раздела 3.2, получим

$$vt = 2\left[z^2/\cos^2\psi + (y-y_0)^2\right]^{1/2}. \tag{225}$$

Умножив ось $z$ на $\cos\psi$, снова получим случай окружности и гиперболы! На рис. 107 показан трехмерный эскиз скрытой гиперболы.

РИС. 106. Внутри объема данных, наблюдаемых по профилям МОВ, находятся плоскости, называемые сечениями радиальных трасс. Точечный рассеиватель внутри среды образует на разрезе радиальных трасс гиперболу:
*1* время; *2* удаление приемника от источника; *3* координата средней точки

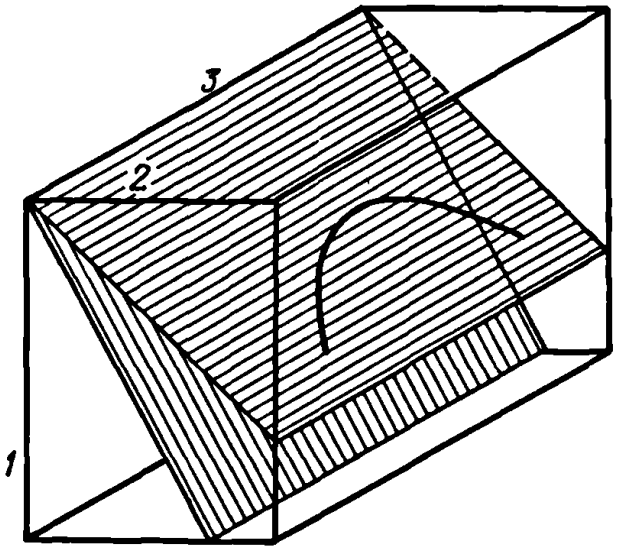
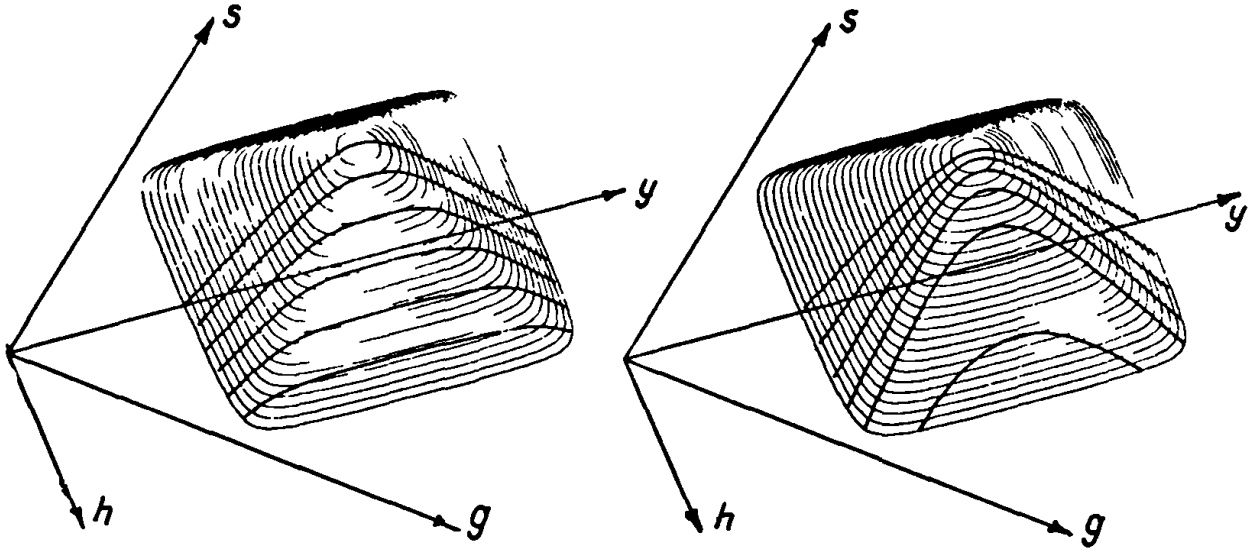



РИС. 107. Скрытая гипербола пирамиды Хеопса представляет собой гиперболу дифрагированной волны в сечении радиальных трасс




Позже убедимся, что с радиальной гиперболой (см. рис. 107) обращаться проще, чем с уплощенным гиперболоидом, наблюдаемым при постоянстве координаты $h$. Уравнения кинематических поправок в координатах радиальных трасс сведены в табл. 9.

Второе уравнение в табл. 9 представляет собой обычное уравнение излучающей границы для случая миграционного преобразования при нулевом удалении. Его можно получить и из уравнения с двумя квадратными корнями, если положить $H=0$. В данной таблице в нем содержится скорость в среде, а не половина ее значения. Из уравнения (225) следует, что гиперболы с различающимися значениями $\psi$ связаны между собой умножением оси $z$ на $\cos\psi$. В соответствии с теорией фурье-преобразований деление $z$ на $\cos\psi$ равнозначно умножению $k_z$ на $\cos\psi$. Это значит, что первое уравнение в табл. 9 можно использовать для описания гипербол миграционного и дифракционного преобразований на плоскости разрезов радиальных трасс. Путем исключения $k_z$ из первого и второго уравнений получается уравнение, стоящее в середине табл. 9. Оно объединяет операцию миграционного преобразования всех удалений (фактически всех радиальных углов) и последующую

операцию дифракционного преобразования к нулевому удалению. Таким образом, окончательный результат равен результату продолжения по удалениям, т. е. введению нормальных и угловых кинематических поправок. Последние два уравнения в табл. 9 являются разложениями среднего уравнения $\omega \to \omega_0$ на два последовательных процесса $\omega \to \omega_s$ и $\omega_s \to \omega_0$. Последние подобны угловой и нормальной кинематическим поправкам, только сами операции совершаются в радиальном пространстве. Радиальная нормальная кинематическая поправка представляет собой не зависящее от времени растяжение, отсюда и соответствующее обозначение $\omega_s$.

В отличие от случая с постоянным удалением, здесь кинематические поправки за наклон границ вводятся перед растяжением, т. е. до операции определения скоростей. Докажем, что угловая кинематическая поправка действительно не зависит от скорости. Подставим уравнения (224) в радиальное преобразование ввода угловой кинематической поправки из табл. 9 и получим уравнение преобразования времени в растянутую его версию вида

$$\frac{h^2}{t^2} k_y^2 + \omega_s^2 = \omega^2. \qquad (226)$$

Заметим, что скорость $v$ исчезла из (226). Следовательно, угловая кинематическая поправка в радиальных координатах не зависит от скорости. Для обработки наблюдений с использованием угловых кинематических поправок $\omega \to \omega_s$ не требуется знания скоростей. Радиальные координаты выгодны тем, что описанный выше сравнительно дорогостоящий процесс выполняется перед тем, как определяется скорость $\omega_s \to \omega_0$.

Процесс ввода угловых кинематических поправок $\omega \to \omega_s$ удобно реализовывать в алгоритмах типа столтовского с помощью уравнения (226).

Ранее предполагалось, что скорость постоянная. Одно из эффективных практических приближений может заключаться в обращении к анализу скоростей $v(z)$ после того, как введены угловые кинематические поправки, непосредственно перед тра-

**Таблица 9**

**Уравнения угловых и нормальных кинематических поправок в координатах радиальных трасс**

| | | |
|---|---|---|
| Миграция | $\omega \to k_z$ | $k_y^2 + k_z^2 \cos^2\psi = 4\omega^2 v^2$ |
| Дифракция на нулевое удаление | $k_z \to \omega_0$ | $k_y^2 + k_z^2 = 4\omega_0^2 v^2$ |
| УКП+НКП | $\omega \to \omega_0$ | $0{,}25 v^2 k_y^2 \sin^2\psi + \omega_0^2 \cos^2\psi = \omega^2$ |
| Радиальные УКП | $\omega \to \omega_\delta$ | $0{,}25 v^2 k_y^2 \sin^2\psi + \omega_s^2 = \omega^2$ |
| Радиальные НКП | $\omega_s \to \omega_0$ | $\omega_0 \cos\psi = \omega_s$ |

диционным скоростным анализом, суммированием ОГТ и миграцией при нулевых удалениях.

Методы радиальных трасс Оттолини и постоянного удаления Хейла в условиях однородной среды обрабатывают все углы без погрешностей, но ни один из них не дает точных результатов в условиях слоистости по скоростям, и нет ясности относительно того, что это вообще возможно, поскольку они не базируются на уравнении с двумя квадратными корнями. Метод расчета угловых кинематических поправок, предложенный Йылмазом, основывается на ДКК-уравнении, поэтому можно надеяться, что он окажется точным в условиях скоростной стратификации, но и здесь не обошлось без аппроксимаций, зависящих от угла. Поэтому в данной области еще необходимы теоретические исследования.

### Свойство угловых кинематических поправок, компенсирующее искажения дискретизации

Можно подумать, что если пространство ($y$, $h$, $t$) дискретизировано по оси $y$ с интервалом $\Delta y$, то окончательный мигрированный разрез $P(y, z)$ будет обладать пространственной разрешенностью не лучшей, чем $\Delta y$. На самом деле это не так.

Работающий в данном случае основной принцип был известен еще Шеннону. Если функция времени и ее производная дискретизированы с интервалом по времени, равным $2\Delta t$, то их можно полностью восстановить при условии, что граничная частота исходного сигнала меньше $1/(2\Delta t)$. В более общем виде данная теорема звучит следующим образом. Если сигнал отфильтрован с применением $m$ независимых друг от друга фильтров и полученные $m$ сигналов дискретизированы с интервалом $m\Delta t$, то исходный сигнал поддается восстановлению.

Ниже объясняется, каким образом данная концепция применяется при обработке сейсморазведочных материалов. В качестве опорного сигнала служит модель среды. Разрезы при постоянном удалении являются ее отфильтрованными версиями. Вспомним, что точка отражения волны, прослеживаемой на сейсмограмме ОГТ, по мере удаления от источника перемещается вверх по восстановлению отражающего горизонта. Подробности можно найти в работе [20], где впервые указано на присущее угловым кинематическим поправкам свойство компенсации искажений, вызываемых недостаточно частой дискретизацией. Сейчас, когда возрастает интерес к трехмерной сейсморазведке, этому свойству угловой кинематической поправки должно быть уделено особое внимание.

**Упражнение**

Опишите влияние якобиана на процесс расчета и ввода угловых кинематических поправок, предложенный Хейлом.

## 3.7. Латеральные изменения скоростей

С точки зрения геолога-интерпретатора латеральные вариации скоростей вызывают появление искажений волновой картины на сейсмических разрезах. При этом искажения имеют более серьезный характер, чем это может показаться на первый взгляд. Геофизик-интерпретатор должен решать проблему латеральных вариаций скорости количественным путем. Перед ним стоят два вопроса. Во-первых, как получать надежные оценки величины латеральных изменений скоростей? Во-вторых, можно ли воспользоваться полученными оценками для переработки сейсморазведочных данных?

Исследование влияния наклонов границ и координаты удаления привело к появлению простых процедур обработки. К сожалению, рост горизонтальных градиентов скоростей и неумение их учитывать вызывает большую трудность при обработке, которую мы должны попытаться преодолеть. Большими латеральными вариациями скорости характеризуется разрез над крупнейшим нефтяным месторождением Северной Америки Прадхо-Бей. К счастью, мы располагаем множеством идеализированных примеров, простых для понимания. Любая «окончательная» теория должна содержать в себе эти примеры в качестве предельных случаев.

Подытожим сказанное. Предполагается, что уравнение с двумя квадратными корнями работает, если квадратные корни разложены в ряд и если приемлемы обычные ограничения по точности, связанные с углами. Трудность применения ДКК-уравнения связана с тем, что оно указывает способ миграции и суммирования ОГТ только при условии известного скоростного разреза. В методе определения самого скоростного распределения $v(x, z)$ или какой-либо его функции, предложенном Кьяртанссоном, предполагается, что лучи прямолинейны, наклон границ отсутствует, а отражающая граница единственная и плоская. В то же время суммирование ОГТ вместе с частичной миграцией до суммирования допускает произвольное распределение рассеивателей в среде, но при этом определение скоростей $v(z)$ возможно только при условии отсутствия изменений их по латерали. Налицо множество темных мест. Начнем с понятных частных случаев и затем перейдем к сложным и запутанным.

### Скорость замещения

Иногда везет и нам становится известным скоростной разрез, как, например, при моделировании волновых полей или

же после бурения 300 неглубоких скважин. Надежную оценку скорости можно сделать в том случае, когда мы располагаем рельефом морского дна, так как нередко трудности определения скорости связаны с верхней частью разреза. Может статься, что сейсморазведка проведена над редкими известковыми рифами в Красном море.

В случае известного скоростного разреза и латеральных изменений, приуроченных к верхней части среды, используется понятие скорости замещения. Предположим, что вам удалось заморозить воду в Красном море до такого состояния, что скорости пробега волн в толще льда и в известняковых рифах уравнялись. В результате исчезнет сложность отражений от глубинных геологических объектов. Конечно, заморозить Красное море невозможно, но можно так обработать сейсморазведочные наблюдения, чтобы на результатах обработки влияние моря не сказывалось.

Сначала продолжим в нижнее полупространство наблюденные данные до некоторого уровня, находящегося ниже зоны латеральной изменчивости. После этого продолжим их вверх через однородную замещающую среду до поверхности наблюдений.

Для выполнения этой работы можно было бы в принципе воспользоваться ДКК-уравнением, но в реальности такой подход оказался бы и дорогим и непрактичным. Лучше всего исследовать обе операции — движение вниз и затем вверх — применяемые одновременно. Поскольку они в значительной мере противоположны одна другой, то результат воздействия ими на сейсмограммы должен быть некоторой функцией разности. Например, уравнение

$$\partial P/\partial z = i\omega\left[1/v(s)+1/v(g)-2/v_{\text{ср}}\right]P \qquad (227)$$

совмещает операции продолжения вниз и вверх и мало влияет на волновое поле $P$, когда скорости, входящие в него, мало отличаются друг от друга. Уравнение (227) по существу является оператором сдвига во времени. Существует процесс обработки, известный как введение статических поправок. Термин статический означает «неизменный во времени», т. е. величина временного сдвига не зависит от времени его ввода. Если удовлетворительные результаты получаются при вводе одних статических поправок, это значит, что латеральные изменения скорости происходят только в самой верхней части среды. Именно так часто и получается. Уравнение (227) приспособлено и для ввода переменных во времени временных сдвигов, так как $v(s)$ и $v(g)$ могут быть любыми функциями глубины $z$. Обычно используются отражения, подходящие к приемной расстановке под большими углами, поэтому жела-

ıельно расширить область применения уравнения (227) и на этот случай. Исследования по расширению области применения уравнения (227) можно найти в работе [95]. Там же показано, каким образом можно записать дифференциальные уравнения в частных производных, чтобы описать влияние латеральных вариаций скорости на значения скоростей ОГТ. В работе [15] дан пример использования метода Кирхгофа в случае нерегулярной поверхности приведения.

На практике задача определения латеральных вариаций скоростей обычно сложнее, чем задача использования найденных скоростей в процессе миграционного преобразования. Статические временные сдвиги определяются различными способами, использующими либо превышения рельефа местности над уровнем моря, либо времена пробега волн от забоев взрывных скважин до поверхности земли, либо функции взаимной корреляции сейсмограмм отраженных волн. В работе [149] дан способ определения статических поправок по корреляционным функциям.

Там, где латеральные вариации захватывают более глубокие части осадочного чехла, временные сдвиги становятся зависимыми от времени. Последние называются динамическими временными сдвигами. При их расчете угол наклона слоев полагается равным нулю. Через модель среды с изменяющейся по латерали скоростью проходят траектории волновых лучей. Лучи проходят и через опорную модель, у которой скорость по латерали не меняется. Динамические временные сдвиги определяются по разности времен пробега через сравниваемые модели среды. Обратите внимание на рис. 108. Там, где латеральные вариации скорости распространяются на бóльшую глубину, задача ввода динамических временных сдвигов становится похожей на задачу миграционного преобразования. На рис. 109 демонстрируется действие процедуры обработки «Обнаружение», разработанной компанией «Диджикон». Компания не раскрыла, который из методов был использован в этой процедуре — временного сдвига или волнового уравнения.

### Латеральное смещение вершин гипербол

На рис. 110 изображен точечный рассеиватель, расположенный под наклонной границей раздела. Как обычно, скорость в нижележащем слое выше. Такая модель среды общепринята при решении многих задач, связанных с латеральными изменениями скоростей. Времена подхода к поверхности наблюдений будут изменяться приблизительно по гиперболическому закону, причем отклонения от него объясняются скачком скорости на границе. Минимальное время (вершина гиперболоида) сместилось от своего обычного положения непосредственно над

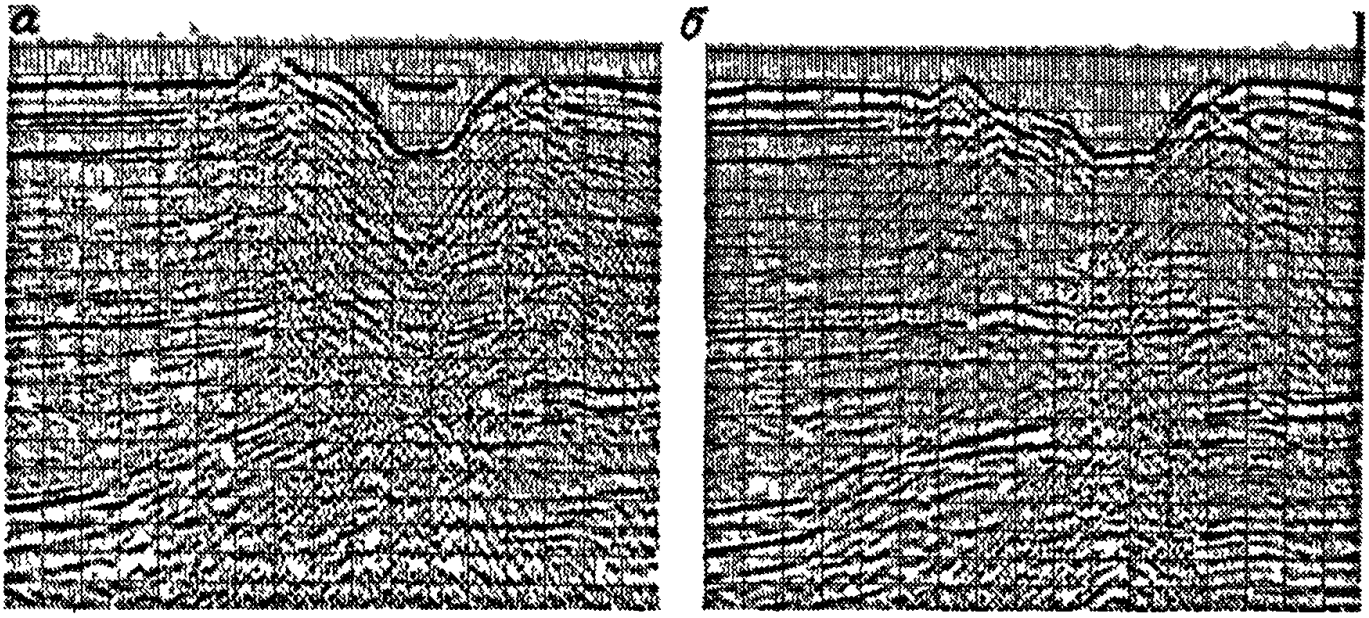



РИС. 108. Сейсмические данные (*а*) с введенными динамическими поправками (б)

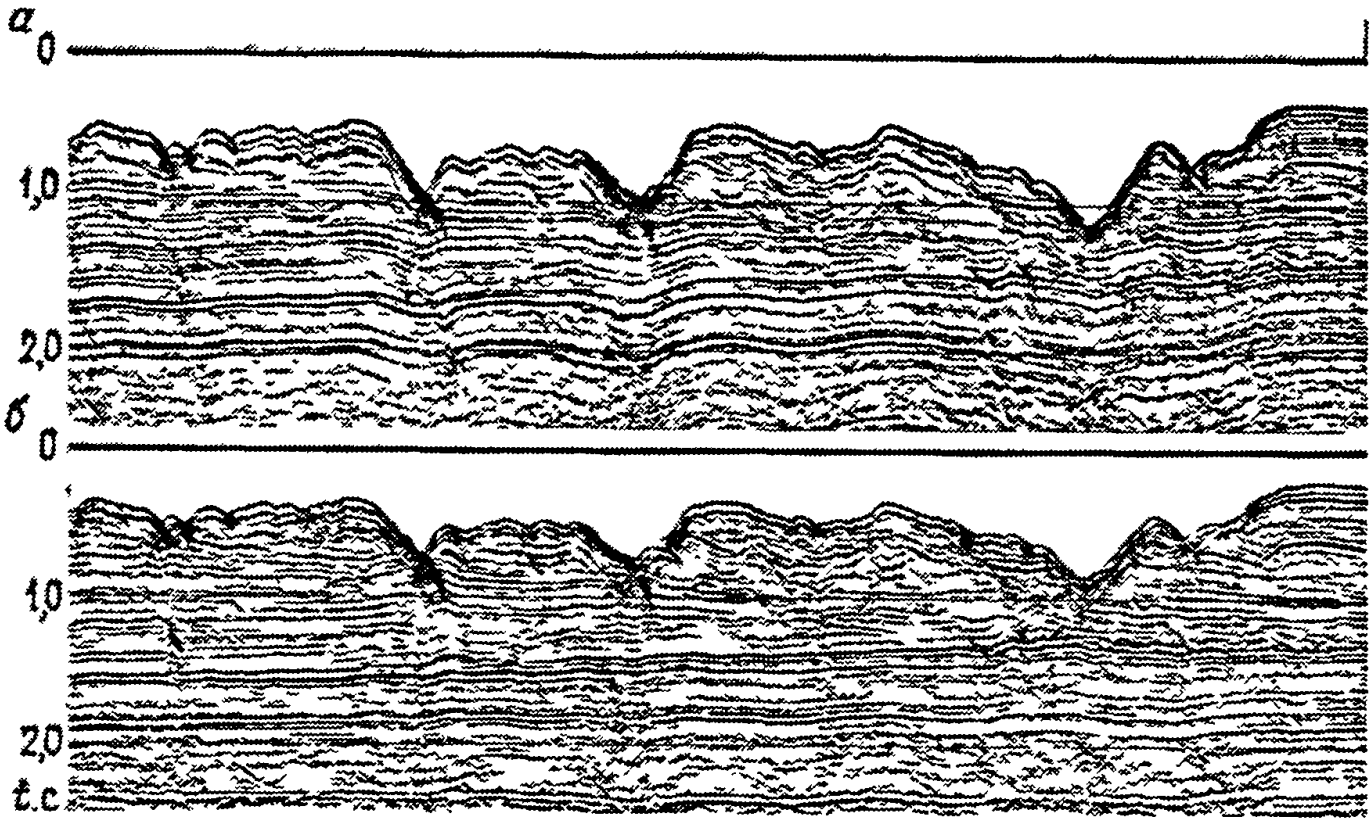



РИС. 109. Пример обработки исходных данных (*а*) с изменяющейся скоростью (б). Глубокие горизонты стали более пологими и протяженными

точечным рассеивателем. Отметим, что: 1) минимальному времени соответствует луч, выходящий вертикально вверх; 2) минимальное время находится на высокоскоростной стороне от точечного рассеивателя; 3) по мере увеличения горизонтального смещения минимальное время годографа смещается все дальше от рассеивателя. Годограф прямой волны приближенно гиперболический, но правая асимптота дает значение скорости в среде в правой части разреза, а левая скорость в левой части.

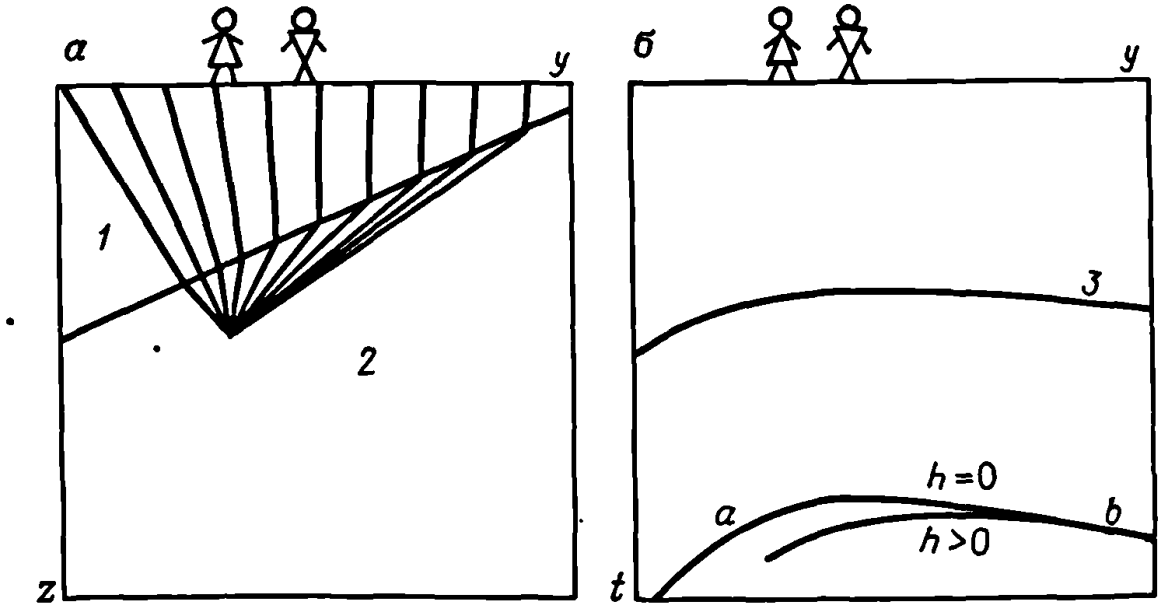



РИС. 110. Лучи, исходящие из точечного рассеивателя, расположенного под скоростным клином (*а*), и годограф дифрагированной волны (*б*):
*1* — пониженные скорости; *2* повышенные скорости; *3* время пробега в одну сторону

Обозначим через $T(x)$ время пробега волны от точечного источника до точки $x$ на поверхности наблюдений. Тогда время пробега на разрезе при постоянном удалении выразится формулой $t(y)=T(y+h)+T(y-h)$. Чтобы найти время самого раннего вступления, положим $dt/dy=0$. Последнее доказывает, что угловой коэффициент в точке $a$ на рис. 100 равен угловому коэффициенту в точке $b$ с обратным знаком. Отсюда становится ясным, почему с увеличением горизонтальной координаты растет величина смещения вершины гиперболоида в сторону от рассеивателя.

Латеральное изменение скоростей приводит к тому, что гиперболы теряют свою симметричность. С точки зрения вычислений именно линзовый член уравнения перекашивает гиперболы и приводит к перемещению их вершин по латерали.

## Мнимый дифрагирующий элемент

Следующий пример латеральных изменений скоростей приведен на рис. 111, также заимствованном из диссертации Кьяртанссона. Физическая модель представляет собой три клина с постоянными скоростями, разделенные прерывистыми границами. Нижняя кромка модели среды тоже служит отражающей границей. Волновое поле, приведенное на рис. 111, рассчитано на основании концепции излучающих границ, которую Кьяртанссон посчитал за приемлемое приближение к разрезу при нулевых удалениях. Заметим, что под острием клина со скоростью 4 км/с наблюдается небольшая дифрагированная волна, наложенная на нижележащую горизонтальную отражающую границу. Так как подобная дифрагированная

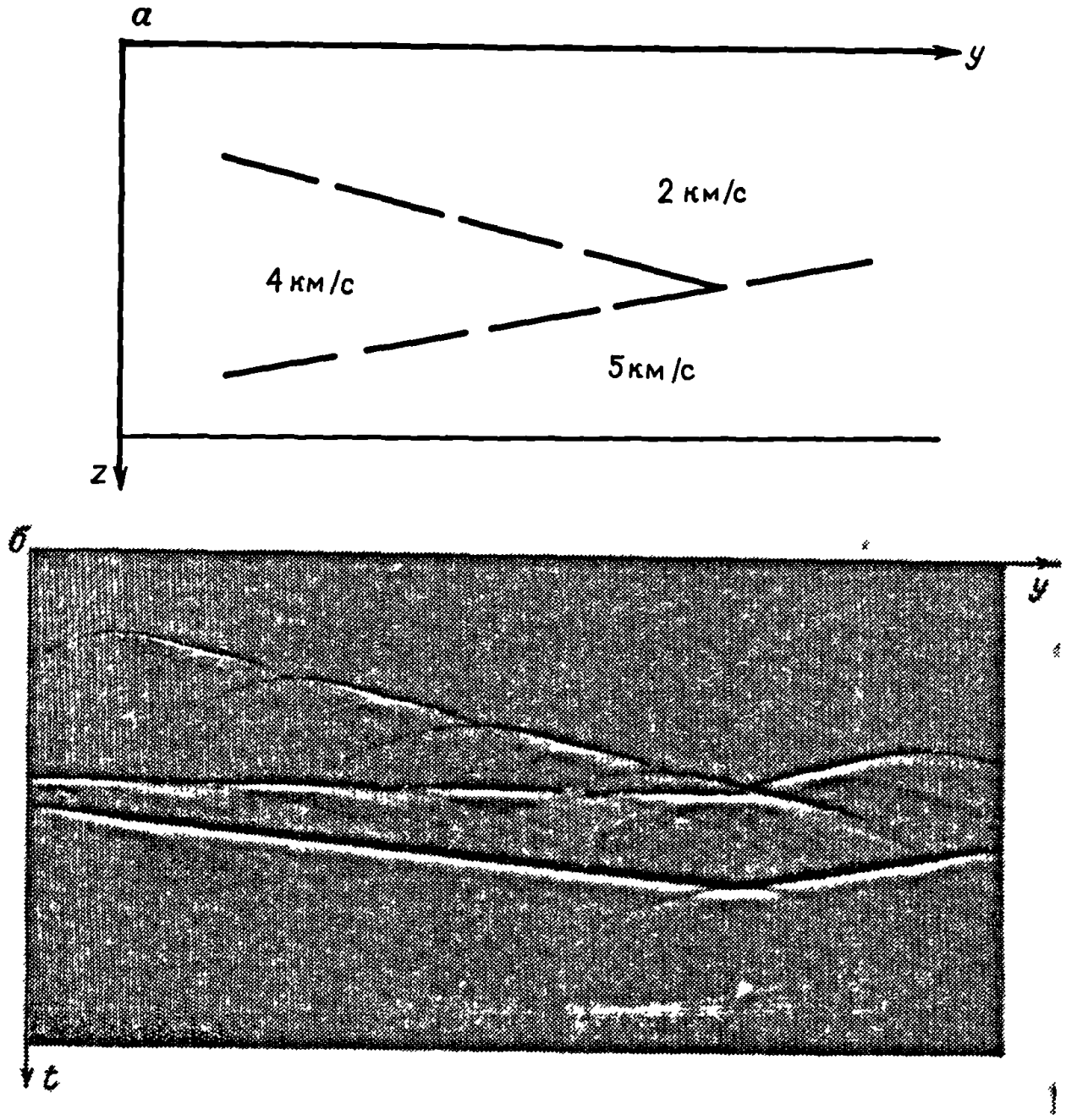



РИС. 111. Удобная для изучения смещений по латерали, но физически нереализуемая по причине кусочности границы раздела модель (*а*) и рассчитанные по модели синтетические данные с мнимой дифракцией под острием клина (*б*)

волна не имеет ничего общего с горизонтальной отражающей границей, на которой она наблюдается, ее назвали «мнимой». Мнимые дифрагированные волны нелегко обнаружить, но они встречаются. Если обратиться к практическим примерам, то можно предположить, что «яркие пятна», демонстрировавшиеся в разделе 3.1, являются мнимыми дифракциями. Судя по публикациям, мнимые дифракции служат средством обнаружения небольших по размерам высокоскоростных карбонатных рифов.

### Восстановление волнового фронта

На рис. 112 показан еще один пример преломления лучей на промежуточных границах. На первом кадре слева изображена

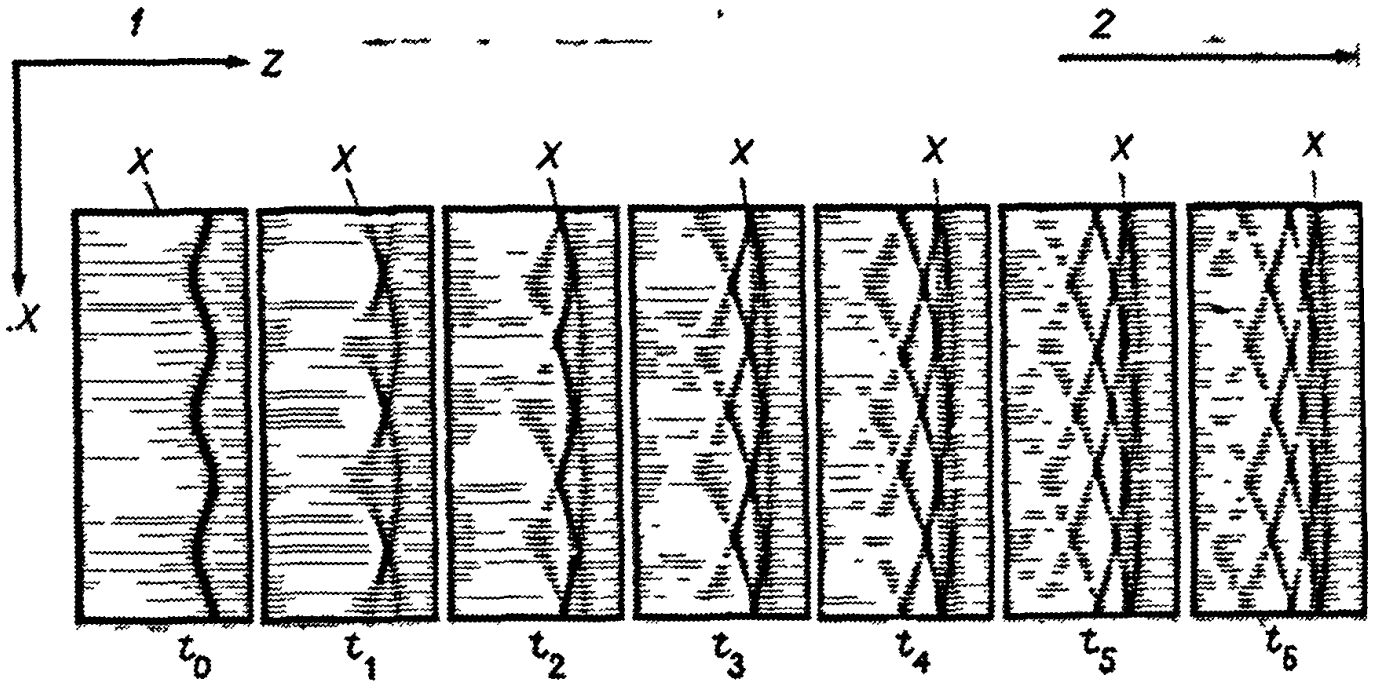



РИС. 112. На первом слева кадре изображена плоская волна, только что претерпевшая искажение своего фронта под воздействием слагаемой тонкой линзы. После этого слагаемое тонкой линзы обратилось в нуль. На последующих кадрах демонстрируется эффект роста дифракции, удлинения волнового пакета и восстановление первого вступления:

*1* начало; *2* направление распространения

плоская волна сразу после того, как она была искажена в волнистую под воздействием слагаемого тонкой линзы. После этого слагаемое тонкой линзы обращается в нуль и на последующих кадрах отмечается возрастание количества дифракции.

## Отражение от плоскости разрывного нарушения

В направлении поперек одиночного вертикального разрывного нарушения скорость будет вести себя как простая ступенчатая функция горизонтальной координаты. Волны, распространяющиеся через такое нарушение, ослабляются из-за того, что коэффициенты отражения и прохождения зависят от угла падения. Поскольку обычно волны распространяются по направлениям, близким к вертикальному, для образования сильных внутренних отражений нужны лишь небольшие перепады скорости. Опираясь на последнее рассуждение, можно предположить, что крутопадающие разрывные нарушения будут искажаться в большей степени и, следовательно, будут заметнее на разрезах при небольших удалениях, чем на разрезах при больших удалениях или на разрезах ОГТ.

Данное явление еще более запутано при наблюдении на плоскости $(x, t)$. На рис. 113 представлен пример, смоделиро-

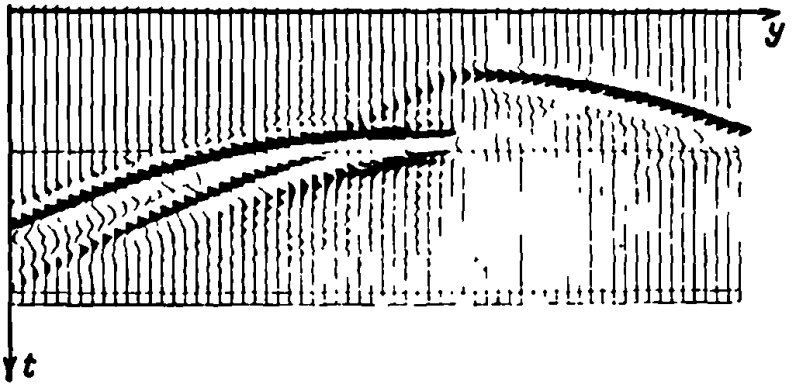



РИС. 113. Синтетические данные, полученные в результате расчетов по концепции излучающих границ для модели среды, состоящей из точечного рассеивателя и скачка скорости $v_1$ $v_2=1$, 2 на вертикальном контакте (по Кьяртанссону)

ванный Кьяртанссоном и использованный в одной из викторин. Изучите его и ответьте на следующие вопросы.

1. В низко- или высокоскоростной среде находится точечный рассеиватель?

2. Выделите четыре волны и нарисуйте их лучевые траектории.

3. Найдите и объясните два вида вычислительных искажений искусственного происхождения.

4. Найдите быстрозатухающую волну.

5. Найдите сдвиг фаз у закритического отражения.

6. На разрезе нулевых удалений имеется луч, не показанный на рис. 113. Где он находится?

При ответе на задание 5 следует учесть, что отражение при углах больше критического претерпевает фазовый сдвиг. Последнее обстоятельство обратит импульсоид в дублет, который можно легко принять за два луча.

Геометрические свойства среды, изображенной на рис. 113, таковы, что концепция излучающих границ не обеспечивает расчета всех лучей, наблюдаемых на разрезе нулевых удалений. Концепция излучающих границ позволяет рассчитывать траектории лучей двух типов: луча, распространяющегося прямо к поверхности, и луча, который отражается от плоскости разрывного нарушения и затем достигает поверхности наблюдений. На разрезе нулевых удалений присутствуют лучи трех типов. Два из них только что упомянуты, но распространяются по двойному пути вверх и вниз. Еще один луч, отсутствующий на рис. 113, падает на плоскость нарушения при распространении только в одну сторону.

Существует простой способ построения разрезов постоянного удаления в латерально-изменчивых средах, когда отражателем служит просто точка. Рассчитанная по методу излучающих границ сейсмотрасса для точки приема $x=s$ представляет собой просто время, свернутое с трассой, зарегистрированной в точке $x=g$. В результате свертки времена пробега складываются. Генерируются даже такие лучи, которые не согласуются с концепцией излучающих границ. Жаль, что изложенная методика не срабатывает в случае моделей отражающих границ, более сложных, чем простая точка отражения.

### Неправильное использование зависимости $v(x)$ при глубинной миграции

Программу, с помощью которой рассчитан рис. 113, можно использовать для миграционного преобразования, если выполнять ее в обратном порядке. Вся энергия интересующих нас лучей возвратится назад к импульсному источнику. Будет ли такая программа миграции эффективной при обработке полевых материалов? Ответ должен быть отрицательным. Данный процесс слишком чувствителен к погрешностям в значении перепадов скорости по латерали. Именно этим числовым значением определяется коэффициент отражения, что в конечном счете сказывается на правильности рекомбинирования всех волновых фронтов назад в импульс. Чтобы посмотреть, как неправильное значение приводит к нарастанию ошибки, возьмем, к примеру, метод миграции путем суммирования по гиперболическим законам. В данном случае метод сводится к взвешенному суммированию по всем траекториям лучей, присутствующим на рисунке. Из-за неправильного значения на различных ветвях появятся ошибочные амплитуды. Неправильное положение разрывного нарушения тоже приведет к смещению нескольких ветвей.

Урок, который нужно извлечь из приведенного примера, ясен. Необоснованные скачки скоростной функции могут создать ложные отражения от плоскости разрывного нарушения. Выбранный закон изменения миграционной скорости, не противоречащий имеющейся информации, должен быть максимально гладким в латеральном направлении. Неквалифицированные и неинформированные работники обрабатывающего центра, которым не доверено принимать решения, не должны иметь возможностей вносить по своему произволу резкие латеральные изменения в скоростную модель среды.

### Эффекты первого порядка, создаваемые линзовым членом

Теперь уточним, что понимается под линзовым слагаемым уравнения в свете изложенных представлений о миграции до суммирования ОГТ при наличии латеральных вариаций скорости. Реализация 15-градусного варианта ДКК-уравнения дает

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\left\{\left[\frac{i\omega}{v(s)^2} + \frac{v(s)^2}{2i\omega}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] + \left[\frac{i\omega}{v(g)^2} + \frac{v(g)^2}{2i\omega}\frac{\partial^2}{\partial g^2}\right]\right\} U. \qquad (228)$$

Перегруппировав члены по признаку поведения, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\left[\frac{i\omega}{v(s)^2}+\frac{i\omega}{v(g)^2}\right]U-\left[\frac{v(s)^2}{2i\omega}\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{v(g)^2}{2i\omega}\frac{\partial^2}{\partial g^2}\right]U; \tag{229а}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}= \text{ линзовый член } + \text{ дифракционный член.} \tag{229б}$$

Итак, получаем знакомый вид линзового члена, но здесь он состоит из двух частей, одна из которых отвечает за смещение на пункте взрыва, а другая — на сейсмоприемнике.

**Мигрированный временной разрез**

По мере того, как разведка переходит в районы с чрезвычайно сложным геологическим строением, материалы метода отраженных сейсмических волн становятся все более аномальными, а их обработка все равно базируется на известных способах обработки.

При этом выбирается скорость суммирования ОГТ и рассчитывается суммарная сейсмотрасса. Каким же способом следует производить миграционное преобразование? В большинстве основных программ миграции линзовый член не принимается во внимание. Включить в программу линзовый член легко, но он чувствителен к латеральным изменениям скоростей. Поскольку никогда нельзя гарантировать надежность оценок латеральных скоростных вариаций, лишь знающие геофизики-интерпретаторы решаются применять миграционные преобразования, учитывающие линзовый член. Из самых распространенных программ миграции линзовый член обычно исключается. Посмотрим, что это означает.

Уравнение миграционного преобразования справедливо лишь в смысле «локальной плоской волны», когда записывается в виде

$$k_z(y, z)=\frac{\omega}{v(y, z)}\left[1-\left(\frac{v(y, z)\,k_y(y, z)}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{230}$$

Мигрированный временной разрез определяется путем преобразования переменной глубины $z$ из уравнения (230) в псевдоглубину $\tau$:

$$k_\tau(y, \tau)=\omega\left[1-\left(\frac{v(y, \tau)\,k_y(y, \tau)}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{231}$$

Для реализации уравнения (231) линзовые члены не требуются, поэтому большой чувствительности к латеральным изменениям скоростей не ожидается. К сожалению, здесь находится ловушка. Система координат $(y, z)$ является ортогональной, а система $(y, \tau)$ не ортогональная, если только $v(y)$ не

постоянна. Поэтому интерпретация с использованием уравнений (230) и (231) неверна, хотя $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$. Гипербола при этом будет мигрировать к своей вершине, тогда как она должна бы мигрировать в сторону более низкоскоростного разреза.

Подведем итог. В производственных условиях огромные массивы данных подвергаются обработке задолго до того, как появляется четкое представление о масштабе латеральных изменений скоростей. Поэтому линзовый член не используется. Результаты будут хорошими, если окажется, что в конкретных условиях линзовый член коммутативен с дифракционным. Кстати, эти члены допускают перестановку, когда скорости изменяются по латерали достаточно медленно. В противном случае необходимо повторно обработать сейсмические материалы с учетом линзового члена. Сама же переобработка будет чувствительна к ошибкам в скорости. Будьте внимательны!

# Глава 4
# ПРАКТИЧЕСКАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Настоящая глава посвящена тем тонкостям, которые необходимо знать для проведения высококачественного продолжения волновых полей в нижнее полупространство. В ней будет мало новых концепций, связанных с построением сейсмических изображений, но зато будут рассмотрены интересные примеры и некоторые математические выкладки. В конце главы описана программа моделирования различных методов миграционного преобразования и сопоставления их результатов.

## Магия цвета

Сначала рассмотрим силу сигнала. Отражения с течением времени становятся все слабее и сейсмическое изображение ухудшается, в связи с чем необходимо вводить коррекцию.

Сейсмические данные окрашиваются фильтрацией, которую можно производить как в пространстве, так и во времени. При анализе временных рядов обращают внимание на повышение отношения сигнал/помеха за счет фильтрации сейсмозаписей. При этом одни спектральные диапазоны ослабляются, другие усиливаются. Спектральному взвешиванию можно подвергать и волновые поля по координатам $\omega$ и $k$. Какие фильтры нужно использовать при отсутствии помех? Ответ на этот вопрос дает нам теория волновых уравнений. Вообще говоря, волновое уравнение представляет собой фильтр с равномерной амплитудной характеристикой в пространстве $(\omega, k)$ и некоторой фазовой характеристикой, которая соответствует временным задержкам при распространении. В различных частях пространства $(\omega, k)$ содержится различное количество помех, но нет нужды обнаруживать эти части с интенсивностями, определяемыми по волновому уравнению, равно как нет необходимости изображать наблюдения с соблюдением условия $\Delta x = \Delta z$.

Поведение пространственной найквистовой частоты можно объяснить фильтрацией и миграцией данных. Вообразите импульсную функцию с исключенной найквистовой частотой. Подобное исключение мало влияет на сам импульс, но имеет огромное относительное воздействие на окружающие его нули. При миграции импульса в частотной области пространственные частоты чуть ниже найквистовой обрабатываются

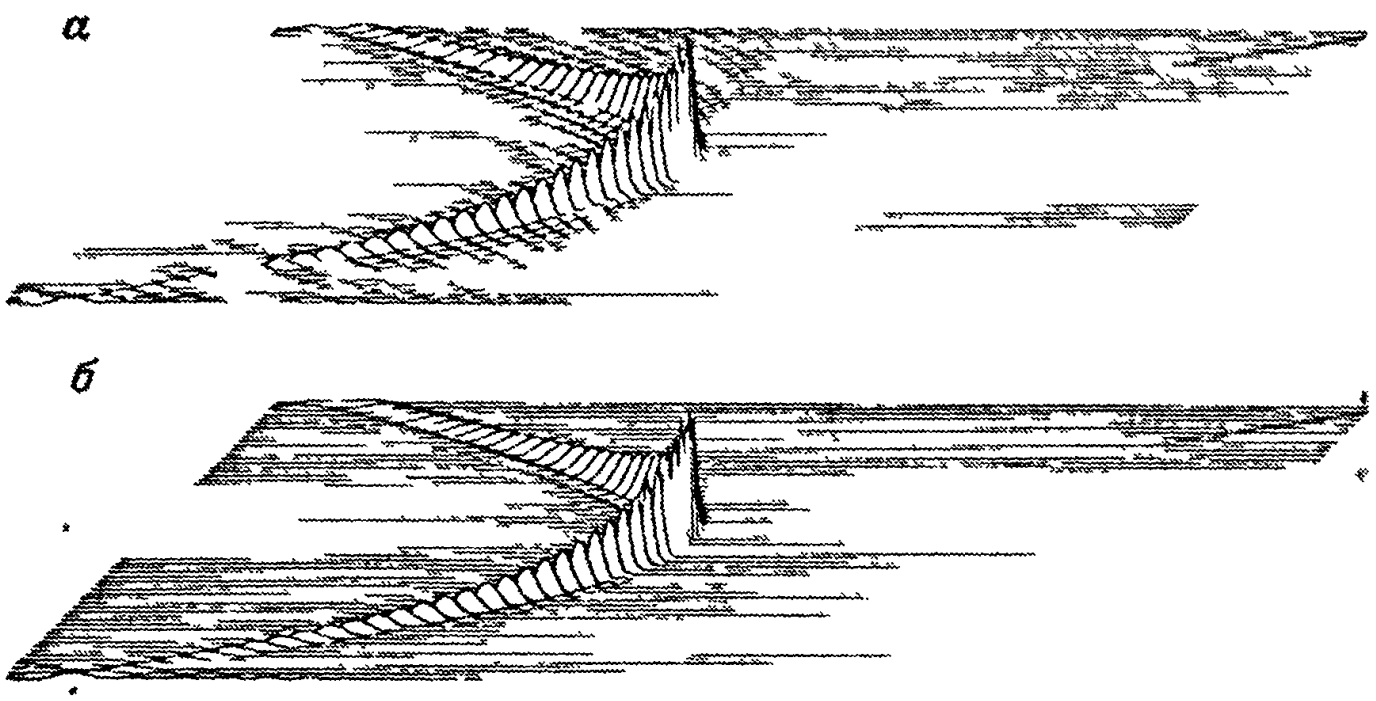



РИС. 114. Гипербола, усиленная с целью демонстрации помех в окрестности найквистовой частоты (*а*) и подвергнутая фильтрации (*б*)

существенно по-иному, чем частоты чуть выше ее, а именно, одни обрабатываются как имеющие левый наклон, другие — правый. Подобный разрыв по пространственной частоте приводит к появлению размашистого ложного отклика в пространственной области (рис. 114).

Описанную выше найквистову помеху легко подавить, причем не путем исключения частоты Найквиста из визуального представления, а узкополосной фильтрацией типа использованной при выводе демонстрируемого изображения, т. е. с помощью узкополосного фильтра $(1+\cos k_x \Delta x)(1+0{,}85\cos k_x \Delta x)$, который плавно стремится к нулю на найквистовой пространственной частоте. В зависимости от координаты $x$ такой фильтр имеет простую трехдиагональную форму.

## Усовершенствования методики миграции

По мере нашего продвижения к более качественным результатам мы будем обращаться и к различного рода аппроксимациям. Сейчас самое время разобраться в том, каким образом аппроксимации ухудшают результаты обработки, и попытаться найти способы их улучшения. Будут рассмотрены пять конкретных вопросов:

1) частотная дисперсия, возникающая из-за аппроксимации дифференциальных операторов разностными; 2) анизотропное искажение фазовой и групповой скоростей, возникающее из-за аппроксимации квадратных корней; 3) эффект усечения на конце сейсморазведочного профиля; 4) углы наклона, превышающие 90 ; 5) искажения, связанные с периодичностью фурье-преобра-

зований; 6) влияние зависимости $v(z)$ на метод миграции Столта и улучшение его результатов путем растяжения.

После исследования перечисленных аппроксимаций в разделе 4.6 будет дан углубленный анализ понятия причинности, в том числе будет рассмотрен вопрос о том, каким образом миграция в частотной области может имитировать причинность, свойственную способам миграции во временном представлении. Раздел 4.7 представляет собой большой обзор методических приемов, здесь помещена одна программа, позволяющая рассчитывать годографы дифрагированных волн, характерные для различных методов миграционного преобразования, что упрощает сопоставление методов миграции и оптимизацию параметров. С помощью этой программы были получены рис. 114 и многие другие, помещенные в данной главе, поэтому у вас есть возможность воспроизвести их самим.

### Слабая неустойчивость из-за $v(x)$

Некоторые проблемы качества нельзя понять, если работать в области Фурье. Если не учитывать с надлежащей тщательностью латеральные вариации скорости, то они могут вызвать неустойчивость решений.

Существование латеральных скачков скорости приводит к возникновению отражений от крутопадающих плоскостей разрывных нарушений. Более серьезная проблема связана с тем, что сами по себе уравнения экстраполяции еще нельзя считать строго доказанными. Наиболее строгий из приведенных выше выводов уравнения экстраполяции основан на дисперсионных соотношениях, которые получим, исходя из предположения о постоянстве скорости по координате $x$. На вопрос о том, каким образом следует представлять дисперсионное соотношение, содержащее член вида $vk_x^2$, до сих пор не получено ответа. Оно может быть представлено через $v(x, z)\partial_{xx}$, $\partial_x v(x, z)\partial_x$, $\partial_{xx} v(x, z)$ или же через любую их комбинацию. Однако каждое из приведенных выше выражений приводит к иному численному значению коэффициента внутреннего отражения. Еще хуже то, что после дискретизации всех осей обнаруживается, что одно из наиболее осмысленных представлений приводит к коэффициентам отражения, большим единицы, и к численной неустойчивости.

Слабая неустойчивость хуже сильной. Сильная неустойчивость будет сразу же замечена, а слабую можно пропустить и позже она приведет к неправильным геофизическим выводам. К счастью, исследование проблемы устойчивости приводит к разработке вполне надежного метода миграционного преобразования, изложенного в разделе 4.8.

## 4.1. Физические и косметические аспекты волновой экстраполяции

Частотная фильтрация, фильтрация по кажущимся скоростям и регулировка усиления представляют собой три способа предварительной обработки, применение которых преследует преимущественно косметические цели, т. е. они используются для улучшения внешнего вида сейсморазведочных данных. Критерии, лежащие в основе выбора конкретных количественных параметров указанных выше и других способов обработки, зачастую неясны и связаны с человеческим опытом или визуальным восприятием. В принципе возможен выбор этих параметров с привлечением теории информации и таких объективных критериев, как спектры кажущихся скоростей полезных сигналов и помех. Но в повседневной практике этого еще не делается.

Нельзя недооценивать важности предварительных приемов обработки. Нередко случалось, что сопоставление методик обработки (иногда с целью выбора подрядчика) оказывалось неполноценным из-за непреднамеренного изменения параметров предварительных процедур. Эти способы обработки возникли естественным путем, при этом обработчики исходили из теории распространения волн.

### Квадрат времени

С течением времени отражения ослабевают. Чтобы наблюдать сейсмозаписи на больших временах, коэффициент усиления обычно делают возрастающим во времени. При этом в качестве весового множителя очень удачной оказывается функция $t^2$. Не следует ожидать, что она всегда будет подходящей, так как вытекает по существу из очень простой модели. Но все же автор считает ее более удовлетворительной, чем пользующаяся большой популярностью возрастающая показательная функция. У $t^2$ нет параметров, а показательная функция требует для своего задания целых два — постоянную времени и момент, когда вы прерываете функцию из-за ее чрезмерного роста.

Первая из двух степеней времени $t$ объясняется тем, что мы преобразуем три координаты в одну. Сейсмические волны распространяются в трехмерном пространстве, поэтому площадь поверхности фронта расширяющейся сферической волны растет пропорционально квадрату радиуса этой сферы. Следовательно, площадь распределения сейсмической энергии растет пропорционально квадрату времени, а сейсмические амплитуды пропорциональны корню квадратному из энергии. Из элементарных геометрических соображений, касающихся распростра-

нения энергии, следует, что поправка за сферическое расхождение волн равна времени лишь в первой степени.

Еще одна степень времени появляется из простого расчета поглощения. Для объяснения механизма поглощения необходима модель. Предлагаемая автором модель слишком проста, чтобы объяснить все, связанное с поглощением сейсмических волн, но она прекрасно объясняет происхождение дополнительной степени у $t$, которая, как показывает опыт, нам нужна. В модели предполагаются: 1) одномерное распространение; 2) постоянная скорость; 3) постоянное поглощение $Q^{-1}$; 4) случайно распределенные по глубине коэффициенты отражения, 5) отсутствие многократных отражений, 6) белый спектр источника.

Из приведенных выше условий следует, что монохроматическая волна будет экспоненциально ослабевать с глубиной, скажем, по закону $\exp(-\alpha\omega t)$, где через $t$ обозначена глубина во временном выражении, а через $\alpha$ — постоянная затухания, обратно пропорциональная показателю добротности волны $Q$. Многие сбиваются с пути, когда берутся моделировать реальные сейсморазведочные материалы с помощью подобной монохроматической волны. Модель можно улучшить, если взять широкополосный сейсмический источник в виде импульсной функции. Вследствие поглощения высокие частоты затухают быстро и, наконец, остаются только низкие, что приводит к уменьшению интенсивности полезного сигнала. На времени распространения $t$ исходный белый (равномерный) спектр заменяется на упомянутую выше функцию вида $\exp(-\alpha\omega t)$, представляющую собой затухающую экспоненциальную функцию частоты. Сейсмическая энергия, расходуемая на создание импульсной функции времени, пропорциональна площади, ограничиваемой затухающей экспоненциальной функцией частоты. Что касается фазового спектра, то все частоты будут находиться в фазе, так как предполагается, что источник импульсного типа, а скорость постоянная. (Относительно таящейся здесь проблемы причинности см. раздел 4.6.) В результате интегрирования по частоте указанной выше показательной функции в интервале от нуля до бесконечности получаем обратную степень времени $t$ и, таким образом, завершаем доказательство того, что поправка за сферическое расхождение равна квадрату времени пробега $t^2$.

Любопытно, что форма ожидаемой огибающей сейсмотрассы $t^{-2}$ не зависит от постоянной рассеяния $\alpha$. В результате изменения спектра сейсмического источника форма огибающей изменится. В качестве упражнения предлагается показать, что в случае, когда спектр сейсмического источника равен $|\omega|^{\beta}$, поправка за сферическое расхождение будет иметь вид $t^{2+\beta}$.

сейсмические скорости с глубиной возрастают, поэтому иногда, зная скорость, можно уточнить значение поправки за сферическое расхождение, сделав ее зависимой от скорости (а следовательно, и от координаты удаления приемника от источника) и от времени.

В действительности факт хорошего согласования $t^2$ с наблюденными данными может оказаться и случайным. Обычно $Q$ растет с глубиной, в то время как коэффициенты отражения, как правило, с глубиной уменьшаются.

## Помехи, поверхностные волны и ограничение амплитуды

Если бы в сейсмических данных не содержалось ничего, кроме отраженных волн, то не возникало бы больших затруднений при выводе их на графопостроитель. Можно было бы просто умножить их на $t^2$ и затем подобрать такой масштаб воспроизведения, чтобы и наибольшие значения умещались внутри отведенной для этих целей площади. В действительности же существуют две проблемы: трассы, осложненные помехами, и моды помех. Трассы осложняются помехами по той причине, что не все население земного шара бездействует в то время, как сейсморазведчики регистрируют отражения. К модам распространения помех относятся волны, существующие в приповерхностных слоях. Поэтому их расхождение происходит в двухмерном пространстве, а не в трехмерном, как в случае отраженных волн. Волны-помехи, распространяющиеся в водном слое, еще более интенсивны из-за однородности слоя и низкого поглощения их в воде.

С помехами борются путем «срезания» наблюдаемых значений на некотором уровне, меньшем максимального. Смысл операции ограничения записи по амплитуде заключается в том, что значения, превышающие установленный уровень, заменяются на значения, равные этому уровню. Поскольку амплитуда помехи обычно непредсказуема, наиболее надежно пользоваться квантилями. Предположим, что наблюденные отсчеты упорядочены в соответствии с их абсолютными числовыми значениями. Тогда квантиль $n$-го порядка определится как такое абсолютное значение, которое составляет $n/100$ промежутка между наименьшим и наибольшим абсолютными значениями. Поэтому, если наблюдения срезаны на уровне 99-й процентили, то до 1% их могут оказаться бесконечно сильными помехами. Автор считает, что на большей части полевых сейсмограмм содержится менее 10% отсчетов, которые принадлежат помехам, и часто пользуется ограничением амплитуд на уровне двойной 90-й процентили. Для определения квантили нет необходимости в полной сортировке всех наблюдений. Это слишком замедлило бы обработку. Алгоритм Хоара обладает

намного большим быстродействием. Полный список литературы по этому вопросу и дополнительные сведения по геофизике можно найти в работах [32, 53].

Различные графические изображения преследуют различные цели. Во время обработки часто важно сохранить линейность, в то время как на заключительной стадии — при графовыводе — линейностью можно и пожертвовать, чтобы иметь возможность наблюдать все особенности сейсмической записи, большие и малые. Человеческое восприятие обычно характеризуется логарифмическим законом. В своей лаборатории мы, как правило, пользуемся степенными зависимостями. Автор считает, что в результате замены регистрируемых в поле отсчетов корнями квадратными из них с соответствующими знаками все сигналы сжимаются в визуально воспринимаемый диапазон. При графическом выводе полевых сейсмограмм с очень близким расположением трасс, может быть, лучше пользоваться кубическими корнями со знаками. В общем случае нелинейная регулировка усиления производится в соответствии со следующим равенством:

$$\text{Графовывод} = \text{знак}(\text{Наблюдения}) \,|\text{Наблюдения}|^{\gamma}. \qquad (232)$$

Греческой буквой $\gamma$ в фотографии обозначается нелинейность (контраст) фотослоя. Большая часть приведенных в настоящей книге графических изображений наблюденных данных выполнена при $\gamma = 1$, с регулировкой усиления по закону $t^2$ и ограничением амплитуд на уровне 99-й процентили.

Стандартный подход, применяемый в практической сейсморазведке, связан с использованием автоматической регулировки усиления (АРУ). При использовании АРУ амплитуды отсчетов в некотором интервале времени усредняются и затем значения отсчетов делятся на эту величину. Нелинейная операция АРУ оказывается более линейной, чем коэффициент нелинейности $\gamma$, и поэтому в тех случаях, когда планируется последующая обработка наблюдений, лучше применять ее. Но следует помнить, что при использовании АРУ теряются обратимость наблюдений и смысл полной амплитуды.

На рис. 115 приведен интересный пример. Поскольку расстановка центральная, кажется, что сейсмограмма получена при работе на суше: судно же не может толкать косу впереди себя. Но на сейсмограмме (рис. 115, *а*) отчетливо видны типично морские кратные отражения. Период повторения реверберации постоянен и, кроме того, отсутствуют отражения на временах, меньших времени отражения от морского дна. В действительности же сейсмограмма получена на льду, покрывающем глубоководную часть моря (дно расположено на глубине 375 м). После нелинейной регулировки усиления (рис. 115, *б*) ясно выделяется волна, распространяющаяся в воде, а перед ней —

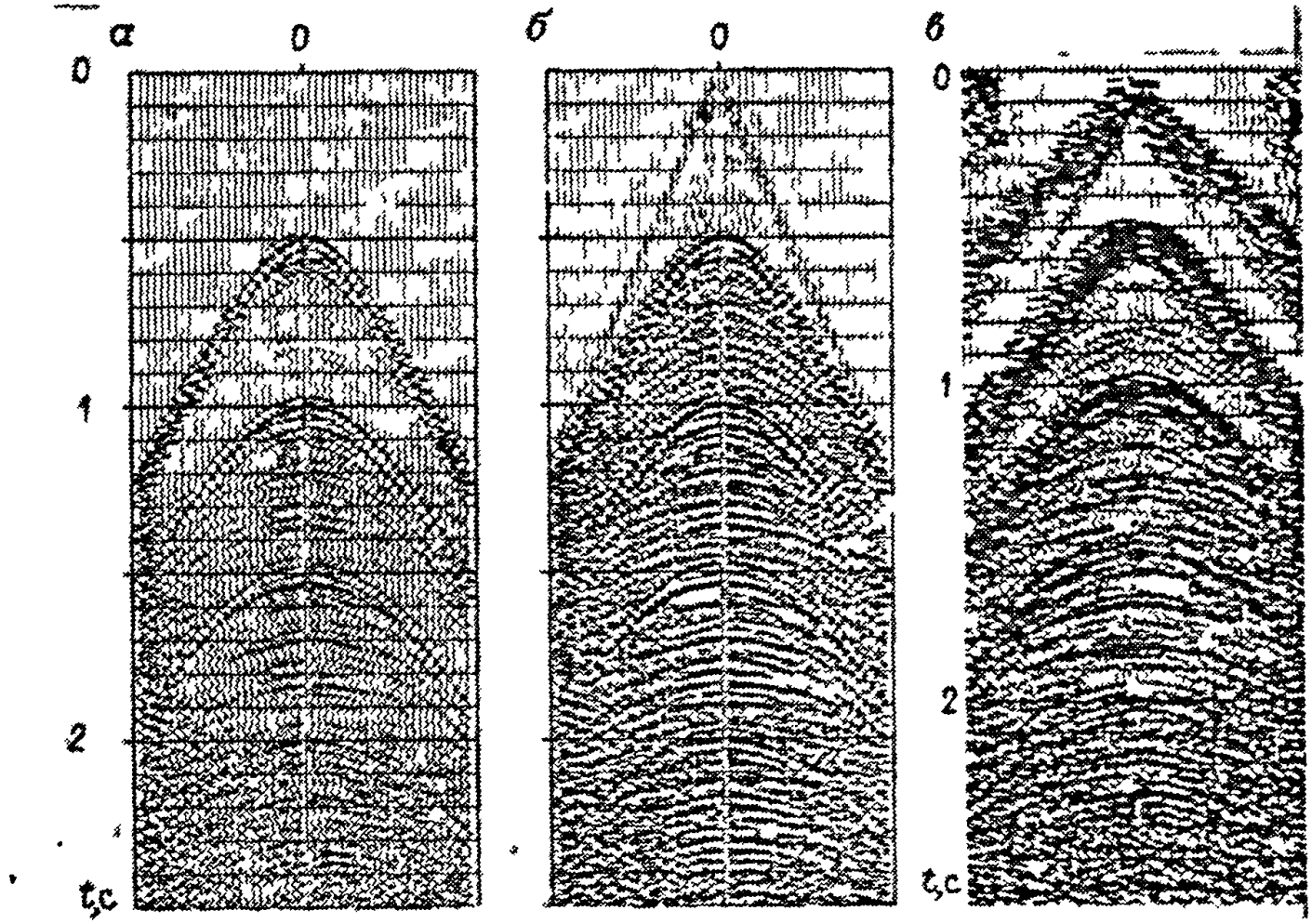



РИС. 115. Полученная в Арктике полевая сейсмограмма, выведенная на графопостроитель с регулировкой по закону $t^2$ (*а*), по закону $t^2$ (*б*) и $\gamma=0{,}4$ (*б*) и с АРУ (*в*)

высокоскоростная волна, распространяющаяся по льду. Наблюдаются также и слабая низкоскоростная низкочастотная поверхностная волна, и несколько хороших отражений.

## Комплексная скорость в 5-градусном уравнении

Смысл 5-градусного уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{v}\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{233а}$$

$$ik_z=-i\omega/v \tag{233б}$$

заключается в том, что на перемещение волнового фронта с одной глубины на другую затрачивается некоторое время. При условии, что скорость $v$ является вещественной постоянной, волны, подчиняющиеся уравнению (233), распространяются без изменения формы. На практике наблюдается изменение формы записи. Поэтому $v$ не должна быть вещественной постоянной. Затухание вызывает мнимая ее часть. Зависящая от частоты скорость приводит к частотной дисперсии.

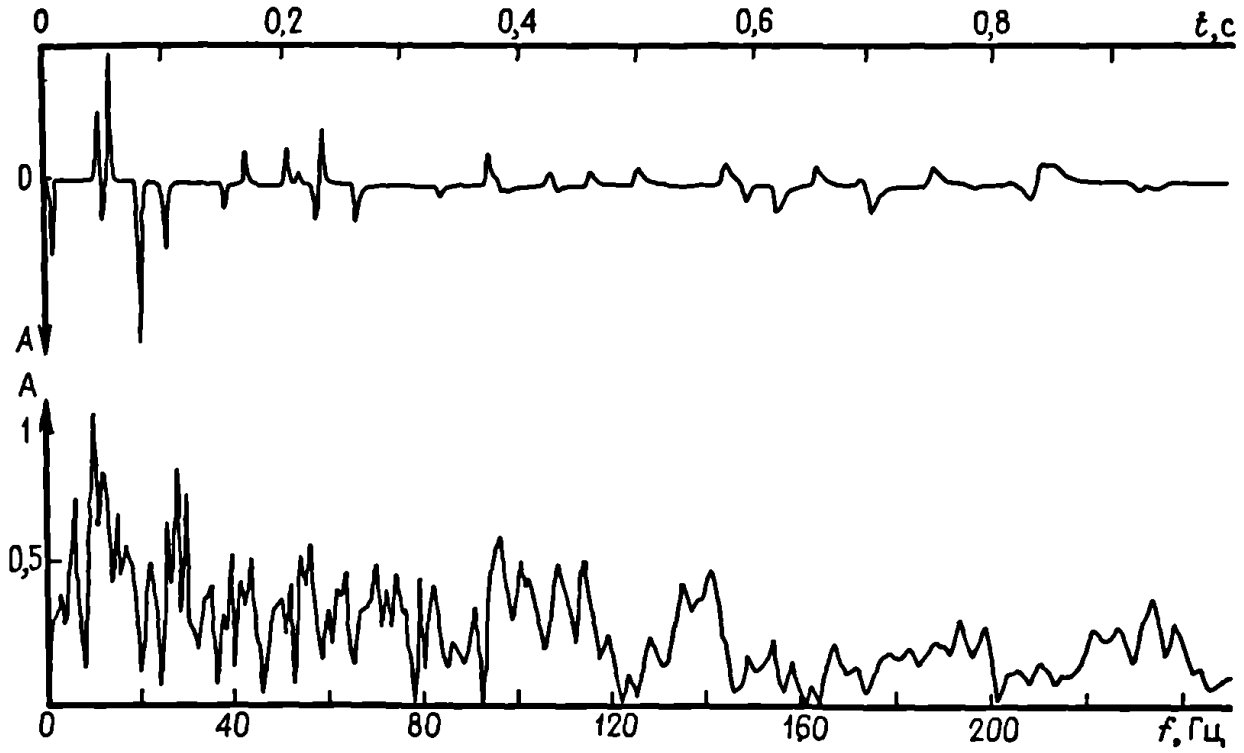



РИС. 116. Синтетическая сейсмотрасса для среды с $Q \approx 100$ (по Хейлу)

**Поглощение**

Основная модель соответствует случаю, когда $v(\omega)$ определяется уравнением

$$\frac{-i\omega}{v(\omega)} = \frac{\omega_0}{v_0}\left(\frac{-i\omega}{\omega_0}\right)^{1-\varepsilon}. \qquad (234)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (234) дает постоянную скорость. Уравнение (235) моделирует так называемое причинное, т. е. с постоянным $Q$, поглощение, причем $Q^{-1} = \operatorname{tg}\pi\varepsilon$ (см. раздел 4.6). На рис. 116 приведен пример синтетической сейсмотрассы, рассчитанной в соответствии с моделью излучающих границ по уравнениям (233) и (234).

Уравнение (234) описывает затухание, так как в скорость введена мнимая часть. Главное влияние подобного затухания заключается в ослаблении волн на больших временах. Вторичный эффект связан с понижением частотного состава последующих вступлений. Третичный эффект можно сформулировать следующим образом. Оказывается, что требование причинности вынуждает вещественную часть скорости слегка зависеть от частоты. На рис. 116 отмеченная выше слабая зависимость от частоты проявляется в том, что «время нарастания» каждого из импульсоидов меньше «времени убывания». Это значит, что высокие частоты движутся немного быстрее, нежели низкие. Практически же этот эффект редко бывает заметен.

При построении изображений земной среды создаваемое этой средой рассеяние можно было бы скомпенсировать путем

усиления высокочастотных составляющих энергии в процесс продолжения в нижнее полупространство. Компенсацию можно делать точно так же, как производится миграционное преобразование, только волновое число вида $k_z = -\sqrt{\omega^2/v^2 - k_x^2}$ нужно заменить на подобное ему $ik_z = (-i\omega)^{1-\varepsilon}$. На практике никто этого делать не будет, так как указанная замена приведет к усилению высокочастотной помехи, что автоматически ставит вопрос о величине отношения сигнал/помеха.

В понятие помехи входят не только фоновые случайные колебания. Дело в том, что помехи в основных своих чертах повторяются при повторных экспериментах. Можно сказать, что помеха — нечто такое, для чего у нас нет удовлетворительной модели. На практике для выбора подходящих переменных во времени полос пропускания часто используют переменные по времени фильтры. Для реализации таких фильтров можно было бы воспользоваться уравнениями (233) и (234), но будет чрезмерным упрощением оценивать их полезность лишь как компенсаторов добротности среды $Q$.

### Дисперсия

Более четкой и определенной является зависимость скорости от частоты в случае поверхностных волн. Она задается, например, уравнением вида

$$-i\omega/v(\omega) = (-i\omega/v_0)\sqrt{1+\omega_0^2/\omega^2}. \qquad (235)$$

На рис. 117, *а* изображена сейсмограмма с частотно-диспергирующей поверхностной волной. На рис. 117, *б* дисперсия устранена способом, напоминающим миграционное преобразование. Различие между примененным способом и миграцией состоит в том, что при миграции экстраполяция производится по оси $z$, а на рис. 117, *б* демонстрируется результат экстраполяции по оси $x$. (Данное направление экстраполяции просто было заложено в компьютере.) Каждая сейсмотрасса на рис. 107, *б* обработана отдельно. При миграции получается, что наблюдения $p(t, z=0)$ экстраполируются в некий образ $p(t=0, z)$ с помощью дисперсионного соотношения $k_z = -\sqrt{\omega^2/v^2 - k_x^2}$. В упомянутом выше способе наблюденные данные $p(t, x=0)$ экстраполируются в некий образ $p(t=0, x)$ с помощью дисперсионного соотношения вида $k_x = f(\omega/v)$. После этой псевдомиграции производится псевдодифракционное преобразование с постоянной скоростью. Полный эффект заключается в компенсации частотной дисперсии. В результате обработки мы можем убедиться, что помеха состоит из двух самостоятельных волн. Приемы обработки, напоминающие изложенный выше, были впервые использованы для определения местонахождения

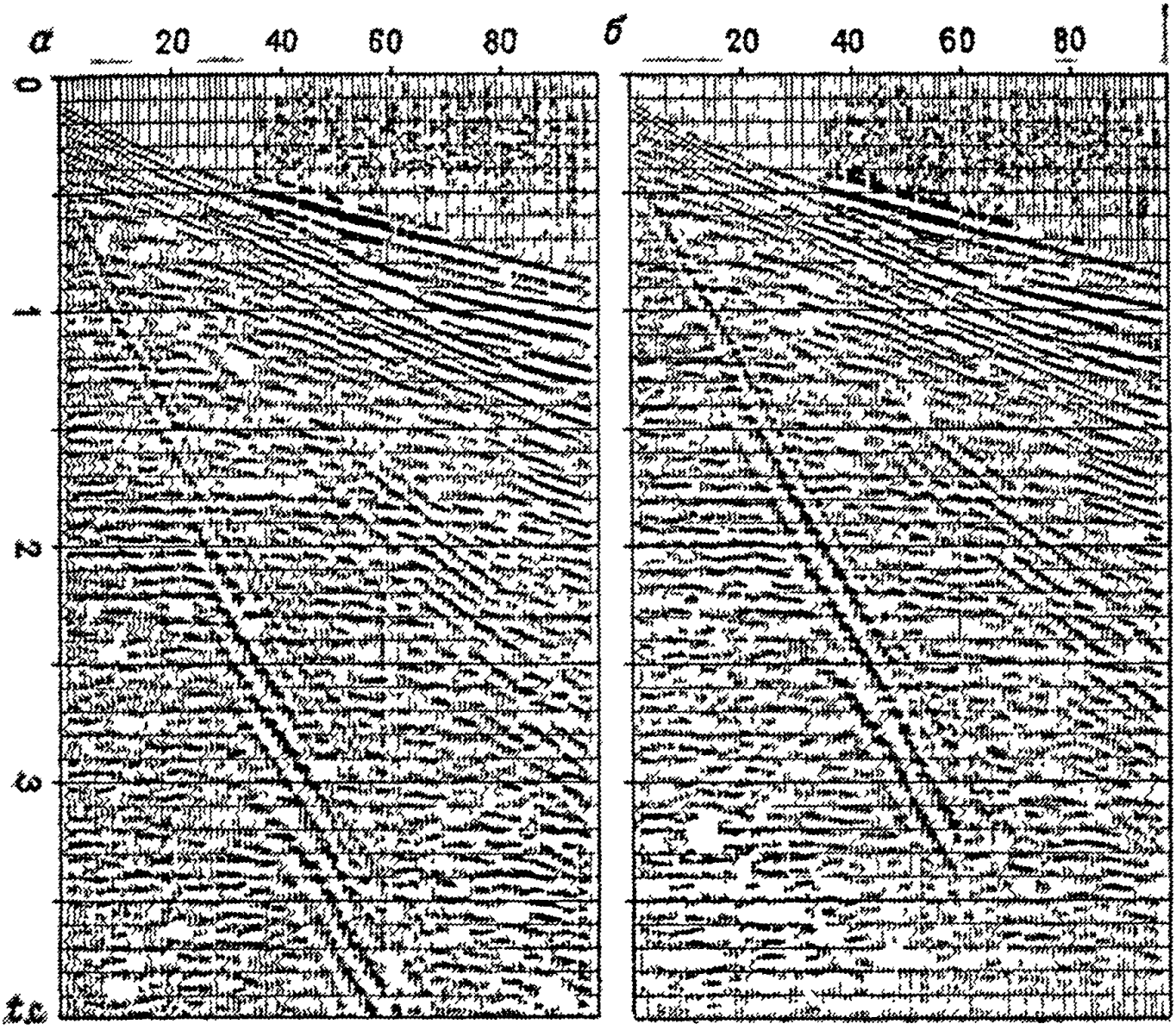



РИС. 117. Диспергирующая поверхностная волна (*а*) с устраненной частотной дисперсией (*б*)

разрывных нарушений в пределах угольных месторождений [8]. В нижней части рис. 117, *б* отчетливо видны две волны — прямая и с гиперболической осью синфазности. Последняя, скорее всего, представляет собой боковую волну, отраженную от неоднородности, расположенной в стороне от сейсморазведочного профиля.

## Краевые эффекты на результатах миграции

Для подавления кратных отражений можно применять веерную фильтрацию. В разделе 5.5 будет показано, что кратные отражения не похожи на однократные (первичные) — их интенсивность может быстро меняться в горизонтальном направлении. Их не нужно разворачивать в протяженные гиперболы дифрагированных волн, что является обязательным в случае однократных отражений. Данное различие возникает по той причине, что кратные отражения часто образуются в приповерхностных частях геологического разреза, фокусируясь

на неоднородностях. Это предположение подтверждается внешним видом разрезов, построенных по результатам миграционного преобразования сейсмотрасс, удаленных на большие расстояния от источника. На таких разрезах часто наблюдаются характерные полуокружности (по всему разрезу вплоть до поверхности земли), появление которых говорит нам о том, что обработка выполнена неправильно. Эти окружности могут вызываться кратными отражениями, статическими поправками или же неизвестной импульсной помехой. В любом случае их можно частично подавить, не затрагивая при этом однократные отражения.

### Микрократные волны в пространстве кажущихся скоростей

Вообразите процесс миграции, отсуммированной по принципу общей глубинной точки, как продолжение в нижнее полупространство с координатами ($\omega$, $k_x$, $z$). Обычно скорость с глубиной растет. По мере выполнения экстраполяции граничная скорость, совпадающая со скоростью быстрозатухающих волн, отрезает все большую площадь от плоскости ($\omega$, $k_x$) (см. раздел 1.4). Картина, находящаяся ниже этой границы, не согласуется с принятой моделью распространения однократно отраженных волн и ее следует сразу же исправлять путем подавления возникающих помех, но при этом следует повышать энергию отражений от глубоких горизонтов.

### Смешанный вид сейсмограмм, отфильтрованных по кажущимся скоростям

Одно из возражений, часто выдвигаемых против применения фильтрации по кажущимся скоростям, заключается в том, что она может придавать сейсмограммам смешанный вид. Под «смешанным» в данном случае понимается такой вид сейсмограмм, который получается при включенном смесителе, когда соседние трассы смешиваются между собой и, следовательно, перестают быть независимыми. Это действительно один из эффектов фильтрации по кажущимся скоростям и он неизбежен на больших временах, поскольку разрешающая способность отраженных волн по горизонтали убывает с ростом времени. Существуют две причины убывания разрешенности по латерали. Во-первых, диссипация приводит к исчезновению высоких частот, во-вторых, преломление лучей на промежуточных границах приводит к уменьшению угловой апертуры с погружением источников (см. разделы 1.2 и 1.5). Нельзя не замечать этого фундаментального ограничения и считать, что соседние трассы должны выглядеть независимыми друг от друга. При необходимости избежать смешанного вида графического изо-

бражения автор рекомендует вычитание низкоскоростной когерентной возбужденной сигналом помехи и замещение ее на низкоскоростную некогерентную гауссову помеху. Многие из плоттеров теряют динамический диапазон при близком расположении трасс, а случайный шум имеет тенденцию к его восстановлению.

### Подчеркивание линий разрывных нарушений

Часто бывает так, что расположение нефтяных залежей контролируется разрывными нарушениями слоев горных пород. Но слабые свидетельства наличия разрывных нарушений в виде дифрагированных волн могут и не просматриваться на сильном фоне отражающих границ, связанных со слоистостью осадочного чехла. Применение соответствующего косметического способа обработки может привести к ослаблению нулевых и небольших углов наклона осей синфазности и к подчеркиванию углов наклона в диапазоне 10—60 и, кроме того, снять с разрезов отраженные под большими углами волны. Как и в случае частотной фильтрации, крутые срезы характеристик нежелательны, так как приводят к импульсным реакциям большой продолжительности (а в пространственной области — к широкополосным).

### Фильтрация по кажущимся скоростям

Фильтрация по кажущимся скоростям удобно вписывается в уравнения волновой экстраполяции. Вместо того, чтобы начать разложение Мюира с $ik_z = -i\omega r_0$, воспользуемся значением $ik_z = \varepsilon - i\omega r_0$. (Напомним, что в разделе 2.1 величина $r_0$ определяется как косинус точно подходящего под наблюдения угла.) В случае 15-градусного уравнения имеем

$$ik_z^{(15)} v = -i\omega + \frac{v^2 k_x^2}{\varepsilon - i\omega (r_0 + 1)}. \qquad (236а)$$

В случае 45-градусного уравнения получим

$$ik_z^{(45)} v = -i\omega + \frac{v^2 k_x^2}{-i\omega 2 + \dfrac{v^2 k_x^2}{\varepsilon - i\omega (r_0 + 1)}}. \qquad (236б)$$

На рис. 118 и 119 изображены гиперболы дифрагированных волн для случаев 15- и 45-градусного уравнений, полученные с учетом параметра фильтрации по кажущимся скоростям $\varepsilon$ и без него.

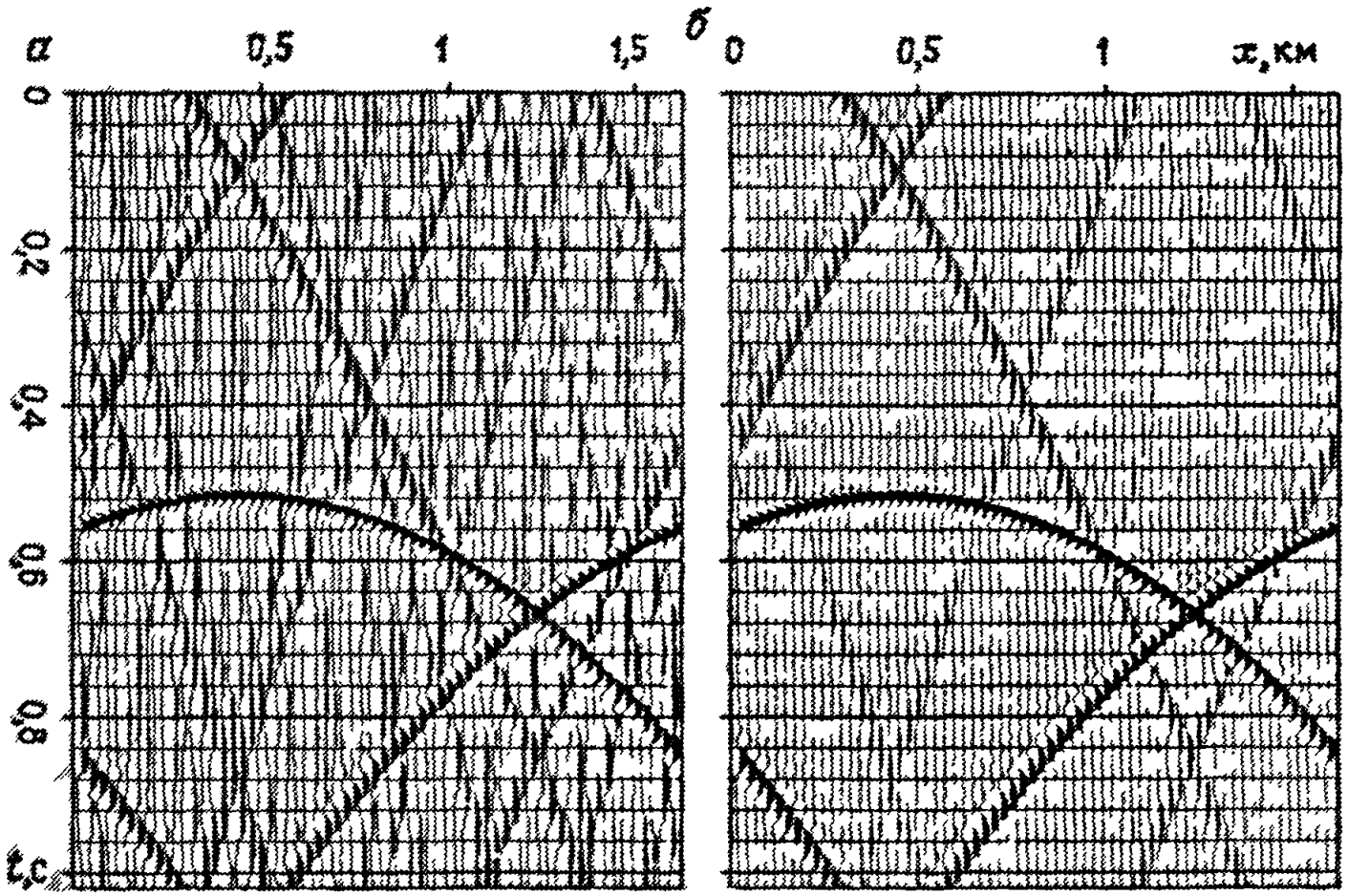



РИС. 118. Гиперболы дифрагированных волн, рассчитанные по 15-градусному уравнению без фильтрации по кажущимся скоростям (*а*) и с фильтрацией (*б*)

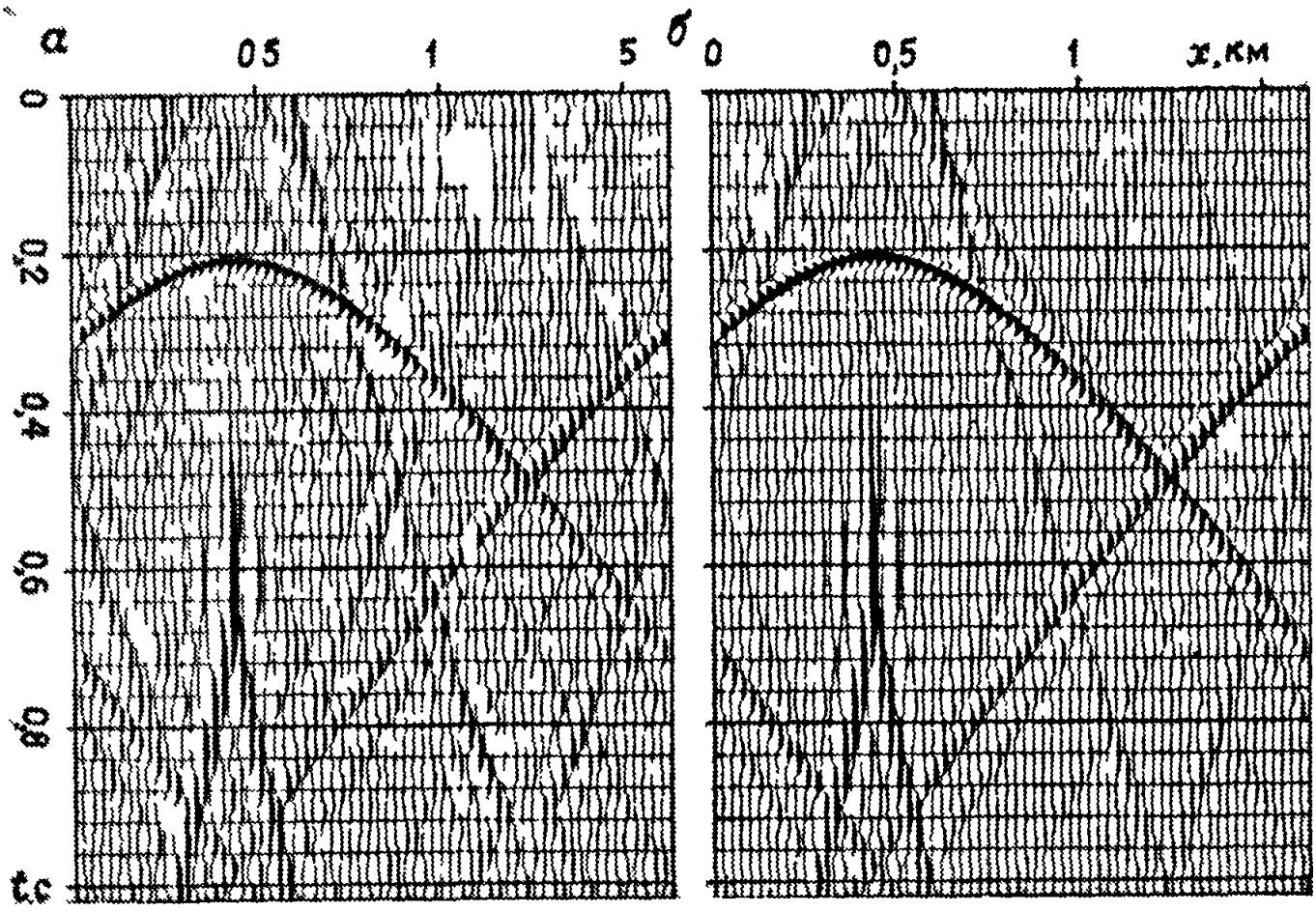



РИС. 119. Гиперболы дифрагированных волн, рассчитанные по 45-градусному уравнению без фильтрации по кажущимся скоростям (*а*) и с фильтрацией (*б*)

## Регулировка усиления как фильтрация по кажущимся скоростям

Отражения, регистрируемые на больших временах, слабее отражений, регистрируемых в начальной части сейсмограммы. Поэтому при визуализации наблюденные данные обычно взвешивают с помощью переменных по времени весовых функций. Возникает вопрос, когда следует выполнять миграционное преобразование до взвешивания или после него? В зависимости от порядка операций результаты будут различаться. Вершинные части гипербол плоские, а вступающие позже асимптотические части отражений имеют крутой наклон. Поэтому само собой получается, что увеличение коэффициента усиления вступающей позже информации приводит к относительному подчеркиванию крутонаклонных осей синфазности. Автор считает, что решение производить миграцию до или после взвешивания должно зависеть главным образом от того, какой спектр кажущихся скоростей желательно иметь на окончательном разрезе. Если быть педантичным, то правильным будет выполнение сначала миграционного преобразования, а затем уже взвешивания, но получающийся в этом случае результат будет обеднен информацией об углах наклона и наличии разрывных нарушений по сравнению с тем результатом, который получится при обратном порядке операций. Побочная выгода от реализации последнего варианта выражается в экономии объемов машинной памяти за счет того, что взвешенные значения можно хранить в виде коротких целых чисел. При выполнении своей первой работы на эту тему автор пользовался 16-разрядной целочисленной памятью. При расчетах и записи в местную память использовалась 32-разрядная арифметика с плавающей запятой. Я не вижу серьезных доводов в пользу использования 32-разрядной памяти, обычно применяемой в настоящее время. Невозможно интерполировать между трассами с точностью до четырех разрядов.

## Подавление некогерентностью или фильтрацией

Опасно судить об эффективности предположительно некосметической процедуры обработки по производимому ей косметическому эффекту. Однажды я попался на этом, выполняя миграционное преобразование перед суммированием ОГТ. И получил желаемое: относительную интенсивность самой крутой оси синфазности на сейсмограмме, т. е. отражения от плоскости нарушения. Но ведь даже регулировка усиления может исказить спектр кажущихся скоростей! Я понадеялся, что

обрабатывающая процедура правильно нейтрализовывала часть подавляющего воздействия операции суммирования ОГТ на крутые оси синфазности. Возможно, что все происходило именно так, но не было возможности проверить истинность моих предположений? Может быть, круто наклоненные оси случайно усилились в результате пространственной фильтрации?

### Пространственное взвешивание перед миграцией

Взвешивание по временной оси перед выполнением миграционного преобразования может оказаться чрезвычайно полезным. А что можно сказать по этому поводу о взвешивании по пространственной оси? В традиционном методе взвешивания, называемом автоматической регулировкой усиления, взвешивающий делитель находится путем сглаживания огибающей сейсмозаписи (или ее квадрата, или ее абсолютного значения) в некотором окне. Подобное взвешивание может приводить к результатам, быстро меняющимся от трассы к трассе, поэтому представляется справедливым предположение о том, что дифрагированные волны могут вызываться скачками весовой функции по латерали. В то же время не исключено существование причин, приводящих к тому, что весовая функция изменяется от трассы к трассе скачкообразно. Само собой разумеется, что используемые при наблюдениях на суше источники и сейсмоприемники характеризуются различной мощностью и жесткостью сцепления с грунтом, а это, в свою очередь, осложняет всю сейсмотрассу.

Необходимо подыскать такую модель, которая учитывает как физические, так и статистические соображения. Давайте будем считать, что энергия сигнала медленно изменяется со временем, а источники и сейсмоприемники имеют произвольно меняющуюся чувствительность. Кроме того, я предпочитаю рассматривать импульсоиды как свидетельства того, что земная среда действительно может фокусировать. Например, в согласии с описанной моделью обработку данных можно осуществить путем сглаживания огибающей весовой функции фильтром следующего вида:

$$1-\frac{\omega^2}{\alpha+\omega^2}\,\frac{k_x^2}{\beta+k_x^2}. \qquad (237)$$

$\alpha$ и $\beta$ — граничные параметры этого фильтра. После сглаживания огибающей весовой функции указанным фильтром она уже не изменяется быстро по $x$ и $t$, хотя и может изменяться по одной из осей. Фильтр вида (237) допускает экономную реализацию с помощью трехдиагонального алгоритма.

### Экспоненциальное взвешивание

Экспоненциальные весовые функции обладают несколькими идеальными математическими свойствами. (Если вы не знакомы с Z-преобразованиями, то прежде чем идти дальше, следует прочесть раздел 4.6 или работу [53].) Возьмем Z-преобразование временной функции $a_t$:

$$A(Z)=a_0+a_1Z+a_2Z^2+\ldots \tag{238}$$

Временная функция с экспоненциальной регулировкой усиления определяется выражением

$$\uparrow A(Z)=a_0+a_1e^{\alpha}Z+a_2e^{2\alpha}Z^2+\ldots \tag{239}$$

Стрелкой $\uparrow$ обозначено экспоненциальное усиление. С математической точки зрения значок $\uparrow$ выражает тот факт, что вместо $Z$ используется $e^{\alpha}Z$. Перемножение многочленов сводится к свертке коэффициентов:

$$C(Z)=A(Z)\,B(Z). \tag{240}$$

Прямой подстановкой получаем, что

$$\uparrow C=(\uparrow A)(\uparrow B). \tag{241}$$

Это означает, что экспоненциальную регулировку усиления можно делать либо до, либо после операции свертки. Как известно из теории фурье-преобразований, умножение функции времени на убывающую показательную функцию вида $\exp(-\alpha t)$ равнозначно замене $-i\omega$ на $-i\omega+\alpha$ в этой области.

Конкретизируем оператор продолжения в нижнее полупространство $\exp(ik_zZ)$, выбрав фиксированные значения $z$ и $k_x$. Оператор превратился в функцию $\omega$, которую можно выразить во временном представлении в виде фильтра $a_t$. После миграции ветви гиперболы перемещаются вверх. Поэтому фильтр данного типа будет антипричинным. Он записывается как

$$A(Z)=a_0+a_1\frac{1}{Z}+a_2\frac{1}{Z^2}+\ldots \tag{242}$$

Большие отрицательные показатели степени $Z$ связаны с крыльями гипербол. Экспоненциальное увеличение коэффициентов при положительных степенях $Z$ связано с уменьшением отрицательных степеней — поэтому $\uparrow A$ равно $A$ с ослабленным хвостом — и стремится ослабить ветви, а не переместить их. Таким образом, функцию $\uparrow A$ можно описать, как вязкую.

С физической точки зрения такие косметические операции, как регулировка усиления и фильтрация по кажущимся скоростям, следует выполнять после обработки, скажем, функции $\uparrow(AB)$. Но $\uparrow(AB)$ равнозначна произведению $(\uparrow A)(\uparrow B)$, а

последняя операция сводится по существу к использованию вязкого оператора для обработки экспоненциально усиленных наблюдений. На практике обычно забывают о вязкости и получают функцию $A(\uparrow B)$. Это, возможно, означает, что наклоненные оси синфазности несут в себе больше информации, нежели горизонтальные.

### Оператор подстановки

Оператор $\uparrow$ был определен, как замена типа $Z \to Ze^{\alpha}$. Главное свойство этого оператора заключается в том, что при условии $C = AB$ имеем равенство $\uparrow C = (\uparrow A)(\uparrow B)$. Таким свойством будет обладать любая алгебраическая подстановка вместо $Z$, а не только та, которая описывает экспоненциальную регулировку усиления. Для растяжения или сжатия временной оси можно воспользоваться еще одной простой подстановкой. Например, если заменить $Z$ на $Z^2$, то ось времени растянется в 2 раза. Еще одна подстановка, имеющая более глубокий смысл, чем каждая из предыдущих, состоит в замене оператора диссипации $(-i\omega)^{\gamma}$ при постоянном $Q$. Сказанное можно свести вместе.

**Замена переменной Z-преобразования при сохранении равенства $C(Z) = A(Z)\,B(Z)$**

| | |
|---|---|
| Экспоненциальное возрастание | $Z \to Ze^{\alpha}$ $(i\omega \to i\omega + \alpha)$ |
| Растяжение временной оси $(\alpha > 1)$ | $Z \to Z^{\alpha}$ |
| (Обратная) постоянная диссипации $Q$ | $-i\omega \to (-i\omega)^{\gamma}$ |

**Упражнения**

1. Воспользуйтесь таблицей интегралов, чтобы показать, что при сейсмическом источнике со спектром вида $|\omega|^{\beta}$ поправка за расхождение будет иметь вид $t^{2+\beta}$.
2. Предположив, что $t^2$ представляет собой подходящую для полевых сейсмограмм поправку за сферическое расхождение, скажите, какую поправку за расхождение следует применить к суммам ОГТ?
3. Как изменится поправка $t^2$ в случае присутствия слоя воды глубиной $t_0$? Положите $Q$ для воды бесконечно большим.
4. Возьмем спектр источника в виде $e^{-\beta|\omega|}$. Как в этом случае изменится поправка $t^2$?
5. На спектре рис. 116 высокие частоты выглядят более гладкими, чем низкие. Объясните почему.
6. Сформулируйте критерии, которые можно использовать при выборе граничных параметров $\alpha$ и $\beta$ фильтра (237).

## 4.2. Анизотропная дисперсия и точность волновой миграции

При волновой миграции совершаются ошибки двух типов. Большое практическое значение имеет частотная дисперсия, возникающая в том случае, когда различные частотные

составляющие сигнала распространяются с различными скоростями. Частотную дисперсию можно уменьшить, если повысить точность конечно-разностных приближений к дифференциалам. Исправление искажений такого рода связано с повышением плотности разностной сетки (см. раздел 4.3).

Второстепенное значение имеет анизотропная дисперсия, которую мы и рассмотрим в данном разделе книги. Анизотропным называется такое распространение волн, когда по различным направлениям волны распространяются с разными скоростями. В принципе анизотропную дисперсию можно исправить путем разложения по квадратным корням Мюира. На практике такое разложение обычно обрывается на 15- либо на 45-градусном члене, при этом в обработку данных вносится анизотропийная погрешность. Среди доводов, которые приводятся в пользу усечения ряда Мюира, несмотря на появление указанной погрешности, можно назвать следующие: 1) стоимость обработки и 2) большую величину прочих ошибок, которые вносятся в процессе регистрации и обработки наблюдений. Следует всегда знать анизотропную погрешность и оценивать необходимость ее учета за счет увеличения затрат на обработку данных.

Анизотропию часто связывают с распространением света в кристаллах. В сейсморазведке методом отраженных волн явление анизотропии иногда привлекают для объяснения небольших расхождений между замерами скоростей в скважинах (вертикальное распространение) и скоростями, найденными по наземным наблюдениям (горизонтальное распространение). Эти физические фундаментальные явления анизотропии и предмет настоящего раздела — анизотропия при обработке сейсморазведочной информации — базируются на общей математической основе и системе понятий.

### Лучи, не перпендикулярные к фронтам

Явление анизотропии заключается в том, что волны, распространяющиеся по различным направлениям, движутся с разными скоростями. Анизотропия не означает того, что скорость является функцией местоположения в пространстве и поэтому она не приводит к преломлению лучей. Своеобразной особенностью, связанной с анизотропией, является то, что лучи не перпендикулярны к волновым фронтам. Сказанное иллюстрируется рис. 120. На рис. 120, *а* показаны сферические фронты волн, исходящих из точечного источника, расположенного в начале координат. Это — типичный случай изотропной среды. На рис. 120, *б* изображены несферические фронты волн, генерируемые 15-градусным уравнением миграционного преобразова-

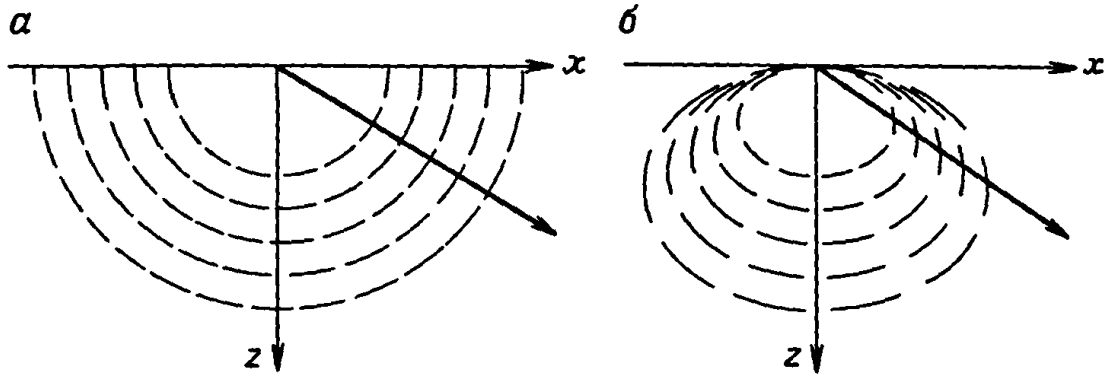



РИС. 120. Фронты волн в изотропной (*а*) и анизотропной (*б*) средах (по Рутману)

ния. Заметим, что возле оси $z$ они почти сферические, но на удалении от нее они вообще не похожи на сферу с центром в начале координат.

Идеальным фронтом волны, исходящей из вторичного источника Гюйгенса, является полуокружность. Вторичный источник, получающийся из 15-градусного уравнения экстраполяции, представляет собой эллипс. Вторичный источник, получающийся из 45-градусного уравнения экстраполяции, имеет интересную (сердцевидную) форму. Упомянутые вторичные источники изображены на рис. 121. Волны, для которых соблюдается равенство $\sin\theta = vk_x/\omega = \pm 1$, обозначены небольшими точками. Быстрозатухающие, неоднородные волны располагаются за этими точками. На практике верхние части эллипса и сердцевидной кривой наблюдаются редко, так как они располагаются в зоне быстрозатухающей энергии, а ось $x$ редко бывает дискретизирована настолько часто, чтобы они оказались не затронутыми искажениями дискретизации. Иногда при пользовании 45-градусной программой обработки можно наблюдать центральную часть сердцевидной кривой на плоскости $(x, t)$. Сказанное схематически поясняется рис. 122 и 123. На них приведены результаты применения 45-градусной программы дифракционного преобразования.

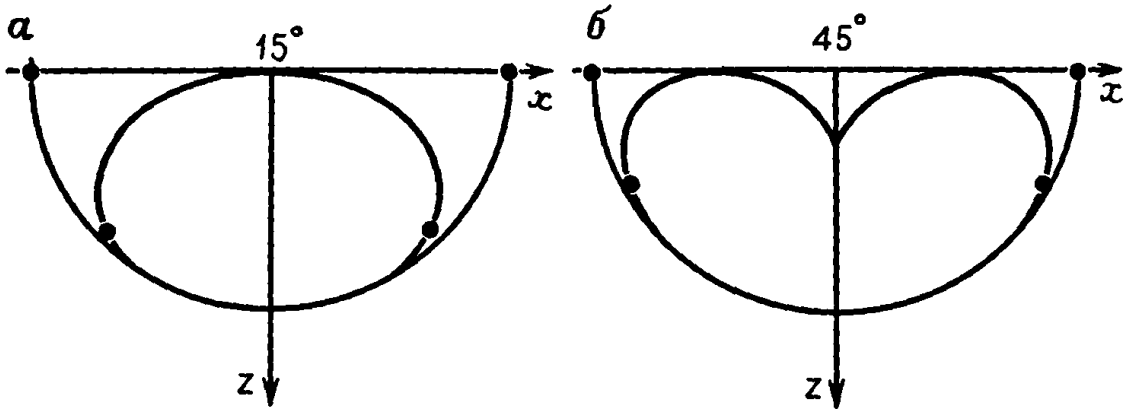



РИС. 121. Фронты волн, рассчитанные по 15- (*а*) и 45-градусным (*б*) уравнениям экстраполяции, вписанные в полуокружности (по Рутману)

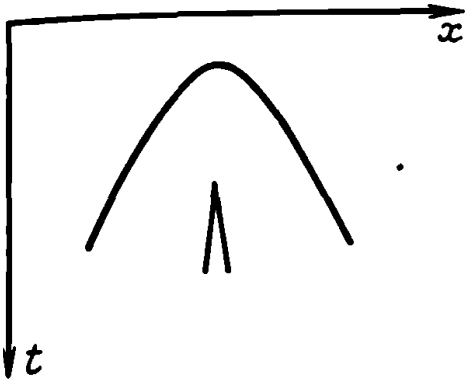



РИС. 122. 45-градусная сердцевидная кривая. Точка заострения появляется в области быстрозатухающей энергии

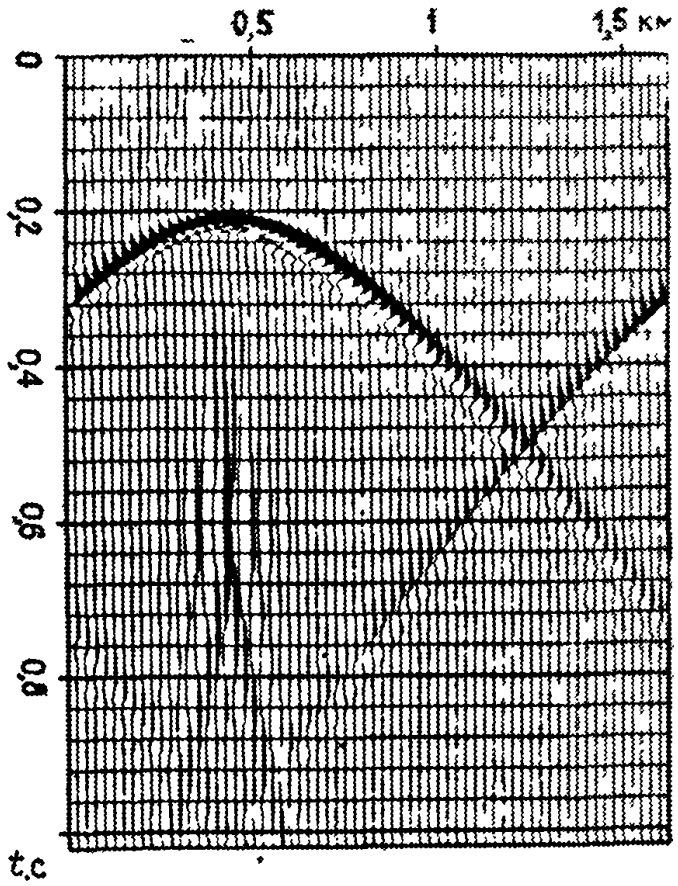



РИС. 123. Импульсная реакция 45-градусного уравнения волновой экстраполяции

## Направление волнового фронта и скорость распространения энергии

При обычном распространении волн энергия перемещается в направлении, перпендикулярном к волновому фронту. При наличии анизотропной дисперсии угол между направлением перемещения энергии и фронтом волны не будет прямым.

Кажущаяся горизонтальная скорость, наблюдаемая на поверхности земли, равна $dx\ dt$. Кажущаяся скорость по вертикальному направлению, например скорость по стволу скважины, равна $dz\ dt$. Судя по геометрическим соотношениям, обе названные выше скорости превышают скорость распространения самой волны. Вектор, перпендикулярный фронту волны и имеющий величину, обратную кажущейся скорости, называется вектором медленности:

$$\text{вектор медленности} = (dt/dx,\ dt/dz).$$

По определению, вектор фазовой скорости совпадает по направлению с вектором медленности, но его модуль равен скорости распространения по нормали к фронту волны. Выражаясь более строго, вектор фазовой скорости равен вектору медленности, деленному на квадрат модуля последнего:

$$\text{фазовая скорость} = \frac{(dt\ dx,\ dt\ dz)}{(dt\ dx)^2 + (dt\ dz)^2}.$$

В случае возмущения синусоидальной формы, т. е. вида $\exp(i\Phi) = \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_z z)$, фазу можно положить равной некоторой постоянной:

$$0 = d\Phi = -\omega dt + k_x dx + k_z dz.$$

Следовательно, в пространстве Фурье

$$\text{вектор медленности} = (k_x/\omega,\ k_z/\omega). \qquad (243а)$$

Получить направление распространения энергии несколько труднее, но оно выводится из так называемого вектора групповой скорости

$$\text{групповая скорость} = (\partial/\partial k_x,\ \partial/\partial k_z)\omega(k_x, k_z). \qquad (243б)$$

В случае скалярного волнового уравнения вида $\omega^2/v^2 = k_x^2 + k_z^2$ векторы групповой и фазовой скоростей оказываются одинаковыми, что можно проверить дифференцированием и подстановкой. Наиболее знакомым типом дисперсии является частотная, когда различные частоты распространяются с различными скоростями. Ниже в настоящем разделе будет показано, что знакомые нам (15-, 45- и т. д. -градусные) экстраполяционные уравнения не описывают частотную дисперсию. Это значит, что скорости, содержащиеся в этих уравнениях, будучи функциями $\omega$ и угла $k_x$ $\omega$, не зависят от $\omega$. Другими словами, эллиптическая и сердцевидная формы кривых (см. рис. 121) не зависят от частоты.

Одно из интересных явлений анизотропной дисперсии заключается в том, что энергия кажется движущейся в одном направлении, тогда как в действительности распространяется в другом. Ярко выраженный пример этому наблюдается тогда, когда групповая скорость имеет составляющую, направленную вниз, а фазовая вверх. Один из таких примеров изображен на рис. 124 в виде дисперсионного соотношения 45-градусного уравнения экстраполяции. Вектор медленности, направленный по нормали к фронту волны, построен в виде стрелки, проведенной из начала координат до дисперсионной кривой. Теперь можно построить соответствующее направление вектора групповой скорости, приняв во внимание тот факт, что групповая скорость определяется оператором градиента, содержащимся в уравнении (243б). Представьте, что через $\omega$ обозначена высота холма, от которого $k_z$ указывает на юг, а $k_x$ — на восток. Тогда дисперсионное соотношение будет представлять собой изолинию постоянной альтитуды. Если вычерчивать рис. 124 в различных масштабах, то появляются различные численные значения частоты. Групповая скорость в направлении градиента перпендикулярна изолиниям постоянной частоты $\omega$.

Явление анизотропной дисперсии наиболее четко можно наблюдать в кинофильме, хотя понять его смысл можно и по одиночному кадру, например изображенному на рис. 125.

То, что на рис. 125 ни энергии, ни информация не могут распространяться вверх, станет очевидным, когда вы изучите

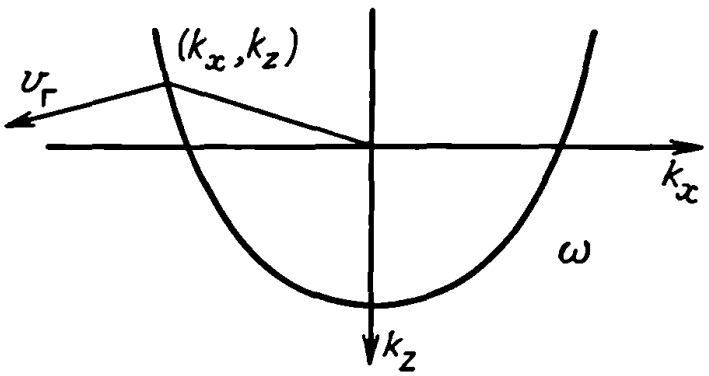
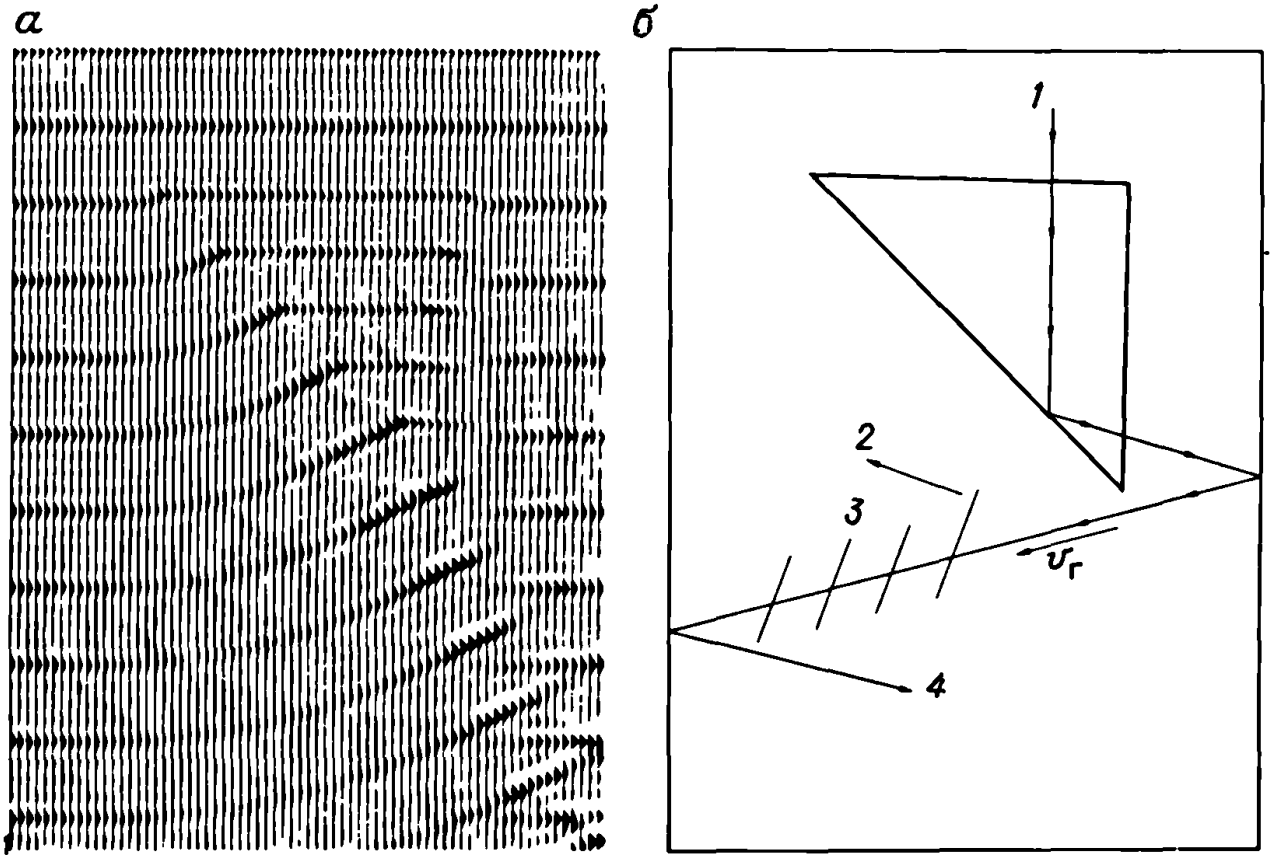



РИС. 124. Изображение экстраполяции в нижнее полупространство с нанесенными векторами групповой скорости и медленности:
$\omega$ область постоянной частоты

РИС. 125. Плоские волны четырех частот, распространяющиеся через правую призму:
*а* волновое поле; *б* лучевая интерпретация: *1* энергия на входе; *2* медленность; *3* фронты; *4* энергия на выходе




программу, по которой было рассчитано волновое поле. Программа не держит весь кадр в памяти, она рассчитывает поочередно горизонтальные полоски, начиная с самой верхней. Поэтому фазовые фронты в кинофильме, которые кажутся движущимися вверх, выглядят неестественно. С теоретической точки зрения нельзя ожидать, чтобы процесс волновой экстраполяции с помощью 45-градусного уравнения успешно справлялся с углами, достигающими 90 . Однако пример, приведенный на рис. 125, показывает, что уравнение работает и в столь экстремальных случаях.

Автору доводилось наблюдать однажды похожую картину на материалах метода отраженных волн, полученных в районе развития надвиговой тектоники. Получить эти материалы в свои руки не удалось и к настоящему времени они, наверное, затерялись где-нибудь в архивах владельца, поэтому могу предложить вашему вниманию лишь чертеж, составленный по

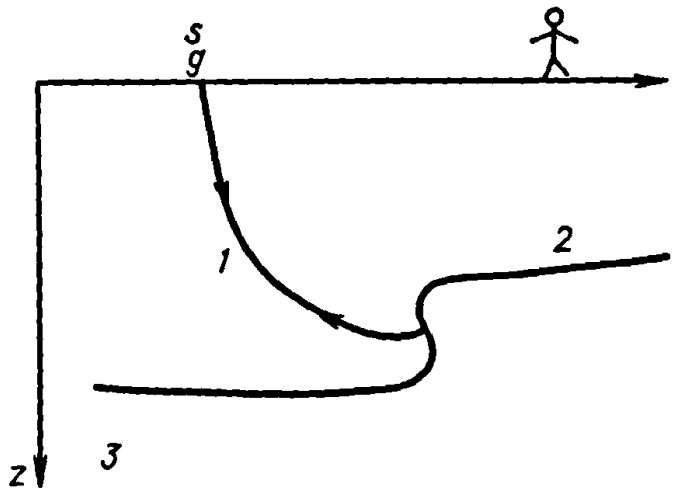



РИС. 126. Луч, отраженный от нижней кромки взброса:
*1* луч, искривленный под воздействием функции $v(z)$; *2* непрерывный смигрированный горизонт; *3* $z$ или мигрированное время

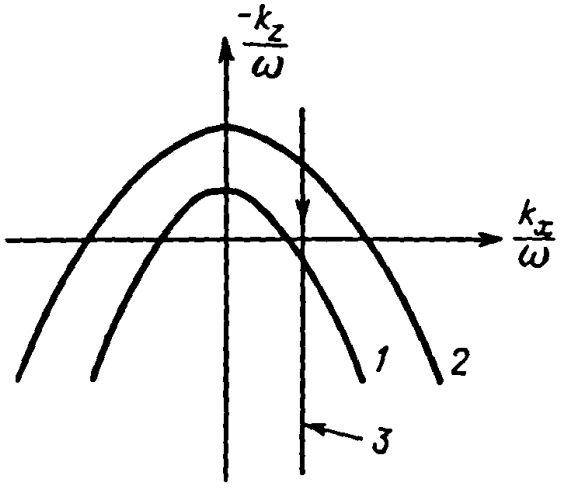



РИС. 127. Дисперсионная кривая для двух значений скорости:
*1* высокая скорость; *2* низкая скорость; *3* линия постоянного параметра Снеллиуса

памяти (рис. 126). Возрастание скорости с глубиной приводит к тому, что луч изгибается вверх и отражается от нижней кромки надвига. Чтобы прикинуть, что происходит в волновом уравнении, полезно начертить дисперсионную кривую для двух значений скорости (рис. 127).

Продолжение в нижнее полупространство энергии с некоторым заданным шагом $dt\ dx = k_x\ \omega$ начинается с обыкновенного значения угла на дисперсионной кривой, соответствующей невысокой скорости, характерной для приповерхностной части разреза. Но как только доходим до высокоскоростной части разреза, при том же шаге получаем отрицательное значение фазовой скорости. Хотя точность задания угла надвига сомнительна, общая картина вполне реальна. Она напоминает рис. 125.

### Анализ погрешностей миграции

Случай наклонно залегающей, плоской и регулярной отражающей границы можно проанализировать во всей его полноте, воспользовавшись для этого понятием фазовой скорости. Понятие групповой скорости требуется лишь в тех случаях, когда одновременно присутствуют границы, наклоненные под разными углами. Картина такого рода наблюдается у отклика от точечного рассеивателя. Она наблюдается также и в случае, когда амплитуда отражения меняется вдоль наклонной границы. Необходимость использования групповой скорости объясняется тем, что для представления криволинейной границы или амплитудной аномалии требуется некоторый диапазон углов падения плоской волны. Аналогичная ситуация возникает и в случае анализа временных рядов, когда для фурье-представления модулированной по амплитуде синусоиды требуется некоторая полоса синусоидальных колебаний.

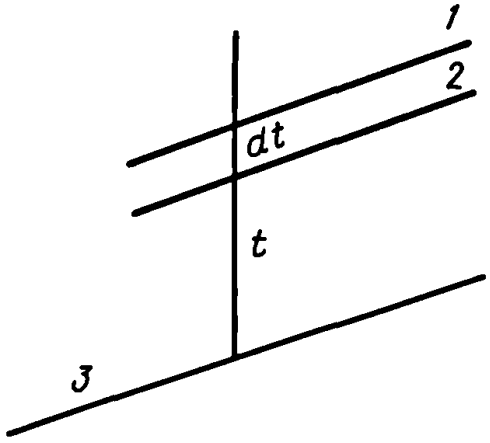



РИС. 128. Недомигрированная наклонная отражающая граница.
Положение границы: *1* искомое; *2* фактическое; *3* начальное

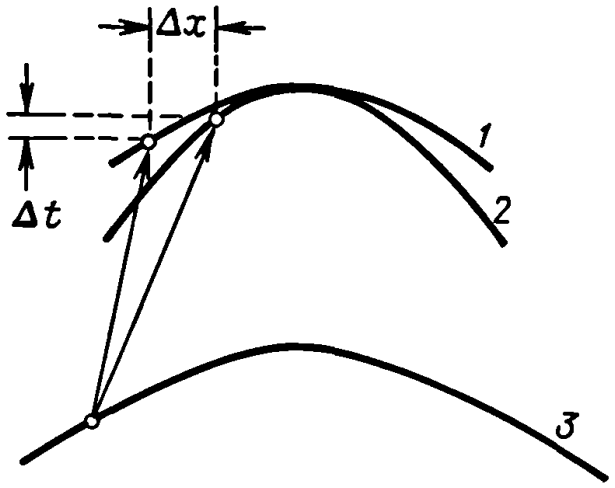



РИС. 129. Погрешность коллапсирования гиперболы. Фактическая кривая располагается над искомой, но фактическая точка находится ниже искомой:
*1* фактическая кривая; *2* искомая кривая; *3* начальное положение границы

На рис. 128 изображена гладкая плоская наклонная отражающая граница, которая оказалась недомигрированной по той простой причине, что $\hat{k}_z$, найденное с помощью рациональной аппроксимации квадратными корнями или же какой-то численной аппроксимации, не согласуется с правильным квадратно-корневым значением волнового числа $k_z$.

Ошибка, присутствующая на рис. 128, целиком является погрешностью временно́го сдвига. Поскольку коэффициент отражения сохраняет свое постоянство вдоль границы, нельзя заметить никакой погрешности в латеральном смещении. Теоретически указанную погрешность времени можно определить как

$$dt/t \approx dz/z \approx (\hat{k}_z - k_z)/k_z. \qquad (244)$$

В случае так называемого 15-градусного уравнения при угле в 25 погрешность фазы достигает приблизительно половины процента.

Далее рассмотрим и определим погрешность, возникающую при коллапсировании гиперболической оси синфазности. На рис. 129 демонстрируется продолжение в нижнее полупространство одной из гипербол. Для ясности объяснения операция продолжения вниз выполнена частично, не до фокуса. Возьмем луч с параметром Снеллиуса $p = dt/dx$, равным какому-то значению углового коэффициента $p$. Проведем мысленно касательные к каждой из гипербол с угловым коэффициентом $p$. Если бы на участке гипербол с угловым коэффициентом $p$ находилась небольшая амплитудная аномалия, то ее можно было бы распознать на каждой из гипербол.

Величина смещения во времени, показанная на рис. 119, слишком мала, поэтому очень мало и смещение по латерали.

На практике погрешности, вносимые 15-градусным уравнением при $r_0=1$, иногда оказываются скомпенсированными в результате возрастания $z$ или $v$ приблизительно на 6%. Величины погрешностей можно рассчитать по формулам

$$\frac{\Delta t}{t}=\frac{\frac{\partial}{\partial\omega}(k_z-k_z)}{\frac{\partial}{\partial\omega}k_z}, \tag{245а}$$

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\frac{\partial}{\partial k_x}(k_z-k_z)}{\frac{\partial}{\partial k_x}k_z}, \tag{245б}$$

где предполагается, что волновое число $k_z$ является функцией $\omega$ и $k_x$. Оказывается, что в случае 15-градусного уравнения при 20° возникает ошибка в групповой скорости приблизительно в 0,5%. Отсюда следует, что погрешность групповой скорости обычно больше погрешности фазовой.

### Вывод уравнения групповой скорости

Импульсная функция в начале координат пространства $(x, z)$ представляет собой суперпозицию фурье-составляющих вида

$$\iint e^{+ik_x x+ik_z z}\,dk_x dk_z. \tag{246}$$

Физические соображения, а возможно, и численный анализ, приводят к дисперсионному соотношению, которое является функциональной зависимостью между $\omega$, $k_x$ и $k_z$ вида, скажем, $\omega(k_x, k_z)$. Типичный пример подобного дисперсионного соотношения — скалярное волновое уравнение $\omega^2=v^2(k_x^2+k_z^2)$. Решением этого уравнения будет функция вида

$$e^{-i\omega t+ik_x x+ik_z z}. \tag{247}$$

В результате интегрирования выражения (247) по $(k_x, k_z)$ получаем монохроматическую функцию времени, которая при $t=0$ представляет собой импульсоид, расположенный в точке $(x, z)=(0, 0)$. Это выражение по истечении очень большого промежутка времени принимает вид

$$\iint e^{-it[(k_x,\ k_z)-k_x x/t-k_z z/t]}\,dk_x dk_z. \tag{248}$$

При очень большом $t$ подынтегральное выражение представляет собой очень быстро осциллирующую функцию единичной амплитуды. Таким образом, этот интеграл будет практически равен нулю, если только величина в квадратных скобках не окажется почти не зависящей от $k_x$ и $k_z$ в пределах довольно обширной площади пространства $(k_x, k_z)$. Подобное плоское

пятно можно обнаружить тем же способом, каким определяется минимум или максимум любой двухмерной функции, т. е. путем приравнивания производных к нулю. Изложенный только что аналитический подход известен под названием метода стационарной фазы. Применив его, получаем

$$0=\partial/\partial k_x[\ ]=\partial\omega/\partial k_x-x/t, \tag{249а}$$

$$0=\partial/\partial k_z[\ ]=\partial\omega/\partial k_z-z/t. \tag{249б}$$

В заключение имеем, что в момент времени $t$ возмущения будут располагаться в точках

$$(x,\ z)=t\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x},\ \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\right), \tag{250}$$

чем и доказывается определение групповой скорости.

Теперь посмотрим, как был рассчитан рис. 111, *а*. После решения 15-градусного дисперсионного соотношения относительно ω, последнее было подставлено в уравнение (250). Полученная в результате точка $(x, z)$ оказалась функцией отношения $k_x/\omega$. Задав все возможные значения $k_x/\omega$, получаем кривую.

### Вывод уравнения миграции энергии

Миграционное преобразование энергии в пространстве $(x, t)$ исследуется таким же способом, каким было получено выражение для групповой скорости. Зададим в интеграле

$$\iint e^{iz\,[k_2(\omega,\ k_x)-\omega t/z+k_x x/z]}\,d\omega\,dk_x \tag{251}$$

большие значения глубины. В результате найдем, что энергия перемещается в точку

$$(x,\ t)=z\left(-\partial k_z/\partial k_x,\ \partial k_z/\partial\omega\right). \tag{252}$$

Последнее подтверждает справедливость сделанного ранее вывода о том, что выражение (245) можно использовать для анализа погрешностей в процессе распространения энергии. Уравнение (252) было использовано также и для расчета кривой, изображенной на рис. 122. Справедливость понятия стационарной фазы подтверждается рис. 123, который получен обратным преобразованием Фурье.

### Уравнения экстраполяции не создают частотной дисперсии

Чтобы доказать, что известные нам 15-, 45- и т. д. -градусные волновые экстраполяторы не создают частотной дисперсии, вспомним из раздела 2.2, что все дисперсионные соотношения имеют вид $k_z/\omega=f(k_x/\omega)$, где через $f$ обозначено

луговое приближение, скажем, 15- или 45-градусное. Дисперсионные соотношения такого вида не могут создавать частотной дисперсии. Найдя требуемые для уравнения (252) производные, убеждаемся, что координаты $(x, t)$ волнового фронта не зависят в явном виде от $\omega$, хотя через параметр $vk_x/\omega$ они зависят от угла наклона. Поэтому частотная дисперсия, наблюдаемая в практических случаях, не создается 15- или 45-градусными аппроксимациями.

## 4.3. Частотная дисперсия и точность волновой миграции

Частотная дисперсия объясняется тем, что различные частотные составляющие распространяются с различными скоростями. О физическом явлении частотной дисперсии редко говорят в повседневной жизни, хотя многие читатели, возможно, сталкивались с ней, катаясь на коньках по замерзшему озеру или реке. Упругие волны, возникающие при растрескивании льда, распространяются диспергируя, превращая хлопки в ударные звуки. Частотная дисперсия сейсмических волн наблюдается обычно при их распространении вдоль поверхности земли. Она едва ли ощутима у волн, отраженных от глубинных слоев осадочного чехла. При обработке сейсморазведочных материалов частотная дисперсия причиняет немало хлопот обработчикам-методистам. Она проявляется главным образом в методе конечных разностей, так как дифференцирующие и разностные операторы не совпадают по своим характеристикам на высоких частотах. Частотную дисперсию всегда можно подавить посредством более частой дискретизации, поэтому геофизики, занятые на полевых работах, должны следить за тем, чтобы это условие соблюдалось. На рис. 130 изображены некоторые из диспергированных импульсоидов.

Появление частотной дисперсии, вызванной обработкой сейсморазведочных материалов, служит предупреждением о том, что материалы могут искажаться из-за недостаточно плотной дискретизации. Способы обработки в частотной области не зависят от разностных операторов, поэтому они имеют то достоинство, что не вызывают дисперсии. Но вместе с тем существуют и недостатки, за которые приходится расплачиваться. Среди них можно назвать следующие: 1) ограничение средами с постоянными вещественными свойствами; 2) периодические повторы процедур обработки; 3) появление искажений дискретизации по пространственной координате без предупредительных сигналов в виде дисперсии скоростей.

На рис. 131 приведен пример частотной дисперсии, проявляющейся при миграционном преобразовании наблюденных данных. В верхней части рисунка представлен разрез ОГТ, в

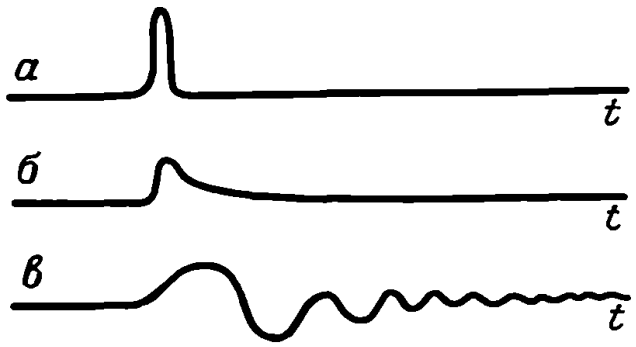



РИС. 130. Изображение импульсоидов:
*а* импульсоид; *б* слегка диспергированный импульсоид, образующийся при рассеянии энергии высоких частот; *в* импульсоид, претерпевший существенную частотную дисперсию

средней те же материалы, но после обработки, в процессе которой не предпринимались попытки подавить частотную дисперсию. Наихудшая дисперсия отмечается в районе ПВ 200 на времени 4 с. Нижний разрез получен после переобработки, во время которой подавлению дисперсии уделялось большое внимание.

### Искажения пространственной дискретизации

Искажения, обусловленные дискретизацией, могут проявляться на координатах времени, глубины, точки приема, точки взрыва, средней точки, удаления от источника или же в направлении, перпендикулярном к профилю наблюдений. Сильные искажения дискретизации наблюдаются на горизонтальных пространственных осях. Сказанное хорошо иллюстрирует рис. 22 (см. раздел 1.3). Глядя на него, вы не скажете, в какую сторону наклонены оси синфазности — в левую или в правую. Математический анализ такого рода искажений испытывает те же трудности. Дисперсионное соотношение волнового уравнения позволяет рассчитывать пространственную частоту по вертикали $k_z$, располагая временной частотой $\omega$, скоростью $v$ и пространственной частотой по горизонтали $k_x$ и прибегая к уравнению полуокружности $k_z(\omega, k_x)=\sqrt{\omega^2/v^2-k_x^2}$. Дискретизация по оси $x$ определяет верхний предел $k_x$, равный частоте Найквиста $\pi\,\Delta x$. Как частотные, так и конечно-разностные способы обращают высокие частоты относительно найквистовой частоты. Следовательно, полуокружностное дисперсионное соотношение в точности повторяется на частотах выше найквистовой, что и показано на рис. 132.

Искажения пространственной дискретизации начинаются в тот момент, когда две окружности касаются друг друга, как например, для 20 Гц (см. рис. 132). Это происходит, когда полудлина волны $v/2f$ становится равной интервалу пространственной дискретизации $\Delta x$. В соответствии с моделью излучающих границ следует брать значение скорости, равное половине скорости распространения в земной среде. Следовательно, искажения дискретизации не возникают, если $2f\Delta x<(1/2)v_{\text{породы}}$. В табл. 11 приведены частоты, при которых не возникает искажения дискретизации, для случая, когда скорость в среде равна 2 км с.

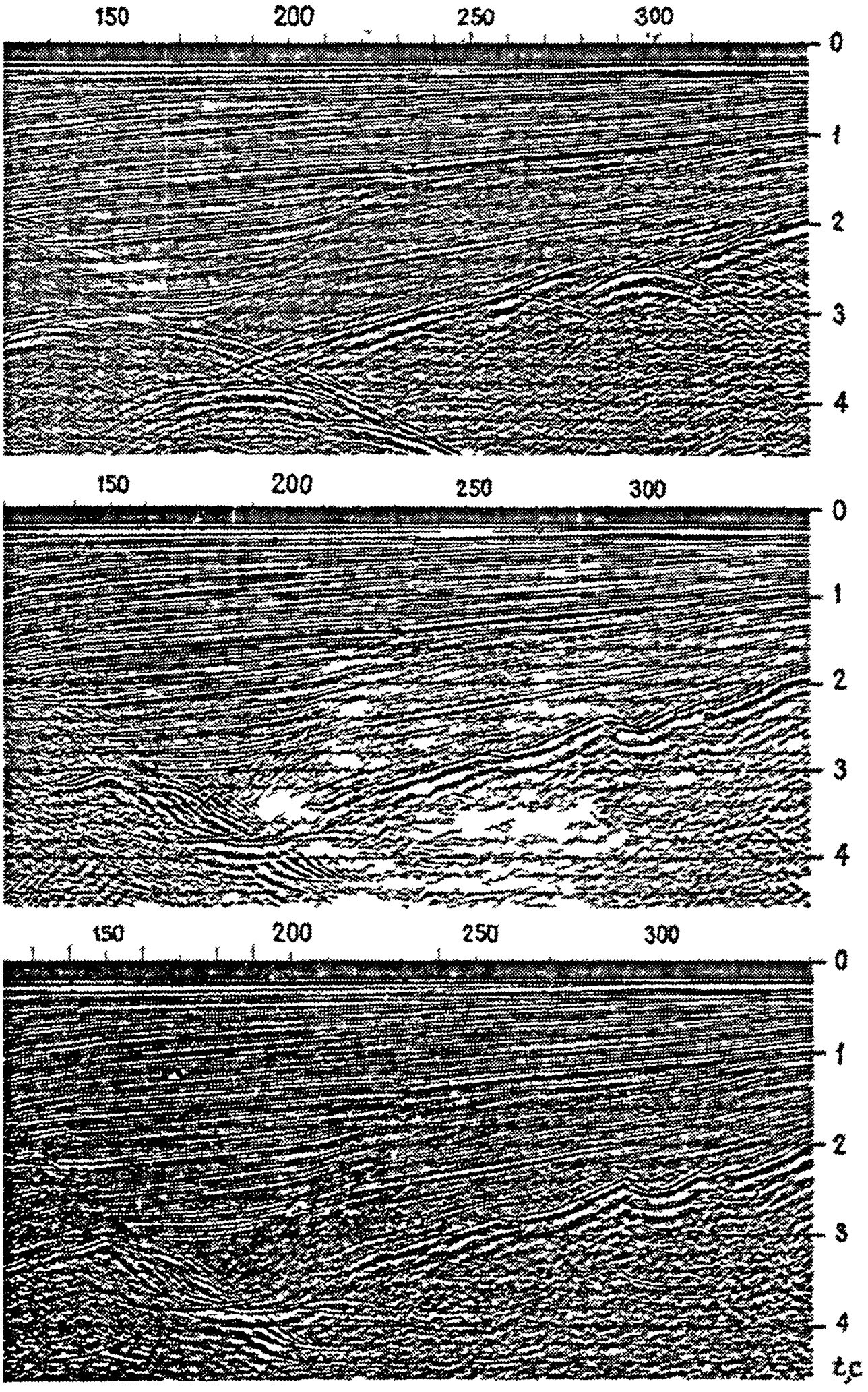



РИС. 131. Учет частотной дисперсии

**Таблица 11**

| Расстановка сейсмоприемников | $\Delta x$, м | Безопасная частота, Гц |
|---|---|---|
| Стандартная | 25 | 20 |
| Рекогносцировочная | 50 | 10 |
| Поперечная при трехмерной сейсморазведке | 100 | 5 |

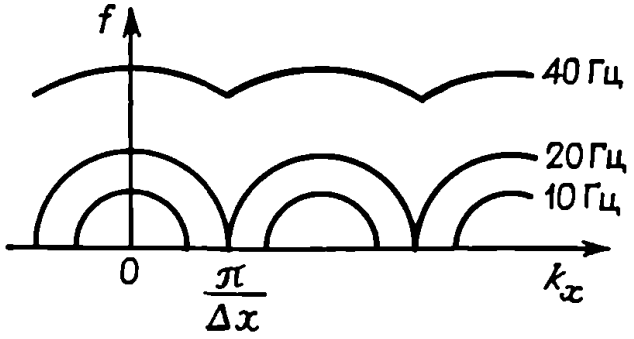



РИС. 132. Изображение эффективных дисперсионных соотношений волнового уравнения в случае дискретизации горизонтальной оси. Шифр кривых частоты, типичные для миграции при нулевых удалениях

Другая точка зрения на проблему искажений при пространственной дискретизации состоит в том, что группы сейсмоприемников подавляют волны с низкими кажущимися скоростями. При этом не принимаются во внимание искажения дискретизации при группировании источников. С этой точки зрения предел, по достижении которого начинаются искажения пространственной дискретизации, должен выражаться в углах подхода волн, при которых наблюденная энергия исчезает. Если взять угол выхода луча равным 30, а не 90 , то длины волн по горизонтали удвоятся. Следовательно, при угле выхода в 30 и скорости в среде, равной 2 км с, искажения, связанные с недостаточно плотной дискретизацией, отсутствуют, если частоты сейсмических колебаний находятся в пределах, указанных в табл. 12.

Так как сейсмические наблюдения на частотах выше 40 Гц обычно характеризуются высоким уровнем полезных сигналов, обработка сейсмотрасс, регистрируемых при больших углах отражения, часто приводит к неудовлетворительным результатам из-за больших искажений пространственной дискретизации.

Энергия, подверженная искажениям дискретизации, не перемещается между крыльями гиперболы и ее вершиной. Она стремится оставаться на месте. Сказанное иллюстрируется

**Таблица 12**

| Расстановка сейсмоприемников | $\Delta x$, м | Безопасная частота, Гц |
|---|---|---|
| Стандартная | 25 | 40 |
| Рекогносцировочная | 50 | 20 |
| Поперечная при трехмерной сейсморазвсдке | 100 | 10 |

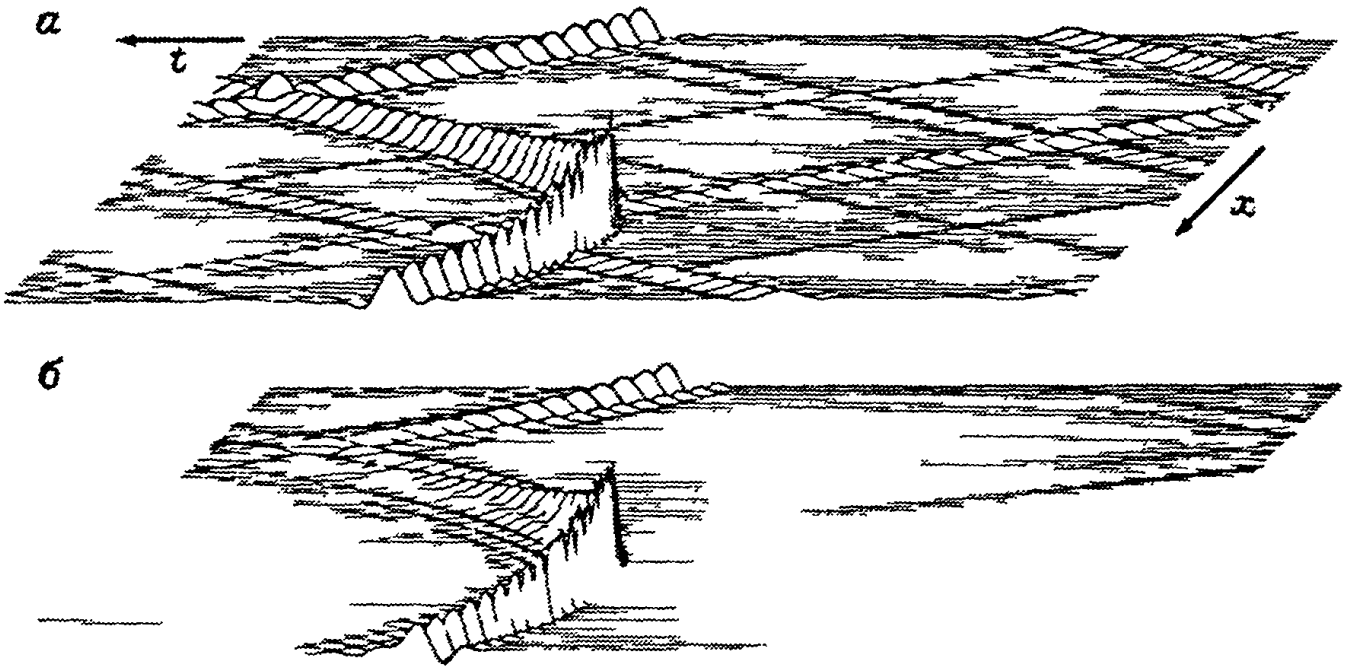



РИС. 133. Синтетические гиперболы длительностью записи 1 с при параметрах дискретизации по времени $\Delta t=4$ мс, по расстоянию $\Delta x=25$ м и скорости в среде 2 км с:
*а* 90-градусная гипербола в фурье-области, *б* 15-градусный гиперболоид, найденный конечно-разностным методом

рис. 133, на котором изображены 90-градусная гипербола и 15-градусный конечно-разностный гиперболоид. В общем и целом различие небольшое. Посмотрите на поведение амплитуды гиперболической волны. По краям она убывает быстрее, чем должна была бы убывать согласно законам сферического расхождения и изменения коэффициента отражения от угла отражения. Наблюдаемый эффект объясняется тем, что полуокружности дисперсионных кривых перекрываются между собой. Не может быть углов распространения волны, превышающих тот, при котором начинаются искажения дискретизации по оси $x$. Поскольку волны не могут распространяться под столь крутыми углами, они этого и не делают. Импульсоид не расходится надлежащим образом.

### Вторые пространственные производные

Уравнение, определяющее оператор вычисления вторых конечных разностей, имеет вид

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2}P=\frac{P(x+\Delta x)-2P(x)+P(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}. \qquad (253)$$

Оператор вычисления вторых производных получаем путем перехода к пределу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{\lim \Delta x\to 0}=\frac{\delta^2}{\delta x^2}P. \qquad (254)$$

По мере стремления $\Delta x$ к нулю, большое число различных определений могут стремиться к одному и тому же пределу. Задача заключается в том, чтобы найти такое выражение, которое остается точным, когда $\Delta x$ больше нуля и, кроме того, с учетом требований практики обработки не будет слишком сложным. Цель состоит в том, чтобы найти способ количественной оценки точности, которую обеспечивает уравнение (253). Затем мы попробуем найти такое выражение, которое будучи немногим сложнее уравнения (253), было бы гораздо точнее его.

В качестве основного метода исследования воспользуемся преобразованием Фурье. Найдем производные комплексной показательной функции $P=P_0\exp(ikx)$ и будем считать все погрешности зависящими от пространственной частоты $k$. В случае второй производной имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P=-k^2P. \tag{255}$$

Определим $\hat{k}$ с помощью выражения, аналогичного оператору вычисления конечных разностей:

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2}P=-\hat{k}^2P. \tag{256}$$

В идеальном случае $\hat{k}$ будет равняться $k$. Подставляя комплексную экспоненциальную функцию $P=P_0\exp(ikx)$ в уравнение (253), убеждаемся, что определение (256) дает выражение $\hat{k}$ через $k$:

$$-\hat{k}^2P=\frac{P_0}{\Delta x^2}\left[e^{ik(x+\Delta x)}-2e^{ikx}+e^{ik(x-\Delta x)}\right], \tag{257а}$$

$$-\frac{\delta^2}{\delta x}=\hat{k}^2=\frac{2}{\Delta x^2}\left[1-\cos(k\Delta x)\right]. \tag{257б}$$

Зависимость $\hat{k}\Delta x$ от $k\Delta x$ вида (257б) весьма просто изобразить графически. Применение формулы для половинного угла позволяет найти выражение корня квадратного из (257б) в аналитическом виде:

$$\hat{k}\Delta x/2=\sin(k\Delta x\ 2). \tag{257в}$$

После разложения в ряд видим, что для низких частот $\hat{k}$ является хорошим приближением к $k$. На частоте Найквиста, определяемой равенством $k\Delta x=\pi$, такое приближение величины $\pi$ (т. е. $\hat{k}\Delta x=2$) будет плохим.

### Способ повышения точности

Абсолютную точность можно увеличить, уменьшая интервал дискретизации $\Delta x$. Увеличения точности относительно частоты

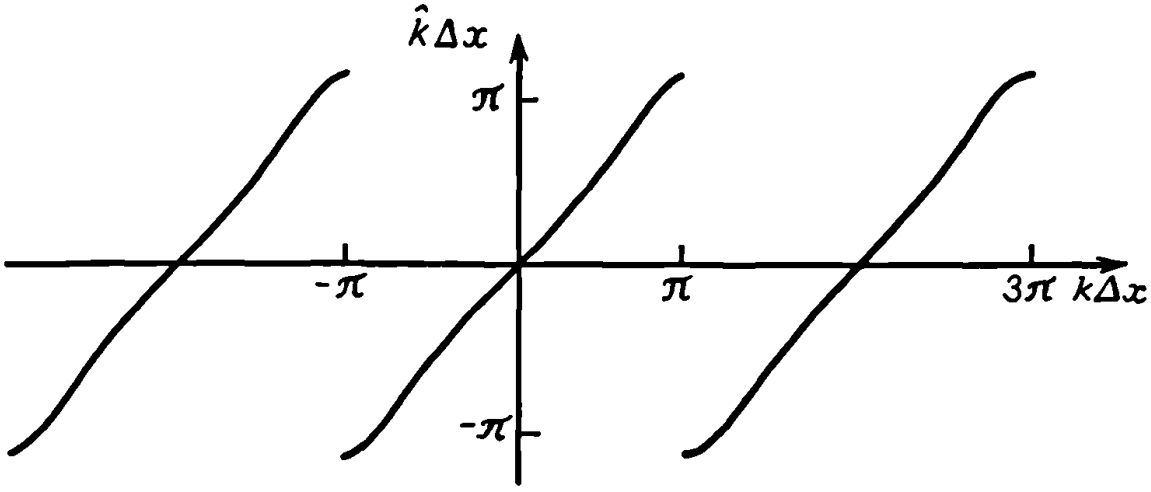



РИС. 134. Изображение второй производной в виде функции пространственного волнового числа. Знак квадратного корня в уравнении (259б) выбран таким, чтобы он согласовывался с $k$ в интервале от $-\pi$ до $\pi$ и был периодическим за его пределами (по Хейлу)

Найквиста можно достичь за счет увеличения затрат машинного времени и громоздкости аналитических выражений путем добавления членов ряда высшего порядка, скажем таких, как

$$\partial^2/\partial x^2 \approx \delta^2/\delta x^2 - \Delta x^2/12 \cdot \delta^4/\delta x^4 + \text{ и т. д.} \qquad (258)$$

При стремлении $\Delta x$ к нулю уравнение (258) стремится принять вид основных определений (253) и (254). Если требуется высокая точность при малых значениях $k$, то коэффициенты, наподобие 1/12 в (258), можно определять методом разложения в ряд Тейлора. Если же желательно получить высокую точность в некотором диапазоне значений $k$, то можно найти несколько отличные от упомянутых выше коэффициенты, прибегнув к методу подбора. На практике уравнение (258) применяется очень редко, так как существует менее очевидное, но обеспечивающее гораздо большую точность при меньших затратах на вычисления выражение. Идея вытекает из соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{\delta^2\, \delta x^2}{1 + b\Delta x^2 (\delta^2\, \delta x^2)}, \qquad (259а)$$

где через $b$ обозначена некая регулируемая постоянная. Точность, обеспечиваемую выражением (259а), можно оценить количественно путем подстановки в него уравнения (257б), после чего получаем

$$(\hat{k}\,\Delta x/2)^2 = \frac{\sin^2(k\Delta x\ 2)}{1 - b4\sin^2(k\Delta x\ 2)}. \qquad (259б)$$

На рис. 134 приведен график корня квадратного из уравнения (259б) для значения $b = 1/6$.

Положив $b$ в (259) равным 1/12, получаем, что уравнения (258) и (259) совпадают с точностью до второго порядка по $\Delta x$. Коэффициент 1/12 получен в результате разложения в ряд, но

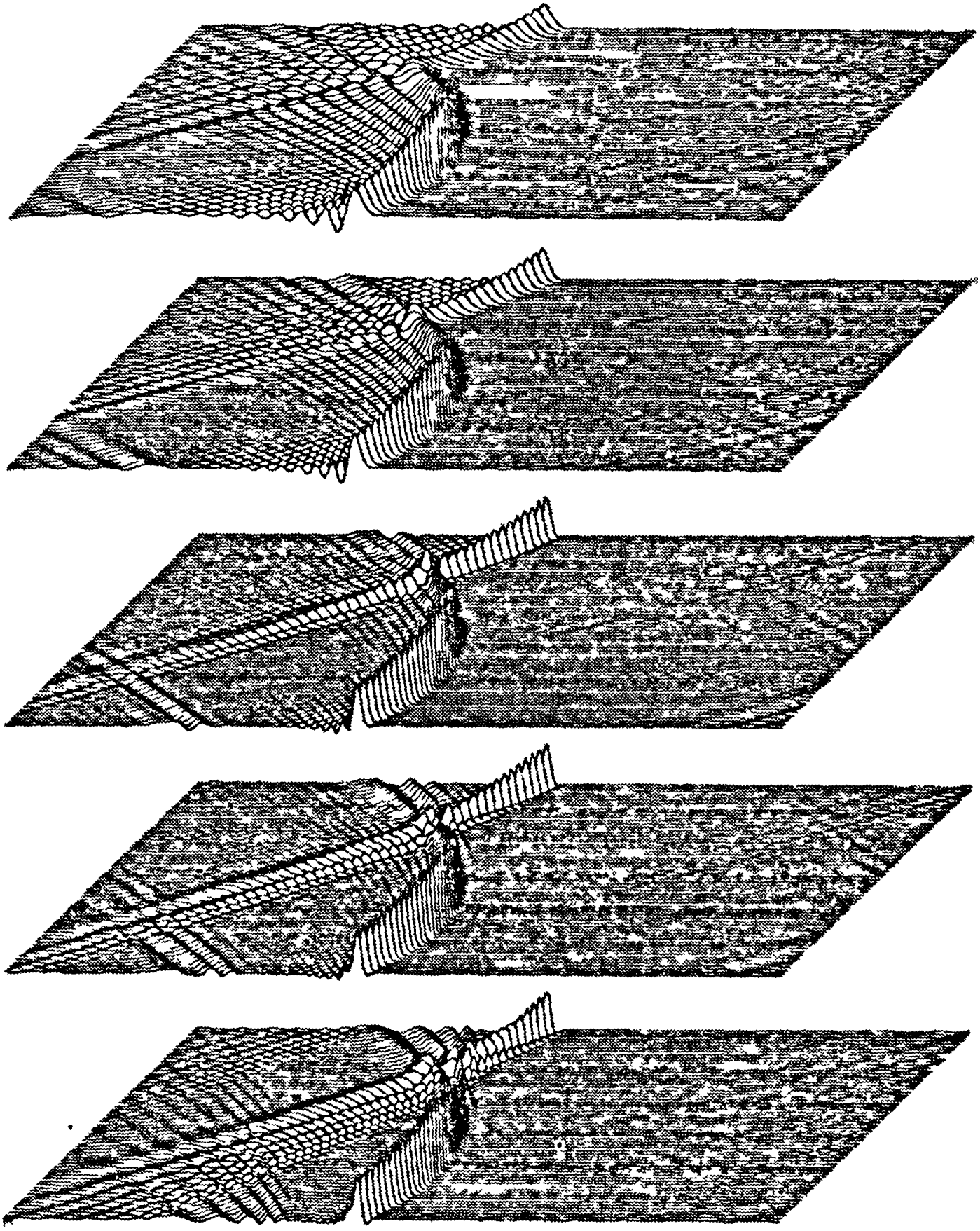


РИС. 135. Гиперболы для значений $b$, равных 0, 1 12, 1 6, 726, 1 6 и 1 5

множитель 1 6 согласуется с ним в широком диапазоне и является общеупотребительным. Ф. Мюир показал, что значение $1/4-1/\pi\approx 1\ 6{,}726$ обеспечивает абсолютно точное совпадение на частоте Найквиста и достаточно точное на всех более низких частотах. Мало найдется сейсморазведчиков,

которые считали бы оставшийся дефицит точности уравнения (259) достаточным для оправдания необходимости интерполяции наблюденных в поле значений. На рис. 135 приведены гиперболы при различных значениях постоянной $b$. Убедитесь, что независимо от величины $b$ самые длинные волны распространяются с одинаковыми скоростями. Ось времени на рис. 125 содержит всего 256 точек, хотя фактически она может состоять из тысячи и более, поэтому эффекты частотной дисперсии, характерные для процедур вычисления конечных разностей по оси $x$, преувеличены.

Убедимся еще раз, что уравнением (259) можно пользоваться на практике, если $b=1/6$. Простейшим уравнением-прототипом является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}q=\frac{\partial^2}{\partial x^2}q\approx\frac{\delta^2\ \delta x^2}{1+(\Delta x^2\ 6)(\delta^2\ \delta x^2)}q. \tag{260}$$

Делимое равно

$$\left(1+\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\delta^2}{\delta x^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}q\approx\delta_{xx}q. \tag{261}$$

### Производные по времени и глубине — билинейное преобразование

Можно считать, что вторая производная — это вторая производная и что нет никаких математических оснований, чтобы искать производные по времени иным путем, чем производные по пространственной координате. Но такое предположение неправильное. Намек на различие между производными по $t$ и по $x$ содержится в граничных условиях. В случае производных по времени (а зачастую и по глубине $z$) необходимо принимать во внимание причинность — понятие, означающее, что будущее определяется только по настоящему и прошлому. Соответствующими граничными условиями на временной оси являются начальные, когда функция (и, возможно, некоторые ее производные) задается в одной начальной по времени точке. В случае глубинной координаты $z$ такой особой точкой будет поверхность земли при $z=0$. Но латеральные пространственные производные различны, они требуют задания граничных условий в двух далеко отстоящих друг от друга точках, расположенных обычно на левой и правой гранях рассматриваемого объема среды.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dq}{dz}=ik_z(\omega, k_x)q \tag{262}$$

связано с самим определением величины $k_z$. Аналогичное разностное уравнение определит величину $\hat{k}_z$:

$$(q_{z+\Delta z}-q_z)/\Delta z = i\hat{k}_z(q_{z+\Delta z}+q_z)/2. \tag{263}$$

Подставив решение уравнения (262), т. е. $q=q_0\exp(ik_z z)$, в (263), получим зависимость между искомым $k_z$ и фактическим $\hat{k}_z$:

$$i\hat{k}_z\Delta z = 2\,\frac{e^{ik_z\Delta z}-1}{e^{ik_z\Delta z}+1} = 2\,\frac{e^{ik_z\Delta z/2}-e^{-ik_z\Delta z/2}}{e^{ik_z\Delta z/2}+e^{-ik_z\Delta z/2}}. \tag{264}$$

Последнее уравнение известно как билинейное преобразование (см. раздел 4.6):

$$i\hat{k}_z\Delta z = 2i\,\frac{\sin(k_z\Delta z/2)}{\cos(k_z\Delta z/2)}, \tag{265}$$

$$k_z\Delta z/2 = \operatorname{tg}(k_z\Delta z/2). \tag{266}$$

По уравнению (266) можно рассчитать точность первых производных, получаемых по методу Крэнка—Никольсона. Вспомним схемы конечно-разностного миграционного преобразования из раздела 2.7. Там вычисление конечных разностей по времени производилось так же, как и по глубине. Поэтому должно иметь место одинаковое ограничение по точности, а именно:

$$\hat{\omega}\Delta t/2 = \operatorname{tg}(\omega\Delta t/2). \tag{267}$$

После разложения в ряд видим, что $\hat{\omega}$ стремится к $\omega$ при стремлении $\Delta t$ к нулю. Относительные ошибки в $\omega$ при 4, 10 и 20 отсчетах на длину волны равны соответственно 30, 3 и 1%. Эти ошибки довольно велики и вызывают необходимость либо принимать небольшие $\Delta t$, либо пользоваться более точным в сравнении с (266) уравнением.

Возможно, и не существует такого представления причинного дифференцирования, которое было бы сколь-нибудь точнее, чем представление Крэнка—Никольсона. Нет ничего похожего на прием, использованный в предыдущем подразделе. Поэтому интервалы дискретизации $\Delta z$ и $\Delta t$ должны приниматься намного меньшими, чем этого требует критерий Найквиста. На практике все не так плохо, как представляется. Многие вполне удовлетворены и быстродействием и достигаемой точностью миграционного преобразования во временной области, применяя шаг дискретизации по временной координате, равный 4 мс.

В классической статье Столта [134] наряду с изложением метода миграционного преобразования, основанного на быстром преобразовании Фурье, отмечается, что можно достичь большей точности, если опустить требование причинности. Столт показал, каким образом путем отмены причинности на известной глубине и сохранения ее на следующем глубинном

уровне достигается устойчивое вычисление конечных разностей. Действуя по оси глубин $z$, мы связаны с причинными производными, хотя в случае дискретной слоистости могли бы пользоваться методами Фурье.

Не нужно думать, что конечно-разностные решения аппроксимируют только частоты, в действительности они аппроксимируют функцию $\exp ik_z\Delta z$. Решим уравнение (263) относительно неизвестной:

$$q_{z+\Delta z}=\left(\frac{1+i\hat{k}_z\Delta z\,2}{1-i\hat{k}_z\Delta z\,2}\right)q_z. \tag{268}$$

Для $N_z$ слоев на глубине $z=N\Delta z$ имеем следующее приближение:

$$e^{ik_zN\Delta z}\approx\left(\frac{1+i\hat{k}_z\Delta z\,2}{1-i\hat{k}_z\Delta z\,2}\right)^N, \tag{269}$$

которое будет впоследствии использовано для моделирования в фурье-области конечно-разностных программ. Результаты моделирования, описанные в разделе 4,7, позволяют сравнивать точность различных методов миграции между собой.

## 4.4. Поглощающие боковые границы

Ячейки машинной памяти часто используются для моделирования точек некоторого объема, в котором распространяются волны. Число ячеек машинной памяти, к сожалению, конечно, а нам зачастую хотелось бы моделировать бесконечные объемы. Чтобы избежать необходимости конструировать ЭВМ с бесконечно большой емкостью памяти, познакомимся в настоящем разделе с теорией поглощающих боковых граничных условий.

Имеются два вида боковых граничных условий. Первый вид соответствует концам сейсмозаписи. Второй возникает в тех случаях, когда по каким-либо причинам принимается решение ограничить интервал вычислений. Указанные границы могут совпасть. Чтобы избежать путаницы, условимся, что наблюденные данные более ограничены в объеме, чем машинная память. Поэтому наряду с наблюдениями, содержащими в себе начальные условия вычислений, существует некоторая область, которую назовем д е м п ф е р о м данных.

### Демпфер наблюденных данных

Самое грубое предположение заключается в том, что в качестве демпфера могут служить дополнительные нулевые значения. Во избежание появления краевых дифракций искусственного происхождения, наблюденные данные должны плавно

переходить в область демпфера. Поэтому демпфер из нулей будет хорошо работать только в том случае, когда в окрестности боковой границы значения самих наблюдений уже малы. При демпфировании нулями подлежит обсуждению вопрос о том, стоит ли дополнительно умножать данные на плавно убывающую до нуля функцию, чтобы обеспечить гладкую стыковку наблюдений с демпфером из нулевых значений. Я сам предпочитаю избегать этого, так как мне кажется, что такая операция равносильна фальсификации данных. По моему мнению, предпочтительнее демпфировать наблюденные данные не нулями, а любыми минимальными значениями, не влияющими на наблюдения. Один из простых приемов заключается в следующем: делается копия последней сейсмотрассы, которая затем взвешивается по убывающему закону, пропорциональному расстоянию трассы-копии от границы. Этот прием срабатывает наилучшим образом в тех случаях, когда шаг наблюдений совпадает с шагом демпфирования. В любой теории оптимального демпфирования наблюдений содержатся два важных момента модель помехи и модель полезного сигнала. Осуществить идеальную экстраполяцию данных на практике удается очень редко. В разделе 3.5 содержатся предложения по созданию более тонких моделей процесса расширения сейсмограмм ОСТ.

### Усечение на концах расстановок и профилей

В сейсморазведке встречаются два вида осложнений, вызванных усечением по горизонтальной координате. Первое, связанное с концом расстановки сейсмоприемников, сказывается пагубно на суммировании по принципу общей средней точки. Второе связано с длиной профилей, что ухудшает результаты миграции. И при миграции, и при суммировании ОГТ гиперболические оси синфазности стягиваются в точку. Но названные способы обработки различаются между собой и причины этого различия коренятся в самих наблюдениях. В случае суммирования ОСТ вполне поддается предсказанию то, что оси синфазности будут наклонены вниз в сторону дальнего конца расстановки сейсмоприемников. В случае же миграционного преобразования отражающие границы на концах разреза могут быть наклонены как вверх, так и вниз. В случае наклона вниз результат миграции более точен, сейсмические горизонты плавно переходят от границ к внутренним частям разреза.

Трудный случай миграционного преобразования возникает при восстании сейсмических горизонтов к краям разрезов; операция продолжения вниз перемещает сейсмическую энергию к концам профилей. По достижении границы разреза сейсмиче-

ская энергия отражается с противоположным наклоном и интерферирует с энергией, продолжающей свое движение в сторону края сейсмического разреза. Указанное затруднение можно частично преодолеть, добавив некоторое пространство с обеих сторон обрабатываемого массива наблюдений и тем самым позволив наклоненной энергии перемещаться без помех. (Имеется в виду, что уже решено какого рода демпфирование начальных данных должно применяться в дополнительном пространстве.)

### Границы Энгквиста в случае скалярного волнового уравнения

Простейшим, хрестоматийным граничным условием является требование обращения функции в нуль на границе. Волна, падающая на такую границу, отражается с изменением полярности и поэтому на границе сумма падающей и отраженной волн обращается в нуль. Следующим по простоте граничным условием является условие нулевого углового коэффициента. В данном случае отражающая граница также идеальна, но коэффициент отражения равен $+1$, а не $-1$. Для представления границы с нулевым угловым коэффициентом требуются две точки на кромке конечно-разностной сетки. Рассматриваемое обычно граничное условие наиболее общего вида представляет собой линейную комбинацию значения функции и ее углового коэффициента. И оно относится к двухточечным граничным условиям. Так получается, что в полученных нами уравнениях экстраполяции (см. раздел 2.2) содержится лишь одна производная по глубинной координате, поэтому по оси $z$ они составляют двухточечное условие. Заметив это обстоятельство, Б. Энгквист нашел новое применение нашим уравнениям экстраполяции. Многие исследователи, работающие в других областях науки, интересуются решением прямых задач, т. е. развитием в прямом направлении времени согласно, например, скалярному волновому уравнению вида $P_{xx}+P_{zz}=P_{tt}/v^2$, но при этом сталкиваются с ограниченными объемами машинной памяти. Идея Энгквиста заключалась в том, что они должны пользоваться нашими уравнениями экстраполяции в качестве своих граничных условий. Предположим, что требуется окружить квадрат на плоскости $(x, z)$ бесконечным поглощающим объемом. В таком случае нужно граничное условие, соблюдающееся вокруг заданного квадрата. Можно воспользоваться уравнением нисходящей волны на нижней грани и уравнением восходящей волны на верхней. С боковыми гранями можно поступить аналогично, только поменяв $x$ на $z$. Эта идея была всесторонне проверена и подтверждена работами Р. Клейтона. На рис. 136 приведены его наблюдения над расширяющимися круговыми фронтами волн.

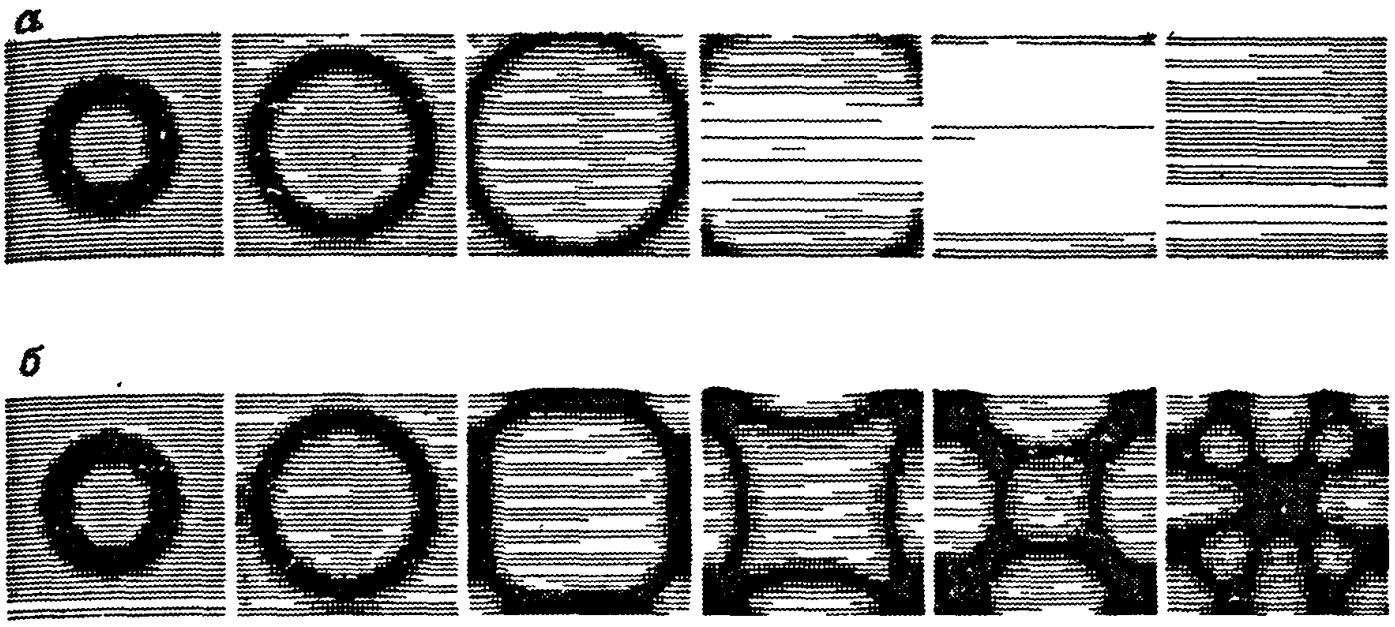



РИС. 136. Расширяющиеся круговые фронты волн, наблюдаемые в прямоугольнике с поглощающими стенками (*а*) и со сторонами с нулевым угловым коэффициентом (*б*)

## Боковые граничные условия Энгквиста для уравнений экстраполяции

При обработке наблюдений уравнение экстраполяции используется во внутренних частях исследуемой области. Это не похоже на прямое моделирование, когда во внутренних частях области используется полное скалярное волновое уравнение, а на границе можно применять уравнение экстраполяции. Скалярное волновое уравнение имеет круговое дисперсионное соотношение, а уравнение экстраполяции полукруговое в идеальном случае. Рассуждая по аналогии, Энгквист предположил, что при решении задач волновой экстраполяции идеальной боковой границей должно быть дисперсионное соотношение в виде четверти окружности. Чтобы сделать свою идею более конкретной и непосредственно применимой, он предложил аппроксимировать четверть окружности прямой (рис. 137).

Преимущество прямолинейного дисперсионного соотношения состоит в том, что в пространственной области оно может быть представлено простым дифференциальным уравнением первого порядка. Уравнение первого порядка имеет первые производные, которые можно найти лишь по двум отсчетам

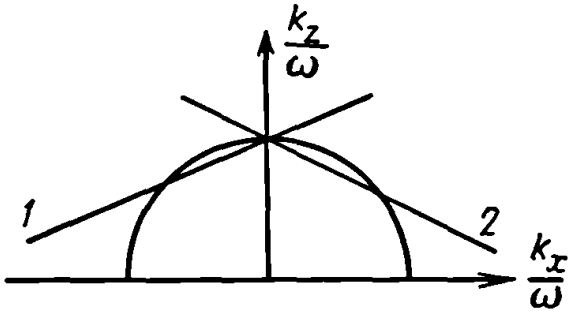



РИС. 137. Дисперсионное соотношение при простых поглощающих стенках:
*1* — левая стенка, *2* — правая стенка

данных, и поэтому его можно использовать в качестве традиционного двухточечного бокового граничного условия. Правостороннее уравнение на рис. 137 определяет граничное дисперсионное соотношение $D$:

$$0=\frac{vk_z}{\omega}-1+\text{const}\frac{k_x}{\omega}=D(\omega, k_x, k_z). \tag{270}$$

В пространстве $(t, x, z)$ это уравнение принимает следующий вид:

$$0=\left(v\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}+\text{const}\frac{\partial}{\partial x}\right)P. \tag{271}$$

В координате запаздывающего времени производную $\partial/\partial z$ можно исключить путем подстановки из внутреннего уравнения.

Чтобы сформулировать математическую, а не физическую, точку зрения на этот предмет, вообразите некоторую особую физику, согласно которой физическое уравнение, применимое в некоторой области, содержит дисперсионные соотношения описывающие поглощение в краевых частях. Кроме этой фиктивной области, вообразите себе другую, в которой действует обыкновенное уравнение экстраполяции. В точке контакта названных областей решения должны совпадать. При этом не должно вызывать удивления, что в месте, где оба дисперсионных соотношения хорошо согласуются между собой, вдруг возникнут чрезвычайно слабые граничные отражения. Чтобы добиться хорошей аппроксимации в диапазоне интересующих нас углов наклона осей синфазности, следует использовать угловой коэффициент аппроксимирующей прямой. Пример поглощения волн на боковой границе в процессе миграции приведен на рис. 138.

### Величина коэффициента отражения

Рассмотрим некоторые тонкости вычисления коэффициентов отражения. При падении монохроматической плоской волны единичной амплитуды на боковую границу возникает отраженная волна с амплитудой $c$. В математических символах сказанное записывается как

$$P(x, z)=e^{-i\omega t+ik_z z}\left(e^{+ik_x x}+ce^{-ik_x x}\right). \tag{272}$$

В уравнении (272) $\omega$ и $k_x$ произвольные величины, а $k_z$ определяется по $\omega$ и $k_x$ с помощью дисперсионного соотношения внутренней области, т. е. приближения в виде полуокружности. Предположив, что решение для внутренней области применимо и на боковой границе, подставляем уравнение (272) в дифференциальное уравнение (271), которое описывает эту

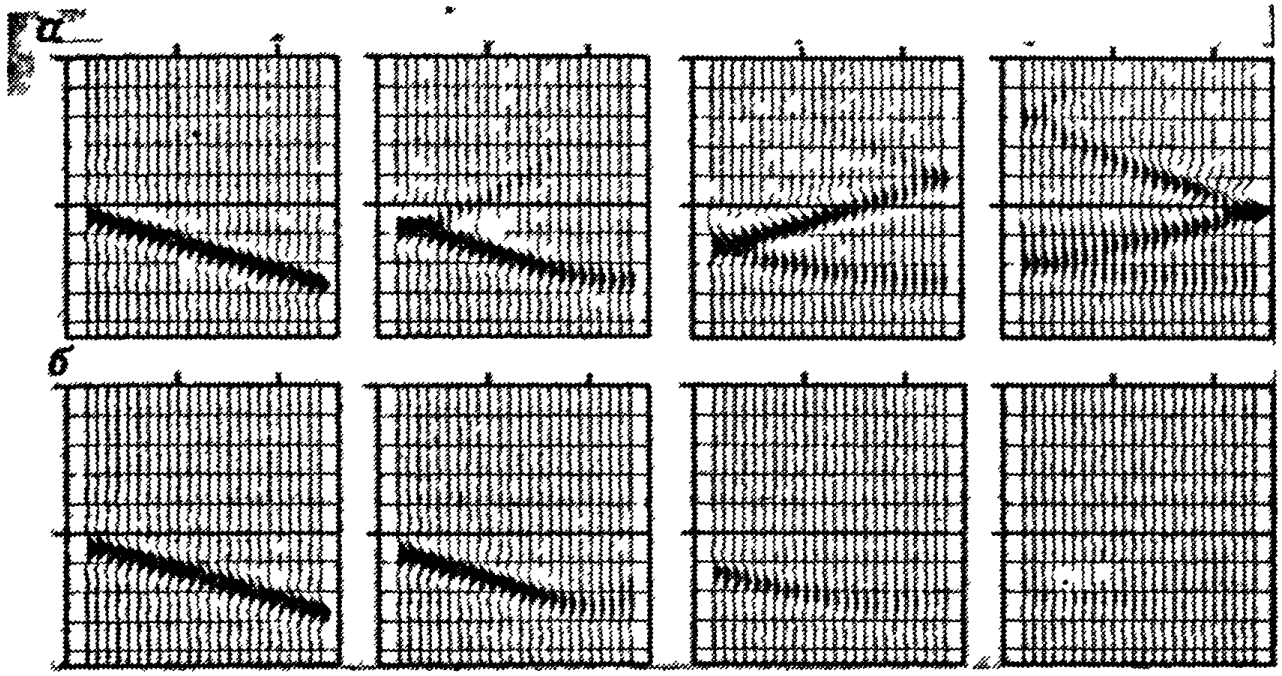



РИС. 138. Продолжение в нижнее полупространство при боковых границах с нулевым угловым коэффициентом (*а*) и при поглощающих стенках (*б*) (по Толди)

боковую границу. В результате, производная $\partial/\partial x$ преобразуется в $+ik_x$ у падающей волны и в $-ik_x$ у отраженной. Кроме того, $\partial/\partial z$ преобразуется в $ik_z$. Таким образом, первый член в (272) формирует дисперсионное соотношение $D(\omega, k_x, k_z)$, умноженное на амплитуду $P$. Второй член представляет собой произведение коэффициента отражения $c$ на $D(\omega, -k_x, k_z)$ и $P$. Поэтому уравнение (271) после подстановки в него (272) принимает вид

$$c=\frac{-D(\omega, k_x, k_z)}{D(\omega, -k_x, k_z)}. \qquad (273)$$

Отражение нулевой амплитуды наблюдается тогда, когда численное значение волнового числа $k_z$, найденное с помощью внутреннего уравнения в точке $(\omega, k_x)$, полностью удовлетворяет также и дисперсионному соотношению $D$ бокового граничного условия. Последнее обстоятельство объясняет почему мы пытаемся возможно точнее аппроксимировать четверть окружности. Прямолинейное дисперсионное соотношение не соответствует наиболее общему виду бокового граничного условия, которое можно выразить всего лишь через две концевые точки. Более общее выражение с регулируемыми параметрами $b_1$, $b_2$ и $b_3$, которое имеет вид

$$D(\omega,\ k_x,\ k_z)=\left(1-b_3\frac{vk_x}{\omega}\right)\frac{vk_z}{\omega}-\left(b_1-b_2\frac{vk_x}{\omega}\right),$$

аппроксимирует лучше.

Можно доказать абсолютную устойчивость прямолинейных поглощающих боковых границ для случая 15-градусного урав-

нения, включающего дискретизацию по оси $x$. К сожалению, законченный анализ проблемы устойчивости, как нам кажется, лежит за рамками импедансных правил Мюира. Поэтому не исключено, что устойчивость решения 45-градусного уравнения не доказана.

## 4.5. Регулировка миграции в частотной области

Посмотрим, как нужно мигрировать углы наклона осей синфазности, превышающие 90 . Затем приступим к коррекции двух главных недостатков миграционного преобразования в частотной области, а именно, его периодичности и плохой толерантности к изменениям скоростей по пространственным координатам.

### Углы наклона, превышающие 90°

Миграционное преобразование углов наклона, больших 90 , требует осторожного обращения с быстрозатухающей энергией. Ко времени написания книги в большинстве программ миграции путем глубинной экстраполяции быстрозатухающая энергия либо не учитывается, либо полагается равной нулю. Вернее было бы сохранить быстрозатухающую на глубине $z$ энергию для второго этапа — экстраполяции вверх. Экстраполяция вверх начинается с нижней кромки разреза при нулевом значении падающей волны. При экстраполяции вверх падающей волны снова вводится сохраненная быстрозатухающая энергия. Как обычно, изображения извлекаются из волны в момент времени $t=0$.

Для иллюстрации данной идеи составим программу, рассчитывающую два изображения, одно из которых представляет собой обычное изображение верхней стороны отражающей границы, а второе изображение нижней ее стороны. Изображения можно изучать раздельно или просуммированными.

В программе предусмотрено упрощающее ограничение на скорость вида $dv\,dz \geqslant 0$. Благодаря этому условию, быстрозатухающую энергию можно сохранить на месте ее образования до обратного этапа экстраполяции. Стоит отметить, что второй этап дешевле первого, так как ту область, в которой явление быстрого затухания энергии никогда не наблюдалось, т. е. в которой соблюдается условие $|k|<|\omega|/v(\tau_{max})$, не нужно подвергать обработке.

```
#Первый этап обычной миграции фазового сдвига
P(ω, k_x)=FT [u(t, x)]
Для τ=Δτ, 2Δτ, ..., τ_max {
    Для всех k_x {
        Uimage(k_x, τ)=0.
        Для всех ω>|k|v(τ) {
```

```
                C=exp(-iωΔτ√(1-v(t)²k_x² ω²))
                P(ω, k_x)=P(ω, κ_x)*C
                Uimage(k_x, τ)=Uimage(k_x, τ)+P(ω, k_x)
                }
            }
        uimage(x, τ)=FT[Uimage(k_x, τ)]
        }

    #Второй этап с целью получения изображения нижней стороны
    отражающей границы.
    Для τ=τ_max, τ_max-Δτ, τ_max-2Δτ, ..., 0 {
        Для всех k_x {
            Dimage(k_x, τ)=0.
            Для ω=|k|v(τ) до ω=|k|v(τ_max) {
                #Волна меняет направление, но вместе с ней и Δτ
                C=exp(-iωΔτ√(1-v(τ)²k_x² ω²))
                P(ω, k_x)=P(ω, k_x)*C
                Dimage(k_x, τ)=Dimage(k_x, τ)+P(ω, k_x)
                }
            }
        dimage(x, τ)=FT[Dimage(k_x, τ)]
        }
```

## Устранение периодичности результатов миграции способом фазового сдвига

На рис. 139 изображено семейство гипербол, которое не продолжается до бесконечного времени, а обрывается на времени $t_0$. Ниже будет описан фурье-метод создания подобных усеченных по времени данных. Он приводит к программе миграционного преобразования способом фазового сдвига, не создающей искажений, связанных с периодичной повторяемостью ее результатов.

Когда начали применять алгоритм быстрого преобразования Фурье, сразу же заметили, что его можно использовать для целей фильтрации. В периодической по своей сущности области преобразований Фурье можно было без погрешностей выполнять неустановившуюся фильтрацию, если только сами сигналы и операторы фильтрации с обеих сторон были окружены достаточно большими демпферными зонами из нулевых значений. Эта же концепция действительна и в случае миграционного преобразования данных. Если полевые сейсмограммы и миграционные гиперболы окружены достаточным количеством нулевых значений во временной и пространственной областях, то миграционное преобразование в фурье-представлении можно выполнять без появления помех, связанных с периодичностью результатов. Весь фокус заключается в том, чтобы узнать, как можно строить усеченные гиперболы, изображенные на рис. 139, в фурье-представлении.

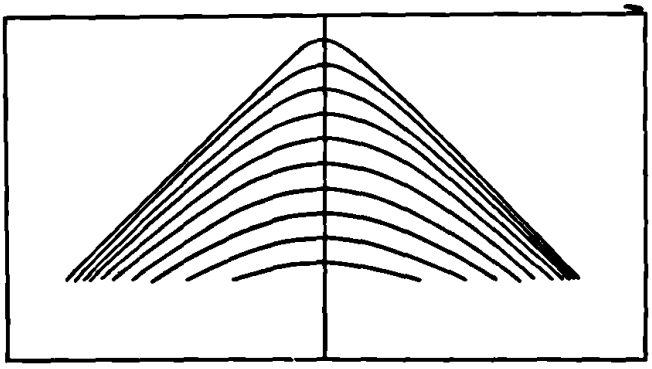


РИС. 139. Гиперболы, усеченные в заданный момент времени

Чтобы получить усечения на времени $t_c$, нужно воспользоваться специальными точечными источниками. Чем глубже залегает источник, тем уже должна быть его угловая апертура. Пусть нужно обрезать на некотором времени $t_c$ гиперболу, у которой время первого вступления равно $t_0$. Угол распространения энергии на времени усечения $\theta$ определяется из равенства $\cos\theta = t_0/t_c$. Следовательно, $k_x$-спектр излучающих границ будет усечен таким образом, чтобы $\sin\theta = vk_x/\omega$. Апертура в 90 означает, что отражения имеют бесконечно большую задержку во времени. Ниже приводится вариант упомянутой выше программы.

```
#Моделирование с усечением на времени t_c.
Model(k_x, z)=FT[model(x, z)]
Для всех ω и k_x
   U(ω, k_x)=0.
Для z=z_max, z_max−Δz, z_max−2Δz, ..., 0 {
   Для всех ω {
      Для всех |k_x|<|ω| v {
         если (z<vt_c) {
            sine=√(1−z² v² t_c²)
            если (|vk_x|<|ω| sine)
               aperture=1.
            else
               aperture=0.
            }
         else
            aperture=0.
         U(ω, k_x)U(ω, k_x)e^{−iΔzω√(v² k_x² ω²)} +aperture*Model(k_x, z)
         }
      }
   }
u(t, x)=FT2D[U(ω, k_x)]
```

Приведенную программу моделирования можно преобразовать в программу миграционного преобразования (как и в разделе 1.3) путем прогона глубинного по $z$ цикла вниз, а не вверх, и последующего умножения продолженных вниз наблюдений на функцию апертуры. Последнее не только повышает качество миграции, но и ускоряет сами вычисления.

## Устранение периодичности результатов миграционного преобразования Столта

Как и в случае алгоритма миграции способом фазового сдвига, уменьшить вычислительные искажения искусственного происхождения, возникающие при пользовании алгоритмом Столта, можно, подавляя периодичность во временной области. Мы убедимся, что это равносильно выполнению точной интерполяции в частотной области.

Рассмотрим импульсную функцию в момент времени $t_0$. Ее фурье-преобразование имеет вид $\exp(-i\omega t_0)$. Если $t_0$ невелико, то фурье-преобразование будет представлять собой быстро осциллирующую функцию частоты $\omega$. Быстро осциллирующие функции всегда трудно интерполировать. Лучше сместить функцию времени назад, тем самым сгладив ее частотную функцию, затем проинтерполировать функцию частоты и, наконец, ликвидировать введенное ранее смещение. Если сейсмические наблюдения заданы в интервале времени $0<t<T$, то функция частоты станет глаже в том случае, когда наблюдения смещаются в интервал $-T/2<t<T/2$. Поэтому улучшение программы миграции Столта состоит в умножении в частотной области на $\exp(i\omega T/2)$, последующем интерполировании и заключительном умножении на $\exp(-i\omega T/2)$.

Линейная интерполяция — почти самый простой способ интерполирования. С другой стороны, в теории преобразования Фурье рекомендуется выполнять интерполяцию с помощью функции sinc (по определению, $\operatorname{sinc} u=(\sin u)/u$). Частотная интерполяционная функция, возвращенная назад во временную область, превращается в прямоугольную функцию времени. Пусть последняя имеет ненулевые значения на интервале $-T/2<t<T/2$. Вспомним, что алгоритм быстрого (обратного) фурье-преобразования производит суммирование через одинаковые интервалы по частоте. При этом негласно предполагается, что между отсчетами находятся нулевые значения, откуда в свою очередь следует, что функция времени периодична за пределами заданного временного промежутка. Теперь возьмем прямоугольную временную функцию в качестве множителя во временной области, который преобразует периодическую функцию времени в наблюдаемую в реальности затухающую. Такое умножение во временном представлении эквивалентно свертке в частотной области с подходящей интерполяционной функцией. Свертка непрерывной интерполяционной функции с заданной дискретизированной по частоте фактически является интерполяцией. К сожалению, интерполяционные функции продолжаются по оси частот бесконечно. Что еще хуже, они затухают медленно. Поэтому применяются их приближения, или усечения. Б. Харлан показал, что, используя постепенно убывающие

до нуля интерполяционные функции, можно достигать удовлетворительной точности с меньшими затратами, нежели при демпфировании посредством нулевых значений. Но, как нам кажется, лучше всего применять одновременно и демпфирование нулями и интерполяционные функции какого-то вида. Законченное исследование вопроса интерполяции содержится в работе [118].

### Столтово растяжение

И преимущества, и недостатки метода миграции Столта в том, что в нем прибегают к фурье-преобразованию по глубинной координате. Преимущество в том, что метод становится более быстродействующим по сравнению со всеми прочими методами миграционного преобразования. Недостаток состоит в требовании соблюдения постоянства скорости с глубиной. Значения скорости в среде изменяются где-то раза в два, а влияние скорости на результаты миграции имеет тенденцию быть пропорциональным ее квадрату. Чтобы как-то смягчить указанную трудность, Столт предложил растягивать временную ось с таким расчетом, чтобы наблюдения выглядели такими, какие должны получаться в условиях однородной среды. Столт предложил растягивающую функцию вида

$$r(t)=\left(\frac{2}{v_0^2}\int_0^t t v_{\text{ср кв}}^2(t)\,dt\right)^{1/2}, \tag{274а}$$

где

$$v_{\text{ср кв}}^2(t)=\frac{1}{t}\int_0^t v^2(t)\,dt. \tag{274б}$$

На больших временах, которым соответствуют высокие скорости, судя по растягивающей функции Столта, получается, что $\tau$ растет быстрее $t$. Ось $\tau$ дискретизируется с равномерным интервалом, что позволяет производить БПФ. Поэтому на больших временах отсчеты по оси $t$ располагаются с возрастающей плотностью. Сказанное противоречит выводам по добротности среды $Q$ и теории дискретизации, но на практике этим пренебрегают.

Самый простой и непосредственный вывод уравнения (274) основывается на идее согласования кривизны вершинных частей теоретических гипербол с кривизной гиперболических осей синфазности растянутых наблюденных данных. Уравнение теоретической гиперболы в пространстве $(x, \tau)$ имеет вид

$$v_0^2\tau^2=x^2+z^2. \tag{275}$$

В результате простого дифференцирования убеждаемся, что кривизна вершинной части гиперболы равна

$$\left.\frac{d^2\tau}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{1}{\tau v_0^2}. \tag{276}$$

Можно показать, что уравнение (276) применимо для слоистой среды, только скорость нужно заменить на среднеквадратическую:

$$\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{1}{tv_{\text{ср кв}}^2}. \tag{277}$$

Мы ищем функцию растяжения времени $\tau(t)$. Нам хотелось бы достичь совпадения кривых $t(x)$ и $\tau(x)$ при всех значениях $x$. Но это переопределило бы задачу. Вместо этого возьмем производную функцию $\tau[t(x)]$ по $x$ и решим совместно уравнения (276) и (277), получим выражение для $\tau d\tau/dt$, которое после интегрирования и извлечения квадратного корня приводит к уравнению (274).

Иной вывод уравнения растяжения дает более точные результаты при более крутых углах. Вместо того, чтобы согласовывать кривизны гипербол у вершины, переместимся на некоторое расстояние по крылу и согласуем угловые коэффициенты и их величины. В действительности мигрируют крылья гипербол, а не их вершины, поэтому такой результат более точен. В алгебраическом отношении последний вывод тоже проще, так как здесь рассматриваются только первые производные. Дифференцируя уравнение (275) по $x$, для случая отражающей границы на произвольной глубине $z_j$ получаем

$$d\tau/dx=x/\tau v_0^2. \tag{278}$$

Аналогичное выражение имеется и для условий слоистой среды. Чтобы получить его, решим уравнение $x=\int v\sin\theta\,dt=p\int v^2dt$ для условия $p=dt/dx$:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{\int\limits_0^t v^2(p,\,t)\,dt}. \tag{279}$$

Выражения (278) и (279) подобны уравнениям (276) и (277), но справедливы повсюду, а не только на вершине гиперболы. Продифференцируем $\tau(t)$:

$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{dx}. \tag{280}$$

После подстановки уравнений (278) и (279) в уравнение (280) получаем:

$$\frac{x}{\tau v_0^2}=\frac{d\tau}{dt}\frac{x}{\int\limits_0^t v^2(p,\,t)\,dt}, \tag{281}$$

$$\tau d\tau=\left[\frac{1}{v_0^2}\int\limits_0^t v^2(p,\,t')\,dt'\right]dt. \tag{282}$$

Интегрирование уравнения (282) дает слева $\tau^2/2$. Затем после извлечения квадратного корня получаем уравнение (274а), но уже с новым определением среднеквадратичной скорости:

$$v^2_{\text{ср кв}}(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t v^2(p,\;t)\,dt. \tag{274в}$$

Новое здесь — наличие параметра Снеллиуса $p$. В слоистой среде, характеризуемой некоторой скоростью, скажем, $v'(z)$, скорость $v(p,\,t)$ определяется для кончика луча, покинувшего поверхность земли под некоторым углом, соответствующим приращению $p$. Какое значение параметра $p$ следует выбирать на практике? Самый лучший способ заключается в измерении по наблюденным данным параметра $p=dt/dx$ тех волн, которые вам нужно смигрировать. В отсутствие более точных сведений можно воспользоваться значением $p=2(\sin 30\,)/(2{,}5$ км/с$)=$ $=0{,}4$ мс/м. Множитель 2 получается из модели излучающих границ.

### Метод учета горизонтальных вариаций скорости

Метод миграционного преобразования с помощью фазового сдвига привлекает тем, что позволяет учитывать произвольные вариации скорости по глубине и произвольные углы распространения вплоть до 90 . К сожалению, при этом не допускаются латеральные изменения скорости, так как по оси $x$ выполняется фурье-преобразование. С целью облегчения указанного затруднения в работе [63] был предложен метод интерполяции. Вспомним из раздела 1.3, что метод фазового сдвига осуществляет двухмерное фурье-преобразование данных $p(x,\,t)$ в $P(k_x,$ $\omega)$. Затем $P(k_x,\,\omega)$ продолжают с определенным шагом по глубине в нижнее полупространство путем умножения фурье-преобразования на $\exp\,[ik_z(\omega,\,k_x)\Delta z]$. В работе [63] было предложено использовать несколько значений опорных скоростей, например, $v_1$, $v_2$, $v_3$ и $v_4$. Продолжение вниз осуществляется на один шаг по глубине с каждой из упомянутых скоростей. При этом получают несколько опорных копий продолженных в

нижнее полупространство данных, т. е. $P_1$, $P_2$, $P_3$ и $P_4$. Затем совершается обратное фурье-преобразование каждого из $P_j$ в $p_j(x, \omega)$ по $k_x$. Для каждого значения $x$ путем интерполяции между опорными волнами находилось ближайшее значение скорости и соответствующее ему окончательное значение $p(x, \omega)$, которое снова преобразовывалось в $P(k_x, \omega)$, готовое для следующего шага экстраполяции по глубине. Описанный метод кажется неэффективным, поскольку при каждом значении скорости дублируются обычные, производимые при миграционном преобразовании вычисления. Удивительно, но он оказывается успешным, возможно, из-за своеобразного способа вычислений с применением матричного спецпроцессора.

**Упражнения**

1. Чтобы получить резкий срез на времени $t_c$, требуется использовать широкополосный спектр. С учетом того, что рис. 139 был получен на сетке размером $1000 \times 1000$, найдите имевшую при этом место величину неопределенности в положении среза $t_c$.

2. Метод фазового сдвига имеет тенденцию давать результат миграции, периодичный по координате $z$, что объясняется периодичностью фурье-преобразования по $t$. Обычно это обстоятельство не приводит к осложнениям, так как большие $z$ не изучаются. Восходящая волна на большой глубине должна обращаться в нуль до момента $t=0$. Кьяртанссон отметил, что можно избежать периодичности по $z$, если перед продолжениям поля вниз волну при $t=0$ вычесть из волнового поля. Таким образом, информация никогда не сможет достичь отрицательных времен и «обернуться вокруг». Укажите, каким образом следует переделать программу.

## 4.6. Импеданс

Классическая физика уделяет большое внимание вопросам сохранения и рассеяния энергии. Прикладная теория фильтрации придает большое значение вопросу причинности, утверждая, что отклик не может опережать возбуждение. В геофизике зачастую возникает необходимость в объяснении причин потери энергии. Существует специальный класс математических функций, называемых импедансными, с помощью которых описываются причинные линейные возмущения в физических объектах, которые рассеивают энергию.

Природа развивается во времени в прямом направлении. Естественно поэтому, что импедансные функции играют фундаментальную роль во всех модельных расчетах, где время течет от прошлого к будущему. Импедансы используют в физическом моделировании. Кроме того, они находят применение и при экстраполяции волн на глубину. Геофизики принимают за исходные наблюдения, произведенные на поверхности земли, и экстраполируют их в нижнее полупространство, чтобы получить сведения о глубинном геологическом строении. Такого рода экстраполяция не совпадает с природной экстраполяцией во

времени. В принципе для экстраполяции на глубину нет нужды в импедансных функциях. Но глубинные экстраполяции, выполненные без импедансных функций, могут характеризоваться возрастающими осцилляциями, что весьма напоминает поведение физической системы, получающей энергию от внешнего источника. В самом деле, «непосредственные» реализации физических уравнений часто характеризуются неустойчивыми процессами экстраполяции. Формулируя же экстраполяционные задачи с использованием импедансных функций, мы обеспечиваем устойчивость их решения. Из всех достоинств, которые может иметь вычислительный алгоритм (устойчивость, точность, ясность, обобщенность, быстродействие, модульность построения и т. п.) самым важным представляется все-таки устойчивость.

В настоящем разделе мы познакомимся с теорией импедансных функций, их точным определением, их расчетом в дискретизированном времени и с правилами объединения простых импедансных функций с целью получения более сложных. Мы познакомимся также и с другими специальными функциями — минимально-фазовым и отражательным фильтрами — в их связи с импедансными фильтрами. Волновую экстраполяцию сейсмотрасс, удаленных от источника, и миграцию во временной области сформулируем также через импедансные функции. Горные породы не похожи на «чистые субстанции», так как содержат в себе неоднородности всевозможных масштабов. Мы найдем особо простую импедансную функцию, которая имитирует диссипацию энергии в породах способом, отличным от классических уравнений ньютоновой вязкоупругости.

**Будьте осторожны, имея дело с бесконечностью!**

Чтобы доказать, что единица равна нулю, возьмем, например, бесконечный ряд вида: $1, -1, +1, -1, +1, \ldots$ и сгруппируем его члены двумя способами, затем сложим группы и получим в результате:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 1+(-1+1)+(-1+1)\ \ldots$$
$$0+0+0+\ldots = 1+0+0+\ldots$$
$$0 = 1.$$

Конечно, сделанные преобразования не доказывают равенства единицы нулю, они лишь доказывают то, что при работе с бесконечными рядами следует проявлять осторожность. Теперь возьмем другой бесконечный ряд, члены которого можно перегруппировывать в любом порядке, не опасаясь парадоксальных результатов. Допустим, что пирог разрезается на половинки. Пусть одна из половинок разрезана пополам, что

даст две четвертушки. Затем одну из четвертушек разрежем пополам и получим две восьмушки. Продолжим этот процесс. Получающийся при этом ряд можно записать в виде: 1/2, 1/4, 1 8, 1/16, ... Как бы мы ни перегруппировывали получившиеся кусочки пирога, они все должны помещаться на пирожнице и точно заполнять ее пространство.

Опасность, связанная с бесконечными рядами, состоит не в том, что в них содержится бесконечное число членов, а в том, что их сумма может стремиться к бесконечности. Безопасность обеспечивается, если сумма абсолютных значений их членов конечна. Такие ряды называются абсолютно сходящимися.

### Z-преобразование

Z-преобразование произвольной дискретизированной по времени функции $x_t$ определяется, как

$$X(Z)=\ldots x_{-2}Z^{-2}+x_{\ 1}Z^{-1}+x_0+x_1Z+x_2Z^2+\ldots \qquad (283)$$

Дадим величине $Z$ физическую интерпретацию в виде временной задержки на единицу времени. В таком случае $Z^2$ будет задерживать на две единицы. Выражения типа $X(Z)\,U(Z)$ и $X(Z)\,U(1\ Z)$ описывают свертку и взаимную корреляцию коэффициентов во временном представлении [53].

Рассматривая численные значения оператора задержки $Z$, обнаруживаем, что полезно задаться вопросом относительно того, конечна или бесконечна функция $X(Z)$. Особенный интерес представляют численные значения $Z$, равные $+1$ или $-1$, а также все комплексные значения $Z$, имеющие единичную амплитуду, например $|Z|=1$ или

$$Z=e^{i\omega\Delta t}, \qquad (284)$$

где через $\omega$ обозначена вещественная переменная преобразования Фурье. Если положить $\omega$ вещественной, то это будет означать, что $Z$ находится на единичной окружности. Далее, Z-преобразование представляет собой дискретное преобразование Фурье. Сосредоточим свое внимание на функциях времени, обладающих конечным количеством энергии, для чего потребуем, чтобы $U(Z)$ была конечной для всех значений $Z$, расположенных на единичной окружности $|Z|=1$. На функции фильтров всегда накладывается то ограничение, что они должны иметь конечную энергию.

При определении причинного фильтра нужно учитывать, что его коэффициенты во временном представлении обращаются в нуль до нулевого запаздывания, т. е. $u_t=0$ при $t<0$. Другое определение гласит, что $U(Z)$ конечна при $Z=0$. При $Z=0$ Z-преобразование будет бесконечным, если коэффициенты $u_{-1}$,

$u_{-2}$ и т. д. не равны нулю. В случае причинной функции каждый член выражения $|U(Z)|$ будет меньше, если $Z$ берется внутри круга $|Z|<1$, а не на единичной окружности. Таким образом, сходимость при $Z=0$ и на окружности $|Z|=1$ означает и сходимость повсюду внутри единичного круга. Поэтому ограниченность вкупе с причинностью означают сходимость внутри единичного диска. Сходимость при $Z=0$, но не на единичной окружности $|Z|=1$, является признаком причинной функции, обладающей бесконечно большой энергией,— случай, не представляющий практического интереса. Интереснее выяснить, какого рода функции сходятся на окружности при $Z=\infty$, а не при $Z=0$? Какая функция сходится во всех трех местах: $Z=0$, $Z=\infty$ и $|Z|=1$?

Функцию фильтра вида $1\,(1-2Z)$ можно разложить в степенной ряд по $Z$ минимум двумя различными способами:

$$\frac{1}{1-2Z}=1+2Z+4Z^2+8Z^3+\ldots=-\frac{1}{2Z}\frac{1}{1-1\,2Z}=$$

$$=-\frac{1}{2Z}\left[1+\frac{1}{2Z}+\frac{1}{4Z^2}+\ldots\right]. \qquad (285)$$

Который из указанных выше двух бесконечных рядов сходится, зависит от численного значения $Z$. При $|Z|=1$ первый ряд расходится, а второй сходится.

Обозначим через $b_t$ какой-нибудь фильтр. Тогда $a_t$ будет обратным ему фильтром, если в результате свертки $a_t$ с $b_t$ получается дельта-функция. В фурье-области фильтры обратны один другому, если обратны их фурье-преобразования. Для определения обратных фильтров можно воспользоваться Z-преобразованием, например, записать $A(Z)=1/B(Z)$. Причинный ли фильтр $A(Z)$, зависит от того, конечен ли он повсюду внутри единичного диска или, точнее, обращается ли $B(Z)$ в нуль где-либо внутри этого диска. Например, $B(Z)=1-2Z$ обращается в нуль при $Z=1/2$. Там функция $A(Z)=1\,B(Z)$ должна стать бесконечно большой, т. е. ряд $A(Z)$ не должен сходиться в точке $Z=1/2$. Следовательно, как мы только что убедились, $a_t$ не является причинной функцией. Наиболее интересный случай — минимально-фазовой функции, имеет место тогда, когда и фильтр $B(Z)$ и обратный ему причинны.

**Условия причинности фильтра**

| Функция | Условия выполнения функции |
|---|---|
| Причинная | $\lvert B(Z)\rvert<\infty$ при $\lvert Z\rvert\leqslant 1$ |
| Обратная причинная | $\lvert 1\ B(Z)\rvert<\infty$ при $\lvert Z\rvert\leqslant 1$ |
| Минимально-фазовая | Оба вышеуказанных условия |

## Краткие сведения об импедансных фильтрах

Воспользуемся обозначениями, употребляемыми в теории Z-преобразований, для определения фильтра $R(Z)$ и функций на его входе $X(Z)$ и выходе $Y(Z)$:

$$Y(Z)=R(Z)\,X(Z). \tag{286}$$

Говорят, что фильтр $R(Z)$ причинный, если в разложении функции $R(Z)$ в ряд отсутствуют отрицательные степени $Z$. Другими словами, $y_t$ определяется по настоящим и прошлым значениям $x_t$. Кроме того, фильтр $R(Z)$ будет минимально-фазовым, если в $1\,R(Z)$ нет отрицательных степеней $Z$. Это значит, что $x_t$ можно определить по настоящим и прошлым значениям $y_t$ путем простого деления многочленов в выражении

$$X(Z)=Y(Z)\,R(Z). \tag{287}$$

Минимально фазовая функция $R(Z)$ может, кроме того, представлять собой импедансную функцию, если полрожительную энергию можно выразить в виде следующих соотношений:

$$0\leqslant \text{работа}=\sum_t \text{сила}\times\text{скорость}=\sum_t \text{напряжение}\times\text{ток}, \tag{288а}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_t\left(\overline{x}_t y_t+\overline{y}_t x_t\right), \tag{288б}$$

$$=\text{коэффициенту при } Z^0 \text{ следующего выражения:}$$

$$\left[\overline{X}\left(\frac{1}{Z}\right)Y(Z)+\overline{Y}\left(\frac{1}{\overline{Z}}\right)X(Z)\right], \tag{288в}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\overline{X}\,Y\right)d\omega, \tag{288г}$$

$$=\int\operatorname{Re}\left(\overline{X}RX\right)d\omega=\int\overline{X}X\operatorname{Re}\left(R\right)d\omega. \tag{288д}$$

Поскольку $\overline{X}X$ может представлять собой импульсную функцию, расположенную на любой частоте $\omega$, получаем, что $\operatorname{Re}\,[R(\omega)]\geqslant 0$ для всех вещественных значений $\omega$. В итоге имеем

| Функция | Определение импедансной функции |
|---|---|
| Причинно прямая | $r_t=0$ при $t<0$, т. е. $\lvert R(Z)\rvert<\infty$ при $\lvert Z\rvert\leqslant 1$ |
| Обратно причинная | $\lvert 1\;R(Z)\rvert<\infty$ при $\lvert Z\rvert\leqslant 1$ |
| Рассеивающая энергию | $2\operatorname{Re} R(\omega)=R(Z)+R(1\;Z)\geqslant 0$ при вещественных $\omega$ |

В результате прибавления импедансной функции к ее фурье-сопряженной получаем положительную вещественную функцию наподобие спектра мощности, т. е. функцию, мнимая часть которой равна нулю:

$$(r_0+r_1Z+r_2Z^2+\ldots)+\left(\bar{r}_0+\bar{r}_1\frac{1}{Z}+\bar{r}_2\frac{1}{Z^2}+\ldots\right)\geqslant 0$$

при вещественных $\omega$, (289а)

$$R(Z)+\bar{R}\left(\frac{1}{Z}\right)\geqslant 0 \text{ при вещественных } \omega. \quad (289б)$$

Это обосновывает тот замечательный факт, что любая импедансная функция времени представляет собой автокорреляционную.

Импедансные функции встречаются в теоретической экономике, где через $X$ и $Y$ обозначают цену и объем продаж. Я считаю, что в этой области положительность импеданса означает, что в игре, связанной с куплей-продажей, вы неминуемо проиграете!

**Причинное интегрирование**

Начнем с дискретизированной по времени функции $p_t$. Если в фурье-преобразование подставить $Z=\exp(i\omega\Delta t)$, то получим Z-преобразование вида:

$$P(Z)=\ldots p_{-2}Z^{-2}+p_{-1}Z^{-1}+p_0+p_1Z+p_2Z^2+\ldots \quad (290)$$

Определим $-i\hat{\omega}$ (что окажется приближением к $-i\omega$) через

$$\frac{1}{-i\hat{\omega}\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-Z}. \quad (291)$$

Определим еще одну функцию времени $q_t$ с помощью Z-преобразования вида $Q(Z)$, воздействовав на $P(Z)$ оператором (291):

$$Q(Z)=\frac{1}{2}\frac{1+Z}{1-Z}P(Z). \quad (292)$$

Умножим обе стороны равенства (292) на $(1-Z)$:

$$(1-Z)Q(Z)=\frac{1}{2}(1+Z)P(Z). \quad (293)$$

Приравняем между собой коэффициенты при $Z^t$ в обеих частях равенства:

$$q_t-q_{t-1}=(p_t+p_{t-1})/2. \quad (294)$$

Положив $p_t$ импульсной функцией, убеждаемся, что $q_t$ оказывается ступенчатой функцией:

$$p=\ldots 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots, \quad (295а)$$

$$q=\ldots 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \quad (295б)$$

Поэтому $q_t$ является дискретизированным представлением интеграла от $p_t$, взятого в пределах от минус бесконечности до момента времени $t$. Это равнозначно численному интегрированию по методу Крэнка Никольсона дифференциального уравнения $dQ\,dt = P$. Оператор $(1+Z)/(1-Z)$ называется билинейным преобразованием. Точность приближения операции дифференцирования можно оценить путем умножения числителя и знаменателя на $Z^{-0,5}$ и применения подстановки вида $Z = e^{i\omega\Delta t}$:

$$-i\frac{\hat{\omega}\Delta t}{2} = \frac{1-Z}{1+Z} = \frac{Z^{0,5}-Z^{+0,5}}{Z^{0,5}+Z^{+0,5}} = \tag{296а}$$

$$-i\frac{\hat{\omega}\Delta t}{2} = -i\frac{\sin(\omega\Delta t\ 2)}{\cos(\omega\Delta t\ 2)} = -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega\Delta t}{2}. \tag{296б}$$

Оператор интегрирования имеет полюс в точке $Z = 1$, т. е. прямо на единичной окружности. Это обстоятельство повышает вероятность возникновения парадокса бесконечности. Другими словами, существуют и другие непричинные разложения. Например, положив 1 $(-i\omega)$ мнимой антисимметричной функцией частоты $\omega$, приходим к вещественной антисимметричной функции времени вида $\mathrm{sgn}(t) = t\,|t|$, которую обычно не считают оператором интегрирования. Чтобы избежать малейшей неоднозначности, введем на данной стадии небольшое положительное число $\varepsilon$ и определим $\rho = 1-\varepsilon$. Оператор интегрирования принимает вид:

$$I = \frac{1}{2}\frac{1+\rho Z}{1-\rho Z}, \tag{297а}$$

$$= \frac{1}{2}(1+\rho Z)\left[1+\rho Z+(\rho Z)^2+(\rho Z)^3+\ldots\right], \tag{297б}$$

$$= \frac{1}{2}+\rho Z+(\rho Z)^2+(\rho Z)^3+\ldots \tag{297в}$$

Так как $\rho$ немного меньше единицы, данный ряд сходится при любом значении $Z$ на единичной окружности. Если бы $\varepsilon$ было отрицательным, а не положительным, то получили бы разложение через отрицательные, а не положительные, степени $Z$.

Теперь можно сделать важный вывод — причинный оператор интегрирования представляет собой пример импедансной функции. Его причинность очевидна, причинным является и обратный ему оператор. Проверим, что и в частотном представлении вещественная часть положительна. Если представим знаменатель в виде дроби, то получим

$$I = \frac{1}{2}\frac{(1+\rho Z)}{(1-\rho Z)}\frac{(1-\rho\ Z)}{(1-\rho\ Z)} = \frac{(1-\rho^2)+\rho(Z-1\ Z)}{\text{положительный}}, \tag{298а}$$

$$I = \frac{(1-\rho^2)+2i\rho\sin\omega\Delta t}{\text{положительный}}. \tag{298б}$$

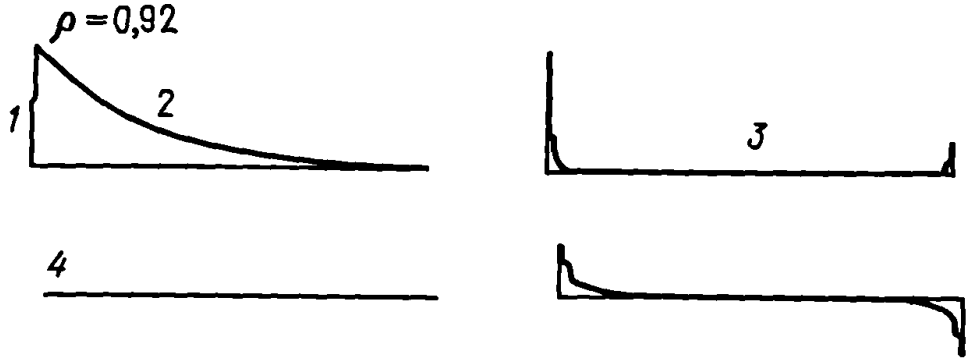



РИС. 140. Исходный оператор интегрирования:
*1* вещественная часть; *2* время; *3* частота; *4* мнимая часть

И снова именно выбор положительной величины ε привел к появлению $1-\rho^2$, откуда следует вывод, что вещественная часть должна быть положительной при всех значениях ω, как это изображено на рис. 140. (Здесь ось частот представлена дискретным фурье-преобразованием по 256 точкам. Нулевые значения времени и частоты находятся на левых концах соответствующих осей.)

Как умножение на $-i\omega$ в частотной области соответствует дифференцированию $d\,dt$ во временной, так и деление на $-i\omega$ связано с интегрированием. Обычно асимметричный оператор (1, −1) связывается с дифференцированием. Заметим, однако, что оператор, обратный причинному оператору интегрирования, т. е.

$$I^{-1}=2(1-\rho Z)(1+\rho Z), \tag{299а}$$

$$I^{-1}=2-4\rho Z+4(\rho Z)^2-4(\rho Z)^3+\ldots \tag{299б}$$

тоже выполняет дифференцирование, хотя он абсолютно причинный и вовсе не асимметричный. В теории линейных систем часто предпочитают именно такое представление дискретного дифференцирования. Построение устойчивых дифференциальных уравнений высших порядков подчиняется определенным правилам комбинирования импедансных функций, о которых будет сказано ниже.

Иногда требуется, чтобы у дифференцирующего оператора была отрицательная вещественная часть. Этого можно достичь, если принять, что ε величина отрицательная, т. е. положив $\rho>1$, выполнить разложение в бесконечный ряд по степеням $Z^{-1}$ (т. е. антипричинно, а не причинно). В любом из случаев антипричинном или причинном мнимая часть будет оставаться равной $-i\omega$, а вещественная поменяет свой знак.

### Правила комбинирования импедансов Мюира

Для каждой физической системы, сохраняющей или рассеивающей энергию, существует своя импедансная функция. Импе-

дансные функции представляют собой особые комбинации дифференциальных операторов и положительных физических констант. Посмотрим, какие из комбинаций допустимы.

Для обеспечения устойчивых вычислительных процессов важно иметь возможность убедиться, что функция, предполагаемая импедансной, действительно является импедансной. Возникающее в прикладной геофизике затруднение заключается в том, что рассчитанные даже в ограниченном частотном диапазоне импедансы не всегда можно использовать.

Согласно частному сообщению Фрэнсиса Мюира, он установил три правила комбинирования простых импедансных функций, в результате которых получаются более сложные. Эти правила полезны тем, что можно использовать дифференцирующие и интегрирующие операторы, представленные в дискретной форме. Обозначим через $R'$ новую импедансную функцию, образованную из известных $R$, $R_1$ и $R_2$. Предложенные Мюиром три способа комбинирования импедансов следующие: 1) умножение на положительный скаляр $a$ $R'=aR$, 2) обращение $R'=1\ R$, 3) сложение $R'=R_1+R_2$.

В правила Мюира не входит операция перемножения. Перемножение недопустимо по той, например, причине, что в результате возведения в квадрат удваивается фазовый угол и это может нарушить положительность вещественной части. Поскольку указанные выше правила не включают в себя перемножение самих импедансов, а содержат лишь операции изменения масштаба, сложения и обращения, то встречающиеся в природе импедансные функции математически часто будут выражаться в виде цепных или непрерывных дробей.

Первые два правила Мюира настолько очевидны, что мы не будем их доказывать. Третье правило заслуживает большего внимания. Чтобы доказать любое правило, необходимо продемонстрировать три свойства, присущие $R'$, а именно, что данная функция причинная, что у ее фурье-преобразования вещественная часть положительная и что существует ей обратная. Именно последнее свойство вызывает осложнения третьего правила Мюира, которые конкретно выражаются в том, что сумма двух импедансов должна иметь ей обратную причинную. Доказательство последнего утверждения займет около двух страниц текста и в процессе его будут введены несколько новых понятий.

### Импеданс, определяемый по коэффициентам отражения

Класс фильтров, называемых импедансами, велик, так как он получается путем преобразования легко задаваемого семейства фильтров, называемых коэффициентами отражения и обозначаемых через $c_t$. Фурье-преобразования их

обозначают через $C(\omega)$. Чтобы быть коэффициентом отражения, функция времени должна быть строго причинной, а функция частоты — меньше единицы. Под «строго причинной» понимается то, что временная функция обращается в нуль в нулевой момент времени и до него. Положим, например, что $-1<\rho<+1$, а коэффициент отражения $c_t$ представляет собой импульс величиной $\rho$, наблюдаемый после промежутка времени $\Delta t$. Его фурье-преобразование выразится, как

$$C=\rho Z=\rho e^{i\omega\Delta t}. \tag{300}$$

Очевидно, что произведение двух коэффициентов отражения само является коэффициентом отражения.

Ранее импедансную функцию определили как причинный фильтр, обратный которому тоже является причинным, а вещественная часть фурье-преобразования положительна. Покажем, что из любого коэффициента отражения $C$ с помощью формулы

$$R=(1-C)(1+C) \tag{301}$$

образуется импедансная функция. Необходимо показать, что функция $R$ причинная, имеет обратную ей причинную и что вещественная часть ее фурье-преобразования положительна. Во-первых, из предположения о том, что величина $C$ обязательно меньше единицы, следует неравенство $C\bar{C}<1$, т. е. знаменатель разлагается в сходящийся ряд вида $1+C+C^2+\ldots$. Во-вторых, обратная $R$ функция находится простым изменением знака при $C$. В-третьих, умножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженную:

$$\mathrm{Re}R=\mathrm{Re}\underbrace{\frac{(1-C)(1+\bar{C})}{\text{положительный}}}\overset{?}{\geqslant}0, \tag{302а}$$

$$\mathrm{Re}R=\mathrm{Re}\underbrace{\frac{(1-C\bar{C})+\text{мнимая часть}}{\text{положительный}}}\geqslant 0, \tag{302б}$$

находим, что $R$ имеет положительную вещественную часть.

Из выражения для $R(C)$ можно легко найти обратное выражение для $C(R)$, но обратную теорему, гласящую, что каждый импеданс $R$ соответствует определенному коэффициенту отражения, доказать труднее. Тем не менее, она будет доказана попутно с другой теоремой более глубокого содержания. Последняя гласит, что любой фильтр, если он причинный и имеет положительную вещественную часть, имеет функцию, обратную себе, и, следовательно, является импедансом. Эта теорема будет доказываться следующим путем. Покажем, что любой причинный и с положительной вещественной частью фильтр $R$ можно использовать для построения коэффициента

отражения $\hat{C}$, откуда следует, что поскольку данная функция является коэффициентом отражения, $\hat{R}$ представляет собой импеданс $R$. Обратное решение дает

$$\hat{C}=(1-\hat{R})(1+\hat{R}). \tag{303}$$

Для доказательства требуется, во-первых, показать, что $\hat{C}<1$. Чтобы это сделать, образуем модуль знаменателя и вычтем из него модуль числителя. Результат оказывается в 4 раза больше вещественной части функции $\hat{R}$, которая положительна. Во-вторых, нужно доказать, что $\hat{C}$ причинная функция. Это сделать труднее. Можно разложить $(1+\hat{R})^{-1}$ на сумму положительных степеней $\hat{R}$, т. е. положительных степеней оператора задержки. Но сходимость такого ряда не гарантирована, так как ничто не вынуждает $\hat{R}$ быть меньше единицы.

Чтобы доказать, что $\hat{C}$ причинная функция, воспользуемся правилом 1, утверждающим, что импедансную функцию можно умножить на любое вещественное положительное число, и она все равно останется импедансом. Возьмем функцию, которая похожа на $\hat{C}$, например, вида

$$B=(1-\varepsilon\hat{R})(1+\varepsilon\hat{R}). \tag{304}$$

Выберем $\varepsilon$ достаточно малым, чтобы на всех частотах $\omega$ произведение $\varepsilon|\hat{R}|<1$. Это условие гарантирует разложение знаменателя в сходящийся ряд по положительным степеням $\hat{R}$ и, следовательно, $Z$. Данное разложение содержит только положительные степени в операторе задержки. Следовательно, $B$ представляет собой коэффициент отражения, а соответствующий ему импеданс равен $\varepsilon\hat{R}$. Но импедансную функцию всегда можно умножить на положительное число. Взяв в качестве такого числа $1/\varepsilon$, доказываем, что $\hat{R}$ представляет собой импедансную функцию. Таким образом, мы завершили доказательство того положения, что любой причинный и с положительной вещественной частью фильтр представляет собой импедансную функцию.

Итак, импедансные функции возникают более просто, чем можно было бы предположить. Нет необходимости располагать функцией коэффициента отражения $C$, чтобы подставить ее в соотношение вида $R=(1-C)(1+C)$. Нам нужен лишь причинный с положительной вещественной частью фильтр.

### Функциональный анализ

Докажем следующие теоремы, касающиеся показательных функций, логарифмов и степеней фурье-преобразований фильтров.

1. Показательная функция причинного фильтра причинная.

2. Показательная функция причинного фильтра представляет собой минимально-фазовый фильтр.

3. Логарифм минимально-фазового фильтра представляет собой причинную функцию.

4. Фурье-представление минимально-фазового фильтра имеет вид кривой, не заключающей в себе начало координат комплексной плоскости.

5. Любая степень минимально-фазового фильтра является минимально-фазовой.

6. Любая вещественная дробная степень $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ импедансной функции представляет собой импедансную функцию.

Чтобы доказать теорему 1, определим Z-преобразование произвольной причинной функции

$$U(Z) = u_0 + u_1 Z + u_2 Z^2 + \ldots \tag{305}$$

и подставим данное определение в знакомый степенной ряд показательной функции:

$$B(Z) = e^U = 1 + U + \frac{U^2}{2!} + \frac{U^3}{3!} + \ldots (|U| < \infty). \tag{306}$$

В правой части уравнения (306) нет отрицательных степеней $Z$, поэтому и $B(Z)$ не будет содержать отрицательных степеней $Z$. Присутствие факториалов в знаменателях тоже является гарантией того, что ряд (306) будет всегда сходящимся и поэтому $b_t$ всегда будет причинной.

Чтобы доказать теорему 2 о том, что показательная функция не только причинная, но и минимально-фазовая, рассмотрим

$$B_+ = e^{+U}, \tag{307а}$$

$$B_- = e^{-U}. \tag{307б}$$

Ясно, что обе функции $B_+$ и $B_-$ причинные, причем они взаимно-обратные. По определению, минимально-фазовый фильтр является причинным с причинной же обратной ему функцией. Поэтому $B_+$ и $B_-$ минимально-фазовые.

Теперь докажем обратную теореме 2 теорему 3 о том, что логарифм минимально-фазового фильтра причинен. Возьмем логарифм выражения (306) и образуем $Z$-производную:

$$U = \ln B, \tag{308а}$$

$$dU/dZ = u_1 + 2u_2 Z + 3u_3 Z^2 + \ldots, \tag{308б}$$

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{1}{B}\frac{dB}{dZ}. \tag{308в}$$

По предположению $B$ минимально-фазовая, поэтому находящиеся в правой части равенства (308в) обе функции $1/B$ и $dB/dZ$

будут причинными. Поскольку произведение двух причинных функций является причинным, производная $dU\,dZ$ будет причинной. Но производная $dU\,dZ$ не может быть причинной, если не причинна функция $U$. Это доказывает теорему 3, несмотря на отдаленную опасность того, что $B$ может сходиться в то время, как $dB/dZ$ расходится.

Теорема 4 касается фурье-представления минимально-фазового фильтра. На комплексной плоскости такой фильтр дает параметрические уравнения для некоторой кривой, например, вида $[x(\omega), y(\omega)] = [\mathrm{Re}B(Z), \mathrm{Im}B(Z)]$. Фазовый угол определяется через арктангенс отношения $y\,x$. Например, причинный неминимально-фазовый фильтр $U(Z) = Z = e^{i\omega}$ приводит к параметрическим уравнениям $x = \cos\omega$ и $y = \sin\omega$, которыми определяется окружность, описанная вокруг начала координат. Заметим, что фазовый спектр функции $Z = e^{i\omega}$ равен $\Phi(\omega) = \omega$, т. е. представляет собой монотонно возрастающую функцию частот $\omega$. В минимально-фазовом случае $\Phi(\omega = 0) = \Phi(\omega = 2\pi)$. В неминимально-фазовом случае кривая оконтуривает начало координат и поэтому $\Phi(\omega = 0) = \Phi(\omega = 2\pi) + 2\pi$. Теорема 3 позволяет утверждать, что общей формулой для минимально-фазовых фильтров будет

$$B = e^{U(Z)} = \exp\left(\sum_{k=0}^{N} U_k \cos k\omega + i \sum_{k=0}^{N} U_k \sin k\omega\right), \tag{309а}$$

$$= \exp\left[r(\omega) + i\Phi(\omega)\right]. \tag{309б}$$

Фазовый спектр $\Phi(\omega)$, будучи суммой периодических функций, сам является периодической функцией частоты $\omega$, а это значит, что на плоскости с координатами ($\mathrm{Re}B$, $\mathrm{Im}B$) кривая, описывающая функцию $B(\omega)$, не включает внутри себя начало координат.

Перейдем к теореме 5, утверждающей, что любая степень минимально-фазовой функции является минимально-фазовой. Рассмотрим равенство

$$B^r = \left(e^{\ln B}\right)^r = e^{r \ln B}. \tag{310}$$

Поскольку функция $B$ по предположению минимально фазовая, то, согласно теореме 3, натуральный логарифм $B$ будет причинным. Умножение на масштабный множитель в виде вещественной или комплексной постоянной $r$ не изменяет свойства причинности. Разложение на показательные функции показывает, что, согласно теореме 2, $B^r$ будет минимально-фазовой.

Наконец, дадим доказательство теоремы 6 о том, что импедансную функцию можно возводить в любую вещественную дробную степень в диапазоне $-1 \leqslant \rho \leqslant +1$ и в результате будет получаться импедансная функция. Импедансная функция

по определению минимально-фазовая, но обладает тем дополнительным свойством, что вещественная часть ее фурье-преобразования положительна. Это значит, что фазовый угол лежит в интервале $-\pi\,2<\Phi<+\pi/2$. Возведение импедансной функции в степень приведет к сжатию интервала до $-\pi\rho/2<\Phi<\pi\rho/2$. Последнее обстоятельство сохранит вещественную часть импедансной функции положительной. В теореме 5 утверждается, что любая степень минимально-фазовой функции причинна, а это больше, чем нам нужно, чтобы быть уверенными в том, что дробная вещественная степень импедансной функции будет причинной.

**Широкоугольная волновая экстраполяция**

Обозначим через $s=-i\hat{\omega}$ причинное положительное дискретное представление дифференцирующего оператора вида, например,

$$s=-i\hat{\omega}=\frac{2}{\Delta t}\frac{1-\rho Z}{1+\rho Z}. \tag{311}$$

На рис. 141 приведено сравнение гипербол, построенных с помощью $\omega$, с гиперболами, построенными с использованием комплексной переменной $\hat{\omega}$. При выводе использована регулировка усиления по закону квадратного корня, описанная в разделе 4.1. Наблюдается благоприятное ослабление периодических помех. Оператор такого вида явно работает лучше, чем оператор из раздела 4.1 типа $\varepsilon$. Как увидим ниже, введение комплексной частоты $\hat{\omega}$ приводит к более естественному извлечению квадратного корня в переходной зоне существования быстрозатухающей энергии.

Рассмотрим следующее рекуррентное соотношение, начав со значения $R_0=s$:

$$R_{n+1}=s+X^2\,(s+R_n). \tag{312}$$

Рекурсия такого типа дает непрерывные дроби. Ф. Мюир предложил использовать ее для поиска широкоугольных аппроксимаций квадратного корня, используемых в программах миграционного преобразования (см. раздел 2.1), и разработал три правила с целью показать, что каждая функция $R_n$ является импедансной. Чтобы убедиться в том, что каждая функция $R_n$ импедансная, отметим, что знаменатель $s+R_n$ представляет собой при $n=0$ сумму двух импедансных функций. Тогда обратная ему функция будет импедансной, а умножение на вещественную положительную константу $X^2$ и прибавление еще одной $s$ сохраняют свойства импедансных функций. Прибегая к рекурсии, убеждаемся, что все $R_n$ являются импедансами.

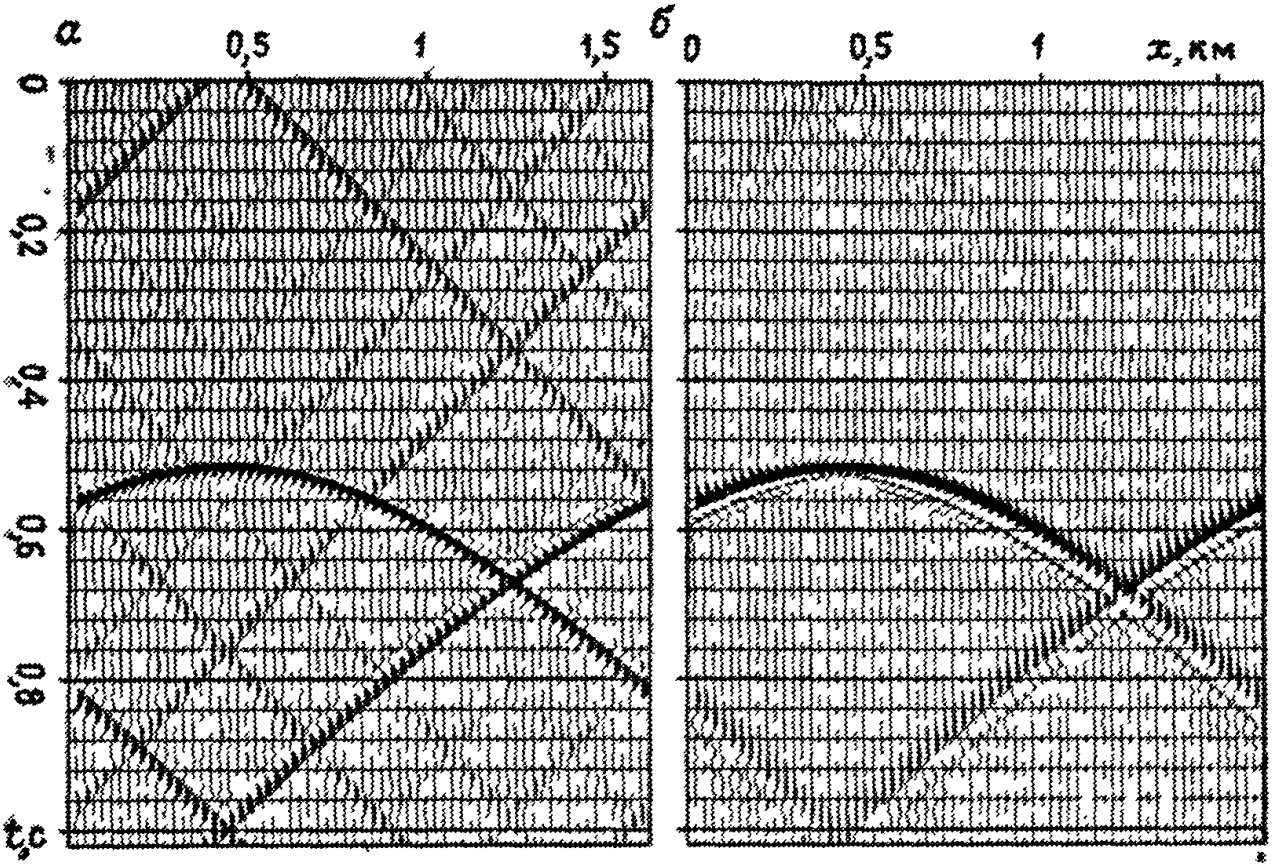



РИС. 141. Гиперболы с вещественной (*а*) и комплексной (*б*) частотами

По мере того, как $N$ становится большим, указанный выше рекурсивный процесс либо сходится, либо нет. Предположим, что он сходится, и найдем его предел, положив $R_{n+1}=R_n=R_\infty=R$. Таким образом, имеем:

$$R=s+X^2/(s+R), \tag{313а}$$

$$R(s+R)=s(s+R)+X^2, \tag{313б}$$

$$R^2=s^2+X^2, \tag{313в}$$

$$R=\sqrt{s^2+X^2}. \tag{313г}$$

При решении задач волновой экстраполяции принимают, что $X^2$ равно $v^2k_x^2$, где через $v$ обозначена скорость волны, а через $k_x$ горизонтальная пространственная частота, т. е. фурье-аналог горизонтальной оси $x$. Выполнив указанные подстановки, получаем

$$R=\pm\sqrt{-\hat{\omega}^2+v^2k_x^2}. \tag{314}$$

Следовательно, $R$ похожа на $\pm ik_zv$. Напомним, что $R_0$ первое приближение к $R$ — равно $-i\hat{\omega}$. Поэтому нисходящие волны запишутся, как

$$D(x,\ z,\ t)=D(x,\ 0,\ t)\,e^{ik_xx}e^{-Rz/v}e^{\ i\omega t}. \tag{315}$$

Чтобы перейти от нисходящих волн к восходящим, можно либо изменить знак перед $R$, либо взять комплексно-сопряженную от $R$. Все зависит от того, что вы хотите делать

с вещественной частью хотите ли вы, чтобы волна усиливалась, или нет?

Рассмотрим явление рассеяния энергии волн с точки зрения модели излучающих границ. По мере их распространения от источника до поверхности земли волны затухают. Это означает, что в процессе их миграционного преобразования они должны экспоненциально возрастать. Но нам этого не нужно. Мы хотим быть уверенными в том, что они не будут усиливаться, а, возможно, и затухать по мере их экстраполяции в обратном направлении. Итак, при миграционном преобразовании монохроматические волны продолжаются в нижнее полупространство с помощью уравнения вида

$$U(x,\ z,\ t)=U(x,\ 0,\ t)\,e^{ik_x x}e^{-\bar{R}z\,v}e^{-i\omega t}, \tag{316}$$

несмотря на то, что действительное поведение волны, излученной отражающей границей, подчиняется закону вида

$$U(x,\ z,\ t)=U(x,\ 0,\ t)\,e^{ik_x x}e^{+Rz\,v}e^{\ i\omega t}. \tag{317}$$

Чтобы исследовать поведение фазы комплексной величины $R$, положим $v=1$ и получим формулу вида

$$R=\sqrt{(-i\hat{\omega})^2+k_x^2}. \tag{318}$$

Во-первых, заметим, что функция $(-i\hat{\omega})$ причинная, так как она представлена через Z-преобразование. Возведя это Z-преобразование в квадрат, убеждаемся, что $(-i\hat{\omega})^2$ также причинная. Во временном представлении $k_x^2$ представляет собой дельта-функцию, расположенную в начале координат. Следовательно, $R^2$, заданная уравнением (318), является причинной функцией. На рис. 142 показан процесс построения фазового спектра комплексной величины (318) по ее составляющим. Для иллюстрации поведения функции $-i\hat{\omega}$ в интервале от нуля до бесконечности автор разместил на рисунке и графическое изображение, и саму функцию, наложив их друг на друга в различных масштабах. Функция $-i\hat{\omega}$ периодически зависит от $\omega$, а ее вещественная и мнимая части вычерчиваются в виде замкнутой кривой. Чтобы продемонстрировать скорость изменения функции, автор продискретизировал ось $\omega$ с интервалом, равным 2 . С большого расстояния функция выглядит окружностью. На близком расстоянии она похожа на прямую, параллельную мнимой оси.

Функция $R^2$ причинная, а из рис. 142 можно видеть, что она обладает свойством «разветвления». Последнее означает, что фазовый спектр функции $R$ обладает свойством положительности и вещественности. Теорема 5 вынуждает $R$ быть причинной и минимально-фазовой. Последнее и определенный рис. 142 фазовый спектр доказывают, что заданная соотношением (318) функция $R$ является импедансной.

### Интеграл дробного порядка и постоянная $Q$

Согласно уравнению (311) и теореме 6, интегралы и дифференциалы дробного порядка также являются импедансными функциями. По мнению Кьяртанссона [86, 87], напряжения и деформации в горных породах связаны между собой через дробный показатель степени, такое же мнение высказано и в работе [99]. Классические исследования в механике горных пород начинаются с установления следующего закона между напряжениями и деформациями:

напряжение = жесткость × деформация + вязкость × интенсивность деформации,

который в области преобразований принимает вид:

напряжение = $[(-i\omega)$ × жесткость + $(-i\omega)^1$ × вязкость] × деформация. (319)

Вязкоупругий закон (319) плохо описывает поведение реальных горных пород. Опробуем иную математическую формулировку, которая подобна (319) в предельных случаях высокой и низкой вязкости:

напряжение = константа × $(-i\omega)^{\varepsilon}$ × деформация, (320а)

напряжение = константа × $(-i\omega)^{\varepsilon-1}$ × интенсивность деформации. (320б)

В данном случае при значении $\varepsilon$, близком к нулю, получаем упругое, а при $\varepsilon$, близком к единице — вязкое поведение пород. Тот факт, что $(-i\omega)^{\varepsilon-1}$ представляет собой импедансную функцию, удачно переплетается с понятиями о том, что: 1) напряжение можно определять по истории деформаций, а деформации — по истории развития напряжений; 2) напряжение, умноженное на интенсивность деформации, дает величину рассеянной мощности. Кьяртанссон [86, 87] указывает, что $(-i\omega)^{\gamma}$ обладает математическим свойством постоянства $Q$. Чтобы наблюдать это свойство более четко, выразим функцию $(-i\omega)^{\gamma}$ через ее вещественную и мнимую части:

$$(-i\omega)^{\gamma} = |\omega|^{\gamma}\left[-i\,\mathrm{sgn}(\omega)\right]^{\gamma}, \tag{321а}$$

$$= |\omega|^{\gamma}\left[e^{-i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)\,2}\right]^{\gamma}, \tag{321б}$$

$$= |\omega|^{\gamma}\left\{\cos\left[\frac{\pi\gamma}{2}\,\mathrm{sgn}(\omega)\right] - i\sin\left[\frac{\pi\gamma}{2}\,\mathrm{sgn}(\omega)\right]\right\}, \tag{321в}$$

$$= |\omega|^{\gamma}\left[\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) - i\,\mathrm{sgn}(\omega)\sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right]. \tag{321г}$$

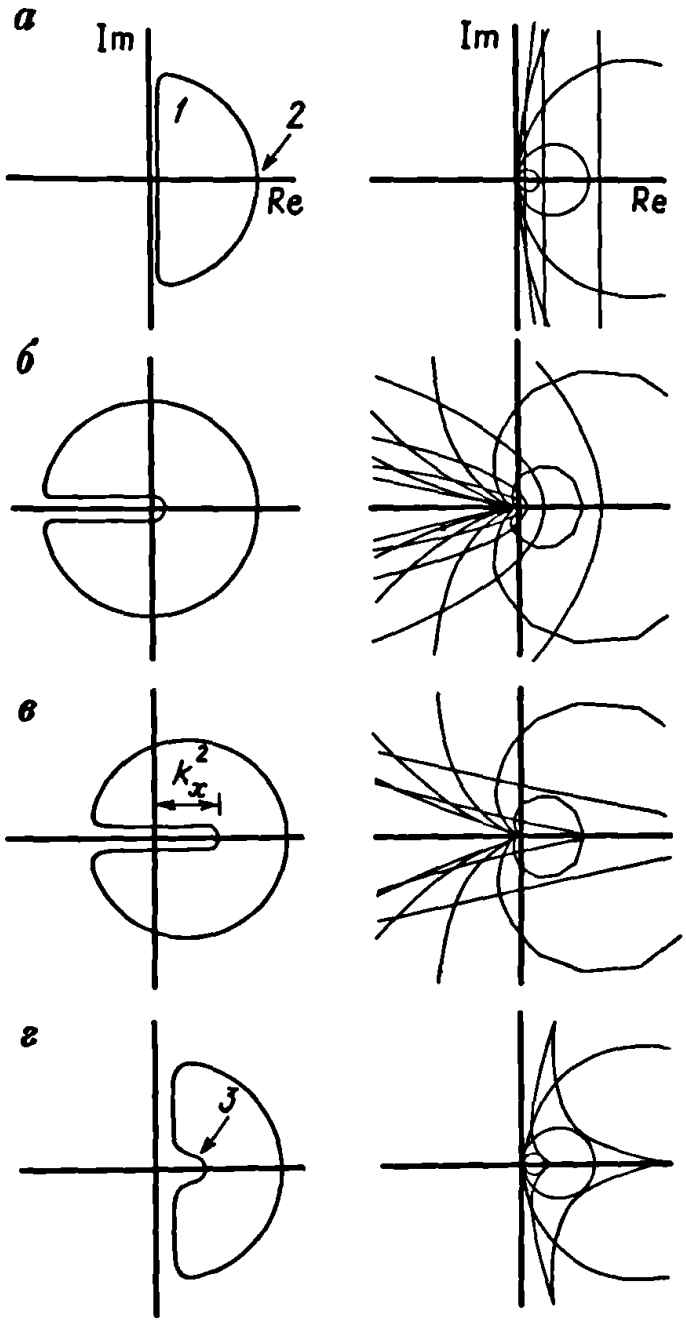



РИС. 142. Изображение на комплексной плоскости составных частей оператора экстраполяции, заданного формулой (318). Справа функция изображена при нескольких усилениях: *а* $-i\hat{\omega}=2\dfrac{1-0{,}9e^{i\omega}}{1+0{,}9e^{i\omega}}$; *б* $(i\omega)^2$; *в* $(-i\hat{\omega})^2+k_x$, *г* $\sqrt{(-i\hat{\omega})^2+k_x^2}$; *1* низкие частоты; *2* частота Найквиста; *3* быстрозатухающая энергия

Свойство постоянной $Q$ вытекает из постоянства отношения вещественной и мнимой частей этой функции. Сама она определяется соотношением

$$1/Q=\operatorname{tg}\pi\varepsilon\approx\pi\varepsilon. \qquad (322)$$

На рис. 143 изображен импульс с добротностью $Q$, приблизительно равной 10. Импульс задается выражением $e^{-(-i\omega)^{97}t_0}$, ось частот представлена дискретным фурье-преобразованием по 256 точкам, нулевые момент времени и частота находятся на левых концах соответствующих осей.

**Упражнения**

1. Возьмите $\varepsilon<0$ и разложите интегрирующий оператор по отрицательным степеням $Z$. Объясните различие в знаках.

2. Пусть $\alpha>0$ вещественная положительная весовая константа, а $C$ функция коэффициента отражения. Не прибегая к правилам Мюира, докажите, что $C'$ представляет собой функцию коэффициента отражения, причем

$$\frac{1-C'}{1+C'}=\alpha\frac{1-C}{1+C}.$$

Заметим, что вы тем самым докажете первое правило Мюира. Третье правило можно доказать аналогичным способом, но при этом увеличиваются алгебраические выкладки.

3. Термин «изоморфизм» означает не только то, что любой импеданс $R_1$, $R_2$, $R'$ можно отобразить в коэффициент отражения $C_1$, $C_2$, $C'$, но и то, что три правила Мюира будут отображаться в три правила комбинирования коэффициентов отражения.

а. Как выглядят эти три правила?

б. Хотя равенство $C'=C_1C_2$ и не оказывается ни одним из этих правил, оно очевидно справедливо. Либо покажите, что это равенство является

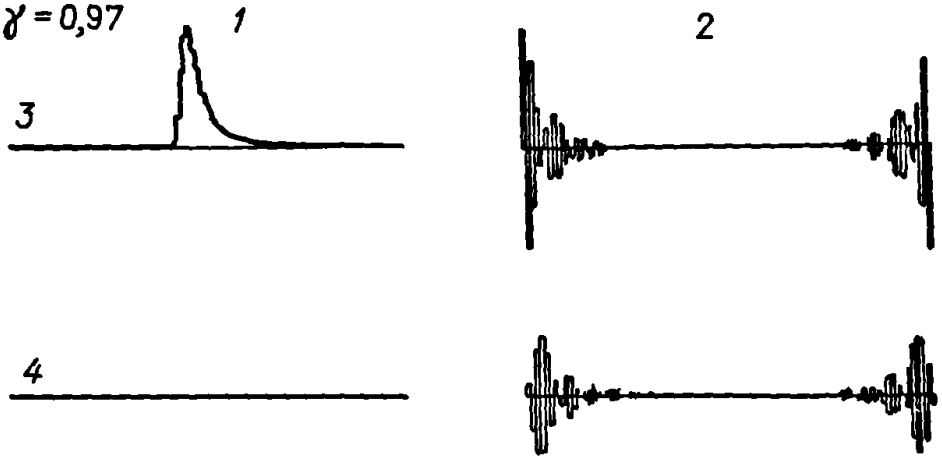



РИС. 143. Импульсоид с постоянной добротностью $Q$ при $\gamma=0{,}97$:
*1* время; *2* частота; *3* вещественная часть; *4* мнимая часть

следствием из трех правил, либо сделайте вывод, что оно самостоятельное правило, которое можно отобразить назад в область импедансов, и тогда оно станет четвертым правилом.

4. Покажите, что логарифм дискретного причинного интегрирующего оператора вида $\log[(1+Z)(1-Z)]$ представляет собой одно из дискретных преобразований Гильберта. Покажите, что импульс, отраженный от границы раздела двух сред, характеризующихся одинаковыми скоростями, но несколько отличными $Q$, представляет собой одно из преобразований Гильберта.

5. Рассмотрите разложение Тейлора, содержащееся в экстраполяционном уравнении

$$\frac{dP}{dz}=i\omega\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{vk}{\omega}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{vk}{\omega}\right)^4\right]P.$$

а. Будет ли это уравнение устойчивым на комплексной частоте $-i\omega=-i\omega_0+\varepsilon$? Почему?

б. Рассмотрите причинные и антипричинные вычисления во временной области с помощью этого уравнения. Какие из них устойчивы, или же таких нет?

6. Рассмотрим скорость в веществе, которая может зависеть от частоты $\omega$ и также от горизонтальной координаты $x$. Предположим, что нам повезло и скорость можно выразить в виде произведения $v(x, \omega)=v_1(x)\,v_2(\omega)$. Получите устойчивое 45-градусное уравнение волновой экстраполяции. Советуем опробовать функцию вида

$$s=-i\omega\, v_2$$

и учесть, что $X^2$ равна положительному собственному значению функции $(v_1\partial_x)(v_1\partial_x)^T$.

7. Связана ли рекурсия Левинсона, описанная в работе [53], с правилами, изложенными в данном разделе? Если да, то каким образом. Советую обратиться к работе [83].

8. Докажите теорему, обратную четвертой, т. е. покажите, что если фазовая характеристика причинной функции не включает начало координат, то обратная ей функция будет причинной.

## 4.7. Точность с точки зрения обработчика

Цепь не прочнее ее самого слабого звена. Соображения экономики подсказывают, что все звенья цепи должны быть одинаково прочными. Многие вопросы заслуживают изучения,

среди них можно назвать такие, как погрешности, связанные с неточным знанием скоростей, а также с проведением миграционных преобразований до или после суммирования ОСТ. Изучив материал до настоящего раздела, вы будете в состоянии приступить и к этим вопросам. Сузим поле зрения и рассмотрим только те ошибки процесса продолжения в нижнее полупространство, которые происходят в результате использования знакомых нам приближений при обработке наблюденных данных.

При составлении рабочих программ миграционного преобразования с помощью волнового уравнения слабые места возникают именно из-за тех приближений, которые используются во многих местах этих программ. Экономические соображения подсказывают, что фонды на достижение дополнительной точности следует направлять туда, где они принесут максимальную пользу. Естественно поэтому, что геофизики-обработчики поневоле становятся экспертами по вопросам поиска компромиссов между достижимой точностью и затратами на выполнение миграционных преобразований над отсуммированными по ОСТ сейсмическими наблюдениями. Обработчики будут использовать уравнения и программу, приведенные ниже, так, чтобы при наименьших затратах получать наилучшие результаты. Сейсморазведчики методом отраженных волн заинтересованы в том, чтобы научиться распознавать несовершенно выполненные миграционные преобразования, поэтому они могут пожелать воспользоваться этой программой для того, чтобы увидеть влияние различного рода упрощений.

При подготовке к большой производственной обработке материалов возможны два общих подхода к исследованию вопросов точности результатов. Первый подход, обеспечивающий наилучшее понимание качественной стороны явлений, заключается в построении различными способами синтетических гипербол. Синтетические гиперболоиды можно сопоставлять с полевыми наблюдениями, используя для этих целей видео-киносистемы, либо вычерчивая их на прозрачной бумаге. При втором подходе рассчитывают гиперболические или сферические годографы волн при различном шаге по горизонтали и частоте, при использовании сеток различных размеров и т. п. После этого запускают программу оптимизации, чтобы свести к минимуму среднюю погрешность в пределах интересующего нас диапазона изменения параметров.

Нет необходимости составлять 45-градусную программу конечно-разностной миграции во временном представлении для того, чтобы посмотреть, как будут выглядеть ее синтетические гиперболоиды. Можно просто выразить все формулы в координатах $(\omega, k_x)$ и затем выполнить обратное двухмерное преобразование Фурье. Чтобы облегчить сопоставление мето-

дов миграции, мы сопоставим рассмотренные выше уравнения, затем расскажем о программе, с помощью которой можно рассчитывать годографы дифрагированных волн для многих методов миграции. Пользуясь этими же уравнениями, можно будет рассчитывать времена пробега и решать задачу оптимизации по собственному усмотрению.

### Латеральные производные

Прежде всего условимся, что $k_x$ изменяется в диапазоне $\pm\pi/\Delta x$. Если по оси $x$ будут определяться конечные разности, то нам понадобится соотношение вида

$$(\hat{k}\,\Delta x\ 2)^2=\frac{\sin^2(k\Delta x\ 2)}{1-b\,4\sin^2(k\Delta x\ 2)}. \qquad (259б)$$

Итак, если при вычислении конечных разностей будет использоваться ось $x$, то в последующем обозначение $k_x$ будет заменено на $\hat{k}_x$. При вычислении конечных разностей вводится свободный параметр $b$. Аналогично этому вы можете изменять масштаб всего выражения путем умножения на регулируемый параметр, равный приблизительно единице. Следует учитывать также, что при наблюдениях в поле $\Delta x$ не обязательно должно быть фиксированным. Перед началом обработки наблюдения всегда можно проинтерполировать. Конечно-разностным методом с использованием интерполяции наблюдений можно решать задачи в условиях, когда отмечаются довольно резкие латеральные изменения скоростей.

### Вязкость и причинность

Частота $\omega$ будет изменяться в диапазоне $\pm\pi/\Delta t$. Если по оси $t$ намечено вычислять конечные разности, то понадобится переменная Z-преобразования вида

$$Z=e^{i\omega\Delta t} \qquad (284)$$

и причинная производная

$$-i\hat{\omega}=\frac{2}{\Delta t}\frac{1-\rho Z}{1+\rho Z},\quad -1\ll\rho<1. \qquad (311)$$

Перед началом обработки данные можно передискретизировать с уменьшенным или увеличенным шагом, поэтому $\Delta t$ представляет собой регулируемый параметр. Причинностный параметр $\rho$ должен быть небольшим, меньше единицы, и иметь вид, скажем, $\rho=1-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ является регулируемым параметром. Может возникнуть желание ввести параметр $\rho$, даже если миграция производится в частотной области, так как он

уменьшает искажения периодического характера во временном представлении, играя роль вязкости. Параметр $\varepsilon$ должен быть приблизительно обратен длительности сейсмозаписи и равен, например, $1/N_t$, где $N_t$ число точек на временной оси. (Так как я построил много синтетических гипербол, применяя регулировку усиления пропорциональную корню квадратному, $\gamma=1\ 2$, помехи периодического характера во временном представлении были чрезмерно велики. Поэтому моя программа не реагировала на значения $\varepsilon$, большие, чем в 4 раза.) Если же вы захотите подрегулировать свободные параметры, то можете раздельно изменять значения числителя и знаменателя у $\rho$. Ниже выясним различие между $\omega$ и $\hat{\omega}$, но вы этого можете не делать, если не собираетесь учитывать причинность.

### Запаздывающая рекурсия Мюира

Корень квадратный из $k_z$ можно рассчитать с помощью функции квадратного корня, имеющейся в библиотеке вашего компьютера, или же с помощью разложения в ряд Мюира. Если учитывающие причинность вычисления проводятся в области Фурье, то нужно пользоваться комплексной функцией квадратного корня, которая автоматически учтет область существования быстрозатухающей энергии. Квадратный корень из комплексного числа многозначен, поэтому сначала нужно удостовериться, что ваш компьютер выбирает фазу именно так, как показано на рис. 142. Мой выбирал, но все же я обнаружил, что ограничения по численной точности не позволили мне достичь строгой положительности вещественной части импедансной функции до тех пор, пока я не заменил выражение $\sqrt{s^2+v^2k^2}-s$ на его алгебраический эквивалент вида $v^2k^2/(\sqrt{s^2+v^2k^2}+s)$.

Для вычисления конечных разностей нам нужна рекурсия Мюира. Обозначим через $r_0$ косинус угла, с которого начинается рекурсия Мюира. Такой угол часто равен 0 или 45 . Это еще один свободный параметр для оптимизации (см., например, рис. 40). Этот угол является также углом точного согласования для всех порядков рекурсии. Пусть

$$s=-i\hat{\omega}. \tag{311}$$

Начинаясь с $R_0=r_0 s$, рекурсия Мюира имеет вид

$$R_{n+1}=s+v^2k_x^2/(s+R_n). \tag{312}$$

В программе дифракции будет определяться значение функции $\exp(-Rz)$. Поскольку $R$, как было показано в разделе 4.6, должна иметь положительную вещественную часть, экспоненциальная функция никогда не должна возрастать. Вычисления

конечных разностей обычно выполняются в запаздывающем времени. Чтобы сделать время запаздывающим, функцию $\exp(-Rz)$ выражают в виде

$$e^{-Rz\,v}=e^{-(R-s)z\,v}e^{-sz/v}. \tag{323}$$

Как указывалось в разделе 4.1, вам, возможно, не захочется, чтобы временной сдвиг связывался с вязкостными эффектами. Поэтому вы, возможно, пожелаете выполнять продолжение в нижнее полупространство с помощью функции

$$e^{-[R(-i\hat{\omega})+i\hat{\omega}]z\,v}e^{+i\omega z\,v} \tag{324}$$

вместо указанной выше. Помните о знаках и о различии между $\omega$ и $\hat{\omega}$.

Из уравнения (312) следует, что $(R-s)$ должна иметь положительную вещественную часть. Автор нашел, что иногда ошибки численного округления препятствуют этому. Поэтому с целью включения запаздывания рекурсия Мюира была организована по-новому. Пусть

$$R'=R-s. \tag{325}$$

Уравнение (312) принимает вид

$$R'_{n+1}=v^2k_x^2/(2s+R'_n). \tag{326}$$

Согласно правилам Мюира, можно убедиться, что $R'$ будет всегда иметь положительную вещественную часть, если начинать рекурсию таким способом, поэтому начнем ее с

$$R'_1=v^2k_x^2/s(1+r_0). \tag{327}$$

Из уравнений (327) и (325) получаем то же самое 15-градусное уравнение, что и (312). С математической точки зрения (324) идентично

$$e^{-R'z\,v}e^{+i\omega z\,v}, \tag{328}$$

но с точки зрения численного анализа имеются гарантии того, что экспоненциальная функция (328) будет убывать по оси $z$.

### Дискретизация по глубине

Если вычисления конечных разностей производятся по глубине или псевдоглубине, выраженной во временах пробега, то в нашем распоряжении имеется соотношение

$$\hat{k}_z\Delta z/2=\operatorname{tg}(k_z\Delta z/2), \tag{266}$$

которое можно использовать в экспоненциальной функции $\exp ik_zz$. Так как может происходить рассеяние энергии, приведенные выше величины могут быть комплексными. Обозначим через $N_z$ число слоев по глубинной координате, которое

обычно равно или же меньше $N_t$. Подставив выражение (269) в (328), получаем

$$e^{-R'N\Delta z/v} \approx \left(\frac{1-R'\Delta z/2v}{1+R'\Delta z\ 2v}\right)^N. \qquad (329)$$

### Молниеносная миграция способом фазового сдвига

В частотную область можно не только включить признаки причинности и вязкости, характерные для методов, работающих во временном представлении, но и заменить квадратные корни и комплексные показательные функции метода фазового сдвига на операции умножения и деления комплексных чисел. Отметим, что разложение квадратного корня не нужно начинать с какого-то предполагаемого значения или с итерации более низкого порядка. Оно может начинаться с квадратного корня, полученного ранее по предшествующим значениям $\omega$ или $k$. Это было замечено по ошибке в одной из ранних версий данной программы, которая приводила к тому, что все 15-градусные расчеты выглядели, как 90-градусные! Кроме того, в методе фазового сдвига величина $\Delta z/v$ обеспечивает построение сейсмического изображения в каждой временной точке. Поэтому конечно-разностная формула (329), вероятно, столь же хороша, как и комплексная показательная функция. Почему бы вам ее не опробовать?

### Внешний вид результатов обработки

Результат работы программы расчета импульсной реакции имеет неприглядный вид. Главная причина этого заключается в большой площади пространства ($\omega$, $k_x$), расположенной возле частоты Найквиста или же выше границы существования быстрозатухающей энергии. Поскольку мы редко дискретизируем наблюдения по времени столь грубо, как это позволяет критерий Найквиста, приводимая ниже программа предусматривает проведение окончательной фильтрации с помощью функции вида $(1+Z)/(1-0{,}8Z)$. Полоса пропускания такого фильтра шире полосы частотного диапазона сейсморазведочных материалов. Так как во всех наземных и у большинства морских наблюдений составляющая нулевой частоты отсутствует, в программе предусмотрена возможность дальнейшей фильтрации с помощью функции вида $(1-Z)/(1-0{,}8Z)$. Автор не использовал последний фильтр, так как хотел продемонстрировать в книге все виды искажений искусственного происхождения, которые могут встретиться при обработке. Далее, он сознательно усиливал наглядность этих искажений, применяя при графовыводе нелинейную регулировку с $\gamma = 1/2$, описанную в разделе 4.1. При выводе рисунков в перспективных проекциях

всегда применяется линейная регулировка усиления. Поскольку площадь каждого рисунка, помещенного в книге, составляет около 10 см$^2$, а на практике вы будете иметь дело с графиками, площадь которых приблизительно в 100 раз больше, изображались обычно лишь интервалы в 1 с времени пробега.

## Программа

Многие рисунки, включенные в данную книгу, построены с помощью программы, которая приводится ниже в полном виде, чтобы дать вам возможность воспроизвести их. Операторы вызова входных параметров и результатов расчета зависят от места проведения конкретных работ, но все равно автор оставил их, чтобы помочь в понимании неудач и тем самым увеличить шансы на то, что вы сможете точно уловить характер сделанного им.

```
# representations of e^{-sqrt((iω v)^2+k^2) z}
integer output, outfd, fetch
integer iw, nw, ik, nk, omhat, kxhat, kzhat, degree, tfilt, xfilt
real v, dt, dx, dz, xf, x0, tf, tau0, rho, bi, r0, eps, pi, omega, k, vk2
complex cz, cs, cikz, cexp, cmplx, csqrt, cp (1024)
outfd=output ( )
                call putch("esize", "i", 8)    #complex numbers
nw=256;         call putch("nl", "i", nw)      #inner index is ω
nk=64;          call putch("n2", "i", nk)      #outer index is k_x=
                call putch("n3", "i", 1)       #one frame movie

if( fetch(  "v", "f",     v)==0)    v    =3.754        #rock vel
if( fetch(  "dt", "f",    dt)==0)   dt   = .004        #Δt, sec
if( fetch(  "dx", "f",    dx)==0)   dx   = .025        #Δx, km
if( fetch(  "dz", "f",    dz)==0)   dz   = .004        #Δz, sec
if( fetch(  "xf", "f",    xf)==0)   xf   = .25;       x0=xf*nk*dx
if( fetch(  "tf", "f",    tf)==0)   tf   = .5;        tau0=tf*nw*dt

if( fetch(  "omhat", "i", omhat)==0)  omhat=0          #ω̂
if( fetch(  "kxhat", "i", kxhat)==0)  kxhat=0          #k̂_x
if( fetch(  "kzhat", "i", kzhat)==0)  kzhat=0          #k̂_z
if( fetch(  "degree", "i", degree)==0) degree=90
if( fetch(  "tfilt", "i",  tfilt)==0)  tfilt=1
if( fetch(  "xfilt", "i",  xfilt)==0)  xfilt=1

if( fetch(  "rho", "f",   rho)==0)    rho  =1-4· nw
if( fetch(  "bi", "f",    bi)==0)     bi   =6.726      #b^{-1}
if( fetch(  "r0", "f",    r0)==0)     ro   =0.7071
if( fetch(  "eps", "f",   eps)==0)    eps  =0.

call putch("dl", "f", dt);   call putch("label1", "s", "sec")
call putch("d2", "f", dx);   call putch("label2", "s", "kilometers")
call hclose( )                          #close data description file
pi=3·14159265
do ik=1, nk {                           #loop over all k_x
k=2*pi*(ik-1.) nk
if(k>pi)        k=k-2*pi
k=k dx
```

```
        if(kxhat==0)
                vk2=(v 2)**2*k*k
        else
                vk2=(v 2)**2*(2 dx)**2*sin(k*dx/2)**2/1-
                        (4. bi)*sin(k*dx/2)**2)
        do iw= 1, nw{                          #loop over all ω
                omega=2*pi*(iw-1.) nw
                if(omega>pi) omega=omega-2*pi
                omega=omega dt
                cz=cexp(cmplx(0., omega*dt))
                if(omhat==0)
                        cs=cmplx(1.e-5 dt,-omega)
                else
                        cs=(2. dt)*(1.  rho*cz) (1.+rho*cz)
                if(degree==90)
                        cikz=vk2 (csqrt(cs*cs+vk2)+cs)
                if(degree==15|degree==45)
                        cikz=vk2 (eps+(r0+1.)*cs)
                if(degree==45)
                        cikz=vk2 (2.*cs+cikz)
                if(real(cikz)<0.) call erexit("cikz not positive real")

                if(kzhat==0)
                        cp(iw)=cexp(-tau0,*cikz)
                else
                        cp(iw)=((1.-cikz*dz 2) (1.+cikz*dz 2))**(tau0/dz)
                cp(iw)=cp(iw)*cexp(cmplx(0., omega*tau0))          #unretard

                if tfilt>=1) cp(iw)=cp(iw)*(1+cz) (1-.8*cz)
                if(tfilt>=2) cp(iw)=cp(iw)*(1-cz) (1-.8*cz)
                if(xfilt==1) cp(iw)=cp(iw)*(1+cos(k*dx)) (1+.85*cos(k*dx))
                cp(iw)=cp(iw)*cexp(cmplx(0., k*k0))
                }
call rite(outfd, cp, 8*nw)    #write
        }
stop; end
#Finally, you must 2  D Fourier Transform (Section 1.7), take real part, and plot.
```

С помощью этой программы были получены 22 графических изображения, помещенные в книге. Ниже приведены входные параметры, использованные при построении различных графиков.

| Номер рисунка | Неудачные параметры | Номер рисунка | Неудачные параметры |
|---|---|---|---|
| 25*а* | tfilt=0 | 133*а* | $v=2.0$, 90 |
| 25*б* | | 133*б* | $v=2.0$, 15 , $\hat{\omega}$, $\hat{k}_x$, $\hat{k}_z$ |
| 39*а* | | 135*а* | $\hat{k}_x$, $\hat{\omega}$, $b^{-1}=1000000.$ |
| 39*б* | $\hat{\omega}$ | 135*б* | $\hat{k}_x$, $\hat{\omega}$, $b^{-1}=12.$ |
| 114*а* | $\hat{\omega}$, $v=2{,}0$, xf=0.5, xfilt=0 | 135*в* | $\hat{k}_x$, $\hat{\omega}$, $b^{-1}=6.726$ |
| 114*б* | $\hat{\omega}$, $v=2{,}0$, xf=0.5 | 135*г* | $\hat{k}_x$, $\hat{\omega}$, $b^{-1}=6.$ |
| 118*а* | 15 | 135*д* | $\hat{k}_x$, $\hat{\omega}$, $b^{-1}=5.$ |
| 118*б* | 15 , $\varepsilon=1$ | 141*а* | |
| 119*а* | 45 , tf=0,2 | 141*б* | $\hat{\omega}$ |
| 119*б* | 45 , tf=0,2, $\varepsilon=1$ | 144*а* | $\Delta z=0{,}004$, 45 , tf=0,3, $\hat{\omega}$, $\hat{k}_x$, $\hat{k}_z$ |
| 123 | 45 , tf=0,2, $\hat{\omega}$ | 144*б* | $\Delta z=0{,}012$, 45 , tf=0,3, $\hat{\omega}$, $\hat{k}_x$, $\hat{k}_z$ |

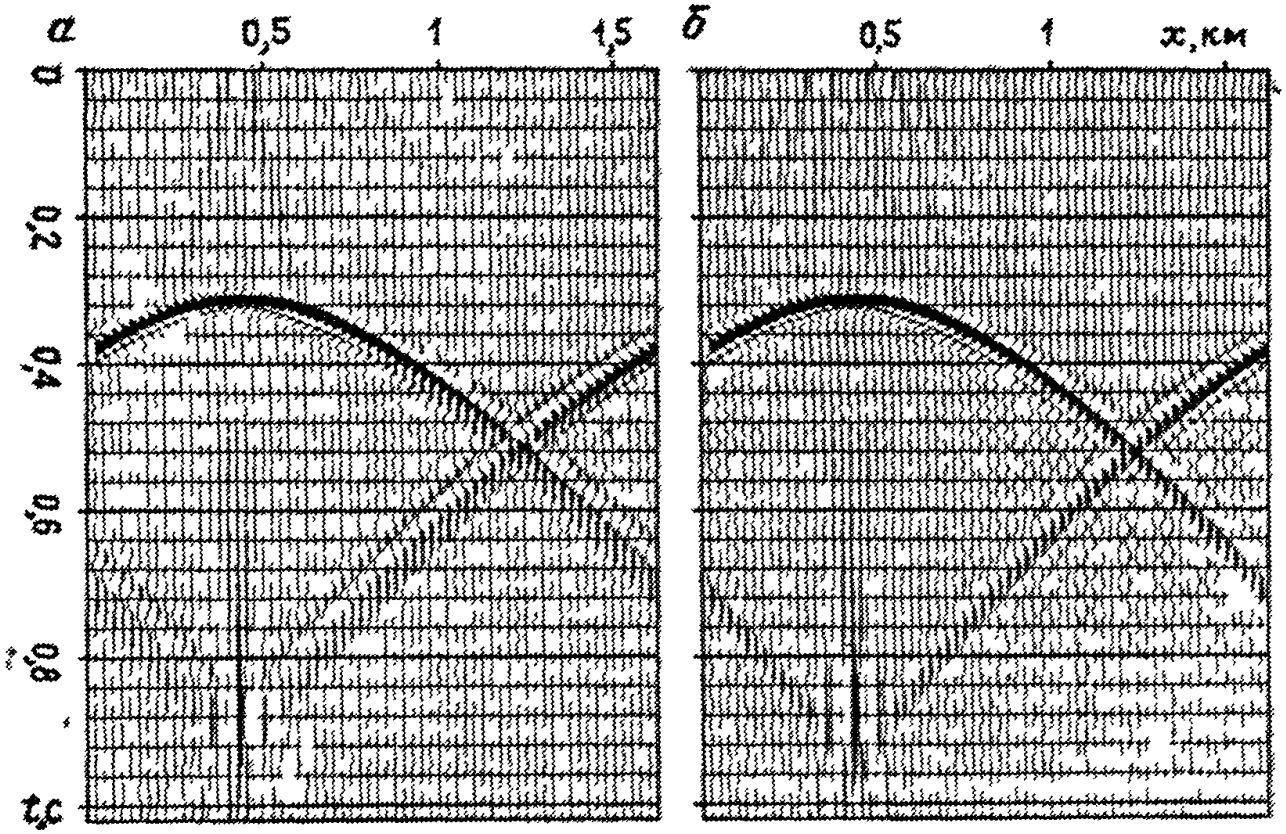



РИС. 144. 45-градусная точечная дифракция в пространстве $(x, z, t)$.
Шаг вычислений: *а* $\Delta z = v\Delta t$; *б* $\Delta z = 3v\Delta t$

Предполагают, что точность можно повысить, если сделать сетку по $z$ более грубой. Если бы $x$ и $t$ были непрерывными, т. е. аналоговыми сигналами, то о повышении точности не могло бы быть и речи, но поскольку их можно дискретизировать, возникает возможность случайного взаимного уничтожения ошибок.

Чтобы проверить справедливость этого, автор опробовал втрое больший шаг $\Delta z$ (увеличив фактически втрое шаг по псевдоглубине). Результат опыта изображен на рис. 144. Каково ваше мнение?

Каким бы полным ни показался представленный выше анализ, его возможности ограничиваются предположением, заимствованным из анализа Фурье и заключающемся в том, что скорость по латерали не изменяется. Чтобы решить и эту проблему, переходим к заключительному разделу по методике обработки сейсморазведочных материалов.

## 4.8. Придание устойчивости экстраполяции

Устойчивую экстраполяцию можно обеспечить путем сохранения определенных симметричных соотношений. Покажем, что устойчивость и дифференциального уравнения

$$d\mathbf{q}/dz = -\mathbf{R}\mathbf{q}, \qquad (330)$$

и его аппроксимации по способу Крэнка — Никольсона

$$\frac{\mathbf{q}_{n+1}-\mathbf{q}_n}{\Delta z}=-\frac{\mathbf{R}}{2}(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n) \tag{331}$$

обеспечивается при условии, что $\mathbf{R}+\mathbf{R}^*$ представляет собой положительную определенную (а фактически полуопределенную) матрицу. При исследовании вопроса об устойчивости решений в предыдущем разделе в качестве оператора $\mathbf{R}$ было выбрано скалярное $Z$-преобразование. Ввиду того, что применялись $Z$-преобразования, то выводы предыдущего раздела особенно удобны для рассмотрения миграции во временном представлении. Так как оператор $\mathbf{R}$ был скалярной функцией, то результаты предыдущего раздела особенно удобны при фурье-преобразовании наблюденных данных по оси $x$. Здесь же мы сосредоточим свое внимание на матричном характере оператора $\mathbf{R}$. Итак, нас интересует миграционное преобразование в области $x$. Цель теоретических исследований, проведенных ниже дать возможность составления своего рода устойчивой программы миграционного преобразования сейсморазведочных наблюдений при наличии латеральных вариаций скоростей. В качестве примера будет взято знакомое нам 45-градусное экстраполяционное уравнение. В настоящем и предыдущем разделах, взятых вместе, излагается общая теория устойчивости миграционного преобразования в пространстве с координатами $(t, x)$.

## Устойчивость решения дифференциального уравнения

Обозначим через $\mathbf{q}^*$ эрмитово-сопряженную матрице $\mathbf{q}$. Для того, чтобы уравнение (330) имело устойчивое решение, энергия должна либо быть постоянной величиной, либо затухать в процессе экстраполяции на глубину:

$$\frac{d}{dz}(\mathbf{q}^*\mathbf{q})\leqslant 0,$$

$$\mathbf{q}^*\mathbf{q}_z+\mathbf{q}_z^*\mathbf{q}\leqslant 0. \tag{332}$$

Подставив уравнение (330) в (332), получим:

$$\mathbf{q}^*\mathbf{R}\mathbf{q}+\mathbf{q}^*\mathbf{R}^*\mathbf{q}\geqslant 0,$$
$$\mathbf{q}^*(\mathbf{R}+\mathbf{R}^*)\mathbf{q}\geqslant 0. \tag{333}$$

Из уравнения (333) следует, что для устойчивости решения данного дифференциального уравнения сумма $\mathbf{R}+\mathbf{R}^*$ должна быть положительной и полуопределенной.

### Устойчивость решения разностного уравнения

Устойчивость разностного уравнения можно доказать аналогичным способом, но при этом придется преодолеть некоторые затруднения. Сначала рассмотрим тождество

$$(\mathbf{a}^*\mathbf{a}-\mathbf{b}^*\mathbf{b})\equiv\frac{1}{2}[(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^*(\mathbf{a}+\mathbf{b})]. \tag{334}$$

Если положить, что $\mathbf{a}=\mathbf{q}_{n+1}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{q}_n$, то уравнение (334) принимает вид

$$(\mathbf{q}^*_{n+1}\mathbf{q}_{n+1}-\mathbf{q}^*_n\mathbf{q}_n)=\frac{1}{2}[(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n)^*(\mathbf{q}_{n+1}-\mathbf{q}_n)+$$

$$+(\mathbf{q}_{n+1}-\mathbf{q}_n)^*(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n)]. \tag{335}$$

Теперь заменим члены вида $(\mathbf{q}_{n+1}-\mathbf{q}_n)$ на уравнения (331):

$$(\mathbf{q}^*_{n+1}\mathbf{q}_{n+1}-\mathbf{q}^*_n\mathbf{q}_n)=-\frac{\Delta z}{4}[(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n)^*\mathbf{R}(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n)+$$

$$+(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n)^*\mathbf{R}^*(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n)]=$$

$$=-\frac{\Delta z}{4}[(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n)^*(\mathbf{R}+\mathbf{R}^*)(\mathbf{q}_{n+1}+\mathbf{q}_n)]. \tag{336}$$

Последнее уравнение утверждает, что, если матрица $\mathbf{R}+\mathbf{R}^*$ положительная определенная, то $\mathbf{q}^*_{n+1}\mathbf{q}_{n+1}$ будет меньше, чем $\mathbf{q}^*_n\mathbf{q}_n$.

### Приложение к случаю 45-градусной экстраполяции волнового поля

Скалярное волновое уравнение для экстраполяции нисходящего волнового поля имеет вид

$$d\mathbf{q}/dz=ik_z\mathbf{q}=-\mathbf{R}\mathbf{q}, \tag{337}$$

где оператор $\mathbf{R}$ принимает свою обычную форму

$$\mathbf{R}=-ik_z=\frac{-i\omega}{v}\sqrt{1-\frac{v^2k_x^2}{\omega^2}}. \tag{338}$$

Наш план заключается в том, чтобы аппроксимировать квадратный корень с помощью обычного разложения в непрерывную дробь и затем отождествить $ik_x$ с $\partial_x$ и получить в результате уравнение в пространственных координатах. В создавшейся ситуации нам придется отказаться от обычного в таких обстоятельствах предположения о независимости от координаты $x$ скоростного распределения $v(x, z)$. Поскольку производная $\partial_x vq$ отличается от $v\partial_x q$, кажется, что пространст-

венное представление не будет единственным и можно только предполагать, каким образом переменная $q$ связывается с такими физическими волновыми переменными, как давление и смещение. Поскольку оператор (338) чисто мнимый, независимость от глубинной координаты квадратичной формы $\mathbf{q}^*\mathbf{q}$ можно интерпретировать, как нисходящий поток энергии через расчетный уровень на глубине $z$. Наши основные усилия будут сосредоточены на том, чтобы гарантировать действительную независимость $\mathbf{q}^*\mathbf{q}$ от глубинной координаты при условии $v(x, z) \neq \text{const}$. Задачу определения связи между переменной энергетического потока $q$ и физическими переменными оставим для читателя.

Прежде всего нужно представить $v^2k_x^2$ в пространственной области. Если представить себе оператор производной по $x$, т. е. $\partial/\partial x = \partial_x$, в виде большой двудиагональной матрицы с элементами вида $(1, -1)\,\Delta x$, расположенными на диагонали, и $\mathbf{V}(x)$ в виде диагональной матрицы, то придем к выражениям типа $(\mathbf{V}\partial_x)^{\mathrm{T}}(\mathbf{V}\partial_x)$ или $(\mathbf{V}\partial_x)(\mathbf{V}\partial_x)^{\mathrm{T}}$, так как они представляют собой симметричные положительные полуопределенные матрицы. В простейшем виде подобные численные представления являются трехдиагональными матрицами, которые можно записать в сокращенном виде, как

$$\mathbf{T} = \begin{cases} (\mathbf{V}\partial_x)(\mathbf{V}\partial_x)^{\mathrm{T}}, \\ (\mathbf{V}\partial_x)^{\mathrm{T}}(\mathbf{V}\partial_x). \end{cases} \tag{339а, б}$$

На больших временах конкретный выбор параметров в уравнении (339) может быть сделан на основе точностных характеристик. Могут даже использоваться и другие выражения при условии, что они вещественные симметричные и положительно-определенные.

Как было показано в предыдущем разделе, 45-градусное разложение оператора (338) при условии постоянства скорости имеет вид

$$\mathbf{R} = \frac{1}{v}\,\frac{v^2k_x^2}{-i\omega 2 + v^2k_x^2\,(-i\omega 2)}. \tag{340}$$

У скаляра $\mathbf{R}$ вещественная часть всегда положительная, так как $-i\omega$ всегда представляется в импедансной форме, а все выражение целиком построено так, чтобы удовлетворять правилам комбинирования импедансных функций Мюира. При переходе в $x$-представление заметим, что $(ik_x)^2 = -\partial_{xx}$, а $(\partial_x)^{\mathrm{T}} = -\partial_x$. Поэтому положительный весовой множитель вида $v^2k_x^2$ соответствует положительным собственным значениям выражения (339).

Теперь выражение устойчивого квадратно-корневого оператора $\mathbf{R}$ в пространственной области задается, как

$$\mathbf{M}=\frac{\mathbf{T}}{-i\omega 2\mathbf{I}+\dfrac{\mathbf{T}}{-i\omega 2}}, \tag{341а}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{V}^{-1\,2}. \tag{341б}$$

Использование знака деления в (341) оправдано потому, что матрица **T** коммутативна с единичной матрицей **I**. (В настоящем исследовании беспокойство доставляет то обстоятельство, что **T** не коммутативна с диагональной матрицей **V**.) Матрица **M** обладает свойствами, требуемыми от **R**, поскольку в одной из основных теорем матричного исчисления говорится, что собственные значения многочлена вещественной симметричной матрицы являются многочленами, составленными из собственных значений. Другими словами, в результате замены **T** из выражения (341) одним из слагаемых получаем комплексную матрицу **M**, чья вещественная часть будет положительной и поэтому сумма $\mathbf{M}^*+\mathbf{M}$ положительна, что и требовалось доказать. Нужно показать, что следующая матрица положительная определенная, т. е.:

$$\mathbf{R}+\mathbf{R}^*=\mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{M}+\mathbf{M}^*)\mathbf{V}^{-1/2}. \tag{342}$$

Матрица **A** будет положительной определенной, если при произвольном $d$ скаляр $d^*\mathbf{A}d$ положителен. Несомненно, что диагональная матрица $\mathbf{V}^{-1\,2}$ может поглотиться в $d$, а само $d$ останется все же произвольным. Поэтому доказательство считаем законченным.

При программировании бывает очень хлопотно размещать $\mathbf{V}^{-1/2}$ на каждой из сторон матрицы **M**. Фактически можно размещать $\mathbf{V}^{-1}$ на любой из сторон. В общем случае некоторые другие квадратичные формы наподобие $\mathbf{q}^*\mathbf{U}\mathbf{q}$, где **U** строго положительная определенная, будут убывающими, если $\mathbf{R}^*\mathbf{U}+\mathbf{U}\mathbf{R}$ положительная определенная.

# Глава 5
# НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

В заключительной главе собраны опубликованные концепции построения сейсмических изображений, еще не нашедшие повседневного применения в производственной обработке сейсморазведочной информации. В первой части этой главы разрабатывается математическая концепция линейной кинематической поправки и ее связи со скоростным анализом. Наблюденные данные поддаются фокусировке, поэтому интервальные скорости можно считывать непосредственно. Последняя часть главы посвящена многократным отражениям и методам решения задачи по их обнаружению. Вы познакомитесь с элементарными математическими средствами, которые позволяют эффективно решать задачи, связанные с кратными отражениями и латеральными изменениями скоростей. Здесь содержится много предложений по совершенствованию способов обработки сейсморазведочных материалов, которые еще не стали способами производственной обработки геофизической информации.

## Интерпретация сейсморазведочных данных

В настоящую главу целесообразно поместить материал, предназначенный тем специалистам, которые интересуются в основном изобретением новых приемов обработки, но он будет полезен и интерпретаторам.

Процесс поисков месторождений нефти и природного газа основан на интерпретации данных, получаемых методом отраженных сейсмических волн. Что такое сейсмическая интерпретация? Чтобы исполнять обязанности «интерпретатора-производственника», вы должны знать все то, относительно чего теория и практика приходят к общему согласию. Чтобы быть хорошим интерпретатором, нужно знать состав и «уровень помех». Аномалии сейсморазведочных параметров могут возникать из-за сложности строения земной среды, либо из-за несовершенства приемов полевой регистрации и построения сейсмических изображений. Чтобы правильно интерпретировать данные сейсморазведки, нужно быть не только сейсмологом, но и геологом, инженером, математиком. Изучив настоящую главу, вы не превратитесь в хорошего интерпретатора, но получите возможность познакомиться с некоторыми примерами

критического осмысливания взаимосвязи между сейсмической теорией и сейсморазведочными наблюдениями.

### Отход от вертикального направления

Обычно углы измеряются от вертикального луча, хотя в действительности наблюдения при нулевом удалении приемника от источника производятся редко. Наилучшие сейсмические наблюдения обычно получаются на больших удалениях от вертикали. В настоящей главе рассматриваются случаи, когда луч подходит к поверхности земли невертикально. Простой поворот координатной системы не дает решение задачи, так как после него плоскость, на которой должны были бы производиться наблюдения, уже не будет просто плоскостью $z=0$. Поворот усложнил бы простую функцию сейсмической скорости $v(z)$, превратив ее в явно двухмерную функцию вида $v'(x', z')$. Рассмотренная в гл. 3 задача определения координаты удаления приемника от источника могла показаться довольно полной, но фактически решение не столь уж общо, так как квадратные корни разлагались в ряды относительно вертикального луча. Исследование растяжения осей координат Столта (см. раздел 4.5) продемонстрировало преимущество, заложенное в переходе с вершинной части гипербол на их крылья.

Использование линейной кинематической поправки (ЛКП) дает нам способ учета невертикальности лучей. Хотя он еще и не пользуется широкой известностью в современной практике производственной обработки, такой, более глубокий взгляд на координату удаления представляет особый интерес для научных работников. Через него можно прийти к пониманию существа многократных отражений. (Последняя тема в гл. 3 не затрагивалась.) Такой взгляд обеспечивает также и лучшее понимание вопроса определения скоростей.

### О приращении времени

В разделе 1.5 волна Снеллиуса была определена как плоская волна, которая в результате распространения в стратифицированной по скоростям среде $v=v(z)$ превращается в неплоскую. Плоская волна сохраняет угол своего распространения постоянным, а волна Снеллиуса сохраняет постоянным по глубине $z$ свое приращение $dt/dx$. На рис. 145 изображена волна Снеллиуса, падающая на земную поверхность. Фронты волны в последовательные моменты времени не параллельны друг другу, они представляют собой линии, образованные параллельным переносом в горизонтальном направлении. Приращением называется медленность перемещения по горизонтали. Оно измеряется в единицах обратной скорости и

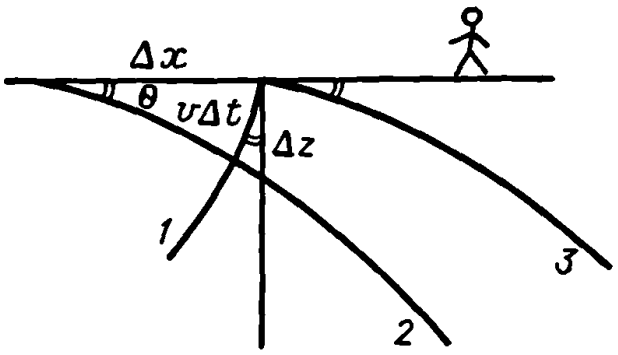



РИС. 145. Изображение фронта волны, показывающее, что по градиенту $dt\ dx$ можно определить $(\sin\theta)\ v$:
*1* луч; *2* фронт волны, подходящий к поверхности; *3* положение фронта в более поздний момент времени .

выражается в мс/м или в с/км. Медленность, обозначаемую через $p$, называют также лучевым параметром или параметром Снеллиуса:

$$p=\frac{dt}{dx}=\frac{\sin\theta(z)}{v(z)}=\text{const}(z). \tag{343}$$

## 5.1. Радиальные трассы

В разделе 3.6 были введены разрезы радиальных трасс, предложенные в качестве альтернативы разрезам при постоянном удалении. В этом же разделе мы попытались получить надлежащее миграционное преобразование наблюдений на ненулевых удалениях от источников. Мы также познакомились с определением кинематических поправок за наклон отражающих границ. Введение кинематических поправок за наклон границ упрощает последующий анализ, так как после выполнения этой операции можно обрабатывать сейсмограммы ОСТ, предполагая, что они получены в условиях горизонтально слоистой среды.

Сейсмограмма радиальных трасс определяется как некая деформация обыкновенной сейсмограммы. Обозначим обыкновенную сейсмограмму через $P(x, t)$, а радиальный параметр через $r=x/t$. Тогда сейсмограмма радиальных трасс $P'(r, t)$ определится деформацией вида $P(rt, t)$.

Горизонтальная координата $x$ кончика луча перемещается по закону $x=vt\sin\theta$. Поэтому в однородной среде радиальная трасса с фиксированным параметром $r=x/t$ будет содержать в себе всю энергию, которая распространяется под углом $\theta$.

Постоянство углов распространения в пределах радиальных трасс может оказаться полезным при исследовании многократных отражений. Оно также должно помогать при восстановлении формы записи волны в источнике, поскольку воздействие характеристик направленности групповых источников и приемников на каждой из радиальных трасс не меняется во времени.

Предположив, что отражающие границы находятся на глубинах $z_j$, а среда однородна, получим гиперболические уравнения годографов в виде

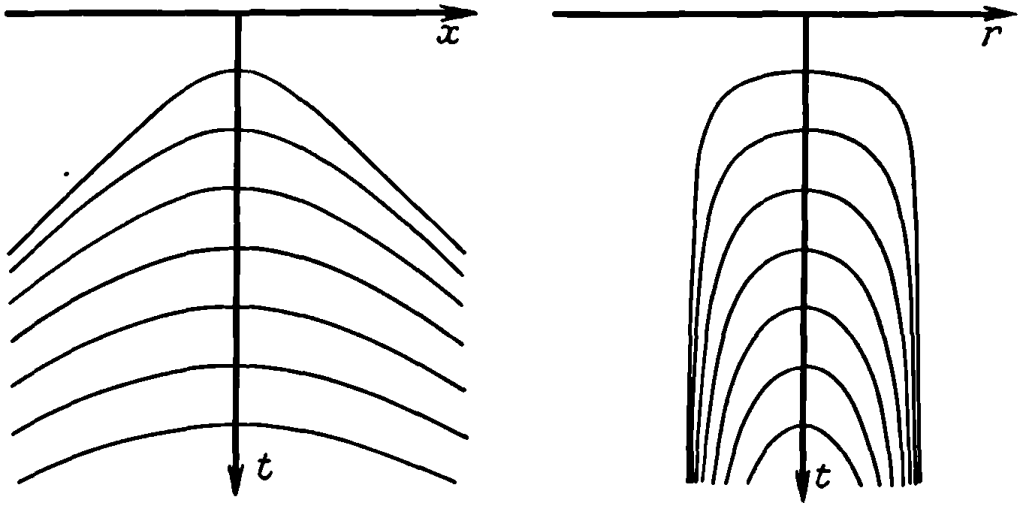



РИС. 146. Семейство гипербол до и после преобразования их в радиальное пространство

$$t^2v^2=x^2+z_j^2. \tag{344}$$

Когда координата удаления $x$ преобразуется в радиальный параметр $r=x/t$, из уравнения (344) получаем уравнение семейства кривых на плоскости $(r, t)$, изображенных на рис. 146:

$$z_j^2=t^2(v^2-r^2). \tag{345}$$

Асимптоты, ранее бывшие наклонными прямыми вида $x^2=\pm v^2t^2$, стали вертикальными прямыми вида $r=\pm v$. Заполненная кривыми плоскость $(r, t)$ имеет прямоугольную форму, а аналогичная область на плоскости $(x, t)$ треугольная.

На рис. 147 изображена полевая сейсмограмма до и после ее преобразования в радиальное пространство. Трассы с записью при удалении от источника перемежаются с нулевыми трассами, что яснее выявляет характер производимой деформации. Чтобы понять происхождение такого вида деформации, достаточно вспомнить, что полевая трасса представляет собой кривую с постоянной координатой $x=rt$.

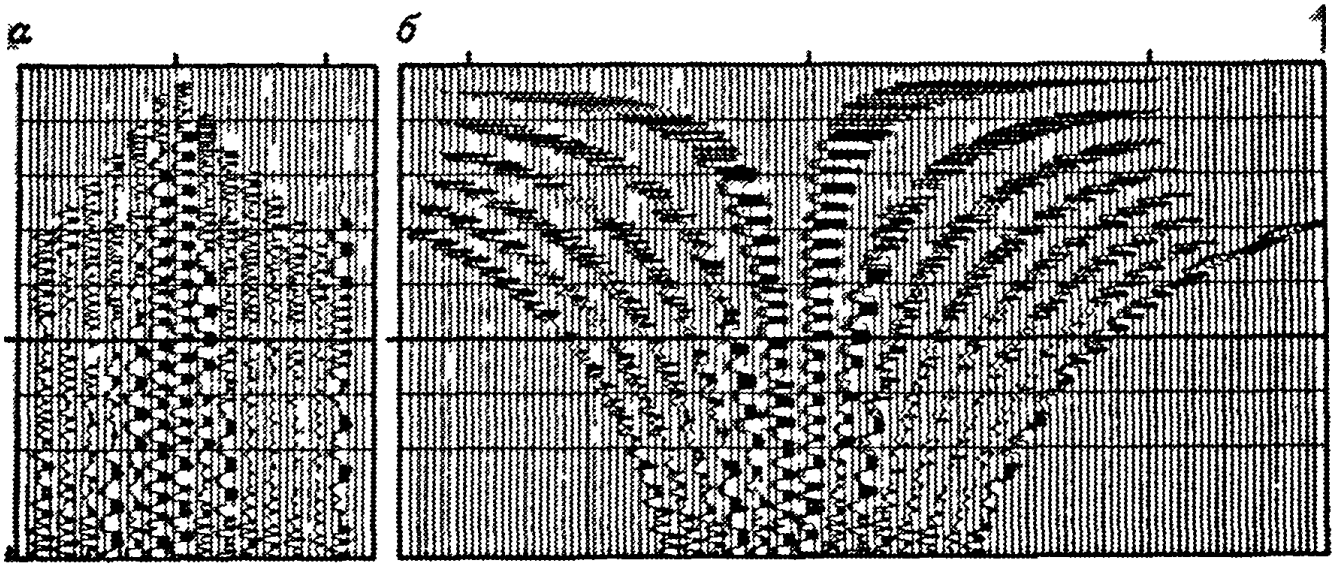



РИС. 147. Полевая сейсмограмма с выбранными нулевыми трассами (пров. Альберта, Канада) до (*а*) и после (*б*) радиально-трассовой трансформации

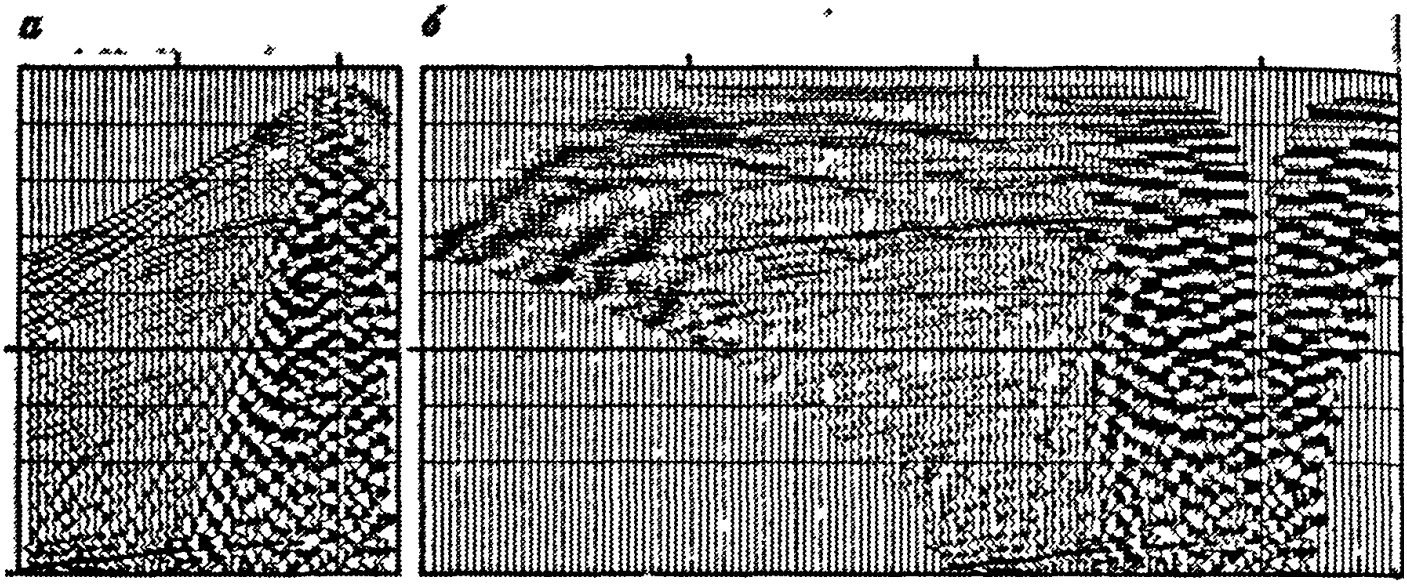



РИС. 148. Полевая сейсмограмма до (*а*) и после (*б*) ее деформации в радиальные трассы (пров. Альберта, Канада)

Интересной особенностью радиально-трассовой трансформации является ее воздействие на поверхностные волны-помехи. Простая модель поверхностной волны-помехи представляет собой волну, которая распространяется по горизонтальному направлению с постоянной скоростью. Поэтому на сейсмограмме радиальных трасс такая поверхностная волна-помеха проявляется в виде постоянной составляющей (колебания с нулевой частотой) на нескольких радиальных трассах вблизи $r = \pm v_{\text{пов. волн}}$. На рис. 148 изображено одно из приближений к указанной идеализации.

### Радиальные трассы с введенными кинематическими поправками

Введение кинематических поправок можно рассматривать, как преобразование времен в глубины. Если кинематические поправки введены надлежащим образом, то на всех трассах должна наблюдаться одна и та же зависимость коэффициента отражения от глубины. Введение радиальных кинематических поправок происходит путем введения $z$ и исключения $t$ с помощью подстановки вида $tv = \sqrt{z^2 + x^2}$. На практике предпочитают вместо оси глубин пользоваться осью псевдоглубин, выраженных в времени пробега. Поэтому уравнение данного преобразования принимает вид $t = \sqrt{r^2 + x^2/v^2}$. Заменив $x$ на $rt$ получаем

$$t = \tau / \sqrt{1 - r^2/v^2}. \qquad (346)$$

Исследуя равенство (346), убеждаемся, что введение кинематических поправок в координатах радиальных трасс равно-

сильно равномерному сжатию временной оси $t$ и переводу ее в ось $\tau$. Величина сжатия определяется фиксированием положения параметра $r$, она не меняется со временем. Равномерность сжатия способствует определению и устранению влияния импульсоидов источника и кратных отражений. Любопытно отметить, что введение кинематических поправок в радиальные трассы сжимает время, а введение кинематических поправок в наблюдения при постоянном удалении приемника от источника неравномерно растягивает временную ось. На рис. 148 приведена полевая сейсмограмма до и после радиально-трассовой трансформации.

### Трассы Снеллиуса

Координатную систему радиальных трасс можно использовать независимо от того, какова скорость волн в земной среде. Она характеризуется некоторым фиксированным параметром Снеллиуса и особое преимущество имеет в случае однородной среды, когда вся энергия распространяется под каким-то фиксированным углом. По Оттолини, трасса Снеллиуса определяется, как такая траектория на плоскости $(x, t)$, приращение которой $p = dt\ dx$ будет постоянно, если скоростной закон имеет вид $v(z)$. Там, где скорость растет с глубиной, трассы Снеллиуса изгибаются вверх. Траекторию трассы Снеллиуса можно легко найти путем интегрирования лучевых уравнений

$$x = \int_0^z \operatorname{tg}\theta dz, \tag{347а}$$

$$t = \int_0^z dz\ v\cos\theta. \tag{347б}$$

Чтобы ввести кинематические поправки в трассы Снеллиуса, введем такую вертикальную псевдоглубину $t$, чтобы $dz = vd\tau$. Уравнения кинематических поправок в радиальные трассы принимают вид

$$x(p, \tau) = \int_0^\tau \left(pv^2/\sqrt{1-p^2v^2}\right) d\tau, \tag{348а}$$

$$t(p, \tau) = \int_0^\tau \left(1\ \sqrt{1-p^2v^2}\right) d\tau. \tag{348б}$$

Когда среда характеризуется слоистостью, теоретически трассы Снеллиуса имеют преимущество над радиальными. Но у них есть тот недостаток, что кривые могут разветвляться, т. е.

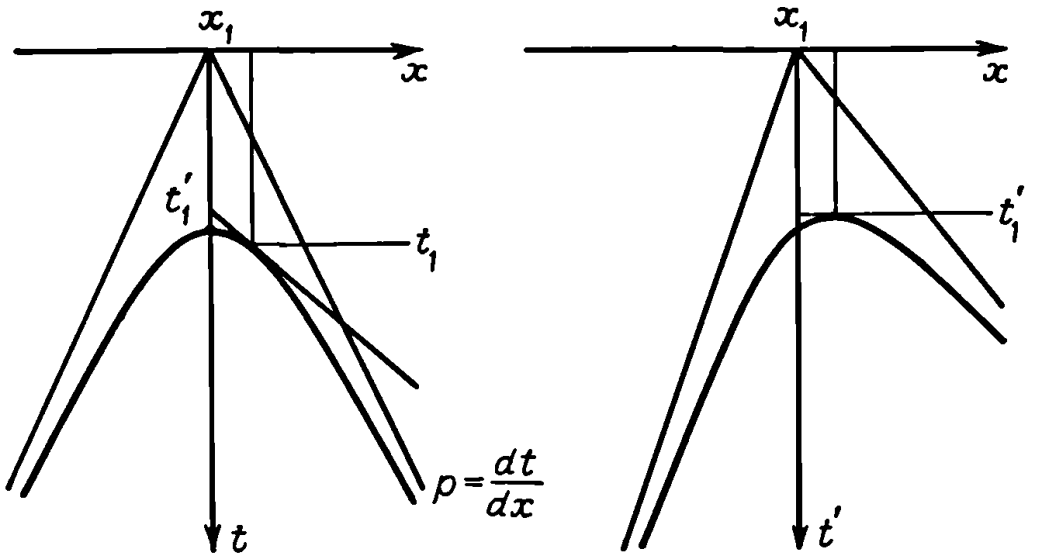



РИС. 149. Линейная кинематическая поправка превращает задачу определения касательных к построенным параллельным линиям в задачу нахождения местоположения вершин осей синфазности

данное преобразование может быть и неоднозначным. Поэтому на практике можно пользоваться упрощенной моделью скоростного распределения.

Подходя к этому вопросу более философски, можно сказать, что переход от трасс при постоянном удалении к радиальным велик, а от радиальных трасс к трассам Снеллиуса — не столь велик. Поскольку же радиальные трассы еще не нашли широкого применения, можно предположить, что практическая полезность трасс Снеллиуса может быть еще более ограниченной.

## 5.2. Направленное суммирование

Направленное суммирование представляет собой преобразование оси удалений. Оно напоминает управление пучком сейсмических волн. Термин направленное суммирование введен автором [126] в качестве составной части одного из методов миграционного преобразования, который будет описан в следующем разделе. Но не автор придумал концепцию направленного суммирования! Она имеет долгую предысторию, начиная с работ профессора Рибера в 30-х годах в США и профессора Рябинкина в СССР. Математическая концепция направленного суммирования содержится в преобразовании Радона [111].

Идея направленного суммирования напоминает способ организации наблюдений вокруг угла выхода, используемый при формировании трасс Снеллиуса. Согласно идее, заложенной в трассах Снеллиуса, производится отбор тех данных, которые связаны с некоторой заданной скоростью, определяющей местное приращение времени $p=dt/dx$. Направленное суммирование не предсказывает величину приращения, а извлекает ее

посредством фильтрации. Таким образом, независимо от того, известна скорость или нет, направленное суммирование ее определяет точно. Если скорость в среде известна, то направленное суммирование позволяет сразу же выполнять продолжение в нижнее полупространство, даже в тех случаях, когда имеет место интерференция волн с различными кажущимися скоростями, например, дифрагированных и кратно-отраженных.

### Направленное суммирование и линейные кинематические поправки

Выделение на полевых сейсмограммах или на разного рода сортировках трасс осей синфазности, характеризующихся определенным приращением $p=dt\,dx$, равносильно сканированию гиперболических осей синфазности с целью определения тех мест, где они касаются прямой с угловым коэффициентом $p$. Такой поиск и анализ будут облегчены, если перестроить наблюдения с учетом линейной кинематической поправки, т. е., если энергию, расположенную на удалении $x=g-s$ и на времени $t$ на плоскости $(x, t)$, переместить на время $\tau=t-px$ на плоскости $(x, \tau)$. Описанный процесс изображен на рис. 149. Операция введения линейной кинематической поправки преобразует все оси синфазности, имеющие приращение $p$ в пространстве $(x, t)$, в «горизонтальные» оси синфазности в пространстве $(x, \tau)$. Наличие горизонтальных линий времени облегчает поиск, выделение и измерение местоположения таких осей синфазности.

После введения линейных кинематических поправок вида $\tau=t-px$ компоненты наблюденных данных, которые имеют параметры Снеллиуса, приблизительно равные $p$, медленно изменяются вдоль оси $x$. Чтобы определить эти параметры, нужно воспользоваться низкочастотным фильтром на оси $x$, применяя его при каждом значении $\tau$. В предельном случае низкочастотной фильтрации извлекается среднее значение параметра $p$. Это обстоятельство приводит к идее направленного суммирования.

Чтобы выполнить операцию направленного суммирования, нужно ввести линейные кинематические поправки, рассчитанные по закону $\tau=t-px$, и затем просуммировать наблюдения по координате $x$. Эта операция аналогична суммированию вдоль наклонных прямых в плоскости $(t, x)$. В любом из указанных случаев вся сейсмограмма $P(x, t)$ превращается в единственную сейсмотрассу, представляющую собой функцию координаты $\tau$.

При направленном суммировании делается предположение о том, что сумма по удалениям, на которых производились наблюдения, является адекватным представлением операции

интегрирования по всем возможным значениям горизонтальной координаты. При направленном интегрировании по горизонтальной координате главный вклад в значение интеграла вносит та зона, в пределах которой путь интегрирования становится касательным к гиперболоидальным фронтам вступающих волн. С другой стороны, вклад в этот интеграл становится исчезающе малым в том случае, когда кривая годографа пересекается с кривой интегрирования. Объяснение этому факту состоит в том, что распространяющиеся волны не имеют составляющей с нулевой частотой.

Интенсивность вступления волны зависит от протяженности зоны касания. Френелево определение протяженности зоны касания базируется на условии половины длины волны. В однородной среде (но сложенной из множества горизонтально залегающих слоев) ширина зоны касания будет увеличиваться с ростом времени, так как гиперболы выполаживаются. Указанное увеличение происходит пропорционально величине $\sqrt{t}$, равной половине поправки за сферическое расхождение. Другими словами, операция направленного суммирования переносит нас из двухмерного пространства в одномерное, но величина $\sqrt{t}$ учитывает коническое расхождение волнового фронта в пространстве.

### Эллиптические направленные суммограммы

В результате направленного суммирования наблюденной сейсмограммы получается одиночная сейсмотрасса, характеризуемая параметром направленности $p$. В результате направленного суммирования при многих значениях $p$ получается направленная суммограмма. (Те, кто имеет сильную физико-математическую подготовку, заметят, что направленное суммирование преобразует сейсмические годографы посредством преобразования Лежандра. Исключительно ясное изложение общих вопросов, связанных с рассматриваемой темой, можно найти в книге Г. Б. Коллена «Термодинамика», 1960 г., стр. 90—95.)

Посмотрим, что случится со знакомым нам семейством гипербол вида $t^2v^2=z_j^2+x^2$ после выполнения направленного суммирования. Удобно исследовать уравнения окружности и гиперболы в параметрическом виде, т. е. вместо $t^2v^2=x^2+z^2$ воспользуемся равенствами $z=vt\cos\theta$ и $x=vt\sin\theta$, или $x=z\,\mathrm{tg}\,\theta$. Возьмем уравнение линейных кинематических поправок

$$\tau=t-px \qquad (349)$$

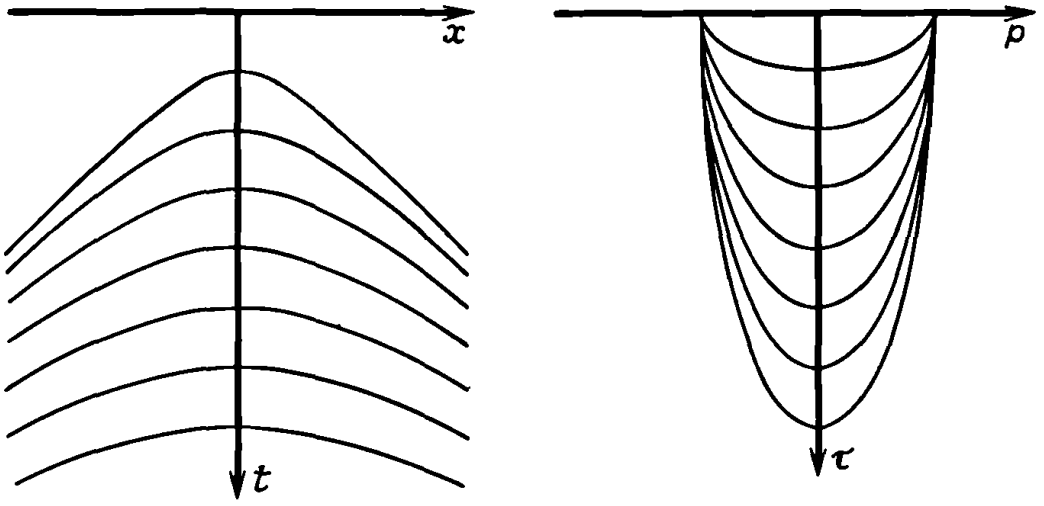



РИС. 150. Годографы сейсмограммы, получаемой в условиях однородной многослойной среды до (слева) и после (справа) направленного суммирования

и с помощью параметрических уравнений исключим из него $t$ и $x$:

$$\tau=\frac{z}{v\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{v}z\operatorname{tg}\theta=\frac{z}{v}\cos\theta, \tag{350}$$

$$\tau=(z/v)\sqrt{1-p^2v^2}. \tag{351}$$

После возведения в квадрат выражения (351) получаем знакомое уравнение эллипса

$$(\tau/z)^2+p^2=1/v^2. \tag{352}$$

На рис. 150 дано графическое изображение уравнения (352) для различных глубин залегания отражающей границы $z_j$.

### Двухслойная модель

На рис. 151 показаны времена пробега волн для двуслойной модели. Как обычно, в нижнем слое скорость выше. Слева изображены знакомые нам гиперболоидальные кривые. Строго говоря, верхняя кривая представляет собой точную гиперболу, а нижняя — всего лишь гиперболоидальна. Прямая, проходящая через начало координат, отражает энергию, распространяющуюся горизонтально вдоль поверхности земли. Прямая, расположенная несколько ниже, отображает головную волну. (В сейсморазведке ее часто называют преломленной, но такое название может привести к путанице.) Она представляет собой луч, падающий на залегающий ниже слой под критическим углом и затем распространяющийся по горизонтали вдоль границы раздела.

В правой части рисунка изображены эти же годографы, но после направленного суммирования. Отметим тот факт, что в пространстве $(x, t)$ годографы пересекаются, а в пространстве $(p, \tau)$ нет. Горизонтальная ось $p=dt/dx$ имеет физическую

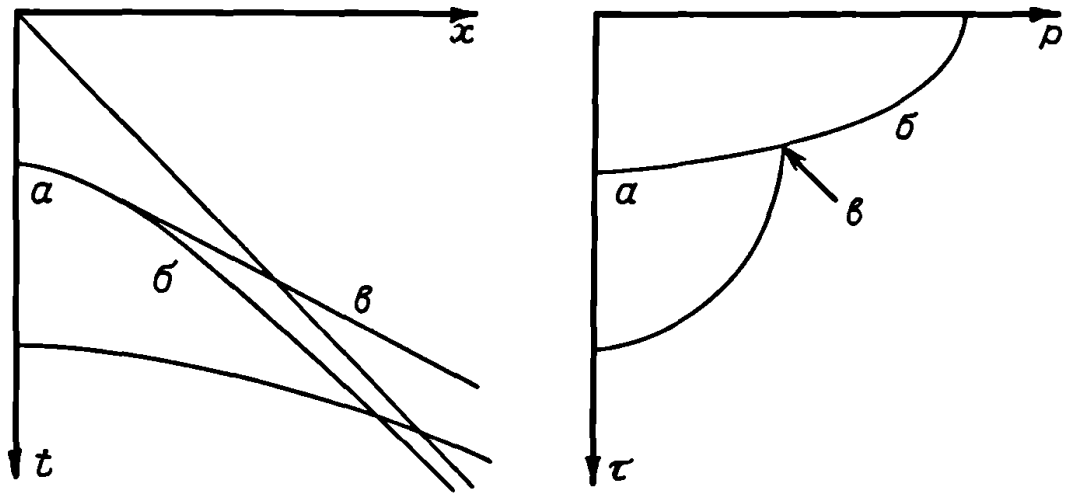



РИС. 151. Идентификация докритического (*а*) и закритического (*б*) отражений, а также головной волны (*в*)

размерность, обратную скорости. В самом деле, скорость распространения волн в каждом из слоев можно определить по соответствующему годографу как максимальное значение $p$ на его эллипсе. Головные волны, отображаемые прямыми в пространстве $(x, t)$, представляют собой в пространстве $(p, \tau)$ точки, расположенные в месте касания эллипсоидов. Верхняя кривая в пространстве $(p, \tau)$ представляет собой точный эллипс, а нижняя всего лишь эллипсоидальна.

### Определение интервальных скоростей по направленным суммам

Продолжение в нижнее полупространство волн Снеллиуса представляет собой просто операцию временного сдвига (см. раздел 1.5). Величина временного сдвига зависит только от угла выхода волн. Например, уравнение для подобного смешения в частотном представлении имеет вид

$$P(\omega, p, z_2) = P(\omega, p, z_1)\, e^{-i\frac{\omega}{v}\sqrt{1-p^2v^2}(z_2-z_1)}. \qquad (353)$$

Совершив продолжение вниз до первой отражающей границы, обнаруживаем, что первые отражения должны вступить в нулевой момент времени. При миграционном преобразовании обычно вводят во время запаздывание по отношению к лучу с нулевым наклоном. Поэтому операция продолжения вниз в запаздывающем времени выполаживает первое отражение, не изменяя при этом луч с нулевым наклоном. Процесс смещения во времени наблюденных данных с целью их выравнивания в линию на месте отражения от первого слоя показан на третьей врезке рис. 152. На первой врезке представлена скоростная модель, а на второй — направленные суммы на поверхности наблюдений. После того, как первая отражающая граница выровнена по времени, получаются данные, которые должны

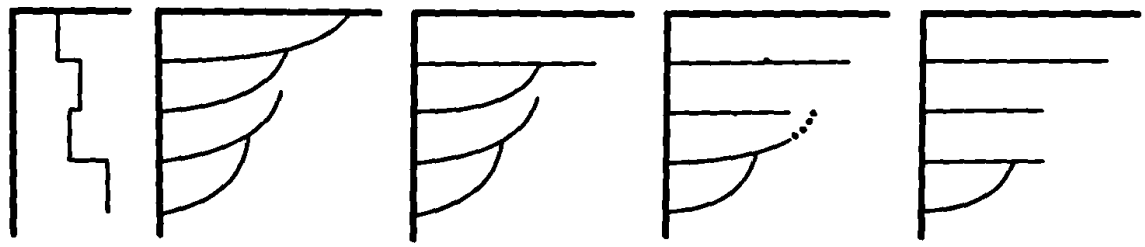


РИС. 152. Выполаживание по закону Шульца, выполняемое послойно

наблюдаться на подошве первого слоя. Теперь точным эллипсом становится следующая по глубине кривая со своей скоростью. Описанную выше процедуру выполняют на всех глубинах. Этот метод определения скоростей был предложен и опробован П. Шульцем [128].

Рис. 152 иллюстрирует затруднение, вызываемое присутствием неглубоко залегающего высокоскоростного слоя. Отражение от подошвы залегающего глубже низкоскоростного слоя дает неполный эллипс. Он не смыкается с лежащим выше эллипсом, так как имеет бóльшие размеры. В этом случае параметр $p$ не принимает больших значений (они помечены на рис. 152 точками), потому что они блокированы вышележащим высокоскоростным слоем (с низкими значениями $p$). Подобный обрыв по $p$ случается там, где волны в высокоскоростном слое распространяются в горизонтальном направлении. Поэтому на подошвах нижележащих низкоскоростных слоев головные волны не образуются.

Метод определения скоростей по эллипсам Шульца заключается в последовательном суммировании по сканирующим эллипсам, соответствующим различным скоростям, и в выборе суммы, характеризующейся наибольшим значением. Поэтому присутствие в верхней части разреза высокоскоростных слоев не должно служить препятствием для применения этого метода. Интересно отметить, что при непрерывном возрастании скорости с глубиной кривую зависимости скорости от глубины можно считать прямо с крайней правой врезки на рис. 152. Кривая зависимости скорости от глубины будет представлять собой линию, соединяющую концы (максимальные значения параметра $p$) отражений, т. е. головные волны.

### Определение граничных скоростей по головным волнам

Определение скоростей распространения волн в среде по наблюдениям головных волн — тема исследований в сейсмологии не новая. По головным волнам определяются скорости на конкретной глубине глубине залегания границы раздела слоев — и поэтому данный метод имеет разрешающую способность по глубине даже большую, чем метод интервальных скоростей (т. е. скоростей, характеризующих интервал глубин между двумя отражениями).

Скоростной анализ по головным волнам традиционно включает в себя опознавание (корреляцию) времен пробега. Если наблюдения осложнены помехами, то времена пробега трудно коррелировать. В работе [36] предложен новый метод, основанный на использовании самого волнового поля, а не только откоррелированных времен. Тем самым для скоростного анализа головных волн было сделано то же самое, что сделала миграция по волновому уравнению для отраженных волн.

Идею определения скоростей по рассеянным назад головным волнам на разрезах (см. раздел 3.5) можно применить и к обыкновенным головным волнам, наблюдаемым на сейсмограммах общей средней точки. На таких сейсмограммах есть дополнительная информация, которой нет на разрезах и которая свидетельствует о том, что операция продолжения в нижнее полупространство фокусирует энергию на нулевых удалениях. Фокус не есть какая-то безликая точка. Пусть исходные данные состоят только из одной головной волны, без отражения. В результате продолжения вниз получим фокус на нулевом удалении. Фокус представляет собой концентрированное пятно энергии, ориентированное с таким же градиентом $dt/dh$, что и исходная несфокусированная головная волна. Операция суммирования через фокус по всем возможным направлениям (направленное суммирование) преобразует данные в координатах $u(h, \tau)$ в пространство кажущихся скоростей $\bar{u}(p, \tau)$. Скорость в среде на псевдоглубине $\tau$ определяется в том месте, где находится концентрированная сейсмическая энергия на плоскости $(p, \tau)$. Значение скорости находится прямо из соотношения $v(\tau) = 1\ p(\tau)$. По заданной функции $v(\tau)$ легко найти зависимость $v(z)$. Все указанные выше вычисления можно выполнить непосредственно с использованием глубинной координаты $z$ вместо координаты псевдоглубины $\tau$.

В действительности Клейтон и Макмечан выполняли операции продолжения вниз и направленного суммирования в обратном порядке. Они сначала производили направленное суммирование, а затем уж продолжали наблюдения в нижнее полупространство. В принципе названные процедуры можно выполнять в любой последовательности. Помните, что мы привязаны к правильным значениям скорости в среде. Направленное суммирование не зависит от скорости в среде, чего нельзя сказать о процедуре продолжения вниз. Направленное суммирование, если оно делается первым, нужно выполнять только один раз и именно поэтому упомянутые выше исследователи применяли указанный порядок операций. На рис. 153 и 154 показан один из примеров, заимствованных из работы [36]. На рис. 153, *а* изображена синтетическая сейсмограмма головной волны, причем графовывод сделан с введенными кинематическими поправками. Эти данные преобразованы путем направ-

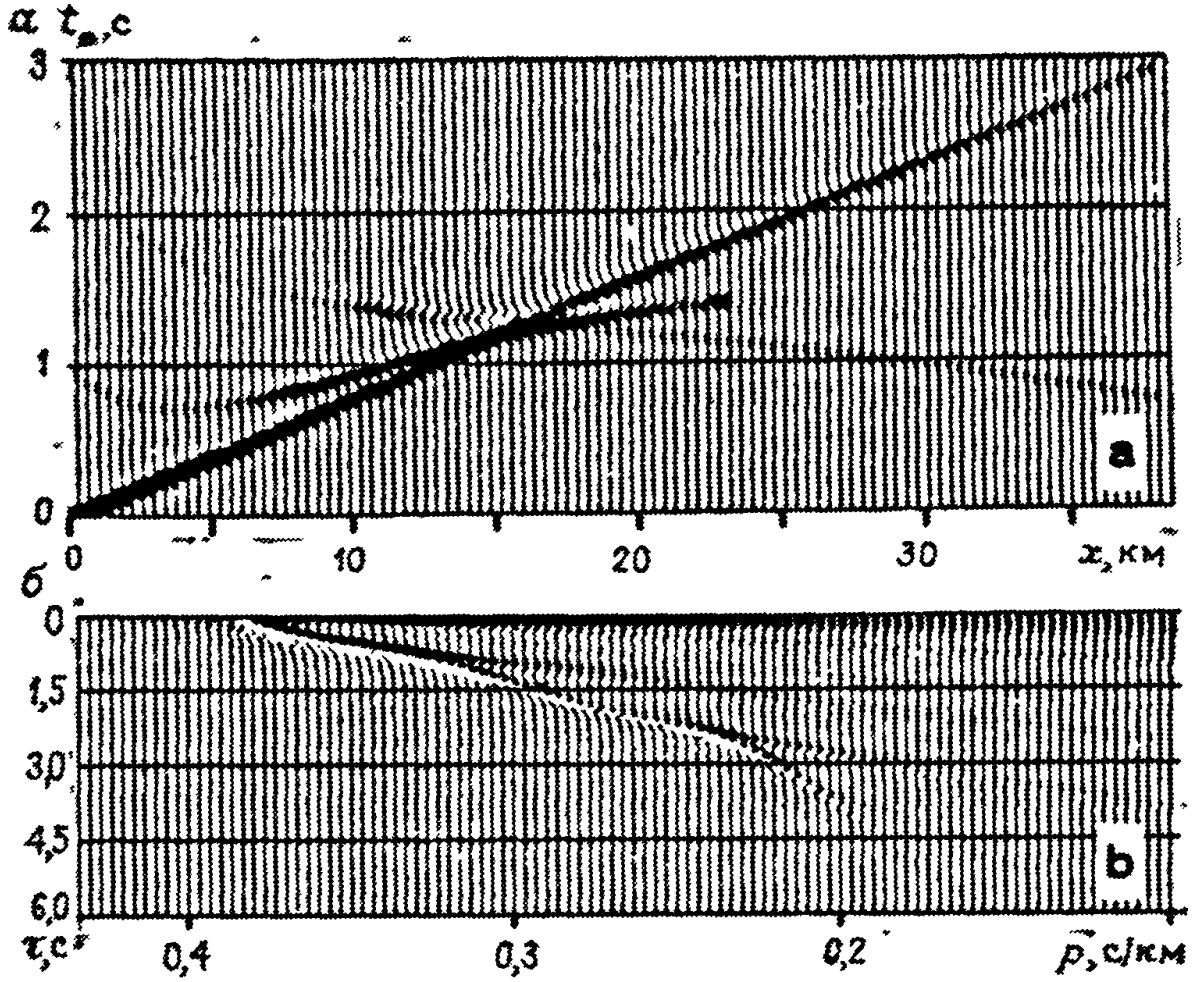



РИС. 153. Изображение синтетической сейсмограммы головной волны, выведенной с линейными кинематическими поправками (*а*) и изображение преобразования этих данных путем направленного суммирования (*б*)

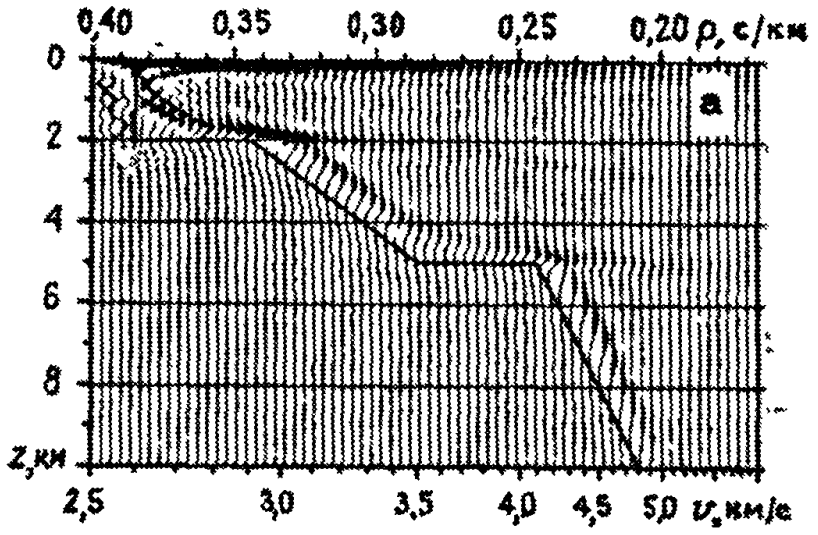



РИС. 154. Результат продолжения в нижнее полупространство направленно-отсуммированного волнового поля, изображенного на рис. 153, с графиком скоростной характеристики

ленного суммирования и изображены на рис. 153, *б*. Результат же продолжения в нижнее полупространство последних направленных сумм показан на рис. 154.

Сопоставим методики Клейтона Макмечана и Шульца. Шульц спрямляет отражения по способу, в котором используются эллипсы с большими значениями параметра *p*. Клейтон и Макмечан изучают лишь те части эллипсов, которые характеризуются наибольшими значениями *p*. Метод Шульца, основанный на использовании отражений, имеет то преимущество, что не подвержен осложняющим влияниям со стороны

высокоскоростных слоев. Недостатком этого метода является то, что при продвижении вниз требуется постоянно принимать решения. Клейтон и Макмечан дают в распоряжение интерпретатора некую плоскость с информацией, по которой интерпретатор сам выбирает нужную скоростную зависимость. Скоростное пространство Клейтона Макмечана представляет собой линейную обратимую функцию наблюденных данных. В разделе 5.4 будет дано описание линейного обратимого преобразования сейсмозаписей отраженных (но не головных) волн в пространство скоростей.

### Направленное суммирование и преобразование Фурье

Обозначим через $u(x, t)$ волновое поле. Регулируемая направленная сумма $u(p, \tau)$ данного волнового поля выражается аналитически соотношением вида

$$\bar{u}(p, \tau)=\int u(x, \tau+px)\,dx. \tag{354}$$

Интеграл по $x$ в (354) определяется при постоянном $\tau$, представляющем собой наклонную линию на плоскости $(x, t)$.

Направленное суммирование просто выражается в пространстве Фурье. Двухмерное фурье-преобразование волнового поля $u(x, t)$ определяется, как

$$U(k, \omega)=\iint e^{i\omega t-ikx}u(x, t)\,dx\,dt. \tag{355}$$

Вспомним определение параметра Снеллиуса в фурье-пространстве $p=k/\omega$ и воспользуемся им для того, чтобы исключить $k$ из двухмерного фурье-преобразования (355):

$$U(\omega p, \omega)=\iint e^{i\omega(t-px)}u(x, t)\,dx\,dt. \tag{356}$$

Изменим переменную интегрирования $t$ на $\tau=t-px$:

$$U(\omega p, \omega)=\int e^{i\omega\tau}\left[\int u(x, \tau+px)\,dx\right]d\tau. \tag{357}$$

Подставим определение (354) в (357):

$$U(\omega p, \omega)=\int e^{i\omega\tau}\bar{u}(p, \tau)\,d\tau. \tag{358}$$

Считайте $U(\omega p, \omega)$ одномерной функцией частоты $\omega$, которая получена на плоскости $(k, \omega)$ вдоль прямой $k=\omega p$.

Обратное фурье-преобразование уравнения (358) имеет вид

$$\bar{u}(p, \tau)=\int e^{-i\omega\tau}U(\omega p, \omega)\,d\omega. \tag{359}$$

Из уравнения (359) следует, что одиночную направленную сумму можно получить в результате операций, производимых в области Фурье. Сначала надо преобразовать $u(x, t)$ в $U(k, \omega)$. Затем найти $U(\omega p, \omega)$ по известной $U(k, \omega)$. Наконец совершается обратное преобразование координаты $\omega$ в координату $\tau$ и указанный процесс повторяется для всех интересующих нас значений $p$.

Кажется, что просто получить $U(\omega p, \omega)$ по $U(k, \omega)$, но на деле это самая трудная часть процесса. Прямая $k=\omega p$ не проходит сразу через все сеточные узлы (за исключением случая $p=\Delta t/\Delta x$). Поэтому необходимо выполнить некоторый объем интерполяционных вычислений. Как мы уже убедились на примере вычислительных искажений искусственного происхождения, которые возникают в процессе миграционного преобразования Столта, интерполяцию в фурье-представлении не следует выполнять небрежно. Советы по выполнению интерполяции можно найти в разделе 4.5.

На практике применяют как уравнение (354), так и уравнение (359). В уравнении (354) лучше осуществляется контроль над эффектами усечения и недостаточно плотной дискретизации. В случае же обработки больших массивов наблюдений рекомендуется применять уравнение (359), так как оно характеризуется гораздо большим быстродействием.

### Обратное направленное суммирование

Томография, применяемая в медицине, базируется на той же самой математике, как и обратное направленное суммирование. Проще говоря, (двухмерная) томография, или обратное направленное суммирование представляет собой восстановление функции по линейным интегралам, проходящим через нее. Формула обратного направленного суммирования вытекает из определения двухмерного фурье-интегрирования:

$$u(x, t)=\int e^{-i\omega t}\left[\int e^{ikx}U(k, \omega)\,dk\right]d\omega. \qquad (360)$$

Подставим $k=\omega p$ и $dk=\omega dp$ в уравнение (360). Заметим, что при отрицательных $\omega$ интегрирование по $dp$ производится от положительных значений к отрицательным, а не наоборот. Чтобы сохранить операцию интегрирования в своем традиционном варианте, когда переменная изменяется от отрицательных значений к положительным, введем абсолютное значение $|\omega|$. (В более общем случае изменение переменной объемного интегрирования приводит к якобиану преобразования.) Таким образом, имеем

$$u(x, t)=\int e^{-i\omega t}\left[\int e^{i\omega px}U(\omega p, \omega)|\omega|\,dp\right]d\omega, \qquad (361)$$

$$u(x, t)=\int\left\{\int e^{-i\omega t}\left[U(\omega p, \omega)e^{i\omega px}|\omega|\right]d\omega\right\}dp. \qquad (362)$$

Заметьте, что в уравнении (362) в фигурных скобках содержится обратное фурье-преобразование произведения трех функций частоты. Произведение трех функций в частотной области эквивалентно свертке во временной. Из этих трех функций первая $-U(\omega p, \omega)$ — согласно (359) представляет собой фурье-преобразование направленной суммы. Вторая является операто-

ром задержки $e^{i\omega px}$, т. е. импульсной временной функцией в момент времени $px$. Третья представляет собой фильтр по абсолютной частоте $|\omega|$, называемый также ро-фильтром. Ро-фильтр не зависит от $p$, поэтому его можно отделить от операции интегрирования по $p$. Обозначим символом «*» операцию свертки. Введем задержку $px$ в качестве сдвига аргумента. Наконец получаем уравнение обратного направленного суммирования

$$u(x, t)=\mathrm{po}(t)*\int \bar{u}(p, t-px)\,dp. \tag{363}$$

Любопытно, что операция, обратная направленному суммированию (354), в сущности представляет собой еще одну операцию направленного суммирования (363) с изменением знака.

### Суперпозиция плоских волн

Уравнение (363) описывает простую суперпозицию плоских волн. Чтобы последнее утверждение стало понятным, сначала освободимся от ро-фильтра с помощью определения вида

$$\tilde{u}(p, \tau)=\mathrm{po}(\tau)*\bar{u}(p, \tau). \tag{364}$$

Убеждаемся, что уравнение (364) представляет собой нечто большее, чем просто определение, а именно, что функцию $\tilde{u}(p, \tau)$ можно толковать как плоско-волновой спектр. После подстановки определения (364) в уравнения (363) и (354) получаем еще одну пару преобразований:

$$u(x, t)=\int \tilde{u}(p, t-px)\,dp, \tag{365}$$

$$\tilde{u}(p, \tau)=\mathrm{po}(\tau)*\int u(x, \tau+px)\,dx. \tag{366}$$

Чтобы убедиться в том, что истолкование функции $\tilde{u}(p, \tau)$ в качестве спектра плоских волн верно, предположим, что $u(p, \tau)$ является импульсной функцией вида $\delta(p-p_0)\delta(\tau-\tau_0)$ и подставим ее в (365). В результате получим, как и ожидалось, импульсную плоскую волну $u(x, t)=\delta(t-p_0x-\tau_0)$.

### Коэффициенты отражения сферических и плоских волн

Амплитуды отраженных волн, которые наблюдаются на полевых сейсмограммах, подвержены воздействию многих факторов. Предположим, что можно вводить поправки за сферическое расхождение волны, за коэффициенты прохождения через слои пород, за кратные отражения внутри слоев и т. д. То, что останется после ввода всех мыслимых поправок, будет называться коэффициентом отражения сферической волны. Коэффициенты отражения сферических волн не совпа-

дают с коэффициентами отражения плоских, расчет которых дан в работе [53] или же выражается уравнением Цепритца [154]. Теоретический анализ поведения коэффициентов отражения всегда базируется на преобразовании Фурье. Уравнения (365) и (366) устанавливают связь между коэффициентами отражения плоских и цилиндрических волн. Вопросы перехода от цилиндров к сферам изложены в данной книге дальше.

### Ро-фильтр

При проведении производственной обработки данных фильтром зачастую пренебрегают, так как его можно включать в прочие фильтрующие эффекты, имеющие место в процессе регистрации и обработки наблюдений. Однако нельзя считать, что он вообще не ведет ни к каким последствиям. Интегрирование при выполнении направленного суммирования усиливает низкие частоты, а ро-фильтр возвращает их к своему надлежащему уровню. Исследуем его действие. Ро-фильтр имеет такой же спектр, как и производная по времени, но их временные функции весьма различаются между собой. Конечно-разностное представление производной по времени коротко, оно равно всего лишь $\Delta t$. Из-за наличия угла функция ро-фильтра обладает большой длительностью во времени. Фурье-преобразование ядра Гильберта $-1/t$ имеет вид $i\,\mathrm{sgn}(\omega)$. Заметим, что $|\omega| = (-i\omega) \times \mathrm{sgn}(\omega)$. Во временном представлении это означает, что $d/dt(-1/t) = 1/t^2$, поэтому $\mathrm{po}(t) = 1/t^2$.

Иная точка зрения заключается в том, что ро-фильтр следует делить на две части, при этом одна его половина будет входить в прямую направленную сумму, а другая — в обратную. В таком случае направленное суммирование не приведет к изменению спектра мощности наблюденных данных. Одним из интересных способов разбиения $|\omega|$ является представление этой функции в виде $|\omega| = \sqrt{-i\omega}\sqrt{i\omega}$. В разделе 4.6 было показано, что $\sqrt{-i\omega}$ представляет собой причинную функцию времени, а $\sqrt{i\omega}$ — антипричинную. Подробности о направленном суммировании можно найти в работе [110].

На практике направленное суммирование оказывается не столь чисто обратимым, как двухмерное преобразование Фурье, поэтому часто прибегают к приемам итерации и оптимизации.

#### Упражнения

1. Предположив, что $v(z) = \mathrm{const}$, докажите, что ширина зоны Френеля возрастает пропорционально $\sqrt{t}$.

2. При заданной функции скорости $v(z)$ получите зависимость ширины зоны Френеля от $t$.

## 5.3. Волны Снеллиуса и косоугольные координаты

Направленные суммы тесно связаны с волнами Снеллиуса. Но в этом факте содержится нечто большее, чем простая его констатация. Можно направленно просуммировать три разных вида сейсмограмм — общей точки взрыва, общей точки приема и общей средней точки — и в каждом отдельном случае смысл направленной суммы будет иной.

Волну Снеллиуса можно синтезировать путем направленного суммирования обыкновенных наблюдений отраженных волн. Волны Снеллиуса поддаются описанию с помощью теории распространения волн. Волновое уравнение, описывающее волну Снеллиуса, можно записать, несмотря на все сложности, обусловленные латеральными вариациями скоростей, наличием многократных отражений и поперечных волн, и даже в условиях одновременного присутствия всех упомянутых осложнений. Сопоставьте это с суммой ОГТ в условиях, когда операция продолжения в нижнее полупространство уже представляет собой аппроксимацию даже в однородной по скоростям среде. Конечно, всегда можно вернуться к анализу наблюдений в пространстве координат источник — приемник. Но направленная сумма прежде всего сумма, а это означает, что некоторое ослабление помех и сжатие исходных наблюдений уже произошло.

### Информация о волнах Снеллиуса, содержащаяся в полевых наблюдениях

Принцип суперпозиции позволяет формировать импульсную функцию путем наложения друг на друга синусоид всевозможной частоты. Одно из обобщений указанного принципа на трехмерное пространство состоит в формировании точечного источника посредством суперпозиции плоских волн, распространяющихся во всех направлениях. Рассуждая по аналогии, можно утверждать, что любая плоская волна может быть представлена суперпозицией множества вторичных точечных источников Гюйгенса. Волну Снеллиуса можно смоделировать посредством подходящей суперпозиции, называемой направленной суммой волн, возникающих от точечных источников и регистрируемых в сейсморазведке.

Представим себе, что все взрывы, распределенные по сейсмическому профилю, произведены в одно и то же время. В этом случае падающая волна будет приблизительно плоской. (Пренебрежем тем фактом, что реальный мир трехмерный, а не двухмерный.) Регистрируемые при таком полевом эксперименте наблюдения можно легко смоделировать по обыкновенным данным путем простого суммирования волнового поля $P(s, g, t)$ по всем значениям $s$. Трассы сейсмограммы общей точки

приема можно суммировать при этом без ввода кинематических поправок.

Чтобы смоделировать проходящую волну Снеллиуса, падающую под углом от вертикали, следует в последовательность взрывов ввести задержки, рассчитанные согласно некоторому заранее заданному параметру $p_s = dt/ds$ (чем будет достигнуто соответствие с сверхзвуковым самолетом).

Что же получается, если наблюдения суммируются по координате сейсмоприемников, а не пунктов возбуждения? Результатом будут взрывы точечных источников, зарегистрированные приемными антеннами, очень точно настроенными на прием только вертикально распространяющихся волн. Ввод задержек времени в сейсмоприемники перед суммированием имитирует приемную антенну, которая регистрирует волну Снеллиуса, скажем, вида $p_g = dt/dg$, подходящую к поверхности наблюдений под углом $\sin\theta = p_g v$.

Интегрирование по какой-либо оси координат представляет собой крайний случай низкочастотной фильтрации по данной оси. Между двумя крайними случаями — точечных источников и плоских волн — располагается случай направленных излучателей и приемников.

В результате простого процесса распространения точечное возмущение, расширяясь, достигает такого места, где при наблюдении с некоторого расстояния волны кажутся почти плоскими, или снеллиусовыми.

Короче говоря, нисходящую волну Снеллиуса можно получить путем фильтрации по кажущимся скоростям в пространстве источников, а восходящую — путем фильтрации по кажущимся скоростям, выполняемой в пространстве сейсмоприемников.

### Мьютинг и регистрация наблюдений

Основная задача мьютинга состоит в исключении низкоскоростных поверхностных волн. Обычно мьютинг осуществляется способом, описанным в разделе 3.5, т. е. путем умножения на весовую функцию, которая обнуляет наблюдения, соответствующие некоторому значению, превышающему $(g-s)/t$. Часто вместо весовой функции, применяют фильтр кажущихся скоростей. До того как стали применять современные очень плотные системы наблюдений, часто оказывалось, что низкоскоростные волны-помехи подвергались воздействию искажений дискретизации самой расстановкой сейсмоприемников и поэтому нельзя было провести эффективную фильтрацию по кажущимся скоростям. Если угол выхода волны недостаточно близок к вертикальному, т. е., если производная $dt/dg$ недостаточно мала, то волны могут и не подойти к расстановке,

отразившись от исследуемого объекта. Применить фильтрацию по координате источников к данным взрывной сейсморазведки не столь просто, как фильтрацию по координате сейсмоприемников, так как в первом случае наблюдения регистрируются с недостаточной плотностью. Будьте осторожны и не ошибитесь, решив, что подобную фильтрацию по кажущимся скоростям можно выполнять по сейсмограммам общей средней точки. Поверхностные волны-помехи рассеянного типа не имеют нормального кинематического приращения на сейсмограммах общей средней точки (см. раздел 3.2).

Рассеяние волн на морском дне бывает столь сильным, что оно плохо подавляется традиционными приемами машинной обработки. Причина последнего изложена в разделе 3.2: точечные рассеиватели создают гиперболические вступления, характеризующиеся крутыми углами наклона осей синфазности и поэтому их скорости суммирования ОСТ ближе к скоростям распространения волн в среде, нежели к скорости в воде. В данной ситуации нужно применять два вида фильтров кажущихся скоростей: один для подавления волн, покидающих источники, другой для подавления волн, подходящих к сейсмоприемникам под теми же углами.

Современные полевые группы сейсмоприемников осуществляют фильтрацию по пространственной частоте $k_x$. В наблюденных данных будет сохраняться большее количество высокочастотной энергии в том случае, когда в состав регистрирующей аппаратуры будут входить вместо фильтров по пространственной частоте $k$ фильтры кажущихся скоростей $(k/\omega)$. Можно надеяться на хорошую работу причинных фильтров кажущихся скоростей (см. раздел 2.5).

### Синтезирование волн Снеллиуса

Синтезируем с помощью полевых наблюдений нисходящую волну Снеллиуса, затем представим себе, как будет выглядеть восходящая и каким образом она донесет до нас информацию о глубинном геологическом строении среды.

При направленном суммировании берутся наблюденные по профилю данные $P(s, g, t)$, являющиеся функцией пикетов взрыва, пикетов приема и времени пробега, и они суммируются по координате источников. В результате синтезируется восходящая волна $U(g, t)$, которая зарегистрировалась бы при наличии падающей волны Снеллиуса. Именно так все должно происходить даже при наличии латеральных изменений скоростей и многократных отраженных волн.

Процесс суммирования довольно запутанный, так как в нем участвуют три типа времени: $t$ — время пробега, измеряемое по полевым сейсмограммам в предположении точечных источни-

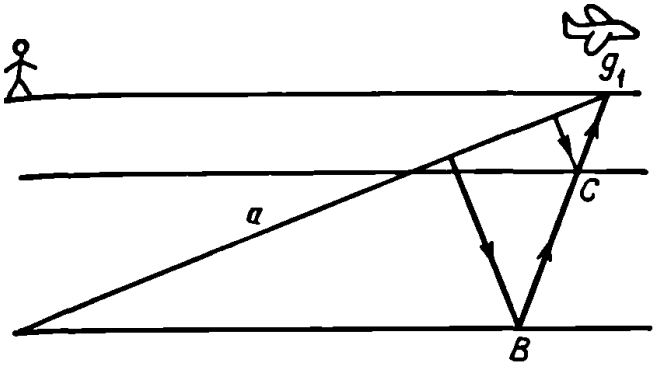



РИС. 155. Фронт волны Снеллиуса (*а*), отражающийся от двух границ, переносит информацию назад к приемнику $g_1$

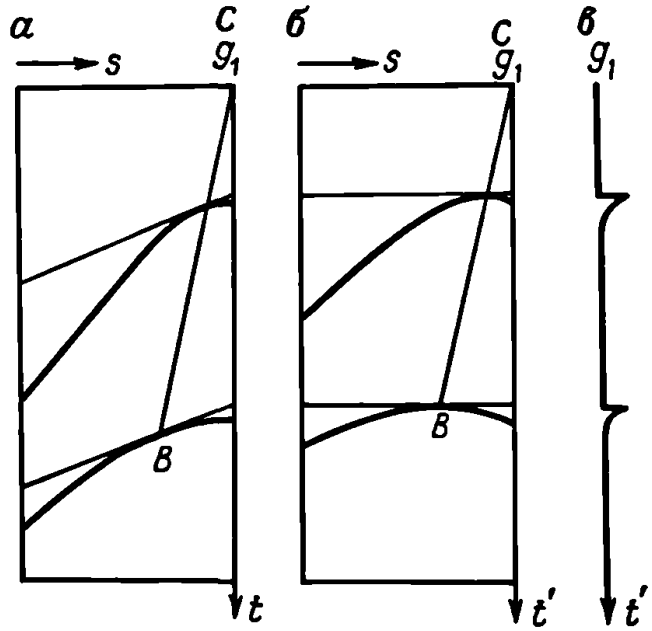



РИС. 156. Моделирование волны Снеллиуса по сейсмограмме ОТП:
*а* входные данные; *б* они же, смещенные для моделирования; *в* результат моделирования

ков; $t'$ — интерпретационное время, равное $t-p(g-s)$. Самые неглубокие отражающие границы наблюдаются сразу же после момента времени $t'=0$; $t_{\text{псевдо}}$ — время, используемое в псевдоэксперименте Снеллиуса с перемещающимся источником. Время в псевдоэксперименте в условиях горизонтально-слоистой среды имеет то странное свойство, что чем дальше вы перемещаете ось сейсмоприемников, тем позднее регистрируются отражения. Преобразуем время, наблюдаемое при полевом эксперименте, в интерпретационное с помощью соотношения

$$t'=t_{\text{псевдо}}-px=t-p(g-s). \qquad (367)$$

На рис. 155 изображена падающая волна Снеллиуса. На рис. 156 схематически изображена сейсмограмма общей точки приема, которую можно просуммировать с целью моделирования волны Снеллиуса, наблюдаемой в точке $g_1$ (см. рис. 155). Сейсмограмма рассчитана для случая двух горизонтально залегающих границ в разрезе. На рис. 156, *б* в указанные данные введены линейные кинематические поправки для подготовки их к образованию синтетической волны Снеллиуса путем суммирования по координате источников. На рис. 156, *а* приведена трасса волны Снеллиуса, зарегистрированная сейсмоприемником, расположенным в точке $g_1$. Сейсмический разрез, построенный по волнам Снеллиуса, состоит из совокупности подобных трасс, располагающихся друг за другом. Латеральный сейсмический снос точки *B* относительно *C* на рис. 155 и 156 одинаков, причем на рис. 156 он указан в двух случаях. В результате повторного суммирования для всех точек приема получаем синтетическую восходящую волну, образованную падающей волной Снеллиуса.

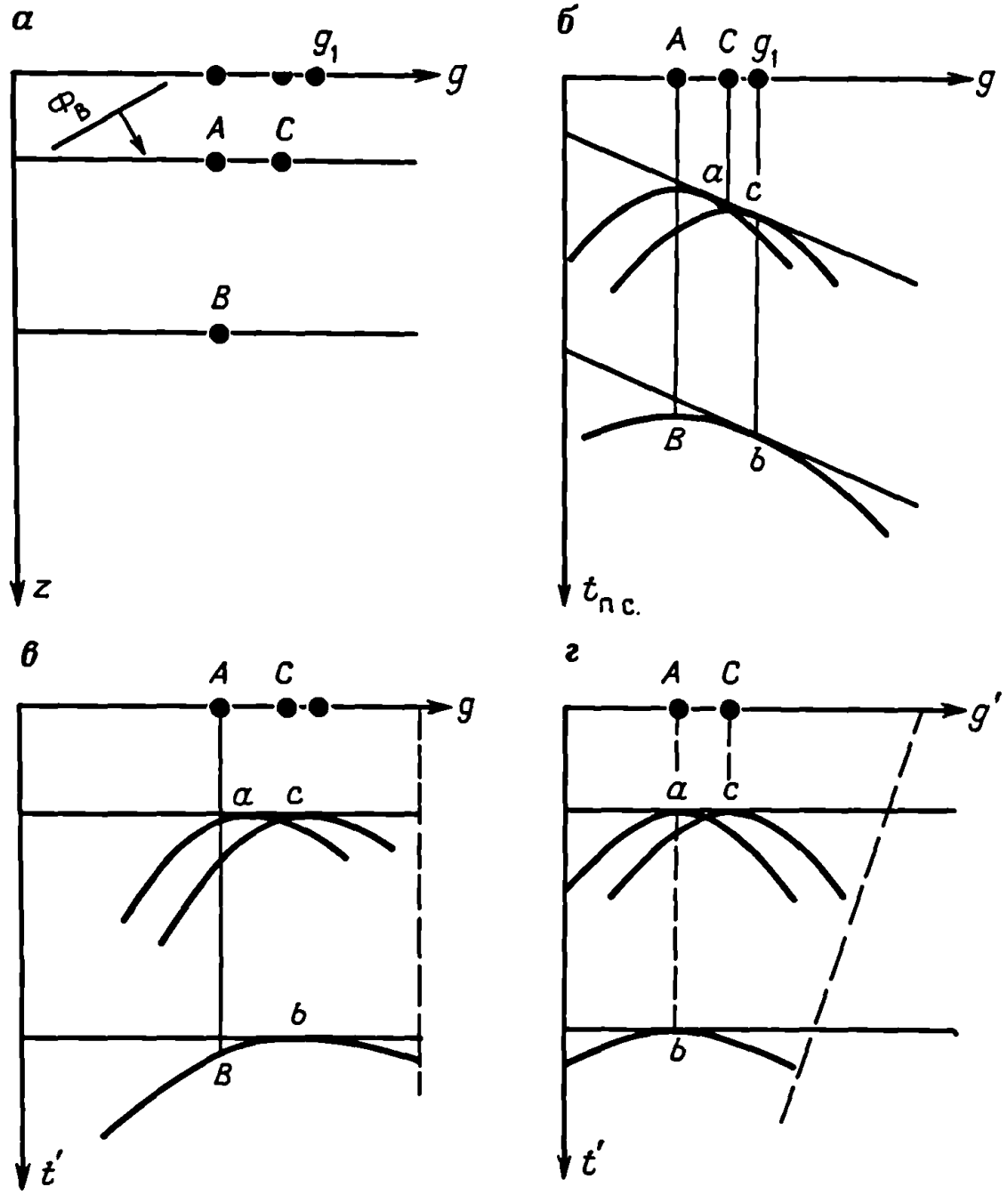



РИС. 157. Моделирование волн Снеллиуса:
*а* исходная модель; *б* волна Снеллиуса; *в* — частичная интерпретация; *г* полная интерпретация; $Ф_в$ фронт падающей волны

Переменную $t'$ можно назвать интерпретационной координатой, так как неглубоко залегающие отражающие границы наблюдаются сразу же после $t'=0$, а горизонтально залегающие пласты создают отражения, вступающие без приращения по горизонтали в отличие от псевдоснеллиусовых волн. В случае горизонтально залегающих пластов точность определения местоположения по латерали зависит от латерального изменения значений коэффициента отражения. Согласно рис. 155, информация о величине коэффициента отражения в точке $B$ регистрируется прямо в $g_1$, а не над точкой $B$, т. е. там, где она наблюдалась бы по данным суммирования. Таким образом, для полной интерпретации дополнительно требуется перемещать наблюденные данные в надлежащее место по латерали.

На рис. 157 приведены те же два горизонтально залегающие

пласта, что и на рис. 155 и 156, но добавлены аномальные значения коэффициентов отражения в точках $A$, $B$ и $C$. Точка $A$ расположена прямо над точкой $B$. Траектория волны, отраженной от точки $B$, направлена прямо к точке $C$ и, следовательно, к точке приема $g_1$. На рис. 157, *б*, *в*, *г* изображены дифракционные гиперболы, связанные с указанными выше тремя точками. На рис. 157, *а* показаны три точечных рассеивателя, расположенные на двух отражающих границах. На рис. 157, *б* изображена искомая волна Снеллиуса. На рис. 157, *в* — волна Снеллиуса после введения линейных кинематических поправок. На рис. 157, *г* приведена картина после преобразования в полные интерпретационные координаты: наконец *а*, *в* и *с* оказались расположенными в точках, в которых первоначально находились точки $A$, $B$ и $C$. Отметим то обстоятельство, что псевдоснеллиусовы волны, отражающиеся от горизонтально залегающих слоев, имеют приращение, равное $p$. Гиперболы, образующиеся на рассеивателях $A$, $B$ и $C$, касаются волн Снеллиуса в точках *а*, *в* и *с*. Заметим, что *в* и *с* лежат непосредственно под $g_1$, так как все они выстраиваются вдоль траектории луча, характеризующегося параметром Снеллиуса $p$. Точки $A$, $B$ и $C$ определяют местоположение вершин гипербол, поскольку самое раннее вступление должно располагаться непосредственно над точечным рассеивателем независимо от того, каким будет падающее на него волновое поле. Преобразование к интерпретационной координате $t'$ (см. рис. 157, *в*) имеет то достоинство, что волны, отраженные от горизонтально залегающих слоев, приобретают горизонтальное направление. Заметим, однако, что гиперболоиды стали косыми. Изучая вступления с небольшими приращениями, обнаруживаем информацию относительно аномальных коэффициентов отражения, полностью сконцентрированную в окрестности точек *а*, *в* и *с*, т. е. в точках, которые первоначально лежали на крыльях гипербол. Эти точки не попадут в геометрически правильные места, т. е. в точки $A$, $B$ и $C$, до тех пор, пока наблюдения не будут смещены влево до точки приема $g' = g - f(t')$. Тогда точка *а* будет лежать над точкой *в*. Вопрос о правильной величине смещения $f(t')$ связан со скоростным анализом, который будет рассмотрен в следующем разделе.

### Недостаток волн Снеллиуса

До тех пор, пока не было найдено уравнение с двумя квадратными корнями, считалось, что единственный правильный способ анализа сейсморазведочных данных состоит в разложении их на волны Снеллиуса. Поскольку ширина зоны Френеля составляет, видимо, около 10 , для этого требуется не так уж и много волн Снеллиуса. Из-за ограниченных мощ-

ностей имевшихся в 1970-х годах вычислительных машин приходилось рассматривать небольшое число разрезов. Каждую из волн Снеллиуса можно проанализировать с помощью уравнения с одним квадратным корнем и методами, описанными в работе [53]. В разделе 5.6 настоящей книги показано как можно ослабить кратные отражения. В теоретическом отношении данный подход был гораздо лучше суммирования ОГТ, результат которого вообще вряд ли поддается анализу. Одно из практических затруднений, возникающих при использовании падающих волн Снеллиуса, заключается в том, что волны могут усложниться, если встретятся с латеральной скоростной неоднородностью. Многие волны ведут себя подобно волнам Снеллиуса. Это побуждает к разработке такой координатной системы, которая была бы идеальной для волн Снеллиуса и хорошей для других волн, похожих на них.

### Неизменность по латерали

Приятной особенностью вертикально действующего источника плоских волн $p=0$ в условиях горизонтально слоистой среды является то, что возникающее при этом волновое поле инвариантно по латерали. Другими словами, наблюденное или теоретическое волновое поле в данном случае будет иметь вид $P(t)\times\text{const}(x)$. Волны Снеллиуса с любым заданным ненулевым значением $p$ также являются латерально неизменными. Это значит, что при соблюдении условий

$$t'=t-px, \tag{368а}$$

$$x'=x \tag{368б}$$

латеральная неизменность задается утверждением типа

$$P(x,\ t)=P'(t')\times\text{const}\ (x'). \tag{369}$$

Очевидно, что когда появляется возможность свести двухмерную задачу к одномерной, возникают огромные концептуальные преимущества, не говоря уж о выгодах, приобретаемых при дискретизации и вычислениях. Прежде чем перейти дальше, исследуем уравнение (369) до тех пор, пока не выясним почему волновое поле может изменяться по координате $x$, но оставаться при этом независимым от $x'$, хотя уравнение (368б) ставит между этими координатами знак равенства.

Координатная система (368) представляет собой запаздывающую, а не движущуюся систему координат. В геофизике твердой оболочки движущиеся координатные системы работают плохо. Функция скоростного распределения в земной среде никогда не зависит от времени, но в движущейся координатной системе она становится переменной во времени.

Нам необходимо получать изображения по наблюденным данным с использованием такой модельной скорости, которая являлась бы функцией пространственных координат. В принятой нами координатной системе скорость будет опорной, зависящей только от глубины.

### Координаты волны Снеллиуса

Волна Снеллиуса связана с тремя плоскостями, которые могут играть роль координатной системы, а именно, плоскостями слоев постоянной глубины $z$, включая поверхность земли, лучевой плоскостью и движущейся поверхностью фронта волны. При изменении скорости с глубиной плоскости искривляются. Координаты волны Снеллиуса определяются следующими уравнениями:

$$z'(z, x, t) = z(\cos\theta)/v, \tag{370а}$$

$$x'(z, x, t) = z\,\mathrm{tg}\,\theta + x, \tag{370б}$$

$$t'(z, x, t) = z(\cos\theta)/v - x(\sin\theta)/v + t. \tag{370в}$$

Уравнение (370а) просто определяет глубину через время пробега с помощью вертикальной фазовой скорости, найденной по наблюдениям в скважине. Границы раздела внутри земной среды представляют собой плоскости с постоянной координатой $z'$.

Считая определяемую уравнением (370б) координату $x'$ постоянной, например, $x_0$, получаем уравнение луча в виде $(x - x_0)/z = -\mathrm{tg}\,\theta$. Задавая различные значениях $x_0$, получим различные лучи.

Приняв определяемую уравнением (370в) координату $t'$ постоянной, получаем уравнение движущегося фронта волны. Чтобы убедиться в этом, положим $t' = t_0$ и заметим, что при постоянной координате $x$ наблюдается скорость по измерениям в скважинах, а при постоянной глубине $z$ наблюдается скорость самолета.

С математической точки зрения одно уравнение с тремя неизвестными определяет плоскость. Поэтому, приравняв левую часть любого из уравнений (370а, б, в) к постоянной величине, получаем уравнение, определяющее плоскость в пространстве $(z, x, t)$.

Рассмотрим случай пересечения двух плоскостей. Оставаться на фронте волны можно только при соблюдении равенства $dt' = 0$. С помощью уравнения (370в) получаем

$$dt' = 0 = (\cos\theta/v)\,dz - (\sin\theta/v)\,dx + dt. \tag{371}$$

Объединив уравнение постоянного фронта $dt' = 0$ с уравнением постоянной глубины $dz' = dz = 0$, приходим к знакомому соотношению

$$dt/dx = p. \qquad (372)$$

Если координатные плоскости не ортогональны, то такую координатную систему называют аффинной. При наличии аффинных координат, наподобие (370), не возникают затруднения при вычислениях, но зато часто запутываемся мы сами. Например, при просмотре сейсморазведочных наблюдений на море в виде кинофильма перед нашими глазами проходит последовательность плоскостей $(h, t)$. Последовательные плоскости совпадают с последовательными взрывами. Поэтому, когда мы хотим применить ортогональные координаты $(y, h)$ или $(s, g)$, наблюдения изображаются на плоскости $(s, h)$. При работе с аффинными координатами следует забыть о координатной оси и вместо нее использовать перпендикулярную к ней плоскость. Ось пунктов возбуждения $s$ можно представить в виде плоскости постоянной точки приема, скажем, $cg$. Поэтому, на мой взгляд, упомянутый выше кинофильм наблюдений на море происходит в пространстве с координатами $(cs, ch, ct)$. В нем поперек экрана перемещается другая плоскость — в действительности целое семейство плоскостей — плоскостей постоянной средней точки $cy$, причем вместе с «текстурой» исходных данных (см. раздел 3.0).

Чтобы определить координаты Снеллиуса для случая, когда скорость зависит от глубины, нужно тщательно проинтерпретировать соотношения (370). Сначала нужно выразить все углы через $p$, прибегнув к подстановке Снеллиуса вида $\sin\theta = pv(z)$, затем $z$ нужно везде заменить на интеграл по $z$.

### Волны Снеллиуса в фурье-пространстве

Цепное правило нахождения частных производных гласит, что

$$\begin{bmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_t & x'_t & z'_t \\ t'_x & x'_x & z'_x \\ t'_z & x'_z & z'_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{t'} \\ \partial_{x'} \\ \partial_{z'} \end{bmatrix}. \qquad (373а, б, в)$$

В пространстве Фурье уравнения (373а) и (373б) можно проинтерпретировать, как

$$-i\omega = -i\omega', \qquad (374а)$$

$$ik_x = +p\omega' + ik'_x. \qquad (374б)$$

Особенный интерес представляют волны, которые выполаживаются после ввода кинематических поправок (т. е. становятся независимыми от $x'$). Для них справедливо равенство $\partial/\partial x' = ik'_x = 0$. Из уравнений (374а, б) получаем знакомое соотношение вида

$$p = k/\omega. \tag{375}$$

**Упражнения**

1. Объясните выбор знака оси $s$ на рис. 155.
2. Уравнение (370) получено для восходящей волны Снеллиуса. Какая координатная система будет подходящей для падающих волн Снеллиуса?
3. Выразите скалярное волновое уравнение в координатной системе (370). Не принимайте во внимание первые производные.
4. Выразите дисперсионное соотношение скалярного волнового уравнения через переменные Фурье $(\omega, k'_x, k'_z)$.

## 5.4. Определение интервальных скоростей посредством ввода линейных кинематических поправок

Линейные кинематические поправки образуют основу для простого графического способа определения сейсмических скоростей, особенно эффективного при анализе наблюденных данных, которые уже обработаны вычислительной машиной, и существуют просто на листе бумаги. Кроме того, данный способ позволяет взглянуть на проблему определения скоростей по-новому относительно обычного приема машинного перебора сейсмозаписей по гиперболическим законам.

В конечном счете этот способ приводит к определению спектра скоростей, т. е. такой плоскости, на которой изображены сейсмические скорости, полученные в результате линейного обратимого преобразования исходных данных.

### Графический метод измерения интервальных скоростей

Волна, вышедшая из точечного источника, расположенного в $(x, z) = (0, z_s)$, и распространяющаяся со скоростью $v$, проходит через точку $(x, z)$ в момент времени $t$, причем

$$v^2 t^2 = x^2 + (z - z_s)^2. \tag{376}$$

В соотношении (376) координату $x$ следует заменить либо на полуудаление от источника по горизонтали $h$, либо на координату средней точки $y$. Тогда $t$ будет представлять собой время пробега волны в обе стороны (время отражения), скорость $v$ — половину скорости распространения в среде, а $(z - z_s)$ — расстояние до мнимого источника.

В результате дифференцирования уравнения (376) по $t$ (при постоянной глубине $z$) получаем

$$v^2 2t = 2x \frac{dx}{dt}, \tag{377}$$

$$v^2 = \frac{x}{t} \frac{dx}{dt}. \tag{378}$$

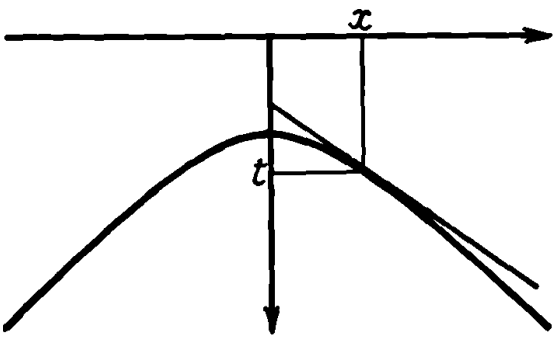



РИС. 158. Прямая, касательная к гиперболической оси синфазности. Угловой коэффициент $p=dt\,dx$ произволен и его можно выбрать таким, чтобы касание происходило в том месте, где отношение сигнал помеха высокое

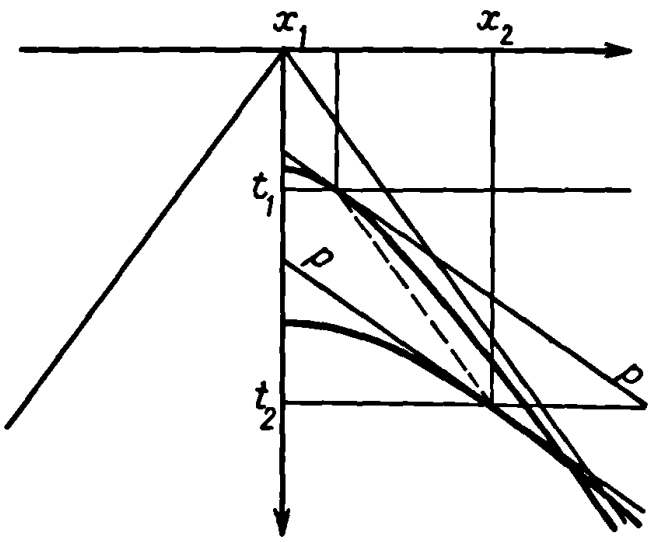



РИС. 159. Построение двух параллельных прямых на сейсмограмме ОСТ. Прямые ($p$) касательны к годографам отражений от двух горизонтальных границ (по Гонзалесу)

На рис. 158 показано, что все три параметра, необходимые для расчета скорости в среде по уравнению (378), легко определяются по сейсмограмме общей средней точки.

Уравнение (378) можно использовать для определения скорости даже в случае неоднородной среды. Когда среда стратифицирована по скоростям и скорости изменяются по закону $v(z)$, легко показать, что оценка скорости по (378) точно равна среднеквадратической скорости. Вспомним, прежде всего, что движущаяся волна при подходе к поверхности земли сохраняет постоянным параметр Снеллиуса $p=dt/dx$.

Наилучший способ задания скорости в слоистой среде — представление ее в виде некоторой функции $v'(z)$. Другой способ заключается в том, чтобы выбрать какое-то значение параметра Снеллиуса $p$ и начать спуск внутрь среды по соответствующему лучу. По мере проникновения луча в глубь земли от поверхности с координатами $z=0$ и $t=0$ луч двигается со скоростью, равной $v(p, t)$. Расчет $v(p, t)$ по $v'(z)$ и наоборот является элементарной задачей. Горизонтальное расстояние $x$, которое луч покрывает за время $t$, определяется временным интегралом от горизонтальной компоненты скорости, т. е., как

$$x=\int_0^t v(p, t)\sin\theta dt. \qquad (379)$$

Заменив $\sin\theta$ на $pv$ и вынеся постоянную $p$ за знак интеграла, получим

$$x=p\int_0^t v(p, t)^2\,dt. \qquad (380)$$

Учтем, что $p=dt/dx$, и подставим (380) в (378):

$$v^2_{\text{измер.}}=\frac{x}{t}\frac{dx}{dt}, \tag{381}$$

$$v^2_{\text{измер.}}=\frac{1}{t}\int_0^t v(p,\ t)^2\,dt, \tag{382}$$

что доказывает справедливость утверждения о том, что

$$v_{\text{измеренная}}=v_{\text{среднеквадратическая}}. \tag{383}$$

Уравнение (382) точное. Оно не связано с предположением о «малости координаты удаления приемника от источника» или же о «прямолинейности лучей».

Рассчитаем, далее, интервальную скорость. На рис. 159 показаны гиперболоидальные вступления отраженных волн, образованных на двух горизонтальных границах раздела. Построены две прямые с одинаковыми угловыми коэффициентами, равными $p$. Затем были измерены координаты точек касания $(x_1,\ t_1)$ и $(x_2,\ t_2)$. По уравнениям (381) и (379), используя индекс $j$ для обозначения $j$-й точки касания $(x_j,\ t_j)$, получаем

$$x_j\frac{dx}{dt}=\int_0^{t_j} v(p,\ t)^2\,dt. \tag{384}$$

Предположим, что скорость между последовательными отражениями равна постоянной интервальной $v_{\text{инт}}$, и вычтем (384) с индексом $j+1$ из (384) с индексом $j$. В результате имеем

$$(x_{j+1}-x_j)\frac{dx}{dt}=(t_{j+1}-t_j)\,v^2_{\text{инт}}. \tag{385}$$

Из последнего равенства получаем

$$v^2_{\text{инт}}=\frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j}\frac{dx}{dt}. \tag{386}$$

Итак, скорость распространения волны в вещественной среде между $j$-й и $(j+1)$-й отражающими границами может определяться непосредственно по квадратному корню из произведения двух угловых коэффициентов, содержащихся в уравнении (386) и обозначенных штриховой и сплошной прямыми на рис. 159. Преимущество проведения прямых по наблюденным данным от руки перед автоматическим анализом заключается в том, что можно графически оценить степень влияния помех на точность измерений и выбрать на сейсмограмме наилучшие удаления для этих измерений.

Если производить такие определения регулярно, то быстро обнаружится, что основные усилия затрачиваются на точное проведение двух прямых, касательных к осям синфазности отражений. При затруднениях оказывается более удобным перестроить наблюдения с учтенными линейными кинематическими поправками вида $t' = t - px$. После этого указанные прямые будут уже не наклонными, а горизонтальными, поэтому в качестве них можно будет использовать любую из марок времени. Задача определения положения точек касания сводится теперь к задаче определения положения вершин выпуклых осей синфазности, что и показано на рис. 160.

Уравнение (386), выраженное через время $t'$, принимает следующий вид:

$$v^2_{\text{инт}} = \frac{1}{\Delta t}\,\frac{1}{\Delta x}\,\frac{1}{p} = \frac{1}{\Delta t'/\Delta x + p}\,\frac{1}{p}. \qquad (387)$$

Скорость в среде измеряется так, как показано в правой части рис. 160, т. е. замеряется угловой коэффициент штриховой прямой, а именно, величина $\Delta t'/\Delta x$, и полученное значение подставляется в (387). (Значение параметра $p$ уже известно по величине линейной кинематической поправки, использованной при построении графика).

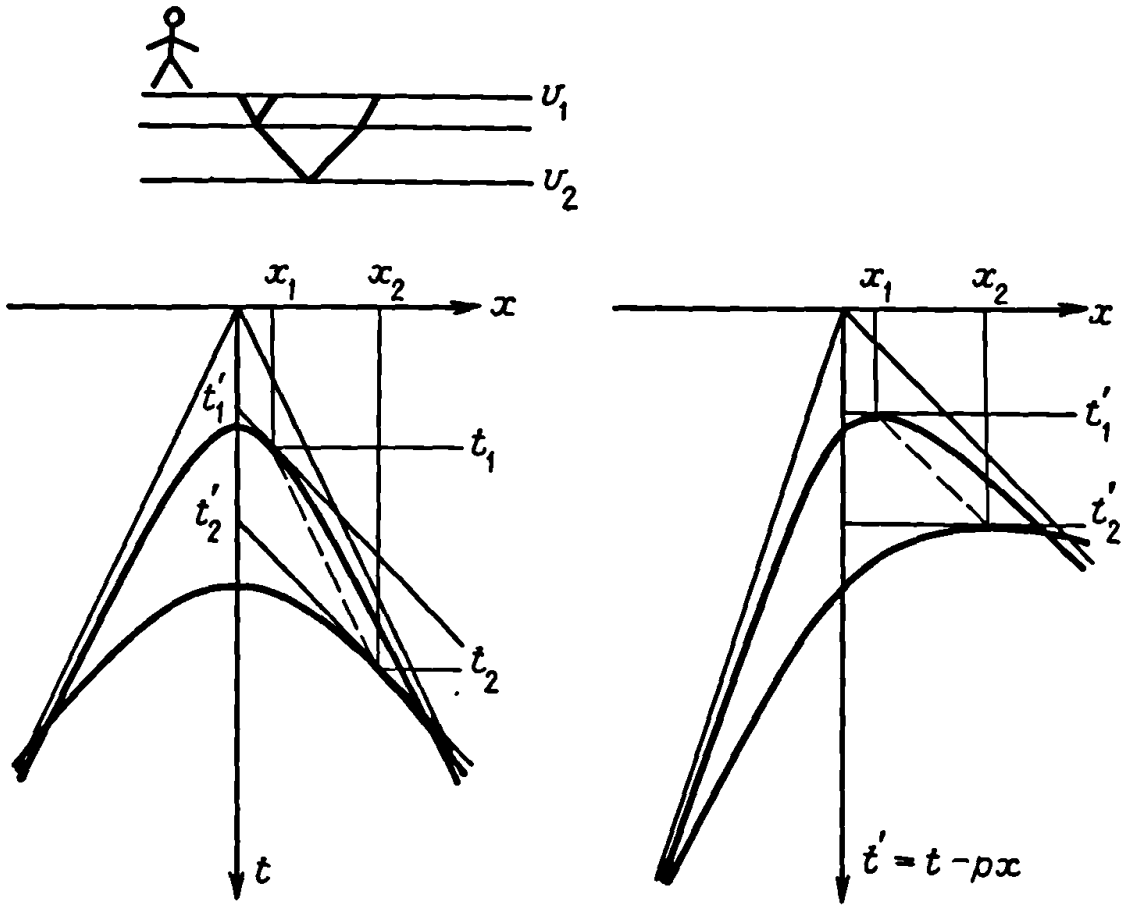



РИС. 160. Определение интервальной скорости с помощью линейных кинематических поправок (по Гонзалесу)

## Координаты общей средней точки волны Снеллиуса

Волновой анализ сейсмограмм общей средней точки представляет собой более консервативный подход к изучению сейсморазведочных данных, чем подход, базирующийся на использовании волн Снеллиуса. Достоинство анализа по координате общей средней точки заключается в том, что влияние углов наклона границ в среде имеет тенденцию проявляться главным образом по оси средних точек, а влияние сейсмической скорости проявляется в основном по оси удалений точки приема от источника. Наша непосредственная цель — поиск обратимого подхода к определению интервальных скоростей, базирующегося на волновом уравнении.

Недостатком анализа по координате общей средней точки является его нефизичность. Направленная сумма по сейсмограмме общей точки приема моделирует нисходящую волну Снеллиуса и можно надеяться на то, что удастся написать описывающее ее дифференциальное уравнение, причем неважно, что за этим последует — кратное отражение или латеральное изменение скоростей. Направленная сумма по сейсмограмме общей средней точки не моделирует ничего, что может быть физически реализуемо. Ничто не говорит о том, что существует дифференциальное уравнение в частных производных, годное для экстраполяции такой суммы. Последнее вовсе не означает, что координатная система общей средней точки в чем-то обязательно плоха, но оно заставляет нас проявлять должное уважение к подходу, который базируется на волнах Снеллиуса, несмотря на то, что он используется в производственной сейсморазведке не очень широко.

(Те, кто применяют направленное суммирование сейсмограмм общей средней точки, сразу же заметят, что его проще осуществлять, чем направленное суммирование наблюдений, отсортированных по признаку общей точки приема. Этот факт объясняется тем, что в общей средней точке вершины гиперболоидов должны приходиться на координату нулевого удаления от источника, положение зоны Френеля более предсказуемо, а также намного упрощаются проблемы, связанные с интерполяцией и пропущенными наблюдениями.)

Сейсмические наблюдения регистрируются в координатах времени, точки приема, точки возбуждения и глубины $(t, g, s, z)$. Дадим определение новой четырехкомпонентной системы. Координата средней точки определяется обычным способом:

$$y(t, g, s, z)=(g+s)/2. \tag{388}$$

Координата глубины, выражаемой через время пробега, определяется через вертикальную фазовую скорость, измеряемую при наблюдениях в скважине. Для того, чтобы максимально

сохранить традиционность обозначений, используем двусторонние времена пробега:

$$\tau(t, g, s, z)=2z(\cos\theta)/v. \tag{389}$$

Затем определим координату удаления от источника по поверхности наблюдений $h'$. Старым определением удаления пользоваться не будем. При пользовании данным методом источники и приемники не должны перемещаться прямо вниз — они движутся по направлению лучей. Такое возможно, если определить $h'$ следующим образом:

$$h'(t, g, s, z)=(g-s)/2+z\operatorname{tg}\theta. \tag{390}$$

При новом определении координаты $h'$ расстояние между источником и приемником при постоянной координате $h'$ уменьшается с глубиной.

Определим время линейной кинематической поправки (ЛКП) как время пробега при возбуждении точечным источником, уменьшенное на линейную кинематическую поправку. Следовательно, на любой глубине время линейной кинематической поправки равно $t-p(g-s)$. Так как $h'$ было определено как полуудаление на поверхности наблюдений, то и $t'$ определяется как поверхностное время линейной кинематической поправки, тогда время ЛКП на поверхности наблюдений определяется как

$$t'=t-p(g-s)+\tau. \tag{391}$$

Вы можете считать уравнение (391) «наклоном» временного запаздывания для случая восходящих волн и выразить это понятие в виде равенства $t'=t_{\text{лкп}}+z_{\text{накл}}/v$. Подходя формально, можно записать

$$t'(t, g, s, z)=t-p(g-s)+2z(\cos\theta)/v. \tag{392}$$

На рис. 161 дано геометрическое истолкование изложенных выше понятий.

Из геометрических соотношений, изображенных на рис. 161, можно сделать вывод, что скорость прямо определяется по количественной характеристике оси синфазности отраженной волны в некоторой точке с координатами $(h', t')$. Запишем уравнение для глубины залегания отражающей границы:

$$v(t'/2+ph')\cos\theta=\text{глубина отражателя}=h'/\operatorname{tg}\theta. \tag{393}$$

Воспользовавшись законом Снеллиуса для исключения углов, получим формулу для определения скорости:

$$v^2=\frac{1}{p}\frac{1}{p+t'\ 2h'}. \tag{394}$$

Она не противоречит уравнению (387).

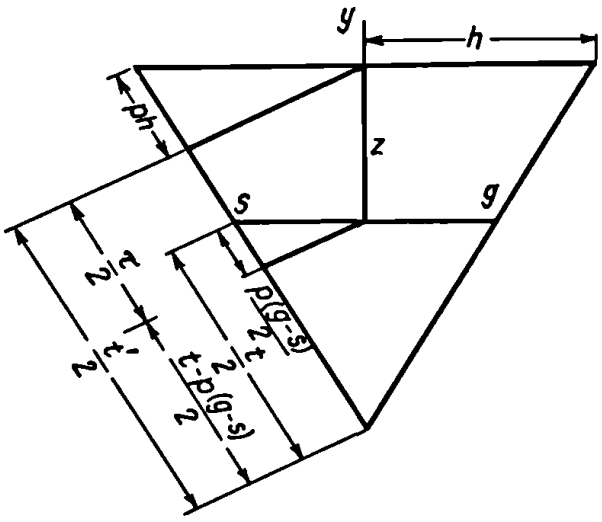



РИС. 161. Геометрическое представление координатной системы ОСТ ЛКП для описания волн, похожих на исходную волну Снеллиуса

Соберем приведенные выше определения вместе и учтем изменение скорости с глубиной путем замены $z$ интегралом по $z$:

$$t'(t, g, s, z)=t-p(g-s)+2\int_0^z[(\cos\theta)/v]\,dz, \tag{395а}$$

$$y(t, g, s, z)=(g+s)/2, \tag{395б}$$

$$h'(t, g, s, z)=(g-s)/2+\int_0^z \operatorname{tg}\theta\,dz, \tag{395в}$$

$$\tau(t, g, s, z)=2\int_0^z(\cos\theta)/v\,dz. \tag{395г}$$

Перед тем, как начать пользоваться этими уравнениями, нужно исключить из них все тригонометрические функции, прибегнув для этого к закону Снеллиуса для слоистых сред вида $\sin\theta(z)=pv(z)$. Во всем приведенном анализе параметр Снеллиуса $p$ представляет собой числовую постоянную.

Если принять во внимание $dt'/dz$ из (395а) и $dh'/dz$ из (395в), то снова можно прийти к уравнению для определения интервальной скорости (387):

$$dt'/dh'=2\cos\theta/v\operatorname{tg}\theta. \tag{396}$$

Исключив из него тригонометрические функции с помощью подстановки $pv=\sin\theta$, получим выражение для определения интервальной скорости

$$v^2=\frac{1}{p}\frac{1}{p+\frac{1}{2}(dt'\ dh')}. \tag{397}$$

На поверхности земли $z=0$ сейсморазведочные данные можно перевести в координатную систему (395), просто выбрав численное значение параметра $p$ и введя линейные кинемати-

ческие поправки. До сих пор не требовалось знать скоростное распределение $v(z)$. Затем наблюденные данные изучают с целью выявления вершинных частей косоугольных гипербол. Выявив вершины, с помощью уравнений (387), (394) или (397) можно получить значение скоростной функции и с ним начать операцию продолжения в нижнее полупространство.

Волны можно описывать либо в физических $(t, g, s, z)$, либо во вновь определенных $(t', y, h', \tau)$ координатах. При описании в физических координатах изображение находится в точке

$$t=0 \quad \text{и} \quad g=s. \tag{398а, б}$$

Чтобы выразить эти же условия в координатах Снеллиуса, нужно подставить (398) в (395а) и (395г). В результате получается то, что программисты называют условием остановки:

$$t'=\tau. \tag{399}$$

Именно на этой глубине скоростная информация должна оказаться сфокусированной наилучшим образом на плоскости $(h', t')$. Ниже приводятся некоторые уравнения для осуществления операции продолжения в нижнее полупространство.

### Дифференциальные уравнения и фурье-преобразования

Применение цепного правила отыскания частных производных приводит к следующему матричному уравнению:

$$\begin{bmatrix} \partial_t \\ \partial_g \\ \partial_s \\ \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_t & y_t & h'_t & \tau_t \\ t'_g & y_g & h'_g & \tau_g \\ t'_s & y_s & h'_s & \tau_s \\ t'_z & y_z & h'_z & \tau_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{t'} \\ \partial_y \\ \partial_{h'} \\ \partial_\tau \end{bmatrix}. \tag{400}$$

В наших обычных обозначениях фурье-представление производной по времени $\partial_t$ имеет вид $-i\omega$. Аналогично, $\partial_{t'}$ и пространственные производные $(\partial_y, \partial_{h'}, \partial_\tau, \partial_g, \partial_s, \partial_z)$ соответствуют $i(k_y, k_{h'}, k_\tau, k_g, k_s, k_z)$. Воспользовавшись фурье-переменными в векторах уравнения (400) и продифференцировав уравнения (395) с целью определения элементов в матрице (400), получаем

$$\begin{bmatrix} -\omega \\ k_g \\ k_s \\ k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 1\,2 & 1\,2 & 0 \\ p & 1\,2 & -1\,2 & 0 \\ (2\cos\theta)\ v & 0 & \operatorname{tg}\theta(2\cos\theta)\ v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega' \\ k_y \\ k_h \\ k_\tau \end{bmatrix}. \tag{401а, б, в, г}$$

Обозначим через $S$ синус угла выхода волны из источника, а через $G$ синус угла подхода волны к сейсмоприемнику. Если скорость $v$ известна, то эти углы поддаются непосредственному

определению по приращению времени на сейсмограммах общей точки приема и общей точки возбуждения. Аналогично, на разрезе постоянного удаления или на направленной сумме наблюдаемые приращения времени связываются с кажущейся скоростью, а на сейсмограмме общей средней точки с введенными линейными кинематическими поправками приращения времени характеризуют кажущееся приращение $H'$. Точные определения названных выше величин даются ниже:

$$S = vk_s/\omega, \quad G = vk_g\ \omega, \tag{402а, б}$$

$$Y = vk_y/2\omega, \quad H' = vk_{h'}/2\omega. \tag{402в, г}$$

С учетом последних определений уравнения (401б) и (401в) принимают вид:

$$G = pv + Y + H' = Y + (H' + pv), \tag{403а}$$

$$S = -pv + Y - H' = Y - (H' + pv). \tag{403б}$$

Знакомый нам угол приращения по горизонтальной координате $H$ связывается с остаточным углом приращения линейной кинематической поправки $H'$ соотношением $H' = H - pv$. Приравнивание $H'$ нулю означает приравнивание нулю $k_{h'}$ и, таким образом, указывает на интегрирование по $h'$, что в свою очередь указывает на направленное суммирование наблюдений с углом направленности, равным $p$. Небольшие значения величин $H'/v$ или $k_{h'}/\omega$ относятся к приращениям, близким к $p$.

### Возможности обработки

Уравнение с двумя квадратными корнями имеет вид

$$\frac{k_z}{\omega} = -\frac{1}{v}\left(\sqrt{1 - S^2} + \sqrt{1 - G^2}\right). \tag{404}$$

После подстановок (401а, г) и (402а, б) это уравнение записывается как

$$\frac{k_\tau}{\omega} = 1 - \frac{pv}{1 - p^2v^2}H' - \frac{1}{2}\left\{\left[1 - \frac{2pv(H' - Y) + (H' - Y)^2}{1 - p^2v^2}\right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{2pv(H' + Y) + (H' + Y)^2}{1 - p^2v^2}\right]^{1/2}\right\}. \tag{405}$$

Уравнение (405) представляет собой точное представление уравнения с двумя квадратными корнями в так называемых запаздывающих снеллиусовых координатах средней точки.

Координатная система (395) может описывать любое волновое поле в любой среде. Уравнения (395) особенно выгодно

применять в слоистых средах со скоростным распределением, близким к $v(z)$ для расчета лучей, которые приблизительно параллельны лучам с выбранными параметрами Снеллиуса $p$. Нет смысла использовать эти координаты в тех случаях, когда они не «подходят» к изучаемой волне. Подходят же те волны, которые характеризуются значениями $p$, близкими к выбранному. Это означает, что $H'$ не становится слишком большим. Возможны различные упрощающие разложения уравнения (405) в ряд. Существует множество перестановок величин трех ингредиентов: $pv$, $H'$ и $Y$. Рассмотрим две возможности.

Во-первых, любой массив наблюдений можно разложить по признаку приращения времени на многие массивы, каждый из которых отвечает некоторой узкой полосе в пространстве приращений. В качестве примера можно привести направленные суммы по сейсмограммам общей средней точки. Для любого из указанных массивов наблюдений координатной $H'$ можно вообще пренебречь. В таком случае уравнение (405) сведется к

$$\frac{k_\tau}{\omega}=1-\frac{1}{2}\left\{\left[1-\frac{-2pvY+Y^2}{1-p^2v^2}\right]^{1/2}+\left[1-\frac{+2pvY+Y^2}{1-p^2v^2}\right]^{1/2}\right\} \tag{406а}$$

или к

$$\frac{k_\tau}{\omega}=1-\frac{1}{2\sqrt{1-p^2v^2}}\left[\sqrt{1-(Y-pv)^2}+\sqrt{1-(Y+pv)^2}\right]. \tag{406б}$$

Описанный подход подобен использованному Р. Оттолини в своей диссертации [107].

Далее, найдем приближение к решению уравнения (405), относительно $Y$ и $H'$. Воспользуемся методикой разложения, предложенной в разделе 3.4. Первая часть разложения задается уравнением (406б). Затем положим $Y=0$ и сохраним в $H'$ все члены вплоть до квадратичных:

$$k_\tau/\omega=H'^2/2(1-p^2v^2)^2. \tag{407}$$

Приближенным решением уравнения (405) будет сумма (406б) и (407). Совсем не случайно, что в (407) нет линейных степеней координаты $H'$. Данная координатная система была сконструирована таким образом, чтобы энергия поблизости от выбранной модели ($Y=0$ и $H=pv$) не дрейфовала в плоскости $(h', t')$ в процессе продолжения в нижнее полупространство.

Идея скоростного спектра, выраженная в уравнении (407), заключается в использовании члена $H'$ с целью фокусировки данных на плоскости $(h', t')$. После фокусировки становится возможным отсчитывать значения интервальных скоростей непосредственно в виде угловых коэффициентов прямых, соединяющих оси синфазности на сейсмограммах. Этот подход использован в диссертации А. Гонсалеса [67].

**Упражнение**

На разрезе нулевых удалений выделена гипербола. Ее вершина прослеживается нечетко, но можно замерить координаты $(p, x, t)$ в двух местах. Чему равна скорость распространения волн в среде? Чему равна скорость распространения в среде при наличии тех же замеров, сделанных по полевой сейсмограмме (т. е., при постоянной $s$)?

## 5.5. Современные способы борьбы с кратными отражениями

Вблизи поверхности земли находятся различные неконсолидированные слои типа воды, почвы и так называемого выветрелого слоя. Различие между верхней частью разреза (ВЧР) и залегающими на больших глубинах породами, содержащими в себе нефть и природный газ, часто бывает настолько резким, что вызывает образование интенсивных кратных отражений. Такого рода резонансные явления не поддаются предсказанию и их невозможно объяснить с помощью методов, изложенных в предшествующих главах.

### Пример жесткого морского дна

На рис. 162 демонстрируются хрестоматийного качества кратные отражения от морского дна. Гиперболические оси синфазности, описываемые уравнением $v^2t^2-x^2=z_j^2$, появляются через равные промежутки $z_j=j\Delta z$, где $j=0, 1, 2, \ldots$. Никакой обработке, кроме умножения на корректирующую за сферическое расхождение поправку $t$, наблюдения не подвергались. Скорости распространения волн в воздухе и плотность воздуха меньше, чем у воды, а у последней почти всегда меньше, чем у слагающих дно осадков. Следовательно, следующие друг за другом кратные отражения почти всегда будут иметь чередующиеся полярности. Полярность сейсмической волны обычно неоднозначна, но в данном случае волны отделяются одна от другой и четко видно, что полярность изменяется на обратную от одного отражения к другому. Отношение амплитуд следующих друг за другом кратных отражений равно коэффициенту отражения. Похоже, что на сейсмограмме (см. рис. 162) коэффициент отражения равен приблизительно $-0{,}7$. Наблюдаются и кратно-отраженные головные волны, полярность которых также чередуется. Поскольку головные кратно-отраженные волны возникают при критическом угле падения, коэффициент их отражения должен равняться $-1{,}0$. Фактически же их интенсивность растет от отражения к отражению. Причина отмеченного роста интенсивности заключается в сферическом расхождении при распространении волн в пространстве.

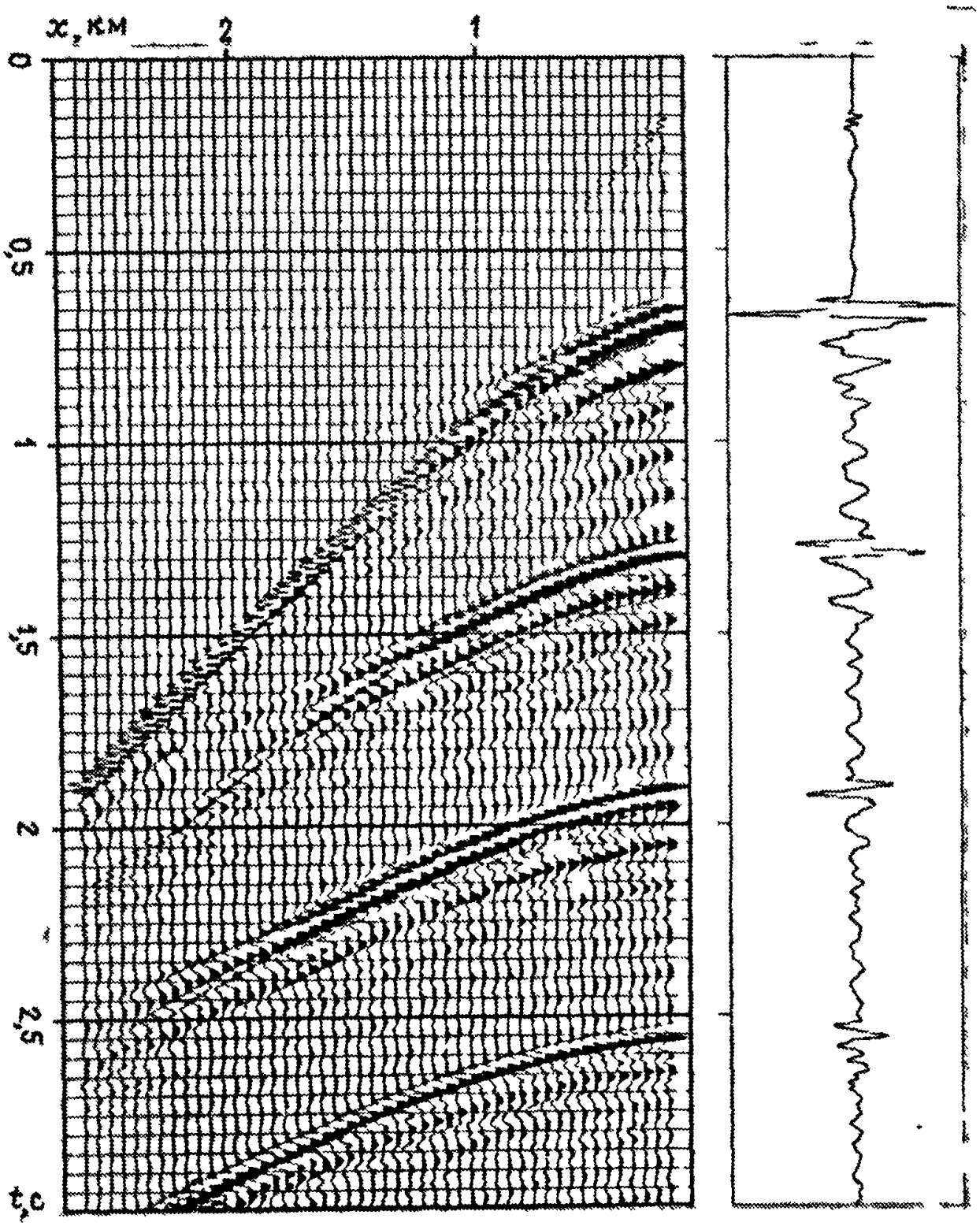



РИС. 162. Сейсмограмма, полученная при морских исследованиях, состоящая из кратных отражений (Норвегия), и увеличенная в масштабе ближайшая к пункту взрыва трасса (*б*)

Кратные отражения представляют интерес для специалистов по теории волн, но служат серьезным препятствием для геофизиков, пытающихся разглядеть скрытые за ними первичные отражения, несущие в себе полезную информацию.

## Деконволюция в повседневной обработке данных

Глубина моря в случае, изображенном на рис. 162, больше обычно встречающейся при поисках нефти и газа на море. В этом отношении рис. 163 и 164 более типичны. На рис. 163

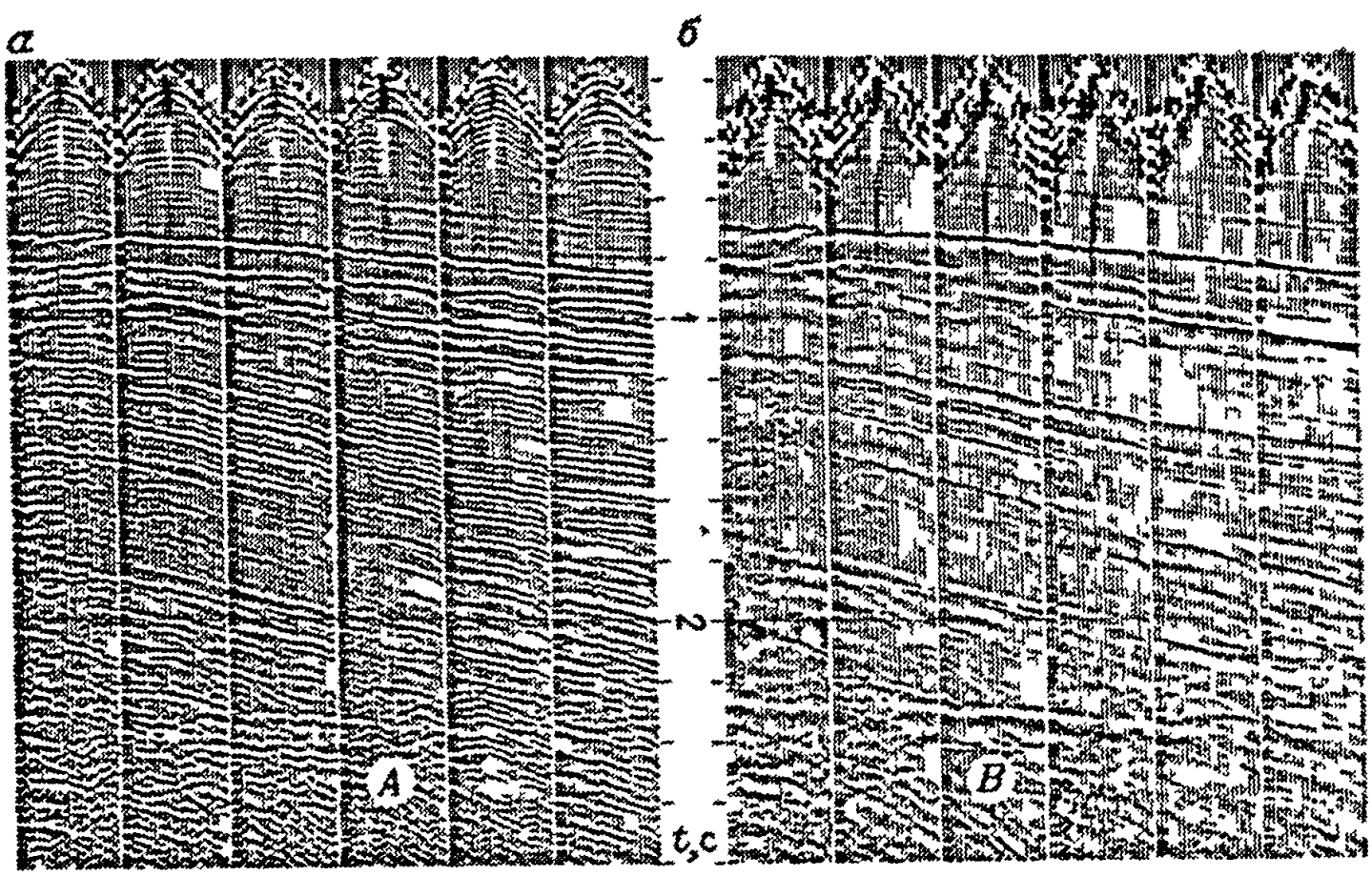



РИС. 163. Полевые сейсмограммы до (*а*) и после (*б*) проведения деконволюции

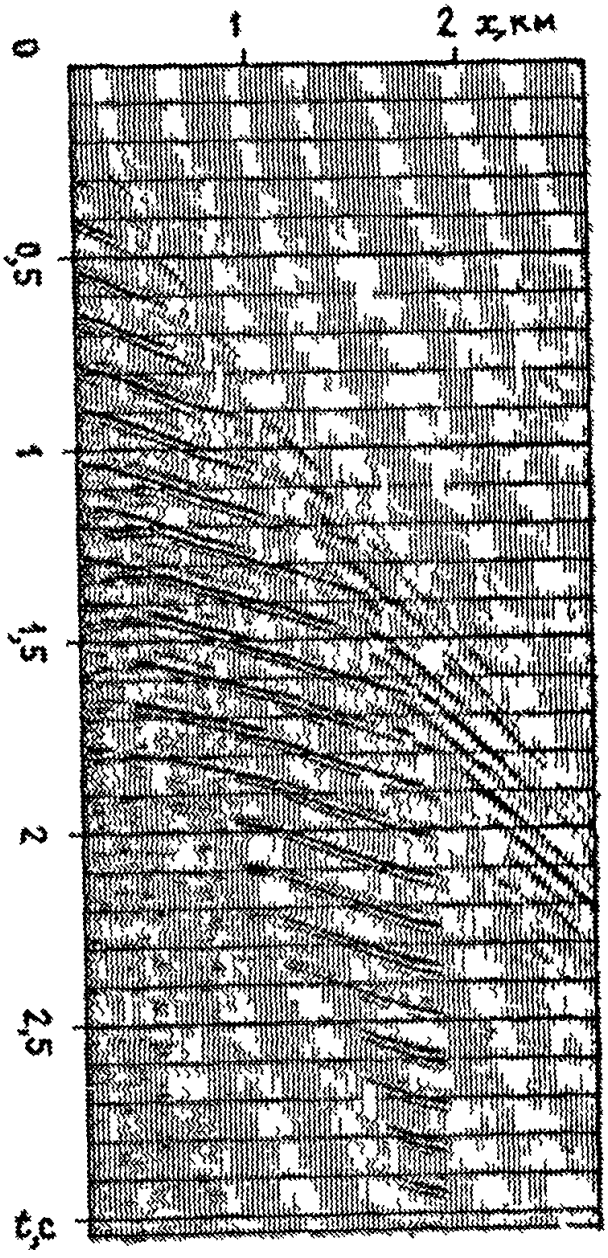



РИС. 164. Полевая сейсмограмма, полученная в пределах Северного моря

глубина моря настолько мала, что различить отдельные кратные отражения невозможно. При работах на суше подошва выветрелой зоны обычно залегает настолько неглубоко и выражена столь не отчетливо, что, как правило, невозможно выделить самостоятельные от нее отражения. Термин «неглубоко» в применении к кратным отражениям означает, что отражения появляются с такой частотой, при которой они интерферируют и становятся неразличимыми. На рис. 164 обращают внимание сильные реверберации, повторяющиеся с периодом около 90 мс. Они представляют собой многократные отражения от морского дна, причем самые сильные сигналы появляются на больших удалениях и при увеличении времени отражения. Это происходит по той причине, что самые интенсивные отражения часто наблюдаются в окрестности критического угла падения волны. Интенсивность реверберации резко уменьшается на расстоянии 1,8 км позади судна. Это означает, что в этом месте резко изменяется характер морского дна.

Специалисты в области математической статистики создали богатую литературу по вопросам деконволюции. Для них данная проблема заключается в определении формы импульсоида в источнике, а не в устранении с сейсмограмм кратных отражений. Существует определенный математический предел, по достижении которого задача подавления кратных отражений становится равнозначной задаче определения формы импульсоида в источнике. Такой предел существует тогда, когда явление реверберации ограничено небольшим физическим объемом вокруг источника или сейсмоприемника типа почвенного слоя. Причина эквивалентности задач определения формы волны в источнике и подавления кратных отражений в указанном предельном случае состоит в том, что нисходящая из источника волна не просто характеризует сам источник, но включает в себя и местные резонансные колебания почвенного слоя. Термином спутник в методе отраженных волн обозначается отражение импульса источника от поверхности земли или же от подошвы зоны малых скоростей. Так как источник сейсмических волн часто располагается близко от упомянутых выше отражающих границ, волна-спутник рассматривается как часть волны, испускаемой источником.

Существует обширная литература по многократным отражениям для случая вертикального падения волн. Теоретики, изучающие распространение волн, называют операцию по устранению всевозможных кратных отражений р е ш е н и е м о б р а т н о й з а д а ч и. Для того, чтобы теорию решения обратной задачи можно было бы применить к рассматриваемой проблеме, она должна включать в себя способ, позволяющий распознавать кратные волны.

В настоящее время в повседневной работе теорией решения обратной задачи обычно не пользуются, а предполагают, что существует некий математический предельный случай, когда с кратными отражениями можно поступать, как с волной, возникающей в источнике. Основной метод для производственной обработки сейсмограмм с кратными отражениями был предложен и описан в работе [122]. Несмотря на последовавшие многочисленные разработки и продолжающийся активный интерес со стороны практиков, приемы повседневной деконволюции мало изменились.

Традиционная деконволюция, применяемая в производственной обработке сейсморазведочных материалов (см. рис. 163), сейчас имеет много разновидностей. Постараюсь выразить простыми словами то, что мне кажется сутью деконволюции. Каждая сейсмотрасса имеет свой спектр. Этот спектр представляет собой результат действия многих причин. Некоторые причины играют основополагающую роль, другие незначительную. Досадно, когда сейсмотрасса резонирует просто из-за какого-то явления в верхней части разреза. Рассуждая элементарно, деконволюция представляет собой такой способ обработки, в соответствии с которым измеряются характеристики сильных резонансных колебаний и по ним рассчитывается фильтр, предназначенный для их подавления. Фильтр рассчитывается таким образом, чтобы его частотная характеристика была приблизительно обратна спектру исходных сейсмических наблюдений. Следовательно, на выходе такого фильтра сигнал будет, грубо говоря, белым, т. е. в его спектре содержатся все частоты в равной пропорции. Издавна известно, что наблюдения отраженных сейсмических волн редко имеют какой-либо смысл вне полосы частот 10 100 Гц, поэтому на окончательном этапе обработки частоты, находящиеся за пределами указанного диапазона, убираются с записи. (Предположение о том, что спектр выходной функции должен быть белым, многим сейсморазведчикам кажется слабо обоснованным, но практика показывает, что лучше исходить из этого предположения, чем создавать изображения земной среды по необработанным материалам.)

Другое нематематическое объяснение практической успешности деконволюции состоит в том, что она выравнивает спектры от трассы к трассе, она их балансирует [147]. Бывает досадно, когда сейсмотрасса резонирует из-за какого-то явления, наблюдающегося в верхней части разреза. Еще более досадно, когда спектр волны изменяется от трассы к трассе вместе с изменением верхней части разреза от точки к точке. При изменчивом спектре трудно измерять приращения времени по годографу. Отметим, что описанная выше традиционная деконволюция, используемая при производственной обработке

материалов, включает в себя и процедуру уравнивания спектров (см. рис. 164).

Данная выше интерпретация процедуры деконволюции и причин ее успешного практического применения отличается от той, которую можно найти в большинстве работ по геофизике. Деконволюцию часто интерпретируют через предсказуемость кратных и непредсказуемость однократных (первичных) отражений. В работе [53] показано, каким образом предсказываются кратные отражения. Их прогноз основывается не на строгой сверточной модели, а на приближении к ней. Предсказание путем свертки лучше всего работает в тех случаях, когда вся реверберация сосредоточена в верхних слоях среды. Тогда она похожа на волну, излучаемую сейсмическим источником.

Кардиологические исследования входят в повседневную медицинскую практику, чего не скажешь об исследованиях легких. Проведем такую аналогию: теории миграционного преобразования и скоростного анализа служат хорошим руководством в практической сейсморазведке, в отличие от теории деконволюции. Наблюдаемый здесь большой разрыв между теорией и практикой должен вызывать беспокойство. Более подробное изложение этих вопросов можно найти в работе [153].

Ниже демонстрируются сейсмограммы, полученные на суше с помощью погруженных сейсмоприемников и подтверждающие ту мысль, что волны, излучаемые источником, представляют собой в основном приповерхностную реверберацию. Затем будут рассмотрены отклонения от модели свертки.

### Вертикальный сейсмический профиль (ВСП)

Сейсморазведчики всегда благосклонно относятся к дополнительной информации, получаемой методом вертикального сейсмического профилирования (ВСП). Вертикальный сейсмический профиль представляет собой совокупность сейсмических трасс, регистрируемых в скважине при возбуждении на поверхности земли. Выполняемые в обычном порядке исследования в скважинах, например, отбор керна или электрический каротаж дают локальную информацию, освещающую зачастую лишь несколько сантиметров толщины околоскважинного пространства. Удобно считать, что земная среда горизонтально-слоистая, но эта идеализация терпит неудачу уже на некотором, неизвестном нам расстоянии от ствола скважины. Сейсморазведка методом отраженных волн, выполняемая на поверхности земли, обеспечивает получение необходимой информации о распространенности по латерали. Однако наблюдения методом отраженных волн на поверхности земли имеют ограничения по разрешающей способности и характеризуются

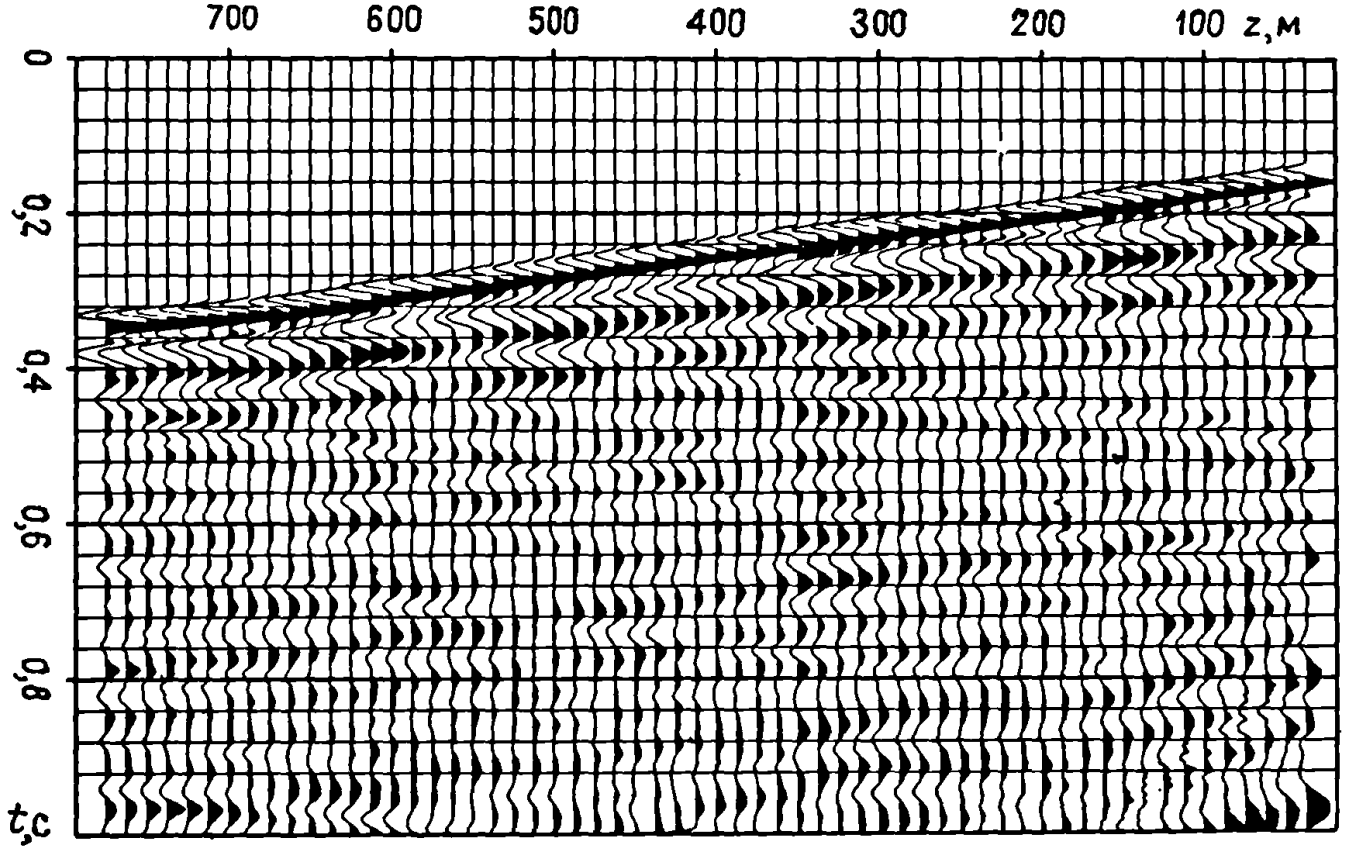



РИС. 165. Вертикальный сейсмический профиль

погрешностями различного характера. ВСП дает информацию промежуточного уровня и может служить тестом наземной сейсмической разведки. К сожалению, проведение работ по ВСП связано с большими денежными затратами и поэтому они проводятся редко.

Вопросы, связанные с ВСП, освещены в нескольких книгах и множестве научных статей. Можно рекомендовать читателю, например, работы [57] и [5]. Здесь же мы рассмотрим один из вертикальных сейсмических профилей, чтобы получить некоторое представление о волнах, возбуждаемых источником, и кратных отражениях. Приведенный на рис. 165 пример ВСП получен в типичных для суши условиях. Кратные отражения развиты не столь сильно, как в случае сейсморазведки на море, материалы которой демонстрировались в настоящей главе. В первых вступлениях на рис. 165 отмечается первичная падающая волна. Время пробега падающих волн растет с глубиной. По наклону их годографов можно определить нисходящую компоненту скорости. За первой падающей волной наблюдаются такие же волны, характеризующиеся одинаковыми скоростями. Угловой коэффициент восходящих волн противоположен угловому коэффициенту падающих. В случае, изображенном на рис. 165, источник расположен на поверхности земли у устья скважины. По горизонтальной оси рисунка отложена глубина сейсмоприемника, по вертикальной — время пробега волн. Амплитуды умножены на весовую функцию вида $t^{1,5}$.

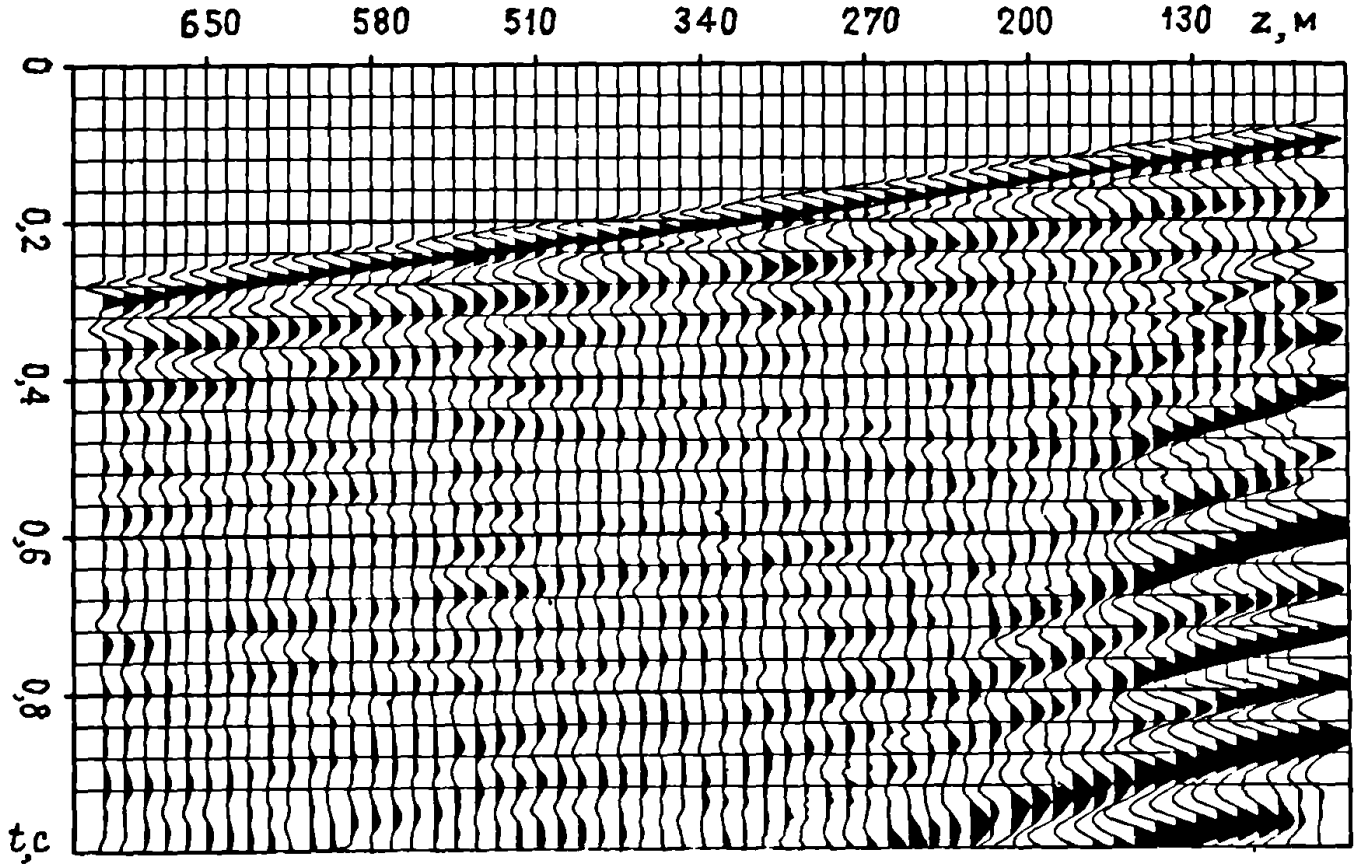



РИС. 166. Сейсмотрассы рис. 165, усиленные на небольших глубинах

Поскольку поздние вступления слабее ранних, сейсмические наблюдения перед тем, как вывести, обычно усиливают пропорционально времени. Ни в теории, ни на практике нет общего согласия относительно того, какой вид весовой функции является наилучшим. Для наблюдений методом отраженных волн вполне удовлетворительна функция вида $t^2$ (см. раздел 4.1). Из рис. 165 можно заключить, что функция $t^{1,5}$ сохраняет первые вступления на приведенном ВСП приблизительно постоянными.

Рассмотрение рис. 165 показывает, что за падающим импульсоидом следует волна, приблизительно сохраняющая свою форму по мере возрастания глубины регистрации. Степень постоянства проследить нелегко из-за ее интерференции с восходящими волнами. Насколько можно судить по рисунку, падающие волны на самой большой глубине и самой малой практически совпадают.

На рис. 166 приведены те же наблюдения, но несколько усиленные на малых глубинах. Падающая волна здесь уже не кажется неизменной по своей форме независимо от глубины регистрации. Отсюда можно сделать вывод, что в практических случаях падающая волна представляет собой в основном результат влияния приповерхностных реверберации. Заметим, что наблюдения произведены с помощью сейсмоприемников продольных волн (см. рис. 165, 166).

Энергия первого вступления на рис. 165 грубо сопоставима с энергией последующих вступлений, которая была бы меньше,

если бы наблюдения по вертикальному сейсмическому профилю были выведены на графопостроитель без умножения на весовую функцию вида $t^{1,5}$. Поскольку наблюдения методом отраженных волн, производимые на поверхности земли, обычно выводятся с применением какого-либо вида взвешивания (чаще всего с помощью $t^2$), то со статистической точки зрения есть смысл рассматривать энергию взвешенных наблюдений. На этом основании можно утверждать, что энергия реверберации грубо сравнима с энергией первых вступлений.

Под приповерхностной частью разреза падающая волна изменяется в зависимости от глубины медленно. Теперь можно задаться вопросом, насколько изменилась бы падающая волна, если бы источник переместился в горизонтальном направлении. Ясно, что скважина не перемещается по горизонтали, поэтому мы ограничены тем случаем, когда по латерали перемещается только поверхностный источник. Поскольку часто можно наблюдать быстрые изменения по латерали приповерхностных условий, то существует опасение, что и форма записи падающей волны будет резко меняться с перемещением пункта возбуждения упругих волн. Реверберации, наблюдаемые возле источника, сохраняют свое подобие вблизи от любого сейсмоприемника, установленного на поверхности земли. Получающаяся в результате сложная реверберация представляет собой свертку реверберации, наблюдаемых вблизи от источника и сейсмоприемника. Поэтому для того, чтобы получить информацию, необходимую для выполнения деконволюции поверхностных сейсморазведочных наблюдений, ВСП следует выполнять с использованием нескольких пунктов возбуждения.

К сожалению, такие непродольные вертикальные сейсмические профили отрабатываются редко. Сейчас, когда добыча нефти и природного газа имеет тенденцию к падению и разрабатываются дорогостоящие методы вторичной эксплуатации месторождений, стоимость работ ВСП не должна казаться столь уж высокой. Объем добычи, теряемый из-за простоя на время проведения ВСП, проще оценивать в сравнении с возможными выгодами, получаемыми в результате проведения подобных работ.

Вновь вернемся к тому, какой смысл вкладывается в понятие «наблюдений плохого качества». Сейсмические наблюдения характеризуются повторяемостью в тех случаях, когда интенсивность полезной записи превышает уровень фона микросейсмических помех. Но часто случается, что наблюденные сигналы не поддаются разумной интерпретации. Наличие корреляционных связей по пространственным координатам не играет для нас никакой роли, о чем говорит большая часть наблюдений на больших временах. Происходит, возможно, следующее: 1) падающие волны приобретают длинные хвосты; 2) сам хвост

является беспорядочной функцией условий в точках профиля наблюдений; 3) энергия «хвостовых» колебаний превосходит энергию первых вступлений. Так как падающая волна имеет случайный характер, то не удивительно, что восходящая по необходимости приобретает непонятный, неинтерпретируемый вид.

### Кратные отражения, наблюдаемые в условиях глубоководья

Часто отмечалось, что кратные отражения от морского дна представляют большую проблему только в полярных широтах, в экваториальных же областях они довольно редко создают серьезные помехи. Это замечание можно было бы подвергнуть сомнению, как основанное на слишком малой статистике, но можно привести два довода в пользу того, что оно может оказаться справедливым. Каждый из этих доводов представляет самостоятельный интерес, независимо от того, достаточна статистика или нет.

Оказывается, что природный газ растворяется в воде и повышает температуру ее замерзания, особенно при высоком давлении. Лед, образующийся в условиях присутствия природного газа, называется газовым гидратом. Таким образом, под водной толщей океана может образоваться твердый газовый гидрат, заключенный в осадочных породах. Газовый гидрат придает осадочным породам жесткость и повышает интенсивность кратных отражений.

Вторая причина возникновения сильных кратных отражений на полярных широтах связана с ледниковой эрозией. В обычных условиях дно океана является местом медленного накопления тонкозернистого материала. Подобные недавно образовавшиеся породы мягки и на них образуются слабые кратные отражения. Но в полярных областях в результате деятельности ледников осадочные породы соскабливаются с поверхности дна моря. В местах эрозии обнажившиеся горные породы оказываются более твердыми и жесткими, чем вновь образующиеся осадки. Поэтому и отражения от морского дна будут сильнее.

В пределах континентальных территорий процессы эрозии и осадконакопления происходят на всех широтах. Можно предположить, что в конечном счете районы континентальных шельфов образовались в результате процессов осадконакопления, происходивших в условиях низких и средних широт, а затем дрейфовали к высоким широтам, где и подверглись эрозии. Несмотря на то, что данная теория во многом основана на предположениях, она все же дает какое-то объяснение наблюдаемой фактически связи кратных отражений с полярными широтами.

### Неполнократные и внутрислойные кратные отражения

Выделяют три основных типа кратных отражений (рис. 167). Кратными отражениями от морского дна называются те кратные отраженные волны, чьи лучевые траектории лежат целиком в толще воды (рис. 167, *а*). Поскольку обычно отражательная способность морского дна выше, чем у залегающих ниже него геологических границ, амплитуда таких кратных отражений часто оказывается большой. В условиях глубоководья подобные кратные отражения могут быть очень четкими и регистрироваться без интерференции с другими волнами. Хрестоматийный пример таких кратных отражений показан на рис. 162.

Частично-кратные отражения различными авторами определяются по-разному. Мы считаем частично-кратными отражениями (рис. 167, *б*) такие, которые претерпели одно отражение в осадочном разрезе, а остальные в приповерхностном слое.

С целью облегчения интерпретации сейсморазведочных наблюдений дадим краткую сводку временных и амплитудных соотношений, характерных для кратных отражений, распространяющихся по вертикали в горизонтально-слоистой среде. Обозначим двойное время пробега до морского дна через $t_1$, а коэффициент отражения от него через $c_1$. Тогда $n$-кратное отражение зарегистрируется на времени $nt_1$ с амплитудой $c_1^n$. Предположим также, что более глубокое первичное отражение имеет время пробега $t_2$ и коэффициент отражения $c_2$. Частично-кратные отражения, в образовании которых участвует только морское дно, вступают в моменты времени $t_2+nt_1$. Заметим, что частично-кратные отражения образуют свои семейства. Например, время $t_2+2t_1$ может соответствовать трем траекториям: $t_2+2t_1$, $t_1+t_2+t_1$ или $2t_1+t_2$. Поэтому в действительности частично-кратное отражение $n$-го порядка представляет собой сумму $n+1$ лучей и его интенсивность будет пропорциональна произведению вида $(n+1)\,c_2c_1^n$. Реверберация от морского дна равна по интенсивности $c_1^n$, т. е. не совпадает с той функцией от $n$, которая описывает реверберацию от осадочной

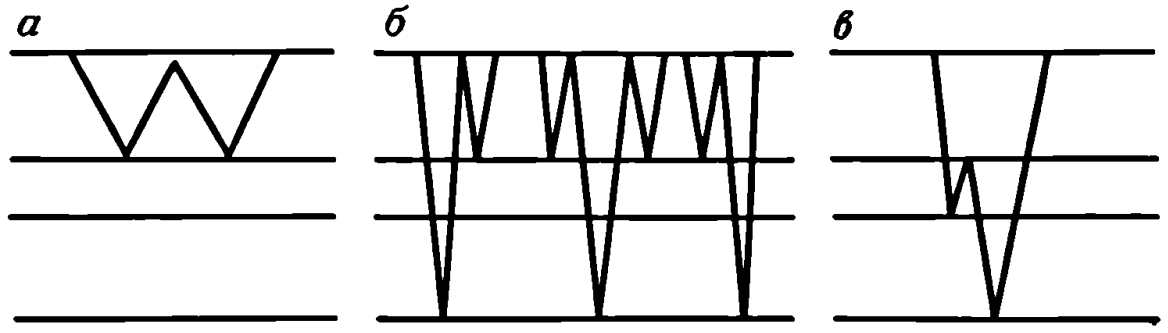



РИС. 167. Траектории лучей полнократного отражения от дна моря (*а*), частично-кратных отражений (*б*) и внутрислойного многократного отражения (*в*)

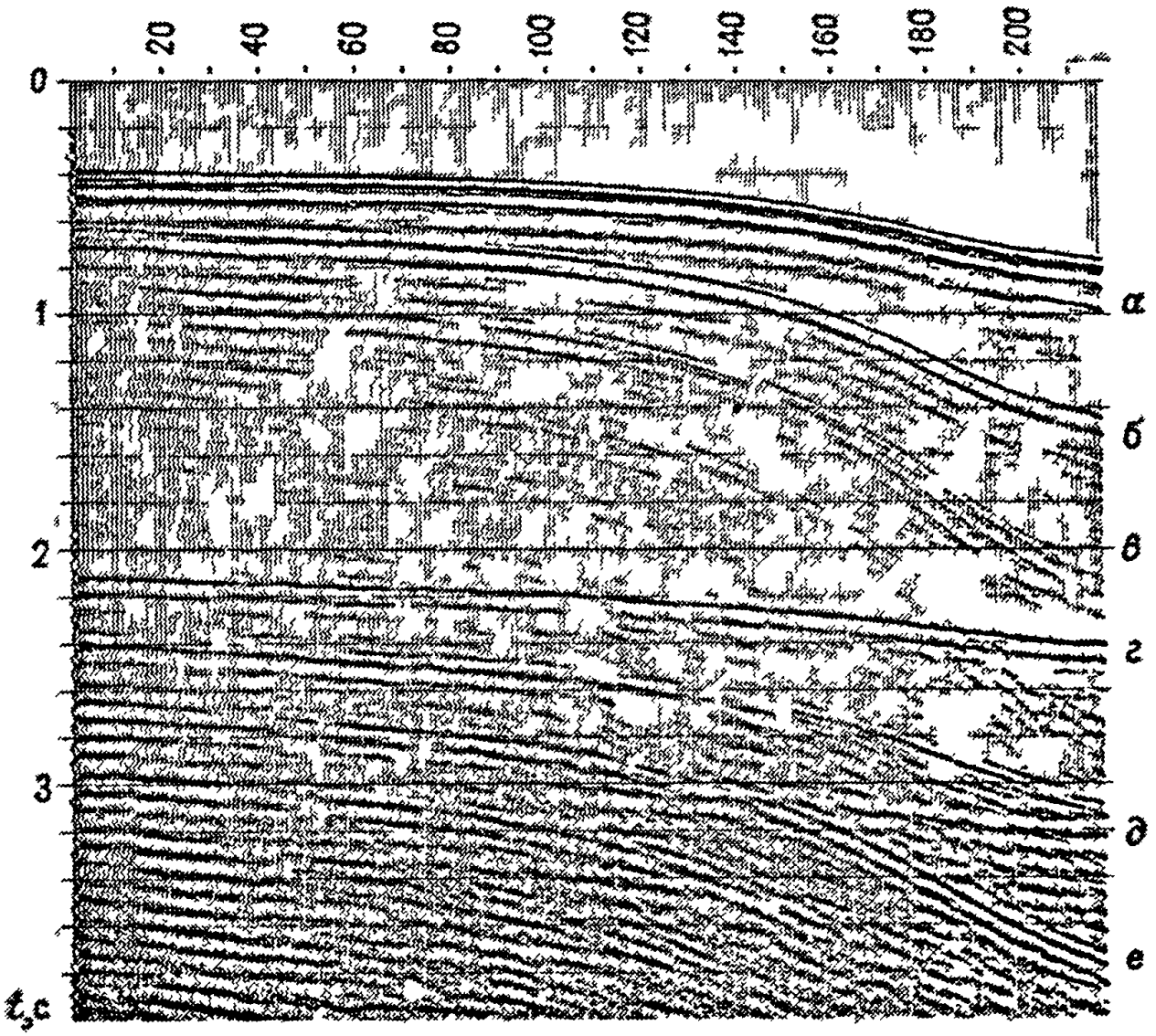



РИС. 168. Разрез ближайших к пункту взрыва трасс:
*а* дно моря; *б* двукратное отражение от морского дна; *в* трехкратное отражение от морского дна; *г* однократное отражение; *д* частично-кратное первого порядка; *е* частично-кратное второго порядка

толщи, а именно $(n+1)\,c_1^n$. Чтобы пренебречь реверберацией от морского дна, можно просто посчитать функцию $(n+1)\,c_1^n$ формой записи волны, возбужденной источником.

У каждой кратной волны должно быть «место поворота», где восходящая волна превращается в падающую. Почти все легко распознаваемые кратные отражения представляют собой поверхностные кратные, т. е. они «разворачиваются» на поверхности земли. На рис. 168 приведены несколько четких примеров кратных отражений. Разрез составлен из ближайших к пунктам взрыва трасс и получен в пределах Лабрадорского континентального шельфа (район Флэмиш-Кэп). По горизонтали располагаются приблизительно 9 ПВ. Заметим, что при наблюдениях на суше разворот может совершаться на подошве почвенного слоя, которая практически совпадает с поверхностью земли.

На рис. 167, *в* изображена траектория распространения еще одного вида кратных отражений, называемых внутрислойными. Место их разворота находится не на поверхности земли

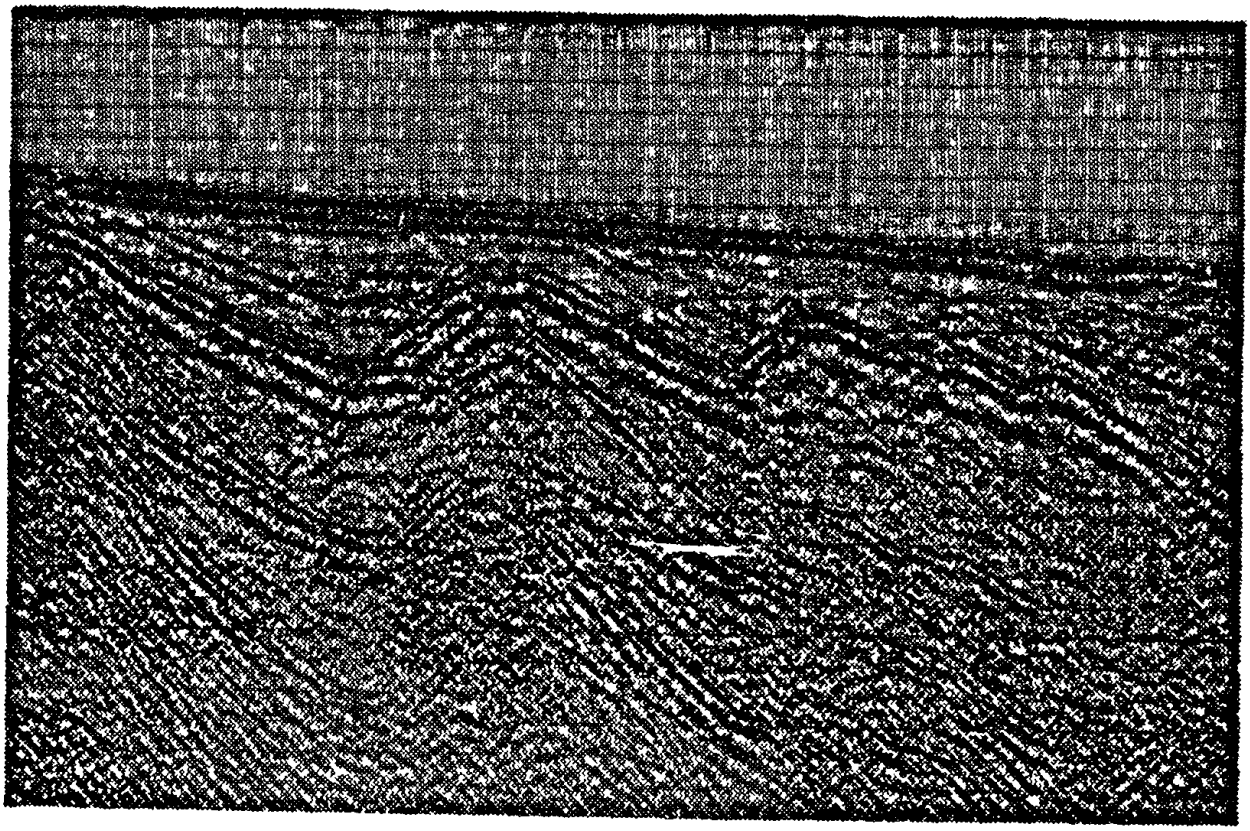


РИС. 169. Пример регистрации кратных отражений

или вблизи от нее. Их редко можно наблюдать на полевых сейсмограммах. На рис. 169 приведена удачная запись внутрислойных кратных отражений. Наблюдения получены возле Пуэрто-Рико. Здесь внутрислойное кратное отражение находится между отражениями от морского дна и фундамента, поэтому время его пробега равно времени отражения от фундамента плюс разность времен отражения от фундамента и от морского дна. Внутрислойные кратные отражения поддаются отождествлению только в тех случаях, когда интерпретация сейсморазведочных данных производится с привлечением информации, полученной в скважине. Причиной столь редкого выделения внутрислойных кратных отражений по сравнению с частично-кратными является то, что коэффициенты отражения от границ внутри осадочной толщи намного меньше, чем от свободной поверхности. Однако слабая интенсивность отдельных внутрислойных кратных отражений может компенсироваться очень большим числом таких отражений. Всегда, когда сейсмический разрез становится неинтерпретируемым, можно предполагать, что на полевых сейсмограммах доминируют частично-кратные отражения, испытавшие повторное отражение в пределах пласта небольшой мощности, залегающего во внутренних частях геологического разреза.

## Потребность различать типа разрезов

К 1974 г. методы, использующие волновое уравнение, утвердили себя в качестве успешных способов миграционного

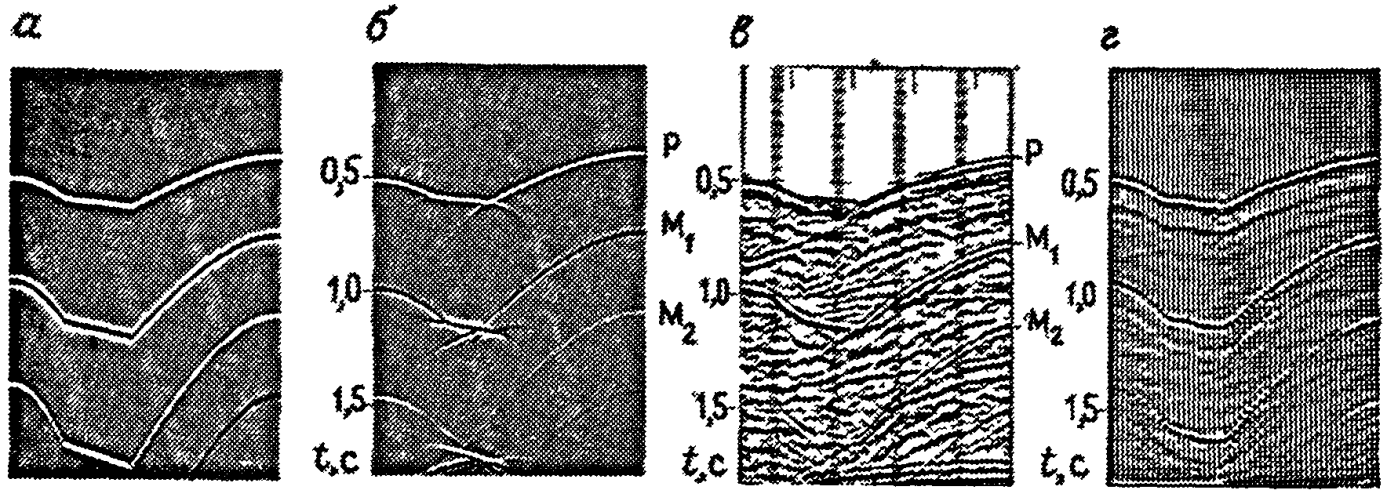



РИС. 170. Примеры кратных дифрагированных отражений:
*а* одномерные синтетические; *б* двухмерные синтетические с источником в виде вертикально падающей плоской волны; *в* 27-кратный разрез ОГТ; *г* разрез, составленный из ближайших к пункту взрыва трасс

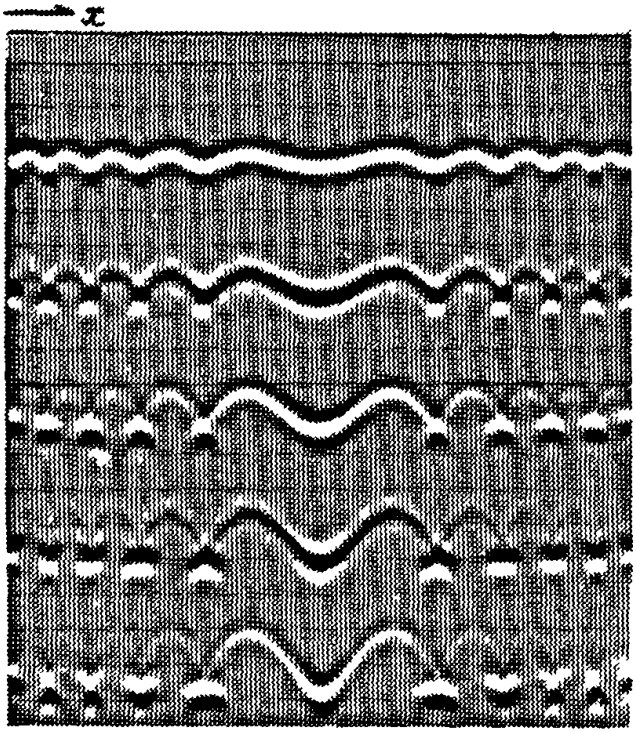



РИС. 171. Результаты моделирования кратных отражений от морского дна

преобразования разрезов ОГТ. Вдохновленные этим успехом мы с Д. Райли предприняли попытки использовать волновое уравнение для решения задачи прогнозирующего подавления кратных отражений, наблюдаемых при морской сейсморазведке в условиях глубоководья. Основываясь на гипотезе о том, что причиной всех затруднений, которые вызываются наличием кратных отражений в условиях глубоководья, являются эффекты дифракции, мы разработали метод моделирования и прогнозирующего подавления дифрагированных кратных отражений [53, глава 4, раздел 4]. Мы не предполагали, что на практике задача подавления кратных отражений будет намного труднее, чем задача подавления первичных. В случае однократных, или первичных, волн один и тот же основной метод миграции применим для всех типов разрезов: составленных из трасс нулевого удаления от источника, отсуммированных по принципу общей глубинной точки или же построенных в предположении вертикально падающих плоских волн. Оказалось, что наш метод подавления кратных отражений применим

только в условиях горизонтально-слоистых сред. Д. Райли подготовил рис. 170, на котором приведены некоторые примеры дифрагированных кратных отражений.

При изучении материалов, представленных на рис. 170, всегда следует иметь в виду, что на полевых материалах должны, по всей вероятности, проявляться особенности, связанные с распространением волн в трехмерном пространстве, причем они могут оставаться незамеченными. Третье измерение всегда является неясным. Оно, как правило, не портит двухмерное миграционное преобразование, но отсюда никак не следует гарантия сохранения действенности способа двухмерного подавления кратных отражений с помощью волнового уравнения.

## Примеры кратных отражений с фокусировкой в условиях мелководья

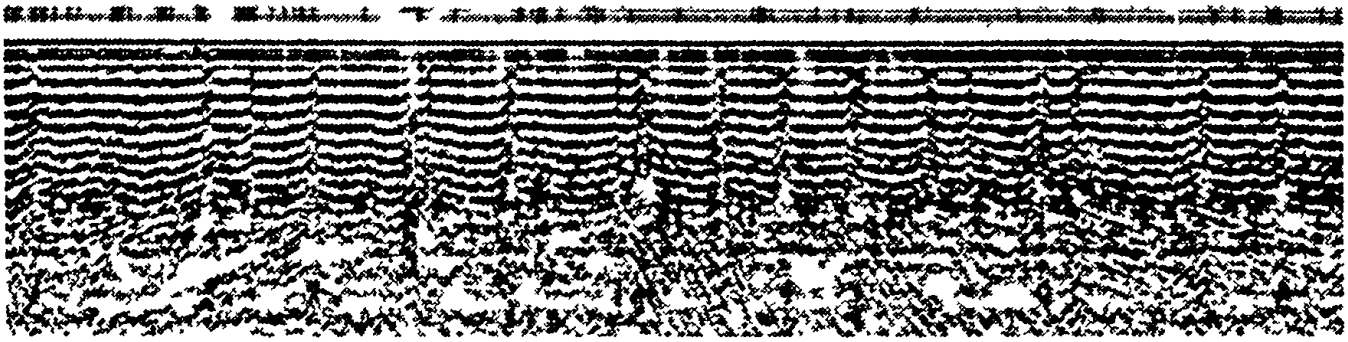
Концепция излучающих границ неприменима к кратным отражениям, поэтому и не существует простого, основанного на волновой теории способа предсказания фокусирующего поведения кратных отражений на разрезе ближайших к ПВ трасс. К счастью, кратные отражения, наблюдаемые на суммах вертикально падающих плоских волн, поддаются исследованию. Они могут дать нам некоторое представление о фокусирующем поведении кратных отражений на сейсмических разрезах других типов. Вертикально падающая плоская волна моделируется с использованием суммы записей на общей точке приема, в которую не введены кинематические поправки. Последняя не идентична разрезу ОГТ, но поддается исследованию способами, описанными в гл. 1 и 2.

Рассмотрим многократное отражение от поверхности наблюдений. Сейсмическая энергия сначала имела вид падающей плоской волны. Она оставалась неизменной до своего первого отражения от морского дна, в результате которого на плоскую волну наложился отпечаток рельефа дна. (При моделировании с помощью вычислительной машины рельеф дна будет наложен на плоскую волну на этапе применения линзового уравнения.) Затем волна дифрагировала вверх до поверхности наблюдений и вернулась назад к морскому дну. В компьютер вводится еще один топографический линзовый сдвиг. Описанный процесс, когда попеременно происходит дифракция и применяется линзовое уравнение, может повторяться бесконечно. На рис. 171 представлены результаты моделирования подобного процесса. Бросается в глаза такая особенность кратных отражений высокого порядка, как концентрация энергии на локальных участках. Легко видеть, что отражения от вогнутых участков дна моря преодолевают тенденцию к расхождению акустиче-

ской энергии. Области сильной концентрации энергии, появляющиеся на больших временах, совсем не похожи на первичные отражения. Локализованное возмущение однократных отражений имеет тенденцию к расхождению по широкой гиперболе. Первичная миграция сильно сконцентрированных всплесков энергии, подобных наблюдаемым на рис. 171, должна приводить к появлению полуокружностей. На рис. 171 вертикальный масштаб в 5 раз крупнее горизонтального, поэтому на участках с пологим рельефом дна наблюдается даже небольшая фокусировка. Она возрастает до больших величин для кратных отражений высоких порядков. На больших временах латеральная прослеживаемость первичных отражений отсутствует.

Важный вывод, который следует сделать по результатам расчета синтетических кратных отражений (см. рис. 171), состоит в том, что кратные отражения совсем не обязательно должны быть похожими на первичные. Полуокружности, появляющиеся на мигрированных разрезах, могут соответствовать остаточным кратным отражениям. К сожалению, нет простой теории, отвечающей на вопрос о том, будут ли сфокусированные кратные на вертикально-волновых суммарных разрезах походить на аналогичные кратные, но присутствующие на разрезах нулевых удалений или ОГТ. К счастью, имеются некоторые данные, которые могут дать ответ на последний вопрос. На рис. 172 приведен разрез нулевых удалений, подтверждающий вывод о том, что на материалах метода отраженных волн действительно можно отыскать описанные выше явления фокусировки, которые проявляются если не в количественной, то в качественной форме. Этот разрез получен в Чукотском море. Эффекты фокусировки затушевываются суммированием ОГТ. Буквами обозначено следующее: *A* современная геологическая структура; *B* прежняя неравномерно эродированная геологическая структура, причем после эрозии отдельные участки поверхности дна оказались выпуклыми, другие вогнутыми; *C* — фокусировка кратных отражений высокого порядка в тех местах, где дно вогнутое; *D* современное наклонное залегание слоев, проявляющееся в тех местах, где кратные отражения слабы, другими словами, там, где выпуклости рельефа морского дна приводят к быстрому их расхождению.

На материалах морской сейсморазведки (см. рис. 172) ясно видны явления фокусировки, подтверждаемые синтетическими расчетами (см. рис. 171). Отсюда можно сделать вывод, что для получения более четкой картины строения земных недр мы должны располагать количественными данными о влиянии кратных волн, чтобы подавить их. Имеется несколько причин, мешающих это сделать. Первая из них состоит в том, что теория Райли применима к суммам вертикально падающих волн. Последние же в количественном отношении отличны от



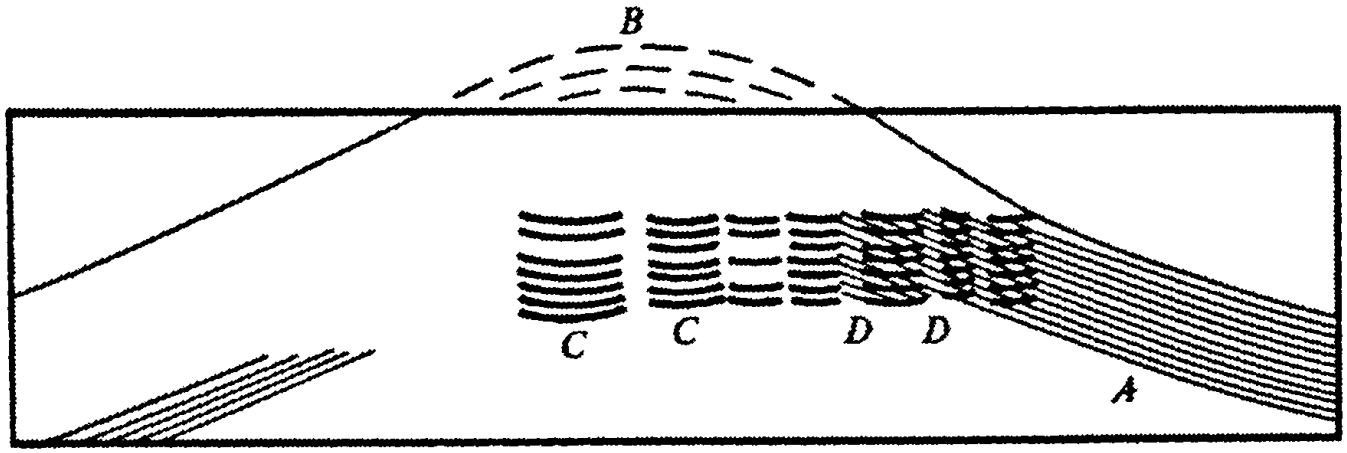



РИС. 172. Пример влияния фокусировки на кратные отражения

сумм составленных по принципу общей средней точки. Вторая причина связана с тем, что эффективная сейсмическая глубина морского дна не является известной входной величиной и ее нужно каким-то образом определять по самим наблюдениям. Третья причина заключается в том, что глубина моря в случае, изображенном на рис. 172, настолько мала, что отдельные отражения не поддаются выделению.

## Почему деконволюция терпит неудачу на глубоководье

Сейчас уже общепризнанно, что в общем случае деконволюция терпит неудачу в условиях глубоководной сейсморазведки. Одно из возможных объяснений этому факту состоит в том, что глубоководье не отвечает математической модели, позволяющей свести задачу подавления кратных отражений к задаче определения формы волны в источнике. Но это еще не все. Теория предсказывает, что при обычных условиях полярность вступлений кратных отражений должна чередоваться. Примеры (см. рис. 162 и 163) подтверждают теоретический вывод. Однако, если мы начнем поиск чередующихся полярностей на разрезах ОГТ, то встретим большие затруднения. Анализ возникающих трудностей показывает, почему с помощью

деконволюции не всегда удается подавлять кратные отражения на разрезах ОГТ в условиях глубоководья.

Вспомним временные соотношения для кратных отражений на нулевом удалении. Период реверберации не зависит от времени. Из-за наличия приращений времени по годографу последнее утверждение не соблюдается при удалениях точки приема от источника. Ввод нормальных кинематических поправок будет успешным только для восстановления временных соотношений, характерных для нулевого удаления в однородной среде, но при возрастании скорости с глубиной кратные отражения будут иметь меньшую среднеквадратическую скорость, чем однократные. Поэтому вопрос состоит в том, какую скорость использовать и будут ли остаточные временные сдвиги превышать половину периода в типичных ситуациях сейсморазведки на суше и на море. Чтобы ответить на этот вопрос, не нужно никаких уравнений. Необходимо только понять, что при суммировании по принципу общей средней точки кратные отражения подавляются из-за того, что их скорости меньше, чем у однократных. Из этого следует, что нормальные кинематические поправки постоянно сдвигают кратные отражения по времени на полпериода и более, нарушая их сстественные соотношения, характерные для нулевых удалений.

Ожидаемые нами при нулевых удалениях амплитудные соотношения становятся совершенно запутанными. Коэффициент отражения является функцией угла падения волны. Но на сейсмотрассе при заданном удалении от источника каждое кратное отражение будет регистрироваться как приходящее под иным углом.

На разрезах ОГТ приблизительно изображаются временные соотношения, характерные для случая вертикального падения. Практическое затруднение заключается в том, что разрез ОГТ имитирует ситуацию вертикального падения волн недостаточно хорошо, чтобы обеспечивать удовлетворительное предсказание кратных отражений по однократным.

Для данных, полученных по результатам морской сейсморазведки, перед суммированием ОГТ можно ввести кинематические поправки, рассчитанные по значениям скорости в воде, но в таком случае никакие частично-кратные отражения не будут отвечать временным соотношениям, характерным для случая нормального падения волн. Поскольку частично-кратные волны наиболее трудны для подавления, возможно, что кинематические поправки должны рассчитываться по их скоростям. Ввод кинематических поправок не позволяет, однако, надлежащим образом подрегулировать все временные соотношения, характерные для кратных отражений от глубоких горизонтов.

**Упражнение**

По некоторым сейсмическим наблюдениям на суше подмечено, что глубокое кратное отражение приходит намного раньше, чем предсказывает теория. Какое объяснение можно дать этому факту?

## 5.6. Перспективные способы борьбы с кратными отражениями

С целью совершенствования способов подавления кратных отражений попробуем лучше разобраться в них. Трудность при этом заключается в том, что реалистическая модель включает в себя много составных частей. Лишь некоторые из множества теорий, которые в изобилии представлены в геофизической литературе, оказали заметное влияние на повседневную практику производственной обработки сейсморазведочных материалов. Разобьем не нашедшие применения теории на две категории: 1) теории, основанные на методах математической статистики и чрезмерно упрощающие при этом сложность пространственных связей; 2) теории, основанные на методах математической физики и чрезмерно упрощающие осложненную помехами волновую картину.

Здесь будут предложены два подхода, причем оба связаны с геометрией и математической статистикой. Оба подхода новы и мало опробованы. Надеюсь, что вы согласитесь с тем, что независимо от того, насколько хороши они на практике, они соответствуют поставленной задаче.

Первый подход, называемый направленным суммированием сейсмограмм общей средней точки, предусматривает преобразование наблюдения в такую форму, при которой все удаления имитируют простую одномерную модель с нулевыми удалениями. Имеется обширная литература, описывающая эту модель с точек зрения математической статистики и математической физики.

Второй подход базируется на понятии импеданса замещения и рассчитан на учет быстрых латеральных вариаций в самой верхней части разреза. Его проще всего применять к данным морской сейсморазведки, когда единственной трудностью является латеральная изменчивость функции отражательной способности морского дна. Главная идея состоит в продолжении в нижнее полупространство направленных источников и сейсмоприемников до глубин непосредственно под морским дном, не больше. За этой операцией следует продолжение вверх через замещающую среду, характеризующуюся нулевым коэффициентом отражения от морского дна. Данный способ обработки не устранит все кратные отражения, но должен подавить самые неприятные из них.

## Переход к одномерному случаю с помощью направленного суммирования

Существует обширная литература [53] по вопросам, связанным с одномерной моделью кратных отражений. Одни авторы разрабатывают многочисленные аспекты теории распространения волн, другие начинают с упрощенной модели распространения и разрабатывают многие аспекты теории информации. Часто считают, что все одномерные теории, связанные с одномерной моделью, применимы только в случае нулевых координат удаления приемника от источника. Однако ниже мы убедимся, что все прочие удаления можно перевести в область действия данной теории, прибегнув к направленному суммированию.

Чтобы временные и амплитудные соотношения для кратных отражений соответствовали соотношениям, характерным для случая вертикального падения, нужно перестать считать сейсмические трассы функциями времени при постоянной координате удаления от источника и взять на вооружение постоянный параметр Снеллиуса. В слоистой среде полная лучевая траектория строится путем суммирования траекторий в каждом из слоев. При вертикальном падении волны, $p=0$, время пробега луча $t_j$ в слое $j$ не зависит от времени пробега в других слоях, через которые луч может пройти на иных этапах своего движения. Такой характер времени пробега сохраняется и в случае любого другого фиксированного значения $p$. Но, как показано на рис. 173, он не наблюдается для луча с зафиксированной координатой полного удаления по горизонтали $\Sigma f_j$ вместо $p$. Рис. 173 поясняет, что лучи с постоянной координатой удаления характеризуются различными углами подхода и, следовательно, различными значениями параметра Снеллиуса, но лучи с одинаковым параметром Снеллиуса подходят к поверхности наблюдений на различных удалениях от источника. В последнем случае времена пробега по всем путям одинаковы. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что при фиксированном $p$ расстояние по горизонтали $f_j$, которое луч пробегает, находясь в слое $j$, не зависит от других участков общего пути. Таким образом, получаем дополнительно, что $(t_j+\text{const}\, f_j)$ для любого слоя $j$ не зависит от других участков траектории луча. Поэтому равенство $t'_j=t_j-pf_j$ выражает свойство $j$-го слоя и не описывает

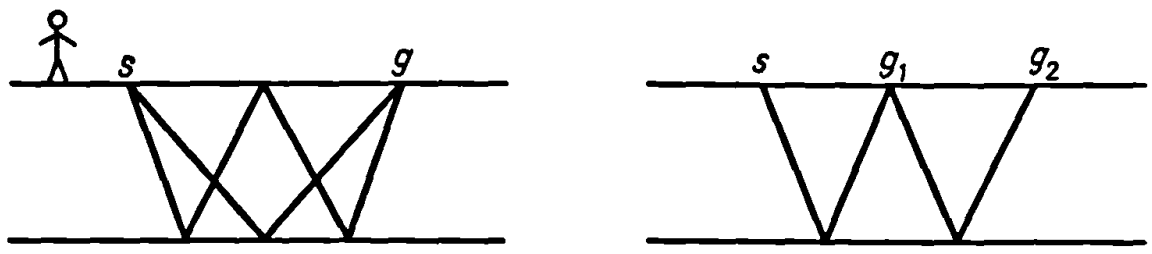



РИС. 173. Лучевая геометрия кратных волн

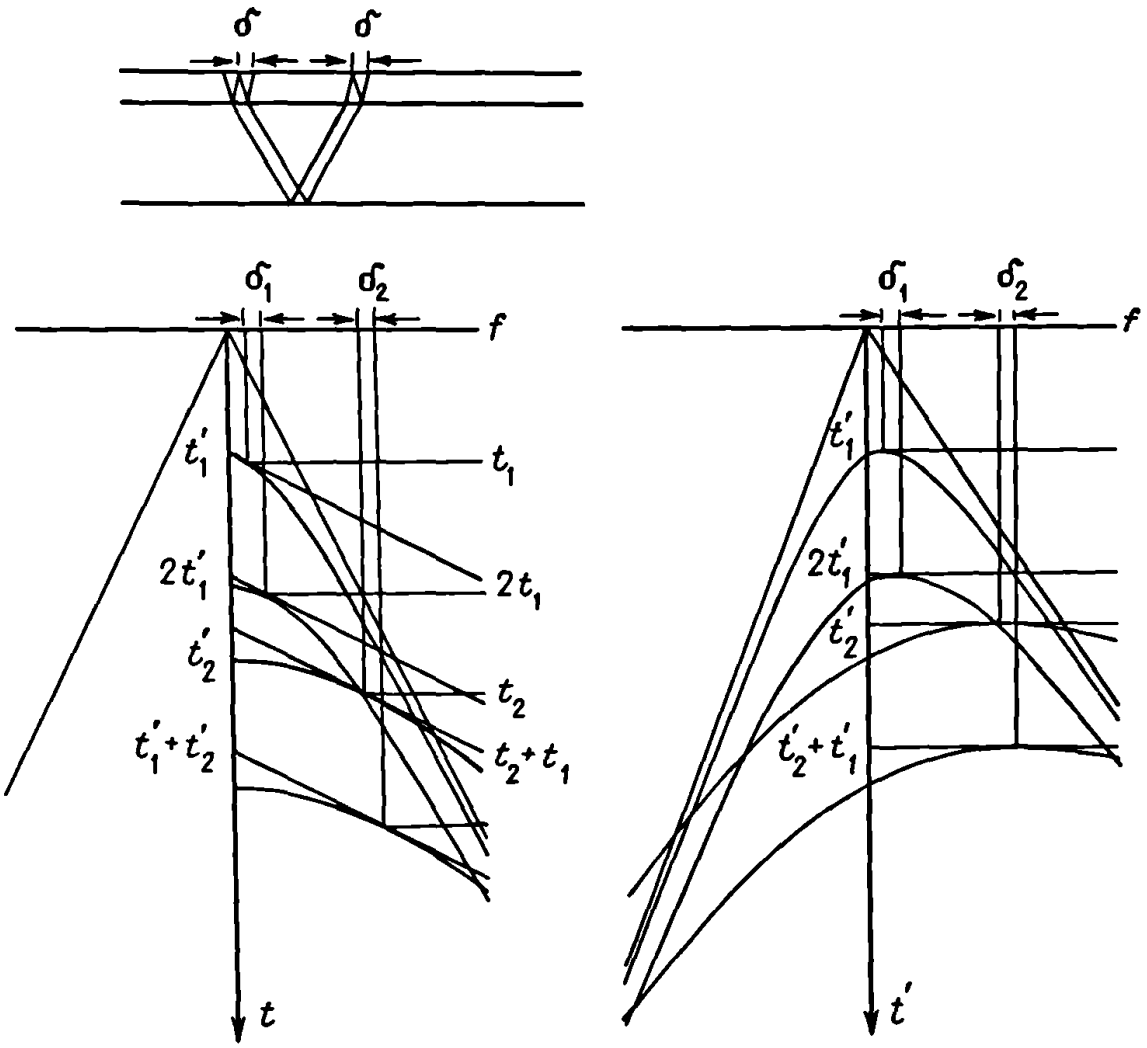



РИС. 174. Волновая картина в случае двухслойной модели (по Гонзалесу)

свойства других слоев, которые могут встретиться на общем пути пробега. Зная, какие слои пересекает луч, сложим соответствующие каждому из слоев $t_j$ и $f_j$ точно так, как и в случае вертикального падения волны. Некоторые из возможных путей пробега показаны на рис. 174 (вверху).

Здесь также изображены двухслойная модель и годографы с временами пробега, равными $t_1$, $2t_1$, $t_2$, $t_2+t_1$. Слева схематически представлена обычная полевая сейсмограмма, справа — она же, но с введенными линейными кинематическими поправками $t'=t-pf$. Графики рассчитаны для значений скоростей ($v_1$, $v_2$, $1/p$), относящихся, как $1:2:3$. Рассмотрев участки сейсмограммы, где оси синфазности касательны к прямым с угловым коэффициентом, равным $p$, убеждаемся, что времена отражения удовлетворяют соотношениям, характерным для случая вертикального падения, т. е. период реверберации фиксирован и одинаков как для полнократных, так и для частично-кратных отражений. Так и должно быть, поскольку лучевая схема в верхней части рисунка точно соответствует тем участкам сейсмограмм, где соблюдается равенство $dt\,dx=p$. Кроме того, поскольку $\delta_1=\delta_2$, времена $t'_1$, $2t'_1$, $t'_2+t'_2$ тоже будут удовлетворять случаю вертикального падения волн.

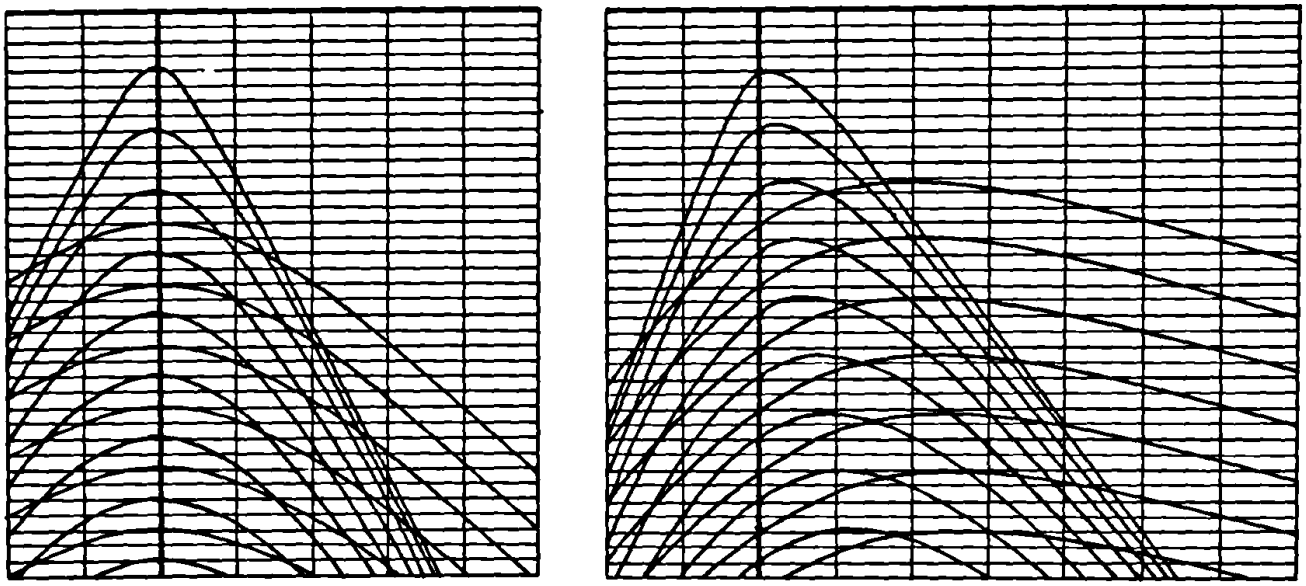


РИС. 175. Волновая картина, соответствующая рис. 174, но с большим числом кратных отражений

Чтобы узнать, как нужно увязывать полевые наблюдения с результатами направленного суммирования, начнем с поиска на сейсмограмме общей средней точки всех тех участков касания, где гиперболические годографы волн имеют некоторое определенное значение градиента $p=dt/df$. Эти участки показывают, где и когда луч с параметром Снеллиуса, равным $p$, достиг поверхности наблюдений. Типичные для рассматриваемых случаев геометрические соотношения и синтезированные годографы демонстрируются на рис. 175 (см. также рис. 174).

Времена $t_j$ и $t'_j$ ведут себя, как времена нормально падающих кратных отражений. К сожалению, местоположение каждого участка оси синфазности по латерали зависит от модели скоростного распределения $v(z)$, хотя в результате направленного суммирования эта зависимость снимается. В принципе можно выполнить направленное суммирование при многих значениях $p$, т. е. отобразить плоскость с координатами $(f,\ t)$ в пространство $(p,\ t)$. Приятной особенностью пространства $(p,\ t)$ является то, что задача подавления кратных отражений разбивается на множество самостоятельных одномерных задач, по одной на каждое значение $p$. Кроме того, для решения подобных задач не нужно знать скорости в среде. Вы можете сами выбрать любой из множества известных методов решения. После подавления кратных отражений выполняется обращение направленных сумм. Возвратившись в пространство $(f,\ t)$, можно найти значение скорости и снова перейти к подавлению кратных отражений тем методом суммирования, который вам нравится больше всех.

На рис. 175 изображено «рабочее» упражнение. Прокоррелировав вершины всех осей синфазности на правом рисунке и соединив их штриховой линией, вы сможете подтвердить, что частично-кратные отражения от морского дна характеризуются

такой же интервальной скоростью, что и полнократные. Интервальную скорость в осадочной толще можно определить по первичным отражениям. Скорость в осадках можно найти, соединив $n$-е полнократное отражение с $n$-ым частично-кратным.

Преобразование в одномерную область с помощью направленного суммирования с целью выполнения деконволюции пока еще не полностью исследованный процесс обработки. По этому вопросу можно обратиться, например, к работе [144]. Сила такого преобразования в том, что при нем правильно используются как зависимости от углов выхода, которые получаются для конкретной схемы профильных наблюдений, так и свойственная коэффициенту отражения зависимость от угла падения волны на границу. Одним из недостатков является необходимость предположения о латеральной однородности реверберирующего слоя. Толща воды исключительно однородна, но слагающие морское дно осадки могут быть весьма неоднородными.

### Приповерхностная неоднородность

В акустическом отношении верхняя часть разреза ведет себя очень странно. Сейсмические скорости в ней обычно меньше скорости звука в воде (1500 м с) или равны ей. Нередко скорость распространения волн в ВЧР раз в 5 меньше скорости звука в воде или равна скорости звука в воздухе (300 м/с). Там, где это практически осуществимо, источники сейсмических волн помещают ниже зоны малых скоростей, но сейсмоприемники почти всегда располагают на поверхности земли. Пожалуй, единственный случай, когда сейсмоприемники погружаются в землю, это сейсморазведка болотистых территорий. В таких местах проведение полевых работ настолько затруднено, что количество используемых сейсмоприемников, как правило, в несколько раз меньше обычного.

Сильно затрудняет обработку резкая латеральная неоднородность верхней части разреза. Нередко случается, что два сейсмоприемника, отстоящие один от другого примерно на 10 м, регистрируют две совершенно различные трассы. В частности, при замерах вертикального времени (времени пробега сейсмической волны от забоя взрывной скважины до поверхности земли вблизи устья) можно встретить аномалии величиной в целый период, хотя поверхность земли идеально горизонтальная. Чем же вызываются столь резкие непредсказуемые аномалии времен пробега, наблюдаемые в верхней части разреза? Ответ прост: захороненными меандрами рек, небольшими неглубоко залегающими пустотами, заполненными газом, выщелаченными карбонатными породами, ледниковыми бо-

роздами и т. п. Все перечисленные нерегулярности можно обнаружить и на глубине, но хуже, когда они располагаются у поверхности земли, до того, как насыщение флюидами и горное давление уменьшат акустическую неоднородность (см. также раздел 3.7).

Несколько проще условия для проведения сейсморазведки на мелководье. Здесь все еще существуют богатые возможности для проявления латеральных изменений, например, в виде погребенных каналов для прохода подводных лодок или захороненных русел древних рек. Но доминирующей особенностью сейсморазведки в условиях мелководья становится резонанс в водном слое. Спектр мощности наблюдений будет определяться этим резонансом.

И при работах на суше спектр мощности сейсмозаписи часто претерпевает резкие изменения от точки приема к точке. Указанные спектральные изменения можно проинтерпретировать как изменения в характере кратных отражений, проистекающие из изменений эффективной мощности или строения верхней выветрелой части разреза.

## Режимы моделирования

Уравнения процесса продолжения в нижнее полупространство содержат в себе четыре основных компонента: 1) медленность среды в окрестности сейсмоприемника $v(g)^{-1}$; 2) медленность среды в окрестности источника $v(s)^{-1}$; 3) приращение в пространстве удалений $k_h\ \omega$; 4) кажущуюся скорость в пространстве средних точек $k_y/\omega$. Названные компоненты имеют одинаковые физические размерности, поэтому способы моделирования можно разделить по категориям в соответствии с теми численными неравенствами, которые, как предполагается, существуют между этими компонентами. При работе в одномерном пространстве в расчет не берутся три компонента из четырех, а именно, кажущаяся скорость, приращение и разность $v(g)^{-1}-v(s)^{-1}$. При направленном суммировании сейсмограмм ОСТ используется, кроме того, приращение $k_h\ \omega$. Перед нами стоит выбор использовать ли кажущуюся скорость или латеральное изменение скорости (упомянутую выше разность). Латеральное изменение скорости часто бывает резким вблизи от поверхности земли, где обычно возникают частично-кратные отражения. Вспомним то простое соображение, что типичные лучи в случае мощной осадочной толщи подходят к низкоскоростной поверхности под крутыми углами. При использовании уравнений продолжения в нижнее полупространство для приповерхностной части разреза особенно оправданным бывает пренебрежение компонентом кажущейся скорости, так как соблюдается неравенство $v^{-1} \gg k_y\ \omega$. Хорошо,

что найдено такое оправдание отказу от кажущейся скорости, поскольку при полевых наблюдениях за пределами вертикальной плоскости профиля кажущиеся скорости практически неизвестны. В противоположность этому приращение по горизонтальной координате практически всегда гораздо больше в вертикальной плоскости профиля, чем за ее пределами.

Еще одним важным моментом моделирования или обработки кратных отражений является сцепление со средой восходящих и падающих волн. Это явление приводит к функциям отражательной способности под источником $c(s)$ и приемником $c(g)$. Одной из важных особенностей, к которой мы еще вернемся, является то, что $c(s)$ может отличаться от $c(g)$ даже в том случае, когда углы расхождения волн отсутствуют.

### Вычитание кратных отражений

Суммирование ОСТ можно рассматривать в качестве процесса умножения. Моделирование приводит к процессам вычитания. Последние являются вспомогательными для суммирования ОСТ, но не альтернативными, так как после вычитания можно суммировать.

Сначала попытаемся смоделировать кратные отражения, а затем вычтем их из наблюденных данных. В общем подавление путем вычитания является более рискованной процедурой, нежели подавление с помощью умножения. Чтобы добиться успеха при вычитании, нужно знать правильные амплитуды, а ошибка по времени должна быть меньше четверти периода колебания.

С помощью определяемых статистически эмпирических постоянных можно учитывать расхождения между результатами моделирования и реальными. В математической статистике такой подход называется регрессией. Зная, например, что некоторая совокупность отсчетов данных должна усредняться прямой, для нахождения наилучших параметров этой прямой воспользуемся способом наименьших квадратов. Тщательное изучение отсчетов может начинаться с вычитания этой прямой, тем более, что мы намереваемся подавить кратные отражения. Естественно, что знание регулируемого параметра облегчит трудности при вычислении точных амплитуд кратных отражений. Неизвестную ошибку во времени смоделировать намного труднее. Ввиду нелинейности применяемой здесь математики, несколько отличный от изложенного, но более практический подход заключается в том, чтобы в качестве регулируемых параметров брать коэффициенты фильтра свертки. С помощью такого фильтра можно представить любой масштабный множитель и любой временной сдвиг. Возникает соблазн воспользоваться для учета переменных во времени погрешностей

моделирования переменным во времени фильтром, но трудности здесь заключаются в том, что функциональные возможности фильтра шире простого взвешивания амплитуд.

На деле трудности вычитания кратных отражений объясняются следующим. Если кратные отражения смоделированы неудовлетворительно, например, с точки зрения их геометрии или скоростей, то при поиске уравнения регрессии понадобится много регулируемых параметров. Но если регулируемых параметров много, то наряду с кратными отражениями будут вычитаться и первичные (однократные), т. е. вместе с водой из ванночки выплескивается и сам ребенок.

### Направленная деконволюция и решение обратной задачи

Изучение сейсмограмм на больших удалениях убедило, что сейсморазведчики должны уделять пристальное внимание различиям в характере морского дна, влияющим на каждое последующее отражение в многократной волне. Простой и привлекательный метод учета последних метод радиальных трасс был предложен М. Тейнером [137]. Радиальной трассой называется линия, секущая сейсмограмму общей точки взрыва и для которой соблюдается неравенство $r=h/t$. Вместо деконволюции сейсмотрассы, зарегистрированной на постоянном удалении, производится деконволюция радиальной трассы. Подобную деконволюцию можно обобщить до процесса продолжения в нижнее полупространство. Продолжение вниз радиальной трассы можно аппроксимировать временными сдвигами. К сожалению, когда наблюдения по радиальной трассе состоят из полнократных от морского дна и частичнократных отражений, возникает затруднение в обработке, так как эти отражения характеризуются различными траекториями. Данное затруднение разрешается по меньшей мере принципиально — с помощью волн Снеллиуса. В работе [50] показано, что волны Снеллиуса можно использовать и для решения других проблем, типа дифракции и латеральных вариаций скоростей (если они известны). На рис. 176 приведен пример, иллюстрирующий влияние меняющейся глубины моря на отражения различной кратности.

Применение большинства методов решения обратной задачи связано с определенными трудностями из-за нехватки данных. Наблюдения могут быть неполными по времени, по пространственным характеристикам или по своему спектру. Любой рекурсивный метод должен быть исследован с тем расчетом, чтобы возникшие на небольших глубинах погрешности не наращивались бесконтрольно в процессе спуска в нижнее полупространство. Все без исключения наблюдения неполны в спектральном отношении. Кроме того, всегда существует

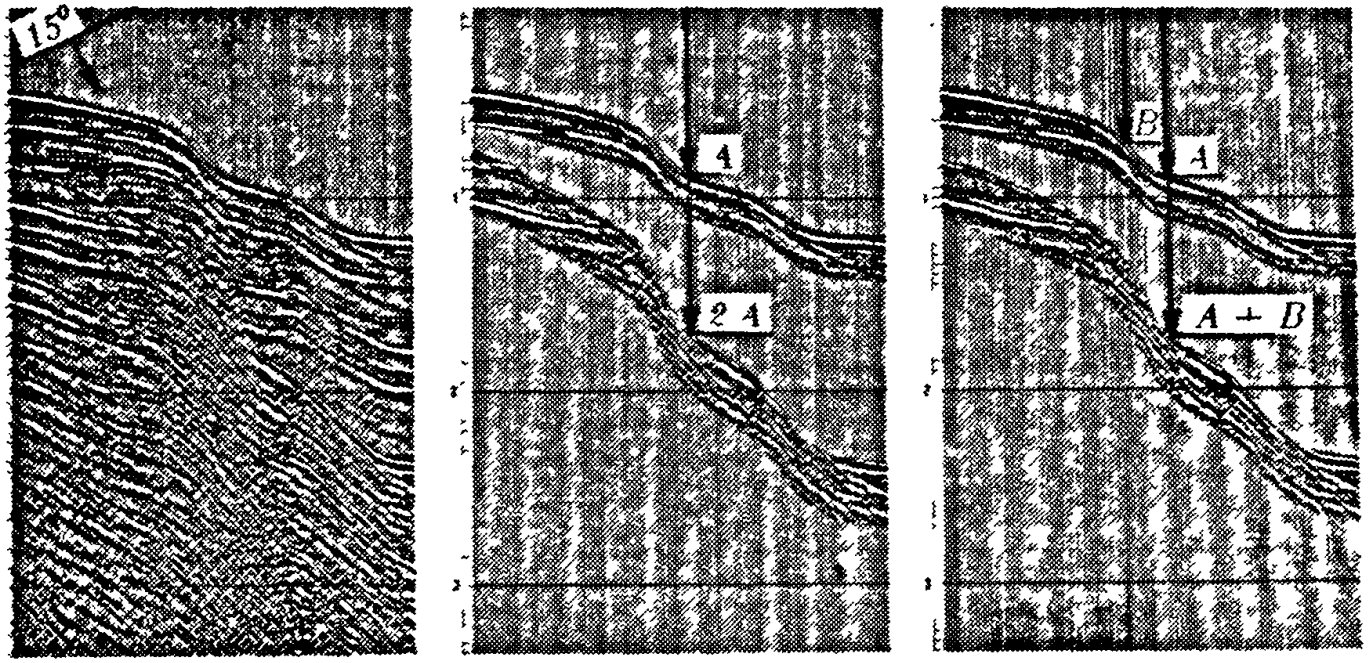



РИС. 176. Пример интерференции многократных отражений

неопределенность относительно формы волны в источнике. При тех значениях $p$, при которых интенсивны частично-кратные отражения, первое отражение от дна моря наблюдается слишком близко от судна-сейсмостанции и не может регистрироваться надлежащим образом. Для решения последней задачи М. Тейнер создал специальную регистрирующую систему.

Одним из преимуществ методов, основанных на использовании волн Снеллиуса, является то, что в результате направленного суммирования несколько повышается по сравнению с исходными полевыми наблюдениями отношение сигнал помеха. В то же время они имеют тот недостаток, что процесс продолжения в нижнее полупространство должен выполняться на всю глубину. Рассматриваемые ниже методы применяются до суммирования и не требуют выполнять продолжение волновых полей намного ниже морского дна.

## Раздельный фильтр Бэкуса

Для подавления наблюдаемых на поверхности кратных отражений мы готовим генеральную стратегию импедансное замещение, что потребует привлечения регрессионного анализа и волновой экстраполяции. Поэтому, не теряя из виду конечную цель, начнем с примера, взятого из некоей идеализированной геометрии. В своей диссертации Л. Морли [101] показал, что указанная идеализация не слишком далеко отходит от реальности. В диссертации представлены результаты успешной проверки предложенного метода и в ней стратегия импедансного замещения описывается более подробно.

Предположим, что дно моря горизонтально, принимаем, что вблизи от источника коэффициент отражения от дна моря равен $c_s$, а около сейсмоприемника $c_g$. В окрестности сейсмоприемника уравнение реверберации записывается, как

$$\frac{1}{1+c_gZ}=1-c_gZ+c_g^2Z^2+c_g^3Z^3+c_g^4Z^4+..., \qquad (408)$$

где через $Z$ обозначен оператор двусторонней задержки на пути пробега до подошвы водного слоя и обратно. (Основы теории Z-преобразований изложены в разделе 4.6 или в работе [53]). Возле источника аналогичная реверберационная последовательность имеет вид

$$1\,(1+c_sZ)=1-c_sZ+c_s^2Z^2-c_s^3Z^3+c_s^4Z^4... \qquad (409)$$

Если пренебречь различием между $c_s$ и $c_g$, то можно получить реверберационную последовательность Бэкуса [3], которая является результатом перемножения уравнений (408) и (409):

$$\frac{1}{1+cZ}\frac{1}{1+cZ}=1-2cZ+3c^2Z^2-4s^3Z^3+5c^4Z^4+... \qquad (410)$$

Знаменатель в уравнении (410) представляет собой фильтр Бэкуса. В результате применения подобного фильтра устраняется реверберационная последовательность. Л. Морли назвал фильтр, который получается после учета в явном виде различия в коэффициентах отражения в окрестностях источника и приемника, раздельным фильтром Бэкуса. Раздельный оператор фильтра Бэкуса можно представить в виде произведения

$$(1+c_se^{i\omega\tau(s)})(1+c_ge^{i\omega\tau(g)}). \qquad (411)$$

Преобразовав уравнение (411) в выражение типа (410), найдем, что $n$-й член разделяется на $n$ членов. Это означает, что времена пробега по траекториям с точкой отражения от дна в окрестности источника могут отличаться от времен пробега по траекториям с точкой отражения от дна в окрестности сейсмоприемника.

На рис. 177, заимствованным из диссертации Л. Морли, показана возможность наблюдения разделенных частично-кратных отражений. На рисунке изображен разрез, составленный из равноудаленных от источника трасс, причем удаление равно 45 взрывным интервалам, или половине длины косы. Частично-кратное отражение первого порядка, регистрируемое на временах от 2,5 до 3,0 с, благодаря влиянию рельефа морского дна разделяется на данном разрезе, но не разделяется на разрезе, составленном из ближних к источнику трасс. Максимальное разделение составляет около 200 мс в окрестности ПВ 180—200. Как и ожидалось, подобное явление

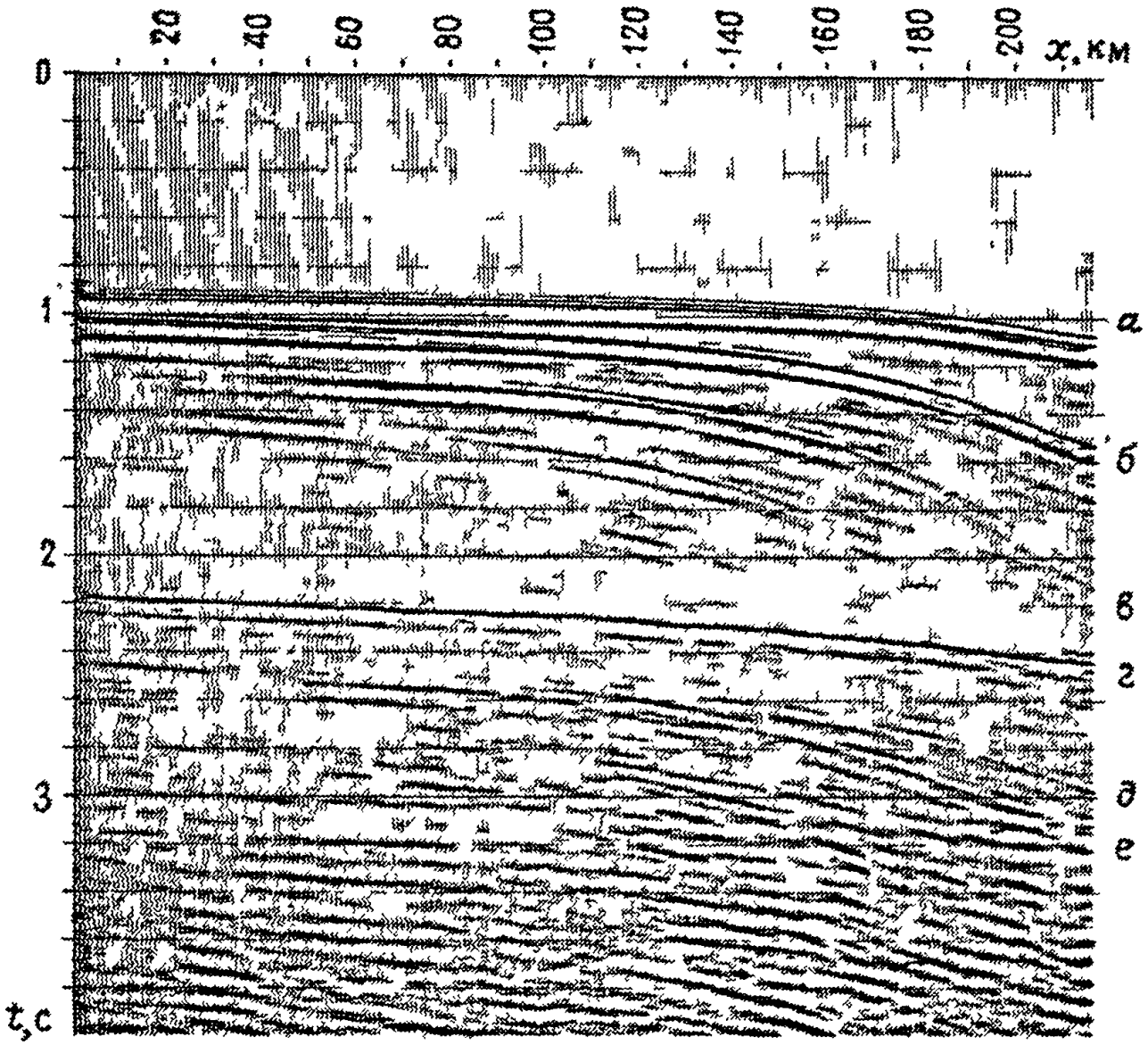



РИС. 177. Разрез, составленный из трасс, равноудаленных от источника (*а* *е*. см. рис. 168).

наблюдается в тех случаях, когда морское дно максимально наклонено, точнее, когда различие в глубинах моря на пикетах источника и сейсмоприемника наибольшее.

В большинстве современных способов обработки фильтр Бэкуса не используется и для каждой сейсмической трассы определяется свой фильтр деконволюции, но по сравнению с деконволюцией раздельный фильтр Бэкуса должен лучше сохранять первичные отражения.

Можно было бы ожидать, что в любом методе, базирующемся на концепции разделения Бэкуса, должен учитываться кинематический эффект. К счастью, в случае частично-кратных отражений угол их выхода будет уменьшаться из-за перепадов скоростей. В случае подавления полнократных отражений от морского дна необходимо более тщательно изучать остаточную кинематику. Предполагается, что в этом случае разделение частично-кратных отражений следует применять после введения нормальных кинематических поправок. Перейдем к задаче определения оператора раздельного фильтра Бэкуса.

### Подавление кратных отражений с учетом характера морского дна

С случайными временными сдвигами от трассы к трассе борются с помощью так называемой модели статических поправок, согласующихся с верхней частью разреза. В соответствии с этой моделью, наблюдаемые временные сдвиги $t(s, g)$ подгоняются под регрессионную модель вида $t(s, g) \approx \approx t_s(s) + t_g(g)$. Статистические определяемые функции $t_s(s)$ и $t_g(g)$ можно интерпретировать как полученные по значениям альтитуд рельефа местности или по вариациям скорости прямо под пикетами взрыва и приема. В работе [139] обращается особое внимание на необходимость учета влияния верхней части разреза. Ниже мы проинтерпретируем и обобщим изложенный подход. Интуитивная модель наблюденных данных имеет вид

$$P(s, g, \omega) \approx \frac{1}{1 + c_s e^{i\omega\tau(s)}} \frac{1}{1 + c_g e^{i\omega\tau(g)}} e^{i\frac{\omega}{v}\sqrt{z^2 + 4h^2}} H(h, \omega)\, Y(y, \omega)\, F(\omega). \tag{412}$$

Первые два множителя представляют собой раздельный фильтр Бэкуса. Следующий множитель есть не что иное, как нормальная кинематическая поправка. Множитель $H(h, \omega)$ является остаточной кинематической поправкой, а $Y(y, \omega)$ представляет собой зависимую от глубинной координаты модель среды под средней точкой $y$. Последний множитель $F(\omega)$ это некий усредненный фильтр, описывающий влияние земной среды и регистрирующей системы.

Одно из известных затруднений, встречающихся при работе с раздельными фильтрами Бэкуса, состоит в том, что задержки времени $\tau(s)$ и $\tau(g)$ входят в модель нелинейным способом. Чтобы линеаризировать модель, ее обобщают до следующего вида:

$$P'(s, g, \omega) \approx S(s, \omega)\, G(g, \omega)\, H(h, \omega)\, Y(y, \omega)\, F(\omega). \tag{413}$$

Теперь в $S$ включены все реверберационные эффекты в водном слое, характерные для окрестности точки возбуждения, включая любое непредсказуемое поведение и самой пневмопушки. Аналогично, характерные для окрестности точки приема эффекты содержатся в функции $G$. В наблюденные данные $P$ вводятся кинематические поправки и в результате получаем $P'$.

Прологарифмировав выражение (413), получим линейную аддитивную модель:

$$\ln P'(s, g, \omega) \approx \ln S(s, \omega) + \ln G(g, \omega) + \ln H(h, \omega) + \\ + \ln Y(y, \omega) + \ln F(\omega). \tag{414}$$

Фазовый спектр функции $P'$, представляющий собой мнимую часть логарифма (414), содержит информацию о време-

нах пробега. Последняя начинает терять смысл по мере того, как в наблюдениях появляется более чем одна волна. Фазовая функция становится разрывной, даже несмотря на то, что сами наблюдения непрерывны и хорошего качества. Поэтому в практической сейсморазведке используют вещественную часть выражения (414), которая фактически представляет собой спектры мощности. Задача разложения (414) является линейной и ее, возможно, лучше всего решать итеративным способом, так как она многомерна. При восстановлении $S$ и $G$ по спектрам мощности Л. Морли воспользовался методикой Винера—Левинсона в явном варианте, и учел нулевые значения временного представления фильтров $S$ и $G$ в определении пути пробега волн в воде. Он не вводил кинематические поправки в явном виде, содержащиеся в (412). Это можно объяснить тем, что использовалась лишь ближняя к пункту взрыва половина сейсмограмм.

### Концепция подавления кратных отражений, основанная на понятии среды замещения

Длины волн, используемые в сейсморазведке, настолько велики, что мы редко вспоминаем тот факт, что направленные источники и приемники вполне физически осуществимы. Предположим, что нам удалось каким-то образом создать такой источник, который излучает волны только вниз, и такой сейсмоприемник, который реагирует только на вертикально подходящие колебания. Предположим далее, что нам удалось выполнить продолжение этого источника и приемника вниз под морское дно. Это бы устранило широкий класс кратных отражений, например, полнократные от дна и частично-кратные, что было бы великим достижением. Однако и в этом случае осталась бы небольшая проблема.

Наблюдения могут располагаться вдоль некоторой линии, которая не обязательно будет горизонтальной, так как повторяет рельеф морского дна. Поэтому необходим заключительный этап обработки, сам по себе легкий, заключающийся в продолжении в верхнее полупространство через некую замещающую среду, которая характеризуется менее резким значением коэффициента отражения от морского дна. Такой процесс можно было бы назвать импедансным замещением. Он аналогичен процессу использования замещающей среды при редукции гравиметрических наблюдений, или же смещения сейсмотрасс во времени на величину, пропорциональную так называемой скорости замещения (см. раздел 3.7).

Процедура миграционного преобразования продолжает в нижнее полупространство восходящую волну. Она подобна процедуре продолжения в нижнее пространство расстановки

сейсмоприемников, причем сейсмоприемники реагируют только на восходящие волны. В действительности же погруженные сейсмоприемники реагируют и на восходящие и на падающие волны. Направленность источника или приемника определяется знаком в уравнении с квадратным корнем, которое используется для экстраполяции волнового поля. В соответствии с принципом взаимности источники тоже можно подвергнуть процедуре продолжения в нижнее полупространство. Физические источники излучают как вверх, так и вниз, но можно вообразить такие источники, которые излучают либо вверх, либо вниз, причем с математической точки зрения выбор определяется знаком. Поэтому можно получить результаты всех четырех возможных вариантов продолжения волновых полей на границе вода донные отложения направленных вверх и вниз источников и приемников.

Для экстраполяции всей этой информации через границу вода — дно требуется оценить значение коэффициента отражения от морского дна. Последний при вычислениях играет роль весового множителя в линейных комбинациях волн, распространяющихся над дном. Идею, лежащую в основе способа определения коэффициентов отражения, можно выразить двумя эквивалентными в математическом отношении путями: 1) волны, падающие на границу сверху и снизу, должны характеризоваться такой функцией взаимной корреляции, которая при нулевом сдвиге обращается в нуль; 2) волна, падающая на границу снизу, должна иметь минимальную мощность.

После перемещения вниз сейсмоприемников нужно продумать методику перемещения вниз источников. Чтобы прибегнуть к принципу взаимности, нужно поменять на обратную направленность источников и приемников. Именно поэтому пришлось обратиться к направленным вверх источникам и приемникам.

**Упражнения**

1. Задание, связанное с рис. 175.

а) Какое графическое измерение подтверждает, что интервальная скорость для простых кратных отражений от морского дна равна интервальной скорости для частично-кратных?

б) Какое графическое измерение позволяет получить значение скорости в осадочной толще?

в) Получите численное значение обратного параметра Снеллиуса $p$ с учетом скорости в воде.

г) Получите численное отношение скоростей в осадочной толще и в воде.

2. Возьмите восходящую волну $U$, наблюдаемую над слоистой средой с послойными импедансами ($I_1$, $I_2$, $I_3$, ...), и восходящую волну $U'$ на поверхности среды ($I_1$, $I_2$, $I_3$, ...). Заметим, что верхний слой изменился.

а) Начертите траектории лучей для некоторых из кратных отражений, присутствующих в первой, но отсутствующих во второй среде.

б) Предположите, что вы можете найти математическую процедуру для преобразования $U$ в волну $U'$, и скажите, какие кратные отражения подавляются в $U'$, но не устраняются с помощью оператора Бэкуса?

в) С помощью приемов, изложенных в гл. 8 работы [53], найдите уравнение для $U'$, выраженное через $U$, $I_1$ и $I_2$, но не связанное с параметрами $I_3$, $I_4$, ....

## 5.7. Изображение полевых сейсмограмм

Полевая сейсмограмма состоит из сейсмотрасс, полученных с помощью множества приемных групп, расставленных по профилю, и при одном положении пикета возбуждения упругих волн. Миграционное преобразование одиночной сейсмограммы или множества отстоящих друг от друга на большие расстояния сейсмограмм должно базироваться на такой концептуальной основе, которая очень далека от всего того, что до сих пор обсуждалось в настоящей книге, т. е. от концепций излучающих границ и погружающихся наблюдений. Требуемая концептуальная основа существует, имеет довольно долгую историю [27] и кажется более основательной, чем только что упомянутые концепции. Имеется в виду концепция сейсмического изображения, основанная на отношении восходящей волны к падающей, или концепция В П.

Для осуществления концепции погружения наблюдений, по-видимому, требуется полное волновое насыщение пространства с координатами источник приемник. Модель излучающих границ работает при наличии многочисленных и близко расположенных друг к другу пикетов возбуждения. В то же время сейсмическое изображение полевых сейсмограмм, основанное на концепции В П, не накладывает каких-либо ограничений на плотность расположения источников по линии наблюдения. Примером массива данных, который можно обрабатывать только на основе упомянутой выше концепции, является запись с помощью акустического буя. Акустический буй представляет собой гидросейсмоприемник с радиопередатчиком. Буй выбрасывается за борт и судно-взрывпункт, удаляясь, производит взрывы пневмоустройства до тех пор, пока удаление не станет слишком большим. Согласно принципу взаимности, полученные таким образом записи равнозначны наблюдениям при одиночном источнике и очень длинной расстановке сейсмоприемников.

Совершенствование технологии сейсморазведочных работ ведет к повышению плотности дискретизации по оси приема, однако маловероятно, что аналогичное будет наблюдаться и по оси источников. Поэтому при заданной площади съемки и определенном числе месяцев работы мы останавливаемся на какой-то минимально возможной плотности расположения пунктов взрыва по профилям. В самом деле, в случае доказательства эффективности трехмерной сейсморазведки мы

станем свидетелями уменьшения плотности пространственной дискретизации. Невысокая плотность дискретизации по оси источников не является большой помехой для получения изображения полевых сейсмограмм.

В отличие от методов излучающих границ и погружения наблюдений концепции В/П допускают предельно простое моделирование и анализ кратных отражений. Так, в работе [53] помещен алгоритм одновременного выполнения миграционного преобразования и подавления реверберациий. В принципе он применим и к полевым наблюдениям, и к направленным суммам.

Основываясь на волновом уравнении, можно предложить новые способы определения поправок за зону малых скоростей. Ни один из них еще не нашел широкого практическго применения и поэтому рано говорить о том, какой из подходов — основанный ли на уравнении с двумя квадратными корнями, либо на обработке полевых сейсмограмм — окажется лучше.

Все приведенные выше соображения обосновывают необходимость дать краткий обзор процедур миграционного преобразования полевых сейсмограмм и концепций В/П сейсмического изображения.

### Концепция В/П сейсмического изображения

Концепция В/П сейсмического изображения гласит, что отражающие границы находятся в тех местах земной среды, где вступление падающей волны совпадает по времени с вступлением восходящей. На рис. 178 изложенная выше концепция поясняется графически. Волновое возмущение покидает поверхность земли в момент времени $t=0$ и регистрируется погруженными в среду сейсмоприемниками $G_1$, ..., $G_s$ во все более и более поздние времена. На глубине залегания отражающей границы $z_3$ сейсмоприемник $G_3$ регистрирует совпадающие по времени восходящую и падающую волны. Расположенные выше сейсмоприемники также регистрируют обе волны. Расположенные ниже сейсмоприемники регистрируют только волну П. Согласно основополагающему принципу изображения отражающих границ, отражающие границы находятся там, где В и П совпадают по времени.

Легко спутать концепции погружения наблюдений и отношения восходящей волны к падающей из-за схожести описывающих их выражений, так как выражение «продолжать источники в нижнее полупространство» звучит похоже на выражение «продолжать в нижнее полупространство падающую волну». Первая концепция предполагает вычисления, связанные только с восходящим волновым полем $U(s, g, z, t)$, вторая —

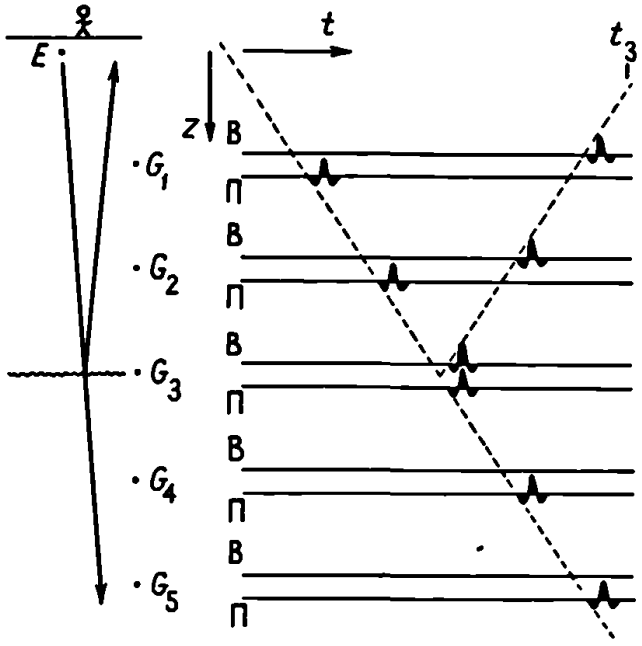



РИС. 178. Графическое пояснение концепции сейсмического изображения, основанного на отношении восходящей и падающей волн (В П) (по Релею)

как с восходящими $U(x, z, t)$, так и падающими $D(x, z, t)$ волнами. В концепцию В П не входят никакие координаты источника, в качестве источника может служить и падающая плоская волна.

В методах миграционного преобразования полевых сейсмограмм падающую волну обычно рассматривают теоретически, т. е. ее представляют, как правило, в виде импульса, время пробега которого задается либо аналитически, либо расчетом лучевой траектории. Однако с падающей волной можно обращаться так же, как с восходящей, т. е. применять к ней фурье- или конечно-разностные методы преобразований, описанные в предыдущих главах. Восходящую волну можно выражать в декартовых координатах или же в координатной системе кинематических поправок, которая будет описана ниже.

Совпадение времени падающей и восходящей волн можно определить несколькими способами. Наиболее простым выглядит способ определения нулевого сдвига функции взаимной корреляции указанных волн. Сейсмическое изображение создается путем графического построения в пространстве $(x, z)$ значений функции взаимной корреляции при нулевом сдвиге.

Факт совпадения восходящей волны с самым первым вступлением падающей свидетельствует о существовании здесь отражающей границы, но в принципе по этим двум волнам можно узнать значительно больше. Отношение амплитуд восходящей и падающей волн дает значение коэффициента отражения.

Произведение $U(\omega, x, z)\bar{D}(\omega, x, z)$ в фурье-области определяет значение функции взаимной корреляции при нулевом сдвиге. Значение коэффициента отражения задается отношением $U(\omega, x, z)/D(\omega, x, z)$. С последним отношением возникает много сложностей, т. е. не только его знаменатель может обратиться в нуль, но оно само может иметь нули. Такое случается, когда

падающая волна причинная, но не минимально-фазовая (см. раздел 4.6 и работу [53]). Фаза комплексно-сопряженного с некоторым комплексным числом равна фазе числа, обратного последнему. Поэтому отношение В/П и произведение $B \cdot \bar{П}$ имеют один и тот же фазовый спектр.

В работе [113] предложена иная формулировка принципа В/П, которая гласит, что на всех временах до первого вступления падающей волны восходящие должны быть равны нулю. Эта формулировка нашла применение в методе подавления реверберации с помощью волнового уравнения.

### Миграционное преобразование с вводом кинематических поправок

Если бы земная среда была действительно неоднородной во всех трех направлениях, то вряд ли можно было ожидать, что наблюдения по одиночному сейсмическому профилю вообще имели бы хоть какой-то смысл. Но сейсморазведка отраженными волнами, как правило, эффективна даже в тех случаях, когда она ограничена всего лишь одним профилем. Последнее указывает на правомерность слоистой модели земной среды в качестве обоснованного начального представления о ее геологическом строении. Отсюда следует, что ввод кинематических поправок нормального ряда является хорошей начальной процедурой обработки. С математической точки зрения ввод нормальных кинематических поправок прекрасным средством обработки сейсмических материалов в условиях изменения скорости с глубиной, но его эффективность падает при наличии крутых углов наклона границ или широкого диапазона изменения кажущихся скоростей.

Мои ранние программы миграции основывались на концепциях, построенных на особенностях одиночных полевых сейсмограмм. В соответствии с ними наблюденные данные и волновое уравнение преобразовывались с учетом скорректированной за кинематику координатной системы. Такой подход к миграционному преобразованию очень удобен при работе с сейсмограммами, трассы которых отстоят друг от друга на большие расстояния. Когда же миграционное преобразование оценивают по величине обрабатываемых углов наклона границ, тогда ввод кинематических поправок не дает никаких преимуществ, по существу внося ненужные усложнения. Какими бы ни были их достоинства или недостатки, кинематические поправки привлекают к себе внимание из-за их почти универсальной применимости в практической сейсморазведке.

## Кинематически-радиальные координаты в пространстве сейсмоприемников

Проводя теоретический анализ, мы отвлечемся от оси сейсмоприемников $g$ и обратимся к радиальной оси, характеризуемой параметром Снеллиуса $p$. (Не будем говорить о процедурах обработки, так как довольно просто преобразовать окончательные уравнения обратно в координату удаления.) Принятая нами система координат будет называться запаздывающей исправленной за кинематику и основанной на трассах Снеллиуса. В такой координатной системе и в условиях горизонтально-слоистой среды идеальные данные при их продолжении в нижнее полупространство не изменяются, но при этом возрастает необходимость в пространственной дискретизации данных. Введем следующие определения: $p$ — лучевой параметр Снеллиуса, равный $(\sin\theta)/v$; $t_p$ любое время пробега в одну сторону от поверхности земли по лучу с параметром $p$; $g$ — расстояние на поверхности от источника до приемника; $t'$ — время пробега по лучу в одну сторону, от поверхности земли до отражающей границы; $\tau$ глубина погружения сейсмоприемников, выраженная во времени пробега по лучу в одну сторону; $t$ время пробега, отмечаемое погруженным сейсмоприемником; $v(p, t_p)$ стратифицированная функция скорости $v'(z)$ в новых координатах.

Данная координатная система основывается на следующих простых утверждениях: 1) время пробега от источника до сейсмоприемника равно удвоенному времени пробега от источника до отражающей границы за вычетом выраженной во времени глубины погружения сейсмоприемника; 2) пробегаемое лучом расстояние по горизонтали равно интегралу по времени функции $v\sin\theta = pv^2$; 3) пробегаемое лучом расстояние по вертикали рассчитывается так же, как и расстояние по горизонтали, но вместо синуса следует взять косинус:

$$t(t', p, \tau) = 2t' - \tau, \tag{415}$$

$$g(t', p, \tau) = 2p\int_0^{t'} v(p, t_p)^2\, dt_p - p\int_0^{\tau} v(p, t_p)^2\, dt_p, \tag{416}$$

$$z(t', p, \tau) = \int_0^{\tau} v(p, t_p)\sqrt{1 - p^2v^2}\, dt_p. \tag{417}$$

Поверхности с постоянными значениями $t'$ являются отражающими. Поверхности с постоянным значением параметра $p$ представляют собой лучи. Поверхности с постоянными значениями $\tau$ представляют собой уровни приведения. К сожалению, нет возможности совершить обращение приведенной выше системы в явном виде и получить координаты $(t', p, \tau)$ в виде

функции координат ($t$, $g$, $z$). Однако можно продолжить данный процесс в аналитическом виде, прибегнув к дифференциалам. Образуем якобианову матрицу вида

$$\begin{bmatrix} \partial_{t'} \\ \partial_p \\ \partial_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{t'} & g_{t'} & z_{t'} \\ t_p & g_p & z_p \\ t_\tau & g_\tau & z_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_t \\ \partial_g \\ \partial_z \end{bmatrix}. \tag{418}$$

Выполнив дифференцирование только в тех случаях, когда оно приводит к очевидным упрощениям, получим уравнение преобразования переменных Фурье

$$\begin{bmatrix} -\omega' \\ k_p \\ k_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & g_{t'} & 0 \\ 0 & g_p & z_p \\ -1 & g_\tau & z_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega \\ k_g \\ k_z \end{bmatrix} \tag{419}$$

Следует отметить, что (419) представляет собой линейную зависимость между переменными Фурье, но в коэффициентах содержатся первоначальные переменные по времени и пространству. Поэтому уравнение (419) существует сразу в двух областях. Это полезно и справедливо до тех пор, пока предполагается, что во вторых производных нет производных по самой координатной системе.

Продолжая разрабатывать случай с ненулевыми удалениями, можно увязнуть в подробностях. Ограничившись случаем нулевого удаления по горизонтали, т. е., положив $P=0$, получаем

$$\begin{bmatrix} -\omega' \\ k_p \\ k_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 02t'-\tau 0 \\ -10 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega \\ k_g \\ k_z \end{bmatrix} \tag{420}$$

Уравнение (420) можно подставить в уравнение с одним квадратным корнем, используемое для продолжения в нижнее полупространство точек приема, и таким путем преобразовать его в запаздывающее в новой координатной системе.

## Исторические заметки по поводу весового коэффициента

Мои первые опыты по миграционному преобразованию данных метода отраженных волн с помощью волнового уравнения основывались на концепции В/П. Первая программа миграции по волновому уравнению была составлена для частотной области, и с ее помощью обрабатывались синтезированные материалы. Поскольку подобные работы, как правило, не пользовались вниманием, автор решил опробовать программу на реальных полевых материалах. За методами, работающими в частотной области, закрепилось мнение «академических», т. е. имеющих чисто учебную ценность. Я обна-

ружил, что преобразовать 15-градусное уравнение во временное представление можно с помощью билинейного преобразования, известного в теории Z-преобразований. С практической точки зрения было очевидным, что программу миграции полевых сейсмограмм можно применить и к разрезу. Но доказать очевидное теоретически было нелегко. В то время я смотрел на концепцию излучающих границ, как на одну из любопытных аналогий, но не как на основание для вывода нужных мне уравнений.

Реальная процедура, с помощью которой впервые был смигрирован разрез нулевых удалений с использованием конечных разностей, была более замысловатой и усложненной, чем способ, предложенный позднее Дж. Шервудом [94] и нашедший всеобщее признание. В уравнениях миграционного преобразования полевых сейсмограмм в скорректированных за кинематику координатах содержится много членов. Отбросив все те, у которых в качестве коэффициента употребляется координата удаления от источника (поскольку делается попытка мигрировать разрез при нулевых удалениях), получаем уравнение, похожее на запаздывающее 15-градусовое уравнение экстраполяции, но имеющее одно отличие. Член $v\partial_{gg}$ умножен на некоторый коэффициент вида $[t'/(2t'-\tau)]^2$. Я пользовался именно этим уравнением. По мере того, как выраженная во времени глубина $\tau$ растет от нуля до конечной $t'$, коэффициент медленно возрастает от 1/4 до 1.

К сожалению, мой вывод был настолько сложным, что лишь немногие поняли его. (Заметьте, что здесь я не привожу его полностью.) В опубликованной в 1972 г. статье я привел полный вывод, но вводная по своему характеру, эта статья содержит описание более простого в концептуальном отношении случая сейсмического разреза, который получается, если задать источник в виде падающей плоской волны. В подобном упрощенном случае вы быстро приходите к уравнению миграционного преобразования, но в нем отсутствует этот таинственный коэффициент. Усредненный по глубине он становится равным 1/2. (Коэффициент умножается на вторую производную по $x$ и получается из $\Delta x$, уменьшающейся по мере спуска приемников по координатной лучевой траектории в направлении к пункту взрыва). Однажды Дж. Шервуд позвонил мне и попросил объяснить, почему этот коэффициент нельзя заменить на его среднее значение, равное 1/2. Тогда я не смог дать объяснения, не могу сделать этого и сейчас. Поэтому он отказался от моего вывода через свертку и принял в качестве условия модель излучающих границ, в результате чего легко получил требуемую 1/2. В вопрос о таинственном коэффициенте удалось внести некоторую ясность некоторое время спустя, когда в результате совместной работы с С. Доэрти,

Ф. Мюиром и Р. Клейтоном возникла концепция погружения наблюдений.

В моей первой книге [53] сказано, как можно использовать концепцию В/П при решении следующих трех задач: миграционного преобразования, скоростного анализа и подавления кратных отражений. И только при миграции разрезов нулевых удалений (точнее, при миграции разрезов ОГТ) методика обработки, основанная на использовании волнового уравнения, стала частью повседневной практики. Несмотря ни на что, концепция отношения восходящей и падающей волн была предана забвению и заменена на шервудовскую концепцию излучающих отражающих границ.

## 5.8. Прогноз на следующее десятилетие

В 1960-х годах сейсморазведчики научились применять теорию оптимизации временных рядов при обработке сейсмических материалов [53]. Постепенно отдача от использования понятий теории временных рядов стала уменьшаться, так как подход к пространственным зависимостям с точки зрения временных рядов оказался чрезмерно упрощенным. В 1970-х годах сейсморазведчики научились пользоваться волновым уравнением. Об этом, собственно, и говорилось в настоящей книге. Вы убедились, что разработка вопросов практического применения волнового уравнения еще не завершена, хотя пройден большой путь. Не исключено, что нам удалось решить большинство из первоочередных задач и остающиеся нерешенными проблемы в основном имеют второстепенное значение. Для того, чтобы эффекты второго порядка приобрели значимость, нужно обоснованно учесть все явления первого.

Некоторые из проблем, затронутых в настоящей книге лишь вскользь, связаны с несовершенством сейсмограмм (как с очевидным, так и неявным).

### Проблемы, связанные с базой данных

Мы часто встречаемся с проблемой усечения. Ясно, что приемная расстановка имеет конечную длину и заметные по своей интенсивности волны распространяются далеко за ее пределами. Сама площадь сейсмической разведки обычно имеет конечные размеры. Встречается также и проблема пропусков в наблюдениях. Пропуски в сейсмограммах могут возникать неожиданно, например, когда не срабатывает пневмоисточник, или топографам не разрешают разбивать профили на отдельных участках, расположенных на площади съемки. Кроме того, возникают проблемы, связанные с недостаточно плотной дискретизацией по пространственной координате. В связи с

совершенствованием технологии производства работ можно надеяться на существенное снижение искажений дискретизации по оси приемников, но искажения такого рода по оси источников сохранятся. В сутках всего 24 ч, а взрывы приходится производить не чаще, чем через 10 с, в течение которых возбужденные взрывом колебания успевают затухнуть. Поэтому при заданных площади съемки и числе рабочих месяцев получается определенное число взрывов на каждый квадратный километр. При обработке данных морской сейсморазведки учет расстояний между пикетами приема по линии профиля не представляет никаких проблем по сравнению с теми трудностями, которые возникают при смещении наблюдений в поперечном к профилю направлении.

Миграционное преобразование обеспечивает отображение пространства наблюденных данных на пространство модели строения земных недр. Это преобразование обратимо (в подпространстве медленно затухающих волн). Когда есть пропуск в наблюдениях, матрица упомянутого преобразования разбивается на две части. Одна ее часть оперирует с известными значениями данных, другая — с пропущенными. В настоящей книге, за исключением небольшой части раздела 3.5, пропущенная часть матрицы данных не рассматривается. В разделе 3.5 изложена стратегия обработки при наличии пропусков, но она слишком дорогая, и я считаю, что она будет заменена иной или же в корне усовершенствована.

Отягощенные помехами наблюдения можно трактовать, как наблюдения, не согласующиеся с нашей моделью. Если, например, пропущенные наблюдения заменить нулями, то получившиеся в результате данные можно считать полными, но отягощенными помехой. Наблюдения отсутствуют там, где отношения сигнал/помеха равно нулю. Годятся и более общие модели помех, но статистический подход к обработке частично-когерентных многомерных волновых полей разработан плохо, причем как теоретически, так и практически.

Я предсказываю, что одно из главных направлений научно-исследовательской деятельности в следующем десятилетии будет связано с попытками научиться использовать одновременно физические и статистические характеристики волновых полей.

### Соединение оптимизационной и волновой теорий

Заглянем за рамки настоящей книги в будущее. Типичное сейсмическое изображение представляет собой плоскость размером $1000 \times 1000$ отсчетов, полученную в результате обработки приблизительно $1000^3$ взаимосвязанных выборок из наблюдений. Повсюду есть неизвестные величины, не только в модели

земной среды, но также и в наблюденных данных в виде помех, пропусков, недостаточной плотности наблюдений и площади съемки по пространственной координате. Чтобы составить один из вариантов интерпретации, нужно объединить принципы физики с принципами математической статистики. Такое, вероятно, можно осуществить, построив этакое чудовищное оптимизирующее решение. Достаточно беглого взгляда на теорию оптимизации, чтобы убедиться, что методы решения сходятся после числа итераций, превышающего число неизвестных. Таким образом, решение подобной задачи при условии, что мы научимся правильно ее ставить, потребует, как нам кажется, приблизительно в миллион раз больших вычислительных мощностей, чем те, которыми мы располагаем в настоящее время. Вот это задача!

Но чем больше вы размышляете над этой задачей, тем интереснее она выглядит. Во-первых, перед нами стоит задача оптимизации. Поскольку мы ограничены в возможностях и можем выполнять лишь несколько, скажем, три итерации, нужно за эти три шага пройти как можно дальшей. Во-вторых, перед нами стоит не только первоначальная задача оптимизации, но появляется еще и новая задача — решить первоначальную оптимальным способом. Сначала мы прокоррелировали случайность, содержащуюся с исходных данных. Затем в процессе оптимизации модель земной среды изменяется от одной итерации к другой коррелированным образом. Вторая задача оптимизации имеет не только практическое, но и теоретическое значение.

### Откажитесь от бумажных разрезов

Современная интерпретация сейсмических данных часто сводится к тому, что берут цветные карандаши и подчеркивают ими некоторые особенности созданного машиной изображения. Сейсмическая интерпретация вступает в эру, когда вся она будет выполняться на видеоэкране. Главная причина этого в том, что лист бумаги двухмерен, а большая часть наблюдений отраженных волн трехмерна. При современных трехмерных съемках фактически регистрируются четырехмерные наблюдения. На видеоэкране можно просматривать кинофильмы в нужном для интерпретатора режиме. Есть вещи, которые хотелось бы показать вам, но этого не сделаешь в книге. Сейсмические данные (даже чистый лист бумаги) имеют свою текстуру. Вы сразу заметите, когда движется текстурированный объект, но этого не покажешь с помощью рисунков в книге. Вообразите себе последовательность рисунков в виде чистых листков бумаги, каждый из которых несколько смещен по отношению к предыдущему. Восприятию малых изменений

препятствует перемещение глаза между картинками. Астрономы ищут изменения в небе, быстро моргая в промежутках между взглядами на фотографии, отснятые в различные моменты времени. Наши глаза являются специальными оптическими вычислительными машинами. В сейсмических кинофильмах часто удается заметить откуда приходит нечто и это позволяет увидеть неожиданное в окружающем фоне.

Большая часть интерпретации сейсмических данных производится по отсуммированным разрезам ОГТ. Первоначальные данные трехмерны, но одно из измерений исчезает в результате суммирования. С теоретической точки зрения суммирование устраняет только избыточность наблюденных данных, одновременно усиливая отношение сигнал/помеха. В действительности же все обстоит гораздо сложнее, и гораздо большая информация будет восприниматься, когда суммирование будет осуществляться человеческим глазом (например, простым увеличением скорости протяжки киноленты). Будут сосуществовать два поколения сейсморазведчиков-интерпретаторов: те, кто может интерпретировать исходные данные, наблюдаемые на видеоэкране, и те, кто интерпретирует лишь отсуммированные разрезы.

# Список литературы


1.* Aki, K., and Richards , P.G., 1980, *Quantitative seismology, theory and methods*: vol. I and II, Freeman, San Francisco.
2. Anstey, N.A., 1980, *Seismic exploration for sandstone reservoirs*, International Human Resources Development Corporation, Boston.
3. Backus, M.M., 1959, Water reverberations their nature and elimination: *Geophysics*, vol. 24, pp. 233-261.
4. Backus, M.M., and Chen, R.L., 1975, Flat spot exploration: *Geophys. Prosp.*, vol. 23, pp. 533-577.
5. Balch, A.H., Lee, M.W., Miller, J.J., and Taylor, R.T., 1982, The use of vertical seismic profiles in seismic investigations of the earth: *Geophysics*, vol. 47, pp. 906-918.
6. Bally, A.W., 1983, Seismic expression of structural styles A picture and work atlas: AAPG studies in geology # 15 - vol. 1, 2, and 3, AAPG, P.O. Box 979, Tulsa, OK 74101.
7. Baysal, E., Kosloff, D.D., and Sherwood, J.W.C, 1983, Reverse time migration: *Geophysics*, vol. 48, pp. 1514-1524.
8. Beresford-Smith, G., and Mason, I.M., 1980, A parametric approach to the compression of seismic signals by frequency transformation: *Geophys. Prosp.*, vol. 28, pp. 551-571.
9. Berkhout, A.J., 1979, Steep dip finite-difference migration: *Geophys. Prosp.*, vol. 27, pp. 196-213.
10. Berkhout, A.J., and van Wulfften Palthe, D.W., 1979, Migration in terms of spatial deconvolution: *Geophys. Prosp.*, vol. 27, pp. 261-291.
11. Berkhout, A.J., 1980, *Seismic migration Imaging of acoustic energy by wave field extrapolation*: Amsterdam New York, Elsevier North Holland Publishing Co.
12. Berkhout, A.J., and van Wulfften Palthe, D.W., 1980, Migration in the presence of noise: *Geophys. Prosp.*, vol. 28, pp. 372-383.
13. Berkhout, A.J., 1981, Wave field extrapolation techniques in seismic migration, a tutorial: *Geophysics*, vol. 46, pp. 1638-1656.
14. Berkhout, A.J., and De Jong, B.A., 1981, Recursive migration in three dimensions: *Geophys. Prosp.*, vol. 29, pp. 758-781.
15. Berryhill, R.T., 1979, Wave equation datuming: *Geophysics*, vol. 44, pp. 1329-1344.
16. Bleistein, N., 1984, *Mathematical methods for wave phenomena*, Academic Press.
17. Bleistein, N., and Cohen, J.K., 1979, Direct inversion procedure for Claerbout's equations: *Geophysics*, vol. 44, pp. 1034-1040.
18. Bloxsom, H., 1979, *Migration and interpretation of deep crustal seismic reflection data*: Ph.D. thesis,[1] Stanford University, SEP-22.
19. Bolondi, G., Rocca, F., and Savelli, S., 1978, A frequency domain approach to two-dimensional migration: *Geophys. Prosp.*, vol. 26, pp. 750-772.
20. Bolondi, G., Loinger, E., and Rocca, F., 1982, Offset continuation of seismic sections: *Geophys. Prosp.*, vol. 30, pp. 813-828.
21. Brown, D.L., 1983, Applications of operator separation in reflection seismology: *Geophysics*, vol. 48, pp. 288-294.
22. Buhl, P., Diebold, J.B., and Stoffa, P.L., 1982, Array length magnification through the use of multiple sources and receiving arrays: *Geophyics*, vol. 47, pp. 311-315.

Примечание. Звездочкой помечены работы, изданные на русском языке.

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы, т. 1 и 2. М: Мир, 1983.
33. Клаербоут Дж. Ф. Теоретические основы обработки геофизической информации. М.: Недра, 1981.
57. Гальперин Е. И. Вертикальное сейсмическое профилирование. М.: Недра, 1971.
116. Робинсон Е. А. Метод миграции в сейсморазведке. М.: Недра, 1988.
148. Уотерс К. Отражательная сейсмология. М.: Мир, 1981.

23. Burg, J.P., 1975, *Maximum entropy spectral analysis*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-6.
24. Cherry, J.T., and Waters, K.H., 1968, Shear-wave recording using continuous signal methods, Part I - Early development: *Geophysics*, vol. 33, pp. 229-239.
25. Cerveny, V., I.A. Molotkov, I. Psencik, 1977, *Ray Method in Seismology*, Univerzita Karlova, Prague
26. Chun, J.H., and Jacewitz, C.A., 1981, Fundamentals of frequency domain migration: *Geophysics*, vol. 46, pp. 717-733.
27. Claerbout, J.F., 1970, Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure: *Geophysics*, vol. 35, pp. 407-418.
28. Claerbout, J.F., 1971, Toward a unified theory of reflector mapping: *Geophysics*, vol. 36, pp. 467-481.
29. Claerbout, J.F., and Johnson, A.G., 1971, Extrapolation of time-dependent waveforms along their path of propagation: *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, vol.* 26, pp. 285-293.
30. Claerbout, J.F., 1971, Numerical holography: *Acoustical Holography*, vol. 3, pp. 273-283.
31. Claerbout, J.F., and Doherty, S.M., 1972, Downward continuation of moveout corrected seismograms: *Geophysics*, vol. 37, pp. 741-768.
32. Claerbout, J.F., and Muir, F., 1973, Robust modeling with erratic data: *Geophysics*, vol. 38, pp. 826-844.
33.* Claerbout, J.F., 1976, *Fundamentals of geophysical data processing*: McGraw-Hill (sometimes referred to in the text of this book as FGDP).
34. Clayton, R.W., and Engquist, B., 1980, Absorbing side boundary conditions for wave-equation migration: *Geophysics*, vol. 45, pp. 895-904.
35. Clayton, R.W., 1981, *Wavefield inversion methods for refraction and reflection data*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-27.
36. Clayton, R.W., and McMechan, G.A., 1981, Inversion of refraction data by wave field continutation: *Geophysics*, vol. 46, pp. 860-868.
37. Cohen, J.K., and Bleistein, N., 1979, Velocity inversion procedure for acoustic waves: *Geophysics*, vol. 44, pp. 1077-1087.
38. Crank, J., and Nicolson, P., 1947, A Practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type: Proc. Cabridge Philos. Soc., vol. 43, p. 50.
39. Dahm, C.G., and Graebner, R.J., 1982, Field development with three-dimensional seismic methods in the Gulf of Thailand - a case history: *Geophysics*, vol. 47, pp. 149-176.
40. Deans, S.R., 1983, The Radon transform and some of its applications: John Wiley, pp. 204-217.
41. Dent B., 1983, Compensation of marine seismic data for the effects of highly variable water depth using ray-trace modeling A case history: *Geophysics*, vol. 48, pp. 910-933.
42. Diebold, J.D., and Stoffa, P.L., 1981, The travel time equation, tau-p mapping and inversion of common midpoint data: *Geophysics*, vol. 46, pp. 238-254.
43. Diet, J.D., and Fourmann, J.M., 1979, Determination of the shape parameter W in Stolt's frequency domain migration: presented at 49th Annual International Society of Exploration Geophysicts Meeting, New Orleans.
44. Doherty, S.M., and Claerbout, J.F., 1976, Structure independent seismic velocity estimation: *Geophysics*, vol. 41, pp. 850-881.
45. Doherty, S.M., 1975, *Structure independent seismic velocity estimation*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-4.
46. Dohr, G.P., and Stiller, P.K., 1975, Migration velocity determination: Part II. Applications: *Geophysics*, vol. 40, pp. 6-16.
47. Embree, P., Burg, J.P., and Backus, M.M., 1963, Wide-band velocity filtering the pie-slice process: *Geophysics*, vol. 28, pp. 948-974.
48. Engquist, B., and Majda, A., 1979, Radiation boundary conditions for acoustic and elastic waves: *Communications on Pure and Applied Mathematics*,

vol. 32, pp. 313-320.
49. Erickson, E.L., Miller, D.E., and Waters, K.H., 1968, Shear-wave recording using continuous signal methods, Part II - Later experimentation: *Geophysics*, vol. 33, pp. 240-254.
50. Estevez, R., 1977, *Wide-angle diffracted multiple reflections*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-12.
51. Estevez, R., and Claerbout, J.F., 1982, Wide-angle diffracted multiple reflections: *Geophysics*, vol. 47, pp. 1255-1272.
52. Fenati, D. and Rocca, F. 1984, Seismic reciprocity field tests from the Italian Peninsula: *Geophysics* vol. 49, pp. 1690-1700.
53. FGDP: see Claerbout, J.F., 1976.
54. French, W.S., 1974, Two-dimensional and three-dimensional migration of model-experiment reflection profiles: *Geophysics*, vol. 39, pp. 265-277.
55. French, W.S., 1975, Computer migration of oblique seismic reflection profiles: *Geophysics*, vol. 40, pp. 961-980.
56. Gabitzsch, J.H., 1978, Wave number migration: Application to variable velocity: presented at the 48th Annual International SEG Meeting, San Francisco.
57.* Gal'perin, E.I., 1974, *Vertical Seismic Profiling*, translated by A.J. Hermont, Society of Exploration Geophysicists, Special Publication No. 12.
58. Gardner, G.H.F., French, W.S., and Matzuk, T., 1974, Elements of migration and velocity analysis: *Geophysics*, vol. 39, pp. 811-825.
59. Garotta, R., and Baixas, F., 1979, Simulation directional acquisition as an aid to migration: presented at the 49th Annual International SEG Meeting, New Orleans.
60. Gazdag, J., 1978, Wave equation migration with the phase shift method: *Geophysics*, vol. 43, pp. 1342-1351.
61. Gazdag, J., 1980, Wave equation migration with the accurate space derivative method: *Geophys. Prosp.*, vol. 28, pp. 60-70.
62. Gazdag, J., 1981, Modeling of the acoustic wave equation with transform methods: *Geophysics*,, vol. 46, pp. 854-859.
63. Gazdag, J., and Sguazzero, P.,1984, Migration of seismic data by phase shift plus interpolation: *Geophysics*, vol. 49, pp. 124-131.
64. Gibson, B., Larner, K., and Levin, S., 1983, Efficient 3-D migration in two steps: *Geophys. Prosp.*, vol. 31, pp. 1-33.
65. Godfrey, R.J., 1979, *A stochastic model for seismogram analysis*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-17.
66. Godfrey, R. and Rocca, F., 1981, Zero memory non-linear deconvolution: *Geophys. Prosp.*, vol. 29, pp. 189-228.
67. Gonzalez-Serrano, A., 1982, *Wave equation velocity analysis*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-31.
68. Gonzalez-Serrano, A., and Claerbout, J.F., 1984, Wave equation velocity analysis: *Geophysics*, vol. 49, pp. 1431-1456.
69. Gray, W.C., 1979, *Variable norm deconvolution*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-19.
70. Hale, D. and Claerbout, J.F., 1983, Butterworth dip filters: *Geophysics*, v ol.48,
pp. 1033-1038.
71. Hale, I.D., 1983, *Dip-Moveout by Fourier Transform*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-36.
72. Hale, I.D., 1984, Dip-moveout by Fourier transform: *Geophysics*, vol. 49, pp. 741-757.
73. Hatton, L., Larner, K., and Gibson, B., 1981, Migration of seismic data from inhomogeneous media: *Geophysics*, vol. 46, pp. 751-767.
74. Hemon, Ch., 1978, Equations d'onde et modeles, *Geophysical Prospecting*, vol. 26, pp. 790-821.
75. Herman, A.J., Anania, R.M., Chun, J.H., Jacewitz, C.A., and Pepper, R.E.F., 1982, A fast three-dimensional modeling technique and fundamentals of

three-dimensional frequency-domain migration: *Geophysics*, vol. 47, pp. 1627-1644.
76. Hilterman, F.J., 1970, Three-dimensional seismic modeling: *Geophysics*, vol. 35, p. 1020.
77. Hood, P., 1978, Finite difference and wave number migration: *Geophys. Prosp.*, vol. 26, pp. 773-789.
78. Hubral, P., 1977, Time migration - some ray theoretical aspects: *Geophys. Prosp.*, vol. 25, pp. 738-745.
79. Hubral, P., 1980, Wavefront curvatures in three-dimensional laterally inhomogeneous media with curved interfaces: *Geophysics*, vol. 45, pp. 905-913.
80. Jacobs, A., 1982, *The pre-stack migration of profiles*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-34.
81. Jakubowicz, H., and Levin, S., 1983, A simple exact method of 3 - D migration: *Geophys. Prosp.*, vol. 31, pp. 34-56.
82. Jain, S., and Wren, A.E., 1980, Migration before stack - Procedure and significance: *Geophysics*, vol. 45, pp. 204-212.
83. Jones, W.B., and Thron, W.J., 1980, *Continued fractions: encyclopedia of mathematics and its applications*: American Mathematical Society, vol. 11.
84. Judson, D.R., Lin, J., Schultz, P.S., and Sherwood, J.W.C., 1980, Depth migration after stack: *Geophysics*, vol. 45, pp. 361-375.
85. Kennett, B.L.N., 1983, *Seismic wave propagation in stratified media*: Cambridge University Press.
86. Kjartansson, E., 1979a, *Attenuation of seismic waves in rocks and applications in energy exploration*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-23.
87. Kjartansson, E., 1979b, Constant $Q$ - wave propagation and attenuation: *J. Geophys. Res.*, vol. 84, pp. 4737-4748.
88. Kosloff, D.D., and Baysal, E., 1983, Migration with the full acoustic wave equation: *Geophysics*, vol. 48, pp. 677-687.
89. Larner, K., Chambers, R., Yang, M., Lynn, W., and Wai, W., 1983, Coherent noise in marine seismic data: *Geophysics*, vol. 48, pp. 854-886.
90. Larner, K.L., Hatton, L., Gibson, B.S., and Hsu, I.C., 1981, Depth migration of imaged time sections: *Geophysics*, vol. 46, pp. 734-750.
91. Levin, F.K., 1971, Apparent velocity from dipping interface reflections: *Geophysics*, vol. 36, pp. 510-516.
92. Levin, F.K., Bayhi, J.F., Dunkin, J.W., Lea, J.D., et al., 1976, Developments in exploration geophysics, 1969 - 1974: *Geophysics*, vol. 43, pp. 23-48.
93. Levin, S.A., 1984, Discussion On: "Dip limitations on migrated sections as a function of line length and recording time" by H.B. Lynn and S. Deregowski (*Geophysics*, v. 46, p. 1362, October, 1981). *Geophysics*, vol. 49, pp. 1804-1805.
94. Loewenthal, D., Lu, L., Roberson, R., and Sherwood, J., 1976, The wave equation applied to migration: *Geophys. Prosp.*, vol. 24, pp. 380-399.
95. Lynn, W.S., 1979, *Velocity estimation in laterally varying media*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-21.
96. Lynn, W.S., and Claerbout, J.F., 1982, Velocity estimation in laterally varying media: *Geophysics*, vol. 47, pp. 884-897.
97. Ma Zaitian, 1981, *Finite difference migration with higher order approximation*: technical report of the China National Oil and Gas Exploration and Development Co.
98. Ma Zaitian, 1982, Steep dip finite difference migration: *Oil Geophysical Prospecting*, no. 1, pp. 6-15 (in Chinese).
99. Madden, T.R., 1976, Random networks and mixing laws: *Geophysics*, vol. 41, pp. 1104-1125.
100. May, B.T., and Covey, J.D., 1981, An inverse method for computing geologic structures from seismic reflections - zero-offset case: *Geophysics*, vol. 46, pp. 268-287.
101. Morley, L., 1982, *Predictive techniques for marine multiple suppression*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-29.
102. Morley, L., and Claerbout, J.F., 1983, Predictive deconvolution in shot-

receiver space: *Geophysics*, vol. 48, pp. 515-531.
103. Muir F., and Claerbout, J.F., 1980, Impedance and wave extrapolation: presented at the 42nd Meeting of the European Association of Exploration Geophysicists, Istanbul.
104. Ostrander, W.J., 1984, Plane wave reflection coefficients for gas sands at non-normal angles of incidence: *Geophysics*, vol. 49, pp. 1637-1648.
105. Ottolini, R., Sword, C., and Claerbout, J.F., 1984, On-line movies of reflection seismic data with description of a movie machine: *Geophysics*, vol. 49, pp. 195-200.
106. Ottolini, R., and Claerbout, J.F., 1984, The migration of common midpoint slant stacks: *Geophysics*, vol. 49, pp. 237-249.
107. Ottolini, R., 1982, *Migration of reflection seismic data in angle-midpoint coordinates*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-33.
108. Pan, P.H., 1983, Case history of the exploration of the Grand Isle 95 Field in the Gulf of Mexico: *Geophysics*, vol. 48, pp. 900-909.
109. Pann, K., Eisner, E., and Shin, Y., 1979, A collocation formulation of wave equation migration: *Geophysics*, vol. 44, pp. 712-721.
110. Phinney, R.A., Chowdhury, K.R., and Frazer, L.N., 1981, Transformation and analysis of record sections: *J. Geophys. Res.*, vol. 86, pp. 359-377.
111. Radon, J., 1917, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte Sächische Akademie der Wissenschaften.* Leipzig, Math.-Phys. Kl. 69, pp. 262-267. for English translation see Deans [1983].
112. Rice, R.B., 1962, Inverse convolution filters: *Geophysics*, vol. 27, pp 4-18.
113. Riley, D.C., 1974, *Wave equation synthesis and inversion of diffracted multiple seismic reflections*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-3.
114. Riley, D.C., and Claerbout, J.F., 1976, 2-D multiple reflections: *Geophysics*, vol. 41, pp. 592-620.
115. Ristow, D., 1980, *Three-dimensional finite-difference migration*: Ph.D. thesis, University of Utrecht, The Netherlands.
116.* Robinson, E.A., 1983, *Migration of geophysical data*: International Human Resources Development Corporation, Boston.
117. Robinson, J.C., and Robbins, T.R., 1978, Dip-domain migration of two-dimensional seismic profiles: *Geophysics*, vol. 43, pp. 77-93.
118. Rosenbaum, J.H., and G.F. Boudreaux, 1981, Rapid convergence of some seismic processing algorithms: *Geophysics*, vol. 46, pp. 1667-1672.
119. Sangree, J.B., and Widmier, J.M., 1979, Interpretation of depositional facies from seismic data: *Geophysics*, vol. 44, pp. 131-160.
120. Sattlegger, J.W., 1975, Migration velocity determination: Part I. Philosophy: *Geophysics*, vol. 40, pp. 1-5.
121. Sattlegger, J.W., Stiller, P.K., Echterhoff, J.A., and Hentschke, M.K., 1980, Common offset plane migration (COPMIG): *Geophys. Prosp.*, vol. 28, pp. 859-871.
122. Schneider, W.A., Larner, K.L., Burg, J.P., and Backus. M.M., 1964, A new data-processing technique for the elimination of ghost arrivals on reflection seismograms: *Geophysics*, vol. 39, pp. 783-805.
123. Schneider, W.A., 1971, Developments in seismic data processing and analysis (1968-1970): *Geophysics*, vol. 36, pp. 1043-1073.
124. Schneider, W.A., 1978, Integral formulation in two and three dimensions: *Geophysics*, vol. 43, pp. 49-76.
125. Schultz, P. S., 1976, *Velocity estimation by wave front synthesis*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-9.
126. Schultz, P.S., and Claerbout, J.F., 1978, Velocity estimation and downward continuation by wavefront synthesis: *Geophysics*, vol. 43, pp. 691-714.
127. Schultz, P.S., and Sherwood, J.W., 1980, Depth migration before stack: *Geophysics*, vol. 45, pp. 376-399.
128. Schultz, P.S., 1982, A method for direct estimation of interval velocities: *Geophysics*, vol. 47, pp. 1657-1671.

129. Sengbush, R.L., 1983, *Seismic exploration methods*: International Human Resources Development Corporation, Boston.
130. Sheriff, R.E., 1980, *Seismic stratigraphy*: International Human Resources Development Corporation, Boston.
131. Sherwood, J.W.C., Adams, H., Blum, C., Judson, D., Jin Lin, and Meadours B., 1976, Developments in filtering seismic data: presented at the 46th Annual International SEG Meeting, Houston.
132. Sherwood, J.W.C., Schultz, P.S., and Judson, J.R., 1976, *Some recent developments in migration before stack*: released by Digicon Inc.
133. Slotnick, M.M., 1959, *Lessons in seismic computing:* Tulsa, Society of Exploration Geophysicists.
134. Stolt, R., 1978, Migration by Fourier transform: *Geophysics*, vol. 43, pp. 23-48.
135. Taner, M.T., and Koehler, F., 1969, Velocity spectra digital computer derivation and applications of velocity functions: *Geophysics*, vol. 34, pp. 859-881.
136. Taner, M.T., and Koehler, F. (undated), *Wave equation migration*: released by Seiscom Delta Inc., Houston.
137. Taner, M.T., 1980, Long-period sea-floor multiples and their suppression: *Geophys. Prosp.*, vol. 28, pp. 30-48.
138. Taner, M.T., and Koehler, F., 1981, Surface consistent corrections: *Geophysics*, vol. 46, pp. 17-22.
139. Taner, M.T., and Coburn, K.W., 1980, *Surface consistent estimation of source and receiver response functions*: presented at the 50th Annual International SEG Meeting, Houston.
140. Tatham, R.H., and Stoffa, P.L., 1976, $V_p V_s$ A potential hydrocarbon indicator: *Geophysics*, vol., 41, pp. 837-849.
141. Tatham, R.H., 1982, $V_p V_s$ and lithology: *Geophysics*, vol. 47, pp. 336-344.
142. Temme, P., 1984, A comparison of common-midpoint, single-shot, and plane-wave depth migration: *Geophysics*, vol. 49, pp. 1896-1907.
143. Thorson, J., 1984, *Velocity stack and slant stack inversion methods*: Ph.D. thesis, Stanford University, SEP-39.
144. Treitel, S., Gutowski, P.R., and Wagner, D.E., 1982, Plane wave decompositions of seismograms: *Geophysics*, vol. 47, pp. 1375-1401.
145. Trorey, A.W., 1970, A simple theory for seismic diffractions: *Geophysics*, vol. 35, pp. 762-784.
146. Trorey, A.W., 1977, Diffractions for arbitrary source-receiver locations: *Geophysics*,, vol. 42, pp. 1177-1182.
147. Tufekcic, D., Claerbout, J.F., and Rasperic, Z., 1981, Spectral balancing in the time domain: *Geophysics*, vol. 46, pp. 1182-1188.
148.* Waters, K.H., 1981, *Reflection seismology, a tool for energy resource exploration* (second edition): Wiley, New York.
149. Wiggins, R.A., Larner, K.L., and Wisecup, R.D. 1976, Residual statics analysis as a general linear inverse problem: *Geophysics*, vol. 41, pp. 922-938.
150. Yilmaz, O., 1979, *Pre-stack partial migration*: Ph.D., thesis, Stanford University, SEP-18.
151. Yilmaz, O., and Claerbout, J.F., 1980, Pre-stack partial migration: *Geophysics*, vol. 45, pp. 1753-1779.
152. Yilmaz, O., and Cumro, D., 1983, Worldwide Assortment of Field Seismic Records, released by Western Geophysical Company of America, Houston
153. Ziolkowski, A., 1984, *Deconvolution* International Human Resources Development Corporation, Boston.
154. Zoeppritz, K., 1919, Erdbebenwellen VIIIB: Uber Reflexion and Durchgang seismicher Wellen durch Unstetigkeitsflachen: *Göttinger Nachr.*, vol. 1, pp. 66-84.

* Ph.D. theses included in this bibliography are available from Univesity Mimrofilms International, 300 N. Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106, USA.

# Предметный указатель


Автоматическая регулировка усиления (АРУ) 254
Акустическое волновое уравнение 27, 59 61, 66 69, 73, 278
Алгоритм введения кинематических поправок за наклон границ 224
ввода кинематических поправок при постоянном удалении ПВ ПП 221
ввода радиальных кинематических поправок за наклон 228
двухмерного преобразования Фурье 77 79
Кули Тьюки 80
миграционного преобразования при углах более 90 282
Столта 44, 76, 82
транспонирования матриц 76
миграционного преобразования фазовым сдвигом 42, 285
Анизотропная дисперсия 257 266
Аффинные координаты 346
Билинейное преобразование 145, 274, 294 296,395
Боковая волна 127, 175
Боковые граничные условия 115, 279 281
Быстрозатухающая волна 62, 213, 258, 282, 304
Веерный фильтр 130 132
Вертикальная сумма 192 194
Вертикальное сейсмическое профилирование (ВСП) 362 366
Внутрислойные реверберации 56, 368
Волна Снеллиуса 69 74, 196, 321, 338, 351
Головная волна 154, 203, 212, 331, 357
Групповая скорость 256 266
Деконволюция 30, 35, 358, 373, 382
Дисперсионное соотношение 27, 61, 96, 248, 257, 279
Закон Снеллиуса 31, 70
Залечивание волнового фронта 121, 233
Замещение 121, 387
Запаздывающие координаты 134 139, 344
Зона Френеля 29, 193, 328, 337
Изменение скоростей 186, 228, 241, 316, 320, 338
Импеданс 58, 289, 296, 297, 387
Импульсная характеристика экстраполяции 34, 49, 119, 239,
Интервальная скорость 331, 379, 388
Интерполяция 201, 205, 207, 285
Искажения пространственной дискретизации 40, 49, 239, 266, 396
Кинематические поправки за наклон границ 216 227
Конечные разности 101 113, 140 145
Концепции построения изображений 59, 183, 248, 320, 339, 354
Концепция изучающих границ 12 22, 63, 182, 235, 395
Коэффициент отражения 22, 156, 234, 280, 336, 358, 367, 383
Кратное отражение 55, 245, 366 370, 371, 375, 381
Киносейсмика 10, 156, 189, 260, 398
Латеральные изменения скоростей 22, 49, 66, 73, 89, 106, 115, 123, 228
Линзовое уравнение 99, 102, 118, 371
Линейная кинематическая поправка 321, 327, 343, 350, 376
Матрица 31, 76, 107, 112, 150, 179, 201, 240, 316
Медленность 70, 259, 321
Метод Крэнка Никольсона 107, 108, 114, 124, 134, 148, 295, 316
стационарной фазы 264
фазового сдвига 42, 97, 283, 289
Миграционное преобразование 16 18, 43, 44, 120, 143, 256, 392
Мигрированный временный разрез 19, 237
Минимальная фаза 90, 290, 300
Направленное суммирование 163, 196, 326, 334, 338
Нормальные кинематические поправки 153, 191, 201, 204, 226, 392
Обменные поперечные волны 53 55, 151
Оператор интегрирования 295, 307
Оптимизация 207 208, 308, 338, 398
Отраженные головные волны 213, 358
Параболическое волновое уравнение 66, 93, 94
Параксиальное уравнение 66 69, 183
Параметр Снеллиуса 71, 184, 322, 353
Переменная запаздывающего времени 96, 135, 310, 330
Периодические искажения 50, 88, 112, 260, 283, 302
Пирамида Хеопса 170 172, 224
Поверхностная волна-помеха 63, 203, 246, 322, 339
Поглощающие боковые границы 115, 117, 276 282
Полевая сейсмограмма 152, 154, 178, 193, 204, 209, 359
Полное разделение уравнений 120 130
Поперечная волна 53
Продолжение в нижнее полупространство 177, 197, 206, 211, 304, 311, 330, 390
Постоянная добротности среды 48, 57, 193, 247, 256, 305
Преобразование Лежандра 328
Принцип взаимности 179, 387
Пропущенные трассы 197, 207
Радиальная трасса 224, 322, 382
Раздельный фильтр Бэкуса 383 385
Разрешенность 27, 54, 214, 227, 250, 332, 363
Рацфор (рациональный ФОРТРАН) 79
Скалярное волновое уравнение 27, 39, 66, 73
Скоростной анализ 18, 226, 330 334, 396
Скоростной спектр 203, 209, 357
Статистическая задача 206, 242, 375
Суммирование ОГТ 166, 189, 198, 254, 338, 370
Суперпозиция полуокружностей 36, 49
Текстура 156, 346, 398
Томография 158 165, 335
Точность миграционного преобразования 97, 256 257, 307 315
Транспонирование 76, 210
Трасса Снеллиуса 325, 393
Трехдиагональная матрица 108, 112, 150, 240, 318
Уравнение с двумя квадратными корнями (ДКК) 177 179, 228, 356
теплопроводности 103, 121, 146, 274
Шрёдингера 94, 103
Устойчивость 145, 147, 281, 290, 315
Фазовая скорость 70, 259 264
Фильтр кажущихся скоростей 130, 131, 253, 383
Фурье-преобразование 27, 28, 31, 33, 74, 77 80, 84, 137, 354
Частично-кратные отражения 365, 373
Эллипс 37, 176, 219, 331
Яркое пятно 158, 233

# Содержание


Предисловие к русскому изданию ..... 5

Введение к русскому изданию ..... 8

**Глава 1. Введение в сейсмическое изображение** ..... 12

1.1. Излучающие отражающие границы ..... 12
1.2. Волновая экстраполяция как двухмерный фильтр ..... 25
1.3. Четыре метода миграции при больших удалениях ..... 35
1.4. Физические основы ..... 51
1.5. Параксиальное волновое уравнение ..... 66
1.6. Искусство двухмерных преобразований Фурье ..... 74
1.7. Примеры программ ..... 79

**Глава 2. Почему именно пространство и время?** ..... 87

2.1. Уравнения волновой экстраполяции ..... 92
2.2. Метод конечных разностей ..... 101
2.3. Монохроматические волновые программы ..... 113
2.4. Расщепление и полное разделение ..... 120
2.5. Рекурсивные фильтры кажущихся скоростей ..... 130
2.6. Запаздывающие координаты ..... 134
2.7. Вычисление конечных разностей в пространстве $(t, x, z)$ ..... 140
2.8. Введение в проблему устойчивости ..... 145

**Глава 3. Еще одно измерение — удаление от источника** ..... 150

3.1. Поглощение и немного о фокусировке ..... 158
3.2. Введение в кажущуюся скорость ..... 165
3.3. Опускание наблюдений (продолжение поля вниз) с помощью уравнения с двумя квадратными корнями ..... 177
3.4. Смысл уравнения с двумя квадратными корнями ..... 188
3.5. Суммирование ОГТ и скоростной анализ ..... 198
3.6. Миграция с определением скоростей ..... 215
3.7. Латеральные изменения скоростей ..... 228

**Глава 4. Практическая экстраполяция волновых полей** ..... 239

4.1. Физические и косметические аспекты волновой экстраполяции ..... 242
4.2. Анизотропная дисперсия и точность волновой миграции ..... 256
4.3. Частотная дисперсия и точность волновой миграции ..... 266
4.4. Поглощающие боковые границы ..... 276
4.5. Регулировка миграции в частотной области ..... 282
4.6. Импеданс ..... 289
4.7. Точность с точки зрения обработчика ..... 307
4.8. Придание устойчивости экстраполяции ..... 315

**Глава 5. Некоторые новые направления исследований** ..... 320

5.1. Радиальные трассы ..... 322
5.2. Направленное суммирование ..... 326
5.3. Волны Снеллиуса и косоугольные координаты ..... 338
5.4. Определение интервальных скоростей посредством ввода линейных кинематических поправок ..... 347
5.5. Современные способы борьбы с кратными отражениями ..... 357
5.6. Перспективные способы борьбы с кратными отражениями ..... 375
5.7. Изображение полевых сейсмограмм ..... 389
5.8. Прогноз на следующее десятилетие ..... 396

Список литературы ..... 400

Предметный указатель ..... 406

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ (ПРАКТИЧЕСКОЕ) ИЗДАНИЕ

Д. Ф. Клаербоут

# СЕЙСМИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЗЕМНЫХ НЕДР

Заведующий редакцией *Е. Г. Першина*
Редактор издательства *А. И. Вороновская*
Переплет художника *В. П. Христинина*
Художественный редактор *В. В. Шутько*
Технический редактор *Е. С. Сычева*
Корректор *Г. Г. Большова*

ИБ № 7837

Сдано в набор 22.02.89. Подписано в печать 23.06.89. Формат $60 \times 88^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 2. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл.-печ. л. 24,99. Усл. кр.-отт. 24,99. Уч.-изд. л. 28,00. Тираж 2570 экз. Заказ № 955 2036 3. Цена 2 р. 20 к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 125047, Москва, пл. Белорусского вокзала, 3

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28.